

北京交通大学 2024-2025 学年暑期学期

计算机与信息技术学院 硕士研究生《智能计算数学基础》试题 A 卷

出题教师：《智能计算数学基础》课程组

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 上课教师：_____

注意：1. 试卷共 49 道题，满分 100 分。2. 题目排序与难度无关。3. 判断题请回答“是”或“否”。

1. 计算： $(-2, 3, -5, 7)^\top$ 的 l_∞ 范数。

2. 计算： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x}) \cos x}{\sin x}$ 。

3. 判断： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 是收敛的。

4. 计算： $f(x, y) = x^2y + 3xy^2 + e^{xy}$ 关于 x 的偏导数。

5. 判断：集合 $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y > 1\}$ 是 \mathbb{R}^2 中的紧集。

6. 判断： $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ 是 \mathbb{R}^2 上的 Lipschitz 函数。

7. 计算：函数 $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 2y^2 - 12x - 8y$ 的极小值点。

8. 计算：函数 $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 + z^2$ 在 $x + 2y + z \geq 3$ 和 $x \geq 0$ 条件下的最小值。

9. 计算： $f(X) = \text{tr}(X^\top AX)$ 关于 X 的梯度，其中 X 和 A 都是 n 阶方阵。

10. 使用最小二乘法与线性模型 $y = ax + b$ 对点 $(0, 0), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 7)$ 进行拟合，则 a 的值为？

11. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的秩为多少？

12. 判断: $\text{rank}(A^T A) < \text{rank}(A)$, 其中 A 是一个 $n \times m$ 的矩阵。

13. 方程组

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 12x_2 + 5x_3 = 17 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

是否有解? 若有解, 请问解空间的维数是多少?

14. 假设向量 u 和向量 v 的内积为 $u^T v$, 则向量 u 在向量 v 上的投影向量是什么?

15. 已知方阵 $\begin{bmatrix} 17 & 1 & x \\ 6 & 4 & -12 \\ y & z & -14 \end{bmatrix}$ 的两个特征值为 1 和 2, 计算该方阵的行列式。

16. 判断: 对称方阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$ 是正定的。

17. 判断: 已知 3 维向量 u 的 ℓ_∞ 范数小于正实数 m , 则 u 的 ℓ_2 范数小于 $\sqrt{3}m$ 。

18. 设方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, 计算 $\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ 。

19. 概率论中的PDF英文全称和中文翻译分别是什么?

20. 假设 x_1, x_2 都是取值在 $[0, 2]$ 之间的均匀分布独立随机变量。现有 $y = x_1 + x_2$, 那么 y 服从什么分布? y 的均值是多少?

21. 假设 u 和 v 都是相互独立的高斯随机变量, 均值为 0, 方差为 1, 即 $u \sim N(0, 1)$, $v \sim N(0, 1)$ 。现有 $z = 3u + 4v$, 那么 z 服从什么分布? z 的方差是多少?

22. 假设 $u \sim N(0, 1)$, 变量 $x = 3u$, $y = 4u$, 则 $z = x + y$ 服从什么分布? z 的方差是多少?

23. 为获取某常数 A ，通过 1 次测量得到数据 $x[1] = 2.36$ ，已知数据 $x[1]$ 和待估计常数 A 的关系是 $x[1] = A + w[1]$ ，其中 $w[k]$ 是均值为 1，方差为 2 的高斯白噪声，即 $w[1] \sim N(1, 2)$ 。那么利用最大似然准则得到 A 的估计值 \hat{A} 是多少？

24. 判断：矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ 可能是某均值为 0 的随机向量的协方差矩阵或相关矩阵。该随机向量由 2 个实随机变量构成。

25. 判断：当先验等概时，最大后验概率（MAP）判决准则等价于最大似然（ML）判决准则。

26. 判断：假设 x_1, x_2, \dots, x_{100} 都是取值在 $[-1, 1]$ 之间的均匀分布独立随机变量。
则 $z = x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$ 近似服从高斯分布。

27. 有 N 个外观完全一样的小球，其中有 1 个小球重量与其余 $N - 1$ 个不同，要找到这个小球并判断其轻重，如果仅允许用天平称两次，按照自信息量的定义和结论， N 的最大取值是多少？

28. 若一信源 X 输出四个符号 a, b, c, d ，则当 a, b, c, d 四个符号出现的概率满足什么条件时 $H(X)$ 最大？

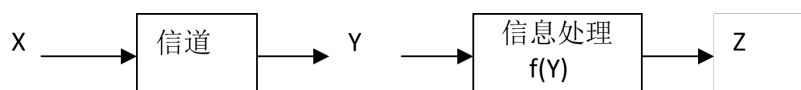
29. 判断：当 X 与 Y 相互独立时， $H(X) = H(Y/X)$ 。

30. 若 $\sum p_i = \sum q_i = 1$ ，有 $H(X) = -\sum p_i \log p_i \leq -\sum p_i \log q_i$ ，该公式反映了信息熵的哪种性质？

31. 判断：对于任意的两个离散随机变量 X 和 Y 之间的平均互信息表达式为：
 $I(X; Y) = H(X) - H(X/Y)$

32. 判断：对于固定的信源 X 和信宿 Y ，平均互信息 $I(X; Y)$ 具有凸状性，是信源概率分布 $P(X)$ 的上凸函数。

33. 如下的信息传输处理系统：



则有结论： $I(X;Y) \geq I(X;Z)$ ，这反映了信息的什么原理？

34. 判断：如果把 $p(x)$ 和 $q(x)$ 定义在同一概率空间上的两种分布，则 p 相对于 q 的信息散度具有对称性，即 $D(p//q) = D(q//p)$ 。

35. 判断：博弈问题中，一个纳什均衡解也是一个帕雷托最优解。

36. 判断：一个零和博弈中，各方不存在合作的可能。

37. 判断：如下图1的博弈矩阵中，行为决策者1的纯策略而列为决策者2的纯策略，双方均追求更大收益。可判断策略组合（B, B）为一个纯策略纳什均衡解。

	A	B	C
A	7, 7	1, 10	-2, 3
B	10, 1	4, 4	1, 2
C	3, -2	2, 1	0, 0

图 1:

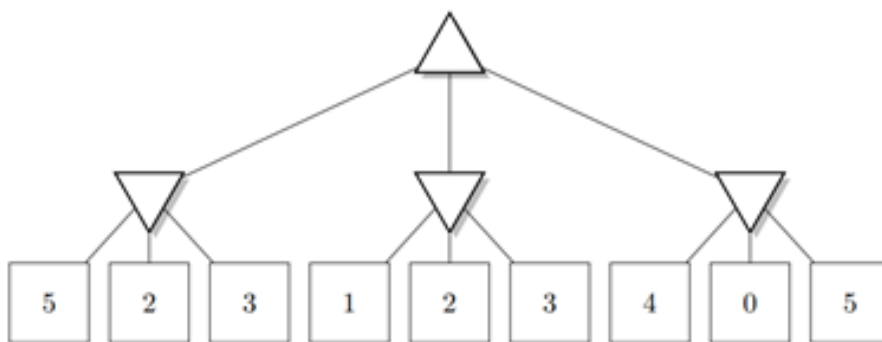
38. 判断：完美信息扩展型博弈中每个纳什均衡解也都是子博弈精炼均衡解。

39. 判断：不完全信息博弈中的不确定性比不完美信息博弈中的不确定性要低。

40. 判断：在重复博弈中，只要决策者具有足够耐心，那么在满足其个人理性约束的前提下，博弈方之间就总有可能达成某种合作均衡。

41. 判断：如下图2的博弈树中，上三角代表MAX节点而下三角代表MIN节点。应用minimax算法后，判断MAX节点将采取中策略。

42. 如下图2的博弈树中，上三角代表MAX节点而下三角代表MIN节点。应用 α - β 剪枝方法后，可忽略多少个终端节点？



43. 判断：同一个问题 Q ，使用两种不同的编码形式 e_1 和 e_2 ，如果 e_1 和 e_2 是多项式相关的，那么 $e_1(Q) \in P \Rightarrow e_2(Q) \in P$ 。

44. 判断：P问题，NP-complete问题和NP-hard问题都是NP问题的子集。

45. 判断：如果 L_1 可以多项式时间复杂度规约到 L_2 ，如果 L_1 是多项式时间复杂度可解的，则 L_2 也是多项式时间复杂度可解的。

46. 判断：NP-complete问题是NP-hard问题的子集。

47. 选择：已知 $L \in NP$ ，且 L' 是 NP-complete，下面哪个条件满足可以证明 L 是 NP-complete问题。

A: $L \leq_p L'$ 。 B: $L' \leq_p L$ 。 C: $\forall L'' \in NP \Rightarrow L \leq_p L''$ 。 D: A和C均正确。

48. 请将 Steiner Tree 问题 “已知无向连通图 $G(V \cup E, W)$ ， V 是顶点的集合， E 是边的集合， W 是边的权重集合，和子集 $R \subseteq V$ ，求连接 R 中所有顶点且边权之和最小的生成树”，转化为判定问题：

并进一步转化为语言描述：

49. 选择：下面哪类问题有近似率为1的多项式算法。

A: P问题。 B: NP问题。 C: NP-complete问题。 D: NP-hard问题。

50. 判断：TSP问题存在近似率为2的多项式算法。