# John の楕円体定理 (中心対称な場合)

## 1

**命題 1.1.** $A, B \subset \mathbb{R}^n$ とし, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を同型な線型変換とする．適当な $s \geq 0$ に対して

$$TA \subset TB \subset sTA$$

が成り立つとき,

$$A \subset B \subset sA$$

が成り立つ．

**証明.** 明らかにそう． $\square$

**命題 1.2.** (John の楕円体定理の簡単バージョン)． $K \subset \mathbb{R}^n$ を中心対称, 有界な閉凸体で内部が空でない集合とする．このとき, $E \subset K$ を $K$ に含まれる体積最大の楕円体とする．

$$E \subset K \subset \sqrt{n}E$$

が成り立つ．

**証明.** (sketch)． $E$ 適当な線型変換を行なって, はじめから開球 $B$ だと思うことにしておく． $K \subsetneq \sqrt{n}B$ とすると, $x \in K$ で

$$\sqrt{n} < \|x\|$$

を満たすものがとれる．適当に $\mathbb{R}^n$ の基底をとりかえて, 正規直交基底 $u_1, \ldots, u_n$ で $u_1$ が $x$ 方向になるようにとる．

$$R \coloneqq \mathrm{Conv}(B \cup \{-x, x\})$$

と定めると, $B \cup \{-x, x\} \subset K$ なので, $K$ が凸集合であることから, $R \subset K$ が成り立つ． $B$ を $u_1$ 方向に $a > 1$ 倍し, $u_2, \ldots, u_n$ 方向にそれぞれ $b < 1$ 倍してつくられる楕円体 $E(a, b)$ 考える． $E(a, b) \subset R$ に含まれており,

$$\mathrm{vol}(E(a, b)) = ab^{n-1}\mathrm{vol}(B)$$

が成り立つ． $a > \sqrt{n}$ なので, $a, b$ をうまくとれば, $\mathrm{vol}B < \mathrm{vol}E(a, b)$ が成り立つことから, $B$ が $K$ に含まれる体積最大の楕円体であることに矛盾する． $\square$