



IEL – protokol k projektu

Dinara, Garipova
xgarip00

19. prosince 2021

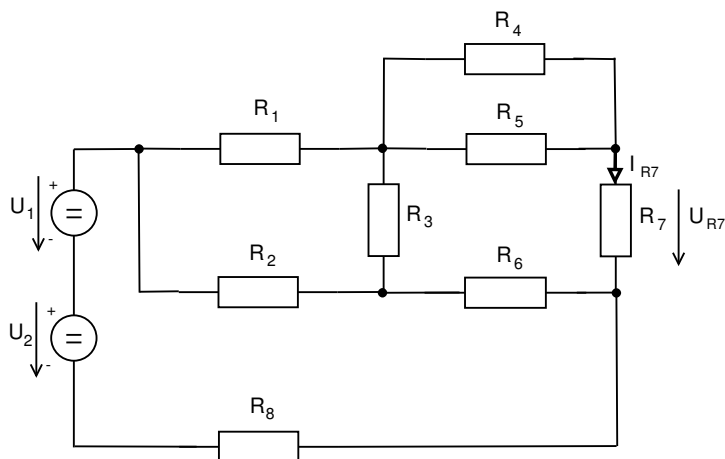
Obsah

1	Příklad 1: Metoda postupného zjednodušování obvodu	2
2	Příklad 2: Theveninův teorém	6
3	Příklad 3: Metoda uzlových napětí	9
4	Příklad 4: Metoda smyčkových proudů	11
5	Příklad 5: Diferenciální rovnici	14
6	Shrnutí výsledků	17

Příklad 1: Metoda postupného zjednodušování obvodu

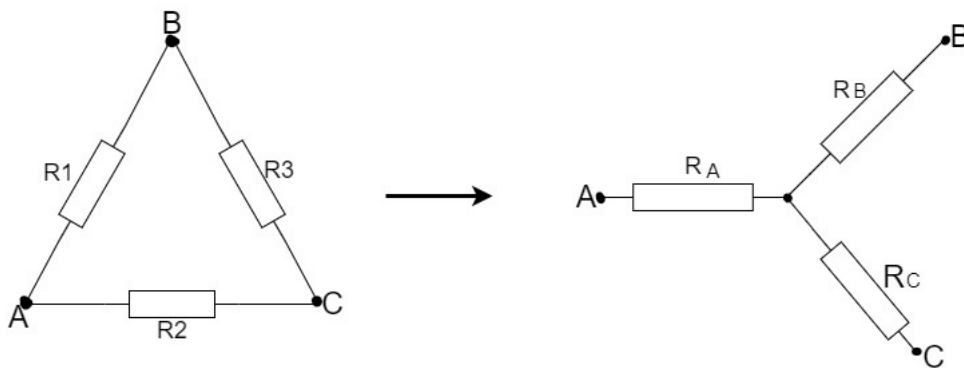
Stanovte napětí U_{R7} a proud I_{R7} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
G	130	60	380	420	330	440	450	650	410	275



Ze složitého obvodu postupným zjednodušováním je třeba dostat až k obvodu s jediným rezistorem, proudem a napěťovým zdrojem:

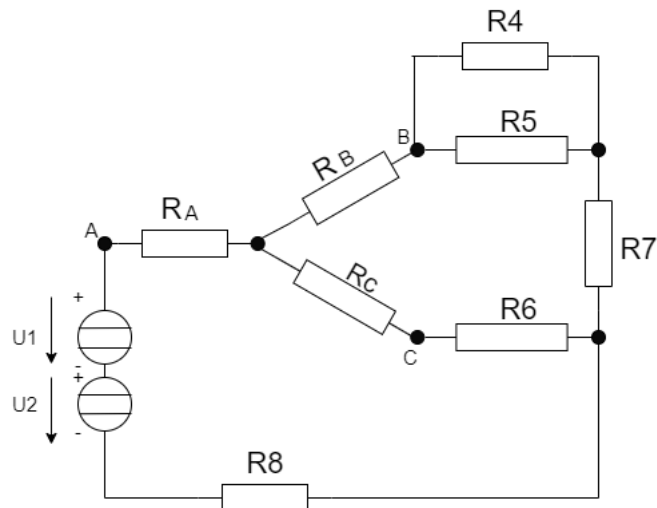
Resistory R_1 , R_2 a R_3 vyřeším pomocí transformaci trojúhelníku do hvězdy, protože mají 3 úzly mezi sebou.



$$R_A = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{380 * 420}{1130} = 141.2389\Omega$$

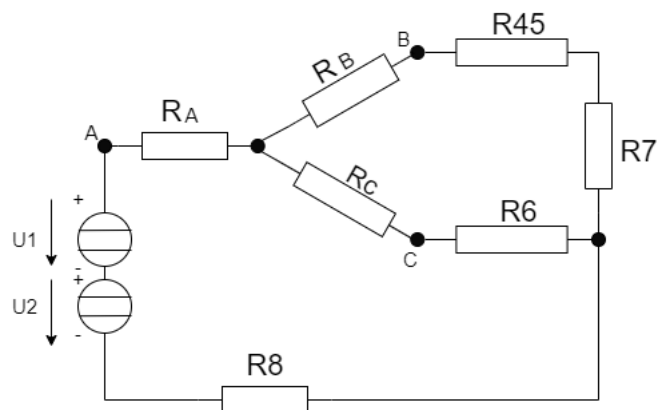
$$R_B = \frac{R_1 * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{380 * 330}{1130} = 110.9735\Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{420 * 330}{1130} = 122.6549\Omega$$



Protože rezistory R_4 , R_5 jsou zapojeny paralelně:

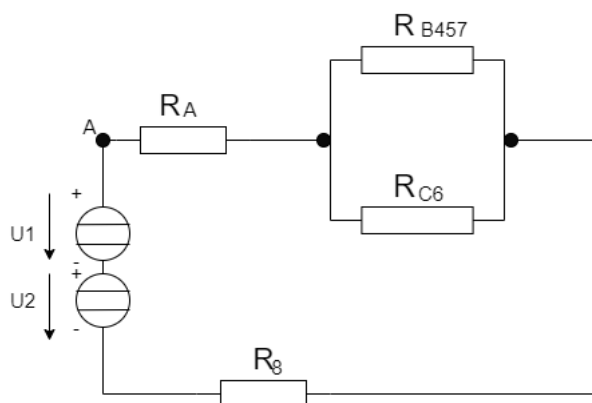
$$R_{45} = \frac{R_4 * R_5}{R_4 + R_5} = \frac{440 * 450}{890} = 222.4719\Omega$$



Pak rezistory R_B , R_{45} , R_7 a R_C , R_6 jsou sériově zapojeny.

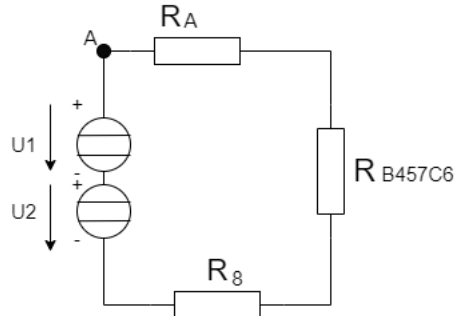
$$R_{B457} = R_B + R_{45} + R_7 = 110.9735 + 222.4719 + 410 = 743.4454\Omega$$

$$R_{C6} = R_C + R_6 = 122.6549 + 650 = 772.6549\Omega$$



Protože rezistory R_{B457} a R_{C6} jsou paralelně zapojeny.

$$R_{B457C6} = \frac{R_{B457} * R_{C6}}{R_{B457} + R_{C6}} = \frac{743.4454 * 772.6549}{743.4454 + 772.6549} = 378.8844\Omega$$

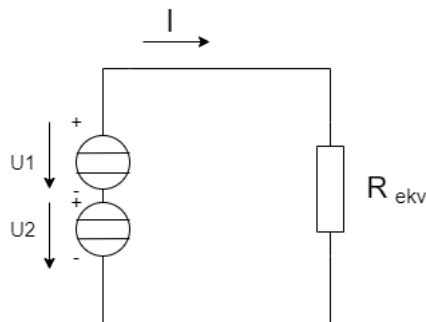


Abychom dostali R_{ekv} , musíme přidat všechny 3 rezistory, máme na to právo, protože jsou zapojeny do série.

$$R_{ekv} = R_A + R_{B457C6} + R_8 = 141.2389 + 378.8844 + 275 = 795.1233\Omega$$

$$U_R = U_{12} = U_1 + U_2 = U = 130 + 60 = 190V$$

$$I_R = I = \frac{190}{795.1233} = 0.2390A$$



Teď vypočítám požadované hodnoty U_{R7} a I_{R7} . Tyto hodnoty zjistím tak, že budu postupně zpětně dopočítávat všechny neznámé veličiny:

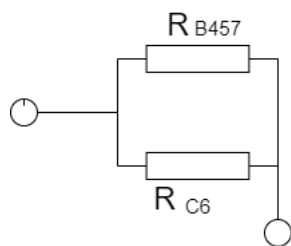
$$I_{R_A} = I_{R_{B457C6}} = I_{R_8} = I = 0.2390A$$

$$U_{R_{B457C6}} = R_{B457C6} * I = 378.8844 * 0.239 = 90.5534V$$

$$U_{R_8} = R_8 * I = 250 * 0.2368 = 59.2V$$

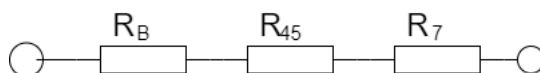
Protože R_{B456} a R_{C6} jsou zapojeny paralelně, jejich napětí jsou stejná:

$$U_{R_{B457C6}} = U_{R_{B457}} = U_{R_{C6}}$$



$$I_{R_{B457}} = I_{R_B} = I_{R_{45}} = I_{R_7}$$

$$I_{R_{B457}} = \frac{U_{R_{B457}}}{R_{B457}} = \frac{90.5534}{743.4454} = 0.1218A$$



$$I_{R_{B457}} = I_{R_B} = I_{R_{45}} = I_{R_7}$$

Dopočítám I_{R_7} a U_{R_7} :

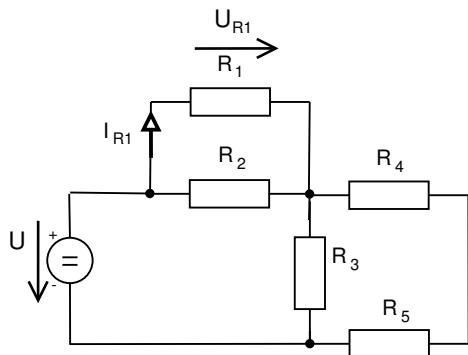
$$I_{R_7} = I_{R_{B457}} = 0.1218A$$

$$U_{R_7} = R_7 * I_7 = 410 * 0.1218 = 49.939V$$

Příklad 2: Theveninův teorém

Stanovte napětí U_{R1} a proud I_{R1} . Použijte metodu Théveninovy věty.

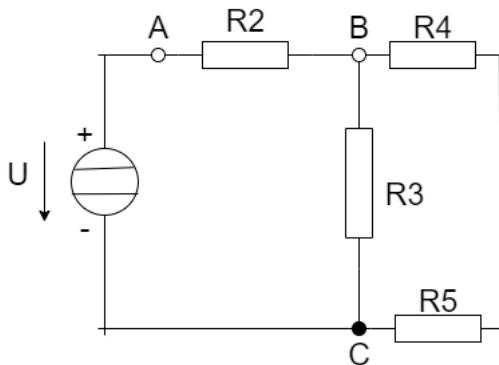
sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
E	250	150	335	625	245	600



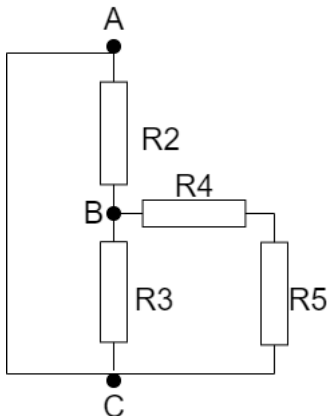
Obvod vyřeším Théveninovou větou tak, že si nejprve vytvořím náhradní (ekvivalentní) obvod

$$I_{R1} = \frac{U_i}{R_i + R_1}$$

Prekreslíme obvod bez R_1 :

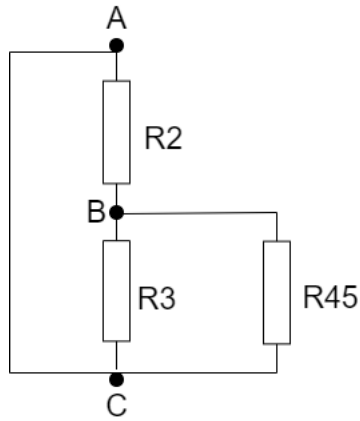


Nahradíme napětové zdroje "zkratem" a spočítáme mezi body A-C:



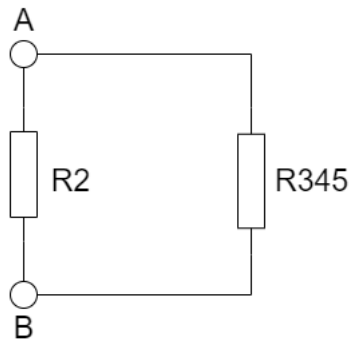
Rezistory R_4 a R_5 jsou zapojené sériově:

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 245 + 600 = 845\Omega$$



Pak paralelně zapojené R_3 a R_{45} :

$$R_{345} = \frac{R_{45} * R_3}{R_{45} + R_3} = \frac{625 * 845}{625 + 845} = 359.2687\Omega$$

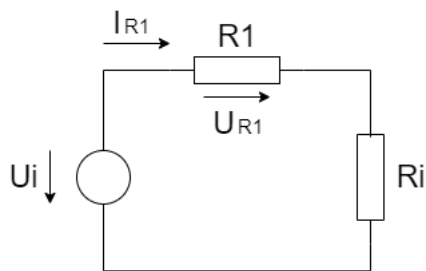


Paralelně zapojené R_2 a R_{345} :

$$R_i = R_{2345} = \frac{R_{345} * R_2}{R_{345} + R_2} = \frac{359.2687 * 335}{359.2687 + 335} = 173.3551\Omega$$

Ted' je třeba zjistit napětí U_i mezi body A, B:

$$U_i = U * \frac{R_2}{R_{345} + R_2} = 250 * \frac{335}{359.2687 + 335} = 120.6305V$$



Ted' vypočítám I_{R1} a U_{R1} :

$$I_{R1} = \frac{U_i}{R_1 + R_i} = \frac{120.6305V}{150 + 173.3551} = 0.3731A$$

$$U_{R1} = R_1 * I_{R1} = 150 * 0.3731 = 55.965V$$

Kontrola:

$$U_{R12} = U_{R1} = U_{R2} = 55.965V$$

$$I_{R345} = I_{R12} = I_{R1} + I_{R2} = I_{R1} + \frac{U_{R2}}{R_2} = 0.3731 + 0.1671 = 0.5402A$$

$$U_{R123} = I_{R345} * R_{345} = 0.5402 * 359.2687 = 194.077V$$

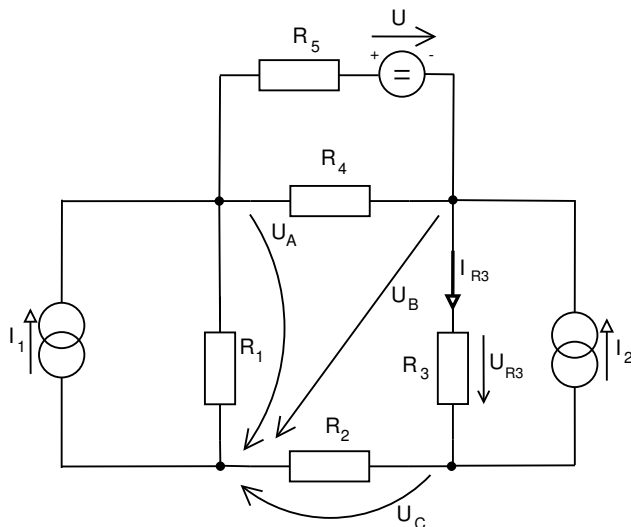
Kontrola (I. Kirchhoffův zákon):

$$U_{R12} + U_{R345} - U = 55.965 + 194.077 - 250 = 0.042 \approx 0$$

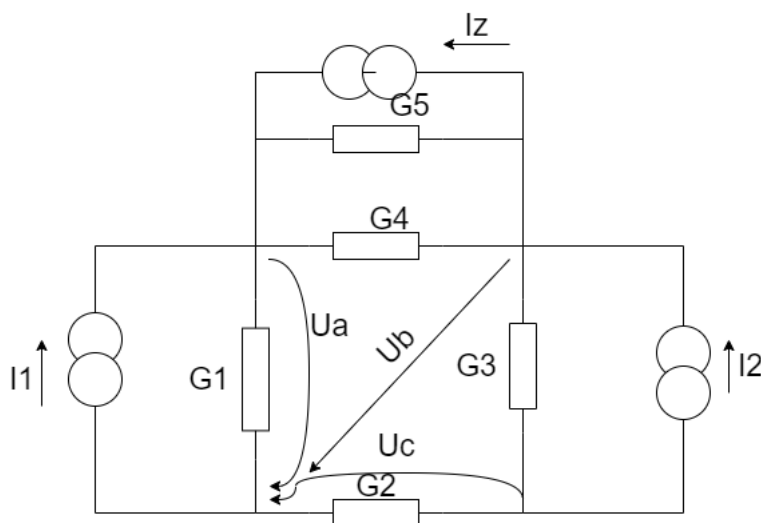
Příklad 3: Metoda uzlových napětí

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
C	110	0.85	0.75	44	31	56	20	30



Překřeslíme si ekvivalentní obvod:



Najdeme proud I_z

$$I_z = \frac{U}{R_5} = \frac{110}{30} = 3.6667 A$$

Prevedieme si odpor na vodivosť:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{44} = 0,0227 S$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{31} = 0,0323 S$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{56} = 0,0179 S$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{20} = 0,05S$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{30} = 0.0333S$$

Zostavíme rovnice:

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_4 + G_5 & -G_4 - G_5 & 0 \\ -G_4 - G_5 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_2 + G_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_z + I_1 \\ I_2 - I_z \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

Sostavíme si a vzrřešíme si matici y daných rovnic a hodnot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.1061 & -0.0833 & 0 & 4.5167 \\ -0.0833 & 0.1012 & -0.0179 & -2.9167 \\ 0 & -0.0179 & 0.0501 & -0.4353 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.1061 & -0.0833 & 0 & 4.5167 \\ 0 & 0,0358 & -0,0179 & 0,6294 \\ 0 & -0.0179 & 0.0501 & -0.75 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.1061 & -0.0833 & 0 & 4.5167 \\ 0 & 0,0358 & -0,0179 & 0,6294 \\ 0 & 0 & 0.0412 & -0.4353 \end{array} \right)$$

$$0.0412 * U_C = -0.4353$$

$$U_C = \frac{-0.4353}{0.0412} = -10.5655V$$

$$0.0358 * U_B - 0.0179 * (-10.5655) = 0.6294$$

$$U_B = \frac{0.6294 - 0.0179 * (-10.5655)}{0.0358} = 12.2989V$$

Výsledky:

$$U_{R_3} = U_B - U_C = 12.2989 - (-10.5655) = 22.8644V$$

$$I_{R_3} = \frac{U_{R_3}}{R_3} = \frac{22.8644}{56} = 0.4083A$$

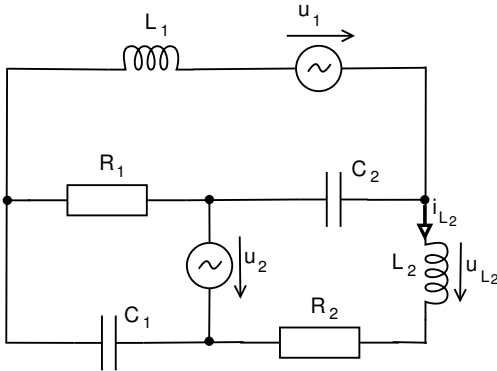
Příklad 4: Metoda smyčkových proudů

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
G	5	5	13	12	140	60	160	80	60



Prvním krokem je přenesem všechna data do systému světových čísel:

$$L_1 = 140 * 10^{-3} = 0.14H$$

$$L_2 = 60 * 10^{-3} = 0.06H$$

$$C_1 = 160 * 10^{-6} = 0.00016F$$

$$C_2 = 80 * 10^{-6} = 0.00008F$$

Druhým krokem vzpočítame si uhlovú rýchlosť ω a impedancie na jednotlivých cievkach a kondenzátoroch.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi * 60 = 120\pi Rad$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$Z_{L1} = j * 120\pi * 0.14 = 52.7788j\Omega$$

$$Z_{L2} = j * 120\pi * 0.06 = 22.6195j\Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

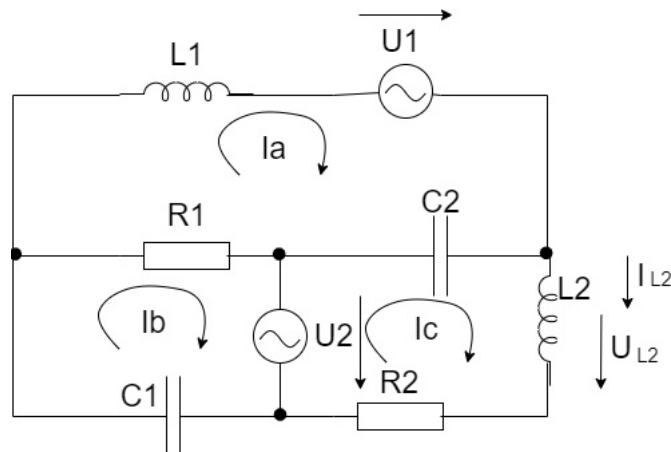
$$Z_{C1} = \frac{1}{j * 120\pi * 0.00016} = \frac{-j}{120\pi * 0.00016} = -16.5787j\Omega$$

$$Z_{C2} = \frac{1}{j * 120\pi * 0.00008} = \frac{-j}{120\pi * 0.00008} = -33.1573j\Omega$$

Před sestavováním samotných rovnic pro smyčky si zjistím hodnoty napětí U_1 a U_2

$$u_1 = U_1 * \sin(2\pi ft) = U_1 * \sin(2\pi f * \frac{\pi}{2\omega}) = U_1 * \sin(2\pi f * \frac{\pi}{2 * 2\pi f}) = U_1 * \sin(\frac{\pi}{2}) = U_1 * 1 = U_1 = 5V$$

$$u_2 = U_2 * \sin(2\pi ft) = U_2 * \sin(2\pi f * \frac{\pi}{2\omega}) = U_2 * \sin(2\pi f * \frac{\pi}{2 * 2\pi f}) = U_2 * \sin(\frac{\pi}{2}) = U_2 * 1 = U_2 = 5V$$



Skládání rovnic pomocí 2 Kirchhoffova zákona:

$$I_a : U_{L1} + U_{C2} + U_{R1} + U_1 = 0$$

$$I_b : U_{R1} + U_{C1} + U_2 = 0$$

$$I_c : U_{C2} + U_{L2} + U_{R2} - U_2 = 0$$

Zostavíme rovnice pre slučkové prúdy:

$$I_a : I_a * (Z_{L1} + R_1 + Z_{C2}) + I_b * (-R_1) + I_C * (-Z_{C2}) = -U_1$$

$$I_b : I_a * (-R_1) + I_b * (R_1 + Z_{C1}) + I_C * 0 = -U_2$$

$$I_c : I_a * (-Z_{C2}) + I_b * 0 + I_C * (Z_{C2} + Z_{L2} + R_2) = U_2$$

Sostavíme si a vzrřešíme si matici y daných rovnic a hodnot:

$$\begin{pmatrix} Z_{L1} + R_1 + Z_{C2} & -R_1 & -Z_{C2} \\ -R_1 & R_1 + Z_{C1} & 0 \\ -Z_{C2} & 0 & Z_{C2} + Z_{L2} + R_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} Z_{L1} + R_1 + Z_{C2} & -R_1 & -Z_{C2} & -U_1 \\ -R_1 & R_1 + Z_{C1} & 0 & -U_2 \\ -Z_{C2} & 0 & Z_{C2} + Z_{L2} + R_2 & U_2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 + 19.6215j & -13 & 33.1573j & -5 \\ -13 & 13 - 16.5787j & 0 & -5 \\ 33.1573j & 0 & 12 - 10.5378j & 5 \end{array} \right)$$

Po úpravách Gaussovou metodou dostanu tento tvar rovnice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0j & -0.0860 - 0.0866j \\ 0 & 1 & 0 & -0.1371 - 0.2615j \\ 0j & 0 & 1 & -0.0177 + 0.2220j \end{array} \right)$$

Výsledné hodnoty proudů jsou tedy:

$$I_a = -0.0860 - 0.0866j A$$

$$I_b = -0.1371 - 0.2615jA$$

$$I_c = -0.0177 + 0.2220jA$$

Proud cívky L_2 obsahuje jak proud I_c hodnota bude kladne, protože proud cívky teče ve stejném směru jako ten proud I_c :

$$I_{L2} = I_c = -0.0177 + 0.2220jA$$

Nyní si můžu vypočítat požadované napětí U_{L2} (a to tak, že vypočítám velikost daného komplexního čísla) a také dopočítat fázevý posun φ_{L2} :

$$\begin{aligned} U_{L2} &= I_{L2} * Z_{L2} = (-0.0177 + 0.2220j) * (0 + 22.6195j) = (-0.0177 + 0.2220j) * 22.6195j = \\ &= -0.0177 * 22.6195j + 0.2220 * 22.6195j^2 = -5.0215 - 0.4004j \text{ V} \end{aligned}$$

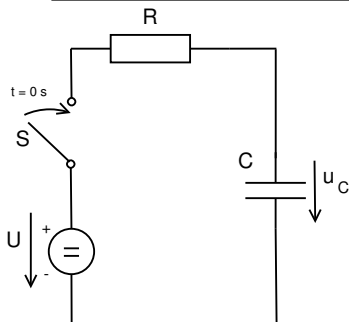
$$|U_{L2}| = \sqrt{(-5.0215)^2 + (-0.4004)^2} = \sqrt{25.2155 + 0.16032} = \sqrt{25.3758} = 5.0374V$$

$$\begin{aligned} \varphi_{L2} &= -\pi + \arctg\left(\frac{Im(U_{L2})}{Re(U_{L2})}\right) * \frac{\pi}{180} = -\pi + \arctg\left(\frac{0.4004}{5.0215}\right) * \frac{\pi}{180} = \\ &= (-\pi + \arctg(0,0797) * \frac{\pi}{180}) * \frac{180}{\pi} = -179.9205^\circ \end{aligned}$$

Příklad 5: Diferenciální rovnici

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	R [Ω]	C [F]	$u_C(0)$ [V]
E	50	30	40	10



Popis rovnicemi:

$$U_R + U_C - U = 0 \text{ (2 Kirchhoffov zákon);}$$

$$I = \frac{U_R}{R} \text{ (Ohmov zákon);}$$

Dosadíme druhý vzorec do prvního:

$$R \times I + U_C - U = 0$$

$$I = \frac{U - U_C}{R}$$

Zostavíme si rovnici pre u'_c a vytvoríme diferenciálnu rovnici:

$$\begin{aligned} u'_c &= \frac{1}{C} \times I \\ u'_c &= \frac{U - U_c}{R \times C} = \frac{50 - U_C}{30 \times 40} \\ u'_c + U_c \times \frac{1}{1200} &= \frac{5}{120} \end{aligned}$$

Vypočítame λ z charakteristickej rovnice:

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{1}{R \times C} &= 0 \\ \lambda + \frac{1}{1200} &= 0 \\ \lambda &= -\frac{1}{1200} \end{aligned}$$

Očekávaný tvar rovnice

$$\begin{aligned} u_c(t) &= k(t)e^{\lambda \times t} \\ u_c(t) &= k(t)e^{-\frac{t}{1200}} \end{aligned}$$

Dosadíme do všeobecnej rovnice a zderivujeme:

$$u'_c(t) = k'(t)e^{-\frac{t}{1200}} + k(t)\left(-\frac{1}{1200}\right)e^{-\frac{t}{1200}}$$

Dosadíme do rovnice, ktorú sme si definovali:

$$\begin{aligned} u'_c + U_C \frac{1}{1200} &= \frac{5}{120} \\ k'(t)e^{-\frac{t}{1200}} + k(t)\left(-\frac{1}{1200}\right)e^{-\frac{t}{1200}} + k(t)\left(\frac{1}{1200}\right)e^{-\frac{t}{1200}} &= \frac{5}{120} \\ k'(t)e^{-\frac{t}{1200}} &= \frac{5}{120} \end{aligned}$$

Zbavíme sa derivácie a vyjadríme $k(t)$:

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{5}{120}e^{\frac{t}{1200}} \\ \int k'(t) &= \int \frac{5}{120}e^{\frac{t}{1200}} dt \\ k(t) &= \frac{5}{120} \int e^{\frac{t}{1200}} dt \\ k(t) &= \frac{5}{120} \times \frac{1}{\frac{1}{1200}} e^{\frac{t}{1200}} + K \\ k(t) &= 50e^{\frac{t}{1200}} + K \end{aligned}$$

Dosadíme $k(t)$ do očakávanej rovnice:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= (50e^{\frac{t}{1200}} + K)e^{-\frac{t}{1200}} \\ u_c(t) &= 50 + Ke^{-\frac{t}{1200}} \end{aligned}$$

Vypočítame K podľa podmienky $u_c(t) = 10V$ (kde $t = 0$):

$$\begin{aligned} u_c(0) &= 50 + Ke^0 \\ 10 &= 50 + K \\ K &= -40 \end{aligned}$$

Výsledok skontrolujeme

Najskôr si vyjadríme u'_c :

$$u'_c + U_c \frac{1}{1200} = \frac{5}{120}$$

$$u_c(t) = 50 - 40e^{-\frac{t}{1200}}$$

$$u'_c + \frac{50}{1200} - \frac{40e^{-\frac{t}{1200}}}{1200} = \frac{5}{1200}$$

$$u'_c = \frac{40e^{-\frac{t}{1200}}}{1200}$$

Dosadíme do zostavenej diferenciálnej rovnice a dopočítame s hodnotami $k = -40$ a $t = 0$:

$$u'_c + U_c \times \frac{1}{1200} = \frac{5}{120}$$

$$\frac{40e^{-\frac{t}{1200}}}{1200} + \frac{50 - 40e^{-\frac{t}{1200}}}{1200} = \frac{5}{120}$$

$$\frac{40e^0}{1200} + \frac{50 - 40e^0}{1200} = \frac{5}{120}$$

$$\frac{40}{1200} + \frac{50 - 40}{1200} = \frac{5}{120}$$

$$\frac{50}{1200} = \frac{5}{120}$$

$$\mathbf{0 = 0}$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	G	$U_{R7} = 49,938V$ $I_{R7} = 0,1218A$
2	E	$U_{R1} = 55,965V$ $I_{R1} = 0.3731A$
3	C	$U_{R3} = 22.8644V$ $I_{R3} = 0.4083A$
4	G	$ U_{L2} = 5.0374V$ $\varphi_{L2} = -179.9205^\circ$
5	E	$u_C = \frac{40e^{-\frac{t}{1200}}}{1200}$