プロホロフ距離

1

定義 1.1. μ, ν を X 上のボレル確率測度とする.

$$d(\mu,\nu) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid \mu(A_\varepsilon) \geq \nu(A) - \varepsilon \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))\}$$

命題 1.2. μ, ν を X 上のボレル確率測度とし, $\varepsilon > 0$ とする.

$$\mu(A_\varepsilon) \geq \nu(A) - \varepsilon \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))$$

が成り立つことと,

$$\nu(A_\varepsilon) \geq \mu(A) - \varepsilon \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))$$

が成り立つことは, 必要十分である.

証明. $((A_\varepsilon)^c)_\varepsilon \subset A^c$ が成り立つので,

$$\mu(A^c) \geq \mu(((A_\varepsilon)^c)_\varepsilon) \geq \nu((A_\varepsilon)^c) - \varepsilon$$

が成り立つ. ので,

$$-\mu(A^c) \leq -\nu((A_\varepsilon)^c) + \varepsilon$$

であるので, 両辺に 1 を足すと, 確率測度であることから,

$$\mu(A) \leq \nu(A_\varepsilon) + \varepsilon$$

が成り立つ. 反対側も同様である. □

命題 1.3. μ, ν を X 上のボレル確率測度とする.

$$d(\mu,\nu) = d(\nu,\mu)$$

証明. 前述の命題より明らか. □

記号 1.4.

$$A_{\bar{\varepsilon}} := \bigcup_{a \in A} \{x \mid xa \leq \varepsilon\}$$

と定める.

命題 1.5.

$$\inf\bigl\{\varepsilon > 0 \mid \mu(A_\varepsilon) \geq \nu(A) - \varepsilon \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))\bigr\} = \inf\bigl\{\varepsilon > 0 \mid \mu(A_{\bar{\varepsilon}}) \geq \nu(A) - \varepsilon \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))\bigr\}$$

証明. $\geq$ は明らか. $\leq$ を示すために, $>$ であると仮定する. 左辺を ε' で, 右辺を ε で表すことにする. ε より少しだけ大きい δ で

$$\mu(A_{\bar{\delta}}) \geq \nu(A) - \delta \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))$$

が成り立つ. δ より少しだけ大きくて, ε よりは小さい $\delta' > \delta$ に対して $A_{\bar{\delta}} \subset A_{\delta'}$ が成り立つので

$$\mu(A_{\delta'}) \geq \mu(A_{\bar{\delta}}) \geq \nu(A) - \delta \geq \nu(A) - \delta' \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))$$

が成り立つ. □