2023.12.20 课堂练习

question1

下面的集合哪些是凸集？

(a) 平板，即形如 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} | \alpha \le \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \le \beta\}$ 的集合。

(b) 矩形，即形如 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} | \alpha_i \le \boldsymbol{x}_i \le \beta, i = 1, \ldots, n\}$ 的集合。当 $n \ge 2$ 时，矩形也称为超矩形。

(c) 楔形，即 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x} \le b_1, \boldsymbol{a_2}^T \boldsymbol{x} \le b_2\}$。

(d) 距离给定点比距离给定集合近的点构成的集合，即：

$$\{\boldsymbol{x} |\ ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0||_2 \le ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||_2, \forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{S}\}$$

其中 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$。

(e) 距离一个集合比另一个集合更近的点的集合，即：

$$\{\boldsymbol{x} | \mathbf{dist}(\boldsymbol{x}, \mathcal{S}) \le \mathbf{dist}(\boldsymbol{x}, \mathcal{T})\}$$

其中 $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$，$\mathbf{dist} = \inf_{\boldsymbol{z}} \{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}||_2 | \boldsymbol{z} \in \mathcal{S}\}$

solve1

有以下熟知结论：

- 仿射集合，即形如 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = b, \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \le b$ 的集合一定是凸集。

- 凸集的交与和仍然是凸集。

容易看出 $(a),(b),(c)$ 满足以上条件，则它们都是凸集。下面证明 (d) 是凸集，而 (e) 不是凸集。
(d) 根据内积空间的定义有 $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0||_2=\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)}=\sqrt{(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{x}_0)}$，$||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||_2=\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}=\sqrt{(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y})}$。
则 $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0||_2\leq||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||_2\Leftrightarrow\sqrt{(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{x}_0)}\leq\sqrt{(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y})}\Leftrightarrow$ $2\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y})+\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{x}_0\geq 0$。这构成了一个关于 $\boldsymbol{x}$ 的仿射集合，并恰好是半空间的定义，所以是凸集。
(e) 若 $\mathcal{S}$ 为有限集（无限集情况类似），不妨令 $\mathcal{S}=\{\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_n\}$，则：

$$\{\boldsymbol{x}|\mathbf{dist}(\boldsymbol{x},\mathcal{S})\leq\mathbf{dist}(\boldsymbol{x},\mathcal{T})\}=\bigcup_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{x}|\ ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{s}_i||_2\leq||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}||_2,\forall\boldsymbol{t}\in\mathcal{T}\}=\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{X}_i$$

根据 (d) 可知 $\mathcal{X}_i$ 是凸集，而凸集的并集不一定是凸集，证毕。
事实上对于本题可以举出以下反例，令 $\mathcal{S}=\{-1,1\},\mathcal{T}=\{0\}$，那么 $\{x|\mathbf{dist}(x,\mathcal{S})\leq\mathbf{dist}(x,\mathcal{T})\}=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$，这显然不是凸集。

question2

假设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个凸函数，$a,b\in\mathrm{domf},\mathrm{a}\leq\mathrm{b}$。

(a) 证明对于任意 $x\in[a,b]$，下式成立

$$f(x)\leq\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

(b) 证明对于任意 $x\in(a,b)$，下式成立

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

(c) 假设 f 可微，基于 (b) 的推论证明下式：

$$f'(a)\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f'(b)$$

solve2

(a) 回顾凸函数的的定义 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{domf}, \theta \in [0,1], \mathrm{f}(\theta \boldsymbol{x} + (1-\theta)\boldsymbol{y}) \leq \theta \mathrm{f}(\boldsymbol{x}) + (1-\theta)\mathrm{f}(\boldsymbol{y})$，并注意到 $\frac{b-x}{b-a} + \frac{x-a}{b-a} = 1$，那么有：

$$f(x) = f(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

(b) 把式 (a) 的式子带入不等式两端即证。

(c) 由于 f 可微，那么 $f'(a), f'(b)$ 存在，且有 $f'_+(a) = f'(a), f'_-(b) = f'(b)$。思路 1，根据 (b) 分别对不等式在 a, b 处左右两边取极限：

$$\begin{aligned} f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \lim_{x \to a^+} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ f'(b) = f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geq \lim_{x \to b^-} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

思路 2：联想凸函数的一阶性质 $(\nabla f(\boldsymbol{x}) - \nabla f(\boldsymbol{y}))^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq 0$ 与凸函数仅有极小值点的特征，可知 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 是单调递增的，又根据拉格朗日中值定理：

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),\ a \leq \xi \leq b$$

可得 $f'(a) \leq f'(\xi) \leq f'(b)$。