Szabó Vencel HGACPG

Kvantummechanika A

1. leadandó

B.)

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

A mátrix hermitikus, ha $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ vagyis ha az a_{ij} elem az a_{ji} elem komplex konjugáltja.

$-i^* = i \quad 1^* = 1 \quad -i^* = i \quad 2^* = 2$

A mátrixunk így hermitikus.

A mátrix nyoma: $2+2+2=6$

A mátrix determinánsa:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -i & 2 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot (4-1) - i(-3i) + 1(-1-2) = 2 \cdot 3 - 3 - 3 = 0$$

A mátrix determinánsa 0.

$$\mathrm{Tr}\, M = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \qquad 3+3+0=6$$

Az állítás igaz lesz.

$\det M = 0 = 3 \cdot 3 \cdot 0$ így az állítás igaz lesz

Az M mátrix projektorfelbontása:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & i & 1 \\ -i & 2-3 & i \\ 1 & -i & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ -i & -1 & i \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & i & 1\\ -i & -1 & i\\ 1 & -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix}-1 & i & 1\\ -i & -1 & i\\ 1 & -i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & i & 1\\ -i & 2 & i\\ 1 & -i & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Vagyis a sajátvektorok a következőek lesznek:

$\lambda_1 = 0 \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda_2 = 3 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 3 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Látható, hogy λ_1 és λ_3 nem ortogonális egymásra.

A projektor felbontáshoz keressük az $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ vektorra ortogonális vektort.

A komplex konjugálás miatt $\begin{pmatrix}-bi+c\\b\\c\end{pmatrix}$ alakban keressük a vektort.

$-bi+c+c=0$ legyen $b=i$ akkor $c=-\frac{1}{2}$

így a vektor $\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-i\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Ezen két vektor segítségével a projektor felbontás a következő lesz;

$$\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{2}i&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}i&1&\frac{1}{2}i\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}i&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&i&1\\-i&2&i\\1&-i&2\end{pmatrix}$$

Vagyis ezzel megkaptuk a keresett projektor felbontást.

Szabó Vencel HGACPG

2. b feladat

$$\int d^3x \, r e^{iqx - ra}$$

Gömbi koordinátákra áttérve;

$$\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \; r^2 \sin\vartheta \, r e^{iqr\cos\vartheta - ra} =$$

$$2\pi \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta \; r^3 \sin\vartheta \, e^{iqr\cos\vartheta - ra}$$

legyen $b = \cos\vartheta$ $\quad db = -\sin\vartheta \, d\vartheta$

A $\{0, \pi\}$ tartományról az $\{1, -1\}$ tartományra térünk át, a negatív előjel miatt az integrálási határokat megcseréljük.

$$2\pi \int_0^\infty dr \int_{-1}^{1} db \; r^3 e^{iqrb - ra} = 2\pi \int_0^\infty dr \, r^3 e^{-ra} \int_{-1}^{1} e^{iqrb}$$

$$2\pi \int_0^\infty dr \, r^3 e^{-ra} \int_{-1}^{1} db \, e^{iqrb} = 2\pi \int_0^\infty dr \, r^3 e^{-ra} \left(\frac{1}{iqr} \left(e^{iqr} - e^{-iqr} \right) \right)$$

Az integrált két részre bontva;

$$\frac{2\pi}{iq}\int_0^\infty dr\ r^2 e^{-r(a-iq)} - \frac{2\pi}{iq}\int_0^\infty dr\ r^2 e^{-r(a+iq)}$$

Legyen $n^2 = r$ $\quad dr = 2n\,dn$

$$\frac{2\pi}{iq}\int_0^\infty dn\ 2n n^4 e^{-n^2(a-iq)} = \frac{4\pi}{iq}\int_0^\infty dn\ n^5 e^{-n^2(a-iq)}$$

Ismert, hogy $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-bx^2} dn = \frac{n!}{2b^{n+1}}$

Az integrál így $\displaystyle\frac{4\pi}{iq}\cdot\frac{2!}{2\cdot(a-iq)^3} = \frac{4\pi}{iq}\,\frac{1}{(a-iq)^3}$

$$-\frac{4\pi}{iq}\int_0^\infty dn\ n^5 e^{-n^2(a+iq)} = -\frac{4\pi}{iq}\,\frac{1}{(a+iq)^3}$$

$\displaystyle\frac{4\pi}{iq}\left(\frac{1}{(a-iq)^3} - \frac{1}{(a+iq)^3}\right)$ a következő alakra hozható;

$$\frac{8\pi\,(3a^2 - q^2)}{(a^2+q^2)^3}$$

2. a) Legyen $y' = p$ $\quad y'' = p \cdot p'$

Átírva az egyenletet;

$$p \cdot p' + p \cdot y = 0$$

$$\frac{p \cdot dp}{dy} + py = 0 \qquad \frac{p \cdot dp}{dy} = -py$$

$$p \cdot dp = -py\,dy \qquad p\left(\frac{dp}{dy} + y\right) = 0$$

Ha $p = 0$ akkor a triviális konstans függvényt kapjuk.

Amenyiben nem 0, akkor leosztunk vele.

$$\frac{dp}{dy} = -y \qquad dp = -dy\,y$$

Integráljuk mindkét oldalt;

$$\int dp = \int -dy\,y \qquad p = -\frac{1}{2}y^2 + c$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(y^2 + c')$$ ~~vagy $\frac{1}{2}dx =$~~ /

$$\frac{1}{y^2 + c'} = -\frac{1}{2}dx \qquad \text{vagy} \qquad \frac{1}{2}dx = \frac{1}{c' - y^2}$$

Kiintegrálva a következő megoldásokat kapjuk;

$$-\frac{1}{2}x + c' = \frac{\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{c'}}\right)}{\sqrt{c'}} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{2}x + c' = \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{y}{\sqrt{c'}}\right)}{\sqrt{c'}}$$

$$-\frac{1}{2}x + c'' = \frac{\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)}{\sqrt{c}}$$

Először fejezzük ki y-t.

$$\sqrt{c}\left(-\frac{1}{2}x + c''\right) = \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)$$

$$\tan\left(\sqrt{c}\left(-\frac{1}{2}x + c''\right)\right) = \frac{y}{\sqrt{c}}$$

$$y = \sqrt{c}\tan\left(\sqrt{c}\left(-\frac{1}{2}x + c''\right)\right)$$

Az $y = A\tan\left(A\left(-\frac{1}{2}x + B\right)\right)$ egyenlet jó megoldás lesz.

$$y' = A\tan\left(A\left(-\frac{1}{2}x + B\right)\right), \qquad y'' = \frac{1}{2}A^3\tan\left(A\left(B-\frac{x}{2}\right)\right)\sec^2\left(A\left(B-\frac{x}{2}\right)\right)$$

A másik lehetséges megoldásra láttuk hogy a tanh függvény lesz. y kifejezése a fentiekkel azonos, csak tan helyett tanh-t írunk.

$$y = A\tanh\left(\frac{A}{2}x + c\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}A^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{Ax}{2} + c\right)$$

$$y'' = -\frac{1}{2}A^3\tanh\left(\frac{Ax}{2} + c\right)\operatorname{sech}^2\left(\frac{Ax}{2} + c\right)$$

1.) A Jacobi-formula felírható;

$$[A,[B,D]] + [B,[D,A]] + [D,[A,B]] = 0$$

A Jacobi-formula akkor is igaz marad, ha A-t $[A,C]$-re cseréljük.

$$[[A,C],[B,D]] = [[D,[A,C]],B] \quad [[[A,C],B],D]$$

Valamint

$$[D,[A,C]] = [[D,A],C] + [[C,D],A]$$

$$[[D,[A,C]],B] = [[[C,D],A],B] + [[[D,A],C],B]$$

Kommutátorvaronosság, hogy $[A+B,C] = [A,C] + [B,C]$

$[[[C,D],A],B]$ a jobb oldal egyik tagja.

Hasonlóan; $[[A,C],B] = [A,[C,B]] + [C,[B,A]]$

$$[[[A,C],B],D] = [[A,[C,B]],D] + [[C,[B,A]],D]$$

$$[[C,[B,A]],D] = -[[[B,A],C],D] = [[[A,B],C],D]$$

Be kell még látnunk, hogy

$$[[[D,A],C],B] + [[A,[C,B]],D] = [[[B,C],D],A] + [[[D,A],B],C]$$

$$[[[D,A],C],B] = [[D,A],[C,B]] + [C,[B,[D,A]]]$$

$$[C,[B,[A,D]]] = -[B,[D,A],C] = [[D,A],B],C]$$

A kifejezés megtalálható a bizonyítandó egyenletben is.

Be kell bizonyítani, hogy

$$[[D,A],[C,B]] + [A,[C,B],D] = [[B,C],D],A]$$

$$[[D,A],C] + [[A,C],D] = [A,[C,D]]$$

C helyére $[C,B]$-t behelyettesítve;

$$[A,[[C,B],D]] + [[D,A],[C,B]] = [A,[C,B],D] =$$

$$[[C,B],D],A] = [[B,C],D],A]$$