

# 26

## Geometric Transformations on a Plane

# 平面几何变换

平移、缩放、旋转、镜像、投影、剪切



哲学就是怀着一种乡愁的冲动到处去寻找家园。

*Philosophy is properly home-sickness; the wish to be everywhere at home.*

—— 诺瓦利斯 (Novalis) | 德国作家 | 1772 ~ 1801



- ▶ `matplotlib.pyplot.axhline()` 绘制水平线
- ▶ `matplotlib.pyplot.axvline()` 绘制竖直线
- ▶ `matplotlib.pyplot.scatter()` 绘制散点图
- ▶ `matplotlib.pyplot.scatter()` 绘制散点图
- ▶ `numpy.arange()` 根据指定的范围以及设定的步长，生成一个等差数组
- ▶ `numpy.c_()` 用于按列连接数组的函数，用于快速组合多个数组成为一个新的二维数组
- ▶ `numpy.column_stack()` 将两个矩阵按列合并
- ▶ `numpy.exp()` 计算括号中元素的自然指数
- ▶ `numpy.linalg.cholesky()` 矩阵 Cholesky 分解
- ▶ `numpy.meshgrid()` 创建网格化数据
- ▶ `numpy.ravel()` 用于将多维数组展平为一维数组
- ▶ `numpy.reshape()` 用于重新调整数组的形状
- ▶ `numpy.sqrt()` 计算平方根
- ▶ `seaborn.load_dataset()` 加载 Seaborn 中数据集
- ▶ `sklearn.covariance.EmpiricalCovariance()` 估算协方差矩阵
- ▶ `sklearn.datasets.load_iris` 加载 Scikit-Learn 中鸢尾花数据

## 26.1 常见几何变换

图 1 所示为常见的几何变换。图 1 (a) 所示为原始棋盘黑白格子。

图 1 (b) 为仿射变换 (affine transformation) 的结果。仿射变换是本节的重点。

图 1 (c) 投射变换 (projective transformation) 是一种将三维空间中的点映射到二维平面上的变换，也被称为透视变换 (perspective transformation)。

图 1 (d) 所示为非线性变换的一种形式。

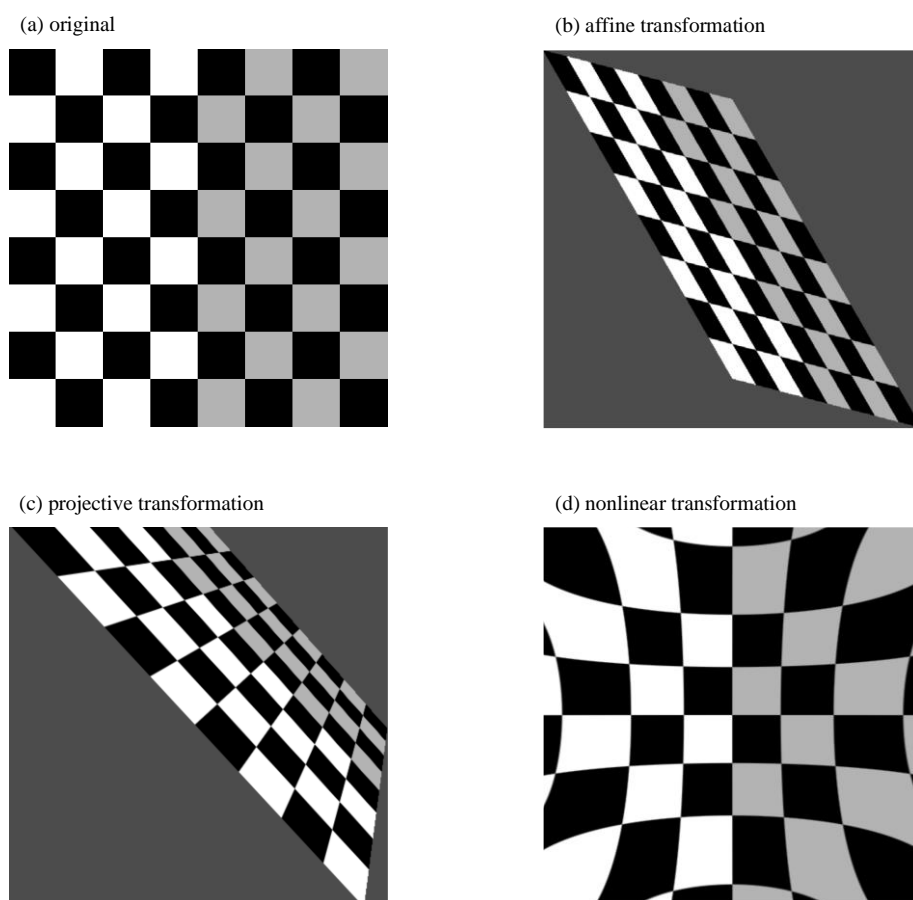


图 1. 常见几何变换

## 26.2 仿射变换

仿射变换是一种线性变换，它可以将一个二维或三维空间中的点映射到另一个二维或三维空间中的点。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

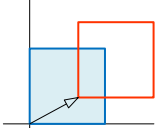
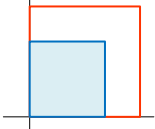
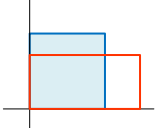
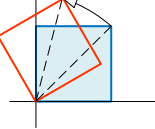
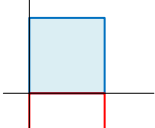

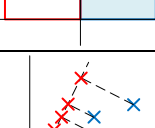
欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

在仿射变换中，原始对象的形状、大小、角度和比例等属性可能会发生变化，但它们之间的相对位置和平行关系将保持不变。

仿射变换可以应用于许多不同的领域，如计算机视觉、计算机图形学、机器学习等。在计算机视觉中，仿射变换可以用于图像的平移、缩放、旋转、对称、投影、剪切等操作。表 1 总结常见几种仿射变换。

在计算机图形学中，仿射变换可以用于三维图形的变换和投影等操作。在机器学习中，仿射变换可以用于特征提取、数据增强和数据对齐等操作。

表 1. 常见仿射变换

几何变换	
平移 (translation)	
等比例缩放 $s$ 倍 (scaling)	
非等比例缩放 (unequal scaling)	
逆时针旋转 (counterclockwise rotation)	
关于横轴镜像对称 (reflection along $x$ -axis)	
关于纵轴镜像对称 (reflection along $y$ -axis)	
向通过原点直线投影	

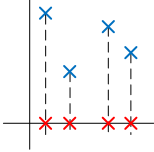

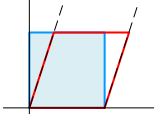
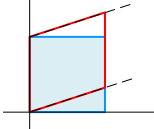
向横轴投影	
向纵轴投影	
沿水平方向剪切 (shear along x-axis)	
沿竖直方向剪切 (shear along y-axis)s	

图 2 所示为原始网格散点。图 8 所示为各种仿射变换及其组合的结果。请大家注意，多数情况仿射变换先后影响结果。

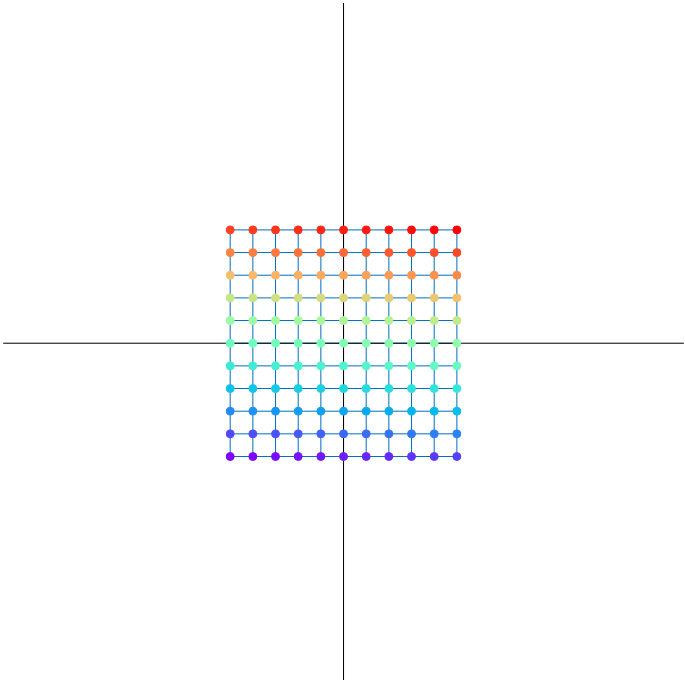


图 2. 网格散点



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch26\_1.ipynb 绘制图 8 所有子图。

图 3 给出第二个例子。我们在单位圆上不同位置用不同颜色标记位置，管它们叫“小彩灯”。然后，对这些“小彩灯”先旋转，再剪切。同时，相同颜色的“小彩灯”之间再绘制一条线段，用来标识运动轨迹。

图 9 所示当旋转角度不同时，经过“旋转 → 剪切”变化的小彩灯都在同一个椭圆上。但是显然，每幅子图的小彩灯位置不同。此外，我们也在这些图上利用大小两个正方形来可视化旋转。

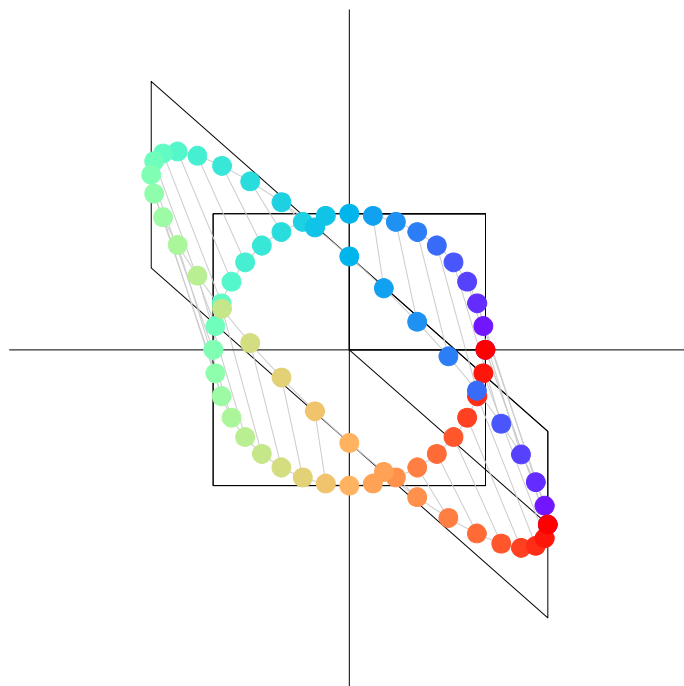


图 3. 正圆散点



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch26\_2.ipynb 绘制图 9 所有子图。

《矩阵力量》将专门讲解仿射变换中用到的一系列数学工具。《统计至简》将会利用图 9 解析蒙特卡罗模拟产生的具有一定相关性的随机数。

## 26.3 投影

如一般情况，投影是指将一个三维物体，比如图 4 所示的马克杯，的映射到一个平面上的过程。在投影中，平面通常称为投影面，被投影的物体通常称为投影体。图 5 所示为马克杯在不同平面上的投影。

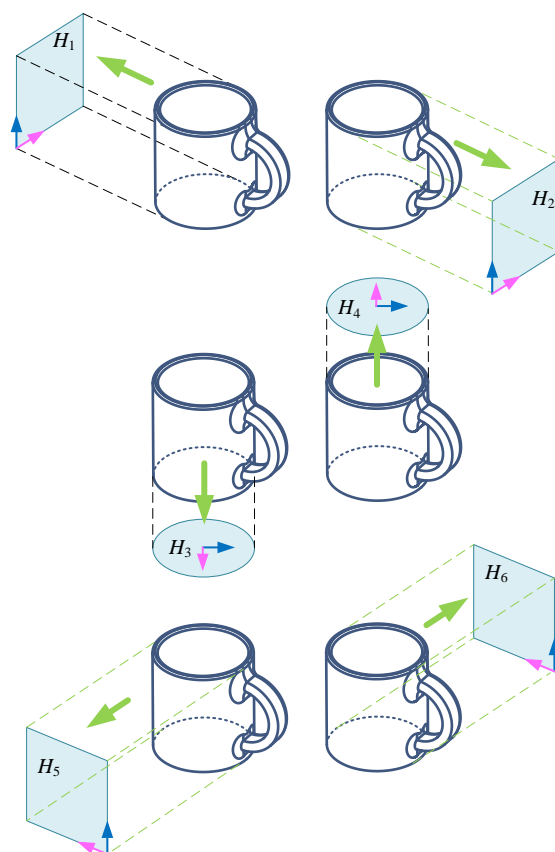


图 4. 马克杯六个投影方向

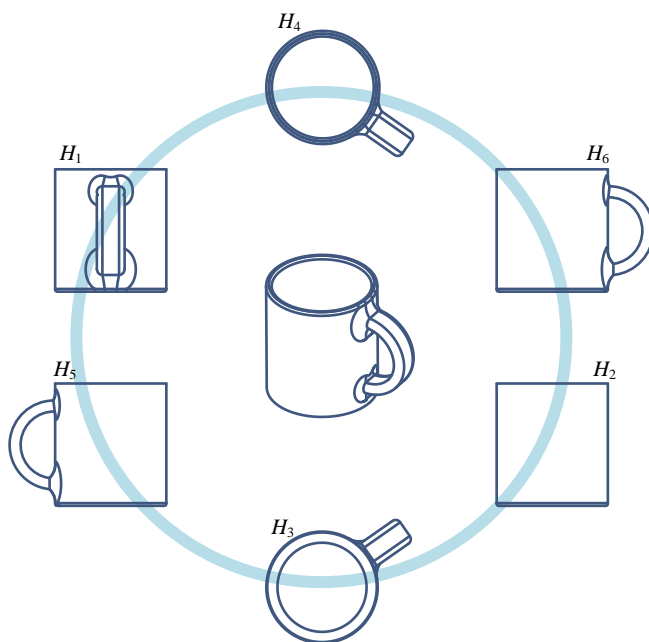


图 5. 马克杯在六个方向投影图像

从数据角度来看，投影相当于一种数据降维。投影得到的像虽然可以“管窥一豹”，但是信息毕竟发生了“降维”压缩。仅此仅仅透过某一个角度的投影的像不能完全获得投影体的全部原始细节。

投影有不同的类型，其中最常见包括正交投影 (orthogonal projection) 和透视投影 (perspective projection)。

在正交投影中，物体被投影到一个平行于投影面的平面上，从而保留了物体的真实形状和大小。而在透视投影中，物体被投影到一个与投影面不平行的平面上，从而产生了一种远近透视的效果，使得远离投影面的物体部分看起来比靠近投影面的物体部分更小。

投影在许多领域中都有应用，如建筑设计、计算机图形学、视觉艺术等。在建筑设计中，投影通常用于绘制建筑平面图、立面图和剖面图。在计算机图形学中，投影用于创建三维场景的二维表示，以及在计算机游戏和虚拟现实实现视觉效果。在视觉艺术中，投影可以用于创造一种深度感或透视效果，以增强画面的艺术效果。

本书前文提到，matplotlib 在绘制三维图形时，默认透视投影。本书建议科学技术作品中静态图形最好使用正交投影。“鸢尾花书”系列作品中三维图形大多采用正交投影。

### 平面投影

图 6 所示为平面上的散点、曲线投影到横轴的结果。“鸢尾花书”中用这幅图正交投影、马氏距离、数据分布、数据投影等数学概念。大家将会在《矩阵力量》、《统计至简》两册看到相关的数学工具。图 10 展示更多不同角度的平面点线投影。

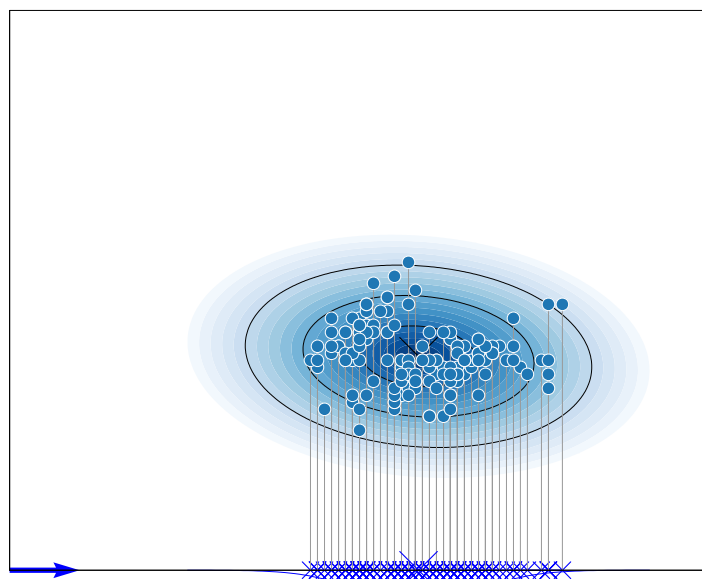


图 6. 平面投影



Jupyter 笔记 BK\_2\_Ch26\_3.ipynb 绘制图 10 所有子图。

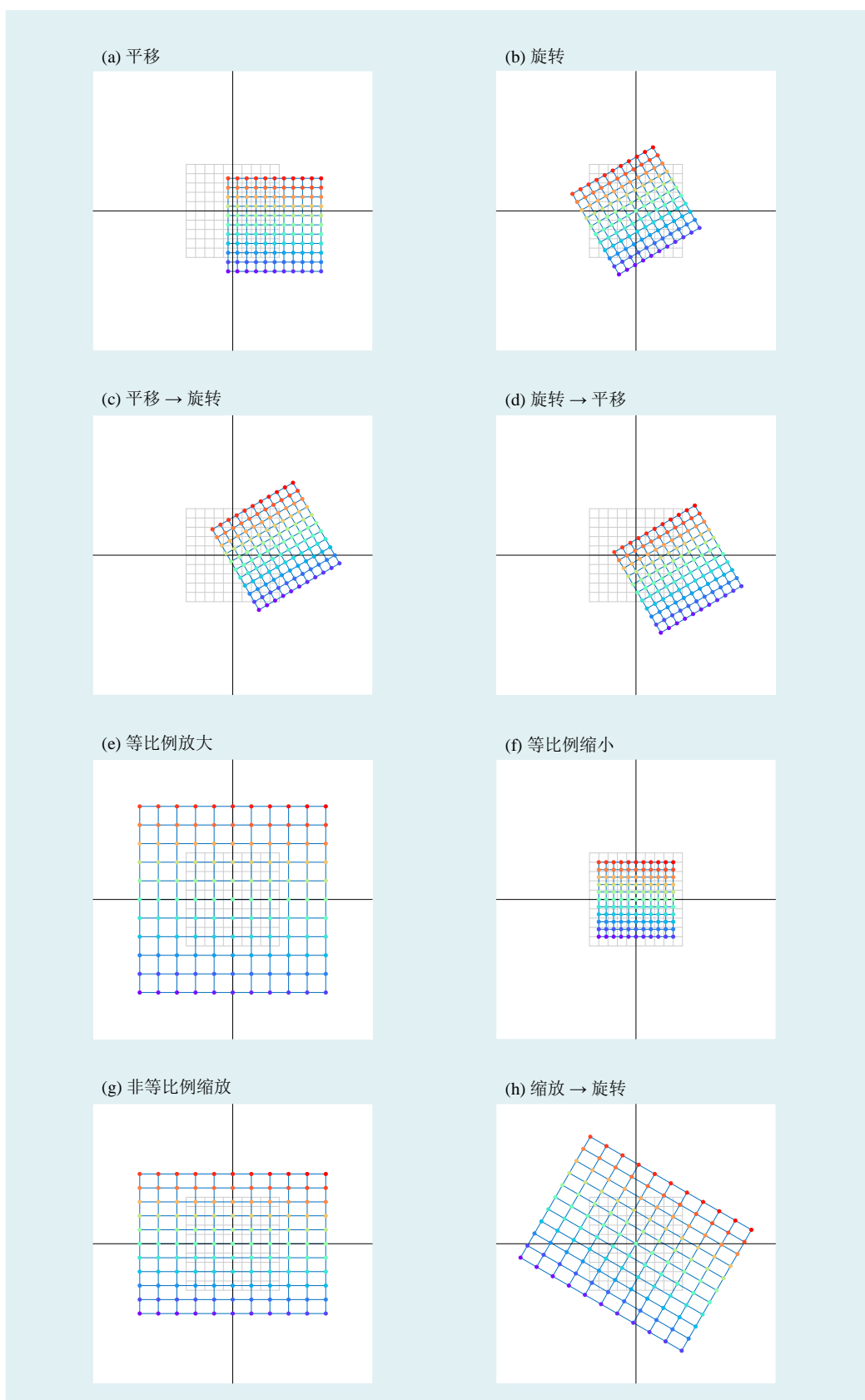


图 7. 仿射变换，第 1 组

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



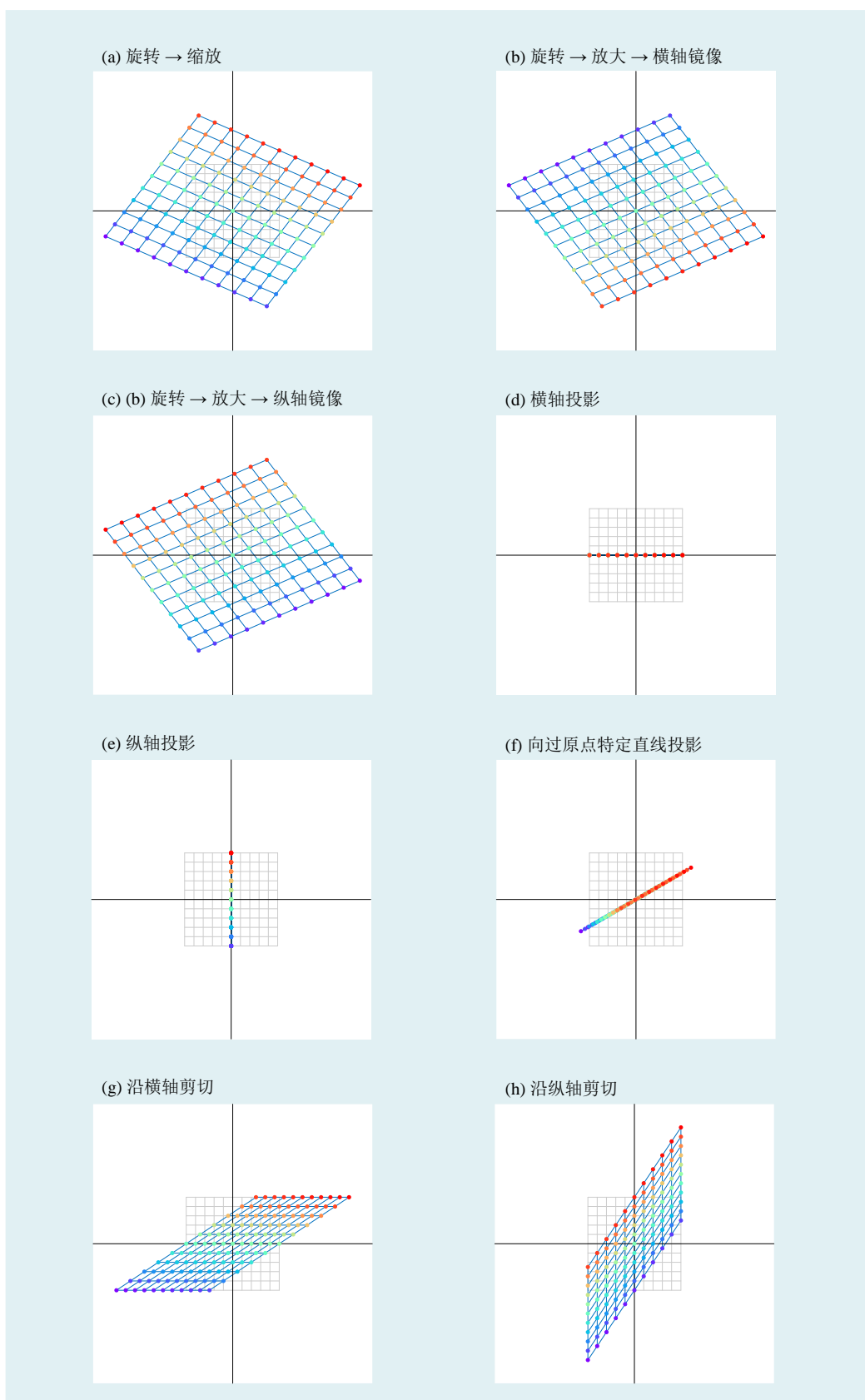


图 8. 仿射变换，第 2 组

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

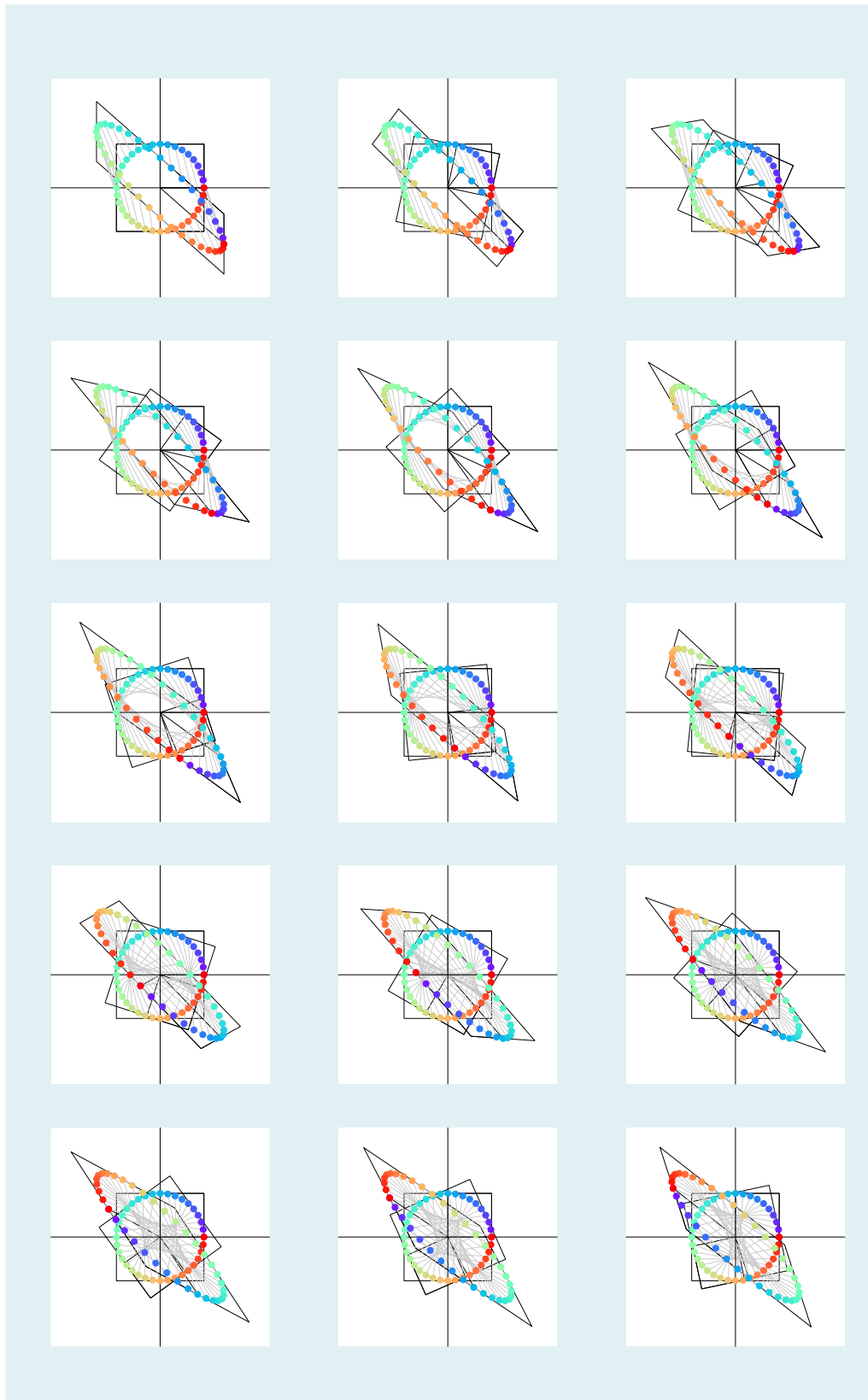


图 9. 正方形、单位圆剪切、旋转变换

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

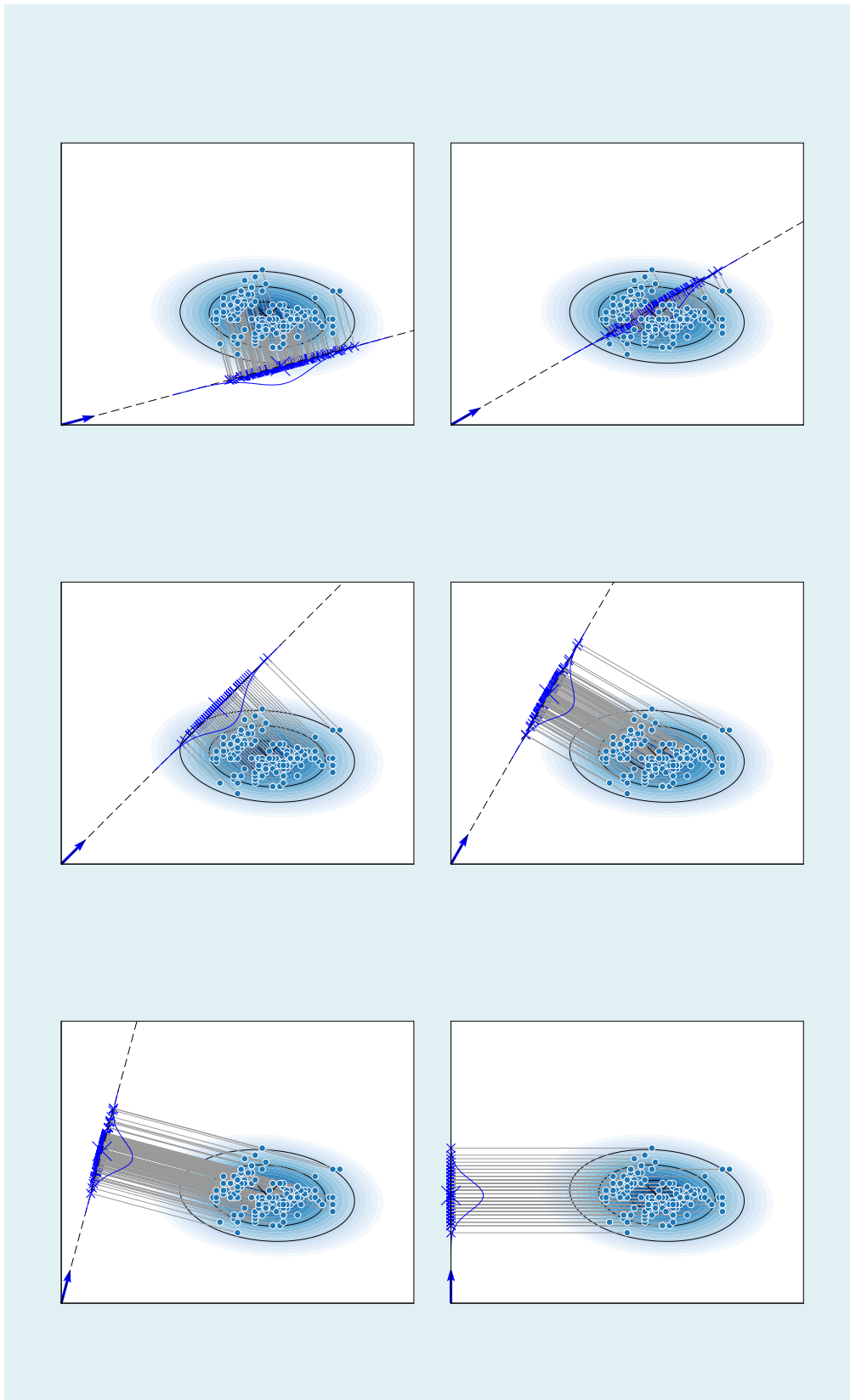


图 10. 平面上点、线投影

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)