Szabó Vencel HGACPG

II Házi feladat

2. feladat

1. a $\gamma$ mátrixok minden sajátértéke 1.

Írjuk fel a sajátérték egyenletet;

$$\lambda_i v = \lambda v$$

Emeljük mindkét oldalt négyzetre;

$$\gamma_i \gamma_i \cdot v^2 = \lambda^2 \cdot v^2$$

Láttuk, hogy $\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$

Amennyiben $i=j$

$$\gamma_i \gamma_i + \gamma_i \gamma_i = 2\delta_{ii} \mathbb{1} \Rightarrow \gamma_i^2 = \mathbb{1}$$

Az egyenletünk átírható;

$$\mathbb{1} \cdot v^2 = \lambda^2 \cdot v^2 \Rightarrow \mathbb{1} = \lambda^2 \mathbb{1}$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$$

Ezzel az állítást beláttuk.

2. $\mathrm{Tr}\, \gamma_i = 0$ minden $i$-re

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$$

Ha $i \neq j$ $\quad \gamma_i \gamma_j = -\gamma_j \gamma_i$

$$\gamma_i \gamma_j \gamma_j = -\gamma_j \gamma_i \gamma_j$$

$$\gamma_i \mathbb{1} = -\gamma_j \gamma_i \gamma_j$$

HGACPY

$\gamma_i = -\gamma_j \gamma_i \gamma_j$

$$Tr(\gamma_i) = Tr(-\gamma_j \gamma_i \gamma_j) = Tr(\gamma_j \gamma_j \gamma_i) =$$

$$Tr(-\mathbb{1}\gamma_i) = -Tr(\gamma_i) = 0$$

(Kihasználtuk a nyom ciklikus permutálhatóságát).

~~$\gamma_i$ antiszimmetrikus~~ mátrix, vagyis

~~$\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$~~, a főátlóban

A főátlóban lévő elemek összege 0.

3.) A mátrixok csak páros dimenziójúak lehetnek

Tudjuk, hogy $Tr(\gamma_0) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Tehát ahhoz, hogy a fenti egyenlet teljesülhessen, minden $\lambda_i = 1$ sajátértékre kell, hogy egy $\lambda_i = -1$ sajátérték jusson, vagyis a sajátértékek száma mindenképp páros.

Egy mátrixnak annyi sajátértéke van, ahány dimenziós, így a mátrix mindenképpen páros dimenziójú.

1.) Jelölje a labda padlótól (a potenciális energia nullszintje) vett távolságát X.

A Lagrange-függvény:

$$L = K - U = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - mgx$$

Az energia kifejezhető, mint:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + mgx \qquad \sqrt{\frac{2E}{m} - 2gx} = \dot{x}$$

$$E = agm \rightarrow \sqrt{2g(a-x)} = \dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad q_i = x$$

$$-mg = m\ddot{x} \qquad p_i = m\dot{x} \qquad \int_{\text{periódus}} dq_i p_i = n_i h$$

$$\int_0^a dx\, m\dot{x} + \int_a^0 -dx\, m\dot{x} = n_i h$$

$$2\int_0^a dx\, m\dot{x} = n_i h$$

$$2m\int_0^a dx\sqrt{2g(a-x)}$$ Legyen $(a-x) = \alpha$

$d\alpha = -dx$

Az integrál így: $2m\int_a^0 -\sqrt{2g\alpha}\, d\alpha =$

$$2m\cdot\sqrt{2g}\cdot\left(-\alpha^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\right) = 0 + 2\cdot\sqrt{2g}\cdot\frac{2}{3}a^{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{2g}\,\frac{4}{3}a^{\frac{2}{3}}$$

Az integrálás eredményét felhasználva a következőket kapjuk:

$$2m \cdot \frac{4}{3} \sqrt{2g}\ a^{3/2} = n_i h$$

$$kg \cdot \frac{\sqrt{m}}{s} \cdot m^{3/2} \rightarrow kg \cdot \frac{m \cdot m}{s^2} \cdot s$$

$$kg\ \frac{m^2}{s}$$

Azonos dimenziójú tagok állnak mindkét oldalt.

$$a = \left( \frac{3}{8} \frac{h n_i}{m \sqrt{2g}} \right)^{2/3}$$

A legkisebb lehetséges magasság $n_i = 1$ esetén

$$\left( \frac{3}{8} \frac{h}{m \sqrt{2g}} \right)^{2/3}$$

3-as feladat

$$T(s) = e^{sA} e^{sB}$$

$$\frac{d\hat{T}(s)}{ds} = \cancel{e^{As} e^{-As}} (\hat{A} + \hat{B}) e^{sA} e^{sB}$$

$$e^{-As} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k!} A^k$$

$$e^{-As} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{s^{k-1}}{k} \cdot k A^{k-1}$$

$$e^{-As} [B, A] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{s^{k-1}}{k!} \cdot k \cdot \underbrace{A^{k-1} [B, A]}$$

Tegyük fel, hogy

ez a kifejezés felcserélhető

$$-s e^{-As} [B, A] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k!} \cdot \underbrace{k [B, A] \cdot A^{k-1}}_{[B, A^k]}$$

$$-s e^{-As} [B, A] = \sum_{k=0}^{\infty} -1^k \frac{s^k}{k!} [B, A^k]$$

$$= \left[B, \sum_{k=0}^{\infty} -1^k \frac{s^k}{k!} A^k\right] = [B, e^{-As}]$$

A summázás alsó határa azért lehet 0, mert a 0-ik tag 0-t ad.

$$(-1)^0 \frac{s^0}{0!} [B, A^0] = 1 \cdot [B, \mathbb{1}] = 0$$

Azt kell belátni, hogy $[B,A]\, A^{k-1} = A^{k-1} [B,A]$

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

$$[A, BC] = [A,B]\, C + B\, [A,C]$$

$$[[B,A], A \cdot A^{k-2}] = [[B,A],A]\, A^{k-2} + A\, [[B,A], A^{k-2}]$$

$$\Downarrow$$

Ez a feladat szövegében foglalt feltételek szerint 0.

$$[[B,A], A \cdot A^{k-2}] = [[B,A],A]\, A^{k-2} + A\, [[B,A], A^{k-2}]$$

$$[[B,A], A^{k-1}] = A\, [[B,A]\, A^{k-2}] = \ldots\ A^{k-2} [[B,A],A] = 0$$

$$\Rightarrow [B,A]\, A^{k-1} = A^{k-1} [B,A]$$

Ezzel ezt a lépést beláttuk.

4 - ik lépés

$$[B, e^{-As}] = s e^{-As}[A, B] = Be^{-As} - e^{-As}B$$

$$\frac{dT(s)}{d(s)} = AT(s) + e^{As}Be^{-As}T(s) + e^{As}e^{-As}B$$
$$- e^{As}e^{-As}B$$

$$= AT(s) + e^{As}Be^{-As}B - e^{As}e^{-As}Be^{-As}e$$

$$e^{As}Be^{-As}T(s) + e^{As}e^{-As}B - e^{As}e^{-As}B + AT(s)$$

$$e^{As}(Be^{-As}T(s) + e^{-As}BT(s)) = s[A, B]T(s)$$

$$e^{As}[B, e^{As}]T(s)$$
$$\hookrightarrow = -se^{-As}[B, A]$$

$$e^{As}(-s)e^{-As}[B, A]T(s) = \textrm{ɔ}[A, B]T(s)$$

$$\frac{dT(s)}{ds} = (A + B + \textrm{ɔ}[A, B])T(s)$$

Oldjuk most meg a felírt differenciálegyenletet!

$$y'(x) = (a + b + cx)y(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (a + b + xc)y$$

$$\frac{dy}{y} = (a+b+xc)\,dx$$

Mindkét oldalt integrálva; $\int \frac{dy}{y} = \int (a+b+xc)\,dx$

$$\ln|y| = ax + bx + c\frac{x^2}{2} + C$$

$$y = e^{ax+bx+c\frac{x^2}{2}+C'}$$

$y(0) = 1$ így $e^{0+C'} = 1 \rightarrow C' = 0$

$$y(x) = e^{ax+bx+c\frac{x^2}{2}}$$

$$T(s) = e^{(A+B)s}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]s^2}$$

$s = 1$-et behelyettesítve a következőket kapjuk;

$$T(1) = e^{A+B}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

$$T(1) = e^{\hat{A}s}\, e^{\hat{B}s}$$

Ezzel az $e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}} = e^{A+B}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]}$

kifejezést kapjuk.

Szorozzuk mindkét oldalt $e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$-vel,
kihasználva, hogy $e^{-\hat{A}} \cdot e^{A} = \underline{\mathbb{1}}$

$$e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}}\, e^{\hat{B}}\, e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

Ezzel a kívánt alakra hoztuk a kifejezést.