# 1

$x \in \mathbb{R}, r > 0$ に対して

$$B(x;r) \coloneqq \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < r\}$$

と定める.

(1) $\{B(x;1)\}_{x\in F}$ は $F$ の開被覆であり, $F$ はコンパクトであるので, 適当な $x_1, \ldots, x_N \in F$ で

$$F \subset B(x_1;1) \cup B(x_2;1) \cup \cdots \cup B(x_N;1)$$

を満たすものが存在する. $x_1, \ldots, x_N$ のうち最大の実数を $x_M$ とし, 最小の実数を $x_m$ とする.

$$R \coloneqq \max\{|x_M|, |x_m|\}$$

と定めると,

$$F \subset B(x_1;1) \cup B(x_2;1) \cup \cdots \cup B(x_N;1) \subset B(0;R+1)$$

が成り立つので, $F$ は有界集合である.

(2)$x \in F^c$ を任意にとる. $y \in F$ に対して, $B(x;|x-y|/3) \cap B(y;|x-y|/3) = \varnothing$ が成り立つ. $\{B(y;|x-y|/3)\}_{y\in F}$ は $F$ の開被覆であり, $F$ はコンパクトであるので, 適当な $y_1, \ldots, y_N \in F$ で $F \subset B(y_1;|x-y_1|/3) \cup B(y_2;|x-y_2|/3) \cup \cdots \cup B(y_N;|x-y_N|/3)$ を満たすものがとれる.

$$U_x \coloneqq B(x;|x-y_1|/3) \cap B(x;|x-y_2|/3) \cap \cdots \cap B(x;|x-y_N|/3)$$

と定めると,

$$(B(y_1;|x-y_1|/3) \cup B(y_2;|x-y_2|/3) \cup \cdots \cup B(y_N;|x-y_N|/3)) \cap U_x = \varnothing$$

であるので, $F \cap U_x = \varnothing$ が成り立つ. $R \coloneqq \min\{|x-y_1|, |x-y_2|, \ldots, |x-y_N|\}$ とすると,

$$B(x;R/3) \subset U_x$$

が成り立つので, $U_x$ は $x$ を含む開集合である. 従って, $F^c$ は開集合であるので, $F$ は閉集合である.

(3)$F^c$ は開集合なので, 任意の点 $q \in \mathbb{F}^c$ に対して $\delta_q > 0$ で $B(q;\delta_q) \subset F^c$ を満たすものが存在する. $\bigcup_{q\in F^c\cap\mathbb{Q}} B(q;\delta_q) = F^c$ であるので, $F^c$ は高々可算個の開区間の和で表される. 高々可算個である集合族 $\{B(q;\delta_q)\}_{q\in F^c\cap\mathbb{Q}}$ をあらためて $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ と表すことにする. $B_k, B_l \in \mathcal{B}$ に対して適当な有限個の $B_{k_0}, \ldots, B_{k_N} \in \mathcal{B}$ で,

$$B_{k_0} = B_k, B_{k_1} \cap B_{k_2} \neq \varnothing, \ldots, B_{k_{N-1}} \cap B_{k_N} \neq \varnothing, B_{k_N} = B_l$$

を満たすものが存在する時に

$$B_k \sim B_l$$

であると定めると, これは同値関係である. $[B] \in \mathcal{B}/\sim$ に対して

$$U_{[B]} \coloneqq \bigcup_{B \in [B]} B$$

と定めると, $[B] \neq [B']$ であれば, $U_{[B]} \cap U_{[B']} = \varnothing$ である.

$$F^c = \bigsqcup_{[B] \in \mathcal{B}/\sim} U_{[B]}$$

が成り立つので, $F^c$ は高々可算個の互いに交わらない開集合の和で表される.