接ベクトルの局所表示

1

命題 1.1. f を $B(0;r) \subset \mathbb{R}^n$ 上の滑らかな間数とする．このとき，$B(0;r)$ 上の滑らかな関数 $h_1, \ldots, h_n$ で

$$f(x) = f(0) + x^i h_i(x)$$

を満たすものが存在する．

証明. 略. □

命題 1.2. f を $B(0;r) \subset \mathbb{R}^n$ 上の滑らかな間数とする．このとき，$B(0;r)$ 上の滑らかな関数 h_{ij} で

$$f(x) = f(0) + x^i \partial_{x^i} f(0) + x^i x^j h_{ij}(x)$$

を満たすものが存在する．

証明. 略. □

命題 1.3. 任意の接ベクトル $\xi \in T_pM$ は

$$\xi = \xi^i \partial_{x^i} \quad \text{where } \xi^i = \xi(x_i)$$

と表される．

証明. $p \in M$ を座標 $U = U_p$ をとる．$x^i(p) = 0$ となるように座標をとっておく．

$$f(x) = f(p) + x^i \partial_i f(p) + x^i x^j h_{ij}(x)$$

と表示して．

$$\xi(f) = \xi(1) f(p) + \xi(x^i) \partial_i f(p) + \xi(x^i x^j h_{ij})$$

となる．

$$\xi(1) = \xi(1 \cdot 1) = \xi(1)1 + 1\xi(1) = 2\xi(1)$$

より $\xi(1) = 0$ である．$x^i(p) = 0, x^j(p) h_{ij}(p) = 0$ であるので，$\xi(x^i x^j h_{ij})$ を p で評価すると 0 である．故に，

$$\xi(f) = 0 \cdot f(p) + \xi(x^i) \partial_i f(p) + 0$$

□