

北京交通大学 2024-2025 学年暑期学期

计算机与信息技术学院 硕士研究生《智能计算数学基础》试题 B 卷

出题教师：《智能计算数学基础》课程组

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 上课教师：_____

注意：1. 试卷共 49 道题，满分 100 分。2. 题目排序与难度无关。3. 判断题请回答“是”或“否”。

1. 计算： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+x)}{1-\cos x}$ 。

2. 计算： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x}$ 。

3. 判断： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$ 是收敛的。

4. 计算： $f(x, y) = x^3y + 2xy^2 - 5x^2y + 7$ 关于 y 的偏导数。

5. 判断：集合 $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y > 0\}$ 是 \mathbb{R}^2 中的紧集。

6. 判断： $f(x) = x \log x$ 是 \mathbb{R} 上的 Lipschitz 函数。

7. 计算： $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2y$ 的极小值点。

8. 计算：函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy$ 在 $x^2 + y^2 \leq 4$ 和 $x + y \geq 2$ 条件下的最大值。

9. 计算： $f(X) = \text{tr}(A^T X A)$ 关于 X 的梯度，其中 X 和 A 都是 n 阶方阵。

10. 使用最小二乘法与线性模型 $y = ax + b$ 对点 $(0, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (4, 6)$ 进行拟合，则 a 的值为？

11. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的列秩为多少？

12. 判断：若矩阵 A 的行向量线性无关，则 AA^T 可逆，其中 A 是一个 $n \times m$ 的矩阵。

13. 计算：解线性方程组：
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5 \end{cases}。$$

14. 计算：向量 $(1, 0)$ 以向量 $(1, 2)$ 为轴对称得到的向量是什么？

15. 计算：方阵 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的所有特征值。

16. 判断：设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ，则对于任意 2 维实向量 \mathbf{x} ，均有 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ 。

17. 计算：向量 $(3, -1, 2)$ 的 ℓ_1 范数。

18. 计算：方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值是什么？

19. 假设 x_1, x_2 都是取值在 $[-1, 1]$ 之间的均匀分布独立随机变量。现有 $y = x_1 + x_2$ ，那么 y 服从什么分布？均值是多少？

20. 假设 x_1, x_2, \dots, x_{100} 都是取值在 $[-1, 1]$ 之间的均匀分布独立随机变量。现有 $z = x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$ ，那么 z 近似服从什么分布？均值是多少？

21. 假设 x_1, x_2 都是相互独立的高斯随机变量，均值为 0，方差为 1，即 $x_1 \sim N(0, 1), x_2 \sim N(0, 1)$ 。现有 $u = x_1 + x_2$ ，那么 u 服从什么分布？方差是多少？

22. 假设独立随机变量 x_1, x_2, \dots, x_{100} 都是均值为 0 方差为 1 的高斯分布。现有 $w = x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$ ，请问 w 服从什么分布？方差是多少？

23. 假设 $y = Sh + w$ ，其中 y 是 $k \times 1$ 的向量， s 是 $k \times 3$ 的矩阵， h 是 3×1 的向量， w 是 $k \times 1$ 的向量。假设 $w \sim N(0, \mathbf{I}_w)$ 为高斯白噪声，向量 \mathbf{h} 为要估计的参数。已知 y 和 s ，如果要估计出向量 \mathbf{h} ，则要求 k 的大小应当是多少？

24. 判断：假设已知模型 $y = x + w$, 其中 w 是均值为 2 方差也为 4 的高斯噪声; x 是个随机变量, 只有两种取值, 取值要么为 +2 要么为 -2 。根据最大似然准则从 $y = 3.16$ 推断 x 取值为2。

25. 判断：假设已知模型 $y = x + w$, 其中 w 是均值为 2 方差也为 2 的高斯噪声; x 是个随机变量, 只有两种取值, 取值 60% 可能为 +2, 40% 可能为 -2 。根据最大后验准则从 $y = 3.16$ 推断 x 取值为2。

26. 判断：假设 u 和 v 都是相互独立的高斯随机变量, 均值为 0 , 方差为 1 , 即 $u \sim N(0, 1), v \sim N(0, 1)$ 。现有 $z = 3u + 4v$, 那么 z 服从高斯分布, z 的方差为 $7 \times 7 = 49$ 。

27. 信息传输系统模型包括信源、编码器、译码器、信宿和哪部分?

28. 判断：信源发出消息 x_i , 信宿收到消息 y_j , 自互信息 $I(x_i; y_j)$ 的定义式可表示为:
$$I(x_i; y_j) = \log_2 \frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)}.$$

29. 已知两个信源分别为 $\begin{bmatrix} X \\ P \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1, & a_2 \\ 0.8, & 0.2 \end{Bmatrix}; \begin{bmatrix} Y \\ Q \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1, & b_2 \\ 0.5, & 0.5 \end{Bmatrix}$, 则在信源熵 $H(X)$ 和 $H(Y)$ 中, 较大的是哪个? 相应的值是多少? (单位: bit/符号)

30. 公式 $H(XY) = H(X) + H(Y/X)$ 反映了信息熵的什么性质?

31. $I(X; Y) \geq 0$, 这反映了互信息的什么性质?

32. 对于固定的信源, 平均互信息 $I(X; Y)$ 具有凸状性。 $I(X; Y)$ 是信道传递概率分布 $P(Y/X)$ 的上凸函数还是下凸函数? 是信源概率分布 $P(X)$ 的上凸函数还是下凸函数?

33. 如果 $p(x)$ 和 $q(x)$ 为定义在同一概率空间上的两种离散分布, 则 p 相对于 q 的信息散度定义为 $D(p//q) = \sum p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)}$, 按照该散度的定义方式, 请给出交叉熵 $H(p, q)$ 的定义式。

34. 遍历性马尔柯夫序列的极限熵为 $H_\infty(X) = -\sum_i \sum_j p_i p_{ji} \log p_{ji}$, 其中 p_i 是什么? 它与序列的起始状态是否有关?

35. 判断：帕雷托最优是各种理想态标准中的最高标准。

36. 判断：一个零和博弈往往不存在纯策略纳什均衡解。

37. 如下图的博弈矩阵中，行为决策者1的纯策略而列为决策者2的纯策略，双方均追求更大收益。可判断策略组合(E, E)为一个纯策略纳什均衡解。

	E	S
E	2, 2	-1, 3
S	3, -1	0, 0

图 1:

38. 判断：在一个不完美信息博弈中，至少存在一个包含多个节点的信息集。

39. 判断：在一个完美回忆的不完美信息博弈中，行为策略与混合策略等价。

40. 判断：无限重复博弈中计算平均收益的折扣因子越趋近于1代表决策者越不看重长远利益。

41. 判断：如下图2的博弈树中，上三角代表MAX节点而下三角代表MIN节点。应用minimax算法后，判断MAX节点将采取中策略。

42. 如下图2的博弈树中，上三角代表MAX节点而下三角代表MIN节点。应用 $\alpha - \beta$ 剪枝方法后，可忽略多少个终端节点？

43. 判断：同一个问题，使用不同的数据结构不会改变求解问题的时间复杂度。

44. 判断：原问题Q是NP问题，则它的补问题也是NP问题。

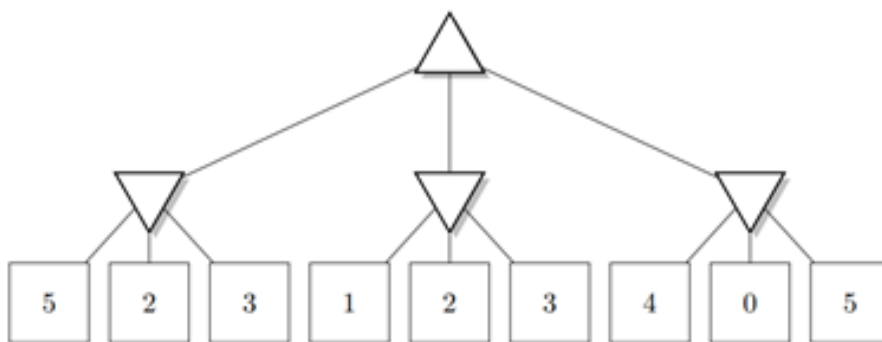


图 2:

45. 判断：如果 L_1 可以多项式时间复杂度规约到 L_2 ，如果 L_2 是多项式时间复杂度可解的，则 L_1 也是多项式时间复杂度可解的。

46. 判断：NP-hard 问题是 NP-complete 问题的子集。

47. 选择：已知 $L \in NP$ ，且 L' 是 NP-complete，下面哪儿个条件满足可以证明 L 是 NP-complete 问题。

A: $L \leq_p L'$ 。 B: $L' \leq_p L$ 。 C: $\forall L'' \in NP \Rightarrow L'' \leq_p L$ 。 D: B和C均正确。

48. 请将背包问题“已知 N 个商品，每个商品的大小为 $w_i, i = 1, 2, \dots, N$ ，和背包的大小为 B ，求这些商品的子集 C 使得 C 中商品的大小之和最接近 B ”，转化为判定问题：

并进一步转化为语言描述：

49. 选择：下面哪儿类问题目前没有近似率为1的多项式算法。

A: P问题。 B: NP-hard问题。 C: NP-complete问题。 D: B和C均没有。

50. 判断：对于同一个问题的不同实例，近似率为2的多项式算法均不能给出最优解。