非負整数微分ソボレフ空間の拡張作用素

1

設定 1.1. $W_p^s(\Omega)$ を微分によりノルムを定めるソボレフ空間とする.

命題 1.2. $\zeta : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ をリプシッツ関数とする. $\Omega \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n < \zeta(x')\}$ とする. $u \in W_2^1(\Omega)$ に対して

$$E_0 u(x) \coloneqq \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ u(x', 2\zeta(x') - x_n) & x \in \Omega^c \end{cases}$$

と定めると,

$$\|E_0 u\|_{W_2^1} \lesssim \|u\|_{W_2^1(\Omega)}$$

が成り立つ. すなわち, E_0 が定める拡張作用素は連続である.

証明. step:

$$T(\bar{\Omega})^c \subset \Omega$$

が成り立つ.
$(\because)$
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $Tx \coloneqq (x', 2\zeta(x') - x_n)$ により定める. $x \in (\bar{\Omega})^c \Leftrightarrow \zeta(x') < x_n \Leftrightarrow 2\zeta(x') - x_n < \zeta(x')$ であるので,

$$x \in (\bar{\Omega})^c) \Rightarrow Tx \in \Omega$$

が成り立つ. また, $T(Tx) = (x', 2\zeta(x') - 2\zeta(x') + x_n) = x$ であるので, $T \circ T = \mathrm{Id}$ であることに注意すると,

$$x \in (\bar{\Omega})^c \Rightarrow T(Tx) = x \in T\Omega$$

であるので,

$$(\bar{\Omega})^c \subset T(\Omega)$$

であるので, 再び T を作用させると主張が従う.

▲

従って, $X=Tx$ による変数変換のヤコビアンが -1 であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^c} u^2(Tx)dx &= \int_{(\bar{\Omega})^c} u^2(Tx)dx \\ &= \int_{T(\bar{\Omega})^c} u^2(X)(-1)dX \\ &\leq \int_{\Omega} u^2(X)dX \\ &= \|u\|_{W_2^1(\Omega)}\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}\|E_0u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|E_0u\|_{L^2(\Omega)} + \|E_0u\|_{L^2(\Omega^c)} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

が成り立つ.

<u>step:</u>

$$\|\partial_j E_0u\|_{L^2(\Omega^c)} \leq \begin{cases} \|\partial_j u\|_{L^2(\Omega)} + 2\mathrm{Lip}\zeta\,\|\partial_n u\|_{L^2(\Omega)} & j\neq n \\ \|\partial_n u\|_{L^2(\Omega)} & j=n\end{cases}$$

$(\because)$

$$\partial_j E_0u(x) = \begin{cases} \partial_j u(Tx) + 2\partial_j\zeta(x')\partial_n u(Tx) & j\neq n \\ -\partial_n u(Tx) & j=n\end{cases}$$

と, 先ほどと同様の議論を繰り返せば従う.

▲

もちろん $\|\partial_j E_0u\|_{L^2(\Omega)} = \|\partial_j u\|_{L^2(\Omega)}$ であるので, すべてひっくるめると主張が従う.

□

命題 1.3. C^∞ 級写像 $\varphi(x): S^{n-1}\to\mathbb{R}$ を

$$\int_{S^{n-1}} \varphi(x)dx = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}$$

を満たすものとする. このとき,

$u\in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\frac{y}{\|y\|})\,\|y\|^{-n}\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+y)y^\alpha\right)dy$$

が成り立つ.

証明. $v\in S^{n-1}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}(\partial_t)^k u(x+tv)dt \\
&= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+tv)v^\alpha\right)dt
\end{aligned}
$$

であるので, 両辺に $\varphi(v)$ をかけて $\int_{S^{n-1}}$ で積分すると,

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_{S^{n-1}}\varphi(v)\int_0^\infty t^{-n}t^k\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+tv)v^\alpha\right)t^{n-1}dtdv \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{y}{\|y\|})\,\|y\|^{-n}\,\|y\|^k\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+y)\frac{y}{\|y\|}^\alpha\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{y}{\|y\|})\,\|y\|^{-n}\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+y)y^\alpha\right)dy
\end{aligned}
$$

となる. 最後は極座標変換の逆を行った $(t^{n-1}dtdv \mapsto dy)$,

$\square$

注意 1.4. C^∞ 級写像 $\varphi(x) : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ で

$$
\int_{S^{n-1}}\varphi(x)dx = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}
$$

を満たすものは存在するのかということについては, $\int_{S^{n-1}}\varphi(x)dx < \infty$ を適当に低数倍すりゃつくれるので, こういう関数はたくさん存在する.

命題 1.5. $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ を $1-n$ 斉次関数とし, $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ に対して,

$$
\|\partial_j(K*u)\|_{H^m} \lesssim \|u\|_{H^m}
$$

が成り立つ.

証明. u はコンパクトな台をもつので,

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_j}\int_{\|x-y\|>0}k(y)u(x-y)dy &= \int_{\|x-y\|>0}k(y)\partial_j u(x-y)dy \\
&= (k*\partial_j u)(x) \\
&= \int_{\|y-x\|>0}k(x-y)\partial_j u(y)dy
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ライプニッツ即より,

$$
\partial_{y_j}(k(x-y)u(y)) = -(\partial_j k)(x-y)u(y) + k(x-y)(\partial_j u)(y)
$$

であるので, $\varepsilon > 0$ として両辺を $\int_{\|x-y\|>\varepsilon}$ で積分すると,

$$\int_{\|x-y\|>\varepsilon} \partial_{y_j}(k(x-y)u(y))dy = -\int_{\|x-y\|>\varepsilon} (\partial_j k)(x-y)u(y) + k(x-y)(\partial_j u)(y)dy$$

である. 左辺を, ベクトル場の発散として書き換えたあとに, 発散定理をもちいることで, 任意の j に対して

$$\begin{aligned}
\int_{\|x-y\|>\varepsilon} \partial_{y_j}(k(x-y)u(y))dy &= \int_{\|x-y\|>\varepsilon} \mathrm{div}(0,\ldots,0,k(x-y)u(y),0,\ldots,0)dy \\
&= \int_{\|x-y\|=\varepsilon} (0,\ldots,0,k(x-y)u(y),0,\ldots,0)\cdot(\frac{y-x}{\varepsilon})d\sigma(y) \\
&= \int_{\|y-x\|=\varepsilon} \frac{y_j - x_j}{\varepsilon} k(x-y)u(y)d\sigma(y) \\
&= \int_{\|\Theta\|=1} \theta_j k(\varepsilon\Theta)u(x-\varepsilon\Theta)\varepsilon^{n-1}d\sigma(\Theta) \\
&= \int_{\|\Theta\|=1} \varepsilon^{1-n}\theta_j k(\Theta)u(x-\varepsilon\Theta)\varepsilon^{n-1}d\sigma(\Theta)
\end{aligned}$$

が成り立つ.

$\square$

命題 1.6. $k \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ を $1-n$ 次斉次関数とし, $u \in \mathcal{D}$ とし, $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ とする. このとき,

$$\|\partial_j(k * u)\|_{H^m} \lesssim \|u\|_{H^m}$$

証明. わからん

$\square$

命題 1.7.

証明. $\square$