Bài giảng

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
(GRAPH THEORY)

TS. Nguyễn Thị Phương Trâm

Tài liệu tham khảo:

- Silde bài giảng ThS. Trần Quốc Việt
- Silde bài giảng ThS. Lê Phi Hùng
- Nguyễn Cam, Chu Đức Khánh, *Lý thuyết Đồ thị*, 1998.
- Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications

Chương 3

ĐỒ THỊ PHẲNG

(Planar Graph)

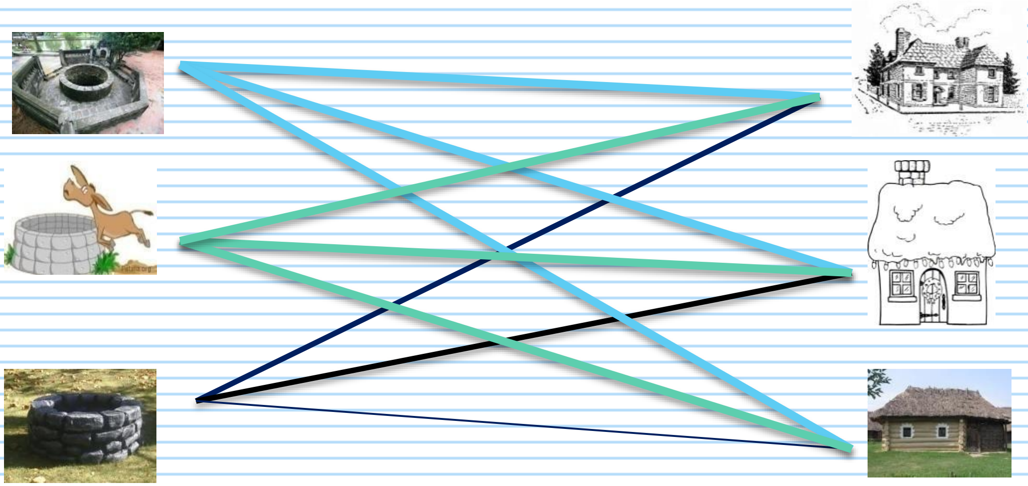
Nội dung

1. Khái niệm và định nghĩa
2. Công thức Euler
3. Một số đồ thị không phẳng
4. Bất đẳng thức EV
5. Định lý KURATOWSKI
6. Ứng dụng đồ thị phẳng trong:
   - Bài toán tô màu đồ thị
   - Bài toán lập lịch thi

1. Khái niệm và định nghĩa

Bài toán cổ: "Ba nhà, ba giếng": Có ba nhà ở gần ba cái giếng, nhưng:

- Không có đường nối trực tiếp giữa các nhà với nhau
- Không có đường nối trực tiếp giữa các giếng với nhau



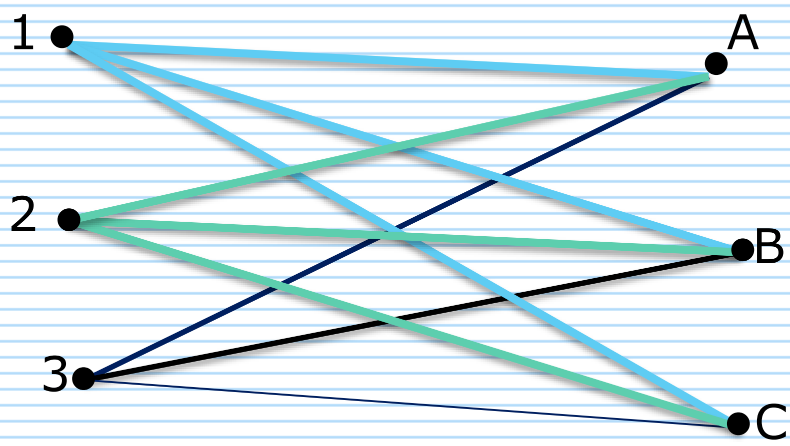
- Mỗi nhà đều có đường đi đến cả 3 giếng

Có cách làm các đường này mà đôi một không giao nhau hay không ?

Khái niệm và định nghĩa

Biểu diễn bài toán bằng đồ thị:

- Mỗi nhà ↔ một đỉnh
- Mỗi giếng ↔ một đỉnh
- Một đường đi giữa một nhà và một giếng ↔ một cạnh



Đồ thị G:

$K_{3,3}$

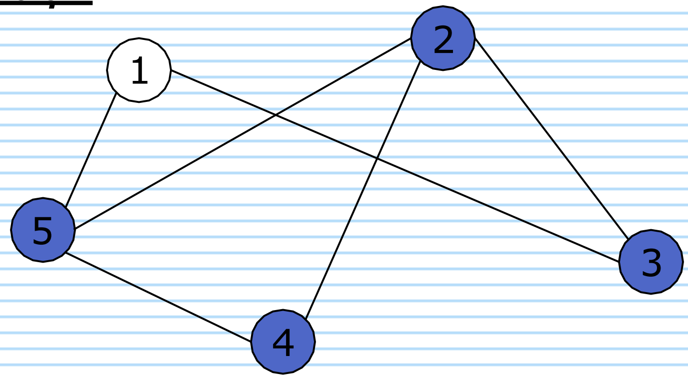
“Tồn tại hay không cách vẽ đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$ trên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau?”

Khái niệm và định nghĩa

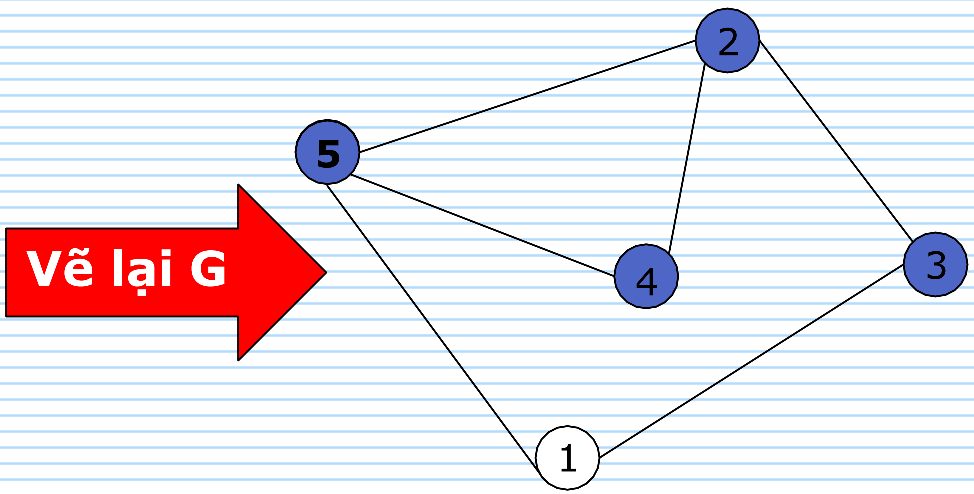
<u>Định nghĩa đồ thị phẳng:</u>

- Một đồ thị được gọi là đồ thị phẳng (Planar Graph) nếu ta có thể vẽ nó trên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau ở một điểm không phải là đỉnh của đồ thị (việc vẽ đồ thị trên mặt phẳng gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị)

<u>Ví dụ:</u>



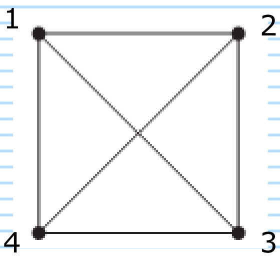
G



Một biểu diễn phẳng của G

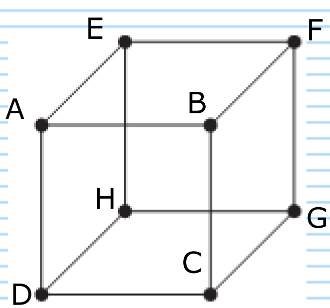
Khái niệm và định nghĩa

G



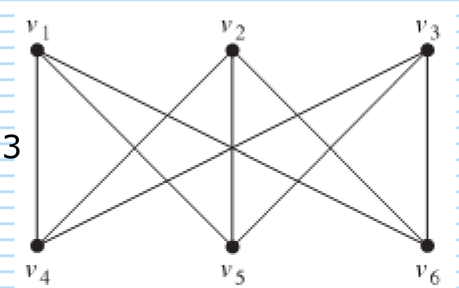
Biểu diễn phẳng của G?

Q_3



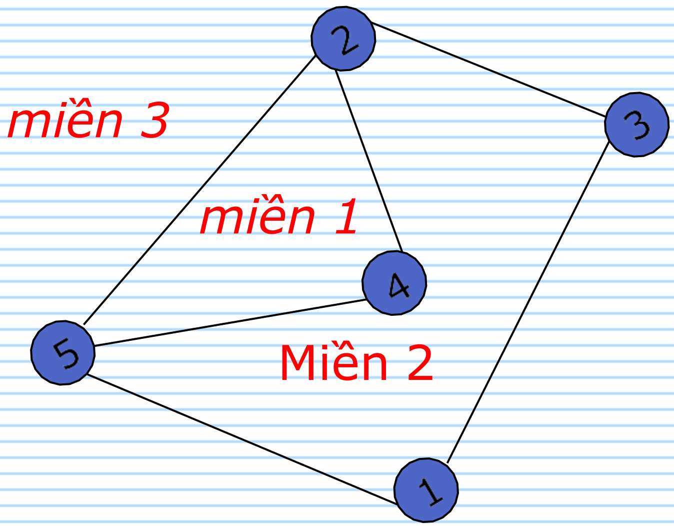
Biểu diễn phẳng của Q_3?

$K_{3,3}$



Biểu diễn phẳng của $K_{3,}7_{3}$?

Khái niệm và định nghĩa



***miền 1, miền 2**: hữu hạn*
***miền 3**: vô hạn*

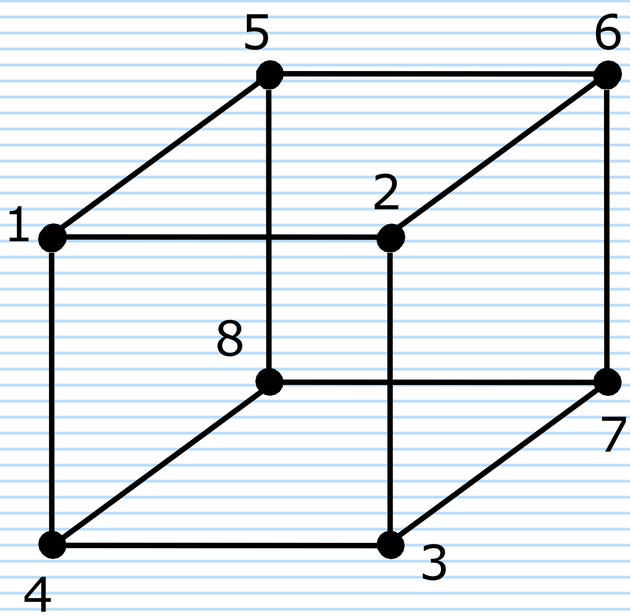
(5,4),(4,2),(2,5): Biên của miền 1

Cho G là đồ thị phẳng:

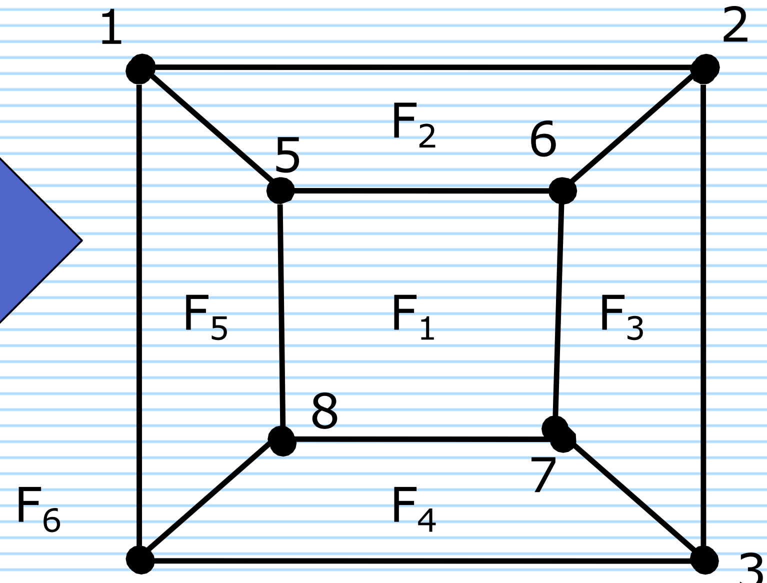
- Các cạnh của đồ thị chia mặt phẳng thành các **miền** (Region)
- Phần giới hạn bởi một chu trình đơn không chứa bên trong một chu trình đơn khác được gọi là một **miền hữu hạn**.
- Mọi đồ thị phẳng luôn có một **miền vô hạn** duy nhất.
- Chu trình giới hạn miền gọi là **biên** của miền

Khái niệm và định nghĩa

Ví dụ:



Q_3



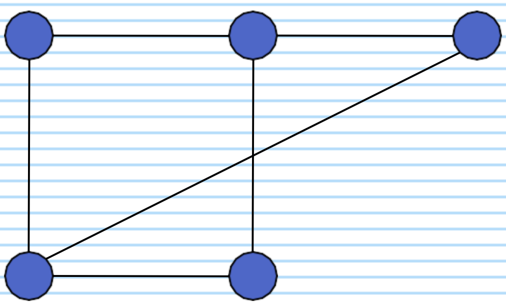
Q_3

Q_3 là đồ thị Phẳng

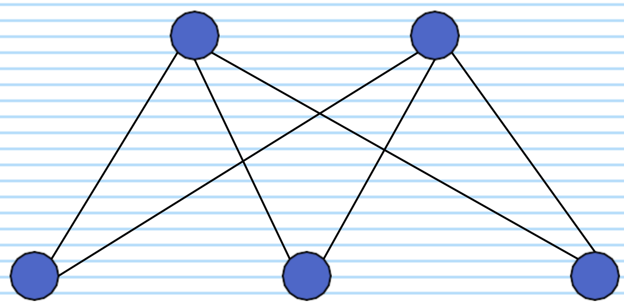
F_1, F_2, F_3, F_4, F_5: các miền hữu hạn
F_6: Miền vô hạn

Bài tập

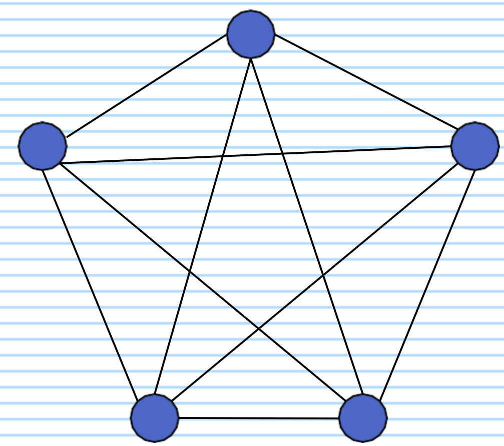
- Trong các đồ thị sau, đồ thị nào là phẳng? Nếu đồ thị là phẳng, hãy biểu diễn phẳng nó?



G_1



G_2



G_3

Một số ứng dụng của đồ thị phẳng

- **Xây dựng mạng giao thông**: Giả sử cần xây dựng một mạng giao thông kết nối một nhóm các thành phố
  - Biểu diễn bằng đồ thị:
    - Mỗi đỉnh ↔ một thành phố
    - Mỗi cạnh ↔ một đường đi trực tiếp giữa hai thành phố
  - Nếu biểu diễn được bằng một đồ thị phẳng ⇒ không cần phải xây các cầu vượt (hầm chui)

2. Công thức Euler (Euler's Fomula)

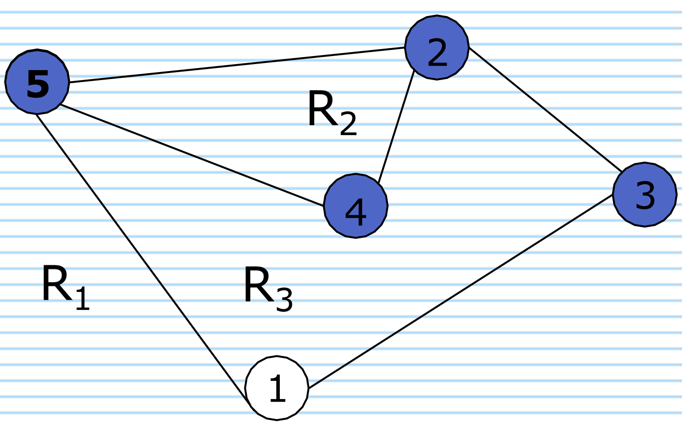
Cho G là đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, v đỉnh, r miền (trên biểu diễn phẳng của G)

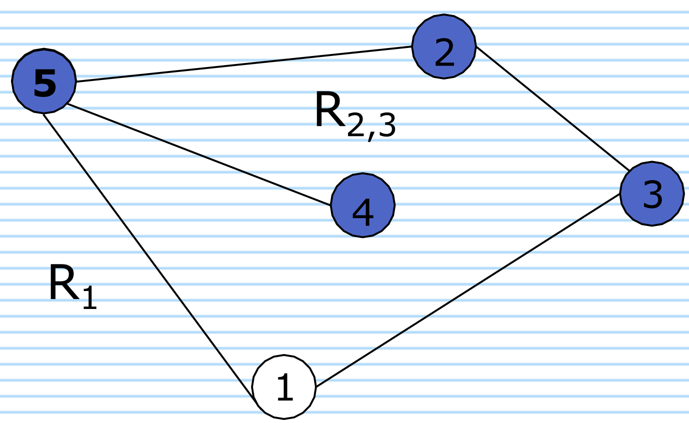
Khi đó:

$$\boxed{r = e - v + 2}$$

c/m: Ta bỏ một số cạnh của G để thu được cây khung G' của G

- Khi bỏ 1 cạnh, số miền cũng giảm 1

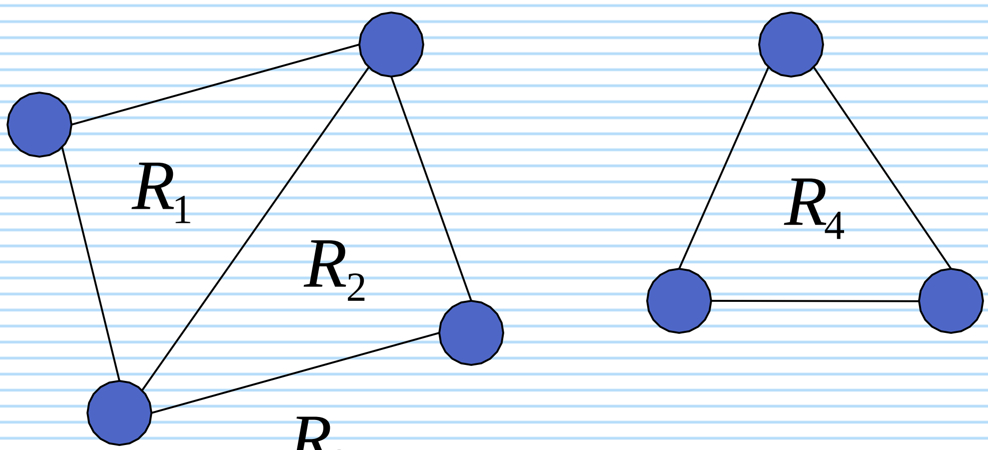




2. Công thức Euler

❖ ***Hệ quả 1***: G là một đồ thị phẳng với v đỉnh, e cạnh, r miền, p là số thành phần liên thông. Khi đó ta có:

$$v - e + r = p + 1$$



v – e + r = p + 1
7 – 8 + 4 = 2 + 1

P=2; r=4; v=7; e=8

2. Công thức Euler

- **Hệ quả 2.** Giả sử *G là đơn đồ thị phẳng liên thông với v đỉnh, trong đó v ≥ 3 và e cạnh. Khi đó*

$$e \leq 3v - 6$$

- **Hệ quả 3.** Giả sử *G là đơn đồ thị phẳng liên thông với v đỉnh, trong đó có 1 đỉnh có bậc không quá 5. khi đó*

$$\frac{2}{3}e \geq r$$

- **Hệ quả 4 : K_5 không là đồ thị phẳng**

➔ HQ3 có thể chứng minh K_5 không là đồ thị phẳng

2. Công thức Euler

- **Hệ quả 5.** *Giả sử G là đơn đồ thị phẳng liên thông với v đỉnh,* $v \geq 3$ *và e cạnh và không chu trình với độ dài là 3 (không chứa tam giác). Khi đó*

$$e \leq 2v - 4$$

- **Hệ quả 6.** $K_{3,3}$ **không là đồ thị phẳng.**

➔ HQ5 có thể chứng minh $K_{3,3}$ **không là đồ thị phẳng**

2. Công thức Euler

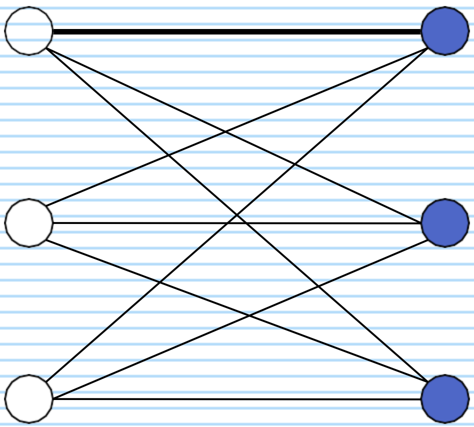
- *Ví dụ*: Một đơn đồ thị liên thông, phẳng G có 20 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 3. Một biểu diễn phẳng của đồ thị G chia đồ thị mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Một số ví dụ khác!!!

3. Một số đồ thị không phẳng

- Các đồ thị K_1, K_2, K_3, K_4 là các đồ thị phẳng. Đồ thị K_5 không là đồ thị phẳng
- Đồ thị $K_{m,n}$ $(m,n \geq 3)$ không là đồ thị phẳng

Ví dụ:



$K_{3,3}$

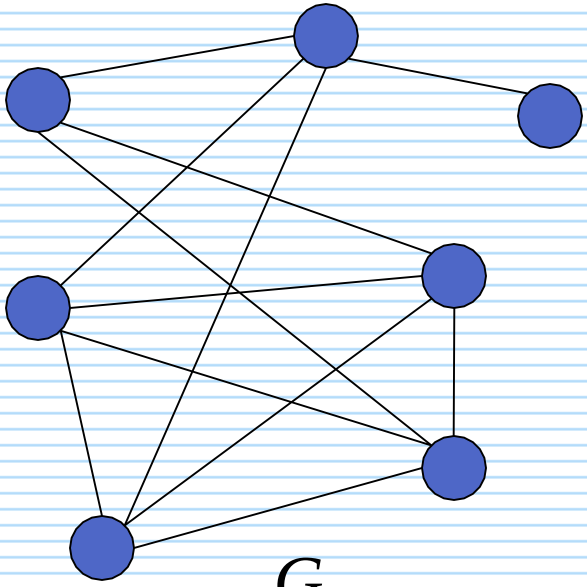
K3,3 không là đồ thị phẳng

3. Một số đồ thị không phẳng

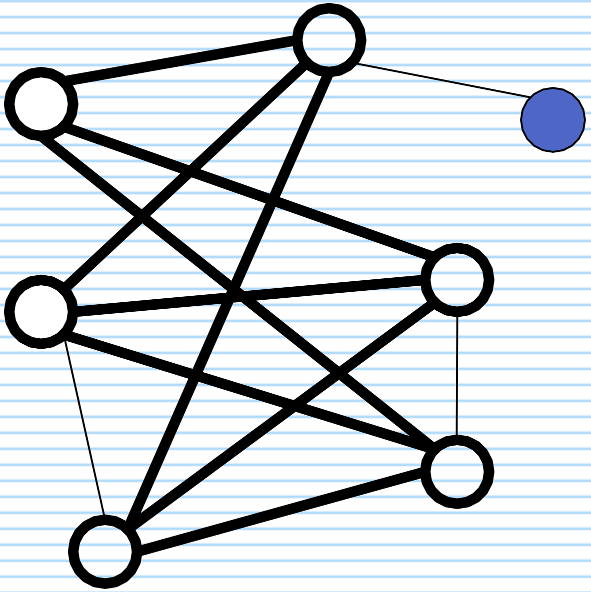
Định lý: Cho H là đồ thị con của đồ thị G:

- Nếu G phẳng thì H phẳng
- Nếu H không phẳng thì G không phẳng

Ví dụ: Cho đồ thi G như sau



G



G không phẳng vì $K_{3,3} \leq G$, $K_{3,3}$ không phẳng

3. Một số đồ thị không phẳng

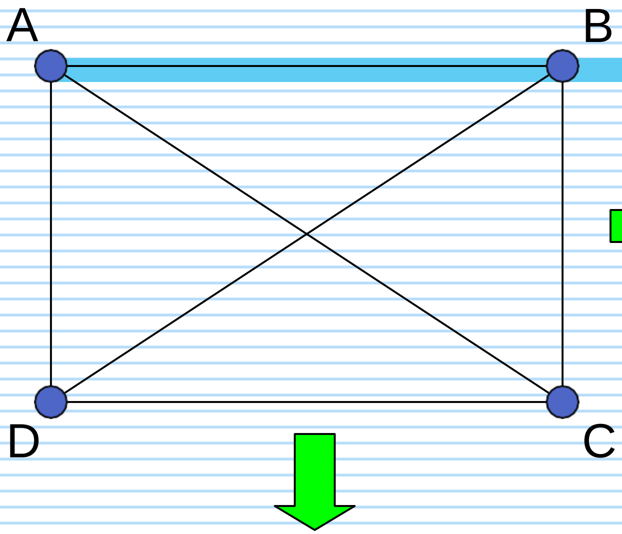
Như vậy: Một đồ thi G không phẳng nếu nó có đồ thị con là $K_{3,3}$ hoặc K_5

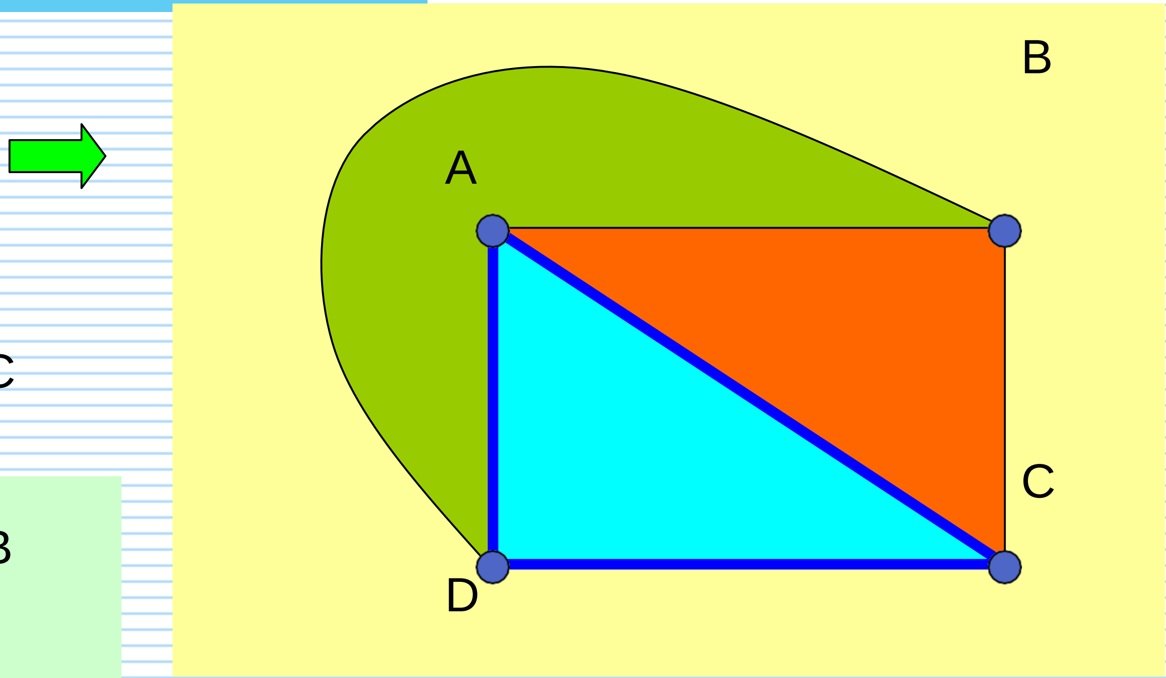
Đai của đồ thị

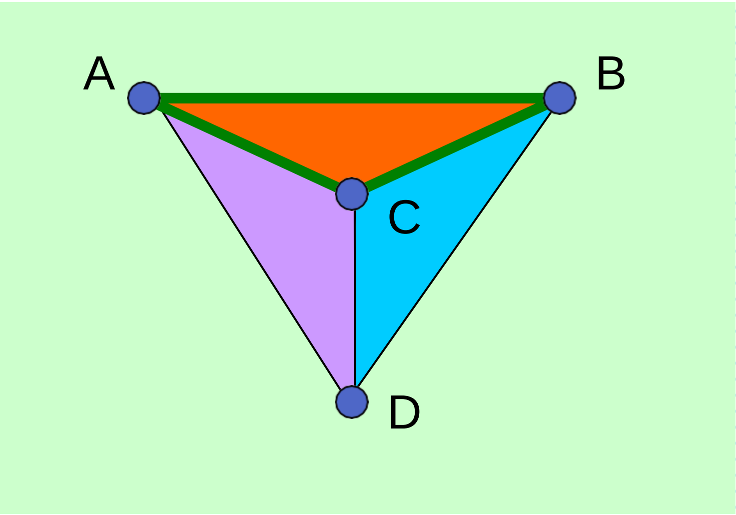
Định nghĩa: Cho một đồ thị G.

- Số g = chiều dài của chu trình đơn giản ngắn nhất trong G gọi là đai (*girth*) của G.
- Trường hợp nếu G không có chu trình thì g = số cạnh của G.

Thí dụ về đai







Đai g = 3

4. Bất đẳng thức EV

***Bất đẳng thức EV (The Edges - Vertices Inequality)*:**

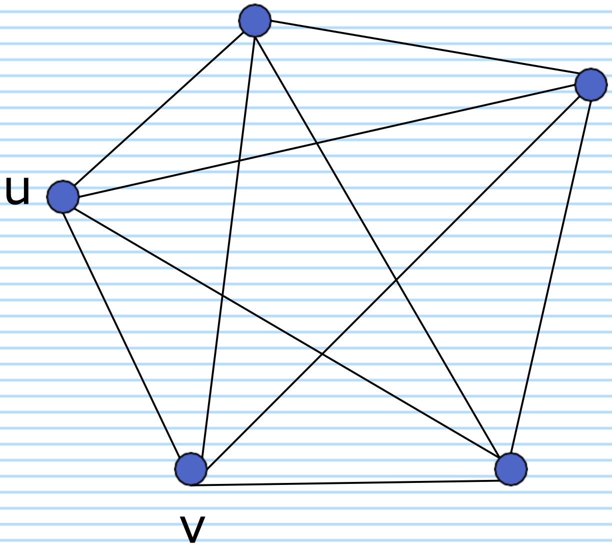
Cho G là đồ thị liên thông có n đỉnh, m cạnh và đai là g≥3. Nếu G phẳng thì ta có bất đẳng thức:

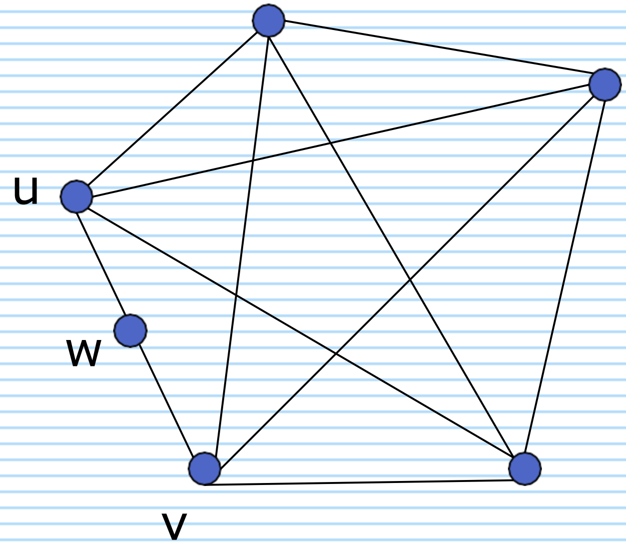
$$m \le \frac{g}{g-2}(n-2)$$

5. Định lý KURATOWSKI

5.1. Phép phân chia sơ cấp:

Cho đồ thị G = (V,E). Phép bỏ đi 1 cạnh (u, v) ∈ E và thêm vào đỉnh w và 2 cạnh (u,w), (w, v) được gọi là phép phân chia sơ cấp (elementary subdivision).



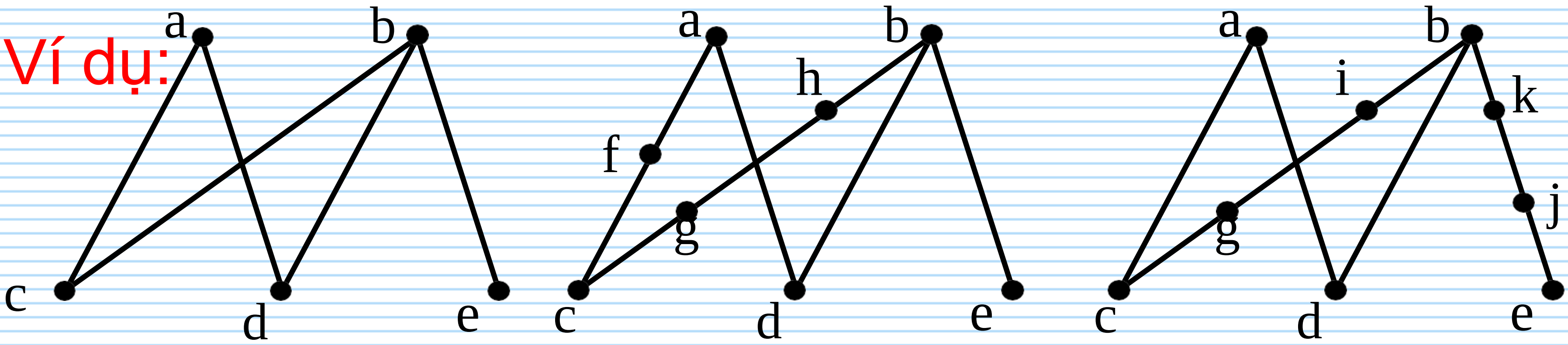


5. Định lý KURATOWSKI

5.2. Các đồ thị đồng phôi

Đồ thị G' được gọi là đồng phôi (homeomorphic) với đồ thị G nếu G' có được từ G bằng một chuỗi các phép chia sơ cấp

Ví dụ:



G_1 G_2 G_3

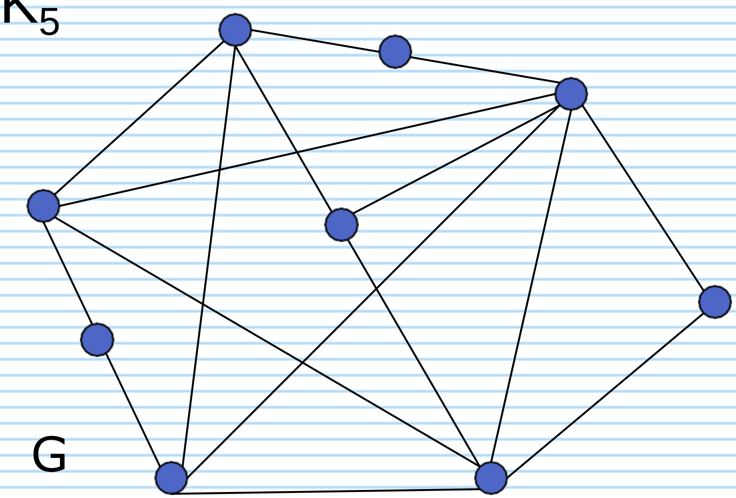
G_2 , G_3 , đồng phôi với G_1

5. Định lý KURATOWSKI

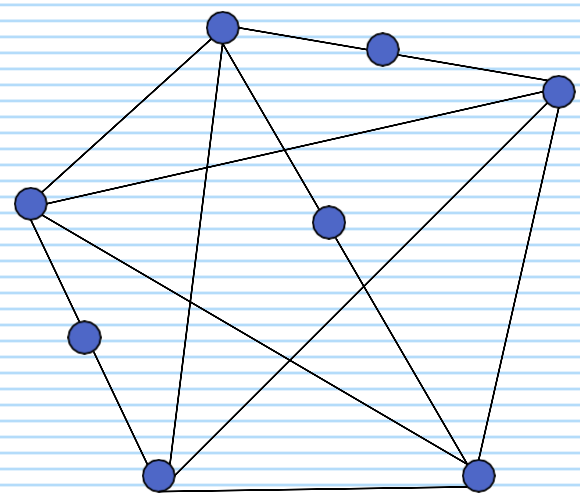
5.3. Định lý Kuratowski:

Một đồ thị là đồ thị phẳng khi và chỉ khi nó không chứa đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ và K_5

Ví dụ: Đồ thị G sau đây không phẳng vì chứa đồ thị con đồng phôi với K_5



G

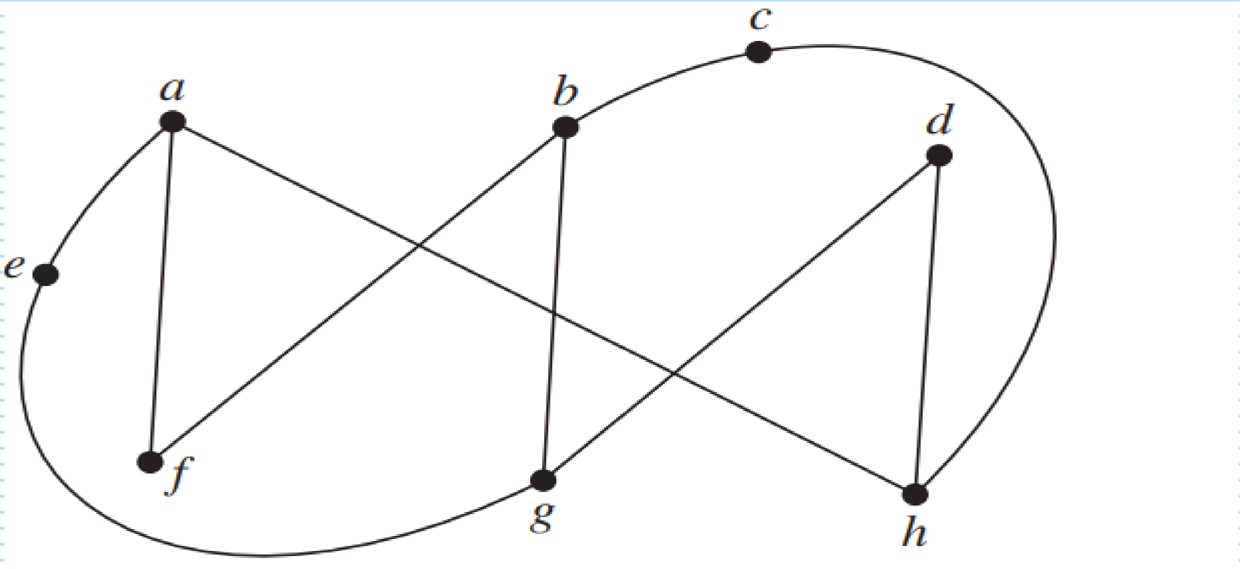


H

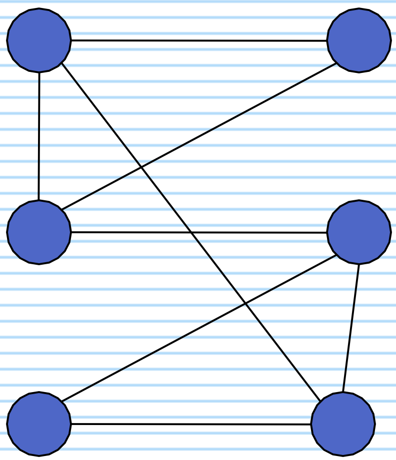
H≤G, H đồng phôi với K_5

5. Định lý KURATOWSKI

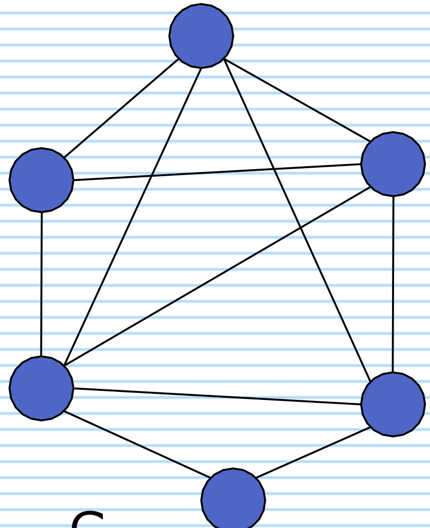
Bài tập: Cho đồ thị G như hình bên dưới, xác định G có phẳng hay không? Hãy giải thích? Nếu phẳng hãy vẽ lại hình



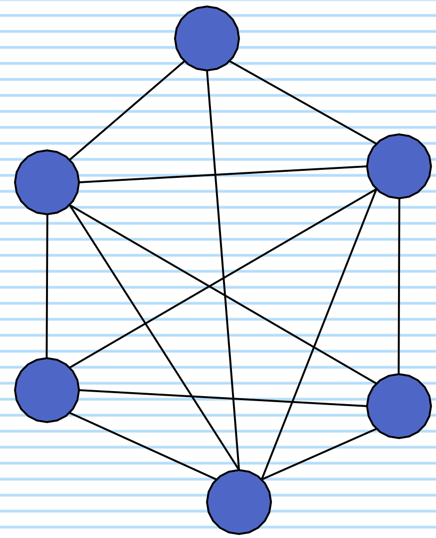
Trong các đồ thị sau, đồ thị nào phẳng, đồ thị nào không phẳng? Vẽ lại đồ thi nào là phẳng sao cho không có cạnh cắt nhau ngoài đỉnh



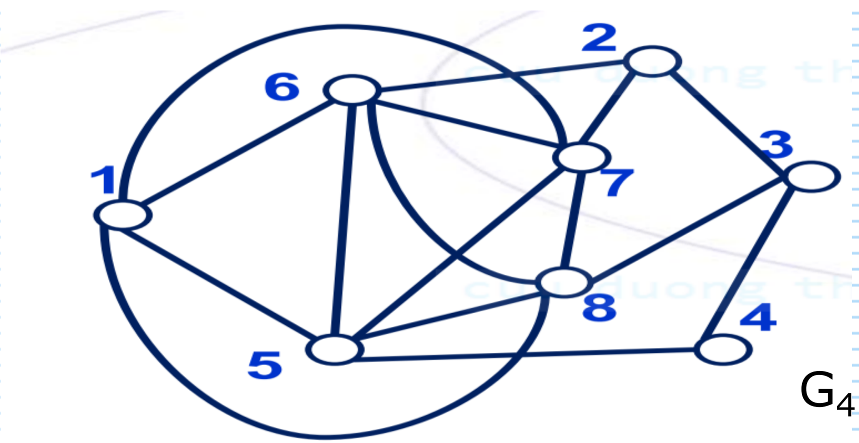
G_1



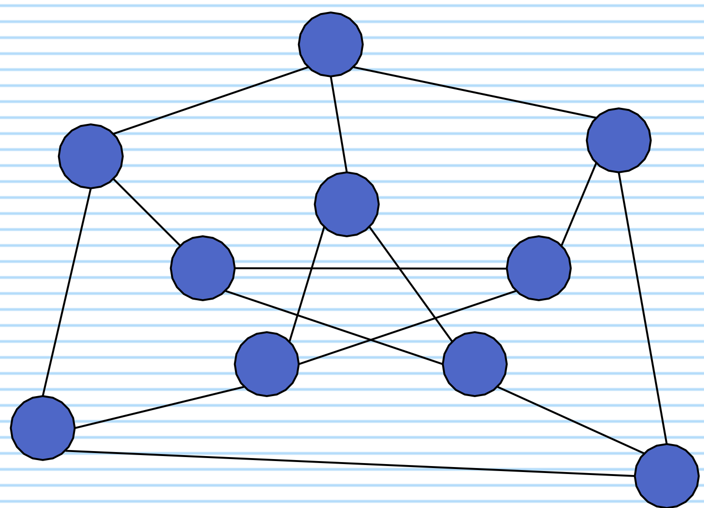
G_2



G_3

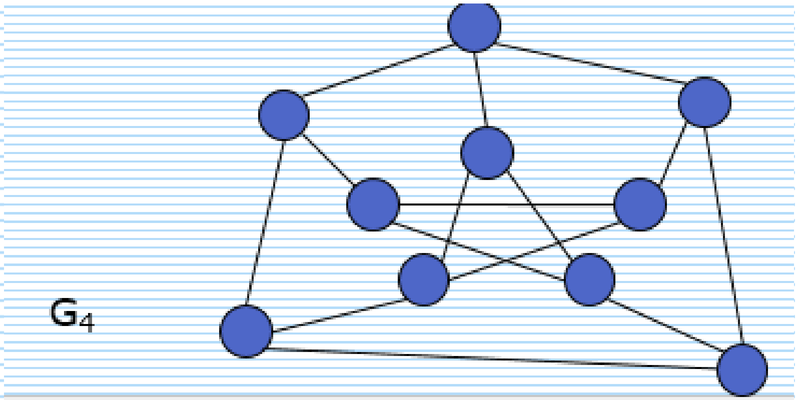


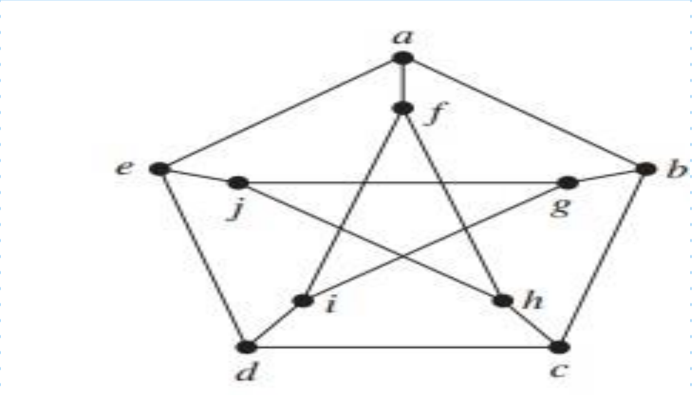
G_4



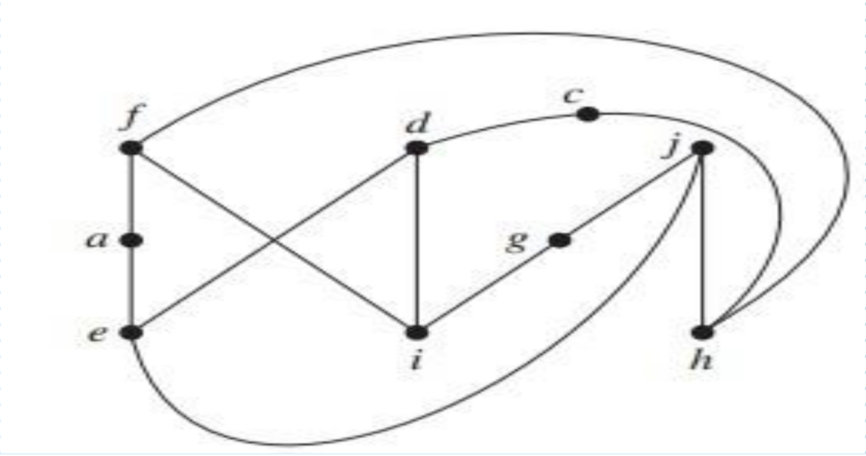
G_5

Trong các đồ thị sau, đồ thị nào phẳng, đồ thị nào không phẳng? Vẽ lại đồ thi nào là phẳng sao cho không có cạnh cắt nhau ngoài đỉnh

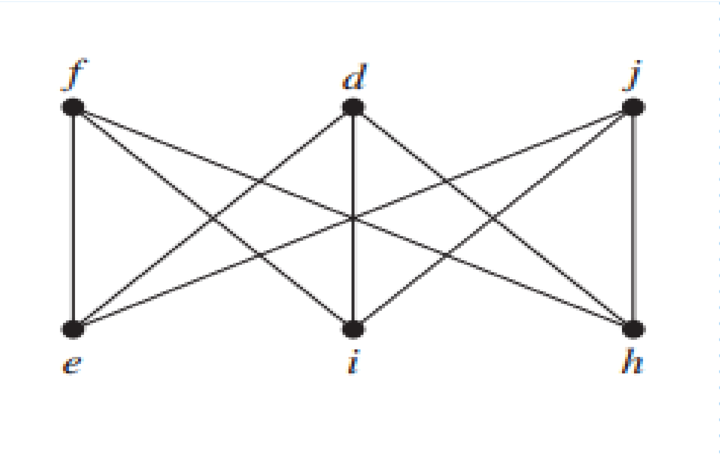




G4: The Petersen Graph

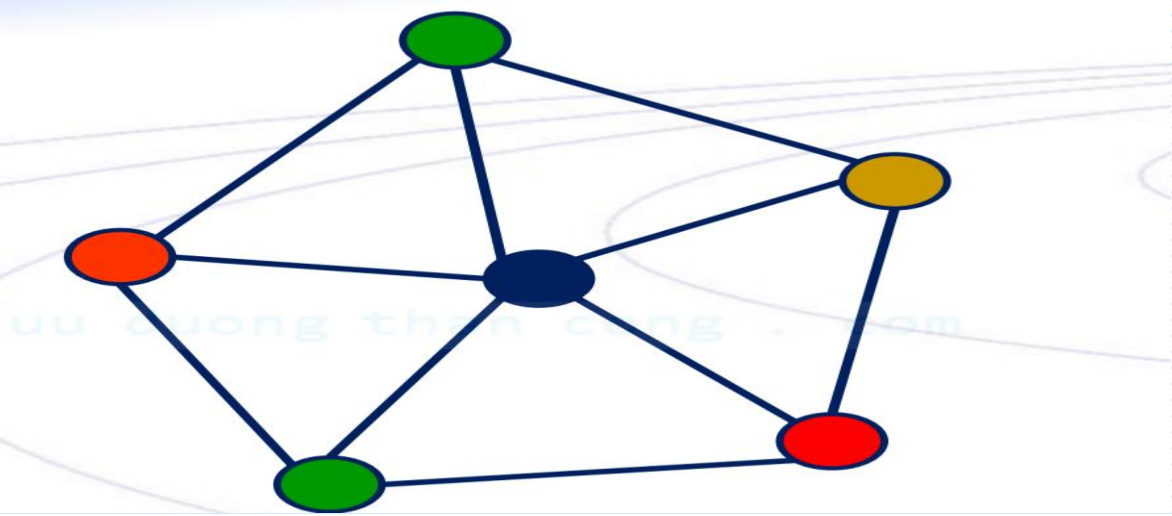


H: a Subgraph *H* Homeomorphic to *K*3,3



F: K3,3

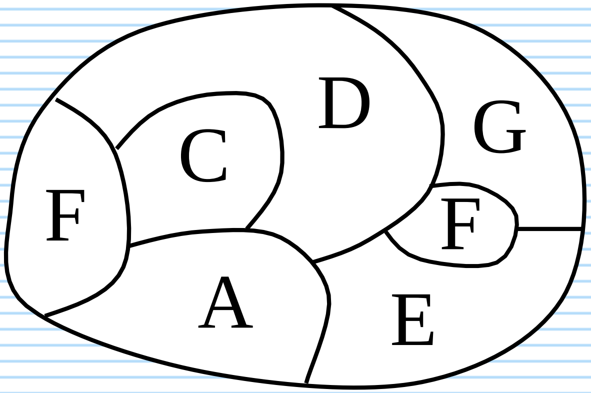
6. Tô màu đồ thị

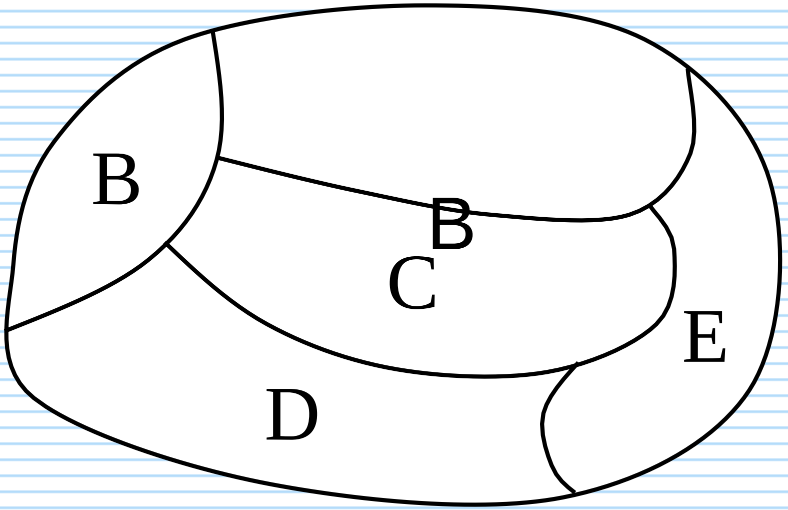


Tô màu đồ thị

Bài toán: Để phân biệt các miền trên bản đồ ta phải tô màu chúng bằng các màu khác nhau.

Hỏi cần ít nhất bao nhiêu màu để tô một bản đồ bất kỳ sao cho các miền kề nhau không cùng một màu.

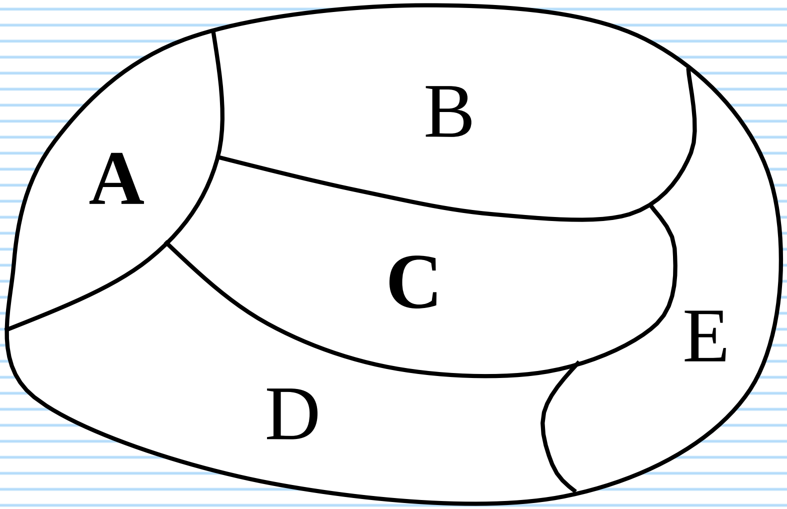


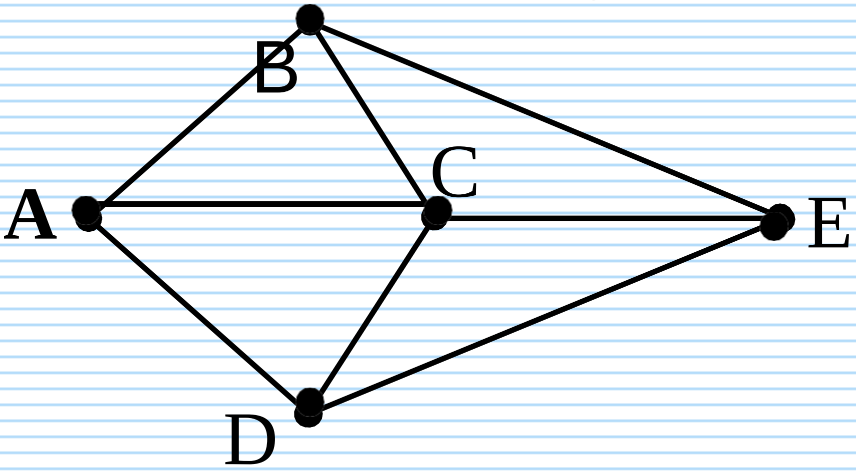


Tô màu đồ thị

<u>Mô hình hoá bài toán:</u>

+ Mỗi miền tương ứng một đỉnh của đồ thị.
+ Hai đỉnh có cạnh nối nếu chúng là hai miền có chung biên Đồ thị nhận được gọi là đồ thị đối ngẫu của bản đồ.
+ Đồ thị đối ngẫu của bản đồ là đồ thị phẳng.



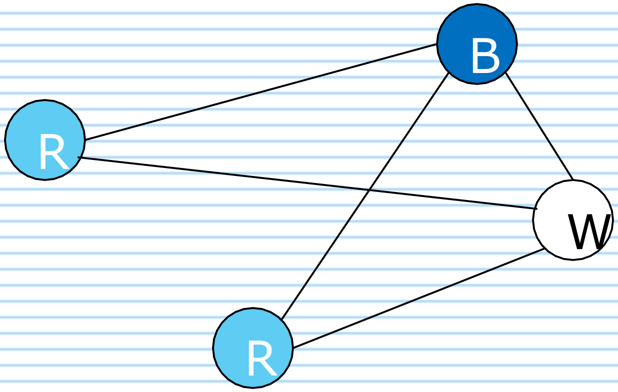


Tô màu đồ thị

Bài toán tương đương: tô màu các đỉnh của đồ thị sao cho hai đỉnh kề nhau thì được tô bởi hai màu khác nhau và số lượng màu sử dụng là ít nhất

Định nghĩa: Tô màu một đơn đồ thị là gán mỗi màu cho một đỉnh của đồ thị sao cho không có 2 đỉnh kề được gán cùng một màu .

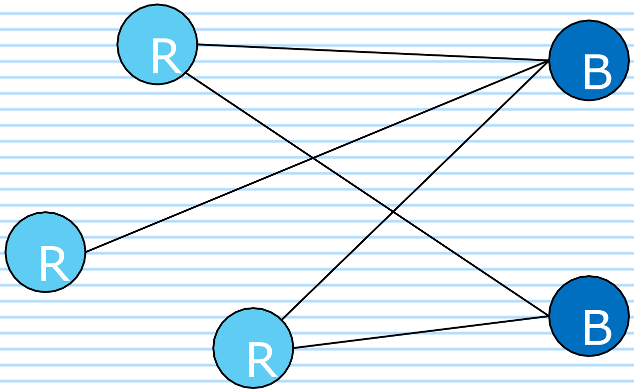
Ví dụ:



Tô màu đồ thị

Định nghĩa: số màu của một đồ thị G (kí hiệu : χ(G)) là số màu tối thiểu cần để tô màu đồ thị G

Ví dụ: Xét đồ thị G:



Số màu của đồ thị G là 2

Định lý 4 màu: số màu của một đồ thị phẳng bất kỳ là một số không lớn hơn 4.

Nhận xét:

- Số màu của đồ thị lưỡng phân là 2 màu.
- Số màu của đồ thị đầy đủ K_n là n màu

GIẢI THUẬT GẦN ĐÚNG (giải thuật Greedy Search)

//Giải thuật tham lam tô màu đồ thị

Input: G(V, E)

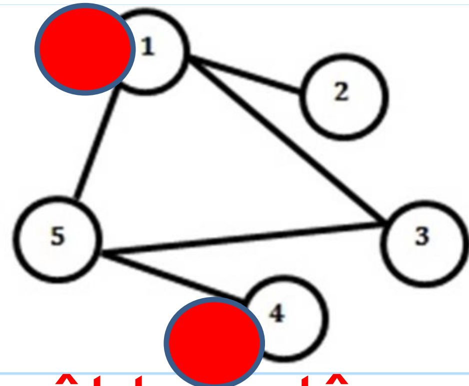
Output: đồ thị được tô màu

1. Xác định bậc các đỉnh trong đồ thị, sắp xếp các đỉnh theo thứ tự giảm dần của bậc; khởi động color = 1;
2. Lặp trong khi còn đỉnh chưa được tô màu
   a) Tô màu tất cả các đỉnh có thể tô được bằng màu color theo thứ tự ưu tiên bậc từ cao đến thấp
   b) color = color + 1

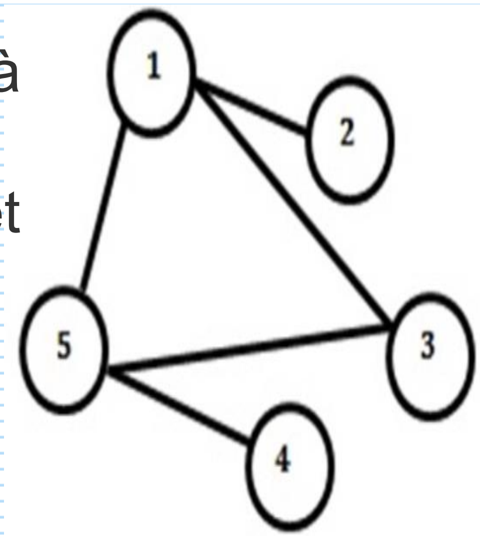
GIẢI THUẬT GẦN ĐÚNG (giải thuật Greedy Search)

- **Các bước của thuật toán:**
  - **Bước 1:** Tính giá trị bậc của các đỉnh trong V. Lập danh sách V':=[v1tv2, ...,vn] là các đỉnh của đồ thị được sắp xếp theo thứ tự bậc giảm dần: d(v1) > d(v2) > ... > d(vn). Gán i := 1;
  - **Bước 2:** Tô màu i cho đỉnh đầu tiên trong danh sách V'. Duyệt lần lượt các đỉnh khác trong V'(nếu có) và chỉ tô màu i cho các đỉnh không kề đỉnh đã có màu i.
  - **Bước 3:** Kiểm tra nếu tất cả các đỉnh trong V đã được tô màu thì thuật toán kết thúc, đồ thị đã sử dụng i màu để tô. Ngược lại, nếu vẫn còn đỉnh chưa được tô thì chuyển sang bước 4.
  - **Bước 4:** Loại khỏi danh sách V' các đỉnh đã tô màu. Sắp xếp lại các đỉnh trong V' theo thứ tự bậc giảm dần. Gán i := i + 1 và quay lại bước 2.

GIẢI THUẬT GẦN ĐÚNG (giải thuật Greedy Search)



Ví dụ: Cho đồ thị như hình vẽ, sử dụng thuật toán tô màu đồ thị ở trên, tô màu cho các đỉnh của đồ thị.

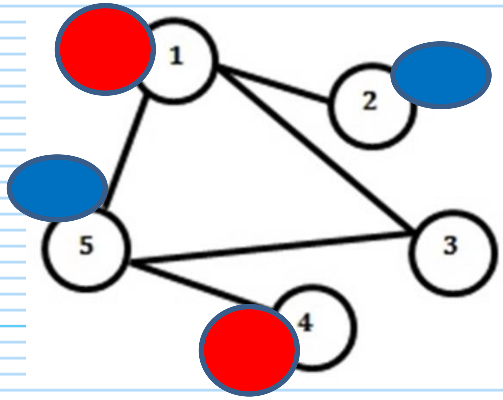


- **Bước 1:** Ta có đồ thị có 5 đỉnh được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 với các bậc tương ứng với từng đỉnh theo thứ tự là 3, 1, 2, 1, 3. Do đó V' ban đầu có thứ tự là **[1, 5, 3, 2, 4]. Gán i =1.**
- **Bước 2:** Tô màu 1 (red) cho đỉnh 1. Lần lượt duyệt các đỉnh còn lại trong V':

Ta có: Đỉnh 5 kề đỉnh 1 (đỉnh 1 đã tô màu 1 - red) nên chưa tô màu cho đỉnh 5. Tương tự các đỉnh 3, 2 đều kề với đỉnh 1 nên đỉnh 3, 2 cũng chưa được tô màu.

Đỉnh 4 không kề với đỉnh 1, do đó thực hiện tô màu 1 cho đỉnh 4. Đỉnh 4 có màu 1 - red.

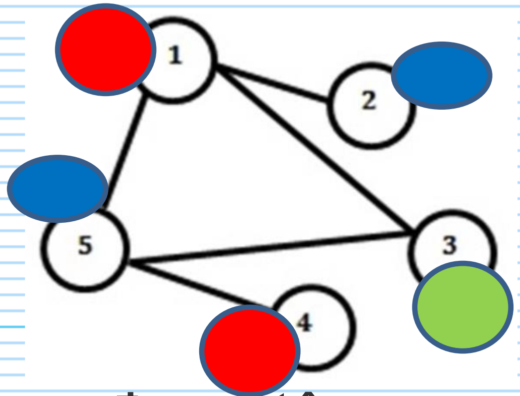
GIẢI THUẬT GẦN ĐÚNG (giải thuật Greedy Search)



- **Bước 3:** Kiểm tra thấy vẫn còn các đỉnh trong V chưa được tô màu nên chuyển sang bước 4
- **Bước 4:** Loại bỏ các đỉnh 1, 4 đã được tô màu ra khỏi V', sắp xếp lại V' theo thứ tự bậc giảm dần, ta thu được V'= [5, 3, 2]. Ta có i = 2. Thực hiện lặp lại bước 2:
- **Bước 2(1):** Tô màu 2 (blue) cho đỉnh 5. Lần lượt duyệt các đỉnh còn lại trong V'. Ta có: Đỉnh 3 kề đỉnh 5 (đã tô màu 2 - blue) nên chưa tô màu cho đỉnh 3.

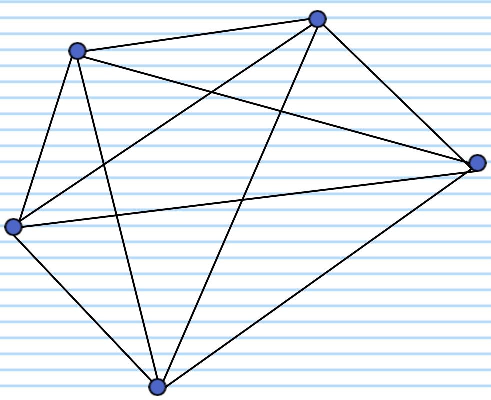
Đỉnh 2 không kề với đỉnh 5, do đó thực hiện tô màu 2 cho đỉnh 2. Đỉnh 2 có màu 2 - blue.

GIẢI THUẬT GẦN ĐÚNG (giải thuật Greedy Search)

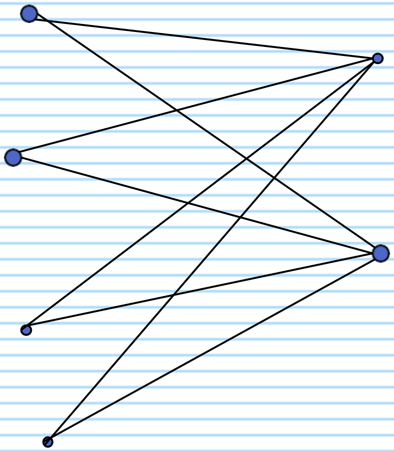


- **Bước 3(1):** Kiểm tra thấy vẫn còn đỉnh 3 chưa được tô màu nên chuyển sang bước 4.
- **Bước 4(1):** Loại bỏ các đỉnh 5, 2 đã được tô màu ra khỏi V', V'=[3]. Ta có i = 3. Thực hiện lặp lại bước 2:
- **Bước 2(2):** Tô màu 3 (Green) cho đỉnh 3.
- **Bước 3(2):** Kiểm tra thấy tất cả các đỉnh trong V đã được tô màu, thuật toán dừng lại.
- Kết luận: Đỉnh 1 và 4 được tô màu 1-red, đỉnh 5 và đỉnh 2 được tô màu 2-blue, đỉnh 3 được tô màu 3-Green. Số màu cần thiết phải sử dụng là i =3 màu.

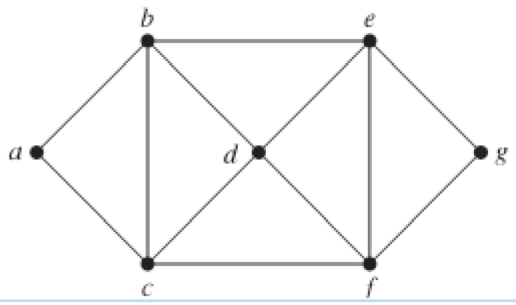
Ví dụ: Tìm số màu của các đồ thị sau:



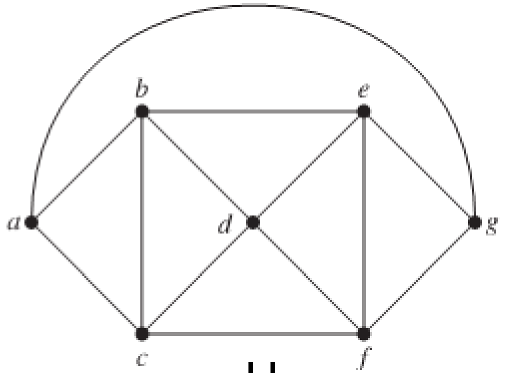
K_5



$K_{4,2}$



G



H

7. Ứng dụng của tô màu đồ thị trong bài toán lập lịch thi

Hãy lập lịch thi trong trường đại học sao cho không có sinh viên nào phải thi đồng thời hai môn cùng một lúc

Mô hình hoá bài toán:

- Mỗi đỉnh là một môn thi

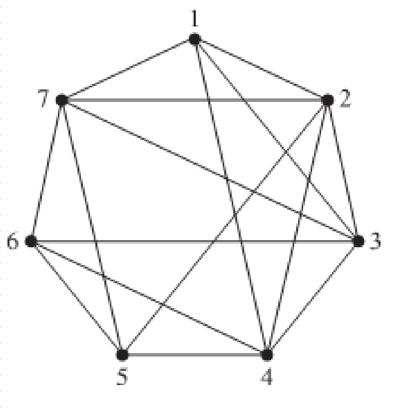
-Hai đỉnh có cạnh nối nếu đó là hai môn mà một sinh viên nào đó phải thi.

- Thời điểm thi mỗi môn ứng với một màu.

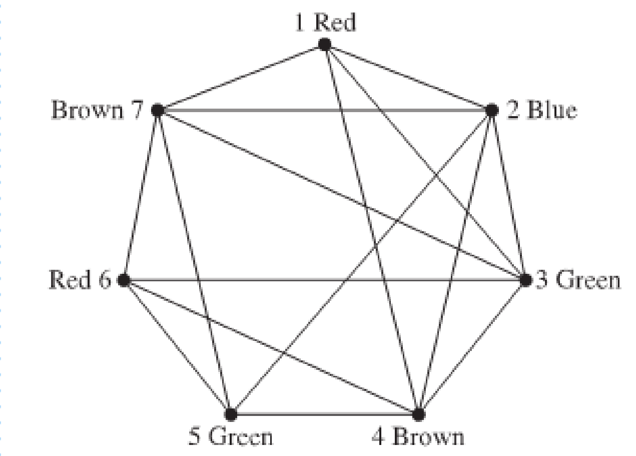
Bài toán trở thành bài toán tô màu cho đồ thị trên sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau.

Ví dụ:

- Giả sử có 7 môn cần xếp lịch thi, được đánh số từ 1 đến 7. G là đồ thị biểu diễn việc xếp lịch thi cho các sv



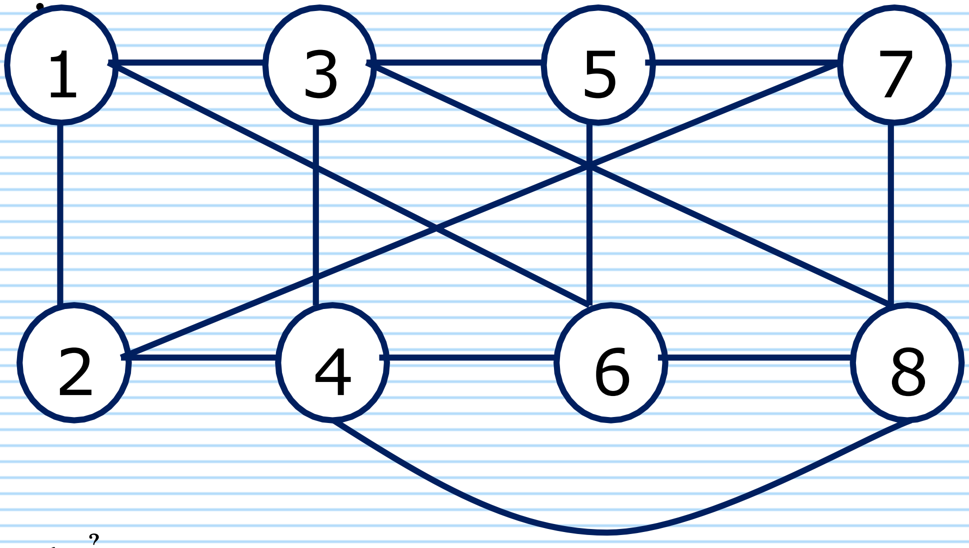
Nhận xét: Số màu của đồ thị là 4
⇒ Sử dụng 4 thời gian khác nhau để xếp lịch



Thứ tự thời gian	Các môn
I	1,6
II	2
III	3,5
IV	4,7

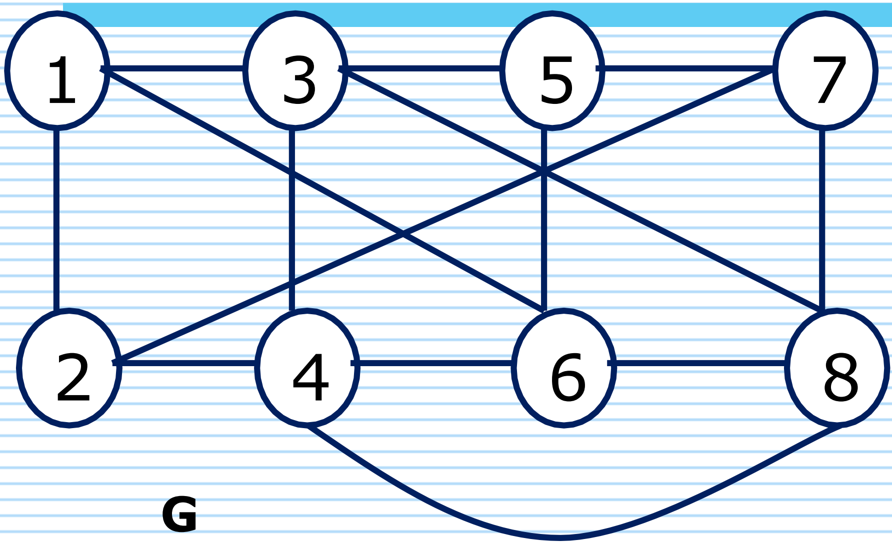
BÀI TẬP

- Cho đồ thị G:

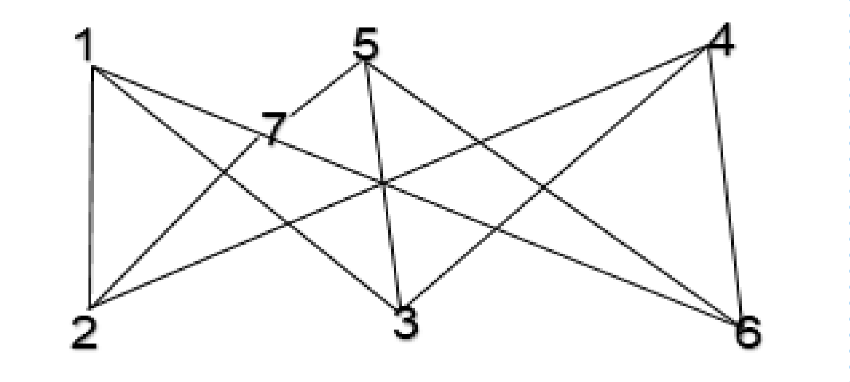


1. Xét tính phẳng của G
2. Tô màu G

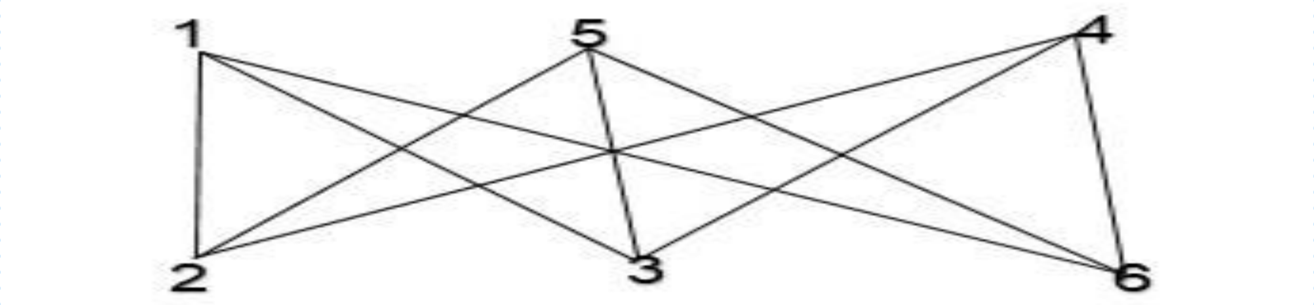
BÀI TẬP



G



The subgraph *H* of G Homeomorphic to *K*3,3



F: *K*3,3 là đồ thị lưỡng phân đầy đủ→ dùng 2 màu
G→ dùng 3 màu để tô

Xem thêm một số ứng dụng khác của bài toán tô màu đồ thị trong tài liệu tham khảo