

距離空間の D-embedding と双リブシッツ

1

定義 1.1. (D 埋め込み). $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. $f: X \rightarrow Y$ は $\lambda > 0$ で

$$d(x, y) \leq \lambda d(fx, fy) \leq Dd(x, y) \quad (x, y \in X)$$

を満たすものが存在するとき, D 埋め込みという.

注意 1.2. 明らかに, $D < 1$ の D 埋め込みは存在しない. また, f が単射でないならば, D 埋め込みになり得ない. また, D 埋め込みであるならば, $D' (\geq D)$ 埋め込みである.

命題 1.3. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. $f: X \rightarrow Y$ は L 双リブシッツ であるならば, \sqrt{L} 埋め込みである.

証明.

$$\frac{1}{L}d(x, y) \leq d(fx, fy) \leq Ld(x, y) \quad (x, y \in X)$$

であるので,

$$1d(x, y) \leq Ld(fx, fy) \leq L^2d(x, y) \quad (x, y \in X)$$

が成り立つ. □

定義 1.4. (distortion). $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, $f: X \rightarrow Y$ とする.

$$\text{dist } f := \inf \{ D \geq 1 \mid f \text{ は } D \text{ 埋め込み} \}$$

を f のディストーションという.

定義 1.5.

$$c_{(Y, d_Y)}(X, d_X) := \inf \{ D \mid X \text{ から } Y \text{ への } D \text{ 埋め込みが存在} \}$$

と定める.

定義 1.6.

$$c_p(X, d_X) := c_{(L_p(0,1), \|\cdot\|_p)}(X, d_X)$$

定義 1.7. (ハミングキューブ). 離散立方体 $\{0, 1\}^n$ に l_1 距離 (ハミング距離)

$$\|x - y\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

を定めたものを, ハミングキューブという.

命題 1.8.

証明.

□