

等長写像が接続を保存することの証明

1

命題 1.1. $f : M \rightarrow N$ を微分同相とする.

$$df[X, Y] = [dfX, dfY] \quad (X, Y \in \Gamma(TM))$$

が成り立つ.

証明.

$$((dfY)F) \circ f = ((dfY)_{f(\cdot)})F = (df_{(\cdot)}Y)F = Y_{(\cdot)}(F \circ f)$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} (df[X, Y])F &= [X, Y](F \circ f) = X(Y(F \circ f)) - Y(X(F \circ f)) \\ &= X(((dfY)F) \circ f) - Y(((dfX)F) \circ f) = (dfX)((dfY)F) - (dfY)((dfX)F) = [dfX, dfY]F \end{aligned}$$

□

命題 1.2. $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ を等長写像, $\nabla, \tilde{\nabla}$ をそれぞれ $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ のレビチビタ接続とする. このとき,

$$\begin{aligned} (1) df(\nabla_X Y) &= \tilde{\nabla}_{dfX} dfY \quad (X, Y \in \Gamma(TM)) \\ (2) df(R(X, Y)Z) &= R(dfX, dfY)dfZ \quad (X, Y, Z \in \Gamma(TM)) \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明.

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} := df(\nabla_X Y) \quad (\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(\tilde{M}))$$

により \tilde{M} に新しい接続を定める (ただし, $X, Y := df^{-1}(\tilde{X}), df^{-1}(\tilde{Y})$). $p \in M$ に対して $\dot{c}_0 = X_p, c_0 = p$ なる曲線 c をとる.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}(\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z})) &= \tilde{X}(\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z})) = (dfX)\tilde{g}(dfY, dfZ) \\ &= \partial_t|_0(\tilde{g}(dfY, dfZ) \circ (f(c(t)))) = \partial_t|_0(f^*\tilde{g}(Y, Z)_{c(t)}) = \partial_t|_0(g(Y, Z)) \\ &= X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = f^*\tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + f^*\tilde{g}(Y, \nabla_X Z) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z}) + \tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z}) \end{aligned}$$

であることと,

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}] = df(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - df[X, Y] = df[X, Y] - df[X, Y] = 0$$

であることから, $\tilde{\nabla}$ は (\tilde{M}, \tilde{g}) のレビチビタ接続である. 従って, レビチビタ接続の一意性から, $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}$ が成り立つ. すなわち,

$$\tilde{\nabla}_{dfX} dfY = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = df(\nabla_X Y)$$

である. (2) は $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ であるので, (1) と合わせると容易に従う. □

命題 1.3. $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ を等長写像とする. このとき, $v \in T_p M, df_p v \in T_{f(p)} \tilde{M}$ を始方向とする測地線 $\gamma, \tilde{\gamma}$ に対して

$$\begin{aligned} (1) \tilde{\gamma}(t) &= f \circ \gamma(t) \\ (2) df \circ P_{\gamma}^{s,t} &= P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} \circ df \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. (1) $\tilde{\nabla}_{df\dot{\gamma}_t}(df\dot{\gamma}_t) = df(\nabla_{\dot{\gamma}_t}\dot{\gamma}_t) = 0$ なので, $f \circ \gamma(t)$ は測地線である. また, 始点が $f \circ \gamma(0) = f(p)$ であり, 始方向が $df(\dot{\gamma}_0) = df_p(v)$ であるので, $f \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ が成り立つ. (2) $w \in T_{\gamma_s} M$ に対して, $\tilde{W}_t := df(P_{\gamma}^{s,t}(w))$ は $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}_t} df(P_{\gamma}^{s,t}(w)) = df(\nabla_{\dot{\gamma}_t}(P_{\gamma}^{s,t}w)) = 0$ より, \tilde{W}_t は $\tilde{\gamma}_t$ に沿って平行なベクトル場であるので,

$$df(P_{\gamma}^{s,t}(w)) = \tilde{W}_t = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} \tilde{W}_s = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} df(P_{\gamma}^{s,s}(w)) = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} dfw$$

□