接続の局所表示と第二構造方程式

1

注意 1.1. M で滑らかな多様体を表す. $\pi : E \to M$ で階数 r の滑らかなベクトル束を表す. $U \subset M$ を開集合, $e_1, \ldots, e_r$ を E の U における局所フレームとする. 双対フレームを $\theta^i, \ldots, \theta^r$ で表す.

定義 1.2. (接続形式). U 上の 1 形式の族 $\left\{\omega_i^j\right\}$ で

$$\nabla_X e_i = \omega_i^j(X) e_j \quad ({}^\forall X \in \mathfrak{X}(U))$$

を満たすものを接続形式という.

定義 1.3. (曲率形式). U 上の 2 形式の族 $\left\{\Omega_i^j\right\}$ で

$$R(X,Y)e_i = \Omega_i^j(X,Y)e_j \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(U))$$

を満たすものを曲率形式という.

定義 1.4. (捩れ形式). U 上の 2 形式の族 $\left\{\tau^i\right\}$ で

$$T(X,Y) = \tau^i(X,Y)e_i \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(U))$$

を満たすものを捩れ形式という.

命題 1.5. (第一構造方程式).

$$\tau^i(X,Y) = d\theta^i(X,Y) + \omega_i^j \wedge \theta^i(X,Y) \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(U))$$

証明.

$$\begin{aligned}
\tau^i(X,Y)e_i &= T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = \nabla_X(\theta^i(Y))e_i - \nabla_Y(\theta^i(X))e_i - \theta^i([X,Y])e_i \\
&= (X(\theta^i(Y))e_i + \theta^i(Y)\omega_i^j(X)e_j) - (Y(\theta^i(X))e_i + \theta^i(X)\omega_i^j(Y)e_j) - \theta^i([X,Y])e_i \\
&= d\theta^i(X,Y)e_i - \theta^i \wedge \omega_i^j(X,Y)e_j \\
&= d\theta^i(X,Y)e_i + \omega_j^i \wedge \theta^j(X,Y)e_i
\end{aligned}$$

□

命題 1.6. (第二構造方程式).

$$\Omega_i^j(X,Y) = d\omega_i^j(X,Y) - \omega_i^k \wedge \omega_k^j(X,Y) \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(U))$$

証明.

$$\begin{aligned}\Omega_i^j(X,Y)e_j &= R(X,Y)e_i = \nabla_X\nabla_Y e_i - \nabla_Y\nabla_X e_i - \nabla_{[X,Y]}e_i \\ &= \nabla_X(\omega_i^j(Y)e_j) - \nabla_Y(\omega_i^j(X)e_j) \\ &= (X(\omega_i^j(Y))e_j + \omega_i^j(Y)\omega_j^k(X)e_k) - (Y(\omega_i^j(X))e_j + \omega_i^j(X)\omega_j^k(Y)e_k) - \omega_i^j([X,Y])e_j \\ &= (X(\omega_i^j(Y))e_j + \omega_i^k(Y)\omega_k^j(X)e_j) - (Y(\omega_i^j(X))e_j + \omega_i^k(X)\omega_k^j(Y)e_j) - \omega_i^j([X,Y])e_j \\ &= (X(\omega_i^j(Y)) - Y(\omega_i^j(X)) - \omega_i^j([X,Y]))e_j + (\omega_i^k(Y)\omega_k^j(X) - \omega_i^k(X)\omega_k^j(Y))e_j \\ &= d\omega_i^j(X,Y)e_j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j(X,Y)e_j \\ &= (d\omega_i^j(X,Y) - \omega_i^k \wedge \omega_k^j(X,Y))e_j\end{aligned}$$

□