

## 21

## Mesh Surface

## 网格曲面

沿着两个维度的曲线织成的曲面



画家把太阳画成黄点；艺术家把黄点变成太阳。

*There are painters who transform the sun to a yellow spot, but there are others who with the help of their art and their intelligence, transform a yellow spot into sun.*

—— 毕加索 (Pablo Picasso) | 西班牙艺术家 | 1881 ~ 1973



- ▶ matplotlib.pyplot.contour() 绘制等高线图
- ▶ matplotlib.pyplot.contourf() 绘制平面填充等高线
- ▶ matplotlib.pyplot.plot\_wireframe() 绘制线框图
- ▶ matplotlib.pyplot.scatter() 绘制散点图
- ▶ numpy.diag() 如果 A 为方阵，numpy.diag(A) 函数提取对角线元素，以向量形式输入结果；如果 a 为向量，numpy.diag(a) 函数将向量展开成方阵，方阵对角线元素为 a 向量元素
- ▶ numpy.dot() 计算向量标量积。值得注意的是，如果输入为一维数组，numpy.dot() 输出结果为标量积；如果输入为矩阵，numpy.dot() 输出结果为矩阵乘积，相当于矩阵运算符@
- ▶ numpy.linalg.det() 计算行列式值
- ▶ numpy.linalg.inv() 矩阵求逆
- ▶ numpy.meshgrid() 创建网格化数据
- ▶ numpy.outer() 计算两个向量的外积、张量积
- ▶ numpy.sqrt() 计算平方根
- ▶ numpy.vstack() 返回竖直堆叠后的数组
- ▶ numpy.zeros\_like() 用来生成和输入矩阵形状相同的零矩阵
- ▶ scipy.stats.dirichlet.pdf() 计算 Dirichlet 分布的概率密度函数
- ▶ scipy.stats.multivariate\_normal.pdf() 多元高斯分布概率密度函数
- ▶ sympy.diff() 求解符号导数和偏导解析式
- ▶ sympy.exp() 符号自然指数
- ▶ sympy.lambdify() 将符号表达式转化为函数

## 21.1 网格曲面

### 颗粒度

在绘制网格曲面时，我们也会碰到颗粒度问题。如图 1 (a) 所示，当网格稀疏时，生成的网格曲面很粗糙。

另外一个极端，如图 1 (b) 所示，当颗粒度过高时，生成的网格过于绵密，虽然线条变得光滑很多，但是整个曲面变化趋势的辨识度反而降低。

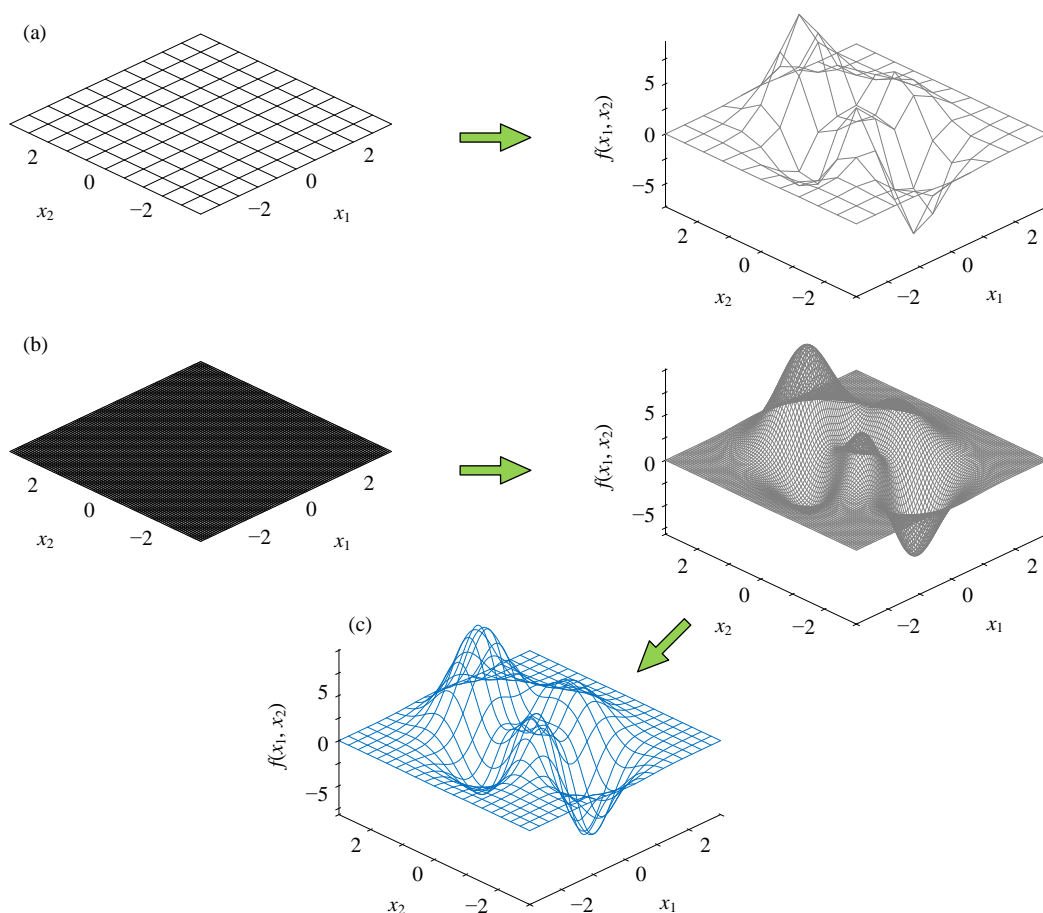


图 1. 网格颗粒度

解决这个问题的办法很简单，在使用 `Axes3D.plot_wireframe()` 绘制网格曲面时，可以使用图 1 (b) 这种颗粒度很高的网格面，同时设置 `rstride`、`cstride` 来调节步幅。如图 1 (c) 所示，增大单一维度上的步幅，可以保证线条的光滑程度，但是网格面看上去更清爽。

注意，使用 `Axes3D.plot_wireframe()` 时，如果不提供 `rstride`、`cstride`，函数会自动设置步幅。但是，为了保证质量可控，建议大家主动设置 `rstride`、`cstride`。

### 绘制沿特定方向曲线

对于 `Axes3D.plot_wireframe()`，我们可以分别将 `rstride`、`cstride` 设置为 0，从而绘制沿单一方向曲线，如图 2 (a)、(c) 所示。这种可视化方案很适合分析二元函数。这两种曲面可以投影在平面上，如图 2 (b)、(d) 所示。

### 进一步变形

在网格曲面基础之上，我们还可以绘制并强调特定曲线，如图 2 (e)、(f) 所示。在网格曲面上，我们可以绘制等高线，也可以绘制散点 (如图 2 (g)、(h) 所示)。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch21\_1.ipynb 绘制图 1 所有子图。

## 21.2 在三维平面展示四维数据

一般情况下，用 `Axes3D.plot_surface()` 函数绘制三维曲面  $f(x, y)$  时，渲染曲面的颜色也会根据  $f(x, y)$  取值，如图 3 (a) 所示。

如果，渲染三维曲面  $f(x, y)$  时采用另外一组数据  $V(x, y)$ ，我们便得到类似图 3 (b) 这幅图。

举个例子， $(x, y)$  代表经纬度，三维曲面  $f(x, y)$  代表一座山峰的海拔高度，而  $V(x, y)$  代表山峰不同位置某个时刻的温度值。

反过来，我们也可以用  $V(x, y)$  构造曲面，而用  $f(x, y)$  作为依据渲染曲面，具体如图 3 (c) 所示。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch21\_2.ipynb 绘制图 3 所有子图。

### Dirichlet 分布

图 4 所示为用这种方案可视化 Dirichlet 分布。这个分布  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  的取值范围都是  $[0, 1]$ ，且满足  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$ 。给定不同分布参数  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ ，将不同位置 Dirichlet 分布概率密度值映射到  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$  平面上，我们便得到图 4 图像。

➔ 《统计至简》第 7 章将专门讲解 Dirichlet 分布。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch21\_3.ipynb 绘制图 4 所有子图。

### 瑞利商

类似地，我们可以用图 5 可视化瑞利商。瑞利商在矩阵特征值和特征向量的计算中有广泛的应用，是线性代数中的一个重要概念。简单来说，在  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  这个单位球体上，红色代表瑞利商大，而蓝色代表瑞利商小。

➔ 《矩阵力量》第 14 章将专门讲解瑞利商。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch21\_4.ipynb 绘制图 5 所有子图。

## 21.3 剖面线

### 绘制剖面

我们可以用 `Axes3D.plot_wireframe()` 绘制剖面。如图 6 所示，剖面可以平行  $xy$ 、 $xz$ 、 $yz$  平面。结合线图，这些剖面可以用来可视化剖面线。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch21\_5.ipynb 绘制图 6 子图。

### 绘制剖面线

如图 7 (a) 所示，这幅图中有几个重要元素：网格曲面、特定高度等高线、剖面。从数学角度来看，浅蓝色剖面切割网格曲面的结果是红色曲线。

图 7 (b)、(c) 两幅子图中的红色剖面线则是用线图绘制。图 7 (b) 的剖面位于  $y = 0$ ，红色剖面线则展示当  $y = 0$  时，函数  $f(x, y)$  随  $x$  变化。图 7 (c) 的剖面位于  $x = 0$ ，红色剖面线则展示当  $x = 0$  时，函数  $f(x, y)$  随  $y$  变化。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch21\_6.ipynb 绘制图 7 子图。

## 21.4 平面填充

图 8 两个子图所示为二元高斯分布的概率密度函数曲面。为了可视化  $x_1$ 、 $x_2$  分别取不同值时函数曲线下方的面积，我们可以采用 `Axes3D.add_collection3d()` 函数在三维空间可视化填充对象。

➔ 《统计至简》第 10 章将专门讲解二元高斯分布。



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch21\_7.ipynb 绘制图 8 子图。

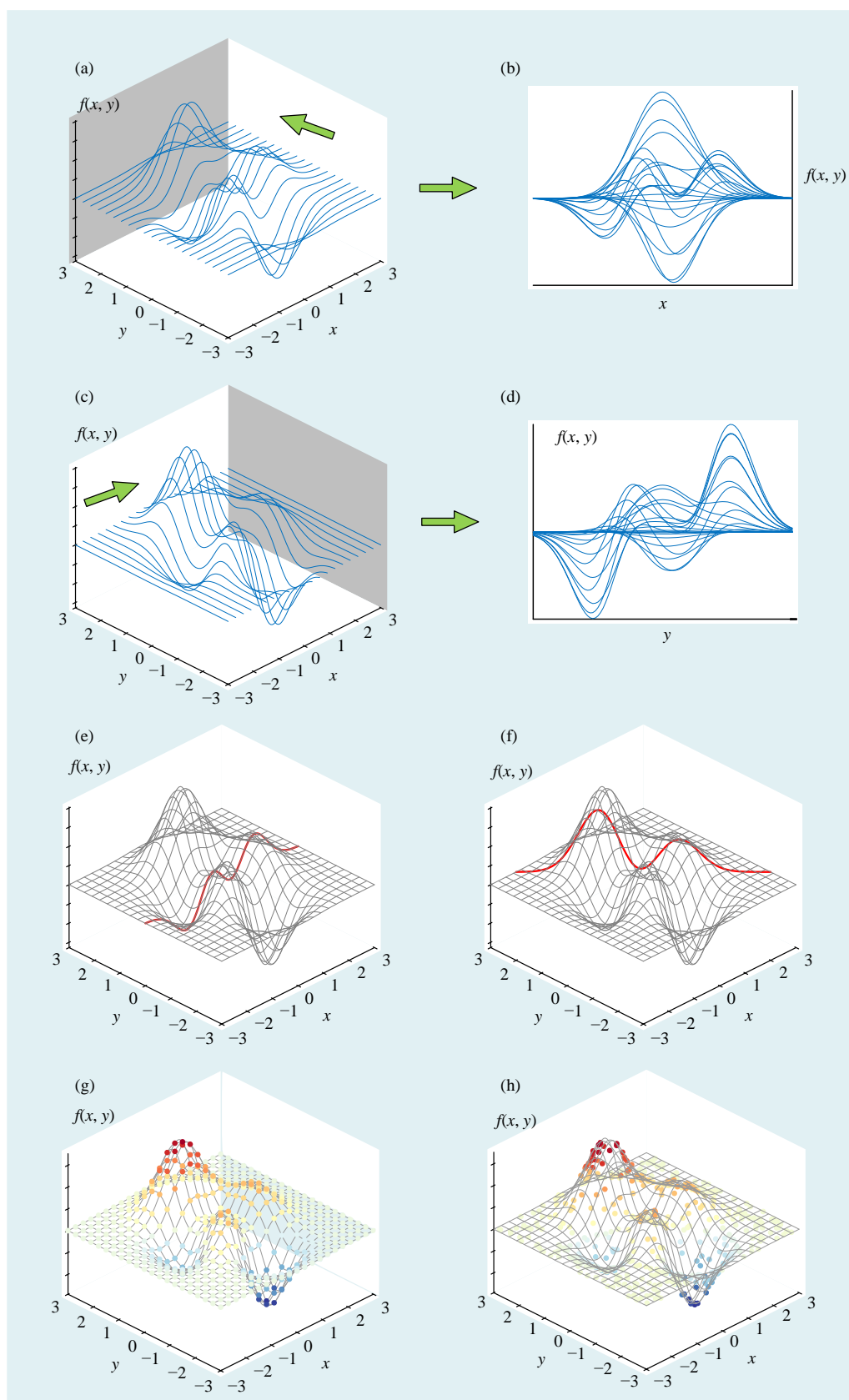


图 2. 网格曲面的进一步变形

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

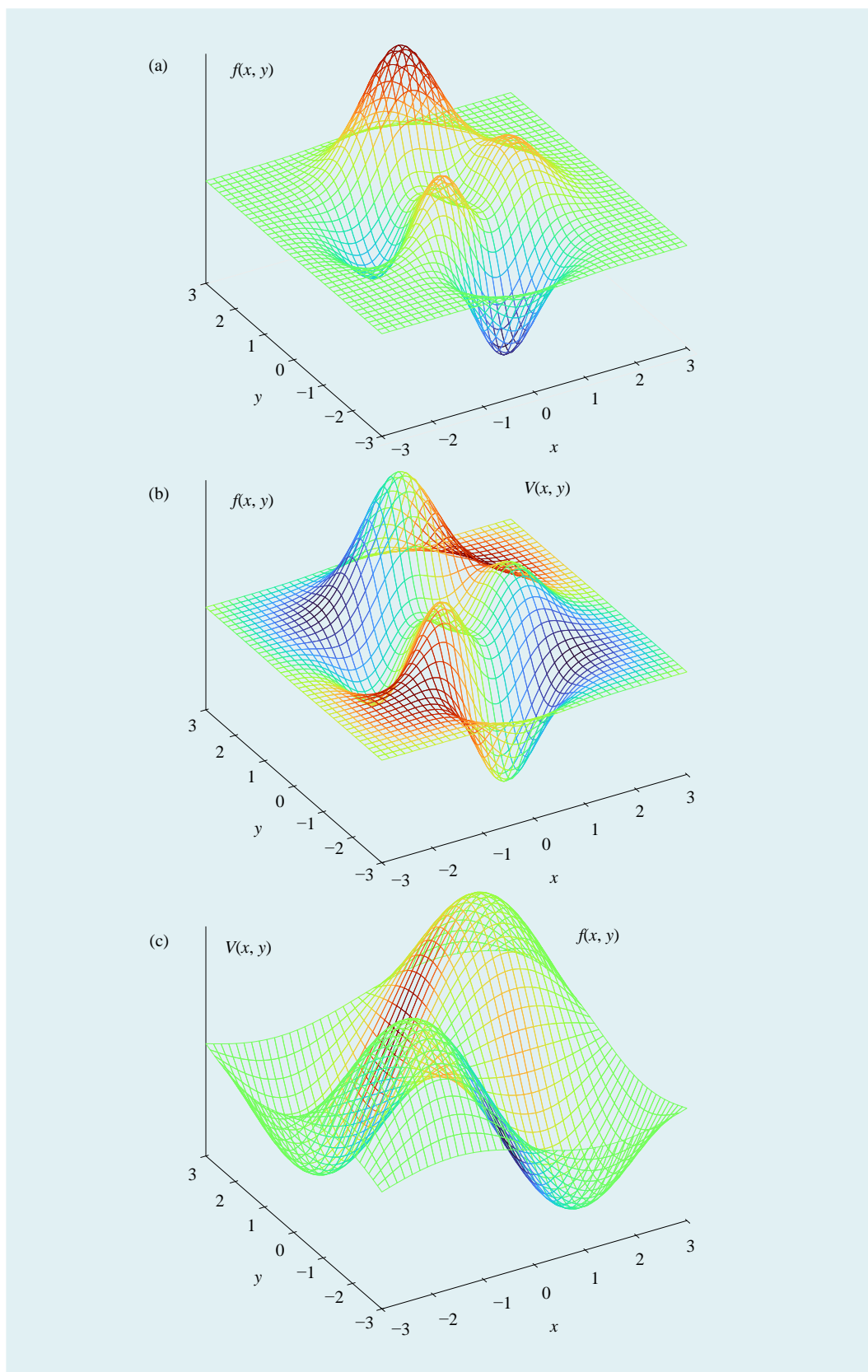


图 3. 渲染三维曲面



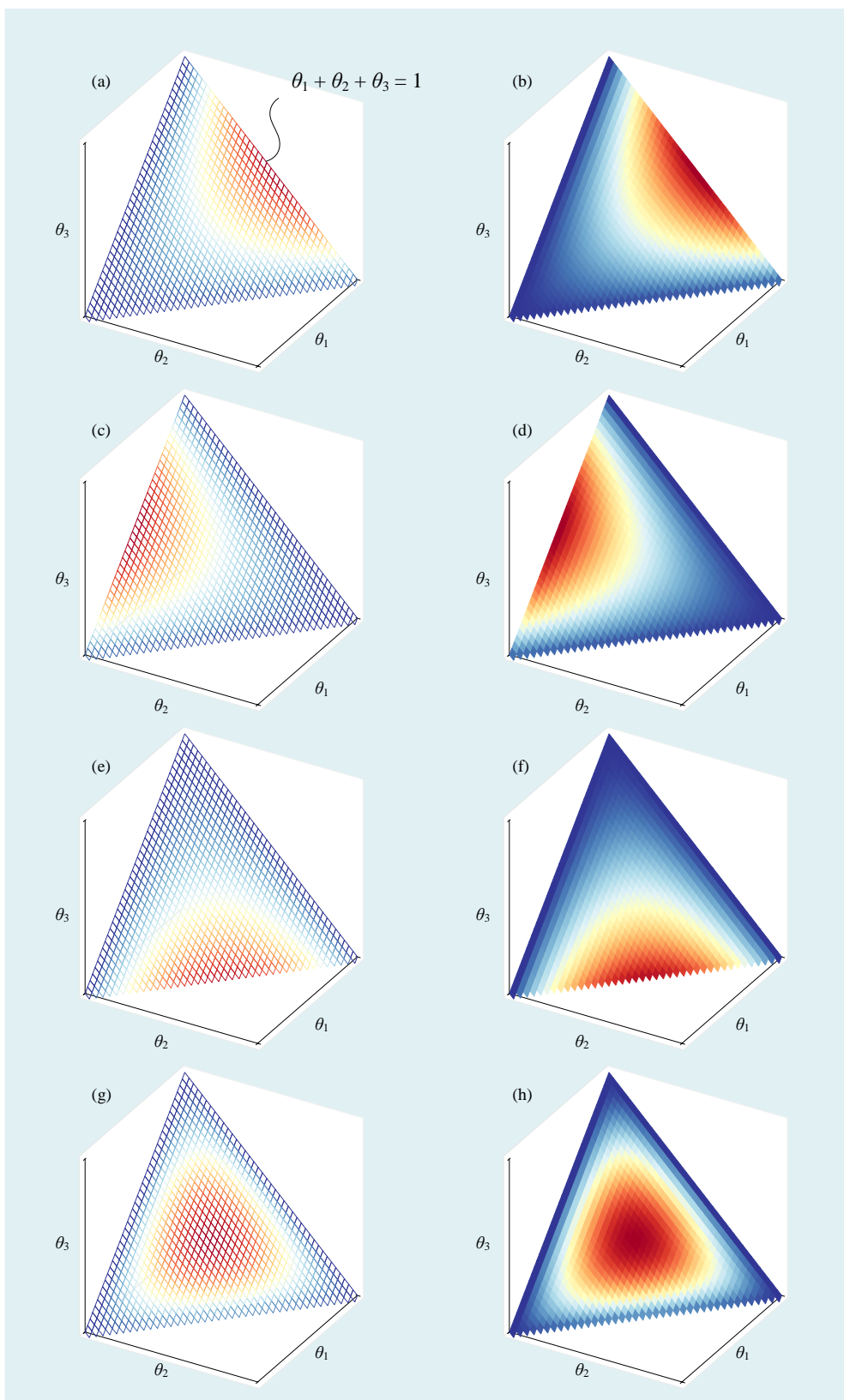


图 4. Dirichlet 分布

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

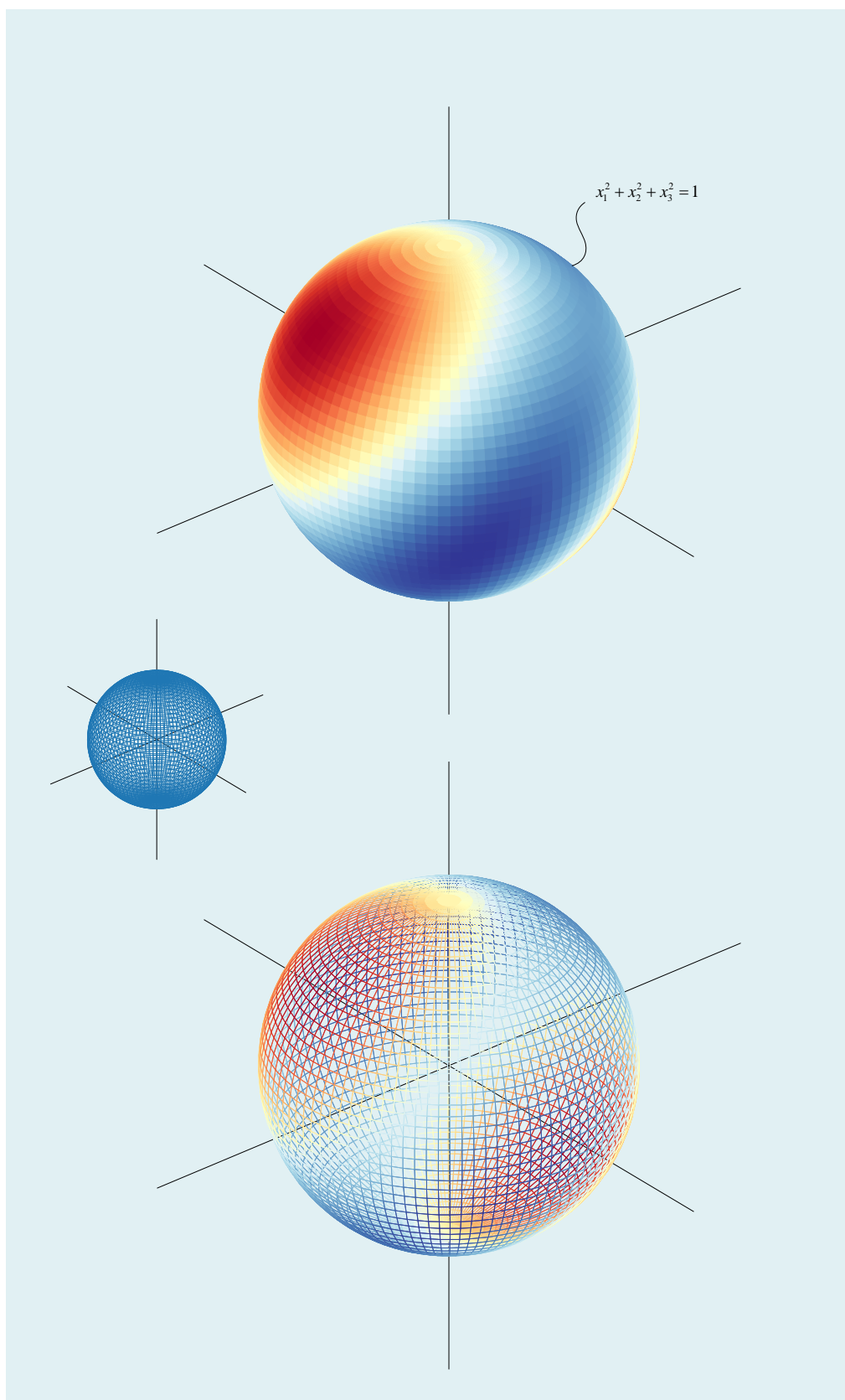


图 5. 瑞利商

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



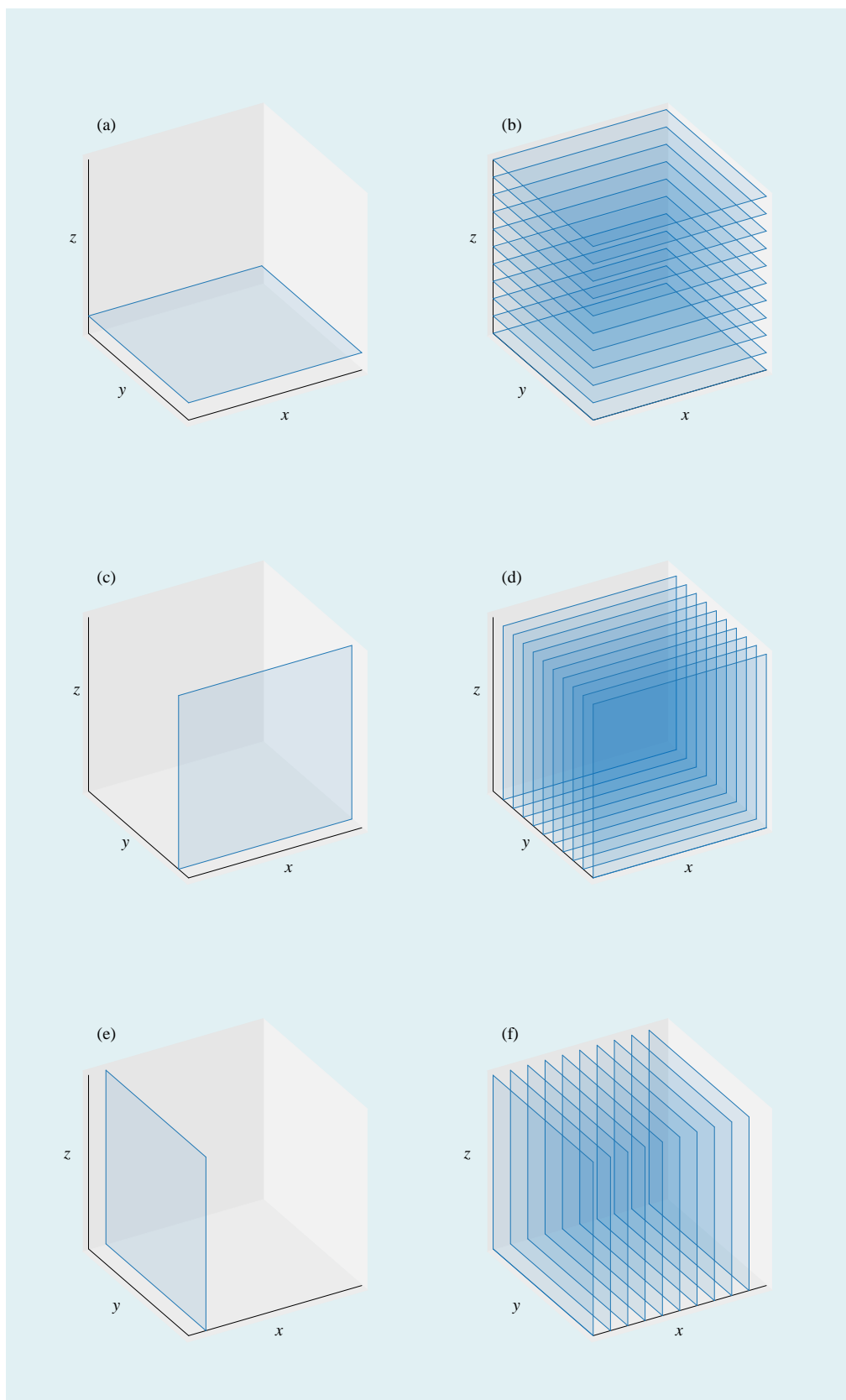


图 6. 平行于不同平面的剖面

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

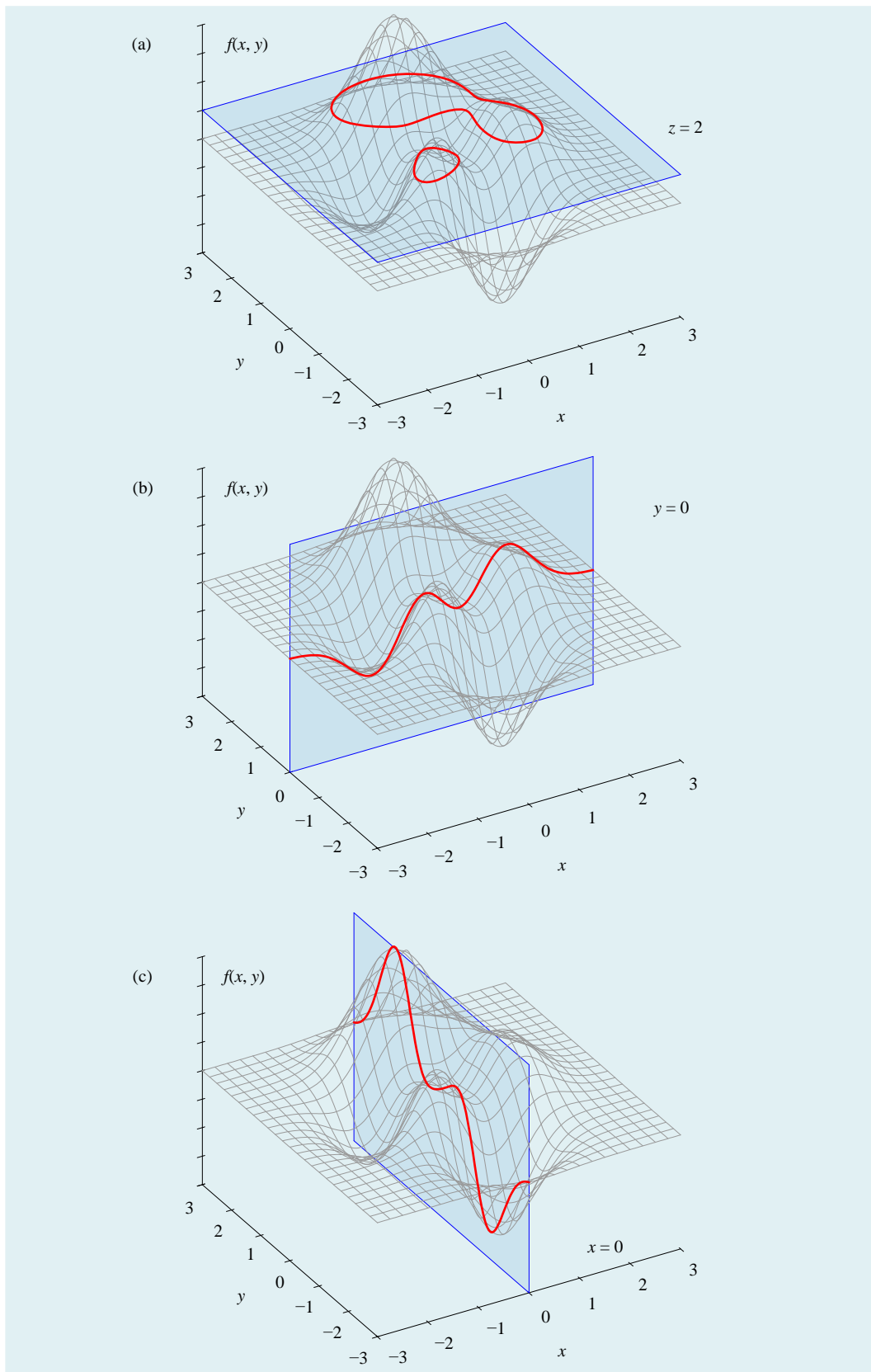


图 7. 二元函数在三个不同剖面上的剖面线

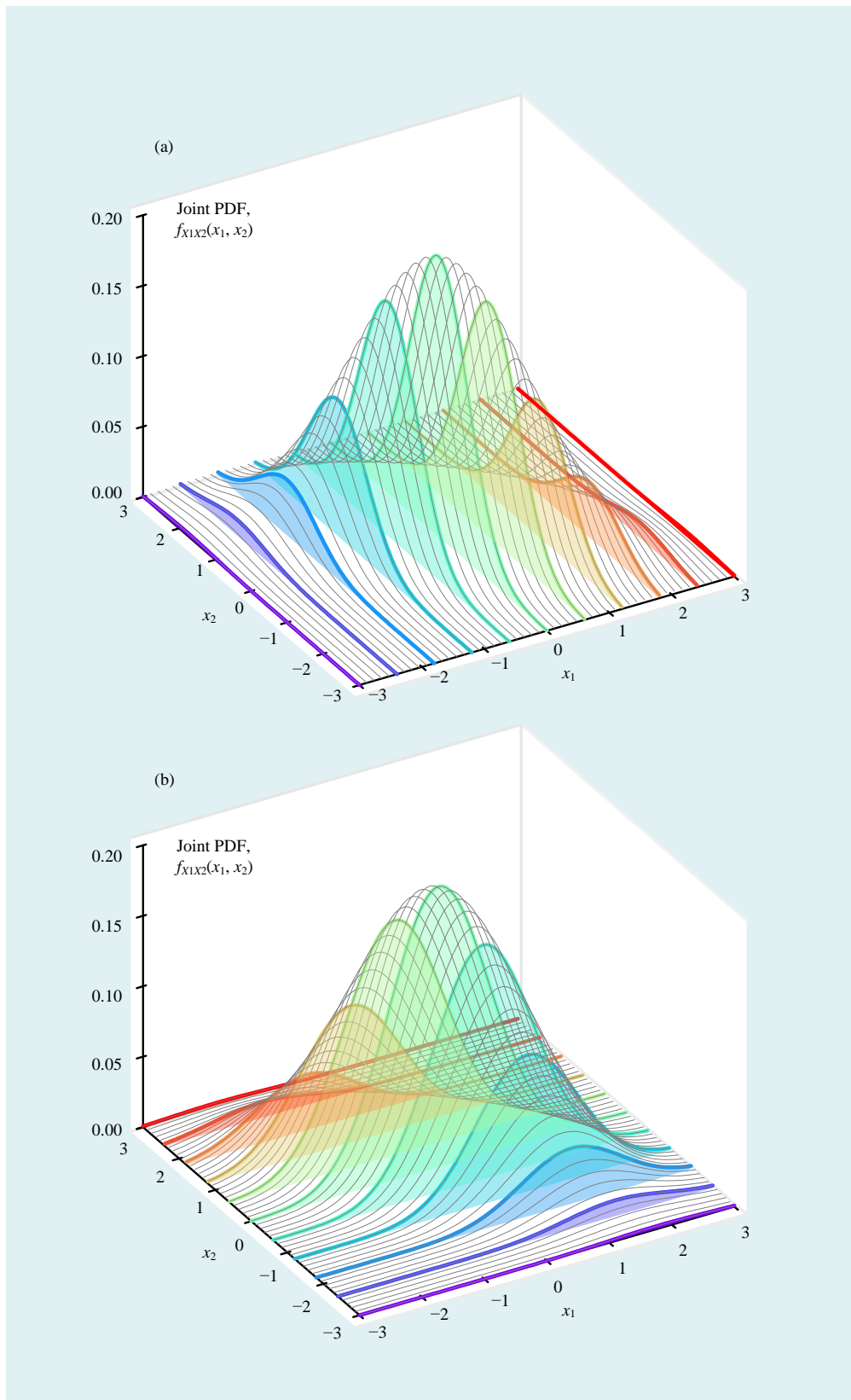


图 8. 三维线图的平面填充

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)