Bài giảng

LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ (GRAPH THEORY)

TS. Nguyễn Thị Phương Trâm

Tài liệu tham khảo:

- Silde bài giảng ThS. Trần Quốc Việt
- Silde bài giảng ThS. Lê Phi Hùng
- Nguyễn Cam, Chu Đức Khánh, *Lý thuyết Đồ thị*, 1998.
- Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications
- Các nguồn khác từ internet

Chương 2

- **ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH EULER**
- **ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH HAMILTON**

ĐỒ THỊ EULER

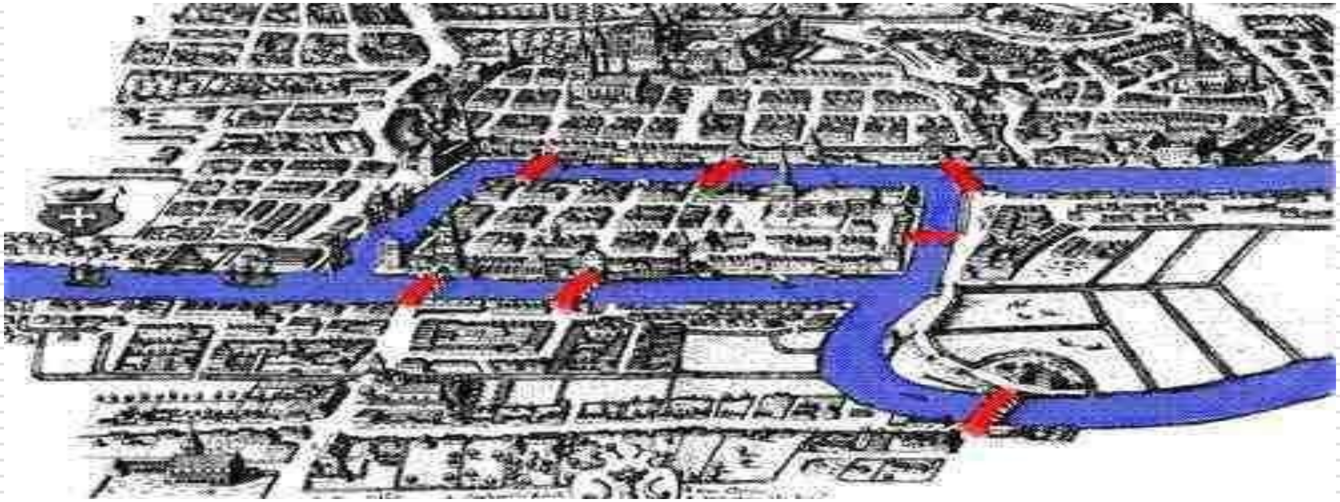
- Giới thiệu
- Các định nghĩa
- Các định lý
- Thuật toán tìm chu trình Euler

Đường đi và chu trình Euler

Leonhard Euler 1707–1783

Nhà toán học Thụy sĩ

Ví dụ :Bài toán về các cây cầu ở Konigsberg (Nga)

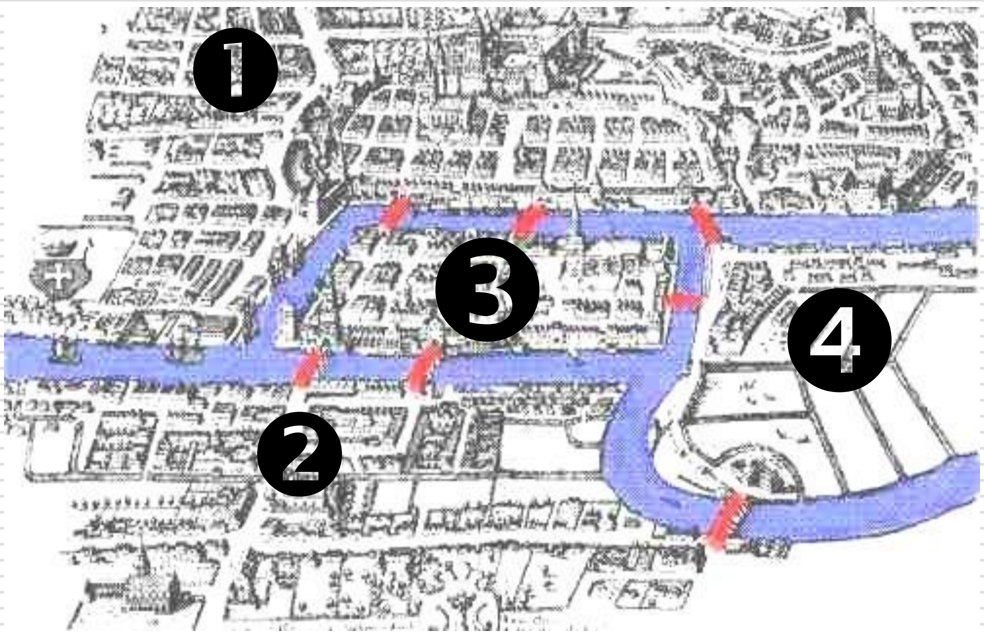


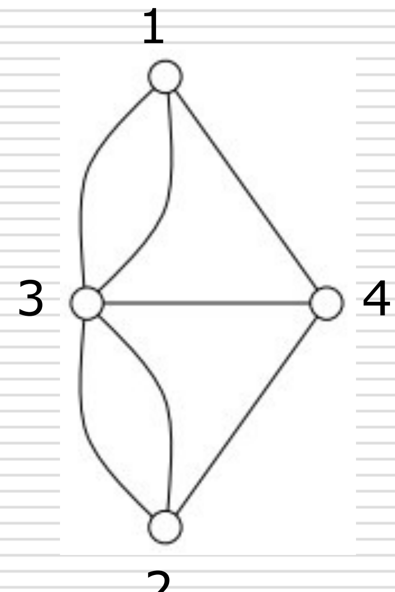
- Tìm cách đi qua cả bảy cây cầu, sau đó về điểm xuất phát, mỗi cây cầu chỉ đi qua một lần ? Nhiều người đã đi thử nhưng không thành công

- Năm 1736, L. Euler, đã dùng lý thuyết đồ thị, chứng minh được: Bài toán không thể có lời giải

Ví dụ :Bài toán về các cây cầu ở Konigsberg (tt)

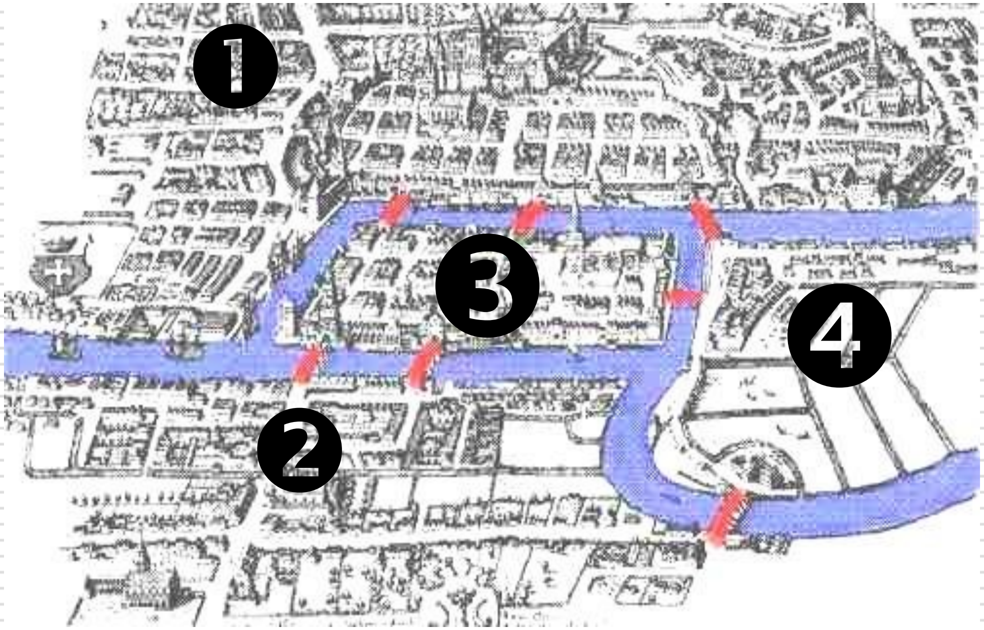
- Gọi 1, 2, 3 và 4 là 4 vùng đất bị ngăn cách bởi các nhánh sông
- Biểu diễn mỗi vùng đất bởi một đỉnh của đồ thị
- Một cạnh: một cây cầu nối giữa 2 vùng đất

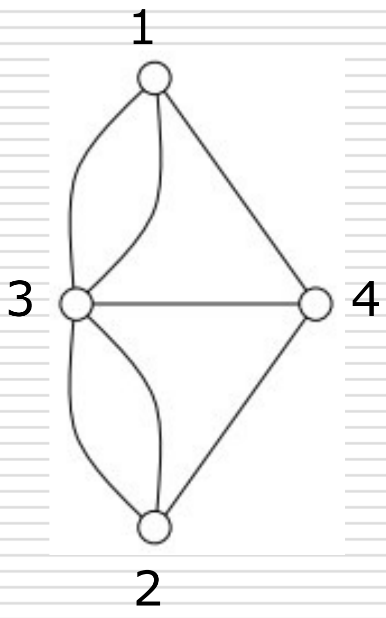




Ví dụ :Bài toán về các cây cầu ở Konigsberg (tt)

- Bài toán trở thành: Tìm một chu trình đơn đi qua tất cả các cạnh của đồ thị $\Rightarrow$ Chu trình Euler?

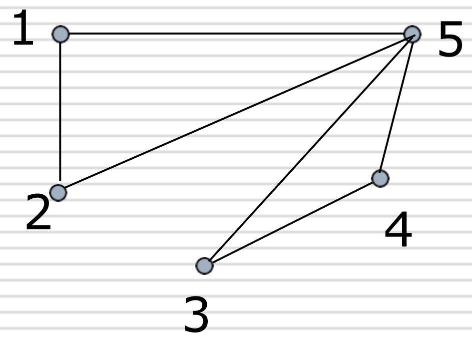




Đường đi Euler và chu trình Euler

- Cho G là một đồ thị liên thông, một **chu trình Euler** (Eulerian circuit) của G là một chu trình đi đơn đi qua tất cả các cạnh (cung) của G. Nếu G có chu trình Euler thì G được gọi là đồ thị Euler

Ví dụ

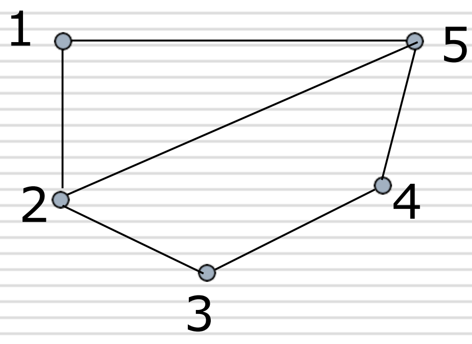


1,2,5,3,4,5,1: là một chu trình Euler:

Đường đi Euler và chu trình Euler

- Cho G là một đồ thị liên thông, một **đường đi Euler** (Eulerian path) của G là đường đi đơn đi qua tất cả các cạnh (cung) của G. Nếu G có đường đi Euler thì G được gọi là đồ thị nửa Euler

Ví dụ



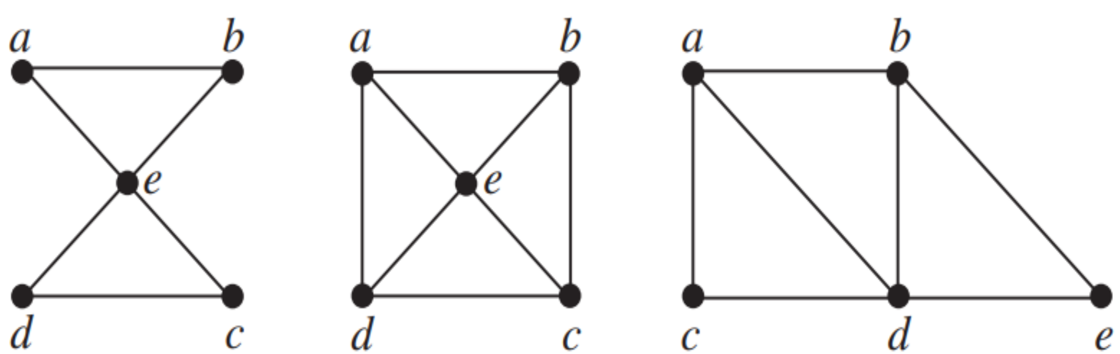
2,1,5,2,3,4,5: là một đường đi Euler

Các định lý Euler (G vô hướng)

- **Định lý Euler 1**: Đồ thị vô hướng G=(V,E) liên thông và |V|>1, G có chu trình Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.
- **Định lý 2**: Đồ thị vô hướng liên thông G=(V,E) và có |V|>1, G có đường đi Euler và không có chu trình Euler ⇔ G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.
- Đồ thị Euler được ứng dụng trong các bài toán thực tế như tìm hành trình ngắn nhất cho người đưa thư, xe thu rác, cảnh sát tuần tra

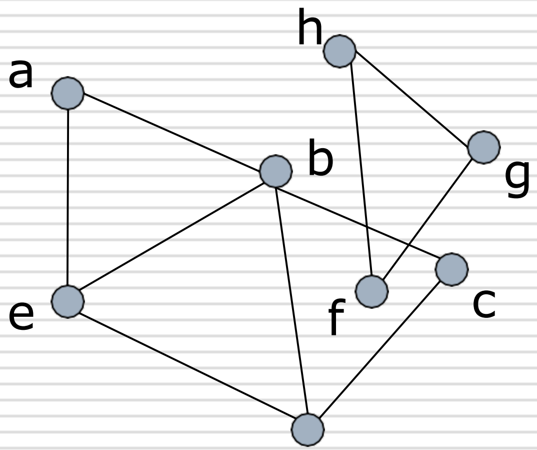
Các định lý Euler – Ví dụ

- Ví dụ: Đồ thi nào sau đây có chu trình Euler, đồ thi nào có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler, đồ thị nào không có chu trình Euler và cũng không có đường đi Euler?



G_1 G_2 G_3

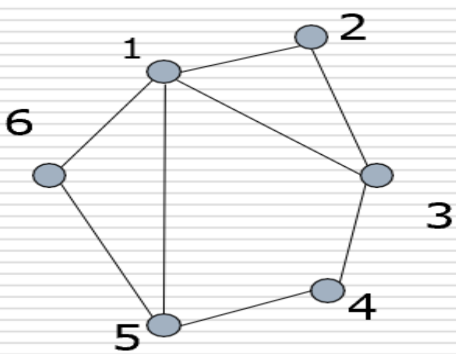
Các định lý Euler - Ví dụ



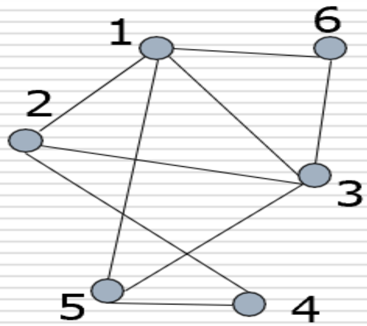
G$_4$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

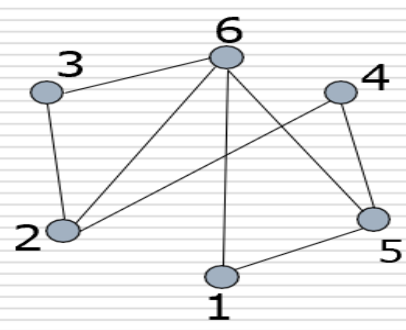
G$_5$ (cho bởi ma trận kề)



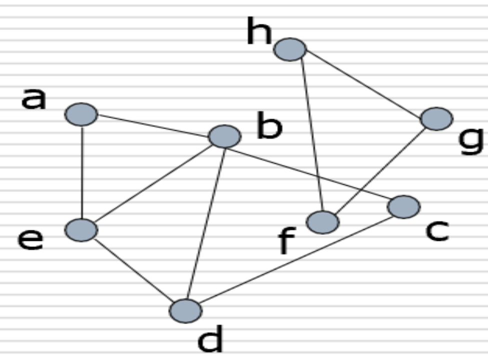
G$_6$



G$_7$



G$_8$

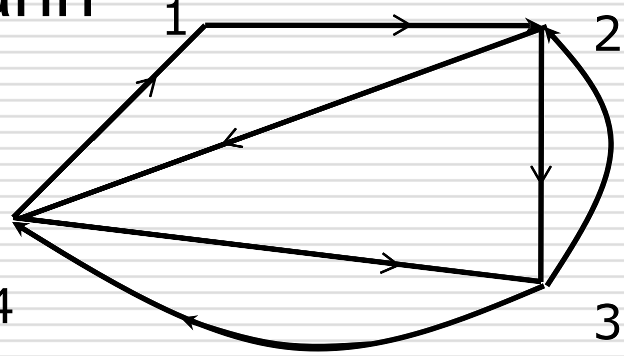


G$_9$

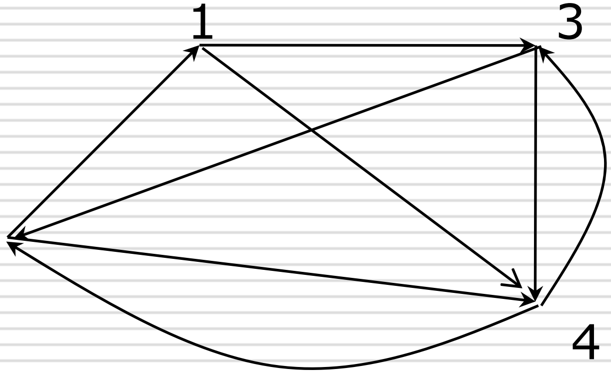
Các định lý Euler (G có hướng)

- **Định lý 3:** Đồ thị có hướng G=(V,E) liên thông yếu và |V|>1. G có chu trình Euler ⇔ mọi đỉnh trong G đều có nữa bậc trong bằng nữa bậc ngoài (hay G cân bằng)

➔ Khi G (có hướng) có chu trình Euler thì nó liên thông mạnh



G_1:
cân bằng nên Có chu trình Euler



G_2:
Không cân bằng nên
Không Có chu trình Euler

Các định lý Euler (G có hướng)

- **Định lý 4**: Cho G=(V,E) có hướng, không có đỉnh cô lập. Và |V|>1. G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler ⇔ G liên thông yếu và có đúng 2 đỉnh x,y thoả:

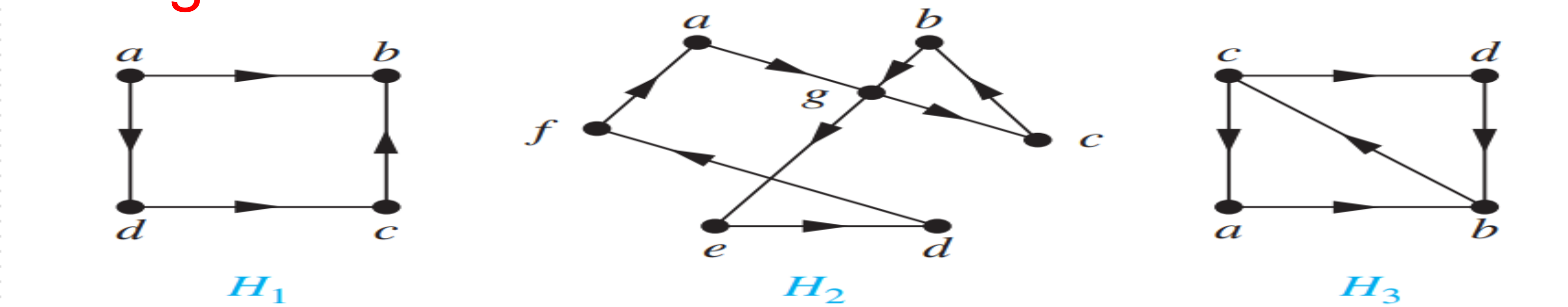
$$deg^{+}(x)=deg^{-}(x)+1$$

$$deg^{-}(y)=deg^{+}(y)+1$$

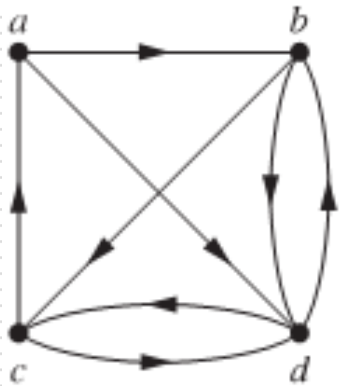
Các đỉnh còn lại cân bằng

Các định lý Euler – Ví dụ

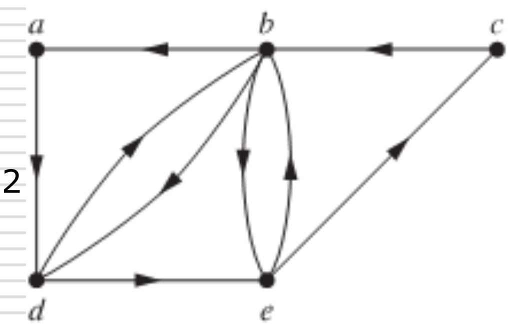
- Ví dụ: Đồ thi nào sau đây có chu trình Euler, đồ thi nào có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler, đồ thị nào không có chu trình Euler và cũng không có đường đi Euler?



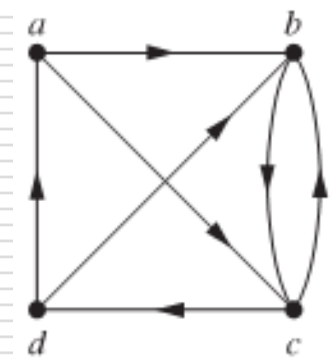
G_1



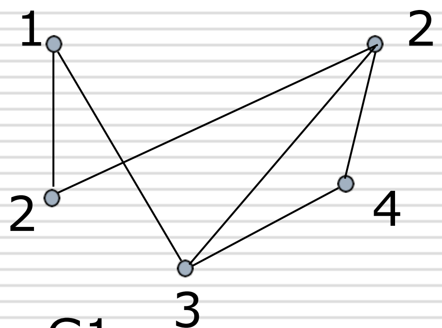
G_2



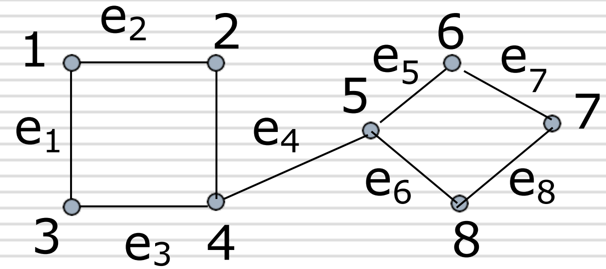
G_3



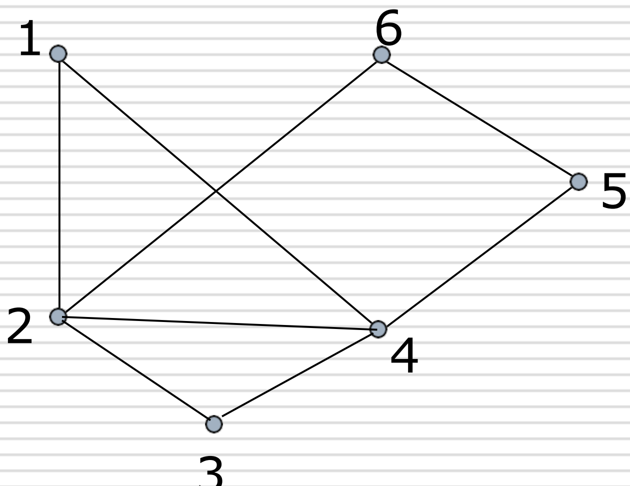
Bài tập 1



G1



G2

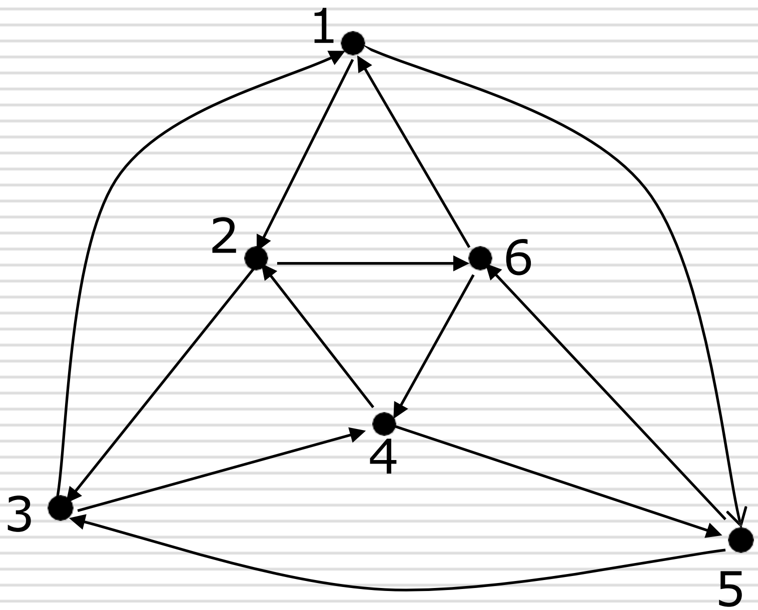


G3

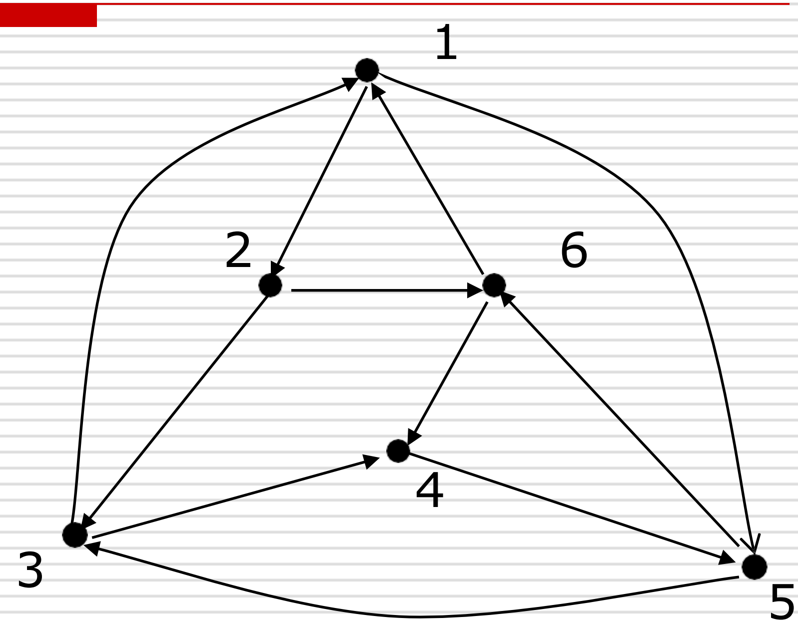
-Đồ thị nào có chu trình Euler, đồ thị nào có đường đi Euler

-Tìm đường đi Euler, chu trình Euler (nếu có) trong mỗi đồ thị

Bài tập 2



G



H

Tìm đường đi và chu trình Euler (nếu có) trong các đồ thị trên?

Bài tập 3

- Tìm chu trình Euler trên đồ thị được cho bởi ma trận kề

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Thuật toán tìm chu trình Euler

1. Chọn đỉnh v bất kỳ làm đỉnh bắt đầu

2. C $\leftarrow \{v\}$;

3. Nếu còn cạnh của G chưa đặt vào C

(a)Đặt G'=($V_{G'}$,$E_{G'}$) có được từ G sau khi xóa các cạnh có trong C và xóa các đỉnh cô lập.

(b) Chọn một đỉnh a$\in$ {tập đỉnh có trong C}$\cap$ $V_{G'}$

(c)Từ a, chọn một dãy các cạnh, đỉnh kề liên tiếp trong G' (không có canh lặp lai), cho đến khi không chọn được nữa, ta được chu trình C_1

(d) Thay thế vị trí a trong C bởi C_1, lặp lại bước 3

end

4. Return C;

Thuật toán tìm chu trình Euler

CÀI ĐẶT CODE

```
void cycleEler(){
        STACK = Ø;
        CE = Ø; /* CE - Chu trình Euler */
        Chọn u là 1 đỉnh bất kỳ của đồ thị;
        STACK ⇐ u;
        while (STACK != Ø){
          x = top(STACK);
          if (Ke(x) != Ø ){
                    y = Đỉnh đầu trong danh sáchKe(x);
                    STACK ⇐ y;
                    Ke(x) = Ke(x) \ {y};
                    Ke(y) = Ke(y) \ {x}; /* Bỏ cạnh (x,y) */
          }else {
                    x ⇐ STACK;
                    CE ⇐ x;}}
}
```

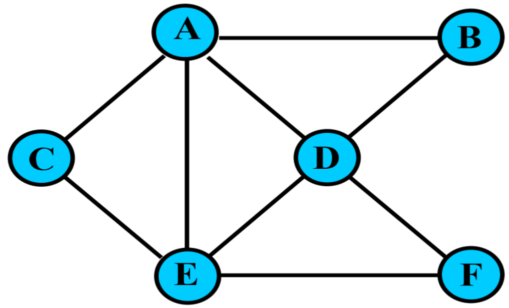
Thuật toán tìm chu trình Euler

Thuật toán tìm đường một nét Euler

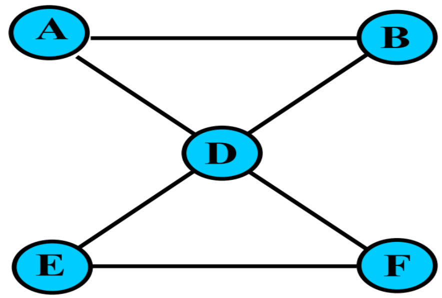
- B1: Chọn đỉnh a làm đỉnh bắt đầu. Xây dựng đường một nét khép kín con C.
- B2: Loại bỏ các cạnh trong C khỏi đồ thị ban đầu (G). Loại bỏ các đỉnh cô lập (nếu có) → đồ thị còn lại (G')
- B3: Lấy một đỉnh chung của C và đồ thị còn lại (G') để xây dựng CHU TRÌNH con tiếp theo C_1. Rồi ghép vào C và quay lại bước 2. Lặp cho đến khi các cạnh được đưa hết vào C.
- B4: TRẢ VỀ C

Thuật toán tìm chu trình Euler

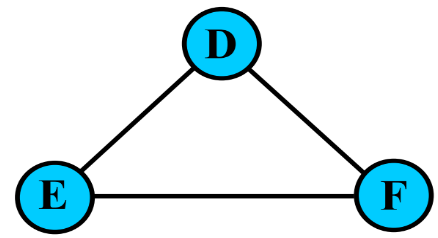
Ví dụ: áp dụng thuật toán và chạy từng bước để tìm chu trình Euler của đồ thị G bắt đầu tại đỉnh A



G



G'



G''

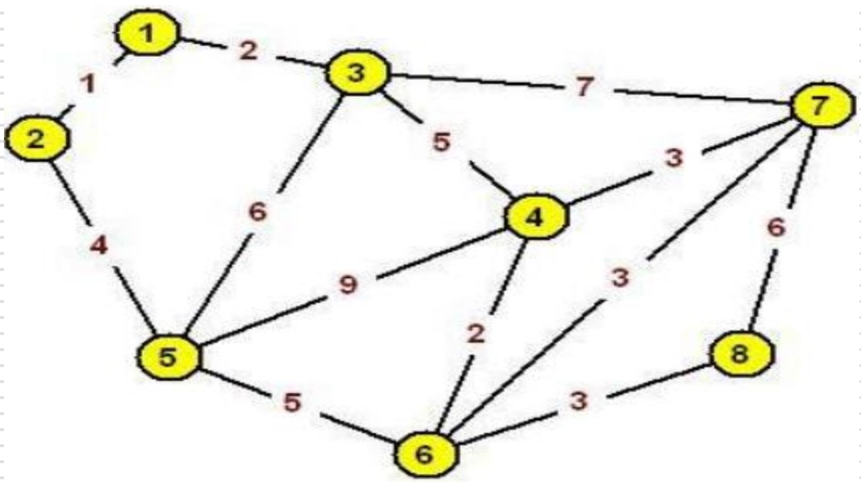
Chọn A là đỉnh bắt đầu.

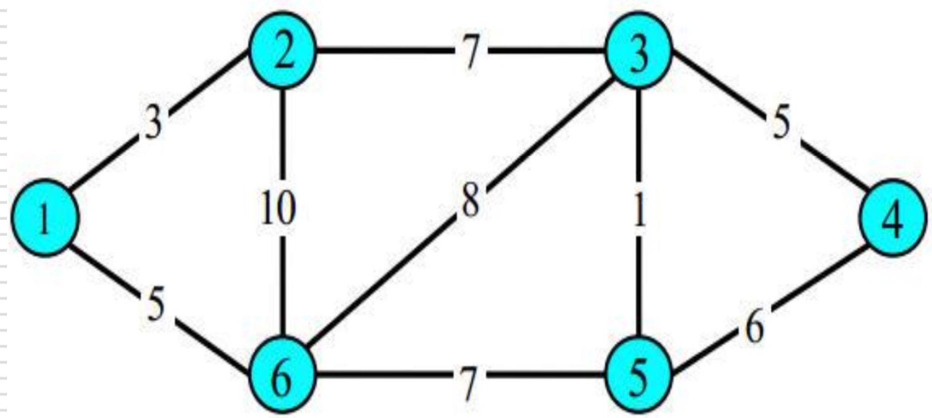
- B1: C = A, C, E, A
- B2: Thu được đồ thị G'
- B3: Chọn đỉnh A tiếp, C_1 = A, D, B, A $\Rightarrow$ C = A, C, E, A, D, B, A
- B2: Thu được G''
- B3: Chọn đỉnh D, C_1= D, E, F, D $\Rightarrow$ C = **A, C, E, A, D, E, F, D, B, A**

-B4: CHU TRÌNH EULER C= A, C, E, A, D, E, F, D, B, A

BÀI TẬP

Áp dụng thuật toán và chạy từng bước để tìm chu trình Euler của đồ thị G bắt đầu tại đỉnh 1





Thuật toán tìm chu trình Euler

Thuật toán Fleury

Xuất phát từ một đỉnh u nào đó của G, ta đi theo các cạnh của nó một cách tuỳ ý, chỉ cần tuân theo 2 qui tắc sau:

- Khi đi qua 1 cạnh thì xoá cạnh đó đi và xoá luôn đỉnh cô lập nếu có.
- Không bao giờ đi qua cầu (cạnh cắt) trừ khi không còn cách nào khác

Thuật toán tìm chu trình Euler

Thuật toán Fleury

◊ Đầu vào. Đồ thị $G \neq \varnothing$, không có đỉnh cô lập.

◊ Đầu ra. Chu trình Euler C của G, hoặc kết luận G không có chu trình Euler.

◊ Phương pháp.

(1) Chọn đỉnh xuất phát bất kỳ v_0. Đặt $v_1 := v_0$, $C := (v_0)$. $H := G$.

(2) Nếu $H = \varnothing$, thì kết luận C là chu trình Euler, kết thúc. Ngược lại sang bước (3).

(3) Chọn cạnh đi tiếp:

Trường hợp đỉnh v_1 là đỉnh treo: Tồn tại duy nhất đỉnh v_2 kề v_1 .

Chọn cạnh (v_1 , v_2). Sang bước (4).

Trường hợp đỉnh v_1 không là đỉnh treo:

Nếu mọi cạnh liên thuộc v_1 là cầu, thì không có chu trình Euler, kết thúc.

Ngược lại, chọn cạnh (v_1, v_2) bất kỳ không phải là cầu trong H. Thêm vào đường đi C đỉnh v_2. Sang bước (4).

(4) Xoá cạnh vừa đi qua, và xoá đỉnh cô lập:

Loại khỏi H cạnh (v_1, v_2). Nếu H có đỉnh cô lập, thì loại chúng khỏi H.

Đặt $v_1 := v_2$. Sang bước (2).

Bài tập thực hành

- Cài đặt thuật toán kiểm tra một đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) có là Euler (hoặc nữa Euler) hay không
- Cài đặt thuật toán tìm đường đi và chu trình Euler trong đồ thị vô hướng (có hướng)

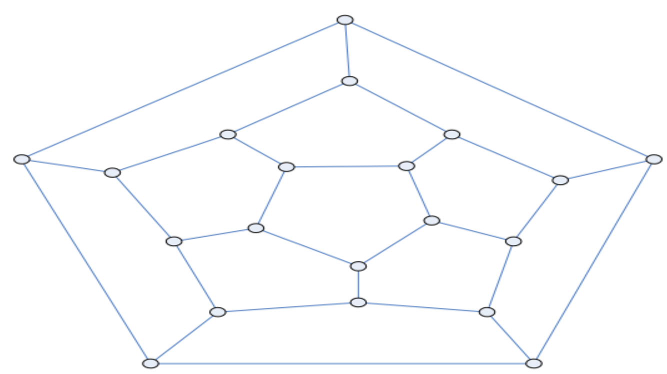
Đồ thị Hamilton

- Giới thiệu
- Các định nghĩa
- Qui tắc chỉ ra chu trình Hamilton H hay chỉ ra G không là Hamilton
- **Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton**
- Thuật toán tìm chu trình Hamilton

GIỚI THIỆU

- William Rowan Hamilton là một nhà toán học, vật lý và thiên văn học người Ireland.
- Có 1 khối 12 mặt, mỗi mặt hình ngũ giác đều. Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh của khối là tên của 1 TP. Hãy tìm đường xuất phát từ 1 TP, đi dọc theo các cạnh của khối ghé thăm mỗi TP đúng 1 lần, cuối cùng trở về TP ban đầu

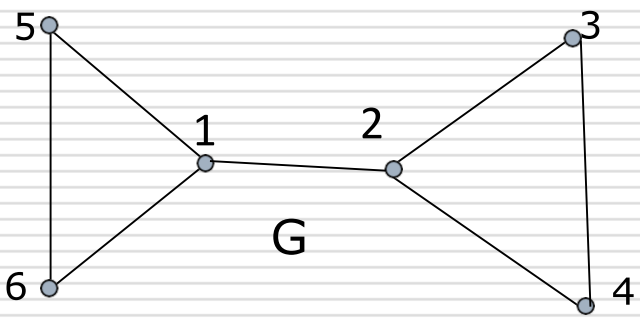
Trong đồ thị hình trên có hay không một chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần ?



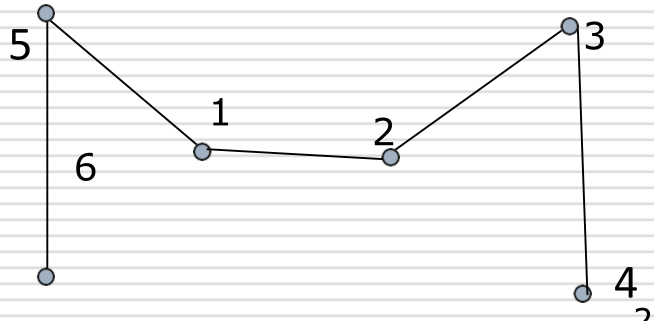
Đường đi và chu trình Hamilton

- Cho G liên thông, đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần gọi là đường đi Hamilton.
- Chu trình đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh đúng 1 lần (trừ đỉnh đầu trùng đỉnh cuối) gọi là chu trình Hamilton.
  - Một đồ thị có chu trình Hamilton được gọi là thị Hamilton.
  - Một đồ thị có đường đi Hamilton được gọi là nữa Hamilton.

<u>Ví dụ:</u>

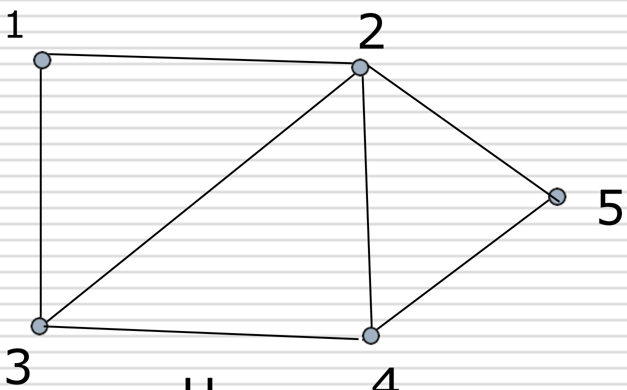


G

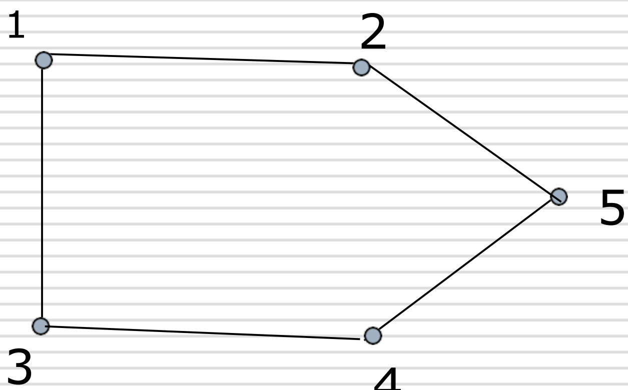


Một đường đi Hamilton trong G

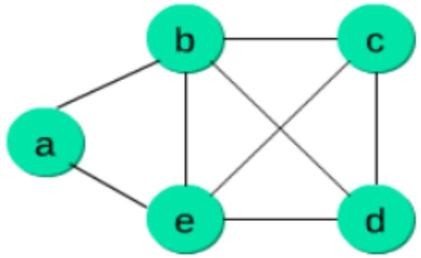
Đường đi và chu trình Hamilton (tt)



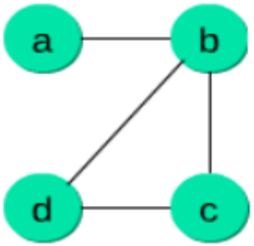
H



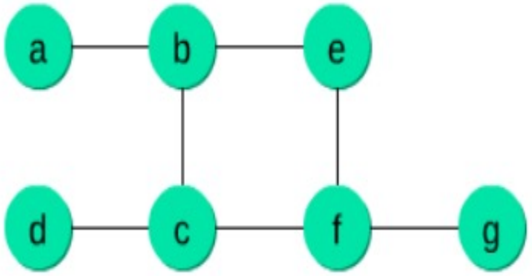
Một chu trình Hamilton trong H



G1



G2



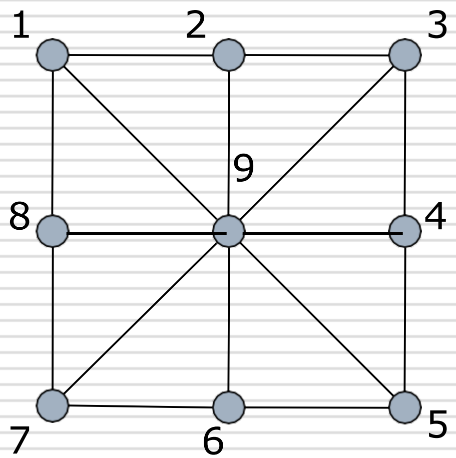
G3

Quy tắc tìm chu hình Hamilton

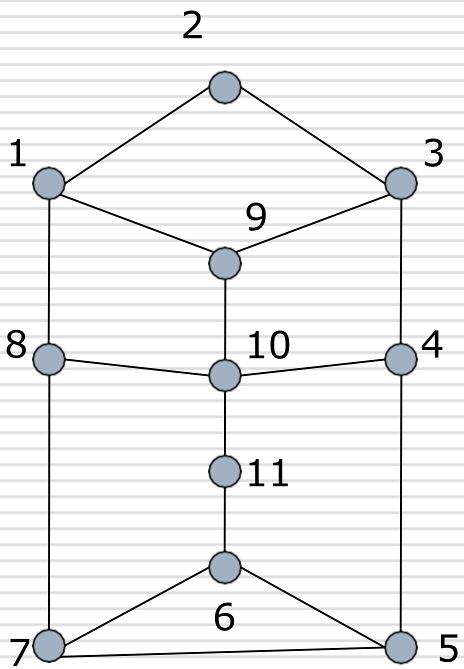
Chỉ ra chu trình Hamilton H hay chỉ ra G không là Hamilton (đồ thị vô hướng)

- ***Qui tắc 1.*** Tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 phải ở trong H
- ***Qui tắc 2.*** Không có chu trình con(chu trình có chiều dài <n) nào được tạo thành trong quá trình xây dựng H
- ***Qui tắc 3***. Khi chu trình Hamilton mà ta đang xây dựng đi qua đỉnh i thì xoá tất cả các cạnh kề với i mà ta chưa dùng(vì không được dùng đến nữa).Điều này lại có thể cho ta một số đỉnh bậc 2 và ta lại dùng **qui tắc 1.**
- ***Qui tắc 4.*** Duy trì tính liên thông và bảo đảm bậc mỗi đỉnh luôn lớn hơn hay bằng 2 sau khi áp dụng **qui tắc 3.**

Ví dụ:



G



H

-Đồ thị nào có chu trình Hamilton, đồ thị nào không có chu trình Hamilton?

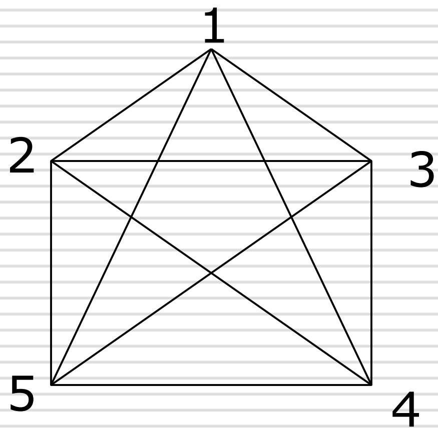
-Tìm một chu trình Hamilton (nếu có) trên mỗi đồ thị

Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton

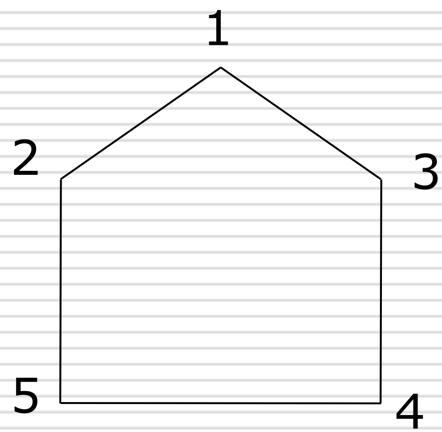
- Nhận biết đồ thị Hamilton
  - Chưa có chuẩn để nhận biết 1 đồ thị có là Hamilton hay không
  - Chưa có thuật toán để kiểm tra
  - Các kết quả thu được ở dạng điều kiện đủ
  - Nếu G có số cạnh đủ lớn thì G là Hamilton

Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton

- **Định lý**: Mọi đồ thị đủ đều có chu trình Hamilton



K_5

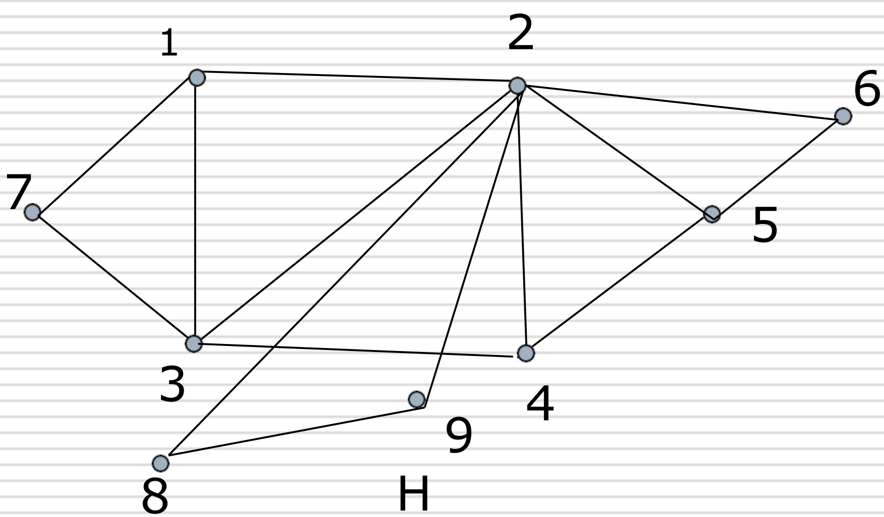


$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

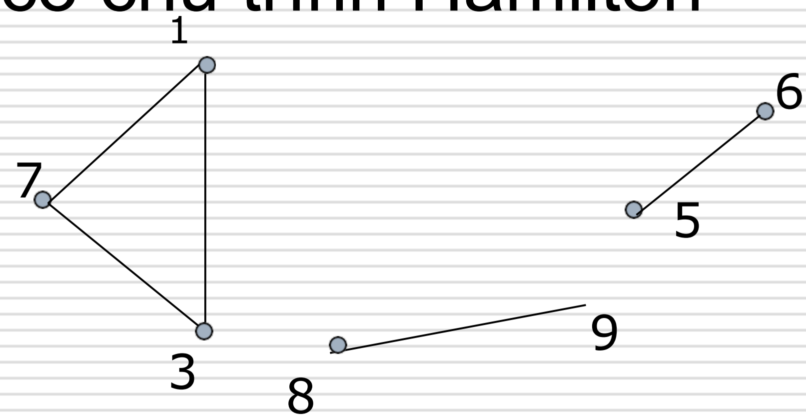
Là một chu trình Hamilton của K_5

Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton

- **Định lý**: Cho đồ thị G, giả sử có k đỉnh sao cho khi xoá k đỉnh này cùng với các cạnh liên kết với chúng thì ta được nhiều hơn k thành phần liên thông. Thì G không có chu trình Hamilton



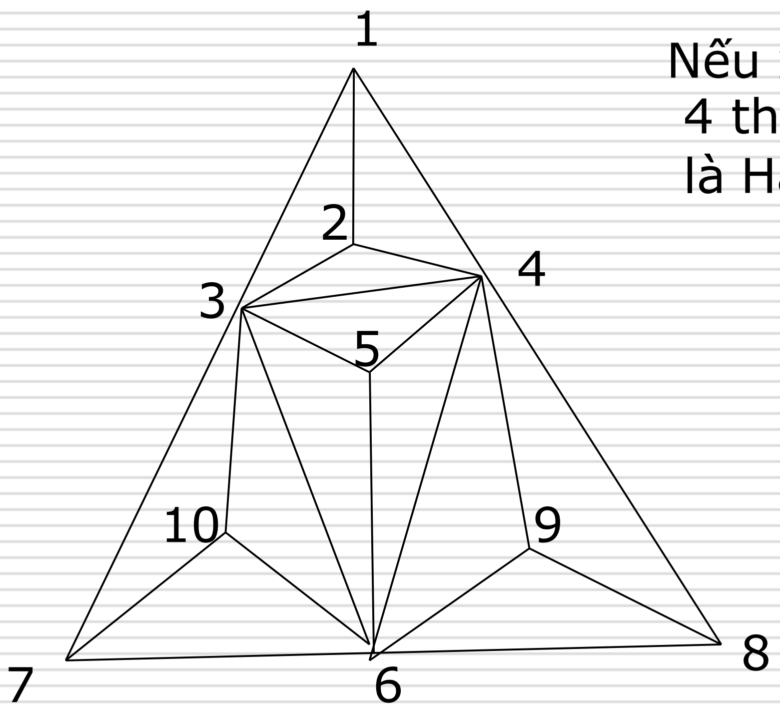
H có chu trình Hamilton không?



Xóa 2 đỉnh 2 và 4 cùng với các cạnh liên kết của nó thu được 3 thành phần liên thông⇒ H không có chu trình Hamilton

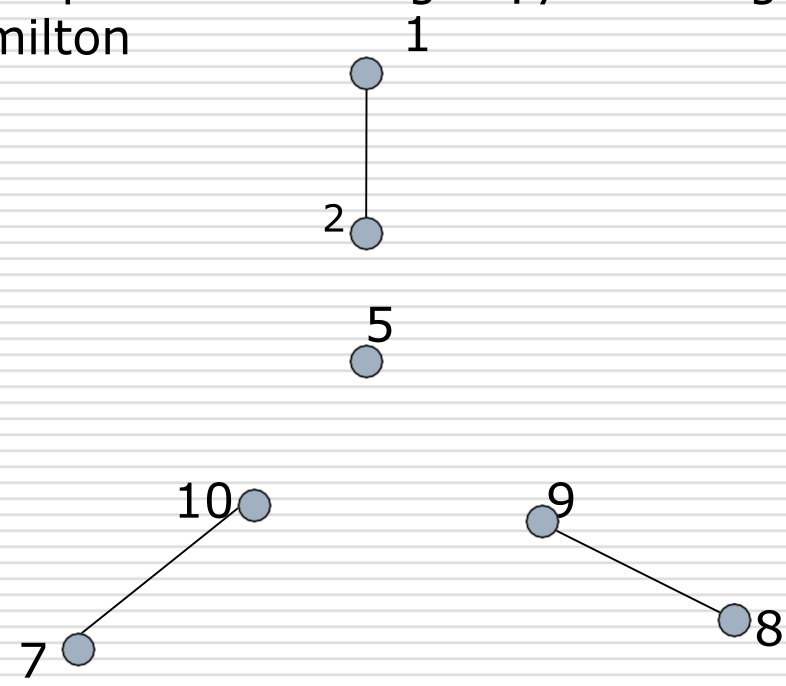
Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton

- Cho đồ thị G như hình dưới. G có chu trình Hamilton không?



Giải:

Nếu xóa đi 3 đỉnh 3,4 và 6 ta được 4 thành phần liên thông. Vậy G không là Hamilton



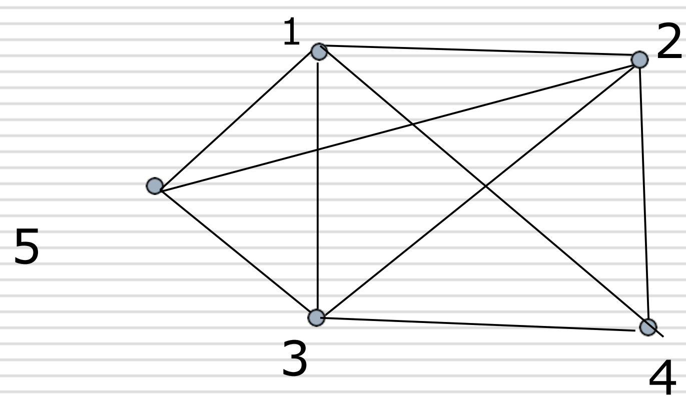
Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton

- **Định lý 1 (Dirac)**: Cho đồ thị vô hướng G là đơn đồ thị có n đỉnh ($n \geq 3$). Nếu **mọi đỉnh của G đều có bậc $\geq n/2$** thì G có chu trình Hamilton
- **Định lý 2**: Mọi đơn đồ thị có hướng, có n đỉnh, liên thông mạnh. Nếu mỗi đỉnh v thuộc đồ thị thỏa:

$$deg^{-}(v) \geq n/2 \text{ và } deg^{+}(v) \geq n/2$$

Thì G có chu trình hamilton

Ví dụ:

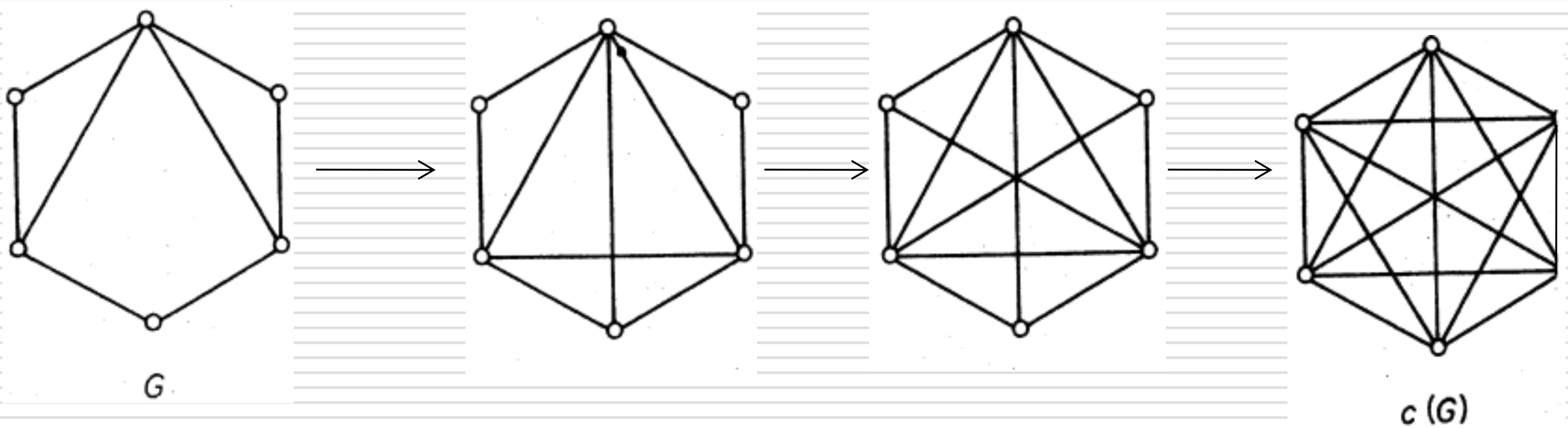


n=5 (>3)
deg(1)=4 (≥5/2)
deg(2)=4 (≥5/2)
Deg(3)=4 (≥5/2)
Deg(4)=3 (≥5/2)
Deg(5)=3 (≥5/2)

Vậy G có chu trình Hamilton

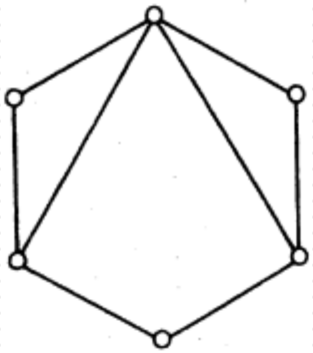
Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton

- **Bao đóng của đồ thị:** Cho đơn đồ thị *G* có *n* đỉnh, **bao đóng** c(*G*) được tạo ra từ *G* bằng cách bổ sung cho mỗi cặp đỉnh không kề nhau *u* và *v* với deg(v) + deg(u) ≥ n một cạnh mới *uv*.
- Ví dụ: Cho G, tìm bao đóng của G

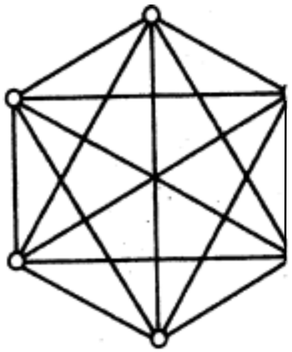


Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton

- ***Định lý***: Một đồ thị là Hamilton nếu và chỉ nếu bao đóng của nó là Hamilton.
- Ví dụ: Cho đồ thị



G

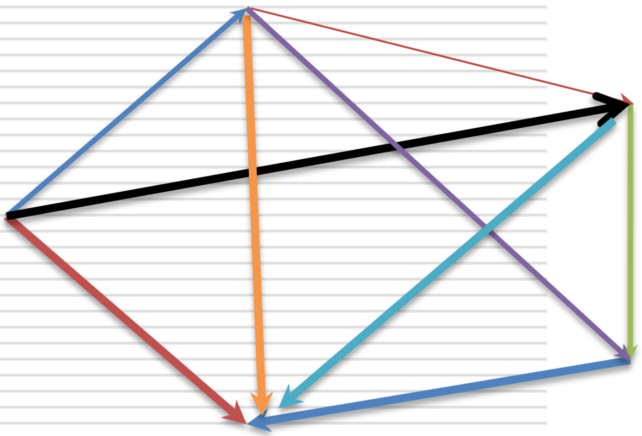


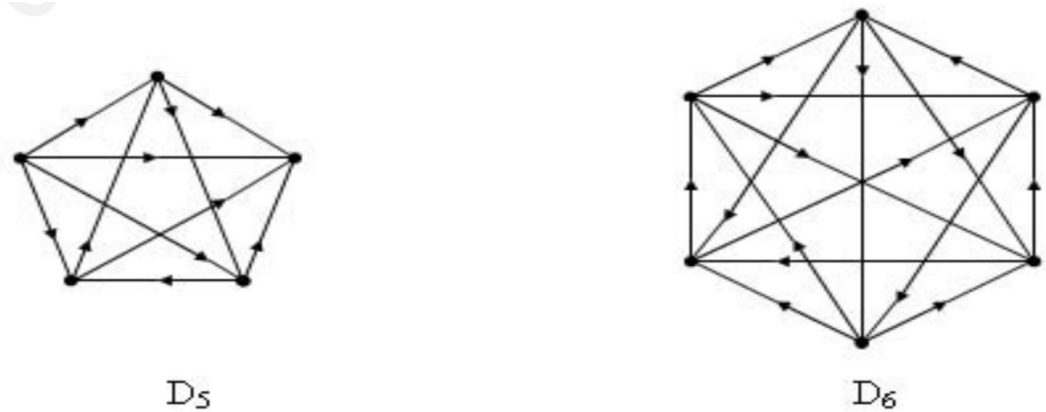
c (G)

G có phải là hamilton không?

Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton

- **Đồ thị đấu loại:** Là đồ thị có hướng có đỉnh bất kỳ luôn luôn được nối với nhau bởi đúng một cung





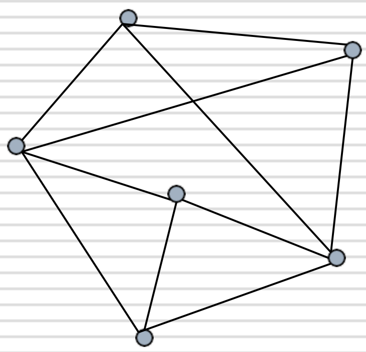
Hình 5. Đồ thị đấu loại D_5, đấu loại liên thông mạnh D_6

- **Định lý:**
  - Mọi đồ thị đấu loại đều có đường đi Hamilton
  - Mọi đồ thị đấu loại liên thông mạnh đề có chu trình Hamilton

Điều kiện đủ để là đồ thị Hamilton

- **Định lý (Ore, 1960):** Một đơn đồ thị vô hướng G gồm n đỉnh với n≥3. Nếu deg(u)+deg(v)≥n với mọi cặp đỉnh u,v không kề nhau trong G thì G là đồ thị Hamilton

Ví dụ:



G

Mọi cặp đỉnh khác nhau u, v trong G đều thỏa:

deg(u)+deg(v)≥n=6

Nên G có chu trình Hamilton

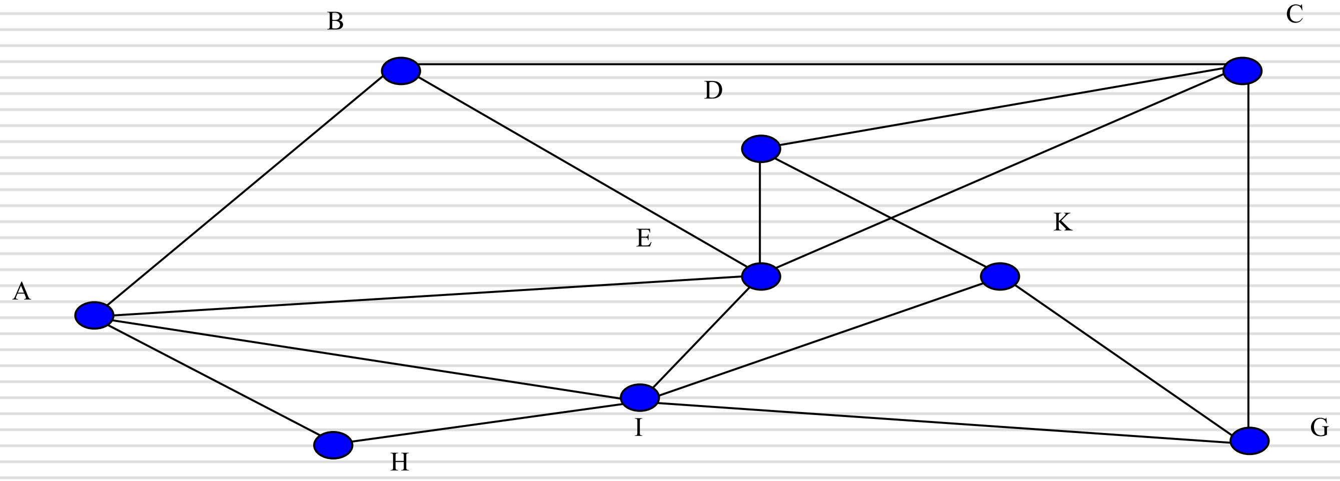
Thuật toán tìm tất cả các chu trình Hamilton của đồ thị G (Thuật toán quay lui)

```
FindHamiltonCycles(int[][] A)
  // A là ma trận kề của G
    // G có n đỉnh
    // x[0..n-1] chứa chu trình
     tìm được
   //visited[0…n-1] đánh dấu
     các đỉnh đã xét
     int[] x= new int[n];
      visited = new boolean[n];
     for (j=0; j<a.length;j++)
     visited[j]=false
     x[0]=0;visited[0]=true;
     Expand(1);
}
```

```
Expand(i)
{     for (j=0; j<n;j++)
          if (visited[j]==false && a[x[i-1]][j]>0)
          {       x[i]=j;
                  if (i<n-1)
                  {
                          visited   [j]=true;
                          Expand(i+1);
                          visited[j]=false;
                  }
                  else
                  if (a[x[i]][0]>0)
                     printHamiltonCycle(x);
          }
}
```

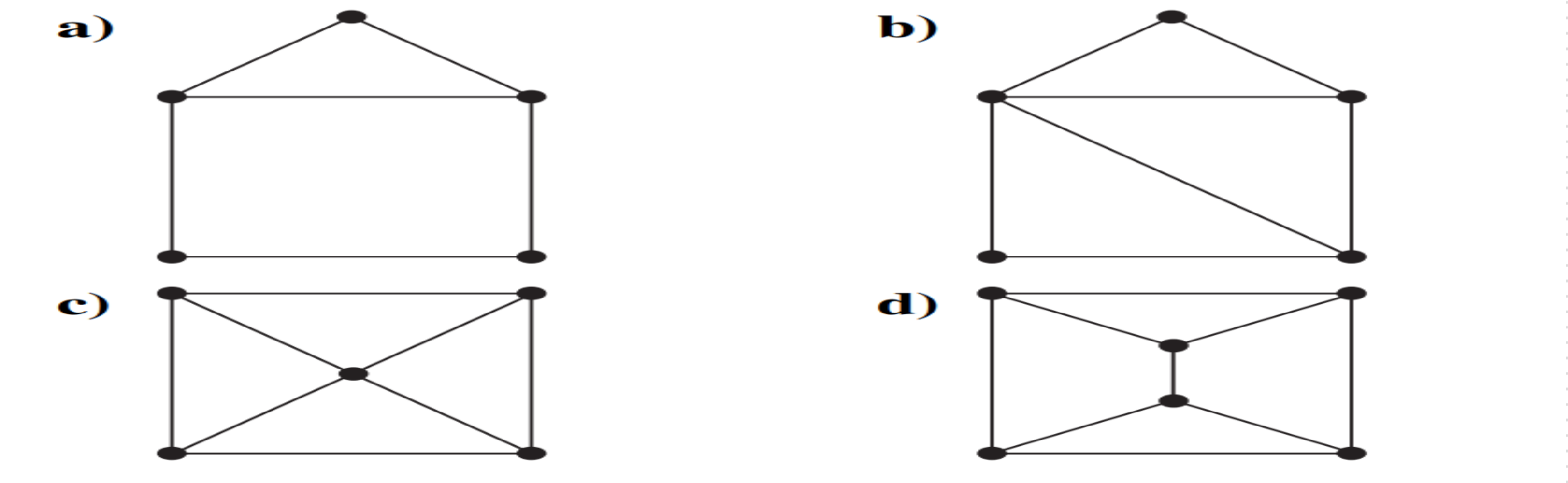
Bài tập

Xác định đồ thị sau có chu trình hay đường đi Hamilton không? Nếu có xây dựng chu trình hay đường đi đó.



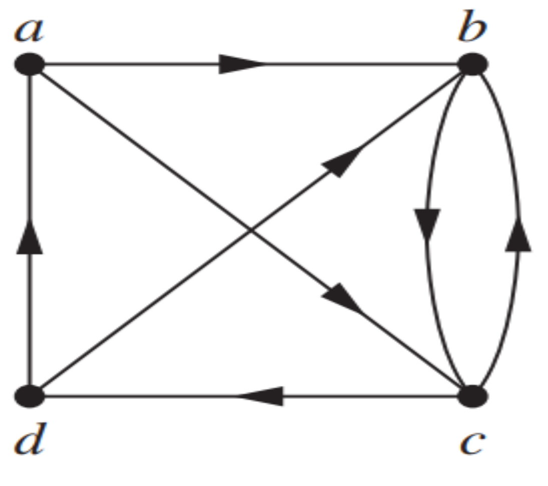
Bài tập

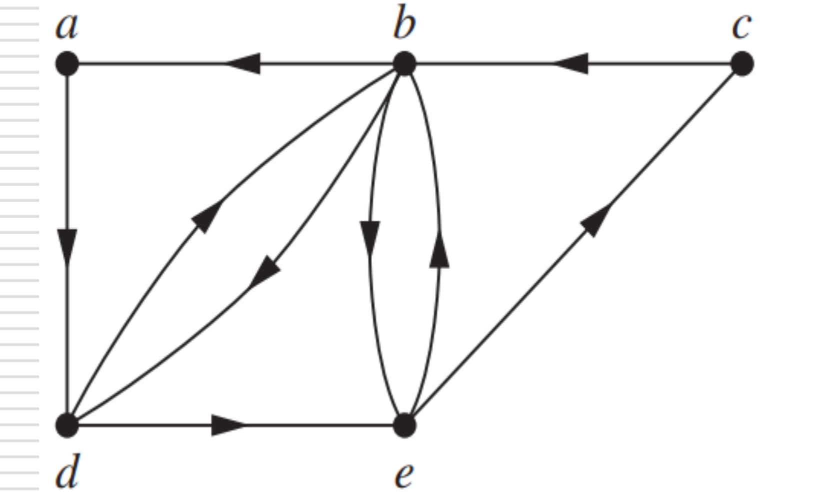
Đối với mỗi biểu đồ này, hãy xác định (i) xem Dirac's định lý có thể được sử dụng để chỉ ra rằng đồ thị có chu trình Hamilton , (ii) định lý Ore có thể được sử dụng để chỉ ra rằng đồ thị có chu trình Hamilton và (iii) liệu đồ thị có một chu trình Hamilton.



Bài tập

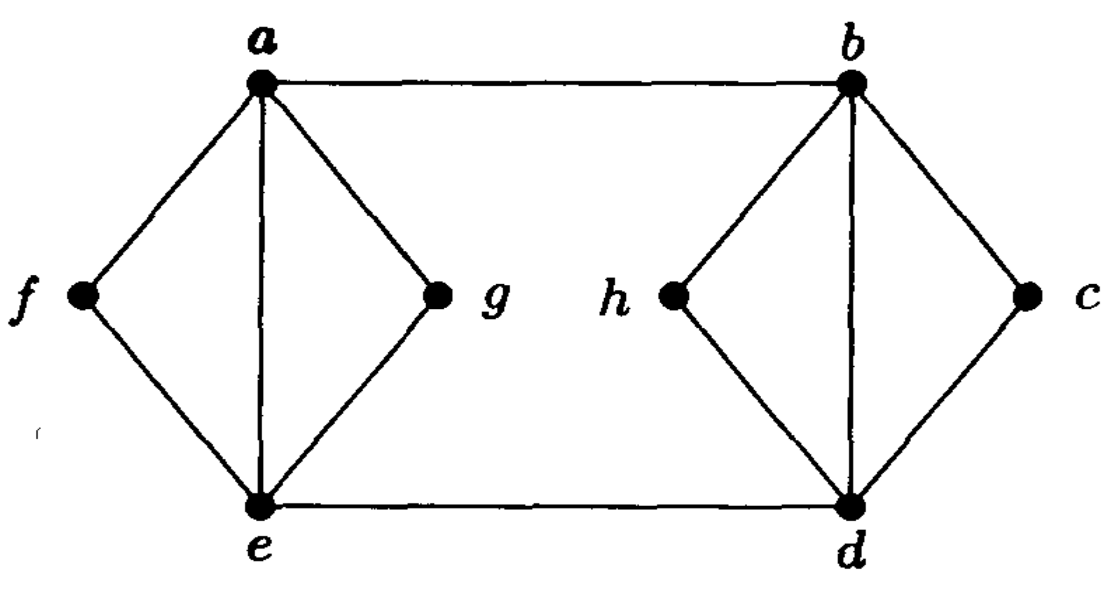
Hãy xác định xem đồ thị có hướng hiển thị có chu trình Euler. Xây dựng một chu trình Euler nếu một tồn tại. Nếu không có chu trình Euler nào tồn tại, hãy xác định xem đồ thị có hướng có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler nếu một tồn tại.





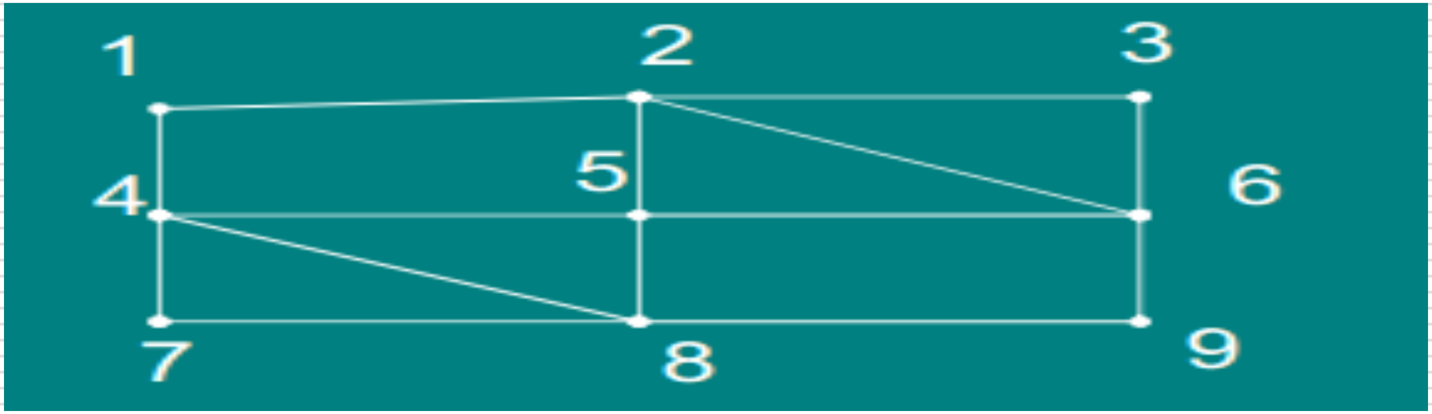
BÀI TẬP_1

- Đồ thị sau đây có Hamilton không?



BÀI TẬP_2

- Đồ thi sau đây có Hamilton không?



ÔN TẬP

- ❖ **Vấn đề 1:** Cho biết một đồ cho trước có phải là Euler (có chu trình Euler) không ? Giải thích?
  - Nếu đồ thị là vô hướng thì sử dụng ĐL Euler 1, nếu là đồ thị có hướng thì sử dụng định lý Euler 3

    \+ Liên thông?

    \+ Bậc/nữa bậc các đỉnh?
- ❖ **Vấn đề 2:**

  Xây dựng chu trình Euler (nếu có): Chạy thuật toán tìm chu trình Euler bằng tay
- ❖ **Vấn đề 3:** Tương tự với đường đi Euler