机器人学——学习笔记4(Operators)

1. Operators——对向量（或点）进行移动或转动

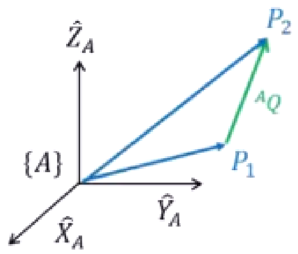
(1) 仅有移动：从P1 -> P2

- ${}^A_BT$除了Mapping之外，也可當Operator，對向量（或點）進行移動或轉動

  - 僅有 移動

    $$ {}^AP_{2\,{}_{3\times1}} = {}^AP_{1\,{}_{3\times1}} + {}^AQ_{\,{}_{3\times1}} $$

    $$ \begin{bmatrix} {}^AP_2 \\ 1 \end{bmatrix} = D(Q)\begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & & {}^AQ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^AP_1 + {}^AQ \\ 1 \end{bmatrix} $$

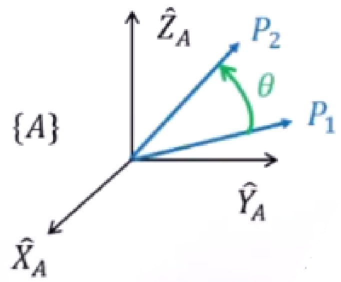


(2) 仅有转动：从P1 -> P2

- 僅有 轉動

  $$ {}^AP_{2\,{}_{3\times1}} = R_{\hat{K}}(\theta)_{{}_{3\times3}}\,{}^AP_{1\,{}_{3\times1}} $$

  $$ \begin{bmatrix} {}^AP_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & R_{\hat{K}}(\theta) & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta)\,{}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} $$

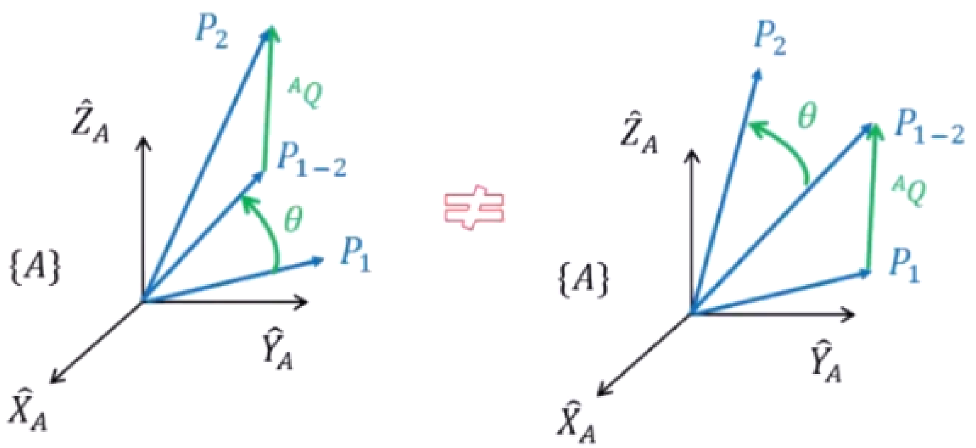


(3) 移动转动复合：P1→P12→P2 **注意，<u>先转动后移动≠先移动后转动</u> 先移后转 移动后的向量也要乘上旋转矩阵。**

- 移動和轉動複合

  $$ {}^AP_{2\,{}_{3\times1}} = R_{\hat{K}}(\theta)_{{}_{3\times3}}\,{}^AP_{1\,{}_{3\times1}} + {}^AQ_{\,{}_{3\times1}} \quad \text{先轉動再移動} $$

  $$ \begin{bmatrix} {}^AP_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta) & & & {}^AQ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta)\,{}^AP_1 + {}^AQ \\ 1 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} {}^AP_1 \\ 1 \end{bmatrix} $$



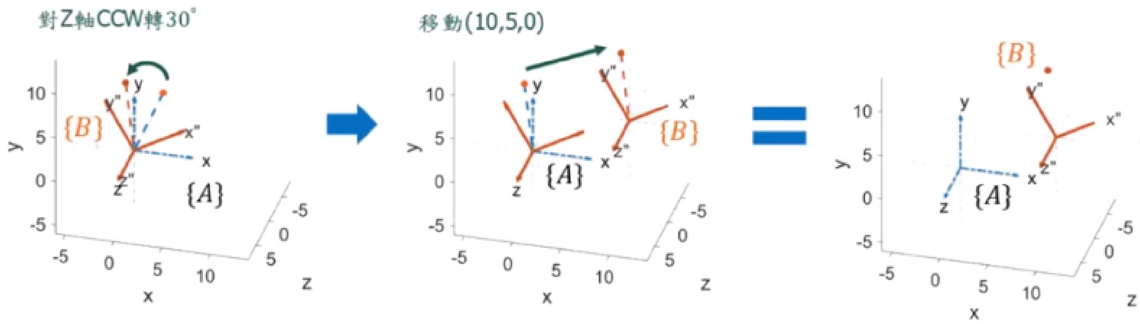
先轉動再移動

先移動再轉動（${}^AQ$也會被轉動到）

$$ {}^AP_2 = R_{\hat{K}}(\theta)({}^AP_1 + {}^AQ) = R_{\hat{K}}(\theta)\,{}^AP_1 + R_{\hat{K}}(\theta)\,{}^AQ $$

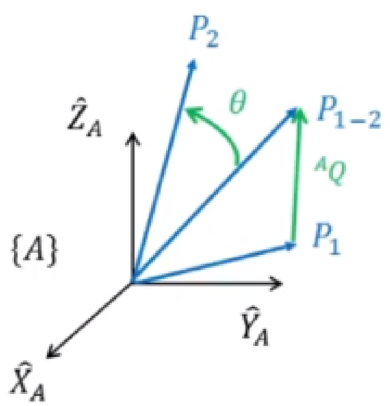
EX : Point $P_1 = [3,7,0]^T$先对Z轴转30°，然后移动$[10,5,0]^T$到P_2，求P_3

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta) & {}^{A}Q \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}P_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ {}^{A}P_2 \\ | \\ 1 \end{bmatrix}$$



<u>注意：</u> Mapping，是把一个vector（point）从一个frame的表达，转动另外一个frame表达；Operator是对一个vector（point）进行一系列旋转平移操作。

- In-video Quiz: 如果要如下圖所示的先移動再轉動，那T應該如何表達？



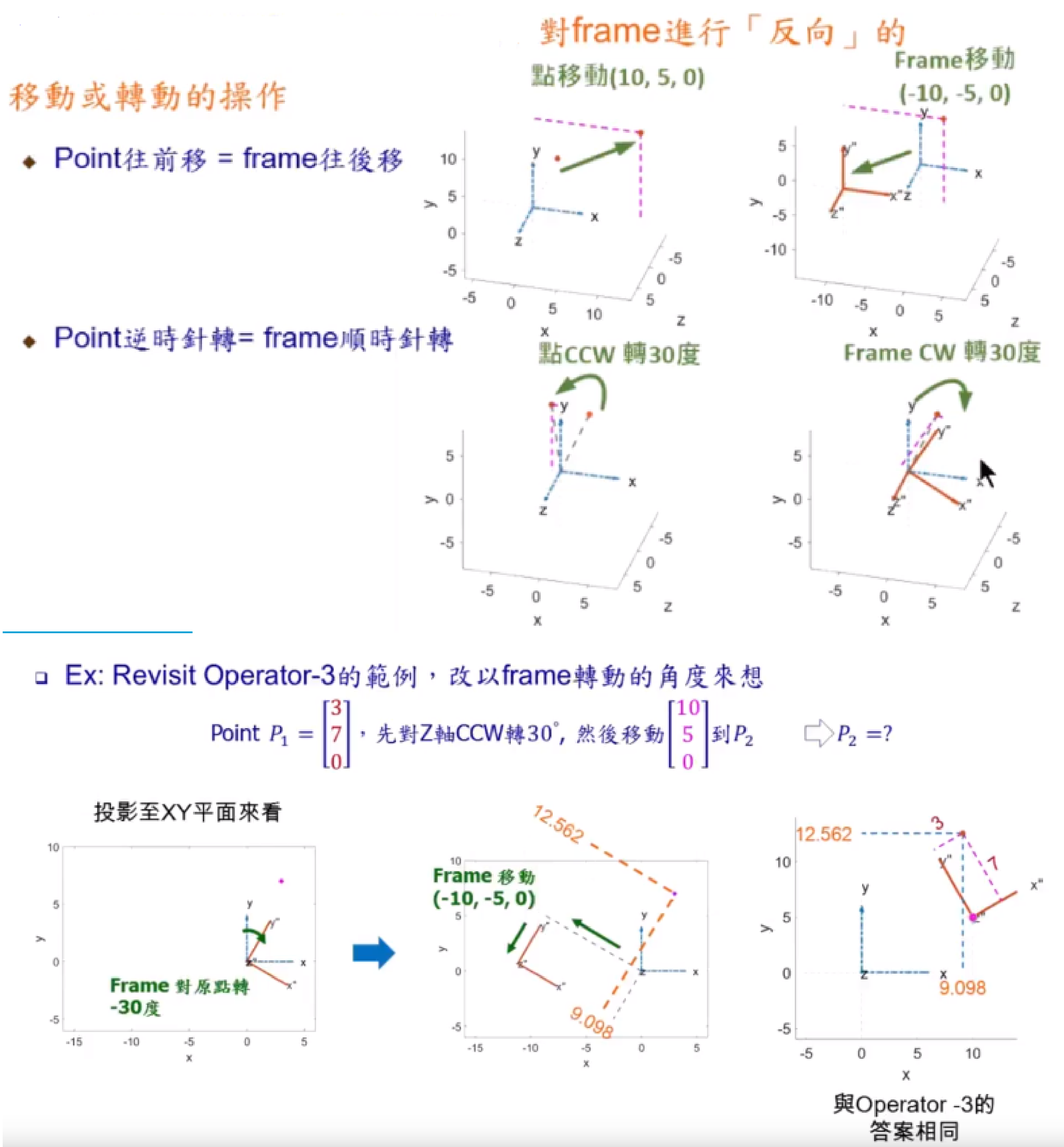
A. $\begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta) & & & {}^{A}Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} & I & & {}^{A}Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & R_{\hat{K}}(\theta) & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} & R_{\hat{K}}(\theta) & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I & & {}^{A}Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

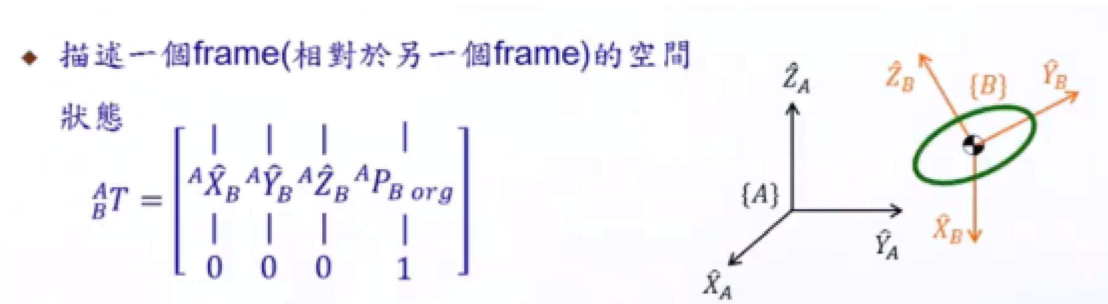
D. $\begin{bmatrix} R_{\hat{K}}(\theta) & & & {}^{A}Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & R_{\hat{K}}(\theta) & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

因为运动是相对的，Transformation Matrix对向量进行移动或转动操作，也可以想象成是<u>对frame进行「反向」的移动或转动的操作</u>。

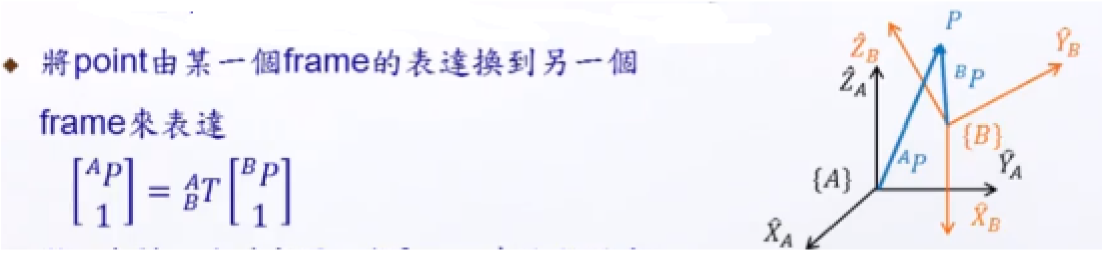


2. Transformation Matrix的三种用法小结

1. 描述**一个frame相对一另一个frame**的空间状态：



2. 将point有某一个frame的表达转到另一个frame表达——**MAPPING!**

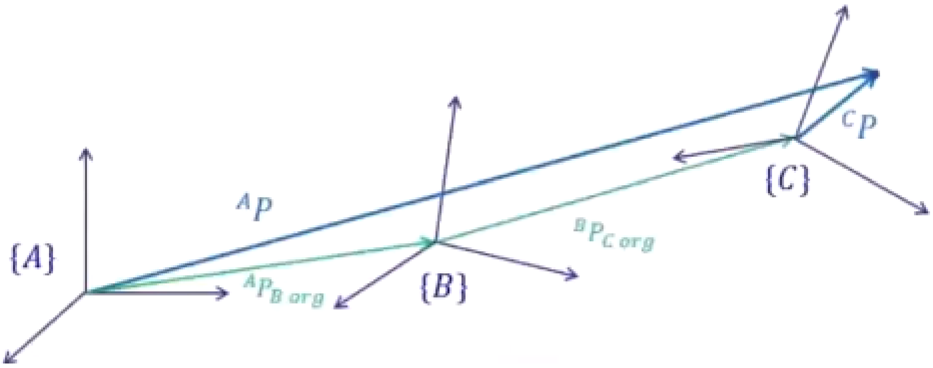


3. 将point(vector) 在同一个frame中进行移动和转动——**OPERATORS!**

3. Transformation 运算法则

3.1 连续运算

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P = {}^{A}_{B}T({}^{B}_{C}T\,{}^{C}P) = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P $$



列成Transformation Matrix的形式：

$$ = \left[\begin{array}{c:c} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{B\,org} \\ \hdashline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} {}^{B}_{C}R & {}^{B}P_{C\,org} \\ \hdashline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] {}^{C}P $$

$$ = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R & {}^{A}P_{B\,org} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{C\,org} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{C}T\,{}^{C}P $$

同理：若还有{D} frame:

$$ {}^{A}P_{B\,org} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{C\,org} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}P_{D\,org} $$

$$ \begin{aligned} {}^{A}P &= {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}_{D}T\,{}^{D}P \\ &= \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R & {}^{A}P_{B\,org} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P_{C\,org} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}P_{D\,org} \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{D}T\,{}^{D}P \end{aligned} $$

越是后面的向量，越要乘上越多的旋转矩阵，最终回到Aframe上

3.2 Transformation Matrix的逆矩阵

复习: 在学习Rotation Matrix的时候，我们发现，R的反矩阵就是其转置。那Transformation Matrix 的逆矩阵应该怎么求呢?

$$\text{逆矩阵} \quad {}^A_BT = \begin{bmatrix} {}^A_BR & {}^AP_{B\,org} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^B_AT = {}^A_BT^{-1} = ?$$

$$\begin{aligned} &{}^A_BT\,{}^B_AT = {}^A_BT\,{}^A_BT^{-1} = I_{4\times4} \\ &\begin{bmatrix} {}^A_BR & {}^AP_{B\ org} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B_AR & {}^BP_{A\ org} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^A_BR\,{}^B_AR & {}^AP_{B\ org} + {}^A_BR\,{}^BP_{A\ org} \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & I_{3\times3} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

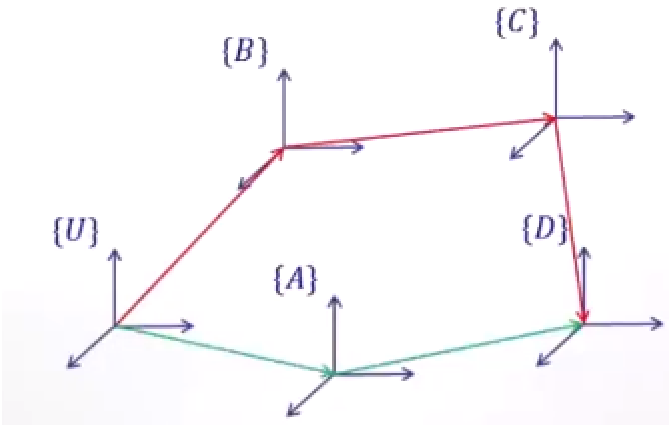
$${}^A_BR\,{}^B_AR = I_{3\times3} \qquad {}^AP_{B\ org} + {}^A_BR\,{}^BP_{A\ org} = 0$$

$$\Rightarrow {}^B_AR = {}^A_BR^T \qquad \Rightarrow {}^BP_{A\,org} = -{}^A_BR^{T\,A}P_{B\,org}$$

$$\Longrightarrow {}^A_BT^{-1} = \begin{bmatrix} {}^A_BR^T & -{}^A_BR^{T\,A}P_{A\,org} \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 连续运算2——求未知的相对关系

任意一个frame未知，都可以利用其它已知的frame的相对关系求出这个未知。



$${}^U_DT = {}^U_AT\,{}^A_DT = {}^U_BT\,{}^B_CT\,{}^C_DT$$

if ${}^C_DT$ unknown

$$= ({}^U_BT\,{}^B_CT)^{-1}\,{}^U_AT\,{}^A_DT$$

$$= {}^B_CT^{-1}\,{}^U_BT^{-1}\,{}^U_AT\,{}^A_DT$$

if ${}^B_CT$ unknown

$$= {}^U_BT^{-1}\,{}^U_AT\,{}^A_DT\,{}^C_DT^{-1}$$

连续运算，就是对矩阵“搬来搬去”的运算，所以前面需要求逆矩阵，有了逆矩阵，所有的运算都很方便了。

3.4 连续运算法则

- Initial condition: **{A}** and **{B}** coincide: (初始A，B两个frame 重合)

$$^A_BT = I_{4\times4}$$

- **{B}** 对 **{A}** 的转轴旋转：用"***Premultiply***"(自左乘)
    - 以operator来想，对某一个向量「以同一坐标为基准」，进行转动或移动的操作

$$\begin{gathered} Ex : B\text{依序经过}T_1, T_2, T_3\text{三次}transformation \\ ^A_BT = T_3T_2T_1I \qquad v' =^A_B Tv = T_3T_2T_1v \end{gathered}$$

- **{B}** 对 **{B}** 的自身转轴旋转：用"***Postmultiply***"(自右乘)
    - 以mapping来想，对某一个向量，从最后一个frame「逐渐转动或移动」来回到第一个frame

$$\begin{gathered} Ex : B\text{依序经过}T_1, T_2, T_3\text{三次}transformation \\ ^A_BT = IT_1T_2T_3 \qquad ^AP =^A_B T^BP = IT_1T_2T_3^BP \end{gathered}$$

- 以**固定的{A}**或**移动的{B}**为基准进行移动转动操作，transformation matrix应用不同的连乘方式。