マグニチュードが有限でないコンパクト正定値距離空間

1

命題 1.1. l_1 距離を備えた数列空間において,

$$
\begin{aligned}
&J_\infty := \left\{\frac{\pi^2}{6}\right\} \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots \\
&J_1 := [0,1] \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots \\
&J_2 := [1, 1+\frac{1}{2^2}] \times [0, \frac{1}{2^2}] \times \{0\} \times \{0\} \times \cdots \\
&J_3 := [1+\frac{1}{2^2}, 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}] \times \{0\} \times [0, \frac{1}{3^2}] \times [0, \frac{1}{3^2}] \times \{0\} \times \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

と定めると,

$$
J_\infty \cup \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i\right)
$$

はマグニチュードが有限でないコンパクト正定値距離空間である.

証明. 任意に点列 p_n をとると, $(\frac{\pi^2}{6}, 0, \ldots)$ が集積点でないときは, 適当に十分大きな $N \in \mathbb{N}$ に対して $\{p_n\} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i$ であり, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i$ はコンパクトであるので収束部分列をもつ. $(\frac{\pi^2}{6}, 0, \ldots,)$ が集積点であるとき, $\frac{\pi^2}{6}$ に収束する収束部分列をもつ. また,

$$
z := (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k^2}, 0, 0, \ldots) \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} J_i\right) \cap J_{n+1}
$$

と定めると, 任意に

$$
x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots,) \in \bigcup_{i=1}^{n} J_i
$$

をとると (ただし, $m := 1+2+\cdots+n-1$), 任意の点 $y = (y_1, 0, \ldots, 0, y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n}, 0, \ldots) \in J_{n+1}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= |y_1 - x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m| + |y_{m+1}| + \cdots |y_{m+n}| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k^2} - x_1\right| + \left|y_{m+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right| + |0 - x_2| + \cdots + |0 - x_m| + |y_{m+1} - 0| + \cdots |y_{m+n} - 0| \\
&= d(x,z) + d(z,y)
\end{aligned}
$$

が成り立つので, $\bigcup_{i=1}^{n} J_i$ は J_{n+1} に対して良く射影される. 同様にして J_{n+1} が $\bigcup_{i=1}^{n} J_i$ に良く射影されるので, 互いに良く射影される. 従って, マグニチュードを計算すると, 適当な $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Mag}\left(J_\infty \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_i\right)\right)\\
&\geq \operatorname{Mag}(\left(\bigcup_{i=1}^{N} J_i\right))\\
&= (1+\frac{1}{2}) + (1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2})^2 - 1 + (1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2})^3 - 1 + (1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2})^4 - 1 + \cdots + (1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{N^2})^N - 1\\
&\geq 1 + \frac{1}{2}(1 + 2\cdot\frac{1}{2^2} + 3\cdot\frac{1}{3^2} + \cdots N\cdot\frac{1}{N^2})
\end{aligned}
$$

が成り立つので, マグニチュードは有限ではない. □