

Projeto de Análise de Máximos e Mínimos: Função Cúbica

$$f(x) = x^3 - 3x + 13$$

1. Objetivo

O objetivo deste projeto é aplicar os conceitos de cálculo diferencial para realizar uma análise completa da função polinomial de terceiro grau $f(x) = x^3 - 3x + 13$. Especificamente, o trabalho visa:

- Determinar os pontos críticos (máximos e mínimos locais) da função, onde x representa o número de participantes do grupo e $f(x)$ representa o número de doações arrecadadas.
- Utilizar a segunda derivada para classificar a natureza desses pontos.
- Identificar o ponto de inflexão e os intervalos de concavidade da função.

2. Introdução

A análise de máximos, mínimos e pontos de inflexão é fundamental para a compreensão do comportamento de uma função. Os pontos críticos, onde a taxa de variação é nula, indicam valores extremos. O ponto de inflexão, por sua vez, marca a transição na concavidade da curva, representando uma mudança na taxa de crescimento ou decrescimento da função.

Para funções polinomiais, como $f(x) = x^3 - 3x + 13$, este processo é sistemático e envolve o cálculo da primeira e da segunda derivada.

3. Desenvolvimento: Análise Matemática

3.1. Primeiro Passo: Cálculo das Derivadas

A função principal é dada por: $f(x) = x^3 - 3x + 13$

Primeira Derivada ($f'(x)$): A primeira derivada é utilizada para encontrar os pontos críticos, onde a inclinação da reta tangente é zero. $f'(x) = 3x^2 - 3$

Segunda Derivada ($f''(x)$): A segunda derivada é utilizada para determinar a concavidade e os pontos de inflexão. $f''(x) = 6x$

3.2. Segundo Passo: Determinação dos Pontos Críticos (Máximos e Mínimos)

Os pontos críticos são encontrados resolvendo a equação $f'(x) = 0$: $3x^2 - 3 = 0$ $3x^2 = 3$ $x^2 = 1$ $x = \pm 1$

Os pontos críticos são $x = -1$ e $x = 1$.

3.3. Terceiro Passo: Determinação do Ponto de Inflexão

O ponto de inflexão ocorre onde a concavidade muda, o que é determinado por $f''(x) = 0$: $6x = 0$ $x = 0$

O ponto de inflexão ocorre em $x = 0$.

4. Análise e Confirmação dos Pontos

4.1. Classificação dos Pontos Críticos (Teste da Segunda Derivada)

O Teste da Segunda Derivada utiliza o sinal de $f''(x)$ nos pontos críticos para classificá-los:

- Se $f''(c) < 0$, o ponto c é um **Máximo Local**.

- Se $f''(c) > 0$, o ponto c é um **Mínimo Local**.

Ponto Crítico (x)	$f''(x) = 6x$	Sinal	Classificação	Valor de $y = f(x)$	Coordenada
-1	$f''(-1) = -6$	Negativo	Máximo Local	$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 13 = 15$	(-1, 15)
1	$f''(1) = 6$	Positivo	Mínimo Local	$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 13 = 11$	(1, 11)

4.2. Ponto de Inflexão

O ponto de inflexão ocorre em $x = 0$. O valor de y na função original é: $f(0) = 0^3 - 3(0) + 13 = 13$

O Ponto de Inflexão é (0, 13).

4.3. Intervalos de Concavidade

A concavidade é determinada pelo sinal de $f''(x) = 6x$:

- **Concavidade para Baixo** (Curva com “boca” para baixo): $f''(x) < 0 \Rightarrow 6x < 0 \Rightarrow x < 0$.
- **Concavidade para Cima** (Curva com “boca” para cima): $f''(x) > 0 \Rightarrow 6x > 0 \Rightarrow x > 0$.

5. Construção do Gráfico

O gráfico a seguir ilustra a função $f(x) = x^3 - 3x + 13$ e destaca os pontos de análise encontrados.

Gráfico da Segunda Derivada

A segunda derivada, $f''(x) = 6x$, é utilizada para determinar a concavidade e o ponto de inflexão.

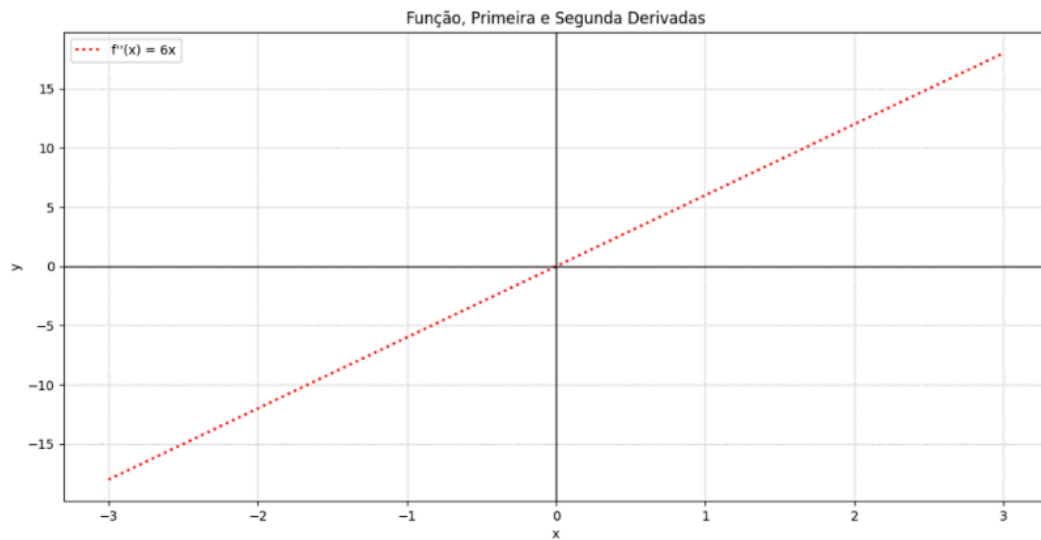


Gráfico da Primeira Derivada

A primeira derivada, $f'(x) = 3x^2 - 3$, é crucial para identificar os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento da função original.

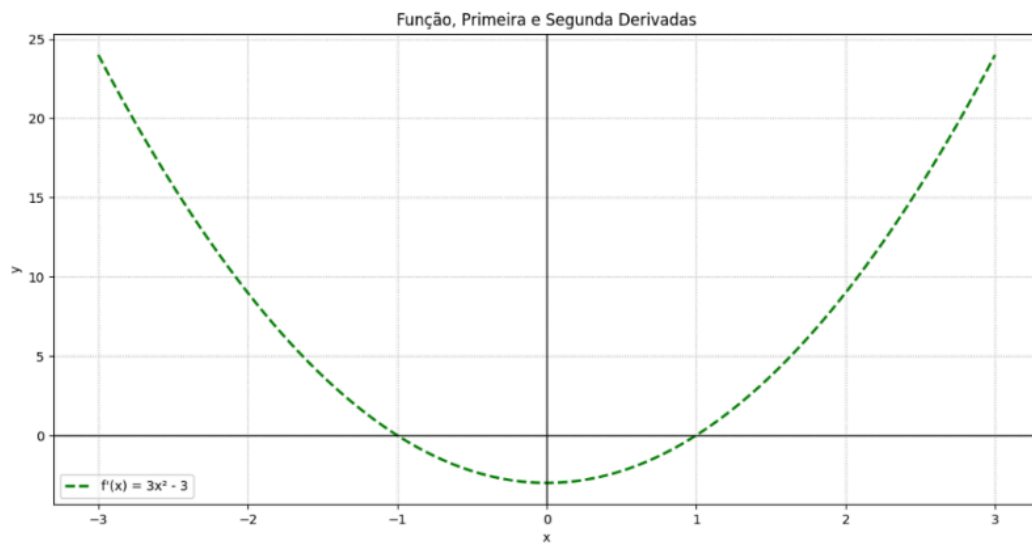
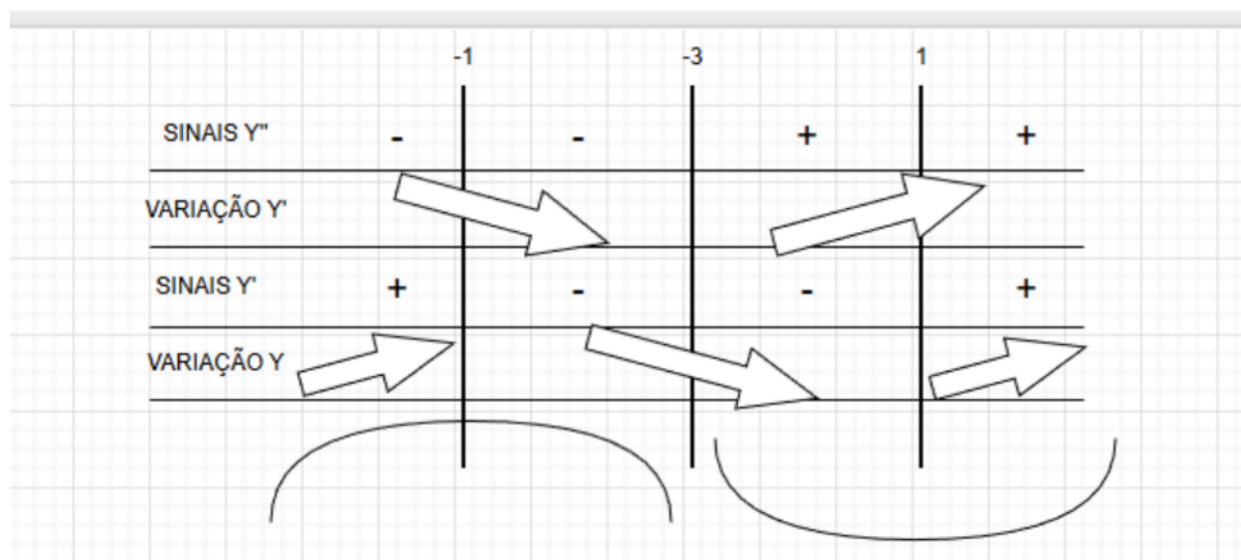


Tabela de Análise de Sinais



6. Interpretação de Resultados

A análise matemática e a visualização gráfica confirmam o comportamento da função cúbica. No contexto de x como número de participantes e $f(x)$ como número de doações arrecadadas:

- **Máximo Local em $(-1, 15)$:** A função atinge seu pico local neste ponto. Para valores de $x < -1$, a função é crescente, e para $-1 < x < 1$, ela é decrescente.
- **Mínimo Local em $(1, 11)$:** A função atinge seu vale local neste ponto. Para $x > 1$, a função volta a ser crescente.
- **Ponto de Inflexão em $(0, 13)$:** Este ponto é o centro de simetria da curva e marca onde a taxa de crescimento muda de decrescente (concavidade para baixo, $x < 0$) para crescente (concavidade para cima, $x > 0$).

Comportamento Global: Por ser um polinômio de grau ímpar com coeficiente líder positivo, a função tende a $-\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$ e a $+\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$.

A tabela a seguir resume os principais achados:

Ponto de Análise	Coordenada (x, y)	Significado
Máximo Local	(-1, 15)	Valor máximo de doações (15) com -1 participantes (considerando a interpretação matemática, mas que pode não ter sentido prático)
Mínimo Local	(1, 11)	Valor mínimo de doações (11) com 1 participante
Ponto de Inflexão	(0, 13)	Mudança na taxa de crescimento das doações com 0 participantes

Este estudo demonstra a aplicação eficaz do cálculo diferencial para modelar e prever o comportamento de fenômenos descritos por funções polinomiais, aplicando-o ao contexto de **participantes e doações**.