?

1

定義 1.1. (X,d) を距離空間とする. 有限集合 $A \subset X$ に対して,

$$\sum_{y \in X} \lambda(y) e^{-d(x,y)} = 1_A(x)$$

を満たす $[\lambda \neq 0] \subset A$ なる $\lambda : X \to \mathbb{R}$ が存在する時,

$$\mathrm{Mag} A \coloneqq \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \lambda(x)\lambda(y) e^{-d(x,y)} \left(= \sum_{x \in X} \lambda(x) = \sum_{x \in A} \lambda(x) \right)$$

と定めて, これを A のマグニチュードという.

定義 1.2. (X,d) を距離空間とする. 任意の $[\lambda \neq 0] < \infty$ を満たす $\lambda : X \to \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \lambda(x)\lambda(y) e^{-d(x,y)} \geq 0$$

かつ,

$$\sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \lambda(x)\lambda(y) e^{-d(x,y)} = 0 \iff \lambda = 0$$

を満たす時, (X,d) を正定値距離空間という.

予想

正定値距離空間 (X,d) がコンパクトならば,

$$\sup\left\{ \mathrm{Mag} A \mid A \subset X \text{ 有限部分集合} \right\} < \infty$$

が成り立つ.

$$\sum_{y \in X} \lambda(y) e^{-d(x,y)} = 1_A(x)$$
$$\sum_{y \in X} \xi(y) e^{-d(x,y)} = 1_A(x)$$

ならば,

$$\sum \lambda(x) = \sum \sum \lambda(x) \xi(y) e^{-d(x,y)} = \sum \xi(y)$$

記号 1.3.

$$e \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$