

机器人学——学习笔记3(Mapping)

1. 复习 该如何整合表达刚体的状态

在刚体 (Rigid Body) 上建立frame, 常建立在质心上

- 移动: 由body frame的「原点位置」判定;

$${}^A P_{B\text{org}} = \begin{bmatrix} P_{Bx} \\ P_{By} \\ P_{Bz} \end{bmatrix} = \text{origin of } \{B\} \text{ represented in } \{A\}$$

- 转动: 由body frame的「姿态」判定;

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

- 整合后:

$$\{B\} = \{{}_B^A R, {}^A P_{B\text{org}}\} \text{ 但无法进行量化计算}$$

如何整合转动与移动, 并可以进行量化计算? ——把移动和转动排列在同一个矩阵里面, 即 Homogeneous Transformation Matrix(齐次变换矩阵)。

$$\begin{bmatrix} {}_B^A R_{3 \times 3} & {}^A P_{B\text{org}}_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ {}^A \hat{X}_B & {}^A \hat{Y}_B & {}^A \hat{Z}_B & {}^A P_{B\text{org}} \\ | & | & | & | \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= {}_B^A T$$

2. Mapping

以Mapping, 转换向量 (或点) 的坐标系的方式来确认T的正确性

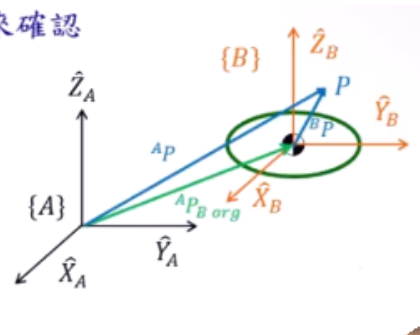
- 以Mapping, 转换向量 (或点) 之座標系的方式來確認

${}^A T_B$ 运算之正确性

- ◆ 仅有移动

$${}^A P = {}^B P + {}^A P_{B\text{org}}$$

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & {}^A P_{B\text{org}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B P + {}^A P_{B\text{org}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

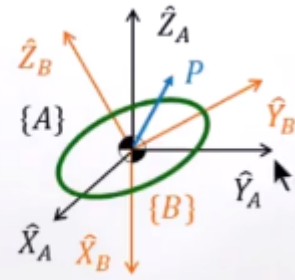


(1) 仅有移动, 等价, 说明Transformation Matrix没毛病

◆ 僅有 轉動

$${}^A P_{3 \times 1} = {}^A R_B {}^B P_{3 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R {}^B P \\ 1 \end{bmatrix}$$



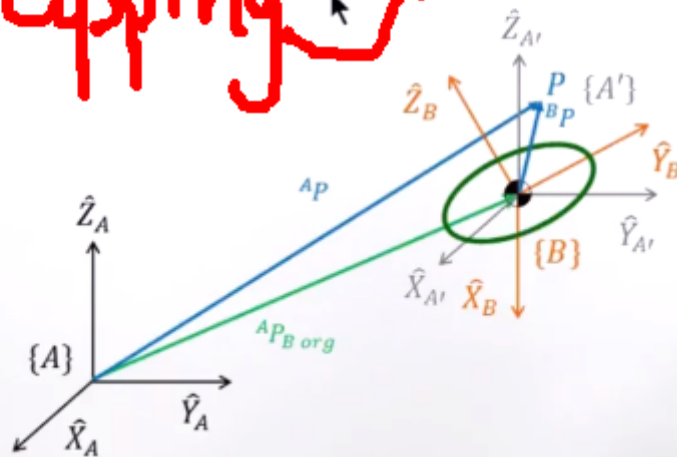
(2) 仅有转动，等价，说明Transformation Matrix没毛病

◆ 移動和轉動複合

$${}^A P_{3 \times 1} = {}^A R_B {}^B P_{3 \times 1} + {}^A P_{B \text{ org}}_{3 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & {}^A P_{B \text{ org}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R {}^B P + {}^A P_{B \text{ org}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mapping



(3) 转动 + 移动（一般情况），等价，说明Transformation Matrix没毛病

注意，Transformation Matrix也可以连续操作：

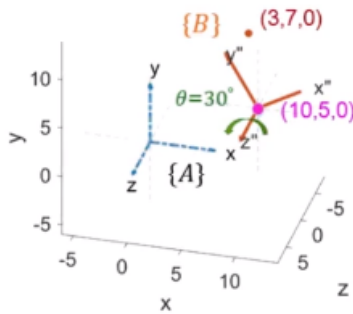
$${}^A T_B = {}^A T_C {}^C T_D {}^D T_B$$

Sequential Transformation

EX 从mapping的角度，把一个point，从相对于{B}下的坐标转换到{A}下：

□ Ex: ${}^B P = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ ${}^A P_{Borg} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ${}^A \hat{X}_B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ ${}^A \hat{Y}_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ ${}^A \hat{Z}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow {}^A P = ?$

$$\begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & {}^A R_B & {}^A P_{Borg} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ {}^A P \\ | \end{bmatrix}$$



單純看 ${}^A T_B$: 表達{B}相對於{A}的方法

看整個操作：

轉換point在不同frame下的表達

投影至XY平面驗證答案

