

1. 下面的集合哪些是凸集?

(a) 平板, 即形如 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \alpha \leq a^T x \leq \beta\}$ 的集合。

(b) 矩形, 即形如 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}$ 的集合。当 $n > 2$ 时, 矩形也称为超矩形。

(c) 楔形, 即 $\{x \in \mathbf{R}^n \mid a_1^T x \leq b_1, a_2^T x \leq b_2\}$ 。

(d) 距离给定点比距离给定集合近的点构成的集合, 即

$$\{x \mid \|x - x_0\|_2 \leq \|x - y\|_2, \forall y \in S\}$$

其中 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ 。

(e) 距离一个集合比另一个集合更近的点的集合, 即

$$\{x \mid \text{dist}(x, S) \leq \text{dist}(x, T)\}$$

其中 $S, T \subseteq \mathbf{R}^n$,

$\text{dist}(x, S) = \inf\{\|x - z\|_2 \mid z \in S\}$ 。

2. 假设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个凸函数, $a, b \in \text{dom } f, a < b$ 。

(a) 证明对于任意 $x \in [a, b]$, 下式成立

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

(b) 证明对于任意 $x \in (a, b)$, 下式成立

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

(c) 假设 f 可微, 基于(b)的推论证明下式:

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$