北京交通大学　2023-2024 学年暑期学期

计算机与信息技术学院　硕士研究生《智能计算数学基础》试题

出题教师：《智能计算数学基础》课程组

班级:__________ 姓名:__________ 学号:__________ 上课教师:__________

注意：1. 试卷共 50 道题，每题 2 分，满分 100 分。2. 题目排序与难度无关。3. 判断题请回答“是”或“否”。

1。计算极限：$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$。

2。计算级数：$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$。

3。判断：平面点集$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y \leq 1\}$既不是开集也不是闭集。

4。函数$\frac{\sin(2x)}{x}$在$x=0$时是否可导？如果可导，导数是多少？

5。计算二元函数$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$在点$(1,1)$处的梯度。

6。计算二元函数$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy + y + 5$在点$(0,1)$处的Hessian矩阵。

7。求出下述优化问题的极小值$\begin{cases} \text{minimize} & f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + 3z \\ \text{subject to} & x + 2y + z = 1 \end{cases}$。

8。设$f(A) = \mathrm{tr}(AB)$，计算$Df(A)$。

9。使用最小二乘法和线性模型$y = ax + b$对四个点$(0,0)$、$(1,1)$、$(2,3)$和$(4,5)$进行拟合，则a的取值是多少？

10。给定岭回归模型：$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|x\|^2$，其中$\lambda > 0$。计算该函数的极小值点。

11。判断：$\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}(B)$。

12。判断：$\mathrm{rank}(A^t A) = \mathrm{rank}(AA^t)$。

13。矩阵$A = \begin{pmatrix} -8 & -5 & -8 & -3 \\ -3 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的零空间（即$\{x|Ax=0\}$）的维数是多少？

14。将向量$(2,1)$逆时针旋转45度得到的向量是什么？

15。已知方阵$\begin{pmatrix} -411 & x & y \\ 64 & 18 & 16 \\ 1600 & z & 401 \end{pmatrix}$的两个特征值为1和2，则第三个特征值是多少？

16。判断：向量$(2,3,4)$的ℓ_1范数小于它的ℓ_2范数。

17。计算方阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$的特征值。

18。计算方阵$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$的奇异值。

19。概率论中的PDF的英文全名是什么？对应中文翻译是什么？

20。假设x_1和x_2是取值在$[0,\,2]$之间的均匀分布独立随机变量，那么$y = x_1 + x_2$服从何种分布？

21。假设u和v是相互独立的均值为0、方差为1的高斯随机变量，即$u \sim \mathcal{N}(0,1)$，$v \sim \mathcal{N}(0,1)$，那么$z = 2u + 3v$服从何种分布？其均值和方差分别是多少？

22。请先用最少的中文字数解释中心极限定理，然后分别回答“中心”和“极限”的含义。

23。假设$y = Sh + w$，其中y是$k \times 1$的向量，S是$k \times 2$的矩阵, h是2×1的向量，w是$k \times 1$的向量。假设w为高斯白噪声，向量h为要估计的参数。已知y和S，如果要估计出向量h，则要求k的大小应当是多少？当k满足要求时，如果用LS方法来估计向量h，那么得到估计量$\widehat{h}$的表达式是什么？

24。为获取某常数A，通过两次独立测量得到两个数据$x[1]$和$x[2]$，已知数据$x[k]$和常数A的关系是$x[k] = A + w[k]$，其中$k =$1或2，$w[k]$是均值为1/3，方差为2的高斯白噪声，即$w[k] \sim \mathcal{N}(1/3, 2)$。那么似然函数$P(x[1]|A)$和$P(x[2]|A)$是多少？利用两个数据$x[1]$和$x[2]$得到的估计值$\widehat{A}$是多少？

25。判断：概率论中有这样一个不等式$P(X \geq A) \leq E(X)/A$，其要求A是正实数，对随机变量X没有要求。

26。判断：已知$x_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$，$x_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$，则$z = x_1^2 + x_2^2$服从指数分布以及自由度为2的卡方分布。

27。13个外观完全一样的小球，其中有1个小球重量与其余12个不同，如果要找到这个小球，则需要解除的不确定度大小是什么？（给出表达式即可）

28。判断：信源发出消息x，信宿收到消息y，自互信息的定义式可表达为$I(x; y) = \log_2 \frac{p(y/x)}{p(x)}$ 。

29。无记忆信源符号集为$\{0, 1, 2, 3\}$，则该信源信息熵最大值为多少bit/符号?

30。公式$H(XY) = H(X) + H(Y/X)$反映了信息熵的什么性质?

31。判断：公式$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$是否正确?

32。判断：对于固定的信源X和信宿Y，平均互信息$I(X;Y)$具有凸状性，是信源概率分布$P(X)$的上凸函数。

33。若$Z=f(Y)$，则$I(X;Z)\leq I(X;Y)$反映了信息的哪种性质？

34。如果p和q为定义在同一概率空间上的两种离散分布，则p相对于q的信息散度定义为$D(p\|q)=\sum_x p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}$。按照该散度的定义方式，请给出交叉熵$H(p,q)$的定义式。

35。判断：正则型博弈中假设博弈双方同时进行决策。

36。判断：正则型博弈不能等价转化为某种扩展型博弈。

37。判断：帕雷托最优解总是博弈问题的理想解。

38。判断：每个具有有限决策者和有限决策选择的博弈问题都至少有一个混合策略纳什均衡解。

39。判断：完美信息扩展型博弈中每个纳什均衡解也都是子博弈精炼均衡解。

40。判断：无限重复博弈中计算平均收益的折扣因子越趋近于1代表决策者越看重长远利益。

41。在图1的博弈矩阵中，哪一个纯策略组合是一个纳什均衡解？

42。在图1的博弈树中，虚线表示决策者1的何种行为？

43。请根据P问题、NP问题、NP-hard问题和NP-complete问题的定义，给上述4类问题按照难易程度、从易到难进行排序。

博弈矩阵		Player 2	
		Left	Right
Player 1	Up	3, 3	3, 4
	Down	1, 1	4, 3

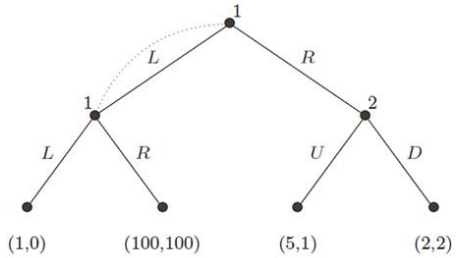

Figure 1: 博弈矩阵（左）和博弈树（右）

44。选择题：已知L问题是NP-hard问题，且满足下列哪个条件时，L是NP-complete问题。

A：L是P问题，

B：L是NP问题，

C：L可以规约到已知的NP-complete问题，

D：已知的NP-complete问题可以规约到L。

45。请将无交叠路由问题“已知网络拓扑$G(V,E)$和业务流路由的集合R，求R的子集S，使得S中的任意两条路由无重叠的边，且$|S|$最大”，转化为判定问题。

46。针对上述问题，进一步转化为语言描述。

47。判断：近似度为1的近似算法可求出原问题的最优解。

48。判断：如果P=NP，则所有NP-complete问题都有多项式时间复杂度的算法。

49。判断：如果L的补问题是NP问题，则L是NP问题。

50。判断：近似度不为1的近似算法在求解原问题时依然可能给出最优解。