

長さ構造

1

1.1 長さ構造

設定 1.1. X, Y で距離空間を表す. それぞれが備える距離 d_X, d_Y も混乱の恐れのない限り d で表す.

定義 1.2. (伸長). $f : X \rightarrow Y$ に対して $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に値をとる

$$\text{dil}(f) := \sup_{x, x' \in X, x \neq x'} \frac{d(fx, fx')}{d(x, x')}$$

と定め, これを f の伸長という.

定義 1.3. (局所伸長). $f : X \rightarrow Y$ に対して $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に値をとる

$$\text{dil}_x(f) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{dil}(f|_{B(x; \varepsilon)})$$

と定め, これを f の $x \in X$ における局所伸長という.

定義 1.4. (リプシッツ写像). $\text{dil}(f) < \infty$ を満たす写像をリプシッツ写像という.

命題 1.5. 任意の点 $x \in X$ において, $\text{dil}_x f \leq \text{dil} f$ が成り立つ.

証明.

□

定義 1.6. (リプシッツ写像の総伸長). $f : [a, b] \rightarrow Y$ をリプシッツ写像とする.

$$l(f) := \int_a^b \text{dil}_t f dt$$

と定め, これを f の (リプシッツ写像) 総伸長という.

定義 1.7. (連続写像の総伸長). リプシッツ連続でない連続写像 $f : [a, b] \rightarrow Y$ に対して,

$$l(f) = \sup \sum d(f(t_i), f(t_{i+1}))$$

で定める. ただし, 上限は全ての n 分割 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ を走る. これを f の (連続写像) 総伸長という.

注意 1.8. 絶対連続な写像に関しては, リプシッツ写像総伸長と連続写像総伸長は一致するらしい.

定義 1.9. (長さ構造). X を集合とする. 区間全体を添字集合とする, 閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ から X への写像の族 $\{\mathcal{C}(I)\}_I$ と, 全ての閉区間に関して $\mathcal{C}(I)$ を足し合わせた $\mathcal{C} = \cup_I \mathcal{C}(I)$ 上の関数 $l : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ の組 $(\{\mathcal{C}(I)\}_I, l)$ で

(1) $l(f) \geq 0$ ($f \in C$) かつ $l(f) = 0$ であることの必要十分条件が f が定値写像 であることである.

(2-1) $I \subset J$ ならば, 任意の $f \in C(J)$ に対して $f|_I \in C(I)$ が成り立つ.

(2-2) $f \in C([a, b]), g \in C([b, c])$ で $f(b) = g(b)$ を満たすものに対して, $h(t) := \begin{cases} f(t) & (t \in [a, b]) \\ g(t) & (t \in [b, c]) \end{cases}$ により定

まる写像は $h \in C([a, c])$ であり, $l(h) = l(f) + l(g)$ が成り立つ.

(3) 区間 I, J に対して $\varphi : I \rightarrow J$ が同相写像であるならば, $f \in C(J)$ に対して $f \circ \varphi \in C(I)$ であり, $l(f \circ \varphi) = l(f)$ が成り立つ.

(4) 任意の閉区間 $I = [a, b]$ と $f \in C([a, b])$ に対して, $t \mapsto l(f|_{[a, t]})$ は連続である.

を満たすとき, 長さ構造という.

定義 1.10. (長さ擬距離). X を集合とする. $(\{C(I)\}_I, l)$ を X の長さ構造とする.

$$d_l(x, y) := \inf\{l(f) \mid f \in C, x, y \in \text{im}(f)\}$$

をこの長さ構造が定める長さ擬距離という.

例 1.11. 距離 d を備えた集合 X に対して標準的に定まる長さ構造は, $C(I)$ を I から X への連続写像とし, l を総伸長とした $(\{C(I)\}_I, l)$ である.

命題 1.12. X に長さ構造 $(\{C(I)\}_I, l)$ を備え, この長さ構造から定まる長さ擬距離を d_l とする. 距離空間 (X, d_l) に前述のようにして標準的な長さ構造 $(\{C(I)\}_I, \tilde{l})$ を定める. (すなわち, $C(I)$ を I から X への連続写像とし, \tilde{l} を連続写像総伸長とした $(\{C(I)\}_I, \tilde{l})$ である.) このとき, l がコンパクト開位相を備えた $C(I)$ 上で下半連続であるならば,

$$l = \tilde{l}$$

が成り立つ.

証明. step:

$$l(f) \leq \tilde{l}(f)$$

(\because) $t \mapsto l(f|_{[a, t]})$ は $[a, b]$ 上で一様連続なので適当に $\eta > 0$ で $|t - t'| < \eta$ ならば $d_l(f(t), f(t')) < \varepsilon$ となるものをとる. 区間 $[a, b]$ の n 分割を, 各メッシュの長さが η を超えないように分割する. 長さ擬距離の定義から

$$d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) = \{l(g) \mid g \in C([t_i, t_{i+1}]), g_{t_i} = f_{t_i}, g_{t_{i+1}} = f_{t_{i+1}}\}$$

であるので, $g_i \in C([t_i, t_{i+1}])$ で

$$d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) \leq l(g_i) \leq d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{n}$$

を満たすものがとれる. g_0, \dots, g_n を繋ぎ合わせたものを $h_\varepsilon \in C([a, b])$ とすると,

$$\tilde{l}(f) = \sup \sum d_l(f(t_i), f(t_{i+1}))$$

であるので,

$$l(h_\varepsilon) = \sum l(g_i) \leq \sum d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) + n \cdot \frac{\varepsilon}{n} \leq \tilde{l}(f) + \varepsilon$$

が成り立つ。また、任意の $t \in [a, b]$ に対して $t \in [t_i, t_{i+1}]$ なる i をみつけて、

$$\begin{aligned}
& d_l(h_\varepsilon(t), f(t)) \\
& \leq d_l(h_\varepsilon(t), h_\varepsilon(t_{i+1})) + d_l(h_\varepsilon(t_{i+1}), f(t_{i+1})) + d_l(f(t_{i+1}), f(t)) \\
& < d_l(h_\varepsilon(t), h_\varepsilon(t_{i+1})) + 0 + \varepsilon \\
& < l(g_i) + \varepsilon \\
& < d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon < 3\varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ。(もしかしたら嘘書いてるかも。) l がコンパクト開位相に関して下半連続なので

$$l(f) \leq \liminf l(h_\varepsilon)$$

であり、 $\liminf l(h_\varepsilon) \leq \lim(\tilde{l}(f) + \varepsilon) = \tilde{l}(f)$ であるので、主張は示された。▲

つぎに逆側の不等号を考える。

step:

$$\tilde{l}(f) \leq l(f)$$

(\because) 定義通りに追っていくと、

$$\begin{aligned}
& \tilde{l}(f) \\
& = \sup \sum d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) \\
& \leq \sup \sum \inf \{l(g) \mid g \in \mathcal{C}([0, 1]), g(0) = f(t_i), g(1) = f(t_{i+1})\} \\
& \leq \sup \sum l(f|_{[t_i, t_{i+1}]}) = l(f)
\end{aligned}$$

が成り立つ。二つ目の等号では

$$\{l(g) \mid g \in \mathcal{C}, f(t_i), f(t_{i+1}) \in \text{img}\} \subset \{l(g) \mid g \in \mathcal{C}([0, 1]), g(0) = f(t_i), g(1) = f(t_{i+1})\}$$

を用いた。▲

従って、命題の主張が成り立つ。□

1.2

命題 1.13. $f : S^n \rightarrow S^n$ は、 $\text{dil} f < 2$ であるならば、 $\text{deg} f \in \{1, 0, -1\}$ である。

証明. f が全射でない場合は $\text{deg} f = 0$ である。 f が全射である場合を考える。

$$\varepsilon := 2 - \text{dil} f > 0$$

と定める。適当に好きな $y \in S^n$ をとる。

step: $f^{B(y; \varepsilon)}$ は S^n の適当な開半球に含まれる。

(\because) y' を y の対蹠点とする。 $x' \in f^{-1}(y')$ を好きにとる。任意に $z \in f^{-1}(B(y; \varepsilon))$ をとる。 $\text{dil} f < 2 - \varepsilon$ であるので、 $\frac{d(f(x'), f(z))}{d(x', z)} \leq 2 - \varepsilon$ が成り立つ。また、 y' は y の対蹠点であるので、 $B(y; \varepsilon)$ に属する $f(z)$ に対しては、 $d(y', f(z)) < \pi - \varepsilon$ が成り立つ。従って、

$$d(x', z) \geq \frac{1}{2 - \varepsilon} d(y') \geq \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ. これはすなわち $f^{B(y;\varepsilon)}$ が S^n の x' を中心とした開半球とは逆の (つまり, x' の対蹠点を中心とする) 開半球に含まれることを意味する.

▲

□