

# LDP机制下快速的频繁模式挖掘方法

王家礼

2020 年 3 月 16 日

## 1 简介

目前,本地化差分隐私主要研究方向有频率估计、均值估计、heavy hitter、频繁模式挖掘和键值数据收集等。其中,对频繁模式挖掘的工作相对较少,文献[5]首次提出LDPMiner方法解决set-Valued场景下本地化数据聚合,并将频繁模式挖掘任务作为开放性问题提出,并没有实际解决该问题。由于本地化差分隐私具有强隐私保护性,任意第三方不会持有用户的敏感数据,所以,如何在噪声数据上进行频繁模式挖掘,并且同时保证LDP的隐私性以及估计结果的有效性,成为了当前一大难点问题。文献[8]首次提出了基于频率推测的候选集构造SVSM方法,其解决了频繁模式挖掘top-k问题。该方法的缺点在于,随着 $k$ 值得不断增大,频率推测构造候选集的额外开销明细增大(详见5.1节),极大得限制了方法的应用。

为了解决SVSM方法额外开销的问题,本文通过引入FPgrowth[2]模式挖掘算法,一方面实现了基于LDP的频繁模式挖掘方法,另一方面在挖掘结果有效的前提下,大大降低了所需的额外开销。

**本文贡献:**

- 1、LDP机制下频繁模式树的层次建立;
- 2、对模式树及挖掘结果的优化;
- 3、大大降低SVSM[8]方法的额外计算开销。

## 2 背景知识介绍

### 2.1 频繁模式挖掘

频繁模式是指频繁地出现在数据集中的模式,如:项集、子序列或子结构,本文主要针对频繁项集的挖掘(FIM问题)。自文献[1]首次研究在数据库中发掘项集,FIM已被广泛的研究。FIM任务的定义如下。给定一个用户交易数据库,FIM的目的是发掘数据库中频繁出现的项目和一起出现项目集合(项集)。

**频繁项集挖掘(FIM):**令 $DB = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ 表示 $n$ 位用户的交易数据集,其中用户 $u_i$ 的交易记录 $t_i \subset I = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ ,  $I$ 为总项目集合,  $x_j$ 表示项目(或商品),  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq d$ 。FIM任务的结果在于挖掘出 $DB$ 中所有频繁出现的项集。如图1所示,为 $n = 5, I = \{a, b, c, f, g, h, l, n, o, p\}$ 时的交易数据集。

**定义、频繁项集(frequent itemset):**若 $X \subset I$ ,则 $X$ 表示一个项集。当其支持度(在数据集中出现次数) $support(X)$ 不低于给定阈值时,则 $X$ 是一个频繁项集。

**定义、 $\alpha$ -itemset:**项集 $X$ 的项目个数记为 $\alpha = |X|$ ,则 $X$ 是一个 $\alpha$ -itemset。

#### 2.1.1 FPgrowth模式挖掘方法[2]

本节是对非隐私保护情况下,FPgrowth模式挖掘方法的简介。FPgrowth主要分为两个步骤:建立模式树存储用户信息和挖掘模式树获得频繁模式。

TID	Transaction
01	<i>a,f,c,g,p</i>
02	<i>a,b,c,f,l,o</i>
03	<i>b,f,h,o</i>
04	<i>b,c,p</i>
05	<i>f,a,c,l,p,n</i>

图 1: 交易数据集

TID	Transaction
01	<i>c,f,a,p</i>
02	<i>c,f,a,b</i>
03	<i>f,b</i>
04	<i>c,b,p</i>
05	<i>c,f,a,p</i>

图 2: 预处理数据集

## 一、建立频繁模式树FP（本文主要工作是，在LDP场景下，构建有效的FP树）

### 1、建立项头表 ——（第一次扫描数据集，得到项头表，也即频繁1 – *itemset*）

扫描交易数据集一遍，记录每个项出现的次数，根据给定的最小支持度计数（或最小支持度）筛选得到频繁1 – *itemset*及它们的支持度计数，按计数值从大到小依次排序得到项头表。

如：图1交易数据集（每行为一个交易），在给定最小支持度计数为3得到项头表如图3

item	freq
<i>c</i>	4
<i>f</i>	4
<i>a</i>	3
<i>b</i>	3
<i>p</i>	3

图 3: 项头表

### 2、预处理数据集 ——（根据所得项头表，预处理数据集，将非频繁的项删除，只保留频繁的项，并且进行排序）

因为原始的交易数据集中的交易可能包含频繁1 – *itemset*中没有的项（即除项头表以外的项），所以对于每个事务要把非频繁1 – *itemset*中的项过滤掉，同时为了方便FP树的建立，需要把每个交易中的项(过滤后)按照其支持度大小排序，得到新交易数据集。预处理后新的交易数据集如图2。

**处理规则：** 将原始的交易数据集中的每一个交易(每一行)删除项头表中没有的项，并且剩下项按照项头表中每一项的支持度计数从大到小排序（所有交易共用一个项目排序，*c, f, a, b, p*）。

### 3、FP树的建立 ——（第二次扫描数据集，根据每个处理后交易记录，构建模式树）

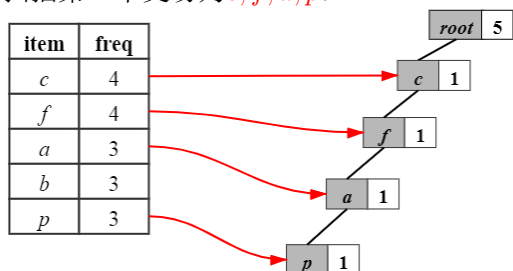
1)、FP树的根节点默认为*root*，其相应的计数为总用户数*n*；

2)、将新交易数据集中的每个交易变成FP树中的一条路径，并统计每个项出现的次数；

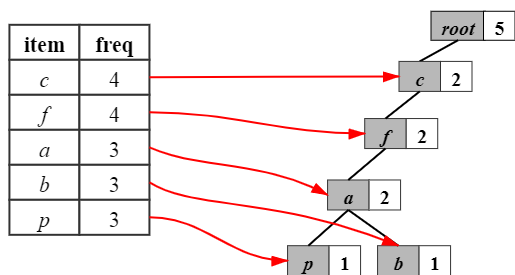
3)、对于后插入的交易先从树的根节点开始找与其相同的部分，从第一个不重合的项开始建立一个新的分支。

**例：新的交易数据集如图2**

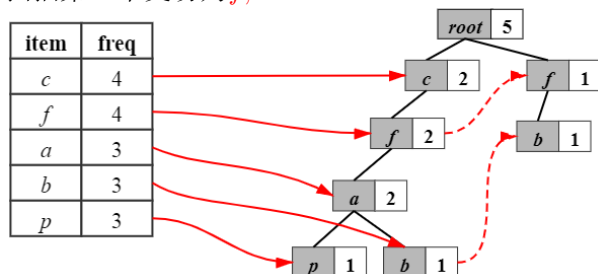
扫描第一个交易为*c, f, a, p*：



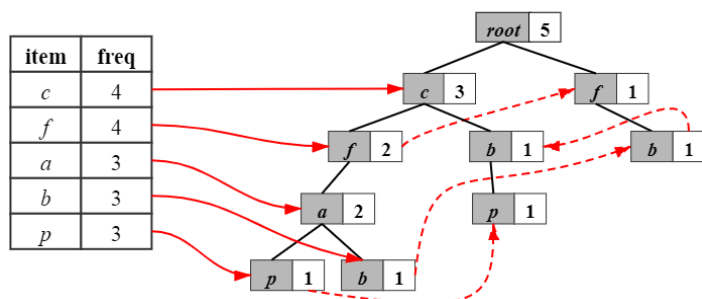
扫描第二个交易为*c, f, a, b*：



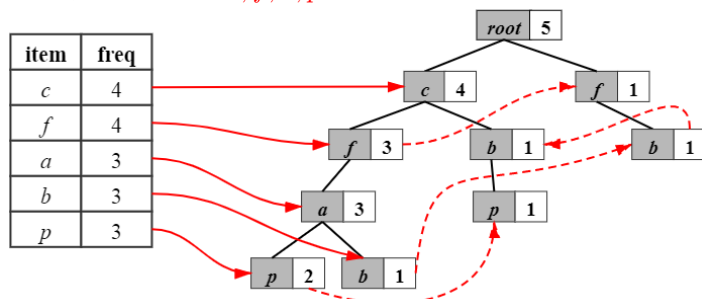
扫描第三个交易为  $f, b$ :



扫描第四个交易为  $c, b, p$ :



扫描第五个交易为  $c, f, a, p$ :



其中用项头表记录树中对应的项的节点位置，用以进行后续的挖掘步骤。

## 二、FP树的挖掘（本文直接使用该挖掘过程，未修改）

通过建立的FP树，从项头表的最后一项从下到上开始挖掘频繁项集。

挖掘步骤：

从项头表的最后一项从下到上开始，如当前项为  $i$

①得到以  $i$  结尾的所有路径的前缀路径，前缀路径是指每个路径删掉该项后的路径。通常前缀路径的最后一项是一个数字，用来记录该路径出现的次数，该数字以项  $i$  的计数为准。

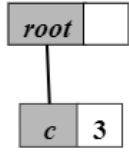
如：项  $a$  的前缀路径为  $(c, f, 3)$ ，由以项  $f$  结尾的路径  $(c, f, a)$  删掉  $a$  得到，并且项  $a$  的计数为 3，所以  $(c, f, a)$  路径出现的次数为 3。

②根据项  $i$  的所有前缀路径得到条件模式基，条件模式基是将项  $i$  的所有前缀路径根据计数合并，过滤掉小于最小支持度的项。

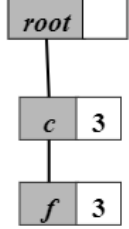
如：项  $p$  的前缀路径为  $(c, f, a, 2)$ ， $(c, b, 1)$ ，根据  $p$  的前缀路径最后的计数很容易得到前缀路径中每一项出现的次数  $(c : 2, f : 2, a : 2)$ ， $(c : 1, b : 1)$ ，然后将所有的前缀路径合并得到  $(c : 3, f : 2, a : 2, b : 1)$  因为  $f \Delta a \Delta b$  的计数小于最小支持度计数 3，所以将其过滤得到最终的条件模式基  $(c : 3)$

③根据项*i*的条件模式基画出项*i*的条件FP树。

如项*p*的条件FP树为：



项*a*的条件FP树为：



④根据项*i*的条件FP树得到项*i*的频繁项集。从左到右遍历项*i*的条件FP树的每一条路径，用路径中的每单个节点和项*i*组合得到项*i*的频繁2-itemset，用路径中每2个节点与项*i*组合得到频繁3-itemset，以此类推用路径中的每*k*个节点与项*i*组合得到项*i*的频繁*k* + 1-itemset。

如项*p*的频繁项集为：

频繁2-itemset: (c, p, 3)

项*a*的频繁项集为：

频繁2-itemset: (c, a, 3), (f, a, 3)

频繁3-itemset: (c, f, a, 3)

⑤继续挖掘剩余项的频繁项集，得到最小支持度为3的所有频繁项集结果为：

$$(c, p, 3), (c, a, 3), (f, a, 3), (c, b, 3), (c, f, 3), (c, f, a, 3)$$

总结：FPgrowth方法需要扫描两次原始数据集，分别用于建立项头表（频繁1-itemset）和建立模式树。

## 2.2 本地化差分隐私（LDP）

LDP定义

## 2.3 频数估计协议

LDP频数估计的目的是获得任意指定项目  $x \in I = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$  在  $n$  位用户中真实出现次数  $\theta(x)$  的无偏估计  $\tilde{\theta}(x)$ 。

### 2.3.1 FO协议

最基本场景——每位用户的记录中只有一个项目  $x$ ，最终估计所有项目的频数值  $\tilde{\theta}(x)$

一、GRR（Generalized Randomized Response）

用户端——扰动加噪：

$$\forall_{y \in I} \Pr[f_{GRR-\epsilon}(x)] = \begin{cases} p = \frac{e^\epsilon}{e^\epsilon + d - 1}, & \text{if } y = x \\ q = \frac{1}{e^\epsilon + d - 1}, & \text{if } y \neq x \end{cases} \quad (2)$$

第三方——统计聚合：

$$\tilde{\theta}_{GRR-\epsilon}(x) = \frac{C(x) - n \cdot q}{p - q} \quad (3)$$

估计误差——方差:

$$\text{Var}[\tilde{\theta}_{GRR-\epsilon}(x)] = n \cdot \frac{d - 2 + e^\epsilon}{(e^\epsilon - 1)^2} \quad (4)$$

**二、OLH (Optimized Local Hashing)** 为了改进GRR方法的估计误差与 $d$ 呈线性关系的缺点, OLH使用 $hash$ 函数将 $d$ 映射到 $g = \lceil e^\epsilon + 1 \rceil$ 范围内, 在 $g$ 中使用GRR方法。

用户端——扰动加噪:

$$f_{OLH-\epsilon}(x) := \langle hash, f_{GRR-\epsilon}(hash(x)) \rangle \quad (5)$$

第三方——统计聚合:

$$\tilde{\theta}_{OLH-\epsilon}(x) = \frac{C(x) - n/g}{p - 1/g} \quad (6)$$

其中 $g = \lceil e^\epsilon + 1 \rceil, p = \frac{e^\epsilon}{e^\epsilon + g - 1}$ 。

估计误差——方差:

$$\text{Var}[\tilde{\theta}_{OLH-\epsilon}(x)] = n \cdot \frac{4e^\epsilon}{(e^\epsilon - 1)^2} \quad (7)$$

关于GRR与OLH的更详细介绍见文献[7]。由于FO协议是在用户记录仅有一个项目的情况, 但是本文考虑set-valued[5, 8]场景, 即用户记录有多个项目且个数未知, 所以文献[8]使用了PSFO协议 (2.3.2节)。

### 2.3.2 PSFO协议——用户的项目个数未知且随机

本文场景——每位用户持有记录中有多个项目, 并且个数未知且无规律, 如图1所示为 $n = 5$ 位用户及其交易记录

**填充或截取: Padding and Sampling (PS):** 给定一个正整数 $l$ 和一条记录 $V \subset I$ , 记 $\perp_1, \perp_2, \dots, \perp_l \notin I$ 为 $l$ 个无效值。 $PS_l(V)$ 步骤如下:

- 1、若 $|V| < l$ , 则向 $V$ 中随机添加 (均匀随机)  $l - |V|$ 个不同的无效值; 若 $|V| > l$ , 则在 $V$ 中随机选择 $l$ 个项目保留, 其余项目丢弃;
- 2、在处理之后的记录 $V$ 中随机选择一个项目, 并且输出该项目。

PSFO协议即是先进行PS操作, 然后以FO协议进行后续LDP聚合。后续FO协议的值域应为 $I' = I \cup \{\perp_1, \perp_2, \dots, \perp_l\}$ , 且第三方需要将FO协议的聚合结果乘以因子 $l$ , 从而保证其为无偏估计。

PSFO协议的形式表述为:

$$PSFO(l, FO, \epsilon) := \langle f_{FO-\epsilon}(PS_l(\cdot)), \tilde{\theta}_{FO-\epsilon}(\cdot) \times l \rangle \quad (8)$$

### 2.3.3 LDP机制下的 $top - k$ 频繁模式聚合

在满足LDP隐私保证的同时, 聚合有效的频繁模式, 并且发布出 $top - k$ 的频繁模式及其支持度。

## 2.4 现有方案

文献[8]首次提出LDP机制下的 $top - k$ 频繁项集挖掘方法, 分别为SVIM和SVSM。其中SVIM方法用于获得 $top - k$ 的频繁1-itemset结果 $S'$  (即LDP的 $top - k$ 频率估计), 然后利用所得 $S'$ 信息, 通过SVSM方法获得 $top - k$ 的 $\alpha - itemset (\alpha > 1)$ 结果。然而, SVSM在进行 $k$ 值较大时的挖掘任务时, 会产生非常大的额外计算开销。所以, 本文针对频繁项集挖掘任务, 同样利用SVIM获得 $S'$ , 然后通过引入FPgrowth方法进行 $\alpha - itemset (\alpha > 1)$ 挖掘任务。

### 2.4.1 方案介绍

- 1、SVIM用于发布 $top-k$ 的 $1-itemset$ （SVIM方法实现了LDP机制的 $top-k$ 频率估计任务）；
- 2、SVSM用于发布 $top-k$ 的 $\alpha-itemset(\alpha > 1)$ 。

**SVSM步骤：**SVIM获得 $1-itemset$ 结果 $S' \Rightarrow$  以 $S'$ 构建并选择 $top-2k$ 的候选集 $IS \Rightarrow$  以 $IS$ 进行SVIM方法获得 $top-k$ 的 $\alpha-itemset(\alpha > 1)$ 。

**SVSM候选集 $IS$ 构建——SVSM的主要步骤**

$$\varphi(X) = \prod_{x \in X} \mu(x), \mu(x) = \frac{0.9 \times \tilde{\theta}(x)}{\max_{x \in S'} \tilde{\theta}(x)} \quad (9)$$

$x$ 为 $S'$ 中的某个项目， $\tilde{\theta}(x)$ 为 $S'$ 中项目 $x$ 的估计频率。

例：假设 $k = 4$ 通过SVIM方法获得的 $1-itemset$ 结果为 $S' = \{c : 4, f : 4, a : 3, b : 3\}$ ，则构建候选集 $IS$ 步骤如下：

- 1) 计算 $t = \lfloor \log_2 k \rfloor = 2$ ；
- 2)  $k = 4$ 个项目共计有 $2^k$ 种组合，先筛选项目个数大于1且不小于 $t$ 的组合，并且利用公式(9)分别组合的推测频数；如：通过计算组合 $(c, f)$ 的推测频率为0.81、组合 $(c, a)$ 的推测频率为0.6075
- 3) 以推测频率进行排序，选择频率的 $top-2k$ 个组合作为候选集 $IS$ 。

### 2.4.2 方案缺点

SVSM以SVIM的 $top-k$ 频繁 $1-itemset$ 结果 $S'$ 作为输入，然后使用公式（9）计算出所有可能项集的推测频数，用于构建出候选集 $IS$ 。在 $IS$ 的构建过程中， $k$ 个项目生成共计有 $2^k - k$ 个 $\alpha-itemset(\alpha > 1)$ 项目集合

$$2^k = \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{t} + \dots + \binom{k}{k} \quad (10)$$

而SVSM方法通过将 $t$ 限制为 $t = \lfloor \log_2 k \rfloor$ ，保证其推测频数的计算空间为 $O\left(\binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{t}\right)$ 。然而，随着 $k$ 值的增大，计算开销也会明显增大（详见5.1节）。

## 3 本文工作

通过SVSM方法的介绍可知，该方法在 $k$ 值较大时，开销会很大。本文利用频繁模式树对用户数据的压缩存储特性，结合FPgrowth的挖掘算法，实现了快速且高效的LDP模式挖掘方法。总体流程如算法1所示。

### 算法1简介

步骤1使用分组的方式将总用户分为三组，让不同的组内用户以全部隐私预算参与不同的聚合过程，3.4节所述，这样会降低误差；

步骤2利用SVIM方法在LDP场景下聚合 $top-k$ 的 $1-itemset$ 集合 $S' = \{x^1 : \tilde{\theta}^1, x^2 : \tilde{\theta}^2, \dots, x^k : \tilde{\theta}^2\}$ ，然后公开 $S$ 的信息；

步骤3至8的目的是将用户原始记录中非频繁的项目剪枝删除，因为频繁项集的Apriori属性，非频繁项目，不可能产生频繁项集，故删除是合理的；

步骤9进行最大迭代次数的估计，即树的最大深度估计，见3.5节；

步骤10是本文主要工作部分，即在LDP场景下建立频繁模式树，详见3.1节；

步骤11是对模式树的挖掘过程，由于过程于文献[2]相同，故不详细介绍。

**Algorithm 1** LDP建树总步骤**Input:**

$n$ 位用户的交易数据集  $DB = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ ;  
 $d$ 个项目组成的值域  $I = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ ;  
 正整数  $k$ ; 隐私预算  $\epsilon$ ;

**Output:**  $top - k$  的频繁项集

```

1: 将数据集  $DB$  按比例分为三个互斥的子组  $DB_1$ 、 $DB_2$  和  $DB_3$ :
    $|DB_1| = n_1 = 0.5n, |DB_2| = n_2 = 0.1n, |DB_3| = n_3 = 0.4n$ 
2:  $DB_1$  的用户执行  $SVIM$  方法得到  $top - k$  频繁  $1 - itemset$  集合
    $S' = \{x^1 : \tilde{\theta}^1, x^2 : \tilde{\theta}^2, \dots, x^k : \tilde{\theta}^2\}$ 
3: for each  $t_j \in DB_2 \cup DB_3$  do
4:   // 预处理数据集
5:    $t = t_j \cap S$ ;
6:   以  $S'$  中项目顺序对  $t$  进行排序;
7:   将处理后的记录  $t$  作为用户  $j$  的隐私数据;
8: end for
9:  $M = \text{算法3估计最大迭代次数}(DB_2, k, \epsilon)$ ;
10:  $tree = \text{算法2建树}(DB_3, S', \epsilon, M)$ ;
11:  $top - k = \text{FPgrowth}(tree)$ ; // 挖掘过程详见文献
12: 对  $top - k$  结果进行优化; // 见4.4节
13: return  $top - k$ 

```

步骤12是差分隐私的后处理步骤，不消耗隐私预算，也不会泄露用户隐私。

**总结：**算法1是整个机制的总体流程，步骤2与步骤9过程与文献[8]所用方法相似，为已有方法；本文只是在步骤9时，修改了部分参数的值，具体如下：

1、长度估计时， $SVIM$  设置参数  $\gamma = 0.9$ ，本文设置  $\gamma = 0.8$  用于估计树的最大深度；

2、在临界值的设置中， $SVIM$  设置  $T = F^{-1} \left( 1 - \frac{0.05}{2k} \right) \sqrt{Var}$ ，其中  $F$  为标准正态分布的CDF，将所得的估计结果不大于  $T$  的记为无效估计，令为0；本文设置  $T = \frac{\sqrt{n}}{\epsilon}$ ，详见3.5节。

### 3.1 LDP机制下的频繁模式树层次建立

根据算法1可知，建立频繁模式树的前提，是在已知  $1 - itemset$  结果  $S'$ ，以及预处理之后的数据集  $DB'$ ，即以图2所示数据记录建立模式树，LDP场景下的建树步骤具体如下：（记树中根节点为第  $level = 0$  层，向下依次递增）

1、初始化树的根节点  $root$ ，为树的  $level = 0$  层；

2、第  $level = 1$  层树节点聚合；对预处理后的交易记录进行一次LDP频率估计，如下

如用户  $u_1$  预处理后的交易为  $c, f, a, p$ ，则其当前阶段的隐私信息为其前  $level = 1$  个项，即为  $c$ ；

用户  $u_2$  预处理后的交易为  $c, f, a, b$ ，则其隐私信息为  $c$ ；

用户  $u_3$  预处理后的交易为  $f, b$ ，则其隐私信息为  $f$ ；用户  $u_4$  的隐私信息为  $c$ ；用户  $u_5$  的隐私信息为  $c$ 。

则经过第三方聚合后，得到结果为  $\{(c, 4), (f, 1)\}$ ，然后建第  $level = 1$  层树节点，如图4所示，其中由于FO协议的特性，需要已知聚合的值域，也就是当前层的所有可能节点（见3.2），图中计数为0的节点为无效节点。

3、第  $level = 2$  层树节点聚合；

用户  $u_1$  预处理后的交易为  $c, f, a, p$ ，则其当前阶段的隐私信息为其前  $level = 2$  个项，即为  $(c, f)$ ；

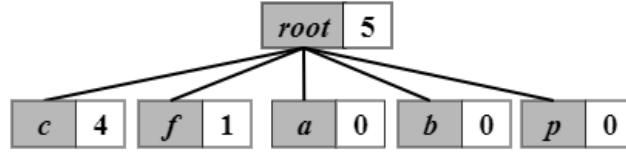


图 4: 第1层树节点

用户 $u_2$ 的隐私信息为 $(c, f)$ , 用户 $u_3$ 的隐私信息为 $(f, b)$ , 用户 $u_4$ 的隐私信息为 $(c, b)$ , 用户 $u_5$ 的隐私信息为 $(c, f)$

第三方聚合结果为 $\{(c, f, 3), (c, b, 1), (f, b, 1)\}$ , 根据路径建立第 $level = 2$ 层树节点,如图5所示:

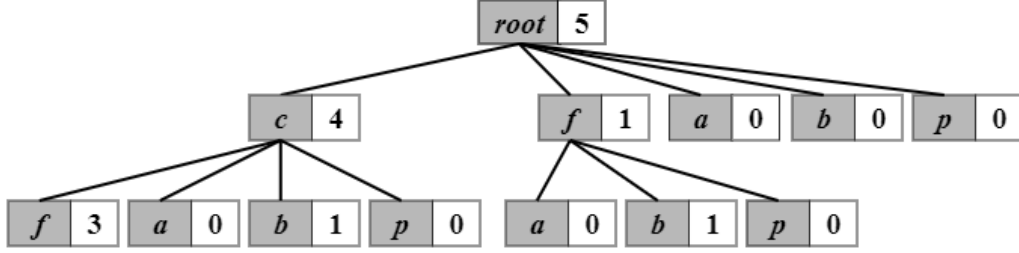


图 5: 第2层树节点

4、依层次 $level$ 递增顺序, 直到达到树的最大层数, 建立模式树如图6所示。

**总结:** 算法2为层次建树具体过程。

**存在问题:** 上述建树过程仍然存在以下问题, 对问题的具体解决过程见下文:

- Q1、 LDP机制下如何进行每层节点的频数聚合;
- Q2、 set-valued场景用户记录长度不固定且随机, 聚合过程中, 用户记录可能为空;
- Q3、 隐私预算 $\epsilon$ 的分配;
- Q4、 树的最大层次。

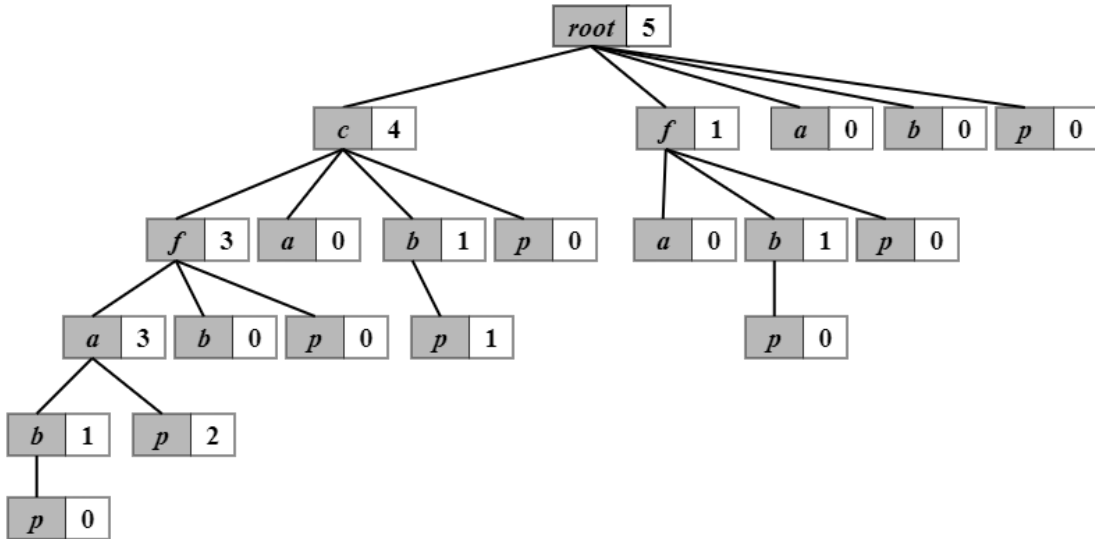


图 6: 模式树



**Algorithm 2** 建树**Input:**

频繁1-itemset集合  $S' = \{x^1 : \tilde{\theta}^1, x^2 : \tilde{\theta}^2, \dots, x^k : \tilde{\theta}^2\}$ ;  
 预处理后的数据集  $DB'_3$ ;  
 正整数  $k$ ; 隐私预算  $\epsilon$ ;  
 最大迭代次数  $M$ ;

**Output:** 模式树

```

1: 初始化树根结点  $root$  为空;
2: 初始化候选值域  $I'_1$  为  $S'$  中项目, 作为第一层次的LDP聚合值域;
3: 将  $DB'_3$  均分为  $M$  个人数相同的子组
    $G_1, G_2, \dots, G_M$ ;
4: 初始化FO协议标准差为  $standard\_error$  ;
5: for 层次  $j = 1$  to  $M$  do
6:   FO协议聚合  $estimation = Aggregate(I'_j, j, G_j)$ ;
   //用户使用前  $level$  个项目参与, 若无记录, 则以无效值  $\perp$  参与。
7:   删除  $estimation$  中估计值不大于  $standard\_error$  的结果;
   //无效值  $\perp$  不用于建树。
8:   以  $estimation$  聚合结果更新第  $j$  层树  $root$  节点;
9:   根据第  $j$  层节点, 生成所有可能的孩子节点, 作为下一层初始值域  $I_{j+1}$ ;
10:   $I'_{j+1} = \text{算法4}(I_{j+1}, S', k, \xi)$ 
11: end for
12: return  $root$ 

```

**3.2 Q1——模式树的LDP机制下层次建立**

在使用FO频率估计协议进行当前第  $j$  层数据聚合时, 首先需要解决的问题是如何确定输出值域  $I_j$ ?

**基本方法** 由模式树层次建立的特性, 第  $j$  层节点的信息, 不仅与FO协议的聚合结果相关, 而且与第  $j-1$  层保留的节点有关 (因为无效节点不会产生下一层的节点)。所以, 一种生成  $I_j$  的直接方法是依据第  $j-1$  层保留节点的信息, 生成所有可能的孩子节点作为  $j$  层初始节点, 然后将其作为  $I_j$  使用FO协议聚合。

以图6为例, 第0层初始为根节点  $root$

当  $j = 1$  时, 其上一层为根节点, 则  $I_1$  初始为所有1-itemset, 即  $I_1 = \{(c), (f), (a), (b), (p)\}$ ;

当  $j = 2$  时, 第1层保留的有效节点为  $\{(c), (f)\}$ , 所有可能的孩子节点路径为  $\{(c, f), (c, a), (c, b), (c, p), (f, a), (f, b), (f, p)\}$  为  $I_2$ ; (1-itemset的项目顺序为  $c, f, a, b, p$ , 模式树中的节点的孩子, 对应项目的顺序要小于其父节点对应项目)

同理可得,  $I_3 = \{(c, f, a), (c, f, b), (c, f, p), (c, b, p)\}$ ,  $I_4 = \{(c, f, a, b), (c, f, a, p)\}$ ,  $I_5 = \{(c, f, a, b, p)\}$

**优化方法**

上述方法的缺点在于, 当  $S'$  中的项目增多或者上一层保留节点个数较多时, 进行下一层节点聚合所得值域的大小  $\|I_j\| = d_j$  会明显变大。而LDP的FO协议的估计精确度与  $d_j$  呈正相关, 如GRR方法的估计方差与  $d_j$  为线性关系, 而OLH方法的方差虽然与  $d_j$  无关, 但是其使用了  $hash$  函数将  $d_j$  映射到  $g = \lceil e^\epsilon + 1 \rceil$  范围, 随着  $d_j$  的增大, 在进行统计时,  $hash$  碰撞也会明显增多, 导致精确度的降低。

为了减小  $d_j$ , 从而提高估计准确度, 本文提出值域筛选的进一步方法, 将  $d_j$  进一步限制在大小为  $3k \ll d_j$ , 且整个过程不消耗隐私预算。详见4.1节。

### 3.3 Q2——用户记录为空或项目个数少于当前树的层次

若用户在当前阶段的记录项目个数小于层次 $j$ 或所得值域 $I_j$ 中不包含用户的记录, 那么, 则该用户以给定无效值 $\perp$ 为原始数据进行扰动, 然后提交扰动结果。此时的值域则为 $I_j \cup \perp$

### 3.4 Q3——隐私预算分配

文献[6]指出, 若给定最大迭代次数 $M$ , 可将用户分为 $M$ 个互不相交的小组, 每组以全部隐私预算 $\epsilon$ 参与一次聚合过程, 且不重复参与。(对于 $M$ 的确定, 见3.5节)

其同时指出, 上述分配方式, 与均分隐私预算为 $\epsilon/M$ , 用户参与所有过程( $M$ 次)的方式相比, 减小了误差为 $O(\sqrt{M})$ 倍。

### 3.5 Q4——树最大层次

若不考虑用户隐私, 最大迭代次数即为用户预处理后的项目记录最大长度, 如图2所示, 记录最大长度为5, 则树的最大层次为5(根结点为第0层)。

但是由于记录的长度也属于敏感信息, 在LDP机制下, 由于长度是不固定且随机的。本文以FO协议, 先对用户的记录长度进行一次聚合, 从所得结果中确定最大层次。其过程与文献[8]中对 $L$ 值的确定相似, 本文对其中一些参数值做了修改, 具体见算法3。

---

**Algorithm 3** 估计最大迭代次数
 

---

**Input:** 预处理后的数据集 $DB'_2$ ; 正整数 $k$ ; 隐私预算 $\epsilon$ ;  
**Output:** 最大迭代次数

- 1: 初始化临界值 $T = 3.0 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\epsilon}$ ; /\* $n$ 为 $DB'_2$ 的用户总数\*/
- 2: **for** each  $t_i \in DB'_2$  **do**
- 3:   //用户端扰动
- 4:    $x = |t_i|$ ;
- 5:   利用公式(5)得到扰动结果 $y = f_{OLH-\epsilon}(x)$ , 然后将 $y$ 提交给第三方;
- 6: **end for**
- 7: **for** each  $m \in \{1, 2, \dots, k\}$  **do**
- 8:   //第三方聚合
- 9:   利用公式(6)计算出长度为 $m$ 的用户估计人数 $\tilde{\theta}_{OLH-\epsilon}(m)$ ;
- 10:   **if**  $\tilde{\theta}_{OLH-\epsilon}(m) \leq T$  **then**
- 11:      $\tilde{\theta}_{OLH-\epsilon}(m) = 0$ ;
- 12:   **end if**
- 13: **end for**
- 14: 利用公式(8)在 $\gamma = 0.8$ 时的整数值 $M$ ;
- 15: **return** 最大迭代次数 $M$

---

类似文献[6]所设置最大误差方法, 由伯恩斯坦不等式可得, OLH聚合算法, 对任意项目 $x$ 的估计频数 $\tilde{C}(x)$ 与真实频数 $C(x)$ , 以至少 $1 - \beta$ 的概率, 当 $\lambda = O\left(\frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{\ln(1/\beta)}}{\epsilon}\right)$ 时, 不等式 $|\tilde{C}(x) - C(x)| < \lambda$ 成立。

本文设置 $T = 3.0 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\epsilon}$ 为最大误差临界值, 用于筛选估计结果, 见算法3步骤1。

算法3步骤14中,  $\gamma = 0.8$ 的取值时一个权衡, 根据实际情况进去修改(文献[8]使用值为0.9)。若 $\gamma$ 越大, 迭代次数 $M$ 越大, 会保留更多的用户信息, 其估计值的累计误差(均值平方误差)会降低, 但是由于迭代次数的增多, 结果的命中率会有所降低。

## 4 优化

本章介绍了对模式树构建方法的进一步优化过程

### 4.1 值域筛选

本文最终目的在于发布 $top-k$ 的频繁 $\alpha-itemset$  ( $\alpha > 1$ ) 结果, 如3.2节所述, 值域大小直接影响着估计结果的准确度, 本节详细介绍了对值域的进一步筛选过程。

在值域筛选过程中, 利用文献[8]的SVSM方法思想, 即根据 $1-itemset$ 结果计算项集 $X$ 的推测频率 (公式(9)), 然后排序选择 $top-2k$ 个结果作为候选集进行LDP的聚合。

类似于上述方法, 本文在进行第 $j$ 层聚合时, 对其初始值域 $I_j$ 进行了一次的频数推测, 然后筛选出 $top-\xi \cdot k$ 个作为最终值域 $I'_j$  (实验中 $\xi = 3$ )。由于在该过程中, 初始值域 $I_j$ 中项集的长度必然为 $j$ , 即属于 $j-itemset$ , 所以公式 (9) 可直接省略为  $\varphi(X) = \prod_{x \in X} \tilde{\theta}(x)$ 。具体过程见算法4。

---

#### Algorithm 4 值域筛选

---

**Input:**

候选值域 $I_j$ ;  
1-itemset结果 $S'$ ;  
正整数 $k$ ;  
参数 $\xi$ ;

**Output:** 筛选后值域 $I'_j$

```

1: if  $I_j$  的长度不大于  $4k$  then
2:    $I'_j = I_j$ ;
3: else
4:   初始化  $I'_j = \emptyset$ ;
5:   for each 项集  $X \in I_j$  do
6:      $\varphi(X) = \prod_{x \in X} \tilde{\theta}(x)$ ; //  $\tilde{\theta}(x)$  为 1-itemset 集合  $S$  中估计频数值。
7:      $I'_j = I'_j \cup X$ , 并记录  $\varphi(X)$ 
8:   end for
9:   以  $\varphi(X)$  为标准, 对  $I'_j$  中项集排序;
10:  选择  $top - \xi \cdot k$  赋值给  $I'_j$ 
11: end if
12: return  $I'_j$ 

```

---

### 4.2 临界值设置

根据4.1节所述方法确定值域后, 以FO协议聚合出该阶段用户的信息, 即为树当前层节点所需保留的信息。然而由于估计误差的存在, 聚合结果中存在许多无效的估计 (如: 估计频数为负数等), 本文通过设置临界值 $error$ 对聚合结果进一步筛选, 将所有估计频数不大于 $error$ 的结果删除。 $error$ 值的设置一方面要尽可能多的删除无效节点, 另一方面也要将有效节点尽可能多的保留。本文设置的误差临界值为 $error = \sqrt{Var}$ , 即LDP聚合协议的估计标准差。

(类似误差值的设置有三种方法: )

- 1、 $error_1 = \sqrt{Var}$ , 即标准差;
- 2、文献[7, 9, 8],  $error_2 = T = F^{-1} \left( 1 - \frac{0.05}{2k} \right) \sqrt{Var}$ ,  $F^{-1}$ 为标准正态分布的CDF的倒数。
- 3、文献[6],  $error_3 = 3.0 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\epsilon}$ , 其根据伯恩斯坦不等式求得最大误差边界 (3.5节)

(三者的关系为 $error_1 < error_2 < error_3$ )

### 4.3 约束推理——一致性矫正，该部分仍然达不到预期效果，导致具体实验结果的均值平方误差与对比方案相比偏高

设 $v$ 表示树中某节点，其相应的计数值为 $v.count$ ，则对于节点 $v$ 应有以下约束：

- 1)、无偏估计： $\mathbb{E}[\tilde{C}(v.count)] = \mathbb{E}[C(v.count)]$ ；即对节点的计数值的估计保证无偏（FO协议）
- 2)、父节点计数值不小于孩子节点计数之和，记 $v.children$ 表示 $v$ 的所有孩子节点集合，假设有 $r$ 个：

$$\mathbb{E}[\tilde{C}(v.count)] \geq \sum_{y \in v.children} \mathbb{E}[\tilde{C}(y.count)] \quad (11)$$

文献[3, 6, 4]等均研究了不同场景下的约束推理方式，其中文献[6]对两次的聚合结果进行矫正，不适用于本文场景；而文献[3, 4]均是DP机制下的约束推理。

具体矫正步骤：

### 4.4 加权组合

根据本文算法构建模式树，以最小支持度为0对树使用FP-growth算法[2]所得到的所有频繁项集结果（不含 $1 - itemset$ ）为 $IS' = \{X_1 : \tilde{\theta}(X_1), X_2 : \tilde{\theta}(X_2), \dots, X_s : \tilde{\theta}(X_s)\}$ ，共 $s$ 个为模式树中挖掘的项集及其频数。文献[8]指出，对某项集 $X$ 可通过公式（9）计算出其推测频数 $\varphi(X)$ ，然后得到其相对顺序。

本文同样利用该推测频数信息，对估计结果，进行进一步的优化：

- 1、对频数结果加权组合

$$\tilde{\theta}'(X) = \omega \cdot \tilde{\theta}(X) + (1 - \omega) \cdot \varphi(X) \quad (13)$$

- 2、以加权结果的 $top - k$ 项集作为最终输出的项目集合

## 5 实验

记 $X_{estimate} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ 与 $X_{correct}$ 分布表示 $top - k$ 估计结果与真实结果，则 $X_{cap} = X_{estimate} \cap X_{correct}$ 表示算法正确命中的项集。

评价指标[8]：

- 1、**NCR**(命中率)：

$$NCR = \frac{\sum_{X \in X_{estimate}} q(X)}{\sum_{X \in X_{correct}} q(X)}$$

其中 $q(X)$ 是评分，文献[8]将其根据 $X_{correct}$ 的排序，依次设置为 $k, k - 1, \dots, 1$ ，其他均为0。

- 2、**MSE**(误差——均值平方误差)：

$$MSE = \frac{1}{\|X_{cap}\|} \sum_{X \in X_{cap}} (\theta(X) - \tilde{\theta}(X))^2$$

其中 $\theta(X)$ 与 $\tilde{\theta}(X)$ 分布是 $X$ 的真实频数与估计频数。

数据集：

- 1、**Kosarak**：990002位用户的网页点击数据，总项目个数为41270，用户平均项目长度8.0，最大项目长度2498。

2、**BMS-POS**: 515597位用户的商品购买数据，总项目个数为1657，用户平均项目长度6.5，最大项目长度164。

### 5.1 计算开销

以下对比的开销只针对在值域筛选的搜索空间（搜索空间内排序并筛选得到值域的额外计算开销），其中对比方案的搜索空间大小只与 $k$ 有关，根据公式(9)计算得到，而本文方案的搜索空间是在实验过程中总搜索空间（本文方案搜索空间与 $k, \epsilon$ 以及数据集都有关，其中 $\epsilon$ 和数据集会影响树中每层节点的保留数，保留节点越多，搜索空间越大）。以下结果是在 $\epsilon = 2.0$ 时的搜索空间对比。

k	计算开销		
	对比方案	本文方案( $\epsilon = 2$ )	
		POS数据集	Kosarak数据集
50	2369885.0	6100.4	5537.5
75	219904690.0	12807.15	10916.0
100	1271427795.0	22979.6	17107.0
125	4935173650.0	33532.8	24959.5
150	309019152705.0	46129.3	33036.5

表 1: 开销对比

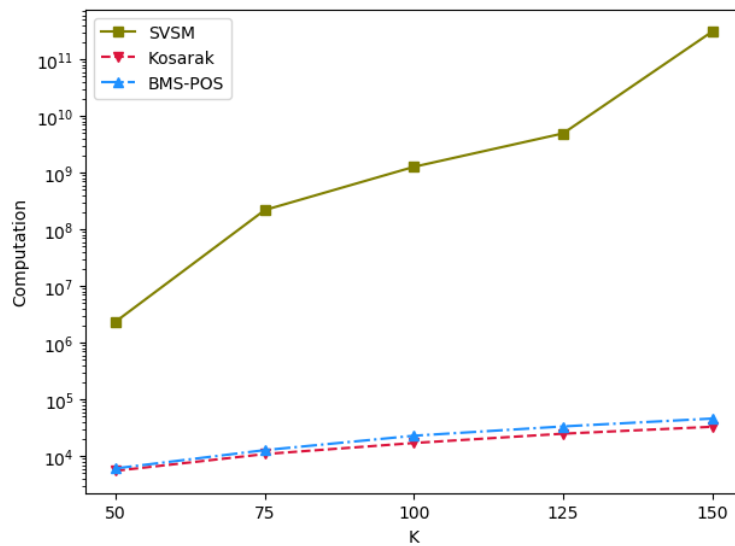


图 7: 计算开销

## 5.2 评分结果——该部分结果显示在高预算情况下，均值平方误差对比方案高

图中Origin线是未进行加权组合结果，即权值 $\omega = 1$ ；而SVSM线是本文的对比方案；Linear线是在 $\omega = 0.8$ 取值下的结果。

**Kosarak数据集**

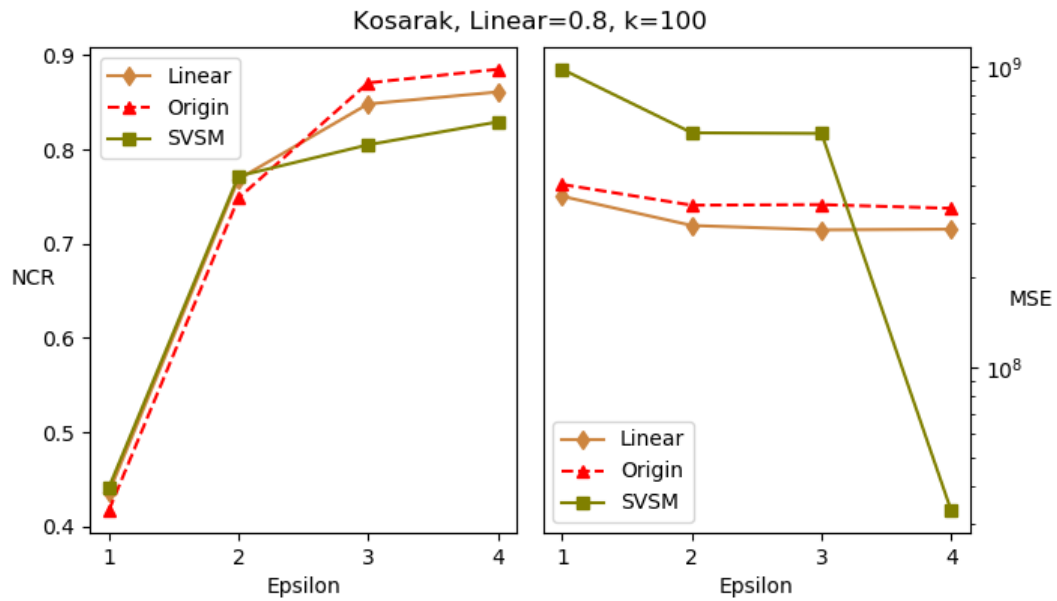


图 8: Kosarak数据集,  $Linear = 0.8, k = 100$ 时不同 $\epsilon$ 对比

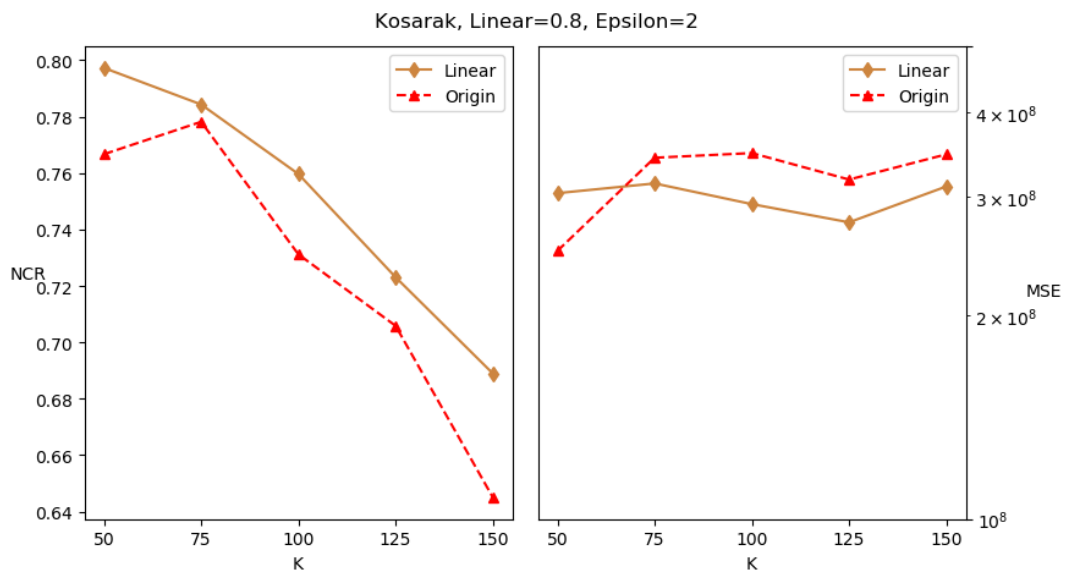
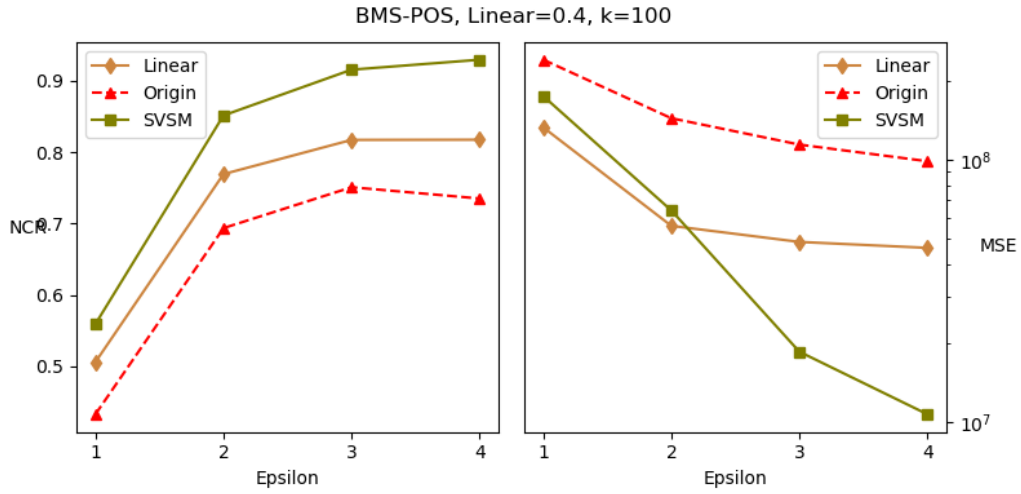
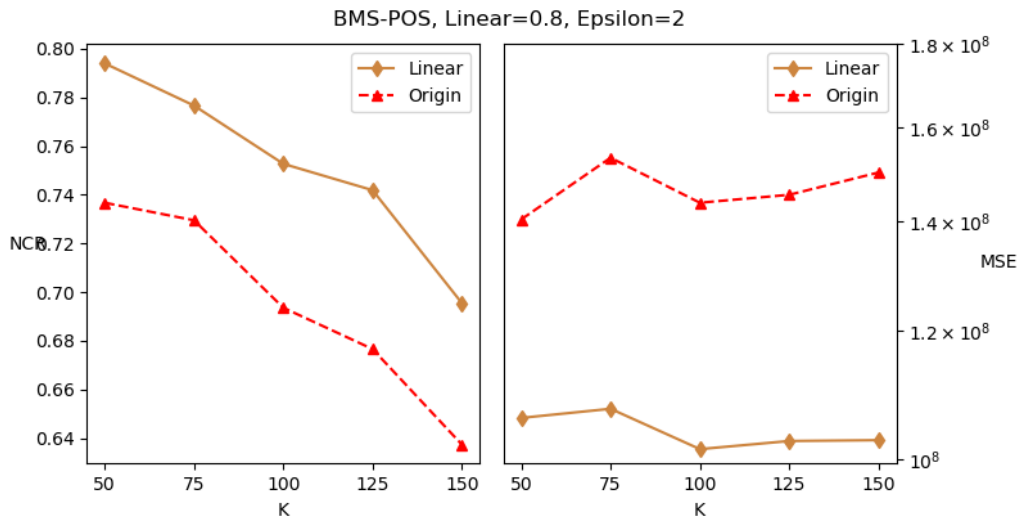


图 9: Kosarak数据集,  $Linear = 0.8, \epsilon = 2$ 时不同 $k$ 对比

## BMS-POS数据集

图 10: BMS-POS数据集,  $Linear = 0.4, k = 100$ 时方案对比图 11: BMS-POS数据集,  $Linear = 0.8, \epsilon = 2$ 时不同 $k$ 对比

## 5.3 加权组合

图中Origin线是未进行加权组合结果, 即权值 $\omega = 1$ ; 而SVSM线是本文的对比方案; Linear线不同 $\omega$ 取值下的结果。

5.3.1 BMS-POS数据集不同 $\epsilon$ 取值下的对比

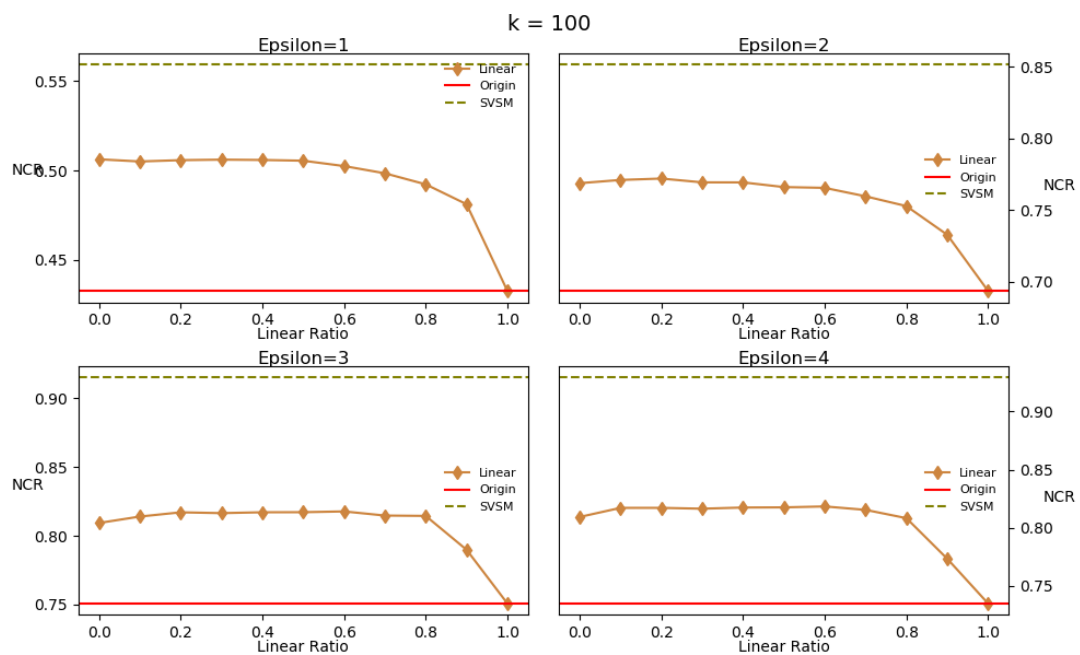


图 12: BMS-POS命中率NCR对比

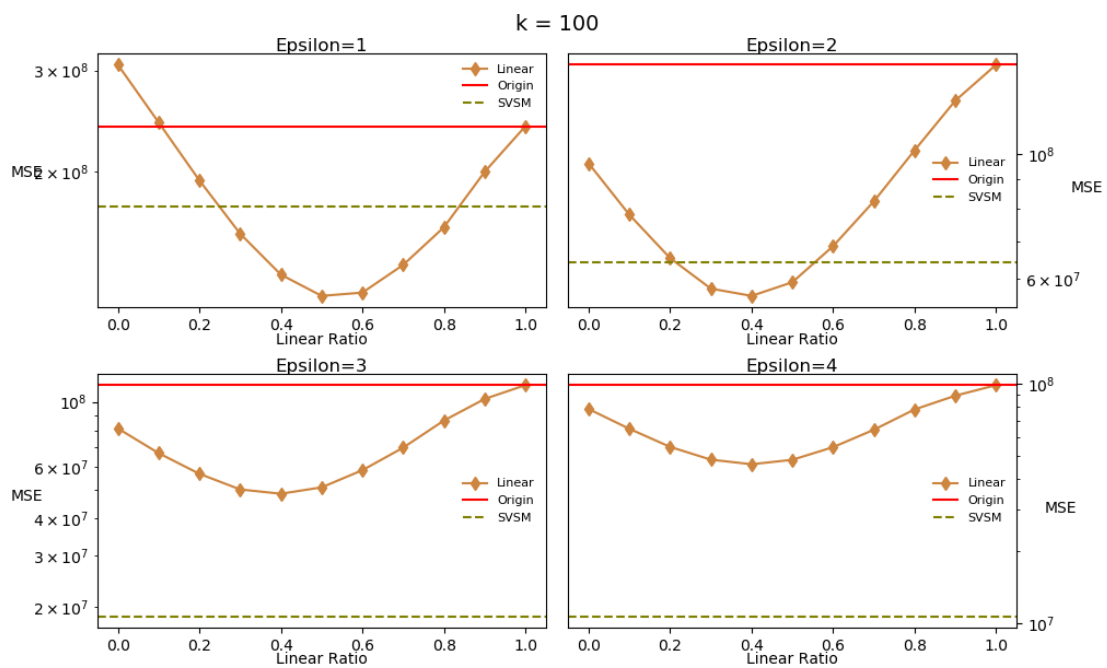


图 13: BMS-POS误差MSE对比



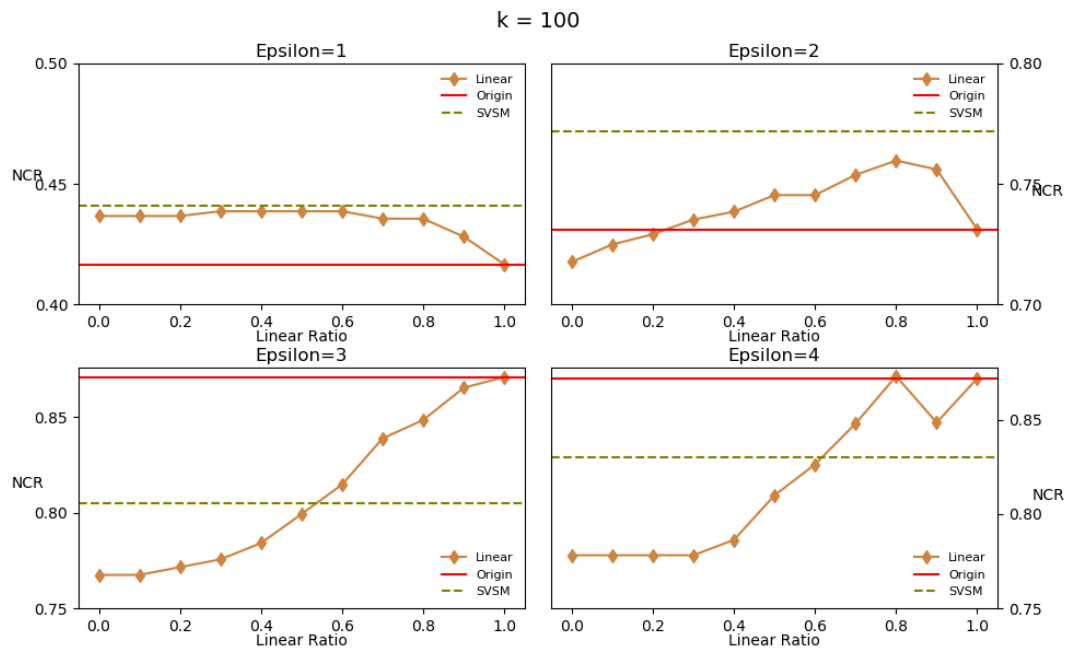
5.3.2 Kosarak数据集不同 $\epsilon$ 取值下的对比

图 14: Kosarak命中率NCR对比

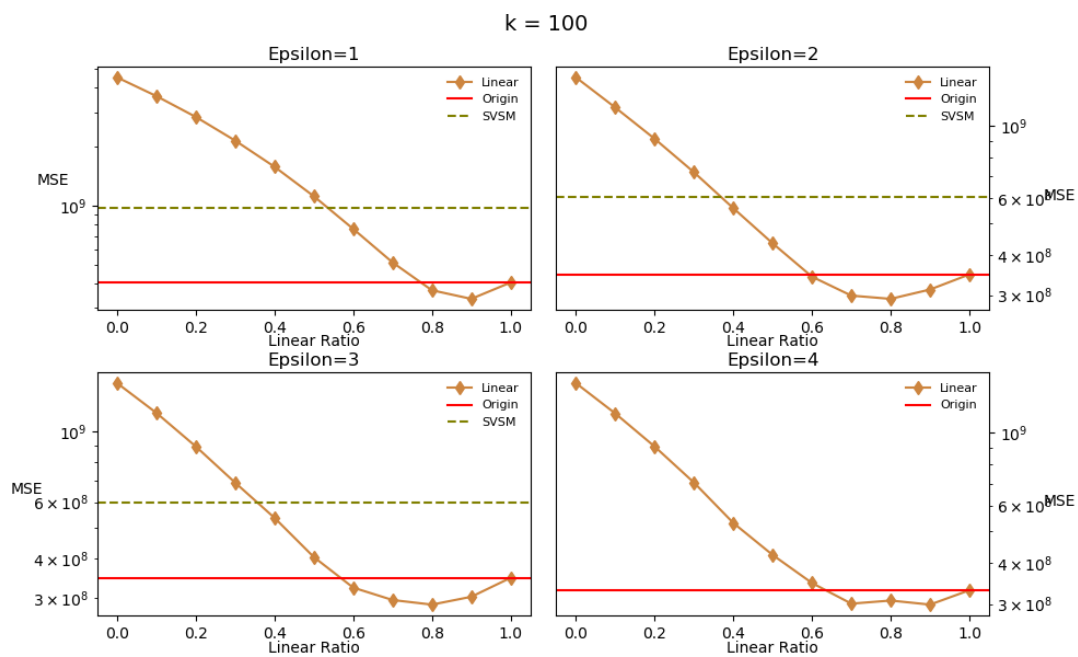


图 15: Kosarak误差MSE对比

## Reference

- [1] Rakesh Agrawal, Ramakrishnan Srikant, et al. Fast algorithms for mining association rules. In *Proc. 20th int. conf. very large data bases, VLDB*, volume 1215, pages 487–499, 1994.
- [2] Jiawei Han, Jian Pei, and Yiwen Yin. Mining frequent patterns without candidate generation. In *ACM sigmod record*, volume 29, pages 1–12. ACM, 2000.
- [3] Michael Hay, Vibhor Rastogi, Gerome Miklau, and Dan Suciu. Boosting the accuracy of differentially private histograms through consistency. *Proceedings of the VLDB Endowment*, 3(1-2):1021–1032, 2010.
- [4] Jaewoo Lee and Christopher W Clifton. Top-k frequent itemsets via differentially private fp-trees. In *Proceedings of the 20th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, pages 931–940. ACM, 2014.
- [5] Zhan Qin, Yin Yang, Ting Yu, Issa Khalil, Xiaokui Xiao, and Kui Ren. Heavy hitter estimation over set-valued data with local differential privacy. In *Proceedings of the 2016 ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security*, pages 192–203. ACM, 2016.
- [6] Ning Wang, Xiaokui Xiao, Yin Yang, Ta Duy Hoang, Hyejin Shin, Junbum Shin, and Ge Yu. Privtrie: Effective frequent term discovery under local differential privacy. In *2018 IEEE 34th International Conference on Data Engineering (ICDE)*, pages 821–832. IEEE, 2018.
- [7] Tianhao Wang, Jeremiah Blocki, Ninghui Li, and Somesh Jha. Locally differentially private protocols for frequency estimation. In *26th {USENIX} Security Symposium ({USENIX} Security 17)*, pages 729–745, 2017.
- [8] Tianhao Wang, Ninghui Li, and Somesh Jha. Locally differentially private frequent itemset mining. In *2018 IEEE Symposium on Security and Privacy (SP)*, pages 127–143. IEEE, 2018.
- [9] Stanley L Warner. Randomized response: A survey technique for eliminating evasive answer bias. *Journal of the American Statistical Association*, 60(309):63–69, 1965.