コンパクト距離空間における非縮小写像は等長同型

1

定義 1.1. (X, d) を距離空間とする．$f : X \to X$ は

$$d(x, y) \le d(f(x), f(y)) \quad (x, y \in X)$$

を満たす時に, 非縮小写像という.

命題 1.2. 非縮小写像は単射である.

証明. 明らかである. □

命題 1.3. (X, d) をコンパクト距離空間とする．$f : X \to X$ を非縮小写像とする．このとき, f は等長写像である.

証明. $x \in X$ を適当にとる．$f^n(x)$ を考えると, X はコンパクトなので適当な収束部分列 $f^{n(k)}(x)$ がとれる. 適当にさらに部分列をとって, $n(2) - n(1) < n(3) - n(2) < \ldots$ となるようにとる.

$$f^{n((k+1))-n(k)}(x)$$

を考える

$$d(f^{n((k+1))-n(k)}(x), x) \le d(f^{n((k+1))}(x), f^{n(k)}(x))$$

が成り立つので, $f^{n((k+1))-n(k)}(x)$ は x に収束する. 適当な $x, y \in X$ に対して同様にして $f^{n((k+1))-n(k)}(x), f^{n((k+1))-n(k)}(y)$ をとると,

$$d(f(x), f(y)) \le d(f^{n((k+1))-n(k)}(x), f^{n((k+1))-n(k)}(y))$$

が成り立つので, 極限をとると,

$$d(f(x), f(y)) \le d(x, y)$$

が成り立つ. □

命題 1.4. (X, d) をコンパクト距離空間とする．$f : X \to X$ を非縮小写像とする．このとき, $f(X)$ はコンパクトである.

証明. f が等長写像であるから. □

命題 1.5. (X, d) をコンパクト距離空間とする．$f : X \to X$ を非縮小写像とする．このとき, f は全射である.

証明. 全射でないと仮定する. $X \setminus f(X)$ が空でないので, $x_0 \in X \setminus f(X)$ がとれる.

$$x_1 \coloneqq f(x_0), \quad x_2 \coloneqq f(x_1), \ldots$$

と定める.

step:

$$x_n \notin f^{n+1}(X)$$

($\because$) 帰納法によりを示す. $x_0 \notin f(X)$ は成り立つ.

$$x_0 \notin f(X), x_1 \notin f^2(X), \ldots, x_{n-1} \notin f^n(X)$$

であるとき, $x_n \in f^{n+1}(X)$ とすると, 適当な点 y で $f^{n+1}(y) = x_n$ を満たすものがとれる.

$$f^n(x_0) = x_n = f^{n+1}(y)$$

であるので, f が単射であることから,

$$f^{n-1}(x_0) = x_{n-1} = f^n(y)$$

が成り立つ. 従って, $x_{n-1} \in f^n(X)$ となるので矛盾する. ▲ 従って, $x_n \in f^n(X) \setminus f^{n+1}(X)$ である. □