Kvantummechanika A – gyakorlat
1. pót-ZH

2022. 12. 21.

Összesen **25 pont** érhető el. Ebből legalább 10 pont szükséges a sikeres ZH-hoz.

Nem kell kapkodni, és sok sikert!

1. feladat – *Bohr–Sommerfeld-kvantálás*

(**5 pont**)

Egy gumilabda rugalmasan pattog egy vízszintes felületen a Föld homogén gravitációs erőterében. Jelölje a azt a maximális magasságot, ameddig felpattan. Kvantáljuk meg ezt a rendszert a Bohr–Sommerfeld-féle kvantálási feltétellel!

1. Milyen lehetséges magasságokat kapunk?
2. Mekkora a legkisebb $a > 0$ magasság, amivel pattoghat a labda?

2. feladat – *Impulzusreprezentáció*

(**8 pont**)

Tekintsük a

$$\psi(x) = \begin{cases} A(x + a/2)\ , & \text{ha } -a/2 < x < 0 \\ -A(x - a/2)\ , & \text{ha } 0 < x < a/2 \\ 0\ , & \text{egyébként} \end{cases}$$

egydimenziós hullámcsomagot.

1. Határozzuk meg az A normálási faktort, és számítsuk ki $\langle \hat{x} \rangle$ és $\langle \hat{x}^2 \rangle$ várható értékeket!
2. Írjuk fel a hullámcsomag alakját impulzusreprezentációban!
3. Számítsuk ki a $\langle \hat{p} \rangle$ és $\langle \hat{p}^2 \rangle$ várható értékeket, és végül a $\Delta x \Delta p$ mennyiséget! Nézzük meg, hogy teljesül-e a határozatlansági reláció!

Segítség:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x\ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\sin^4(bx)}{x^2} = \frac{\pi}{2}|b|\ , \qquad \Delta z = \sqrt{\langle \hat{z}^2 \rangle - \langle \hat{z} \rangle^2}\ .$$

3. feladat – *Kétállapotú rendszer*

(**6 pont**)

Tekintsük a

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & E_0 \\ E_0 & 0 \end{pmatrix}$$

kétállapotú rendszert, ahol E_0 konstans. A $t = 0$ időpillanatban az

$$\hat{\mathcal{O}} = \Omega_0 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

megfigyelhető mennyiség operátorának várható értéke $\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle = -2\Omega_0$, ahol Ω_0 konstans. Határozzuk meg a rendszer $|\psi(0)\rangle$ állapotát a $t = 0$ időpillanatban, valamint írjuk fel az időfejlődését, vagyis $|\psi(t)\rangle$-t!

4. feladat – *Potenciálprobléma*

(**6 pont**)

Egy részecske egydimenziós mozgást végez egy L kerületű körvonalon, Dirac-delta alakú potenciálban:

$$V(x) = -\alpha\delta(x) \ , \quad 0 \leq x \leq L \ .$$

Legyen $E > 0$! Írjuk fel az általános megoldást

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \ , \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar$$

alakban, és illesszük az együtthatókat a Dirac-deltánál, egyúttal a periodikus határfeltételt is figyelembe véve $\psi(0) = \psi(L)$! Adjuk meg az energiaszinteket meghatározó egyenletet!