Entrega Cálculo II – Análise de Crescimento e Concavidade

Objetivo

Utilizar derivadas para analisar o comportamento dos acessos a um site ao longo do tempo. A função escolhida representa a quantidade de acessos em diferentes horários do dia. Através da primeira e segunda derivada, será possível entender como os acessos variam e se aceleram e otimizando o gerenciamento do sistema e o planejamento de projeto.

---

1. Definição da Função

Para representar o comportamento de acessos ao site, foi definida a seguinte função:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 6x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 12$$

Nessa função:

- O x representa o tempo (em horas);
- f(x) representa a quantidade de acessos ao site naquele instante.

Essa função simula o comportamento dos acessos ao site durante o dia, considerando um crescimento constante e progressivo. O termo $\frac{x^3}{3}$ representa um aumento gradual que se intensifica com o tempo, indicando que os acessos começam de forma moderada e vão acelerando ao longo do dia. O termo $6x$ reforça esse crescimento linear, sugerindo que há uma base constante de usuários acessando o site. Já os termos constantes $\frac{25}{4}$ que é o ($\left(\frac{5}{2}\right)^2$) e o 12 representam fatores fixos, como campanhas de arrecadações e eventos programados, que mantêm o número de acessos elevado desde o início.

Cálculo da Derivada e Identificação dos Pontos

A **primeira derivada** da função indica a taxa de variação dos acessos:

- Derivar serve para descobrir como a função (os horários de acesso) está variando, ou seja, ela está crescendo(positivo), parando (igual a 0) ou diminuindo (negativo).

Sabemos que:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 6x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 12$$

Passo 1: Simplificar os termos constantes

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Somando com 12:

$$\frac{25}{4} + 12 = \frac{25}{4} + \frac{48}{4} = \frac{73}{4}$$

Então a função fica:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 6x + \frac{73}{4}$$

Passo 2: Derivar termo a termo

Usamos a regra da potência:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n.x^{n-1}$$

- Derivada de $\frac{x^3}{3}$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}.3x^2 = x^2$$

- Derivada de *6x*:

$$\frac{d}{dx}(6x) = 6$$

Resultado da primeira derivada:

$$f'(x) = x^2 + 6$$

Igualar a derivada a zero

Para encontrar pontos críticos (máximos ou mínimos), igualamos a derivada a zero e fazer Bhaskara:

$$x^2 + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

a=1

b=0

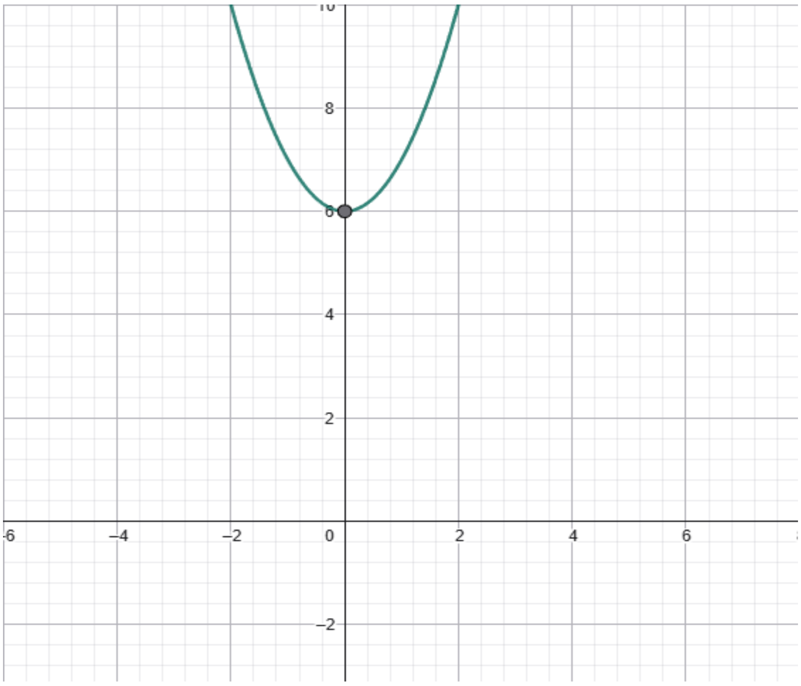
c=6

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = \ 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -24$$

$$f'(x) = x^2 + 6$$

A aplicação da fórmula de Bhaskara na derivada resulta em uma raiz negativa (Δ=−24\Delta = -24). Isso confirma que a função está sempre crescendo e não possui máximos ou mínimos locais.

Análise no gráfico da primeira derivada ($f'(x)$= x²+6):



- Na função $f'(x) = x^2 + 6$, a parábola é sempre positiva pois o termo constante 6 representa o ponto onde ela cruza o eixo y e indica a quantidade de acessos o (eixo y) está sempre aumentando conforme o tempo (eixo x) passa. Como a equação não possui raízes reais, a curva não cruza o eixo x, ou seja, não há momento em que os acessos parem ou diminuam.

- Isso significa que os acessos ao site **aumentam continuamente** ao longo do tempo.

Análise da Segunda Derivada

A segunda derivada da função é usada para identificar os pontos de mínimo e máximo locais, ou seja, os momentos de menor e maior número de acessos ao site ao longo do dia.

A função original é:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 6x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 12$$

A primeira derivada, que mostra a taxa de variação dos acessos, é:

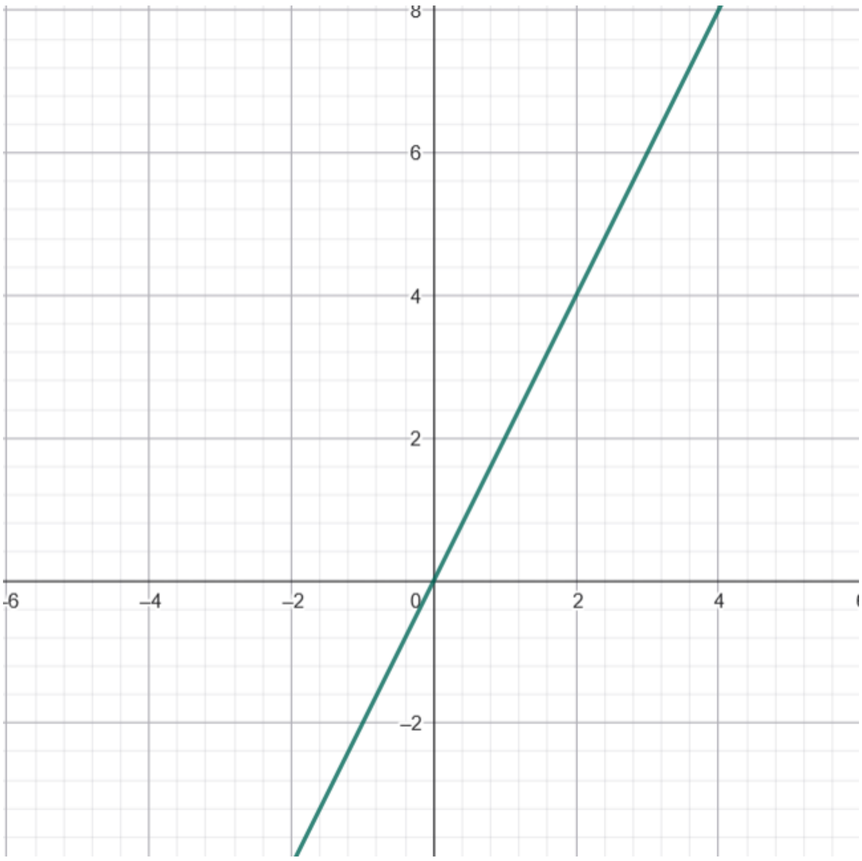
$$f'(x) = x^2 + 6$$

A segunda derivada, que revela a reta da função, é:

$$f''(x) = 2x$$

A segunda derivada $f''(x) = 2x$ tem apenas uma incógnita, o x, e por ser uma função linear, seu gráfico é uma reta. Como não há termo constante, ela não cruza o eixo y diretamente apenas se estende infinitamente com inclinação constante. Isso mostra que a reta dos acessos ao site cresce de forma contínua, sem quedas ou picos, indicando um aumento constante na velocidade de crescimento dos acessos ao longo do tempo.

Representação graficamente da segunda derivada ($f''(x)$= 2x)



• Eixo x: Representa o tempo (horas), indicando o avanço do dia e os momentos em que os acessos ao site são analisados.

• Eixo y: Representa o valor da segunda derivada $f''(x) = 2x$, que forma uma reta inclinada. Como a função tem apenas uma incógnita e não possui termo constante, a reta não cruza o eixo y e se estende infinitamente. Isso mostra que a reta da função cresce de forma constante, indicando que os acessos ao site aumentam continuamente, sem quedas ou picos.

Análise dos valores da segunda derivada

A análise das derivadas de uma função é essencial para entender o comportamento dos acessos ao site ao longo do tempo.

A primeira derivada $f'(x) = x^2 + 6$ mostra que os acessos ao site estão sempre crescendo, já que seu valor é sempre positivo.

A segunda derivada $f''(x) = 2x$ é uma função linear, com inclinação constante, e indica como essa taxa de crescimento muda ao longo do tempo.

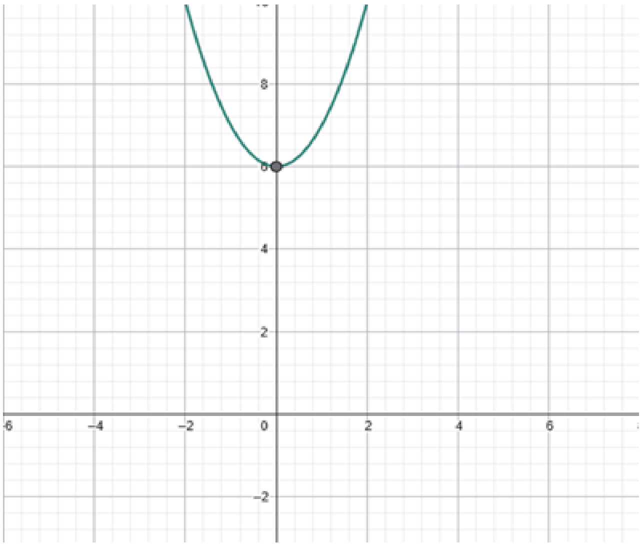
Quando $f''(x) > 0$, a função é côncava para cima e os acessos estão acelerando.

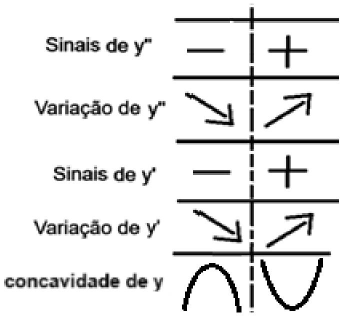
Quando $f''(x) < 0$, a função é côncava para baixo e os acessos ainda crescem, mas de forma mais lenta.

Por exemplo, em $x = 2$, temos $f''(2) = 4$, indicando crescimento acelerado. Já em $x = -2$, $f''(-2) = -4$, indicando crescimento mais lento.

Análise da Tabela de Variação e Concavidade

Ao observar o gráfico que representa os acessos ao site ao longo do dia, podemos compreender melhor seu comportamento por meio da tabela de sinais e variações. Essa tabela organiza as informações sobre a função e suas derivadas, permitindo uma análise mais precisa dos momentos de crescimento e de queda dos acessos.





Sinais da Segunda Derivada $f''(x) = 2x$

Essa linha mostra os **sinais da reta** da função.

- Quando $f''(x) > 0$(à direita do eixo), a função é **crescente**, indicando que os acessos ao site estão crescendo com **aceleração** em reta constante.
- Quando $f''(x) < 0$(à esquerda do eixo), a função é **decrescente**, indicando que os acessos ainda crescem, mas de forma **desacelerada**.

Variação da Segunda Derivada

Como $f''(x) = 2x$, a reta cresce continuamente com o tempo.

- Antes do ponto de inflexão $x < 0$, os valores de $f''(x)$ são negativos e **aumentam** em direção ao zero.
- Após o ponto de inflexão ($x > 0$) os valores são positivos e continuam **aumentando**, intensificando a aceleração. Essa variação mostra **como a reta muda**, revelando a intensidade do crescimento dos acessos.

Sinais da Primeira Derivada $f'(x) = x^2 + 6$

Essa linha mostra se os acessos ao site estão **aumentando ou diminuindo**.

- Como $x^2 + 6 > 0$ para todo x, a função está **sempre crescente**.
- Não existe ponto onde $f'(x) = 0$, então **não há pico ou queda** os acessos **nunca diminuem**.
- A curva da função está sempre subindo, mas a **velocidade** dessa subida muda conforme a concavidade.

Variação da Primeira Derivada

A primeira derivada $f'(x) = x^2 + 6$ tem um **mínimo em** $x = 0$, onde o valor é 6.

- Antes de $x = 0$, a taxa de crescimento **diminui** (mas continua positiva).
- Após $x = 0$, a taxa de crescimento **aumenta**. Isso mostra que os acessos ao site estão **sempre subindo**, mas com **ritmo variável** primeiro mais lento, depois acelerado.

Esboço da Concavidade

A curva da função é voltada para cima em todo o domínio, já que a concavidade é positiva para $x > 0$ e negativa para $x < 0$.

- Antes do ponto de inflexão, a curva é **mais suave**, com crescimento desacelerado.
- Após o ponto de inflexão, a curva **se inclina mais**, com crescimento acelerado. Esse esboço ajuda a visualizar que os acessos ao site **nunca caem**, mas mudam de ritmo ao longo do tempo.

Conclusão

A análise das derivadas mostrou que os acessos ao site estão sempre crescendo, com ritmo variável. A primeira derivada indica crescimento contínuo, e a segunda revela aceleração após o ponto de inflexão. Esses dados ajudam a prever os melhores horários e otimizar o uso da plataforma.