

## 22

## Implicit Functions

## 隐函数

提供绘制平面、立体几何形状的新思路



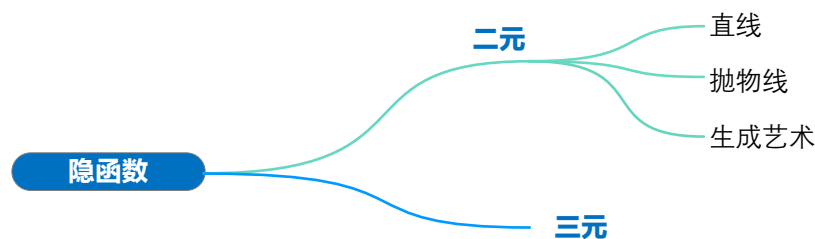
博爱好事，因为真正的力量就蕴藏在其中。深爱之人会付出更多，做成更多事情，并且能够取得更大的成就。而在爱的驱使下所做的一切都会变得出色。

*It is good to love many things, for therein lies the true strength, and whosoever loves much performs much, and can accomplish much, and what is done in love is well done.*

——文森特·梵高 (Vincent van Gogh) | 荷兰后印象派画家 | 1853 ~ 1890



- ▶ `numpy.linspace()` 在指定的间隔内，返回固定步长的数据
- ▶ `numpy.meshgrid()` 创建网格数据
- ▶ `matplotlib.pyplot.contour()` 绘制等高线
- ▶ `matplotlib.patches.Rectangle()` 添加矩形图形对象
- ▶ `matplotlib.transforms.Affine2D` 图形对象仿射变换
- ▶ `numpy.linalg.inv()` 计算矩阵逆



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

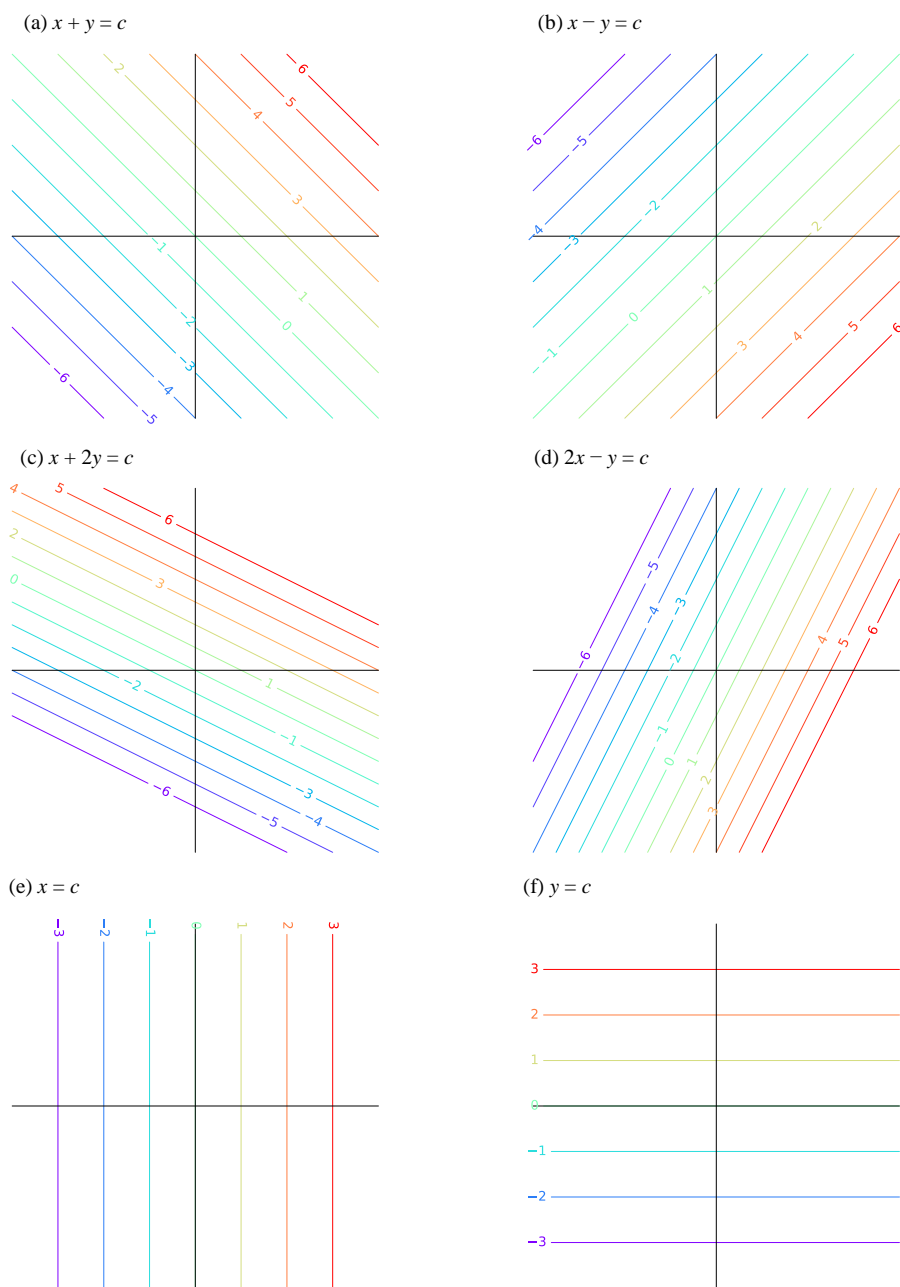
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 22.1 二元隐函数

简单来说，隐函数是一种不显式表示变量关系的函数。比如，函数  $y = x + 1$  可以写成隐函数形式  $x - y + 1 = 0$ 。再比如，函数  $y = x^2 + 1$  可以写成隐函数形式  $x^2 - y + 1 = 0$ 。更有意思的是，隐函数可以描述一些函数无法表达的关系，比如单位圆  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 。隐函数这种形式让我们可以采用等高线来可视化各种等式，下面首先介绍二元隐函数。

### 直线

隐函数给了我们可视化直线的新方法。本书前文，一般通过构造函数来呈现直线。而图 1 所示为利用等高线绘制直线。显然，图 1 (e) 并不是函数，但是我们依然可以用等高线可视化这组隐函数。



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

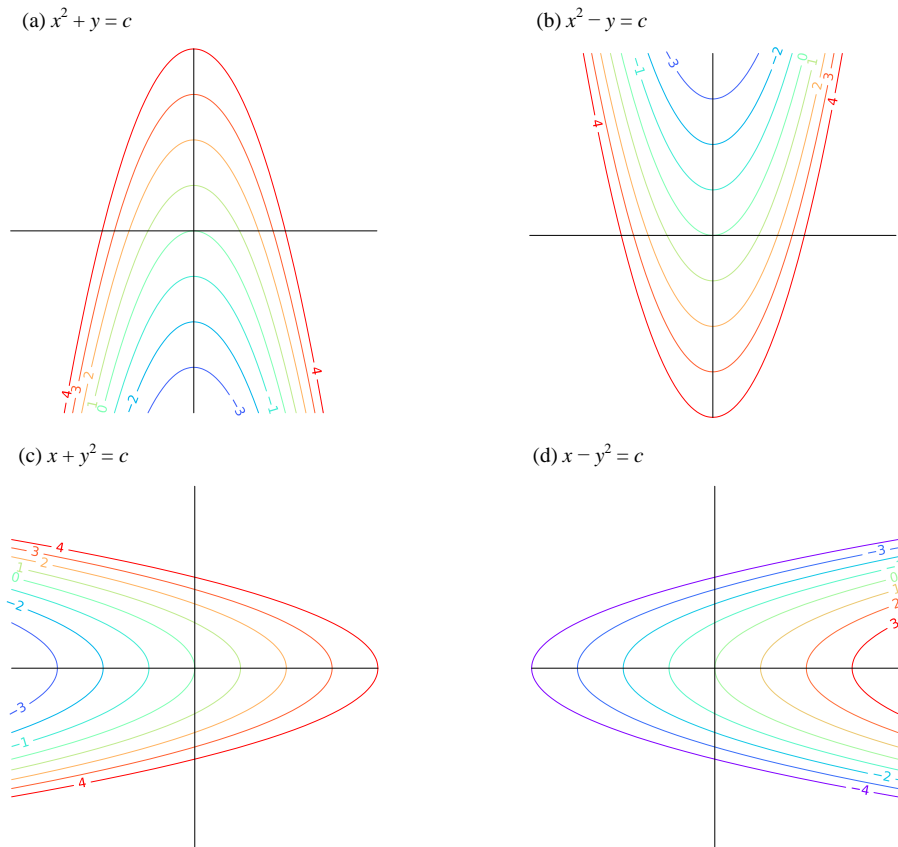
本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 1. 用等高线绘制直线 |  BK\_2\_Ch22\_01.ipynb

## 抛物线

图 2 所示为利用等高线绘制的抛物线，显然图 2 (c)和(d)不是函数。

图 2. 用等高线绘制抛物线 |  BK\_2\_Ch22\_02.ipynb

## 生成艺术

“鸢尾花书”中，我们更常见的是利用平面等高线可视化平面几何形状。

图 3 上图所示为利用等高线绘制的一组圆锥曲线。通过在  $[0, 3]$  范围之内改变离心率，圆锥曲线从正圆、椭圆，最终变成双曲线。绘制每条曲线时，我们先设置离心率，然后利用网格数据生成特定圆锥曲线的数据。绘制等高线时，仅仅绘制等高线值为 1 的那一条曲线。并且，利用色谱我们生成一组连续变化的颜色，分别渲染每一条圆锥曲线。



《数学要素》第 9 章将介绍如何通过设定离心率改变圆锥曲线类型。

图 3 下图绘制的是在给定椭圆上不同点处的切线。绘制这幅图时需要用到椭圆切线的解析式，《矩阵力量》第 20 章将专门讲解这一话题。

下面我们看两个更复杂的例子。如图 4 上图所示，给定矩形，绘制一组和矩形相切的椭圆。图中的矩形用 `matplotlib.patches` 绘制。而椭圆采用等高线绘制。



《数学要素》第 9 章会专门讲解这组椭圆的性质。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

如图 4 下图所示，给定旋转椭圆，绘制一组和椭圆相切的矩形。椭圆采用参数方程绘制，而矩形采用 `matplotlib.patches`。

绘制矩形还用到了仿射变换 (`affine transformation`)。本书后续将专门讲解仿射变换。



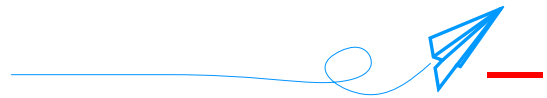
《统计至简》第 14 章将讲解图 4 下图用到的数学工具。

图 5 这些椭圆则有一个有趣的性质——长半轴平方、短半轴平方之和为定值。图 6 则是用等高线绘制星形曲线 (`astroid`)。

## 22.2 三元隐函数

图 7 ~ 图 11 所示为用三个方向等高线织成的图形展示三元隐函数。

请大家查看 `BK_2_Ch22_09.ipynb`，并将隐函数等式写在对应图形上方。



本章介绍如何用等高线展示二元、三元隐函数。

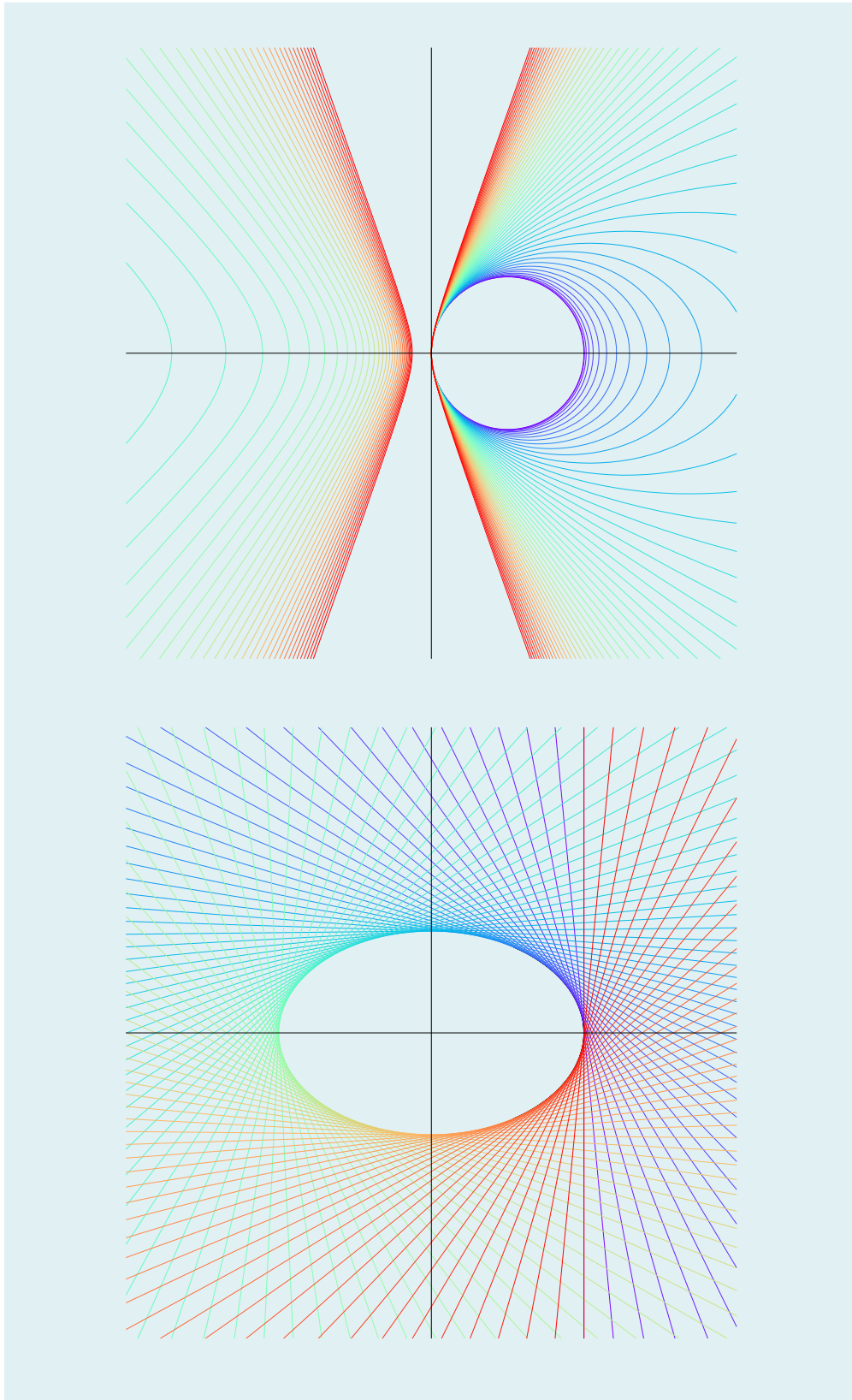


图 3. 利用等高线绘制圆锥曲线、椭圆切线

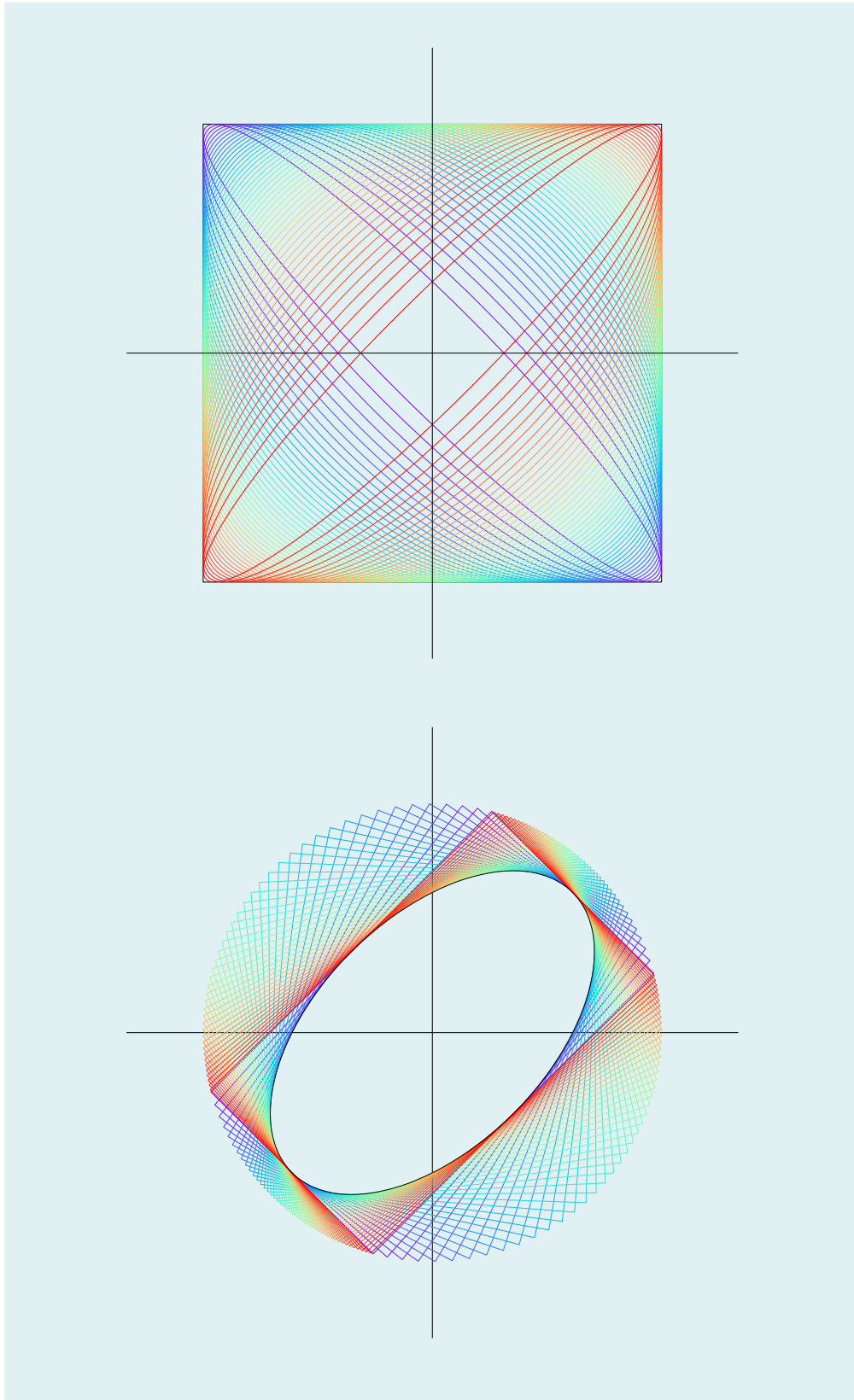


图 4. 给定矩形相切的一组椭圆、给定椭圆相切的一组矩形



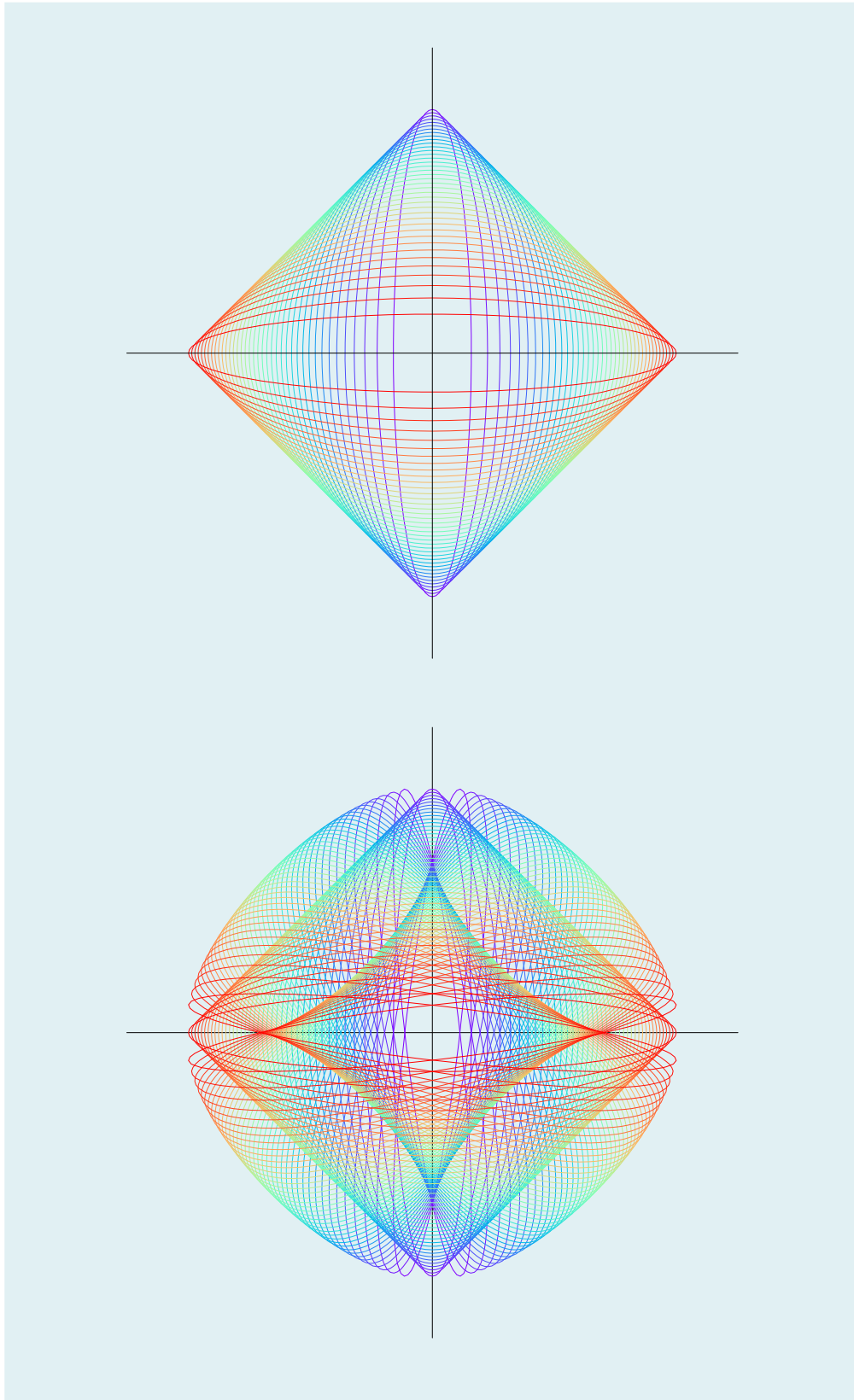


图 5. 一组椭圆，长半轴平方、短半轴平方之和为定值

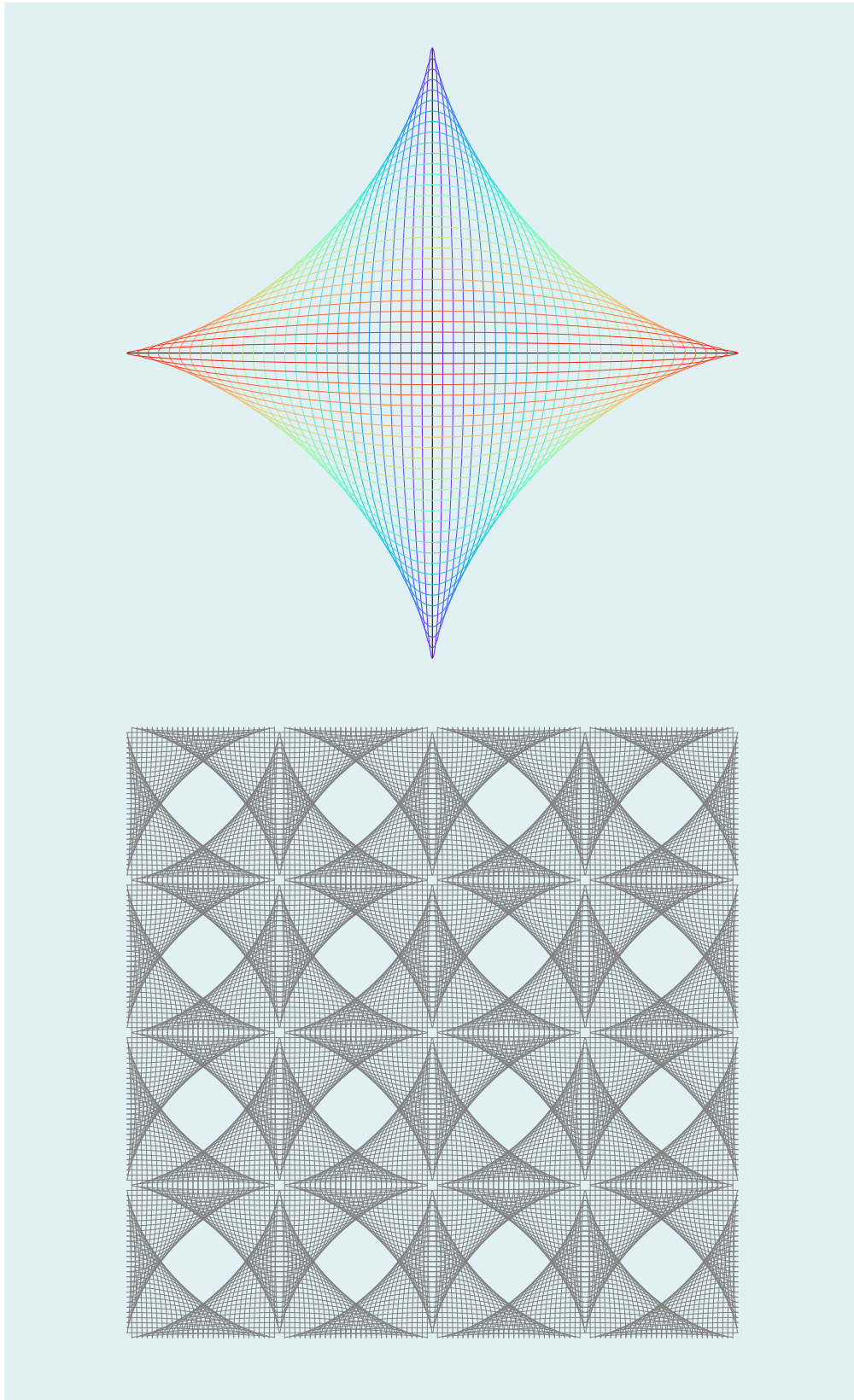


图 6. 星形曲线



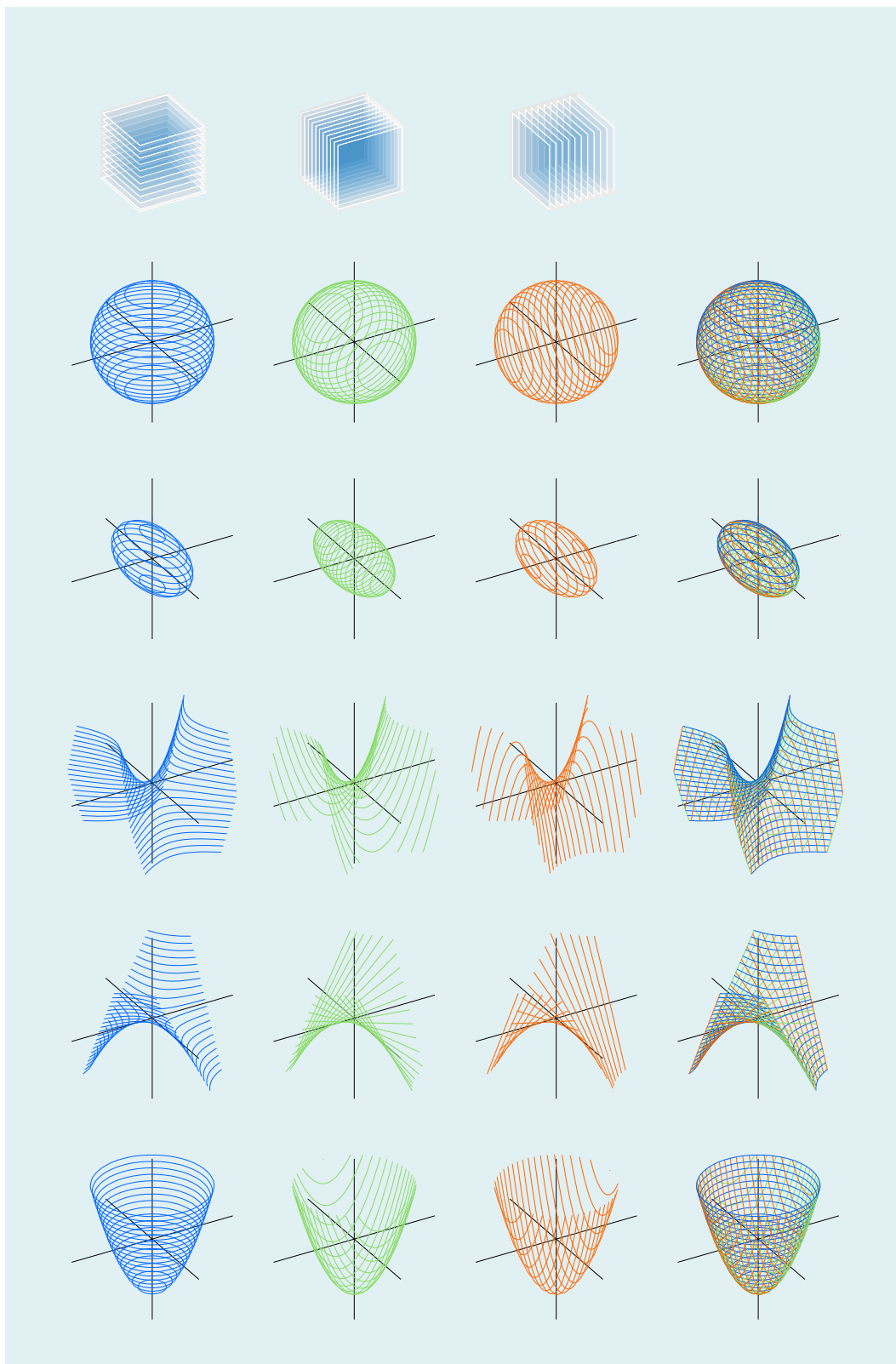


图 7. 用等高线可视化隐函数曲面，第 1 组图形

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

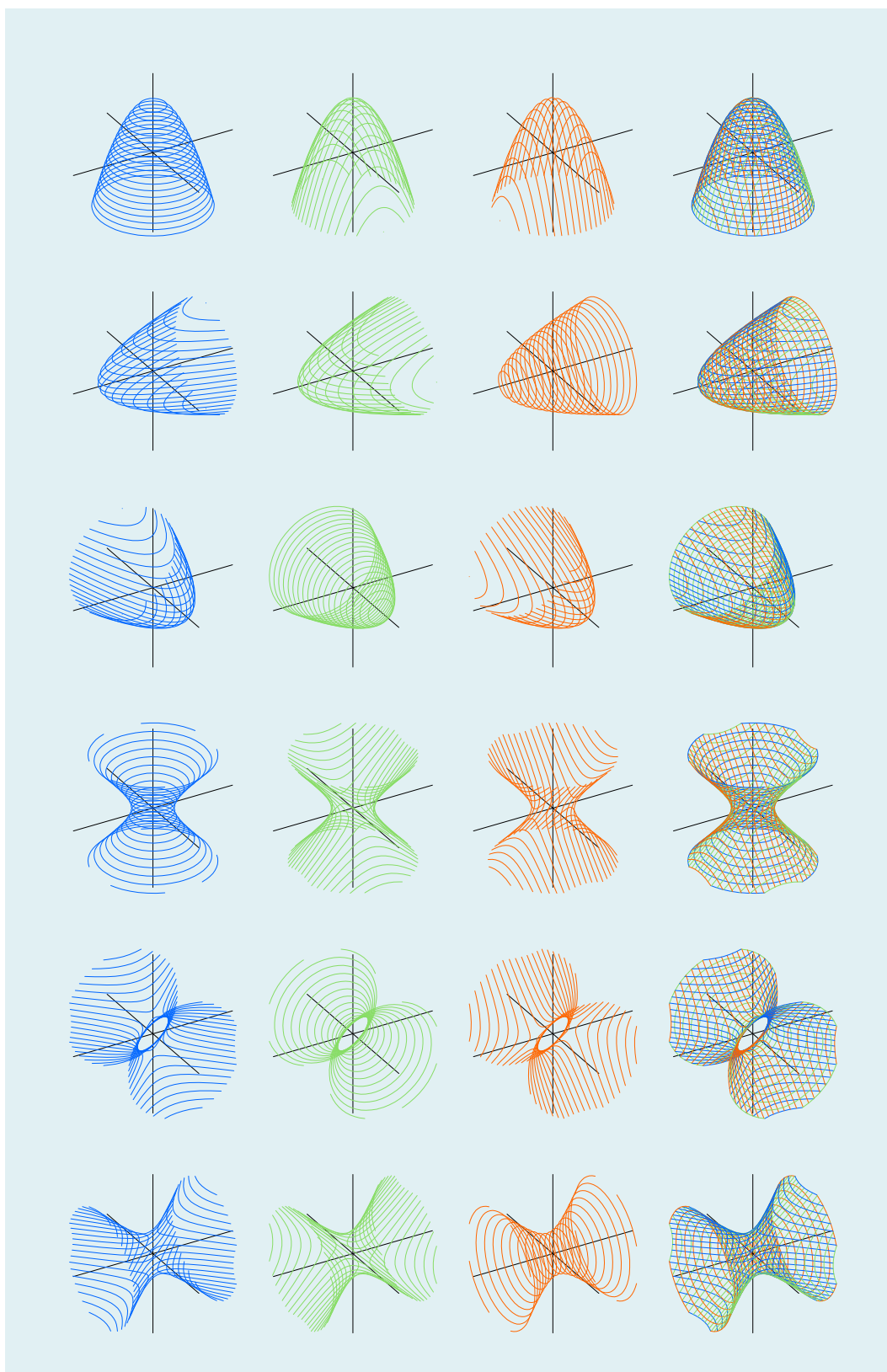


图 8. 用等高线可视化隐函数曲面，第 2 组图形

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

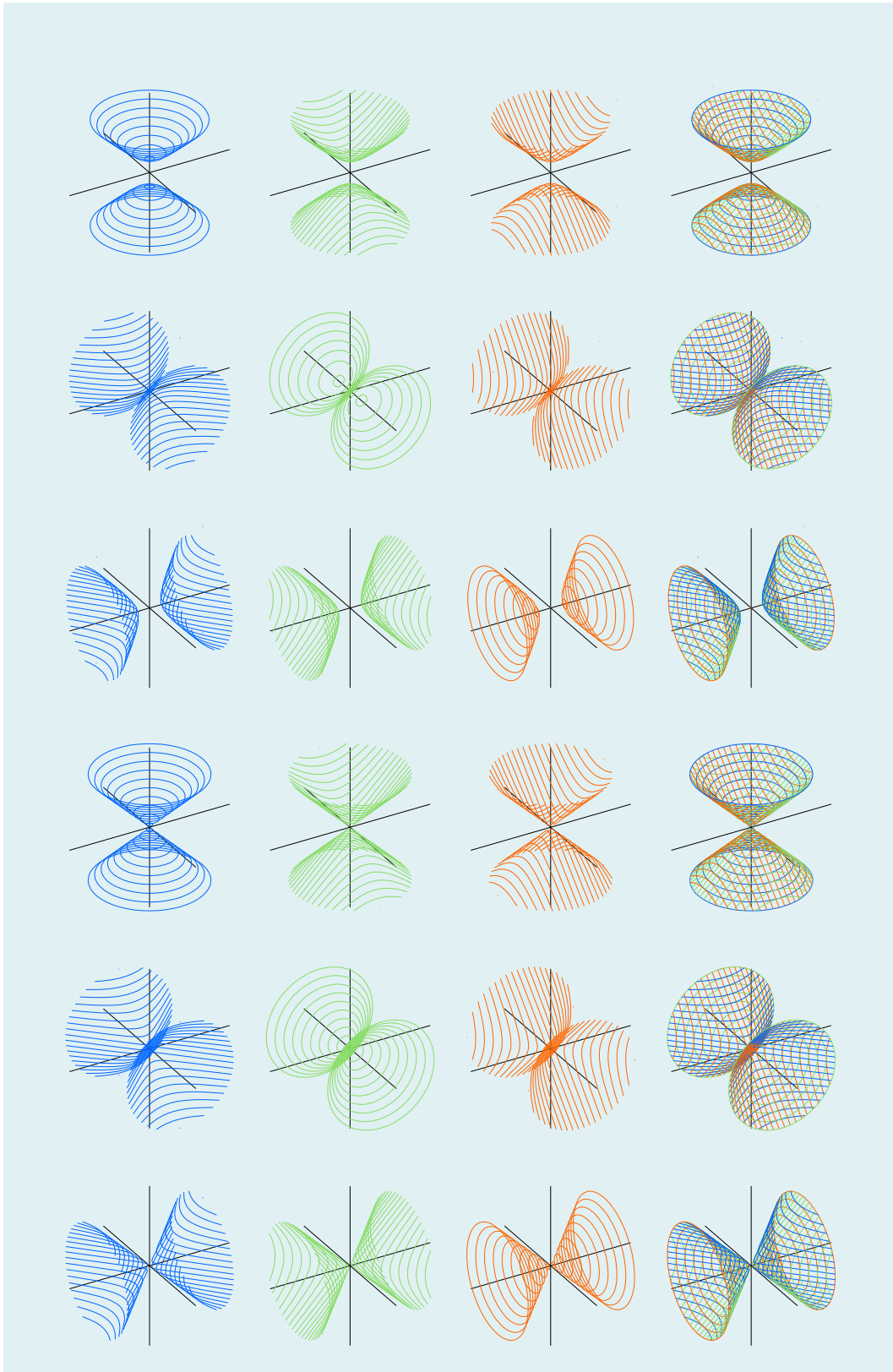


图 9. 用等高线可视化隐函数曲面，第 3 组图形

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

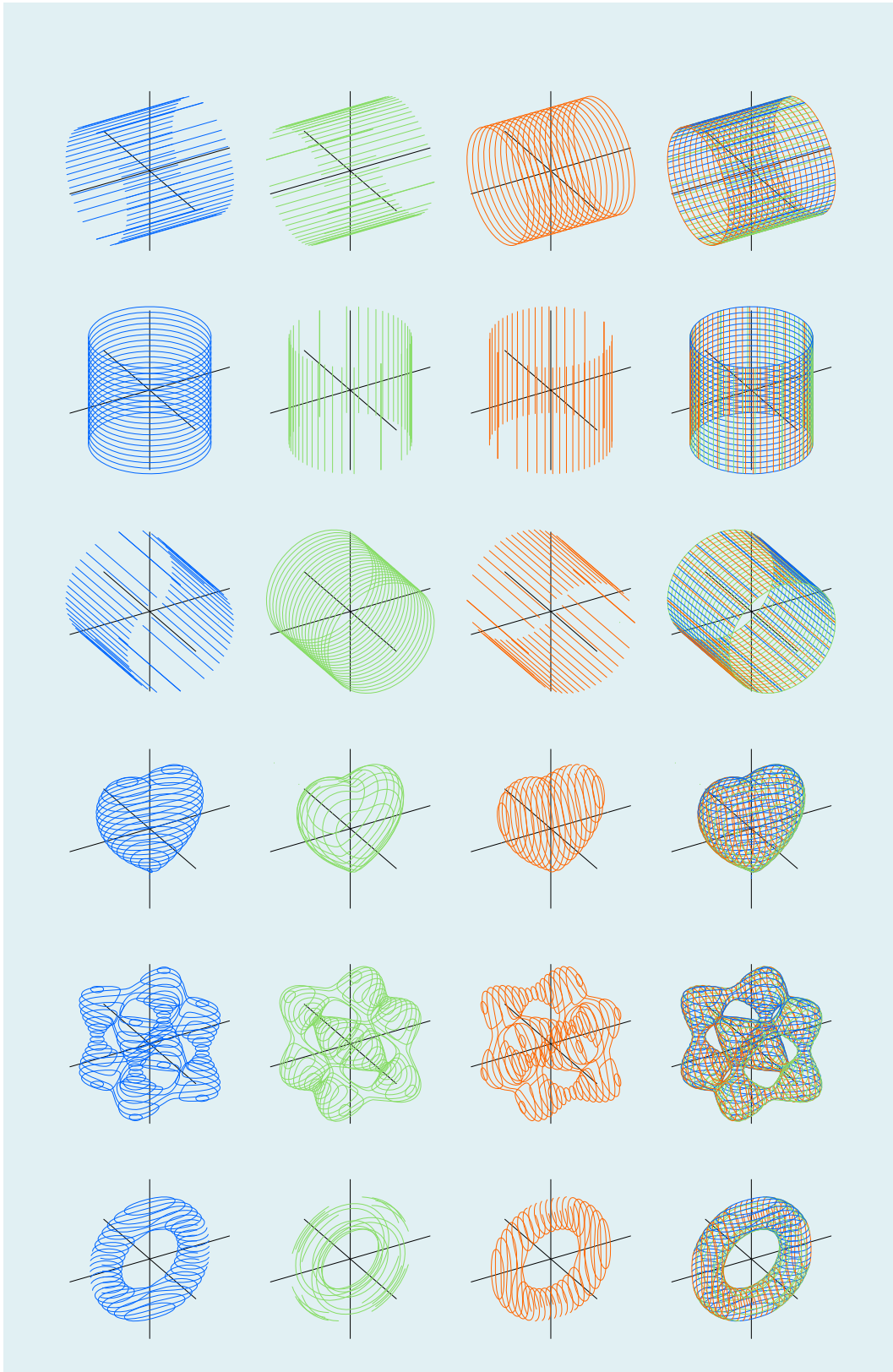


图 10. 用等高线可视化隐函数曲面，第 4 组图形

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



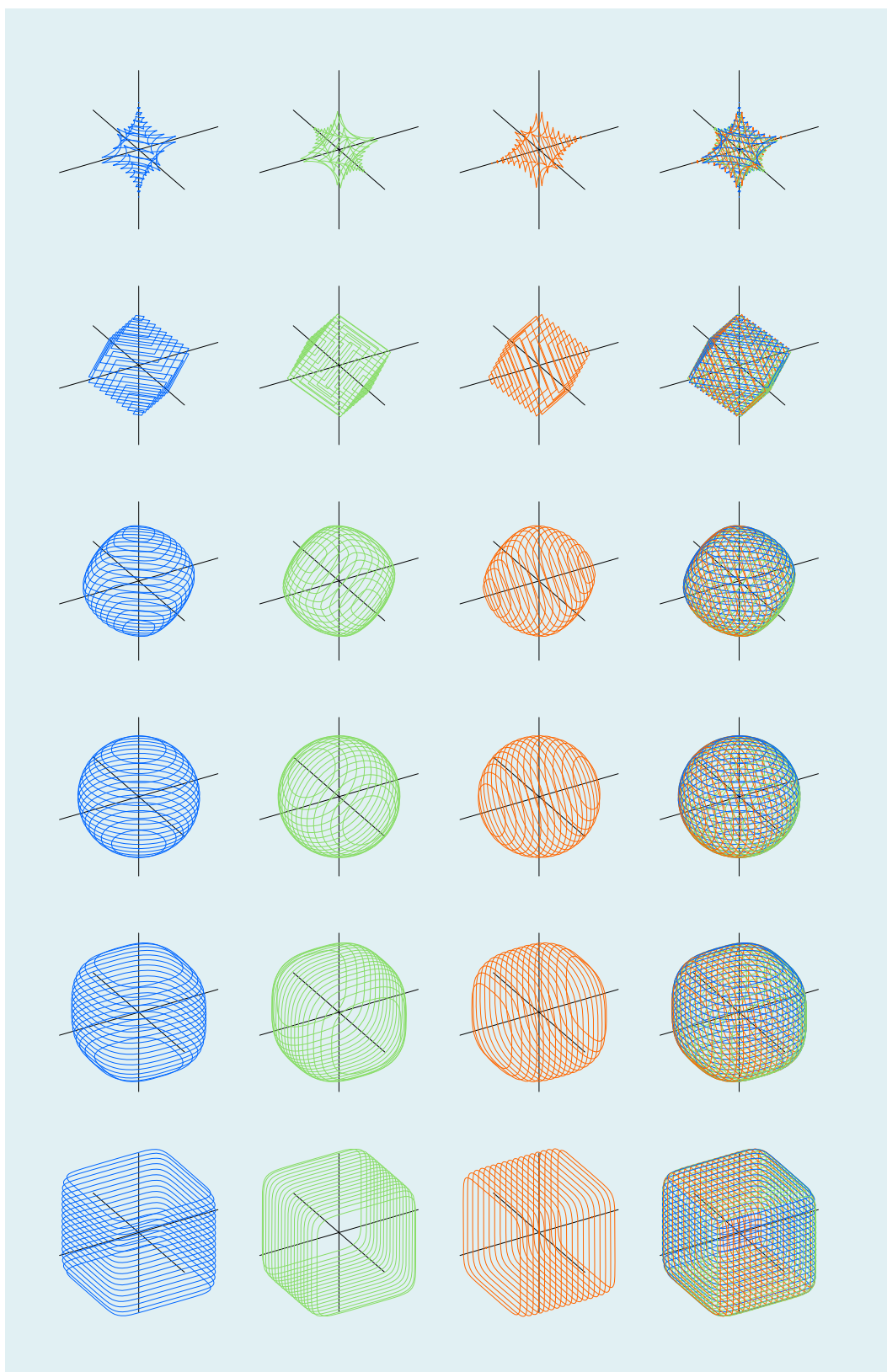


图 11. 用等高线可视化隐函数曲面，第 5 组图形

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)