

# 浅谈刚体转动

水镜

摘要

本文系统地介绍了刚体转动的基本理论，从二维旋转过渡到三维旋转，详细讨论了向量、矩阵、叉乘、旋转矩阵的数学形式，以及刚体在无外力矩条件下的自由转动特性。通过推导角速度与线速度的关系，建立转动惯量张量的定义与计算方法，进一步引出角动量守恒与刚体能量表达式。最后，文章简要介绍了欧拉角及其在描述刚体旋转中的应用，并通过数值模拟与可视化图像展示了长方体在惯性系中的自由转动轨迹，形象地体现了理论与实际之间的联系。

**关键词：**刚体转动；转动惯量；角速度；旋转矩阵；欧拉角

## 1 前言

- **Rotation** or **rotational** / **rotary motion** is the circular movement of an object around a central line, known as an **axis of rotation**.

旋转是绕一固定轴的圆形运动。显然性质：旋转物体上的任意一点与转轴在旋转过程中保持不变

- In physics, a **rigid body**, also known as a **rigid object**, is a solid body in which deformation is zero or negligible, when a deforming pressure or deforming force is applied on it.

刚体在各种情况下无形变，即任意两点上的距离恒定。

大家肯定对于转动都非常熟悉了，我们现在考虑如何用数学量化它。

## 2 数学部分

### 2.1 向量（矢量）和矩阵的表示

向量（矢量）用粗体小写字母表示或上有向右箭头的字母，如  $\mathbf{v}, \mathbf{a}, \vec{x}, \vec{c}$ ，代表列向量。若  $\vec{x}$  是  $n$  维向量，则  $\vec{x}$  的分量可以表示为

$$[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

前面的表示称为行向量，后面的为列向量，在表示向量的时候不区分，其中  $x_i \in \mathbb{R}$ ，而包含所有  $n$  维向量的集合则是  $\mathbb{R}^n$ 。

矩阵的表示：一个  $m \times n$  的矩阵写作

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

其中  $a_{ij}$  称为第  $i$  行第  $j$  列的元素，可以用  $(\mathbf{A})_{ij}$  表示，矩阵本身一般用大写字母表示。列矢量可以理解成  $m \times 1$  的矩阵。

矩阵转置：对于一矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，其转置  $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，其中的各个元素满足  $(\mathbf{A}^T)_{ij} = (\mathbf{A})_{ji}$ 。

矩阵加法：对于矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，则二者的和  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  满足

$$(\mathbf{C})_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{B})_{ij}$$

## 2.2 矩阵乘以常数

设矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，常数  $c \in \mathbb{R}$ ，则：

$$c\mathbf{A} = [ca_{ij}]$$

即所有元素数值乘以  $c$ 。

## 2.3 矩阵与矩阵相乘

设  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ， $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ，则乘积  $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ，其第  $(i, j)$  项为：

$$(\mathbf{C})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

矩阵乘法满足结合律但不满足交换律，即  $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ ，但通常  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ 。

可以发现对于  $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，

$$(\mathbf{1}_n)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

有很好的乘法性质  $\mathbf{1}_m \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{1}_n$ 。我们称  $\mathbf{1}_n$  为单位矩阵（一般记作  $\mathbf{I}$ ）。

可以发现对于有一些  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  矩阵，有矩阵可以满足

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}_m$$

称  $\mathbf{A}^{-1}$  为  $\mathbf{A}$  的逆矩阵。

## 2.4 矩阵与向量相乘

设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则乘积  $\mathbf{A}\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ ，其第  $i$  个分量为：

$$(\mathbf{A}\vec{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

可以发现若将向量看作单列矩阵则矩阵与列向量相乘和矩阵与矩阵相乘并无区别。

## 2.5 向量点乘

设  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ，其点乘

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \vec{a}^T \vec{b}$$

## 2.6 向量叉乘的矩阵形式

对于三维向量  $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$  和  $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]^T$ ，其叉乘积为

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \end{bmatrix}$$

可以定义  $\vec{a}$  对应的叉乘矩阵为：

$$[\vec{a} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

有： $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \times] \vec{b}$ 。

我们显然有  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ 。

我们还可以发现下面两个等式：

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \\ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

## 3 二维转动

对于一个从原点出发的向量  $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  若逆时针转动一个角度  $\theta$ ，则变为

$$\vec{r}'(\theta) = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

我们可以将

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

定义为转动矩阵，旋转的形式也将变得非常简单： $\vec{r}' = \mathbf{R}(\theta) \vec{r}$ 。

下面来考虑角速度和角加速度：已知角速度和角加速度的定义为  $\omega = \frac{d\theta}{dt}, \beta = \frac{d\omega}{dt}$ ，可以得出角速度和线速度的关系

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta\theta=\omega\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}'(\theta) - \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\omega\Delta t) - \mathbf{1}_2}{\Delta t} \vec{r} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{r} \quad (1)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{r} \right) = \frac{d\omega}{dt} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{r} = \beta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{r} \quad (2)$$

## 4 三维转动

先分析自由度：自由度从 1 个变成了 3 个，因为  $C_2^2 \rightarrow C_3^2$ 。另外，三维中的旋转不满足交换律，即先绕  $x$  轴转再绕  $y$  轴转和先绕  $y$  轴转再绕  $x$  轴转会得到两个完全不同的结果。

类似于二维转动，我们考虑写出分别沿  $x, y, z$  轴的转动矩阵

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于矩阵乘法没有交换律，可以证明在上述例子中，即一般情况下

$$\mathbf{R}_x(\theta_1) \mathbf{R}_y(\theta_2) \neq \mathbf{R}_y(\theta_2) \mathbf{R}_x(\theta_1)$$

对于更普遍的任意轴转动，用单位向量  $\hat{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$  表示转轴， $\theta$  表示转角，可以采用一些变换操作。更具体的，可以先将  $x$  轴变换至  $\vec{n}$  方向， $y$  和  $z$  分别与  $\vec{n}$  垂直，进行  $\mathbf{R}_x(\theta)$  变换，并再做前面的逆变换。数学上可以有正交基底

$$\{\hat{e}_1 = \hat{n}, \hat{u}, \hat{v}\}$$

而前面描述的首变换和末变换分别为

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T = [\hat{e}_1 \quad \hat{u} \quad \hat{v}]^T \quad \mathbf{P} = [\hat{e}_1 \quad \hat{u} \quad \hat{v}]$$

经过组合可得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\hat{n}, \theta) &= \mathbf{P} \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{P}^T \\ &= \hat{e}_1 \hat{e}_1^T + \cos\theta (\hat{u} \hat{u}^T + \hat{v} \hat{v}^T) + \sin\theta (\hat{v} \hat{u}^T - \hat{u} \hat{v}^T) \\ &= \cos\theta \mathbf{1}_3 + (1 - \cos\theta) \hat{n} \hat{n}^T + \sin\theta [\hat{n} \times] \\ &= \cos\theta \mathbf{1}_3 + (1 - \cos\theta) [\hat{n} \times]^2 + \sin\theta [\hat{n} \times] \end{aligned}$$

其中，可以证明  $\hat{u} \hat{u}^T + \hat{v} \hat{v}^T = \mathbf{1}_3 - \hat{n} \hat{n}^T$ ， $\hat{n} \hat{n}^T = [\hat{n} \times]^2$  和

$$\hat{v} \hat{u}^T - \hat{u} \hat{v}^T = [\hat{n} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$$

这就是旋转矩阵的 Rodrigues 形式。

重复二维中计算角速度和线速度的过程可得

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta\theta=\omega\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}'(\theta) - \vec{r}}{\Delta t} = \omega \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\hat{n}, \Delta\theta) - \mathbf{1}_3}{\Delta\theta} \vec{r} \\
&= \omega \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{(\cos \Delta\theta - 1) \mathbf{1}_3 + (1 - \cos \Delta\theta) [\hat{n} \times]^2 + \sin \Delta\theta [\hat{n} \times]}{\Delta\theta} \\
&= \omega \frac{d}{d\theta} \left( (\cos \theta - 1) \mathbf{1}_3 + (1 - \cos \theta) [\hat{n} \times]^2 + \sin \theta [\hat{n} \times] \right) \vec{r} \\
&= \omega \left( \sin \theta \mathbf{1}_3 + \sin \theta [\hat{n} \times]^2 + \cos \theta [\hat{n} \times] \right)_{\theta=0} \vec{r} = \omega [\hat{n} \times] \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega [\hat{n} \times] \vec{r}) = \frac{d\omega}{dt} [\hat{n} \times] \vec{r} = \beta [\hat{n} \times] \vec{r} = \vec{\beta} \times \vec{r}
\end{aligned}$$

其中  $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$ ,  $\vec{\beta} = \beta \hat{n}$ , 分别称为角速度 (矢量) 和角加速度 (矢量)。可以简单的证明角速度矢量具有可加性:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{R}_1(\hat{n}_1, \theta_1) \mathbf{R}_2(\hat{n}_2, \theta_2)] = \omega_1 [\hat{n}_1 \times] \mathbf{R}_1(\hat{n}_1, 0) + \omega_2 \mathbf{R}_2(\hat{n}_2, 0) [\hat{n}_2 \times] = [(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times]$$

## 5 角动量、力矩、转动惯量 (张量)

**定理 5.1.** 诺特定理 (Noether's Theorem): 每一个物理系统的连续对称性, 对应着一个守恒量。

动量守恒来源于空间的平移对称性, 能量守恒来源于时间的平移对称性, 角动量守恒则来源于空间的旋转对称性。这里我们不讨论如何通过变分由这些对称性和拉格朗日量推导守恒量的形式, 而是直接给出角动量的形式。

对于质点系统:  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ , 总角动量有形式  $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ 。下面将开始讨论刚体 / 刚性的系统, 注意在下面的讨论中两两质点 / 质量元的距离都在运动过程中保持不变。

对于刚性的质点系统在旋转时  $\vec{p} = m\vec{v} = m(\vec{\omega} \times \vec{r})$ , 总角动量有变形

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\
&= \sum_i [m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})] \\
&= \sum_i m_i (r_i^2 \mathbf{1}_3 - \vec{r}_i \vec{r}_i^T) \vec{\omega},
\end{aligned}$$

因此, 我们定义矩阵  $\mathbf{I} = \sum_i m_i (r_i^2 \mathbf{1}_3 - \vec{r}_i \vec{r}_i^T)$  为转动惯量矩阵 (张量), 满足  $\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega}$ 。

这个系统的能量也可以进行变形:

$$\begin{aligned}
E &= \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{r}_i \cdot [(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \times \vec{\omega}] \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i [\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2] \\
&= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I} \vec{\omega}.
\end{aligned}$$

对于连续系统有类似的  $d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p}$ ,  $\vec{L} = \int_V d\vec{L}$ ,  $\mathbf{I} = \int_V dm (r^2 \mathbf{1}_3 - \vec{r}\vec{r}^T)$ ,  $\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$ ,  $E = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \mathbf{I} \vec{\omega}$ 。(后续将只讨论离散情况, 使用代换  $m_i \rightarrow dm$ ,  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}$ ,  $\sum_i \rightarrow \int_V$ )

下面我们将考虑转动惯量张量的一些性质: 对于质心系  $O'$  (原点在系统质心, 有约束  $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$ ), 可以将上面  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$ , 可以发现  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + (R^2 \sum_i m_i) \mathbf{1}_3$ , 即角动量有柯尼希定理。

$$\mathbf{I} = \sum_i m_i \left( r_i^2 \mathbf{1}_3 - \vec{r}_i \vec{r}_i^T \right) = \begin{bmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i z_i x_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

当系统对称性较高时, 非对角元素消失, 这种情况下对于绕  $x$  轴的转动即可用  $I_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$  求解。

可以证明在有外力矩  $\vec{M}$  的情况下满足  $\vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{L}$ 。

## 6 转动参考系的矢量变换

对于两个参考系,  $S - XYZ$  和  $S' - X'Y'Z'$ , 其中  $S'$  绕  $S$  系原点以角速度  $\omega$  转动。对于一个矢量

$$\vec{A} = A_x \hat{e}_x + A_y \hat{e}_y + A_z \hat{e}_z = A'_x \hat{e}_{x'} + A'_y \hat{e}_{y'} + A'_z \hat{e}_{z'}$$

我们知道单位矢量的导数可以用

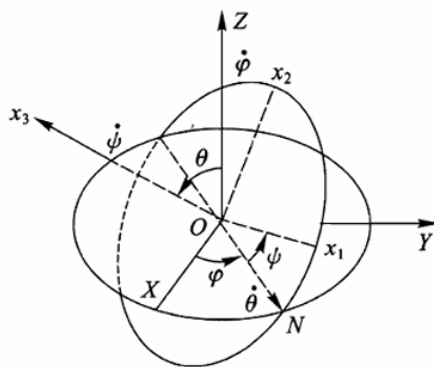
$$\frac{d}{dt} \hat{e}_{x'} = \omega \times \hat{e}_{y'}, \quad \frac{d}{dt} \hat{e}_{y'} = \omega \times \hat{e}_{z'}, \quad \frac{d}{dt} \hat{e}_{z'} = \omega \times \hat{e}_{x'}$$

而  $\vec{A}$  对时间的导数也可以得出

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA'_x}{dt} \hat{e}_{x'} + \frac{dA'_y}{dt} \hat{e}_{y'} + \frac{dA'_z}{dt} \hat{e}_{z'} + \vec{\omega} \times \vec{A} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

## 7 欧拉角与欧拉方程

在实际解决问题的过程中, 我们会发现刚体的转动会导致转动惯量张量的各个分量发生改变, 导致较为复杂的计算。为了简化计算, 将在空间中惯性坐标系写作  $XYZ$ , 固连于刚体的坐标系写作  $x_1 x_2 x_3$  以便于区分。



如图,  $ON$  为  $x_1x_2$  与  $XY$  的交线,  $\varphi$  为  $ON$  与  $X$  的夹角,  $\psi$  为  $ON$  与  $x_1$  的夹角,  $\theta$  为  $Z$  与  $z_3$  的夹角,  $x_1x_2x_3$  与  $XYZ$  的关系可以完全由  $(\varphi, \psi, \theta)$  描述。角速度则可以其中的几何关系描述:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

这套描述方式称为欧拉角。欧拉角在机器人方向有着许多应用。

## 8 例题：长方体自由转动问题

一个质量均匀分布为  $m$  的长方体, 其边长为  $a, b, c$ , 考虑其在初始时刻绕其空间对角线以角速度  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \hat{n}$  的自由转动 (无外力和外力矩作用)。

*Hint:* 有角动量守恒

$$\vec{L} = \mathbf{I}(t)\omega(t) = \mathbf{I}\vec{\omega}_0$$

和能量守恒

$$E = \frac{1}{2}\vec{\omega}(t)^T \mathbf{I}(t) \vec{\omega}(t) = \frac{1}{2}\vec{\omega}_0^T \mathbf{I}_0 \vec{\omega}_0$$

可以参考 / 使用前面各节的方法和结论。

### 8.1 解 1

我们可以让  $\mathbf{I}$  先以  $\varphi, \psi, \theta$  为参数, 直接确定其姿态并积分得到长方体对地面的转动惯量张量。最后在地面系中联立上面两个 (算分量的话实际上是四个) 式子并解出角速度, 积分得其姿态 (实际上并不推荐这种方法)。

### 8.2 解 2

对于解 1 的改进, 我们发现正方体还是存在很强的对称性, 可以辨认出其主轴为通过相对两面正中心的直线, 可以先利用第五节中介绍的转动惯量张量计算方法计算出主轴张量为

$$I_{11} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$

$$I_{22} = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$$

$$I_{33} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

其中  $x_1, x_2, x_3$  分别对应平行于  $a, b, c$  的方向。然后用第三节中变换基底的方法计算出变换矩阵为

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}(\hat{e}_3, \psi) \mathbf{R}(\hat{e}_{ON}, \theta) \mathbf{R}(\hat{e}_{OZ}, \varphi)$$

并计算出相对于地面的惯量张量为

$$\mathbf{I} = \mathbf{P} \mathbf{I}_d \mathbf{P}^T$$

$$\text{其中 } \mathbf{I}_d = \begin{bmatrix} I_{11} & & \\ & I_{22} & \\ & & I_{33} \end{bmatrix}, \text{ 后续计算同解 1。}$$

### 8.3 解 3

发现角速度也有变换

$$\vec{\omega}_{123} = \mathbf{P}^T \vec{\omega}_{xyz}$$

这里用  $\vec{\omega}_{xyz}$  和  $\vec{\omega}_{123}$  区分  $XYZ$  和  $x_1x_2x_3$  系下的各个分量，实际上  $\vec{\omega}_{xyz}$  和  $\vec{\omega}_{123}$  表示了同一个物理量，实际相等，只是因为基底不同导致分量形式不同。经过这样基底的变换，有

$$\begin{aligned} 2E &= \vec{\omega}_{xyz}^T \mathbf{I} \vec{\omega}_{xyz} = \vec{\omega}_{xyz}^T \mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{I} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \vec{\omega}_{xyz} = \vec{\omega}_{123}^T \mathbf{I}_d \vec{\omega}_{123} \\ &= I_{11} \omega_1^2 + I_{22} \omega_2^2 + I_{33} \omega_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mathbf{I} \vec{\omega}_{xyz} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T \mathbf{I} \mathbf{P} \mathbf{P}^T \vec{\omega}_{xyz} = \mathbf{P} \mathbf{I}_d \vec{\omega}_{123} \\ \Rightarrow L^2 &= \vec{L} \cdot \vec{L} = \vec{\omega}_{123}^T \mathbf{I}_d^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{I}_d \vec{\omega}_{123} = \vec{\omega}_{123}^T \mathbf{I}_d^T \mathbf{I}_d \vec{\omega}_{123} \\ &= I_{11}^2 \omega_1^2 + I_{22}^2 \omega_2^2 + I_{33}^2 \omega_3^2 \end{aligned}$$

可以解得  $\omega_1, \omega_3$  和  $\omega_2$  的关系：

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{(2E - I_{22} \omega_2^2) I_{33} - (L^2 - I_{22}^2 \omega_2^2)}{I_{11} (I_{33} - I_{11})} \\ \omega_3^2 &= \frac{(2E - I_{22} \omega_2^2) I_{11} - (L^2 - I_{22}^2 \omega_2^2)}{I_{11} (I_{11} - I_{33})} \end{aligned}$$

并将第六节中所提到的公式中  $\vec{A}$  换成  $\vec{L}$ ：

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{I}_d \frac{d\vec{\omega}_{123}}{dt} + \vec{\omega}_{123} \times \mathbf{I}_d \vec{\omega}_{123} = 0$$

其中  $x_2$  的分量为

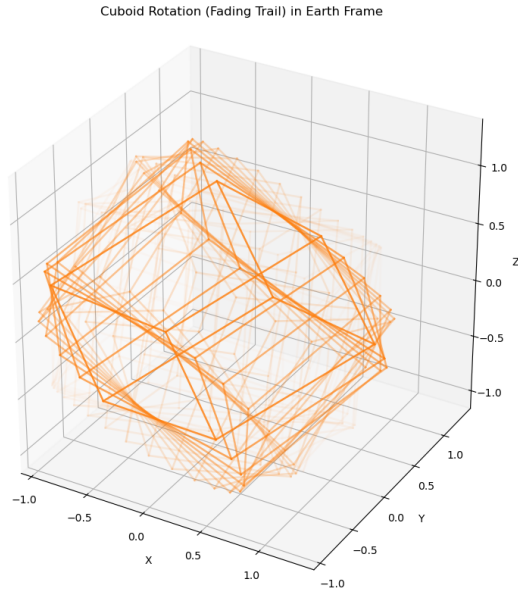
$$I_{22} \frac{d\omega_2}{dt} + (I_{11} - I_{33}) \omega_3 \omega_1 = 0$$

最终得到一个  $\omega_2$  对  $t$  的微分式

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_2}{dt} &= -\frac{I_{11} - I_{33}}{I_{22}} \omega_1 \omega_3 \\ &= \frac{1}{I_{22} \sqrt{I_{11} I_{33}}} \sqrt{-(2E - I_{22} \omega_2^2) I_{33} - (L^2 - I_{22}^2 \omega_2^2)} [(2E - I_{22} \omega_2^2) I_{11} - (L^2 - I_{22}^2 \omega_2^2)] \end{aligned}$$

后续可通过椭圆积分或数值求解（下面是用 python 跑出来的一个 demo，代码参见附录 A，注意代码不是用的这个解法）。





## 参考文献

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mechanics*. 3rd. Vol. 1. Course of Theoretical Physics. Translated from the Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell. Pergamon Press, 1976.
- [2] Wikipedia contributors. *Rotation matrix* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Accessed: 2025-06-26, 2024. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation\\_matrix](https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix).

## A 附录

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  a, b, c = 2.0, 1.5, 1.0
5  m = 1.0
6
7  I1 = (m / 12) * (b**2 + c**2)
8  I2 = (m / 12) * (c**2 + a**2)
9  I3 = (m / 12) * (a**2 + b**2)
10 I = np.array([I1, I2, I3])
11
12 omega0 = np.array([1, 1, 1]) / np.sqrt(3)
13
14 def euler_eqs(t, omega):
15     domega = np.zeros(3)

```

```

16     domega[0] = ((I2 - I3) / I1) * omega[1] * omega[2]
17     domega[1] = ((I3 - I1) / I2) * omega[2] * omega[0]
18     domega[2] = ((I1 - I2) / I3) * omega[0] * omega[1]
19     return domega
20
21 from scipy.integrate import solve_ivp
22
23 t_span = (0, 5)
24 t_eval = np.linspace(*t_span, 20) # fewer frames
25 sol = solve_ivp(euler_eqs, t_span, omega0, t_eval=t_eval)
26
27 def skew(omega):
28     return np.array([[0, -omega[2], omega[1]],
29                     [omega[2], 0, -omega[0]],
30                     [-omega[1], omega[0], 0]])
31
32 def dRdt(t, R_flat):
33     omega_t = np.array([np.interp(t, sol.t, sol.y[i]) for i in range(3)])
34     R = R_flat.reshape(3,3)
35     return (R @ skew(omega_t)).flatten()
36
37 R0 = np.eye(3).flatten()
38 sol_R = solve_ivp(dRdt, t_span, R0, t_eval=t_eval)
39
40 x, y, z = a/2, b/2, c/2
41 vertices_body = np.array([
42     [ x,  y,  z],
43     [ x,  y, -z],
44     [ x, -y,  z],
45     [ x, -y, -z],
46     [-x,  y,  z],
47     [-x,  y, -z],
48     [-x, -y,  z],
49     [-x, -y, -z],
50 ])
51 edges = [
52     (0,1),(0,2),(0,4),
53     (1,3),(1,5),

```

```

54     (2,3),(2,6),
55     (3,7),
56     (4,5),(4,6),
57     (5,7),
58     (6,7)
59 ]
60
61 fig = plt.figure(figsize=(8,8))
62 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
63
64 lim = max(a, b, c)
65 ax.set_xlim(-lim, lim)
66 ax.set_ylim(-lim, lim)
67 ax.set_zlim(-lim, lim)
68 ax.set_box_aspect([1,1,1])
69 ax.set_title("Cuboid Rotation (Fading Trail) in Earth Frame")
70 ax.set_xlabel("X")
71 ax.set_ylabel("Y")
72 ax.set_zlabel("Z")
73
74 for i, t in enumerate(t_eval):
75     fade_factor = np.exp((i - len(t_eval)) / 5.0)
76     alpha = min(1.0, fade_factor)
77     R = sol_R.y[:, i].reshape(3,3)
78     verts = (R @ vertices_body.T).T
79     for e in edges:
80         xline = [verts[e[0], 0], verts[e[1], 0]]
81         yline = [verts[e[0], 1], verts[e[1], 1]]
82         zline = [verts[e[0], 2], verts[e[1], 2]]
83         ax.plot(xline, yline, zline, color='C1', alpha=alpha, linewidth=1.8)
84
85 plt.tight_layout()
86 plt.show()

```