1ª Entrega: Cálculo II

Aplicação do Polinômio de Taylor na Modelagem de Variáveis Relacionadas ao Website.

OBJETIVO: Os alunos devem escolher uma variável relevante ao tema do website que estão desenvolvendo, definir uma função $f(x)$ que modele esse comportamento e utilizar o Polinômio de Taylor de ordem 3 para obter uma aproximação matemática dessa função.

INTRODUÇÃO

O teorema de Taylor é um resultado fundamental do cálculo que permite aproximar funções complexas por meio de polinômios. A ideia central é que, em torno de um ponto, uma função diferenciável pode ser representada por uma soma envolvendo suas derivadas avaliadas nesse ponto. Quanto mais os termos da expansão são considerados, mais precisa se torna a aproximação dentro de uma vizinhança adequada. Esse teorema é amplamente utilizado em análises matemáticas, cálculos numéricos e aplicações em física e engenharia, pois transforma funções difíceis de manipular em expressões polinomiais mais simples.

DESENVOLVIMENTO

Escolha da Variável e Definição da Função

A variável escolhida é o **número de participantes (x), pelo número de doações executadas.** A função que modela este comportamento é:

$$\mathcal{F}(x) = x^3 - 3x + 13$$

- x = Número de participantes
- $\mathcal{F}(x)$ = Número de doações

Cálculo do Polinômio de Taylor de Grau 3
O Polinômio de Taylor de grau 3 em torno de um ponto XoXo é dado por:

$P3(x)= f(a) + f'(a)(x-a) + 2!f''(a)(x-a)^2 + 3!f'''(3)(a)(x-a)^3$

Para este estudo, escolhemos 6, como Xo, pois estamos interessados em analisar o comportamento da função na proximidade de 6,1 participantes

DERIVADAS DA FUNÇÃO $\mathcal{F}(x)$:

$f'(x) = 3x^2 - 3$
$f''(x) = 6x$
$f'''(x) = 6$

CÁLCULO DAS DERIVADAS NO PONTO Xo = 6:

$f(x) = 6^3 - 3(6) + 13 = 211$

$f'(6) = 3(6)^2 - 3 = 105$
$f''(6) = 6(6) = 36$
$f'''(6) = 6 = 6$

SUBSTITUIÇÃO NO POLINÔMIO DE TAYLOR:

$f(6) = 185 + 105\ (x - 6) + 36/2\ (x-6)^2 + 6/6\ (x-6)^3$

RESULTADOS
Aplicando x = 6, na função original e no Polinômio de Taylor:

1. **Função Original:**

$f(6{,}1) = (6{,}1)^3 - 3(6{,}1) + 13$
$f(6{,}1) = 226{,}981 - 18{,}3 + 13$
$f(6{,}1) = 221{,}681$

2. **Polinômio de Taylor:**

$P_3(x) = 211 + 105(x - 6) + 18\ (x-6)^2\ (x-6)^3$
$P_3(x) = 211 + 105(6{,}1 - 6) + 18\ (6{,}1 - 6)^2\ (6{,}1 - 6)^3$
$P_3(x) = 211 + 640{,}5 - 630\ (109{,}8 - 108)^2\ (0{,}1)^3$
$P_3(x) = 211 + 10{,}5 + 3{,}24 . 0{,}001$
$P_3(x) = 211 + 10{,}5 + 0{,}00324$
$P_3(x) \approx 221{,}50324$

COMPARAÇÃO:

Função original: $f(6{,}1) \approx 221{,}681$

Polinômio de Taylor: $P_3\ (6{,}1) \approx 221{,}50324$

Gráficos

Gráfico 1: Função Original e Aproximação de Taylor

• **Objetivo**: Comparar a curva da função original f(x)f(x) com a curva do Polinômio de Taylor P!(x).

Observação: Para valores próximos a x = 6, as curvas se sobrepõem, indicando alta precisão da aproximação.

Gráfico 2: Aproximação de Taylor (Gráfico Isolado)

• **Objetivo:** Mostrar a evolução do Polinômio de Taylor em torno de x = 6.

• **Interpretação:** O gráfico evidencia que a aproximação é quase linear em curtos intervalos, reforçando sua precisão para valores próximos a x = 6.

Conclusão:

O Polinômio de Taylor de grau 3 mostrou-se uma ferramenta eficaz para aproximar a função $\mathcal{F}(x) = x^3 - 3x + 13$ na proximidade de x = 6. A análise em x = 6,1 anos demonstrou que a aproximação é altamente precisa, com um erro mínimo. Isso reforça a utilidade da Série de Taylor para simplificações computacionais e previsões em contextos práticos, como a modelagem de variáveis relacionadas ao impacto de estratégias educacionais.