Projet automatique

David Castro et Anatole Hernot

16 décembre 2021

1 Système en boucle ouverte

Équation d'état

État $X = (x, v = \dot{x}, \theta, q = \dot{\theta})$, u, l'entrée de commande, d, l'entrée de perturbation, x_m et θ_m les mesures et x_m la sortie à commander.

On a alors : $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ xq^2 + g\sin\theta \\ q \\ \frac{gx\cos\theta + u + d - 2xqv}{\alpha + x^2} \end{bmatrix}$ avec $\alpha = \frac{J}{m}$.

Point d'équilibre

$$\begin{cases} \bar{v} = 0 \\ \bar{x}\bar{q}^2 + g\sin\bar{\theta} = 0 \\ \bar{q} = 0 \\ \frac{g\bar{x}\cos\bar{\theta} + \bar{u} + \bar{d} - 2\bar{x}\bar{q}\bar{v}}{\alpha + \bar{x}^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{v} = 0 \\ \sin\bar{\theta} = 0 \\ \bar{q} = 0 \\ g\bar{x}\cos\bar{\theta} + \bar{u} + \bar{d} = 0 \end{cases}$$

Il y a donc deux points d'équilibre : $\left(-\frac{\bar{u}+\bar{d}}{g}, 0, 0, 0\right)$ et $\left(\frac{\bar{u}+\bar{d}}{g}, 0, \pi, 0\right)$.

Linéarisation

On linéarise au premier point d'équilibre car si on atteint $\theta = \pi$, cela signifie que le rail s'est retourné et donc que la bille est tombée.

Le système linéarisé tangent en ce point est :

$$\delta\dot{X} = \begin{bmatrix} \delta v \\ 2\bar{x}\bar{q}\delta q + g\delta\theta \\ \delta q \\ \frac{g\delta x + \delta u + \delta d - 2\bar{q}\bar{v}\delta x}{\alpha + \bar{x}^2} - 2\bar{x}\delta x \frac{g\bar{x} + \bar{u} + \bar{d}}{(\alpha + \bar{x}^2)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta v \\ g\delta\theta \\ \delta q \\ \frac{g\delta x + \delta u + \delta d}{(\alpha + \bar{x}^2)^2} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \delta X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} \end{bmatrix}}_{B} \delta e$$

Calcul des valeurs propres

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -g & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -\frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & 0 & X \end{vmatrix}$$

$$= X \begin{vmatrix} X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} + \frac{g}{\alpha + \bar{x}^2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \end{vmatrix}$$

$$= X^4 - \frac{g^2}{\alpha + \bar{x}^2}$$

D'où $\mathrm{Sp}\,(A) = \{\beta; -\beta; \beta i; -\beta i\}$ avec $\beta = \sqrt[4]{\frac{g^2}{\alpha+\bar{x}^2}} > 0$. Donc le système linéarisé est ue-instable.

2 Étude préliminaire en boucle fermée

Ajout d'un contrôleur sur x

Pour tâcher de rendre le système stable au point d'équilibre, on pose un contrôleur proportionnel-dérivé au niveau de la position :

$$\delta u = -k(\delta x_m - \delta x_r) - k_d \delta \dot{x}_m$$

En notant x_r la consigne de position. Alors en négligeant ν_x le bruit de mesure de x, on a $x_m = x$ et $\dot{x}_m = v$ donc :

$$\delta\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k(\delta x - \delta x_r) - k_d \delta v \\ \delta d \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g(1-k)}{\alpha+\bar{x}^2} & -\frac{gk_d}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A'} \delta X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\delta x_r \\ \delta d \end{bmatrix}$$

On obtient alors le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -g & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -\frac{g(1-k)}{\alpha+\bar{x}^2} & \frac{gk_d}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & X \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \\ \frac{gk_d}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & X \end{vmatrix} + \frac{g(1-k)}{\alpha+\bar{x}^2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \end{vmatrix} \\ &= X \left(X^3 + \frac{g^2 k_d}{\alpha+\bar{x}^2} \right) - \frac{g^2(1-k)}{\alpha+\bar{x}^2} \\ &= X^4 + \frac{g^2 k_d}{\alpha+\bar{x}^2} X - \frac{g^2(1-k)}{\alpha+\bar{x}^2} \end{aligned}$$

Le coefficient d'ordre 3, c'est-à-dire en l'occurrence $n-1$ où $n = 4$ est le degré du polynôme, est nul. Le critère de Routh donne donc directement que le système linéarisé n'est pas stable car A' n'a pas toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement positive.

Ajout d'un contrôleur sur θ

On pose cette fois le contrôleur proportionnel-dérivé au niveau de θ :

$$\delta u = -k(\delta\theta_m - \delta\theta_r) - k_d \delta\dot{\theta}_m$$

En notant θ_r la consigne de position. Alors en négligeant ν_θ le bruit de mesure de θ :

$$\delta\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k(\delta\theta - \delta\theta_r) - k_d \delta q \\ \delta d \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & -\frac{gk}{\alpha+\bar{x}^2} & -\frac{gk_d}{\alpha+\bar{x}^2} \end{bmatrix}}_{A''} \delta X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\delta\theta_r \\ \delta d \end{bmatrix}$$

On obtient alors le polynôme caractéristique :

$$\chi_{A''}(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -g & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ -\frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & \frac{gk}{\alpha+\bar{x}^2} & X + \frac{gk_d}{\alpha+\bar{x}^2} \end{vmatrix}$$

$$= X \begin{vmatrix} X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & \frac{gk}{\alpha+\bar{x}^2} & X + \frac{gk_d}{\alpha+\bar{x}^2} \end{vmatrix} + \frac{g}{\alpha+\bar{x}^2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ X & -g & 0 \\ 0 & X & -1 \end{vmatrix}$$

$$= X \left[X^2 \left(X + \frac{gk_d}{\alpha+\bar{x}^2} \right) + \frac{gk}{\alpha+\bar{x}^2} X \right] - \frac{g^2}{\alpha+\bar{x}^2}$$

$$= X^4 + \frac{g^2 k_d}{\alpha+\bar{x}^2} X^3 + \frac{gk}{\alpha+\bar{x}^2} X^2 - \frac{g^2}{\alpha+\bar{x}^2}$$

On applique le critère de Routh :

$$\begin{vmatrix} \frac{g^2 k_d}{\alpha+\bar{x}^2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{gk}{\alpha+\bar{x}^2} & \frac{g^2 k_d}{\alpha+\bar{x}^2} \\ 0 & -\frac{g^2}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{(condition 3)}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{g^2 k_d}{\alpha+\bar{x}^2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{gk}{\alpha+\bar{x}^2} & \frac{g^2 k_d}{\alpha+\bar{x}^2} & 1 \\ 0 & -\frac{g^2}{\alpha+\bar{x}^2} & 0 & \frac{gk}{\alpha+\bar{x}^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{g^2}{\alpha+\bar{x}^2} \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{(condition 4)}$$

En notant D le premier déterminant, on obtient en développant le second déterminant selon la dernière ligne le système :

$$\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{g^2}{\alpha+\bar{x}^2} D > 0 \end{cases}$$

C'est impossible donc A'' admet des valeurs propres à partie réelle négative et le système linéarisé n'est pas stable.

Conclusion sur la question 1

Il n'est donc pas possible de commander le système en utilisant une seule des deux mesures : dans les deux cas, on n'obtient pas un système stable. Il va donc falloir utiliser les deux.

3 Système en boucle fermé

Bouclage du système

Pour ce faire, on distingue deux sous-parties du système :

- θ est considérée comme une variable rapide car c'est sur elle qu'influe directement la commande u ;
- x est considéré comme une variable lente car ses variations sont consécutives à celles de θ et pas directement à la commande.

On va donc contrôler le système rapide par un un P et le système lent par un PID, comme suit :

$$\begin{cases} \theta_r = -k_i\eta - kx_m - k_d\dot{x}_m \\ \dot{\eta} = x_m - x_r \\ u = -\lambda(\theta_m - \theta_r) \end{cases}$$

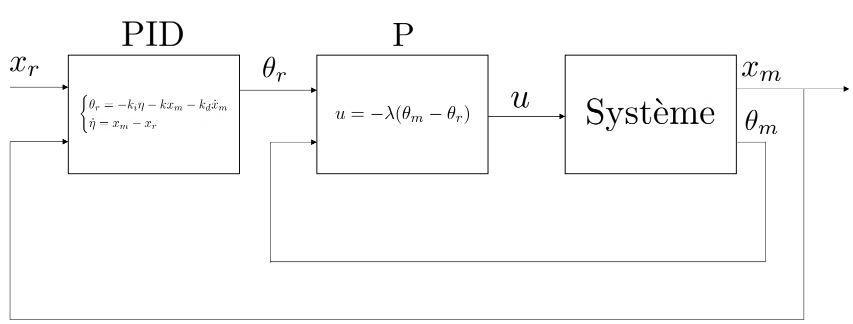

Figure 1: Architecture du système bouclé

Le système devient alors $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\\ \dot{\theta}\\ \dot{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ xq^2 + g\sin\theta \\ q \\ \frac{gx\cos\theta - \lambda(\theta + k_i\eta + kx + k_d v) + d - 2xqv}{\alpha + x^2}\end{bmatrix}$.

Le système étant rapide, on considère λ grand donc $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$ petit. La dernière équation devient alors, en négligeant toujours les deux bruits de mesure ν_x et ν_θ :

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{q} &= \frac{\varepsilon gx\cos\theta - (\theta + k_i\eta + kx + k_d v) + \varepsilon d - 2\varepsilon xqv}{\alpha + x^2} \\ &= -\frac{\theta + k_i\eta + kx + k_d v}{\alpha + x^2} + O(\varepsilon) \\ &:= g(x, v, \theta, q, \eta, \varepsilon)\end{aligned}$$

Si on fait maintenant $\varepsilon = 0$, on obtient l'équation algébrique :

$$0 = -\frac{\theta + k_i\eta + kx + k_d v}{\alpha + x^2}$$

D'où la simplification : $\theta = -k_i\eta - kx - k_d v$ ($\star$). La branche d'équilibre est ue-stable car :

$$\partial_\theta g|_{\theta = -k_i\eta - kx - k_d v} = -\frac{1}{\alpha + x^2} < 0$$

Système lent

On considère alors la nouvelle variable d'état : (x, v, η). Le théorème des perturbations singulières affirme qu'on ne fait qu'une erreur de l'ordre de ε en considérant le nouveau système simplifié "lent" :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\\ \dot{\eta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ g\sin(-k_i\eta - kx - k_d v) + xq^2 \\ x - x_r\end{bmatrix}$$

Avec $q = \dot{\theta} = -k_i\dot{\eta} - k\dot{x} - k_d\dot{v}$, que l'on obtient en dérivant ($\star$).

$$\begin{aligned}\delta\dot{v} &= -g\left(k_i\delta\eta + k\delta x + k_d\delta v\right)\cos\left(k_i\eta + kx + k_d v\right) + 2xq\delta q + q^2\delta x \\ &= ...?\ \delta q \text{ ? au point d'équilibre ?}\end{aligned}$$

On obtient finalement le linéarisé puis le polynôme caractéristique suivants :

$$\delta\dot{X}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -gk & -gk_d & -gk_i \\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\tilde{A}}\delta X' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1\end{bmatrix}\delta x_r$$

$$
\begin{aligned}
\chi_{\tilde{A}}(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ gk & X + gk_d & gk_i \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} \\
&= X^2(X + gk_d) + gkX + gk_i \\
&= X^3 + gk_d X^2 + gkX + gk_i
\end{aligned}
$$

Paramétrage (attention au δq pour l'instant)

Le critère de Routh donne $k_d > 0$, $gk_i k > k_d$ et $gk_d k_i k > k_i^2$ pour que le système lent soit stable.

On va maintenant identifier le polynôme caractéristique $\chi_{\tilde{A}}$ avec ... qui donne de bonnes performances tout en s'assurant que les inégalités issues du critère de Routh sont vérifiées.

Conclusion sur la question 2

Conclusion

Conclusion sur la question 3

On impose $\bar{u} = ...$ de sorte à avoir $\bar{x} = 0,4$ avec la condition initiale $x_{t=0} = 0$.