一. (1) $P \wedge (P \to Q) \equiv P \wedge Q$

先证：$P \wedge (P \to Q) \models P \wedge Q$

设 α 为 $P \wedge (P \to Q)$ 的任意成真赋值

则 $\alpha(P) = T$ $\alpha(P \to Q) = T$

若 $\alpha(Q) = F$ 则 $\alpha(P \to Q) = F$ $\alpha(P \wedge Q) = F$

若 $\alpha(Q) = T$ 则 $\alpha(P \to Q) = T$ $\alpha(P \wedge Q) = T$

$\therefore P \wedge (P \to Q) \equiv P \wedge Q$

$\therefore Q \in D$

后证：$P \wedge Q \models P \wedge (P \to Q)$

设 α 为 $P \wedge Q$ 的成真赋值

则 $\alpha(P) = T$ $\alpha(Q) = T$

则 $\alpha(P \wedge (P \to Q)) = T$

另 α 为 $P \wedge Q$ 的成假赋值

则 $\alpha(P) = F$ $\alpha(Q) = T$

或 $\alpha(P) = F$ $\alpha(Q) = F$

或 $\alpha(P) = T$ $\alpha(Q) = F$

三种情况下 $\alpha(P \wedge (P \to Q)) = F$.

(2) $\neg(P \vee Q \to \neg R) \equiv (P \vee Q) \wedge R$

先证：$\neg(P \vee Q \to \neg R) \models (P \vee Q) \wedge R$

设 $\neg(P \vee Q \to \neg R)$ 的任意成真赋值 α

则 $\alpha(P) = T$ $\alpha(Q) = F$

$\therefore \alpha((P \vee Q) \wedge R) = F$

$\therefore Q \in D$

后证：$(P \vee Q) \wedge R \models \neg(P \vee Q \to \neg R)$

设 α 为 $(P \vee Q) \wedge R$ 的任意成真赋值

则 $\alpha(P) = T$ $\alpha(Q) = F$ $\alpha(R) = T$

或 $\alpha(P) = F$ $\alpha(Q) = T$ $\alpha(R) = T$

$\alpha(\neg(P \vee Q \to \neg R)) = T$

$\therefore Q \in D$.

(3) $(P \vee Q) \wedge \neg P \models \neg P \wedge Q$

设 α 为 $(P \vee Q) \wedge \neg P$ 的成真赋值

则 $\alpha(P) = F$ $\alpha(Q) = T$

$\therefore \alpha(\neg P \wedge Q) = T$

$\therefore Q \in D$.

二. (1) $\neg(P \to Q) \vdash P$

$\neg(P \to Q)$

$\equiv \neg(\neg P \vee Q)$ (蕴涵等值式)

$\equiv P \wedge \neg Q$ (德摩根律)

$\models P$ (1)

(2) $(P \to Q) \vdash P \to (P \wedge Q)$

$P \to Q$

$\equiv \neg P \vee Q$ (蕴涵等值式)

$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P)$ (排中律)

$\equiv \neg P \vee (P \wedge Q)$ (分配律)

$\vdash P \to (P \wedge Q)$.

(3) $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$

$P \to Q$

$\vdash \neg P \vee Q$ (蕴涵等值式)

$\neg P \vee Q$

$\vdash P \to Q$ (蕴涵等值式)

三. (1) $(P\wedge Q\to R)\to(P\wedge\neg R\wedge Q)$

$\equiv \neg\neg(P\wedge Q)\vee R)\to(P\wedge\neg R\wedge Q)$

$\equiv \neg(\neg P\vee\neg Q\vee R)\vee(P\wedge\neg R\wedge Q)$

$\equiv (P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg R\wedge Q)$

∴ 重试

∴ QED

(2) $(P\wedge Q)\wedge\neg(P\vee Q)$

设 α 是 $(P\wedge Q)$ 的任意成真赋值

则 $\alpha(P)=T$ $\alpha(Q)=T$

$\alpha(\neg(P\vee Q))=F$

∴ 矛盾式

∴ QED.

四. $A\vee C\equiv B\vee C$ $A\leftrightarrow B$

设 α 为 $A\vee C\equiv B\vee C$ 的成真赋值

则 $\alpha(A)=T$ $\alpha(B)=T$

或 $\alpha(B)=F$ $\alpha(A)=F$

则 $\alpha(A\leftrightarrow B)=T$

(2) $A\wedge C\equiv B\wedge C$ 则 $A\leftrightarrow B$

设 α 为 $A\wedge C\equiv B\wedge C$ 的成真赋值

则 $\alpha(A)=T$ $\alpha(B)=T$

或 $\alpha(A)=F$ $\alpha(B)=F$

则 $\alpha(A\leftrightarrow B)=$ 不T.

(3) $\neg A\equiv\neg B$ 则 $A\leftrightarrow B$

设 α 为 $\neg A\equiv\neg B$ 的成真赋值

则 $\alpha(A)=T$ $\alpha(B)=T$

或 $\alpha(B)=F$ $\alpha(A)=F$

∴ $\alpha(A\leftrightarrow B)=T$

(4) $A\to C\equiv B\to C$ 则 $A\leftrightarrow B$

设 α 为 $(A\to C)\equiv(B\to C)$ 的成真赋值

则 $\alpha(A)=T$ $\alpha(B)=T$ $\alpha(C)=$ 或F

或 ~~$\alpha(A)=F$~~ 矛盾情况

则 $\alpha(A\leftrightarrow B)=F$

(5) $A\leftrightarrow C\equiv B\leftrightarrow C$ 则 $A\leftrightarrow B$

若 $A\leftrightarrow C\equiv B\leftrightarrow C$ 为T时

则 A, B, C 取值相同.

故 $A\leftrightarrow B$.

五. (1) $(\neg P\vee\neg Q)\to(P\leftrightarrow\neg Q)$

$\equiv \neg(\neg P\vee\neg Q)\vee(P\leftrightarrow\neg Q)$

$\equiv \neg(\neg P\vee\neg Q)\vee((P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q))$

$\equiv P\wedge Q\vee P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge Q$

$\equiv P\wedge Q$

(2) $P\to(P\wedge(Q\to P))$

$\equiv \neg P\vee(P\wedge(\neg Q\vee P))$

$\equiv(\neg P\vee P)\wedge(P\vee\neg Q\vee P)$

$\equiv \neg Q\vee P$

(3) $P\vee(\neg P\to(Q\vee(\neg P\to R)))$

$\equiv P\vee(\neg P\to(Q\vee(P\vee R)))$

$\equiv P\vee P\vee(Q\vee(P\vee R))$

$\equiv$ ~~$(P\vee Q)\vee P\vee R$~~

$P\vee(Q\vee(P\vee R))$

$\equiv P\vee(Q\vee R)$