

1

Mathematics + Art

数学 + 艺术

人类存在本质的深层体验和思考



梦里，我梦见我的画作；现实，我绘制我的梦境。

I dream my painting and I paint my dream.

—— 文森特·梵高 (Vincent van Gogh) | 荷兰后印象派画家 | 1853 ~ 1890

1.1 数学 + 艺术

正如本书前言提到的，数学和音乐、绘画、建筑一样，都是人类艺术体验。通过可视化工具，我们会在看似枯燥的公式、定理、数据背后，发现数学之美。

艺术与生俱来。几乎所有的孩子们在学会读写之前都喜欢涂鸦，这些行为本身都是在无序中创造有序，在无形中创造有形的表达。毕加索曾说“每个孩子都是艺术家。问题在于他长大后如何保持艺术家的本质。”

没有艺术品可以完全原创。每一件艺术品都是这个锁链上重要一环，它承前启后。所有艺术锁链连成一张网，每件艺术品都有自己特殊的位置。这一点和数学极为相似。代数、几何、线性代数、微积分、概率统计、优化方法等等，看似一个个孤岛，实际上都是数学网络的一条条织线。

艺术和数学之间存在着紧密的联系，尽管它们在表现方式上看上去相去甚远。

1.2 物质世界是几何的世界

人类执着于几何，就是因为物质世界本身就是个几何体的世界。数学中的几何学原理在艺术中发挥重要作用。艺术家使用几何形状、比例（比如黄金分割比）和对称来构建他们的作品，创造出视觉上的平衡和美感。

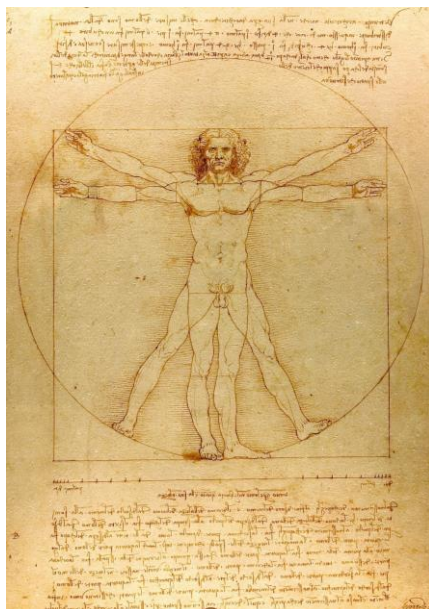


图 1. 达芬奇的《维特鲁威人》，现藏于意大利威尼斯学院美术馆；图片来源：Wikipedia

透视是绘画中常用的技巧，用于创造画面中的深度和空间感。透视原理中的视点、消失点和平行线显然基于数学的几何概念。

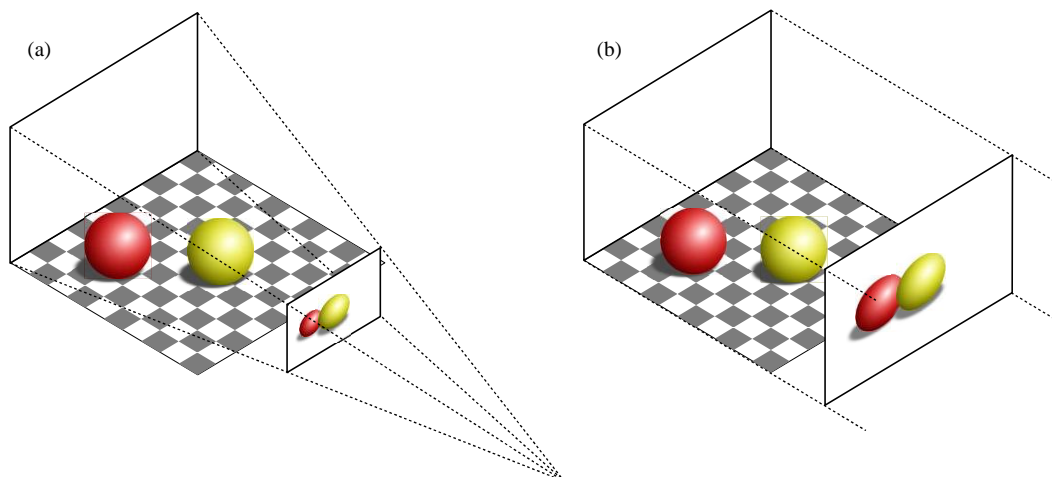


图 2. 透视投影和正交投影，来源：<https://github.com/rougier/scientific-visualization-book>

有几何的地方，就有空间。人类绘画经历了从二维到三维的维度提升的过程，这是一个关于空间感知和透视的发展历程。

在早期的绘画中，艺术家主要关注表面的平面效果，追求形象的符号化和图像的象征性。这些绘画作品通常是二维的，缺乏深度和透视感。然而，随着人类对空间感知的进一步理解，艺术家开始尝试在画布上呈现更加真实的三维效果。

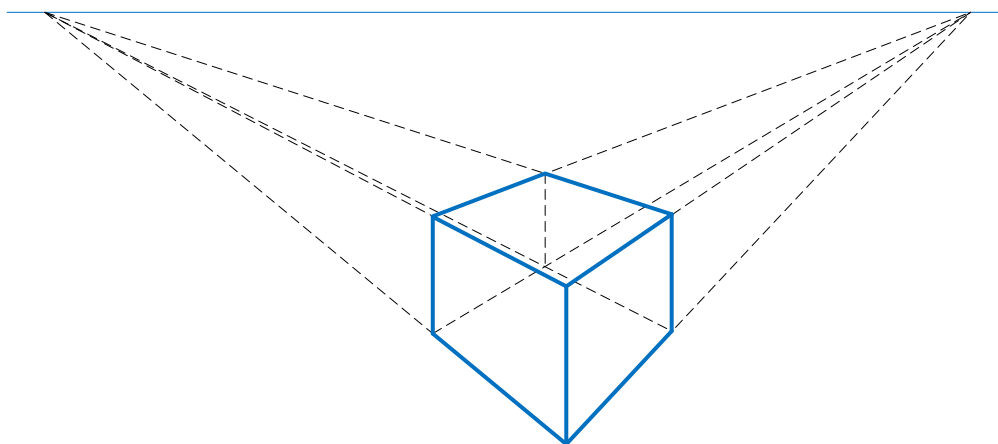


图 3. 三维效果

透视法是绘画中实现维度提升的关键工具之一。在文艺复兴时期，意大利艺术家们如达·芬奇和拉斐尔等开始系统地研究透视原理，并将其应用于绘画实践中。线性透视是最常见的一种方法，通过在画布上创建一个收敛的线条系统，使得物体在视觉上产生远近和深度感。这种透视法的应用使得画面更加立体和逼真，艺术作品的观看者可以有一种参与感和沉浸感。

此外，雕塑和建筑也是艺术中维度提升的重要领域。雕塑艺术家通过雕刻实体材料，创造出具有体积、形态和质感的立体作品。立体雕塑的存在使得观众可以从不同角度欣赏作品，并与其进行互动。

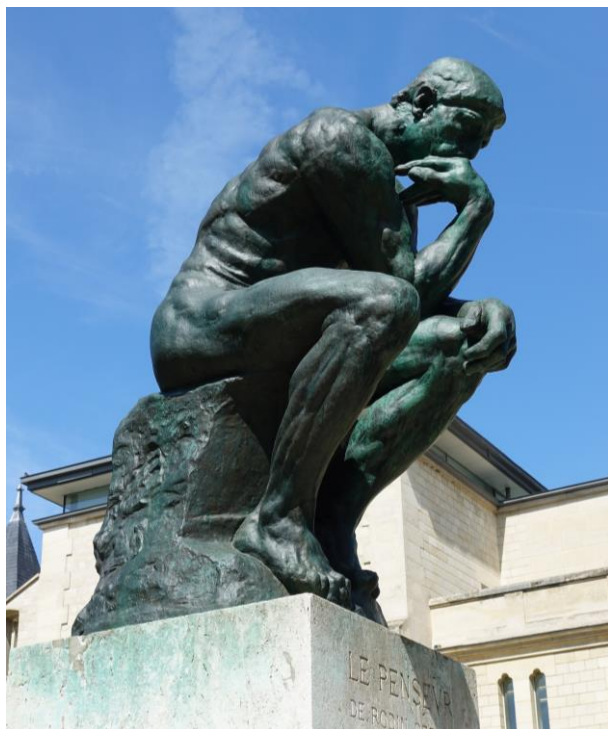


图 4. 罗丹的《沉思者》，现藏于巴黎罗丹美术馆；图片来自 Wikipedia

建筑艺术则将维度提升应用于空间的创造和设计中。建筑师通过建筑物的结构、布局 and 比例，创造出具有深度、透视和立体感的空间。建筑作品不仅是艺术品，同时也是人类生活和活动的场所。

在 20 世纪初期，立体派成为绘画中的一个重要艺术运动。立体派艺术家如毕加索、勒杜克和布拉克等，通过将物体拆解、重组和重新组织，创造出多个角度和视角的同时呈现在画布上。这种画风挑战了传统的透视规则，打破了传统的空间表现方式，使观众对物体的感知变得更加复杂和多样化。

类似地，人类对空间的认识在历史上经历了多个阶段和理论的演变。从古代的地平说和天球说，到现代的相对论和量子力学，我们对于宇宙和空间的理解越来越深入。

在古代，人们认为地球是平坦的，并且认为天空是一个巨大的圆顶，称为天球。地心说是一种观点，认为地球是宇宙的中心，并且太阳、星星和其他天体围绕着地球旋转。这个观点在古代的许多文化中得到了广泛接受，包括古希腊、古罗马和中世纪欧洲。



图 5. 后人绘制的托勒密地心说模型；图片来自 Wikipedia

然而，随着时间的推移，一些科学家开始提出不同的观点，对空间的认识也逐渐发生变化。在 16 世纪，尼古拉·哥白尼提出了日心说，即太阳是宇宙的中心，而地球和其他行星绕着太阳运行。这个理论后来被伽利略和开普勒的观测数据所证实。

到了 17 世纪，伊萨克·牛顿的引力理论进一步推动了对空间的认识。牛顿的万有引力定律解释了天体之间的相互作用，并提出了质量对空间产生引力的概念。

然而，随着爱因斯坦的相对论的提出，人们对空间的认识发生了革命性的变化。相对论表明，空间和时间是相互关联的，形成了一个四维的时空结构。爱因斯坦的广义相对论进一步发展了这一观点，提出了质量和能量会使空间发生弯曲和扭曲的概念。这种扭曲产生了引力场，决定了物体的运动轨迹。

在相对论的框架下，人们开始研究更高维度的空间概念。相对论理论支持了多维度宇宙的可能性，其中超过三个空间维度的存在成为一种研究方向。

此外，对于星空深度的认识也得到了进一步的发展。通过现代天文学的观测和技术，我们发现宇宙中存在着无数的星系和星体，构成了浩瀚的宇宙结构。我们现在知道，我们所看到的星空只是整个宇宙的一小部分，而宇宙中的星系和星体分布在非常大的空间尺度上。

总的来说，人类对空间的认识经历了漫长的历史和不断的进展。从古代的地平说、地心说、天球说，到现代的相对论和高维度理论，我们不断深化对宇宙和空间本质的理解，揭示了更加奇妙和复杂的宇宙面貌。

色彩在艺术中起着重要作用，而色彩的相互关系可以通过数学原理来解释和理解。色彩也是几何，也是空间。RGB 色彩空间就可以看成是一个由红、绿、蓝三色撑起来的正立方体。三色光通过不同比例组合幻化成无数的色彩。而不同色彩放在一起既可以产生和谐，又可以产生视觉的冲突。

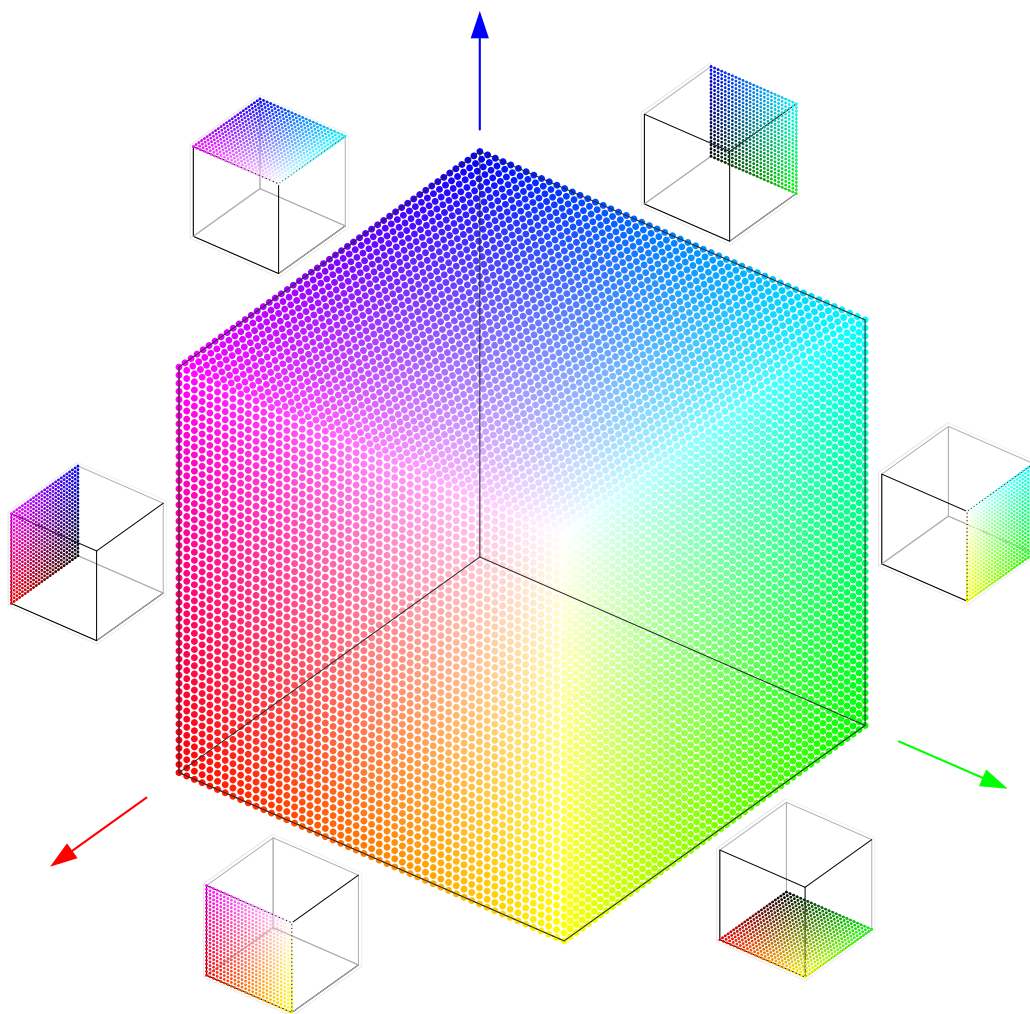


图 6. RGB 色彩空间

1.3 解构 + 重构：形而上者谓之道，形而下者谓之器

艺术不是快照，并不追求事物的外在观感，艺术试图揭示、分享事物更深层、更本质的意义。这一点来看，艺术和数学可谓异曲同工。

形而上者谓之道，形而下者谓之器。艺术和数学正是“道”，两者都着力于解构、重构，穿越事物的形，看透事物的神。艺术和数学都有超强能力把事物肢解成基本单位，然后再重新组合构造全新的结构。

北宋王希孟 (1096 - 1119) 创作的《千里江山图》运用了精细的笔触和细致入微的绘画技法，刻画烟波浩渺、崇山峻岭、高崖飞瀑、村舍集市、水榭楼台、渔船客舟、小桥流水、曲径通幽、茂林修竹、柳绿花红 ... 特别是，满幅画作巧妙地运用青色、绿色制造立体感和层次感，使得远近山水跃然纸上。

真可谓，只此青绿，千里江山；看山是山，见水是水。看山不是山，见水不是水；看山还是山，见水还是水。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com



图 7. 王希孟《千里江山图》局部，现藏于北京故宫博物院；图卷纵 51.5 厘米，横 1191.5 厘米；图片来自 www.dpm.org.cn

图 8 所示《鸢尾花》是荷兰后印象派画家梵高 (Vincent van Gogh, 1853 - 1890) 的作品。鲜亮的色调和奔放的纹理完美捕捉了鸢尾花怒放时的妖艳。浓烈的紫色和蓝色跳脱翠绿的草木、棕黄的泥土，营造出一种强烈的视觉冲击力，尽显生命的不朽的张力、微妙的平衡。

梵高的画笔让这丛鸢尾瞬时的绽放成为永恒。



图 8. 梵高《鸢尾花》，现藏于美国加州 J. Paul Getty Museum；图片来自 Google Art Project

蒙德里安的《红、黄、蓝的构成》*Composition with Red, Blue and Yellow* 从几何和色彩角度更是艺术史上独树一帜的作品。《红、黄、蓝的构成》是由荷兰艺术家彼得·蒙德里安 (Piet Mondrian) 于 1930 年创作的一幅抽象绘画作品。这幅画通过几何形状和基本色彩的组合来达到对现实世界的简化和抽象。画面由一系列垂直和水平的黑色线条构成，将画面分割成不同大小和形状的矩形块。这些矩形块填充了红色、蓝色和黄色，形成了一种平衡和谐的色彩组合。

蒙德里安的艺术理念强调对艺术元素的简化和纯粹性的追求。他认为几何形状和基本色彩是最基本的艺术元素，通过将它们组合在一起，可以表达一种超越物质世界的精神和秩序。在《红、黄、蓝的构成》中，蒙德里安通过创造一种平衡的布局和色彩对比，传达了一种对和谐和平静的追求。

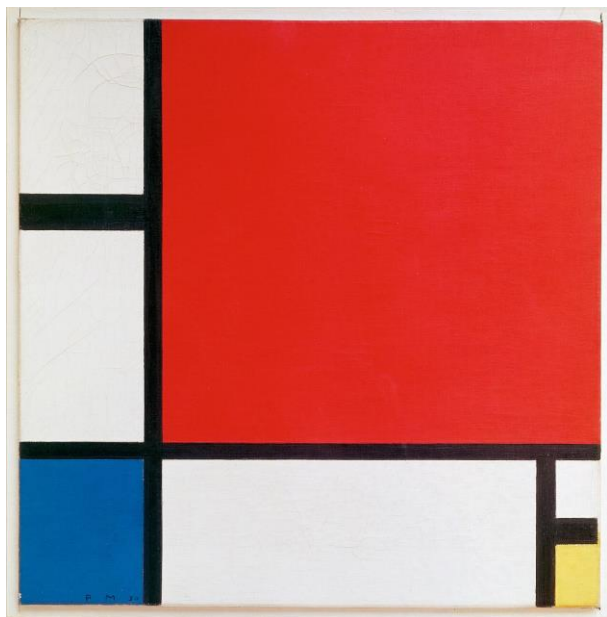


图 9. 蒙德里安《红、黄、蓝的构成》，现藏于苏黎世美术馆；图片来自 Google Art Project

1.4 自然之道

艺术当然离不开人类天马行空的想象力，而给这些想象力持续赋能的沃土正是人类赖以生存的自然界。自然界中，数字、数学可能就是万物之“道”。

道生一，一生二，二生三，三生万物。类似这种二叉树形的增长方式几乎无处不在。

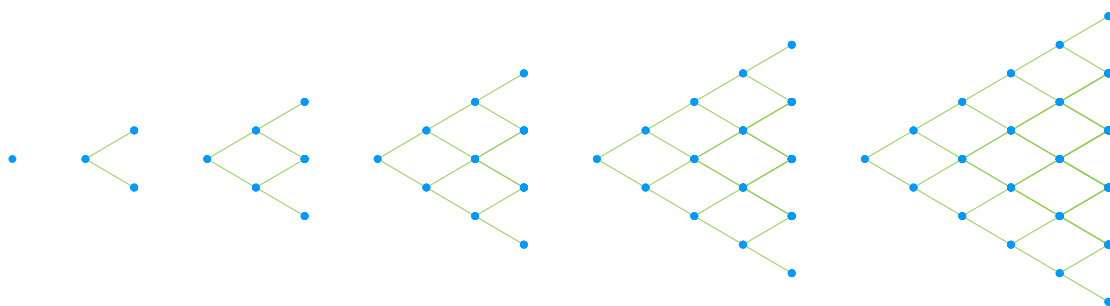


图 10. 二叉树

黄金分割在自然界中广泛存在，如植物的分枝、螺旋壳的结构、人体的比例等，展现了数学和美的奇妙关联。斐波那契数列在自然界中也有许多出现，如植物的叶子排列、花瓣的排列、蜂窝的形状等。这种数列展示了自然界中的规律和对称性。

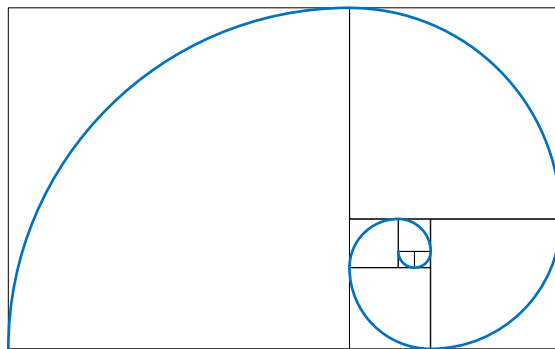


图 11. 斐波那契数列和黄金分割

植物的分枝结构常常呈现出分形的特征。例如，树枝、树叶的排列方式、花朵的形状等都可以看作是分形结构。这种自相似性使得植物在各个尺度上都具有相似的形态，从整体到细节都呈现出美妙的几何模式。有趣的是，观察菌丝我们发现的也是类似树枝分形的结构。从地球的尺度来看，挺拔如云的树木也不过是地表上毫不起眼的菌丝。

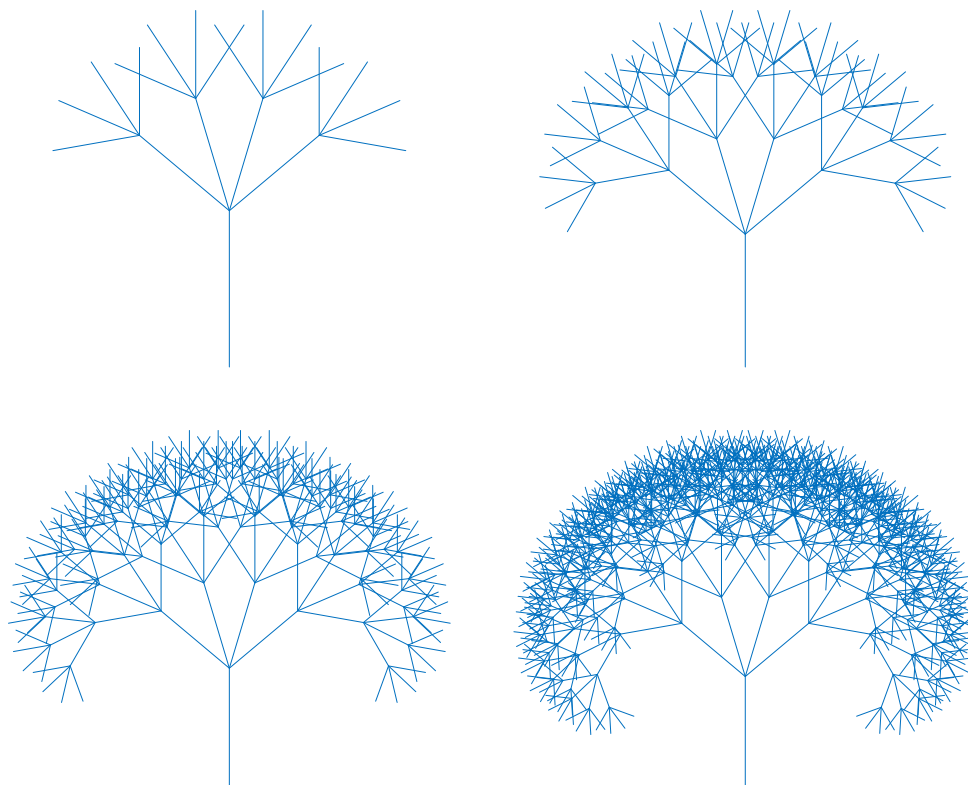


图 12. 分形，树枝

海岸线和山脉的形状也呈现出分形特征。无论是放大还是缩小，它们的形态都是自相似的，具有相似的曲线和起伏。云朵的形状和闪电的分支都可以被视为分形结构。它们在各个尺度上都具有相似的形态和分支模式，展现出自然界中的分形美。

雪花和冰晶是自然界中常见的分形形态。它们的晶体结构在多个尺度上具有相似的形状，形成了复杂而美丽的分形图案。

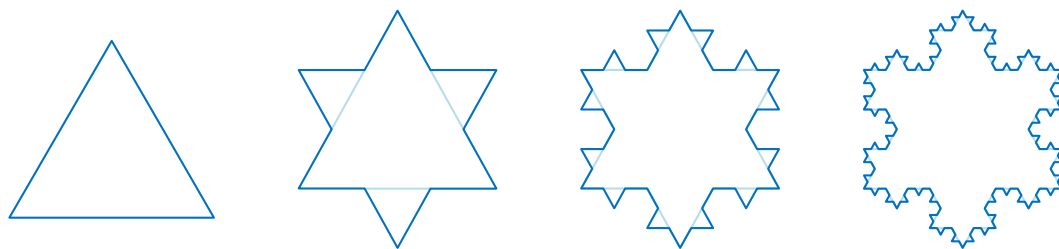


图 13. 分形，科赫雪花 (Koch snowflake)

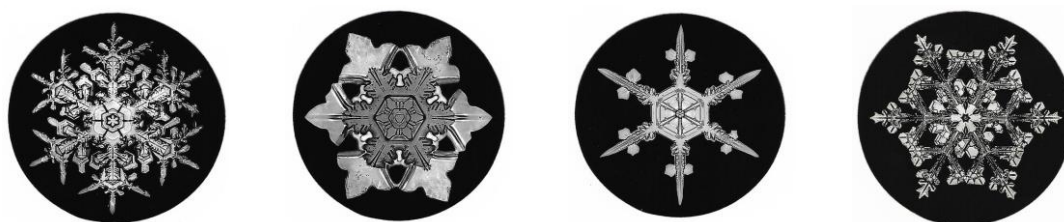
1.5 模式 + 随机：带着枷锁的翩翩起舞

模式 + 随机，无处不在。模式让物质世界充满秩序，随机让整个寰宇满是精彩。小到一点浮尘、一片雪花、一朵浪花，大到四季变化、动物迁徙、人类社会、满眼繁星。

自然界的草木却没有展现出图 12 这种高度完美的对称。世界上没有两片完全一样的叶子，也没有两片完全一样的雪花。这一点正是“模式 + 随机”的数学体现。模式代表一种确定，需要站在宏观、大量、长期尺度上观察；随机代表一种不确定，是微观、少量、短期尺度视角。

威尔逊·奥尔温·本特利 (Wilson Alwyn Bentley) 是一位美国的自然摄影师和雪花研究家。他被誉为“雪花之父”，因为他是第一个成功地将雪花的照片拍摄下来的人。本特利对雪花的形态和结构产生了浓厚的兴趣，并通过使用特制的显微摄影技术，捕捉到了超过 5000 张雪花的照片。在这 5000 张雪花照片中，他没有发现两片一样的雪花。

但是不管怎么样，大家可以在这些雪花中发现 60 度角、六边形这样的几何模式。这显然不是巧合。究其本质，水分子是由一个氧原子和两个氢原子组成的，呈 V 字型结构。冰的晶体结构称为六方最密堆积结构。在这种结构中，每个水分子与周围六个水分子相邻，并形成六边形的环状结构。这种紧密的排列方式使得冰晶体具有六边形的外观。

图 14. 威尔逊·奥尔温·本特利拍摄的雪花照片；图片来源：<https://snowflakebentley.com>

英国著名植物学家罗伯特·布朗通过显微镜观察悬浮于水中的花粉，发现花粉颗粒迸裂出的微粒呈现出不规则的运动。他说，不断重复地观察这些运动给我极大的满足；它们并非来自水流，也不是源于水的蒸发，这些运动的源头是颗粒自发的行为。

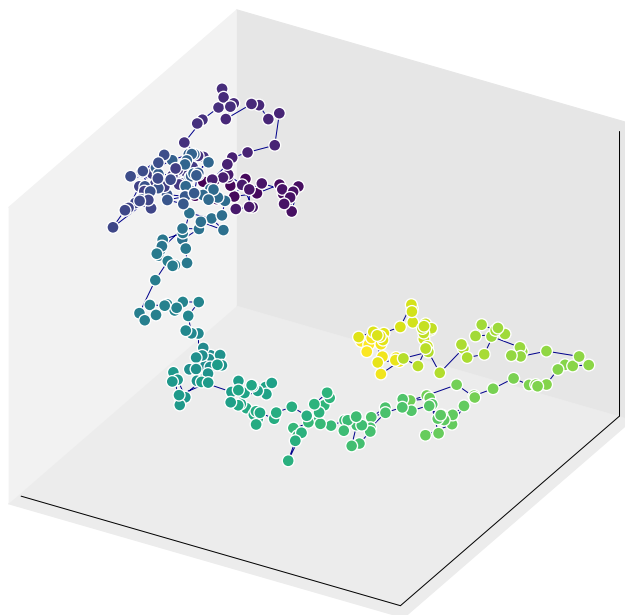


图 15. 模拟某个浮尘在三维空间的随机漫步轨迹

某个时间观察特定的一只动物，我们很难发现任何特定规律、模式。生如夏花之绚烂，逝如秋叶之静美。长期观察一群动物，我们可以发现四季轮转、草木荣枯支配者动物年复一年地在某个大陆板块的繁衍生息、迁徙移动。

微风吹散蒲公英的种子，这些小小降落伞看似做着无规则的随机漫步，但是无时无刻不在气流的支配下运动。宏观尺度上来看，丝丝缕缕的气流、形状各异云朵，极具破坏力的飓风，是在地球的公转和自转影响下运动。

图 16. 飓风，图片来自于 www.nasa.gov

人类之所以能够看到形状和色彩都离不开光。而光具有波粒二象性，表现出既有波动特性又有粒子特性，这又是“模式 + 随机”的一个例子。在波动方面，光可以通过干涉和衍射等现象展示出波的传播特点，并遵循确定性的规律。而在粒子性方面，光表现出随机性，例如光子的发射和探测位置具有一定的随机性。这种波粒二象性的存在使得光在不同实验条件下表现出独特的行为，既有波动的可见光谱特性，也有粒子的能量量子化特点。

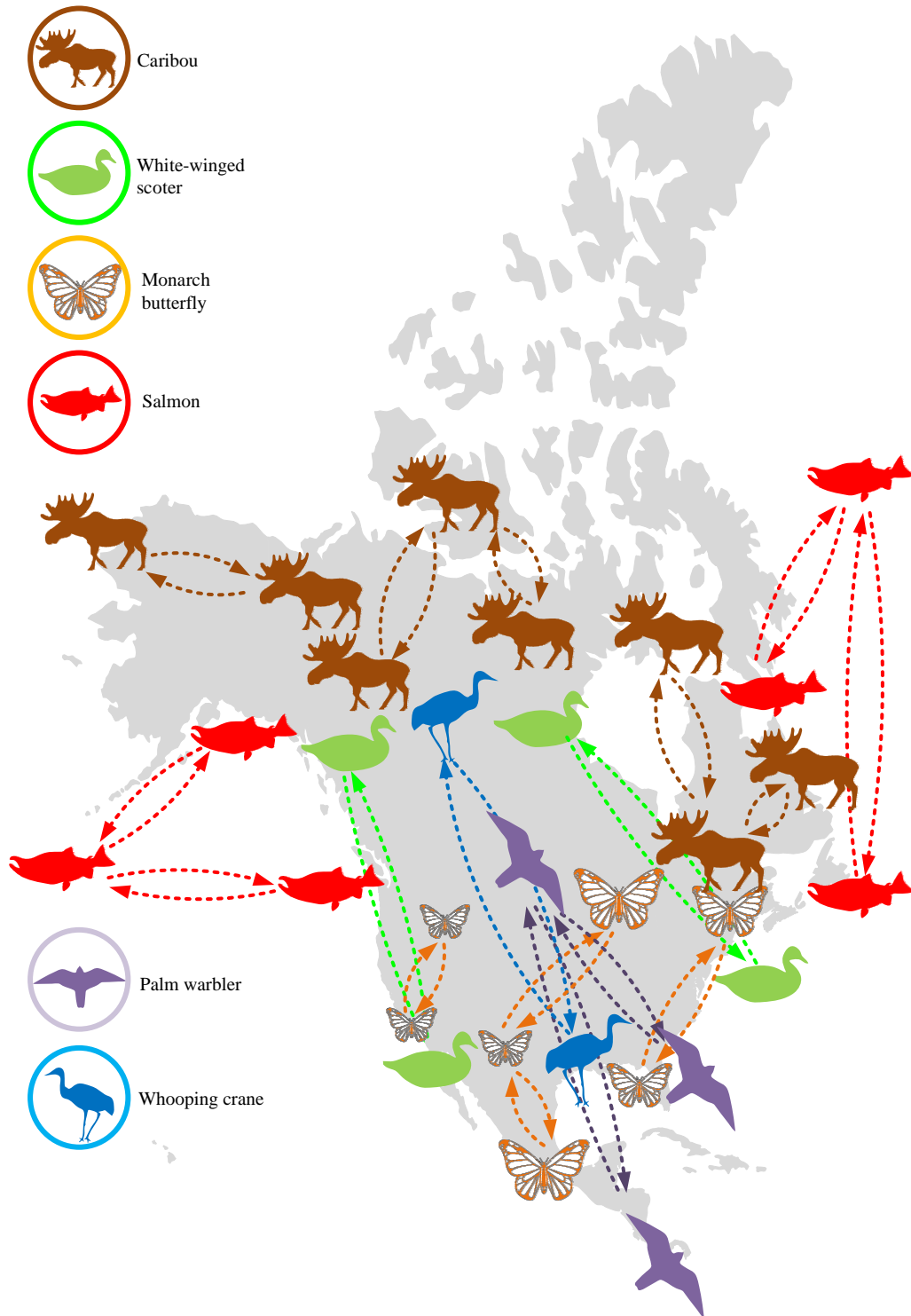


图 17. 北美大陆主要动物迁徙路径

1.6 数学 + 艺术 + 人工智能

计算机广泛应用之后，算法艺术应运而生。算法艺术是一种结合数学和艺术的领域，艺术家使用计算机编程和算法来生成艺术作品。这些算法可以基于数学模型、随机性或交互性来创作艺术。

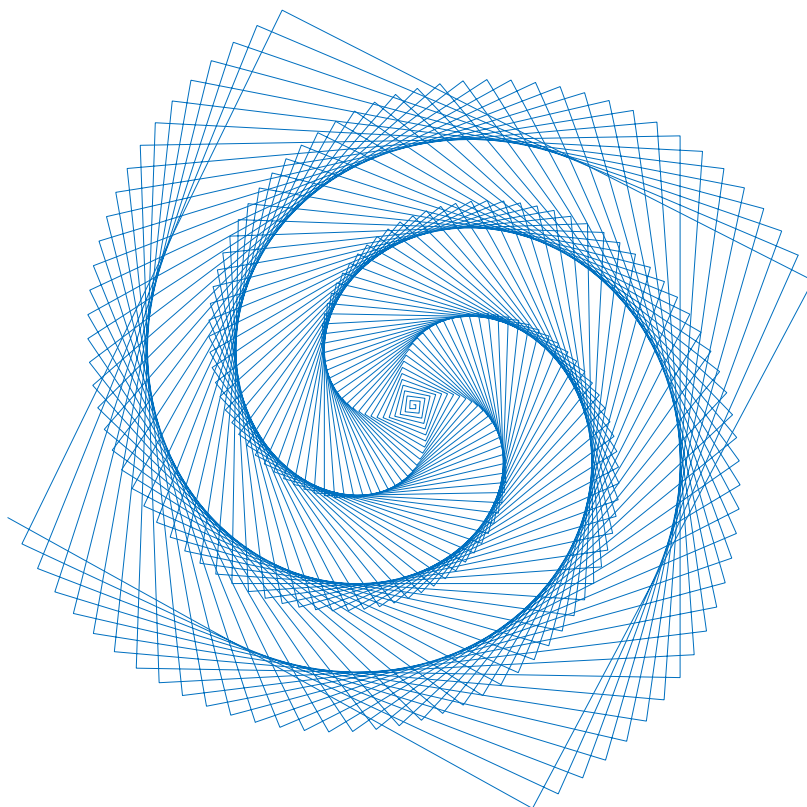


图 18. 通过绘制不断旋转并放大的正方形可视化“涡旋”

图 20 所示为艺术家 Oliver Brotherhood 创作的开源艺术创意——鸢尾花曲线。这组曲线本质上就是计算机图形学中常用的贝塞尔曲线。

曲线本身尽管和鸢尾花本身并无直接关系，但是在随机数发生器加持的不确定因素下这一组曲线所展现出来的婀娜多姿和鸢尾花在精神层面达到了前所未有的高度统一。这也是本书封面采用这一开源创意的重要原因。

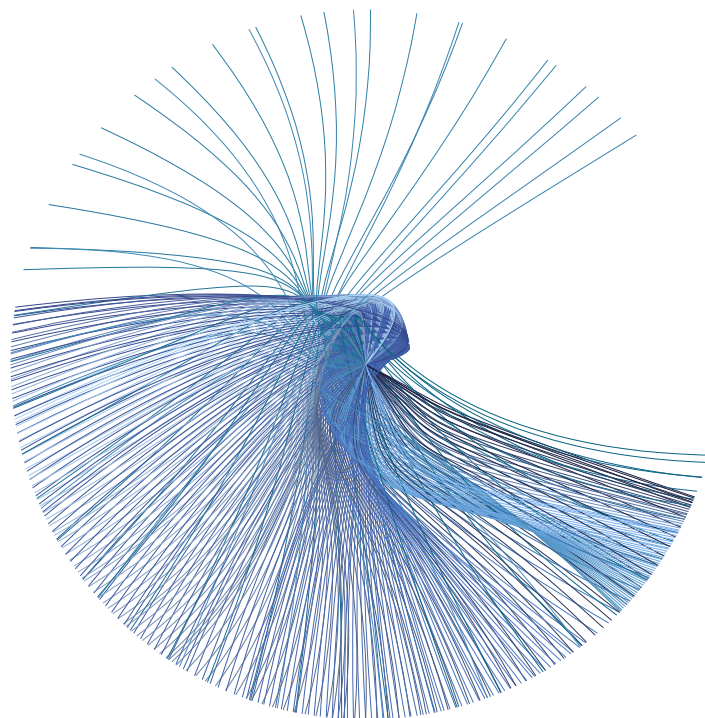


图 19. 鸢尾花曲线，Oliver Brotherhood 开源创意

近些年 AI 的应用发展让艺术王国的版图为之震颤。图 20 便是用 Midjourney 训练而成的鸢尾花。本书扉页和半透明硫酸纸上展示的鸢尾花也都是出自 Midjourney 之手。



图 20. Midjourney 训练生成的鸢尾花

Midjourney 是一种基于人工智能的创作方式，将数学和艺术巧妙地结合起来。通过数学模型和算法，Midjourney 能够生成独特而引人入胜的艺术作品。

数学提供了创作的理论和框架，如几何学、比例和颜色理论，帮助艺术家创造出具有美感和视觉吸引力的作品。同时，艺术在 Midjourney 中发挥着关键的角色，通过创造力、想象力和表达力，使生成的作品充满了情感和个性。Midjourney 的结合展示了数学与艺术的协同作用，创造出令人惊叹的艺术创作体验。

1.7 宇宙之道

一沙一世界，一花一天堂。无限掌中置，刹那成永恒。满天的繁星又何尝不在展现这种“模式 + 随机”。古时观测手段有限，人们将目力所及的繁星浪漫地描述为双子座、巨蟹座、狮子座 ...

在科学技术的助力下，我们在微观尺度能够描绘电子轨迹，宏观尺度上能够观察天体运行。图 21 描绘从中心释放的大量电子轨迹。

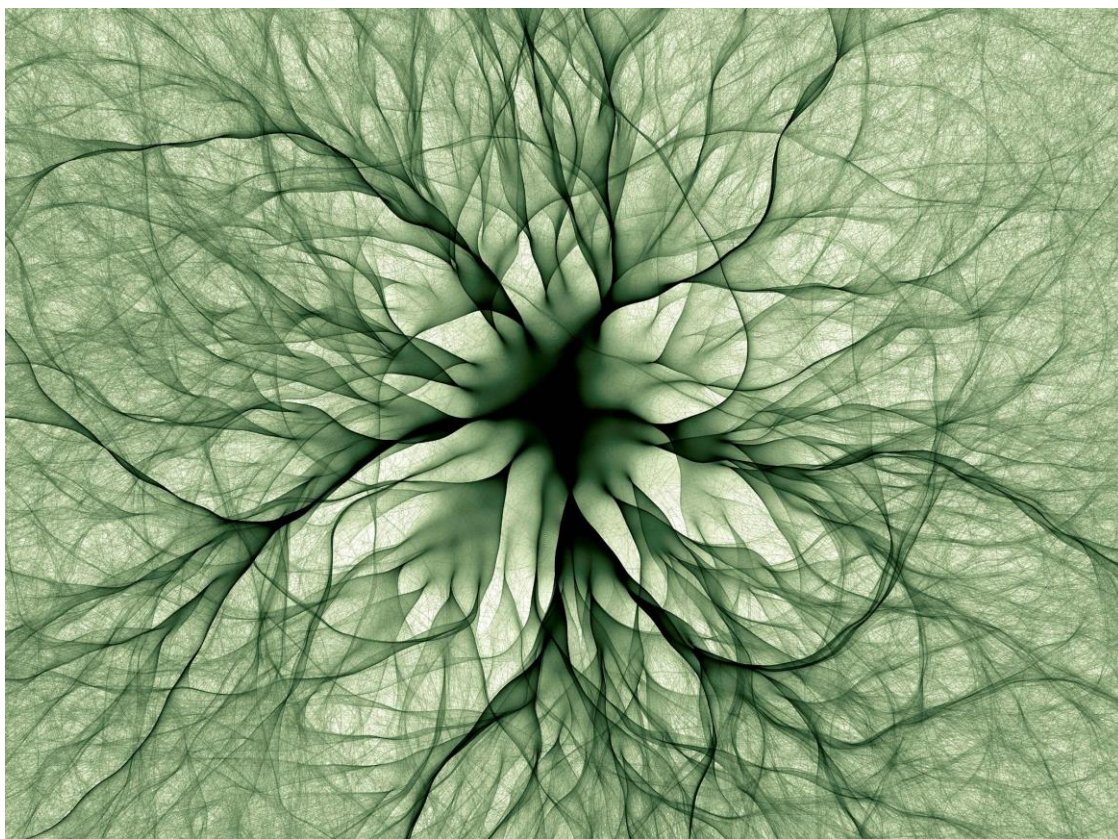


图 21. *Transport II* by Eric J. Heller at Harvard University. 图片来自于 www.nsf.gov

微观和宏观达到的模式上的统一，这就是像是一条巨蟒咬住了自己的尾巴，即衔尾蛇 (Ouroboros)。有些人认为，数学中表示无穷的符号 ∞ 也是来自于衔尾蛇 (扭纹形)。

据德国化学家凯库勒 (August Kekulé) 本人的著作称，他梦中梦到一条蛇咬住了自己尾巴，从而得到启发得到苯环结构。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

而鸢尾花书选取的编程语言 Python 本意也是蟒蛇，特别地，Anaconda 的 logo 就是衔尾蛇。这种冥冥之中的巧合耐人寻味。

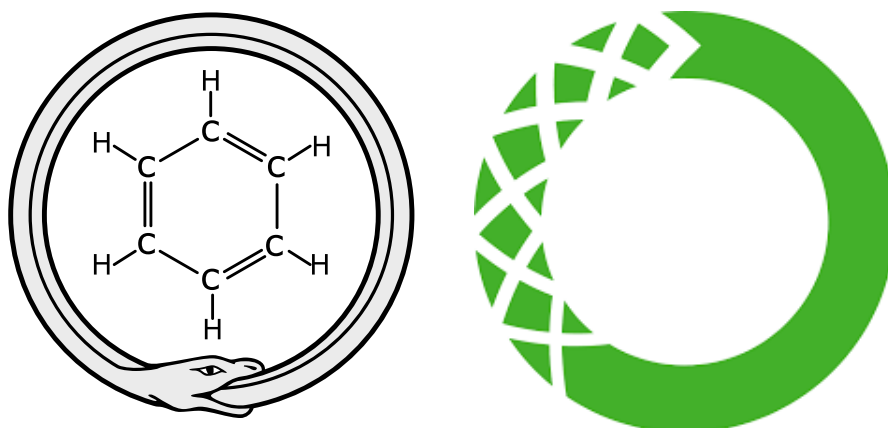


图 22. 衔尾蛇、苯环、Anaconda logo，图片来自于 Wikipedia

我们身体的某个角落的某个电子在绕着某个原子在做近似椭圆的运动。而我们又乘着地球绕着太阳在椭圆的轨道上运行。而以太阳为中心的太阳系又绕着银河系的中心公转，而银河系...

这繁复的相互缠绕关系，让我们又想到了微观层面的 DNA 结构。宏观、微观，这条蛇再次地咬住了自己的尾巴。

那么，宇宙的图景到底怎样？

在下面这幅银河系的图景中，我们是否既看到了模式的确定，也看到了随机带来的不确定。

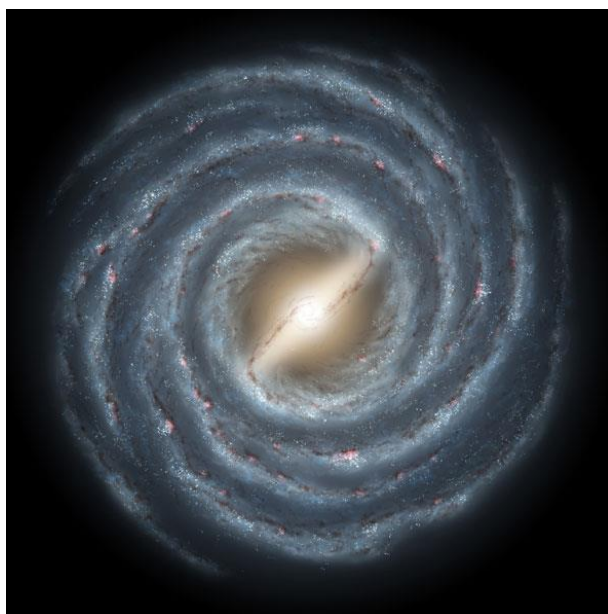


图 23. 银河系图景，图片来自于 www.nasa.gov

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

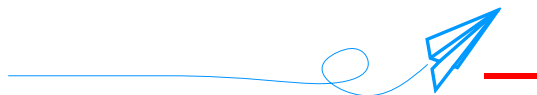
正如美国物理学家费曼所说，我，一个无数原子组成的宇宙，又是整个宇宙的一粒原子。地球，那个暗淡蓝点，不过是银河系中的一粒沙子，我们又何尝不是蝼蚁。

换个角度来向，数字信息存储在一个个芯片中。这一个个芯片又何尝不是一个数字“宇宙”！再疯狂一点，我们这个所谓的物质世界是否也是某个矩形芯片的模拟产物？光速仅仅是避免死机的保护机制？

带着这样的几何视角、动态思考，今晚大家不妨去夜观天象，然后再看图 24 梵高的《星夜》中描绘的斗转星移，我们是否会觉得梵高的作画不再“疯狂”？那个时代的梵高是否是举世皆浊我独清，众人皆醉我独醒？



图 24. 梵高的《星夜》，现藏于美国纽约现代艺术博物馆 MoMA；图片来自 Google Art Project



若将贫贱比车马，他得驱驰我得闲。别人笑我太疯癫，我笑他人看不穿。不为五斗米折腰的梵高是否又在意世人看他的眼光？

难怪有人说，梵高笔下的星夜更接近真实的星空。

在凡胎俗人眼里，数学家的疯狂和艺术家的疯狂是否本质上高度一致？不畏浮云遮望眼，忘却凡胎肉眼中的“真实”世界的，我们能否通过艺术、数学凿开的缺口一窥更“本质”的存在？