快速排序算法模板 —— 模板题 AcWing 785. 快速排序

void quick\_sort(int q[], int l, int r)

{

if (l >= r) return;

int i = l - 1, j = r + 1, x = q[l + r >> 1];

while (i < j)

{

do i ++ ; while (q[i] < x);

do j -- ; while (q[j] > x);

if (i < j) swap(q[i], q[j]);

}

quick\_sort(q, l, j), quick\_sort(q, j + 1, r);

}

归并排序算法模板 —— 模板题 AcWing 787. 归并排序

void merge\_sort(int q[], int l, int r)

{

if (l >= r) return;

int mid = l + r >> 1;

merge\_sort(q, l, mid);

merge\_sort(q, mid + 1, r);

int k = 0, i = l, j = mid + 1;

while (i <= mid && j <= r)

if (q[i] <= q[j]) tmp[k ++ ] = q[i ++ ];

else tmp[k ++ ] = q[j ++ ];

while (i <= mid) tmp[k ++ ] = q[i ++ ];

while (j <= r) tmp[k ++ ] = q[j ++ ];

for (i = l, j = 0; i <= r; i ++, j ++ ) q[i] = tmp[j];

}

整数二分算法模板 —— 模板题 AcWing 789. 数的范围

bool check(int x) {/\* ... \*/} // 检查x是否满足某种性质

// 区间[l, r]被划分成[l, mid]和[mid + 1, r]时使用：

int bsearch\_1(int l, int r)

{

while (l < r)

{

int mid = l + r >> 1;

if (check(mid)) r = mid; // check()判断mid是否满足性质

else l = mid + 1;

}

return l;

}

// 区间[l, r]被划分成[l, mid - 1]和[mid, r]时使用：

int bsearch\_2(int l, int r)

{

while (l < r)

{

int mid = l + r + 1 >> 1;

if (check(mid)) l = mid;

else r = mid - 1;

}

return l;

}

浮点数二分算法模板 —— 模板题 AcWing 790. 数的三次方根

bool check(double x) {/\* ... \*/} // 检查x是否满足某种性质

double bsearch\_3(double l, double r)

{

const double eps = 1e-6; // eps 表示精度，取决于题目对精度的要求

while (r - l > eps)

{

double mid = (l + r) / 2;

if (check(mid)) r = mid;

else l = mid;

}

return l;

}

高精度加法 —— 模板题 AcWing 791. 高精度加法

// C = A + B, A >= 0, B >= 0

vector<int> add(vector<int> &A, vector<int> &B)

{

if (A.size() < B.size()) return add(B, A);

vector<int> C;

int t = 0;

for (int i = 0; i < A.size(); i ++ )

{

t += A[i];

if (i < B.size()) t += B[i];

C.push\_back(t % 10);

t /= 10;

}

if (t) C.push\_back(t);

return C;

}

高精度减法 —— 模板题 AcWing 792. 高精度减法

// C = A - B, 满足A >= B, A >= 0, B >= 0

vector<int> sub(vector<int> &A, vector<int> &B)

{

vector<int> C;

for (int i = 0, t = 0; i < A.size(); i ++ )

{

t = A[i] - t;

if (i < B.size()) t -= B[i];

C.push\_back((t + 10) % 10);

if (t < 0) t = 1;

else t = 0;

}

while (C.size() > 1 && C.back() == 0) C.pop\_back();

return C;

}

高精度乘低精度 —— 模板题 AcWing 793. 高精度乘法

// C = A \* b, A >= 0, b >= 0

vector<int> mul(vector<int> &A, int b)

{

vector<int> C;

int t = 0;

for (int i = 0; i < A.size() || t; i ++ )

{

if (i < A.size()) t += A[i] \* b;

C.push\_back(t % 10);

t /= 10;

}

while (C.size() > 1 && C.back() == 0) C.pop\_back();

return C;

}

高精度除以低精度 —— 模板题 AcWing 794. 高精度除法

// A / b = C ... r, A >= 0, b > 0

vector<int> div(vector<int> &A, int b, int &r)

{

vector<int> C;

r = 0;

for (int i = A.size() - 1; i >= 0; i -- )

{

r = r \* 10 + A[i];

C.push\_back(r / b);

r %= b;

}

reverse(C.begin(), C.end());

while (C.size() > 1 && C.back() == 0) C.pop\_back();

return C;

}

一维前缀和 —— 模板题 AcWing 795. 前缀和

S[i] = a[1] + a[2] + ... a[i]

a[l] + ... + a[r] = S[r] - S[l - 1]

二维前缀和 —— 模板题 AcWing 796. 子矩阵的和

S[i, j] = 第i行j列格子左上部分所有元素的和

以(x1, y1)为左上角，(x2, y2)为右下角的子矩阵的和为：

S[x2, y2] - S[x1 - 1, y2] - S[x2, y1 - 1] + S[x1 - 1, y1 - 1]

一维差分 —— 模板题 AcWing 797. 差分

给区间[l, r]中的每个数加上c：B[l] += c, B[r + 1] -= c

二维差分 —— 模板题 AcWing 798. 差分矩阵

给以(x1, y1)为左上角，(x2, y2)为右下角的子矩阵中的所有元素加上c：

S[x1, y1] += c, S[x2 + 1, y1] -= c, S[x1, y2 + 1] -= c, S[x2 + 1, y2 + 1] += c

位运算 —— 模板题 AcWing 801. 二进制中1的个数

求n的第k位数字: n >> k & 1

返回n的最后一位1：lowbit(n) = n & -n

双指针算法 —— 模板题 AcWIng 799. 最长连续不重复子序列, AcWing 800. 数组元素的目标和

for (int i = 0, j = 0; i < n; i ++ )

{

while (j < i && check(i, j)) j ++ ;

// 具体问题的逻辑

}

常见问题分类：

(1) 对于一个序列，用两个指针维护一段区间

(2) 对于两个序列，维护某种次序，比如归并排序中合并两个有序序列的操作

离散化 —— 模板题 AcWing 802. 区间和

vector<int> alls; // 存储所有待离散化的值

sort(alls.begin(), alls.end()); // 将所有值排序

alls.erase(unique(alls.begin(), alls.end()), alls.end()); // 去掉重复元素

// 二分求出x对应的离散化的值

int find(int x) // 找到第一个大于等于x的位置

{

int l = 0, r = alls.size() - 1;

while (l < r)

{

int mid = l + r >> 1;

if (alls[mid] >= x) r = mid;

else l = mid + 1;

}

return r + 1; // 映射到1, 2, ...n

}

区间合并 —— 模板题 AcWing 803. 区间合并

// 将所有存在交集的区间合并

void merge(vector<PII> &segs)

{

vector<PII> res;

sort(segs.begin(), segs.end());

int st = -2e9, ed = -2e9;

for (auto seg : segs)

if (ed < seg.first)

{

if (st != -2e9) res.push\_back({st, ed});

st = seg.first, ed = seg.second;

}

else ed = max(ed, seg.second);

if (st != -2e9) res.push\_back({st, ed});

segs = res;

}

单链表 —— 模板题 AcWing 826. 单链表

// head存储链表头，e[]存储节点的值，ne[]存储节点的next指针，idx表示当前用到了哪个节点

int head, e[N], ne[N], idx;

// 初始化

void init()

{

head = -1;

idx = 0;

}

// 在链表头插入一个数a

void insert(int a)

{

e[idx] = a, ne[idx] = head, head = idx ++ ;

}

// 将头结点删除，需要保证头结点存在

void remove()

{

head = ne[head];

}

双链表 —— 模板题 AcWing 827. 双链表

// e[]表示节点的值，l[]表示节点的左指针，r[]表示节点的右指针，idx表示当前用到了哪个节点

int e[N], l[N], r[N], idx;

// 初始化

void init()

{

//0是左端点，1是右端点

r[0] = 1, l[1] = 0;

idx = 2;

}

// 在节点a的右边插入一个数x

void insert(int a, int x)

{

e[idx] = x;

l[idx] = a, r[idx] = r[a];

l[r[a]] = idx, r[a] = idx ++ ;

}

// 删除节点a

void remove(int a)

{

l[r[a]] = l[a];

r[l[a]] = r[a];

}

栈 —— 模板题 AcWing 828. 模拟栈

// tt表示栈顶

int stk[N], tt = 0;

// 向栈顶插入一个数

stk[ ++ tt] = x;

// 从栈顶弹出一个数

tt -- ;

// 栈顶的值

stk[tt];

// 判断栈是否为空

if (tt > 0)

{

}

队列 —— 模板题 AcWing 829. 模拟队列

1. 普通队列：

// hh 表示队头，tt表示队尾

int q[N], hh = 0, tt = -1;

// 向队尾插入一个数

q[ ++ tt] = x;

// 从队头弹出一个数

hh ++ ;

// 队头的值

q[hh];

// 判断队列是否为空

if (hh <= tt)

{

}

2. 循环队列

// hh 表示队头，tt表示队尾的后一个位置

int q[N], hh = 0, tt = 0;

// 向队尾插入一个数

q[tt ++ ] = x;

if (tt == N) tt = 0;

// 从队头弹出一个数

hh ++ ;

if (hh == N) hh = 0;

// 队头的值

q[hh];

// 判断队列是否为空

if (hh != tt)

{

}

单调栈 —— 模板题 AcWing 830. 单调栈

常见模型：找出每个数左边离它最近的比它大/小的数

int tt = 0;

for (int i = 1; i <= n; i ++ )

{

while (tt && check(stk[tt], i)) tt -- ;

stk[ ++ tt] = i;

}

单调队列 —— 模板题 AcWing 154. 滑动窗口

常见模型：找出滑动窗口中的最大值/最小值

int hh = 0, tt = -1;

for (int i = 0; i < n; i ++ )

{

while (hh <= tt && check\_out(q[hh])) hh ++ ; // 判断队头是否滑出窗口

while (hh <= tt && check(q[tt], i)) tt -- ;

q[ ++ tt] = i;

}

KMP —— 模板题 AcWing 831. KMP字符串

// s[]是长文本，p[]是模式串，n是s的长度，m是p的长度

求模式串的Next数组：

for (int i = 2, j = 0; i <= m; i ++ )

{

while (j && p[i] != p[j + 1]) j = ne[j];

if (p[i] == p[j + 1]) j ++ ;

ne[i] = j;

}

// 匹配

for (int i = 1, j = 0; i <= n; i ++ )

{

while (j && s[i] != p[j + 1]) j = ne[j];

if (s[i] == p[j + 1]) j ++ ;

if (j == m)

{

j = ne[j];

// 匹配成功后的逻辑

}

}

Trie树 —— 模板题 AcWing 835. Trie字符串统计

int son[N][26], cnt[N], idx;

// 0号点既是根节点，又是空节点

// son[][]存储树中每个节点的子节点

// cnt[]存储以每个节点结尾的单词数量

// 插入一个字符串

void insert(char \*str)

{

int p = 0;

for (int i = 0; str[i]; i ++ )

{

int u = str[i] - 'a';

if (!son[p][u]) son[p][u] = ++ idx;

p = son[p][u];

}

cnt[p] ++ ;

}

// 查询字符串出现的次数

int query(char \*str)

{

int p = 0;

for (int i = 0; str[i]; i ++ )

{

int u = str[i] - 'a';

if (!son[p][u]) return 0;

p = son[p][u];

}

return cnt[p];

}

并查集 —— 模板题 AcWing 836. 合并集合, AcWing 837. 连通块中点的数量

(1)朴素并查集：

int p[N]; //存储每个点的祖宗节点

// 返回x的祖宗节点

int find(int x)

{

if (p[x] != x) p[x] = find(p[x]);

return p[x];

}

// 初始化，假定节点编号是1~n

for (int i = 1; i <= n; i ++ ) p[i] = i;

// 合并a和b所在的两个集合：

p[find(a)] = find(b);

(2)维护size的并查集：

int p[N], size[N];

//p[]存储每个点的祖宗节点, size[]只有祖宗节点的有意义，表示祖宗节点所在集合中的点的数量

// 返回x的祖宗节点

int find(int x)

{

if (p[x] != x) p[x] = find(p[x]);

return p[x];

}

// 初始化，假定节点编号是1~n

for (int i = 1; i <= n; i ++ )

{

p[i] = i;

size[i] = 1;

}

// 合并a和b所在的两个集合：

size[find(b)] += size[find(a)];

p[find(a)] = find(b);

(3)维护到祖宗节点距离的并查集：

int p[N], d[N];

//p[]存储每个点的祖宗节点, d[x]存储x到p[x]的距离

// 返回x的祖宗节点

int find(int x)

{

if (p[x] != x)

{

int u = find(p[x]);

d[x] += d[p[x]];

p[x] = u;

}

return p[x];

}

// 初始化，假定节点编号是1~n

for (int i = 1; i <= n; i ++ )

{

p[i] = i;

d[i] = 0;

}

// 合并a和b所在的两个集合：

p[find(a)] = find(b);

d[find(a)] = distance; // 根据具体问题，初始化find(a)的偏移量

堆 —— 模板题 AcWing 838. 堆排序, AcWing 839. 模拟堆

// h[N]存储堆中的值, h[1]是堆顶，x的左儿子是2x, 右儿子是2x + 1

// ph[k]存储第k个插入的点在堆中的位置

// hp[k]存储堆中下标是k的点是第几个插入的

int h[N], ph[N], hp[N], size;

// 交换两个点，及其映射关系

void heap\_swap(int a, int b)

{

swap(ph[hp[a]],ph[hp[b]]);

swap(hp[a], hp[b]);

swap(h[a], h[b]);

}

void down(int u)

{

int t = u;

if (u \* 2 <= size && h[u \* 2] < h[t]) t = u \* 2;

if (u \* 2 + 1 <= size && h[u \* 2 + 1] < h[t]) t = u \* 2 + 1;

if (u != t)

{

heap\_swap(u, t);

down(t);

}

}

void up(int u)

{

while (u / 2 && h[u] < h[u / 2])

{

heap\_swap(u, u / 2);

u >>= 1;

}

}

// O(n)建堆

for (int i = n / 2; i; i -- ) down(i);

一般哈希 —— 模板题 AcWing 840. 模拟散列表

(1) 拉链法

int h[N], e[N], ne[N], idx;

// 向哈希表中插入一个数

void insert(int x)

{

int k = (x % N + N) % N;

e[idx] = x;

ne[idx] = h[k];

h[k] = idx ++ ;

}

// 在哈希表中查询某个数是否存在

bool find(int x)

{

int k = (x % N + N) % N;

for (int i = h[k]; i != -1; i = ne[i])

if (e[i] == x)

return true;

return false;

}

(2) 开放寻址法

int h[N];

// 如果x在哈希表中，返回x的下标；如果x不在哈希表中，返回x应该插入的位置

int find(int x)

{

int t = (x % N + N) % N;

while (h[t] != null && h[t] != x)

{

t ++ ;

if (t == N) t = 0;

}

return t;

}

字符串哈希 —— 模板题 AcWing 841. 字符串哈希

核心思想：将字符串看成P进制数，P的经验值是131或13331，取这两个值的冲突概率低

小技巧：取模的数用2^64，这样直接用unsigned long long存储，溢出的结果就是取模的结果

typedef unsigned long long ULL;

ULL h[N], p[N]; // h[k]存储字符串前k个字母的哈希值, p[k]存储 P^k mod 2^64

// 初始化

p[0] = 1;

for (int i = 1; i <= n; i ++ )

{

h[i] = h[i - 1] \* P + str[i];

p[i] = p[i - 1] \* P;

}

// 计算子串 str[l ~ r] 的哈希值

ULL get(int l, int r)

{

return h[r] - h[l - 1] \* p[r - l + 1];

}

**C++ STL简介**

vector, 变长数组，倍增的思想

size() 返回元素个数

empty() 返回是否为空

clear() 清空

front()/back()

push\_back()/pop\_back()

begin()/end()

[]

支持比较运算，按字典序

pair<int, int>

first, 第一个元素

second, 第二个元素

支持比较运算，以first为第一关键字，以second为第二关键字（字典序）

string，字符串

size()/length() 返回字符串长度

empty()

clear()

substr(起始下标，(子串长度)) 返回子串

c\_str() 返回字符串所在字符数组的起始地址

queue, 队列

size()

empty()

push() 向队尾插入一个元素

front() 返回队头元素

back() 返回队尾元素

pop() 弹出队头元素

priority\_queue, 优先队列，默认是大根堆

size()

empty()

push() 插入一个元素

top() 返回堆顶元素

pop() 弹出堆顶元素

定义成小根堆的方式：priority\_queue<int, vector<int>, greater<int>> q;

stack, 栈

size()

empty()

push() 向栈顶插入一个元素

top() 返回栈顶元素

pop() 弹出栈顶元素

deque, 双端队列

size()

empty()

clear()

front()/back()

push\_back()/pop\_back()

push\_front()/pop\_front()

begin()/end()

[]

set, map, multiset, multimap, 基于平衡二叉树（红黑树），动态维护有序序列

size()

empty()

clear()

begin()/end()

++, -- 返回前驱和后继，时间复杂度 O(logn)

set/multiset

insert() 插入一个数

find() 查找一个数

count() 返回某一个数的个数

erase()

(1) 输入是一个数x，删除所有x O(k + logn)

(2) 输入一个迭代器，删除这个迭代器

lower\_bound()/upper\_bound()

lower\_bound(x) 返回大于等于x的最小的数的迭代器

upper\_bound(x) 返回大于x的最小的数的迭代器

map/multimap

insert() 插入的数是一个pair

erase() 输入的参数是pair或者迭代器

find()

[] 注意multimap不支持此操作。 时间复杂度是 O(logn)

lower\_bound()/upper\_bound()

unordered\_set, unordered\_map, unordered\_multiset, unordered\_multimap, 哈希表

和上面类似，增删改查的时间复杂度是 O(1)

不支持 lower\_bound()/upper\_bound()， 迭代器的++，--

bitset, 圧位

bitset<10000> s;

~, &, |, ^

>>, <<

==, !=

[]

count() 返回有多少个1

any() 判断是否至少有一个1

none() 判断是否全为0

set() 把所有位置成1

set(k, v) 将第k位变成v

reset() 把所有位变成0

flip() 等价于~

flip(k) 把第k位取反

**树与图的存储**

树是一种特殊的图，与图的存储方式相同。

对于无向图中的边ab，存储两条有向边a->b, b->a。

因此我们可以只考虑有向图的存储。

(1) 邻接矩阵：g[a][b] 存储边a->b

(2) 邻接表：

// 对于每个点k，开一个单链表，存储k所有可以走到的点。h[k]存储这个单链表的头结点

int h[N], e[N], ne[N], idx;

// 添加一条边a->b

void add(int a, int b)

{

e[idx] = b, ne[idx] = h[a], h[a] = idx ++ ;

}

// 初始化

idx = 0;

memset(h, -1, sizeof h);

**树与图的遍历**

时间复杂度 O(n+m)O(n+m), nn 表示点数，mm 表示边数

(1) 深度优先遍历 —— 模板题 AcWing 846. 树的重心

int dfs(int u)

{

st[u] = true; // st[u] 表示点u已经被遍历过

for (int i = h[u]; i != -1; i = ne[i])

{

int j = e[i];

if (!st[j]) dfs(j);

}

}

(2) 宽度优先遍历 —— 模板题 AcWing 847. 图中点的层次

queue<int> q;

st[1] = true; // 表示1号点已经被遍历过

q.push(1);

while (q.size())

{

int t = q.front();

q.pop();

for (int i = h[t]; i != -1; i = ne[i])

{

int j = e[i];

if (!st[j])

{

st[j] = true; // 表示点j已经被遍历过

q.push(j);

}

}

}

拓扑排序 —— 模板题 AcWing 848. 有向图的拓扑序列

时间复杂度 O(n+m)O(n+m), nn 表示点数，mm 表示边数

bool topsort()

{

int hh = 0, tt = -1;

// d[i] 存储点i的入度

for (int i = 1; i <= n; i ++ )

if (!d[i])

q[ ++ tt] = i;

while (hh <= tt)

{

int t = q[hh ++ ];

for (int i = h[t]; i != -1; i = ne[i])

{

int j = e[i];

if (-- d[j] == 0)

q[ ++ tt] = j;

}

}

// 如果所有点都入队了，说明存在拓扑序列；否则不存在拓扑序列。

return tt == n - 1;

}

朴素dijkstra算法 —— 模板题 AcWing 849. Dijkstra求最短路 I

时间复杂是 O(n2+m)O(n2+m), nn 表示点数，mm 表示边数

int g[N][N]; // 存储每条边

int dist[N]; // 存储1号点到每个点的最短距离

bool st[N]; // 存储每个点的最短路是否已经确定

// 求1号点到n号点的最短路，如果不存在则返回-1

int dijkstra()

{

memset(dist, 0x3f, sizeof dist);

dist[1] = 0;

for (int i = 0; i < n - 1; i ++ )

{

int t = -1; // 在还未确定最短路的点中，寻找距离最小的点

for (int j = 1; j <= n; j ++ )

if (!st[j] && (t == -1 || dist[t] > dist[j]))

t = j;

// 用t更新其他点的距离

for (int j = 1; j <= n; j ++ )

dist[j] = min(dist[j], dist[t] + g[t][j]);

st[t] = true;

}

if (dist[n] == 0x3f3f3f3f) return -1;

return dist[n];

}

堆优化版dijkstra —— 模板题 AcWing 850. Dijkstra求最短路 II

时间复杂度 O(mlogn)O(mlogn), nn 表示点数，mm 表示边数

typedef pair<int, int> PII;

int n; // 点的数量

int h[N], w[N], e[N], ne[N], idx; // 邻接表存储所有边

int dist[N]; // 存储所有点到1号点的距离

bool st[N]; // 存储每个点的最短距离是否已确定

// 求1号点到n号点的最短距离，如果不存在，则返回-1

int dijkstra()

{

memset(dist, 0x3f, sizeof dist);

dist[1] = 0;

priority\_queue<PII, vector<PII>, greater<PII>> heap;

heap.push({0, 1}); // first存储距离，second存储节点编号

while (heap.size())

{

auto t = heap.top();

heap.pop();

int ver = t.second, distance = t.first;

if (st[ver]) continue;

st[ver] = true;

for (int i = h[ver]; i != -1; i = ne[i])

{

int j = e[i];

if (dist[j] > distance + w[i])

{

dist[j] = distance + w[i];

heap.push({dist[j], j});

}

}

}

if (dist[n] == 0x3f3f3f3f) return -1;

return dist[n];

}

Bellman-Ford算法 —— 模板题 AcWing 853. 有边数限制的最短路

时间复杂度 O(nm)O(nm), nn 表示点数，mm 表示边数

注意在模板题中需要对下面的模板稍作修改，加上备份数组，详情见模板题。

int n, m; // n表示点数，m表示边数

int dist[N]; // dist[x]存储1到x的最短路距离

struct Edge // 边，a表示出点，b表示入点，w表示边的权重

{

int a, b, w;

}edges[M];

// 求1到n的最短路距离，如果无法从1走到n，则返回-1。

int bellman\_ford()

{

memset(dist, 0x3f, sizeof dist);

dist[1] = 0;

// 如果第n次迭代仍然会松弛三角不等式，就说明存在一条长度是n+1的最短路径，由抽屉原理，路径中至少存在两个相同的点，说明图中存在负权回路。

for (int i = 0; i < n; i ++ )

{

for (int j = 0; j < m; j ++ )

{

int a = edges[j].a, b = edges[j].b, w = edges[j].w;

if (dist[b] > dist[a] + w)

dist[b] = dist[a] + w;

}

}

if (dist[n] > 0x3f3f3f3f / 2) return -1;

return dist[n];

}

spfa 算法（队列优化的Bellman-Ford算法） —— 模板题 AcWing 851. spfa求最短路

时间复杂度 平均情况下 O(m)O(m)，最坏情况下 O(nm)O(nm), nn 表示点数，mm 表示边数

int n; // 总点数

int h[N], w[N], e[N], ne[N], idx; // 邻接表存储所有边

int dist[N]; // 存储每个点到1号点的最短距离

bool st[N]; // 存储每个点是否在队列中

// 求1号点到n号点的最短路距离，如果从1号点无法走到n号点则返回-1

int spfa()

{

memset(dist, 0x3f, sizeof dist);

dist[1] = 0;

queue<int> q;

q.push(1);

st[1] = true;

while (q.size())

{

auto t = q.front();

q.pop();

st[t] = false;

for (int i = h[t]; i != -1; i = ne[i])

{

int j = e[i];

if (dist[j] > dist[t] + w[i])

{

dist[j] = dist[t] + w[i];

if (!st[j]) // 如果队列中已存在j，则不需要将j重复插入

{

q.push(j);

st[j] = true;

}

}

}

}

if (dist[n] == 0x3f3f3f3f) return -1;

return dist[n];

}

spfa判断图中是否存在负环 —— 模板题 AcWing 852. spfa判断负环

时间复杂度是 O(nm)O(nm), nn 表示点数，mm 表示边数

int n; // 总点数

int h[N], w[N], e[N], ne[N], idx; // 邻接表存储所有边

int dist[N], cnt[N]; // dist[x]存储1号点到x的最短距离，cnt[x]存储1到x的最短路中经过的点数

bool st[N]; // 存储每个点是否在队列中

// 如果存在负环，则返回true，否则返回false。

bool spfa()

{

// 不需要初始化dist数组

// 原理：如果某条最短路径上有n个点（除了自己），那么加上自己之后一共有n+1个点，由抽屉原理一定有两个点相同，所以存在环。

queue<int> q;

for (int i = 1; i <= n; i ++ )

{

q.push(i);

st[i] = true;

}

while (q.size())

{

auto t = q.front();

q.pop();

st[t] = false;

for (int i = h[t]; i != -1; i = ne[i])

{

int j = e[i];

if (dist[j] > dist[t] + w[i])

{

dist[j] = dist[t] + w[i];

cnt[j] = cnt[t] + 1;

if (cnt[j] >= n) return true; // 如果从1号点到x的最短路中包含至少n个点（不包括自己），则说明存在环

if (!st[j])

{

q.push(j);

st[j] = true;

}

}

}

}

return false;

}

floyd算法 —— 模板题 AcWing 854. Floyd求最短路

时间复杂度是 O(n3)O(n3), nn 表示点数

初始化：

for (int i = 1; i <= n; i ++ )

for (int j = 1; j <= n; j ++ )

if (i == j) d[i][j] = 0;

else d[i][j] = INF;

// 算法结束后，d[a][b]表示a到b的最短距离

void floyd()

{

for (int k = 1; k <= n; k ++ )

for (int i = 1; i <= n; i ++ )

for (int j = 1; j <= n; j ++ )

d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j]);

}

朴素版prim算法 —— 模板题 AcWing 858. Prim算法求最小生成树

时间复杂度是 O(n2+m)O(n2+m), nn 表示点数，mm 表示边数

int n; // n表示点数

int g[N][N]; // 邻接矩阵，存储所有边

int dist[N]; // 存储其他点到当前最小生成树的距离

bool st[N]; // 存储每个点是否已经在生成树中

// 如果图不连通，则返回INF(值是0x3f3f3f3f), 否则返回最小生成树的树边权重之和

int prim()

{

memset(dist, 0x3f, sizeof dist);

int res = 0;

for (int i = 0; i < n; i ++ )

{

int t = -1;

for (int j = 1; j <= n; j ++ )

if (!st[j] && (t == -1 || dist[t] > dist[j]))

t = j;

if (i && dist[t] == INF) return INF;

if (i) res += dist[t];

st[t] = true;

for (int j = 1; j <= n; j ++ ) dist[j] = min(dist[j], g[t][j]);

}

return res;

}

Kruskal算法 —— 模板题 AcWing 859. Kruskal算法求最小生成树

时间复杂度是 O(mlogm)O(mlogm), nn 表示点数，mm 表示边数

int n, m; // n是点数，m是边数

int p[N]; // 并查集的父节点数组

struct Edge // 存储边

{

int a, b, w;

bool operator< (const Edge &W)const

{

return w < W.w;

}

}edges[M];

int find(int x) // 并查集核心操作

{

if (p[x] != x) p[x] = find(p[x]);

return p[x];

}

int kruskal()

{

sort(edges, edges + m);

for (int i = 1; i <= n; i ++ ) p[i] = i; // 初始化并查集

int res = 0, cnt = 0;

for (int i = 0; i < m; i ++ )

{

int a = edges[i].a, b = edges[i].b, w = edges[i].w;

a = find(a), b = find(b);

if (a != b) // 如果两个连通块不连通，则将这两个连通块合并

{

p[a] = b;

res += w;

cnt ++ ;

}

}

if (cnt < n - 1) return INF;

return res;

}

染色法判别二分图 —— 模板题 AcWing 860. 染色法判定二分图

时间复杂度是 O(n+m)O(n+m), nn 表示点数，mm 表示边数

int n; // n表示点数

int h[N], e[M], ne[M], idx; // 邻接表存储图

int color[N]; // 表示每个点的颜色，-1表示未染色，0表示白色，1表示黑色

// 参数：u表示当前节点，c表示当前点的颜色

bool dfs(int u, int c)

{

color[u] = c;

for (int i = h[u]; i != -1; i = ne[i])

{

int j = e[i];

if (color[j] == -1)

{

if (!dfs(j, !c)) return false;

}

else if (color[j] == c) return false;

}

return true;

}

bool check()

{

memset(color, -1, sizeof color);

bool flag = true;

for (int i = 1; i <= n; i ++ )

if (color[i] == -1)

if (!dfs(i, 0))

{

flag = false;

break;

}

return flag;

}

匈牙利算法 —— 模板题 AcWing 861. 二分图的最大匹配

时间复杂度是 O(nm)O(nm), nn 表示点数，mm 表示边数

int n1, n2; // n1表示第一个集合中的点数，n2表示第二个集合中的点数

int h[N], e[M], ne[M], idx; // 邻接表存储所有边，匈牙利算法中只会用到从第一个集合指向第二个集合的边，所以这里只用存一个方向的边

int match[N]; // 存储第二个集合中的每个点当前匹配的第一个集合中的点是哪个

bool st[N]; // 表示第二个集合中的每个点是否已经被遍历过

bool find(int x)

{

for (int i = h[x]; i != -1; i = ne[i])

{

int j = e[i];

if (!st[j])

{

st[j] = true;

if (match[j] == 0 || find(match[j]))

{

match[j] = x;

return true;

}

}

}

return false;

}

// 求最大匹配数，依次枚举第一个集合中的每个点能否匹配第二个集合中的点

int res = 0;

for (int i = 1; i <= n1; i ++ )

{

memset(st, false, sizeof st);

if (find(i)) res ++ ;

}

试除法判定质数 —— 模板题 AcWing 866. 试除法判定质数

bool is\_prime(int x)

{

if (x < 2) return false;

for (int i = 2; i <= x / i; i ++ )

if (x % i == 0)

return false;

return true;

}

试除法分解质因数 —— 模板题 AcWing 867. 分解质因数

void divide(int x)

{

for (int i = 2; i <= x / i; i ++ )

if (x % i == 0)

{

int s = 0;

while (x % i == 0) x /= i, s ++ ;

cout << i << ' ' << s << endl;

}

if (x > 1) cout << x << ' ' << 1 << endl;

cout << endl;

}

朴素筛法求素数 —— 模板题 AcWing 868. 筛质数

int primes[N], cnt; // primes[]存储所有素数

bool st[N]; // st[x]存储x是否被筛掉

void get\_primes(int n)

{

for (int i = 2; i <= n; i ++ )

{

if (st[i]) continue;

primes[cnt ++ ] = i;

for (int j = i + i; j <= n; j += i)

st[j] = true;

}

}

线性筛法求素数 —— 模板题 AcWing 868. 筛质数

int primes[N], cnt; // primes[]存储所有素数

bool st[N]; // st[x]存储x是否被筛掉

void get\_primes(int n)

{

for (int i = 2; i <= n; i ++ )

{

if (!st[i]) primes[cnt ++ ] = i;

for (int j = 0; primes[j] <= n / i; j ++ )

{

st[primes[j] \* i] = true;

if (i % primes[j] == 0) break;

}

}

}

试除法求所有约数 —— 模板题 AcWing 869. 试除法求约数

vector<int> get\_divisors(int x)

{

vector<int> res;

for (int i = 1; i <= x / i; i ++ )

if (x % i == 0)

{

res.push\_back(i);

if (i != x / i) res.push\_back(x / i);

}

sort(res.begin(), res.end());

return res;

}

约数个数和约数之和 —— 模板题 AcWing 870. 约数个数, AcWing 871. 约数之和

如果 N = p1^c1 \* p2^c2 \* ... \*pk^ck

约数个数： (c1 + 1) \* (c2 + 1) \* ... \* (ck + 1)

约数之和： (p1^0 + p1^1 + ... + p1^c1) \* ... \* (pk^0 + pk^1 + ... + pk^ck)

欧几里得算法 —— 模板题 AcWing 872. 最大公约数

int gcd(int a, int b)

{

return b ? gcd(b, a % b) : a;

}

求欧拉函数 —— 模板题 AcWing 873. 欧拉函数

int phi(int x)

{

int res = x;

for (int i = 2; i <= x / i; i ++ )

if (x % i == 0)

{

res = res / i \* (i - 1);

while (x % i == 0) x /= i;

}

if (x > 1) res = res / x \* (x - 1);

return res;

}

筛法求欧拉函数 —— 模板题 AcWing 874. 筛法求欧拉函数

int primes[N], cnt; // primes[]存储所有素数

int euler[N]; // 存储每个数的欧拉函数

bool st[N]; // st[x]存储x是否被筛掉

void get\_eulers(int n)

{

euler[1] = 1;

for (int i = 2; i <= n; i ++ )

{

if (!st[i])

{

primes[cnt ++ ] = i;

euler[i] = i - 1;

}

for (int j = 0; primes[j] <= n / i; j ++ )

{

int t = primes[j] \* i;

st[t] = true;

if (i % primes[j] == 0)

{

euler[t] = euler[i] \* primes[j];

break;

}

euler[t] = euler[i] \* (primes[j] - 1);

}

}

}

快速幂 —— 模板题 AcWing 875. 快速幂

求 m^k mod p，时间复杂度 O(logk)。

int qmi(int m, int k, int p)

{

int res = 1 % p, t = m;

while (k)

{

if (k&1) res = res \* t % p;

t = t \* t % p;

k >>= 1;

}

return res;

}

扩展欧几里得算法 —— 模板题 AcWing 877. 扩展欧几里得算法

// 求x, y，使得ax + by = gcd(a, b)

int exgcd(int a, int b, int &x, int &y)

{

if (!b)

{

x = 1; y = 0;

return a;

}

int d = exgcd(b, a % b, y, x);

y -= (a/b) \* x;

return d;

}

高斯消元 —— 模板题 AcWing 883. 高斯消元解线性方程组

// a[N][N]是增广矩阵

int gauss()

{

int c, r;

for (c = 0, r = 0; c < n; c ++ )

{

int t = r;

for (int i = r; i < n; i ++ ) // 找到绝对值最大的行

if (fabs(a[i][c]) > fabs(a[t][c]))

t = i;

if (fabs(a[t][c]) < eps) continue;

for (int i = c; i <= n; i ++ ) swap(a[t][i], a[r][i]); // 将绝对值最大的行换到最顶端

for (int i = n; i >= c; i -- ) a[r][i] /= a[r][c]; // 将当前行的首位变成1

for (int i = r + 1; i < n; i ++ ) // 用当前行将下面所有的列消成0

if (fabs(a[i][c]) > eps)

for (int j = n; j >= c; j -- )

a[i][j] -= a[r][j] \* a[i][c];

r ++ ;

}

if (r < n)

{

for (int i = r; i < n; i ++ )

if (fabs(a[i][n]) > eps)

return 2; // 无解

return 1; // 有无穷多组解

}

for (int i = n - 1; i >= 0; i -- )

for (int j = i + 1; j < n; j ++ )

a[i][n] -= a[i][j] \* a[j][n];

return 0; // 有唯一解

}

递归法求组合数 —— 模板题 AcWing 885. 求组合数 I

// c[a][b] 表示从a个苹果中选b个的方案数

for (int i = 0; i < N; i ++ )

for (int j = 0; j <= i; j ++ )

if (!j) c[i][j] = 1;

else c[i][j] = (c[i - 1][j] + c[i - 1][j - 1]) % mod;

通过预处理逆元的方式求组合数 —— 模板题 AcWing 886. 求组合数 II

首先预处理出所有阶乘取模的余数fact[N]，以及所有阶乘取模的逆元infact[N]

如果取模的数是质数，可以用费马小定理求逆元

int qmi(int a, int k, int p) // 快速幂模板

{

int res = 1;

while (k)

{

if (k & 1) res = (LL)res \* a % p;

a = (LL)a \* a % p;

k >>= 1;

}

return res;

}

// 预处理阶乘的余数和阶乘逆元的余数

fact[0] = infact[0] = 1;

for (int i = 1; i < N; i ++ )

{

fact[i] = (LL)fact[i - 1] \* i % mod;

infact[i] = (LL)infact[i - 1] \* qmi(i, mod - 2, mod) % mod;

}

Lucas定理 —— 模板题 AcWing 887. 求组合数 III

若p是质数，则对于任意整数 1 <= m <= n，有：

C(n, m) = C(n % p, m % p) \* C(n / p, m / p) (mod p)

int qmi(int a, int k, int p) // 快速幂模板

{

int res = 1 % p;

while (k)

{

if (k & 1) res = (LL)res \* a % p;

a = (LL)a \* a % p;

k >>= 1;

}

return res;

}

int C(int a, int b, int p) // 通过定理求组合数C(a, b)

{

if (a < b) return 0;

LL x = 1, y = 1; // x是分子，y是分母

for (int i = a, j = 1; j <= b; i --, j ++ )

{

x = (LL)x \* i % p;

y = (LL) y \* j % p;

}

return x \* (LL)qmi(y, p - 2, p) % p;

}

int lucas(LL a, LL b, int p)

{

if (a < p && b < p) return C(a, b, p);

return (LL)C(a % p, b % p, p) \* lucas(a / p, b / p, p) % p;

}

分解质因数法求组合数 —— 模板题 AcWing 888. 求组合数 IV

当我们需要求出组合数的真实值，而非对某个数的余数时，分解质因数的方式比较好用：

1. 筛法求出范围内的所有质数

2. 通过 C(a, b) = a! / b! / (a - b)! 这个公式求出每个质因子的次数。 n! 中p的次数是 n / p + n / p^2 + n / p^3 + ...

3. 用高精度乘法将所有质因子相乘

int primes[N], cnt; // 存储所有质数

int sum[N]; // 存储每个质数的次数

bool st[N]; // 存储每个数是否已被筛掉

void get\_primes(int n) // 线性筛法求素数

{

for (int i = 2; i <= n; i ++ )

{

if (!st[i]) primes[cnt ++ ] = i;

for (int j = 0; primes[j] <= n / i; j ++ )

{

st[primes[j] \* i] = true;

if (i % primes[j] == 0) break;

}

}

}

int get(int n, int p) // 求n！中的次数

{

int res = 0;

while (n)

{

res += n / p;

n /= p;

}

return res;

}

vector<int> mul(vector<int> a, int b) // 高精度乘低精度模板

{

vector<int> c;

int t = 0;

for (int i = 0; i < a.size(); i ++ )

{

t += a[i] \* b;

c.push\_back(t % 10);

t /= 10;

}

while (t)

{

c.push\_back(t % 10);

t /= 10;

}

return c;

}

get\_primes(a); // 预处理范围内的所有质数

for (int i = 0; i < cnt; i ++ ) // 求每个质因数的次数

{

int p = primes[i];

sum[i] = get(a, p) - get(b, p) - get(a - b, p);

}

vector<int> res;

res.push\_back(1);

for (int i = 0; i < cnt; i ++ ) // 用高精度乘法将所有质因子相乘

for (int j = 0; j < sum[i]; j ++ )

res = mul(res, primes[i]);

卡特兰数 —— 模板题 AcWing 889. 满足条件的01序列

给定n个0和n个1，它们按照某种顺序排成长度为2n的序列，满足任意前缀中0的个数都不少于1的个数的序列的数量为： Cat(n) = C(2n, n) / (n + 1)

NIM游戏 —— 模板题 AcWing 891. Nim游戏

给定N堆物品，第i堆物品有Ai个。两名玩家轮流行动，每次可以任选一堆，取走任意多个物品，可把一堆取光，但不能不取。取走最后一件物品者获胜。两人都采取最优策略，问先手是否必胜。

我们把这种游戏称为NIM博弈。把游戏过程中面临的状态称为局面。整局游戏第一个行动的称为先手，第二个行动的称为后手。若在某一局面下无论采取何种行动，都会输掉游戏，则称该局面必败。

所谓采取最优策略是指，若在某一局面下存在某种行动，使得行动后对面面临必败局面，则优先采取该行动。同时，这样的局面被称为必胜。我们讨论的博弈问题一般都只考虑理想情况，即两人均无失误，都采取最优策略行动时游戏的结果。

NIM博弈不存在平局，只有先手必胜和先手必败两种情况。

**定理：** NIM博弈先手必胜，当且仅当 A1 ^ A2 ^ … ^ An != 0

公平组合游戏ICG

若一个游戏满足：

由两名玩家交替行动；

在游戏进程的任意时刻，可以执行的合法行动与轮到哪名玩家无关；

不能行动的玩家判负；

则称该游戏为一个公平组合游戏。

NIM博弈属于公平组合游戏，但城建的棋类游戏，比如围棋，就不是公平组合游戏。因为围棋交战双方分别只能落黑子和白子，胜负判定也比较复杂，不满足条件2和条件3。

有向图游戏

给定一个有向无环图，图中有一个唯一的起点，在起点上放有一枚棋子。两名玩家交替地把这枚棋子沿有向边进行移动，每次可以移动一步，无法移动者判负。该游戏被称为有向图游戏。

任何一个公平组合游戏都可以转化为有向图游戏。具体方法是，把每个局面看成图中的一个节点，并且从每个局面向沿着合法行动能够到达的下一个局面连有向边。

Mex运算

设S表示一个非负整数集合。定义mex(S)为求出不属于集合S的最小非负整数的运算，即：

mex(S) = min{x}, x属于自然数，且x不属于S

SG函数

在有向图游戏中，对于每个节点x，设从x出发共有k条有向边，分别到达节点y1, y2, …, yk，定义SG(x)为x的后继节点y1, y2, …, yk 的SG函数值构成的集合再执行mex(S)运算的结果，即：

SG(x) = mex({SG(y1), SG(y2), …, SG(yk)})

特别地，整个有向图游戏G的SG函数值被定义为有向图游戏起点s的SG函数值，即SG(G) = SG(s)。

有向图游戏的和 —— 模板题 AcWing 893. 集合-Nim游戏

设G1, G2, …, Gm 是m个有向图游戏。定义有向图游戏G，它的行动规则是任选某个有向图游戏Gi，并在Gi上行动一步。G被称为有向图游戏G1, G2, …, Gm的和。

有向图游戏的和的SG函数值等于它包含的各个子游戏SG函数值的异或和，即：

SG(G) = SG(G1) ^ SG(G2) ^ … ^ SG(Gm)

**定理**

有向图游戏的某个局面必胜，当且仅当该局面对应节点的SG函数值大于0。

有向图游戏的某个局面必败，当且仅当该局面对应节点的SG函数值等于0。