第三章习题及参考解答

建议：习题 21-24，49-63 属补充内容，不提供参考解答，不必布置。

勘误：1. 习题 2 中的"例 1.2.2"应改为"例 1.2.3"；
2. 习题 5(2) 中的"形如"一词有问题，应改为"相似于"；
3. 习题 39(2) 中的"同构"应为"通过"；
4. 习题 46 在"非零"后应加上"且对角占优"；

1. 详细证明分块 Schur 三角化定理.

证明：设 n 阶复矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda I - A| = \prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$, 其中 $\sigma(A) = \{\lambda_i \,|\, 1 \le i \le s\}$, $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$. 则 A 相似于上三角矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * & * & * \\ & \ddots & * & * & * & * & * \\ & & \lambda_1 & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * \\ & & & & & \lambda_s & * \\ & & & & \ddots & * & * \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}$$

现对 s 作归纳。$s=1$ 时无需证。设对 $s=k$ 结论已证。当 $s=k+1$ 时，利用例 3.1.1 中的类似计算可知，矩阵 B 相似于分块矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * & * & * \\ & \ddots & * & * & * & * & * \\ & & \lambda_1 & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * \\ & & & & & \lambda_{s-1} & * \\ & & & & \ddots & * & * \\ & & & & & & \lambda_{s-1} \oplus \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

由于上式中的第一个矩阵的特征值的个数 $= s-1 = k$，故由归纳法可知每题成立。

2. 设 A 为第一章例 1.2.3中的矩阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 利用满秩分解和 Sylvester 降幂公式求 A 的特征多项式与 A^6;
(2) 求与 A 相似的分块对角矩阵, 使得每块恰有唯一的特征值.

解：(1) 由于

$$A=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&1\\-2&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}=LR.$$

故 $|\lambda I-A|=|\lambda I-LR|=\lambda^2|\lambda I-RL|=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)$. 而 $A^6=\begin{pmatrix}96&-95&95&-96\\64&63&-63&-64\\64&-64&64&-64\\32&-32&32&-32\end{pmatrix}$.

(2) $J=(0)\oplus(0)\oplus(-1)\oplus(-2)$.

3. 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T$, $\beta=(b_1,\cdots,b_n)^T, x$ 为任意常数, $A=xI_n+\alpha\beta^T$.
(1) 直接计算行列式 $|A|$;
(2) 利用 Sylvester 降幂公式计算行列式 $|A|$;
(3) 利用特征值计算行列式 $|A|$.

解：(1)

(2) $|A|=|xI_n+\alpha\beta^T|=x^{n-1}\,|\,x+\beta^T\alpha\,|=x^{n-1}(x+\beta^T\alpha)$.

(3) 矩阵 $\alpha\beta^T$ 的秩 ≤ 1，故其特征值至少有 $n-1$ 个为 0，另一个为其迹 $\beta^T\alpha=\sum_{i=1}^n a_ib_i$, 因此矩阵 $A=xI_n+\alpha\beta^T$ 的特征值有 $n-1$ 个为 x，另一个为 $x+\beta^T\alpha=x+\sum_{i=1}^n a_ib_i$, 故 $|A|=|xI_n+\alpha\beta^T|=x^{n-1}(x+\beta^T\alpha)$.

4. 设 $\alpha\neq\beta$, 试求矩阵

$$\begin{pmatrix}\alpha&a&b&c\\0&\alpha&d&e\\0&0&\beta&x\\0&0&0&\beta\end{pmatrix}$$

的相似分块对角矩阵.

解：原矩阵相似于 $\begin{pmatrix}\alpha&u\\0&\alpha\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}\beta&v\\0&\beta\end{pmatrix}$, 其中 $u=0$ 如果 $a=0$, 否则 $u=1$; $v=0$ 如果 $x=0$, 否则 $v=1$.

5. (1) 举例说明 Schur 三角化定理在实数域上不成立;
(2) 证明实数域上的 Schur 三角化定理: 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$, 则存在正交矩阵 Q 使得

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}A_1&&*&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&0&&A_k\end{pmatrix}$$

其中每个 A_i 或者是 1 阶实矩阵或者是形如 $\begin{pmatrix}a_i&b_i\\-b_i&a_i\end{pmatrix}$ 的 2 阶实矩阵 $(b_i\neq 0)$.

(提示: 首先, 如果 λ 是 A 的非实数特征值, $Ax=\lambda x$, 则 $A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x}$, 由此可知 x 与 $\bar{x}$ 线性无关, 进而 $\mathrm{Re}x$ 与 $\mathrm{Im}x$ 线性无关, 将其正交化后构造正交矩阵, 再利用归纳法.)

解：(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) 注意，如果 λ 是实矩阵 A 的实特征值，则必有相应于 λ 的实特征向量 (为什么？)，此时存在正交矩阵 Q 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$，其中 A_1 是 $n-1$ 阶矩阵，因此，利用归纳法可知，若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是 A 的所有实特征值，则存在正交矩阵 Q 使得 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ & & \lambda_s & * \\ 0 & 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}$，其中 A_1 是特征值均非实数的 $n-s$ 阶实矩阵。故以下设 A 的特征值均非实数。设 $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ 是 A 的一个特征值，$x = u + iv, u, v \in \mathbb{R}^n$ 是属于 λ 的特征向量。则由 $Ax = \lambda x, A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}, \lambda \neq \bar{\lambda}$ 知 x 与 $\bar{x}$ 线性无关，进而 u 与 v 也线性无关. 直接计算可得 $Au = \alpha u - \beta v, Av = \alpha v + \beta u$. 将 u, v 标准正交化得到 γ, η，扩充可得正交矩阵 $Q = (\gamma, \eta, \cdots) = (u, v, \cdots)R$, 其中 R 为可逆的上三角矩阵。记 R 的 2 阶顺序主子矩阵为 S, 则 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$，其中 $B = S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}S^{-1}$, 而 A_1 是特征值均非实数的 $n-2$ 阶实矩阵。

6. 设 a 是复常数, $V = \{e^{ax}f(x) \mid f(x) \in \mathbb{C}_n[x]\}$ 是 n 维复线性空间.
(1) 证明求导运算 $\partial : \alpha \mapsto \frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,x}$ 是 V 上的线性变换;
(2) 求 ∂ 的 Jordan 标准形.

证明：(1) 直接验证即可。

(2) $J = J_n(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & \ddots & * & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}$.

7. 设 V 是有限维线性空间, $\sigma \in \mathrm{End}V$, A 是 σ 在某组基下的矩阵. 则
(1) A 与 σ 有完全相同的特征值 (即重数也一样);
(2) 设 σ 的不同特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$, 则 A 可以对角化 $\iff V = \sum\limits_{i=1}^{s} \oplus V_{\lambda_i}$. 于是 A 可以对角化 $\iff \sigma$ 可以对角化, 即 $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{s} \oplus \sigma_i$, 其中 σ_i 是 σ 在 V_{λ_i} 上的限制.

8. 设 σ 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换, 设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T, \sigma(x) = (-2x_2 - 2x_3, -2x_1 + 3x_2 - x_3, -2x_1 - x_2 + 3x_3)^T$. 试求 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 使得 σ 在该基下的矩阵尽可能简单.

解：$(-1, 2, 0), (-1, 0, 2), (2, 1, 1)$，相应的矩阵为 $diag(4, 4, -2)$.

9. 已知 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 线性空间 $V = \{X = (x_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}$ 的线性变换 σ 为 $\sigma(X) = B^TX - X^TB$, $X \in V$. 试求 V 的一个基, 使得 σ 在该基下的矩阵尽可能简单.

解：取基为 $E_{11}-E_{22},E_{12},E_{21}$，相应的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. 设 A 的特征值为0, 1, 对应的特征向量为 $(1,2)^T,(2,-1)^T$. 判断 A 是否为对称矩阵并求 A.

解：由于两个特征向量正交，故 A 可正交对角化，从而是对称矩阵。$A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. 求下列矩阵的最小多项式并指出其中可以对角化的矩阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

解：(1) $\lambda^2-8\lambda+7$, 可对角化；(2) $(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3)$, 可对角化；(3) $(\lambda-1)(\lambda+2)$, 可对角化；(4) $(\lambda-1)^2(\lambda+2)$, 不可对角化.

12. 试构造两个同阶矩阵, 使得它们
(1) 具有相同的特征多项式与不同的最小多项式;
(2) 具有相同的最小多项式与不同的特征多项式;
(3) 证明矩阵的最小多项式存在且唯一.

解：(1) 0 与 E_{12}; (2) $diag(0,0,1)$ 与 $diag(0,1,1)$.

(3) 证明：由于矩阵 A 的特征多项式是其零化多项式，故零化多项式必存在次数最低的，因此最小多项式必存在。如果 $m(x)$ 与 $n(x)$ 均是 A 的最小多项式，则它们相互整除，故只相差一个非 0 常数倍，但它们的首项系数均为 1，只能相等。

13．设 n 阶矩阵 A 的特征值均为实数. 证明:
(1) A 的特征多项式的 $n-k$ 次项的系数等于 A 的所有 k 阶主子式之和;
(2) 若 A 的所有一阶主子式之和与所有二阶主子式之和都等于零, 则 A 是幂零矩阵.

证明：(1) 多项式 $|\lambda I-A|$ 的 $n-k$ 次项只能产生于行列式 $|\lambda I-A|$ 中任取 $n-k$ 个对角元素之积，因此其系数等于这些对角元素对应的主子式的代数余子式 (k 阶) 的和，而这些代数余子式也是主子式，恰为 $-A$ 的所有 k 阶主子式之和。(所以，更精确地，题目中的系数应加上 $(-1)^k$.)

(2) 只需证明所有特征值均为 0. 由 (1), 所有一阶主子式之和等于所有特征值之和，而所有二阶主子式之和等于所有特征值的平方之和。因此有下列方程：$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0,\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2=0$. 将第一个方程平方并注意第二个方程可得 $\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j=0$，将其加入第二个方程可得

$$\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j=0$$

乘以 2 并配方可得 $\sum_{i\neq j}(\lambda_i+\lambda_j)^2=0$, 因此所有特征值均为 0.

14. 设 n 阶矩阵 A 的主对角元全是1, 且其特征值均为非负数, 证明 $|A|\leq 1$.

证明：A 的特征值之和为 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n$ 且 $\lambda_i\geq 0, 1\leq i\leq n$. 由高等数学可知 n 元函数 $u=\lambda_1\cdots\lambda_n$ 当所有变量均相等时取得最大值，故该最大值等于1.

15. 设 $AB = BA$, 证明 A 与 B 有公共的特征向量. 该结论的逆命题成立吗?

证明：设 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，V_λ 是相应的特征子空间。则 $AB\alpha = BA\alpha = \lambda(B\alpha)$，故 $B\alpha \in V_\lambda$, 即 V_λ 是 B 的不变子空间，因此 $B: \alpha \mapsto B\alpha$ 定义了线性空间 V_λ 上的一个线性变换，故 B 在 V_λ 中有特征向量，从而 A 与 B 有公共的特征向量. 该结论的逆命题不成立，比如 E_{13} 与 E_{32}。

16. (1) 证明：(a) $J_n^T J_n = (0) \oplus I_{n-1}$, $J_n J_n^T = I_{n-1} \oplus (0)$;
(b) $J_n e_i = e_{i-1}$, 其中 e_i 是标准向量, 约定 e_0 是 0 向量;
(c) 对任意 $x \in \mathbb{C}^n$, $(I_n - J_n^T J_n)x = (x^T e_1)e_1$;
(2) 设 M 与 N 是两个 n 阶幂零矩阵. 则 M 与 N 相似 $\iff r(M^k) = r(N^k), \forall k \geq 1$.

证明：(1) 直接验证即可。

(2) 不妨设 M 与 N 均是 n 阶幂零 Jordan 标准形。则必要性显然。下证充分性。由于 $r(M^k) = r(N^k), \forall k \geq 1$，故 M 与 N 的最大子块的阶数相同，块数也相同。于是各自删去这些最大子块剩余的矩阵依然满足题中条件，故由归纳法即可。

17. 计算幂零矩阵的 Jordan 标准形定理中的公式 (3.2.3).

解：直接计算即可。

18. 本题是幂零矩阵的 Jordan 标准形定理的证明中当数 $a = \alpha_1^T e_1 \neq 0$ 时的实际计算. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算 A 的 Jordan 标准形.

解：$J_3 \oplus J_2$.

19. 利用矩阵的 Jordan 标准形定理证明 **Fitting 引理**:
设 V 为 n 维线性空间, $\sigma \in \mathrm{End}V$, 则 $V = \mathrm{Im}(\sigma^n) \oplus \mathrm{Ker}(\sigma^n)$.

证明：设 σ 的 Jordan 标准形 J 的 0 特征值所在的子块的总阶数为 $s \leq n$, 则 $J^s = 0 \oplus K$，其中 K 是可逆矩阵. 因此 $J^n = 0 \oplus K^{n-s}$ 是 σ^n 的 Jordan 标准形。显然 $V = \mathrm{Im}(J^n) \oplus \mathrm{Ker}(J^n)$，故 $V = \mathrm{Im}(\sigma^n) \oplus \mathrm{Ker}(\sigma^n)$.

20. 设 n 阶严格上三角矩阵 A 的 Jordan 标准形为 J, 其幂零指数为 e. 证明
(a) J 中 Jordan 块的个数 m 等于 A 的零度;
(b) 记 J 中 k 阶 Jordan 块的个数为 ℓ_k, A^k 的零度为 η_k, $0 \leq k \leq m$. 则

$$\ell_k = 2\eta_k - \eta_{k-1} - \eta_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

证明：(a) J 中 Jordan 块的个数 m 等于 A 的线性无关特征向量的个数，等于 $n - r(A) = A$ 的零度。

(b) 设 $J = \oplus_{i=1}^m J_i, J_i$ 的阶数 (= 幂零指数) 为 n_i。根据 A^k 的零度等于 $J^k = \oplus_{i=1}^m J_i^k$ 的零度, 等于 J_i^k 的零度之和 ($i = 1, 2, ..., s$). 且

$$J_i^k \text{ 的零度 } = \begin{cases} k & \text{如 } k \leq n_i, \\ n_i & \text{如 } k > n_i. \end{cases} \tag{0.0.5}$$

由 (0.0.5), 我们有

$$\eta_1 = A\text{的零度} = N\text{的零度} = \sum_{i=1}^{s}(N_i\text{的零度}) = \sum_{i=1}^{s} 1 = s = \sum_{k\geq 1}\ell_k, \tag{0.0.6}$$

$$\begin{aligned}\eta_2 &= A^2\text{的零度} = N^2\text{的零度} = \sum_{i=1}^{s}(N_i^2\text{的零度})\\ &= \sum_{i:\,n_i<2}(N_i^2\text{的零度}) + \sum_{i:\,n_i\geq 2}(N_i^2\text{的零度}) = \ell_1 + 2\sum_{k\geq 2}\ell_k,\end{aligned} \tag{0.0.7}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\begin{aligned}\eta_j &= A^j\text{的零度} = N^j\text{的零度} = \sum_{i=1}^{s}(N_i^j\text{的零度})\\ &= \sum_{i:\,n_i<j}(N_i^j\text{的零度}) + \sum_{i:\,n_i\geq j}(N_i^j\text{的零度}) = \sum_{k<j}k\ell_k + j\sum_{k\geq j}\ell_k,\end{aligned} \tag{0.0.8}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

由 (0.0.6) 及 (0.0.7) 式即可推出 (**??**) 式. 而 (**??**) 式可由 (0.0.8) 式推出.

下面的21-24题展示了如何利用广义特征子空间来得到矩阵的Jordan标准形, 其中设 $|\lambda I - A| = \prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 是 n 阶矩阵 A 的特征多项式, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, g_i 为 λ_i 的几何重数.

21. 证明广义特征子空间 $E_{\lambda_i} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid (A-\lambda I)^{n_i}x = 0\}$.

22. 证明 $\dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_i} = n_i$, 从而 $\mathbb{C}^n = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \oplus E_\lambda$.(此即“谱定理”.)

23. 证明存在 $\alpha_j \in E_{\lambda_i}, 1 \leq j \leq g_i$, 使得 $\cup_{1\leq j\leq g_i}\{\alpha_j, (A-\lambda_i I)\alpha_j, \cdots, (A-\lambda_i I)^{m_j-1}\alpha_j\}$ 构成 E_{λ_i} 的一组基 (称为由诸向量 α_j 生成的循环基), 从而 E_{λ_i} 是 A 的不变子空间.

24. 由每个广义特征子空间的循环基构成的 $\mathbb{C}^n$ 的基称为Jordan基. 证明 A 在 $\mathbb{C}^n$ 的Jordan基下的矩阵是其Jordan标准形 (即将 A 看成是线性变换 $x \mapsto Ax$).

25. 详细证明定理 3.3.2, 并研究矩阵 A 的特征向量与变换矩阵 P 的特征向量之间的关系.

26. 求例 3.3.5 中的变换矩阵.

解：$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & 1 & & & & & \\ -2 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & & & \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 不唯一。

27. 求下列矩阵的 Jordan 标准形:

$$(1)\ \begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix};\quad (2)\ \begin{pmatrix}2&6&-15\\1&1&-5\\1&2&-6\end{pmatrix};\quad (3)\ \begin{pmatrix}9&-6&-2\\18&-12&-3\\18&-9&-6\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}4&6&-15\\1&3&-5\\1&2&-4\end{pmatrix};\quad (5)\ \begin{pmatrix}0&-4&0\\1&-4&0\\1&-2&-2\end{pmatrix};\quad (6)\ \begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}.$$

解：(1) $J_2(2)\oplus(2)$; (2) $J_2(-1)\oplus(-1)$; (3 $J_2(-3)\oplus(-3)$; (4) $J_2(1)\oplus(1)$; (5) $J_2(-2)\oplus(-2)$; (6) $J_2(0)\oplus(1)$.

28. 求下列矩阵的 Jordan 标准形, 并求变换矩阵 P 使 $P^{-1}AP=J$:

$$(1)\ \begin{pmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{pmatrix};\ (2)\ \begin{pmatrix}3&2&1\\0&4&0\\-1&2&5\end{pmatrix};\ (3)\ \begin{pmatrix}2&2&2&1\\-1&-1&-3&-2\\1&2&5&3\\-1&-2&-4&-2\end{pmatrix}.$$

解：(1) $J_3(2), P=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&-3\\1&0&0\end{pmatrix}$; (2)(1) $J_2(4)\oplus(4), P=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$; (3) $J_2(1)\oplus J_2(1), P=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-1&0&-2&0\\1&0&3&0\\-1&0&-3&1\end{pmatrix}$.

29. 试判断下面 4 个矩阵, 哪些是相似的:

$$A=\begin{pmatrix}-3&3&-2\\-7&6&-3\\1&-1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-4&4&-2\\-2&1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-3&-1&-2\\7&5&6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

解：A 与 C 相似。

30. (1) 证明不等于零的幂零矩阵一定不相似于对角矩阵;
(2) 设 A 具有唯一特征值但 A 不是对角矩阵. 证明 A 一定不相似于对角矩阵.

证明：(1) 如果幂零矩阵相似于对角矩阵，则该对角矩阵只能是 0 矩阵。

(2) 如果 A 相似于对角矩阵，则该对角矩阵只能是纯量矩阵，但纯量矩阵只与自己相似。

31. 证明任何复矩阵 A 可唯一地分解为 $A=D+N$, 其中 D 为可对角化矩阵, N 是幂零矩阵, 且 $DN=ND$.(此称为矩阵的 Jordan-Chevalley[3] 分解.) 以此解释上题的结论.

证明：存在性。设 $J=D+N$ 是 A 的 Jordan 标准形，其中 D 与 N 分别是 J 的对角部分与严格上三角部分。则直接验证可知 $DN=ND$. 由于 $A=PJP^{-1}=PDP^{-1}+PNP^{-1}$，显然 PDP^{-1} 与 PNP^{-1} 分别是可对角化矩阵与幂零矩阵，并且 $(PDP^{-1})(PNP^{-1})=PDNP^{-1}=PNDP^{-1}=(PNP^{-1})(PDP^{-1})$.

[3]Claude Chevalley(1909-1984), 著名法国数学家, 生于南非, 拥有美法两国国籍, 对当代数学的众多分支有重要贡献.

唯一性（较难，可不做要求）。只需对Jordan标准形证明即可。设 $J = D + N = D_1 + N_1$，则 $N - N_1 = D - D_1$. 此时存在多项式（此处需要多项式理论）$p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $p(A) = D, q(A) = N$, 由于 D_1, N_1 与 A 可交换，因此它们也与 D, N 可换。于是 $D - D_1$ 仍可对角化, 而 $N - N_1$ 仍是幂零矩阵。由上题可知它们都是 0.

32. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值及 A^{100};

(2) A 的 Jordan-Chevalley 分解是什么?

解：(1) $1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$; $A^100 = I$;

(2) $A = A + 0$, 因为 A 可以对角化。

33. 设 $p(\lambda) = (-1)^n[\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0]$. 称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

为多项式 $p(\lambda)$ 的友矩阵. 设 n 阶矩阵 A 的特征多项式为 $(-1)^n p(\lambda)$.

(1) 计算 C 的特征多项式;

(2) 当 $n = 2$ 时, 证明：A 与 C 相似当且仅当 A 的最小多项式等于其特征多项式;

(3) 试将 (2) 中的结论推广到一般情形. (提示: 查阅Frobenius标准形与有理标准形.)

解：(1) $|\lambda I - C| = (-1)^n p(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0$;

(2) 此时 $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 特征多项式与 A 相同，均为 $\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$. 故当 $a_1^2 + 4a_0 \neq 0$ 时，两个特征值互异，从而可以对角化，命题成立。当 $a_1^2 + 4a_0 = 0$ 时，易知 C 与 A 均不可对角化，故有相同的Jordan标准形.

(3) 略。

34. 设 V 是由函数 e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x} 的线性组合生成的线性空间. 定义 V 的一个线性算子如下: $T(f) = f'$. 求 T 的Jordan标准形及Jordan基.

解：$J = J_3(1) \oplus (2)$. Jordan基为 $2e^x$, $2xe^x$, x^2e^x, e^{2x}.

35. 如果矩阵 A 的特征多项式和最小多项式相同, 问 A 的Jordan标准形有何特点?

解：A 的Jordan标准形中的Jordan块的个数 = 特征值的个数。

36. (酉矩阵与离散Fourier变换) 设 σ 是 $\mathbb{C}^n$ 的循环位移变换, 即 $\sigma((x_1, x_2, \cdots, x_n)^T) = (x_2, x_3, \cdots, x_n, x_1)^T$. 证明:

(1)σ 的特征值恰好为方程 $\lambda^n = 1$ 的所有根 $\lambda_j = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n} j}, 1 \leq j \leq n$;

(2)σ 的属于特征值 λ_j 的特征向量为 $\alpha_j = (\lambda_j, \lambda_j^2, \cdots, \lambda_j^n)^T$, 且 $\|\alpha_j\| = \sqrt{n}$;

(3)$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一组正交基;

(4) 任何向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 均是 σ 的特征向量 α_j 的线性组合 $x=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\alpha_j$, 即 $x_k=\sum\limits_{j=1}^{n}a_je^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}j}$;

(5) 上面的系数 $a_j=(x,\alpha_j)/n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_ke^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}jk}$;

(6) 研究 σ 与第一章习题7中的Fourier矩阵的关系, 并由此再求该矩阵的逆.

证明：(1) σ 在标准基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0^T \end{pmatrix}$, 其中 $0\in\mathbb{C}^{n-1}$. 由 33 题知 (或直接计算) 其特征多项式为 λ^n-1。

(2) 由于 $\lambda_j^n=1$，故直接验证可知 $\sigma(\alpha_j)=\sigma(\lambda_j,\lambda_j^2,\cdots,\lambda_j^n)^T=\lambda_j(\lambda_j,\lambda_j^2,\cdots,\lambda_j^n)^T$ 以及 $\|\alpha_j\|=\sqrt{n}$。

(3) 直接验证即可。

(4) 由 (3) 即得。

(5) 直接计算即可。

(6) 由 (3) 可知矩阵 $F=\frac{1}{\sqrt{n}}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 是酉矩阵，故其逆 $F^{-1}=F^*$。

37. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的盖尔圆盘并隔离之.

解：取 $D=diag(2,1,1)$, 则 DAD^{-1} 的盖尔圆盘为：$D_1:|x-9|\le 4, D_2:|x-\mathrm{i}|\le 1.5, D_3:|x-3|\le 1.5$.

38. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 20 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的盖尔圆盘并讨论 A 的特征值的范围与性质.

解：取 $D=diag(1,1,0.5), B=DAD^{-1}$, 则 B^T 的盖尔圆盘为：$D_1:|x-20|\le 6, D_2:|x-10|\le 3.5, D_3:|x|\le 6$. 故 A 的特征值均为实数，分别位于 $[16,24],[6.5,13.5],[-6,6]$.

39. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A 的盖尔圆盘并利用对角相似变换改进之;
(2) 通过特征多项式计算 A 的特征值并与 (1) 比较.

解：(1) 略。

(2) A 的特征多项式为 $(\lambda^+9)^2(\lambda-27)$.

40. 证明 Hilbert[4] 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \cdots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \cdots & \frac{2}{3^{n-1}} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4^2} & 6 & \cdots & \frac{3}{4^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n}{n+1} & \frac{n}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)^3} & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

可以对角化, 且 A 的特征值都是实数.

证明：$R_j = 1 - \frac{1}{(1+j)^{n-1}} < 1$，故 n 个圆盘均孤立，从而特征值均不同且为实数。

41. 分别利用盖尔圆盘定理和 Ostrowski 圆盘定理估计下面矩阵的谱半径:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 3 & 0.1 & 0.2 \\ 1 & 0.3 & -1 & 0.5 \\ 1.2 & -0.6 & -0.2 & -3.6 \end{pmatrix}.$$

解：略。

42. 证明 $\sigma(A) \subseteq G(A) \cap G(A^T)$.

证明：$\sigma(A) \subseteq G(A), \sigma(A^T) \subseteq G(A^T)$, 但 $\sigma(A) = \sigma(A^T)$。

43. 设矩阵 A 酉相似于矩阵

$$\begin{pmatrix} 3.05 & -0.06 & 0.02 \\ -0.06 & -6.91 & 0.07 \\ 0.02 & 0.07 & 8.44 \end{pmatrix}.$$

试估计 A 的特征值.

解：三个圆盘为 $D_1 : |x - 3.05| \le 0.08, D_2 : |x - 6.91| \le 0.13, D_3 : |x - 8.44| \le 0.09$ 是分离的，故特征值均为实数且分别位于区间 $[2.97, 3.13], [6.78, 7.04], [8.35, 8.93]$。

44. 证明 $\sigma(A) = \cap_P G(P^{-1}AP)$, 其中 P 取遍所有可逆矩阵. 如果将 P 限定为可逆对角矩阵如何?

证明：由于对任意可逆矩阵 P 均有 $\sigma(A) = \sigma(P^{-1}AP)$，故 $\sigma(A) = \cap_P G(P^{-1}AP)$ 成立。同样，对任意可逆的对角矩阵 D 均有 $\sigma(A) = \sigma(D^{-1}AD)$，故 $\sigma(A) = \cap_D G(D^{-1}AD)$ 也成立.

45. 设 $A = (a_{ij})$ 有 s 行严格对角占优, 证明 $r(A) \ge s$.

证明：此时至少有 s 个圆盘不包含原点，因此至少有 s 个非零特征值，故 $r(A) \ge s$.

46. 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 至少有 $n-1$ 行严格对角占优, 且剩余一行的对角元素非零 , 证明 A 可逆.

[4]David Hilbert(1862-1943), 著名德国数学家, 对数学与物理的众多分支有杰出贡献, 他于 1900 年提出的数学的 23 个问题几乎确定了此后一个多世纪世界数学的整个发展方向. Hilbert 的名言: We must know, we shall know.

证明：不妨设 $|a_{ii}| > R_i, i = 1, \cdots n-1$，而 $|a_{nn}| = R_n$. 取 $D = diag(1, \cdots, 1, 1+b), b > 0$. 则

$$(1/p_n)\sum_{j=1}^{n-1} p_j|a_{nj}| = R_n/(1+b) < |a_{nn}|,$$

而对所有 $i \neq n$ 有

$$(1/p_i)\sum_{j=1}^{n-1} p_j|a_{ij}| = R_i + b|a_{in}|.$$

因此对足够小的 $b > 0$，不等式 $R_i + b|a_{in}| < |a_{ii}|$ 对所有 $i \neq n$ 均成立，因此 $G(D^{-1}AD)$ 不含原点，从而 $D^{-1}AD$ 可逆，故 A 可逆。

47. 证明 **Hadamard**[5] **不等式**：对任意 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 有 $|A| \leq \prod\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{1/2}$. 并由此证明:

(1) 若 A 是正定矩阵, 则 $|A| \leq \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$;

(2) 设 C 是非负实数, 若 $|a_{ij}| \leq C, 1 \leq i, j \leq n$, 则 $|A| \leq C^n n^{n/2}$;

(3) 设 $a_{ij} = \pm 1, 1 \leq i, j \leq n$, 则由 (2) 可知 $|A| \leq n^{n/2}$. 如果等号成立, 则称 A 是一个 **Hadamard 矩阵**. 证明 A 是 **Hadamard 矩阵** $\iff A^TA = nI_n \iff A$ 的列两两正交.

证明：(1) 将 A 的每一行均除以其长度 (这相当于 A 左乘相应的对角矩阵)，故不妨设 A 的每一行的长度均为 1，需证明 $|A| \leq 1$，而此是显然的：应为 $\rho(A) \leq 1$!

(2) 是 (1) 的直接推论。

(3) 先证明第二个等价。此时的必要性是显然的。现设 A 的列两两正交. 则 $A^TA = D = \mathrm{diag}\,(d_1, \cdots, d_n)$ 是对角矩阵，d_i 是第 i 列的长度平方 $= n$，故 $D = nI_n$.

再证明第一个等价。由于 A 的每列的长度均为 $n^{1/2}$, 故 $\rho(A) \leq^{1/2}, |A| \leq (n^{n/2})^n$。因此 A 是 Hadamard 矩阵当且仅当 $A = n^{n/2}$ 当且仅当 A 的列两两正交 (此也可由行列式的几何意义得知) 当且仅当 $A^TA = nI_n$。

48. 设 $A = (a_{ij})$ 是严格对角占优矩阵, $D = \mathrm{diag}\,(a_{11}, \cdots, a_{nn})$. 证明 D 可逆且 $\rho(I - D^{-1}A) < 1$.

证明：此时 A 的所有对角元素的绝对值均大于 0，故 D 可逆 (A 也可逆)。矩阵 $I - D^{-1}A$ 的对角元素均为 0，第 i 行的去心绝对行和为 $\sum_{j\neq i}|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| < 1$. 故 $\rho(I - D^{-1}A) < 1$.

49. 试利用 Ostrowski 圆盘定理和 Brauer 定理各给出一个矩阵可逆的充分条件.

50. 试证明 Ostrowski 圆盘定理.

51. 试证明 Brauer 定理.

[5] Jacques Salomon(1865-1963), 著名法国数学家, 对数学的诸多分支有重要贡献, 组合学中有著名的 **Hadamard 猜想**: 对每个正整数 k, 均存在 $4k$ 阶的 Hadamard 矩阵.

52. 研究下面的矩阵, 说明 Brauer 定理不能推广到三个盖尔圆盘的方程相乘的情形.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

53. 设数列 $a_0=0,a_1=1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足条件 $a_{n+1}=xa_{n-1}+a_n,n\geq 1$, 试求 a_n 的通项公式, 其中 x 为实参数. (当 $x=1$ 时, 此数列即为 **Fibonacci 数列**.)

54. 设 A 是 n 阶矩阵, 称满足条件 $y^TA=\lambda y^T$ 的向量 y 为 A 的属于特征值 λ 的左特征向量. 证明: A 的相应于特征值 λ 的左特征向量与相应于特征值 μ 的特征向量正交 $(\lambda\neq\mu)$.

55. (无限维线性空间的线性变换的特征值与特征向量) 无限次可导的实函数全体构成一个无限维实线性空间, 记为 C^{∞}. 定义 C^{∞} 上的线性变换 $\partial=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$:

$$\partial:\quad f(x)\mapsto f'(x).$$

试求 ∂ 的谱 $\sigma(\partial)$ 与特征向量. 比较你的结论与有限维线性空间的相应结论.

下面的 56-60 题是证明 Jordan 标准形存在与唯一性的 λ- 矩阵 (即以 λ 的多项式为元素的矩阵) 方法, 为简单起见, 所有矩阵均假定是 n 阶的. λ- 矩阵的初等变换与通常的线性变换类似 (倍加变换可以使用多项式).

56. 证明任何秩为 r 的 λ- 矩阵 $A(\lambda)$ 均 (在初等变换下) 等价于下面的对角矩阵 (称为 $A(\lambda)$ 的 **Smith 标准形**)

$$\operatorname{diag}(d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda),0,\cdots,0),$$

其中 $d_i(\lambda)$ 均为首一多项式且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda),1\leq i\leq r-1$. 这些 $d_i(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的**不变因子**.

57. 将 $A(\lambda)$ 的每个正次数的不变因子分解为不同的首一一次多项式的幂的乘积, 这些一次多项式的幂合称为矩阵 $A(\lambda)$ 的**初等因子**. 证明每个 Jordan 块仅有唯一的不变因子, 从而这个不变因子就是它的唯一初等因子.

58. 证明 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 等价 $\iff$ 它们有相同的不变因子.

59. 证明矩阵 A 与 B 相似 $\iff$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 等价.

60. 证明任何矩阵 A 一定相似于一个 Jordan 标准形.

61. 判断下面的矩阵是否为不可约矩阵?

$$(1)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad(2)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix},\qquad(3)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

62. 证明定理 3.5.1.

63. 设 A 是非负矩阵, 证明方程 $(I-A)P=\gamma$ 对任何非负向量 γ 总有正向量解 $P\iff\rho(A)<1$.(提示: 如果 $(I-A)^{-1}\geq 0$, 则 $\rho(A)<1$.)