

第二章习题及参考解答

注：第 27 题 (2)(3) 错（可将“证明”改为证明或否定），第 28 题可不布置。第 50 题（含）以后属于附加内容，没有参考解答。

1. 证明子空间判别法：设 U 是线性空间 V 的一个非空子集。则 U 是子空间 \Leftrightarrow 对任意 $\lambda \in \mathbb{F}$, $\alpha, \beta \in U$, 有 $\alpha + \beta \in U$ 与 $\lambda\alpha \in U$.

证明：必要性是显然的，下证充分性。设 U 关于加法“+”与数乘均封闭。则 U 中加法“+”的结合律与交换律以及数乘与“+”的分配律、 $1\alpha = \alpha$ 均自动成立，因为 $U \subset V$. 由于 U 关于数乘封闭，而 $0 = 0\alpha \in U$, $-\alpha = -1\alpha \in U$, 因此 U 是子空间。

2. 证明子空间的下述性质。(1) 传递性：即若 U 是 V 的子空间, W 是 U 的子空间，则 W 也是 V 的子空间；

(2) 任意多个（可以无限）子空间的交集仍是子空间，且是含于这些子空间的最大子空间；特别，两个子空间 U 与 W 的交 $U \cap W$ 仍是子空间。

证明：(1) 由子空间判别法立即可得。

(2) 由子空间判别法可知任意多个（可以无限）子空间的交集仍是子空间，且若某个子空间含于所有这些子空间，则该子空间必然含于这些子空间的交。

3. (1) 设 V 是线性空间, U 与 W 是 V 的两个子空间. 证明：

$$\dim(U + W) = (\dim U + \dim W) - \dim(U \cap W).$$

(2) 设 V 是有限维线性空间. 证明并解释下面的维数公式：

$$\dim V = \max\{m \mid 0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = V, V_i \text{ 是 } V_{i+1} \text{ 的真子空间}\}$$

证明：(1) 设 $\dim U = s$, $\dim W = t$, $\dim(U \cap W) = r$. 任取 $U \cap W$ 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. 由于 $U \cap W$ 是 U 与 W 的公共子空间，故 $U \cap W$ 的基是 U 与 W 的线性无关的向量组，因此可以扩充成 U 或 W 的基. 设

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_s \quad (0.0.1)$$

与

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_t \quad (0.0.2)$$

分别是 U 与 W 的基. 我们证明

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \dots, \beta_s, \gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_t \quad (0.0.3)$$

是 $U + W$ 的一组基. 为此需要证明该向量组线性无关，且 $U + W$ 的任何向量均可由这些向量线性表示.

设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + b_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + b_s\beta_s + c_{r+1}\gamma_{r+1} + \cdots + c_t\gamma_t = 0. \quad (0.0.4)$$

记

$$\begin{aligned}\alpha &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r, \\ \beta &= b_{r+1}\beta_{r+1} + b_{r+2}\beta_{r+2} + \cdots + b_s\beta_s, \\ \gamma &= c_{r+1}\gamma_{r+1} + c_{r+2}\gamma_{r+2} + \cdots + c_t\gamma_t.\end{aligned}$$

则 $\alpha \in U \cap W$, $\beta \in U$, $\gamma \in W$, 以及 $\alpha + \beta + \gamma = 0$. 于是 $\gamma = -\alpha - \beta \in U$, 从而 $\gamma \in U \cap W$; 从而存在适当的数 d_1, d_2, \dots, d_r , 使得 $\gamma = d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \cdots + d_r\alpha_r$, 即

$$d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + \cdots + d_r\alpha_r - c_{r+1}\gamma_{r+1} - c_{r+2}\gamma_{r+2} - \cdots - c_t\gamma_t = 0.$$

由于 (2) 是 W 的一组基, 故有 $d_1 = d_2 = \cdots = d_r = c_{r+1} = c_{r+2} = \cdots = c_t = 0$. 同理, 由于 (1) 是 U 的一组基, 由 (4) 又得, $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = b_{r+1} = b_{r+2} = \cdots = b_s = 0$. 因此, (3) 确是线性无关的向量组.

再设 $\alpha \in U + W$. 则存在 $\beta \in U$, $\gamma \in W$, 使得 $\alpha = \beta + \gamma$. 因为 (1) 和 (2) 分别是 U 和 W 的基, 因此有系数 $k_1, k_2, \dots, k_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_s$ 及 $l_1, l_2, \dots, l_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \dots, c_t$ 使

$$\begin{aligned}\beta &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r + b_{r+1}\beta_{r+1} + b_{r+2}\beta_{r+2} + \cdots + b_s\beta_s, \\ \gamma &= l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_r\alpha_r + c_{r+1}\gamma_{r+1} + c_{r+2}\gamma_{r+2} + \cdots + c_t\gamma_t,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\alpha &= (k_1 + l_1)\alpha_1 + (k_2 + l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_r + l_r)\alpha_r + b_{r+1}\beta_{r+1} + b_{r+2}\beta_{r+2} + \cdots + b_s\beta_s \\ &\quad + c_{r+1}\gamma_{r+1} + c_{r+2}\gamma_{r+2} + \cdots + c_t\gamma_t.\end{aligned}$$

即 α 是向量组 (3) 的线性组合. 所以, (3) 是 $U + W$ 的一组基.

(2) 设 $\dim V = n$. 则显然子空间的真包含的链 $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{m-1} \subset V_m = V$ 的长度 $m \leq n$. 另一方面, 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基, 则

$$0 = V_0 \subset \mathbb{F}\alpha_1 \subset (\mathbb{F}\alpha_1 \oplus \mathbb{F}\alpha_2) \subset \cdots \subset (\mathbb{F}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}\alpha_m) \subset \cdots \subset (\mathbb{F}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}\alpha_n) = V$$

显然是一个空间的真包含的链, 其长度 $m = n$. 因此需证的等式成立. 该等式说明线性空间的维数是子空间按包含关系所形成的链的最大长度.

4. 证明多子空间直和的判定定理: 设 W_1, W_2, \dots, W_s 是线性空间 V 的子空间, 则下列命题等价:

- (1) $W_1 + W_2 + \cdots + W_s$ 是直和即 $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_s) = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_s$;
- (2) $W_j \cap \sum_{k \neq j} W_k = 0, 1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq s$;
- (3) 任意向量 $\alpha \in W_1 + W_2 + \cdots + W_s$ 的分解式唯一;
- (4) 零向量的分解式唯一.

证明: (1) \Rightarrow (2) 对 s 做归纳, 将 $\sum_{k \neq j} W_k$ 看做一个子空间即可.

(2) \Rightarrow (3) 设 $\alpha \in W_1 + W_2 + \cdots + W_s$ 有两个分解 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s$ 以及 $\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_s$, 其中 $\alpha_i, \beta_i \in W_i, \forall i$. 则

$$\alpha_i - \beta_i = (\alpha_i - \beta_i) \in \sum_{j \neq i} W_j$$

但左端属于 W_i , 因此由 (2) 的假设知 $\alpha_i - \beta_i = 0, \forall i$. 即分解式唯一.

(3) \Rightarrow (4) 显然。

(4) \Rightarrow (1) 由零向量的分解式唯一可知 $(W_1 + W_2 + \dots + W_{s-1}) + W_s$ 是直和, 因此 $\dim(W_1 + W_2 + \dots + W_s) = \dim(W_1 + W_2 + \dots + W_{s-1}) + \dim W_s$, 进而由归纳法可知 $\dim(W_1 + W_2 + \dots + W_s) = \dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_s$.

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

求 A 的四个相关子空间.

解:

$$R(A) = [(1, 0, 1)^T, (1, 1, 3)^T], \quad R(A^T) = [(1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T], \quad N(A) = [(-1, -1, 1)^T], \quad N(A^T) = [(-1, -2, 1)^T]$$

6. 设 V 是线性空间, W_1, W_2, \dots, W_s 是 V 的真子空间. 证明 $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_s \neq V$. (提示: 利用 Vandermonde 行列式或归纳法.)

证明: 不妨设 $W_i \not\subset \cup_{j \neq i} W_j, \forall i$. 因此存在 $\alpha_i \in W_i \setminus \cup_{j \neq i} W_j$. 所以存在 $t \in \mathbb{F}$ 使得 $\beta(t) = \sum_{i=1}^s t^{i-1} \alpha_i \notin \cup_{j=1}^s W_j$. 否则: 对 \mathbb{F} 中的无穷多个数 t , 至少有一个 W_{i_0} 包含了无穷多个 $\beta(t)$. 设有两两不同的 $t_1, \dots, t_s \in \mathbb{F}$, 使得 $\beta(i) = \beta(t_i) \in W_{i_0}$, 即

$$\beta(1) = t_1^0 \alpha_1 + \dots + t_1^{s-1} \alpha_s \beta(2) = t_2^0 \alpha_1 + \dots + t_2^{s-1} \alpha_s \dots \dots \beta(s) = t_s^0 \alpha_1 + \dots + t_s^{s-1} \alpha_s$$

由于系数矩阵是诸行均不同的 Vandermonde 矩阵, 故可逆, 因此所有 α_i 均可由 $\beta(1), \dots, \beta(s)$ 线性表示, 因此均属于 W_{i_0} , 矛盾!

7. 设 V 是所有 n 阶实数矩阵按矩阵的加法和数乘作成的实线性空间, U 是 V 中所有迹为零的矩阵的集合. 证明 U 是 V 的子空间, 并求 U 的维数和一个补空间.

证明: U 关于加法与数乘显然封闭, 故是子空间。 $\dim U = n^2 - 1$, U 的一个补空间是全体纯量矩阵构成的子空间。

8. 设 V 是所有次数小于 n 的实系数多项式组成的实线性空间, $U = \{f(x) \in V \mid f(1) = 0\}$. 证明 U 是 V 的子空间, 并求 V 的一个补空间.

证明: U 关于加法与数乘显然封闭, 故是子空间。 $\dim U = n - 1$, U 的一个补空间是全体常数多项式构成的子空间。

9. 设 $U = [(1, 2, 3, 6)^T, (4, -1, 3, 6)^T, (5, 1, 6, 12)^T]$, $W = [(1, -1, 1, 1)^T, (2, -1, 4, 5)^T]$ 是 \mathbb{R}^4 的两个子空间,

- (1) 求 $U \cap W$ 的基;
- (2) 扩充 $U \cap W$ 的基, 使其成为 U 的基;
- (3) 扩充 $U \cap W$ 的基, 使其成为 W 的基;
- (4) 求 $U + W$ 的基.

解: (1) $(-1, 2, 1, 2)^T$;

(2) $(-1, 2, 1, 2)^T, (1, 2, 3, 6)^T$;

(3) $W = [(-1, 2, 1, 2)^T, (1, -1, 1, 1)^T]$;

(4) $U + W = [(-1, 2, 1, 2)^T, (1, 2, 3, 6)^T, (1, -1, 1, 1)^T]$.

10. 设 $U = \{(x, y, z, w) | x + y + z + w = 0\}$, $W = \{(x, y, z, w) | x - y + z - w = 0\}$. 求 $U \cap W$, $U + W$ 的维数与基.

解: 2, 4, $U \cap W = [(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)]$, $U + W = \mathbb{F}^4$, 故其一组基为标准基。

11. 设 A, B 分别是 $n \times m$, $m \times p$ 矩阵, V 是齐次线性方程组 $xAB = 0$ 的解空间. 证明 $U = \{y = xA | x \in V\}$ 是 \mathbb{F}^n 的子空间, 并求 U 的维数.

证明: 直接验证可知 U 关于加法与数乘均封闭, 故是子空间。 $\dim U = r(A) - r(AB)$.

12. 设 A 是 n 阶方阵. 证明

(1) A 可以唯一地表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和. 试用子空间的直和分解理论解释这一结果;

(2) A 可以唯一地表示成一个 Hermite 矩阵和一个反 Hermite 矩阵的和. 试用子空间的直和分解理论解释这一结果;

(3) 解释定义域为 \mathbb{R} 的任意实函数可以唯一地表示成一个偶函数与一个奇函数的和;

(4) 请举一个类似于上面 (1)-(3) 的例子并解释之.

证明: (1) $A = 1/2[(A + A^T) + (A - A^T)]$, 其中 $1/2(A + A^T)$ 与 $1/2(A - A^T)$ 分别是对称与反对称矩阵。该分解唯一是因为对称矩阵全体构成的子空间与反对称矩阵全体构成的子空间恰为互补的子空间。(2), (3), (4) 皆类似。

13. 证明数域 \mathbb{F} 上的一元多项式的欧几里德带余除法: 设 $f(x), g(x)$ 是任意两个多项式, 其中 $g(x) \neq 0$, 则存在唯一一对多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$ 使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\deg r(x) < \deg g(x)$. 试用线性空间的理论解释这一结果.

证明: 若 $g(x)$ 的次数比 $f(x)$ 的次数大, 则无须证。对 $f(x)$ 的次数作归纳即可。设 $f(x)$ 的次数为 n , $g(x)$ 的次数为 $m \geq n$, 则 $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]_{n+1}$ 。此时 $1, x, \dots, x^{m-1}, g(x), xg(x), \dots, x^{n-m}g(x)$ 恰好构成 $\mathbb{F}[x]_{n+1}$ 的一组基, 因此表达式

$$f(x) = a_0 \bullet 1 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1} + a_m g(x) + \dots + a_n x^{n-m} g(x) = [a_0 \bullet 1 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}] + [a_m + \dots + a_n x^{n-m}] g(x)$$

唯一。

14. (1) 设 f 是定义在实数域上的加性函数. 证明: 如果 f 是连续的, 则它一定是齐次的, 从而是线性变换;

(2) 试将 (1) 中的结论推广到一般情形.

证明: (1) 设 f 满足条件 $f(x + y) = f(x) + f(y)$, 则对一切有理数 a 有 $f(a) = af(1)$ 。对任意无理数 b , 存在有理数的无穷数列 a_1, a_2, \dots 使得 $a_i \rightarrow b, i \rightarrow \infty$ 。由于 f 连续, 故

$$f(b) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(a_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} [a_i f(1)] = f(1) \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = bf(1)$$

即 f 是齐次的故为线性变换。

(2) 设 f 是实线性空间 V 到 \mathbb{R} 上的加性函数. 若 f 是连续的, 则它一定是齐次的, 从而是线性变换。此含义和证明到第 5 章自明。

15. 若 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_s)$ 线性相关, 证明或否定 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 也线性相关.

解: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 未必线性相关. 比如取 $\sigma = 0$. 一般地, 若 $\sigma(\alpha_1), \sigma(\alpha_2), \dots, \sigma(\alpha_s)$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的相关性总相同 (任意向量组), 则 σ 必是可逆变换.

16.(1) 设 U, V 是 \mathbb{F} 上的线性空间 (不必有限维), $\sigma \in \text{Hom}(U, V)$. 则

- (a) σ 是单的 $\iff \text{Ker}(\sigma) = 0$;
- (b) σ 是满的 $\iff \text{Im}(\sigma) = V$;
- (c) σ 是同构 $\iff \sigma$ 可逆.

特别地, 如果 $U = V$ 是有限维线性空间, $\sigma \in \text{End}V$, 则 σ 是单的 $\iff \sigma$ 是满的 $\iff \sigma$ 可逆.

(2) 设 $\sigma \in \text{Hom}(U, V)$ 是可逆线性变换, 证明其逆唯一, 且若 $\tau = \sigma^{-1}$, 则 $\sigma = \tau^{-1}$;

(3) 计算 2 维实线性空间 \mathbb{C} 的所有自同构.

证明: (1)(a) 必要性显然. 反之, 若 $\text{Ker}(\sigma) = 0$ 而 $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, 则 $\sigma(\alpha - \beta) = 0$, 因此 $\alpha = \beta$, 即 σ 单.

(b) 显然.

(c) 同构映射显然是可逆的. 反之, 可逆映射必然既单又满, 因此是同构映射.

(2) 见课本正文证明概要.

(3) 按照线性变换与矩阵的对应关系, 实线性空间 \mathbb{C} 的所有自同构即是所有 2 阶可逆实矩阵, 确切地说 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是自同构当且仅当 $f : x + iy \mapsto (ax + by) + i(cx + dy)$ 满足条件 $ad - bc \neq 0$.

17. 设 $\sigma \in \text{Hom}(U, V)$.

(1) 证明 σ 的核 $\text{Ker}\sigma$ 与像 $\text{Im}\sigma$ 分别是 U 与 V 的子空间;

(2) 证明商空间 $U/\text{Ker}\sigma$ 与 $\text{Im}\sigma$ 同构并建立相应的一个同构映射.

证明: (1) 利用子空间的判定定理立即可得.

(2) 记 $K = \text{Ker}\sigma$. 则 $f : u + K \mapsto \sigma(u)$ 给出 $U/\text{Ker}\sigma$ 到 $\text{Im}\sigma$ 的一个同构映射: 首先, 易知 f 是线性变换; 其次, 若 $f(u + K) = 0$, 则 $\sigma(u) = 0$, 因此 $u \in K$ 即 $u + K = 0$, 故 f 单; 而 f 显然是满的. 所以 f 是同构.

18. 设 $\sigma \in \text{End}V$ 在 V 的某组基下的矩阵为 A . 证明或否定: 存在 $\tau \in \text{End}V$, $\tau \neq \sigma$, 使得 τ 在另一组基下的矩阵也是 A .

解: 显然, 若 A 是纯量矩阵, 则不存在别的线性变换满足此性质.

若 A 不是纯量矩阵, 则存在别的线性变换满足此性质: 以 $A = E_{12}$ 为例, 设 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 E_{12} , 令 τ 是在基 $\alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 E_{12} 的线性变换, 则显然 $\tau \neq \sigma$.

19. 证明域 \mathbb{F} 上的两个线性空间 U 与 V 同构 $\iff \dim_{\mathbb{F}} U = \dim_{\mathbb{F}} V$.

证明: 必要性是显然的. 设 $\dim_{\mathbb{F}} U = \dim_{\mathbb{F}} V$. 则可以构造同构映射如下: 分别取定 U 与 V 的各一组基, 令 σ 为这两组基之间的一个一一对应, 则 σ 唯一地确定了一个同构的线性变换.

20. 第一章习题 22 与 23 中的线性空间各是几维的? 试分别建立它们与某 \mathbb{R}^n 之间的同构变换.

解: 均是 1 维的. 它们与 \mathbb{R}^1 的同构映射由各自的数乘运算决定.

21. 设 U 与 V 均是有限维线性空间, 证明 $\dim_{\mathbb{F}} \text{Hom}(U, V) = (\dim_{\mathbb{F}} U)(\dim_{\mathbb{F}} V)$.

证明: 由线性变换基本定理可知 $\text{Hom}(U, V) \cong \mathbb{F}^{\dim_{\mathbb{F}} V} \times (\dim_{\mathbb{F}} U)$, 因此 $\dim_{\mathbb{F}} \text{Hom}(U, V) = (\dim_{\mathbb{F}} U)(\dim_{\mathbb{F}} V)$.

22. 设 V 是 \mathbb{F} 上的 n 维线性空间, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一组基. 设 $M_n(\mathbb{F})$ 是 \mathbb{F} 上全体 n 阶矩阵组成的线性空间. 对任意 $\sigma \in \text{End } V$, 记 $A(\sigma)$ 是 σ 在该基下的矩阵. 定义 $\text{End } V$ 到 $M_n(\mathbb{F})$ 的映射 ψ 为

$$\begin{aligned}\psi : \quad \text{End } V &\longrightarrow M_n(\mathbb{F}) \\ \sigma &\longmapsto A(\sigma)\end{aligned}$$

则 ψ 是一个保持运算 (加法, 数乘与乘法) 的一一映射, 即满足下列条件:

- (1) $A(\sigma + \tau) = A(\sigma) + A(\tau)$;
- (2) $A(k\sigma) = kA(\sigma), \forall k \in \mathbb{F}$;
- (3) $A(\sigma\tau) = A(\sigma)A(\tau)$;
- (4) σ 可逆 $\iff A(\sigma)$ 可逆; 且此时 $A(\sigma)^{-1} = A(\sigma^{-1})$;
- (5) $A(0) = 0; A(I) = I$.

证明: 直接验证即可.

23. 证明线性变换基本定理: 设 U 与 V 分别为 n 维与 m 维 \mathbb{F} 线性空间. 则 $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V) \cong \mathbb{F}^{m \times n}$. 特别地, V^* 与 V 同构.

证明: 分别取定 U 与 V 的各一组基, 则任何线性变换 $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{F}}(U, V)$ 对应唯一的矩阵 $A(\sigma)$ (就是 σ 在取定的两组基下的矩阵), 这个对应既是单的又是满的, 且容易验证其是线性变换, 因此给出所需要的同构.

24. 设 V 是有限维线性空间. 对任意 $v \in V, f \in V^*$, 定义 V 到 V^{**} 的映射 ϕ 如下:

$$\phi : v \mapsto \phi(v) : f \mapsto f(v).$$

证明 ϕ 是 V 到 V^{**} 的同构变换并求其逆变换.

证明: ϕ 显然是线性变换. 由于 V 是有限维的, V^{**} 与 V 的维数相等, 故只需证明 ϕ 是单的即可. 设 $\phi(v) = 0$, 则对任意 $f \in V^*$ 有 $f(v) = 0$, 这迫使 $v = 0$, 即 ϕ 是单的.

为构造 ϕ 的逆, 取定 V 的一组基 (遗憾: 没有自然性了!) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 以及相应的 V^*, V^{**} 的对偶基 $\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ 和 $\alpha_1^{**}, \dots, \alpha_n^{**}$. 则可以看出 $\phi(\alpha_i) = \alpha_i^{**}$. 因此, 其逆映射 $\phi^{-1} : \alpha_i^{**} \mapsto \alpha_i, 1 \leq i \leq n$.

25. 分别求导数运算 $\partial : f(x) \mapsto f'(x)$ 在标准基 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ 与基 $1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^{n-1}$ 下的矩阵. 问 ∂ 的行列式与迹是多少? 解释之.

解: 均为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

行列式与迹均为 0.

26. 设 V 是数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵全体, σ 是将 V 中任意元素的严格下三角部分变为 0 的映射. 判断 σ 是否为 V 的线性变换. 若是, 求其核与像; 并任选 V 的一组基, 求 σ 在该组基下的矩阵.

解: σ 的定义不完整, 可设 σ 固定任意矩阵的上三角部分, 则 σ 是线性变换. $\text{Ker}\sigma =$ 全体严格下三角矩阵, $\text{Im}\sigma =$ 全体上三角矩阵. σ 在基 $\{E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$ (顺序为先排 $i \leq j$) 下的矩阵为 $I_{n(n+1)/2} \oplus 0_{n(n-1)/2}$.

27. (1) 设 $V = \mathbb{F}^n$. 对 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 定义

$$\tau(\alpha) = (x_2, x_3, \dots, x_n, 0)^T.$$

求 τ 的幂零指数及其在标准基下的矩阵;

(2) 设 $\sigma, \tau \in \text{End}V$ 分别是线性空间 V 的同构变换和幂零变换, 证明 $\sigma + \tau$ 是 V 的同构变换;

(3) 设 A, D 是可逆矩阵, B, C 是幂零矩阵, 证明分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 可逆.

解: (1) σ 的幂零指数为 n , 其在标准基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 此题错. 如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3) 此题错. 如 $A = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B = E_{23}, C = E_{12}$.

28. 设 V 是数域 \mathbb{F} 上的 n 阶矩阵全体, A 是 V 中一个固定元素, P 是 V 中一个固定的可逆矩阵, σ 是左乘 A 的映射, τ 是左乘 P 逆右乘 P 的映射. 判断 σ 与 τ 是否为 V 的线性变换. 若是, 求其核与像. 并任选 V 的一组基, 计算 σ 与 τ 在该组基下的矩阵.

解: σ 是线性变换, 其核 $= \{X \mid AX = 0\}$, 其像 $= \{Y \mid Y = AX, X \in V\}$. τ 是线性变换且可逆. 因此其核为 0, 其像是整个空间.

29. 设 $V = \mathbb{R}^3$, $\sigma(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$. 求

- (1) σ 的核与像空间的基与维数;
- (2) σ 的行列式与迹.

解: (1) $\text{Ker}\sigma = [(3, -1, 1)]$, 1 维, $\text{Im}\sigma = [(1, 0, 1), (2, 1, 1)]$, 2 维.

(2) 行列式与迹均为 0.

30. 设 V 是 n 维内积空间, U 是 V 的子空间. 令 $W = \{\alpha \in V \mid (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in U\}$. 证明 W 是 V 的子空间且 $V = U \oplus W$.

证明: 直接验证加法与数乘封闭性即可知 W 是子空间且 $\dim W = n - \dim U$. 又易知 $W \cap U = 0$, 故 $V = U \oplus W$.

31. 证明 $R(A) = N(A^*)^\perp$.

证明：原等式等价于 $R(A)^\perp = N(A^*)$. 设 $\alpha \in N(A^*)$, 即有 $A^*\alpha = 0$. 所以 α 与 $(A^*)^* = A$ 的每一列均正交, 即 $N(A^*) \subset R(A)^\perp$. 由于二者维数相同, 故等式成立。

32. 设 $V = \mathbb{R}[x]_n$, 其上的内积为

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

设 $U = \{f(x) \in V \mid f(0) = 0\}$.

- (1) 证明 U 是 V 的一个 $n - 1$ 维子空间, 并求 U 的一组基;
- (2) 当 $n = 3$ 时, 求 U 的正交补 U^\perp .

证明: (1) 利用子空间判别法直接验证即可, x, x^2, \dots, x^{n-1} 是 U 的一组基。

$$(2) U^\perp = [-3 + 12x - 10x^2].$$

33. 在欧氏空间 \mathbb{R}^n 中求一个超平面 W , 使得向量 $e_1 + e_2$ 在 W 中的最佳近似向量为 e_2 .

解: 当 $n = 2$ 时, $W = [e_2]$. 当 $n \geq 3$ 时, $W = [e_2, e_3, \dots, e_n]$.

34. 证明: 函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数中的系数 $a_n, b_n (n > 0)$ 恰好是 $f(x)$ 与诸基向量 $\cos nx, \sin nx$ 的内积。

证明: 由于 Fourier 级数中的系数 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$, 易知 $(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ 确实定义了以 2π 为周期的可积函数空间上的一个内积。

35. 设 U 是欧氏空间 V 的子空间, $\beta \in V, \alpha \in U$. 则 α 是 β 在 U 上的最佳近似向量 $\iff \beta - \alpha \in U^\perp$.

证明: 必要性是显然的。下证充分性。设 γ 是 U 中任一向量, 注意 $\beta - \gamma = (\beta - \alpha) + (\alpha - \gamma)$, 且 $\beta - \alpha \in U^\perp, \alpha - \gamma \in U$, 所以 $\|\beta - \gamma\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2 + \|\alpha - \gamma\|^2 \geq \|\beta - \alpha\|^2$. 因此, 对任意 $\gamma \in U$, 有

$$\|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\|,$$

即 α 是 β 在 U 上的最佳近似向量。

36. 试任意构造维数大于 5 的一个线性空间 V 以及 V 的一个线性映射 σ , 使得 σ 的核的维数等于 5. 进一步, 试将 V 改造成内积空间, 求 $\text{Im}\sigma$ 的正交补空间. 再构造一个线性变换 τ , 使得 $\text{Ker}\tau = \text{Im}\sigma, \text{Im}\tau = \text{Ker}\sigma$.

解: 设 $V = \mathbb{R}^6$ 为普通欧氏空间, $\sigma(e_1) = e_1, \sigma(e_i) = 0, 2 \leq i \leq 6$. 则 $(\text{Im}\sigma)^\perp = \text{Ker}\sigma = [e_2, \dots, e_6]$.

令 $\tau(e_1) = 0, \tau(e_i) = e_i, 2 \leq i \leq 6$, 则 $\text{Ker}\tau = \text{Im}\sigma, \text{Im}\tau = \text{Ker}\sigma$.

37. 设 α_0 是欧氏空间 V 中的单位向量, $\sigma(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \alpha_0)\alpha_0, \alpha \in V$. 证明

- (1) σ 是线性变换;
- (2) σ 是正交变换.

证明: 直接验证即可。

38. 证明: 欧氏空间 V 的线性变换 σ 是反对称变换 (即 $(\sigma(\alpha), \beta) = -(\alpha, \sigma(\beta)) \iff \sigma$ 在 V 的标准正交基下的矩阵是反对称矩阵).

证明：设 σ 在 V 的标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵是 $A = (a_{ij})$. 则 $\sigma(\alpha_i) = \sum_{k=1}^n a_{ki} \alpha_k, 1 \leq i \leq n$. 于是

$$(\sigma(\alpha_i), \alpha_j) = \sum_{k=1}^n a_{ki} (\alpha_k, \alpha_j) = a_{ji}, (\alpha_i, \sigma(\alpha_j)) = \sum_{k=1}^n a_{kj} (\alpha_i, \alpha_k) = a_{ij}.$$

因此 σ 是反对称变换当且仅当 $a_{ji} = -a_{ij}$, 即 A 是反对称矩阵。

39. 设 σ 是实平面 \mathbb{R}^2 上的线性变换, 其关于标准基的矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$$

其中 $c^2 + s^2 = 1$. 证明 σ 是反射变换, 并计算其对称轴.

证明：由于 P 的特征多项式为 $\lambda^2 - 1$, 因此其特征根为 $1, -1$, 对应于特征值 1 的特征子空间即是 σ 的对称轴, 其方程为 $y = x \tan \theta$, 其中 $c = \cos 2\theta$.

40. 证明三维正交矩阵必正交相似于下面 6 种矩阵:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos \theta & \sin \theta \\ & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos \theta & \sin \theta \\ & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(提示: 利用三维正交矩阵有 1 个或 3 个实特征值并结合二维正交矩阵的分类.)

证明：如果三维正交矩阵 A 有 3 个实特征值, 则它的特征值只能是 ± 1 , 因此 A 必定正交相似于前四种 (对角) 矩阵。

如果三维正交矩阵恰有 1 个实特征值, 则此特征值是 1 或 -1 . 相应于该实特征值的特征子空间是 1 维的, 其正交补空间是 \mathbb{R}^3 的 1 个超平面 π (2 维子空间), π 也是 A 的不变子空间。由于 A 是恰有一个实特征值的正交变换, 故 A 在 π 上的限制是一个不为反射的正交变换, 因此 A 必定正交相似于后两种矩阵。

41. 设 $\sigma \in \text{End}\mathbb{R}^2$. 记单位正方形 $S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ 在 σ 下的图形为 $G = \sigma(S) = \{\sigma(x, y) : (x, y) \in S\}$. 回答下列问题:

- (1) 列出 G 所有可能的形状;
- (2) 如果 G 仍为正方形, σ 应满足什么条件?
- (3) 如果 σ 可逆, 则 G 是什么形状?

解: (1) 设 $\sigma(e_i) = \alpha_i, i = 1, 2$. 则 $G = \sigma(S) = \{\sigma(x, y) = \sigma(xe_1 + ye_2) = x\alpha_1 + y\alpha_2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$. 故若 σ 可逆, 则 α_1, α_2 线性无关, G 是一个以 α_1, α_2 为邻边的平行四边形。若 $0 \neq \sigma$ 不可逆, 则 α_1, α_2 线性相关, G 是一条线段 (一个端点是原点)。若 $\sigma = 0$, 则 G 是原点。

(2) 如果 G 仍然是正方形, 即解答 (1) 中的 α_1 与 α_2 均非零、等长且正交, 因此 σ 是正交变换的非零常数倍。

(3) 见解答 (1).

42. (1) 设 $\sigma \in \text{End}\mathbb{R}^2$. 设 C 是一个二次曲线 (即抛物线, 椭圆或双曲线). 计算 $\sigma(C)$ 所有可能的形状 (可设 C 的方程均为标准方程);

(2) 设 P 是一个平面 n 次代数曲线 (即 C 的方程是 n 次多项式), 计算 $\sigma(Q)$ 所有可能的形状;

(3) 分别对指数函数, 对数函数, 三角函数研究其曲线在 σ 下的图像;

(4) 设 $\sigma \in \text{End}\mathbb{R}^3$. 设 Q 是一个二次曲面. 计算 $\sigma(Q)$ 所有可能的形状 (可设 Q 的方程均为标准方程).

解: (1) 只讨论 C 是抛物线 (设 $y = x^2$) 的情形, 余类似. 不妨设 $\sigma \neq 0$ 且 $\sigma(e_1) = (a, c)^T, \sigma(e_2) = (b, d)^T$. 则 $\sigma((x, x^2)^T) = (ax + bx^2, cx + dx^2)$, 即抛物线变为 $X = ax + bx^2, Y = cx + dx^2$ (x 是参数). 若 σ 不可逆, 则 (a, b) 与 (c, d) 成比例, 故 $X + \alpha Y = 0$, 抛物线变为一条直线. 若 σ 可逆, 则 $(a, b) \neq (0, 0)$, 不妨设 $a \neq 0$. 消去参数 x 可得方程 $X^2 + 2\alpha XY + \beta Y^2 + dX + eY = 0$, 抛物线变为一椭圆或双曲线. 因此, 可逆的线性变换将二次曲线仍变为二次曲线.

(2) 不超过 n 次的代数曲线。

(3) $y = (\lambda)^x$ 变为 $ax + by = (\lambda)^{cx+dy}$ 等等。

(4) 类似于 (1) 中的讨论, 线性变换可将二次曲面变为直线、平面或二次曲面。

43. 证明 Householder 变换 H_v 是关于超平面 v^\perp 的反射, 从而是正交变换. 试画出三维 Householder 变换的示意图.

证明: 直接验证可知 H_v 是固定超平面 v^\perp 且 $H_v(v) = -v$.

44. 证明 Givens 旋转矩阵 G 是正交矩阵. 对任意向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 计算 Gx 的各个分量. 设 x 是单位向量, 讨论如何重复使用若干 Givens 旋转矩阵将 x 变为标准向量 e_1 .

证明: $GG^T = I$. 设 $i < j$. $Gx = x + [(c-1)x_i + sx_j]e_i + [(c-1)x_j - sx_i]e_j = (x_1, \dots, x_{i-1}, cx_i + sx_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, cx_j - sx_i, x_{j+1}, \dots, x_n)^T$.

以 $n = 2$ 为例, 设 $x = (x_1, x_2)^T$ 是单位向量, 选取 $c = x_1, s = x_2$, 则 $Gx = e_1$.

45. (1) 证明任何线性变换的伴随变换是唯一存在的;

(2) 设 σ 是平面上的线性变换

$$\sigma : (x, y)^T \mapsto (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)^T.$$

证明 σ 的伴随变换 σ^* 是

$$\sigma^* : (x, y)^T \mapsto (a_1x + a_2y, b_1x + b_2y)^T.$$

一般地, 设 σ, τ 是欧氏空间 V 的两个线性变换, A, B 分别是 σ, τ 在某组标准正交基下的矩阵. 则

- (a) $(\sigma^*)^* = \sigma$;
- (b) $(\sigma + \tau)^* = \sigma^* + \tau^*$;
- (c) $(\lambda\sigma)^* = \lambda\sigma^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- (d) $(\sigma\tau)^* = \tau^*\sigma^*$;
- (e) $\tau = \sigma^* \iff B = A^T$.

(3) 证明正交投影变换是自伴变换.

证明：(1) 利用矩阵与线性变换的对应关系可知，若 σ 在某组基下的矩阵是 A ，则在该组基下的矩阵为 A^T 的线性变换就是 σ 的伴随变换。

(2) 由 (3) 中的 (e) 可知。

(3) 由矩阵与线性变换的对应关系以及“若 σ 在某组基下的矩阵是 A ，则其伴随变换在该组基下的矩阵为 A^T ”可知 (此即 (1) 的证明)。

46. (1) 如何在酉空间中定义 Hermite 矩阵对应的 Hermite 变换？导出 Hermite 变换的一个判断准则；

(2) 在酉空间中定义伴随变换与自伴变换，并导出伴随变换的基本性质 (参考定理 2.4.5)。

解：(1) $(\sigma(x), y) = (x, \sigma(y))$ (即与欧氏空间上的对称变换形式完全一致)。

(2) 同上题的 (2) (即与欧氏空间上的对称变换的形式完全一致)。

47. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 分别是 U 与 V 的一组基，则向量组 $(\alpha_i, 0), (0, \beta_j)$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ 构成 $U \oplus V$ 的一组基。

证明：验证线性无关性即可 (因为元素个数与直和空间的维数相等)。

48. 设 U 与 V 是 2 个内积空间，定义 $U \oplus V$ 上的函数如下：

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2).$$

证明上面的函数是 $U \oplus V$ 上的内积。

证明：对称性、正定性与双线性都可以直接验证。

49. 设 $\sigma_i \in \text{Hom}(U_i, V_i)$, $i = 1, 2$. 定义 $U_1 \oplus U_2$ 到 $V_1 \oplus V_2$ 的映射 σ 如下 (其中 $u_i \in U_i$)：

$$\sigma(u_1 + u_2) = \sigma_1(u_1) + \sigma_2(u_2).$$

则 σ 是线性变换。

证明：直接验证即可。

50. 设 $\sigma_i \in \text{Hom}(U_i, V_i)$, $1 \leq i \leq n$. 再设 σ_i 关于 $\alpha_i - \alpha'_i$ - 基的矩阵为 A_i . 则 $\sum_{i=1}^n \oplus \sigma_i \in \text{Hom}(\sum_{i=1}^n \oplus U_i, \sum_{i=1}^n \oplus V_i)$ 关于 $\sum_{i=1}^n \oplus \alpha_i - \sum_{i=1}^n \oplus \alpha'_i$ - 基的矩阵为 $\sum_{i=1}^n \oplus A_i$.

证明：利用线性变换的直和的定义直接计算即可。

51. 证明公式 (2.5.11) 定义了一个线性变换。

52. 证明命题 2.5.1.

53. 证明定理 2.5.6.

54. 证明集合 V/U 按公式公式 (2.5.12) 定义的加法和数乘成线性空间。

55. 证明命题 2.5.1.

56. 验证公式公式 (2.5.15) 定义的诱导映射 $\bar{\sigma}$ 是线性变换。条件“ U 是 σ 的不变子空间”可以去掉吗？

57. 设 $A \in M_s(\mathbb{F})$, $B, C \in M_{n-s}(\mathbb{F})$. 设 V 是有限维线性空间, $\sigma \in \text{End}V$. 设 σ 在 V 的两组基