Kvantummechanika A – gyakorlat
2. pót-ZH

2022. 12. 20.

Összesen **25 pont** érhető el. Ebből legalább 10 pont szükséges a sikeres ZH-hoz.

Nem kell kapkodni, és sok sikert!

1. feladat – *Impulzusmomentum-összeadás*

(7.5 pont)

Válaszoljunk először az alábbi rövid kérdésekre!

1. Egy $|j_1, m_1\rangle$ és egy $|j_2, m_2\rangle$ állapotú részecskéből álló rendszer teljes impulzusmomentumát mérve $|J, M\rangle$-et kapunk. Mekkora lehet J értéke?
2. Ugyanezen rendszerben hogyan függ M értéke az alkotóelemek impulzusmomentumának z-komponenseitől (azaz m_1 és m_2-től)?
3. Tegyük fel, hogy $|j, m\rangle$ állapotnál csak j értékét ismerem. Mit tudunk mondani ekkor m lehetséges értékeiről?

Feladat
Egy $4f$ állapotban lévő hidrogénatom elektronjának spinje felfelé mutat. Legyen $\hat{\mathbf{J}}^{(1)} = \hat{\mathbf{L}}$ a pálya-impulzusmomentuma operátora $|l, m_l\rangle$ sajátállapottal, és $\hat{\mathbf{J}}^{(2)} = \hat{\mathbf{S}}$ pedig a spin operátor $|s, m_s\rangle$ sajátállapottal.

1. Milyen lehetséges értékeket mérhetünk a $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ teljes impulzusmomentum négyzetére és z-komponensére? Ábrázoljuk ezeket egy J-M diagramon!
2. Milyen valószínűségekkel kaphatjuk meg a különböző J értékeket méréskor, feltéve, hogy $\hat{J}_z$-t $3\hbar/2$-nek mértük?
Segítség: mennyi lesz m_l? Határozzuk meg a mért M értékhez tartozó $|J, M\rangle$ állapotok dekomponzícióját, majd eze segítségével fejezzük ki az elektron állapotát a $|J, M\rangle$-ek lineárkombinációjaként!

2. feladat – *Időfüggetlen perturbációszámítás*

(7.5 pont)

Egy rendszer Hamilton-operátora

$$\hat{H} = V_0 \begin{pmatrix} 2\epsilon & 1 & 0 & \epsilon \\ 1 & -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

ahol $\epsilon \ll 1$ kis paraméter, V_0 pedig egy energia dimenziójú konstans.

1. Határozzuk meg a perturbálatlan rendszer ($\epsilon = 0$) sajátértékeit és (normált) sajátvektorait! Vannak-e megegyező energiaszintek?
2. Vegyük a nemdegenerált egydimenziós alter(ek)et, és adjuk meg a hozzá(juk) tartozó elsőrendű energiakorrekciót!
3. Ha van(nak), a degenerált alter(ek)en számítsuk ki a perturbáció (ϵ-nal arányos rész $\hat{H}$-ban) mátrixelemeit a perturbálatlan rendszer energia-sajátállapotai között! Oldjuk meg ezen almátrix(ok) sajátértékproblmémáját, hogy megkapjuk a hiányzó elsőrendű korrekciókat!

3. feladat – *Időfüggő perturbációszámítás*

(**5 pont**)

Tekintsünk egy háromállapotú rendszert az alábbi Hamilton-operátorral:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & K(t) \\ 0 & E_2 & F(t) \\ K(t) & F(t) & E_3 \end{pmatrix} ,$$

ahol

$$K(t) = \begin{cases} V \ , & \text{ha } 0 \le t < t_0 \\ 0 \ , & \text{egyébként} \end{cases}$$

és $F(t) = \alpha\delta(t - t_0/2)$. A részecske a távoli múltban $|3\rangle = (0, 0, 1)$ állapotban volt. Határozzuk meg, hogy a perturbációszámítás első rendjében milyen valószínűséggel melyik állapotokban tartózkodik a rendszer t_1 időpontban ($t_1 > t_0$)?

4. feladat – *Variációs módszer*

(**5 pont**)

Tekintsük az anharmonikus oszcillátort az alábbi Hamilton-operátorral:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \lambda\hat{x}^4 ,$$

és legyen a próbafüggvény α optimalizálandó paraméterrel a harmonikus oszcillátor alapállapoti hullámfüggvényével azonos alakú, azaz

$$\psi(x\ \alpha) = e^{-\alpha x^2/2} .$$

Adjunk becslést az anharmonikus oszcillátor alapállapoti energiájára!

Segítség:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x^n e^{-ax^2} = \begin{cases} \sqrt{\pi/a} \ , & n = 0 \\ \sqrt{\pi/a^3}/2 \ , & n = 2 \\ 3\sqrt{\pi/a^5}/4 \ , & n = 4 \end{cases} .$$