カットオフもソボレフ空間に属するか

1

命題 1.1. $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}, u \in H^m(\Omega), \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき, $\varphi u \in H^m(\Omega)$ が成り立つ．

証明. $M \coloneqq \max\{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| \mid 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ とする．$u \in H^m(\Omega)$ なので, $U \in H^m$ で $U|_\Omega = u$ であるものがとれる．$(\varphi U)|_\Omega = \varphi u$ であるので,

$$
\begin{aligned}
\|\varphi u\|_{H^m(\Omega)} &\leq \|\varphi U\|_{H^m} \\
&= \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha(\varphi U)\|_{L^2} \\
&= \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \left\| \sum_{\beta\leq q\alpha} {}_\alpha C_\beta (\partial^{\alpha-\beta}\varphi)(\partial^\beta U) \right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \sum_{\beta\leq q\alpha} {}_\alpha C_\beta M \left\|\partial^\beta U\right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \sum_{\beta\leq q\alpha} {}_\alpha C_\beta M \left\|\partial^\beta U\right\|_{H^m} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

□