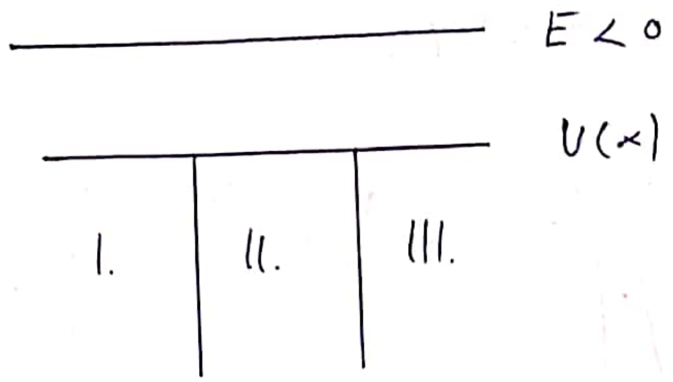
4. házi feladat

1.)



A transzfermátrixok a következők lesznek;

$$T_\delta(k,x) = \begin{pmatrix} 1+\frac{m\alpha}{iq\hbar^2} & \frac{m\alpha}{iq\hbar^2} \\ -\frac{m\alpha}{iq\hbar^2} & 1-\frac{m\alpha}{iq\hbar^2} \end{pmatrix}$$

Átnevezésekkel, a feladat során használt két transzfer-mátrix a következő lesz;

$$T_\delta(k,\alpha) = \begin{pmatrix} 1+c & c \\ -c & 1-c \end{pmatrix} \qquad T_\delta(k,-\alpha) = \begin{pmatrix} 1-c & -c \\ c & 1+c \end{pmatrix}$$

Az eltolás mátrixa; (lépésfüggvény)

$$E_a(k) = \begin{pmatrix} e^{-ika} & 0 \\ 0 & e^{ika} \end{pmatrix}$$

2.

A következő szorzatot kell képeznünk;

$E_a \, T(\alpha) \, E_{-a} \cdot E_{-a} \, T(\alpha) \, E_a$

$$\begin{pmatrix} e^{-ika} & 0 \\ 0 & e^{ika} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+c & c \\ -c & 1-c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{ika} & 0 \\ 0 & e^{-ika} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{ika} & 0 \\ 0 & e^{-ika} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1+c & c \\ -c & 1-c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-ika} & 0 \\ 0 & e^{ika} \end{pmatrix}$$

Az első három mátrix szorzata;

$$\begin{pmatrix} c+1 & c e^{-2ika} \\ -c e^{2ika} & 1-c \end{pmatrix}$$

A második három mátrix szorzata;

$$\begin{pmatrix} 1+c & c e^{2ika} \\ -c e^{-2ika} & 1-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1+c) & c e^{2ika} \\ -c e^{-2ika} & (1-c) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1+c) & c e^{-2ika} \\ -c e^{2ika} & (1-c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+c)^2 - c^2 e^{-4ika} & (1+c) c e^{2ika} + (1-c) c e^{-2ika} \\ (1+c) \cdot -c e^{2ika} - c e^{-2ika} \cdot (1-c) & -c^2 e^{4ika} + (1-c)^2 \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{\det T}{T_{22}}$$ A transzfermátrix determinánsa 1.

$$t = \frac{1}{-c^2 e^{4ika} + (1-c)^2}$$ behelyettesítésekkel;

$$t = \frac{1}{1 - 2c + c^2 - c^2 e^{4ika}} = \frac{1}{1 - 2\frac{m\alpha}{i\hbar} + \frac{m^2\alpha^2}{i^2\hbar^2} - \frac{m^2\alpha^2}{i^2\hbar^2} e^{4ik\alpha}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2im\alpha}{k\hbar^2} - \frac{m^2\alpha^2}{k^2\hbar^4} e^{4ik\alpha}}$$

$$T = \left| \frac{1}{1 + \frac{2im\alpha}{k\hbar^2} - \frac{m^2\alpha^2}{k^2\hbar^4} + \frac{m^2\alpha^2}{k^2\hbar^4} e^{4ik\alpha}} \right|^2$$

↳ itt $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$R = 1 - T$$

b) Kötött állapotok akkor lesznek, ha $T \to \infty$ =

$$-c^2 e^{4ika} + (1-c)^2 = 0$$

$$c^2 e^{4ika} = (1-c)^2$$

A behelyettesítéseket elvégezve;

$$\frac{m^2\alpha^2}{i^2k^2\hbar^2} e^{4ik\alpha} = 1 + \frac{2im\alpha}{k\hbar^2} - \frac{m^2\alpha^2}{k^2\hbar^4}$$

Legyen $k = iK$.

Ekkor;

$$\frac{m^2\alpha^2}{K^2\hbar^2} e^{4\alpha K} = 1 + \frac{2m\alpha}{K\hbar^2} + \frac{m^2\alpha^2}{K^2\hbar^2}$$

$$0 = 1 + \frac{2m\alpha}{K\hbar^2} + \frac{m^2\alpha^2}{K^2\hbar^4} - \frac{m^2\alpha^2}{K^2\hbar^2} e^{4\alpha K}$$

2-es feladat

A teljes ~~felírandó~~ felírandó ~~a~~ szorzat a következő lesz:

$$E_{aq_1} T_1 E_{-aq_1} T_\delta E_{-aq_2} T_2 E_{aq_2}$$

A szorzatban szereplő mátrixok a következők:

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{q_1}{q_2} & \frac{q_1}{q_2} \\ -\frac{q_1}{q_2} & 1-\frac{q_1}{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x & x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{q_2}{q_1} & \frac{q_1}{q_2} \\ -\frac{q_1}{q_2} & 1-\frac{q_1}{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x} & 1-\frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

6.

$$T_\delta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \dfrac{m\alpha}{ik\hbar^2} & \dfrac{m\alpha}{ik\hbar^2} \\[2ex] \dfrac{-m\alpha}{ik\hbar^2} & 1 - \dfrac{m\alpha}{ik\hbar^2} \end{pmatrix}$$

$$E_{ak_1} = \begin{pmatrix} e^{-ik_1 a} & 0 \\ 0 & e^{ik_1 a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-b} & 0 \\ 0 & e^{b} \end{pmatrix}$$

$$E_{-ak_1} = \begin{pmatrix} e^{ik_1 a} & 0 \\ 0 & e^{-ik_1 a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{b} & 0 \\ 0 & e^{-b} \end{pmatrix}$$

$$E_{ak_2} = \begin{pmatrix} e^{-ik_2} & 0 \\ 0 & e^{ik_2 a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d} & 0 \\ 0 & e^{-d} \end{pmatrix}$$

Képezzük az $E_{ak_2} T_{\delta_2} E_{-ak_2}$ szorzatot

$$\begin{pmatrix} e^{-d} & 0 \\ 0 & e^{d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x} & 1 - \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{d} & 0 \\ 0 & e^{-d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x+1}{x} & \dfrac{e^{-2d}}{x} \\[2ex] \dfrac{-e^{-2d}}{x} & \dfrac{x-1}{x} \end{pmatrix}$$

Az $E_{a k_1} T_1 E_{-a k_1}$ szorzatot képezve; 7

$$\begin{pmatrix} e^{-b} & 0 \\ 0 & e^{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+x & x \\ -x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{b} & 0 \\ 0 & e^{-b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & e^{-2b}x \\ -e^{2b}x & x+1 \end{pmatrix}$$

Az eredményül kapott két mátrix valamint T_δ szorzata;

$$\begin{pmatrix} x+1 & e^{-2b}x \\ -e^{2b}x & x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+c & c \\ -c & 1-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+1}{x} & \frac{e^{-2d}}{x} \\ \frac{-e^{2d}}{x} & \frac{x-1}{x} \end{pmatrix}$$

Az eredménymátrix elemei a következőképpen adódnak;

$$T_{11} = \frac{(x+1)\left((x+1)(1+c) - ce^{-2b}x\right) - e^{2d}\left(c(x+1) + e^{-2b}x(1-c)\right)}{x}$$

$$T_{12} = \frac{e^{-2d}\left((x+1)(1+c) - ce^{-2b}x\right) + (x+1)\left(c(x+1) + e^{-2b}x(1-c)\right)}{x}$$

$$T_{22} = \frac{e^{-2d}\left(e^{-2b} x(1+c) - c(x+1)\right) + (x+1)\left(-c e^{2b} x + (x+1)(1-c)\right)}{x}$$

T_{22}-t átalakítva;

$$T_{22} = \frac{e^{-2d-2b} x(1+c) - c(x+1)e^{-2d} - c x^2 e^{2b} + c e^{2b} x + (x^2-1)(1-c)}{x}$$

A transzcendens egyenlet a következő lesz;

$$0 = \frac{e^{-2d-2b} x(1+c) - c(x+1)e^{-2d} - c x^2 e^{2b} + c e^{2b} x + (x^2-1)(1-c)}{x}$$

$$0 = e^{-2d-2b} x + c e^{-2d-2b} - c e^{-2d} - e^{-2d} - c x^2 e^{2b} + c e^{2b} x + x^2 - c x^2 - 1 + c$$

A behelyettesítéseket elvégezve a következőket kapjuk;

$$0 = e^{-2(i q_2 a + i q_1 a)} \frac{q_1}{q_2}\left(1 + \frac{m\alpha}{i q \hbar^2}\right) - \frac{m\alpha}{i q \hbar^2}\left(\frac{q_1}{q_2} + 1\right) e^{-2i q_2}$$

$$- \frac{m\alpha}{i q \hbar^2}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 e^{2i q_1 a} + \frac{m\alpha}{i q \hbar^2} e^{2i q_1 a} \frac{q_1}{q_2} + \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2$$

$$- \frac{m\alpha}{i q \hbar^2}\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 - 1 + \frac{m\alpha}{i q \hbar^2}$$

Szorozzunk $ik\hbar^2$-el!

$$0 = e^{-2(ik_2 a + ik_1 a)} \frac{k_1}{k_2}\left(ik\hbar^2 + m\alpha\right) - m\alpha\left(\frac{k_1}{k_2} + ik\hbar^2\right)e^{-2ik_2}$$

$$- m\alpha\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 e^{2ik_1 a} + m\alpha e^{2ik_1 a}\frac{k_1}{k_2} + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 ik\hbar^2$$

$$- m\alpha\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - ik\hbar^2 + m\alpha$$

Osszunk $m\alpha$-val! Szorozzunk $\frac{k_2}{k_1}$-el!

$$e^{i(-2k_2 a - 2k_1 a)}\left(\frac{ik\hbar^2}{m\alpha}+1\right) - \left(1 + \frac{k_2}{k_1} ik\hbar^2\right)e^{i(-2k_2 a - 2k_1 a)}$$

$$-\left(\frac{k_1}{k_2}\right) e^{i(2k_1 a)} + e^{i(2k_1 a)} + \frac{k_2}{k_1} ik\hbar^2 - m\alpha\frac{k_2}{k_1} - \frac{ik\hbar^2}{m\alpha}\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_2}{k_1} = 0$$

3. feladat a része;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi''(x) - \frac{\hbar^2 a^2}{m\,\mathrm{ch}^2(ax)}\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$\psi_0(x) = \frac{A}{\mathrm{ch}(ax)}$$

$$\psi''(x) = A\,-a^2\left(-a\tanh^2(ax)\,\mathrm{sech}(ax) + a\,\mathrm{sech}^3(ax)\right)$$

$$\psi''(x) = Aa^2\,\frac{1}{\mathrm{ch}(ax)}\left(\tanh^2(ax) - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(ax)}\right)$$

$$= Aa^2\,\frac{1}{\mathrm{ch}(ax)}\left(\frac{\sinh^2(ax)}{\mathrm{ch}^2(ax)} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(ax)}\right)$$

$$= \frac{Aa^2\,\sinh^2(ax) - Aa^2}{\mathrm{ch}^3(ax)}$$

$$-\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{Aa^2\cdot\sinh^2(ax) - Aa^2}{\mathrm{ch}^3(ax)}\right) - \frac{\hbar^2 a^2}{m\,\mathrm{ch}^2(ax)}\cdot\frac{A}{\mathrm{ch}^2(ax)} = \frac{EA}{\mathrm{ch}(ax)}$$

$$-\frac{\hbar^2 a^2}{m}\left(\frac{\sinh^2(ax)-1}{2\,ch^3(ax)} - \frac{1}{ch^3(ax)}\right) = \frac{E}{ch(x)}$$

$$-\frac{\hbar^2 a^2}{m}\left(\frac{\sinh^2(ax)-1-2}{2\,ch^3(ax)}\right) = \frac{E}{ch(ax)}$$

$$-\frac{\hbar^2 a^2}{m}\left(\frac{\sinh^2(ax)-3\,ch(ax)}{2\,ch^2(ax)}\right) = E$$

$$-\frac{\hbar^2 a^2}{m}\left(\frac{1}{2}\tanh^2(ax) - \frac{3}{2ch(ax)}\right) = E$$

Az állapot kötött, ha $E < U(x \to \pm\infty)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{ch(ax)} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \tanh^2(ax) = 1$$

így a következő egyenletet kapjuk;

$$E = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}$$

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{ch(ax)} = \infty$$

$$\frac{-\hbar^2 a^2}{2m} < \infty \qquad \text{Így} \quad \varphi_0(x) = \frac{A}{ch(ax)}$$

valóban a potenciál egy kötött állapotát kapjuk.

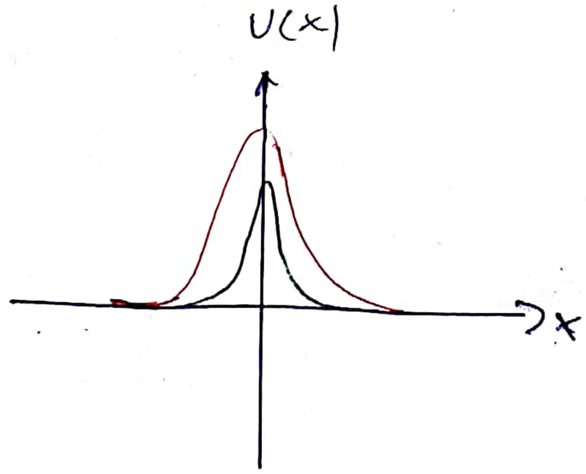
A függvény normálása:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{ch(ax)}\right)^2 dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{ch(ax)}\right)^2 dx = \frac{1}{A^2}$$

$$= \left.\frac{\tanh(ax)}{a}\right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{a} \qquad \frac{1}{A^2} = \frac{2}{a}$$

$$\varphi_0 = \frac{\sqrt{\frac{a}{2}}}{ch(ax)}$$

A grafikon:



Szabó Vencel

3/b feladat

A hullámfüggvény; $\Psi_k(x) = A \dfrac{ik - a\,th(ax)}{ik + a} e^{ikx}$

A Schrödinger-egyenlet a következőnek adódik;

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi_k'' + U(x)\Psi_k = E\Psi$$

$$\Psi_k'' - \frac{2m}{\hbar^2} U(x)\Psi_k = -k^2 \Psi$$

$$\Psi_k'(x) = \frac{A}{ik+a}\left[-k^2 - \frac{a^2}{ch^2(ax)} - ika\, th(ax)\right] e^{ikx}$$

$$\frac{d}{d\cancel{t}x} \frac{sh(ax)}{ch(ax)} \quad \frac{a\,ch^2(ax) - sh^2(ax)a}{ch^2(ax)} = \frac{1}{a\,ch^2(ax)}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{ch^2(ax)} = -2\frac{1}{ch^3(ax)} sh(ax) = -2a\, tanh(ax)\, sech^2(ax)$$

$$= -2a \frac{sh(ax)}{ch^3(ax)}$$

$$\psi_q''(x) = \frac{A}{iq+a}\left[2a^3\frac{sh(ax)}{ch^3(ax)} - iq\,a^2\frac{1}{ch^2(ax)}\right]e^{iqx} +$$

$$+\frac{A}{iq+a}\left[-iq^3 - \frac{a^2 iq}{ch^2(ax)} + q^2 a\, th(ax)\right]e^{iqx}$$

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}V(x)\psi =$$

$$\frac{A}{iq+a}\left[2a^3\frac{sh(ax)}{ch^3(ax)} - iq\,a^2\frac{1}{ch^2(ax)} - iq^3 - \frac{iq a^2}{ch^2(ax)} + q^2 a\, th(ax)\right]e^{iqx} +$$

$$2a^2\frac{1}{ch^2(ax)}\frac{A}{iq+a}\left(iq - i\,th(x)\right)e^{iqx}$$

$$= \frac{A}{iq+a}\left[-iq^3 + q^2 a\, th(ax)\right]e^{iqx} = -q^2 A\frac{iq - a\,th(ax)}{iq+a}e^{iqx}$$

ahol $A\dfrac{iq - a\,th(ax)}{iq+a}e^{iqx} = \psi$ a hullámfüggvény

$$x \to \infty \qquad th(ax) \to 1$$

Vegyük a fenti kifejezés végtelenben vett határértékét

$$\psi_q(x) = A\frac{iq-a}{iq+a}e^{iqx}$$

$$\left(A\,\frac{iq-a}{iq+a}\right)^2 = A\,\frac{iq-a}{iq+a}\cdot A^*\,\frac{-iq-a}{-iq+a} = |A^2|\cdot(-1)^2 = |A^2|$$

$R=0$ lesz mert a hullám nem verődik vissza.

A transzmissziós együttható:

$$T = 1\quad \frac{\left(A\,\frac{iq-a}{iq+a}\right)^2}{|A|^2} = \frac{|A|^2}{|A|^2|} = 1$$

$$R+T=1$$