

## 27

## Geometric Transformations in 3D Space

## 立体几何变换

平移、缩放、旋转、镜像、投影、剪切...



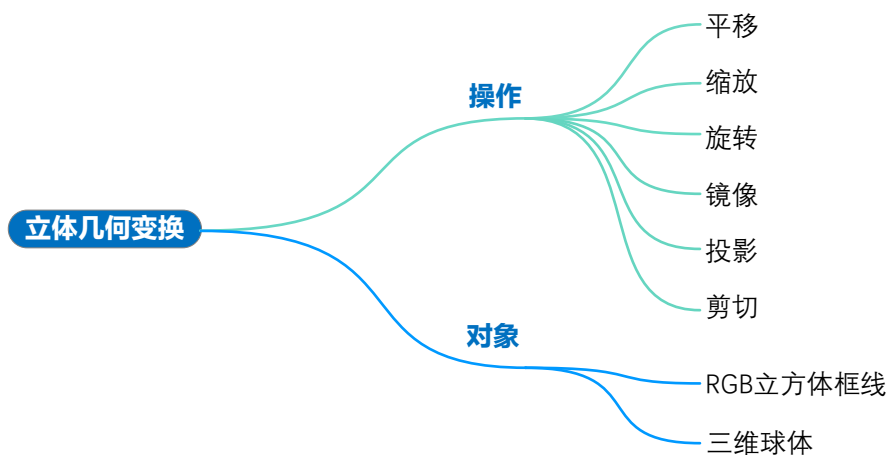
超现实主义极具破坏力，它打破视觉的枷锁。

*Surrealism is destructive, but it destroys only what it considers to be shackles limiting our vision.*

—— 萨尔瓦多·达利 (Salvador Dali) | 西班牙超现实主义画家 | 1904 ~ 1989



- ◀ matplotlib.pyplot.quiver() 绘制箭头图
- ◀ matplotlib.pyplot.scatter() 绘制散点图
- ◀ numpy.column\_stack() 将两个矩阵按列合并
- ◀ numpy.concatenate() 将多个数组进行连接
- ◀ numpy.cos() 计算余弦
- ◀ numpy.deg2rad() 将角度转化为弧度
- ◀ numpy.linspace() 在指定的间隔内, 返回固定步长的数据
- ◀ numpy.ones\_like() 用来生成和输入矩阵形状相同的全 1 矩阵
- ◀ numpy.roll() 将数组中的元素按照指定的偏移量进行循环移动, 并返回一个新的数组。
- ◀ numpy.sin() 计算正弦
- ◀ numpy.vstack() 返回竖直堆叠后的数组



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 27.1 立体几何变换

上一章介绍的在平面上的几何变换（平移、缩放、旋转、镜像、投影、剪切）也可以用在三维空间中。本章就介绍如何在三维空间实现各种立体几何变换。

表 1 总结常见立体几何仿射变换。Bk\_2\_Ch27\_1.ipynb 绘制表中所有图像。

为了更好地展示各种立体几何变换过程，本章采用如图 1 所示的一组三维空间散点作为操作对象。

如图 1 所示，这个三维空间“小彩灯”实际上就是 RGB 的单位立方体的外框线。我们把这些小彩灯的坐标排列成矩阵形式。矩阵有三列，第 1、2、3 列分别代表小彩灯  $x$ 、 $y$ 、 $z$  坐标。也就是说，矩阵  $\mathbf{X}$  的每一行代表一个小彩灯。下一章后续还会用到这个可视化方案。

本书最后还会使用图 2 作为几何变换的对象。图 2 所示为单位球体球面，所有坐标均用球坐标系生成。

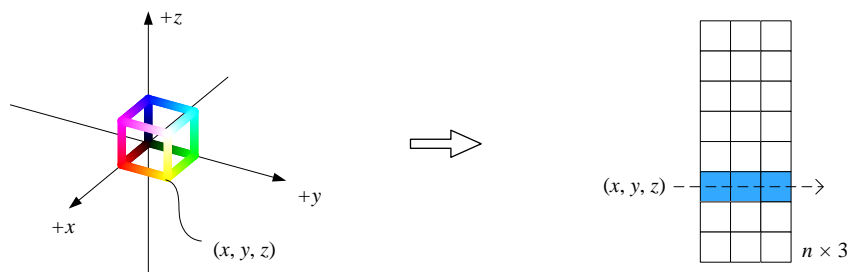


图 1. RGB 单位立方体外框线三维

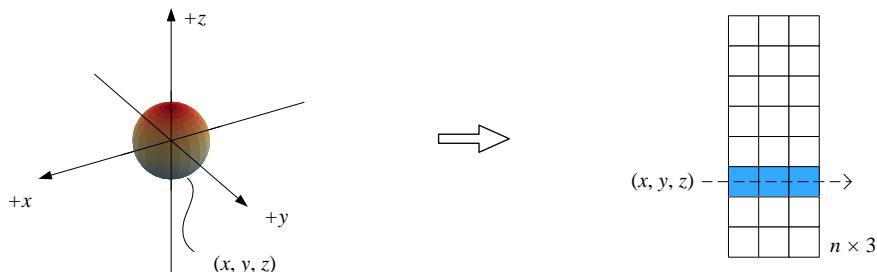


图 2. 单位球体球面坐标

虽然不要大家掌握这些几何操作对应的数学工具；但是如果对相关内容感兴趣的话，大家可以根据 Bk\_2\_Ch27\_1.ipynb 内容将数学工具写在表 1 中。

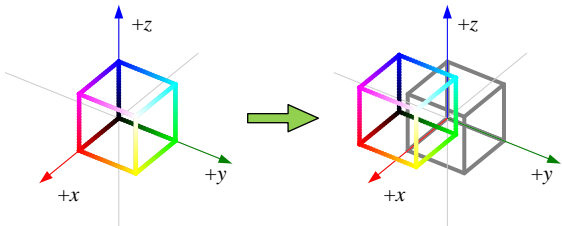
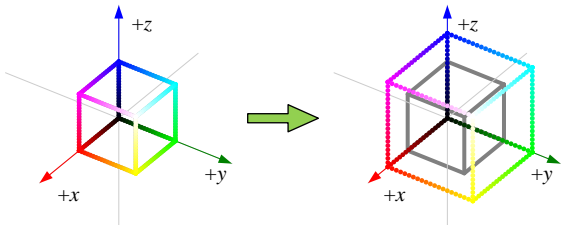
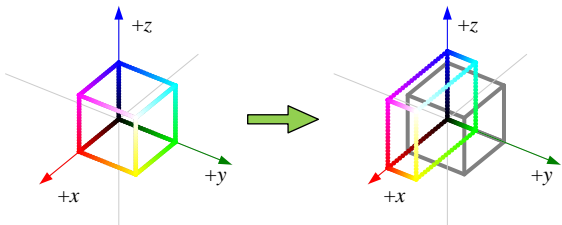
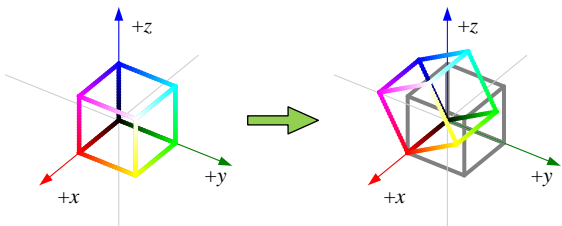
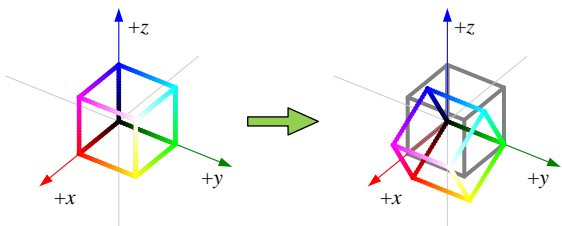
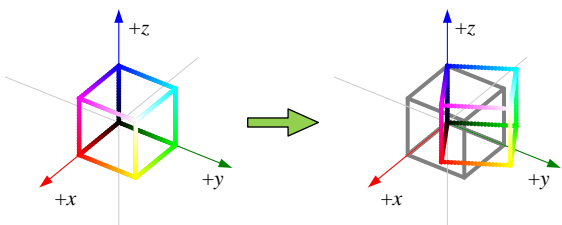
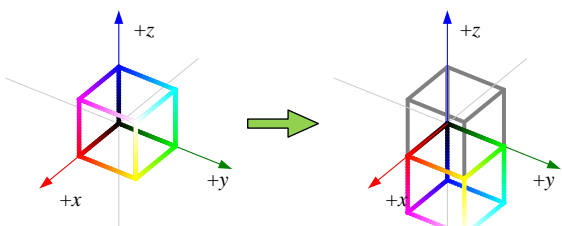


本章介绍的这些立体几何变换涉及的数学工具将在《矩阵力量》中展开讲解。

在鸢尾花书中，最常用的 4 种几何变换为平移、缩放、旋转、投影，下面我们逐个可视化这三种几何变换。

表 1. 常见仿射变换，立体几何 | Bk\_2\_Ch27\_1.ipynb

几何变换	示例
------	----

<p>平移 (translation)</p>	
<p>等比例缩放 <math>s</math> 倍 (equal scaling)</p>	
<p>非等比例缩放 (unequal scaling)</p>	
<p>绕 <math>x</math> 轴逆时针旋转 (counterclockwise rotation around <math>x</math>-axis)</p>	
<p>绕 <math>y</math> 轴逆时针旋转 (counterclockwise rotation around <math>y</math>-axis)</p>	
<p>绕 <math>z</math> 轴逆时针旋转 (counterclockwise rotation around <math>z</math>-axis)</p>	
<p>关于 <math>xy</math> 平面镜像对称 (reflection relative to <math>xy</math> plane)</p>	

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

关于 $xz$ 平面镜像对称 (reflection relative to $xz$ plane)	
关于 $yz$ 平面镜像对称 (reflection relative to $yz$ plane)	
向 $xy$ 平面投影 (projection to $xy$ plane)	
向 $xz$ 平面投影 (projection to $xz$ plane)	
向 $yz$ 平面投影 (projection to $yz$ plane)	
向特定平面投影	
向 $x$ 轴投影 (projection to $x$ axis)	

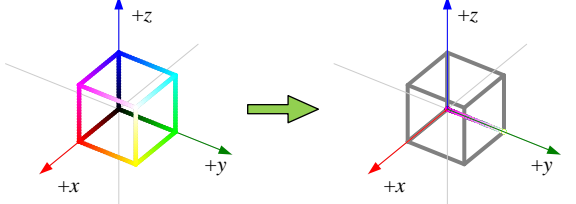
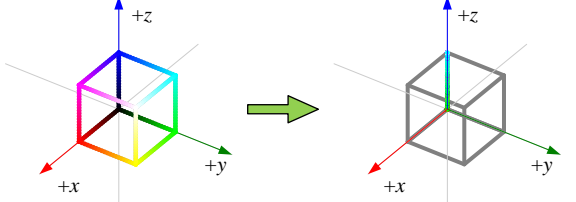
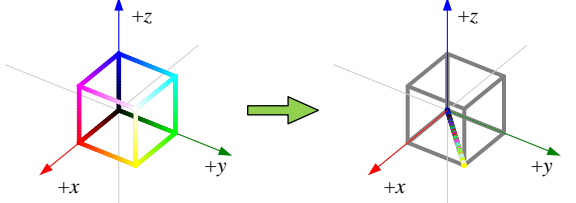
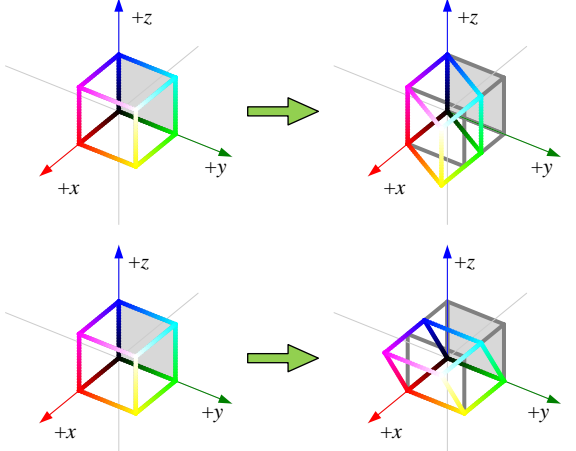
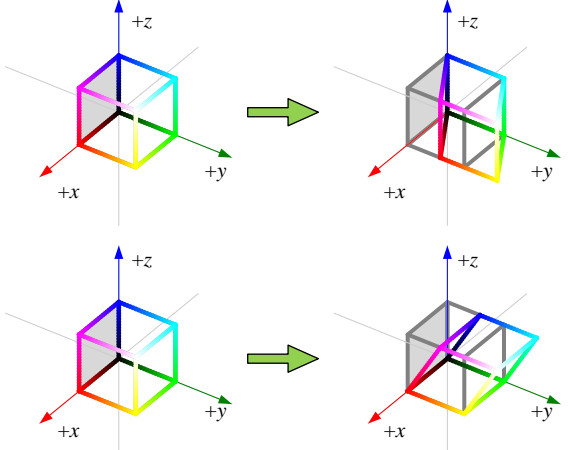
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

<p>向 <math>y</math> 轴投影 (projection to <math>y</math> axis)</p>	
<p>向 <math>z</math> 轴投影 (projection to <math>z</math> axis)</p>	
<p>向特定直线投影</p>	
<p>沿 <math>x</math> 轴剪切 (shear along <math>x</math>-axis)</p>	
<p>沿 <math>y</math> 轴剪切 (shear along <math>y</math>-axis)</p>	

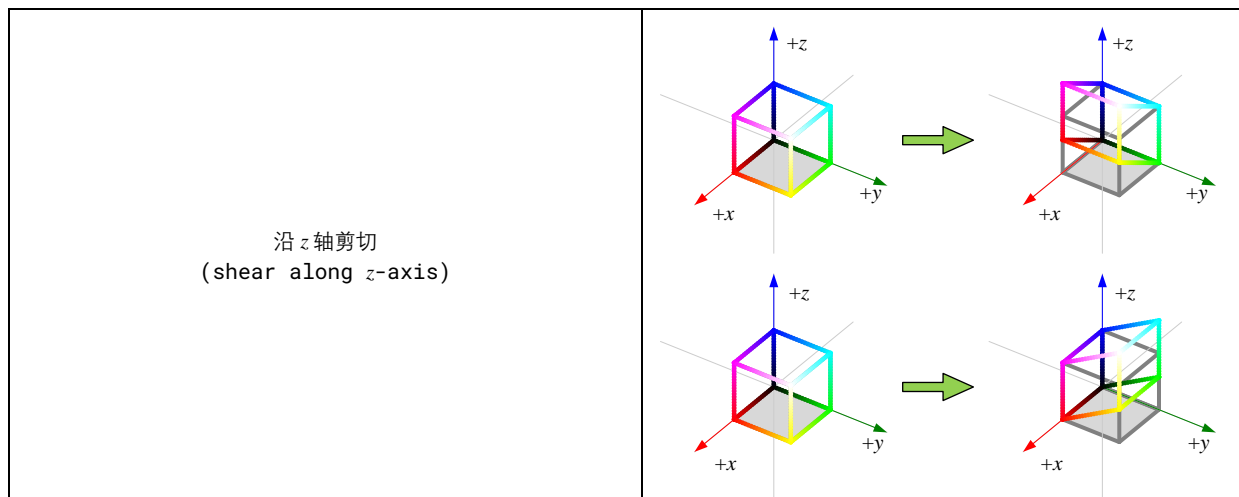
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



## 27.2 4 种常用几何变换

为了方便可视化下文 4 种常用的立体几何变换，我们给出如图 3 所示的可视化方案。在图 1 基础上，图 3 又增加了三个视角，分别展示 RGB 框线在三个平面上的投影。这三个投影方便我们观察不同几何变换的具体坐标偏移。Bk\_2\_Ch27\_2.ipynb 完成本节的可视化方案。

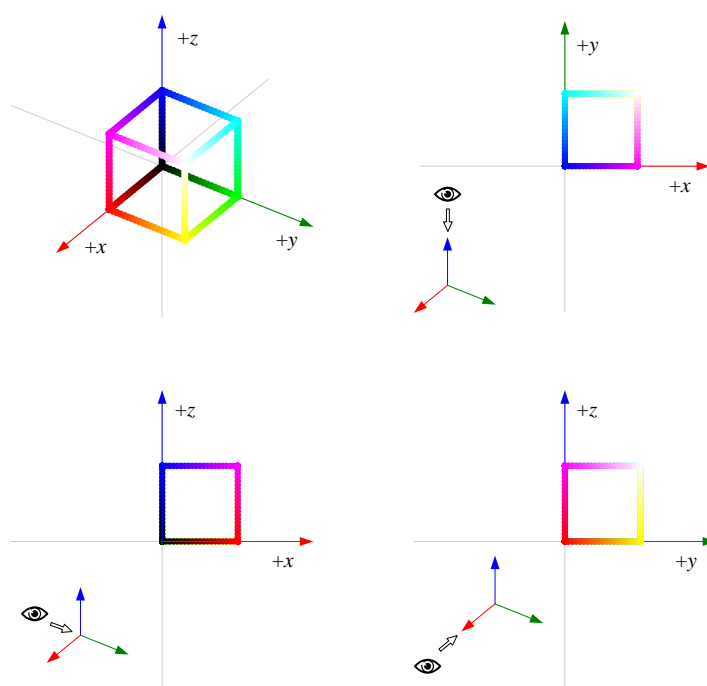



图 3. 原始数据，四个投影视角 |  Bk\_2\_Ch27\_2.ipynb

### 平移

图 4 所示为从四个投影视角展示平移。从三个在不同平面的投影上，我们可以清楚地看到沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的平移量。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

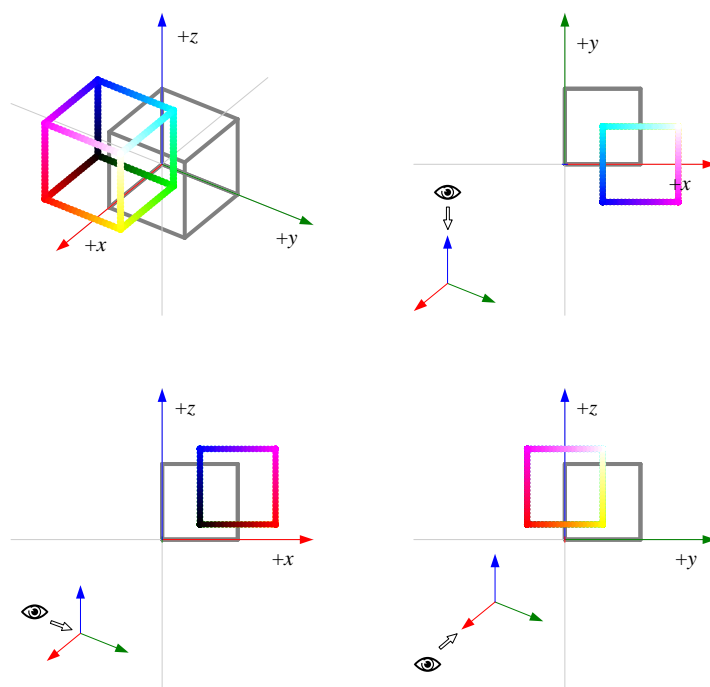


图 4. 平移，四个投影视角 | Bk\_2\_Ch27\_2.ipynb

## 缩放

图 7 所示为从四个投影视角展示等比例缩放 (a)、非等比例缩放 (b)。

## 旋转

三维空间中，三个旋转角度和飞机姿态的三个角度密切相关。如图 5 所示，**翻滚角** (Roll Angle) 是飞机绕其纵轴旋转的角度，用于描述飞机的侧倾程度。当飞机向右侧倾斜时，翻滚角为正值；向左倾斜时，翻滚角为负值。

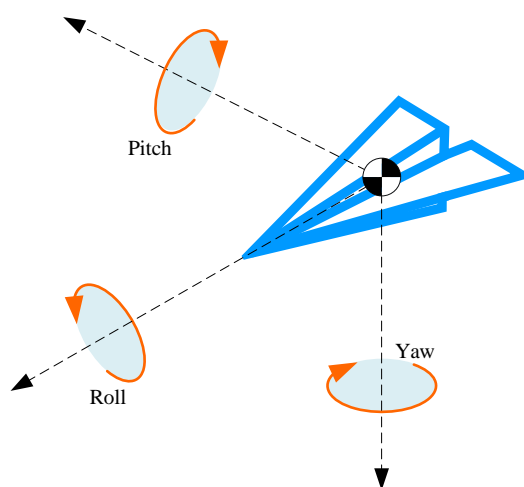


图 5. 飞机姿态的三个角度

**俯仰角** (Pitch Angle) 是飞机绕其横轴旋转的角度，用于描述飞机的仰角或俯角。当飞机向上抬头时，俯仰角为正值；向下俯冲时，俯仰角为负值。

**偏航角** (Yaw Angle) 是飞机绕其垂直轴旋转的角度，用于描述飞机的航向偏转。当飞机顺时针旋转时，偏航角为正值；逆时针旋转时，偏航角为负值。

如图 6 所示，这些角度通常使用**欧拉角** (Euler Angles) 系统来表示，其中翻滚角、俯仰角和偏航角分别绕飞机的纵轴、横轴和垂直轴旋转。

图 8、图 9、图 10 所示为从四个投影视角展示旋转操作。特别地，图 10 中正方体分别经过三个方向旋转。

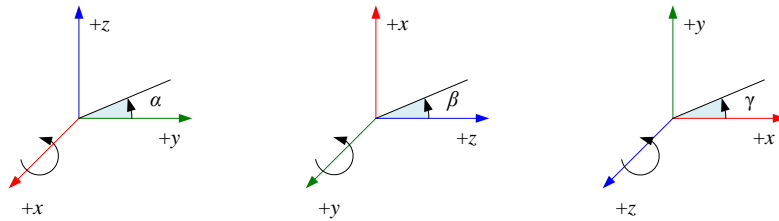


图 6. 三个旋转角度

图 8 (a) 所示为 RGB 立方体框线绕  $x$  轴旋转。在图 8 (a.4) 所示的  $yz$  平面上，我们可以清楚地看到绕  $x$  轴旋转角度。

图 8 (b) 所示为 RGB 立方体框线绕  $y$  轴旋转。在图 8 (b.3) 所示的  $xz$  平面上，容易确定绕  $y$  轴旋转角度。

图 9 (a) 所示为 RGB 立方体框线绕  $z$  轴旋转。在图 9 (a.2) 所示的  $xy$  平面上，我们能够确定绕  $z$  轴旋转角度。

图 9 (b) 所示为 RGB 立方体框线先后绕  $x$ 、 $y$  轴旋转。在图 9 (b.2) 所示的  $xy$  平面上，我们可以发现这幅图类似 HSV 颜色空间的布局。

图 10 两组图像都是分别绕  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴旋转，不同的是沿  $z$  轴旋转角度。

## 投影

图 11、图 12 所示为从四个投影视角展示投影操作。

图 11 (a) 所示为向  $xy$  平面投影，图 11 (b) 所示为向  $xz$  平面投影。图 12 (a) 所示为向  $yz$  平面投影。较为特殊的是图 12 (b)，这幅图中我们将 RGB 立方体框线向特定平面投影。而这个平面是通过  $v_1$  和  $v_2$  这两个向量定义的，我们管这种投影叫做“二次投影”。



鸢尾花书《矩阵力量》会专门介绍这种“二次投影”背后的数学工具。

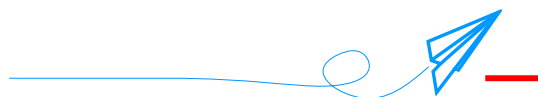
## 单位球体的立体几何变换

图 13 (a) 展示单位球体四个不同投影视角；图 13 (b) 所示为单位球体的等比例放大。



图 14 (a) 所示为单位球体在三个不同轴方向上的非等比例缩放。图 14 (b) 所示为在  $y$ 、 $z$  轴上缩放，并在  $x$  轴上压扁，即降维。这也就是为什么在图 14 (b.2) 和 (b.3) 上图像为一条线段。

图 15 (a) 所示为单位球体首先在  $z$  轴方向拉长，然后绕  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴旋转。图 15 (b) 所示为单位球体首先也是在  $z$  轴方向拉长，然后沿  $x$  轴剪切。



本章分别以 RGB 立方体框线、单位球体为对象，通过各种可视化方案向大家展示三维立体几何变换。请大家务必掌握平移、缩放、旋转、投影这几种几何变换。

我们将会在本书后文用缩放、旋转、投影解释奇异值分解。此外，这些几何变换在鸢尾花书《矩阵力量》扮演重要角色。

本章不要求大家掌握这些几何操作背后的数学工具，但是大家要知道这些操作背后都是线性代数工具在支撑运算。

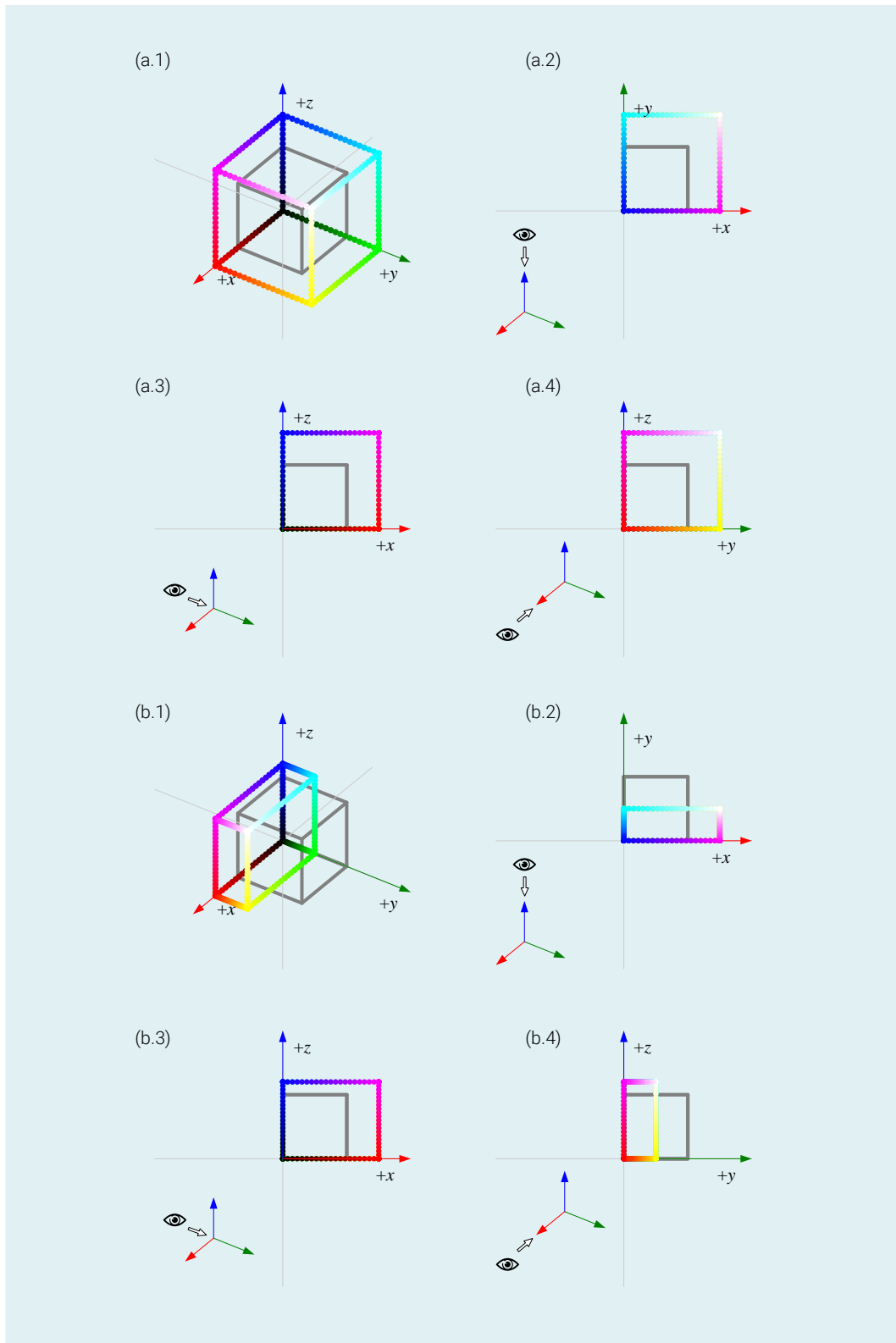



图 7. RGB 立方体框线: (a) 等比例缩放; (b) 非等比例缩放 |  Bk\_2\_Ch27\_2.ipynb

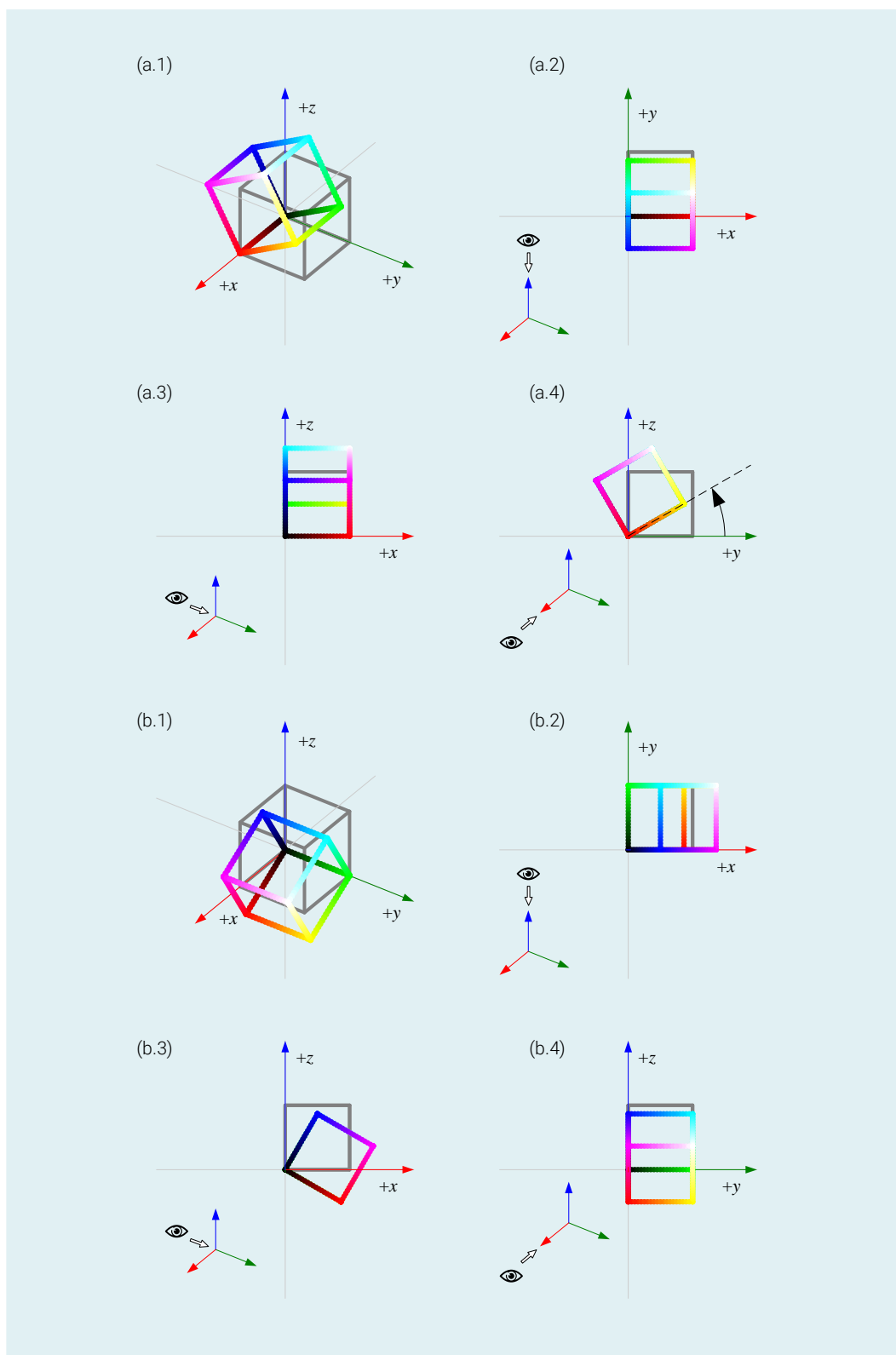


图 8. RGB 立方体框线; (a) 绕  $x$  轴旋转; (b) 绕  $y$  轴旋转 | Bk\_2\_Ch27\_2.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

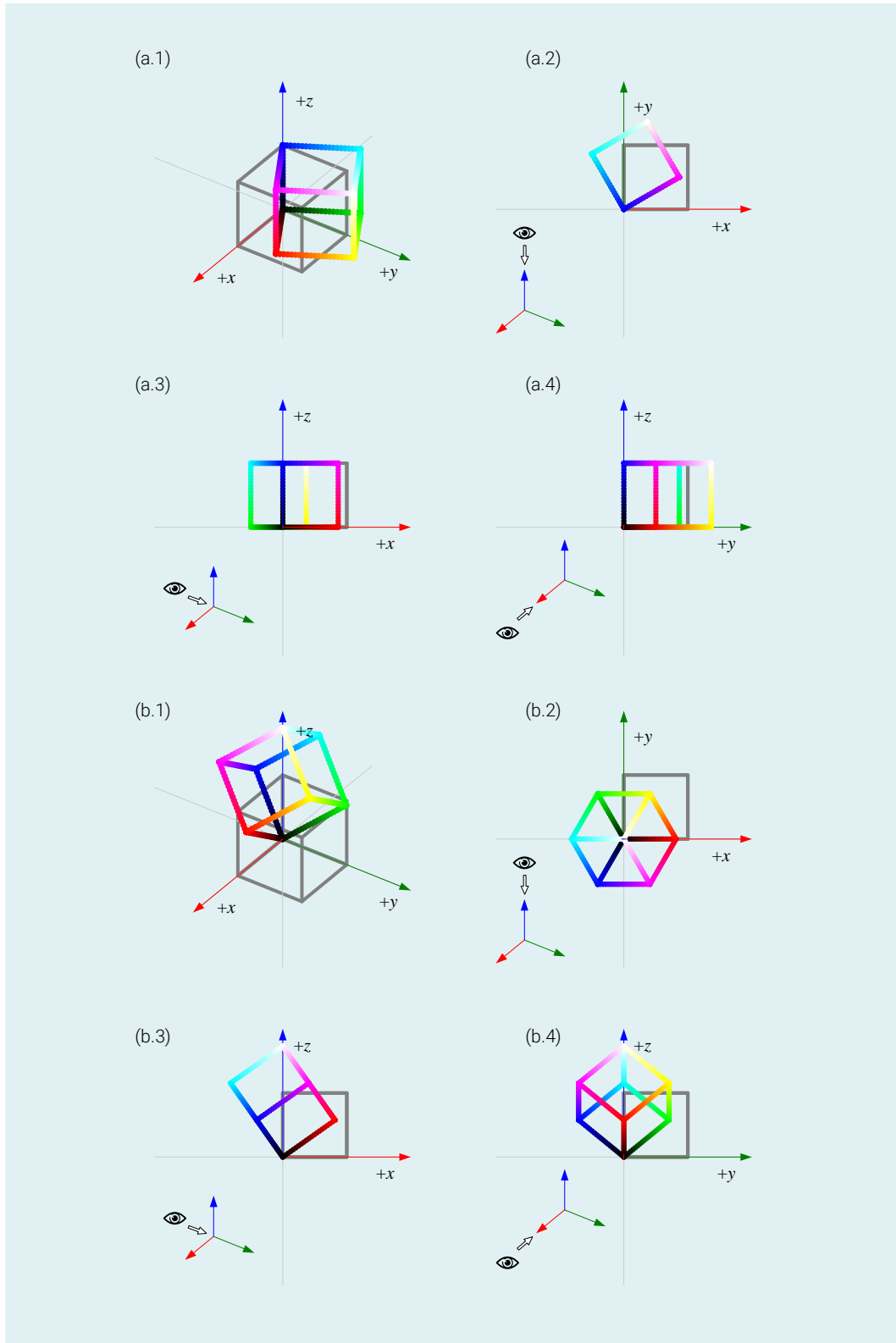



图 9. RGB 立方体框线; (a) 绕  $z$  轴旋转; (b) 先后绕  $x$ 、 $y$  旋转 |  Bk\_2\_Ch27\_2.ipynb

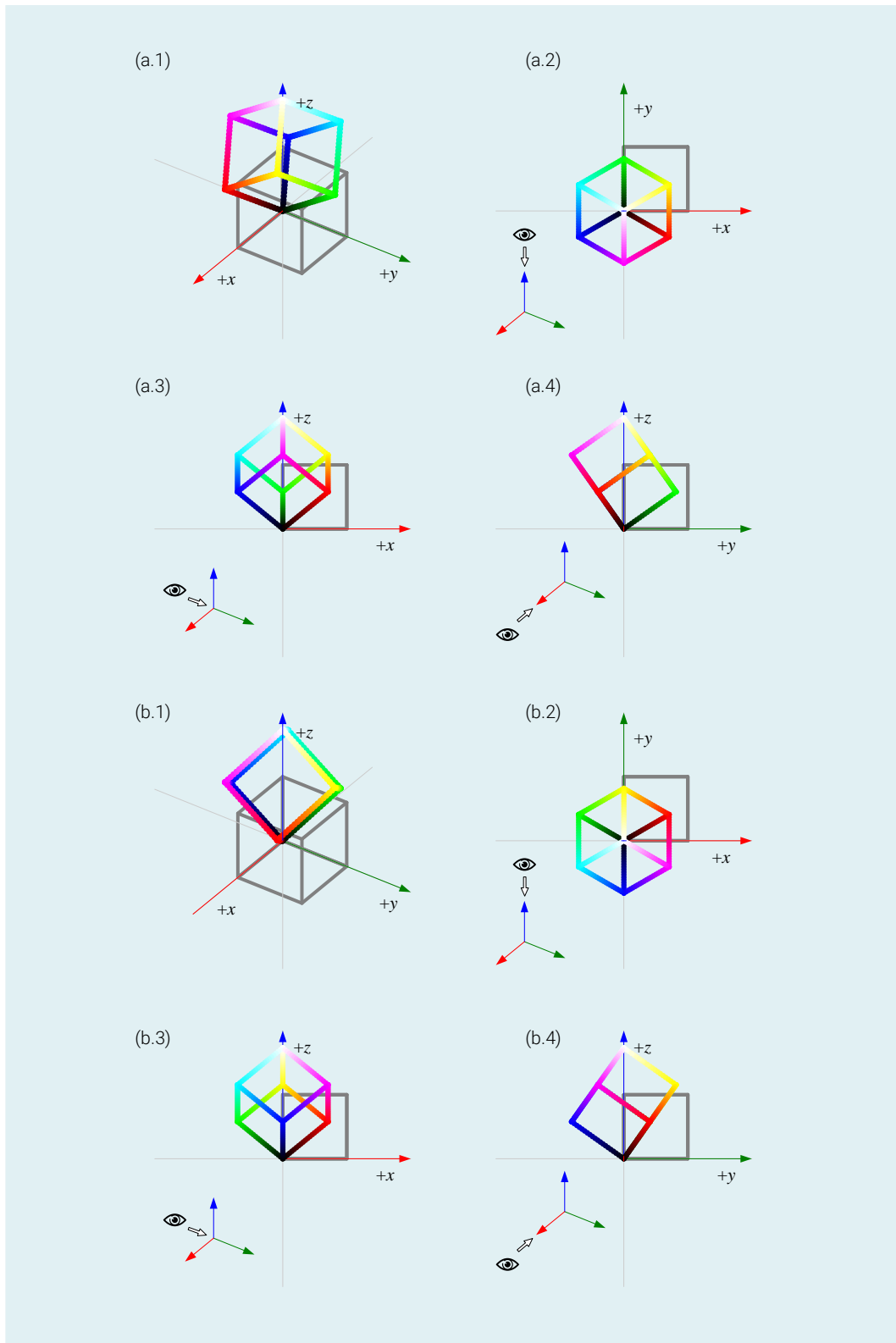



图 10. RGB 立方体框线; (a)和(b)都是先后绕  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴旋转 |  Bk\_2\_Ch27\_2.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

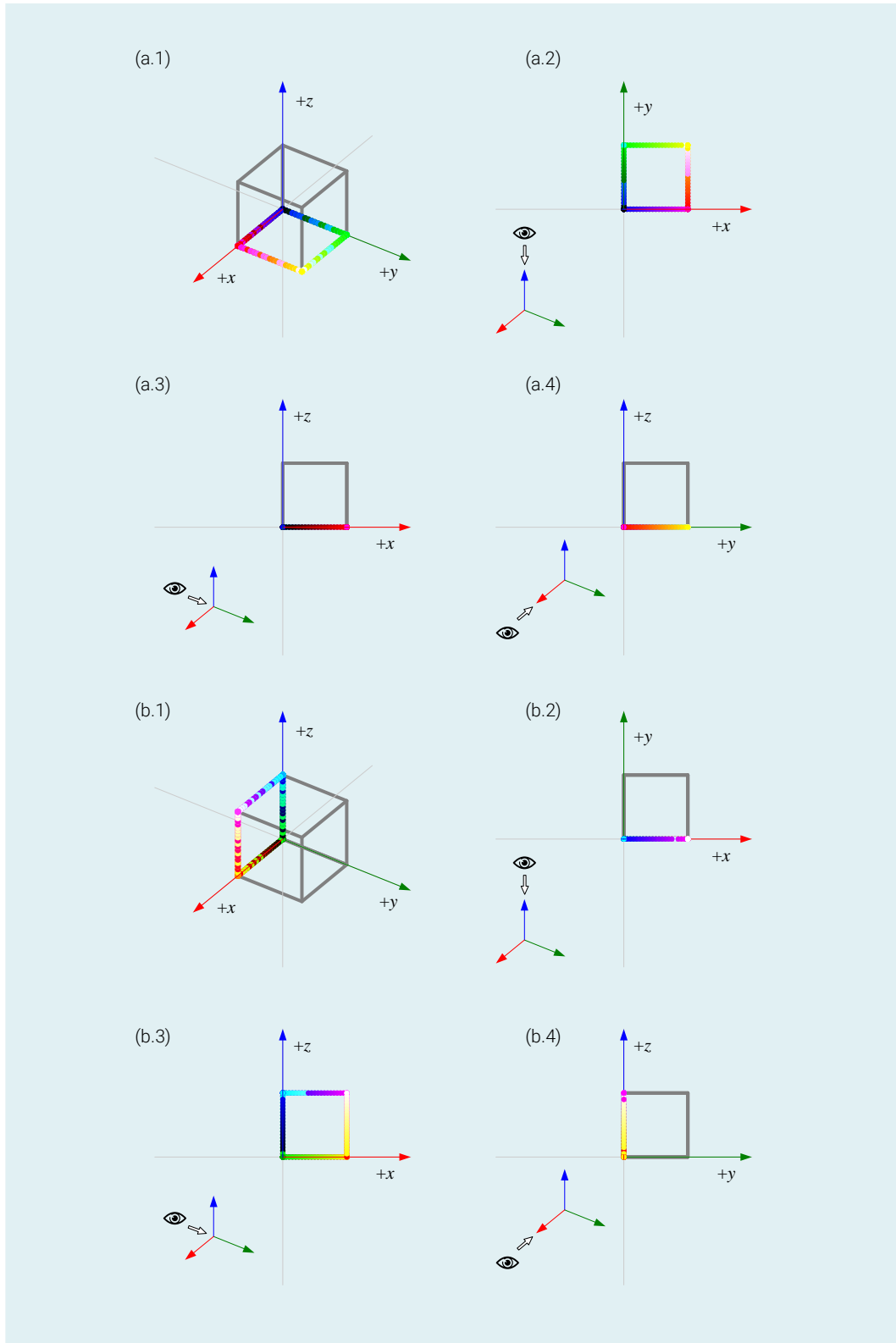



图 11. RGB 立方体框线: (a) 向  $xy$  平面投影; (b) 向  $xz$  平面投影 |  Bk\_2\_Ch27\_2.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

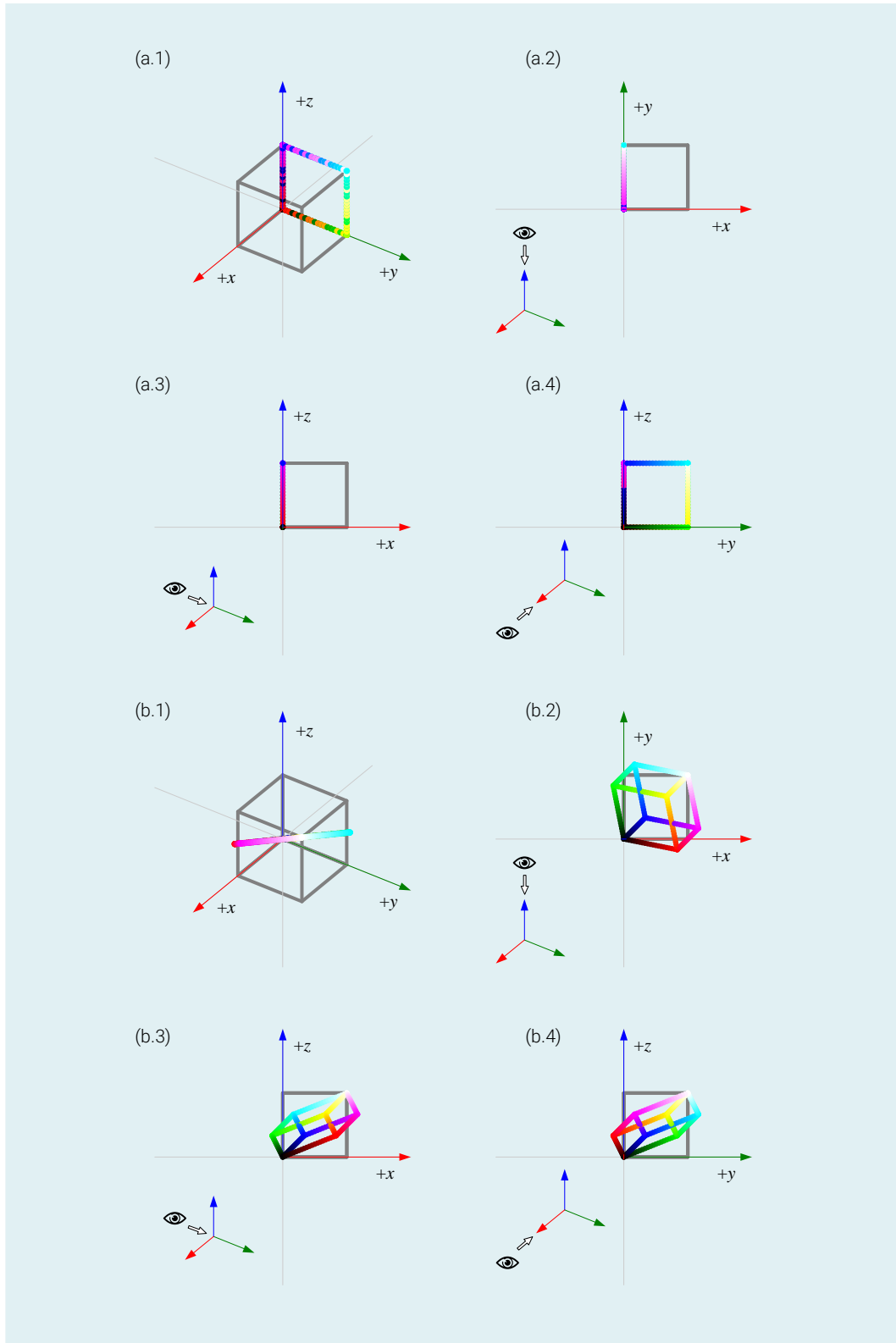



图 12. RGB 立方体框线：(a) 向  $yz$  平面投影；(b) 向特定平面投影 |  Bk\_2\_Ch27\_2.ipynb

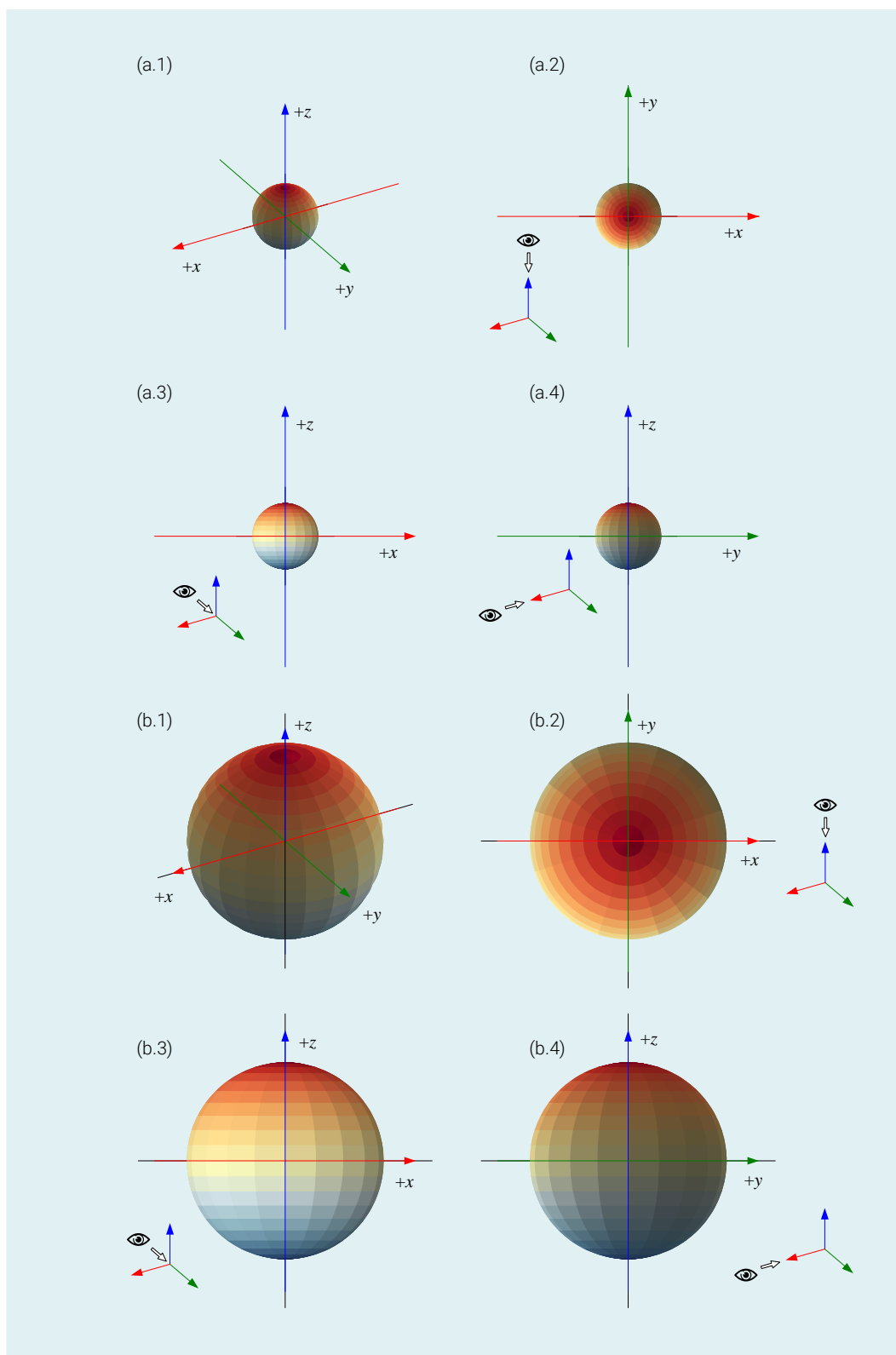



图 13. 单位球几何变换: (a) 单位球体; (b) 单位球等比例放大 |  Bk\_2\_Ch27\_3.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



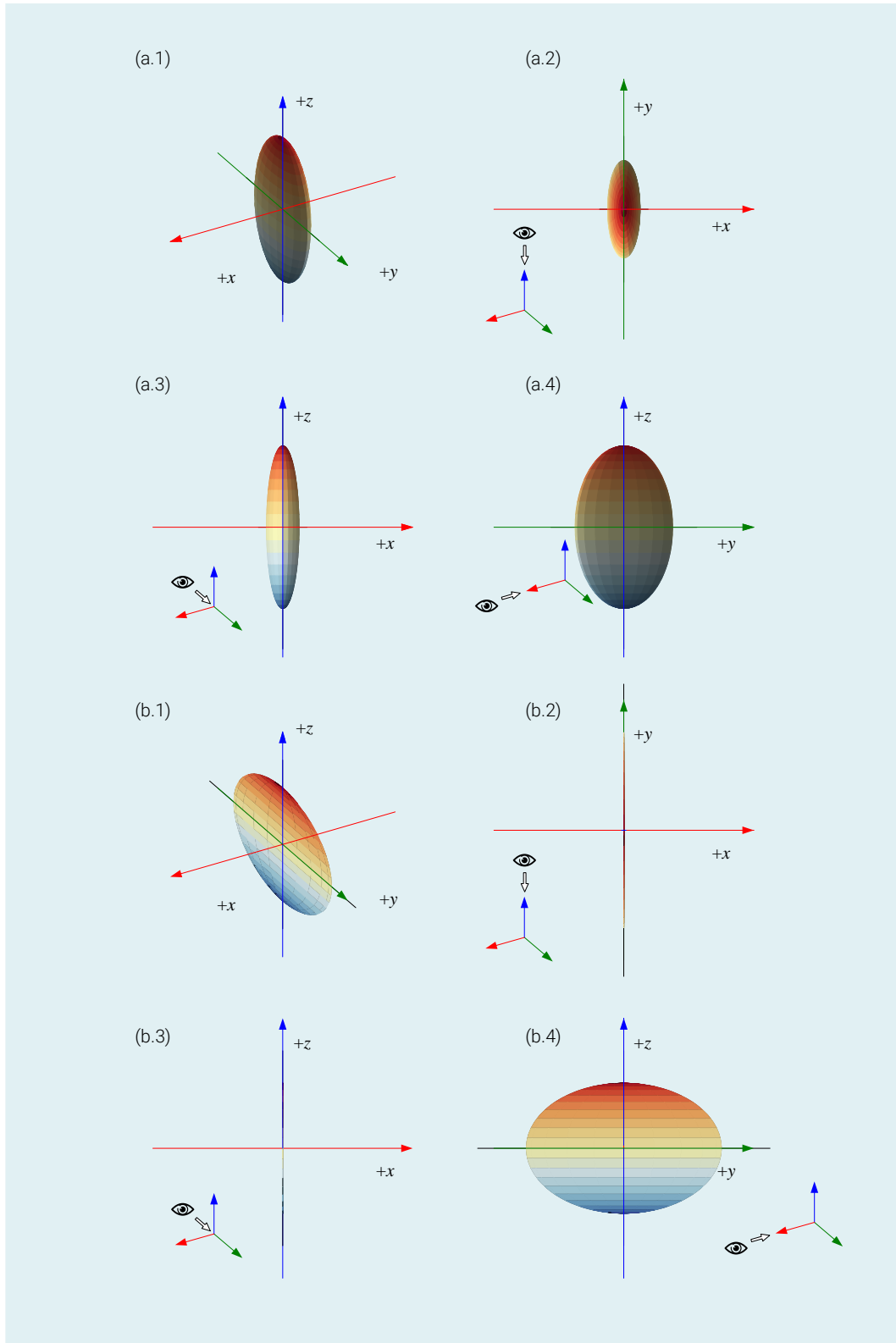



图 14. 单位球几何变换：(a) 非等比例缩放；(b)  $x$ 、 $z$  方向放大， $y$  方向压扁 |  Bk\_2\_Ch27\_3.ipynb

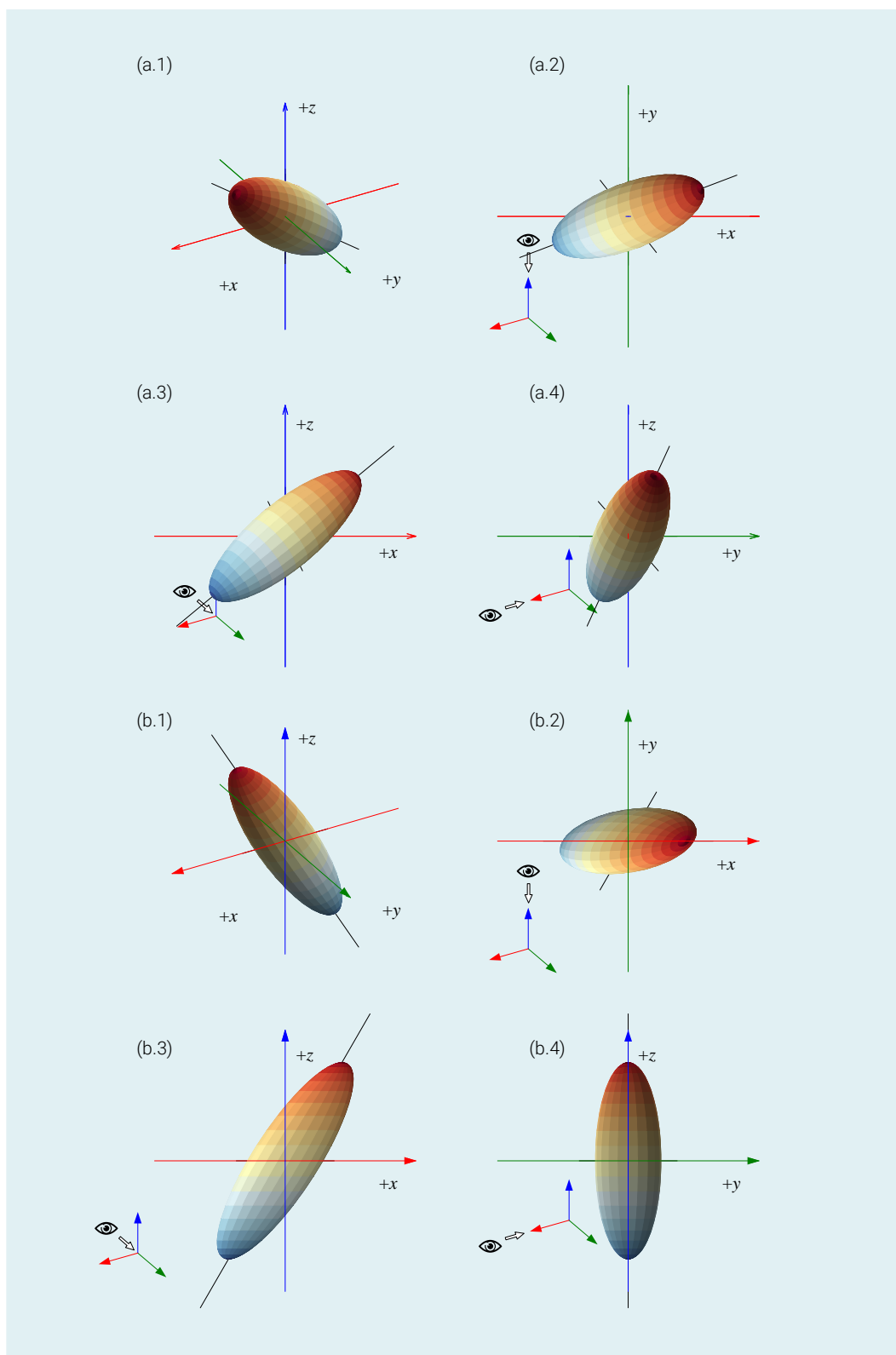



图 15. 单位球几何变换：(a) 先缩放、再三轴旋转；(b) 先缩放、再沿  $x$  剪切 |  Bk\_2\_Ch27\_3.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)