知能ソフトウェア演習・ロボットシステム演習・メカトロニクス設計演習

ロボットシミュレーション（２）：逆動力学・順動力学

機械情報工学科 山本 江

2022 年 10 月 17 日

1 逆動力学

逆動力学計算とは，ロボットの関節角・速度・加速度が与えられたときに，そのような運動を行うために必要な関節トルクを求める計算で，主に制御や運動解析に使われる．開リンク機構の逆動力学計算法としては Newton-Euler Formulation [1] と呼ばれる高速な計算法が確立されている．Newton-Euler 法とは各リンクの運動と，他のリンクから受ける力に基づいて Newton，Euler の運動方程式を漸化式として構成する方法である．

この計算法は以下の 2 つの手順からなる．

1. 関節角，関節速度，関節加速度から各リンクの位置・姿勢，並進・角速度，並進・角加速度を計算する．これは第 1 回で実装した順運動学計算と同様に，ルートリンクからエンドリンクへ向かって再帰的に計算していく．これを以下では順方向計算と呼ぶ.
2. 剛体の運動方程式からリンクに働く力・モーメントを求め，それを用いて関節トルクを計算する．これは 1. とは逆にエンドリンクからルートリンクへ向かって再帰的に計算していくので，以下では逆方向計算と呼ぶ.

以下では，Fig.1 のようにリンク i, j, k が親子関係を持ってつながっているリンク系を考え，リンク j に関する各種物理量を計算する方法を示す.

1.1 順方向計算

位置・姿勢 第 1 回の資料にある方法でリンク j の位置 ${}^0\boldsymbol{p}_j$・姿勢 ${}^0\boldsymbol{R}_j$ を計算する．

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{p}_j &= {}^0\boldsymbol{p}_i + {}^0\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{p}_{ij} && (1)\\
{}^0\boldsymbol{R}_j &= {}^0\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{R}_j && (2)
\end{aligned}
$$

並進速度・角速度 リンク i の絶対座標系における並進速度 ${}^0\dot{\boldsymbol{p}}_i$ と角速度 ${}^0\boldsymbol{\omega}_i$ がわかっているとき，リンク j の並進速度・角速度はそれぞれ以下のように計算できる．

まず，式 (1) を時間に関して微分すると，

$$
{}^0\dot{\boldsymbol{p}}_j = {}^0\dot{\boldsymbol{p}}_i + {}^0\boldsymbol{R}_i{}^i\dot{\boldsymbol{p}}_{ij} + {}^0\dot{\boldsymbol{R}}_i{}^i\boldsymbol{p}_{ij} \quad (3)
$$

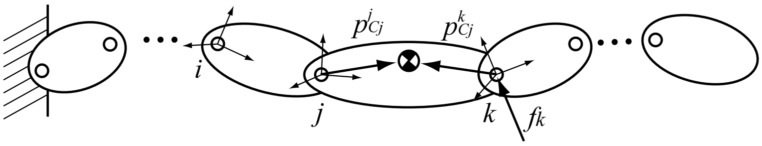

図 1: リンク i, j, k の関係

ここで，$\dot{\boldsymbol{R}} = [\boldsymbol{\omega}\times]\boldsymbol{R}$ の関係を利用すると

$$ {}^0\dot{\boldsymbol{p}}_j = {}^0\dot{\boldsymbol{p}}_i + {}^0\boldsymbol{R}_i{}^i\dot{\boldsymbol{p}}_{ij} + [{}^0\boldsymbol{\omega}_i\times]{}^0\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{p}_{ij} \tag{4} $$

角速度に関しては，線形和が成り立つので，

$$ {}^0\boldsymbol{\omega}_j = {}^0\boldsymbol{\omega}_i + {}^0\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{\omega}_{ij} \tag{5} $$

となる．

ここで，${}^j\boldsymbol{p}'_{ij}, {}^j\boldsymbol{\omega}_{ij}$ を導入する．これはリンク i に対するリンク j の相対速度をリンク j 座標系で表したもので，特に ${}^j\boldsymbol{p}'_{ij}$ は,

$$ {}^j\boldsymbol{p}'_{ij} = {}^i\boldsymbol{R}_j^{T\,i}\dot{\boldsymbol{p}}_{ij} \tag{6} $$

となる．${}^j\boldsymbol{\omega}_{ij}$ は回転軸方向と関節速度から導けばよい．例えば z 軸回りの回転関節の関節速度が $\dot{q}_j$ のときはそれぞれ ${}^j\boldsymbol{p}'_{ij} = (0\;0\;0)^T, {}^j\boldsymbol{\omega}_{ij} = (0\;0\;1)^T\dot{q}_j$ である．

注意が必要なのは,

$$ {}^j\boldsymbol{p}'_{ij} \neq \frac{d}{dt}{}^j\boldsymbol{p}_{ij} $$

ということ．これは,

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left({}^j\boldsymbol{p}_{ij}\right) &= \frac{d}{dt}\left({}^i\boldsymbol{R}_j^{T\,i}\boldsymbol{p}_{ij}\right) = {}^i\dot{\boldsymbol{R}}_j^{T\,i}\boldsymbol{p}_{ij} + {}^i\boldsymbol{R}_j^{T\,i}\dot{\boldsymbol{p}}_{ij} \\ &\neq {}^i\boldsymbol{R}_j^{T\,i}\dot{\boldsymbol{p}}_{ij} \end{aligned} \tag{7} $$

からわかる．

式 (4)(5) を ${}^j\boldsymbol{p}'_{ij}, {}^j\boldsymbol{\omega}_{ij}$ を用いて書き直すと,

$$ {}^0\dot{\boldsymbol{p}}_j = {}^0\dot{\boldsymbol{p}}_i + {}^0\boldsymbol{R}_j{}^j\boldsymbol{p}'_{ij} + {}^0\boldsymbol{\omega}_i \times {}^0\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{p}_{ij} \tag{8} $$

$$ {}^0\boldsymbol{\omega}_j = {}^0\boldsymbol{\omega}_i + {}^0\boldsymbol{R}_j{}^j\boldsymbol{\omega}_{ij} \tag{9} $$

となり，これをルートリンクからエンドリンクに向かって計算することで全リンクの速度・角速度を知ることができる．

なお，ルートリンク $(j = 0)$ に対しては ${}^0\dot{\boldsymbol{p}}_0 = {}^0\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{O}$ とする．

並進加速度・角加速度　リンク i の絶対座標系における並進加速度 ${}^0\ddot{\boldsymbol{p}}_i$ と角加速度 ${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ がわかっているとき，リンク j の並進加速度・角加速度は速度の時と同様の方法でそれぞれ以下のように計算できる．

$$ {}^0\ddot{\boldsymbol{p}}_j = {}^0\ddot{\boldsymbol{p}}_i + {}^0\boldsymbol{R}_j{}^j\boldsymbol{p}''_{ij} + 2{}^0\boldsymbol{\omega}_i \times {}^0\boldsymbol{R}_j{}^j\boldsymbol{p}'_{ij} + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^0\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{p}_{ij} + {}^0\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^0\boldsymbol{\omega}_i \times {}^0\boldsymbol{R}_i{}^i\boldsymbol{p}_{ij}) \tag{10} $$

$$ {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}^0\boldsymbol{R}_j{}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ij} + {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times {}^0\boldsymbol{R}_j{}^j\boldsymbol{\omega}_{ij} \tag{11} $$

ここで ${}^j\boldsymbol{p}''_{ij}, {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ij}$ はリンク i に対するリンク j の相対加速度をリンク j 座標系で表したもので，関節加速度から計算できる．例えば z 軸回りの回転関節の関節加速度が $\ddot{q}_j$ のときはそれぞれ ${}^j\boldsymbol{p}''_{ij} = (0\;0\;0)^T, {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ij} = (0\;0\;1)^T\ddot{q}_j$ である．なお，ルートリンク $(j = 0)$ に対しては重力加速度を $\boldsymbol{g}$ として ${}^0\ddot{\boldsymbol{p}}_0 = -\boldsymbol{g}, {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \boldsymbol{O}$ とすることにより，重力の影響を考慮することができる．

重心の並進加速度　剛体の運動方程式は重心の運動で記述されるので，重心の並進加速度を計算する必要がある (角加速度はリンク全体で一定)．リンク j 座標系で表したリンク j の重心位置を ${}^j\boldsymbol{p}^j_{Cj}$ とすると (Fig.1 参照)，絶対座標系における重心加速度は次式で計算される．

$$ {}^0\ddot{\boldsymbol{p}}_{Cj} = {}^0\ddot{\boldsymbol{p}}_j + {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times {}^0\boldsymbol{R}_j{}^j\boldsymbol{p}^j_{Cj} + {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\boldsymbol{\omega}_j \times {}^0\boldsymbol{R}_j{}^j\boldsymbol{p}^j_{Cj}) \tag{12} $$

1.2　逆方向計算

剛体の運動方程式　剛体の質量を m，重心回りの慣性モーメントを $\boldsymbol{I}$ としたとき，重心が並進加速度 $\ddot{\boldsymbol{p}}_C$，角加速度 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ で運動している剛体の運動方程式は次のように表される．

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\boldsymbol{p}}_C &= \boldsymbol{f} && (13)\\
\boldsymbol{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}) &= \boldsymbol{n} && (14)
\end{aligned}
$$

ここで $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{n}$ はそれぞれ重心に働く力・モーメントである．式 (13) をニュートンの運動方程式，式 (14) をオイラーの運動方程式といい，2 つを合わせてニュートン・オイラーの運動方程式と呼ぶこともある．

関節に働く力・モーメントの計算　リンク j の質量を m_j，絶対座標系で表した慣性モーメントを ${}^0\boldsymbol{I}_j$，重心の並進加速度を ${}^0\ddot{\boldsymbol{p}}_{Cj}$，角加速度を ${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_j$ とおくと，リンク j の運動方程式は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
m_j{}^0\ddot{\boldsymbol{p}}_{Cj} &= {}^0\boldsymbol{F}_j && (15)\\
{}^0\boldsymbol{I}_j{}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + {}^0\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^0\boldsymbol{I}_j{}^0\boldsymbol{\omega}_j) &= {}^0\boldsymbol{N}_j && (16)
\end{aligned}
$$

ここで ${}^0\boldsymbol{F}_j, {}^0\boldsymbol{N}_j$ はそれぞれリンク j の重心に働く合力，合モーメントである．一般に各リンクは親リンク側・子リンク側双方に関節があるので，このままではそれぞれの関節で働く力・モーメントを決定することはできない．しかし，エンドリンクのみは子リンク側に関節がないので，${}^0\boldsymbol{F}_j, {}^0\boldsymbol{N}_j$ は親リンク側からの力・モーメントによるものであることが決められる．

　よって，エンドリンクから順に関節で働く力・モーメントを再帰的に計算していくことで，一般にリンク j とその子リンク k の間の関節がリンク k に及ぼす力 ${}^0\boldsymbol{f}_k$ とモーメント ${}^0\boldsymbol{n}_k$ がすでに計算されているものとして，関節 j に働く力 ${}^0\boldsymbol{f}_j$ とモーメント ${}^0\boldsymbol{n}_j$ を求めることができる．まず ${}^0\boldsymbol{F}_j$ は次のように表される．

$$
{}^0\boldsymbol{F}_j = {}^0\boldsymbol{f}_j - {}^0\boldsymbol{f}_k \qquad (17)
$$

ここではリンク j が関節 k から ${}^0\boldsymbol{f}_k$ の反作用として $-{}^0\boldsymbol{f}_k$ の力を受けることを使っている．一方，${}^0\boldsymbol{N}_j$ は次のようになる．

$$
{}^0\boldsymbol{N}_j = {}^0\boldsymbol{n}_j - {}^0\boldsymbol{n}_k - {}^0\boldsymbol{p}^j_{Cj} \times {}^0\boldsymbol{f}_j + {}^0\boldsymbol{p}^k_{Cj} \times {}^0\boldsymbol{f}_k \qquad (18)
$$

ここで ${}^0\boldsymbol{p}^j_{Cj}, {}^0\boldsymbol{p}^k_{Cj}$ はそれぞれリンク j, k 座標系の原点からリンク j の重心へ向かうベクトルで，以下の関係がある．

$$
{}^0\boldsymbol{p}^j_{Cj} = {}^0\boldsymbol{p}_{jk} + {}^0\boldsymbol{p}^k_{Cj} \qquad (19)
$$

式 (17), 式 (18) より，${}^0\boldsymbol{f}_j, {}^0\boldsymbol{n}_j$ を求める式が得られる．

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{f}_j &= {}^0\boldsymbol{F}_j + {}^0\boldsymbol{f}_k && (20)\\
{}^0\boldsymbol{n}_j &= {}^0\boldsymbol{N}_j + {}^0\boldsymbol{n}_k + {}^0\boldsymbol{p}^j_{Cj} \times {}^0\boldsymbol{f}_j - {}^0\boldsymbol{p}^k_{Cj} \times {}^0\boldsymbol{f}_k && (21)
\end{aligned}
$$

関節トルクの計算　前節で計算した関節に働く力・モーメントのうち，関節によって拘束されている方向の力・モーメントはその拘束自体によって生み出される．したがって，各関節は拘束していない方向の力・モーメントを発生すればよい．例えば z 軸回りの回転関節の場合，その関節は z 軸回りのモーメントだけを発生すればよい．このことから，関節 j の関節トルク $\boldsymbol{\tau}_j$ を求めるには，まず力・モーメントをリンク座標系で表し，適当な定数行列 $\boldsymbol{K}$ を用いて

$$
\boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{K} \begin{pmatrix} {}^j\boldsymbol{f}_j \\ {}^j\boldsymbol{n}_j \end{pmatrix} \qquad (22)
$$

を計算すればよい．以下に $\boldsymbol{K}$ の例をいくつか示す．

- z 軸回りの回転関節：$\boldsymbol{K} = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)$

- z 軸方向の並進関節：$\boldsymbol{K} = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)$

- 球面関節

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

1.3 リンク座標系表記 (参考)

以上の計算はすべて絶対座標系で行ってきたが，実はリンク座標系で計算した方が計算量が少ないことが知られている．リンク j に関する各変数をリンク j 座標系で表したときに，それらを求めるための式を以下に示す．

並進速度・角速度

$$
\begin{aligned}
{}^j\dot{\boldsymbol{p}}_j &= {}^i\boldsymbol{R}_j^T {}^i\dot{\boldsymbol{p}}_i + {}^j\boldsymbol{p}'_{ij} + {}^i\boldsymbol{R}_j^T({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\boldsymbol{p}_{ij}) && (24)\\
{}^j\boldsymbol{\omega}_j &= {}^i\boldsymbol{R}_j^T {}^i\boldsymbol{\omega}_i + {}^j\boldsymbol{\omega}_{ij} && (25)
\end{aligned}
$$

並進加速度・角加速度

$$
\begin{aligned}
{}^j\ddot{\boldsymbol{p}}_j &= {}^j\boldsymbol{p}''_{ij} + (2{}^i\boldsymbol{R}_j^T {}^i\boldsymbol{\omega}_i) \times {}^j\boldsymbol{p}'_{ij} + {}^i\boldsymbol{R}_j^T\{{}^i\ddot{\boldsymbol{p}}_i + {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^i\boldsymbol{p}_{ij} + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^i\boldsymbol{p}_{ij})\} && (26)\\
{}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j &= {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ij} + {}^j\boldsymbol{\omega}_j \times {}^j\boldsymbol{\omega}_{ij} + {}^i\boldsymbol{R}_j^T {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i && (27)
\end{aligned}
$$

重心の並進加速度

$$
{}^j\ddot{\boldsymbol{p}}_{Cj} = {}^j\ddot{\boldsymbol{p}}_j + {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j \times {}^j\boldsymbol{p}^j_{Cj} + {}^j\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^j\boldsymbol{\omega}_j \times {}^j\boldsymbol{p}^j_{Cj}) \tag{28}
$$

リンクの運動方程式

$$
\begin{aligned}
{}^j\boldsymbol{F}_j &= m_j {}^j\ddot{\boldsymbol{p}}_{Cj} && (29)\\
{}^j\boldsymbol{N}_j &= {}^j\boldsymbol{I}_j {}^j\dot{\boldsymbol{\omega}}_j + {}^j\boldsymbol{\omega}_j \times ({}^j\boldsymbol{I}_j {}^j\boldsymbol{\omega}_j) && (30)
\end{aligned}
$$

関節に働く力・モーメント

$$
\begin{aligned}
{}^j\boldsymbol{f}_j &= {}^j\boldsymbol{F}_j + {}^j\boldsymbol{R}_k {}^k\boldsymbol{f}_k && (31)\\
{}^j\boldsymbol{n}_j &= {}^j\boldsymbol{N}_j + {}^j\boldsymbol{p}^j_{Cj} \times {}^j\boldsymbol{f}_j + {}^j\boldsymbol{R}_k({}^k\boldsymbol{n}_k - {}^k\boldsymbol{p}^k_{Cj} \times {}^k\boldsymbol{f}_k) && (32)
\end{aligned}
$$

2 課題１：逆動力学

逆動力学シミュレーションの流れ　逆動力学シミュレーションのファイルは `id_sample.m` である．このファイルでは次の流れで計算を行っている．

1. リンクの設定（`CreateChain.m`）

2. 関節角度，角速度，角加速度の初期化

3. 目標関節角度，角速度，角加速度の設定（配列で定義）

4. 逆動力学計算の実行 (`InverseDynamics.m`)

逆動力学計算 (`InverseDynamics.m`) ではニュートン・オイラー法を用いており，順方向計算（位置，速度，加速度）と逆方向計算（力，トルク）が実装されている．

課題 1-1: 速度計算の実装

`InverseDynamics.m` ではまず順方向計算として

- リンクと重心の位置 (`ForwardKinematics.m`)
- リンクの速度 (`ForwardKinematicsVelocity.m`)
- リンクと重心の加速度 (`ForwardKinematicsAcceleration.m`)

を計算している．`ForwardKinematicsVelocity.m` を編集して速度，角速度の計算を実装せよ．TA のチェックを受けること．

課題 1-2: 逆動力学計算の実行

`id_sample.m` を実行し，結果のグラフを確認せよ．
また，関節トルクの正解を `id_solution_check.mat` に保存してあるので逆動力学計算の結果と比較して TA の確認を受けること．

3 順動力学

順動力学計算とは，関節トルク (一般には，一般化力) が与えられたときに，その結果として発生する関節加速度を求める計算で，動力学シミュレーションに使われる．順動力学計算は逆動力学計算よりも難しく，後で見るように最も単純な方法では自由度数の 2 乗に比例する計算が必要であるため，これを高速化する試みが多数行われている．ここでは最もわかりやすい単位ベクトル法 [2] について説明する．

3.1 リンク機構の運動方程式

リンク機構の運動方程式は一般に次式のように表される．

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{33}$$

ここでリンク機構の自由度数を N とすると，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ は慣性行列と呼ばれる関節角に依存して変化する $N \times N$ の正定値対称行列である．一方 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ は加速度を零にするために必要な関節トルクを表す N 要素のベクトルで，重力・遠心力・コリオリ力が含まれるので，関節角と関節速度に依存する．以下ではこれらを $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{c}$ と略記する．

何らかの方法で $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{c}$ を求めることができれば，関節トルク $\boldsymbol{\tau}$ が与えられたとき

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{c}) \tag{34}$$

によって関節加速度を計算することができる．ただし，$\boldsymbol{M}$ の逆行列の計算に $O(N^3)$ の計算量が必要になるため，自由度数が増加すると計算量が爆発的に増えるという問題点がある．

3.2　単位ベクトル法

順動力学計算のひとつである単位ベクトル法では $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{c}$ を以下のようにして計算する．

逆動力学計算とは関節角 $\boldsymbol{q}$・速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$・加速度 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ の情報から関節に発生するトルク $\boldsymbol{\tau}$ を求める計算であるので，これを簡単のため

$$\boldsymbol{\tau} = \Gamma(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) \tag{35}$$

と表記する．すなわち

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \Gamma(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{\tau} \tag{36}$$

まず $\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{O}$，すなわち全関節加速度を零として逆動力学計算を行い，必要な関節トルク $\boldsymbol{\tau}_0 = \Gamma(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{O})$ を求めると，式 (33) に $\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{O}$ を代入すると明らかなように $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\tau}_0$ が得られる．

次に，$\ddot{\boldsymbol{q}}$ の第 i 要素 $(i = 1, 2, \dots, N)$ だけを 1 とし，それ以外の要素を 0 として逆動力学計算を行い，関節トルク $\boldsymbol{\tau}_i$ を求める．第 i 要素 $(i = 1, 2, \dots, N)$ だけが 1 で，それ以外の要素が 0 のベクトルを $\boldsymbol{e}_i$ と書くと，$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{e}_i$ を式 (33) に代入すると，逆動力学計算で得られるトルク $\boldsymbol{\tau}_i$ は

$$\boldsymbol{\tau}_i = \Gamma(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{c} \tag{37}$$

となることがわかる．ここで，$\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_i$ は $\boldsymbol{M}$ の第 i 列であるので，これを $\boldsymbol{m}_i$ と書くことにする．

式 (37) において，$\boldsymbol{c}$ はすでに式 (35) で計算できているので，

$$\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{\tau}_i - \boldsymbol{c} \tag{38}$$

として $\boldsymbol{m}_i$ を求めることができる．すなわち，式 (37) と式 (38) を各 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して繰り返せば $\boldsymbol{M}$ を求めることができるのである．

このように，関節加速度を単位ベクトルとする逆動力学計算を繰り返し行い，慣性行列 $\boldsymbol{M}$ を求める計算法を単位ベクトル法という．

単位ベクトル法においては，1 回の逆動力学計算に $O(N)$ 回の演算が必要であり，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{c}$ を求めるためにはそれを $N+1$ 回繰り返す．したがって，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{c}$ を求めるには $O(N^2)$ 回の演算が必要である．運動方程式を解くための計算とあわせると，単位ベクトル法による順動力学計算は $O(N^3)$ の演算が必要であることがわかる．

余談であるが，$\boldsymbol{c}$ の内容はより詳細に分解することができる．$\boldsymbol{c}$ のうち遠心力・コリオリ力の影響の成分はある行列 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ を用いて $\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{M}} - \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{q}}$ の形で書くことができる．重力によるトルクは関節角のみに依存するので $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ と書くことにすると，

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{M}} - \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \tag{39}$$

と書くことができる．すなわち，$\boldsymbol{\tau}_g = \Gamma(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O})$ を計算すれば $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}_g = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{O})$ として重力トルクを求めることができる．

3.3　積分

関節加速度が計算できたら，次にそれを 2 回積分して関節角度を計算することによりシミュレーションが完成する．数値積分には高速だが精度の低いオイラー法，精度の高いルンゲ・クッタ法などがある．

4　課題２：順動力学

シミュレーションの流れ　順動力学シミュレーションの流れは以下の通りである．

1. リンクの設定（`CreateChain.m`）
2. 関節位置･姿勢, 角速度, 角加速度の初期化 (`ForwardKinematics.m`, `ForwardKinematicsVelocity.m`, `ForwardKinematicsAcceleration.m`)
3. 関節角度・関節角速度の取得 (`GetJointAngle.m`,`GetJointVelocity.m`)
4. 指示トルクの設定
5. 順動力学計算の実行 (`UnitVectorMethod.m`)
6. 関節加速度の設定 (`SetJointAcceleration.m`)
7. 積分の実行 (`UpdateChain.m`)

この演習では順動力学計算には単位ベクトル法を用いる．また，積分は実装をわかりやすくするためにオイラー積分を用いている．

課題 2-1: 単位ベクトル法の実装

`UnitVectorMethod.m` を編集して単位ベクトル法を実装せよ．

課題 2-2: 順動力学計算の実行

順動力学シミュレーションファイルを `fd_assignment.m` として新たに作成し，初期姿勢が

$$\boldsymbol{q}_{ini} = \begin{bmatrix} -\pi & \pi/3 & -\pi/4 & \pi/3 & \pi/7 & 2\pi/5 & \pi/7 \end{bmatrix}^T \tag{40}$$

また，初期速度・加速度が 0 である場合に，関節トルクとして

$$\boldsymbol{\tau}_f = \begin{bmatrix} 120\dot{q}_1 & 120\dot{q}_2 & 120\dot{q}_3 & 75\dot{q}_4 & 75\dot{q}_5 & 15\dot{q}_6 & 7.5\dot{q}_7 \end{bmatrix}^T \tag{41}$$

の摩擦力が働いているときのシミュレーションを実装せよ．ただし，積分の時間幅は 0.005 秒とし，1 秒間分のシミュレーションを行うこと．`fd_assignment.m` 冒頭に `clean all;` を書くことで実行時にワークスペース変数を初期化できる．
関節角加速度の軌跡を `fd_solution_check.mat` に保存されている値と比較する．TA のチェックを受けること．

5　課題の提出

課題全てについて TA のチェックに合格したものは，作成した以下の.m ファイルを ITC-LMS に提出すること．提出したものは退出して構わない．

- `ForwardKinematicsVelocity.m`
- `id_sample.m`
- `UnitVectorMethod.m`
- `fd_assignment.m`

参考文献

[1] D.E. Orin, R.B. McGhee, M. Vukobratovic, and G. Hartoch. Kinematic and Kinetic Analysis of Open-chain Linkages Utilizing Newton-Euler Methods. *Mathematical Biosciences*, 43:107–130, 1979.

[2] M.W. Walker and D.E. Orin. Efficient Dynamic Computer Simulation of Robot Manipulators. *ASME Journal on Dynamic Systems, Measurement and Control*, 104:205–211, 1982.