$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^n$ の基本群による識別

1

命題 1.1. $n \neq 2$ ならば, $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^n$ と同相ではない.

証明.

$$\varphi' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$$

という同相写像が存在すると仮定する (背理法).

$$\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; x \mapsto x - \varphi'(0)$$

により平行移動である同相写像を定め,

$$\varphi = \tau \circ \varphi'$$

という同相写像を定める. ($\varphi(0) = 0$ となっていることに注意する.)

$$\varphi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

という同相があるので,

$$\begin{aligned} &\pi_1(S^1) \simeq \pi_1(S^1) \times \pi_1(\mathbb{R}) \simeq \pi_1(S^1 \times \mathbb{R}) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ &\quad \simeq \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \simeq \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R}) \simeq \pi_1(S^{n-1}) \end{aligned}$$

が成り立つ. $n \neq 2$ のときにはこれは矛盾である. □