

# Projet automatique

David Castro et Anatole Hernot

16 décembre 2021

## 1 Système en boucle ouverte

### Équation d'état

État  $X = (x, v = \dot{x}, \theta, q = \dot{\theta})$ ,  $u$ , l'entrée de commande,  $d$ , l'entrée de perturbation,  $x_m$  et  $\theta_m$  les mesures et  $x_m$  la sortie à commander.

$$\text{On a alors : } \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ xq^2 + g \sin \theta \\ q \\ \frac{gx \cos \theta + u + d - 2xqv}{\alpha + x^2} \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha = \frac{J}{m}.$$

### Point d'équilibre

$$\begin{cases} \bar{v} = 0 \\ \bar{x}\bar{q}^2 + g \sin \bar{\theta} = 0 \\ \bar{q} = 0 \\ \frac{g\bar{x} \cos \bar{\theta} + \bar{u} + \bar{d} - 2\bar{x}\bar{q}\bar{v}}{\alpha + \bar{x}^2} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \bar{v} = 0 \\ \sin \bar{\theta} = 0 \\ \bar{q} = 0 \\ g\bar{x} \cos \bar{\theta} + \bar{u} + \bar{d} = 0 \end{cases}$$

Il y a donc deux points d'équilibre :  $\left(-\frac{\bar{u}+\bar{d}}{g}, 0, 0, 0\right)$  et  $\left(\frac{\bar{u}+\bar{d}}{g}, 0, \pi, 0\right)$ .

### Linéarisation

On linéarise au premier point d'équilibre car si on atteint  $\theta = \pi$ , cela signifie que le rail s'est retourné et donc que la bille est tombée.

Le système linéarisé tangent en ce point est :

$$\begin{aligned}
\delta \dot{X} &= \begin{bmatrix} \delta v \\ 2\bar{x}\bar{q}\delta q + g\delta\theta \\ \delta q \\ \frac{g\delta x + \delta u + \delta d - 2\bar{q}\bar{v}\delta x}{\alpha + \bar{x}^2} - 2\bar{x}\delta x \frac{g\bar{x} + \bar{u} + \bar{d}}{(\alpha + \bar{x}^2)^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \delta v \\ g\delta\theta \\ \delta q \\ \frac{g\delta x + \delta u + \delta d}{\alpha + \bar{x}^2} \end{bmatrix} \text{ le second terme de } \delta \dot{q} \text{ s'annulant par définition de } \bar{x} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \delta X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} & \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} \end{bmatrix}}_B \delta e
\end{aligned}$$

**Calcul des valeurs propres**

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -g & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -\frac{g}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & 0 & X \end{vmatrix} \\
&= X \begin{vmatrix} X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} + \frac{g}{\alpha + \bar{x}^2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \end{vmatrix} \\
&= X^4 - \frac{g^2}{\alpha + \bar{x}^2}
\end{aligned}$$

D'où  $\text{Sp}(A) = \{\beta; -\beta; \beta i; -\beta i\}$  avec  $\beta = \sqrt[4]{\frac{g^2}{\alpha + \bar{x}^2}} > 0$ . Donc le système linéarisé est ue-instable.

## 2 Étude préliminaire en boucle fermée

### Ajout d'un contrôleur sur $x$

Pour tâcher de rendre le système stable au point d'équilibre, on pose un contrôleur proportionnel-dérivé au niveau de la position :

$$\delta u = -k(\delta x_m - \delta x_r) - k_d \delta \dot{x}_m$$

En notant  $x_r$  la consigne de position. Alors en négligeant  $\nu_x$  le bruit de mesure de  $x$ , on a  $x_m = x$  et  $\dot{x}_m = v$  donc :

$$\begin{aligned}
\delta \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} & \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k(\delta x - \delta x_r) - k_d \delta v \\ \delta d \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g-k}{\alpha + \bar{x}^2} & -\frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A'} \delta X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} & \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \delta x_r \\ \delta d \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On obtient alors le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_{A'}(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -g & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -\frac{g-k}{\alpha + \bar{x}^2} & \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & X \end{vmatrix} \\
&= X \begin{vmatrix} X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \\ \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & X \end{vmatrix} + \frac{g-k}{\alpha + \bar{x}^2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \end{vmatrix} \\
&= X \left( X^3 + \frac{gk_d}{\alpha + \bar{x}^2} \right) - \frac{g(g-k)}{\alpha + \bar{x}^2} \\
&= X^4 + \frac{gk_d}{\alpha + \bar{x}^2} X - \frac{g(g-k)}{\alpha + \bar{x}^2}
\end{aligned}$$

Le coefficient d'ordre 3, c'est-à-dire en l'occurrence  $n-1$  où  $n = 4$  est le degré du polynôme, est nul. Le critère de Routh donne donc directement que le système linéarisé n'est pas stable car  $A'$  n'a pas toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement positive.

### Ajout d'un contrôleur sur $\theta$

On pose cette fois le contrôleur proportionnel-dérivé au niveau de  $\theta$  :

$$\delta u = -k(\delta \theta_m - \delta \theta_r) - k_d \delta \dot{\theta}_m$$

En notant  $\theta_r$  la consigne de position. Alors en négligeant  $\nu_\theta$  le bruit de mesure de  $\theta$  :

$$\begin{aligned}
\delta \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} & \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k(\delta\theta - \delta\theta_r) - k_d\delta q \\ \delta d \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & -\frac{k}{\alpha + \bar{x}^2} & -\frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} \end{bmatrix}}_{A''} \delta X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} & \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\delta\theta_r \\ \delta d \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On obtient alors le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_{A''}(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -g & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -\frac{g}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & \frac{k}{\alpha + \bar{x}^2} & X + \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} \end{vmatrix} \\
&= X \begin{vmatrix} X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & \frac{k}{\alpha + \bar{x}^2} & X + \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} \end{vmatrix} + \frac{g}{\alpha + \bar{x}^2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \end{vmatrix} \\
&= X \left[ X^2 \left( X + \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} \right) + \frac{k}{\alpha + \bar{x}^2} X \right] - \frac{g^2}{\alpha + \bar{x}^2} \\
&= X^4 + \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} X^3 + \frac{k}{\alpha + \bar{x}^2} X^2 - \frac{g^2}{\alpha + \bar{x}^2}
\end{aligned}$$

On applique le critère de Routh :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{k}{\alpha + \bar{x}^2} & \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} \\ 0 & -\frac{g^2}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 \end{vmatrix} > 0 & \text{(condition 3)} \\
&\begin{vmatrix} \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{\alpha + \bar{x}^2} & \frac{k_d}{\alpha + \bar{x}^2} & 1 \\ 0 & -\frac{g^2}{\alpha + \bar{x}^2} & 0 & \frac{gk}{\alpha + \bar{x}^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{g^2}{\alpha + \bar{x}^2} \end{vmatrix} > 0 & \text{(condition 4)}
\end{aligned}$$

En notant  $D$  le premier déterminant, on obtient en développant le second déterminant selon la dernière ligne le système :

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{g^2}{\alpha + \bar{x}^2} D > 0 \end{cases}$$

C'est impossible donc  $A''$  admet des valeurs propres à partie réelle négative et le système linéarisé n'est pas stable.

### Conclusion sur la question 1

Il n'est donc pas possible de commander le système en utilisant une seule des deux mesures : dans les deux cas, on n'obtient pas un système stable. Il va donc falloir utiliser les deux.

## 3 Système en boucle fermé

### Bouclage du système

Pour ce faire, on distingue deux sous-parties du système :

- $\theta$  est considérée comme une variable rapide car c'est sur elle qu'influe directement la commande  $u$  ;
- $x$  est considéré comme une variable lente car ses variations sont consécutives à celles de  $\theta$  et pas directement à la commande.

On va donc contrôler le système rapide par un PD et le système lent par un PID, comme suit :

$$\begin{cases} \theta_r = -k_i \rho - k x_m - k_d \dot{x}_m \\ \dot{\rho} = x_m - x_r \\ u = -\lambda(\theta_m - \theta_r) - \mu \dot{\theta}_m \end{cases}$$

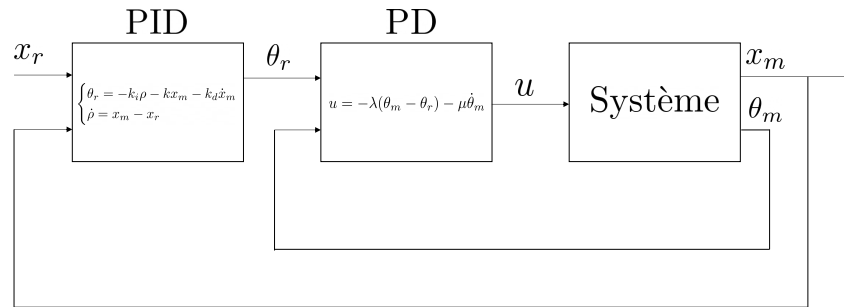


Figure 1: Architecture du système bouclé

## Paramétrage du système rapide

En négligeant toujours les bruits de mesure, le système rapide vérifie :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = \frac{gx \cos \theta - \lambda(\theta + k_i \rho + k_x x + k_d v) - \mu q + d - 2xqv}{\alpha + x^2} \end{cases}$$

Cela donne le linéarisé, en notant  $\gamma = \frac{1}{\alpha + \bar{x}^2} > 0$  :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\theta} \\ \delta \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma \lambda & -\gamma \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta \\ \delta q \end{bmatrix} + B_x \delta x + B_v \delta v + B_\rho \delta \rho + B_d \delta d$$

Puis le polynôme caractéristique :

$$\begin{vmatrix} X & -1 \\ \gamma \lambda & X + \gamma \mu \end{vmatrix} = X^2 + \gamma \mu X + \gamma \lambda$$

D'après le critère de Routh, le système rapide est donc stable si  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ . On souhaite imposer un temps de réponse de 0,1s. On se propose d'identifier le polynôme caractéristique précédent avec  $X^2 + 2\xi\omega_0 X + \omega_0^2$  où  $\omega_0 = \frac{2\pi}{0,1} = 20\pi$  et  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega_0^2}{\gamma} = \frac{(20\pi)^2}{\gamma} > 0 \\ \mu &= \frac{20\sqrt{2}\pi}{\gamma} > 0 \end{aligned}$$

Le critère de Routh est bien vérifié par ce paramétrage du système rapide.

## Paramétrage du système lent

La branche d'équilibre est donnée par :  $\delta q = \delta \dot{q} = 0$ . D'où :

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma [g\delta x + \delta d - \lambda(\delta\theta + k_i\delta\rho + k\delta x + k_d\delta v) - \mu\delta q] \\ \lambda\delta\theta &= g\delta x + \delta d - \lambda k_i\delta\rho - \lambda k\delta x - \lambda k_d\delta v \end{aligned}$$

Le système lent est d'autre part régi par :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = g \sin \theta + xq^2 \\ \dot{\rho} = x - x_r \end{cases}$$

Donc en notant  $\eta = \delta\rho$ , on a au point d'équilibre le linéarisé :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{v} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta v \\ g\delta\theta \\ \delta x - \delta x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ g(\frac{g}{\lambda} - k) & -gk_d & -gk_i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + B'_d \delta d + B'_r \delta x_r$$

$$\begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ g(k - \frac{g}{\lambda}) & X + gk_d & gk_i \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = X^3 + gk_d X^2 + g(k - \frac{g}{\lambda})X + gk_i$$

Le critère de Routh donne donc pour condition à la stabilité que  $k_d > 0$ ,  $k_i > 0$  et  $gk_d(k - \frac{g}{\lambda}) > k_i$ . On identifie alors avec le transfert standard  $s^3 + \sigma\sqrt{6}s^2 + \sigma^2\sqrt{6}s + \sigma^3$  en vérifiant que cela permet toujours de vérifier les inégalités précédentes. Cela donne :

$$\begin{aligned} k_d &= \frac{\sigma\sqrt{6}}{g} \\ k &= \frac{\sigma^2\sqrt{6}}{g} + \frac{g}{\lambda} \\ k_i &= \frac{\sigma^3}{g} \end{aligned}$$

Les deux premières inégalités sont clairement vérifiées avec  $\sigma > 0$ . De même pour la dernière, en effet, dans ces conditions :

$$g^2k_d(k - \frac{g}{\lambda}) - gk_i = (\sigma\sqrt{6})(\sigma^2\sqrt{6}) - \sigma^3 = 5\sigma^3 > 0$$

## Conclusion sur la question 2

On a bien les systèmes lents et rapides stables. En prenant  $\sigma = 3,42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , on a alors une réponse temporelle de l'ordre de 1 seconde.

## Implémentation Simulink

### Approximation des dérivées

Afin d'obtenir une version implémentable du contrôleur, on remplace les deux termes dérivés par leur approximation filtrée. On pose  $T_1 = \frac{k_d}{k}$  et  $T_2 = \frac{\mu}{\lambda}$ . On prend  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  et on remplace donc  $k_d\delta\dot{x} = kT_1\delta\dot{x}$  et  $\mu\delta\dot{\theta} = \lambda T_2\delta\dot{\theta}$  comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_x \\ \dot{\eta} \\ \delta\theta_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\delta x - \eta_x}{\varepsilon T_1} \\ \delta x - \delta x_r \\ -k_i\eta - k\delta x - k\frac{\delta x - \eta_x}{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{T_1}(\delta x - \eta_x) \\ \delta x - \delta x_r \\ -k_i\eta - k(1+n)\delta x + kn\eta_x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\eta}_\theta \\ \delta u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\delta\theta - \eta_\theta}{\varepsilon T_2} \\ -\lambda(\delta\theta - \delta\theta_r) - \lambda\frac{\delta\theta - \eta_\theta}{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{T_2}(\delta\theta - \eta_\theta) \\ -\lambda(1+n)\delta\theta + \lambda\delta\theta_r + \lambda n\eta_\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Respectivement pour le contrôleur PD et pour le PID. On va alors prendre  $n = 20$  pour approximer au mieux la dérivée.

### Passage aux différences finies

On peut réécrire le jeux d'équations :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_x = \frac{n}{T_1}(\delta x - \eta_x) \\ \dot{\eta} = \delta x - \delta x_r \\ \dot{\eta}_\theta = \frac{n}{T_2}(\delta \theta - \eta_\theta) \\ \delta u = -\lambda(1+n)\delta \theta - \lambda k_i \eta - \lambda k(1+n)\delta x + \lambda k n \eta_x + \lambda n \eta_\theta \end{cases}$$

On remplace maintenant les termes en  $\delta$  par les différences finies :  $\delta x \rightarrow x - \bar{x}$ ,  $\delta x_r \rightarrow x_r - \bar{x}$ ,  $\delta \theta \rightarrow \theta - \bar{\theta}$  et  $\delta u = u - \bar{u}$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_x \\ \dot{\eta} \\ \dot{\eta}_\theta \\ u - \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{T_1}(x - \bar{x} - \eta_x) \\ x - x_r \\ \frac{n}{T_2}(\theta - \bar{\theta} - \eta_\theta) \\ -\lambda(1+n)(\theta - \bar{\theta}) - \lambda k_i \eta - \lambda k(1+n)(x - \bar{x}) + \lambda k n \eta_x + \lambda n \eta_\theta \end{bmatrix}$$

On pose  $\mu_i = \eta - \frac{1}{\lambda k_i} [\bar{u} + \lambda(1+n)\bar{\theta} + \lambda k(1+n)\bar{x} - \lambda k n \bar{x} - \lambda k n \bar{\theta}]$ ,  $\mu_x = \eta_x + \bar{x}$  et  $\mu_\theta = \eta_\theta + \bar{\theta}$ .

On obtient finalement le contrôleur implémentable suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mu}_x \\ \dot{\mu}_i \\ \dot{\mu}_\theta \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{T_1}(x - \mu_x) \\ x - x_r \\ \frac{n}{T_2}(\theta - \mu_\theta) \\ -\lambda(1+n)\theta - \lambda k_i \mu_i - \lambda k(1+n)x + \lambda k n \mu_x + \lambda n \mu_\theta \end{bmatrix}$$

On note  $X = (\mu_x, \mu_i, \mu_\theta)$ ,  $U = (x, \theta, x_r)$  et  $Y = u$ . Alors le contrôleur est donné par :

$$\begin{cases} \dot{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{n}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{n}{T_2} \end{bmatrix}}_M X + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{n}{T_1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{n}{T_2} & 0 \end{bmatrix}}_N U \\ Y = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda k n & -\lambda k_i & \lambda n \end{bmatrix}}_P X + \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda k(1+n) & -\lambda(1+n) & 0 \end{bmatrix}}_Q U \end{cases}$$

### Conditions initiales

On suppose enfin que l'on part d'un point d'équilibre. On prend donc les conditions initiales suivantes :

$$X_{t=0} = \begin{bmatrix} \mu_x(t=0) \\ \mu_i(t=0) \\ \mu_\theta(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \frac{-1}{k_i}(k\bar{x} + \bar{\theta} + \frac{\bar{u}}{\lambda}) \\ \bar{\theta} \end{bmatrix}$$



### Conclusion sur la question 3

Si on prend enfin la condition initiale  $X = \bar{X}$  correspondant au point d'équilibre associé à  $\bar{x} = 0$  et  $x_r = 0,4m$  de sorte que la bille parcourt  $40cm$ , on a les résultats graphiques suivants :

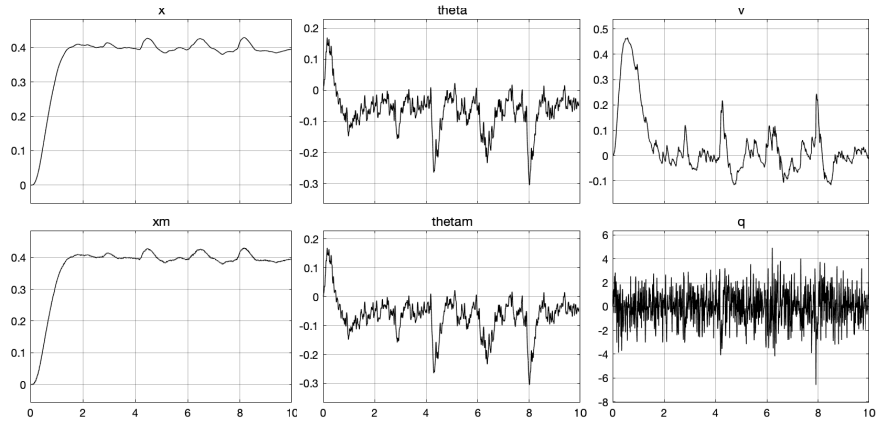


Figure 2: Réponse à une consigne constante

La bille parcourt bien  $40cm$  mais tombe en réalité du rail car  $x$  dépasse  $0,4m$ .

Afin que la bille parcourt bien  $40cm$  sans tomber du rail, on garde les mêmes conditions initiales et on prend les consignes suivantes qui répondent au problème :

- Un échelon de valeur initiale  $-0,3m$  et de valeur finale  $0,3m$
- Une consigne sinusoïdale de phase et de biais nuls et d'amplitude  $0,4m$
- Une rampe de valeur initiale  $-0,3m$ .

On a représenté les différents résultats sur les graphes qui suivent.

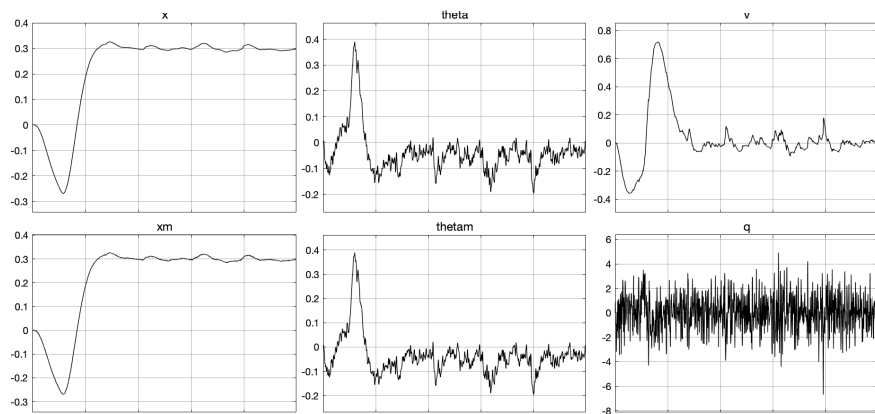


Figure 3: Réponse à une consigne en échelon

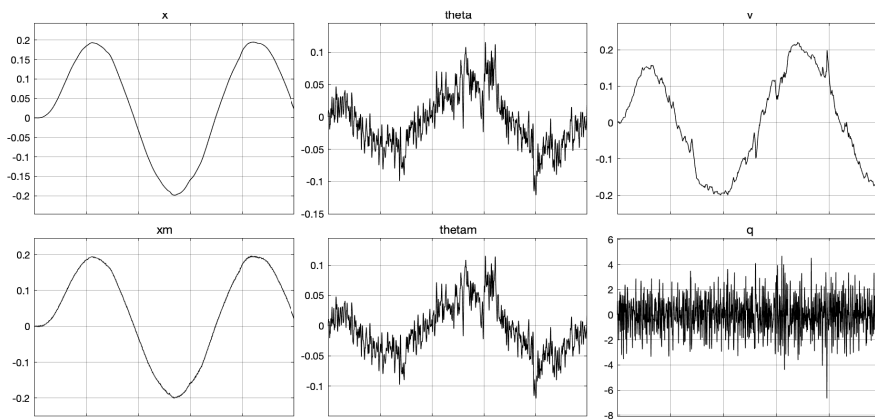


Figure 4: Réponse à une consigne sinusoïdale

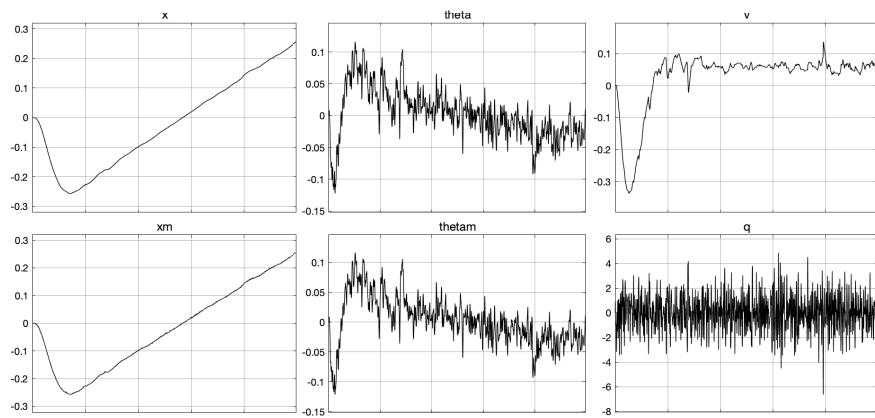


Figure 5: Réponse à une rampe