誘導接続

1

定義 1.1. N, M を可微分多様体, $f : N \to M$ を C^∞ 級の写像とする. $\xi : N \to TM$ なる C^∞ 級写像で

$$\pi_{TM} \circ \xi = f$$

を満たすものを, f に沿ったベクトル場という. その全体を $\Gamma(f^*TM)$ で表す.

命題 1.2. N, M を多様体, $f : N \to M$ を C^∞ 級の写像とする. M の接続 ∇ に対して, 写像

$$\nabla^{f^*} : \mathfrak{X}(N) \times \Gamma(f^*TM) \to \Gamma(f^*TM)$$

で
(1)$\mathbb{R}$ 上の双線形写像である.
(2)$\nabla^{f^*}_{gX}\xi = g\nabla^{f^*}_X \xi$ が成り立つ.
(3)$\nabla^{f^*}_X(g\xi) = X(g)\xi + g\nabla^{f^*}_X \xi$ が成り立つ.
(4) 任意の $\xi \in \Gamma(f^*TM)$ に対して, N の開集合 $U \subset N$ と M の開集合 $V \subset M$ と, U 上のベクトル場 Y が $f(U) \subset V$ かつ $\xi = f^*Y$ を満たすならば,

$$(\nabla^{f^*}_X \xi)_p = \nabla_{df_p(X)}Y \quad (p \in U)$$

が成り立つ.
を満たすようなものが一意に存在する.

証明. (sketch). $X \in \mathfrak{X}(M), \xi \in \Gamma(f^*TM), p \in N$ に対して $\nabla^{f^*}_X \xi$ を, 適当に $f(p)$ の周囲の局所座標 $(V, y_1, \ldots, y_m)$ をとって, $f(U) \subset V$ となるように $p \in N$ の周りの局所座標を $(U, x_1, \ldots, x_n)$ ととる. $X = X^i\partial_i, \xi = \xi^\alpha\delta_\alpha$ と表示することにして, $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ を ∇ の $(V, y_1, \ldots, y_m)$ に対応するクリストっフェル記号とする.

$$(\nabla^{f^*}_X \xi)_p \coloneqq (X^i(\partial_i\xi^\gamma) + X^i(\partial_i f^\beta)\xi^\alpha f^*\Gamma^\gamma_{\beta\alpha})f^*(\delta_\gamma)$$

により定めるとよい. □