ヴィタリの被覆補題

1

命題 1.1. (有限被覆補題). 距離空間 X で考える. $B_1, \ldots, B_N$ を適当な半径 (同じとは限らない) の有限個の球とする. このとき, 部分族

$$B_{k_1}, \ldots, B_{k_m}$$

で, 互いに disjoint で,

$$\cup B_i \subset 3B_{k_j}$$

を満たし, 任意の B_i に対して $B_i \subset 3B_{k_{j(i)}}$ を満たすものが存在する.

証明. $N = 1$ のとき, 明らかに成り立つ. 帰納法 で示すわけだけど, 具体的なシチュエーションをみてみる. 正式な証明はこれを眺めてたら作れるとおもう. $N = 10$ のとき成り立つとする. $N = 11$ のときを考える. 半径最大の球が B_9 だったとする. B_9 と交わるのが B_1, B_4, B_5, B_6, B_9 で, $B_2, B_3, B_7, B_8, B_{10}$ は B_9 と交わらないとする. 帰納法の仮定から $B_2, B_3, B_7, B_8, B_{10}$ の中から条件をみたす部分族がとれる. それが B_2, B_3, B_8 だったとする.

$$B_1 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_9 \subset 3B_9$$
$$B_2 \cup B_3 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_{10} \subset 3B_2 \cup 3B_3 \cup 3B_8$$

みたいな状況になっている. つまるところ,

$$B_9, B_2, B_3, B_8$$

が求める部分族となる. □

命題 1.2. (無限被覆補題). 第二可算, あるいは可分な距離空間 X で考える. $\mathcal{B}$ を,

$$\sup\{\mathrm{diam} B \mid B \in \mathcal{B}\} < \infty$$

である球の族とする. このとき, 部分族 $\mathcal{B}'$ で, $\mathcal{B}'$ に属する球は互いに disjoint であり,

$$\cup_{B \in \mathcal{B}} \subset \cup_{B' \in \mathcal{B}'} 5B'$$

を満たし, 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対して, $B \subset 5B'$ をみたす $B' \in \mathcal{B}'$ がとれるようなものが存在する.

証明. 気合い.

□