

単調な加法的関数は線型である

1

広義単調増大な場合に示す. 広義単調減少な場合についても同じである.

命題 1.1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$(1) x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$(2) f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

を満たす関数とする. このとき,

$$f(x) = xf(1) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

証明. $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ に対しては,

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = nf\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}f(1)$$

が成り立つので, $r \in \mathbb{R}$ に対しては, $q_n \uparrow r, q'_n \downarrow r$ なる有理数列をとると,

$$q_n f(1) = f(q_n) \leq f(r) \leq f(q'_n) = q'_n f(1)$$

が成り立つので, 極限をとると, $f(r) = rf(1)$ が成り立つ. □