同値関係かつ順序関係

1

命題 1.1. X を集合とする. R が同値関係かつ順序関係であるとき, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$xRy$$

が成り立つ.

証明. 任意に $x, y \in X$ をとる. 順序関係であるので, 全順序律より xRy または, yRX である. yRx であるならば, 同値関係の対称律から xRy である. 従って, 主張が成り立つ.

□

命題 1.2. $(P, \leq)$ を順序集合とし, $A \subset P$ とし, $U(A)$ で A の上界を表す. $U(A)$ が下限をもつならば, それは A の上限である.

証明. $p \in P$ を $U(A)$ の下限とする. $U(A)$ の下界を $D(U(A))$ で表すことにする. p が $U(A)$ の最小元でないとする (背理法). 「$p \in U(A)$ かつ $q \in U(A) \Rightarrow p \leq q$」 が成り立たないので, 「$p \notin U(A)$ または $x \in U(A)$ de $p \leq x$ でないものが存在する」が成り立つ. $p \notin U(A)$ とすると, $a \in A$ で $a \leq p$ でないものがとれる. a は任意の $q \in U(A)$ に対して $a \leq q$ をみたすので, $a \in D(U(A))$ である. p は $D(U(A))$ の最大元なので, $a \leq p$ が成り立つ. よって矛盾する. $x \in U(A)$ で $p \leq x$ でないものが存在すると, $p \in D(U(A))$ であるので, $p \leq x$ が成り立つ. よって矛盾する. いずれにせよ矛盾するので, 主張が従う.

□

命題 1.3. $(P, \leq)$ を順序集合とする. P の任意の部分集合が下限をもつならば, 任意の部分集合が上限をもつ.

証明. 任意に部分集合 A をとる. A の上界は P の部分集合なので, 下限が存在する. A の上界の下限は A の上限であるので, A は上限をもつ.

□

$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \{n, m\} \mapsto (\min\{n, m\}, \max\{n, m\})$ と定めると, $A, B \in P_2(\mathbb{N})$ が $A \neq B$ であるならば, $\max A = \max B$ と $\min A = \min B$ がともに成り立つことはないので (ともに成り立つならば, $A = B$ となるから), $f(A), f(B)$ は第一成分か第二成分のいずれかが異なる. 従って f は単射である.

$$1 \mapsto (1,1),\ 2 \mapsto (1,2),\ 3 \mapsto (2,1),\ 4 \mapsto (1,3),\ 5 \mapsto (2,2),\ 6 \mapsto (3,1), 7 \mapsto (1,4), \ldots$$

と定める写像が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ への全単射であるので, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合である. $P_2(\mathbb{N})$ から可算集合への単射が存在するので, $P_2(\mathbb{N})$ は可算集合である.