

関数の和の上勾配

1

命題 1.1. (関数の和の上勾配). (X, d) を距離空間とする. $u, u_1, u_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ を拡張実数値関数とする. $g \in UG(u), g_1 \in UG(u_1), g_2 \in UG(u_2)$ に対して,

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 &\in UG(u_1 + u_2) \\ |a|g &\in UG(au) \quad (a \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 省略.

□

注意 1.2. $u_1(x) := x, u_2(x) := -x$ とすると, $1 \in UG(u_1), 1 \in UG(u_2)$ であるわけだが,

$$u_1(x) - u_2(x) = 2x$$

であるので, $1 - 1 = 0$ は $UG(u_1 - u_2)$ に属さない.