

一様非凸性とメンガー凸性

1

命題 1.1. (X, d) を固有距離空間とする. (X, d) がメンガー凸であるならば, (X, d) は UNC でない.

証明. 任意に $0 < \delta < \frac{1}{2}$ をとる. $x, y \in X$ をとる. 任意の $\lambda \in (0, 1)$ に対して $z \in X$ で

$$d(x, z) = \lambda d(x, y), \quad d(z, y) = (1 - \lambda)d(x, y)$$

を満たすものが存在するので,

$$\bar{B}(x; \lambda d(x, y)) \cap \bar{B}(y; (1 - \lambda)d(x, y)) \neq \emptyset$$

が成り立つ.

$$\bar{B}(x; \lambda d(x, y)) \subset B(x; (\lambda + \delta)d(x, y)), \quad \bar{B}(y; (1 - \lambda)d(x, y)) \subset B(y; ((1 - \lambda) + \delta)d(x, y))$$

であるので,

$$B(x; (\lambda + \delta)d(x, y)) \cap B(y; ((1 - \lambda) + \delta)d(x, y)) \neq \emptyset$$

が成り立つ. □