第五章习题参考解答

注：1. 48-54 题无解答.

2. 13 题应与 16 题对调;

3. 61 题的 α 应为 a;

1. 设 $\|\cdot\|$ 是酉空间 $\mathbb{C}^n$ 的向量范数, 证明向量范数的下列基本性质:
(1) 零向量的范数为零;
(2) 当 x 是非零向量时: $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|=1$;
(3) $\|-x\|=\|x\|$;
(4) $|\,\|x\|-\|y\|\,|\le\|x-y\|$.

证明：(1) $\|0\|=\|0x\|=0\|x\|=0$;
(2) $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|=\dfrac{1}{\|x\|}\|x\|=1$;
(3) $\|-x\|=|-1|\|x\|=\|x\|$;
(4) $\|x\|\le\|x-y\|+\|y\|, \|y\|\le\|x-y\|+\|x\|$.

2. 证明: 若 $x\in\mathbb{C}^n$, 则
(1) $\|x\|_2\le\|x\|_1\le\sqrt{n}\|x\|_2$; (2) $\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty$; (3) $\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\sqrt{n}\|x\|_\infty$.

证明：设 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T, a=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$. 则
(1) $\|x\|_2=(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)^{1/2}\le|x_1|+\cdots+|x_n|=\|x\|_1\le(na)^{1/2}=\sqrt{n}\|x\|_2$;
(2) $\|x\|_\infty=a\le\|x\|_1\le na=n\|x\|_\infty$;
(3) $\|x\|_\infty=a\le\|x\|_2\le\sqrt{n}a=\sqrt{n}\|x\|_\infty$.

3. (1) 试构造 $\mathbb{R}^2$ 上的一个向量范数, 使得该范数不是任何 p- 范数;
(2) 画出你构造的范数的单位圆;
(3) 试对 $\mathbb{R}^3$ 做 (1) 与 (2), 并比较你的单位球与1- 范数和 ∞- 范数的单位球;
(4) 证明当 $0<p<1$ 时, l_p 范数仍然满足向量范数的前两个条件, 但不满足三角不等式. 在平面上画出 $p=1/2, 3/2$ 时的单位圆, 并就 $p<1$ 与 $p\ge 1$ 的一般情形作比较.

证明：(1) 给某 p- 范数乘以某正数;
(2) 略;
(3) 略;
(4) 范数的正定性条件与齐次性条件显然与数 p 无关. 以 $n=2, p=1/2$ 为例，并设 $x_i, y_i\ge 0$. 由于 $|(x_1+y_1)^{1/2}+(x_2+y_2)^{1/2}|^2=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+2[(x_1+y_1)(x_2+y_2)]^{1/2}\ge(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+2[(x_1x_2)^{1/2}+(y_1y_2)^{1/2}]=[(x_1^{1/2}+x_2)^{1/2}+(y_1^{1/2}+y_2)^{1/2}]^2$.

4. 证明 Minkowski 不等式 (5.1.1).

证明：略。

5. (1) 证明由内积诱导的向量范数满足**平行四边形恒等式**或**极化恒等式**

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

(2) 解释上式的意义;

(3) 证明: 如果一个向量范数满足平行四边形恒等式, 则该范数一定是由某内积诱导的范数;

(4) 由 (3) 的结论判断哪些 l_p 范数是由内积诱导的, 并给出一个由内积诱导的新范数.

证明：为方便起见，设内积空间为欧氏空间.

(1) 设 $\|\bullet\|$ 是由内积 $(\bullet,\bullet)$ 诱导的范数，则

$$\|x\pm y\|^2=(x\pm y,x\pm y)=(x,x)\pm 2(x,y)+(y,y).$$

由于 $\|x\|^2=(x,x)$, 故等号成立；

(2) 上式的几何意义是：平行四边形两条对角线的平方和等于四边的平方和；

(3) 令 $(x,y)=\frac{1}{2}[\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2]$. 下证这是一个内积. 对称性与正定性是显然的. 注意 $(x,x)=\|x\|^2$. 于是 $4(x,y)+4(z,y)=2[\|x+y\|^2+\|z+y\|^2-\|x\|^2-\|z\|^2-2\|y\|^2]=\|x+2y+z\|^2-\|x+z\|^2-4\|y\|^2=4(x+z,y)$, 即得可加性.

为证齐次性，首先利用可加性知道对任何整数 n 有 $(nx,y)=n(x,y)$，进而对任何有理数 q 有 $(qx,y)=q(x,y)$. 最后令 $f(t)=t^2\|x\|^2+2t(x,y)+\|y\|^2$, 其中 $t\in\mathbb{R}$. 由上面的证明可知，如果 t 是有理数，则 $f(t)=\|tx+y\|^2$. 注意 $f(t)$ 是 $t\in\mathbb{R}$ 的连续函数而有理数在实数集中稠密, 所以对所有 $t\in\mathbb{R},f(t)\geq 0$. 因此其判别式 ≤ 0, 故 $|(x,y)|\leq\|x\|^2\|y\|^2$. 因此，对取定的 $a\in\mathbb{R}$ 以及任意的 $b\in\mathbb{Q}$，有 $|(ax,y)-a(x,y)|=|((a-b)x,y)+(b-a)(x,y)|\leq|((a-b)x,y)|+|(b-a)(x,y)|\leq 2|a-b|\|x\|^2\|y\|^2$. 由于对任意给定的 $\varepsilon>0$, 总存在 $b\in\mathbb{Q}$ 使得 $|a-b|<\varepsilon$, 因此上式意味着 $|(ax,y)-a(x,y)|$ 可以任意小, 故它们必相等.

(4) 仅有 l_2 范数.

6. 验证例 5.1.4.

证明：易，略。

7. 证明命题 5.1.1 中的正定性与齐次性.

证明：齐次性是显然的。设 $\|x\|_\beta=\|Ax\|_\alpha=0$. 由于 $\|\bullet\|_\alpha$ 是向量范数，故 $Ax=0$. 但 A 列满秩，故 $x=0$，即得正定性。

8. 证明命题 5.1.3.

证明：必要性由范数等价的定义可直接得到。反过来，如果对任意非零向量 v, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-v\|_\alpha=0\iff\lim_{n\to\infty}\|x_n-v\|_\beta=0,$$

则存在 $C_1>0$ 满足条件 $\|x_n\|_\alpha\leq C_1\|v\|_\beta$ 以及

$$\lim_{n\to\infty}\|\frac{x_n}{\|v\|_\beta}-\frac{v}{\|v\|_\beta}\|_\alpha=0\iff\lim_{n\to\infty}\|\frac{x_n}{\|v\|_\beta}-\frac{v}{\|v\|_\beta}\|_\beta=0,$$

因此 $\frac{\|v\|_\alpha}{\|v\|_\beta}\leq C_1$.

类似地可证存在 $C_2>0$，使得 $\frac{\|v\|_\beta}{\|v\|_\alpha}\leq C_2$.

9. 证明例 5.1.8 中的两个范数不等价.

证明：由定义直接计算可得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_1=0,\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_\infty=1.$$

10. 证明赋范线性空间中的单位球均为凸集, 即若 x, y 属于单位球, 则 $\alpha x+\beta y$ 也属于单位球, 其中 α, β 为正数且 $\alpha+\beta=1$. 对照习题5, 解释这种现象.

证明：设 $\|x\|=\|y\|=1, \alpha+\beta=1, \alpha\geq 0, \beta\geq 0$, 则 $\|\alpha x+\beta y\|\leq \alpha\|x\|+\beta\|y\|=1$, 即 $\alpha x+\beta y$ 也属于单位球. 这表明，单位球的凸性是由范数的三角不等式保证的.

11. 验证矩阵的极大列和范数与极大行和范数均满足次乘性.

证明：仅就极大列和范数验证次乘性。设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$，则

$$\|AB\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}|\leq(\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|)(\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n|b_{ij}|)=\|A\|_1\|B\|_1.$$

12. 设矩阵 A 的F- 范数等于 a, U 是酉矩阵, 问 AU 与 UA 的F- 范数各是多少? 请总结你的计算.

解：均为 a. 矩阵的 F- 范数在 U 变换下不变.

13. 证明矩阵的1- 范数, 2- 范数和 ∞- 范数分别是向量的1- 范数, 2- 范数和 ∞- 范数的诱导范数 (因此与之相容).

证明：设 $A=(a_{ij}), x=(x_1,\cdots,x_n)^T\neq 0, e_i$ 是第 i 个标准单位向量.

(1) 1- 范数:

$$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^n|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j|\leq\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\,|x_j|=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n|a_{ij}|\,|x_j|\leq(\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|)\sum_{j=1}^n|x_j|=\|A\|_1\|x\|_1.$$

故 $\|A\|_1\geq\max\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$. 另一方面，易知 $\|Ae_i\|_1$ 恰好是 A 的第 i 列的绝对值的和, 因此 $\|A\|_1\leq\max\limits_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$.

(2) 2- 范数即谱范数 (定义为 $\|A\|_2=\max\limits_{\lambda\in\sigma(A^*A)}\sqrt{\lambda}$ 即 $\|A\|_2=A$ 的最大奇异值 σ_{max}, 见 16 题):

显然有 $\|Ax\|_2^2=x^*A^*Ax$. 但 A^*A 的最大特征值恰好是函数 x^*A^*Ax 在单位球面上的极大值，因此 $\|\frac{Ax}{\|x\|}\|_2^2=\frac{x^*A^*Ax}{\|x\|_2^2}\leq\|A\|_2^2$. 反之，设 α 是属于 A^*A 的最大特征值 σ_{max} 的特征向量，则有 $\alpha^*A^*A\alpha=\sigma_{max}\alpha^*\alpha$, 故 $\|\frac{Ax}{\|x\|}\|_2^2\geq\frac{\alpha^*A^*A\alpha}{\alpha^*\alpha}=\sigma_{max}=\|A\|_2^2$.

(3) ∞- 范数: 与 1- 范数类似，略。

14. 证明: (1) 矩阵仿照向量的1- 范数是矩阵范数, 但与向量的1- 范数不相容, 试求与其相容的向量范数;

(2) 矩阵仿照向量的 ∞- 范数是向量范数但不是矩阵范数.

证明：(1) 记矩阵 A 仿照向量的1- 范数为 $\|A\|=\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}|$. 则 $\|AB\|=\sum_{i,j=1}^n|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}|\leq\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{ik}||b_{kj}|=(\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}|)(\sum_{i,j=1}^n|b_{ij}|)=\|A\|\|B\|$, 即得次乘性.

与该范数相容的向量范数为 1- 范数的 n 倍，即 $\|x\|=n\|x\|_1=n(\sum_{i=1}^n|x_i|$.

(2) 记矩阵 A 仿照向量的 ∞- 范数为 $\|A\|=\max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$. 取 $A=J$ 为 2 阶全 1 矩阵 (元素均为 1)，则 $\|A^2\|=2>1=\|A\|^2$，故不满足次乘性。

15. 证明公式 (5.1.12).

证明：因为 $x\neq 0$, 故 $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\|A\frac{x}{\|x\|}\|$，由于 $\frac{x}{\|x\|}$ 的范数为 1，即得所需。

16. (1) 证明 $\|A\|_2=(\rho(A^*A))^{1/2}$ 定义了一个矩阵范数, 称为 A 的**谱范数**;

(2) 试求一个与矩阵的谱范数相容的向量范数;

(3) 证明若 A 是正规矩阵, 则 A 的谱范数就是其谱半径 $\rho(A)$;

(4) 设 V 是由全体Hermite矩阵构成的复线性空间, 证明谱半径给出 V 上的一个向量范数. 该范数是矩阵范数吗?

证明：(1), (2) 与 (3) 参见第 13 题；

(4) 由于Hermite矩阵是正规矩阵，故由 (2) 可知谱半径给出 V 上的一个向量范数. 由谱半径给出的向量范数不是矩阵范数：设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $\rho(AB)=2>1=\rho(A)\rho(B)$. 即使限定在Hermite矩阵范围内，也不满足次乘性，比如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=B$, 则 $\rho(AB)=3>\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\rho(A)\rho(B)$.

17. 试构造两种矩阵范数使得一个矩阵 A 的两种范数分别为2与 1/3. 能否使所有非零矩阵的两种范数之积等于1?

解：第一种范数取为 1- 范数，第二种取为 1- 范数的 1/6，则矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ 满足条件. 不存在两种范数使得所有非零矩阵的两种范数之积等于1：否则，任何非零矩阵的第二种矩阵范数将等于第一种的倒数，故齐次性将不被满足。

18. (1) 证明向量范数的代数性质: 有限种向量范数的任意正线性组合仍是向量范数;

(2) 设 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$ 是两种向量范数或矩阵范数, $p>0$. 判断

$$[(\|\cdot\|_\alpha)^p+(\|\cdot\|_\beta)^p]^{1/p}$$

是否为向量范数或矩阵范数?

(3) 判断矩阵范数是否有与向量范数相同的代数性质 (1)?

证明：(1) 设 $\|\cdot\|_i, i=1,2,\cdots,n$ 是有限种向量范数, 而

$$\|\cdot\|=\sum_{i=1}^n a_i\|\cdot\|_i, a_i>0.$$

$\|\cdot\|$ 的正定性与齐次性是显然的。故只需证明三角不等式：

$$\|x+y\|=\sum_{i=1}^n a_i\|x+y\|_i\le\sum_{i=1}^n a_i(\|x\|_i+\|y\|_i)=\sum_{i=1}^n a_i\|x\|_i+\sum_{i=1}^n a_i\|y\|_i=\|x\|+\|y\|.$$

(2) 记 $\|\cdot\|=[(\|\cdot\|_\alpha)^p+(\|\cdot\|_\beta)^p]^{1/p}$. 则 $\|\cdot\|$ 显然是正定的与齐次的。下面证明三角不等式：

$$(\|x+y\|)^p = (\|x+y\|_\alpha)^p + (\|x+y\|_\beta)^p \le (\|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha)^p + (\|x\|_\beta + \|y\|_\beta)^p$$
$$\le \left[\left(\|x\|_\alpha^p + \|x\|_\beta^p\right)^{1/p} + \left(\|y\|_\alpha^p + \|y\|_\beta^p\right)^{1/p}\right]^p = (\|x\| + \|y\|)^p.$$
所以 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

(3) 由于矩阵范数是向量范数，故只需考察次乘性：易知此条一般不成立。例如：在本题 (1) 的证明中取 $a_i = \frac{\|I\|_i}{2n}$, 则 $\|I\| = \sum_{i=1}^n a_i \|I\|_i = 0.5$，而我们知道单位矩阵的任何矩阵范数均不小于 1.

19. 利用特征值的定义直接证明矩阵 A 的谱半径不超过矩阵 A 的任何一种矩阵范数. 此结论可以换成矩阵的任何一种向量范数吗?

证明：(1) 设 $\|\!|\cdot|\!\|$ 是任何一种矩阵范数，$\|\cdot\|$ 是与其相容的一种向量范数. 设 λ 是 A 的一个特征值，α 是 λ 的特征向量。则 $\|\!|A|\!\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ge \frac{\|A\alpha\|}{\|\alpha\|} = \lambda$.

(2) 不能。存在向量范数，使得矩阵 A 的向量范数任意小.

20. 证明公式 (5.1.13) 定义了一个与矩阵范数 $\|\!|\cdot|\!\|$ 相容的向量范数.

证明：直接验证即可。

21. 设 T 为正交矩阵, 又 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 证明:
(1) $\|\!|T|\!\|_2 = 1$;
(2) $\|\!|A|\!\|_2 = \|\!|TA|\!\|_2$;
(3) 试解释上面的两个结果.

证明：直接验证即可得 (1) 与 (2).

(3) 正交矩阵的 2- 范数为 1 反映了正交变换保持长度这一特征；(2) 表明矩阵的 2- 范数在正交变换下不变。

22. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 其中 A 可逆而 B 不可逆, 设 $\|\!|\cdot|\!\|$ 是任何一种矩阵范数. 定义 A 的条件数 $Cond(A) = \|\!|A|\!\|\|\!|A^{-1}|\!\|$. 证明: $\|\!|A-B|\!\| \ge 1/\|\!|A^{-1}|\!\|$. 解释这个结果.

证明：$A^{-1}(A-B) = I - A^{-1}B$. 由于 $A^{-1}B$ 是奇异矩阵，故 1 是 $I - A^{-1}B$ 的一个特征值，因此 $\|\!|I - A^{-1}B|\!\| \ge 1$. 从而 $\|\!|A^{-1}|\!\|\|\!|(A-B)|\!\| \ge \|\!|A^{-1}(A-B)|\!\| \ge 1$.

上述不等式可改写为 $\|\!|A-B|\!\| \ge \|\!|A|\!\|/Cond(A)$. 由于 $Cond(A) = \|\!|A|\!\|\|\!|A^{-1}|\!\| \ge \|\!|AA^{-1}|\!\| \ge 1$, 故该不等式表明存在与可逆矩阵 A“最接近”的奇异矩阵，因此用奇异矩阵逼近可逆矩阵是可能的。

23. (奇异值与矩阵的范数) 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 是 A 的全部奇异值. 证明:
(1) $Cond(A) = \sigma_1(A)/\sigma_n(A)$, 其中 $\sigma_1(A)$ 与 $\sigma_n(A)$ 分别是 A 的最大和最小奇异值.(参考第四章例 4.5.5.)
(2) $\|\!|A|\!\|_F = \left(\sum_{i=1}^r \sigma_i^2\right)^{1/2} = (\mathrm{tr}(A^*A))^{1/2}$;
(3) $\|\!|A|\!\|_2 = \sigma_{\max}(A)$.

24. (1) 证明定理 5.1.3;
(2) 设 U, V 是任意赋范线性空间 (不必有限维), $\sigma \in \mathrm{Hom}(U, V)$. 证明: σ 连续 $\iff$ σ 有界.

25. 证明引理 5.2.1 与定理 5.2.1.

26. 设 $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & \frac{k^2+k}{k^2+1} \\ 2 & (1-\frac{2}{k})^k \end{pmatrix}$, 求 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k$.

、解：$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & e^{-2} \end{pmatrix}$.

27. 设 $\lim_{k\to\infty} A_k = A$.
(1) 如果 A_k 均为正定矩阵, 问 A 有何特点?
(2) 如果 A_k 均为正规矩阵, 问 A 有何特点?
(3) 如果 A_k 均为可逆矩阵, 问 A 有何特点?

解：(1) A 半正定；

(2) A 也正规；

(3) A 未必可逆。

28. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = B$, 则 B 为幂等矩阵.

证明：$B^2 = \left[\lim\limits_{n\to\infty} A^n\right]^2 = \lim\limits_{n\to\infty} A^{2n} = B$.

29. 证明命题 5.2.1.

30. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2^k}$.

解：$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

31. 设 $A = \begin{pmatrix} -0.6 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$. 试判断 A 是否幂收敛.

解：幂收敛.

32. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, 求 $e^A,\ \sin A,\ \cos A$;

(2) 已知 $J = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$, 求 $e^J,\ \sin J,\ \cos J$.

解：(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2} & e^{-2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2 & -\sin 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2 & \cos 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} e^{-2} & & & \\ & e & e & \\ & & e & \\ & & & e^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sin 2 & & & \\ & \sin 1 & \cos 1 & \\ & & \sin 1 & \\ & & & \sin 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos 2 & & & \\ & \cos 1 & -\sin 1 & \\ & & \cos 1 & \\ & & & \cos 2 \end{pmatrix}$.

33. (1) 证明定理 5.3.1;
(2) 利用 (1) 求第四章习题 1 中所有正规矩阵的指数函数, 正弦函数和余弦函数.

证明：(1) 因为 A 是单纯矩阵，故 $f(A)$ 也是单纯矩阵。又注意属于 $f(A)$ 的特征值 $f(\lambda)$ 的特征向量与属于 A 的特征值 λ 的特征向量一致，故 $f(A)$ 的谱分解的主幂等矩阵 P_i 与 A 的谱分解中的主幂等矩阵一致，即得定理。(2) 前两个矩阵是正规矩阵，设 $f(t)=e^t, \sin t, \cos t$, 则 $f(At)=Uf(Dt)U^*$. 故得

(i) $f(At)=U\mathrm{diag}\,(f(t), f(-t), f(-2t))U^*=$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} f(t)+3f(-t)+2f(-2t) & 2\mathrm{i}f(t)-\mathrm{i}f(-2t) & f(t)-3f(-t)+2f(-2t) \\ -2\mathrm{i}f(t)+2\mathrm{i}f(-2t) & 4f(t)+2f(-2t) & -2\mathrm{i}f(t)+\mathrm{i}f(-2t) \\ f(t)-3f(-t)+2f(-2t) & 2\mathrm{i}f(t)-2\mathrm{i}f(-2t) & f(t)+3f(-t)+2f(-2t) \end{pmatrix}.$$

(ii) $f(At)=U\mathrm{diag}\,(f(0), f(-\sqrt{2}t), f(\sqrt{2}t))U^*=$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2f(-\sqrt{2}t)+2f(\sqrt{2}t) & -\sqrt{2}\,\mathrm{i}f(-\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\,\mathrm{i}f(\sqrt{2}t) & -\sqrt{2}f(-\sqrt{2}t)+\sqrt{2}f(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}\,\mathrm{i}f(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\,\mathrm{i}f(\sqrt{2}t) & 2f(0)+\sqrt{2}f(-\sqrt{2}t)+\sqrt{2}f(\sqrt{2}t) & 2f(0)-\sqrt{2}\,\mathrm{i}f(-\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\,\mathrm{i}f(\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2}f(-\sqrt{2}t)+\sqrt{2}f(\sqrt{2}t) & -2\mathrm{i}f(0)+\mathrm{i}f(-\sqrt{2}t)+\mathrm{i}f(\sqrt{2}t) & 2f(0)+f(-\sqrt{2}t)+f(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

34. 证明命题 5.3.3 与命题 5.3.4(2).

证明：利用 e^A 的定义直接验证即可得命题 5.3.3；利用 $\frac{\mathrm{d}e^{At}}{\mathrm{d}t}=Ae^{At}$ 以及指数函数与三角函数的关系可得命题 5.3.4(2).

35. 对下列方阵 A, 求矩阵函数 e^{At}:

$$(1)\, A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},\quad (2)\, A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix},\quad (3)\, A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

解：(1) $\begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}+\frac{e^{3t}}{2} & -\frac{5}{6}e^t+\frac{11}{15}e^{-2t}+\frac{e^{3t}}{10} & \frac{e^t}{3}-\frac{11}{15}e^{-2t}+\frac{2}{5}e^{3t} \\ -\frac{e^t}{2}+\frac{e^{3t}}{2} & \frac{5}{6}e^t+\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{e^{3t}}{10} & -\frac{e^t}{3}-\frac{1}{15}e^{-2t}+\frac{2}{5}e^{3t} \\ -\frac{e^t}{2}+\frac{e^{3t}}{2} & \frac{5}{6}e^t-\frac{14}{15}e^{-2t}+\frac{e^{3t}}{10} & -\frac{e^t}{3}+\frac{14}{15}e^{-2t}+\frac{2}{5}e^{3t} \end{pmatrix}$;

(2) $e^{-2t}\begin{pmatrix} 2t^2+2t+1 & 2(t+1) & \frac{1}{2}t^2 \\ -4t^2 & -4t^2+2t+1 & -t^2-t \\ 8t(t-5) & 4t(2t-3) & 2t^2-12t+1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} e^{-2t} & -5e^{-2t}+6te^{-2t}+5e^{-3t} & e^{-2t}+3te^{-2t} \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 2e^{-2t}-2e^{-3t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$.

36. 求下列两类矩阵的矩阵函数: $\cos A$, $\sin A$, e^A:
(1)A 为幂等矩阵;
(2)A 为对合矩阵 (即 $A^2=I$).

解：(1) $I+(\cos 1-1)A$, $(\sin 1)A$, $I+(e-1)A$;
(2) $(\cos 1)I$, $(\sin 1)I$, eI.

37. 设函数矩阵 $A(t)=\begin{pmatrix} \sin t & \cos t & t \\ \frac{\sin t}{t} & e^t & t^2 \\ 1 & 0 & t^3 \end{pmatrix}$, 其中 $t\neq 0$. 计算 $\lim\limits_{t\to 0}A(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}A(t)$.

解：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 1 \\ \frac{t\cos t-\sin t}{t^2} & e^t & 2t \\ 0 & 0 & 3t^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t & 0 \\ (2-t^2)\sin t - 2t\cos t & e^t & 2 \\ 0 & 0 & 6t \end{pmatrix}$.

38. 设函数矩阵 $A(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^t & t^2 \\ e^{-t} & 2e^{2t} & 0 \\ 3t & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 $\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{t^2} A(s)\,\mathrm{d}s$.

解：$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^2-1) & 1 & \frac{1}{3} \\ 1-e^{-1} & e^2-1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $2t\begin{pmatrix} e^{2t^2} & t^2e^{t^2} & t^4 \\ e^{-t^2} & 2e^{2t^2} & 0 \\ 3t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

39. 证明: (1) 若 A 为实反对称矩阵, 则 e^A 为正交矩阵;
(2) 若 A 为 Hermite 阵, 则 $e^{\mathrm{i}A}$ 为酉矩阵.

证明：因为 $e^A(e^A)^T = e^Ae^{A^T} = e^{A+A^T}$. 故

(1) 若 $A + A^T = 0$，则 $e^A(e^A)^T = e^0 = I$.

(2) 若 $A^* = A$, 则 $\mathrm{i}A + (\mathrm{i}A)^* = \mathrm{i}A - \mathrm{i}A^* = 0$. 因此 $e^{\mathrm{i}A}(e^{\mathrm{i}A})^* = e^0 = I$.

40. 详细证明定理 5.4.2.

证明：设 A 的 Jordan 标准形为 $P^{-1}AP = J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_s$, 则由 $f(A) = g(A) \iff P^{-1}f(J)P = P^{-1}g(J)P \iff f(J_i) = g(J_i), \forall i$. 因此，$f(\lambda_i) = g(\lambda_i)$, $f'(\lambda_i) = g'(\lambda_i), \cdots, f^{(k_i-1)}(\lambda_i) = g^{(k_i-1)}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

41. 证明引理 5.4.1 即 Lagrange 插值公式并利用线性空间的直和分解理论解释之.

证明：诸 $L_i, i = 1, 2, \cdots, n+1$ 均为 n 次多项式，且易知它们是线性无关的 (为什么？)，故它们构成 $n+1$ 维线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一组基，因此每个次数不超过 n 的多项式均可由该组基唯一地线性表示.

42. (1) 设 $J_n(\lambda)$ 是一个 n 阶 Jordan 块, 求 $\sin Jt, \cos Jt$;
(2) 对任意 n 阶矩阵 A, 导出 $\sin At$ 与 $\cos At$ 的一般表达式.

解：(1) $J_n(\lambda)$ 极小多项式就是其特征多项式 $m(x) = (x-\lambda)^n$. 因此可设 $f(x) = \sin(tx)$, $\sin Jt = f(A), g(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. 欲使 $f(A) = g(A)$，只需 $f^{(k)}(\lambda) = g^{(k)}(\lambda), k = 0, 1, \cdots, n-1$。可得 $a_k = t^k \sin(t\lambda + k\pi/2)/(k!)$. 代入得 $\sin Jt = \sum_{k=0}^{n-1} t^k \sin(t\lambda + k\pi/2)/(k!) J^k$.

$\cos Jt$ 的表达式类似, 略去.

(2) 设 $A = PJP^{-1}, J$ 是 A 的 Jordan 标准形，则 $\sin At = P(\sin Jt)P^{-1}$.

43. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $e^{At}, \sin At, \cos At$;

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $e^{At}, \sin At, \cos At$.

解：(1) A 的极小多项式就是其特征多项式 $m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. 因此可设 $f(t) = e^{\lambda t}, e^{At} = f(A), g(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$. 欲使 $f(A) = g(A)$，只需 $f(i) = g(i), i = 1, 2, 3$。可得 $a_0 = 3e^t - 3e^{2t} + e^{3t}, a_1 = (-5e^t + 8e^{2t} - 3e^{3t})/2, a_2 = (e^t - 2e^{2t} + e^{3t})/2$. 代入

得 $e^{At}=\begin{pmatrix} e^t & -e^t+e^{2t} & (e^t-2e^{2t}+e^{3t})/2 \\ & e^{2t} & -e^{2t}+e^{3t} \\ & & e^{3t} \end{pmatrix}$. 余略.

(2) A 的极小多项式就是其特征多项式 $m(\lambda)=\lambda^2+1$. 因此可设 $f(t)=e^{\lambda t}, e^{At}=f(A), g(\lambda)=a_0+a_1\lambda$. 欲使 $f(A)=g(A)$，只需 $f(\pm\mathrm{i})=g(\pm\mathrm{i})$。可得 $a_0=(e^{\mathrm{i}\,t}+e^{-\mathrm{i}\,t})/2=\cos t, a_1=(e^{\mathrm{i}\,t}-e^{-\mathrm{i}\,t})/2=\sin t$. 代入得 $e^{At}=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. 余略。

44. 证明命题 5.4.2 即 Lagrange-Sylvester 插值公式.(提示: 研究商 $\frac{f(x)}{m_A(x)}$ 或利用极限研究无重根的 Lagrange 插值公式.)

证明：略。

45. 设 N 是 n 阶幂零块, 验证 $\frac{\mathrm{d}e^{Nt}}{\mathrm{d}t}=Ne^{Nt}$ 并计算 $\int_0^t e^{Ns}\mathrm{d}s$.

解：$\int_0^t e^{Ns}\mathrm{d}s=\begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{t^n}{(n)!} \\ & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & t \end{pmatrix}$.

46. (1) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 计算积分 $\int_0^t e^{As}\mathrm{d}s$;

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 e^A 与 e^{At};

(3) 设 $A^2=A$, 计算 e^{At} 与 $\int_0^t e^{As}\mathrm{d}s$.

解：(1) 与 (3) 因为 $A^2=A$, 故 $e^{At}=e^tA, \int_0^t e^{As}\mathrm{d}s=(e^t-1)A$.

(2) $e^A=\begin{pmatrix} (e+e^{-1})/2 & (e-e^{-1})/2 \\ (e-e^{-1})/2 & (e+e^{-1})/2 \end{pmatrix}$; $e^{At}=\begin{pmatrix} (e^t+e^{-t})/2 & (e^t-e^{-t})/2 \\ (e^t-e^{-t})/2 & (e^t+e^{-t})/2 \end{pmatrix}$.

47. 设 $A^2-A+2I=0$, 计算 e^{At} 与 $\int_0^t e^{As}\mathrm{d}s$.

解: A 的极小多项式为 2 次. 因此可设 $f(\lambda)=e^{\lambda t}, e^{At}=f(A), g(\lambda)=a_0+a_1\lambda$. 欲使 $f(A)=g(A)$，只需 $f(\lambda_i)=g(\lambda_i), l_i(i=1,2)$ 是 A 的特征值。可得 $a_0=\frac{\lambda_2e^{\lambda_1 t}-\lambda_1e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}=e^{t/2}[\cos(\sqrt{3}t/2)-(1/\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t/2)], a_1=\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)$. 代入得 $e^{At}=e^{t/2}[\cos(\sqrt{3}t/2)-(1/\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t/2)]I+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin(\sqrt{3}t/2)A$.

48. (1) 证明 Jacobian 猜想对线性映射成立;

(2) 证明 Jacobian 猜想的逆命题成立;

(3) 试求例 5.5.6 中多项式映射的逆映射. 试对次数不超过 2 (即每个分量的次数不超过 2) 的二元多项式映射证明 Jacobian 猜想. 如何将你的证明推广到 n 元?

49. 如果 $f=(f_1(x),\cdots,f_n(x))^T$ 与 $g=(g_1(x),\cdots,g_n(x))^T$ 是两个 n 元列映射, 计算 $J(f^Tg)$ 并与乘法公式命题 5.5.1(2) 比较.

50. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T, A$ 是 n 阶矩阵, 求 n 元函数 $(\|x-Ax\|_2)^2$ 的导数与 Hessian 矩阵.

51. 计算例 5.5.8 中的复合函数的导数并与多元函数的链法则比较.

52. 证明命题 5.5.2.

53. (1) 证明命题 5.5.3, 并以此推出 $J(\mathrm{tr}(AX))$ 与 $J(\mathrm{tr}(XB))$;
(2) 验证公式 (5.5.17).

54. 计算一般线性变换的导数, 证明例 5.5.3 的结论.

55. 验证公式 (5.6.5) 给出定解问题 (5.6.2) 的解且该解是唯一的.

证明：直接验证即可.

56. 求下列微分方程组的通解：

$$(1)\ x'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}x(t);\qquad (2)\ x'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}x(t).$$

解：(1) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{-t}+e^{5t} & e^{5t}-e^{-t} \\ 2e^{5t}-2e^{-t} & 2e^{5t}+e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 2-e^t+te^t & te^t & -2+2e^t+te^t \\ -1+e^t & e^t & 1+e^t \\ -1-e^t+te^t & te^t & -1+2e^t+te^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

57. 求下列微分方程组 $x'(t)=Ax(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解：

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ x(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\qquad (2)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) $\begin{pmatrix} e^{7t}-e^{-5t} \\ \frac{1}{2}(e^{7t}+e^{-5t}) \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) \\ \frac{1}{4}(e^{3t}-e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) \end{pmatrix}$.

58. 分别利用积分因子法和常数变易法详细证明定理 5.6.2.

证明：见书中正文.

59. (1) 求解微分方程组

$$x'(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}.$$

(2) 求 $x'(t)=Ax(t)+Bu(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解, 其中

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},\ u(t)=1,\ x(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

解：(1) 其中一个解为 $x(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{11}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \\ 5e^{-t} - 16e^{-2t} + 11e^{-3t} \\ 6e^{-t} - 12e^{-2t} + \frac{22}{3}e^{-3t} - \frac{7}{3} \end{pmatrix}$.

60. 求方程 $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = e^{-t}$ 满足 $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ 的解.

解：$-\dfrac{3}{4}e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^{-t} + e^{-2t} + \dfrac{1}{4}e^{-3t}$.

61. (1) 证明微分方程 $x'(t) = Ax(t) + \gamma e^{at}$ 有形如 $x(t) = \beta e^{at}$ 的解 $\iff$ $(aI - A)\beta = \gamma$, 其中 β, γ 都是 n 维向量, $a \in \mathbb{C}$;

(2) 解 $x'(t) = Ax(t) + e^{2t}C$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

证明: (1) 如果有形如 $x(t) = \beta e^{at}$ 的解, 将该解代入即可得 $(aI - A)\beta = \gamma$. 反之, 如果 $(aI - A)\beta = \gamma$, 则容易验证 $x(t) = \beta e^{at}$ 确实是一个解.

(2) 由于 $(2I - A)\beta = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\beta = C$ 有解 $\beta = (1/2, 1/2)^T$, 故由 (1) 知方程组有特解 $x(t) = \beta e^{2t}$. 因此原方程组的解为 $x(t) = e^{At}x(0) + \beta e^{2t}$.

62. 证明定义 5.7.1 后的注.(提示: 利用定理 5.7.1.)

证明：需要证明如果任何初始状态 $x(0)$ 均能变为 0, 则存在输入 $u(t)$ 可将任何初始状态 $x(t_0)$ 变为任何事先指定的状态 $x(t_1)$. 因此只需证明初始状态 $x(0) = 0$ 能变为 $x(t_1)$ 即可. 由假设, 则存在输入 $u_1(t)$ 将初始状态 $x(t_1)$ 变为 0, 即 $0 = e^{At_1}x(t_1) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}Bu_1(t)\,\mathrm{d}t$. 于是 $x(t_1) = -e^{-At_1}\int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}Bu_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-t)}B(-e^{-At_1}u_1(t))\,\mathrm{d}t$. 即存在输入 $-e^{-At_1}u_1(t)$ 将初始状态 0 变为 $x(t_1)$.

63. (1) 设定常系统的系统矩阵 A 是对角矩阵, 试给出该系统可控性的一个判断准则;

(2) 设定常系统的系统矩阵 A 是一个 Jordan 块, 试给出该系统可控性的一个判断准则;

(3) 设单输入定常系统的系统矩阵 A 是 Frobenius 标准形 (即 (5.6.10) 中的矩阵), 而其控制矩阵 B 为标准向量 e_n, 证明该系统是可控的. 这样的定常系统称为可控标准形.

解: (1) 设 $A = \mathrm{diag}\,(a_1, \cdots, a_n), B = (b_1, \cdots, b_n)^T$. 于是可控矩阵

$$W = (B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = \begin{pmatrix} b_1 & a_1b_1 & a_1^2b_1 & \cdots & a_1^{n-1}b_1 \\ b_2 & a_2b_2 & a_2^2b_2 & \cdots & a_2^{n-1}b_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_n & a_nb_n & a_n^2b_n & \cdots & a_n^{n-1}b_n \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{diag}\,(b_1, \cdots, b_n)\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

因此 $|W|=b_1\cdots b_nV(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 其中 $V(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 Van der Monde 行列式. 故知 $r(W)=n$ 当且仅当 A 可逆且 B 无 0 行 (即无零元素).

(2) 设 $B=(b_1,\cdots,b_n)^T$. 则 $r(W)=n$ 当且仅当 $b_n\neq 0$.

(3) 直接计算可知 $W=(B,AB,\cdots,A^{n-1}B)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 1 & -a_1 & \cdots & (-1)^{n-2}a_1^{n-2} \\ 1 & -a_1 & a_1^2 & \cdots & (-1)^{n-1}a_1^{n-1} \end{pmatrix}$.
故 W 可逆.

64. 根据你在63题中给出的判断准则, 研究下面几个定常系统的可控性.

(1)$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=(1,1)^T$; (2)$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=(1,0)^T$;

(3)$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B=(c,d)^T$; (4)$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B=(c,d)^T$.

解：(1) 可控，(2) 不可控，(3) 可控 $\iff abcd\neq 0$; (4) 可控 $\iff d\neq 0$.

65. 证明例 5.7.6 的结论.

解：可测矩阵 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda_1 a & \lambda_2 b \end{pmatrix}$. 故 M 可逆 $\iff ab(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$.

66. 证明定理 5.7.4.

证明：略.

67. (1) 设定常系统的系统矩阵 A 是对角矩阵, 试给出该系统可测性的一个判断准则;

(2) 设定常系统的系统矩阵 A 是一个Jordan块, 试给出该系统可测性的一个判断准则;

(3) 设定常系统的系统矩阵 A 是Frobenius标准形的转置矩阵, 而其输出矩阵 C 为标准行向量 e_n^T, 证明该系统是可测的. 这样的定常系统称为可测标准形.

解：可测矩阵 $M=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ 可逆当且仅当其转置矩阵 $M^T=(C^T\ \ A^TC^T\ \cdots\ (A^T)^{n-1}C^T)$ 可逆. 因此由 63 题的结论可知

(1) $r(M)=n$ 当且仅当 A 可逆且 C 无零列 (即 C 无 0 元素).

(2) 设 $C=(c_1,\cdots,c_n)$. 则 $r(M)=n$ 当且仅当 $c_n\neq 0$.

(3) 此时 M^T 可逆, 故 M 可逆.

68. 根据你在67题中给出的判断准则, 研究下面几个定常系统的可测性.

(1)$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $C=(c,d)^T$; (2)$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $C=(c,d,f)^T$.

解: (1) $d\neq 0$; (2) $f\neq 0$.