コルモゴロフの連続修正定理

1

命題 1.1. $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ を $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の確率過程とする. $\alpha,\beta,c>0$ で

$$E(|X_t-X_s|^{\alpha})\leq c\,|t-s|^{1+\beta}\quad(0\leq s,t,\leq 1)$$

を満たすものが存在するならば, $\{X_t\}$ の修正で, 連続な確率過程 $\{Y_t\}$ が存在する.

証明.

$$A_n:=\left\{\omega\in\Omega\mid\sup_{1\leq k\leq 2^n}\left|X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)-X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)\right|\geq 2^{-\lambda n}\right\}$$

とすると,
step: $\omega\in\cup_N\cap_{n\geq N}A_n^c$ を適当にとると, $N(\omega)$ で

$$n\geq N(\omega)\Rightarrow\sup_{1\leq k\leq 2^n}\left|X_{\frac{k}{2^n}}(\omega)-X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)\right|<2^{-\lambda n}$$

が成り立つものがとれる.
$(\because)$ 適当にチェビシェフの不等式を途中で用いると,

$$\begin{aligned}P(\sup_{1\leq k\leq 2^n}\left|X_{\frac{k}{2^n}}-X_{\frac{k-1}{2^n}}\right|\geq 2^{-\lambda n})&=P(\cup_{k=1}^{2^n}\left|X_{\frac{k}{2^n}}-X_{\frac{k-1}{2^n}}\right|\geq 2^{-\lambda n})\\&\leq\sum_{k=1}^{2^n}P(\left|X_{\frac{k}{2^n}}-X_{\frac{k-1}{2^n}}\right|\geq 2^{-\lambda n})\\&\leq\sum_{k=1}^{2^n}c2^{-\lambda n}\left|\frac{k}{2^n}-\frac{k-1}{2^n}\right|^{1+\beta}\\&=\sum_{k=1}^{2^n}c2^{-\lambda n}\frac{1}{2^n}^{1+\beta}\\&=2^nc2^{-n(1+\beta-\alpha\lambda)}=c2^{-n(\beta-\alpha\lambda)}\end{aligned}$$

が成り立つ. $\sum_{n=1}^{\infty}c2^{-n(\beta-\alpha\lambda)}<\infty$ であるので, $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$ であるのでボレルカンテリの補題から

$$P(\cap_N\cup_{n\geq N}A_n)=0$$

が成り立つ. つまり

$$P(\cup_N\cap_{n\geq N}A_n^c)=1$$

である. 落ち着いて考えると, これは求める主張に合致する. ▲

さて, $[0,1]$ 区間を $2,4,8,16,\ldots$ と分割する点の集合

$$D_n \coloneqq \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k=0,1,\ldots,2^n \right\}, \quad D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$$

を定める. $m > N(\omega)$ を適当にとり, $t,s \in D_m, 0 < t-s < 2^{-N(\omega)}$ となるものをとる.
<u>step:</u> $m > M \geq N(\omega)$ で $\frac{1}{2^{M+1}} \leq t-s < \frac{1}{2^M}$ となるものがとれる.
($\because$) わかりやすく例を観察するに留める. $m=3, N=2, s=\frac{3}{8}, t=\frac{4}{8}$ のとき, $t-s=\frac{1}{8}$ であるので, $M=2$ ととれば, $\frac{1}{2^3} \leq \frac{1}{8} < \frac{1}{2^2}$ とできる.

▲

$$s_1 \coloneqq \min\{s' \mid D_{n-1}, s \leq s'\}, \quad t_1 \coloneqq \max\{t' \in D_{n-1} \mid t' \leq t\}$$

とする.
<u>step:</u> 任意の $\omega \in \cup_N \cap_{n \geq N} A_n^c$ に対して $\{X_t(\omega)\}$ は D 上で ヘルダー連続である.
($\because$) $|s-s_1|, |t-t_1| \leq \frac{1}{2^n}$ となるので,

$$n \geq N(\omega) \Rightarrow \sup_{1 \leq k \leq 2^n} \left| X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega) \right| < 2^{-\lambda n}$$

を用いると, $|X_t - X_{t_1}|, |X_{s_1} - X_s| \leq 2^{-\lambda n}$ となるので, 適当に三角不等式を用いると

$$|X_t - X_s| \leq 2 \cdot 2^{-\lambda n} + |X_{t_1} - X_{s_1}|$$

が成り立つ. 今, $t_1 - s_1 < \frac{1}{2^M}$ であるので,

$$s_2 \coloneqq \min\{s' \mid D_{n-2}, s_1 \leq s'\}, \quad t_2 \coloneqq \max\{t' \in D_{n-2} \mid t' \leq t_1\}$$

として次々に同様の評価を繰り返していくことにより,

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| \leq\ & 2 \cdot 2^{-\lambda n} + 2 \cdot 2^{-\lambda(n-1)} + 2 \cdot 2^{-\lambda(n-2)} + \\ & \cdots + 2 \cdot 2^{-\lambda(n-(m+2))} + \left| X_{t_{n-(m+1)}} - X_{s_{n-(m+1)}} \right| \end{aligned}$$

となり, ちょうど $t_{n-(m+1)} - s_{n-(m+1)} = \frac{1}{2^{m+1}}$ となるので, 結局, 地道に計算すると,

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| \leq\ & 2 \cdot 2^{-\lambda n} + 2 \cdot 2^{-\lambda(n-1)} + 2 \cdot 2^{-\lambda(n-2)} + \\ & \cdots + 2 \cdot 2^{-\lambda(n-(m+2))} + 2 \cdot 2^{-\lambda(n-(m+1))} \\ \leq\ & \frac{2}{1-2^{-\lambda}} (2^{-\lambda})^{m+1} \leq \frac{2}{1-2^{-\lambda}} |t-s|^{\lambda} \end{aligned}$$

となるので, ヘルダー連続性がいえた. ▲ そこで, $\omega \notin \cup_N \cap_{n \geq N} A_n^c$ に対しては, $Y_t = 0$ と定め, $\omega \in \cup_N \cap_{n \geq N} A_n^c$ に対しては t に収束する $t_n \in D$ の点列がとれるので, 適当にそれをひとつとって

$$Y_t(\omega) \coloneqq \lim X_{t_n}(\omega)$$

とすることにより連続な確率過程 $\{Y_t\}$ を定める.
<u>step:</u> $\{Y_t\}$ は $\{X_t\}$ の修正である.
($\because$) (ちょっと嘘書いてるかもしれん.) $t \in D \Rightarrow X_t = Y_t\ a.s.$ である. $t \in D^c \cap [0,1]$ に対しては, $E(|X_t - X_s|^{\alpha}) \leq c|t-s|^{1+\beta} \quad (0 \leq s,t, \leq 1)$ より, X_{t_n} は X_t に L^{α} 収束するので, 適当に概収束部分列をとって改めて X_{t_n} とする. $\{X_{t_n}\}$ は $\{Y_t\}$ に概収束するので, 概収束先が a.s. で一意であることから $X_t = Y_t\ a.s.$ が成り立つ. ▲

以上のことから命題の主張がなりたつ. □