

# 27

## Geometric Transformations in 3D Space

# 立体几何变换

平移、缩放、旋转、镜像、投影、剪切



超现实主义极具破坏力，它打破视觉的枷锁。

***Surrealism is destructive, but it destroys only what it considers to be shackles limiting our vision.***

——萨尔瓦多·达利 (Salvador Dali) | 西班牙超现实主义画家 | 1904 ~ 1989



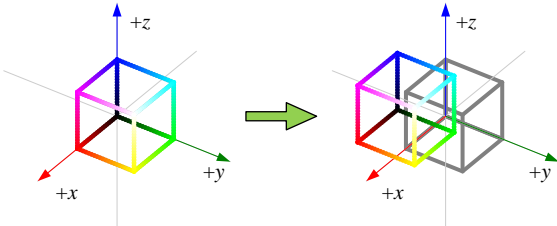
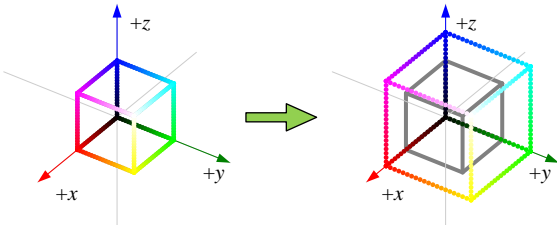
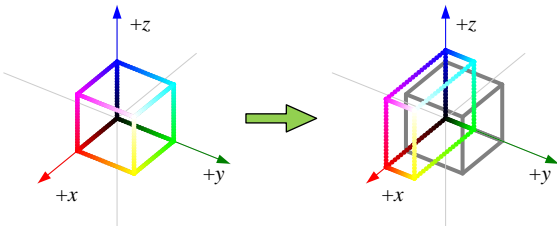
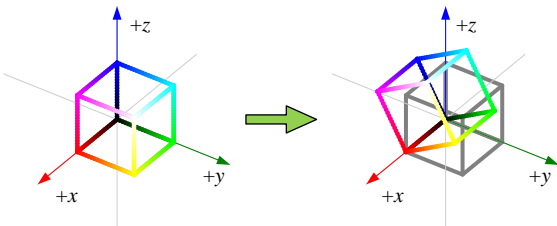
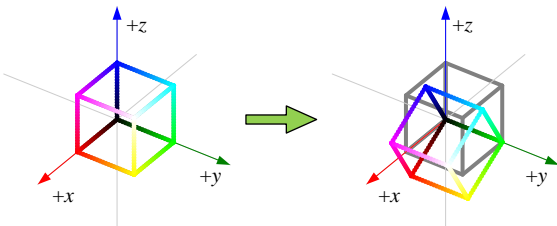
- ◀ matplotlib.pyplot.quiver() 绘制箭头图
- ◀ matplotlib.pyplot.scatter() 绘制散点图
- ◀ numpy.column\_stack() 将两个矩阵按列合并
- ◀ numpy.concatenate() 将多个数组进行连接
- ◀ numpy.cos() 计算余弦
- ◀ numpy.deg2rad() 将角度转化为弧度
- ◀ numpy.linspace() 在指定的间隔内, 返回固定步长的数据
- ◀ numpy.ones\_like() 用来生成和输入矩阵形状相同的全 1 矩阵
- ◀ numpy.roll() 将数组中的元素按照指定的偏移量进行循环移动, 并返回一个新的数组。
- ◀ numpy.sin() 计算正弦
- ◀ numpy.vstack() 返回竖直堆叠后的数组

## 27.1 立体几何变换

上一章介绍的在平面上的几何变换(平移、缩放、旋转、镜像、投影、剪切)也可以用在三维空间中。表 1 总结常见立体几何仿射变换。在鸢尾花书中，最常用的 4 种几何变换为平移、缩放、旋转、投影，下面我们逐个可视化这三种几何变换。

本章介绍的这些立体几何变换涉及的数学工具将在《矩阵力量》中展开讲解。

表 1. 常见仿射变换，立体几何

几何变换	示例
平移 (translation)	
等比例缩放 $s$ 倍 (equal scaling)	
非等比例缩放 (unequal scaling)	
绕 $x$ 轴逆时针旋转 (counterclockwise rotation around $x$ -axis)	
绕 $y$ 轴逆时针旋转 (counterclockwise rotation around $y$ -axis)	

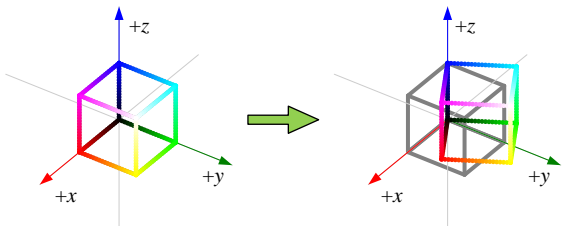
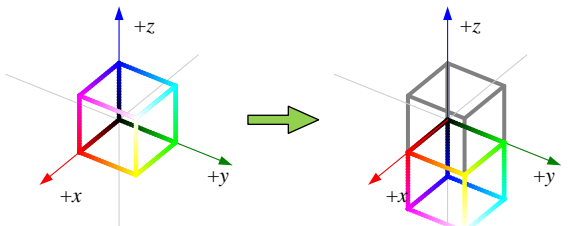
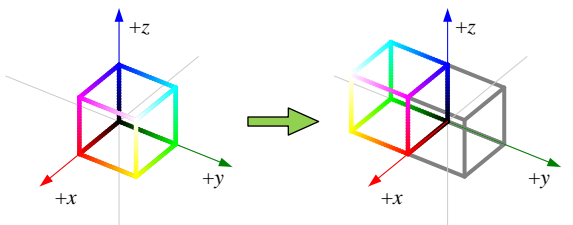
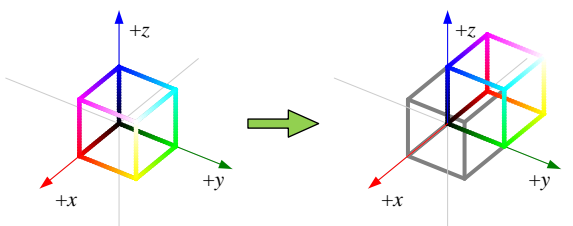
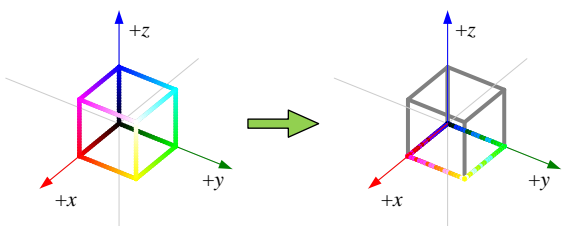
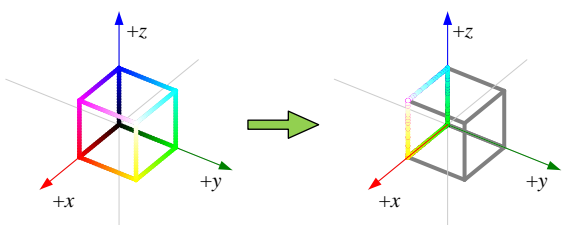
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

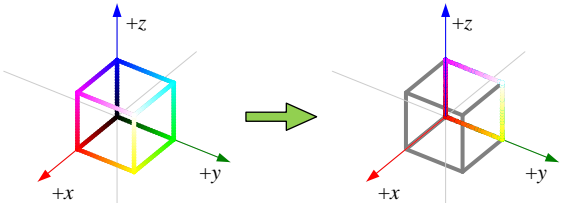
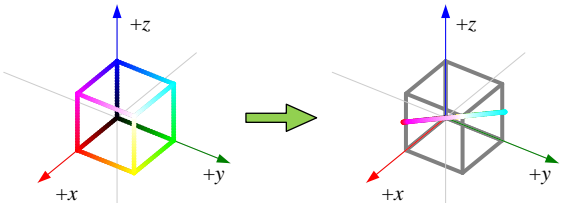
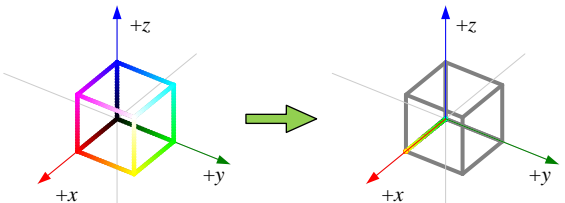
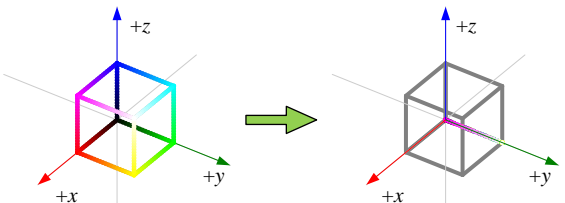
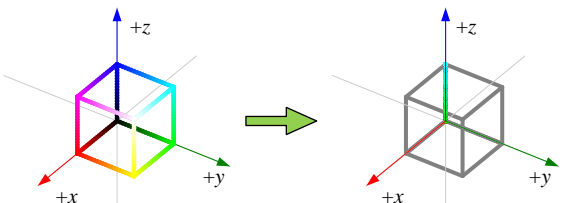
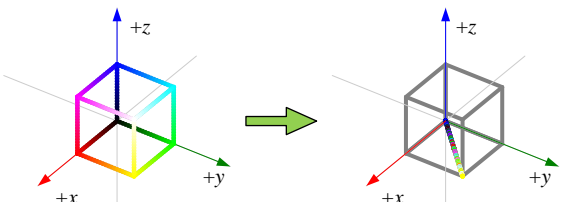
版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

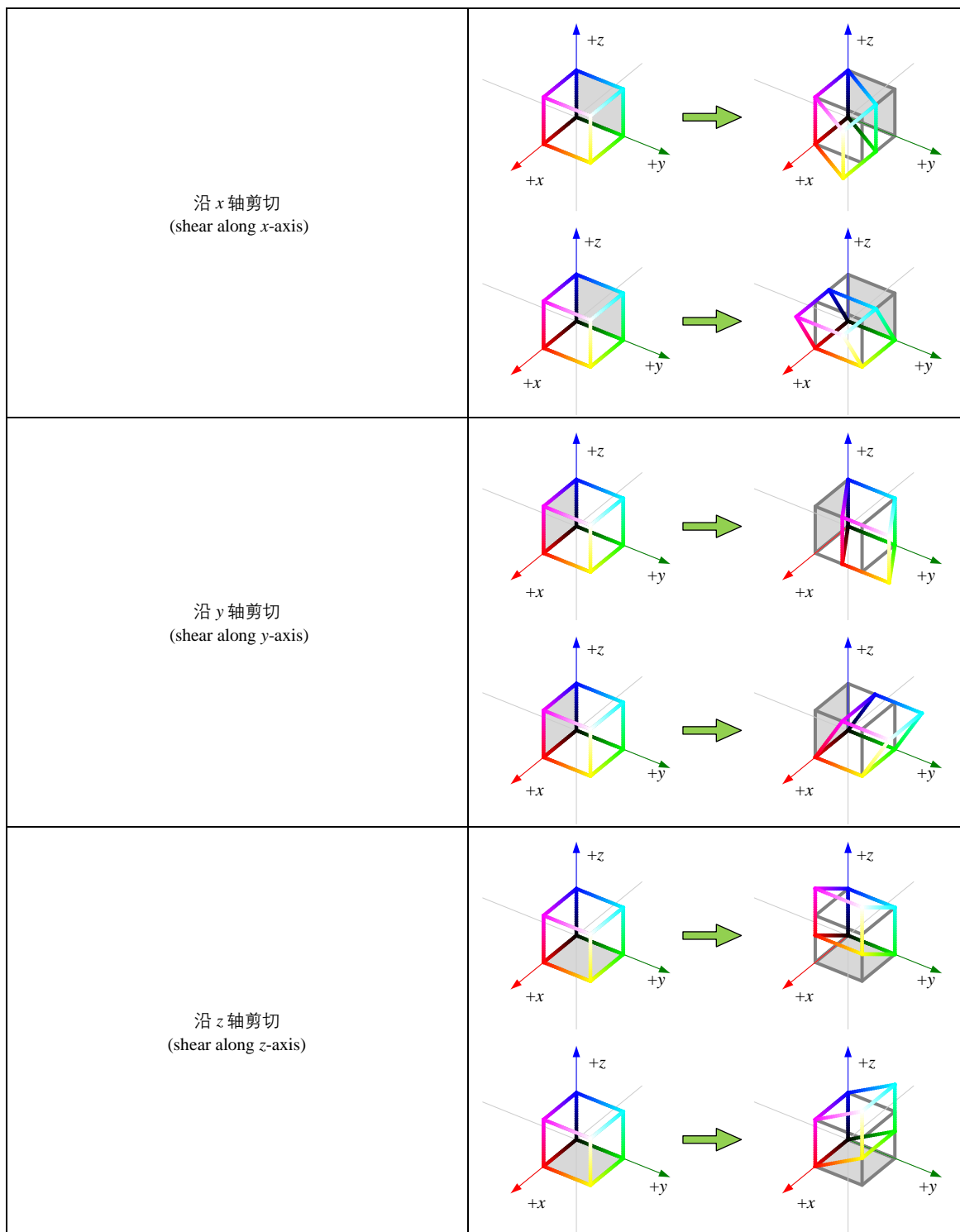
代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

<p>绕 <math>z</math> 轴逆时针旋转 (counterclockwise rotation around <math>z</math>-axis)</p>	
<p>关于 <math>xy</math> 平面镜像对称 (reflection relative to <math>xy</math> plane)</p>	
<p>关于 <math>xz</math> 平面镜像对称 (reflection relative to <math>xz</math> plane)</p>	
<p>关于 <math>yz</math> 平面镜像对称 (reflection relative to <math>yz</math> plane)</p>	
<p>向 <math>xy</math> 平面投影 (projection to <math>xy</math> plane)</p>	
<p>向 <math>xz</math> 平面投影 (projection to <math>xz</math> plane)</p>	

向 $yz$ 平面投影 (projection to $yz$ plane)	
向特定平面投影	
向 $x$ 轴投影 (projection to $x$ axis)	
向 $y$ 轴投影 (projection to $y$ axis)	
向 $z$ 轴投影 (projection to $z$ axis)	
向特定直线投影	



## 27.2 4 种常用几何变换

为了方便可视化下文 4 种常用的立体几何变换，我们给出如图 1 所示的可视化方案。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

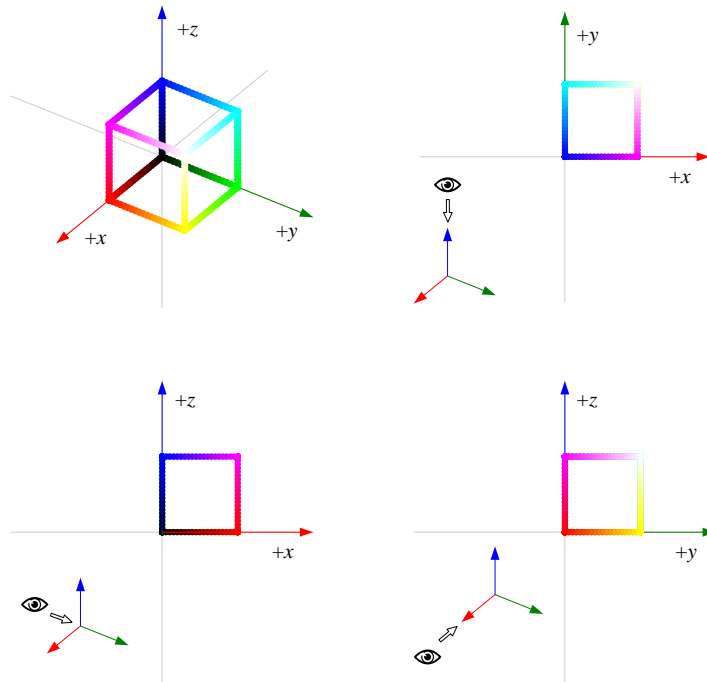


图 1. 原始数据，四个投影视角

## 平移

图 2 所示为从四个投影视角展示平移。

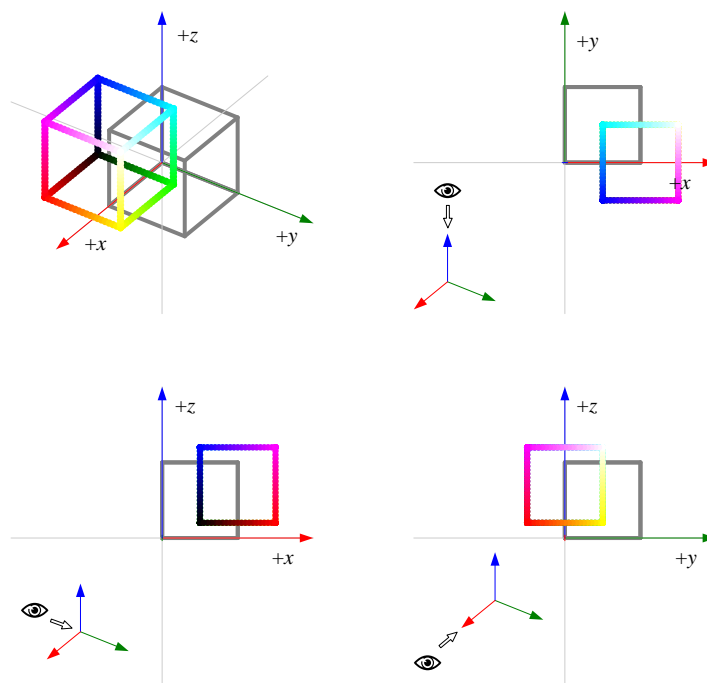


图 2. 平移，四个投影视角

## 缩放

图 5 所示为从四个投影视角展示等比例缩放、非等比例缩放。

## 旋转

三维空间中，三个旋转角度和飞机姿态的三个角度密切相关。如图 3 所示，翻滚角 (Roll Angle) 是飞机绕其纵轴旋转的角度，用于描述飞机的侧倾程度。当飞机向右侧倾斜时，翻滚角为正值；向左倾斜时，翻滚角为负值。

俯仰角 (Pitch Angle) 是飞机绕其横轴旋转的角度，用于描述飞机的仰角或俯角。当飞机向上抬头时，俯仰角为正值；向下俯冲时，俯仰角为负值。

偏航角 (Yaw Angle) 是飞机绕其垂直轴旋转的角度，用于描述飞机的航向偏转。当飞机顺时针旋转时，偏航角为正值；逆时针旋转时，偏航角为负值。

如图 4 所示，这些角度通常使用欧拉角 (Euler Angles) 系统来表示，其中翻滚角、俯仰角和偏航角分别绕飞机的纵轴、横轴和垂直轴旋转。图 6、图 7、图 8 所示为从四个投影视角展示旋转操作。特别地，图 8 中正方体分别经过三个方向旋转。

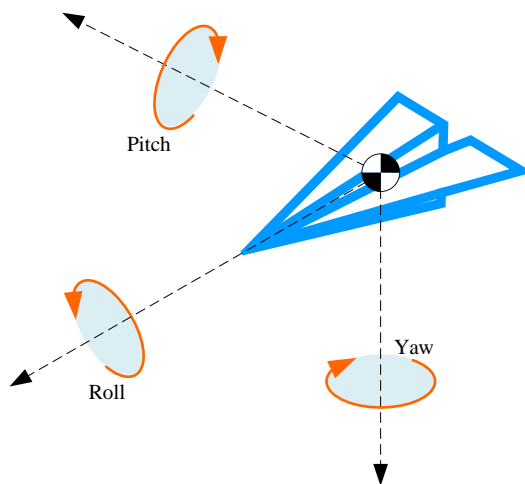


图 3. 飞机姿态的三个角度

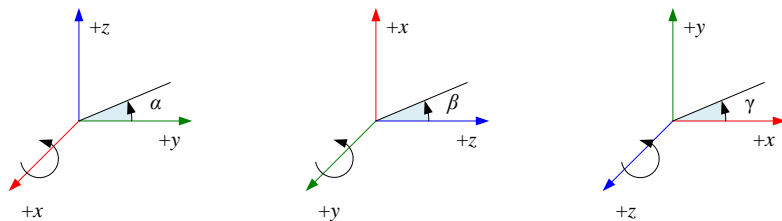


图 4. 三个旋转角度

## 投影

图 9、图 10 所示为从四个投影视角展示投影操作。

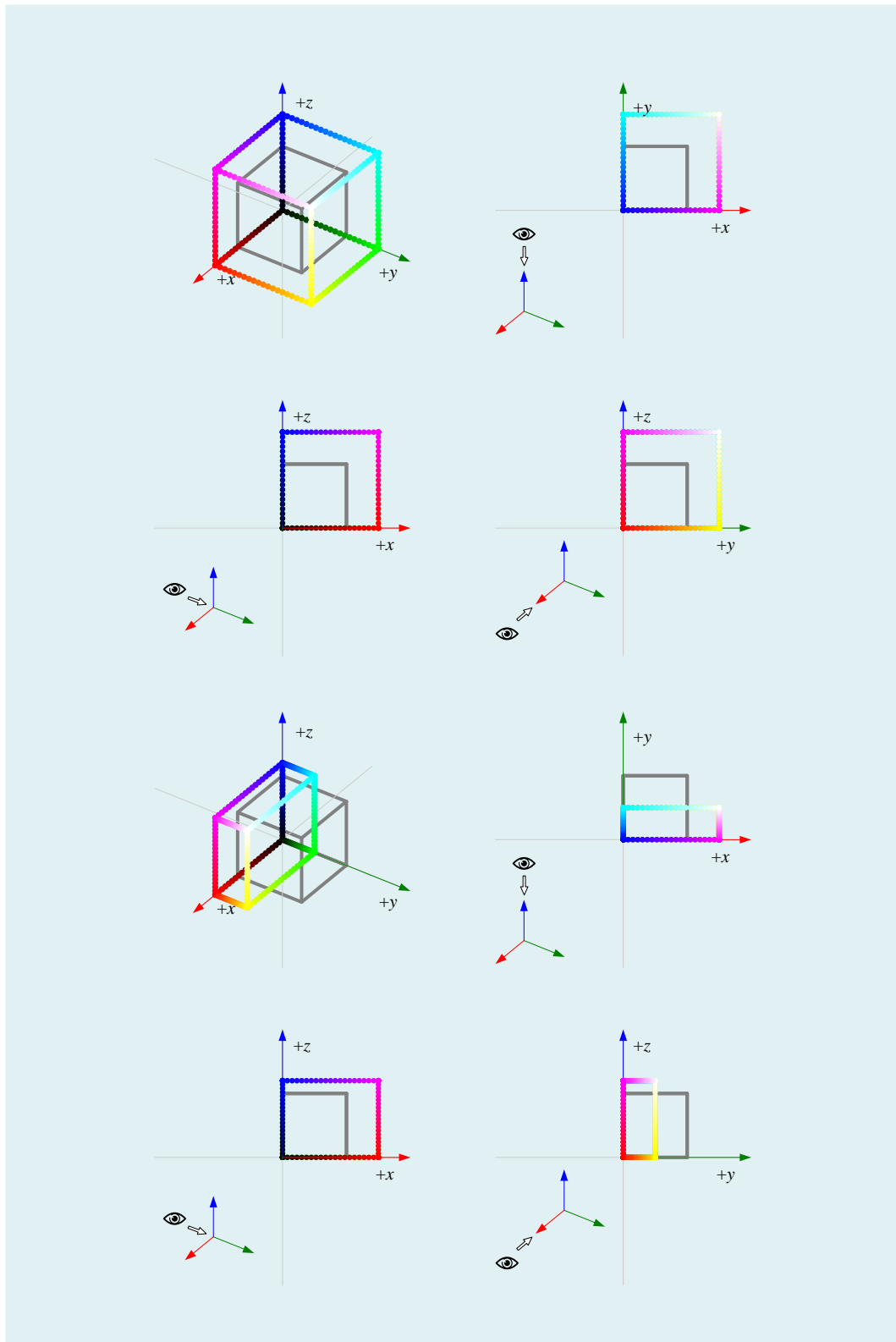


图 5. RGB 立方体框线，等比例缩放、非等比例缩放，四个投影视角



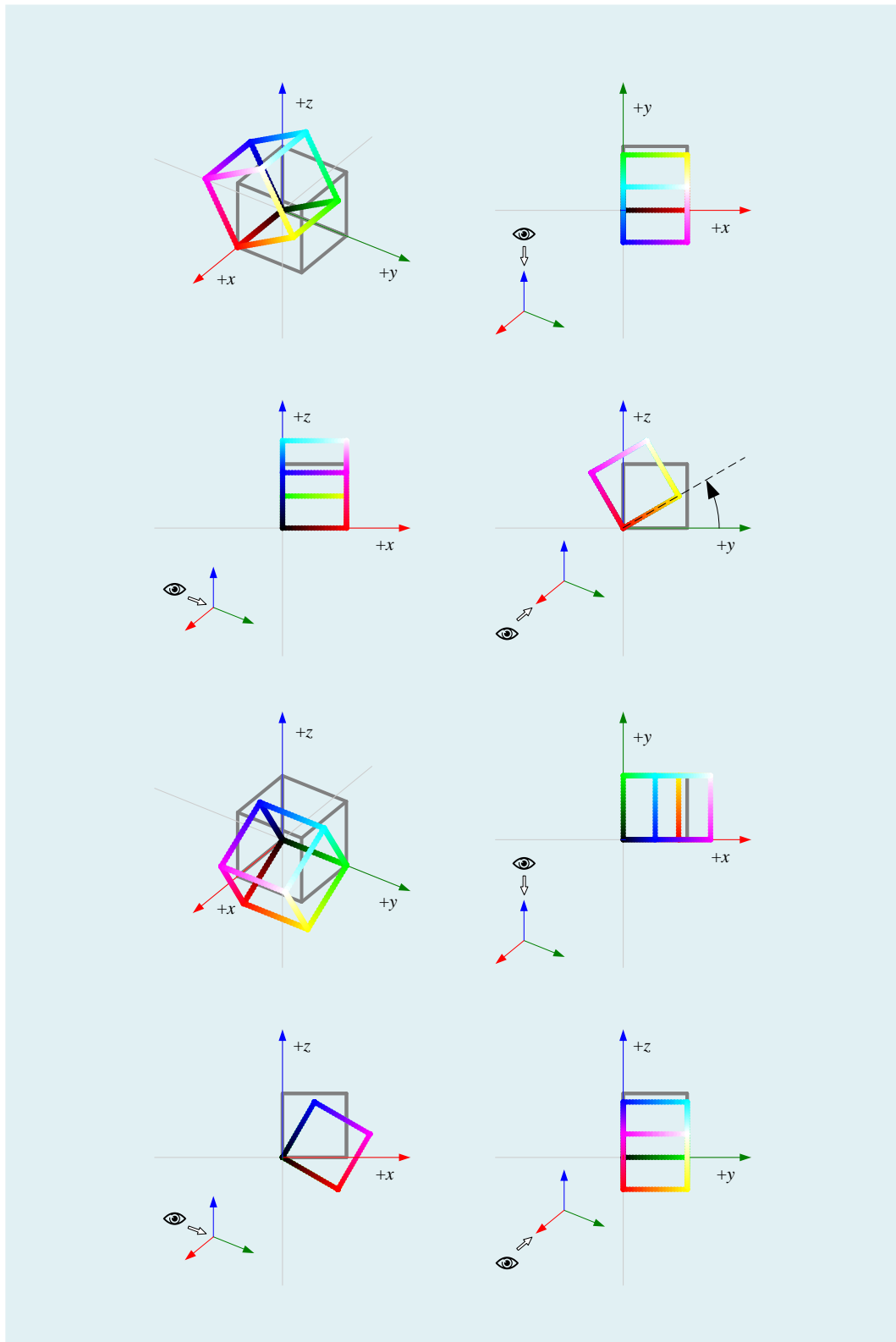


图 6. RGB 立方体框线，旋转，第 1 组，四个投影视角

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

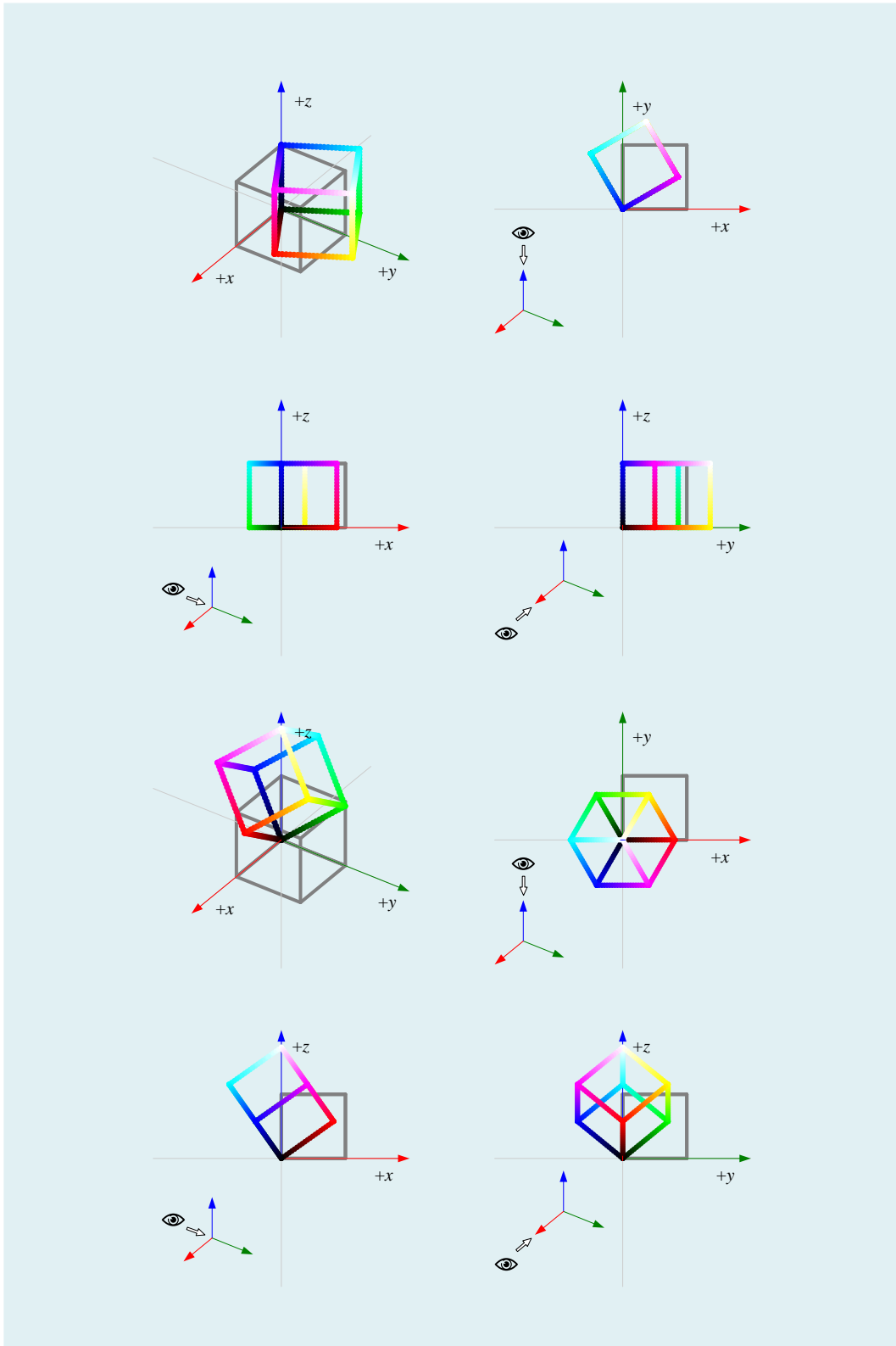


图 7. RGB 立方体框线，旋转，第 2 组，四个投影视角

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

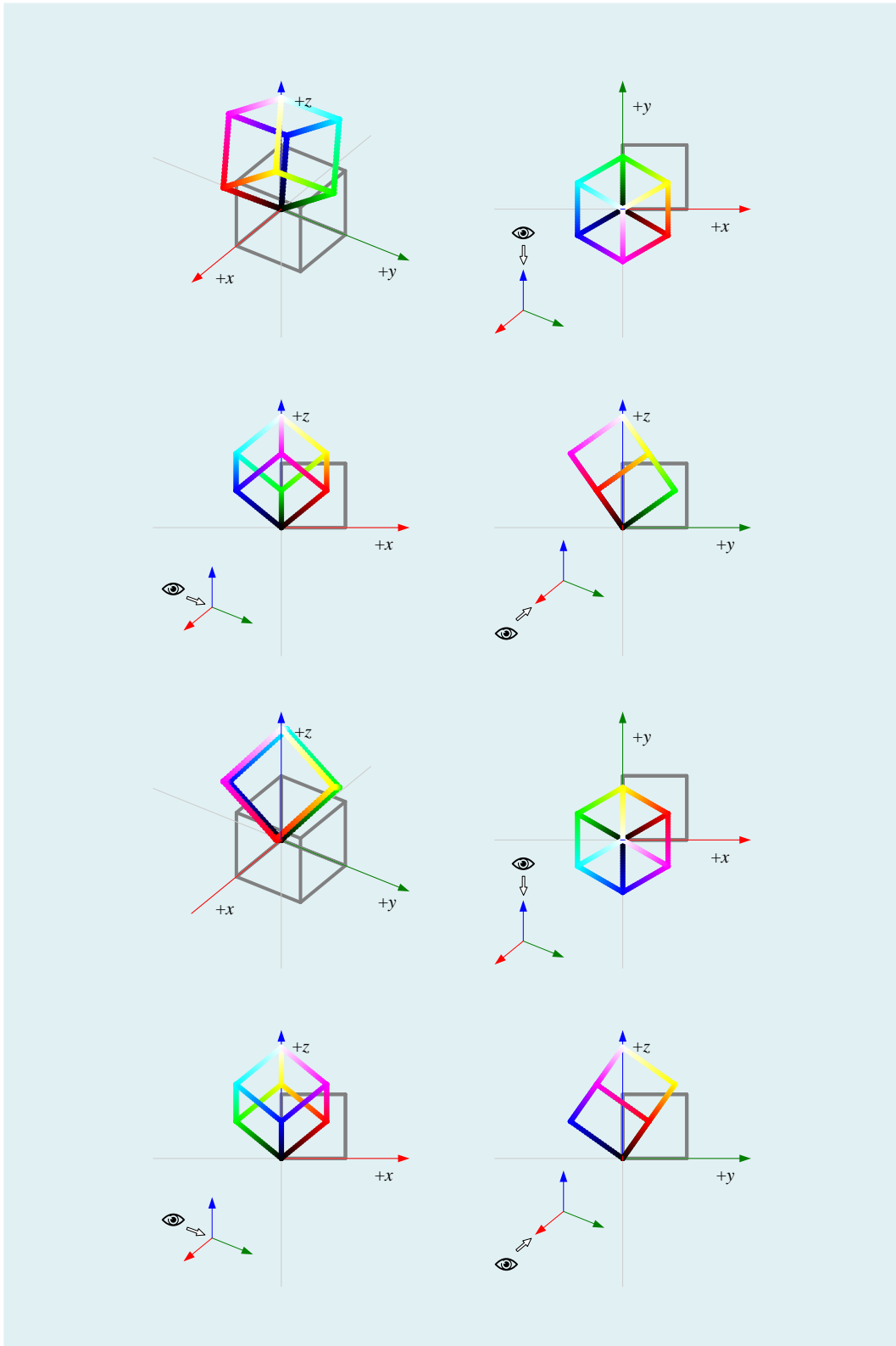


图 8. RGB 立方体框线，旋转，第 3 组，四个投影视角

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

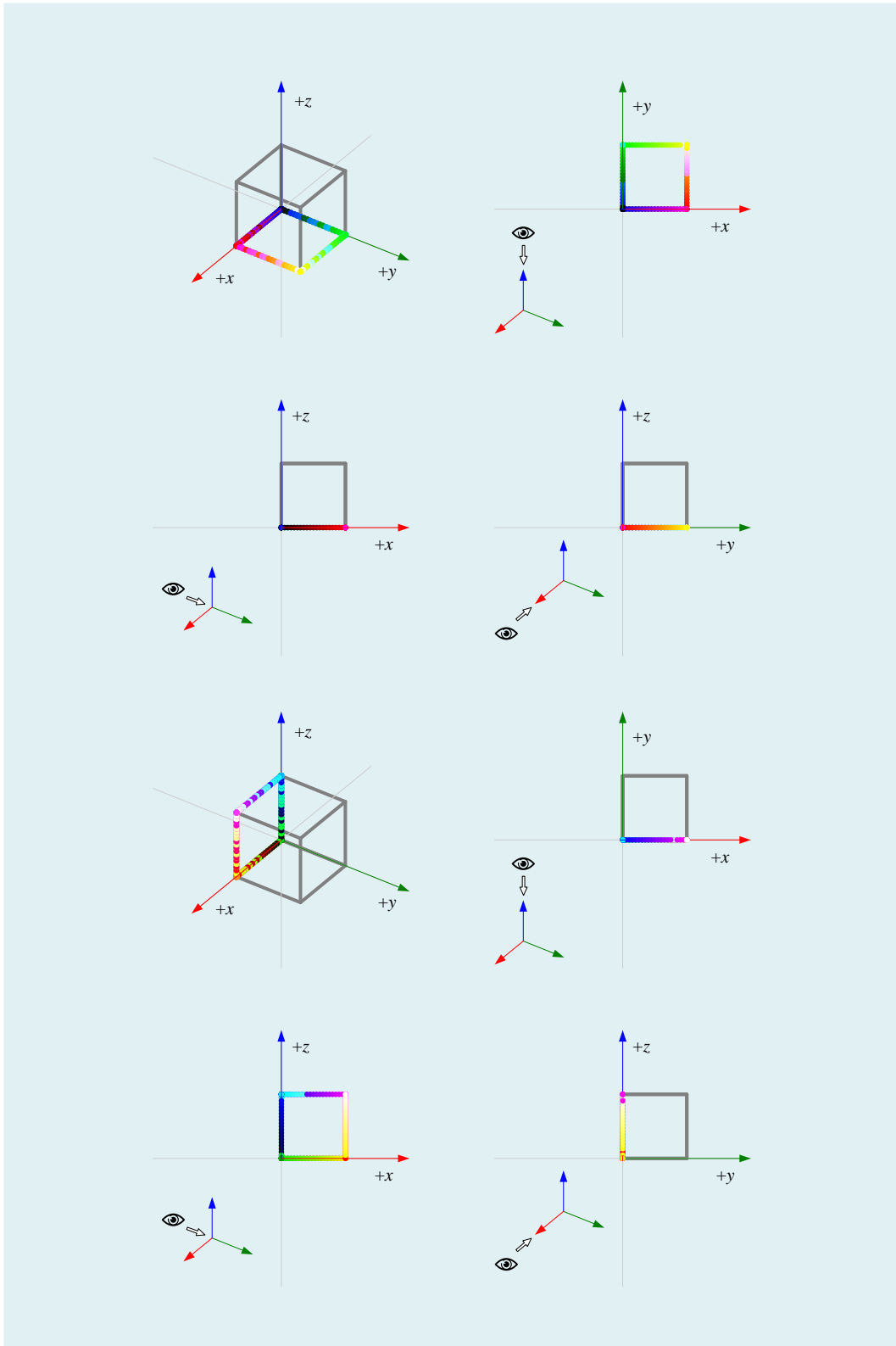


图 9. RGB 立方体框线，投影，第 1 组，四个投影视角

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

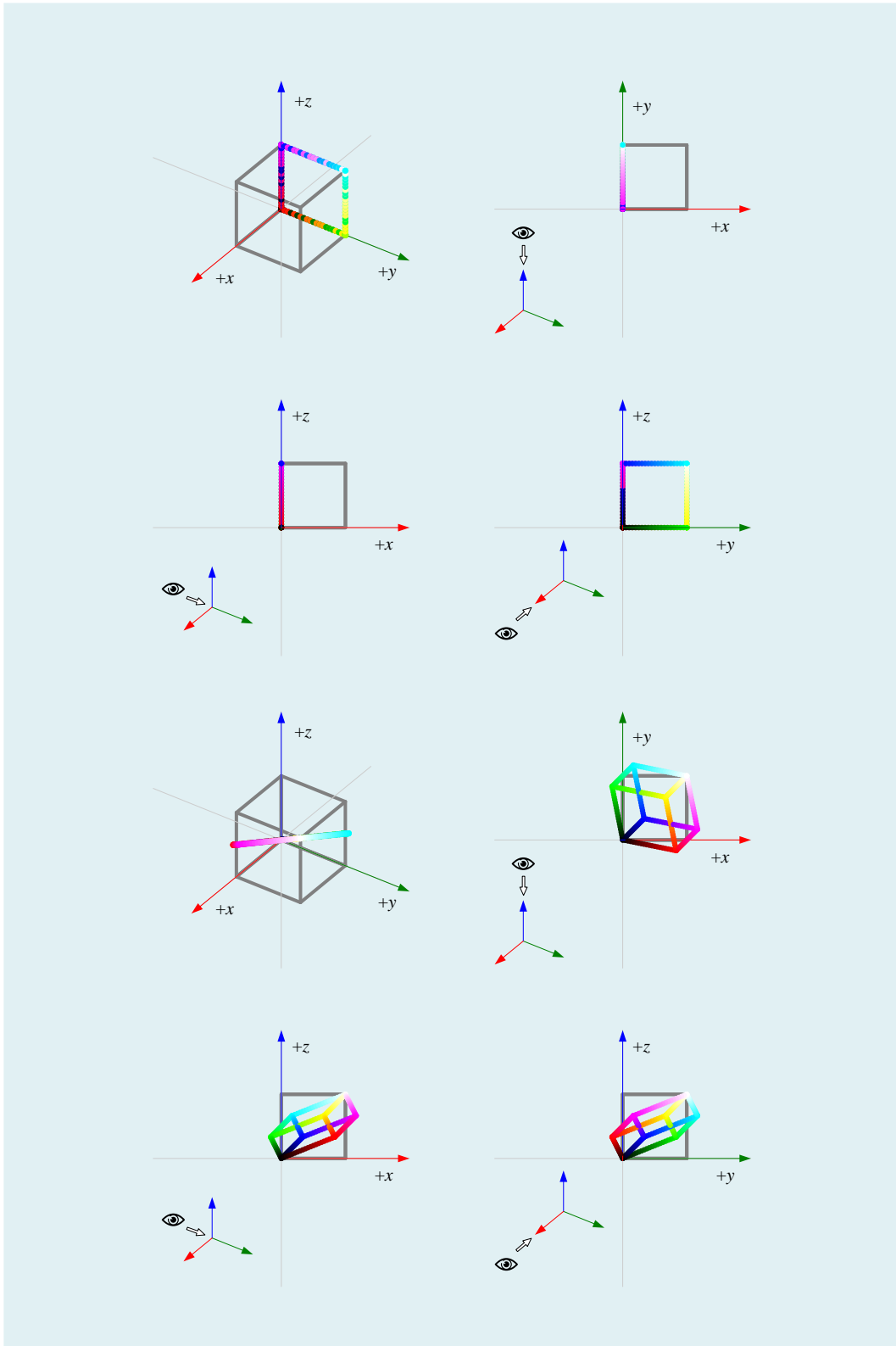


图 10. RGB 立方体框线，投影，第 2 组，四个投影视角

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

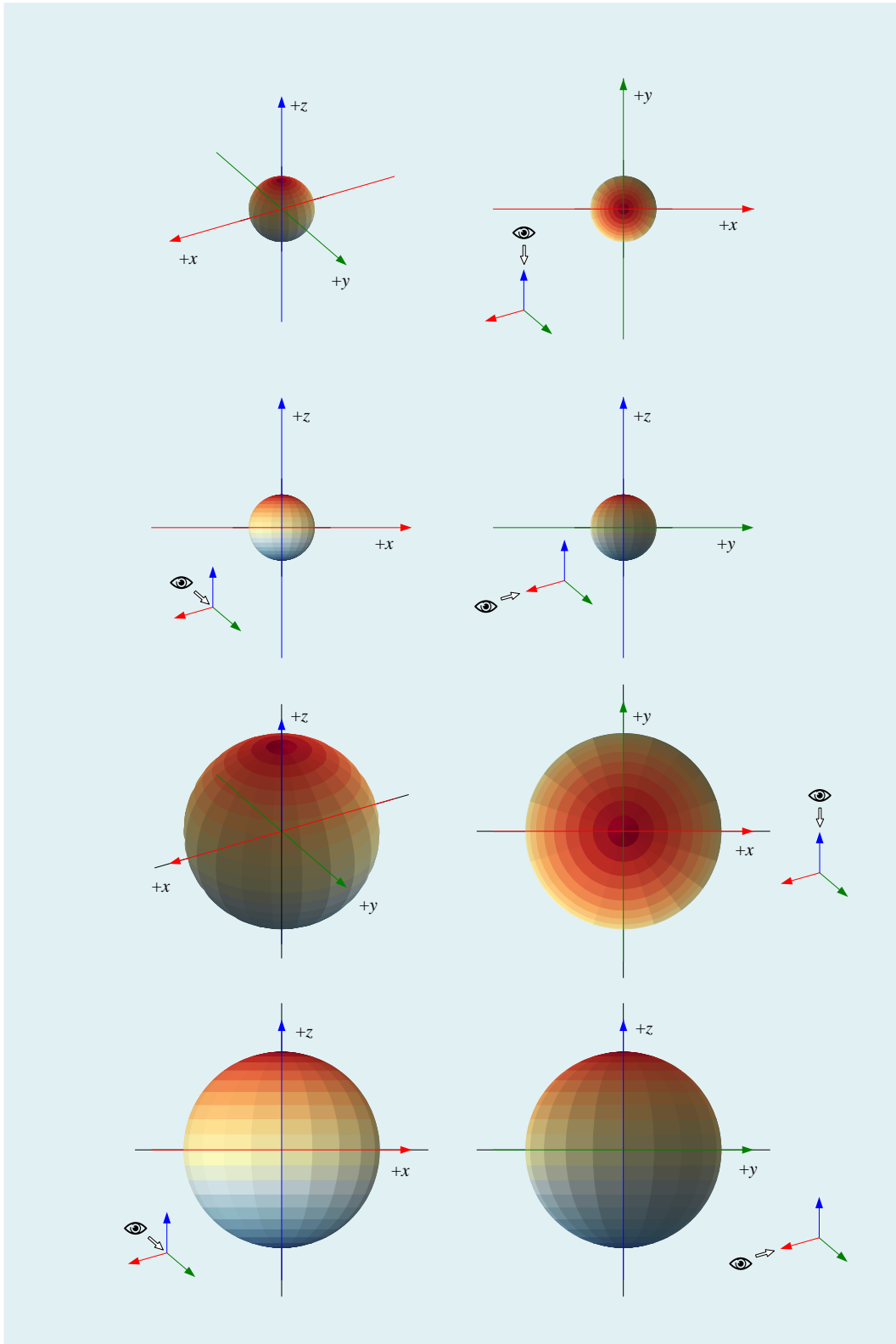


图 11. 单位球，单位球等比例放大

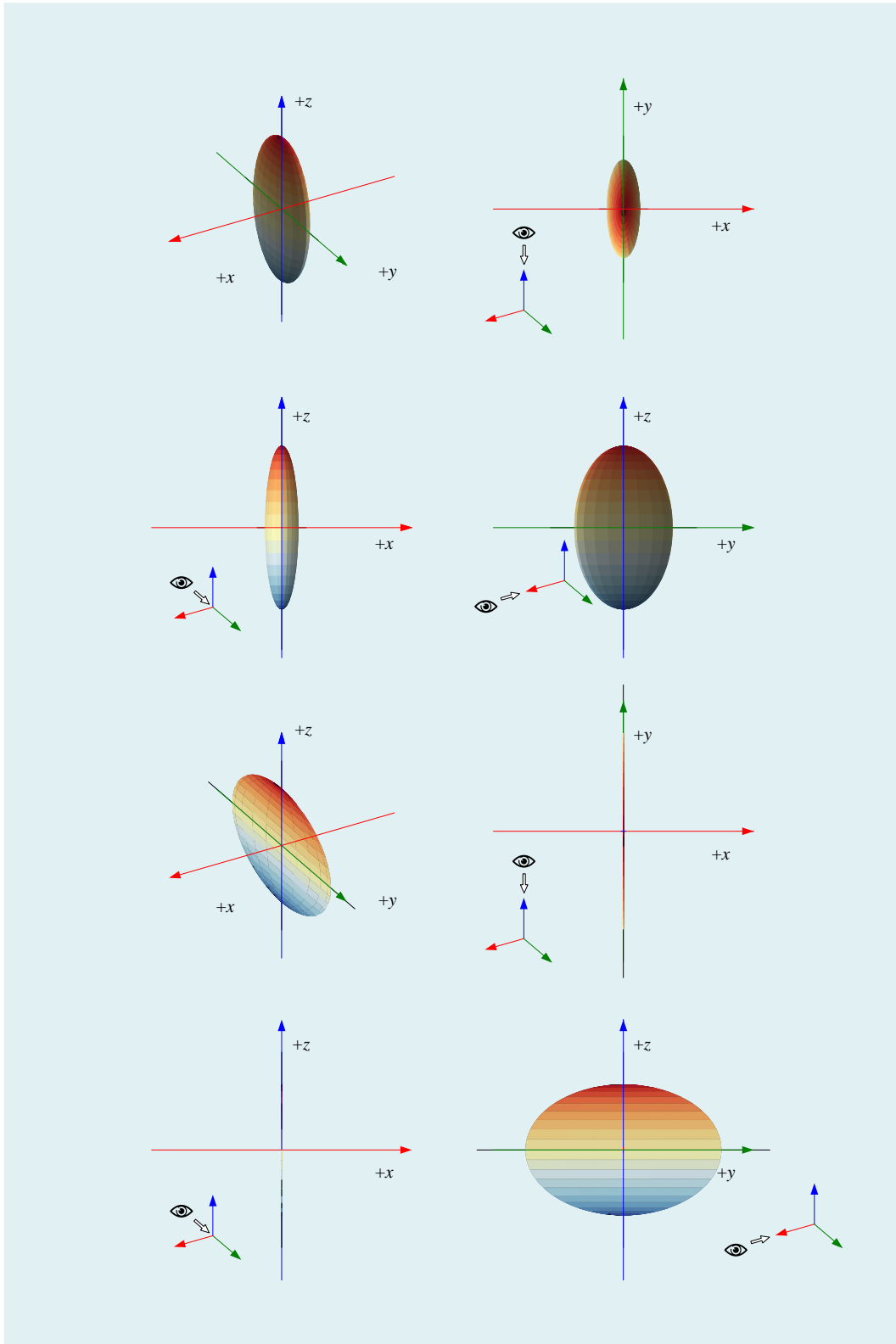


图 12. 单位球非等比例缩放，单位球  $x$ 、 $z$  方向放大且  $y$  方向压扁

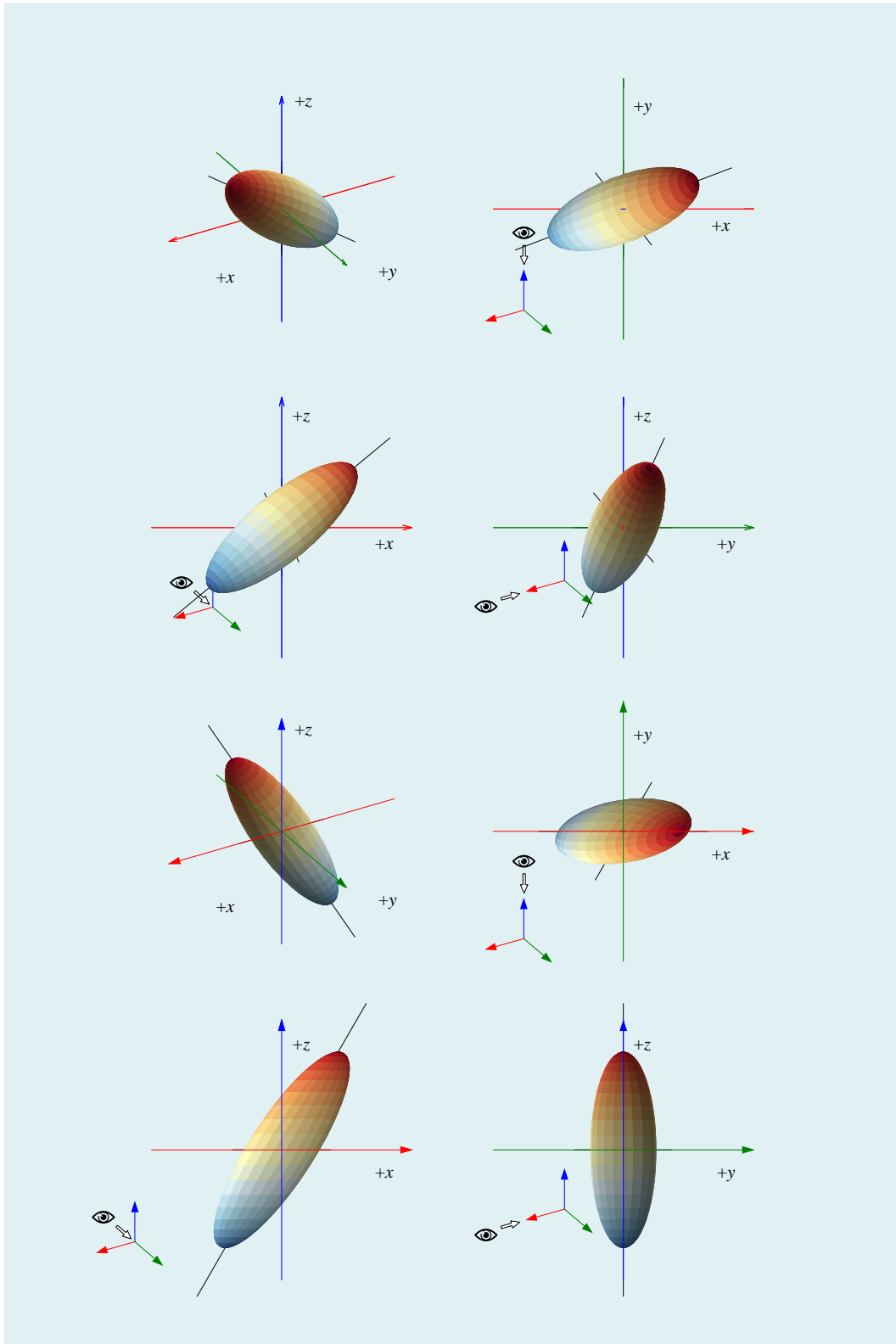


图 13. 单位球先缩放、再三轴旋转，单位球先缩放、再沿  $x$  剪切