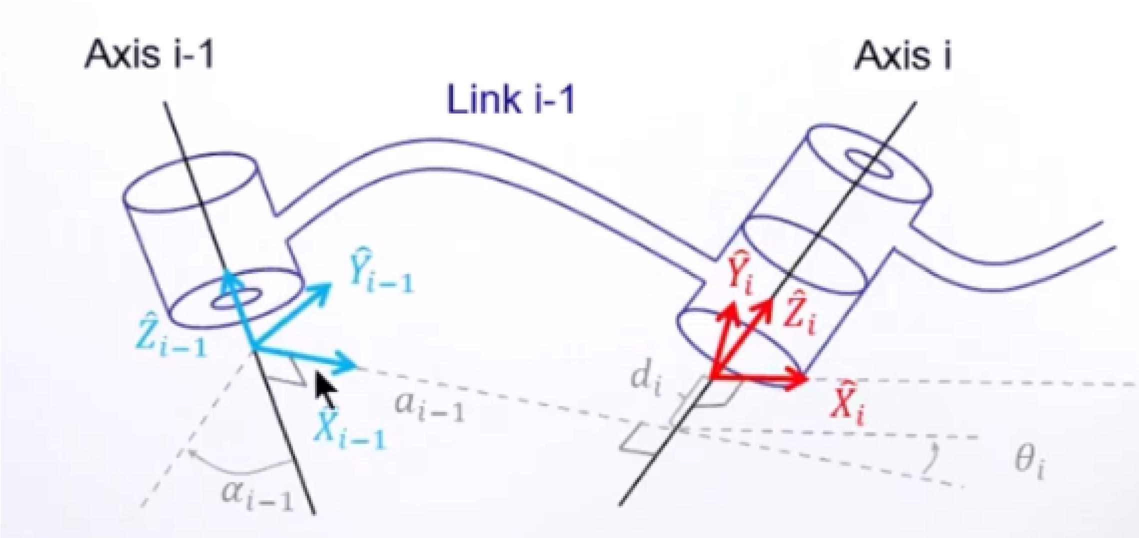
机器人学——学习笔记6(Link Transformations)

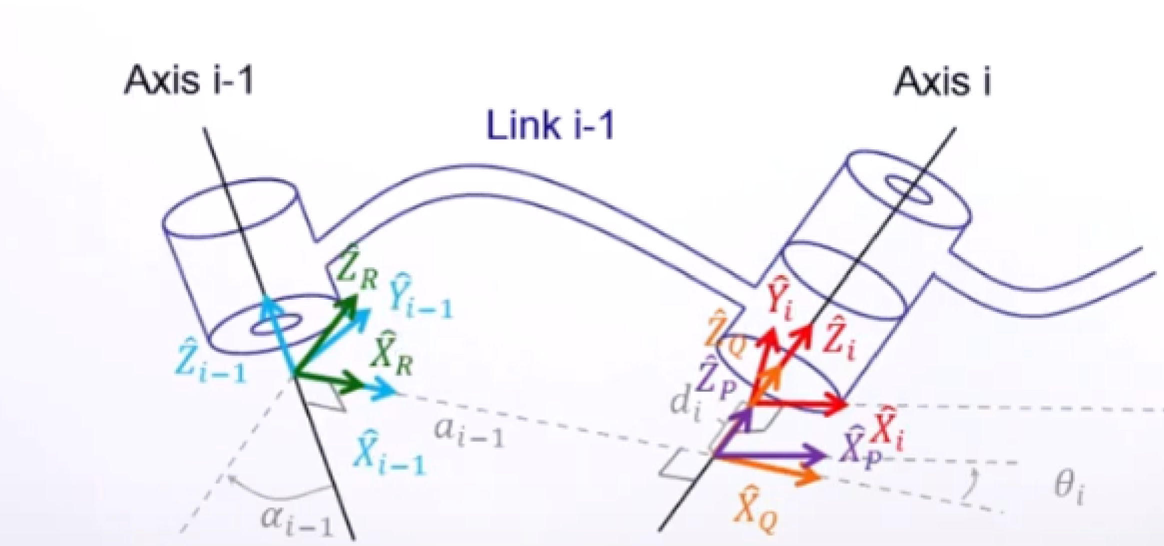


进一步精准找到两个frame之间的变换关系（Transformation Matrix的量化表达式什么）

要如何借由DH表达法中的4个参数，求得Transformation Matrix?

$$ {}^{i-1}P = {}^{i-1}_{i}T^{i}P $$

- step 1: 沿着X_{i-1}进行旋转，使得$Z_{i-1} \rightarrow Z_R$；其中Z_R与Z_i平行；
- step 2: 沿着X_R平移{R}， 使得平移后的Z_Q与Z_i重合;
- step 3: 沿着Z_Q旋转{Q}，使得旋转后的X_P与X_i平行;
- step 4: 沿着Z_P平移{P}， 使得平移后{P}与{i}两个frame重合，完成变换。
- 过程图示如下:



- 其中，按照mapping后乘思想，可列出:

$$ {}^{i-1}P = {}^{i-1}_{R}T^{R}_{Q}T^{Q}_{P}T^{P}_{I}T^{i}P $$

- 继续拆解:
    - step1若要满足，则需要旋转角度为：α_{i-1}；

- **step1若要满足，则需要旋转角度为**: α_{i-1};
- **step2若要满足，则需要平移距离为**: a_{i-1};
- **step3若要满足，则需要旋转角度为**: θ_i;
- **step4若要满足，则需要平移距离为**: d_i 。
- 有:

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}_{i}T &= {}^{i-1}_{R}T\,{}^{R}_{Q}T\,{}^{Q}_{P}T\,{}^{P}_{i}T \\
&= T_{\hat{X}_{i-1}}(\alpha_{i-1})T_{\hat{X}}(a_{i-1})T_{\hat{Z}_Q}(\theta_i)T_{\hat{Z}_P}(d_i)
\end{aligned}
$$

连接{i}与{i-1}两个frame之间的关系

- Thus:

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}_{i}T &= T_{\hat{X}_{i-1}}(\alpha_{i-1})T_{\hat{X}}(a_{i-1})T_{\hat{Z}_Q}(\theta_i)T_{\hat{Z}_P}(d_i) \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

省略了推导过程

- 有了i与i-1的frame的转换关系后，连续的link transformations也很好求:

$$
{}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T \ldots {}^{n-2}_{n-1}T\,{}^{n-1}_{n}T
$$

任何一个杆件对地状态

Frame{n}相对于Frame{0}的空间集合关系清楚，且量化的定义在Frame{n}下表达的向量可以转回到Frame{0}下来定义表达（对地）。

Example 1

上面的详细推导过程:

Microsoft Whiteboard

推导过程：

$${}^{i-1}_{\ i}T = T_{\hat{X}_{i-1}}(\alpha_{i-1})\,T_{\hat{X}_R}(a_{i-1})\,T_{\hat{Z}_Q}(\theta_i)\,T_{\hat{Z}_P}(d_i)$$

解：① $T_{\hat{X}_{i-1}}(\alpha_{i-1})$，只是关于 $\hat{X}_{i-1}$ 顺时针旋转了 α_{i-1}，我可以推出：

Trans Matrix $T_{\hat{X}_{i-1}}(\alpha_{i-1}) = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c\alpha_{i-1}&-s\alpha_{i-1}&0\\0&s\alpha_{i-1}&c\alpha_{i-1}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&a_{i-1}\\0&c\alpha_{i-1}&-s\alpha_{i-1}&0\\0&s\alpha_{i-1}&c\alpha_{i-1}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

② $T_{\hat{X}_R}(a_{i-1})$：沿 $\hat{X}_R$ 方向平移了 a_{i-1}：简单推出：

Trans Matrix $T_{\hat{X}_R}(a_{i-1}) = \begin{bmatrix}1&0&0&a_{i-1}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

③ $T_{\hat{Z}_Q}(\theta_i)$：沿 $\hat{Z}_Q$ 逆时针旋转了 θ_i：

$T_{\hat{Z}_Q}(\theta_i) = \begin{bmatrix}c\theta_i&-s\theta_i&0&0\\s\theta_i&c\theta_i&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix}c\theta_i&-s\theta_i&0&a_{i-1}\\c\alpha_{i-1}s\theta_i&c\alpha_{i-1}c\theta_i&-s\alpha_{i-1}&0\\s\theta_i s\alpha_{i-1}&c\theta_i s\alpha_{i-1}&c\alpha_{i-1}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

④ $T_{\hat{Z}_P}(d_i)$：沿 $\hat{Z}_P$ 方向平移了 d_i

$T_{\hat{Z}_P}(d_i) = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&d_i\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$

$$\begin{bmatrix}c\theta_i&-s\theta_i&0&a_{i-1}\\c\alpha_{i-1}s\theta_i&c\alpha_{i-1}c\theta_i&-s\alpha_{i-1}&-s\alpha_{i-1}d_i\\s\alpha_{i-1}s\theta_i&s\alpha_{i-1}c\theta_i&c\alpha_{i-1}&c\alpha_{i-1}d_i\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

√ 正确！

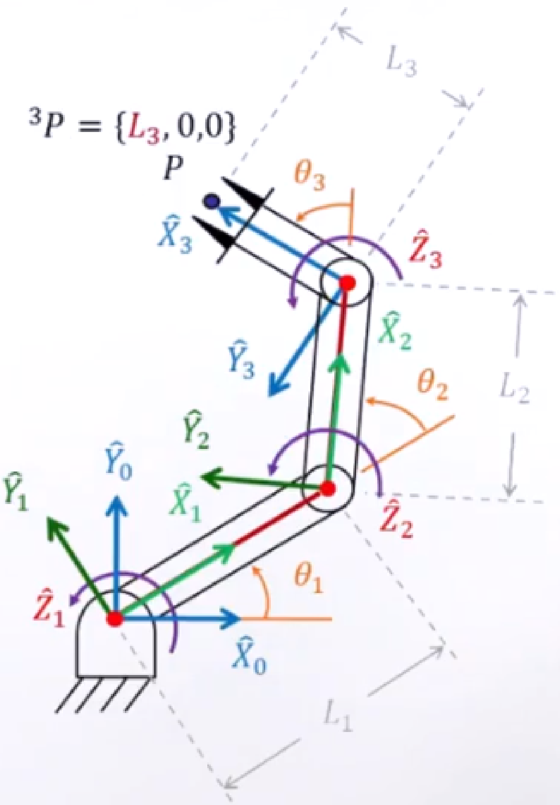
在这里输入你要搜索的内容 11:14 2020/2/5

Example 2: A RRR Manipulator

Example: A RRR Manipulator

- Joint axes
- Common perpendiculars
- $\hat{Z}_i$
- $\hat{X}_i$
- $\hat{Y}_i$
- Frames {0} and {n}

$^3P = \{L_3, 0, 0\}$

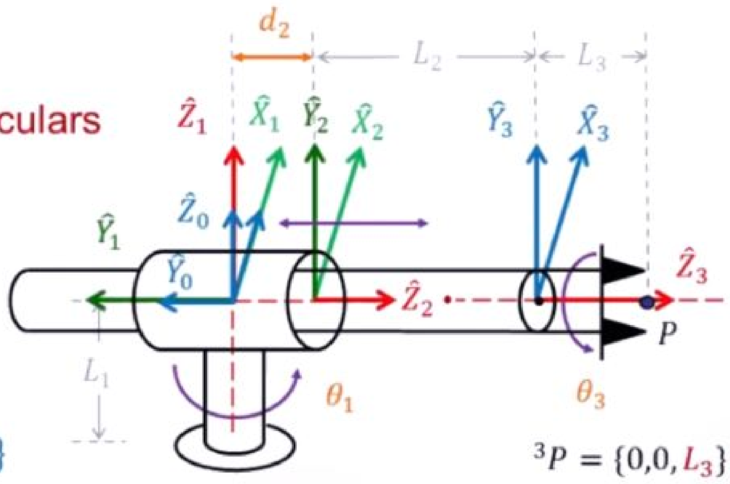


i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

Example 3: A RPR Manipulator

Example: A RPR Manipulator -2

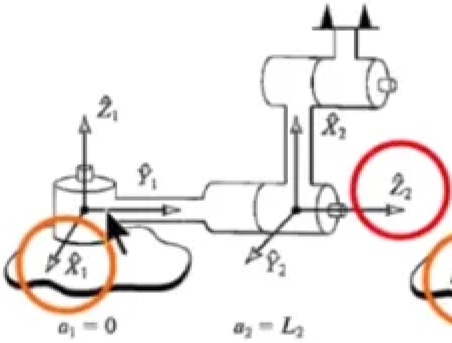
- Joint axes
- Common perpendiculars
- $\hat{Z}_i$
- $\hat{X}_i$
- $\hat{Y}_i$
- Frames $\{0\}$ and $\{n\}$



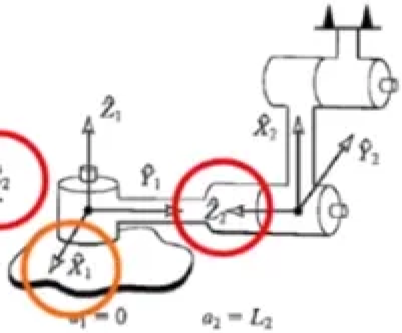
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

注意，当Z轴相交，即 $a_1 = 0$ 的时候，有很多定义方式：

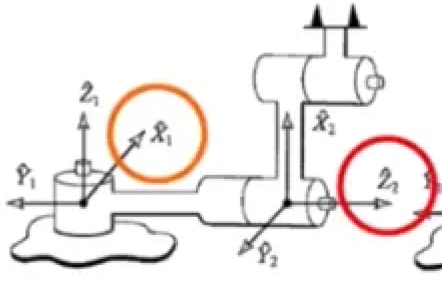
- Z_2有两个选择
- X_1有两个选择
- 单纯的两轴相交，就有4种选择，不是唯一解...



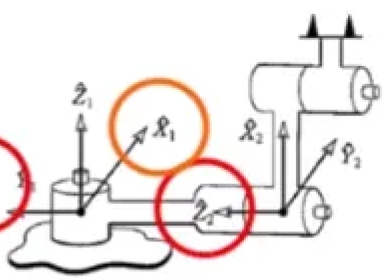
$a_1 = 0$ $\quad a_2 = L_2$
$\alpha_1 = -90°$ $\quad \alpha_2 = 0$ $\quad \theta_2 = -90°$
$d_1 = 0$ $\quad d_2 = L_1$



$a_1 = 0$ $\quad a_2 = L_2$
$\alpha_1 = 90°$ $\quad \alpha_2 = 0$ $\quad \theta_2 = 90°$
$d_1 = 0$ $\quad d_2 = -L_1$



$a_1 = 0$ $\quad a_2 = L_2$
$\alpha_1 = 90°$ $\quad \alpha_2 = 0$ $\quad \theta_2 = 90°$
$d_1 = 0$ $\quad d_2 = L_1$



$a_1 = 0$ $\quad a_2 = L_2$
$\alpha_1 = -90°$ $\quad \alpha_2 = 0$ $\quad \theta_2 = -90°$
$d_1 = 0$ $\quad d_2 = -L_1$

John J. Craig, "Introduction to Robotics," 3rd ed., Pearson Prentice Hall, 2005, pp. 74