机器人学——学习笔记2(Fixed Angles&Euler Angles)

1. 复习：关于Rotation Matrix

- 三个用法

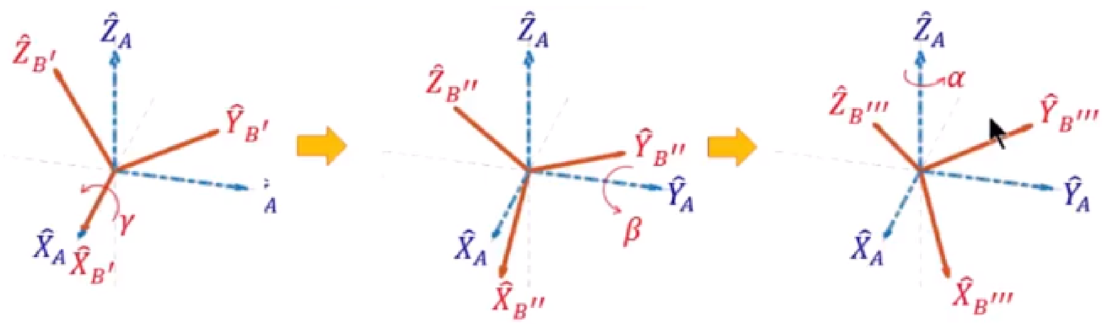
1. 描述一个frame相对于另一个frame的姿态
2. 将point由某一个frame的表达转换到另一个frame（仅有相对转动变化）来表达
3. 将point(vector)在同一个frame中进行转动

- **思考**——空间中的Rotation是3DOFs，那要如何把一般rotation matrix所表达的姿态，**拆解成3次旋转角度**，以应对到3个DOFs?
- 注意事项：
    - Rotation**前后顺序**需要明确定义（与移动不同，先向X移动后向Y移动与先向Y移动后向X移动可以互换顺序，而旋转不可以）
    - **旋转转轴**也需要明确定义。一般有两种「固定不动」旋转轴和「Body frame(随动)」转轴
- 两个拆解方式：
    - 对方向**「固定不动」**的旋转轴旋转：***Fixed angles*** ...
    - 对**「转动的frame当下所在」**的旋转方向旋转：***Euler angles*** ...

2. Fixed Angles

2.1 X-Y-Z Fixed Angles

由angles推算旋转矩阵R（三次旋转分别针对X,Y,Z轴来做，X,Y,Z轴是固定不动的，如下图蓝色坐标系）(逆时针为正)



从左到右：绕X_A旋转，绕Y_A旋转，绕Z_A旋转

如何由三个角度推算出Rotation Matrix?

$$
\begin{aligned}
{}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) &= R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

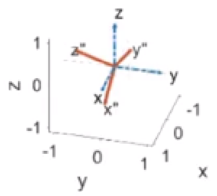
$$v' = {}^A_BRv = R_3R_2R_1v$$

先转的放「后面」：以$operator$来想，对某一个向量，

「以同一个坐标为基准」，进行转动或移动的操作

EX1:

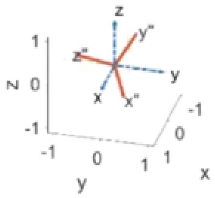
❑ Ex: 以Fixed Angles旋轉：「先對X軸旋轉60度，後對Y軸旋轉30度」和「先對Y軸旋轉30度，後對X軸旋轉60度」各自的 ${}^{A}_{B}R$ 分別是?



先對X轉60度，再對Y轉30度

$${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(0)R_Y(30)R_X(60) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ -0.5 & 0.75 & 0.433 \end{bmatrix}$$

可以发现，更换转动顺序后，旋转矩阵数值与frame姿态都不相同，即是转动角度相同，顺序不同，最后的状态不同。



先對Y轉30度，再對X轉60度

$${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = R_Z(0)R_X(60)R_Y(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0.433 & 0.5 & -0.75 \\ -0.25 & 0.866 & 0.433 \end{bmatrix}$$

2.2 X-Y-Z Fixed Angles——由R推算angles

$${}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

If $\beta \neq 90°$

$$\beta = Atan2(-r_{31}, \sqrt{{r_{11}}^2 + {r_{21}}^2})$$
$$\alpha = Atan2(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta)$$
$$\gamma = Atan2(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta)$$

$-90° \leq \beta \leq 90°$

Single solution

If $\beta = 90°$

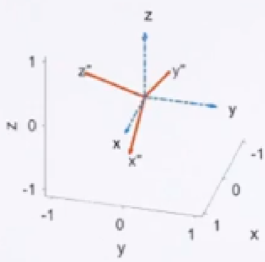
$$\alpha = 0°$$
$$\gamma = Atan2(r_{12}, r_{22})$$

If $\beta = -90°$

$$\alpha = 0°$$
$$\gamma = -Atan2(r_{12}, r_{22})$$

EX1:先给旋转矩阵内容，计算三个角度

❑ Ex: 以X-Y-Z Fixed Angles方法，反算 $R = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ -0.5 & 0.75 & 0.433 \end{bmatrix}$ 的angles



$$\beta = Atan2\left(-r_{31}, \sqrt{{r_{11}}^2 + {r_{21}}^2}\right) = Atan2\left(-(-0.5), \sqrt{0.866^2 + 0^2}\right) = 30°$$

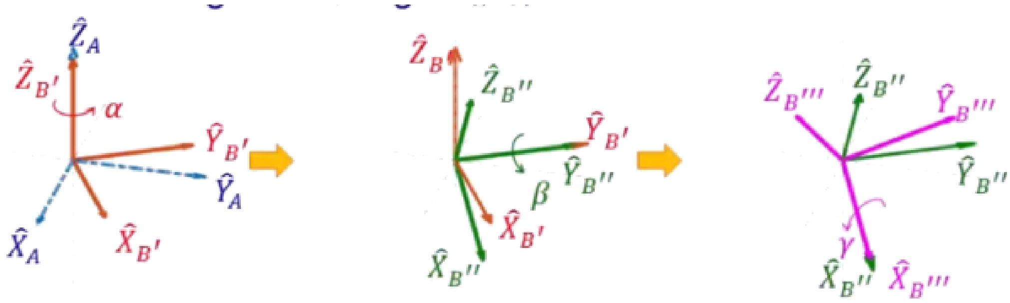
$$\alpha = Atan2\left(\frac{r_{21}}{c\beta}, \frac{r_{11}}{c\beta}\right) = Atan2\left(\frac{0}{\cos 30}, \frac{0.866}{\cos 30}\right) = 0°$$

$$\gamma = Atan2\left(\frac{r_{32}}{c\beta}, \frac{r_{33}}{c\beta}\right) = Atan2\left(\frac{0.75}{\cos 30}, \frac{0.433}{\cos 30}\right) = 60°$$

先对X转60°，再对Y转30°，没有对Z转

3. Euler Angles

3.1 Z-Y-X Euler Angles-由angles推算R (绕被转动转轴去做旋转)



从左到右：先根据 Z_B转，在根据Y_B转，最后根据X_B转

如何由三个角度推出*Rotation Matrix*?

$$ {}^A_BR_{z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = {}^A_{B'}R^{B'}_{B''}R^{B''}_{B}R = R_{Z'}(\alpha)R_{Y'(\beta)}R_{X'}(\gamma) $$

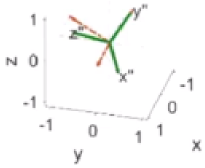
先转的放【前面】：以**mapping**来想，对某一个向量，从**最后一个frame**【逐渐转动或移动】来回到第一个frame：

$$ \begin{aligned} {}^AP &= {}^A_B R^BP = R_1R_2R_3^BP \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \\ &= R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) = {}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) \\ & \text{和} X-Y-Z\ Fixed\ angle\text{得到一样的}R \end{aligned} $$

欧拉angle与Fixed Angle具有简单对应

EX1:

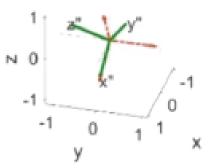
- Ex: 以Euler Angles旋轉：「先對X軸旋轉60度，後對Y軸旋轉30度」和「先對Y軸旋轉30度，後對X軸旋轉60度」各自的 ${}^A_BR$ 分別是?



先對X轉60度，再對Y轉30度

$$ {}^A_BR_{X'Y'Z'}(\gamma,\beta,\alpha) = R_{X'}(60)R_{Y'}(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0.433 & 0.5 & -0.75 \\ -0.25 & 0.866 & 0.433 \end{bmatrix} $$

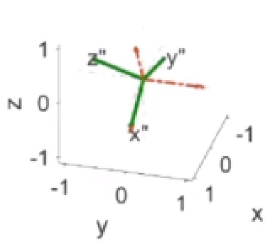
$$ \neq $$

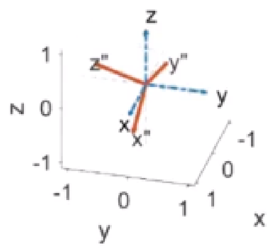


先對Y轉30度，再對X轉60度

$$ {}^A_BR_{X'Y'Z'}(\gamma,\beta,\alpha) = R_{Y'}(30)R_{X'}(60) = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ -0.5 & 0.75 & 0.433 \end{bmatrix} $$

EX2: Euler(Y30,X60) v.s. Fixed(X60,Y30)





Euler Angles:
先對Y轉30度，再對X轉60度

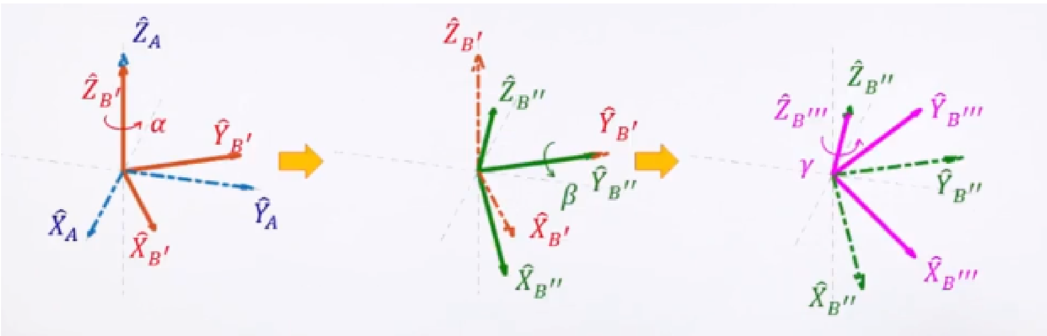
$$
\begin{aligned}
&{}^A_BR_{X'Y'Z'}(\gamma,\beta,\alpha) \\
&= R_{Y'}(30)R_{X'}(60) \\
&= \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ -0.5 & 0.75 & 0.433 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$=$$

Fixed Angles:
先對X轉60度，再對Y轉30度

$$
\begin{aligned}
&{}^A_BR_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) \\
&= R_{Y}(30)R_{X}(60) \\
&= \begin{bmatrix} 0.866 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -0.866 \\ -0.5 & 0.75 & 0.433 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.2 Z-Y-Z Euler Angles - 由angles推算Rotation Matrix



旋转矩阵表达法：先转放前面，后转放后面（反向mapping）

$$ {}^A_BR_{z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = R_{Z'}(\alpha)R_{Y'(\beta)}R_{X'}(\gamma) $$

先转的放「前面」

$$ = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix} $$

If $\beta \neq 0°$

$$ \beta = Atan2(\sqrt{r_{31}{}^2 + r_{32}{}^2}, r_{33}) $$
$$ \alpha = Atan2(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta) $$
$$ \gamma = Atan2(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta) $$

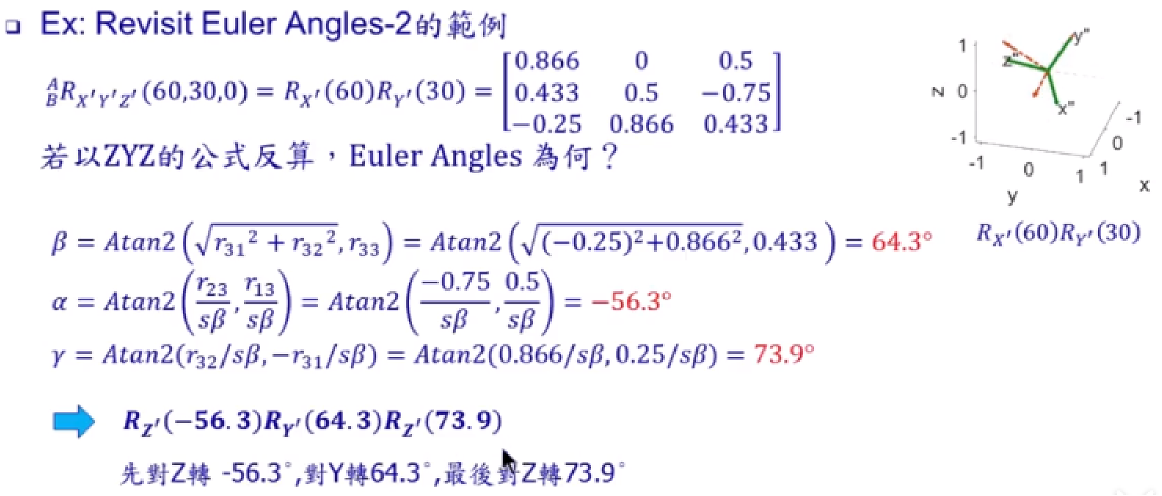
If $\beta = 0°$

$$ \alpha = 0° $$
$$ \gamma = Atan2(-r_{12}, r_{11}) $$

If $\beta = 180°$

$$ \alpha = 0° $$
$$ \gamma = Atan2(r_{12}, -r_{11}) $$

EX: Revisit Euler Angles-2的范例

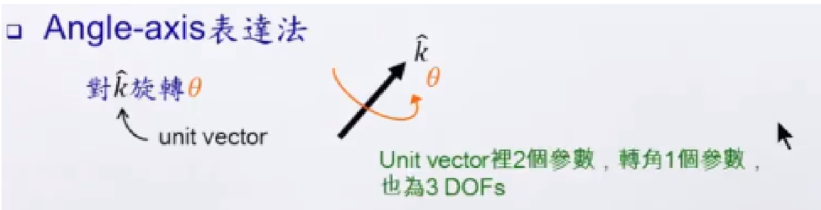


以此ZYZ旋转矩阵转出的状态和之前的状态一样

争取一个特定的R，**有多种的拆解组合**:

- 12种Euler Angles和12种Fixed Angles;
- 存在Duality---共12种对Principal Axes连3次转动的拆解方法;

4. Angle-Axis 表达法



k是单位向量，vector有2个参量，再加上转角，也是3Dofs

5. Quaternion(四元数)表达法

$$q = \epsilon_4 + \epsilon_1\bar{l} + \epsilon_2\bar{j} + \epsilon_3\bar{k} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(k_x\bar{l} + k_y\bar{j} + k_z\bar{k})$$

其中: $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 = 1$

这里，四个参数加一个条件约束，也为3DOFs。