非線型ハーンバナッハ拡張定理

1

命題 1.1. (非線型ハーンバナッハ拡張定理). (X,d) を距離空間とする. $A \subset X, f : A \to \mathbb{R}$ をリプシッツ関数とする. このとき, リプシッツ定数を保存する X 上への拡張が存在する.

証明. $L \coloneqq \mathrm{Lip} f$ とする.

$$\tilde{f}(x) \coloneqq \inf_{a \in A}\{f(a) + Ld(x,a)\}$$

と定めるとよい.
step:

$$\tilde{f}(a) = f(a) \quad ({}^{\forall} a \in A)$$

$(\because)$ $\inf_{b\in A}\{f(b) + Ld(a,b)\} \leq f(a)$ は明らか. $b \in A$ で, $f(b) + Ld(a,b) < f(a)$ を満たす点が 存在すると, $Lipf = L$ であることに矛盾するので, $\inf_{b\in A}\{f(b) + Ld(a,b)\} \geq f(a)$ が成り立つ. ▲

$a_n \in A$ で

$$\tilde{f}(x) \leq f(a_n) + Ld(x,a_n) \leq \tilde{f}(x) + \frac{1}{n}$$

を満たすものをとる.

$$-\tilde{f}(x) \leq -f(a_n) - Ld(x,a_n) + \frac{1}{n}$$
$$\tilde{f}(y) \leq f(a_n) + Ld(y,a_n)$$

であるので,

$$\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) \leq L(d(y,a_n) - d(x,a_n)) + \frac{1}{n} \leq Ld(x,y) + \frac{1}{n}$$

極限をとることで,

$$\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) \leq Ld(x,y)$$

が成り立つ. x, y を取り替えて同じ議論をすることで,

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) \leq Ld(y,x)$$

が成り立つので, $\mathrm{Lip}\tilde{f} \leq \mathrm{Lip} f$ である. 拡張であることから, $\mathrm{Lip}\tilde{f} \geq \mathrm{Lip} f$ であることは明らかであるので, 主張が従う. □