Centro Universitário Álvares Penteado

Cálculo II

1ª Entrega PI: Aplicação do Polinômio de Taylor na Modelagem de Variáveis Relacionadas ao Website. **Objetivo:** Utilizar o Polinômio de Taylor de ordem 3 para obter uma aproximação matemática da função. O objetivo é demonstrar como a Série de Taylor pode ser usada para previsões, simplificações computacionais ou otimizações no contexto do site.		
Nomes: Bruno Rodrigues da Costa | Ra: 25027986 Enzo Henrique Neves Sena | Ra: 25027727 Harry Zhu | Ra: 25027808 Murilo Ângelo Pimentel Braggio | Ra: 25027958 Vitor Paes Kolle | Ra: 25027590	Curso: Cálculo II Profª Drª Cristina Leite	Turma: CCOMP 2 - Matutino

Objetivo

Escolher uma variável relevante ao tema do website que estão desenvolvendo, definir uma função $f(x)$ que modele esse comportamento e utilizar o Polinômio de Taylor de ordem 3 para obter uma aproximação matemática dessa função. O objetivo é demonstrar como a Série de Taylor pode ser usada para previsões, simplificações computacionais ou otimizações no contexto do site.

Introdução

O Teorema de Taylor é uma ferramenta fundamental da matemática, pois permite aproximar funções complexas por meio de polinômios mais simples. Essa aproximação facilita cálculos e análises em situações onde trabalhar com a função original seria difícil.

Nesta pesquisa, será utilizado o Polinômio de Taylor de grau 3 para representar uma variável associada ao resultado gerado no projeto Lideranças Empáticas, que visa arrecadar alimentos para ajudar pessoas em situações vulneráveis e necessitadas. A função escolhida descreve o **valor total arrecadado** com a quantidade total de doações de alimentos.

Desenvolvimento

Escolha da Variável e Definição da Função

A variável selecionada representa o **valor total arrecadado** por cada grupo junto com a quantidade de doações:

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 - 3x + 5$$

Onde:

- x = quantidade de doações;
- $f(x)$ = valor total arrecadado.

Cálculo do Polinômio de Taylor de Grau 3

O Polinômio de Taylor de grau 3 em torno de um ponto x_0 é dado por:

$$P_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!}$$

Para este estudo, escolhemos $x_0 = 1$ como ponto de expansão, pois queremos analisar o comportamento da função na proximidade da meta de 1 doação por dia de cada grupo.

Derivadas da Função f(x):

1. $f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 3$
2. $f''(x) = -12x^2 + 12x$
3. $f'''(x) = -24x + 12$

Cálculo das Derivadas no Ponto $x_0 = 1$:

- $f(1) = -(1)^4 + 2(1)^3 - 3(1) + 5 = 3$
- $f'(1) = -4(1)^3 + 6(1)^2 - 3 = -1$
- $f''(1) = -12(1)^2 + 12(1) = 0$
- $f'''(1) = -24(1) + 12 = -12$

Substituição no Polinômio de Taylor:

$$P_3(x) = 3 + \frac{-1(x-1)}{1} + \frac{0(x-1)^2}{2} + \frac{-12(x-1)^3}{6}$$

$$P_3(x) = -3 - (\mathrm{x} - 1) - 2(x-1)^3$$

Resultados

Análise na Proximidade de $\boldsymbol{x = 1{,}1}$ doações

Aplicando $x = 1{,}1$ na função original e no Polinômio de Taylor:

1. **Função Original:**

$$f(1{,}1) = -(1{,}1)^4 + 2(1{,}1)^3 - 3(1{,}1) + 5$$

$$f(1{,}1) = -1{,}4641 + 2(1{,}331) - 3{,}3 - 5$$

$$f(1{,}1) = -1{,}4641 + 2{,}662 - 3{,}3 + 5$$

$$f(1{,}1) = 2{,}8979$$

2. **Polinômio de Taylor:**

$$P_{3(x)} = 3 - (x-1) - 2(x-1)^3$$

$$P_{3(1,1)} = 3 - (1{,}1 - 1) - 2(1{,}1 - 1)^3$$

$$P_{3(1,1)} = 3 - (0{,}1) - 2(0{,}1)^3$$

$$P_{3(1,1)} = 3 - 0{,}1 - 2(0{,}001)$$

$$P_{3(1,1)} = 2{,}9 - 0{,}002$$

$$P_{3(1,1)} = 2{,}898$$

Comparação:

- Função original: $f(x) \cong 2{,}8979$
- Polinômio de Taylor: $P_3(1{,}1) \cong 2{,}898$

A aproximação de Taylor é bastante precisa para $x = 1{,}1$.

Gráficos

Gráfico 1: Função Original e Aproximação de Taylor

- **Objetivo:** Comparar a curva da função original $f(x)$ com a curva do seu Polinômio de Taylor de grau 3, $P_3(x)$
- **Observação:** Para valores próximos a $x = 1$, as curvas se sobrepõem quase perfeitamente, indicando alta precisão da aproximação nessa região.

Gráfico 2: Aproximação de Taylor (Gráfico Isolado)

- **Objetivo:** Mostrar a evolução do Polinômio de Taylor em torno de $x = 1$.
- **Interpretação:** O gráfico evidencia que ao polinômio é tangente a função original no ponto $x = 1$.

Conclusão

O Polinômio de Taylor de grau 3 é uma ferramenta essencial para aproximar a função $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 3x + 5$ na proximidade de $x = 1$. A análise em $x = 1{,}1$ doações mostrou que a aproximação é extremamente exata, apresentando um erro mínimo. Isso destaca a importância da Série de Taylor para facilitar cálculos e previsões em situações práticas, como na modelagem de variáveis que afetam estratégias educacionais.

Bibliografia

- https://brasilescola.uol.com.br/
- https://pt.khanacademy.org/

Biblioteca de desenvolvimento

- https://github.com/JuliaDiff/TaylorSeries.jl