34 Fractal 分形

自然界无处不在的自相似

今天，是别人的；我苦苦耕耘的未来，是我的。

The present is theirs; the future, for which I really worked, is mine.

—— 尼古拉·特斯拉 (Nikola Tesla) | 发明家、物理学家 | 1856 ~ 1943

- XXXXX
- XXXXX
- XXXXX
- XXXXX
- XXXXX

34.1 分形

分形 (fractal) 是指具有自相似性质的几何形状或图案。它们在不同的尺度上都呈现出类似的结构，即无论是观察整体还是细节部分，都可以看到相似的形态。分形通常通过迭代的方式生成，即通过重复一定的规则或操作来构造出越来越复杂的形状。反过来看，再复杂的图形通过解构可以得到简单的几何形状或图案。

自然界中存在许多分形结构。科赫曲线是由无限个自相似的三角形组成的曲线。科赫曲线在自然界随处可见。

树木的分枝结构呈现出分形特征。树干分出树枝，树枝再分出更小的枝干，如此类推。这种分形结构使得树木能够有效地获取光线和水分。

闪电的形状也可以被视为一种分形。它的形态在不同的尺度上都存在类似的形状特征。

山脉的轮廓也展现出分形的特征。无论是在整个山脉的缩放上还是在山脉的岩层中，都可以看到类似的形状。

本章介绍如何利用 Python 可视化几种常见的分形。

34.2 Koch 雪花

Koch 雪花 (Koch Snowflake)由瑞典数学家 Helge von Koch 在 1904 年引入，是分形几何中的经典案例之一。

Koch 雪花是通过一系列简单的规则和迭代生成的。如图 1 所示，Koch 雪花起始于一个等边三角形，通过以下步骤来构造 Koch 雪花：

- 将每条边分成三等分。
- 在中间的一段边上，建立一个等边三角形，向外伸出。
- 移除初始三角形的底边。

在每次迭代中，对于每条线段，都会重复上述步骤。通过不断重复这些规则，Koch 雪花的形状逐渐复杂起来，边缘颗粒度不断提高，类似于一个由无数小三角形构成的雪花。无论观察 Koch 雪花的哪一部分，都可以发现与整体相似的几何形状。

Koch 雪花的具体算法，请参考：

https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html

34.3 谢尔宾斯基三角形

谢尔宾斯基三角形 (Sierpinski triangle) 是一种数学图形，是以波兰数学家 Wacław Sierpiński 的名字命名的。如图 2 所示，谢尔宾斯基三角形是一个由等边三角形构成的图形，每一步都通过以下规则生成新的图形：

- 将初始的等边三角形分成四个等边子三角形，中央的三角形被去除。
- 对每个剩余的子三角形，重复步骤 1。

通过不断重复这个过程，谢尔宾斯基三角形会越来越复杂，每一步都生成更多的小三角形。最终的图形是一个无限细分的结构，看起来像一个由三角形构成的海绵或细分的地形。

谢尔宾斯基三角形具体算法，请参考：

https://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html

谢尔宾斯基地毯 (Sierpinski carpet) 的构造与谢尔宾斯基三角形相似，区别仅在于谢尔宾斯基地毯是以正方形而非等边三角形为基础的。如图 3 所示，将一个实心正方形划分为 3×3 的 9 个小正方形，去掉中间的小正方形，再对余下的小正方形重复这一操作便能得到谢尔宾斯基地毯。谢尔宾斯基地毯具体算法，请参考：

https://mathworld.wolfram.com/SierpinskiCarpet.html

34.4 Vicsek 正方形分形

Vicsek 正方形分形 (Vicsek box fractal) 是一种分形结构，以匈牙利物理学家 Tamás Vicsek 的名字命名。如图 4、图 5，Vicsek 正方形分形生成方法如下：

- 起始于一个正方形。
- 将正方形分成 9 个相等的小正方形，中间的正方形保留。
- 对于每个保留的正方形，将其分成 9 个相等的小正方形，再将中间的正方形保留。

重复上述步骤，对每个保留的正方形进行相同的分割。

Viscek 正方形分形具体算法，请参考：

https://mathworld.wolfram.com/BoxFractal.html

34.5 龙曲线

龙曲线 (dragon curve) 是一种分形曲线，以其蜿蜒曲折、复杂而美丽的形状而闻名。龙曲线由两个简单的规则构建而成：

- 起始于一条直线，可以将其视为一条"1"的序列。
- 对于每一次迭代，将当前序列复制一份，并在复制的序列中，将每个元素都反转（将"1"变为"0"，将"0"变为"1"）。
- 将复制的序列连接到原始序列的末尾。
- 重复上述步骤，不断迭代生成更长的序列。

通过迭代应用这些规则，龙曲线的形状逐渐复杂起来，呈现出蜿蜒曲折、自相似的特征。如图 6 所示，龙曲线可以在二维平面上绘制出来，形状类似于一条盘旋蜿蜒的龙。

34.6 巴恩斯利蕨

巴恩斯利蕨 (Barnsley fern) 是一种分形植物形状，以 Michael Barnsley 命名，他在 1988 年的书籍 *Fractals Everywhere* 中首次介绍了它。

巴恩斯利蕨的形状类似于蕨类植物的叶子。如图 7 所示，巴恩斯利蕨由一系列的线段构成，这些线段按照一定的规则进行迭代生成。巴恩斯利蕨分形的具体算法，请参考：

https://mathworld.wolfram.com/BarnsleysFern.html

34.7 毕达哥拉斯树

毕达哥拉斯树 (Pythagoras Tree)，也称勾股树，以古希腊数学家毕达哥拉斯的名字命名。

如图 8 所示，在毕达哥拉斯树分形中，每个矩形都成为下一级矩形的主干，并且每个新添加的矩形都相对于前一级的矩形进行几何变换。最终，毕达哥拉斯树呈现出一个由许多嵌套的矩形组成的树状结构。

毕达哥拉斯树的具体算法，请参考：

https://mathworld.wolfram.com/PythagorasTree.html

34.8 曼德博集合

曼德博集合 (Mandelbrot Set) 是一种在复平面上的分形图形，以法国数学家 Benoit Mandelbrot 的名字命名。曼德博集合是由复数运算和迭代生成的。曼德博集合的具体算法，请大家参考：

https://mathworld.wolfram.com/MandelbrotSet.html

如图 9 所示，曼德博集合的最显著特点是其自相似性。即使放大曼德博集合的一小部分，也可以发现与整体相似的结构。这种自相似性是通过迭代函数和复数运算的属性得到的。

34.9 朱利亚集合

朱利亚集合 (Julia Set) 也是一种在复平面上的分形图形，以法国数学家 Gaston Julia 的名字命名。与曼德博集合类似，朱利亚集合也是通过复数运算和迭代生成的。图 10 ~ 图 13 展示三组朱利亚几何分形曲线。特别是图 12、图 13，可以看成是朱利亚集合分形曲线连续变化的 12 个快照。

有关朱利亚集合的算法，请大家参考：

https://mathworld.wolfram.com/JuliaSet.html

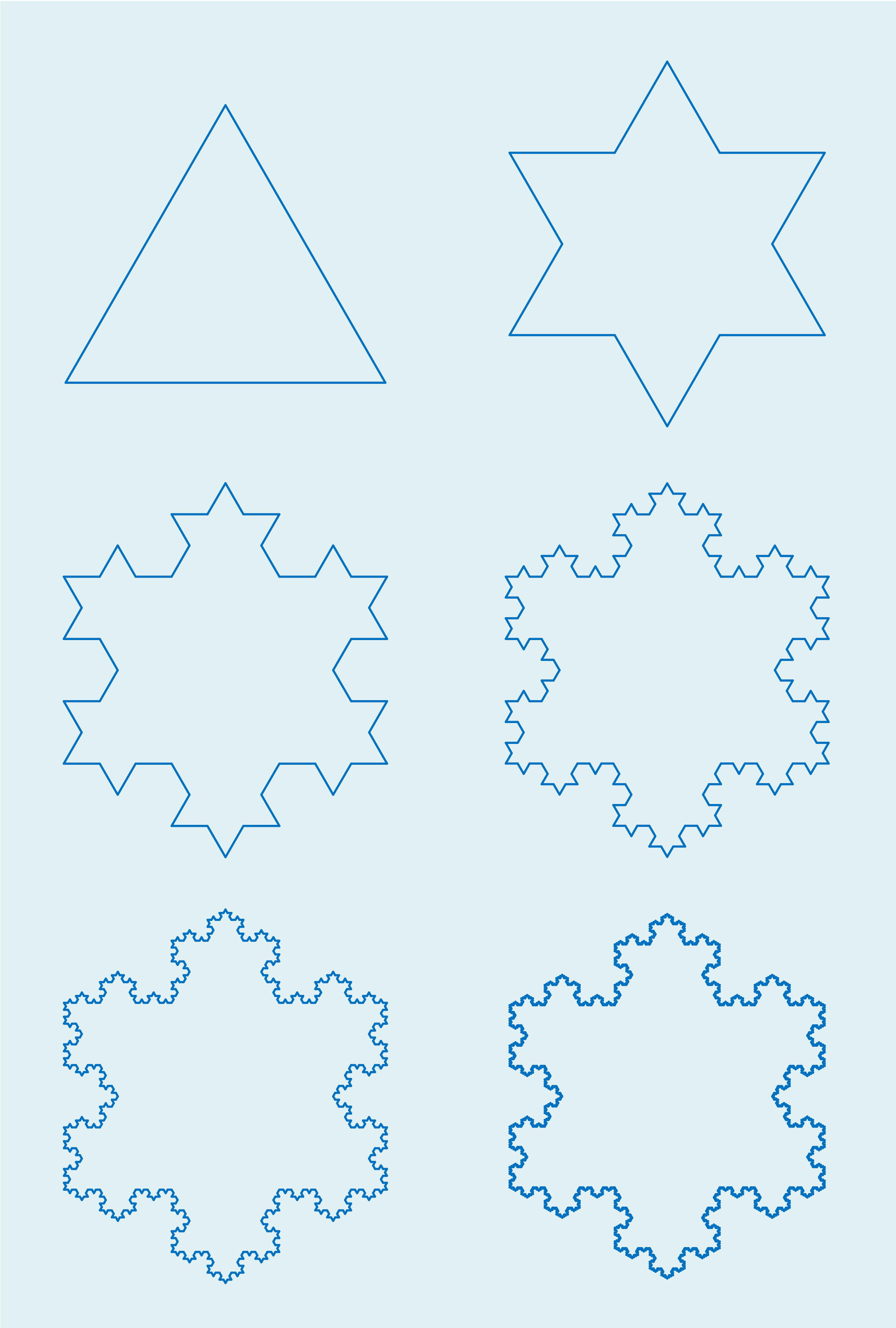

图 1. Koch 雪花

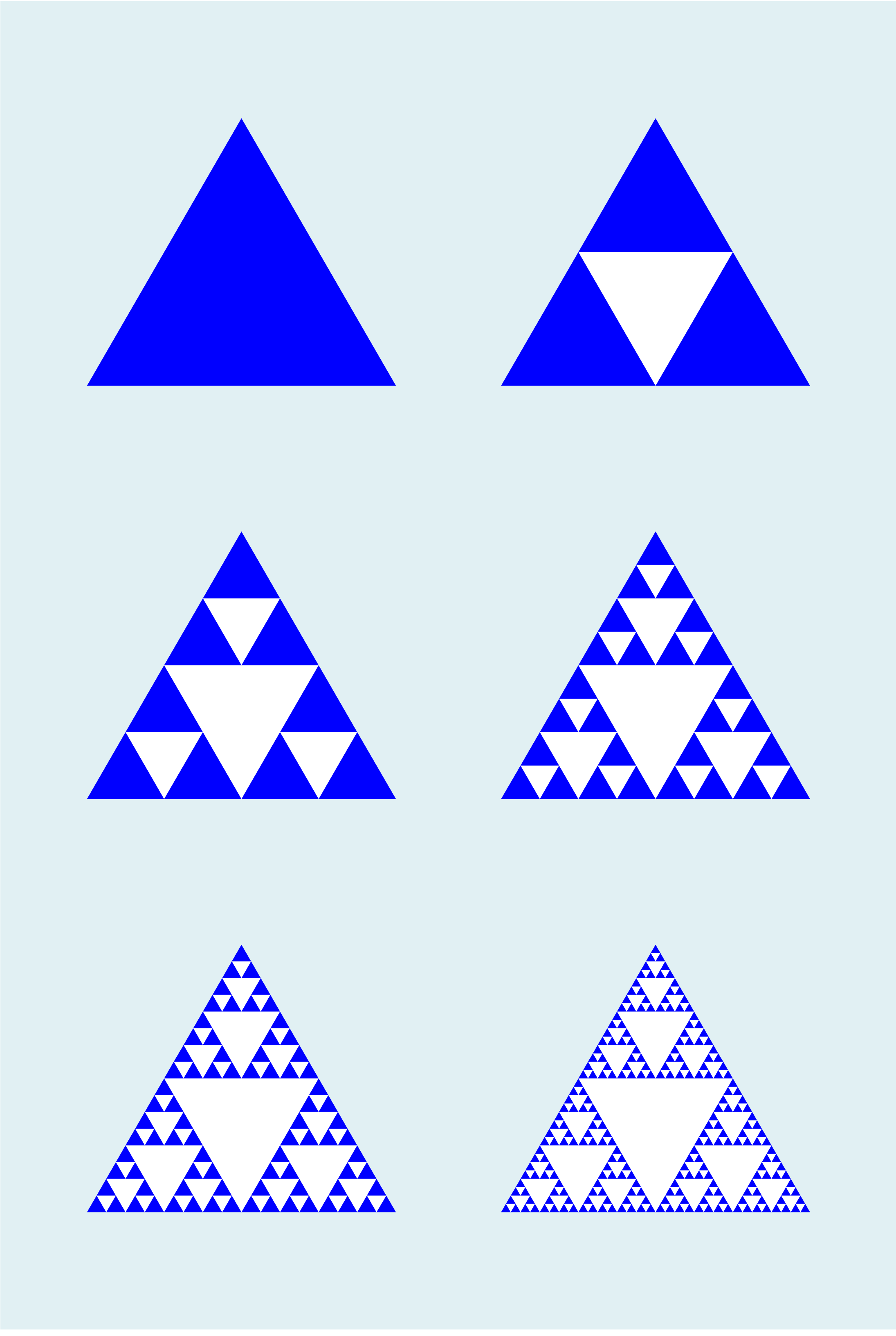

图 2. 谢尔宾斯基三角形

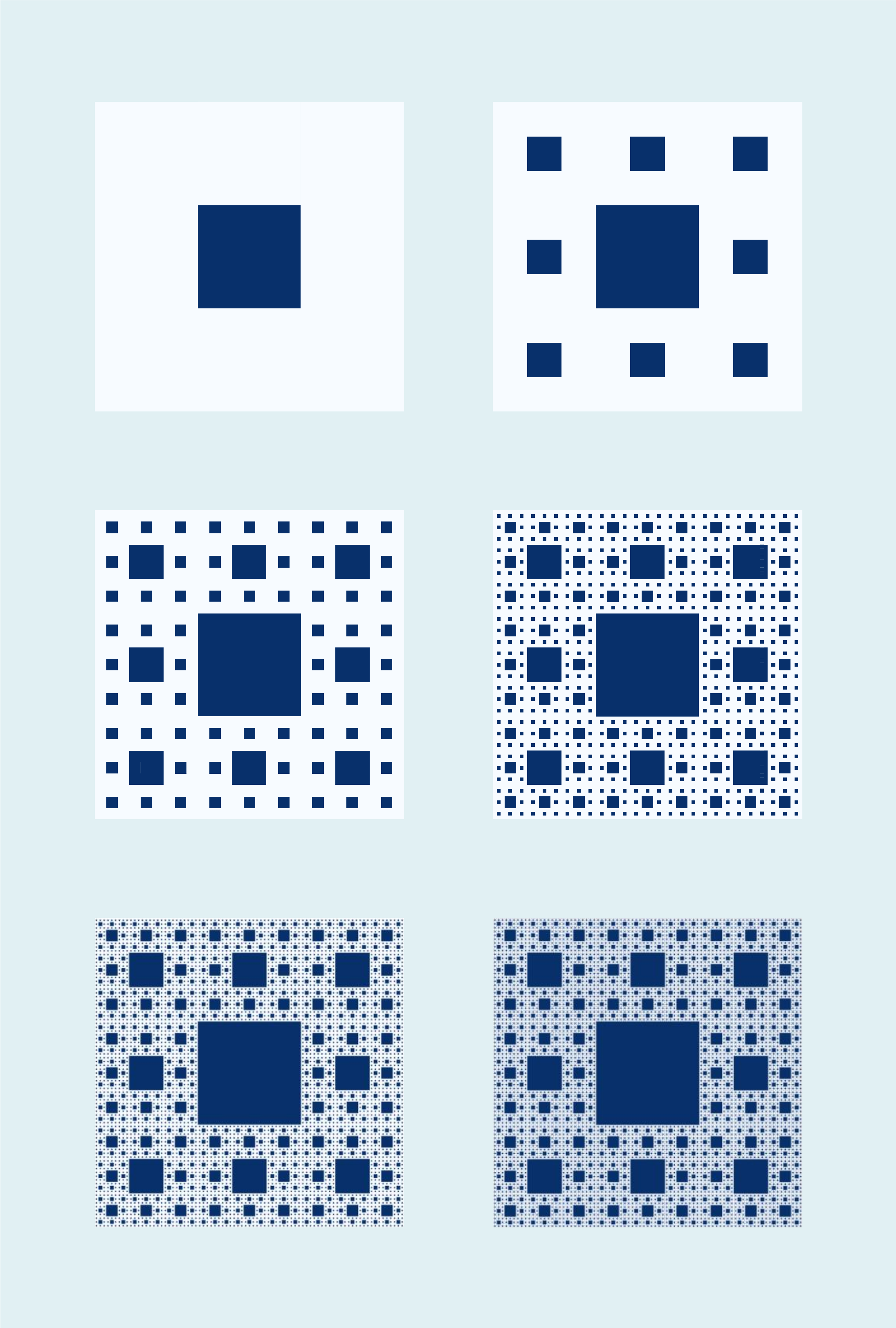

图 3. 谢尔宾斯基地毯

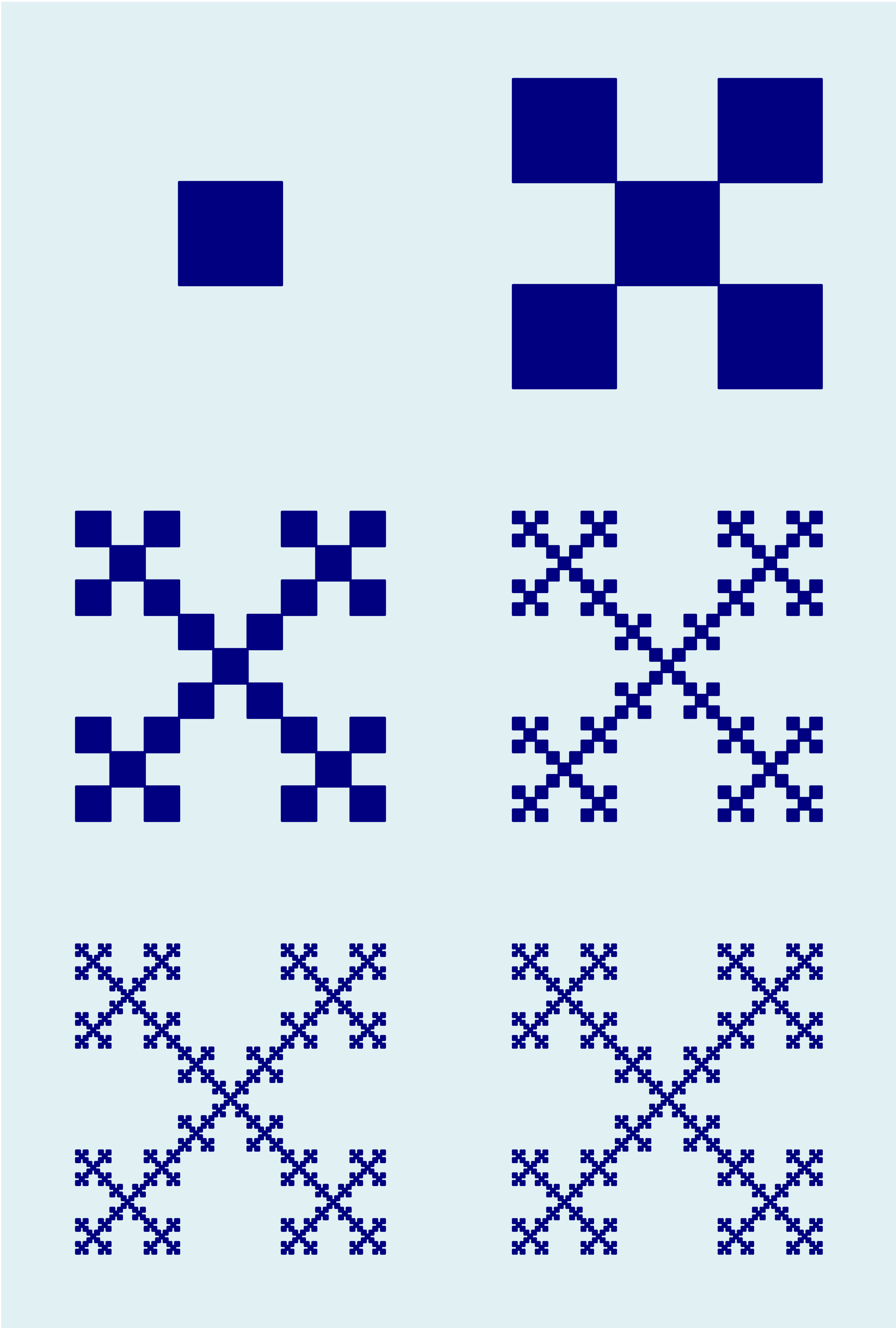

图 4. Vicsek 正方形分形，第 1 组

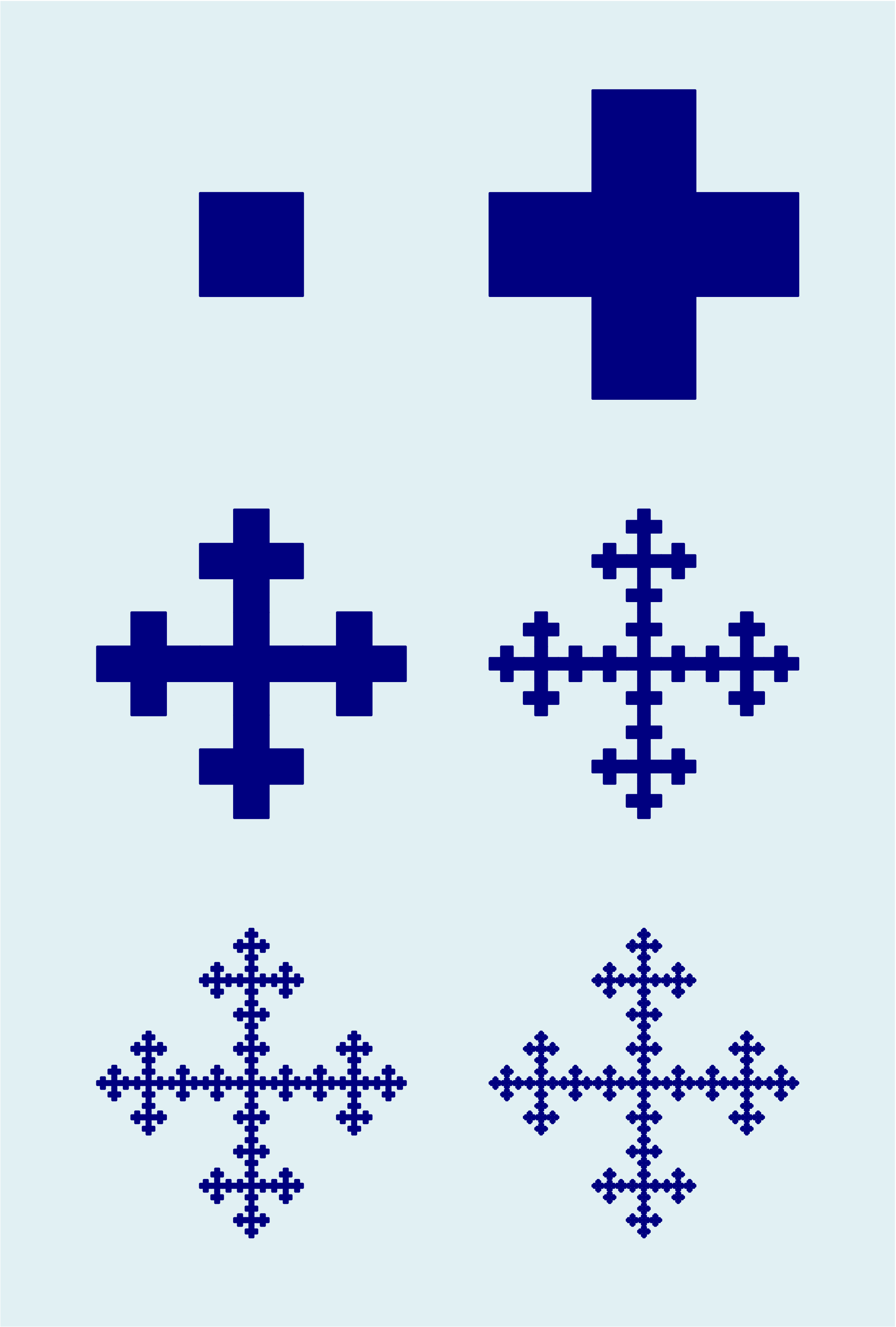

图 5. Vicsek 正方形分形，第 2 组

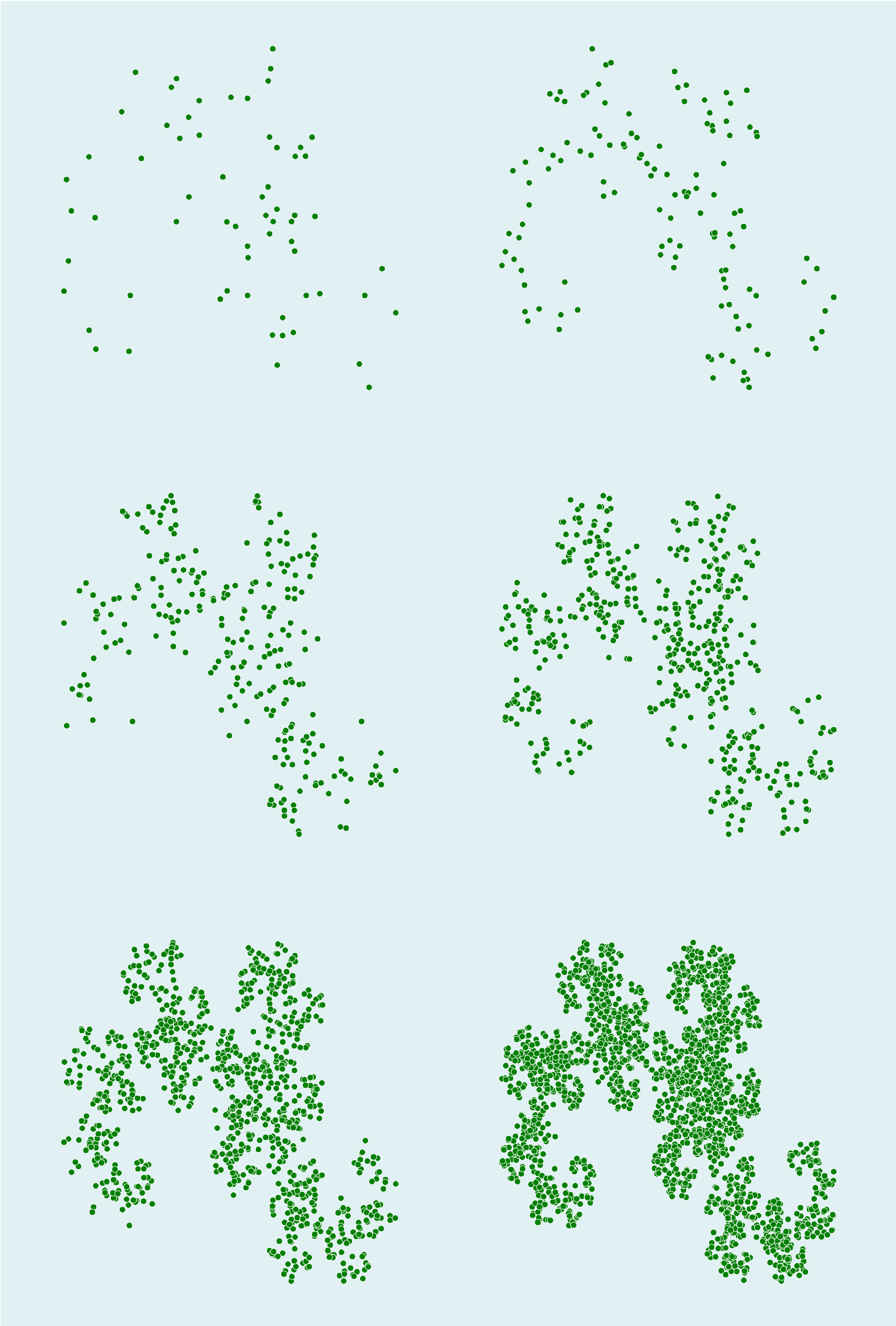

图 6. 龙曲线，基于随机数

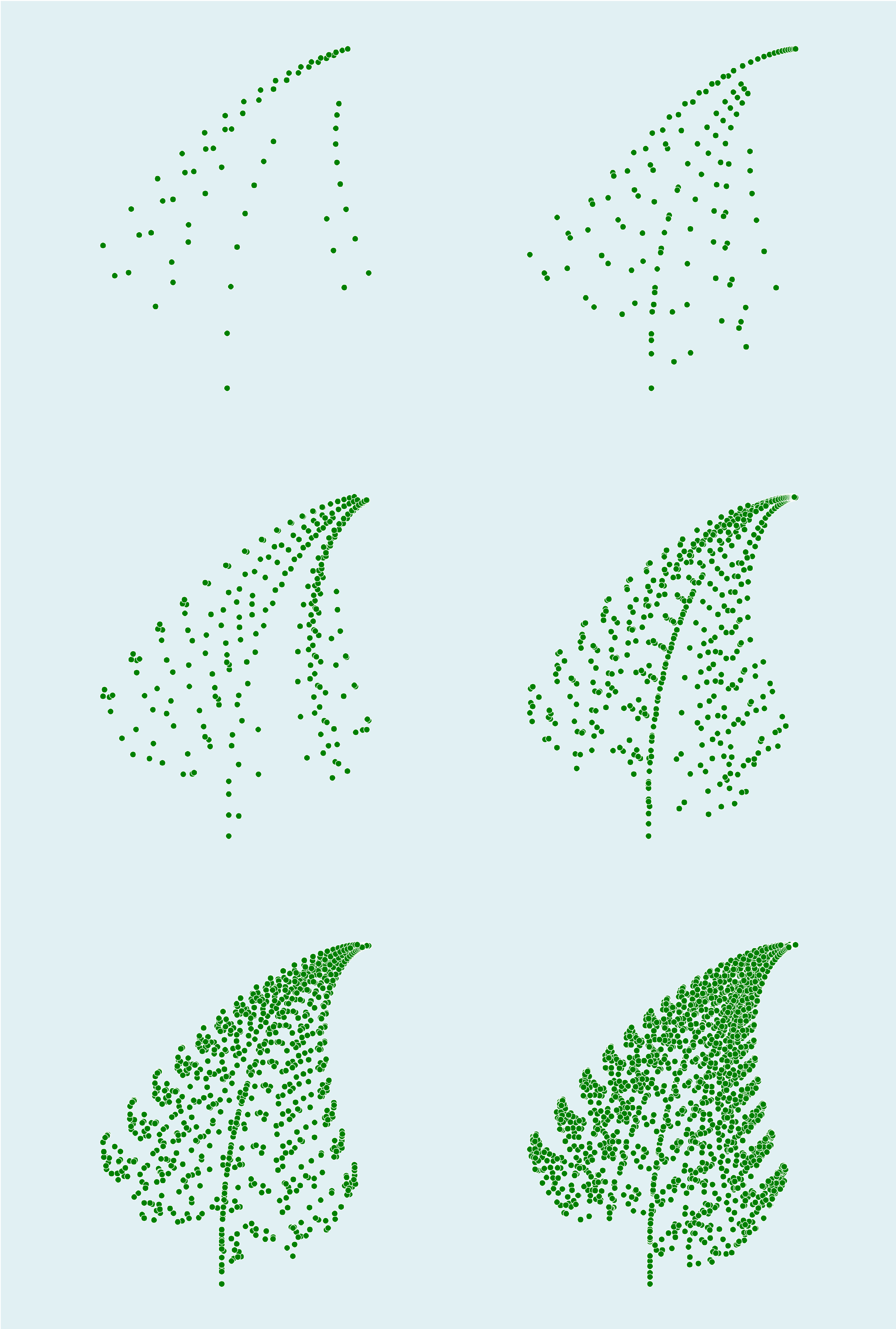

图 7. 巴恩斯利蕨，基于随机数

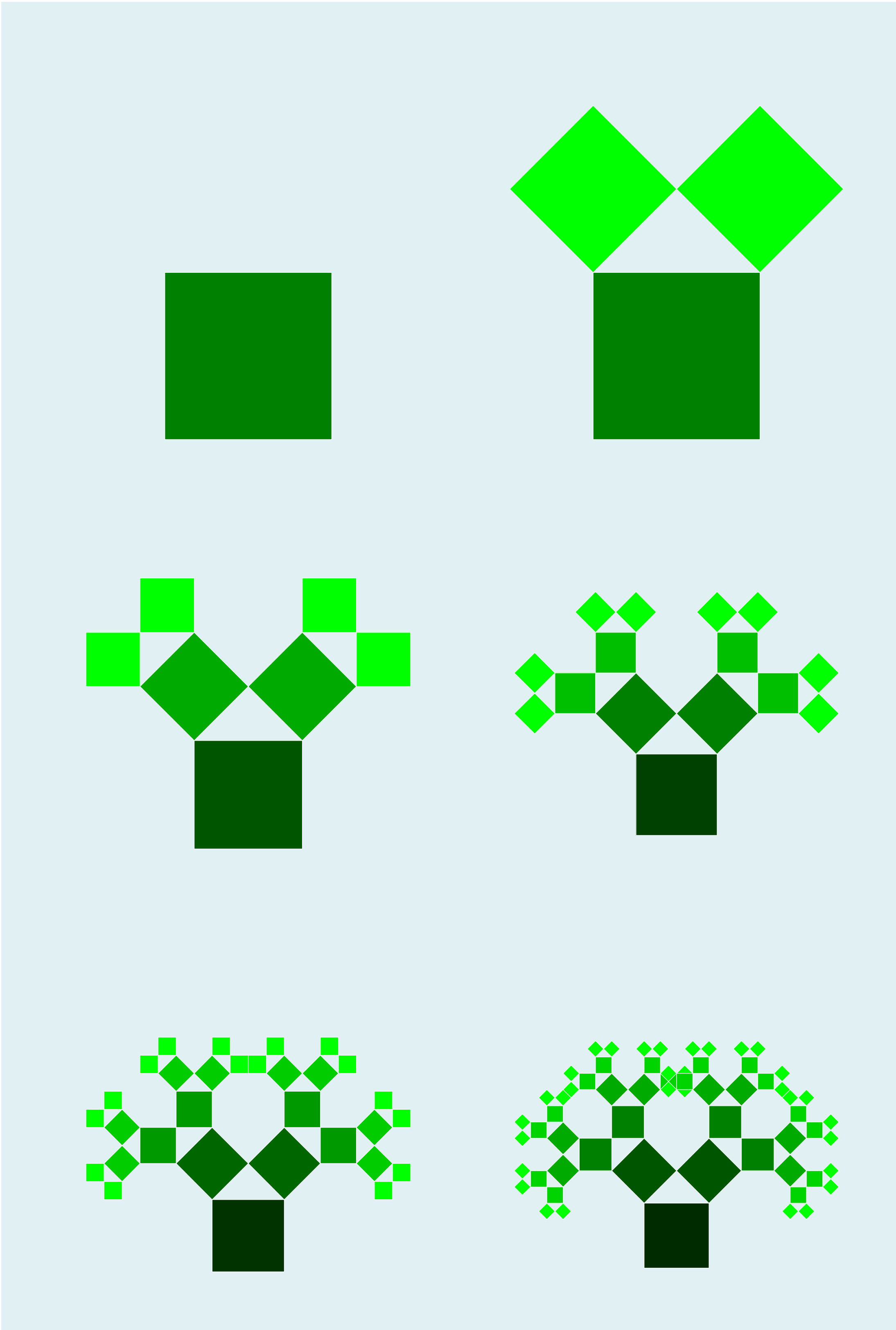

图 8. 勾股树

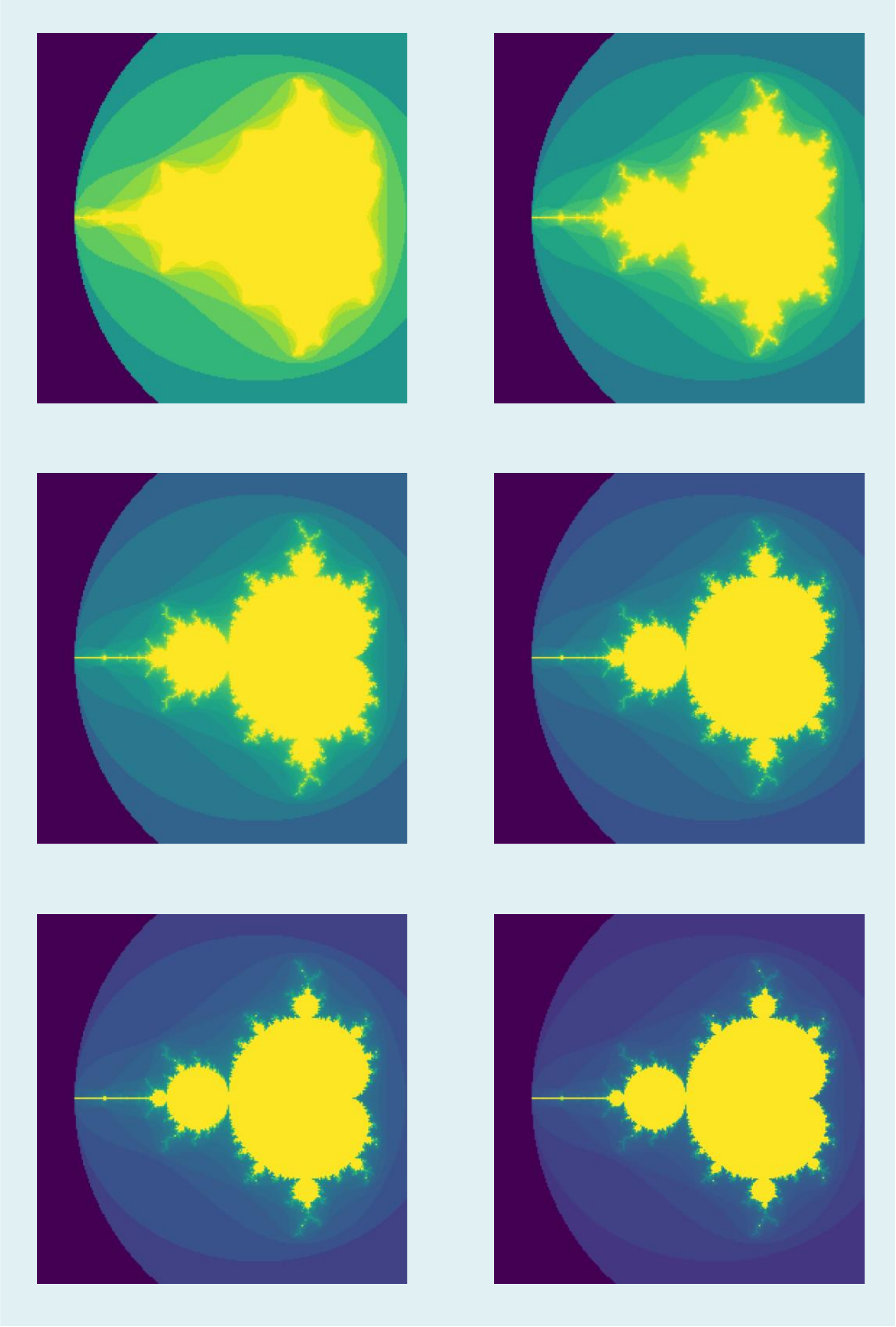

图 9. 曼德博集合

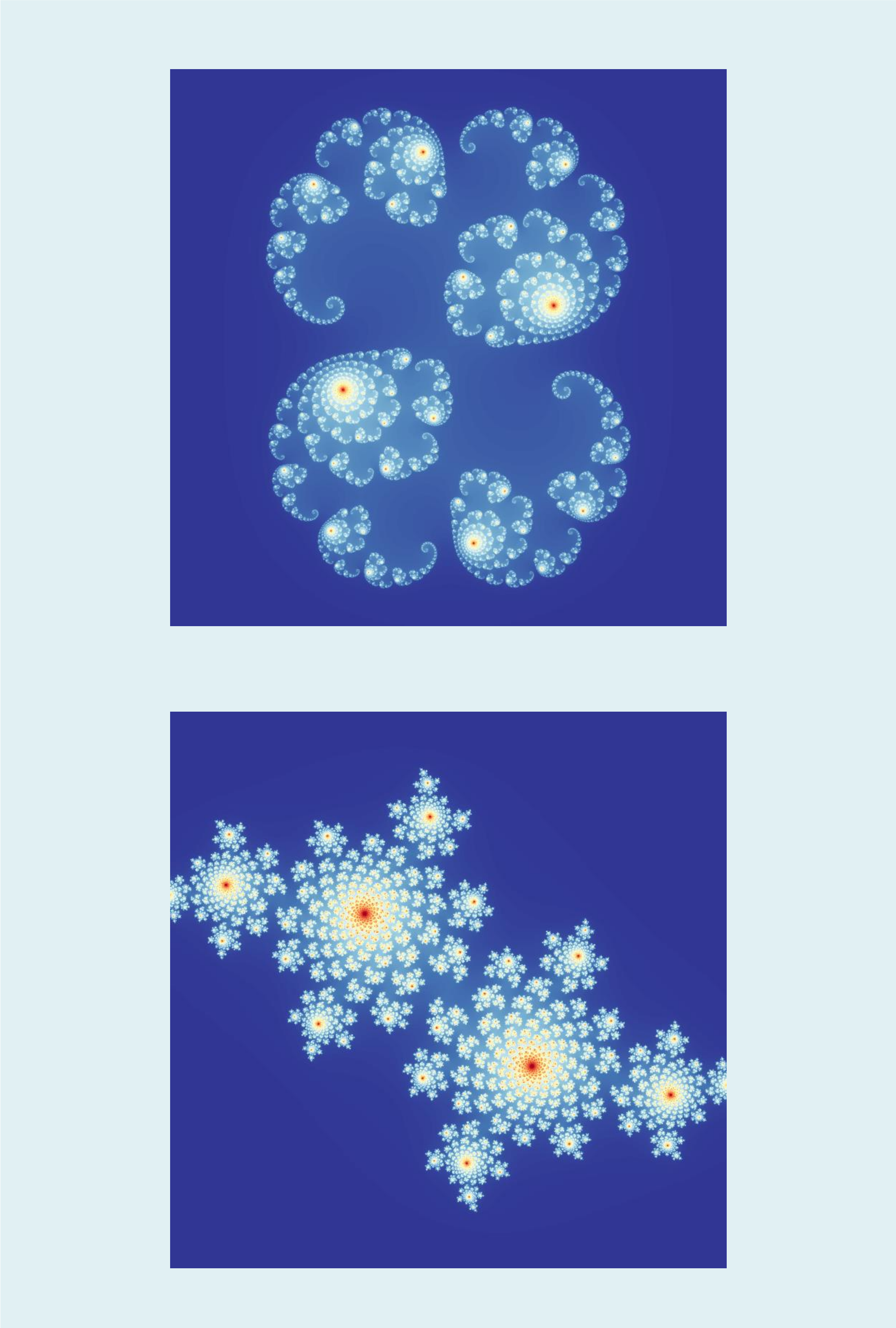

图 10. 朱利亚集合，第 1 组

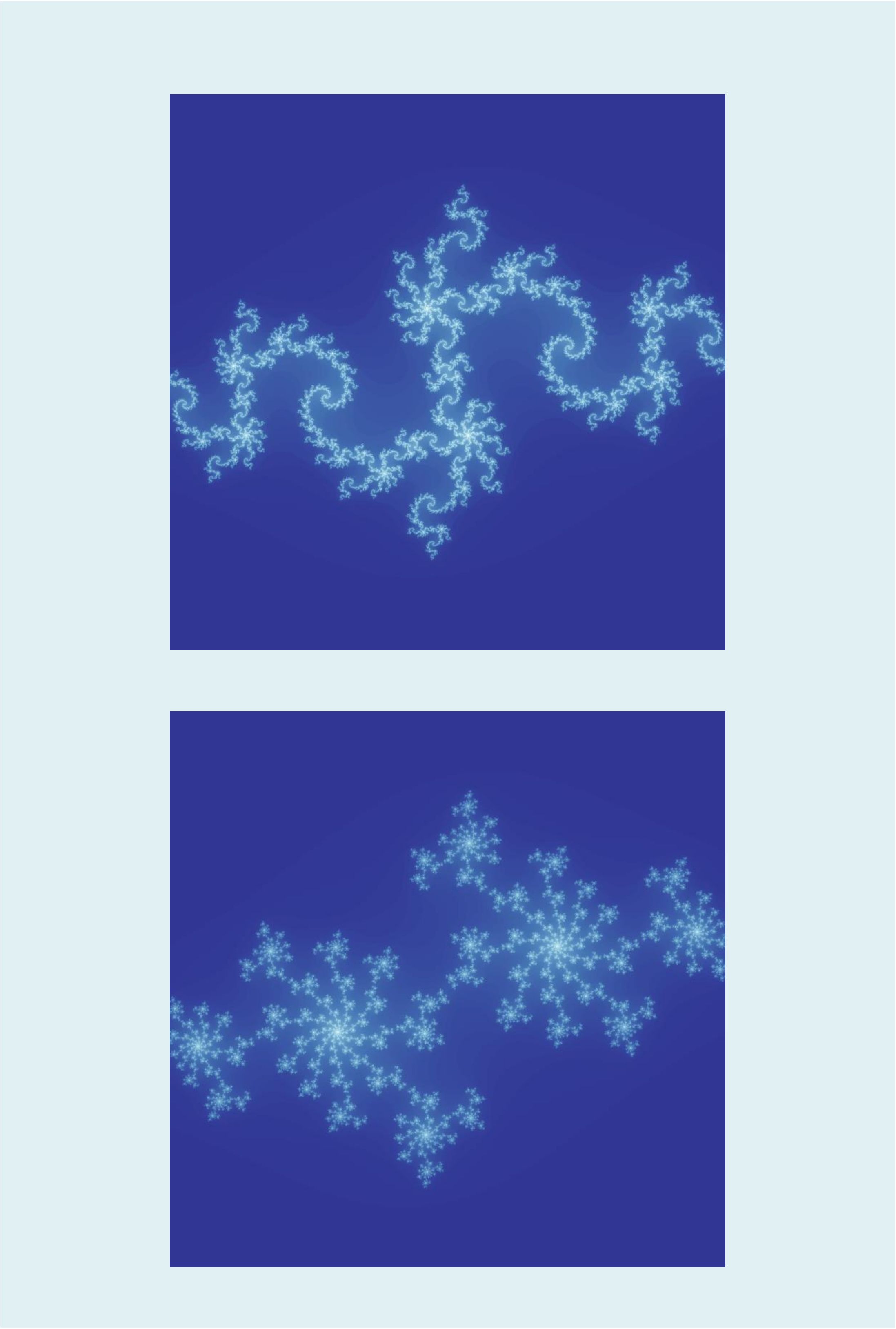

图 11. 朱利亚集合，第 2 组

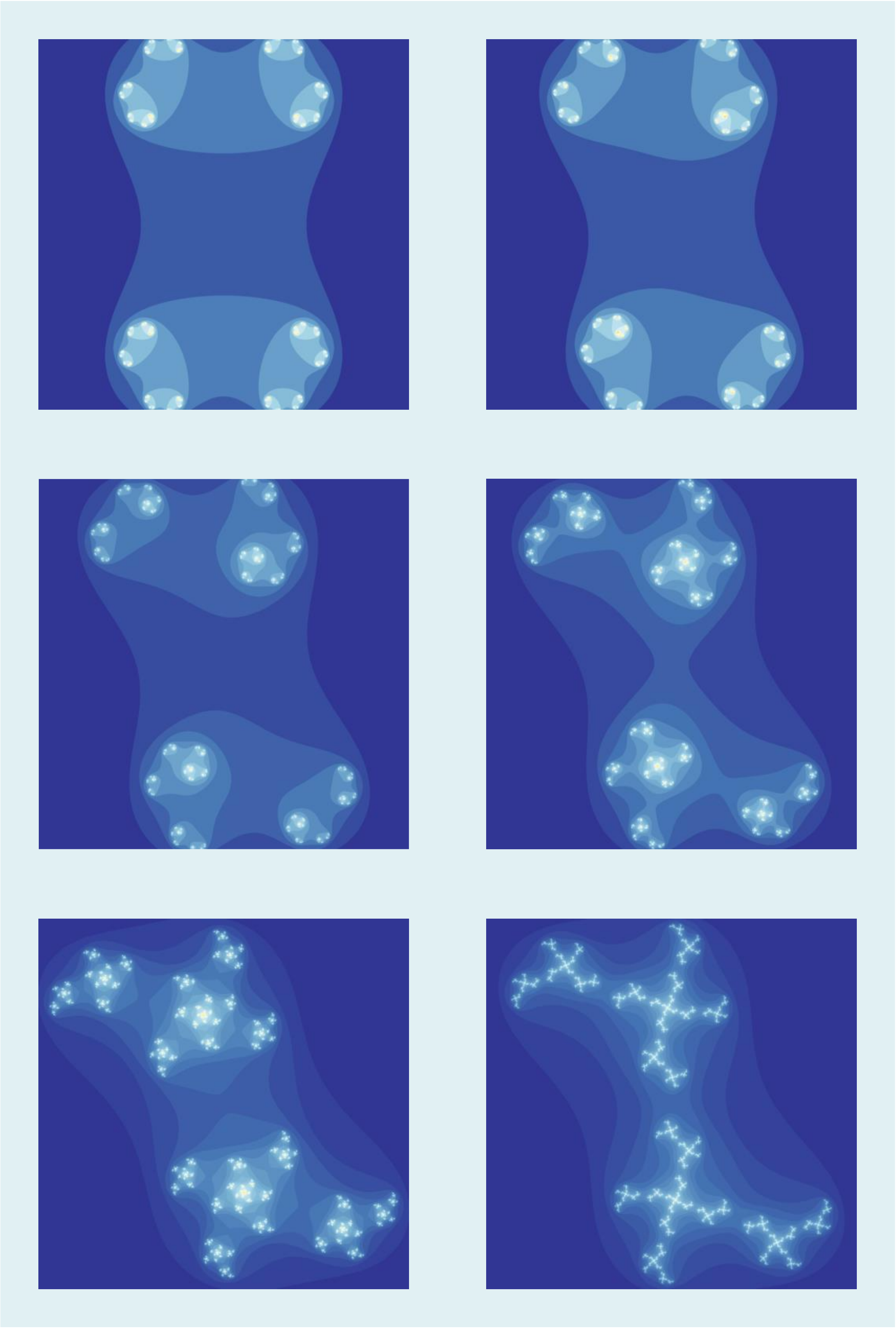

图 12. 朱利亚集合，第 3 组

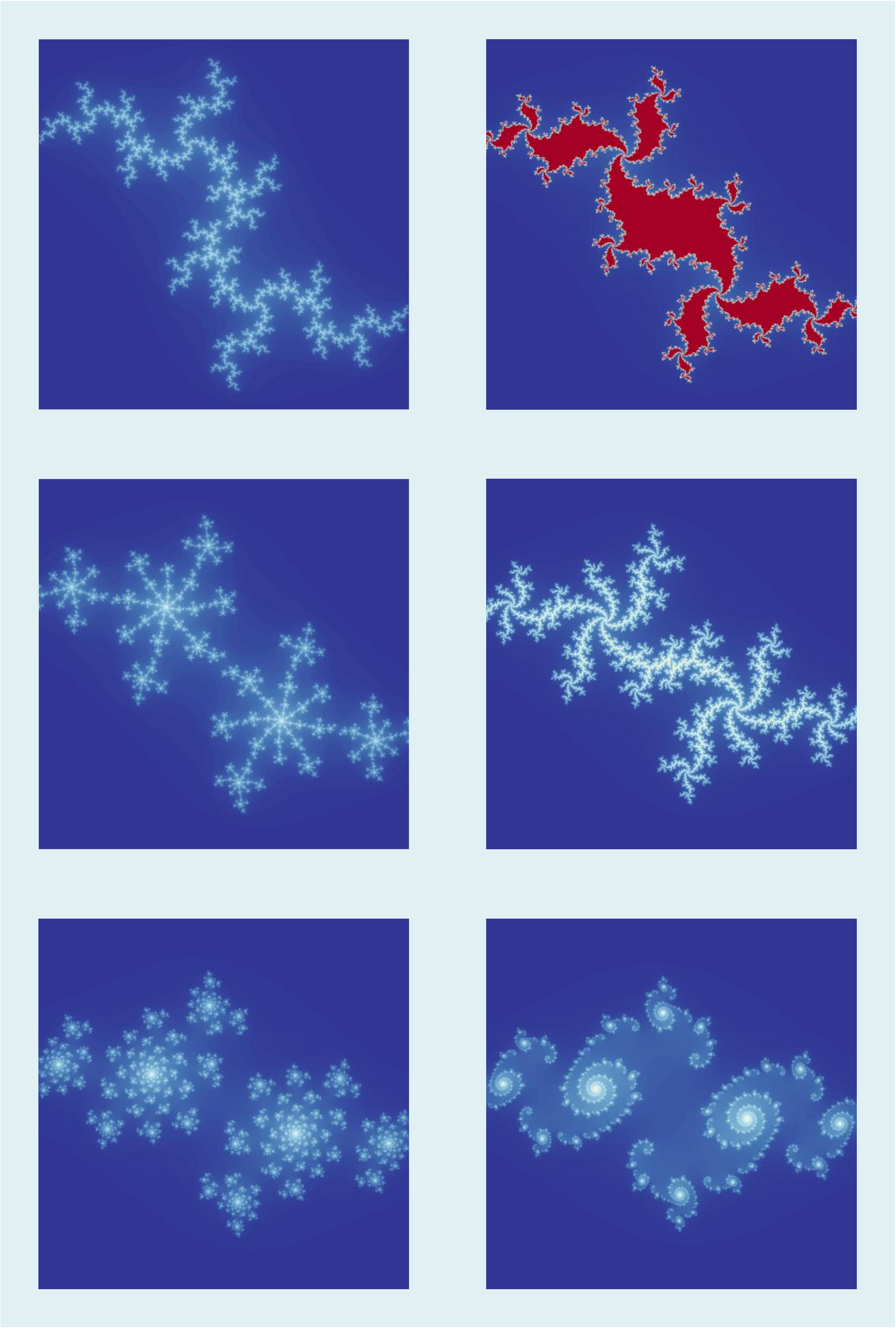

图 13. 朱利亚集合，第 4 组