10. házi feladat

Szaló Vencel HGACP9

$$\mathcal{E}(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

Jelölje a részecske töltését q.

$$q \cdot \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad \text{lesz az erő}$$

$U'(t) = -q \cdot \phi$ ahol ϕ az elektromos potenciál.

$$-\nabla(U) = e\,\mathcal{E}(t)$$

így $U' = q \cdot \frac{A}{\sqrt{\pi}\,\tau} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cdot \hat{x}$

A Hamilton-operátor így

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 + q \cdot \frac{A}{\sqrt{\pi}\,\tau} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \hat{x}$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p}\right)$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left(\frac{a^+ + a}{2}\right)$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p}\right)$$

$$H' = q \frac{A}{\sqrt{\pi}\,\tau} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \left(\frac{a^+ + a}{2}\right)$$

$$E_n^{(1)} = \alpha \langle m | a^+ + a | n \rangle \propto \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1} + \sqrt{m+1}\,\delta_{m,n+1}$$

mert $\cancel{\ }\ \hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$.

Elsőrendben így az $n \to n+1$, $n \to n-1$ átmenetek lehetségesek.

b) A $P_{0\to 1}$ átmenetet vizsgáljuk.

$$P_{0\to 1}(\infty-(-\infty)) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\sqrt{1}\int_{-\infty}^{\infty} q\cdot\frac{A}{\sqrt{\pi}\,\tau}\,e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\hat{x}\,e^{-i\omega t}\,dt\right|^2$$

$$= \frac{q^2}{2m\omega\hbar}\,\frac{A^2}{\pi\tau^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2-i\omega t}\,dt\right|^2$$

$$\frac{q^2}{2m\omega\hbar}\,\frac{A^2}{\pi\tau^2}\,\frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2-i\omega t}\,dt\right|^2$$

Az integrált elvégezve;

$$\frac{q^2}{2m\omega\hbar}\,\frac{A^2}{\pi\tau^2}\left|e^{-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2}\sqrt{\pi}\,\tau\right|^2$$

$$= \frac{q^2}{2m\omega\hbar}\,A^2\,e^{-\frac{1}{2}\omega^2\tau^2}$$ lesz az átmenet valószínűsége.

$P_{0\to 1}$ ahogy $\tau \to 0$ $\quad \dfrac{q^2A^2}{2m\omega\hbar}$

$\tau \gg \dfrac{1}{\omega} \qquad e^{-\infty} \approx 0$ így az átmenet valószínűsége 0 lesz.

2. feladat

A potenciálgödör végtelen mély, az általános hullámfüggvény felírható, mint

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

A Schrödinger-egyenlet felírható, mint:

$$\hat{H}\,\varphi_n(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m}\varphi_n = \frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{2}{L}}\,\frac{n^2\cdot\pi^2}{L^2}\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,\varphi_n(x)$$

Az alapállapoti energia így $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2}$-nek adódik.

Vezessünk be egy perturbáló potenciált:

$$V' = \begin{cases} V_0 & \text{ha } 0 \le x \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{egyéb esetben} \end{cases}$$

Az $E_1 \to E_2$ energiaátmenet valószínűsége:

$$P_{1\to2} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t=0}^{T} d\tau\, V'_{fi}(\tau)\, e^{i\omega_{fi}\tau}\right|^2$$

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(4-1) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL}\cdot 3$$

(5.)

$$U_{21} = \langle 2 | V'(t) | 1 \rangle = \langle 2 | \begin{matrix} V_0 & \text{ha } 0 \le x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{egyébként} \end{matrix} | 1 \rangle$$

Az integrálási határok $0, \frac{a}{2}$

Itt $L = a$

$$V_0 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{2}{a} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx = \frac{4 V_0}{3\pi}$$

$$\frac{2}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2} \left(-\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right) dx$$

$$= \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{2} \left(- \int_0^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) dx + \int_0^{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \right)$$

$$= V_0 \frac{4}{3\pi}$$

Ki kell még számolnunk az exponenciális kifejezés integrálját is:

$$\frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^T d\tau \; V_0 \frac{4}{3\pi} e^{-i \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2ma} \tau} \right|^2 =$$

$$\frac{1}{\hbar^2} \frac{V_0^2 \cdot 16}{9\pi^2} \left| \left[\frac{1}{-i\omega\tau} e^{-i\omega\tau} \right]_0^T \right|^2 =$$

$$\frac{U_0^2\cdot 16}{9\pi^2\hbar^2}\left|\left[\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega\tau}\right]_0^T\right|^2 =$$

$$\frac{U_0^2\cdot 16}{9\pi^2\hbar^2}\left|\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega T}-1\right|^2 = \frac{U_0^2\cdot 16}{9\pi^2\hbar^2}\cdot\frac{1}{\omega^2}\left|e^{-i\omega T}-1\right|^2$$

$$= \frac{U_0^2\cdot 16}{9\pi^2\hbar^2\omega^2}\left(e^{-i\omega T}-1\right)\left(e^{i\omega T}-1\right) =$$

$$\frac{U_0^2\cdot 16}{9\pi^2\hbar^2\omega^2}\left(1-2\left(\frac{e^{i\omega T}-e^{-i\omega T}}{2}\right)+1\right) =$$

$$\frac{U_0^2\cdot 16}{9\pi^2\hbar^2\omega^2}\left(2-2\cos(\omega T)\right) \qquad \omega = \frac{3\hbar\pi^2}{2ma^2}$$

Behelyettesítve; $\frac{U_0^2\cdot 16\cdot 4m^2a^4}{9\pi^2\hbar^2\, 9\hbar^2\pi^4}\left(2-2\cos\left(\frac{3\hbar}{2}\frac{\pi^2}{ma^2}T\right)\right)$

$$= \frac{U_0^2\cdot 128\, m^2a^4}{81\pi^4\hbar^6}\left(1-\cos\left(\frac{3\hbar\pi^2}{2ma^2}T\right)\right)$$

Amennyiben $\cos\left(\frac{3\hbar\pi^2}{2ma^2}T\right)\approx 0$ akkor

$\frac{U_0^2\; 128\, m^2a^4}{81\pi^4\hbar^4}$ az eredmény.