距離空間の集合の容量

1

設定 1.1. $1 \leq p < \infty$ とし, μ は X 上の適当な完備ボレル測度で, 任意の開球に対して正の測度を割り当てるものとする．ボレル可測でない集合 $A \subset X$ に対しては, 外測度により $\mu(A)$ を定めることにする．また, このような測度に対しては, 任意の集合 $A \subset X$ に対して, ボレル集合 $B \subset X$ で, $\mu(A) = \mu(B)$ を満たすものが存在する．

定義 1.2. (X, d) を距離空間とする．$A \subset X$ に対して,

$$C_p(A) \coloneqq \inf_{u \in N^{1,p}(X), \chi_A \leq u|_A} \|u\|_{N^{1,p}(X)}^p$$

と定め, これを A の容量という．

命題 1.3. (X, d) を距離空間とする．$u : X \to \mathbb{R}$ に対して,

$$UG(u) \subset UG(\max\{\min\{u, 1\}, 0\})$$

が成り立つ．

証明. $v \coloneqq \max\{\min\{u, 1\}, 0\}$ と表すことにする．$g \in UG(u)$ とすると, 任意の弧長パラメータづけられた絶対連続曲線 γ に対して,

$$|v \circ \gamma(L\gamma) - v \circ \gamma(0)| \leq |u \circ \gamma(L\gamma) - u \circ \gamma(0)|$$

より主張がしたがう． □

命題 1.4. (X, d) を距離空間とする．$u \in N^{1,p}(X)$ に対して,

$$\|\max\{\min\{u, 1\}, 0\}\|_{N^{1,p}(X)} \leq \|u\|_{N^{1,p}(X)}$$

が成り立つ．

証明. $UG(u) \subset UG(\max\{\min\{u, 1\}, 0\})$ と, $|\max\{\min\{u, 1\}, 0\}| < |u|$ より主張が従う．

□

命題 1.5. (X, d) を距離空間とし, $A \subset X$ とする．$v : X \to \mathbb{R}$ が $1 \leq u|_A$ を満たす $u : X \to \mathbb{R}$ を用いて,

$$v = \max\{\min\{u, 1\}, 0\}$$

と表されるとき, $\chi_A \leq v \leq 1$ を満たす．

証明. 明らかにそう．

□

命題 1.6. (X,d) を距離空間とする. $A \subset X$ に対して,

$$C_p(A) = \inf_{u \in N^{1,p}(X), \chi_A \le u \le 1} \|u\|^p_{N^{1,p}(X)}$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned} &C_p(A) \le \inf\{\|v\|^p \mid \chi_A \le v \le 1\} \\ &\le \inf\{\|v\|^p \mid v = \max\{\min\{u,1\},0\}, 1 \le u|_A\} \\ &\le \inf\{\|u\|^p \mid 1 \le u|_A\} = C_p(A) \end{aligned}$$

□

命題 1.7. (X,d) を距離空間とする.

$$C_p(\varnothing) = 0$$

証明. 0 という関数を考えれば良い. □

命題 1.8. (X,d) を距離空間とする. $A \subset X$ とする.

$$\mu(A) \le C_p(A)$$

が成り立つ.

証明. $u \in N^{1,p}(X)$ で $\chi_A \le u|_A$ を満たすならば,

$$\|\chi_A\|^p_{N^{1,p}(X)} \le \|u\|^p_{N^{1,p}(X)}$$

が成り立つ. で, $\|\chi_A\|^p_{N^{1,p}(X)} = \mu(A)$ なので, 主張が従う. □