

# 机器人学——学习笔记9(Inverse Kinematics)

## 机械手臂 逆向运动学——Manipulator Inverse Kinematics

### 1. 引言: 手臂顺向运动学 Forward Kinematics (FK)

给予 $\theta_i$ (可计算出 ${}^i_{i-1}T$ ), 求得 $\{H\}$ 或 ${}^WP$ 。

$${}^WT = f(\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n)$$

$${}^WP = {}^WT {}^HP$$

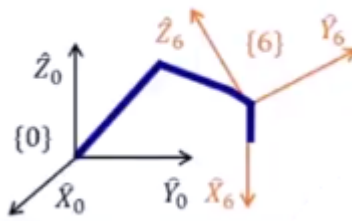
### 2. 手臂逆向运动学 Inverse Kinematics(IK)

给予 $\{H\}$ 或 ${}^WP$ , 求得 $\theta_i$ 。已知末端位置, 反算手臂各个关节的角度。

$$[\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n] = f^{-1}({}^WT)$$

### 3. 逆向运动学的求解

- 假设手臂有6Dofs;
- 6个未知的Joint Angles( $\theta_i$ 或者 $d_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ )



{0} frame手臂基座, {6} frame末端

- 在 ${}^WT$ 中, 取出含未知数的 ${}^0_6T$ , 16个数字:

$${}^0_6T = \left[ \begin{array}{ccc|c} {}^0_6R_{3 \times 3} & {}^0P_{6 \text{ org } 3 \times 3} & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{4 \times 4} = \left[ \begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ {}^0\hat{X}_6 & {}^0\hat{Y}_6 & {}^0\hat{Z}_6 & {}^0P_{6 \text{ org}} \\ | & | & | & | \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

9个未知数代表旋转, 3个未知量代表第{6}frame相对于{0}frame的位置

其中旋转矩阵中, 9个数字, 有6个条件:

- 两两垂直;
- 单位向量;

所以在求解过程中:

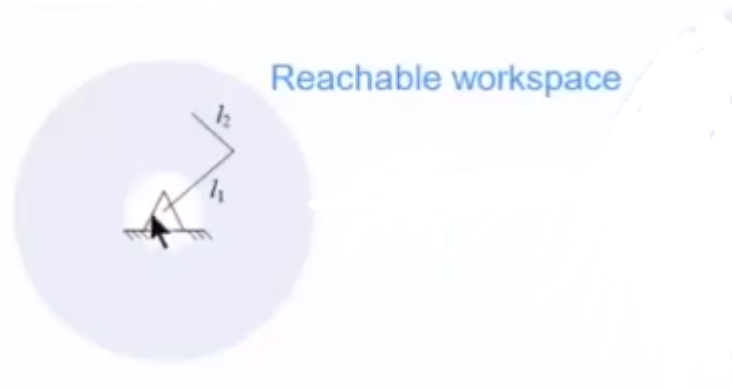
- 12个 *Nonlinear Transcendental Equations* (非线性超越方程组) 方程式;

- 6个未知数, 6个限制条件;

## 4. 几个求解概念

- **Reachable Workspace 可达工作空间**
  - 手臂可以用一种以上姿态到达的位置;
- **Dexterous Workspace 灵活工作空间**
  - 手臂可以用任何的姿态到达的位置;
  - 是RW的子集合;

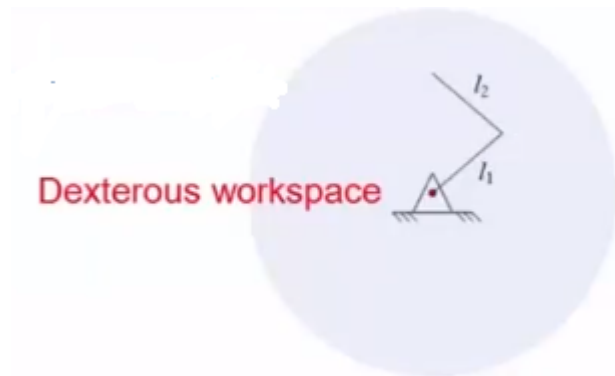
EX: 2Dof 机械手臂, 其中  $l_1 > l_2$  ;



蓝色圈区域都是Reachable Workspace

蓝色空间内任何一点, 只有两个姿态可以到达, 这种情况下不存在Dexterous Workspace;

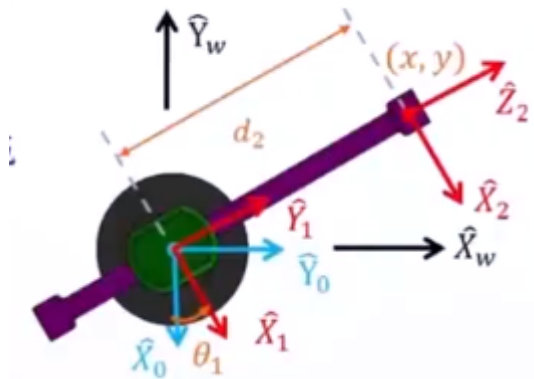
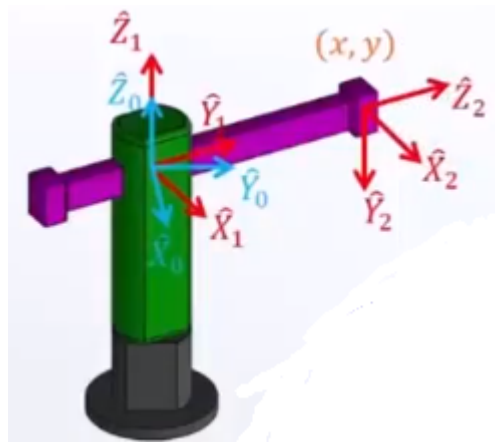
EX: 2Dof 机械手臂, 其中  $l_1 = l_2$  ;



蓝色是Reachable Workspace, 其中原点是一切姿态都可以到达的位置, 是Dexterous Workspace

- **Subspace** ——手臂在定义头尾的T所能到达的变动范围

EX: A RP Manipulator —— 2Dof, Variables:(x,y)



求 ${}_2^W T$  (frame{2}相对于世界坐标)

$${}_2^W T = \begin{bmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \\ \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^0\hat{Z}_2 \quad {}^0P_2 \text{ ORG}$

可以发现，该手臂，如果位置(x,y)决定了，其方向只与x,y有关，**所以方向有唯一解**。所以其他不满足该形式的位置，手臂均无法到达，会存在求解冲突。

## 5. 多重解

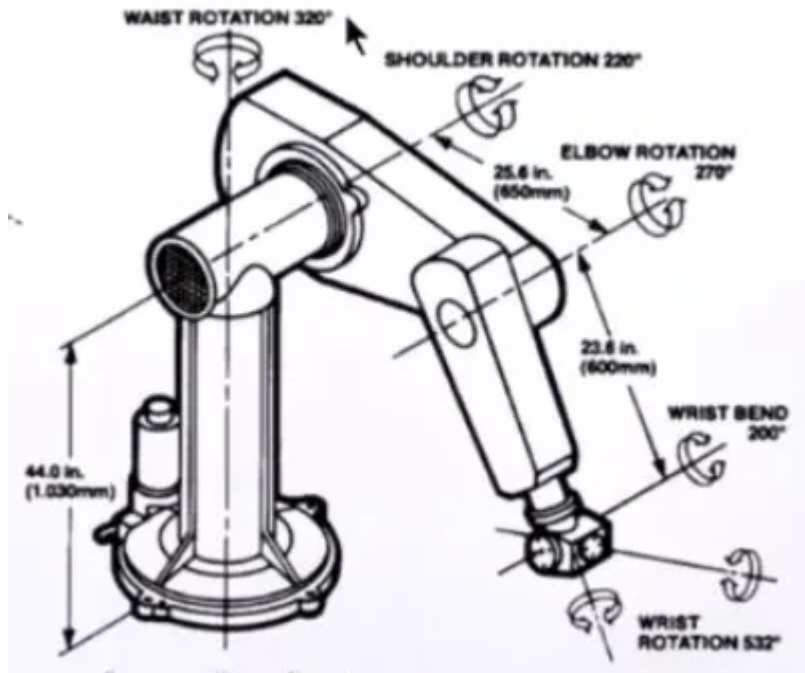
- 解读数目：由于式非线性超越方程组，6未知数、6方程式不代表具有唯一解；
- 是由joint数目和Link的参数所决定；

*Ex : A RRRRRR manipulator*

$a_i$	解的数目
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	$\leq 4$
$a_3 = a_5 = 0$	$\leq 8$
$a_3 = 0$	$\leq 16$
All $a_i \neq 0$	$\leq 16$

解的数目，与杆件几何的offset有很大关系e

- 用一个实例来看会比较清楚；
- **EX: PUMA ( 6 Rotational Joints)**

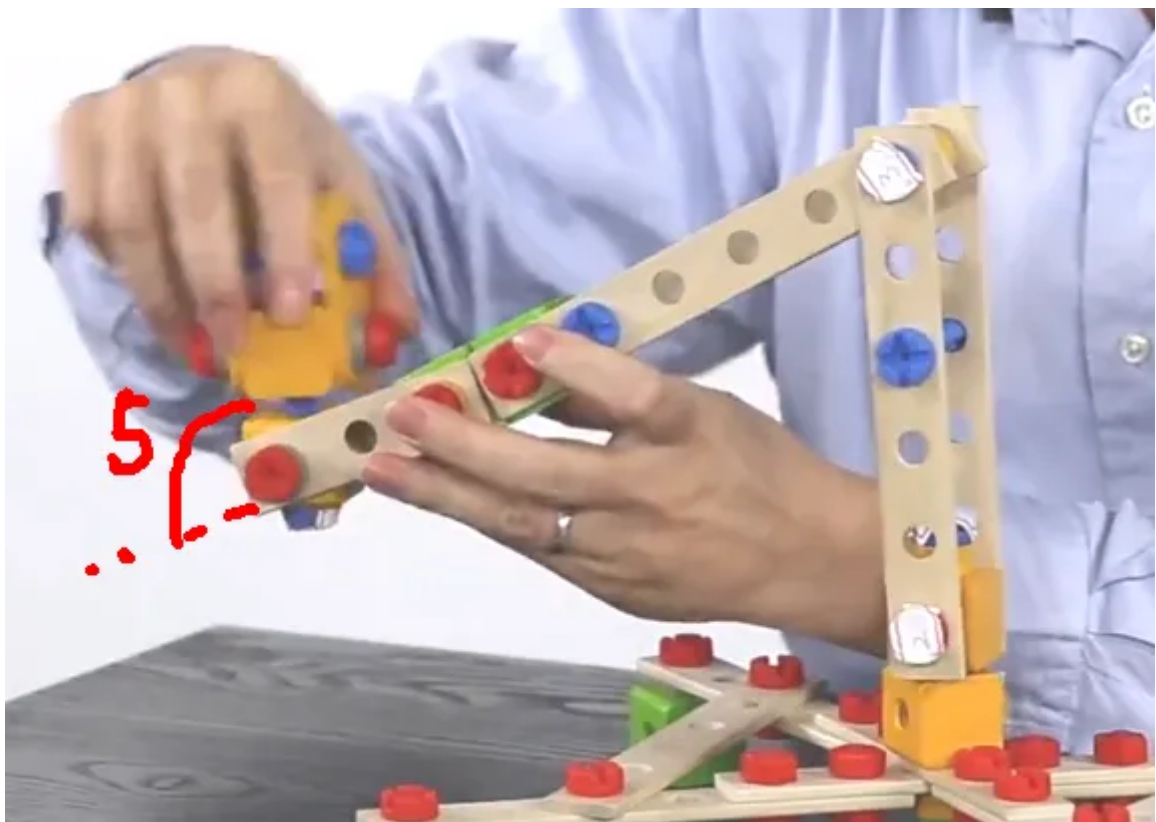
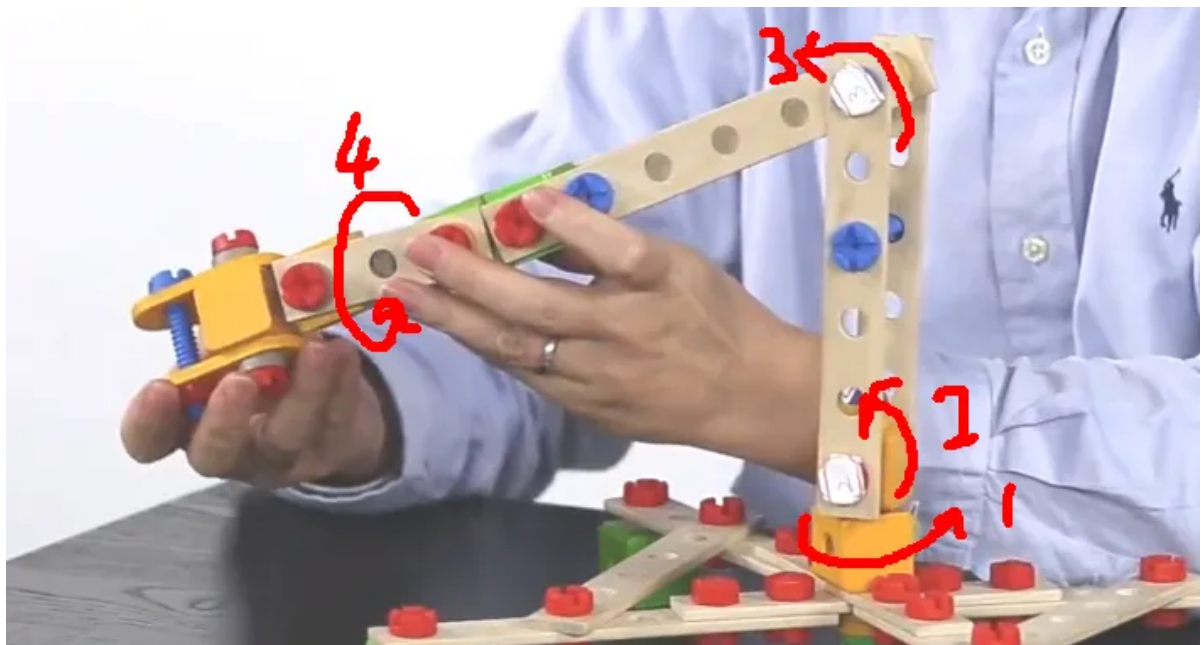


PUMA 机械臂

- 针对特定工作点，有8组解，下面进行详细分析（4x2=8组）
- 前三轴，有4种姿态：
  - 可以发现，前三轴基本可以决定“腕”的空间位置。



- 每一个姿态中，具有2组手腕转动姿态：
  - $\theta'_4 = \theta_4 + 180^\circ$
  - $\theta'_5 = -\theta_5$
  - $\theta'_6 = \theta_6 + 180^\circ$
- P.S. 若手臂本身有几何限制，并非每一种解都可以运作。
- 一般6DOFs手臂的形式如下（帮助理解）



第五个是爪子的上下摆动

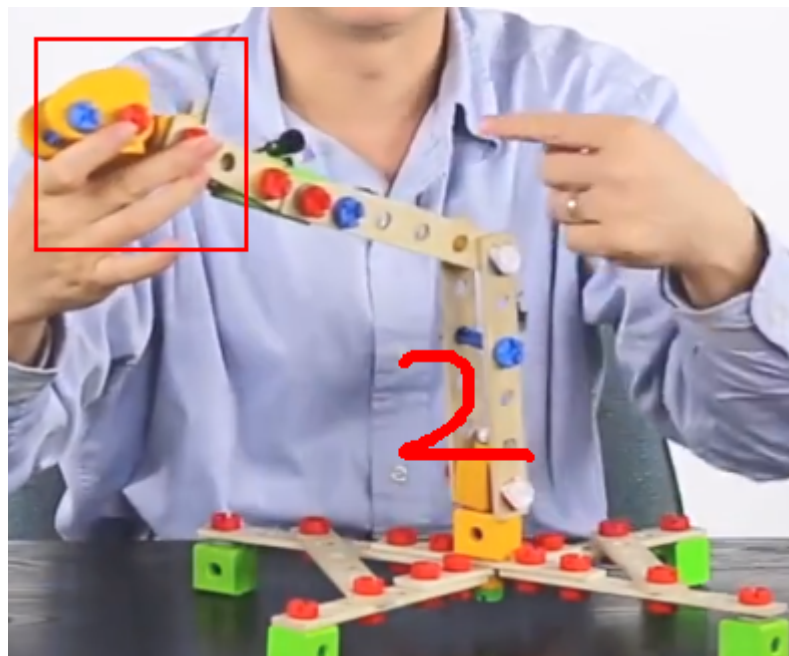
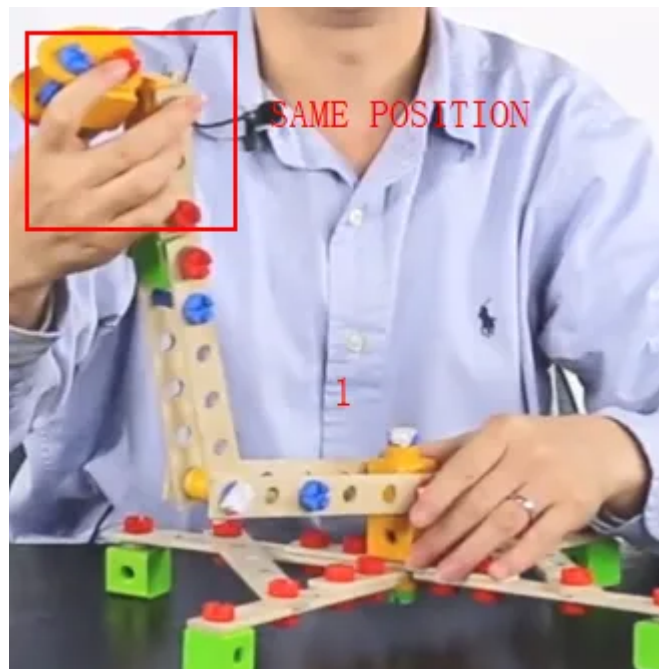


第六个自由度

可以发现，当第五个摆角为 $0^\circ$ 时，第四个和第六个同轴。



- 前三轴决定到达位置；（双解特性）



- 特定位置只有单一解：



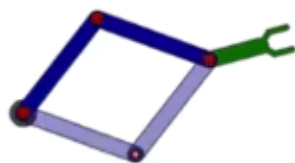
- 后三轴也具有多解性：



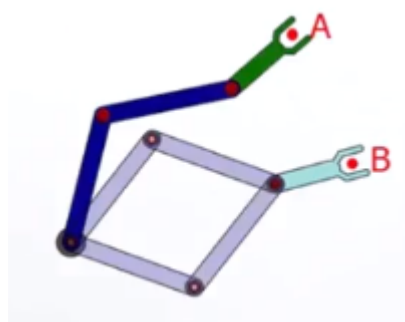
4轴转180度具有相同末端姿态

PUMA机械臂有8组的原因，是手臂的第二杆件存在侧移，侧移之后在左右两侧多了两个选择，所以一共是 $2 \times 4 = 8$ 组解。

### 5.1 多重解的选择方式

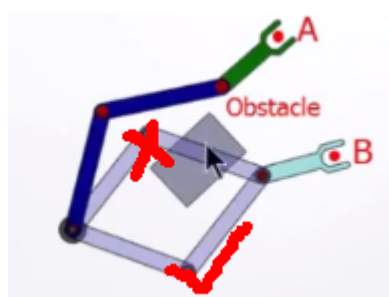


- **选择方式一**：选择下一个瞬间离目前状态最近的解：
  - 速度最快
  - 最节能
  - ...



从A到B，选择上面姿态最快且节能

- **选择方式二**：避障原则



## 5.2 求解方法

### 1. 解析法 Closed-form solutions

- 用代数Algebraic或几何Geometric方法

### 2. 数值法 Numerical solutions 六个方程，六个未知数

目前大多数机械手臂，设计成具有解析解：

- Pieper's solution: 相邻三轴相交一点（后三轴）