凸优化

question1

证明如果 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中的凸集，那么它们的部分和 $\mathcal{S}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y_2})|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in\mathbb{R}^n,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)\in\mathcal{S}_1,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)\in\mathcal{S}_2\}$ 也是凸的。

solve1

欲证明 $\mathcal{S}$ 为凸，只需证明对于任意 $(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{z_1}),(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{z_2})\in\mathcal{S}$，$\theta\in[0,1]$ 有 $\theta(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{z_1})+(1-\theta)(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{z_2})\in\mathcal{S}$。（其中 $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$，$\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{y}_3+\boldsymbol{y}_4$，$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_3)\in\mathcal{S}_1$，$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_2),(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_4)\in\mathcal{S}_2$）。

$$
\begin{aligned}
\theta(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{z_1})+(1-\theta)(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{z_2}) =&(\theta\boldsymbol{x}_1+(1-\theta)\boldsymbol{x}_2,\theta\boldsymbol{z}_1+(1-\theta)\boldsymbol{z}_2)\\
=&(\theta\boldsymbol{x}_1+(1-\theta)\boldsymbol{x}_2,\theta\boldsymbol{y_1}+(1-\theta)\boldsymbol{y_3}+\theta\boldsymbol{y_2}+(1-\theta)\boldsymbol{y_4})\\
=&(\theta\boldsymbol{x}_1+(1-\theta)\boldsymbol{x}_2,\theta\boldsymbol{y_1}+(1-\theta)\boldsymbol{y_3})\\
&\oplus(\theta\boldsymbol{x}_1+(1-\theta)\boldsymbol{x}_2,\theta\boldsymbol{y}_2+(1-\theta)\boldsymbol{y}_4)\\
=&\boldsymbol{s}_1\oplus\boldsymbol{s}_2
\end{aligned}
$$

其中 $\oplus$ 代表部分和。
根据凸集的性质自然有 $(\theta\boldsymbol{x}_1+(1-\theta)\boldsymbol{x}_2,\theta\boldsymbol{y}_1+(1-\theta)\boldsymbol{y}_3)=\theta(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1})+(1-\theta)(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_3)=\boldsymbol{s}_1\in\mathcal{S}_1$，$(\theta\boldsymbol{x}_1+(1-\theta)\boldsymbol{x}_2,\theta\boldsymbol{y_2}+(1-\theta)\boldsymbol{y}_4)=\theta(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_2})+(1-\theta)(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_4)=\boldsymbol{s}_2\in\mathcal{S}_2$。根据 $\mathcal{S}$ 的定义，自然有 $\boldsymbol{s_1}\oplus\boldsymbol{s_2}\in\mathcal{S}$，这说明 $\mathcal{S}$ 是一个凸集。

question2

对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，用 $\boldsymbol{x}_{[i]}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 中第 i 大的分量，即将 $\boldsymbol{x}$ 的分量按照非升序进行排列得到下式 $\boldsymbol{x}_{[1]} \geq \boldsymbol{x}_{[2]} \geq \ldots \geq \boldsymbol{x}_{[n]}$。证明对 $\boldsymbol{x}$ 的最大 r 个分量进行求和所得到的函数 $f(x) = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_{[i]}$ 是凸函数。

solve2

引理：对于 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$，$\max\limits_i\{\boldsymbol{x}\} = \max\limits_i\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是凸函数。证明如下：
任取 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，$\theta \in [0, 1]$，有

$$
\begin{aligned}
&\theta \max_i\{\boldsymbol{x}\} + (1-\theta) \max_i\{\boldsymbol{y}\} \\
=&\theta \max_i\{x_1, \ldots, x_n\} + (1-\theta) \max_i\{y_1, \ldots, y_n\} \\
=&\theta x_{[1]} + (1-\theta) y_{[1]} \\
\geq&\max_i\{\theta x_1 + (1-\theta) y_1, \ldots, \theta x_n + (1-\theta) y_n\} = \max_i\{\theta \boldsymbol{x} + (1-\theta) \boldsymbol{y}\}
\end{aligned}
$$

其中 $x_{[1]}$、$y_{[1]}$ 分别代表 $\{x_1, \ldots, x_n\}$、$\{y_1, \ldots, y_n\}$ 中最大的元素。
接着证明比题目更强的命题：对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，对 $\boldsymbol{x}$ 的最大 r 个分量进行求和所得到的函数 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_{[i]}$ **仍然**是凸函数。证明如下：
构造矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{C_n^r \times n}$，其中 $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$。矩阵 A 的每一行 $\boldsymbol{a}_k$ 由 r 个 1 和 $n-r$ 个 0 组成，容易证明 $\boldsymbol{a}_k$ 有 C_n^r 种组合方式。令 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}x$，则 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} \boldsymbol{x}_{[i]} = \max\limits_k\{\boldsymbol{b}\}$。根据**引理**可知，$\max\limits_k\{\boldsymbol{b}\}$ 为凸函数。
特别的，对于非升序排列的向量 $\boldsymbol{x}$，令 $\boldsymbol{a}_1 = [\underbrace{1, \ldots, 1}_{r\text{个}1}, 0, \ldots, 0]^T$，则 $f(x) \triangleq \max\limits_k\{\boldsymbol{b}\} = b_1 = \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x}$ 同样是一个凸函数。

question3

判断下列函数是否是凸函数、凹函数、拟凸函数以及拟凹函数？

(a) 函数 $f(x) = e^x - 1$，定义域为 $\mathbb{R}$。

(b) 函数 $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$，定义域为 $\mathbb{R}_{++}^2$。

(c) 函数 $f(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1x_2}$，定义域为 $\mathbb{R}^2_{++}$。

(d) 函数 $f(x_1,x_2)=\frac{x_1}{x_2}$，定义域为 $\mathbb{R}^2_{++}$。

(e) 函数 $f(x_1,x_2)=\frac{x_1^2}{x_2}$，定义域为 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{++}$。

(f) 函数 $f(x_1,x_2)=x_1^a x_2^{1-a}$，其中 $0\le a\le 1$，定义域为 $\mathbb{R}^2_{++}$。

solve3

容易验证，以上所有函数的定义域是凸集。并且我们通过顺序主子式讨论 Hessian 矩阵的正定性，在之后的证明过程中不再赘述。

(a) $f''(x)=e^x\ge 0$，根据图像易得其凹凸性。
结论：是凸函数，非凹函数，是拟凸函数，是拟凹函数。

(b) $\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 是不定的，所以非凸函数，非凹函数，是拟凸函数。而其 α 下水平集 $\mathcal{C}_\alpha=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_{++}|x_1x_2\le\alpha\}$ 不是凸集，所以非拟凸函数；其 α 上水平集 $\mathcal{S}_\alpha=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_{++}|x_1x_2\ge\alpha\}$ 是凸集，所以是拟凹函数。（这分别对应着正半轴上 $xy=k$ 双曲线的一支所分割成的两个平面）。
结论：非凸函数，非凹函数，非拟凸函数，是拟凹函数。

(c) $\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\frac{2}{x_1^3x_2} & \frac{1}{x_1^2x_2^2}\\ \frac{1}{x_1^2x_2^2} & \frac{2}{x_1x_2^3}\end{bmatrix}\succ 0$，是凸函数，非凹函数，是拟凸函数。而其 α 上水平集 $\mathcal{C}_\alpha=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_{++}|x_1x_2\le\alpha\}$ 不是凸集，所以非拟凹函数。
结论：是凸函数，非凹函数，是拟凸函数，非拟凹函数。

(d) $\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{x_2^2}\\ -\frac{1}{x_2^2} & \frac{2x_1}{x_2^3}\end{bmatrix}$ 是不定的。所以是非凸函数，非凹函数。而其 α 下水平集 $\mathcal{C}_\alpha=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_{++}|\frac{x_1}{x_2}\le\alpha\}$ 是凸集，所以是拟凸函数；而其 α 上水平集 $\mathcal{S}_\alpha=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_{++}|\frac{x_1}{x_2}\ge\alpha\}$ 是凸集，所以是拟凹函数（它们刚好都对应着半平面）。
结论：非凸函数，非凹函数，是拟凸函数，是拟凹函数。

(e) $\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\frac{2}{x_2} & -\frac{2x_1}{x_2^2}\\ -\frac{2x_1}{x_2^2} & \frac{2x_1^2}{x_2^3}\end{bmatrix}\succeq 0$，是凸函数，非凹函数，是拟凸函数。而其 α 上水平集 $\mathcal{S}_\alpha=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_{++}|\frac{x_1^2}{x_2}\geq\alpha\}$ 不是凸集，所以非拟凹函数。

结论：是凸函数，非凹函数，是拟凸函数，非拟凹函数。

(f) $\nabla^2 f(x_1,x_2)=\begin{cases}\boldsymbol{O}_{2\times2}, & a=1\ or\ 0\\ \begin{bmatrix}a(a-1)x_1^{a-2}x_2^{1-a} & a(1-a)x_1^{a-1}x_2^{-a}\\ a(1-a)x_1^{a-1}x_2^{-a} & a(a-1)x_1^{a}x_2^{-a-1}\end{bmatrix} & 0<a<1\end{cases}$

$\nabla^2 f(x_1,x_2)\preceq 0$，非凸函数，是凹函数，是拟凹函数。而其 α 下水平集 $\mathcal{C}_\alpha=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_{++}|x_1^a x_2^{1-a}\leq\alpha\}$ 不是凸集，所以非拟凸函数。

结论：非凸函数，是凹函数，非拟凸函数，是拟凹函数。

question4

考虑优化问题

$$\begin{aligned}\min_{x_1,x_2}\ & f_0(x_1,x_2)\\ \text{s.t.}\ & 2x_1+x_2\geq 1\\ & x_1+3x_2\geq 1\\ & x_1\geq 0, x_2\geq 0\end{aligned}$$

对其可行集进行概述。对下面每个目标函数，给出最优解和最优值。

(a) $f_0(x_1,x_2)=x_1+x_2$

(b) $f_0(x_1,x_2)=-x_1-x_2$

(c) $f_0(x_1,x_2)=x_1$

(d) $f_0(x_1,x_2)=\max\{x_1,x_2\}$

(e) $f_0(x_1,x_2)=x_1^2+9x_2^2$

solve4

构造拉格朗日函数 $L(x_1,x_2,\boldsymbol{\lambda})=f_0(x_1,x_2)+\lambda_1(1-2x_1-x_2)+\lambda_2(1-x_1-3x_2)+\lambda_3(-x_1)+\lambda_4(-x_2)$，其中 $\boldsymbol{\lambda}\geq 0$ 对于上述五个函数 $f_0(x_1,x_2)$，容易验证它们都是关于 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]^T$ 的凸函数。则 $\nabla_{\boldsymbol{x}}L(x_1,x_2,\boldsymbol{\lambda})=\nabla f_0(x_1,x_2)+(-2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3,-\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_4)$。
并且给出满足以下凸问题的 KKT 条件：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\geq 1, x_1+3x_2\geq 1, x_1\geq 0, x_2\geq 0 \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_2,\lambda_4\geq 0 \\ \lambda_1(1-2x_1-x_2)=0, \lambda_2(1-x_1-3x_2)=0, \lambda_3(-x_1)=0, \lambda_4(-x_2)=0 \\ \nabla_{\boldsymbol{x}}L(x_1,x_2,\boldsymbol{\lambda})=0 \end{cases}$$

先作简单的分析，在二维平面内的仿射约束只会重合或两两交于一点。这说明了互补松弛条件中，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 最多存在两个同时为 0。

(a) $f_0(x_1,x_2)=x_1+x_2$，最优解为 $(x_1,x_2)=(\frac{2}{5},\frac{1}{5})$，最优值为 $\frac{2}{3}$

(b) $f_0(x_1,x_2)=-x_1-x_2$，不存在最优解与最优值（最优解为 $(+\infty,+\infty)$ 最优值为 $-\infty$）

(c) $f_0(x_1,x_2)=x_1$，最优解为 $(x_1,x_2)=(0,x_2)$，其中 $x_2\geq 1$，最优值为 0

(d) $f_0(x_1,x_2)=\max\{x_1,x_2\}$，最优解为 $(x_1,x_2)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，最优值为 $\frac{1}{3}$

(e) $f_0(x_1,x_2)=x_1^2+9x_2^2$，最优解为 $(x_1,x_2)=(\frac{1}{2},\frac{1}{6})$，最优值为 $\frac{1}{2}$

question5

给出下面每个线性规划（LP）的显式解。

(a) 在仿射集合上极小化线性函数。

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}}\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

(b) 在半空间上极小化线性函数。

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}}\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \le b \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$。

(c) 在矩阵上极小化线性函数。

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}}\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{l} \preceq \boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 满足 $\boldsymbol{l} \preceq \boldsymbol{u}$。

(d) 在概率单纯形上极小化线性函数。

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}}\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \mathbf{1}^T\boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{x} \succeq \mathbf{0} \end{aligned}$$

solve5

由于它们都是线性规划的问题，满足 weak-slater's condition。那么其对偶问题的最优解则为原问题的最优解。

(a)

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}}\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

构造拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\nu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$，其中 $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$，对其求偏导可得 $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\nu}$。
若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 无解，即 $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$：

$$g(\boldsymbol{\nu}) = +\infty$$

若其有解：

$$g(\boldsymbol{\nu}) = \begin{cases} \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{A})^+\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0} \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $(\cdot)^+$ 是广义逆运算。

综上，对偶问题为：

$$\max_{\boldsymbol{\nu}} g(\boldsymbol{\nu}) = \begin{cases} +\infty & \boldsymbol{b} \notin R(\boldsymbol{A}) \\ \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{A})^+\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0} \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n$。

则显示解为：

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \begin{cases} +\infty & \boldsymbol{b} \notin R(\boldsymbol{A}) \\ \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{A})^+\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0} \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{s.t. } \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq b \end{aligned}$$

构造拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \lambda(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} - b)$，其中 $\lambda \geq 0$，对其求偏导可得 $\nabla_x L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \boldsymbol{c} + \lambda\boldsymbol{a}$，则对偶问题为：

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{\lambda}} \ g(\lambda) = \begin{cases} -\lambda b & \boldsymbol{c} + \lambda\boldsymbol{a} = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases} \\ &\text{s.t. } \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

显示解为：

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \begin{cases} -\lambda b & \boldsymbol{c} + \lambda\boldsymbol{a} = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}}\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{l}\preceq\boldsymbol{x}\preceq\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 满足 $\boldsymbol{l}\preceq\boldsymbol{u}$。

构造拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}_1^T(\boldsymbol{l}-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}_2^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})$，其中 $\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2\succeq\boldsymbol{0}$，对其求偏导可得 $\nabla_x L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2$，则：

$$g(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\lambda}_1^T\boldsymbol{l}-\boldsymbol{\lambda}_2^T\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{c}-\boldsymbol{\lambda}_1+\boldsymbol{\lambda}_2=\boldsymbol{0}$$

此时包含两个未知变量 $\boldsymbol{\lambda}_1$、$\boldsymbol{\lambda}_2$，无法得到显示解。
令 $\boldsymbol{c}=[c_1,\dots,c_n]^T$，如果 $c_i>0,$ 则 $x_i=l_i$；如果 $c_i<0$，则 $x_i=u_i$；如果 $c_i=0$，则 x_i 为符合约束条件的任意值都可以。那么显示解为：

$$\min_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=\sum_{c_i\geq 0,c_i\in\boldsymbol{c}}c_il_i+\sum_{c_j<0,c_j\in\boldsymbol{c}}c_ju_j$$

(d)

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}}\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\ & \mathbf{1}^T\boldsymbol{x}=1\\ & \boldsymbol{x}\succeq\mathbf{0}\end{aligned}$$

构造拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\nu)=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+\upsilon(\mathbf{1}^T\boldsymbol{x}-\mathbf{1})+\boldsymbol{\lambda}^T(-\boldsymbol{x})$，其中 $\nu\in\mathbb{R},\boldsymbol{\lambda}\succeq\mathbf{0}$，对其求偏导可得 $\nabla_x L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\nu)=\boldsymbol{c}+\nu\mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}$，则：

$$g(\boldsymbol{\lambda},\nu)=-\nu,\quad \boldsymbol{c}+\nu\mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0}$$

此时包含两个未知变量 ν、$\boldsymbol{\lambda}$，无法得到显示解。
令 $\boldsymbol{c}=[c_1,\dots,c_n]^T$,把 $\{c_1,\dots,c_n\}$ 按照升序排列变成 $\hat{\boldsymbol{c}}=[c_{[1]},\dots,c_{[n]}]$。此时令 $\boldsymbol{x}=[1,0,\dots,0]^T$，则 $\hat{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{x}$ 则为目标函数的最小值，其值为 $c_{[1]}$。
那么：

$$\min_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}=\min_{c_i}\boldsymbol{c}$$

question6

给出如下优化函数式

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

写出其 Lagrange 方程，写出其对偶函数解。

solve6

构造拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\nu}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{\lambda}^T(-\boldsymbol{x})$，其中 $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\lambda} \succeq \boldsymbol{0}$，对其求偏导可得 $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda}$。
若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 无解，即 $\boldsymbol{b} \notin \mathcal{R}(\boldsymbol{A})$：

$$g(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}) = +\infty$$

若其有解：

$$g(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}) = \begin{cases} -\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

综上，对偶函数解析式为：

$$g(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}) = \begin{cases} +\infty & \boldsymbol{b} \notin \mathcal{R}(\boldsymbol{A}) \\ -\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0} \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

question7

对下述问题，给出其对偶函数解析式，并给出其最优值的下界。

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \ & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \ & x_i^2 = 1, i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{W} \in \mathbb{S}^n$，$\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$。

solve7

由于可行集 domf 不是凸集，并且目标函数 $f_0(\boldsymbol{x})$ 不是凸函数，所以这不是一个凸问题。
构造拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}+\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i(x_i^2-1)$，其中 $\boldsymbol{\nu}=[\nu_1,\ldots,\nu_n]^T$。
对矩阵 $\boldsymbol{W}$ 进行行分块 $[\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n]^T$，对 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量求偏导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu})}{\partial x_i} =&2\boldsymbol{w}_i^T\boldsymbol{x}+2\nu_i x_i\\ =&2w_{i1}x_1+\cdots+(2w_{ii}x_i+2\nu_i)x_i+\cdots+2w_{in}x_n\end{aligned}$$

令 $\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu})}{\partial x_1}=\cdots=\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu})}{\partial x_n}=0$，等价于求解矩阵方程组 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其中
$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}2w_{11}+2v_1 & 2w_{12} & \cdots & 2w_{1n}\\ 2w_{21} & 2w_{22}+2v_2 & \cdots & 2w_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 2w_{n1} & 2w_{n2} & \cdots & 2w_{nn}+2v_n\end{pmatrix}=2\boldsymbol{W}+2\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\nu}\}$。
若方程组有解，即 $\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}=-\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\nu}\}\boldsymbol{x}$ 所以，对偶函数为：

$$g(\boldsymbol{\nu})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}-\nu_i x_i^2=-\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{1}$$

若方程组无解，根据 $\boldsymbol{W}$ 的任意性，对偶函数为：

$$g(\boldsymbol{\nu})=-\infty$$

综上，对偶函数为：

$$g(\boldsymbol{\nu})=\begin{cases}-\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{1} & \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\\ -\infty & \text{otherwise}\end{cases}$$

对偶问题为：

$$\max_{\boldsymbol{\nu}}\ g(\boldsymbol{\nu})=\begin{cases}-\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{1} & \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\\ -\infty & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,\ldots,x_n]^T$，并且 $x_i^2=1,i=1,\ldots,n$。$\boldsymbol{S}=2\boldsymbol{W}+\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\nu}\}$。
由于最小值为 $-\infty$ 没有任何意义，因此根据对偶问题给出的一个较优的下界为 $-\boldsymbol{\nu}^T\boldsymbol{1}$。

question8

考虑优化问题

$$\begin{aligned} &\min_x \ x^2+1 \\ &\text{s.t. } (x-2)(x-4) \le 0 \end{aligned}$$

其中变量 $x \in \mathbb{R}$。

(a) 分析原问题。求解可行集，最优值以及最优解。

(b) Lagrange 函数以及对偶函数。绘制目标函数根据 x 变化的图像。在同一幅图中，标出可行集，最优点及最优值，选择一些正的 Lagrange 乘子 λ，绘出 Lagrange 函数 $L(x,\lambda)$ 关于 x 的变化曲线。利用图像，证明下界性质（即对任意 $\lambda \ge 0$，$p^* \ge \inf_x L(x,\lambda)$）。推导 Lagrange 对偶函数 g 并大致描绘其图像。

(c) Lagrange 对偶问题。描述对偶问题，证明它是一个凹极大化问题。求解对偶最优值以及对偶最优解 λ^*。此时强对偶性是否成立？

solve8

(a) 这是一个二次约束二次规划的问题。可行集为 $x \in [2,4]$，最优值为 5，最优解为 $x = 2$。

(b) 1. 目标函数 $f_0(x)$
图 1给出了函数 $f_0(x) = x^2 + 1$ 的图像。
2. 拉格朗日函数 $L(x, \lambda)$

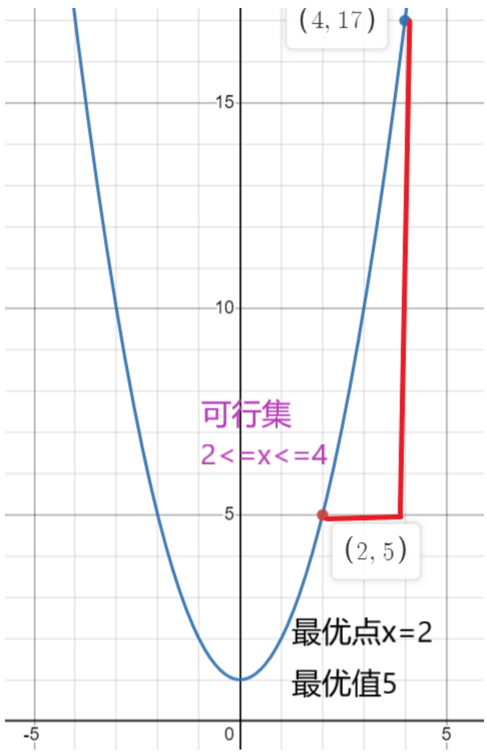
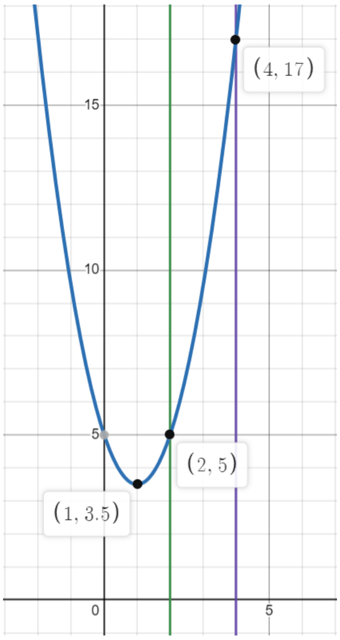


图 1: $f_0(x) = x^2 + 1$ 函数图像

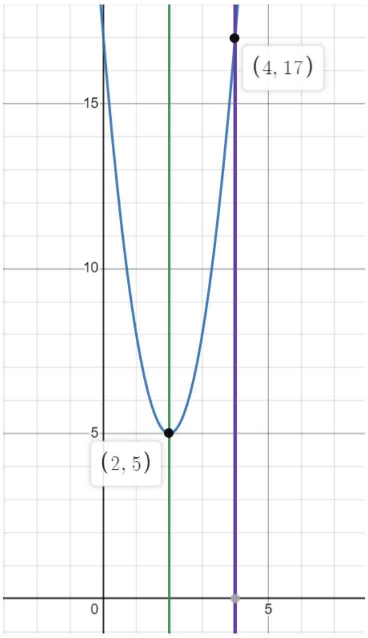
构造拉格朗日函数 $L(x, \lambda) = x^2 + 1 + \lambda(x-2)(x-4)$，其中 $\lambda \geq 0$。对 x 求偏导可得：

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = 2x + \lambda(2x - 6) \tag{1}$$

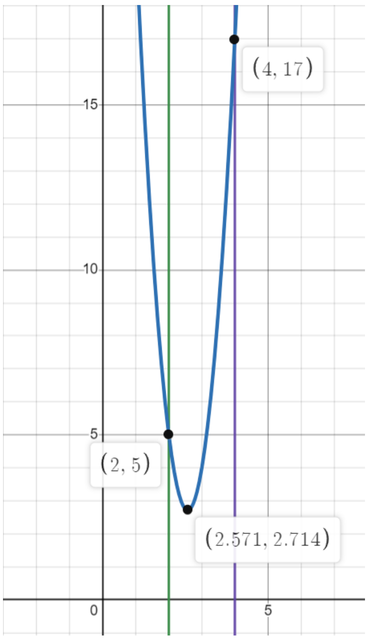
图 2给出了拉格朗日函数 $L(x, \lambda)$ 的图像。若 $\lambda \leq 2$，$\inf\limits_x L(x, \lambda) \leq 5 = p^*$；若 $\lambda > 2$，$\inf\limits_x L(x, \lambda) < 5 = p^*$。这便说明了 $\inf\limits_x L(x, \lambda) \leq p^*$。
3. 对偶函数 $g(\lambda)$



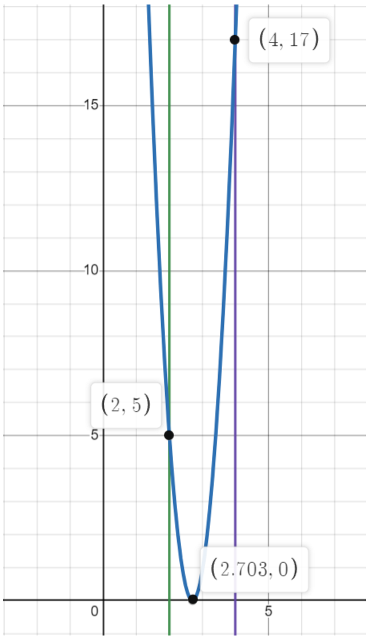
(a) $L(x, 0.5)$



(b) $L(x, 2)$



(c) $L(x, 6)$



(d) $L(x, \frac{\sqrt{85}+9}{2})$

图 2: $L(x, \lambda)$ 函数图像

令式(1)=0，可得 $x=\frac{3\lambda}{1+\lambda}$，则对偶函数 $g(\lambda)$ 为：

$$
\begin{aligned}
g(\lambda) &= (\frac{3\lambda}{1+\lambda})^2+1+\lambda(\frac{3\lambda}{1+\lambda}-2)(\frac{3\lambda}{1+\lambda}-4) \\
&= \frac{-\lambda^3+8\lambda^2+10\lambda+1}{(\lambda+1)^2} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

式(2)给出了对偶函数 g 的表达式，图 3给出了对偶函数 g 的大致图像。

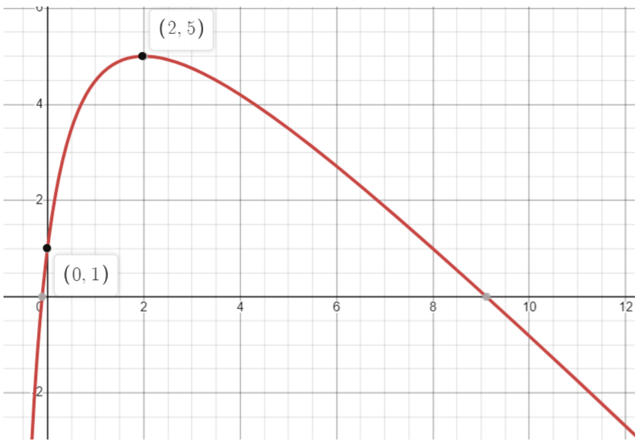


图 3: g 函数图像

(c) 对偶问题是：

$$
\begin{aligned}
&\max \frac{-\lambda^3+8\lambda^2+10\lambda+1}{(\lambda+1)^2} \\
&\text{s.t. } \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

对 $g(\lambda)$ 求导，并令其等于 0，可得 $\lambda=2$。并且 $g''(\lambda)\leq 0$ 恒成立，当且仅当 $\lambda=2$ 时，$g''(\lambda)=0$，这说明了它是一个凹极大化问题。此时对偶问题取到最大值 $d^*=g(\lambda)_{\max}=g(2)=5$，与原问题的最优值相同，这表明了 $p^*=d^*$，则强对偶成立。