1.证明如果S_1和S_2是$R^{m\times n}$中的凸集，那么它们的部分和

$$s=\{(x,y_1+y_2)|x\in R^m,y_1,y_2\in R^n,(x,y_1)\in S_1,(x,y_2)\in S_2\}$$

也是凸的。

2.对于任意$x\in \mathbf{R}^n$,用$x_{[i]}$表示x中第i大的分量，即将x的分量按照非升序进行排列得到下式

$$x_{[1]}\geq x_{[2]}\geq \dots \geq x_{[n]}$$

证明对x的最大r个分量进行求和所得到的函数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{r} x_{[i]}$$

是凸函数。

3.判断下列函数是否是凸函数，凹函数，拟凸函数以及拟凹函数?

(a) 函数 $f(x)=e^x-1$，定义域为 R。

(b) 函数 $f(x_1,x_2)=x_1x_2$，定义域为R_{++}^2。

(c) 函数 $f(x_1,x_2)=1/(x_1x_2)$，定义域为R_{++}^2。

(d) 函数 $f(x_1,x_2)=x_1/x_2$,定义域为R_{++}^2。

(e) 函数 $f(x_1,x_2)=x_1^2/x_2$，定义域为 RxR++。

(f) 函数 $f(x_1,x_2)=x_1^a x_2^{1-a}$，其中 $0\leqslant a\leqslant 1$，定义域为R_{++}^2。

4.考虑优化问题

$$\begin{aligned} &minimize\ f_0(x_1,x_2)\\ &subject\ to\ 2x_1+x_2\geq 1\\ &\qquad\qquad x_1+3x_2\geq 1\\ &\qquad\qquad x_1\geq 0,x_2\geq 0 \end{aligned}$$

对其可行集进行概述。对下面每个目标函数，给出最优集和最优值。

(a) $f_0(x_1,x_2)=x_1+x_2$

(b) $f_0(x_1,x_2)=-x_1-x_2$

(c) $f_0(x_1,x_2)=x_1$

(d) $f_0(x_1,x_2)=max\{x_1,x_2\}$

(e) $f_0(x_1,x_2)=x_1^2+9x_2^2$

5.给出下面每个线性规划 （LP）的显式解。

(a) 在仿射集合上极小化线性函数。

$$\begin{aligned} &\text{minimize}\ \ c^T x\\ &\text{subject to}\ Ax=b. \end{aligned}$$

(b) 在半空间上极小化线性函数。

$$\begin{aligned} &\text{minimize}\ \ c^T x\\ &\text{subject to}\ \ a^T x\leq b, \end{aligned}$$

其中 $a\neq 0$。

(c)在矩形上极小化线性函数。

$$\text{minimize } c^T x$$
$$\text{subject to } l \leq x \leq u,$$

其中，l 和 u 满足 l≤u.

(d) 在概率单纯形上极小化线性函数。

$$\text{minimize } c^T x$$
$$\text{subject to } 1^T x = 1, x \geq 0$$

6.给出如下优化函数式

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\quad\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

写出其 Lagrange 方程 ____________________________；写出其对偶函数解析式 __________________________。

7.对下述问题，给出其对偶函数解析式，并给出其最优值的下界。

$$minimize\ x^T W x$$
$$subject\ to\ x_i^2 = 1, i = 1, ..., n$$

其中$W \in \mathbf{S}^n$。

8.考虑优化问题

$$minimize\ \ x^2 + 1$$
$$\textit{subject to} \quad (x-2)(x-4) \leqslant 0,$$

其中变量 $x \in R$。

(a)分析原问题。求解可行集，最优值以及最优解。

(b)Lagrange 函数以及对偶函数。绘制目标函数根据 x 变化的图像。在同一幅图中，标出可行集，最优点及最优值，选择一些正的 Lagrange 乘子λ，绘出 Lagrange 函数 L(x,λ)关于 x 的变化曲线。利用图像，证明下界性质(对任意λ⩾0，$p^* \geqslant inf_x L(x,\lambda)$)。推导 Lagrange 对偶函数 g 并大致描绘其图像。

(c) Lagrange 对偶问题。描述对偶问题，证明它是一个凹极大化问题。求解对偶最优值以及对偶最优解λ*。此时强对偶性是否成立?