FECAP - Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado

Breno Sales Colaneri - 24026968

Guilherme Leão Rodrigues - 25027205

Izabelli Ribeiro dos Santos - 25027357

Rafael Chagas - 25027262

Projeto Interdisciplinar de Aplicação Web – Projeto Lideranças Empáticas

Entrega 1 de Cálculo II

São Paulo

2025

Aplicação do Polinômio de Taylor: Previsão de Arrecadações

Este documento detalha como aplicar o Polinômio de Taylor de ordem 3 para modelar e prever o comportamento de arrecadações de alimentos no dashboard "Lideranças Empáticas".

Passo 1: Escolha da Variável e Definição da Função $f(x)$

Variável Relevante: Total de itens de alimentos arrecadados ao longo de uma campanha.
Definição das variáveis:
- `x`: O número de dias desde o início da campanha.
- `f(x)`: O número total acumulado de itens arrecadados no dia `x`.

Para modelar o comportamento não linear das doações (crescimento que acelera e depois varia), vamos criar uma função $f(x)$ que simula este cenário de forma realista.

Função Escolhida:

$$f(x) = 50x + x^2 + 10\sin\left(\frac{\pi x}{7}\right)$$

Justificativa da Função:
- `50x`: Representa uma base de arrecadação constante e linear (50 itens por dia).
- `x²`: Representa a aceleração das doações à medida que a campanha ganha popularidade.
- $10\sin\left(\frac{\pi x}{7}\right)$: Representa uma flutuação semanal, simulando um aumento nas doações aos fins de semana.

Passo 2: Cálculo das Derivadas de $f(x)$

Para construir o Polinômio de Taylor de ordem 3, precisamos das três primeiras derivadas da nossa função.

Função Original: $f(x) = 50x + x^2 + 10\sin\left(\frac{\pi x}{7}\right)$

Primeira Derivada (Taxa de Arrecadação): $f'(x) = 50 + 2x + \frac{10\pi}{7}\cos\left(\frac{\pi x}{7}\right)$

Segunda Derivada (Aceleração da Arrecadação): $f''(x) = 2 - \frac{10\pi^2}{49}\sin\left(\frac{\pi x}{7}\right)$

Terceira Derivada (Variação da Aceleração): $f'''(x) = -\frac{10\pi^3}{343}\cos\left(\frac{\pi x}{7}\right)$

Passo 3: Escolha do Ponto de Aproximação (`a`)

Vamos supor que a nossa campanha já dura há uma semana e queremos prever o que vai acontecer nos próximos dias. Portanto, vamos centrar o nosso polinômio no final da primeira semana.

- **Ponto de aproximação:** $a = 7$ dias.

Passo 4: Construção do Polinômio de Taylor de Ordem 3

A fórmula do Polinômio de Taylor de ordem 3 centrado em `a` é:

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

Calculamos o valor de f e das suas derivadas em $a = 7$:

$$f(7) = 50(7) + (7)^2 + 10\sin(\pi) = 350 + 49 + 0 = 399$$
$$f'(7) = 50 + 2(7) + \frac{10\pi}{7}\cos(\pi) = 64 - \frac{10\pi}{7} \approx 59.51$$
$$f''(7) = 2 - \frac{10\pi^2}{49}\sin(\pi) = 2 - 0 = 2$$
$$f'''(7) = -\frac{10\pi^3}{343}\cos(\pi) = \frac{10\pi^3}{343} \approx 0.904$$

Substituindo estes valores na fórmula, obtemos o **Polinômio de Taylor Final:**

$$P_3(x) = 399 + 59.51(x-7) + (x-7)^2 + 0.1507(x-7)^3$$

Passo 5: Aplicação Prática (Previsão)

Vamos usar o polinômio $P_3(x)$ para prever o total de itens arrecadados no dia seguinte, ou seja, para $x = 8$.

Previsão com $P_3(8)$: 459.66 itens.
Valor Real com $f(8)$: 459.67 itens.

A aproximação do Polinômio de Taylor de ordem 3 foi extremamente precisa.

Conclusão e Justificativa para o Website

1. **Previsão:** Permite ao gestor, com base nos dados até ao dia 7, fazer uma previsão muito precisa para o dia 8. Isto é vital para o planeamento logístico e para ajustar as metas da campanha.
2. **Simplificação Computacional:** O polinômio $P_3(x)$ usa apenas operações básicas. Num cenário com milhões de cálculos, usar o polinômio em vez da função original resultaria numa otimização de performance significativa.

Análise de Máximos e Mínimos com Derivadas

Utilizaremos as derivadas para encontrar os dias em que a **taxa de arrecadação** foi máxima ou mínima, ajudando o gestor a entender o ritmo da campanha.

Função de Interesse (Taxa de Arrecadação):

$$g(x) = f'(x) = 50 + 2x + \frac{10\pi}{7}\cos\left(\frac{\pi x}{7}\right)$$

Passo 1: Encontrar os Pontos Críticos

Para encontrar os pontos de máximo e mínimo, igualamos a derivada de $g(x)$ (ou seja, $f''(x)$) a zero.
$g'(x) = f''(x) = 2 - \frac{10\pi^2}{49}\sin\left(\frac{\pi x}{7}\right) = 0$

Resolvendo a equação, encontramos que os pontos críticos ocorrem aproximadamente em $x \approx 3.3$ e $x \approx 3.7$ dias.

Passo 2: Teste da Segunda Derivada

Para saber se um ponto é máximo ou mínimo, usamos a segunda derivada de $g(x)$, que é $f'''(x)$.
$g''(x) = f'''(x) = -\frac{10\pi^3}{343}\cos\left(\frac{\pi x}{7}\right)$

Em $x \approx 3.3$, $g''(3.3)$ é negativo, o que indica um **ponto de máximo local**.

Conclusão e Aplicação ao Website

A análise mostra que a **taxa de arrecadação atinge um pico por volta do 3º ou 4º dia da semana**, correspondendo ao aumento simulado de doações no fim de semana. Por outro lado, a taxa atinge o seu **ponto de mínimo por volta do 7º dia**.

Para o gestor do website, esta informação é crucial:

- **Planeamento:** Sabendo que o ritmo de doações tende a diminuir no final da semana, ele pode planear ações de marketing para os dias 6 e 7.

- **Alocação de Recursos:** Ele pode alocar mais voluntários para receber doações nos dias de pico (dias 3 e 4).