

# 31

## Function

## 函数

可视化一元、二元、三元函数



至暗深夜也必然结束，太阳终将升起。

*Even the darkest night will end and the sun will rise.*

——雨果 (Victor Hugo) | 法国文学家 | 1802 ~ 1885



- ◀ matplotlib.pyplot.contour() 绘制等高线图
- ◀ matplotlib.pyplot.contourf() 绘制填充等高线图
- ◀ matplotlib.pyplot.plot\_wireframe() 绘制线框图
- ◀ numpy.linspace() 在指定的间隔内, 返回固定步长的数据
- ◀ numpy.meshgrid() 创建网格化数据

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 31.1 函数

鸢尾花书的读者对于数学中函数这个概念当然不陌生。本章聊一聊函数的各种常见可视化方案。

### 什么是函数？

在代数中，函数是一种数学关系，它将一个或多个输入值映射 (mapping) 到唯一的输出值。函数可以用一个规则或方程式来表示，其中输入值称为自变量，输出值称为因变量。函数描述了不同变量之间的依赖关系，并且可以用来表示数学问题的模型。函数可以通过数学符号、图表或文字描述来表示，它们在代数中广泛应用于方程求解、图形绘制和数值计算等领域。

一句话概括来说，函数就是映射，输入值映射到唯一的输出值。如图 1 所示，我们设计了两个函数：左侧函数 `Shape()` 输入为彩色几何图形，函数输出为图形形状；右侧函数 `Color()` 输入还是彩色几何形状，函数输出为图形颜色。

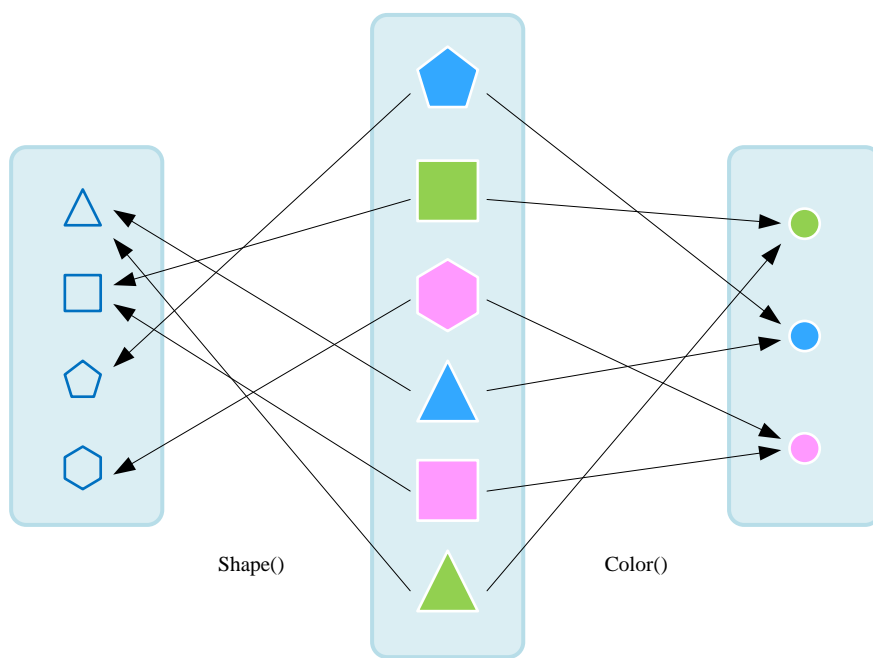


图 1. 识别颜色、形状的函数

### 单射、满射

单射、非单射、满射和非满射是函数映射中的性质，描述了输入值和输出值之间的关系。

单射 (injective) 是指函数中不同的输入值对应着不同的输出值，即每个输出值只有一个对应的输入值。

非单射 (non-injective) 是指函数中存在多个不同的输入值对应着相同的输出值，即至少有一个输出值有多个对应的输入值。

满射 (surjective) 是指函数的所有可能的输出值都能够被映射到，即每个输出值都有至少一个对应的输入值。

非满射 (non-surjective) 是指函数中存在至少一个输出值无法被映射到，即存在某些输出值没有对应的输入值。

图 2 所示为单射、非单射、满射、非满射构成的“四象限”。单射、非单射更关注输入值，而满射、非满射则关注输出值。同时满足单射与满射叫双射 (bijective)，也叫一一映射。

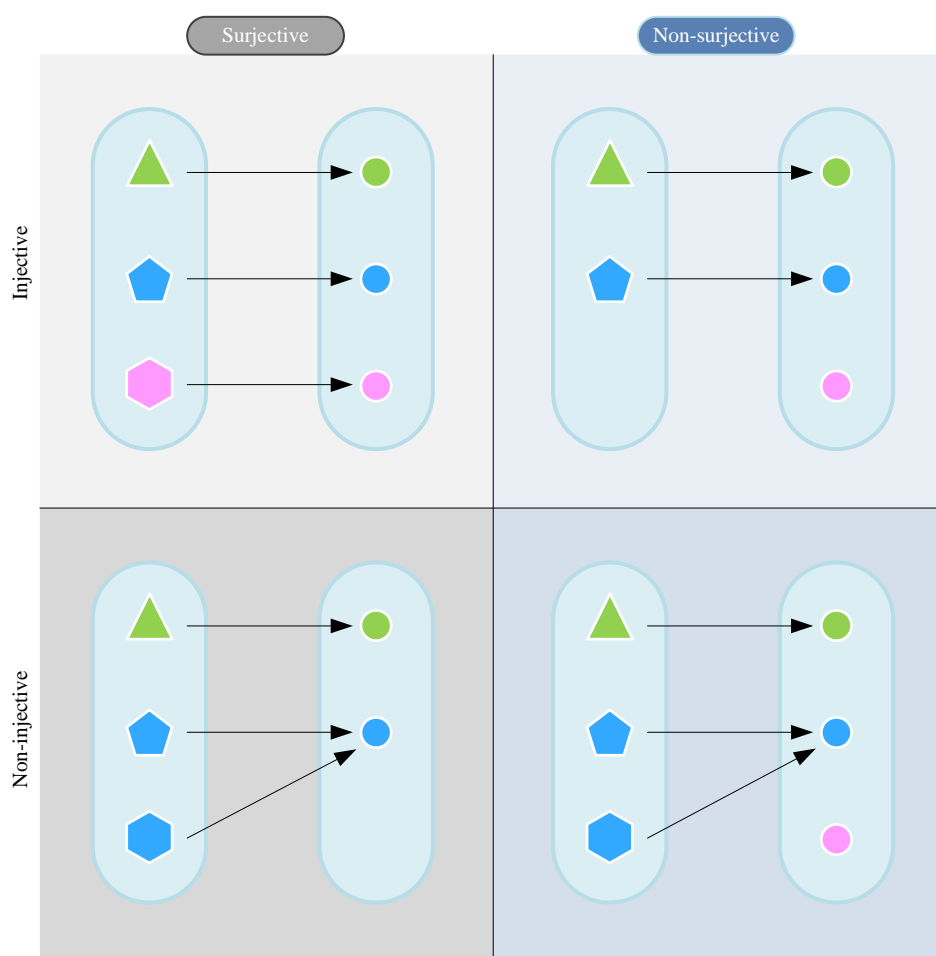


图 2. 单射、非单射、满射、非满射构成的四象限

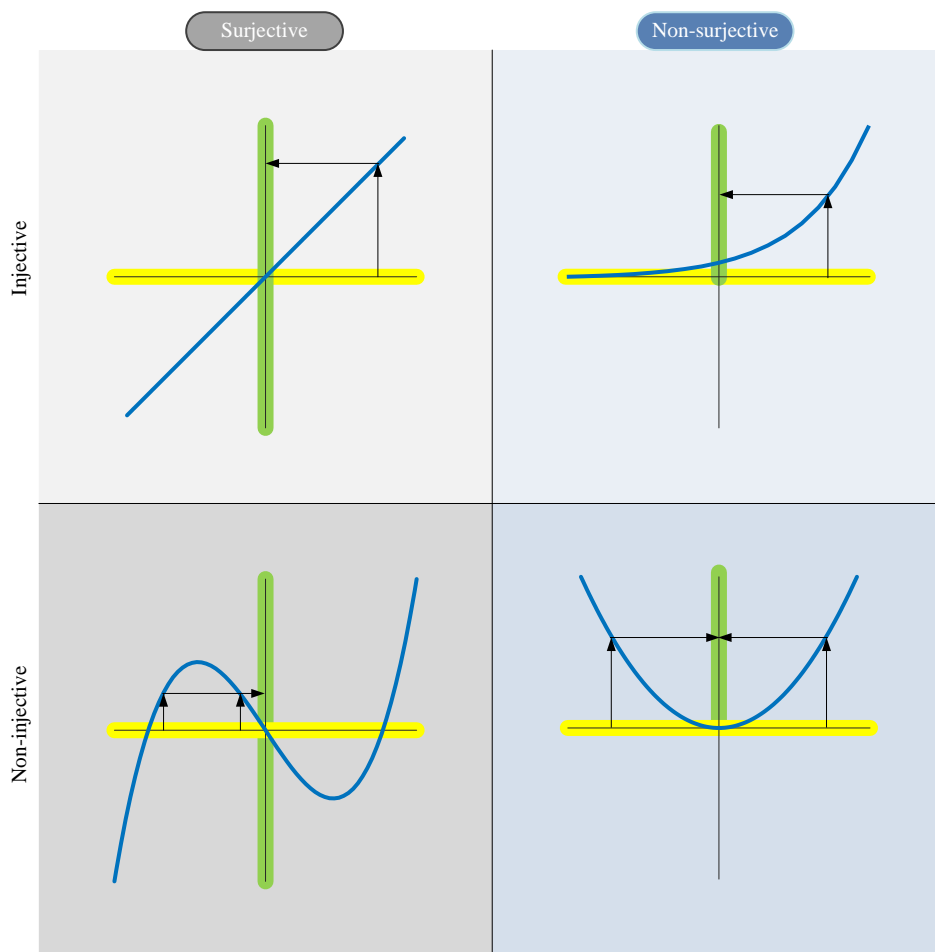


图 3. 单射、非单射、满射、非满射构成的四象限，具体实例

## 一元、二元、三元、多元

在数学中，函数的元 (arity) 指的是函数接受的参数个数。

常见的函数元数包括：

一元函数 (unary function) 接受一个参数。例如， $f_1(x) = x$  是一个一元函数，它接受一个参数  $x$ 。

二元函数 (binary function) 接受两个参数。例如， $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  是一个二元函数，它接受两个参数  $x_1$  和  $x_2$ 。

三元函数 (ternary function) 接受三个参数。例如， $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$  是一个三元函数，它接受三个参数  $x_1$ 、 $x_2$  和  $x_3$ 。

多元函数 ( $n$ -ary function) 接受  $n$  个参数。多元函数的参数个数可以是任意多个，例如  $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  是一个多元函数，它接受任意  $n$  个参数  $x_1$ 、 $x_2$ 、...、 $x_n$ 。

下面我们就来聊聊如何利用本书前文介绍的各种可视化方案展示一元、二元、三元函数。

## 31.2 几个函数例子

### 一次函数

一元一次函数是一种形式为  $f(x) = ax + b$  的函数， $a$  和  $b$  是实数常数。它是最简单的线性函数，描述了一个直线的斜率和截距。图 4、图 5 所示为一元、二元、三元一次函数的几种可视化方案。

一次函数在数学和实际应用中非常有用。在统计学中，它被广泛用于线性回归分析，其中通过拟合一条直线来描述自变量与因变量之间的关系。这可以帮助我们预测和解释数据的变化趋势。

此外，一次函数还在分类决策面中扮演重要角色。在机器学习和模式识别中，一次函数可以用来划分特征空间，将数据点分为不同的类别。

鸢尾花书《数学要素》将专门介绍一次函数。

### 二次函数

一元二次函数是一种形式为  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的函数，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是实数常数且  $a$  不为零。图 6、图 7 所示为一元、二元、三元二次函数的几种可视化方案。

二次函数在数学和实际应用中有广泛的应用。在数学领域，二次函数是研究代数和解析几何的重要对象，它们具有丰富的性质和特征。

在实际应用中，二次函数可以用于建模和预测各种现象。例如，在物理学中，二次函数可以描述自由落体运动的高度随时间变化的关系。此外，二次函数还用于优化问题和曲线拟合。例如，在最优化领域，通过分析二次函数的性质，可以找到最小值或最大值的位置；在曲线拟合中，可以利用二次函数来逼近实际数据，并进行预测和插值。

鸢尾花书《数学要素》将专门介绍二次函数。

### 绝对值函数

绝对值函数是一种形式为  $f(x) = a|x - b|$  的函数， $a$  和  $b$  是实数常数。图 8、图 9 所示为一元、二元、三元绝对值函数的几种可视化方案。

绝对值函数在数学和实际应用中都具有重要的作用。在数学中，绝对值函数是一种特殊的分段函数，具有简单的图像和性质。它在不等式和绝对值相关的问题时经常出现。

绝对值函数可以用于测量误差或距离的绝对值，使得结果不受正负号影响。在优化问题中，绝对值函数常用于表示目标函数或约束条件，帮助找到最优解。此外，绝对值函数还在统计学和数据分析中发挥作用。它可以用于计算绝对误差或残差，评估模型的拟合程度。

鸢尾花书《数学要素》将专门介绍不同绝对值函数。

## 高斯函数

图 10、图 11 所示为一元、二元、三元高斯函数的几种可视化方案。高斯函数常用于高斯分布，因此高斯函数在统计学和概率论中广泛应用。高斯函数在数据分析和模型拟合中非常有用。它可以用来描述数据集的分布情况，并进行概率推断和统计推断。在机器学习中，高斯函数常用于聚类算法、异常检测和生成模型。此外，高斯函数还在信号处理中广泛应用，如图像处理和滤波。它可以用来平滑信号、降噪和边缘检测。

鸢尾花书《统计至简》将专门介绍高斯分布。

## 拉普拉斯核函数

拉普拉斯核函数是一种常用的非线性核函数，用于支持向量机 (Support Vector Machine, SVM) 和其他机器学习算法中的非线性分类和回归任务。图 12、图 13 所示为一元、二元、三元拉普拉斯核函数的几种可视化方案。

鸢尾花书《机器学习》将专门介绍支持向量机。

拉普拉斯核函数可以将数据映射到高维特征空间，从而在低维空间中实现非线性分类。与其他核函数相比，拉普拉斯核函数在决策边界附近具有更陡峭的变化，因此对异常点更敏感，使其能够更好地捕捉数据中的局部结构。

拉普拉斯核函数在图像识别、文本分类、生物信息学等领域广泛应用。它具有良好的分类性能，并且在处理高维数据和处理小样本问题时表现出色。

## 逻辑函数

逻辑函数是一种常用的非线性函数，也称为 Sigmoid 函数或逻辑曲线。逻辑函数的取值范围在 0 到 1 之间，具有平滑的 S 形曲线。图 14、图 15 所示为一元、二元、三元逻辑函数的几种可视化方案。

逻辑函数在机器学习、神经网络和统计学中广泛应用。它主要用于将输入值映射到概率值，将连续变量转换为概率分布。在二元分类任务中，逻辑函数可以将输入的线性组合转化为 0 和 1 之间的概率值，用于判断样本属于某一类别的概率。

逻辑函数在逻辑回归模型中扮演重要角色，用于建立分类模型和进行概率预测。它能够对数据进行非线性建模，拟合复杂的分类决策边界。

此外，逻辑函数还用于激活函数，如在神经网络中，逻辑函数可用于将神经元的输出转化为非线性响应，提高模型的表达能力。

鸢尾花书《数据有道》将专门介绍逻辑回归。

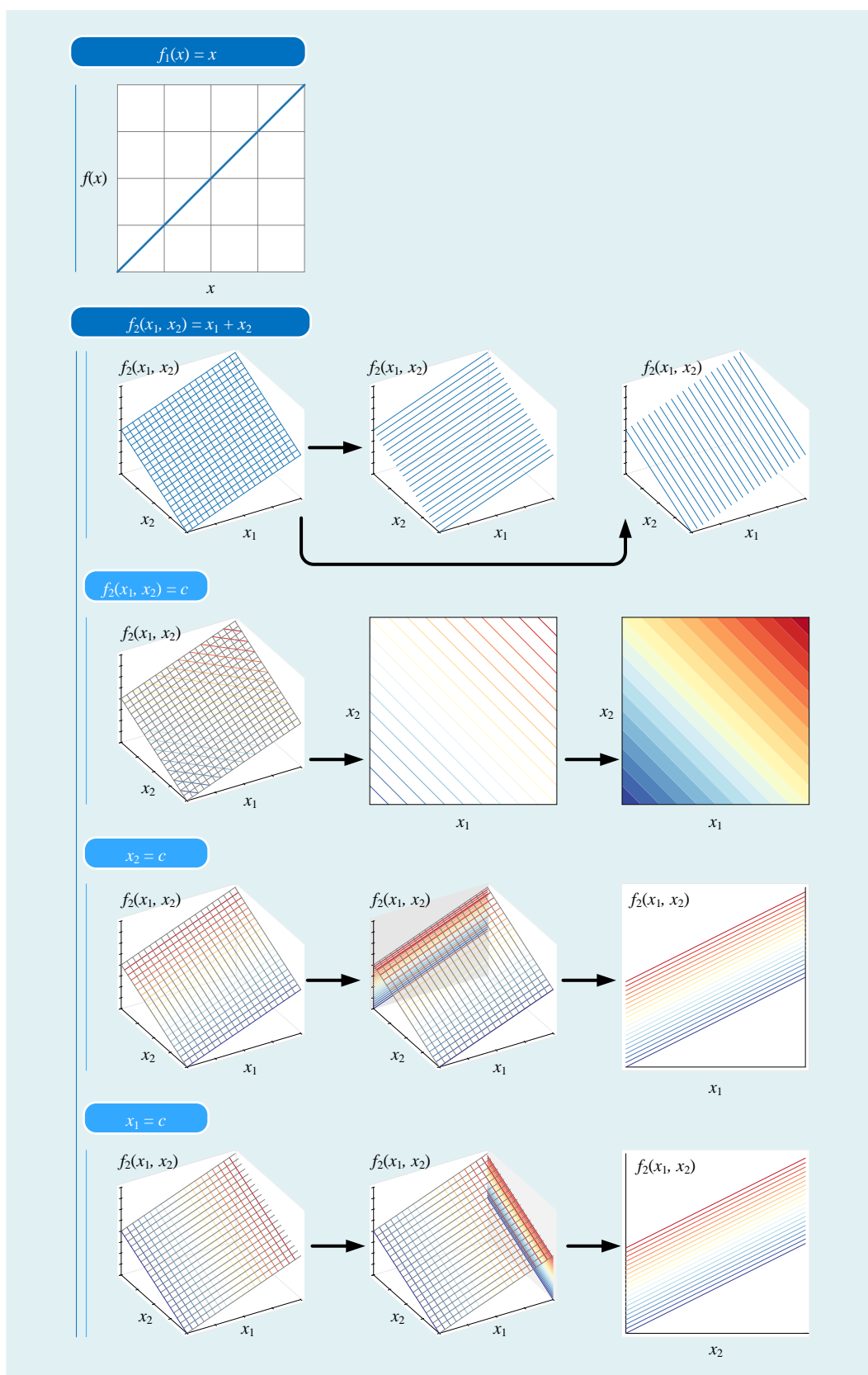


图 4. 一次函数，一元、二元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

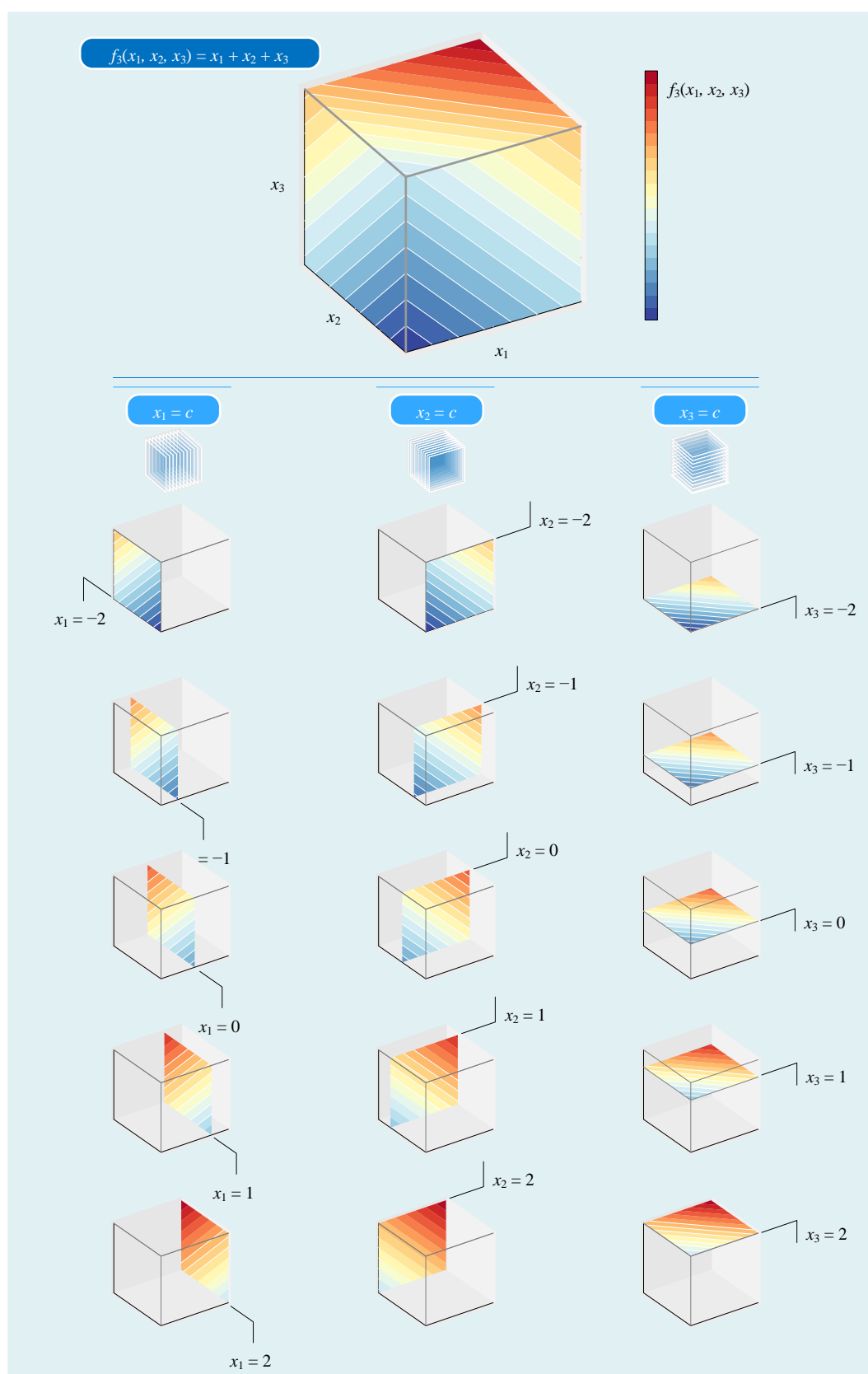


图 5. 一次函数，三元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



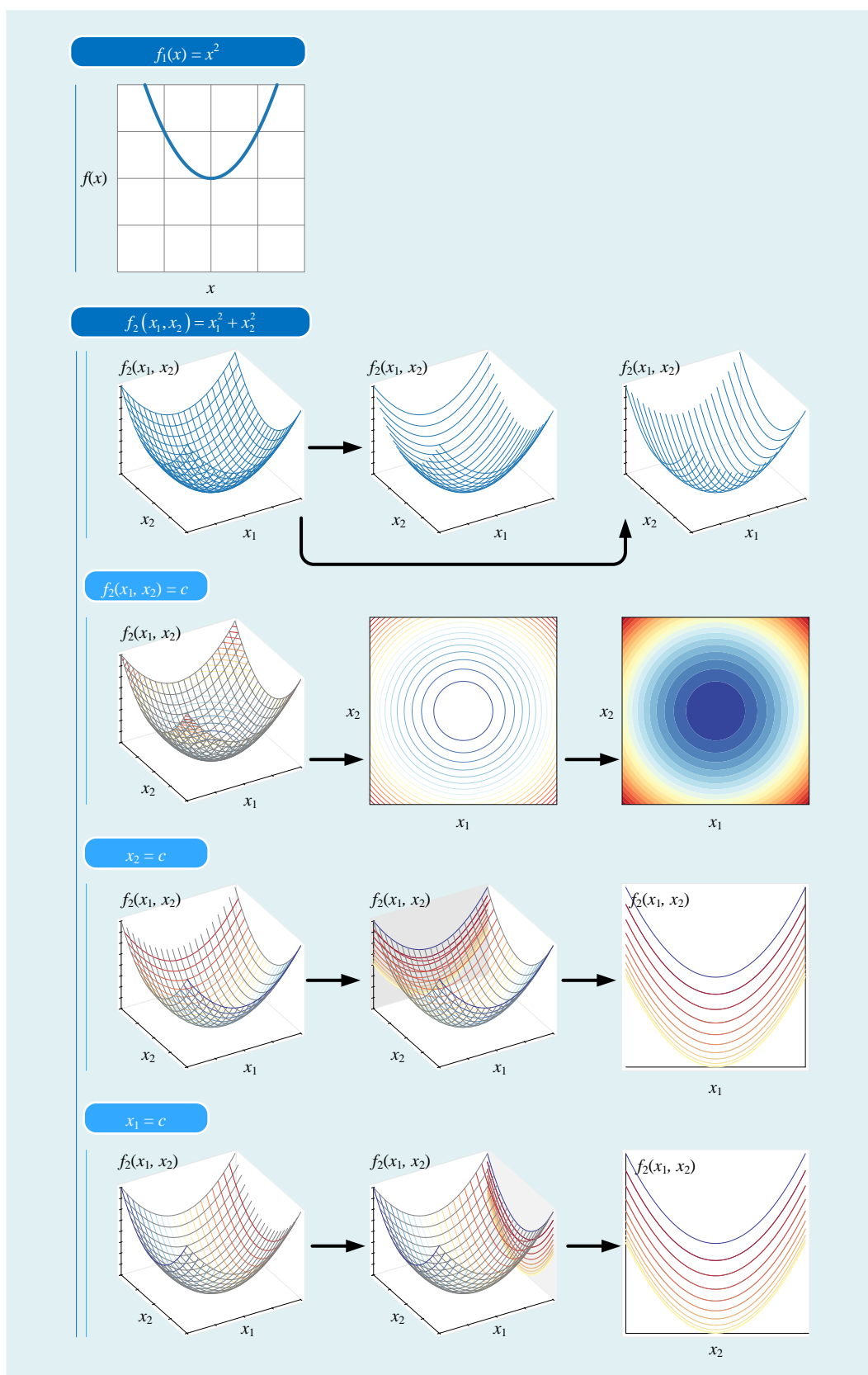


图 6. 二次函数，一元、二元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

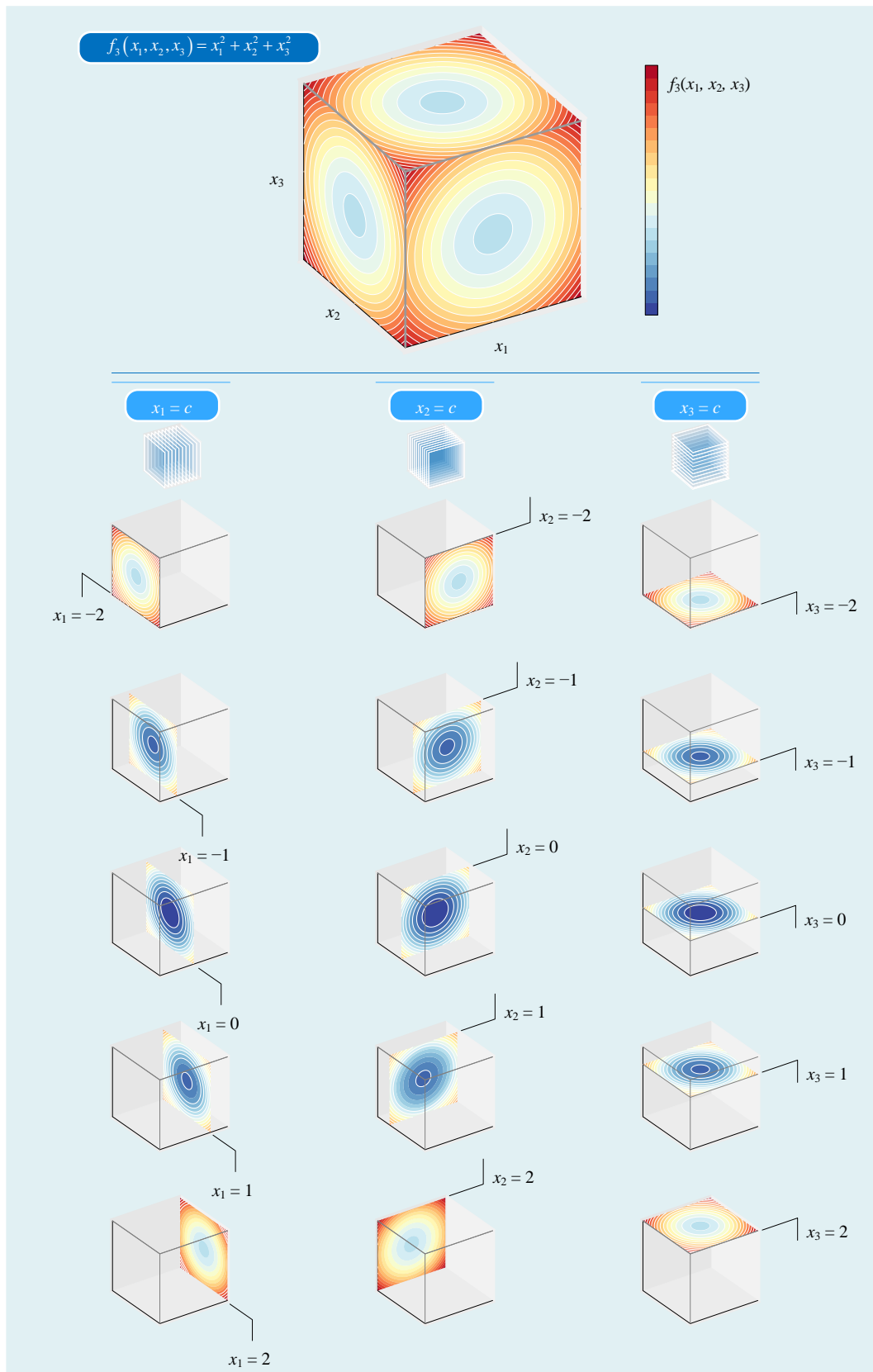


图 7. 二次函数，三元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

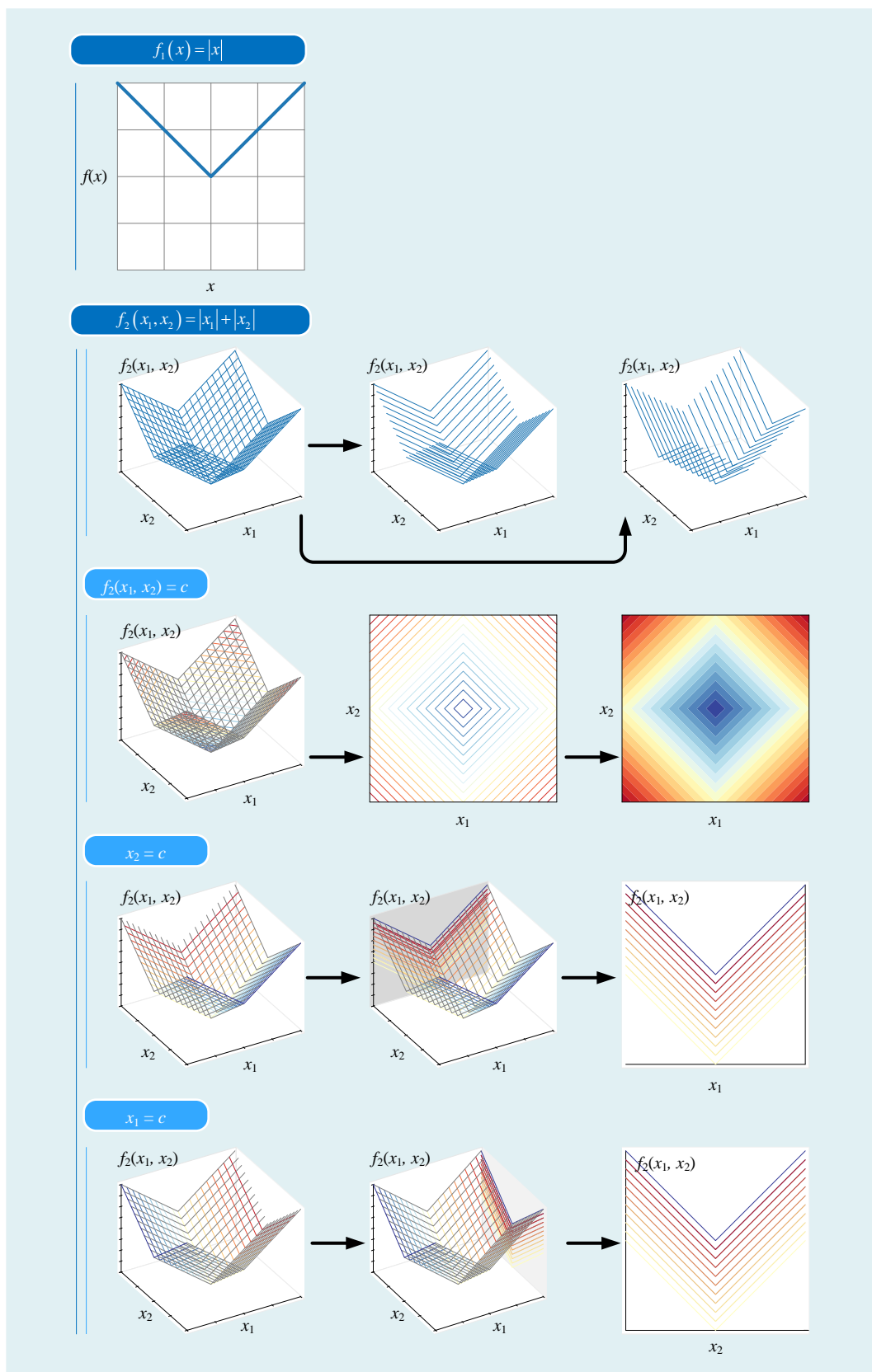


图 8. 绝对值函数，一元、二元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

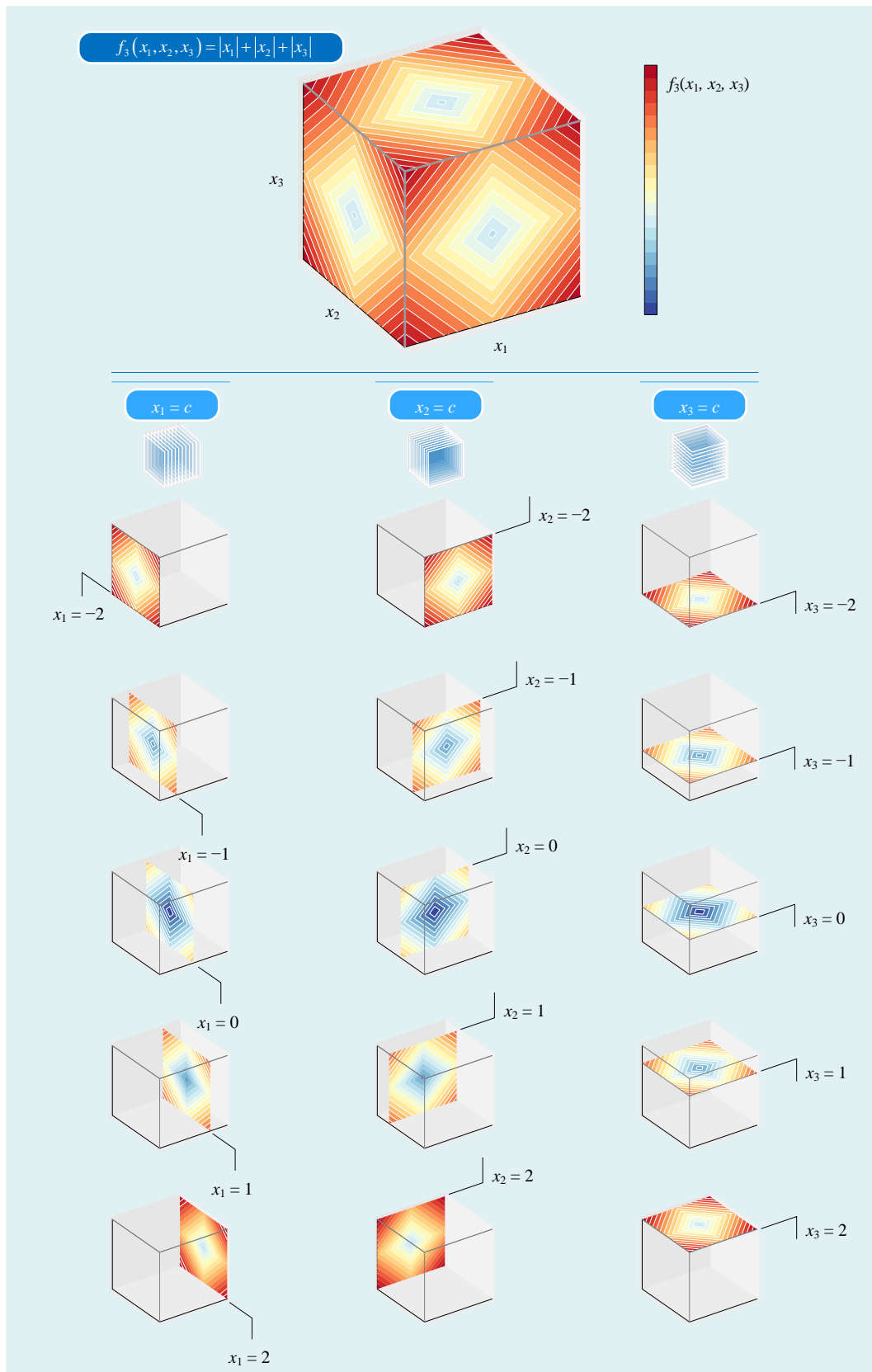


图 9. 绝对值函数，三元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

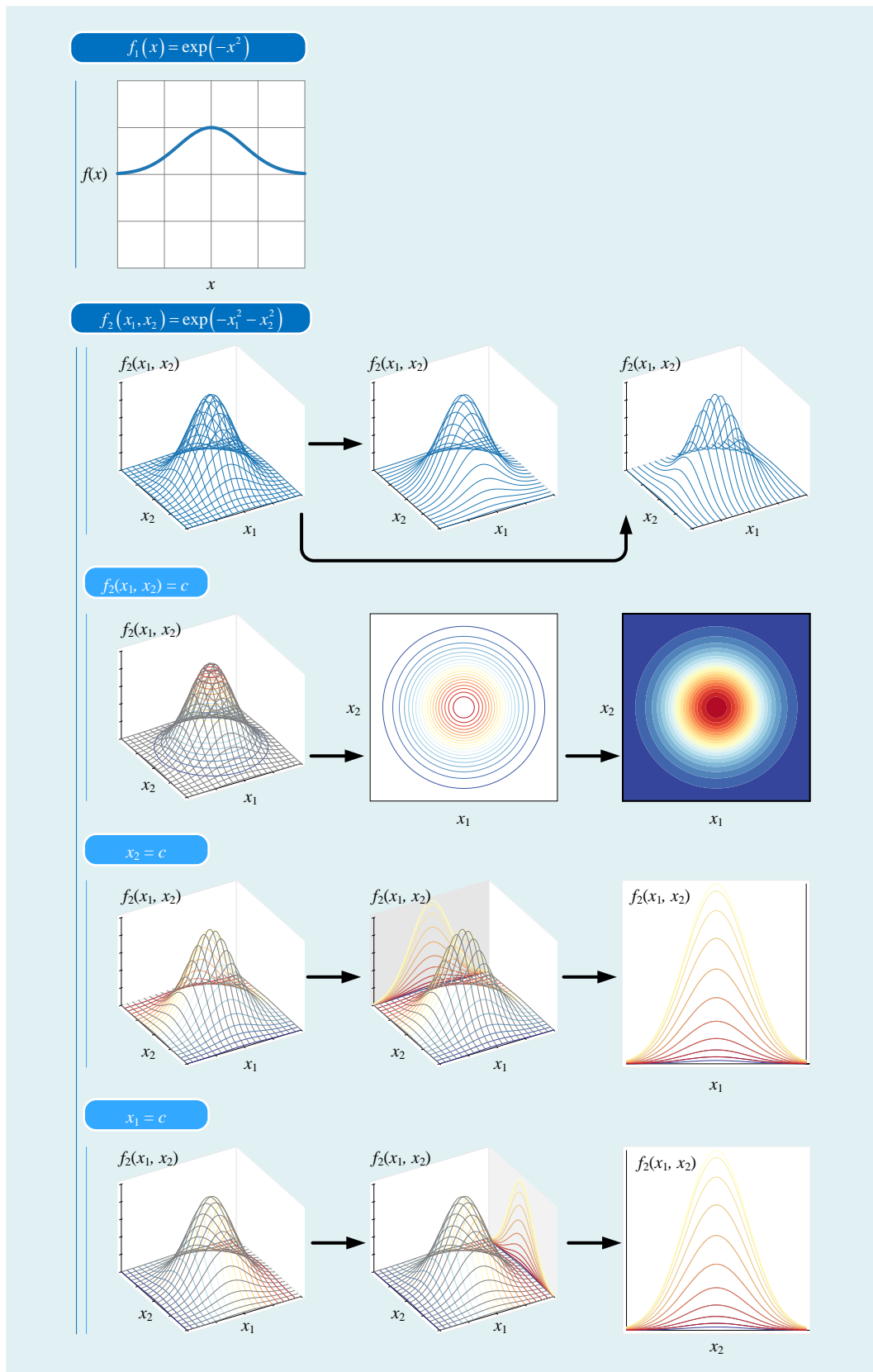


图 10. 高斯函数，一元、二元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

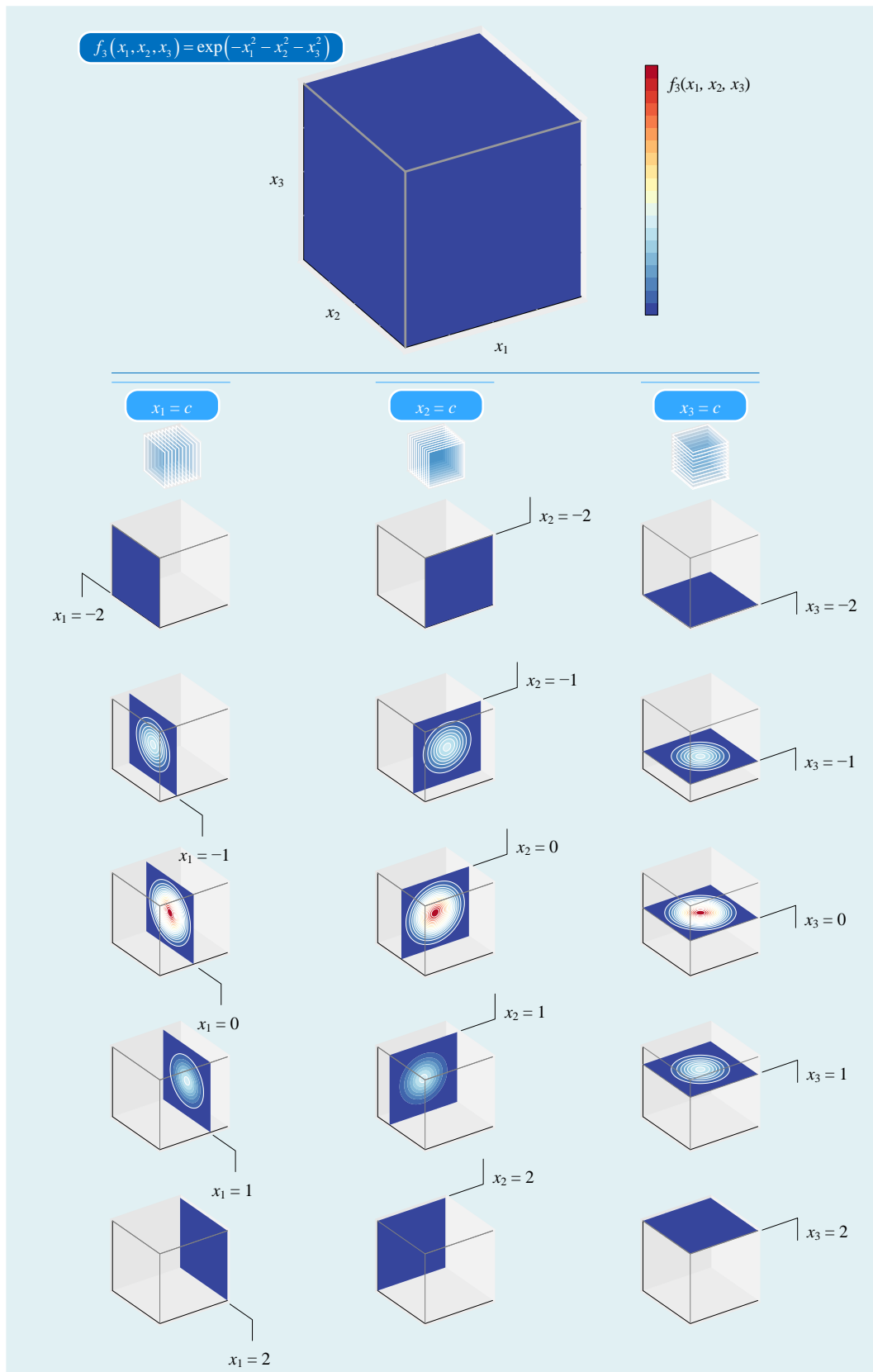


图 11. 高斯函数，三元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

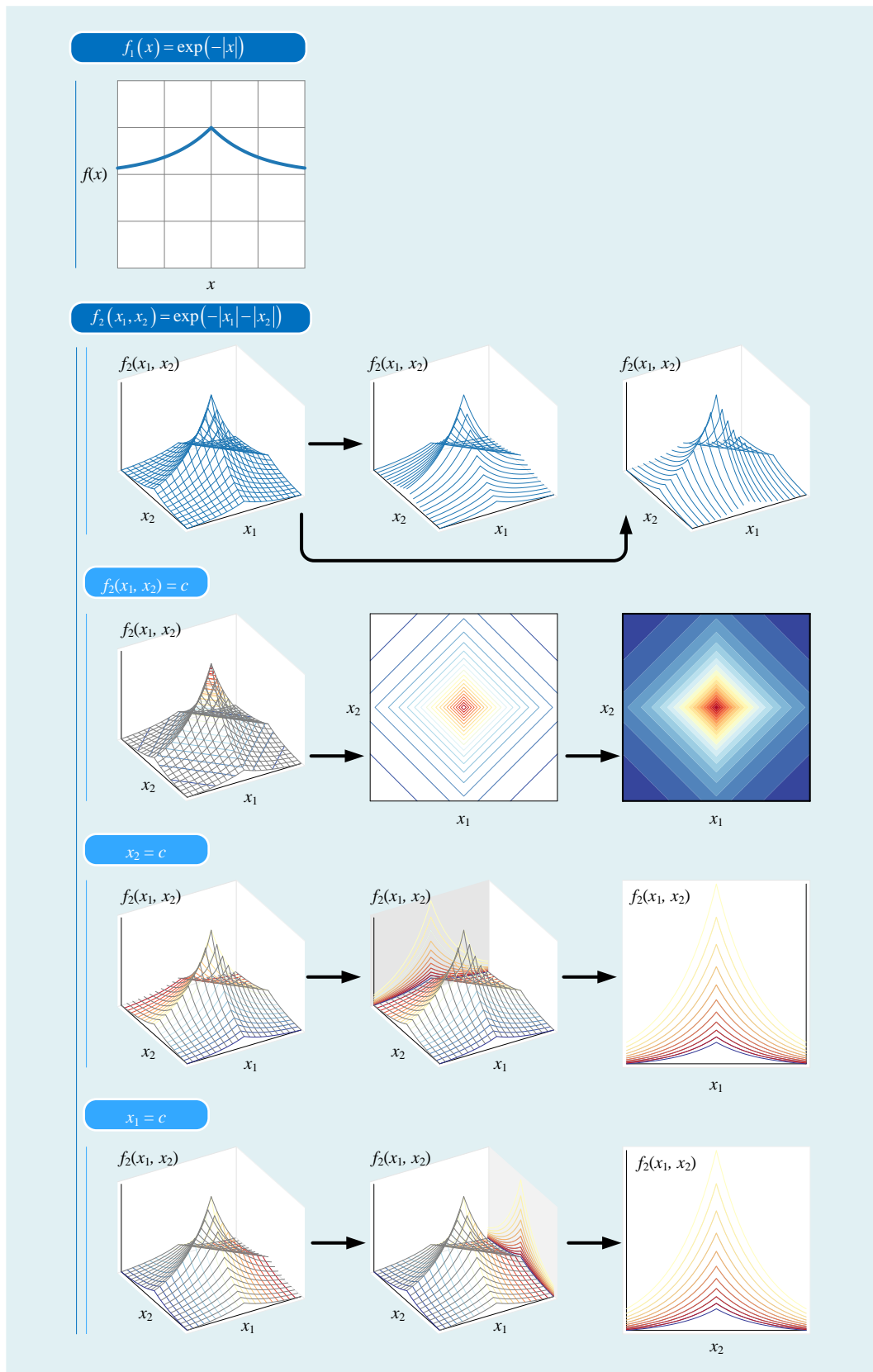


图 12. 拉普拉斯核函数，一元、二元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



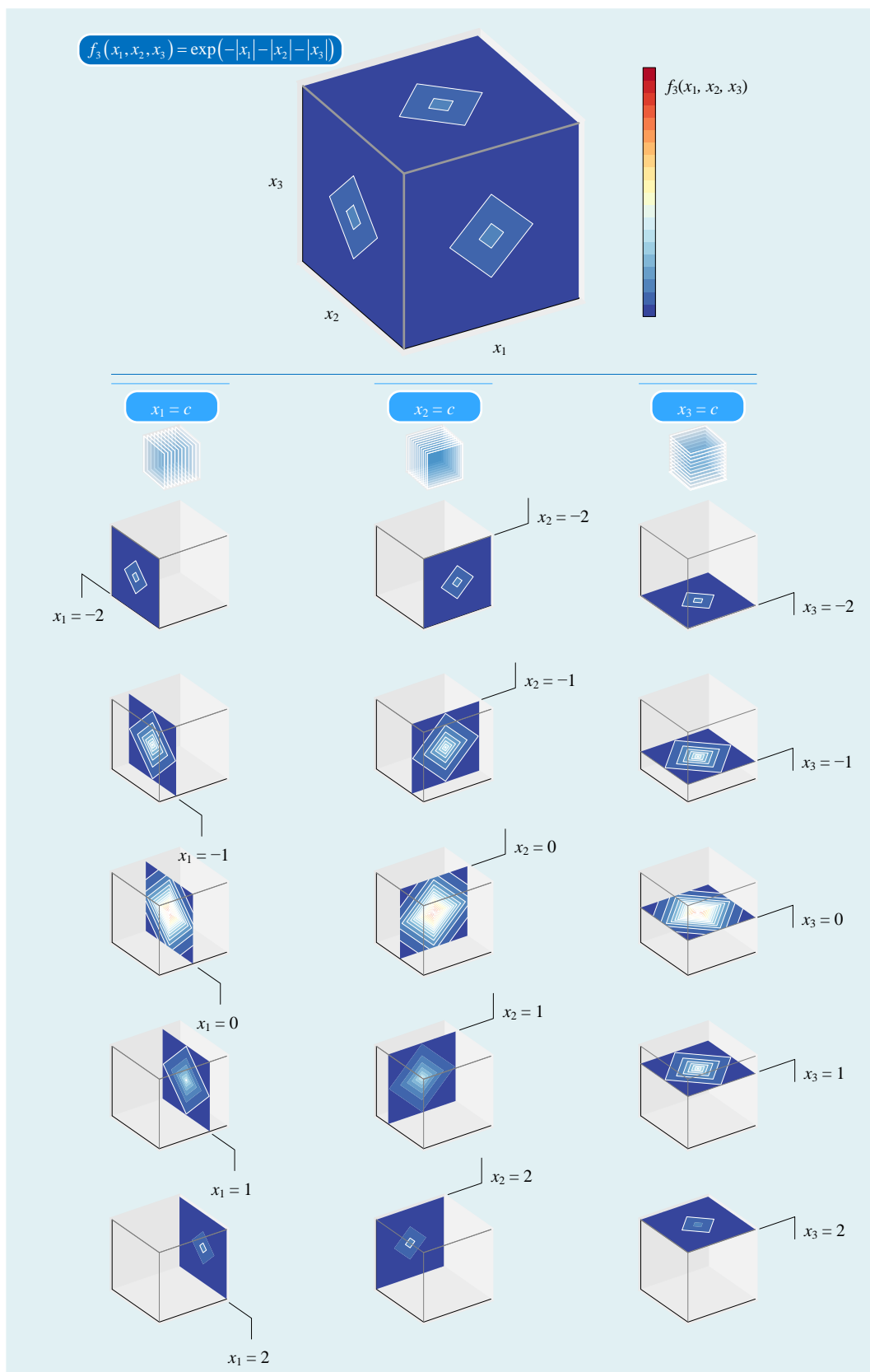


图 13. 拉普拉斯核函数，三元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



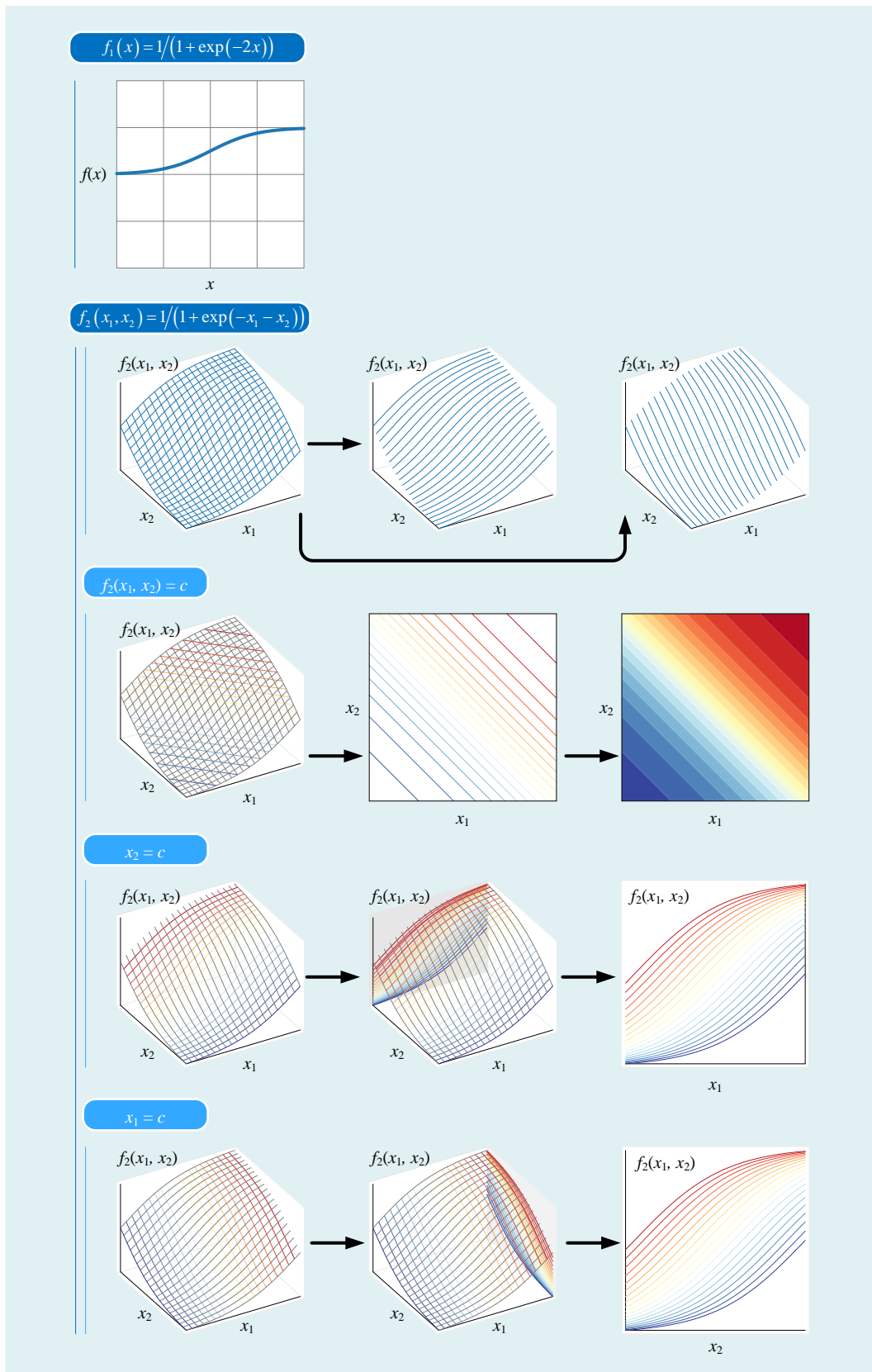


图 14. 逻辑函数，一元、二元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

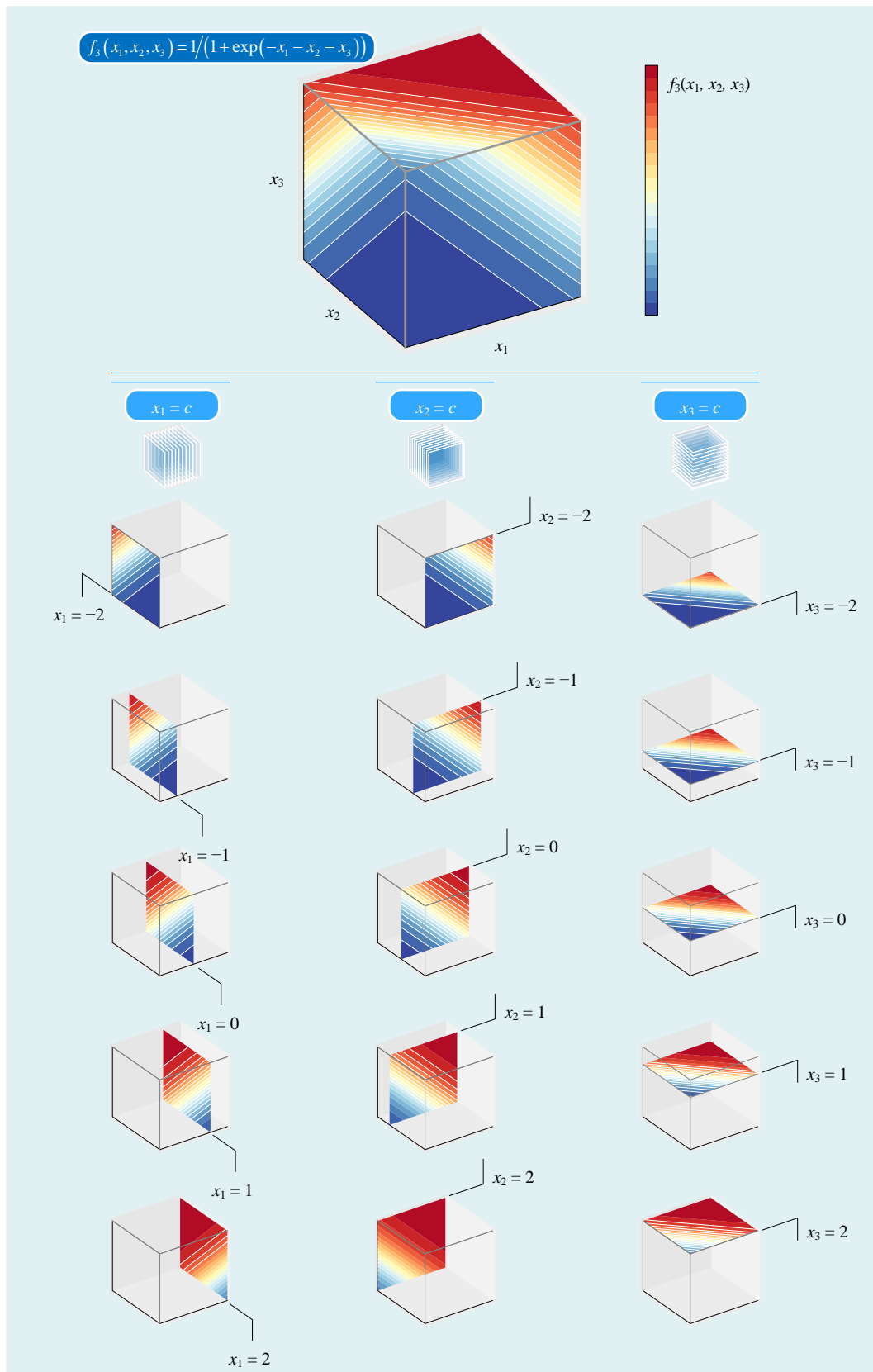


图 15. 逻辑函数，三元

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)