1

注意 1.1. m を非負整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．$C^m(\Omega)$ には

$$\|f\| \coloneqq \max_{|\alpha| \le k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f|$$

で位相を定める.

注意 1.2. A, B を位相空間 X の部分集合とする．$A \subset B$ かつ, A が B の相対コンパクトな部分集合であるときに, $A \Subset B$ で表す.

注意 1.3. m を非負整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．相対コンパクト集合 $\Omega' \Subset \Omega$ に対して

$$\|f\|_{H^m(\Omega')} \coloneqq \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

と定め, $H^m_{loc}(\Omega)$ には, セミノルムの族 $\left\{ \|\cdot\|_{H^m(\Omega')} \mid \Omega' \Subset \Omega \right\}$ により定まる位相を備える.

命題 1.4. m を非負整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．包含写像

$$C^m(\Omega) \to H^m_{loc}(\Omega)$$

は連続である.

証明.

$$\|f\|^2_{H^m(\Omega')} = \sum \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega')} \le \mathrm{Const}(\sum \sup |\partial^\alpha f|^2) \le \mathrm{Const}(\max_{|\alpha| \le m} \sup_{\Omega'} |\partial^\alpha f|^2) = \mathrm{Const}\, \|f\|^2_{C^m(\Omega')}$$

□