

## 第四章习题及参考解答

- 建议：1. 第 50 题往后属补充内容，不提供参考解答，不必布置。
2. 可不布置的题目：30 题的前两个（前两个矩阵的奇异值分解含无理数特征值）；35 题 (2) 用手算非常麻烦；37 题的存在性需要矩阵函数  $\log$ ；46 题的收敛性；
3. 有误需要改正的题目有：
- (1) 将 13 题 (3) 中的“变”改为“伸缩”并在最后加入“试求一个正方形使得其在该矩阵下的像仍是正方形；”
  - (2) 在 46 题中的“均”前加“的模”。

1. 判断下列矩阵能否酉对角化，如能，则求一个酉矩阵  $U$ ，使  $U^*AU$  为对角形：

$$(1) A = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}; (2) A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (3) A = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & i & i \end{pmatrix}.$$

解：(1)  $U = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ,  $U^*AU = \text{diag}(1, -1, -2)$ ;

(2)  $U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $U^*AU = \text{diag}(0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ;

(3) 非正规矩阵 ( $A^*A \neq AA^*$ ), 故不能酉对角化。

2. 证明正规矩阵与其共轭转置具有相同的化零空间。该结论一般地成立吗？

证明：设  $A\alpha = 0$ , 则  $\alpha^*A^*A\alpha = 0$ . 由于  $A$  正规, 故  $A^*A = AA^*$ , 故  $\alpha^*AA^*\alpha = 0$ , 即  $(A^*\alpha)A^*\alpha = 0$ , 从而  $A^*\alpha = 0$ , 因此  $N(A) \subset N(A^*)$ . 从而等号成立。

上述结论一般不成立。例如, 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $N(A) = \{(0, x)^T : x \in \mathbb{C}\}$

而  $N(A^T) = \{(x, )^T : x \in \mathbb{C}\}$ .

3. 证明两个正规矩阵相似的充要条件是特征多项式相同。

证明：必要性是显然的。现设正规矩阵  $A$  与  $B$  的特征多项式相同，则它们有相同的特征值，因此它们均酉相似于共同的对角矩阵，从而  $A$  与  $B$  彼此也相似。

4. 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 证明  $A$  为正规矩阵  $\iff A$  有  $n$  个两两正交的单位特征向量。

证明：充分性是显然的。现设  $A$  为正规矩阵，则存在酉矩阵  $U$  使得  $U^*AU = D$  为对角矩阵。于是  $AU = DU$ , 这表明  $U$  的列均为  $A$  的特征向量，这些列是两两正交的单位向量。

5. 设  $A$  是  $n$  阶正规矩阵,  $x$  是任意复数. 证明

- (1)  $A - xI$  也是正规矩阵；
- (2) 对于任何向量  $x$ , 向量  $Ax$  与  $A^*x$  的长度相同；
- (3)  $A$  的任一特征向量都是  $A^*$  的特征向量；
- (4)  $A$  的属于不同特征值的特征向量正交。

证明: (1) 设  $U^*AU = D$  是对角矩阵, 则  $U^*(A - xI)U = D - xI$  也是对角矩阵;

(2)  $(Ax)^*(Ax) = x^*A^*Ax = x^*AA^*x = (A^*x)^*(A^*x)$ , 故向量  $Ax$  与  $A^*x$  的长度平方相同;

(3) 设  $U^*AU = D$  为对角矩阵, 则  $U^*A^*U = D^*$  也是对角矩阵。故由  $A^*U = D^*U$  知  $U$  的每一列也是  $A^*$  的特征向量。

(4) 显然 (或由上题可得).

6. 设  $A$  是正规矩阵, 证明

(1)  $A$  是 Hermite 矩阵  $\iff A$  的特征值全为实数;

(2)  $A$  是酉阵  $\iff A$  的特征值的模都是 1;

(3)  $A$  是幂等阵  $\iff A$  的特征值只能是 0 与 1;

(4) 若  $A$  的全部特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则  $AA^*$  与  $A^*A$  的全部特征值为  $|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \dots, |\lambda_n|^2$ . 此结论对非正规矩阵成立吗?

证明: (1) 见第一章习题 20.

(2) 设  $U$  是酉矩阵且  $U^*AU = D$  是对角矩阵。由于酉矩阵的乘积仍是酉矩阵, 故  $A$  是酉矩阵当且仅当  $D$  是酉矩阵当且仅当  $D$  的对角元素的模均为 1 当且仅当  $A$  的特征值的模均为 1.

(3) 设  $U$  是酉矩阵且  $U^*AU = D$  是对角矩阵。故  $A$  是幂等矩阵当且仅当  $D$  是幂等矩阵当且仅当  $D$  的对角元素均为 1 或 0 当且仅当  $A$  的特征值均为 1 或 0.

(4) 设  $U$  是酉矩阵且  $U^*AU = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  是对角矩阵。则  $U^*A^*U = D^*$ , 故  $U^*AA^*U = (U^*AU)(U^*A^*U) = DD^* = \text{diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = U^*AA^*U$ .

此结论一般不成立. 例如设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值为 1, 3, 而设  $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值为  $(3 \pm \sqrt{5})/2$ .

7. 设  $A$  是正规矩阵, 证明

(1) 若  $A$  是幂等阵, 则  $A$  是 Hermite 矩阵;

(2) 若  $A^3 = A^2$ , 则  $A^2 = A$ ;

(3) 若  $A$  又是 Hermite 阵, 而且也是一个幂幺阵 (即  $A^k = I$ ), 则  $A$  是对合阵 (即  $A^2 = I$ ).

证明: 设  $U$  是酉矩阵且  $U^*AU = D$  是对角矩阵。

(1) 若  $A^2 = A$ , 由上题 (3) 知  $A$  的特征值只能是 0, 1, 特别  $A$  的特征值均为实数, 因此再由上题 (1) 可知  $A$  是 Hermite 矩阵.

(2) 此时  $D^3 = D^2$ , 因此  $D$  的对角元素均为 1 或 0, 故  $D^2 = D$ , 从而  $A^2 = A$ ;

(3) 此时  $A$  的特征值均为实数且只能是  $\pm 1$ , 因此  $D^2 = I$ , 从而  $A^2 = I$ .

8. 证明特征值的极大极小定理: 设  $A$  是 Hermite 矩阵, 其全部特征值为  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , 则:

$$\lambda_k = \min_{\substack{w_i \in \mathbb{C}^n \\ 1 \leq i \leq n-k}} \max_{\substack{0 \neq x \perp w_i \\ 1 \leq i \leq n-k}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{\substack{w_i \in \mathbb{C}^n \\ 1 \leq i \leq n-k}} \min_{\substack{0 \neq x \perp w_i \\ 1 \leq i \leq n-k}} \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

特别地,

$$\lambda_{\max} = \lambda_n = \max_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{x^*x=1} x^*Ax,$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \min_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{x^*x=1} x^*Ax.$$

证明：只证第一个等号。设  $U$  是酉矩阵且  $U^*AU = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  是实对角矩阵，则  $A = UDU^*$ 。若  $x \neq 0$ , 则

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{(U^*x)^*D(U^*x)}{x^*x} = \frac{(U^*x)^*D(U^*x)}{(U^*x)^*(U^*x)},$$

记  $U^*x = y$ , 则  $x \neq 0 \iff y \neq 0$ . 对给定的  $w_1, \dots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n$  有

$$\begin{aligned} \max_{\substack{0 \neq x \perp w_i \\ 1 \leq i \leq n-k}} \frac{x^*Ax}{x^*x} &= \max_{\substack{0 \neq y \perp U^*w_i \\ 1 \leq i \leq n-k}} \frac{y^*Ay}{y^*y} = \max_{\substack{y^*y=1, y \perp w_i \\ 1 \leq i \leq n-k}} \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2 \\ &\geq \max_{\substack{y^*y=1, y_1=y_2=\dots=y_{k-1}=0, \\ y \perp w_i, 1 \leq i \leq n-k}} \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2 = \max_{\substack{|y_k|^2+\dots+|y_n|^2=1, y \perp w_i \\ 1 \leq i \leq n-k}} \sum_{i=k}^n \lambda_i |y_i|^2 \geq \lambda_k. \end{aligned}$$

9. 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  是复矩阵,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $A$  的  $n$  个特征值. 证明

$$(1) (\textbf{Schur 不等式}) \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2;$$

$$(2) A \text{ 为正规矩阵} \iff \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

证明：(1) 由 Schur 酉三角化定理可知  $U^*AU = B$  是上三角矩阵, 故  $U^*AA^*U = BB^*$ . 从而  $AA^*$  与  $BB^*$  有相同的迹. 注意  $\text{tr}(AA^*) = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$ , 而  $BB^*$  的第  $i$  个对角元素为  $|b_{11}^2 + b_{22}^2 + \dots + b_{ii}^2|$ , 因此  $\text{tr}(BB^*) \geq |b_{11}^2 + b_{22}^2 + \dots + b_{nn}^2| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$ . 故

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$$

且等号成立当且仅当  $B$  是对角矩阵当且仅当  $A$  是正规矩阵, 即得 (2).

10. 直接证明实对称矩阵与 (实) 正交矩阵可以酉对角化, 从而均为正规矩阵.

证明：由线性代数知实对称矩阵可以正交对角化故可酉对角化。

设  $A$  是正交矩阵, 则存在酉矩阵  $U$  使得  $U^*AU = T$  是上三角矩阵, 但  $A$  也是酉矩阵, 从而  $T$  也是酉矩阵, 于是  $T$  只能是对角矩阵。

11. 设  $A$  是  $n$  阶实矩阵, 证明  $A$  是正规矩阵  $\iff$  存在正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T AQ = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_s$ , 其中每个  $A_i$  或者是 1 阶实矩阵, 或者是一个 Schur 型.

证明：由于每个 Schur 型均为正规矩阵, 故充分性是显然的。必要性。由实矩阵的三角

化定理 (见第三章习题 5) 可知存在正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T AQ = \begin{pmatrix} A_1 & & * & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix} = B$ , 其

中  $A_i, 1 \leq i \leq s$  是 1 阶实矩阵 (即  $A$  的一个实特征值),  $A_i, s+1 \leq i \leq n$  是一个 Schur 型 (对应  $A$  的一对非实数特征值, 其模长平方恰为该型的行列式). 设  $A$  是实正规矩阵,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为  $A$  的  $n$  个特征值. 则  $\text{tr}(BB^T) = \text{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^s |A_i|^2 + \sum_{i=s+1}^k |A_i| = \sum_{i=1}^k \text{tr}(A_i A_i^T)$ .

这迫使  $B$  是分块对角矩阵。

12. 证明: 如果 Hermite 阵或实对称矩阵  $A$  至少有  $k$  个特征值 (包括重数) 大于零, 则  $A$  在某一个  $k$  维子空间上正定。

证明: 设 Hermite 阵或实对称矩阵  $A$  至少有  $k$  个正特征值  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , 相应的线性无关的特征向量为  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 。于是  $\alpha_i^* A \alpha_i = \alpha_i^* (\lambda_i \alpha_i) = \lambda_i (\alpha_i^* \alpha_i) > 0$ , 即  $A$  在  $k$ -维子空间  $\text{Span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  上正定。

13. (1) 证明: 平面上的可逆线性变换  $\sigma$  是正规变换  $\iff \sigma$  将某个正方形伸缩为矩形 (因此非正规的可逆线性变换不可能将任何正方形伸缩为矩形) 或者将所有正方形均变为正方形;

(2) 计算 2 阶实正规矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  将哪些正方形变为了矩形?

(3) 证明矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  是非正规矩阵, 说明它不能将任何正方形伸缩为矩形; 试求一个正方形使得其在该矩阵下的像仍是正方形;

(4) 试给出 3 阶实正规矩阵的几何意义。

证明: (1) 必要性。设可逆线性变换  $\sigma$  是正规变换, 则或者  $\sigma$  有两个实特征值和两个正交的实单位特征向量, 因此由该二特征向量构成的正方形被  $\sigma$  变为矩形; 或者  $\sigma$  有一对非实的特征值, 此时  $\sigma$  正交相似于一个 Schur 型, 因此它是一个位似变换与一个正交变换的合成, 从而将每个正方形均变为正方形。

充分性。设  $\sigma$  是将某个正方形伸缩为矩形, 于是  $\sigma$  将一对正交向量  $\alpha_1, \beta_1$  伸缩为另一对正交向量  $\lambda_1 \alpha_1, \lambda_2 \beta_1$ . 由于  $\sigma$  可逆,  $\lambda_i \neq 0$ , 因此  $\sigma$  有 2 个正交的单位特征向量  $\alpha, \beta$ , 故  $\sigma$  是正规变换。如果  $\sigma$  是将所有正方形均变为正方形, 则  $\sigma$  将任意标准正交基  $\alpha, \beta$  变为一对等长的正交向量  $\sigma(\alpha), \sigma(\beta)$ . 故  $\sigma(\alpha, \beta) = (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)A$ , 其中矩阵  $A$  的两列等长且正交 (因为  $\sigma(\alpha)$  与  $\sigma(\beta)$  等长且正交), 于是  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, |A| = a^2 + b^2 \neq 0$ . 因此  $\sigma$  正交相似于 Schur 型  $A$ , 故为正规变换。

(2) 由 (1) 的证明可知, 该矩阵将所有正方形均变为正方形 (边长扩大为  $\sqrt{2}$  倍)。

(3) 非对角的三角矩阵均非正规矩阵, 故不可能将任何正方形伸缩为矩形。该矩阵将以向量  $(1, 3 + \sqrt{10})^T, (-3 - \sqrt{10}, 1)^T$  为邻边的正方形仍变为正方形  $(7 + 2\sqrt{10}, 9 + 3\sqrt{10})^T, (-1 - \sqrt{10}, 3)^T$ .

(4) 或者  $\sigma$  将某正方体伸缩为长方体, 或者  $\sigma$  将某平面  $\pi$  上的所有正方形仍变为  $\pi$  上的正方形而将一面在  $\pi$  上的所有正方体均变为长方体。

14. 设  $P, Q$  各为  $m$  阶及  $n$  阶方阵, 证明: 若  $m+n$  阶方阵  $A = \begin{pmatrix} P & B \\ 0 & Q \end{pmatrix}$  是酉矩阵, 则  $P, Q$  也酉矩阵, 且  $B$  是零矩阵。

证明: 设  $A$  是酉矩阵, 则其每列均为单位向量, 因此  $B = 0$ , 从而  $A$  是分块对角酉矩阵, 故每个对角块均为酉矩阵。

15. 证明 **Sylvester 惯性定律**, 即两个 Hermite 矩阵合同  $\iff$  它们具有相同的惯性指标, 即相同的正负特征值 (因此 0 特征值) 的个数。

证明: 必要性是显然的, 下证充分性。设两个 Hermite 矩阵  $A, B$  具有相同的惯性指标, 即相同的正负特征值, 于是 0 作为它们的特征值也有相同的重数 (0 不是特征值时重数为 0),

因此它们均合同于相同的对角矩阵  $I_p \oplus (-I_q) \oplus 0_{n-r}$ , 其中  $p, q$  分别是它们的正、负惯性指标,  $r = p + q$  为它们共同的秩. 由于合同关系是等价关系, 故  $A$  与  $B$  也合同.

16. 已知正交矩阵  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  表示一个旋转, 求其旋转轴与旋转角.

解: 由于

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1+\sqrt{3}i}{2})(\lambda - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}),$$

所以  $A$  在正交相似变换下的最简单形式为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

求出对应于特征值 1 的单位特征向量为  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ , 此即为旋转轴. 显然旋转角度为  $\frac{\pi}{3}$ .

17. 若  $3 \times 3$  矩阵  $S$  表示一个反射, 则存在一个正交矩阵  $C$ , 使得  $C^{-1}SC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

当  $S = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$  时, 求这样的矩阵  $C$ .

解: 可直接验证  $S$  是正交矩阵, 又是对称阵, 因而一定满足  $S^2 = E$ , 它的特征值只可能是  $\lambda = \pm 1$ , 又因为  $S$  有完全的正交特征向量组, 所以它是一个反射. 计算得  $C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $C^{-1}SC = \text{diag}(1, 1, -1)$ .

18. 求习题 1 中所有正规矩阵的谱分解.

解: (1)  $P = \begin{pmatrix} i & 1 & i \\ 2 & 0 & -1 \\ i & -1 & i \end{pmatrix}$ ,  $P^*AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ ;  
(2)  $P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ i & i & -i \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P^*AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -\sqrt{2} & \\ & & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

19. 证明谱分解定理 (定理 4.2.1) 中的唯一性.

证明: 设  $A$  为一个  $n$  阶可对角化矩阵,  $A$  的谱为  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ , 其中  $\lambda_i$  的重数为  $k_i$ . 需证明下述  $s$  个  $n$  阶矩阵  $P_1, \dots, P_s$  的唯一性, 其中  $P_i^2 = P_i$ ;  $P_i P_j = 0$  ( $i \neq j$ );  $\sum_{i=1}^s P_i = I$ ;  $r(P_i) = k_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ ;  $\sum_{i=1}^s k_i = n$ , 且  $A = \sum_{i=1}^s \lambda_i P_i$ .

这实际上是证明每个主幂等矩阵  $P_i = \alpha_{i1}\beta_{i1}^T + \alpha_{i2}\beta_{i2}^T + \dots + \alpha_{i,k_i}\beta_{i,k_i}^T$  与诸特征向量  $\alpha_{ij}$ ,  $1 \leq j \leq k_i$  (均属于特征值  $\lambda_i$ ) 的选取无关. 设  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) 是另一组满足条件的矩

阵，则

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i P_i = \sum_{i=1}^s \lambda_i Q_i$$

两端同时右乘  $Q_j$  得  $\sum_{i=1}^s \lambda_i (P_i Q_j) = \lambda_j Q_j$ ; 再左乘以  $P_i$  得  $\lambda_i P_i Q_j = \lambda_j P_i Q_j$ . 设  $i \neq j$ , 则因为  $\lambda_i \neq \lambda_j$  知  $P_i Q_j = 0$ . 再由  $\sum_{i=1}^s P_i = \sum_{i=1}^s Q_i$  两端 (左) 乘以  $P_i$  得  $P_i = P_i Q_i$ , 两端 (右) 乘以  $Q_i$  得  $P_i Q_i = Q_i$ , 故  $P_i = Q_i$ .

20. 设  $A$  的谱分解为  $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \alpha_i^*$ , 证明:

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \alpha_i \alpha_i^*$$

并写出其实数形式.

证明: 设  $\lambda_i$  是  $A$  的特征值,  $\alpha_i$  为相应的特征向量, 则  $A$  的逆  $A^{-1}$  的特征值  $\lambda_i^{-1}$  也有特征向量  $\alpha_i$ , 因此  $A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \alpha_i \alpha_i^*$  是  $A^{-1}$  的谱分解。

21. 设  $A = LU$ , 其中  $L$  与  $U$  分别为下三角矩阵与上三角矩阵, 证明存在单位下三角矩阵  $L'$  与上三角矩阵  $U'$  使得  $A = L'U'$ .

证明: 与三角分解的证明完全类似。(注意条件  $A = LU$  不可省略。) 22. 证明矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  不存在三角分解.

证明: 由三角分解存在性的证明可知, 一个非三角矩阵存在三角分解必须其前若干个顺序主子式非 0.

23. 证明 Cholesky 分解 (定理 4.3.2) 的唯一性.

证明: 设实正定矩阵  $A = GG^T = HH^T$ , 其中  $G, H$  是对角元素均为正的下三角矩阵。则  $H^{-1}G = H^T G^{-T}$ , 左端为下三角矩阵, 右端为上三角矩阵, 故两端均为对角矩阵, 且对角元素相等  $h_{ii}^{-1}g_{ii} = h_{ii}g_{ii}^{-1}$ 。由于对角元素均为正, 故  $h_{ii} = g_{ii}$ , 从而对角矩阵为单位矩阵, 即  $H = G$ 。

24. 试给出正定 Hermite 矩阵的 Cholesky 分解定理.

解:  $A = GG^*$ , 其中  $G$  是对角元素均为正的下三角矩阵。

25. 证明定理 4.3.3.

证明: 设  $A = LU$ , 则  $A$  的第  $i$  个顺序主子矩阵  $A_i$ (由前  $i$  行前  $i$  列构成) 恰好等于  $L_i U_i$ , 故  $|A_i| = |L_i||U_i| = |U_i| \neq 0$ . 因此  $A$  的所有顺序主子式均非 0. 反之, 若  $A$  的所有顺序主子式均非 0, 则可以施行 Gauss 消元法将  $A$  写成单位下三角矩阵与上三角矩阵的乘积。

由于要求  $L$  是单位下三角矩阵, 故唯一性是显然的。

26. 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times r}$ , 且  $A$  是列满秩的, 证明  $A = UR$ , 其中  $U \in \mathbb{C}^{n \times r}$  的  $r$  个列向量构成一组标准正交向量组,  $R \in \mathbb{C}^{r \times r}$  为对角线元素大于零的上三角矩阵. 此分解是唯一的.

证明: 对  $A$  施行标准正交化方法即可。唯一性是因为要求  $R$  的对角元素为正。

27. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

- (1) 求  $R(A)$  的标准正交基;
- (2) 写出  $A$  的 QR 分解;
- (3) 求  $Ax = b$  的最小二乘解;
- (4) 证明  $u_1 = (0, 1, 0)^T$ ,  $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ , 也是  $R(A)$  的标准正交基, 其中  $R(A)$  为  $A$  的列空间.

解: (1)  $R(A)$  的标准正交基  $\alpha_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T$ ,  $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}(-1, 4, -1)^T$ ;

$$(2) A = QR, Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix};$$

$$(3) x = R^{-1}Q^T b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(4) 直接验证即可。

28. 求下列矩阵的 QR 分解:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (2) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; (3) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解: (1)} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3} \end{pmatrix};$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

29. 设  $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . 证明矩阵分解引理:  $A^*A = B^*B \iff$  存在酉矩阵  $U$  使得  $B = UA$ .

证明: 充分性是显然的。下证必要性。设  $A$  与  $B$  的极分解分别为  $A = U_A P_A, B = U_B P_B$ , 其中  $U_X$  为列正交矩阵,  $P_X$  为半正定矩阵。如果  $A^*A = B^*B$ , 则  $P_A^*P_A = P_B^*P_B$ , 即  $P_A^2 = P_B^2$ . 由于两端皆为半正定矩阵, 故它们的平方根也相同, 即  $P_A = P_B = P$ . 则  $B = U_B P = U_B U_A^* U_A P = UA$ , 其中  $U = U_B U_A^*$ .

30. 计算 28 题中各矩阵的奇异值分解和相应的四个子空间.

解: (1) 由于  $A$  是实对称矩阵, 其奇异值分解可由正交对角化得到。 $A$  的特征多项式为  $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1$ . 属于特征值  $\lambda$ (三个均为无理数) 的特征向量为  $(1, \lambda^2 - 2, -\lambda^2 + \lambda + 2)^T$ , 单位化并注意奇异值是特征值的绝对值即可(因为必定正交);

(2)  $A$  的特征多项式为  $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 25\lambda + 64)$ . 两个特征值为无理数;

$$(3) \text{ 奇异值分解为 } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$N(A) = \{(0, 0)^T\}$ ;  $A$  的两列即是  $R(A)$  的一组基;  $R(A^T) = \mathbb{F}^2$ ;  $N(A^T) = \mathbb{F}(1, 1, -1)^T$ .

31. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 证明:

$$\sigma_{\min}(A) = \min\{(x^* A^* A x)^{1/2} : x^* x = 1\}, \quad \sigma_{\max}(A) = \max\{(x^* A^* A x)^{1/2} : x^* x = 1\}.$$

证明: 利用第 8 题矩阵特征值的极大极小原理即可。

32. 设变换  $\sigma: \sigma x = x - a(x, w)w$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , 其中  $w$  为长度为 1 的向量, 问  $a$  取何值时,  $\sigma$  为正交变换? 如果  $w$  是任意向量, 你的结论又如何?

解:  $a = 0, 2$ . 当  $w = 0$  时,  $a$  任意; 若  $w \neq 0$ , 则  $a = \frac{2}{w^2}$ .

33. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  的秩为  $r > 0$ ,  $A$  的奇异值分解为  $A = U \text{diag}(s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0) V^*$ , 求矩阵  $B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$  的奇异值分解.

$$\text{解: } B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U^*}{\sqrt{2}} & -\frac{U^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{U^*}{\sqrt{2}} & \frac{U^*}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V.$$

34. 研究单位圆  $S^1: x^2 + y^2 = 1$  在矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  作用下的变化. 求出其  $A$  作用下的最终轨迹方程.

解:  $x^2/8 + y^2/2 = 1$ .

35. (1) 证明矩阵的极分解的唯一性;

(2) 计算 Jordan 块  $J_n(\lambda)$  的极分解.

证明: (1) 设  $A = PU = QV$  是可逆  $A$  的两个极分解, 则  $P, Q$  为正定矩阵,  $U, V$  为酉矩阵. 则  $P^{-1}Q = UV^{-1}$ , 此式两端分别为正定矩阵与酉矩阵. 由于正定的酉矩阵只有单位矩阵, 故  $P = Q$ . 如果  $A$  不可逆, 则  $P, Q$  为半正定矩阵, 未必唯一。

(2) 可以上机实验。

36. 证明  $A$  与  $A^*$  具有相同的奇异值.

证明: 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  的秩为  $r$ , 则由 Sylvester 降幂公式知  $AA^*$  与  $A^*A$  有完全相同的非零特征值 (相同的按重数计算)  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2$ , 故  $A$  与  $A^*$  均有非零奇异值  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ .

37. 证明任意  $n$  阶矩阵  $A$  均可表示成  $A = Pe^{iH}$ , 其中  $P$  是半正定矩阵,  $H$  是 Hermite 矩阵. 研究这种分解的唯一性.

解: 直接验证可知, 若  $H$  是 Hermite 矩阵, 则  $e^{iH}$  是酉矩阵. 故只需证明每个酉矩阵  $U$  必是  $e^{iH}$  此种形式即可. (需要矩阵函数  $\log$ .)

38. 设  $A = PU$  是矩阵  $A$  的极分解, 证明  $A$  是正规矩阵  $\iff PU = UP$ .

证明: 充分性. 设  $PU = UP$ . 则  $U^*P^* = P^*U^*$ . 因为  $A^* = U^*P^*$ , 所以  $AA^* = PP^* =$

$$P^2, A^*A = U^*P^*PU = P^*U^*UP = P^*P = P^2.$$

必要性。设  $A$  是正规矩阵，则  $AA^* = P^2 = U^*P^2U$ . 由于半正定矩阵  $P^2$  的半正定平方根为  $P$ ，半正定矩阵  $U^*P^2U$  的半正定平方根为  $U^*PU$ ，而平方根唯一，故  $P = U^*PU$ .

39. 试对任意矩阵定义其极分解，并由此计算任意向量  $x \in \mathbb{C}^n$  的极分解.

解：设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, m \leq n$ . 则存在唯一的半正定矩阵  $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$  以及行正交矩阵  $U \in \mathbb{C}^{m \times n}$ (即  $UU^* = I$ ) 使得  $A = PU$ .

若  $x = 0$ , 则  $x = 0e_1$ . 若  $x \neq 0$ , 则  $x = \|x\|(\frac{x}{\|x\|})$ .

40. 证明正规矩阵的奇异值是其特征值的模.

证明：将正规矩阵  $A$  西对角化可得  $A = U^*\Lambda U$ , 其中  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  是由  $A$  的特征值按模长大小排列的对角矩阵。令  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ , 其中若  $\lambda_i = 0$ , 则  $d_i = 1$ , 否则  $d_i = \bar{\lambda}_i/|\lambda_i|$ . 则  $D^*D = I, A = U^*D^*(D\Lambda)U$ . 令  $V = DU, \sum = D\Lambda$ , 即得  $A$  的奇异值分解  $A = V^*\sum U$ .

41. 设  $A = UDV^*$  是  $m \times n$  矩阵  $A$  的一个奇异值分解,  $r = r(A)$ , 证明

- (1) 西矩阵  $U$  的前  $r$  列是  $A$  的列空间的一组标准正交基;
- (2) 西矩阵  $V$  的前  $r$  列是  $A$  的行空间的一组标准正交基;
- (3)  $U$  的后  $m - r$  列是  $A^*$  的零空间的一组标准正交基;
- (4)  $V$  的后  $n - r$  列是  $A$  的零空间的一组标准正交基.

并由此计算  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  的四个子空间.

证明：由  $V$  与  $U$  的构成即得。

(4)  $R(A)$  的一组基为  $A$  的任何两列;  $N(A)$  的一组基为  $(1, 0, 1)^T$ ;  $R(A^T)$  的一组基为  $A$  的任何两行;  $N(A^T)$  的一组基为  $(1, 1, -1)^T$ .

42. 设  $\lambda$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的一个特征值, 证明  $\sigma_{\max}(A) \geq |\lambda| \geq \sigma_{\min}(A)$ . 换言之, 矩阵的最大奇异值与最小奇异值是其特征值的模的上下界.

证明：对  $Jordan$  块证明即可。

43. 设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, r = r(A), \sigma_i (1 \leq i \leq r)$  是  $A$  的非零奇异值. 证明  $\text{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$ .

证明：由  $A = U^*DV$  即得  $A^*A = V^*D^2V$ , 因此  $\sigma_i^2 (1 \leq i \leq r)$  恰好是  $A^*A$  的所有非零特征值，故  $\text{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2$ .

44. 设  $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ , 且  $x^*y = \alpha^*\beta = 0$ . 设  $A = x\alpha^* + y\beta^*$ , 求  $A$  的 F- 范数.

解： $\|A\|_F = \|x\|^2\|\alpha\|^2 + \|y\|^2\|\beta\|^2$ .

45. 证明矩阵  $A$  可以对角化  $\iff$  存在 Hermite 正定矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP$  是正规矩阵.

证明：充分性是显然的。必要性。设  $A$  可以对角化，即存在可逆矩阵  $Q$  使得  $Q^{-1}AQ = D$  是对角矩阵。由于  $Q$  可逆，故其极分解  $Q = PU$  中的矩阵  $P$  正定，即  $U^{-1}(P^{-1}AP)U = D$ , 因此  $P^{-1}AP$  是正规矩阵.

46. 设  $A = A_0 = Q_0R_0$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的  $QR$  分解. 归纳地定义  $A_{m+1} = R_mQ_m$ . 证明每个矩阵  $A_i$  均与  $A = A_0$  西相似，并且当  $A$  的特征值的模均不相同时，矩阵序

列  $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$  收敛于一个与  $A$  酉相似的上三角矩阵。如果  $A$  有重特征值，此结论还成立吗？

证明：由于  $A_m = Q_m R_m$  是  $A_m$  的正交三角分解，故  $R_m = Q_m^{-1} A_m$ ，所以  $A_{m+1} = R_m Q_m = Q_m^{-1} A_m Q_m$  与  $A_m$  酉相似，因此矩阵序列  $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$  中的所有矩阵均酉相似。

一般不成立，如矩阵  $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ 。

47. 研究正交三角分解，谱分解，极分解和奇异值分解之间的关系。

解：略。

48. 仔细研究例 4.6.3 的计算与证明（参考下题），再求第二章第 9 题中的两个子空间的交。

解：见第二章第 9 题的参考答案。

49. 设  $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . 证明:  $x \in N(A) \cap N(B) \iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0$ .

证明：显然。

50. 证明奇异值的极大极小定理：设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  的奇异值为  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ ，则：

$$\sigma_k = \min_{\substack{w_i \in \mathbb{C}^n \\ 1 \leq i \leq n-k}} \max_{\substack{0 \neq x \perp w_i \\ 1 \leq i \leq n-k}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\substack{w_i \in \mathbb{C}^n \\ 1 \leq i \leq n-k}} \min_{\substack{0 \neq x \perp w_i \\ 1 \leq i \leq n-k}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

特别地，

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \max_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x^* x = 1} \|Ax\|_2,$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_n = \min_{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \min_{x^* x = 1} \|Ax\|_2.$$

51. 证明：对任意同阶矩阵  $A, B$  均有  $\sigma_{\max}(A + B) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(B)$ 。

52. (矩阵的低秩近似) 设矩阵  $A_{m \times n}$  的秩为  $r$ ，其奇异值分解为  $A = UDV^*$ ,  $U = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $V = (v_1, \dots, v_n)$ . 对任意  $k < r$ , 定义矩阵

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^*, k < r.$$

证明：

$$\min_{r(B)=k} \|A - B\|_1 = \|A - A_k\|_1 = \sigma_{k+1}, k < r$$

以及

$$\min_{r(B)=k} \|A - B\|_F^2 = \|A - A_k\|_F^2 = \sigma_{k+1}^2 + \sigma_{k+2}^2 + \dots + \sigma_r^2.$$

53. 利用上题的结果，证明利用截尾奇异值分解压缩数据的合理性。

54. (同时奇异值分解) 设  $A, B$  是两个  $m \times n$  矩阵。证明存在酉矩阵  $U, V$  以及非负对角矩阵  $D, \Lambda$  使得  $A = UDV^*$ ,  $B = U\Lambda V^* \iff A^*B$  与  $AB^*$  均是正规矩阵。该结论对三个或更多的矩阵成立吗？