

# Entrega Cálculo II – Análise de Crescimento e Concavidade

## Objetivo

Utilizar derivadas para analisar o comportamento dos acessos a um site ao longo do tempo. A função escolhida representa a quantidade de acessos em diferentes horários do dia. Através da primeira e segunda derivada, será possível entender como os acessos variam e se aceleram e otimizando o gerenciamento do sistema e o planejamento de projeto.

---

## 1. Definição da Função

Para representar o comportamento de acessos ao site, foi definida a seguinte função:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 6x + \frac{73}{4}$$

Nessa função:

- O  $x$  representa o tempo (em horas);
- $f(x)$  representa a quantidade de acessos ao site naquele instante.

Essa função simula o comportamento dos acessos ao site durante o dia, considerando um crescimento constante e progressivo. O termo  $\frac{x^3}{3}$  representa um aumento gradual que se intensifica com o tempo, indicando que os acessos começam de forma moderada e vão acelerando ao longo do dia. O termo  $6x$  reforça esse crescimento linear, sugerindo que há uma base constante de usuários acessando o site. Já os termos constantes  $\frac{73}{4}$  representa fatores fixos, como campanhas de arrecadações e eventos programados, que mantêm o número de acessos elevado desde o início.

---

## Cálculo da Derivada e Identificação dos Pontos

A **primeira derivada** da função indica a taxa de variação dos acessos:

- Derivar serve para descobrir como a função (os horários de acesso) está variando, ou seja, ela está crescendo(positivo), parando (igual a 0) ou diminuindo (negativo).

Sabemos que:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 6x + \frac{73}{4}$$

## Derivar termo a termo

Usamos a regra da potência:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

- Derivada de  $\frac{x^3}{3}$ :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

- Derivada de  $6x$ :

$$\frac{d}{dx}(6x) = 6$$

- Derivada de  $\frac{73}{4}$ :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{73}{4}\right) = 0 \text{ (pois o número sem incógnita é uma constante então vai ficar 0).}$$

Resultado:

$$f'(x) = x^2 + 6$$

## Igualar a derivada a zero

Para encontrar pontos críticos (máximos ou mínimos), igualamos a derivada a zero e fazer Bhaskara:

$$x^2 + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$a=1$$

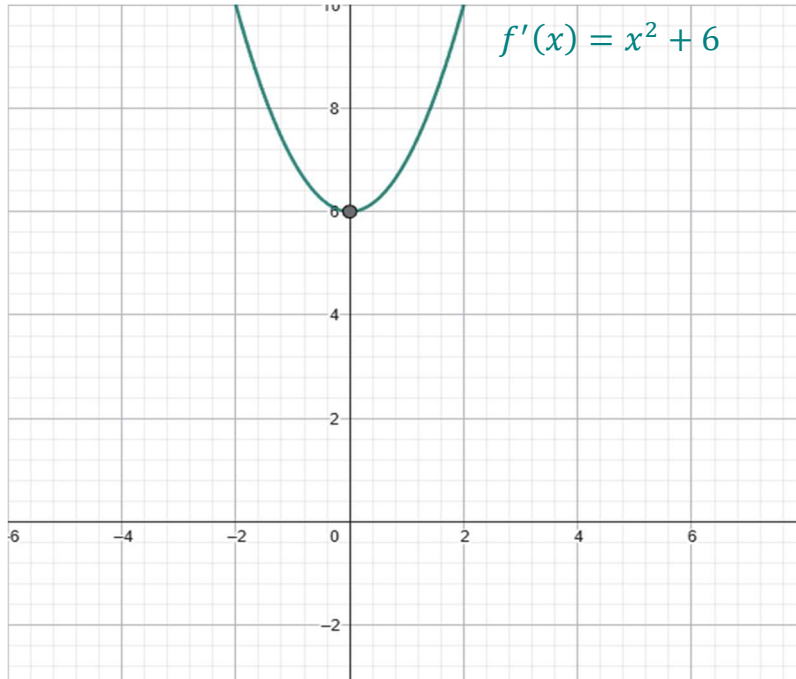
$$b=0$$

$$c=6$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -24$$

A aplicação da fórmula de Bhaskara na derivada resulta em uma raiz negativa ( $\Delta = -24$ ). Isso confirma que a função está sempre crescendo e não possui máximos ou mínimos locais.

### Análise no gráfico da primeira derivada ( $f'(x) = x^2 + 6$ ):



- Na função  $f'(x) = x^2 + 6$ , a parábola é sempre positiva pois o termo constante 6 representa o ponto onde ela cruza o eixo y e indica a quantidade de acessos o (eixo y) está sempre aumentando conforme o tempo (eixo x) passa. Como a equação não possui raízes reais, a curva não cruza o eixo x, ou seja, não há momento em que os acessos parem ou diminuam.
- Isso significa que os acessos ao site **umentam continuamente** ao longo do tempo.

---

### Análise da Segunda Derivada

A segunda derivada da função é usada para identificar os pontos de mínimo e máximo locais, ou seja, os momentos de menor e maior número de acessos ao site ao longo do dia.

A função original é:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 6x + \frac{73}{4}$$

A primeira derivada, que mostra a taxa de variação dos acessos, é:

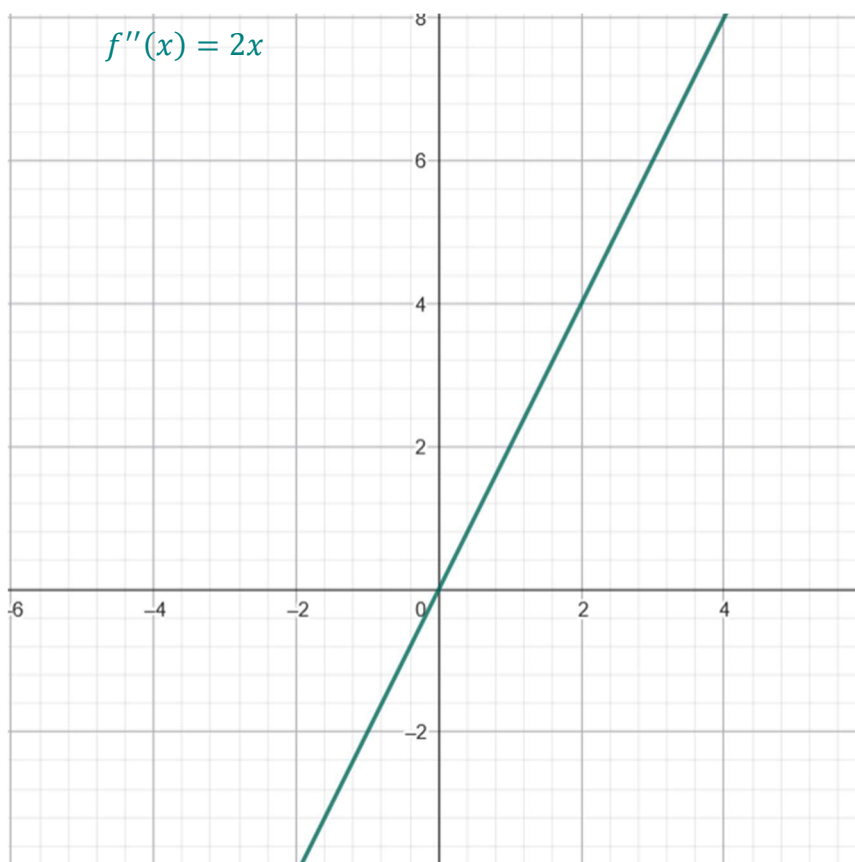
$$f'(x) = x^2 + 6$$

A segunda derivada, que revela a reta da função, é:

$$f''(x) = 2x$$

A segunda derivada  $f''(x) = 2x$  tem apenas uma incógnita, o  $x$ , e por ser uma função linear, seu gráfico é uma reta. Como não há termo constante, ela não cruza o eixo  $y$  diretamente apenas se estende infinitamente com inclinação constante. Isso mostra que a reta dos acessos ao site cresce de forma contínua, sem quedas ou picos, indicando um aumento constante na velocidade de crescimento dos acessos ao longo do tempo.

### Representação graficamente da segunda derivada ( $f''(x) = 2x$ )



- Eixo x: Representa o tempo (horas), indicando o avanço do dia e os momentos em que os acessos ao site são analisados.
- Eixo y: Representa o valor da segunda derivada  $f''(x) = 2x$ , que forma uma reta inclinada. Como a função tem apenas uma incógnita e não possui termo constante, a reta não cruza o eixo  $y$  e se estende infinitamente. Isso mostra que a reta da função cresce de forma constante, indicando que os acessos ao site aumentam continuamente, sem quedas ou picos.

### Análise dos valores da segunda derivada

A análise das derivadas de uma função é essencial para entender o comportamento dos acessos ao site ao longo do tempo.

A primeira derivada  $f'(x) = x^2 + 6$  mostra que os acessos ao site estão sempre crescendo, já que seu valor é sempre positivo.

A segunda derivada  $f''(x) = 2x$  é uma função linear, com inclinação constante, e indica como essa taxa de crescimento muda ao longo do tempo.

Quando  $f''(x) > 0$ , a função é côncava para cima e os acessos estão acelerando.

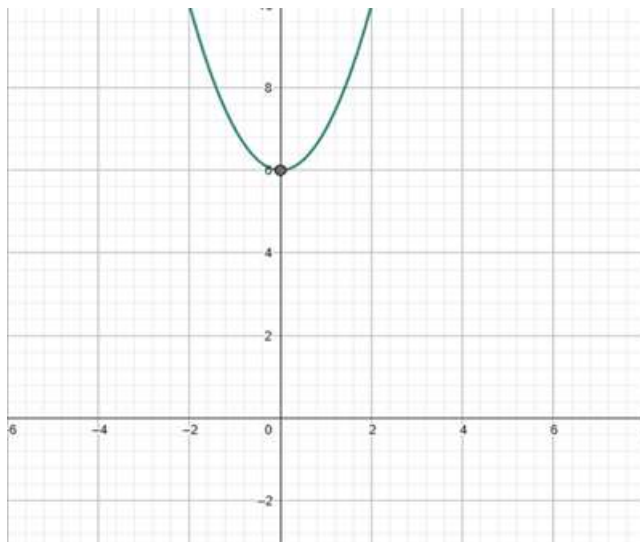
Quando  $f''(x) < 0$ , a função é côncava para baixo e os acessos ainda crescem, mas de forma mais lenta.

**Por exemplo, em  $x = 2$ , temos  $f''(2) = 4$ , indicando crescimento acelerado. Já em  $x = -2$ ,  $f''(-2) = -4$ , indicando crescimento mais lento.**

---

### **Análise da Tabela de Variação e Concavidade**

Ao observar o gráfico que representa os acessos ao site ao longo do dia, podemos compreender melhor seu comportamento por meio da tabela de sinais e variações. Essa tabela organiza as informações sobre a função e suas derivadas, permitindo uma análise mais precisa dos momentos de crescimento e de queda dos acessos.



|                    |   |   |
|--------------------|---|---|
| Sinais de $y''$    | - | + |
| Variação de $y''$  | ↘ | ↗ |
| Sinais de $y'$     | - | + |
| Variação de $y'$   | ↘ | ↗ |
| concavidade de $y$ | ∩ | ∪ |

### Sinais da Segunda Derivada $f''(x) = 2x$

Essa linha mostra os **sinais da reta** da função.

- Quando  $f''(x) > 0$  (à direita do eixo), a função é **crescente**, indicando que os acessos ao site estão crescendo com **aceleração** em reta constante.
- Quando  $f''(x) < 0$  (à esquerda do eixo), a função é **decrescente**, indicando que os acessos ainda crescem, mas de forma **desacelerada**.

### Variação da Segunda Derivada

Como  $f''(x) = 2x$ , a reta cresce continuamente com o tempo.

- Antes do ponto de inflexão  $x < 0$ , os valores de  $f''(x)$  são negativos e **aumentam** em direção ao zero.
- Após o ponto de inflexão  $x > 0$  os valores são positivos e continuam **aumentando**, intensificando a aceleração. Essa variação mostra **como a reta muda**, revelando a intensidade do crescimento dos acessos.

### Sinais da Primeira Derivada $f'(x) = x^2 + 6$

Essa linha mostra se os acessos ao site estão **aumentando ou diminuindo**.

- Como  $x^2 + 6 > 0$  para todo  $x$ , a função está **sempre crescente**.
- Não existe ponto onde  $f'(x) = 0$ , então **não há pico ou queda** os acessos **nunca diminuem**.
- A curva da função está sempre subindo, mas a **velocidade** dessa subida muda conforme a concavidade.

### Variação da Primeira Derivada

A primeira derivada  $f'(x) = x^2 + 6$  tem um **mínimo em**  $x = 0$ , onde o valor é 6.

- Antes de  $x = 0$ , a taxa de crescimento **diminui** (mas continua positiva).
- Após  $x = 0$ , a taxa de crescimento **aumenta**. Isso mostra que os acessos ao site estão **sempre subindo**, mas com **ritmo variável** primeiro mais lento, depois acelerado.

### Esboço da Concavidade

A curva da função é voltada para cima em todo o domínio, já que a concavidade é positiva para  $x > 0$  e negativa para  $x < 0$ .

- Antes do ponto de inflexão, a curva é **mais suave**, com crescimento desacelerado.
- Após o ponto de inflexão, a curva **se inclina mais**, com crescimento acelerado. Esse esboço ajuda a visualizar que os acessos ao site **nunca caem**, mas mudam de ritmo ao longo do tempo.

---

### Conclusão

A análise das derivadas mostrou que os acessos ao site estão sempre crescendo, com ritmo variável. A primeira derivada indica crescimento contínuo, e a segunda revela aceleração após o ponto de inflexão. Esses dados ajudam a prever os melhores horários e otimizar o uso da plataforma.