

## 34

## Spirograph

## 繁花曲线

巧妙结合参数方程和物理学



绘画是可以眼见、不可言传的诗歌，而诗歌是可被言传、不可眼见的绘画。

*Painting is poetry that is seen rather than felt, and poetry is painting that is felt rather than seen.*

—— 列奥纳多·达·芬奇 (Leonardo da Vinci) | 文艺复兴三杰之一 | 1452 ~ 1519



- ◀ `math.lcm()` 计算最小公倍数
- ◀ `matplotlib.collections.LineCollection` 用于绘制包含多条线段的集合，通常用于用颜色映射分段渲染曲线
- ◀ `matplotlib.pyplot.Normalize()` 创建一个归一化对象，可用于映射数据值到颜色映射范围
- ◀ `numpy.arange()` 创建一个数组，其中包含指定范围内以指定步幅均匀间隔的值
- ◀ `numpy.concatenate()` 沿指定轴连接两个或多个数组
- ◀ `numpy.linspace()` 在指定的范围内生成均匀间隔的数字序列



繁花曲线

内旋轮线

外旋轮线

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 34.1 繁花曲线

繁花曲线是一种由**万花尺**（Spirograph）绘制的曲线，相信很多读者小时候都玩过万花尺。万花尺由外图板及内圆图板两部分组成。内圆图板是一个小齿轮，沿圆心不同半径的位置带有许多笔洞；外图板为内齿轮的大型圆孔。外图板固定，内圆板放在外图板的圆洞中；内外齿咬合内图板循着圆周转动，将铅笔放在内图板不同位置笔洞中就可以画出不同花朵一样规则图案。

繁花曲线背后蕴藏着极富数学美感的原理，涉及到圆的运动学、轨迹方程和极坐标系等数学概念。本章就试着用 Python 编程绘制各种繁花曲线，并揭示背后的数学原理。

## 34.2 内旋轮线

如图 1 所示，数学上，繁花曲线背后的数学工具叫**内旋轮线**（hypotrochoid）。

图中浅蓝色大圆就是万花尺的外图板，半径为  $R$ ；图中浅红色的小圆是万花尺的内图板，半径为  $r$ 。本章中设定  $R > r > 0$ 。浅蓝色大圆固定，红色小圆圆周沿着浅蓝色大圆圆周咬合旋转。图 1 中的划线正圆为小圆运动时其圆心所在轨道。

$P$  点  $(x, y)$ ，即笔洞，固定在浅红色小圆上。 $P$  点  $(x, y)$  距离小圆圆心为  $r$ 。注意，万花尺  $d$  一般小于  $r$ 。为了方便讨论，我们设定如下几种情况：

- (a)  $d = 0$ ， $P$  点在小圆圆心，这时  $P$  点的运动轨迹就是图 1 中划线正圆；
- (b)  $0 < d < r$ ， $P$  点在小圆圆面内，万花尺绘制的繁花曲线；
- (c)  $d = r$ ， $P$  点在小圆圆周上，形成的曲线也叫**内摆线**（hypocycloid）；
- (d)  $d > r$ ， $P$  在小圆外，让大家看到万花尺不能绘制的更多繁花曲线。

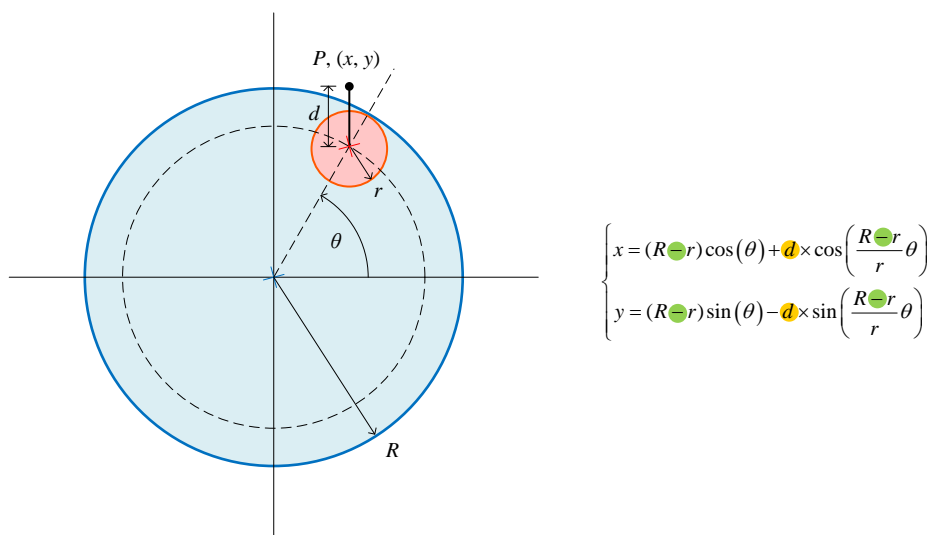


图 1. 内旋轮线原理

为了方便可视化，我们设定  $R$  和  $r$  为正整数。首先需要关注的是  $R$  和  $r$  的倍数关系。学习本章配套代码时，大家可以发现为了形成闭合曲线，小圆需要绕大圆  $\text{LCM}(R, r)/R$  周。LCM 代表最小公倍数 (least common multiple)。

图 3 所示为当  $r$  为 1， $R$  分别取 2、3、4、5、6，而  $d$  取 0、0.5、1、2 时，内旋轮线的图像。图 4 则是利用内旋轮线创作的生成艺术。

## 34.3 外旋轮线

如图 2 所示，将小圆置于大圆外侧，我们便得到外旋轮线 (epitrochoid)。类似上一节，我们也分几种情况讨论外旋轮线形状。图 5 所示为当  $r$  为 1， $R$  分别取 1、2、3、4、5，而  $d$  取 0、0.5、1、2 时，外旋轮线的图像。相信大家已经在图 5 (a) 看到心形线。

图 6 所示为利用外旋轮线创作的生成艺术。

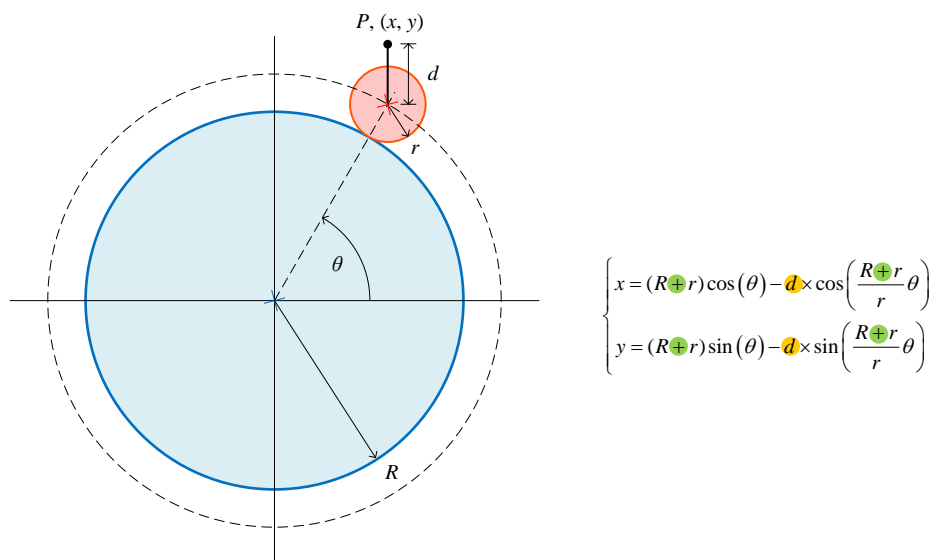
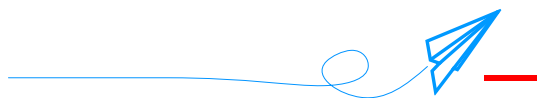


图 2. 外旋轮线原理



本章介绍了繁花曲线背后的数学工具，分别展开讲解了内旋轮线、外旋轮线。请大家利用本章配套代码创作更多生成艺术。

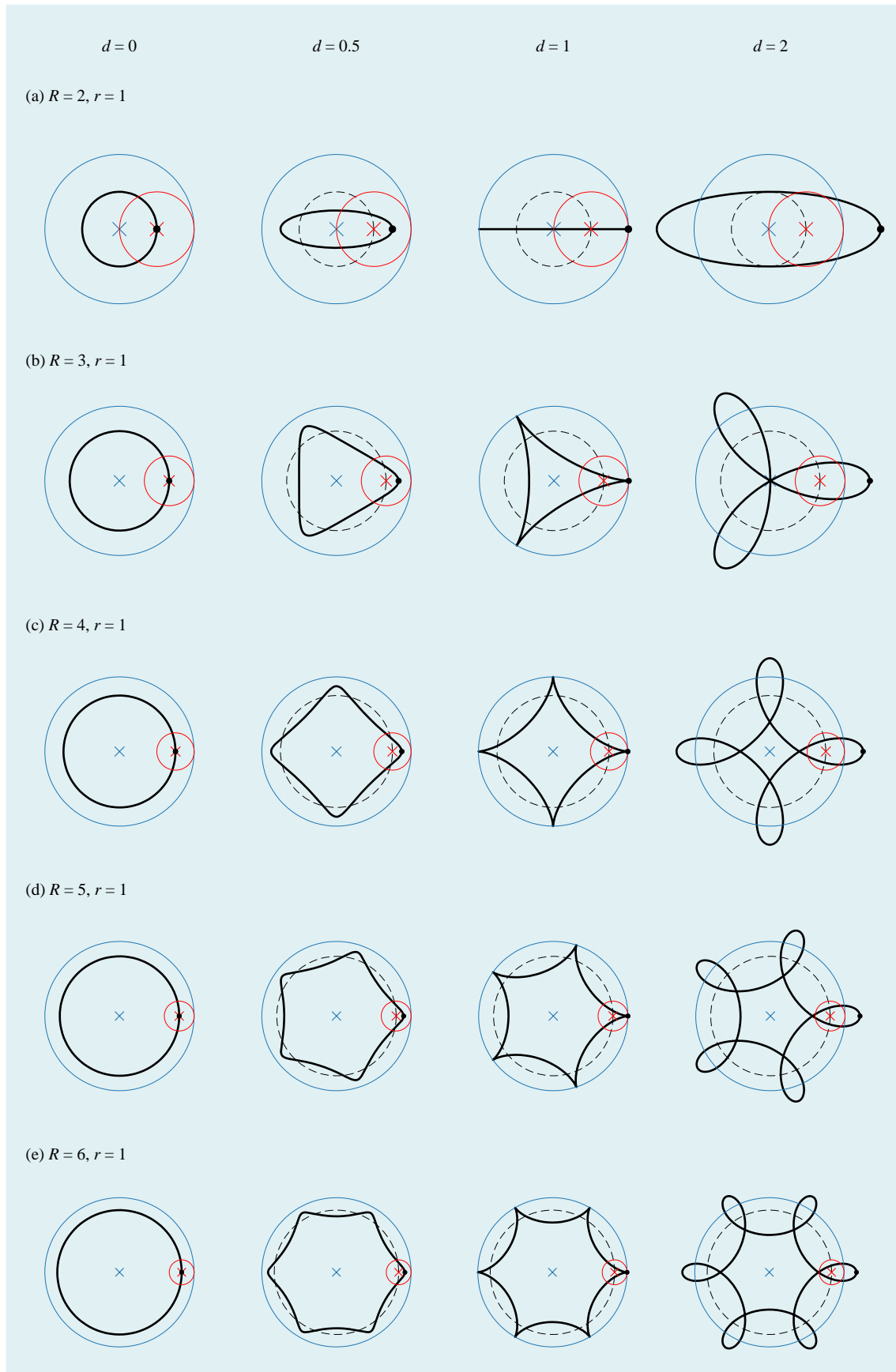



图 3. 内旋轮线,  $r = 1$ ,  $R = 2, 3, 4, 5, 6$  |  Bk2\_Ch34\_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

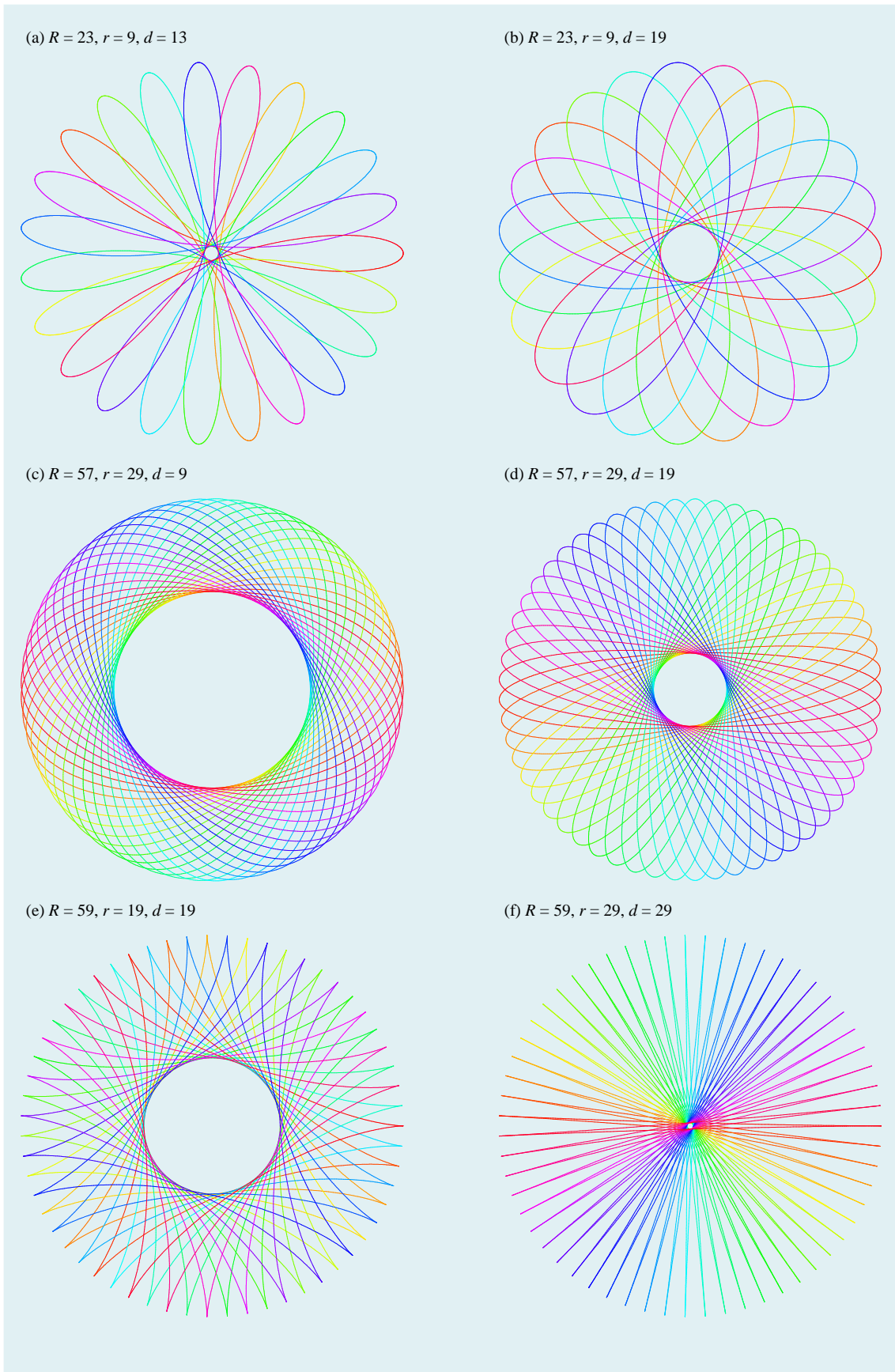


图 4. 内旋轮线 | Bk2\_Ch34\_02.ipynb

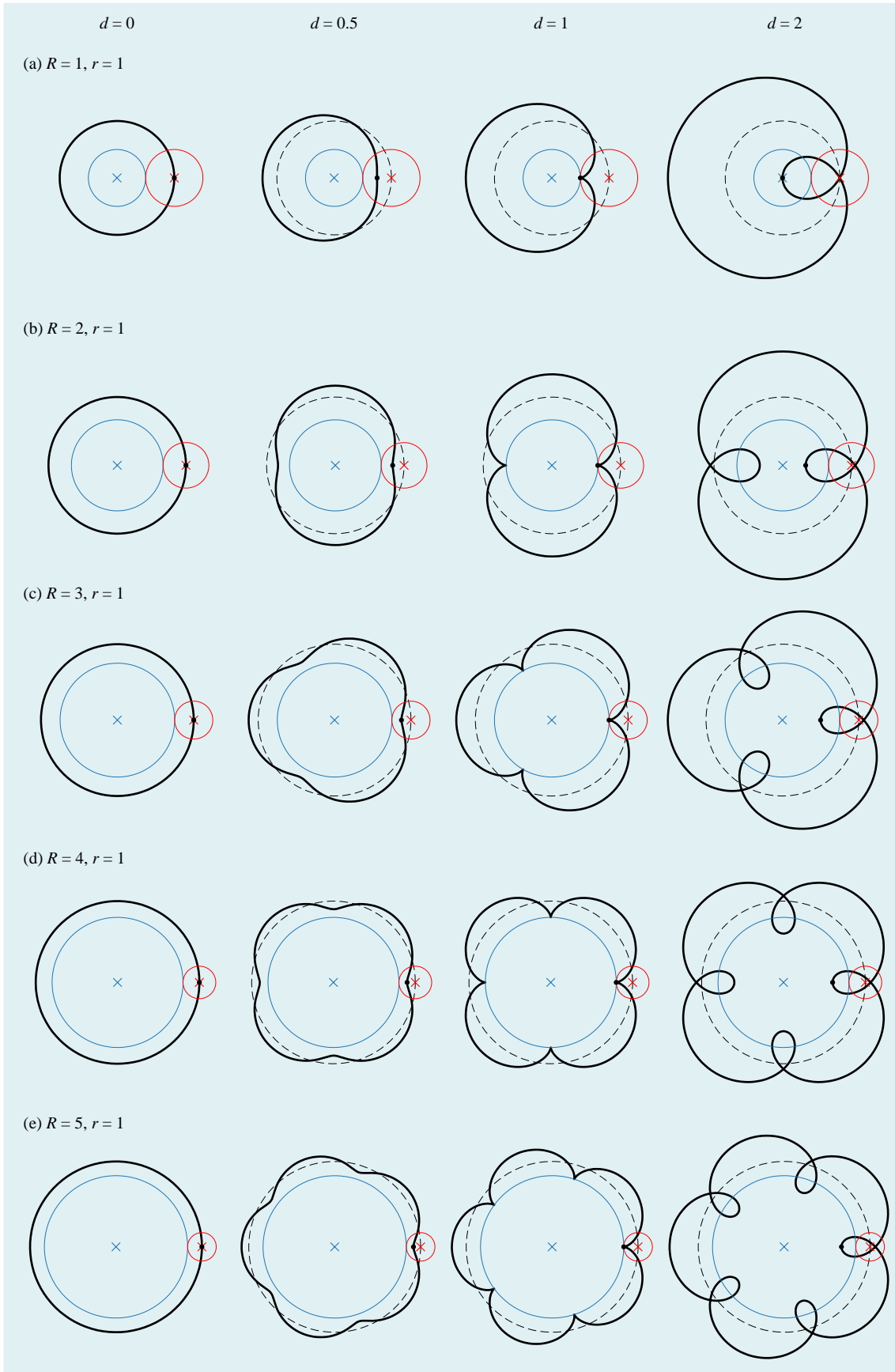


图 5. 外旋轮线,  $r=1, R=1,2,3,4,5$  | Bk2\_Ch34\_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



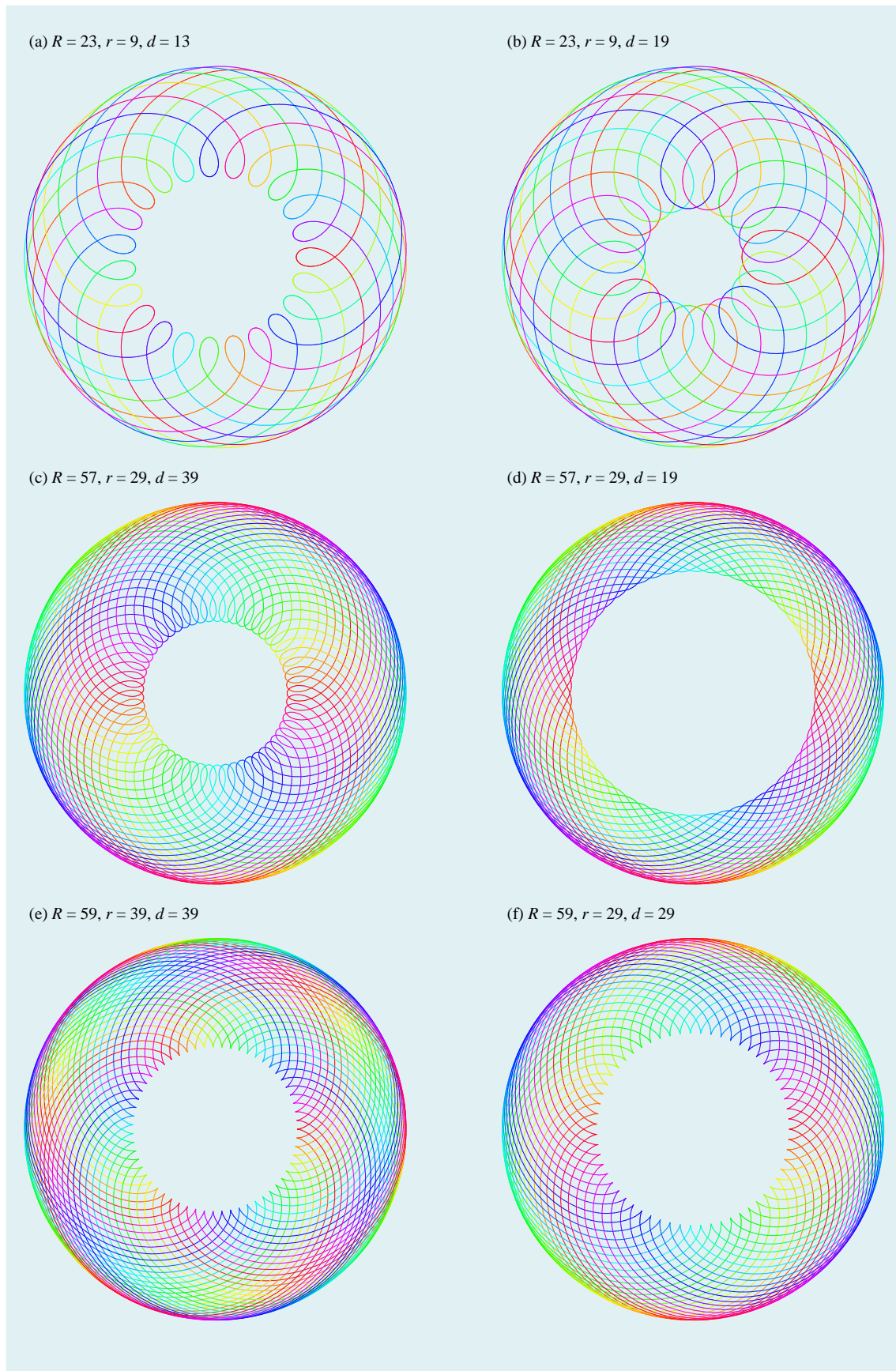


图 6. 外旋轮线 |  Bk2\_Ch34\_04.ipynb