PROFESSOR: Cristina Machado Correa Leite
CURSO: Ciência da Computação
DISCIPLINA: Cálculo 2
TURMA: Matutino — DATA: 22/09/2025
ALUNO(A): Guilherme Monteiro Da Silva, João Pedro Da Silva, Raphael De Oliveira Santos, Stefany Samira De Oliveira Cubertino

TÍTULO DA ATIVIDADE: Aplicação do Polinômio de Taylor na Modelagem de Variáveis Relacionadas ao Website

Objetivo:

Aplicar o Polinômio de Taylor de terceira ordem para aproximar a função que modela a **taxa de doações mensais** no site, demonstrando como a Série de Taylor pode auxiliar na previsão do comportamento das doações em meses subsequentes a um ponto de referência.

Função escolhida:

$$f(x) = \frac{1}{20}x^3 - 0,7x^2 + 2x + 20$$

A variável selecionada representa a taxa de doações por mês em nosso site. A função que modela essa taxa durante um período de 12 meses.

Onde:

- $x = Tempo\ em\ meses\ (0 \leq x \leq 12)$
- $f(x) = Taxa\ de\ doações$

Cálculo do Polinômio de Taylor de Grau 3:

O Polinômio de Taylor de ordem 3 de uma função f em torno de x_0 é, por definição,

$$P_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}$$

Para esta análise, o ponto de expansão escolhido é x0=8, pois o objetivo é investigar o comportamento da função nas proximidades de 8,5 meses.

Derivadas da função:

Primeira Derivada: $f'(x) = \frac{3}{20}x^2 - 1,4x + 2$

Segunda Derivada: $f''(x) = \frac{3}{10}x - 1,4$

Terceira derivada: $f'''(x) = \frac{3}{10}$

Cálculo das Derivadas no Ponto $x_0 = 8$:

- $f(8) = \frac{1}{20}(8)^3 - 0,7(8)^2 + 2(8) + 20$

  $f(8) = 25,6 - 44,8 + 16 + 20$

  $f(8) = 16,8$

- $f'(8) = \frac{3}{20}(8)^2 - 1,4(8) + 2$

  $f'(8) = 9,6 - 11,2 + 2$

  $f'(8) = 0,4$

- $f''(8) = \frac{3}{10}(8) - 1,4$

  $f''(8) = 2,4 - 1,4$

  $f''(8) = 1$

- $f'''(8) = \frac{3}{10}$

  $f'''(8) = 0,3$

Substituição na Fórmula do Polinômio de Taylor:

$$P_3(x) = 16,8 + \frac{0,4(x-8)}{1!} + \frac{1(x-8)^2}{2!} + \frac{0,3(x-8)^3}{3!}$$

Após a simplificação dos fatoriais e coeficientes, o polinômio resultante é:

$$P_3(x) = 16,8 + 0,4(x - 8) + 0,5(x - 8)^2 + 0,05(x - 8)^3$$

Resultados:

Análise na Proximidade de $x = 8,5$ Meses

Para avaliar a precisão da aproximação, calculamos os valores para x=8.5 tanto na função original quanto no Polinômio de Taylor.

1. Valor na Função Original:

$$f(8,5) = \frac{1}{20}(8,5)^3 - 0,7(8,5)^2 + 2(8,5) + 20$$
$$f(8,5) = \frac{1}{20} \times (\frac{17}{2})^3 - \frac{7}{10} \times (\frac{17}{2})^2 + 17 + 20$$
$$f(8,5) = \frac{1}{20} \times \frac{4913}{8} - \frac{7}{10} \times \frac{289}{4} + 17 + 20$$
$$f(8,5) = \frac{4913}{160} - \frac{2023}{40} + 17 + 20$$
$$f(8,5) = -\frac{3179}{160} + 37$$
$$f(8,5) = \frac{2741}{160}$$
$$f(8,5) = 17,13125$$

2. Valor no Polinômio de Taylor:

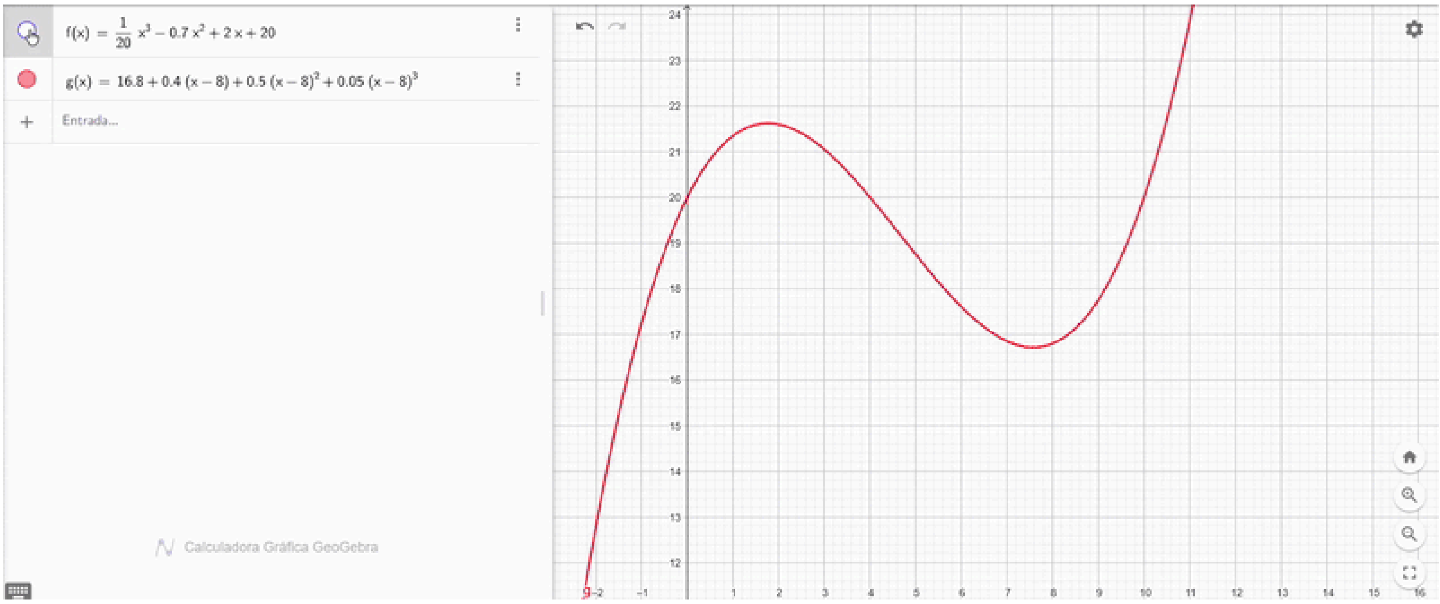
$$P_3(8,5) = 16,8 + 0,4(8,5 - 8) + 0,5(8,5 - 8)^2 + 0,05(8,5 - 8)^3$$
$$P_3(8,5) = 16,8 + 0,4 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5^2 + 0,05 \times 0,5^3$$
$$P_3(8,5) = 16,8 + 0,2 + 0,5^3 + 0,05 \times 0,5^3$$
$$P_3(8,5) = 17 + 1,05 \times 0,5^3$$
$$P_3(8,5) = 17 + \frac{21}{20} \times \frac{1}{8}$$
$$P_3(8,5) = 17 + \frac{21}{160}$$
$$P_3(8,5) = \frac{2741}{160}$$
$$P_3(8,5) = 17,13125$$

Comparação:

- Função Original: $f(8,5) = 17,13125$
- Polinômio de Taylor: $P_3(8,5) = 17,13125$

A aproximação gerada pelo Polinômio de Taylor para $x = 8,5$ é extremamente precisa. Para este ponto específico, o valor calculado pelo polinômio é numericamente idêntico ao da função original, o que demonstra a alta fidelidade da aproximação para valores próximos ao centro da expansão.

Gráficos:



Como pode ser visto no gráfico, para valores próximos ao ponto de expansão x=8, as curvas da função original e do polinômio de Taylor se sobrepõem perfeitamente. Isso reforça visualmente a alta precisão da aproximação nesse intervalo.

Conclusão

O Polinômio de Taylor de grau 3 provou ser uma ferramenta muito eficiente para aproximar a função de taxa de doações na vizinhança de $x = 8$. A análise no ponto $x = 8,5$ e a sobreposição visual no gráfico confirmam que a aproximação é altamente precisa, com um erro insignificante.

Isso evidencia a utilidade da Série de Taylor para realizar previsões de curto prazo e simplificações computacionais em cenários práticos, como a modelagem da dinâmica de doações em um website.

Bibliografia:

https://www.geogebra.org