Entrega II de Calculo

Alunos: Kaio, Yuri, Mauricio, Gustavo

Grupo 5

Objetivo

Estender a análise feita na segunda entrega, utilizando a segunda derivada para determinar a concavidade e os pontos de inflexão da função polinomial que modela um fenômeno relacionado ao website sobre lideranças empáticas. A função a ser utilizada neste trabalho é:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 5$$

Com essa análise os alunos poderão interpretar como a taxa de variação do fenômeno (por exemplo: peso total de doações ou taxa de doações por grupo ao longo do tempo) se comporta, ajudando a identificar períodos de maior crescimento ou desaceleração e orientar decisões sobre campanhas e alocação de recursos.

Introdução

O website permite que alunos criem grupos para organizar doações e registrar o peso das doações ao longo do tempo. Suponha que, a partir da modelagem preliminar (entregue anteriormente), a quantidade total (ou peso) de doações acumuladas em função do tempo (em semestres, semanas ou unidades temporais escolhidas) seja modelada pela função cúbica acima. Nesta entrega vamos:

1. Calcular as primeiras e segundas derivadas de $f(x)$.
2. Encontrar pontos críticos (onde $f'(x) = 0$) e classificá-los como máximos ou mínimos usando $f''(x)$.
3. Determinar pontos de inflexão (onde$f''(x) = 0$) e analisar a concavidade.
4. Interpretar os resultados no contexto do website.

Desenvolvimento

1) Derivadas da função

A função é:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 5.$$

Calculamos a primeira e a segunda derivadas:

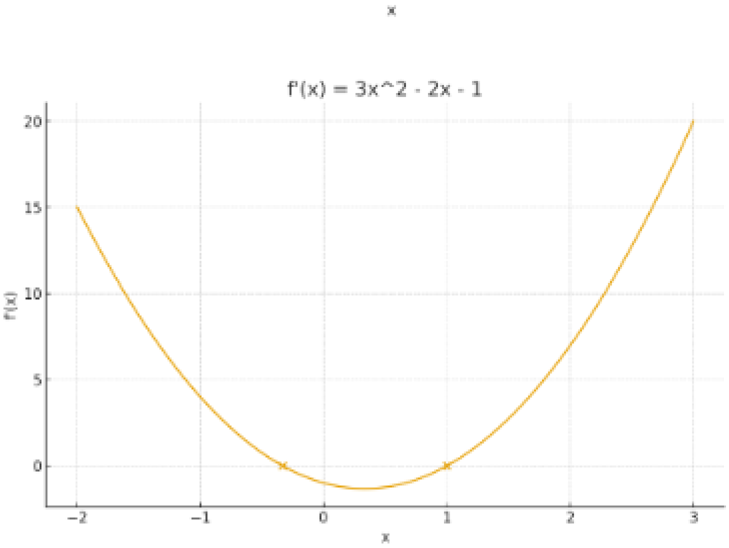
- Primeira derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

- Segunda derivada:

$$f''(x) = 6x - 2.$$

2) Pontos críticos (f'(x)=0)



Resolvendo $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 \;=\; 0$$

Aplicando a fórmula quadrática:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}.$$

Assim obtemos duas soluções:

- $x_1 = \dfrac{2+4}{6} = \dfrac{6}{6} = 1.$
- $x_2 = \dfrac{2-4}{6} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}.$

Portanto, os pontos críticos são $x = 1$ e $x = -\frac{1}{3}$.

3) Classificação (teste da segunda derivada)

Usamos $f''(x) = 6x - 2$ para classificar:

- Em $x = 1$: $f''(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4 > 0$. Como $f''(1) > 0$, $x = 1$ é um **mínimo local.**
- Em $x = -\frac{1}{3}$: $f''(-\frac{1}{3}) = 6 \cdot (-\frac{1}{3}) - 2 = -2 - 2 = -4 < 0$. Como $f''(-\frac{1}{3}) < 0$, $x = -\frac{1}{3}$ é um **máximo local.**

Observação prática: se o domínio de interesse for apenas valores não-negativos (por exemplo, tempo em semestres a partir do início do projeto,), então o ponto não é fisicamente relevante; apenas aparece no domínio observável e representa um mínimo local.

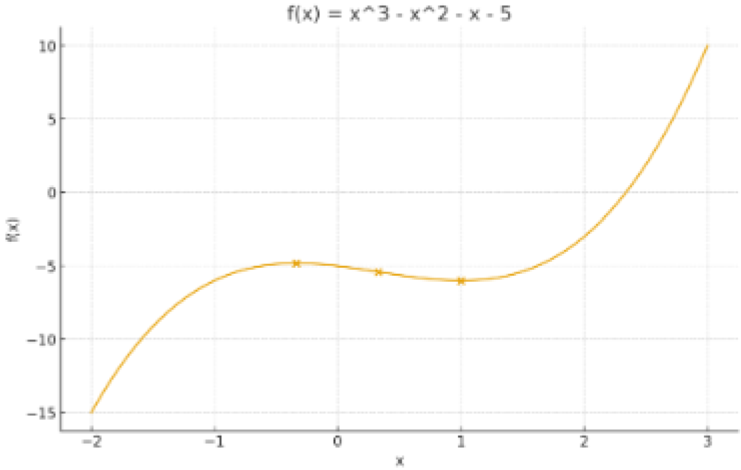
4) Pontos de inflexão e concavidade

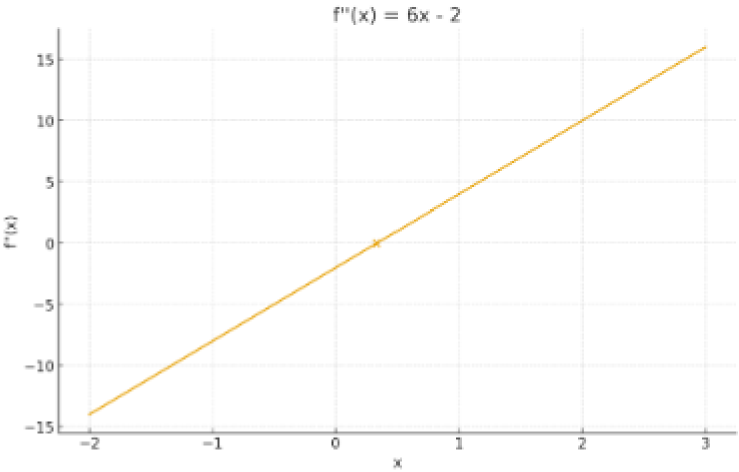
Pontos de inflexão ocorrem quando $f''(x) = 0$ e a concavidade muda de sinal.

$$6x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Portanto existe um ponto de inflexão em $x = \frac{1}{3}$.

- Para $x < \frac{1}{3}$, temos $f''(x) = 6x - 2 < 0$ → função côncava para baixo.
- Para $x > \frac{1}{3}$, temos $f''(x) > 0$ → função côncava para cima.





Isso significa que, por volta de $x = \frac{1}{3}$,a taxa de crescimento da função muda de desaceleração (concavidade para baixo) para aceleração (concavidade para cima).

Calculemos os valores de $f(x)$ nos pontos que encontramos para interpretar no contexto:

- $f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 - 5 = 1 - 1 - 1 - 5 = -6.$
- $f(-\frac{1}{3}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) - 5 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 5 = -0.037037 - 0.111111 + 0.333333 - 5 \approx -4.8148.$
- $f(\frac{1}{3}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 5 \approx -5.0370.$

Interpretação: os valores são negativos porque o polinômio base escolhido toma valores negativos perto da origem — no contexto real do site podemos ajustar a escala ou deslocar verticalmente a função (ex.: adicionar uma constante) para que represente quantidades estritamente positivas, se necessário.