$$(1)\ \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}^n;\quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n;\quad (3)\ \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & 1 & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix}^n.$$

答案: (1) $\begin{pmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$; (2) $(\sqrt{2})^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{4} & \sin \frac{n\pi}{4} \\ -\sin \frac{n\pi}{4} & \cos \frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}^n$;(注：此可由 (1) 得到.)

2. 证明: 与任意 n 阶方阵可交换的矩阵必是纯量矩阵 λI.

证明: 设 $A = (a_{ij})$ 与任意矩阵可换，则 A 与基本矩阵 E_{ij} 可换, 即 $AE_{ij} = E_{ij}A$. 注意 AE_{ij} 是第 j 列为 A 的第 i 列其余列均为 0 的矩阵，$E_{ij}A$ 是第 i 行为 A 的第 j 行其余行均为 0 的矩阵，由此可知 A 的非对角元素均为 0，而对角元素均满足 $a_{ii} = a_{jj}$，即 A 是纯量矩阵.

3. 利用初等变换求 $A^{-1}B$ 及 CA^{-1}, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 9 & -3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

答案: $A^{-1}B = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -24 & 0 & 60 & -175 \\ 0 & -24 & -48 & 92 \\ -10 & -35 & -45 & 98 \end{pmatrix}$,

$CA^{-1} = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -2 \\ 96 & -216 & -18 \\ 112 & -192 & -22 \end{pmatrix}$.

4. 设 $A, B \in M_n$, 证明: $\mathrm{adj}\,(AB) = \mathrm{adj}\,(B)\mathrm{adj}\,(A)$.

证明：(1) 如果 A, B 均可逆，则等式显然成立；

(2) 设 $x \in \mathbb{F}$ 为参数, 则除有限个 x 外, $A - xI$ 与 $B - xI$ 对其余无限多个数均可逆, 因此等式对这无限多个数 x 均成立，即

$$\mathrm{adj}\,((A - xI)(B - xI)) = \mathrm{adj}\,(B - xI)\mathrm{adj}\,(A - xI).$$

于是上式两端矩阵的任意第 i 行第 j 列相应位置的元素均相等，但这些元素均是 x 的多项式，而两个多项式如果对无限多个数均相等，则它们只能是同一个多项式，因此上式两端的相应位置的元素对“所有”x 均相等，特别对 $x = 0$ 也相等，即 $\mathrm{adj}\,(AB) = \mathrm{adj}\,(B)\mathrm{adj}\,(A)$.

5. 证明: 对任意矩阵 A, 有 $r(A^*A) = r(AA^*) = r(A)$.

证明：只证第二个等号. 设 α 是方程 $yAA^* = 0$ 的解, 则 $(\alpha AA^*)\alpha^* = 0$，即 $(\alpha A)(\alpha A)^* = 0$, 此即向量 αA 的模长的平方为 0，因此 $\alpha A = 0$. 故方程 $yAA^* = 0$ 与方程 $yA = 0$ 同解，因此两个系数矩阵等秩.

6. 证明: 对任意 n 阶矩阵 A, 有 $r(A^n) = r(A^{n+1})$.

证明：由于 $r(A^{i+1}) \le r(A^i)$, 故 $A, A^2, \cdots, A^{n+1}$ 中必有 2 个矩阵 A^s 与 A^t 的秩相同. 不妨设 $s < t$. 于是 $r(A^s) = r(A^{s+1}) = \cdots = r(A^t)$. 下证必有 $r(A^{t+1}) = r(A^t)$. 考虑方程组 $A^{t+1}x = 0$ 的任意解 α. 由于 $A\alpha$ 是 $A^t x = 0$ 的解而 $r(A^t) = r(A^{t-1})$，故 $A^{t-1}x = 0$ 与 $A^t x = 0$ 同解，从而 $A\alpha$ 满足方程 $A^{t-1}x = 0$ 即 $A^t\alpha = 0$. 这表明 $A^{t+1}x = 0$ 与 $A^t x = 0$ 同解，故 $r(A^{t+1}) = r(A^t)$. 重复上述证明可知 $r(A^i) = r(A^j), \forall i, j \ge s$.

7. 设 ω 是 n 次本原单位根 (可设 $\omega = e^{2\pi i/n} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$), 试求 Fourier 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

解：记题中的矩阵为 F. 注意对任意 $0 < j < n$, 均有 $w^j\overline{w^j} = 1$ 以及 $(\omega^j)^0 + (\omega^j)^1 + \cdots + (\omega^j)^{n-1} = 0$, 因此 $FF^* = nI$. 所以 $F^{-1} = \frac{1}{n}F^*$.

8. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是可逆的对称实矩阵. 证明: 二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的矩阵是 A 的伴随矩阵.

证明：将 f 的右端按第一行展开并考察 x_i 的系数为

$$(-1)^{(1+i+1)} \begin{vmatrix} -x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_j & a_{j1} & \cdots & a_{j,i-1} & a_{j,i+1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将上面的行列式按第 j 行展开并考察 x_j 的系数，可知恰为 $-(-1)^{j+1}M_{ij}$, 其中 M_{ij} 为矩阵 A 的元素 a_{ij} 的余子式. 因此, 二次型 f 中 x_ix_j 的系数为 $(-1)^{i+j}M_{ij} = A_{ij}$，故 f 的矩阵是 A 的伴随矩阵的转置，但由于 A 对称，故其伴随矩阵也对称.

9. 证明矩阵秩的 Frobenius 不等式: $r(AB) + r(BC) \le r(B) + r(ABC)$.

证明：利用下述分块矩阵的初等变换即可

$$\begin{pmatrix} B & \\ & ABC \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & \\ AB & ABC \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & -BC \\ AB & 0 \end{pmatrix}.$$

10. 证明行初等变换不改变矩阵的列向量之间的线性关系.

证明：设矩阵 A 的列向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 有线性关系 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$. A 经过行初等变换后变为矩阵 B. 则存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$. 于是 B 的列向量为 $P\alpha_1, \cdots, P\alpha_n$. 显然有 $k_1P\alpha_1 + \cdots + k_nP\alpha_n = 0$. 即行初等变换不改变矩阵的列向量之间的线性关系.

11. 设 A 是 n 阶矩阵, 对任意 $0 \neq x \in \mathbb{F}^n$ 均有 $Ax \neq x$, 证明 $I - A$ 可逆并求其逆.

证明：条件 $Ax \neq x$ 表明矩阵 A 的特征值均不等于 1, 因此 $I - A$ 可逆. 如果 A 的谱半径 $\rho(A) < 1$, 则 $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^m + \cdots$ (右端的级数一定收敛，可参见本书第五章).

12. 设 n 阶矩阵 A 可逆, x 与 y 是 n 维列向量. 如果 $(A + xy^*)^{-1}$ 可逆, 证明 **Sherman-Morrison 公式**:

$$(A + xy^*)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}xy^*A^{-1}}{1 + y^*A^{-1}x}.$$

证明：上式两端同时左乘 A 可得

$$A(A + xy^*)^{-1} = I - \frac{xy^*A^{-1}}{1 + y^*A^{-1}x}.$$

再取逆可得

$$(A + xy^*)A^{-1} = (I - \frac{xy^*A^{-1}}{1 + y^*A^{-1}x})^{-1}.$$

即

$$I + xy^*A^{-1} = (I - \frac{xy^*A^{-1}}{1 + y^*A^{-1}x})^{-1}.$$

上式可以直接验证 (仅需注意 $y^*A^{-1}x$ 是数即可).

13. 设 n 阶矩阵 A 可逆, B, C, D 分别是 $n \times m, m \times n, m \times m$ 矩阵. 证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

证明：利用分块矩阵的初等变换可得

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

故两端的行列式相等.

14. (1) 设矩阵 A, C 均可逆, 求分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

(2) 设矩阵 A 可逆, $D - CA^{-1}B$ 也可逆, 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆.

解：(1) $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

(2) 由 13 题可知该分块矩阵可逆. 根据 13 题证明中的下述等式

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

再由本题 (1) 中的结论可知 (以下记 $G = D - CA^{-1}B$)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = (\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & G \end{pmatrix})^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BG^{-1} \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BG^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BG^{-1} \\ -G^{-1}CA^{-1} & G^{-1} \end{pmatrix}.$$

15. 设矩阵 A 与 $A - BC$ 均可逆, 试用 A, A^{-1}, B, C 表示 $(A - BC)^{-1}$.(提示: 研究分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.)

证明：记 $X = A - BC$. 由于 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BC & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix}$, 所以

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BC & B \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{-1} & -X^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{-1} & -X^{-1}B \\ -CX^{-1} & I + CX^{-1}B \end{pmatrix}.$$

故由上题 (2) 可知，$X^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BG^{-1}CA^{-1}$，其中 $G = I - CA^{-1}B$ (由本题证明过程可知 G 是可逆矩阵).

16. 设 $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶分块矩阵. 一个 $2n$ 阶复矩阵 M 称为是**辛矩阵** 如果 $M^T\Omega M = \Omega$. 证明:

(1) $2n$ 阶辛矩阵的全体构成一个群, 即辛矩阵的逆矩阵仍是辛矩阵, 两个辛矩阵的乘积仍是辛矩阵;

(2) 任何辛矩阵的行列式均为 1. (提示: 利用分块矩阵.)

证明：(1) 显然.

(2) 由 $M^T\Omega M = \Omega$ 可知 $|M|^2 = 1$, 从而 $|M| = \pm 1$. 但证明 $|M| = 1$ 较难，？？？？

17. 求下列各矩阵的满秩分解:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

答案：

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};.$$

18. 证明第三种初等矩阵 (即 $I + aE_{ij}$, $i \neq j$, $a \neq 0$) 彼此相似. 又, 第一种初等矩阵是否彼此相似?

证明：为证明第三种初等矩阵 (即 $I + aE_{ij}$, $i \neq j$, $a \neq 0$) 彼此相似，先证明 $E_{ij} (i \neq j)$ 均与 E_{12} 相似即可. 为此，若 $i = 1$，则交换 E_{ij} 的第 2 列与第 j 列，然后交换新矩阵 (此时新的

矩阵即为 E_{12}) 的第 2 行与第 j 行，但这两行都是 0 行，故所得矩阵仍是 E_{12}. 因此 $E_{ij}(i \neq j)$ 与 E_{12} 相似.

再证 $aE_{12}(a \neq 0$ 与 E_{12} 相似. 为此，取 $P = I + (a-1)E_{22}$ 即可.

类似可证，第一种初等矩阵也彼此相似.

19. 设矩阵 A 满足方程 $A^2 - A + 2I = 0$, 问 A 可以对角化吗? 为什么? 将本题一般化.

解：$(A - I/2)^2 + 7I/4 = 0$, 即 $(A - I/2 + bI)(A - I/2 - bI) = 0$(其中 $b^2 = -7/4$)，因此 A 是可对角化矩阵.

一般地，若 $(A - xI)(A - yI) = 0$, 则 A 可以对角化.

20. 证明:(1) Hermite 矩阵的特征值均为实数, 且属于不同特征值的特征向量彼此正交.
(2) Hermite 矩阵 A 是正定矩阵 $\iff$ 存在可逆下三角矩阵 L 使得 $A = LL^*$.

证明：(1) 设 $A^* = A$ 有一个特征值 $a \in \mathbb{C}$, 相应的特征向量为 α. 则 $A\alpha = a\alpha$, 故 $\alpha^T A^T = a\alpha^T$, 进而 $\alpha^* A^* = \bar{a}\alpha^*$. 所以 $\alpha^* A^* \alpha = \bar{a}\alpha^*\alpha$. 左 $=\alpha^* A\alpha = a(\alpha^*\alpha)$, 而 $\alpha^*\alpha \neq 0$, 故 $a = \bar{a}$. 即 a 是实数.

再设 $A^* = A$ 还有一个特征值 $b \neq a \in \mathbb{C}$, 相应于 b 的特征向量为 β, 即 $A\beta = b\beta$. 因为 $a\alpha^*\beta = (A\alpha)^*\beta = \alpha^* A^*\beta = \alpha^*(A^*\beta) = \alpha^*(A\beta) = b\alpha^*\beta$, 因此 $(a-b)\alpha^*\beta = 0$, 由于 $a-b \neq 0$, 故 $\alpha^*\beta = 0$，即 α 与 β 正交.

21. 设 $V = \{$ 所有正实数 $\}, \mathbb{F} = \mathbb{R}$ 是实数域. 定义 V 中的加法运算为 $x \oplus y = xy$ (即通常的实数乘法); 定义 V 中元素与 $\mathbb{F}$ 中数的数乘运算为 $k \bullet x = x^k$(通常的幂运算). 则 $(V, \oplus, \bullet)$ 是实线性空间.

证明：直接验证即可.

22. 设 $V = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. 利用普通加法和普通乘法定义 V 上的加法“$\diamond$”如下:

$$a \diamond b = a + b + ab.$$

证明 $\diamond$ 满足线性空间的加法的全部条件. 进一步, 构造复数与 V 中向量的一个“数乘”$\heartsuit$, 使得 $(V, \diamond, \heartsuit)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 请给出该线性空间的一组基.

解：首先加法的交换律显然满足（因为普通加法与乘法均具有交换律）；结合律验证如下：

$$(a \diamond b) \diamond c = (a + b + ab) \diamond c = a + b + ab + c + (a + b + ab)c = a + b + c + ab + ac + bc + abc$$

可见此运算与次序无关.

零元为 0；$0 \diamond a = 0 + a + 0a = a$.

设 $a \neq -1$ 的负元为 x, 则 $0 = a \diamond x = a + x + ax$, 所以 $x = -a/(1+a)$(由此可知除去 -1 的必要性).

由上可知 $\diamond$ 确为加法.

乘法的定义非常有趣，故不写出该答案.

23. 请将上题的集合 $V = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ 做一适当调整, 使其在加法“$\clubsuit$”下成为加群, 其中“$a \clubsuit b = a + b + xab$”, x 是某固定的复数. 试设计一个与加法“$\clubsuit$”和谐的数乘运算“$\spadesuit$”, 使得 $(V, \clubsuit, \spadesuit)$ 构成复线性空间. 请给出该线性空间的一组基. 又, 将 $\mathbb{C}$ 换为 $\mathbb{R}$ 结果如何?

解：见上题，更有趣（因为更一般化）.

24. 设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是非空有限集合.
(1) 证明: $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^A = n$;
(2) 求 $\mathbb{F}^A$ 的一组基;
(3) 描述函数空间 $\mathbb{F}^A$ 的结构并推广到 A 是无限集合的情形.

解：(1) 与 (2) 令 $f_i \in \mathbb{F}^A$ 为 $f_i(a_j) = \delta_{ij}$, 则易证 $f_1, \cdots, f_n$ 是函数空间 $\mathbb{F}^A$ 的一组基，故 $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F}^A = n$.

(3) 由 (2) 知 $\mathbb{F}^A \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F})$. 故当 A 是无限集合时，$\mathbb{F}^A \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(|A|, \mathbb{F})$, 其中 $\mathbb{F}^{|A|}$ 是以 A 的元素为基的线性空间.

25. 证明线性空间的替换定理: 设 $J = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$ 与 $K = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$ 是 n 维线性空间 V 的两个向量组, 其中 J 线性无关. 如果每个 $\alpha_j \in J$ 都可由 K 线性表示, 则 $s \le t$; 且可将 K 中的某 s 个向量换成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 使得新的向量组生成的子空间与 K 生成的子空间相同.

证明：设 $\alpha_i = a_{1i}\beta_1 + \cdots + a_{ti}\beta_t, 1 \le i \le s$, 则

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = (\beta_1, \cdots, \beta_t)A(\text{即}J = KA)$$

其中 $A = (A_{ij})_{t\times s} \in \mathbb{F}^{t\times s}$. 由于 J 线性无关，故 $Jx = 0$ 只有 0 解，即 $KAx = 0$ 从而 $Ax = 0$ 只有 0 解，因此 $s \le t$.

进一步，考虑集合 $L = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$. 在 L 中按顺序删除前 s 个与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关的 β_j 即可使得新的向量组生成的子空间与 K 生成的子空间相同.

26. 证明有限维线性空间的任意两个基所含向量的个数相同.

证明：由于两个基可以相互线性表示，故本题结论由上题可得.

27. 证明过渡矩阵必是可逆矩阵.

证明：设 J, K 是两组基，A, B 分别为两个过渡矩阵，即 $K = JA, J = KB$. 于是 $K = K(BA)$. 但坐标唯一，故知 $BA = I$，从而 A 与 B 皆可逆且互为逆矩阵.

28. 证明 $1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 是 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一组基, 并求多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 在该组基下的坐标.

解：按 Taylor 公式有

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}}{i!}(x-1)^i.$$

因此 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 中的任意元素均可由 $1, x-1, (x-1)^2, \cdots, (x-1)^n$ 线性表示，且该组元素恰好为 $n+1 =$ 该线性空间的维数个，因此是一组基.

29. 验证: 若 $(\alpha, \beta)_1$ 与 $(\alpha, \beta)_2$ 是欧氏空间 V 的两个不同的内积, 则 $(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)_1 + (\alpha, \beta)_2$ 也是 V 的一个内积. 试创造一种新办法再构造 V 的一种内积.

证明：直接验证即可. 新办法（无穷多种）一旦写出即失去意味，故不写（请谅解）.

30. 对 $x = (x_1, x_2)^T$, $y = (y_1, y_2)^T$, 规定

$$(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2.$$

证明 (x,y) 是 $\mathbb{R}^2$ 的内积 $\iff$ $a>0,\ ac>b^2$.

证明：与该双线性型对应的矩阵是 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. 因此该双线性型是内积 $\iff$ $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 是正定矩阵 $\iff$ $a>0,\ ac>b^2$.

31. 设 $V=\{a\cos t+b\sin t,\ \text{其中}\, a,b\, \text{为任意实数}\}$ 是实二维线性空间. 对任意 $f,g\in V$, 定义

$$(f,g)=f(0)g(0)+f(\frac{\pi}{2})g(\frac{\pi}{2}).$$

证明 (f,g) 是 V 上的内积, 并求 $h(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$ 的长度.

证明：直接验证即可知 (f,g) 是 V 上的内积.$h(t)=3\cos(t+7)+4\sin(t+9)$ 的长度为 5.（一般地，$a\cos t+b\sin t$ 的长度为 $\sqrt{a^2+b^2}$.）

32. 设欧氏空间 $\mathbb{R}[x]_2$ 中的内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

(1) 求基 $1,t,t^2$ 的度量矩阵;
(2) 用矩阵乘法形式计算 $f(x)=1-x+x^2$ 与 $g(x)=1-4x-5x^2$ 的内积.

解：（1）度量矩阵 $G=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$; (2) 0.

33. 设 $a_i, 1\le i\le n$ 是正实数, x_i, y_i 是任意实数, 证明或否定不等式

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2).$$

解：该不等式成立，证明如下：对任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T, y=(y_1,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$$

则容易验证 (x,y) 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积（对称性、正定性与双线线性均是显然的）. 因此，题中的不等式恰好是相应于该内积的三角不等式，故也成立.

34. (1) 复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 2 维线性空间. 是否存在 $\mathbb{C}$ 上的一个内积, 使得 i 与 $1+\mathrm{i}$ 成为 $\mathbb{C}$ 的一组标准正交基, 为什么?

(2) 试构造实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的一个内积, 使得向量组 $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3$ 是一组标准正交基. 问此时 e_2 与 e_3 的长度各是多少? 它们的夹角又是多少?

解：（1）存在，因为有限维实（复）向量空间的任何一组基均可做成一个标准正交基.（2）设 $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3$ 是一组标准正交基，则可得 $(e_1,e_1)=1, (e_1,e_2)=-1, (e_1,e_3)=0, (e_2,e_2)=2, (e_2,e_3)=-1, (e_3,e_3)=2$. 由此知相应的内积为

$$((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3-(x_1y_2+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_2).$$

35. 试尽可能一般性地讨论习题 34 中的问题.

解：有限维实（复）向量空间的任何一组基均可做成一个标准正交基，相应的内积由对应的度量矩阵决定.

36. 证明 Cauchy-Schwarz 不等式与三角不等式.

证明：先证 Cauchy-Schwarz 不等式：$\alpha = 0$ 时不等式显然成立，下设 $\alpha \neq 0$. 注意对任意实数 t 均有 $(\beta - t\alpha, \beta - t\alpha) \geq 0$, 即

$$(\beta, \beta) - 2(\beta, t\alpha) + t^2(\alpha, \alpha) \geq 0.$$

取 $t = (\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ 即可. 由此可证三角不等式：$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2(\alpha, \beta) \leq \alpha^2+\beta^2+2\|\alpha\|\|\beta\|$ (此处用到 Cauchy-Schwarz 不等式).

37. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 求三个向量 $\alpha_1 = (1, 0, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 0, -3)^T$ 和 $\alpha_3 = (1, -1, 1, -1)^T$ 所生成的子空间的一个标准正交基.

答案 (不唯一)：$\beta_1 = (1, 0, 1, 1)^T/\sqrt{3}$, $\beta_2 = (7, 3, 1, -8)^T/\sqrt{123}, \beta_3 = (3, 54, -23, 20)^T/\sqrt{3854}$.

38. 定义任意内积空间 V 中两个向量 α 与 β 的距离为

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|.$$

证明如上定义的函数 $d(\alpha, \beta)$ 确实定义了 V 上一个距离, 即满足下列三个条件:

(d1) 对称性: $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$;

(d2) 非负性: $d(\alpha, \beta) \geq 0$, 且等号成立 $\iff \alpha = \beta$;

(d3) 三角不等式: $d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma) \geq d(\alpha, \gamma)$.

证明：直接验证即可.

39. 设 2 维欧氏空间 V 的一组基为 α_1, α_2, 其度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

试求 V 的一个标准正交基到 α_1, α_2 的过渡矩阵.

解：由于 α_1, α_2 的长度相等，故 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ 必正交，从而 $\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)/\sqrt{18}, \beta_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)/\sqrt{2}$ 是一个标准正交基.（对 α_1, α_2 直接使用正交化方法可得 $\gamma_1 = \alpha_1/\sqrt{5}, \beta_2 = (4\alpha_1 - 5\alpha_2)/\sqrt{45}$ 是一个标准正交基.）

40. 设 n 维内积空间 V 的一个基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 该基的度量矩阵为 A. 设 $\alpha, \beta \in V$ 在该基下的坐标分别为 x 与 y.

(1) 证明 $(\alpha, \beta) = x^T A\bar{y}$. 特别, 当 V 为欧氏空间时, $(\alpha, \beta) = x^T Ay$.

(2) 证明 (1) 中内积的矩阵乘法形式与选取的基无关.

证明：（1）记 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 将 $\alpha = Bx$ 与 $\beta = By$ 直接代入 (α, β) 计算即可.

(2) 设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 的另一组基，度量矩阵为 $G = ((\beta_i, \beta_j))$. 设 α, β 在该基下的坐标分别为 u 与 v. 再设由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 P. 则 $x = Pu, y = Pv$. 因为 $\beta_i = BP_i, 1 \leq i \leq n$, 其中 P_i 是矩阵 P 的第 i 列. 于是

$$(\beta_i, \beta_j) = (BP_i, BP_j) = P_i^T A\bar{P}_j, 1 \leq i, j \leq n.$$

由此知

$$G = ((\beta_i, \beta_j)) = P^T A \bar{P}.$$

故 $(\alpha, \beta) = u^T G \bar{v} = u^T P^T A \bar{P} \bar{v} = (Pu)^T A \bar{P} v = x^T A \bar{y}$. 即 (1) 中内积的矩阵乘法形式与选取的基无关.

41. 设 $V = M_n(\mathbb{R})$ 或 $M_n(\mathbb{C})$. 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V$.

(1) 证明 $(A, B) = \operatorname{tr}(AB^*)$ 是 V 的一个内积;

(2) 按 (1) 的内积, 矩阵 A 的长度是多少? 哪些是单位向量?

(3) 证明或否定: 基本矩阵 $E_{ij}, 1 \le i, j \le n$ 是 V 的一组标准正交基;

(4) 求 $M_2(\mathbb{R})$ 的一组由可逆矩阵构成的标准正交基.

解：（1）直接验证即可.

（2）$(A, A) = \operatorname{tr}(AA^*) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$.

(3) $(E_{ij}, E_{kl}) = \operatorname{tr}(E_{ij} E_{kl}^*) = \operatorname{tr}(E_{ij} E_{lk})$. 由于 $E_{ij} E_{lk} = \delta_{jl} E_{ik}$, 故 $\operatorname{tr}(E_{ij} E_{lk}) = 1 \iff i = k, j = l$，否则 $\operatorname{tr}(E_{ij} E_{lk}) = 0$. 因此基本矩阵 $E_{ij}, 1 \le i, j \le n$ 是 V 的一组标准正交基.

（4）$I/\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}/\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}/\sqrt{2}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & -1 \end{pmatrix}/\sqrt{2}$. (答案不唯一.)

42. 设线性空间 $V = \mathbb{R}^2$ 是欧氏空间 (未必是通常的欧氏空间). 设 $\alpha_1 = (1, 1)^T, \alpha_2 = (1, -1)^T$ 与 $\beta_1 = (0, 2)^T, \beta_2 = (6, 12)^T$ 是 V 的两组基. 设诸 α_j 与 β_k 的内积分别为

$$(\alpha_1, \beta_1) = 1, (\alpha_1, \beta_2) = 15, (\alpha_2, \beta_1) = -1, (\alpha_2, \beta_2) = 3.$$

(1) 求两组基的度量矩阵;

(2) 求 V 的一个标准正交基.

解：（1）

$$(\alpha_1, \alpha_1) = 2, (\alpha_1, \alpha_2) = 1, (\alpha_2, \alpha_2) = 2.$$

$$(\beta_1, \beta_1) = 2, (\beta_1, \beta_2) = 12, (\beta_2, \beta_2) = 135.$$

(2) $\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)/\sqrt{6}, \gamma_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)/\sqrt{2}$ 是 V 的一个标准正交基.（不唯一.）

43. 设 n 维欧氏空间 V 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 证明：存在正定矩阵 C, 使得由

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) C$$

确定的向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 的一个标准正交基.

证明：先证明任意一个可逆矩阵均可写成一个正定矩阵和一个正交矩阵的乘积. 设 A 可逆，则 $A^T A$ 正定，故存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T A^T A Q = D$ 是对角线元素均为正的对角矩阵. 因此 $D^{-1} Q^T A^T A Q D^{-1} = I$, 即 $(AQD^{-1})^T (AQD^{-1}) = I$. 即 AQD^{-1} 是正交矩阵, 记此正交矩阵为 R. 则 $A = RDQ^T = (RDR^T) RQ^T$. 因为 D 正定，故 RDR^T 正定；又 R, Q 均为正交矩阵，故 RQ^T 也是正交矩阵.

下设 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 是 V 的一组标准正交基，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到该基的过渡矩阵为 P，即 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) P$. 由前段的证明，存在正定矩阵 C 与正交矩阵 Q 使

得 $P = CQ$. 则 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)CQ$. 因此 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)Q^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)C$ 也是一组标准正交基.

44. 设 A 是**反对称**实矩阵 (即 $A^T = -A$), 证明:
(1) A 的特征值为 0 或纯虚数;
(2) 设 $\alpha + \beta\mathrm{i}$ 是 A 的属于一个非零特征值的特征向量, 其中 α, β 均为实向量, 则 α 与 β 正交.

证明：（1）设 a 是 A 的一个特征值，α 是相应的一个 (复) 特征向量，则 $A^T\alpha = a\alpha$. 故 $\alpha^*A^* = \bar{a}\alpha^*$，于是 $-\alpha^*A\alpha = \bar{a}\alpha^*\alpha$ 或 $-a\alpha^*\alpha = \bar{a}\alpha^*\alpha$. 因此 $-a = \bar{a}$，即 $a = 0$ 或为纯虚数.

（2）设 $a \neq 0$ 是相应的特征值，则 $A(\alpha + \beta\mathrm{i}) = a(\alpha + \beta\mathrm{i})$, 从而 $A\alpha = a\alpha, A\beta = a\beta$. 于是 $-\alpha^TA = \alpha^TA^T = a\alpha^T$. 因此 $-\alpha^TA\beta = a\alpha^T\beta$ 或 $-a\alpha^T\beta = a\alpha^T\beta$. 由于 $a \neq 0$，必有 $\alpha^T\beta = 0$.

45. 设 A 是 Hermite 矩阵. 如果对任意向量 x 均有 $x^*Ax = 0$, 则 $A = 0$.

证明：显然此时 A 的所有特征值均为 0，又 A 可以对角化，故 $A = 0$.

46. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的二元 (向量) 函数 $< x, y >$ 如下:

$$< x, y >= x^TAy.$$

此二元函数与普通内积的差别是什么? 以此二元函数为基础, 建立相应的长度, 角度等概念, 研究其中的正交与平行的定理.

解：注意 A 对称但不可逆，因此由其定义的“内积”有对称性、双线线性但无正定性，故存在长度为 0 的非零向量等等. 因此存在自正交的非零向量. 两个向量平行不必是线性相关的.

47. 设 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的对称**双线性函数** (即 $f(x, y) = f(y, x)$ 且关于两个变元 x 与 y 均是线性的).
(1) 给出 $f(x, y)$ 的一般表达式;
(2) 证明方程 $f(x, x) = 0$ 总有非零解;
(3) 设 $f(x, y)$ 非退化 (即若 $f(x, \alpha) = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n$, 则 $\alpha = 0$), 证明存在线性无关的向量 α, β 使得 $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha) = 0$ 且 $f(\alpha, \beta) = 1$.

解；（1）$f(x, y) = x^TAy$, 其中 A 是（复）对称矩阵即 $A^T = A$.

(2) 如果 A 的某个对角线元素 $a_{ii} = 0$，则 e_i 是 $f(x, x) = 0$ 的非零解. 故下设 A 的所有对角元素均不为 0，则 $f(x, x) = a_{11}x_1^2 + \alpha x_1 + \beta = 0$ 是一个关于 x_1 的二次方程，该方程仅有 0 解当且仅当 A 的除去 a_{11} 的所有元素均为 0，因此该方程必有非零解.

（3）对任意 $0 \neq \beta = (b_j)^T \in \mathbb{C}^n$, 方程 $0 = f(x, \beta) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_jx_i$ 是一个系数矩阵的秩 ≤ 1 的线性方程（组），故其解空间至少为 $n-1$ 维，因此必存在与 β 线性无关的 $\alpha \in \mathbb{C}^n$ 使得 $f(\alpha, \beta) = 0$. 其余是显然的.

48. 设 x 是矩阵 A 的一个特征向量 x, 证明相应于 x 的特征值为 x^*Ax/x^*x(此商称为 **Rayleigh**[1] **商**, 是研究特征值的重要工具). 据此研究 n 元二次型 x^*Ax 与 A 的特征值的关系.

[1]Rayleigh 男爵, 全名 John William Strutt(1842-1919), 著名英国物理学家, 1904 年诺贝尔物理学奖得主.

证明：设对应于特征向量 x 的特征值是 a, 则 $Ax = ax$. 于是 $x^*Ax = ax^*x$, 即 $a = x^*Ax/x^*x$. 由于可取 x 为单位特征向量，故 $a = x^*Ax/x^*x$ 是二次型 x^*Ax 在单位球面 $x^*x = 1$ 上的一个值，从而 A 的特征值 λ 均满足条件 $m \le \lambda \le M$, 此处 m 与 M 分别为二次型 x^*Ax 在单位球面 $x^*x = 1$ 上的极小值与极大值. 容易证明此极小值与极大值均是 A 的特征值.

49. Vandermonde (范德蒙德)[2] 行列式对应的矩阵称为 Vandermonde 矩阵. 研究 Vandermonde 矩阵是否可以对角化.

解：一般不能. 比如 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ 是 Vandermonde 矩阵，但当 $a = 0, b = 1$ 时不能对角化 (不过请注意，这是 2 阶 Vandermonde 矩阵不能对角化的唯一的例子). 类似地，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ 是 Vandermonde 矩阵，但当 $a = b = 0, c = 1$ 时不能对角化.

50. 设 $I = I_2$, 试求整数矩阵方程 $X^2 = \pm I$ 的所有解. 试一般地讨论方程 $X^n = I_n$ 的解 (这样的整数矩阵称为周期矩阵), 其中 n 为某自然数. (提示: 利用特征多项式.)

51. 完整给出例 1.6.1 的解. (数值计算可以使用相关软件.)

52. 证明定理 1.6.1.

53. 证明公式 (1.6.3) 中的第二个等式.

54. 设公式 (1.6.2) 中的 n 阶消耗矩阵 C 的列和均小于 1, 设 Δx 为满足最终需求 Δd 的产出向量.

(1) 证明: 如果最终需求由 d 变为 $d + \Delta d$, 则新的产出向量必须为 $x + \Delta x$;

(2) 设 $\Delta d = e_1$ 是第一个标准向量, 证明 Δx 恰好是矩阵 $(I - C)^{-1}$ 的第一列. 解释这个结果.

55. 设图 G 的邻接矩阵为

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求图 G.

[2] Alexandre-Théophile Vandermonde(1735-1796), 法国数学家, 音乐家和化学家.