

ソボレフ空間の双対性

1

定義 1.1.

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{T \in \mathcal{S}' \mid \langle \xi \rangle^s \mathcal{F}T \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

命題 1.2. $u \in H_s$ に対して, $(u, \cdot) : H_{-s} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$(u, v) := \int \langle \xi \rangle^s \mathcal{F}u(\xi) \langle \xi \rangle^{-s} \mathcal{F}v(\xi) d\xi$$

により定めると, これは有界線型作用素である.

証明.

$$\langle \xi \rangle^s \mathcal{F}u(x) \langle \xi \rangle^{-s} \mathcal{F}v(\xi) d\xi \leq (u, u)_s^{1/2} (v, v)_{-s}^{1/2}$$

が成り立つ.

□