第六章习题参考解答

注: 本章习题自 19 题以后属补充内容，暂不提供答案.

改错: P231，习题 6，“定理”应改为“命题”；

1. 证明定理 6.1.1.

证明：见第二章定理 2.3.2 的证明。

2. 设 P_1, P_2 均为投影矩阵, 证明:
(1) $P = P_1 + P_2$ 是投影矩阵 $\iff$ $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$;
(2) $P = P_1 - P_2$ 是投影矩阵 $\iff$ $P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$;
(3) $P_1^*, I - P_1, T^{-1}P_1T$($T$ 为任意一个非奇异矩阵) 均为投影矩阵.

证明：由 $P^2 = P$ 直接验证即可。

3. 设 $\mathbb{R}^3$ 的子空间 L 由向量 $e = (1, 0, 0)^T$ 生成.

(1) 若子空间 M 由 $\alpha = (1, 1, 0)^T$ 和 $\beta = (1, 1, 1)^T$ 生成, 求投影矩阵 $P_{L,M}$ 和向量 $x = (2, 3, 1)^T$ 沿着 M 到 L 上的投影;

(2) 求正交投影矩阵 P_L 和向量 $x = (2, 3, 1)^T$ 在 L 上的正交投影.

解：(1) $P_{L,M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{L,M}x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(2) $P_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_Lx = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. 证明例 6.1.3.

证明：因为 $A^2 = A^* = A$, 故 $Ax = b$ 的正规化方程为 $Ax = Ab$. 而 Ab 显然是该方程的解.

5. 证明 $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}^\dagger = (A^\dagger, 0)$.

证明：直接验证即可.

6. 证明命题 6.1.1.

证明：直接验证可知 $A^\dagger A$ 与 $AA^\dagger$ 均为正交投影矩阵. 再设 $A = U \sum V^*$ 是 A 的奇异值分解, 则 $A^\dagger = V \sum^\dagger U^*, A^* = V \sum^* U^*$. 由于 $\sum^\dagger$ 与 $\sum^*$ 的列空间与零空间相同, U, V 可逆, 故 $R(A^\dagger) = R(A^*), N(A^\dagger) = N(A^*)$.

7. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 又 $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 均为酉矩阵. 证明 $(UAV)^\dagger = V^*A^\dagger U^*$.

证明：设 $A = P \sum Q^*$ 是 A 的奇异值分解, 则 $UP \sum Q^*V$ 是 UAV 的奇异值分解. 因此 $(UAV)^\dagger = (UP \sum Q^*V)^\dagger = V^*(Q \sum^\dagger P^*)U^* = V^*A^\dagger U^*$.

8. 设 H 为幂等 Hermite 矩阵, 证明 $H^\dagger = H$.

证明：因为 H 为幂等Hermite矩阵, 故可酉对角化, $H=U^*DU$, 其中 D 为实幂等对角矩阵, 故 $D=I_m\oplus 0=D^\dagger$. 于是 $H^\dagger=U^*D^\dagger U=U^*DU=H$.

9. 证明 $A^\dagger=A \iff A^2$ 为幂等Hermite矩阵且 $r(A^2)=r(A)$.

证明：设 $A=U\sum V^*$ 是 A 的奇异值分解, $r(A)=r$. 则 $A^\dagger=V\sum^\dagger U^*$. 因此, 若 $A^\dagger=A$, 则 $A^2=A^\dagger A=U\sum^\dagger\sum U^*=U(I_r\oplus 0)U^*$, 故 $A^2=A^4, r(A^2)=r=r(A)$. 反之, 若 A^2 为幂等Hermite矩阵, 则由定理 6.1.1 可知 A^2 是正交投影矩阵, 即 $A^2=P_{R(A^2)}$. 但 $r(A^2)=r(A)$, 故 $AA=A^2=P_{R(A^2)}=P_{R(A)}$. 于是 A 是 A 自己的Moore逆, 从而 $A^\dagger=A$.

10. 证明: 若 A 是正规矩阵, 则 $A^\dagger A=AA^\dagger$, 且 $(A^n)^\dagger=(A^\dagger)^n$, 其中 n 为正整数.

证明：利用正规矩阵的谱分解 $A=U^*DU$ 可知, $A^\dagger=U^*D^\dagger U, A^n=U^*D^nU, (A^n)^\dagger=U^*(D^n)^\dagger U$. 故 $A^\dagger A=AA^\dagger$, 且 $(A^n)^\dagger=(A^\dagger)^n$.

11. 计算基本矩阵 E_{ij} 的Moore-Penrose广义逆和 $\{1\}$- 广义逆矩阵.

解: 设 E_{ij} 为 $m\times n$ 矩阵. 因为 $r(E_{ij})=1$, 故由公式 (6.2.2) 可知 $E_{ij}^\dagger=E_{ij}^T=E_{ji}\in\mathbb{F}^{n\times m}$.

$A\{1\}=\{Y+(1-y_{ii})E_{ji}\,|\,Y=(y_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times m}\}$.

12. 证明命题 6.1.2.

证明: (3) 与 (4) 显然. (1),(2),(5),(6),(7),(9) 可利用矩阵 A 的奇异值分解直接验证. 下证 (8).

13. 验证例 6.1.11. 如果 $\mathbb{F}[x]_3$ 中的内积定义为 $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$, 计算求导变换 ∂ 的Moore-Penrose广义逆 $\partial^\dagger$.

14. (1) 设 $r(BC)=r(B)$. 证明存在矩阵 D 使 $B=BCD$, 且 $C(BC)^-$ 是 B 的一个 $\{1\}$-广义逆矩阵.

(2) 设 $r(BC)=r(C)$. 证明存在矩阵 D 使 $C=DBC$, 且 $(BC)^-B$ 是 C 的一个 $\{1\}$- 广义逆矩阵.

证明: (1) $r(BC)=r(B)=r(0,B)=r(BC,B)$. 所以 $BCX=B$ 有解 $X=(BC)^-B$, 此即是 D.

(2) 与 (1) 类似.

15. (1) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $m\times r$ 矩阵, 则等式 $AA^-B=B \iff$ 存在矩阵 D 使 $B=AD$;

(2) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $r\times m$ 矩阵, 则等式 $BA^-A=B \iff$ 存在矩阵 D 使 $B=DA$.

证明：(1) 充分性. 如果存在 D 使得 $B=AD$, 则 $AA^-B=AA^-AD=AD=B$. 反之, 取 $D=A^-B$ 即可.

(2) 与 (1) 类似.

16. 证明定理 6.2.2.

证明：直接验证即可.

17. 详细证明定理 6.2.4.

证明：由于 $A^\dagger=(A^*A)^\dagger A^*$, 故将公式 (6.2.7) 代入公式 (6.2.4) 即可.

18. 计算下列矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆和 $\{1\}$- 广义逆矩阵, 并验证所得的结果.

$$(1)\begin{pmatrix}1&0&2\\1&0&2\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix};\quad (2)\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&1\\2&0&2&1\end{pmatrix};$$

解：$(1)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\quad (2)\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix}.$

19. 证明:(1) 如果矩阵 A 的左逆唯一, 则 A 必是可逆矩阵, 于是左逆等于右逆;

(2) 设矩阵 A 存在左逆但不唯一, 则 A 有无穷多个左逆. 类似地, 如果存在两个右逆, 则必存在无穷多个右逆.

20. 证明命题 6.3.1.

21. 证明命题 6.3.1.

22. 证明定理 6.3.5.

23. 证明: $(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger \iff A^\dagger ABB^*A^*=BB^*A^*$ 与 $BB^\dagger A^*AB=A^*AB$ 同时成立.

24. 证明定理 6.4.1.

25. 证明命题 6.4.1.

26. 计算下列矩阵的 $\{1,2\}$- 逆:

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix};\qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\1&\mathrm{i}\\0&1\end{pmatrix}.$$

解：(1) $A^\dagger=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-3\\1&0\\-1&3\end{pmatrix}$;

(2) $A^\dagger=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2i&1&-i\\1&-i&2\end{pmatrix}$.

27. 计算下列矩阵的 $\{1,3\}$- 逆:

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&2&2\\-1&1&0&1\end{pmatrix};\qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\3&-1&-3\end{pmatrix}.$$

28. 证明命题 6.4.2.

29. 计算下列矩阵的 $\{1,4\}$- 逆:

$$(1)\begin{pmatrix}1&1\\2&2\\-1&-1\end{pmatrix};\quad (2)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}.$$

30. 证明定理 6.4.3.

31. 证明命题 6.4.3.

32. (1) 哪些矩阵的 $\{1,2\}$- 逆等于它的转置矩阵?
(2) 哪些矩阵的 $\{1,4\}$- 逆等于它的转置矩阵?

33. 试求一个与书中公式形式不同的计算秩为 1 的矩阵的各种广义逆的公式.

34. 不可逆的方阵可否有可逆的 $\{1,2\}$- 逆或 $\{1,3\}$- 逆或 $\{1,4\}$- 逆?

35. 哪些不可逆的方阵有唯一的 $\{1,2\}$- 逆或 $\{1,3\}$- 逆或 $\{1,4\}$- 逆?

36. 是否存在矩阵其 $\{1,2\}$- 逆或 $\{1,3\}$- 逆或 $\{1,4\}$- 逆不唯一但只有有限个?

37. 设正规矩阵 A 仅有一个非零特征值 λ.
(1) 证明 $A^\dagger = \lambda^{-2}A$;
(2) 试求 A 的 $\{1,2\}$- 逆, $\{1,3\}$- 逆及 $\{1,4\}$- 逆的表达式;
(3) 根据 (1) 与 (2) 计算矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 的各种广义逆.

38. 设 L, M 是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间. 证明:
(1) $P_{L+M} = (P_L + P_M)(P_L + P_M)^\dagger = (P_L + P_M)^\dagger(P_L + P_M)$;
(2) $P_{L\cap M} = 2P_L(P_L + P_M)^\dagger P_M = 2P_M(P_L + P_M)^\dagger P_L$.

39. 证明: $A^\dagger = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}$.

40. 取 A_1, A_2 分别为第 18 题的 (1) 和 (2), 并设 $b_1 = (1,1,0,1)^T$, $b_2 = (1,1,2)^T$. 分别求出方程组 $A_1x = b_1$ 和 $A_2x = b_2$ 的通解.

41. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 求 $Ax = b$ 的最小范数解.

42. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. 求矛盾方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解.

43. 证明推论 6.5.1.

44. 确定矩阵方程矩阵方程 $AXB = 0$ 的通解, 并以此证明定理 6.5.6.

45. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(1) 当 $b = (1,1,1,1)^T$ 时, 方程组 $Ax = b$ 是否相容?
(2) 当 $b = (1,0,1,0)^T$ 时, 方程组 $Ax = b$ 是否相容?
若方程组相容, 求其通解和最小范数解; 若方程组不相容, 求其最小范数的最小二乘解.

46. 证明线性方程组 $Ax = b$ 有解 $\iff$ $AA^\dagger b = b$. 这里 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$.

47. 判断矩阵方程 $AXB = C$ 是否有解, 有解时求其解, 其中

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

48. 相容方程组 $Ax=a$ 的通解 $x=A^\dagger a+(I-A^\dagger A)y(\forall y)$ 还可以表示为 $A^\dagger a+N(A)$ 的陪集形式. 证明:

(1) 这个表示是**正交表示**, 即向量 $A^\dagger b$ 与向量 $(I-A^\dagger A)y$ 正交, $\forall y$;

(2) 方程组 $Ax=a$ 与 $Bx=b$ 有公共解 $\iff$ $A^\dagger a-B^\dagger b\in N(A)+N(B)$;

(3) 设方程组 $Ax=a$ 与 $Bx=b$ 有公共解. 试用陪集形式表示其解.

49. 设 A,B,C,D 均为 n 阶矩阵, 且矩阵方程 $AX=B$ 与 $XC=D$ 均有解. 证明:

(1) 两个方程有公共解 $\iff$ $AD=BC$;

(2) 设两个方程有公共解. 试利用广义逆矩阵表示它们的公共通解.(提示: 可先研究齐次方程.)

50. 证明约束优化问题 $\min\{x^Tx\}, Ax=b$ 具有唯一解, 并求该解.

51. 证明约束优化问题 $\min\{\mathrm{tr}(X^TX)-2\mathrm{tr}(X)\}, XA=0$ 的解为 $\hat{X}=I-AA^\dagger$.

52. 设 U 与 W 是线性空间 V 的两个子空间, $\alpha,\beta\in V$. 设 $(\alpha+U)\cap(\beta+W)\neq\emptyset$. 证明:

(1) $(\alpha+U)\cap(\beta+W)=\alpha+P_U(P_U+P_W)^\dagger(\beta-\alpha)+(U\cap W)$;

(2) $(\alpha+U)\cap(\beta+W)=\alpha+(P_{U^\perp}+P_{W^\perp})^\dagger P_{W^\perp}(\beta-\alpha)+(U\cap W)$;

(3) $(\alpha+U)\cap(\beta+W)=\alpha+(I-P_WP_U)^\dagger P_{W^\perp}(\beta-\alpha)+(U\cap W)$.

(提示: 参考第二章习题 75.)