セミノルム位相

1

注意 1.1. X でベクトル空間を表す.

定義 1.2. (セミノルム). ノルムの条件から分離性 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ を除いたものをセミノルムという.

命題 1.3. ノルムはセミノルムである.

定義 1.4. (分離的セミノルム族). X 上のセミノルムの族 $\mathcal{P} = \{p_\lambda\}$ は

$$\left\{x \in X \mid {}^\forall p \in \mathcal{P}\ p(x) = 0\right\} = \{0\}$$

を満たす時に, 分離的であるという.

定義 1.5. (セミノルム位相生成族). X 上の分離的セミノルム族 $\mathcal{P}$ に対して

$$\{p_x \mid p \in \mathcal{P}, x \in X\}$$

をセミノルム位相生成族という. ただし, $p \in \mathcal{P}, x \in X$ に対して

$$p_x(\cdot) \coloneqq p(\cdot - x)$$

と定めてある.

定義 1.6. (セミノルム位相). 分離的セミノルム族 $\mathcal{P}$ から定まるセミノルム位相生成族を $\tilde{\mathcal{P}}$ で表す. $\tilde{\mathcal{P}}$ の任意の元を連続にする最弱の位相 (つまり始位相) を, 分離的セミノルム族 $\mathcal{P}$ から定まるセミノルム位相という.

命題 1.7. X をベクトル空間, $\mathcal{P}$ を分離的セミノルム族とする. X に $\mathcal{P}$ により定まるセミノルム位相を備える. このとき,

$$x_n \to x \Leftrightarrow p_y(x_n) \to p_y(x)\ ({}^\forall p_y \in \tilde{\mathcal{P}})$$

証明. ($\Rightarrow$) は, $p_y \in \tilde{\mathcal{P}}$ を連続にする位相をいれてあるので明らかに成り立つ. ($\Leftarrow$) x の開近傍 V_x を任意にとる. 始位相において

$$\left\{p_y^{-1}(U) \subset X \mid p \in \tilde{\mathcal{P}}, U \subset [0,\infty) \text{is open}\right\}$$

は準開基であるので, 有限個の $p_1, \cdots, p_k \in \tilde{\mathcal{P}}$ と開集合 $U_1, \ldots, U_k \in [0,\infty)$ を用いて

$$p_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap p_k^{-1}(U_k) \subset V_x$$

となる x の開近傍がとれる. $p_i x \in U_i$ なので, U_i は $p_i x$ の開近傍なので, p_i の連続性から, ある自然数 N_i で

$$n \geq N_i \Rightarrow p_i x_n \in U_i$$

を満たすものがとれる. そこで $N \coloneqq \max\{N_1, \ldots, N_k\}$ とすると,

$$n \geq N \Rightarrow p_1(x_n) \in U_1, \ldots p_k(x_n) \in U_k$$

であるので, $x_n \in p_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap p_k^{-1}(U_k)$ であるので, $x_n \in V_x$ となる. つまるところ, x の任意の開近傍 V_x に対して, ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば, $x_n \in V_x$ が成り立つので, 主張が示された. □

命題 1.8. X に分離的セミノルム族 $\mathcal{P}$ から定まるセミノルム位相を備える.

$$x_n \to x \Leftrightarrow p(x_n) \to p(x)\ ({}^\forall p \in \mathcal{P})$$

証明. 任意に $p_y \in \tilde{\mathcal{P}}$ をとる.

$$|p_y(x_n) - p_y(x)| = |p(x_n - y) - p(x - y)| = |p(x_n - x)| = |p(x_n) - p(x)|$$

であるので,

$$p(x_n) \to p(x)\ ({}^\forall p \in \mathcal{P}) \Leftrightarrow p_y(x_n) \to p_y(x)\ ({}^\forall p_y \in \tilde{\mathcal{P}})$$

が成り立つことから主張が従う. □