文系とゆく極大トーラス

1

注意 1.1. 行列の集合は, 行列の掛け算を演算として群とみなす. $\simeq$ は群同型を表す.

注意 1.2.

$$SO(2) \coloneqq \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, A^{-1} = A^{\top}, \det A = 1 \right\} \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in S^1 \right\}$$

定義 1.3. 集合

$$\mathbb{T} \coloneqq \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

は複素数の乗法を演算として群を成す. これを 1 次元トーラスという.

命題 1.4.

$$\mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} \simeq SO(2)$$

証明.

$$f(e^{i\theta}) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と定めると, 明らかに全単射であり,

$$f(e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}) = f(e^{i(\theta_1+\theta_2)}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

であり,

$$f(e^{i\theta_1}) f(e^{i\theta_2}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

であるので, 群準同型でもある. 従って, f は同型写像である. □

定義 1.5. (n 次元トーラス). $\mathbb{T}$ の n 個の群としての直積 $\mathbb{T}^n = \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}$ を n 次元トーラスという.

定義 1.6. (閉線型群). $GL(n; \mathbb{C})$ の部分群であり, かつ閉集合であるものを, 閉線型群という.