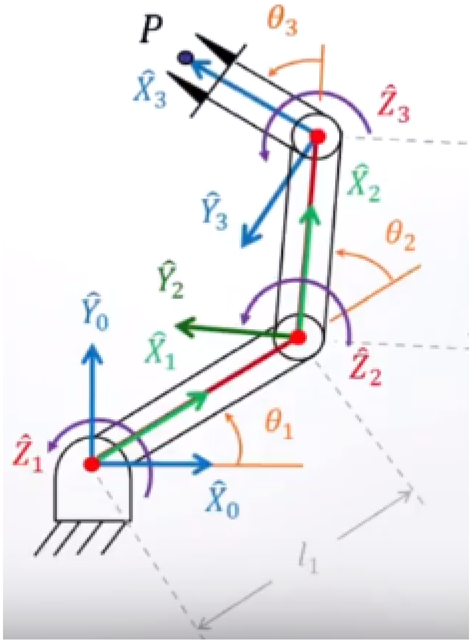
机器人学——学习笔记10(多重解案例分析)

Example 1: A RRR Manipulator

$$IK(Inverse\ \ Kinematics)\ \ problem: Given\ \ (x, y, \phi),\ \ (\theta_1, \theta_2, \theta_3) = ?$$



3Dofs 手臂

$$Forward\ \ Kinematics$$

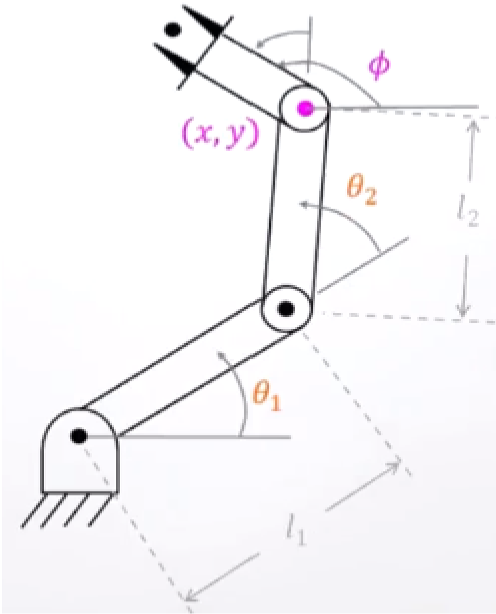
$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0.0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0.0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

frame{3}对地frame{0}的Trans Matrics

现在我们已知：

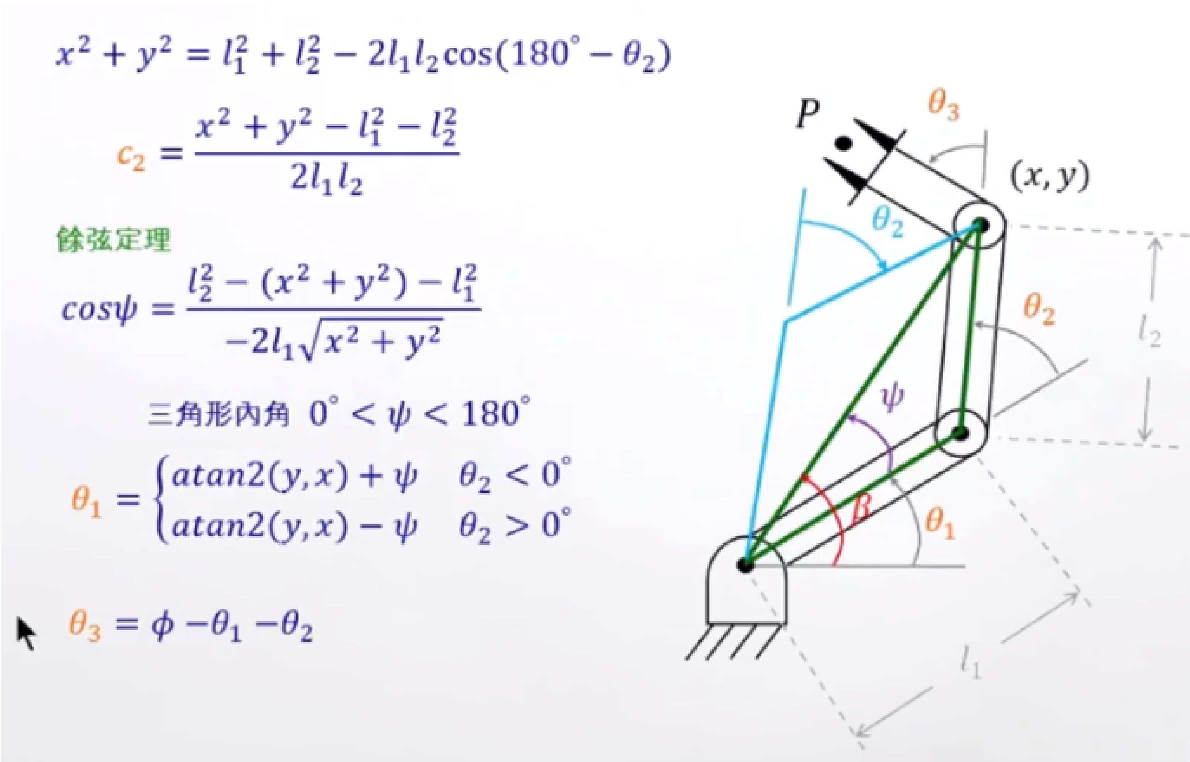
$$Goal\ \ Point$$

$${}^0_3T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

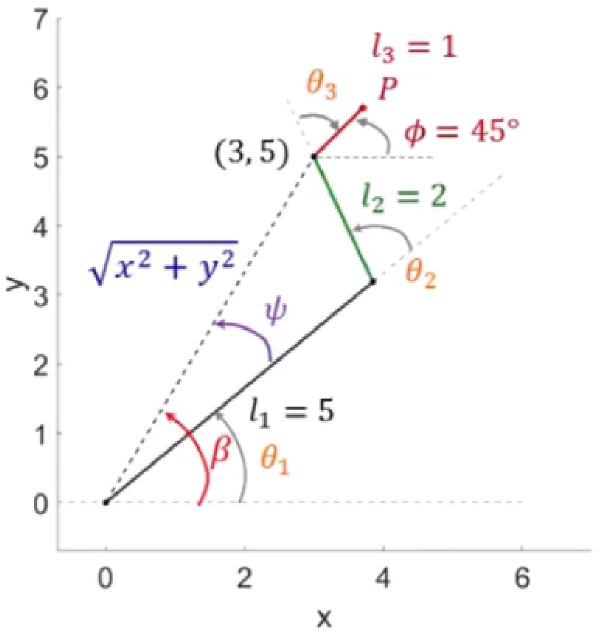


φ=θ_1 + θ_2 + θ_3

1. **<u>求解方法一：几何法，将空间几何切割成平面几何：</u>**



- θ_2根据余弦定理可以轻松求得; θ_1有两种情况，已在图中标出;有了θ_1, θ_2与末端角度ϕ可以很轻松求出θ_3。



$$c_2 = \frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}$$

$$\theta_2 = 75.5°$$

$$cos\psi = \frac{l_2^2-(x^2+y^2)-l_1^2}{-2l_1\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\psi = 19.4°$$

$$\theta_1 = atan2(y, x) - \psi$$

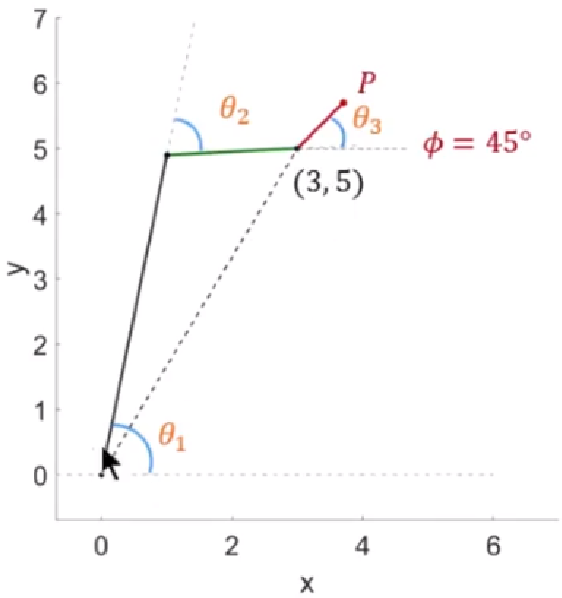
$$\theta_1 = 39.6°$$

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

$$\theta_3 = -70.2°$$

量化计算

- In-Video Quiz: 針對同一個位移和姿態，求得另一組 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 的解



(A)
$\theta_1 = 75.5$
$\theta_2 = -78.4$
$\theta_3 = 42.1$

(B) ✓
$\theta_1 = 78.4$
$\theta_2 = -75.5$
$\theta_3 = 42.1$

(C)
$\theta_1 = -78.4$
$\theta_2 = 75.5$
$\theta_3 = 42.1$

(D)
$\theta_1 = 59$
$\theta_2 = -75.5$
$\theta_3 = 42.1$

2. **针对同一个例题，根据<u>代数解法</u>进行求解**

- 建立方程组

$$\begin{cases} c_\phi = c_{123} \\ s_\phi = s_{123} \\ x = l_1c_1 + l_2c_{12} \\ y = l_1s_1 + l_2s_{12} \end{cases} \Longrightarrow {}^0_3T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0.0 & l_1c_1+l_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0.0 & l_1s_1+l_2s_{12} \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0.0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0.0 & y \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 解θ_2

$$x^2+y^2 = l_1^2+l_2^2+2l_1l_2c_2$$
$$c_2 = \frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}$$

3、4平方求和

- **注意：** 若右边一堆算出来的解>1或<-1，说明现在已知的这个末端位姿是无法到达的（Too far for the manipulator to reach）
- 若：右边一堆算出来的解$\in[-1,1]$，则有两个解：$\theta_2=\cos^{-1}(c_2)$
- 接着将求得的 θ_2 带入方程式

$$
\begin{aligned}
x=l_1c_1+l_2c_{12}=(l_1+l_2c_2)c_1+(-l_2s_2)s_1:=k_1c_1-k_2s_1\\
y=l_1s_1+l_2s_{12}=(l_1+l_2c_2)s_1+(\quad l_2s_2)c_1:=k_1s_1-k_2c_1
\end{aligned}
$$

Btw,:= means *Equal by definition*

可以发现，这里的求解技巧首先是: $\cos(1+2)=\cos1\cos2-\sin1\sin2$ ，然后将 c_1,c_2 的系数设为 k_1,k_2 。

- 接着做变数变换:
  - $define:r=+\sqrt{k_1^2+k_2^2},\ \ \gamma=A\tan2(k_2,k_1)$
  - $then:k_1=r\cos\gamma,\ \ k_2=r\sin\gamma$
- 带入上式:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{r}=\cos\gamma\cos\theta_1-\sin\gamma\sin\theta_1=\cos\left(\gamma+\theta_1\right)\\
\frac{y}{r}=\cos\gamma\sin\theta_1+\sin\gamma\cos\theta_1=\sin\left(\gamma+\theta_1\right)
\end{aligned}
$$

很干净地过滤出θ_1

左侧已知，右侧 γ 已知，所以Next Step:

- 解 θ_1

$$
\begin{aligned}
\gamma+\theta_1=A\tan2(\frac{y}{r},\frac{x}{r})=A\tan2(y,x)\\
\Longrightarrow\theta_1=A\tan2(y,x)-A\tan2(k_2,k_1)
\end{aligned}
$$

当$\boldsymbol{\theta_2}$选不同解，$\boldsymbol{c_2}$和$\boldsymbol{s_2}$变动，$\boldsymbol{k_1}$和$\boldsymbol{k_2}$变动，$\boldsymbol{\theta_1}$也跟着变动

- 最后解θ_3

$$
\begin{aligned}
\theta1+\theta2+\theta3=A\tan2(s_\phi,c_\phi)=\phi\\
\Longrightarrow\theta_3=\phi-\theta_1-\theta_2
\end{aligned}
$$

(小tip) ---- 三角函数方程式求解：

$Ex:How\ \ to\ \ find\ \ the\ \ \theta\ \ in\ \ a\cos\theta+b\sin\theta=c\ \ ?$

- 变换：变换到多项式空间(polynomials)，4阶以下均有解析解

$$
\tan(\frac{\theta}{2})=u\qquad\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2}\qquad\sin\theta=\frac{2u}{1+u^2}
$$

- 于是有：

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c$$

$$a\frac{1-u^2}{1+u^2} + b\frac{2u}{1+u^2} = c$$

$$(a+c)u^2 - 2bu + (c-a) = 0$$

- 所以公式解：

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2+a^2-c^2}}{a+c} \qquad \textcolor{green}{a,b,c\text{大小有限制，不一定有解}}$$

注意，a,b,c大小有一定的限制

- 所以推出 θ：

$$\theta = \begin{cases} 2\tan^{-1}(\frac{b\pm\sqrt{b^2+a^2-c^2}}{a+c}) & a+c \neq 0 \\ 180^\circ & a+c = 0 \end{cases}$$