領域上の分数階ソボレフ空間

1

1.1 領域上の非負分数階ソボレフ空間

注意 1.1. いったん非負階のソボレフ空間を定義することにする. 別に最初から非負に限らないで定義することも可能である. 色々な方法で様々なソボレフ空間を定義することができるが, それらの間の包含関係を把握しておきたい.

注意 1.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上のソボレフ空間 $H^s(\Omega)$ を定義したい. 素朴に考えると,

$$H^s(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle \cdot \rangle^s Fu \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

なわけだから,

$$H^s(\Omega) \coloneqq \left\{ u \in \mathcal{S}'(\Omega) \mid \langle \cdot \rangle^s Fu \in L^2(\Omega) \right\}$$

としたいところだが, そもそも, 全体で定義されていない関数 u のフーリエ変換を正当化する作業が面倒くさい. そこで, 次のような回避方法をとる.

定義 1.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする.

$$H^s(\Omega) \coloneqq \{ u|_\Omega : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \in H^s(\mathbb{R}^n) \}$$

と定義する.

注意 1.4. すると, 次にノルムをどう定義したらよいのかという問題が生じる. なぜなら, $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ で, $u \neq v$ なのに $u|_\Omega = v|_\Omega$ であるようなものはたくさんある. そこで, 次のような回避方法をとる.

定義 1.5. (拡張可能ソボレフ空間).

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} \coloneqq \inf \left\{ \|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \mid U|_\Omega = u \right\}$$

注意 1.6. $U|_\Omega, u$ はともに L^2 の元であるので, 各点の値は意味をもたない. あくまで同値類としての一致であるので, 適当に代表元を選んでやると, 殆どいたるところ一致という意味である.

直後に使う事実を書いておく.

命題 1.7. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を有限測度空間とする. $A \in \mathcal{F}, \mu(A) = \mu(X)$ ならば, 任意の $B \in \mathcal{F}$ に対して, $\mu(B \cap A) = \mu(B)$

証明. $\mu(X) - \mu(B^c) - \mu(A^c) \leq \mu(X) - \mu(B^c \cup A^c) \leq \mu(B \cap A) \leq \mu(B)$ より明らか.

□

命題 1.8.

$$\inf\Big\{\|U\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \mid U|_\Omega = u\Big\}$$

は最小値を実現する.

証明. 凸集合であることは明らか. 閉集合であることを示す. $U_n \to U (H^m$ 収束) ならば, $U_n \to U (L^2)$ なので, 概収束部分列をとって添字を振り直して $U_n \to U$(概収束) とできる.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^n\{x \in \Omega \mid Ux \neq ux\} \\
&= \mathcal{L}^n\{x \in \Omega \mid Ux \neq ux, \lim U_n x = Ux\} \\
&= \mathcal{L}^n\{x \in \Omega \mid \lim U_n x \neq ux\} \\
&= \mathcal{L}^n\big\{x \in \Omega \mid \lim U_n x \neq ux, U_n x = ux \quad ({}^\forall n)\big\} \\
&= \mathcal{L}^n\{x \in \Omega \mid ux \neq ux\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

故に,

$$U|_\Omega = u$$

が成り立つ.

□

注意 1.9. 一瞬, 概収束の定義について, $f_n \to f \quad \text{a.e.}$ の定義が

$$\mu(\{x \mid \lim f_n(x) \neq f(x)\}) = 0$$

とされているので, f や f_n に各点の値を代入しているじゃないかとも思うが, 適当に $[f]$ から一つ代表元をとってきてという意味である. 殆ど至る所の概念は代表元の取り方によらない. つまり, 別の $f' \in [f]$ にとりかえて

$$\mu(\{x \mid \lim f_n(x) \neq f'(x)\}) = 0$$

としても $\mu([f \neq f']) = 0$ なので同じことである.

定義 1.10. (非負整数階微分ソボレフ空間). $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ とする. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする.

$$W^m(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$
$$W^m(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

と定め,

$$\|u\|_{W^m(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

によりノルムを定める.

命題 1.11. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を空でない開集合とする. このとき, $u \in H^m(\Omega)$

$$\|u\|_{W^m(\Omega)} \lesssim \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

が成り立つ. 従って, 包含写像

$$H^m(\Omega) \subset W^m(\Omega)$$

は連続である.

証明. $u \in H^m(\Omega)$ であるので, $U \in H^m$ で $U|_\Omega = u$ かつ $\|U\|_{H^m} = \|u\|_{H^m(\Omega)}$ であるものがとれる.

$$\|u\|_{W^m(\Omega)} \le \|U\|_{W^m} \lesssim \|U\|_{H^m} = \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

が成り立つ.

□

命題 1.12. $m \in \mathbb{N}_{\ge 0}$ とする. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を空でない開集合とする. 拡張作用素

$$E : W^m(\Omega) \to W^m(\mathbb{R}^n)$$

で連続なものが存在するならば,

$$W^m(\Omega) = H^m(\Omega)$$

が成り立つ.

証明. $u \in W^m(\Omega)$ をとる.

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} \le \|Eu\|_{H^m} = \|Eu\|_{W^m} \lesssim \|u\|_{W^m(\Omega)}$$

□

定義 1.13. (近似可能ソボレフ空間).

$$H_0^s(\Omega) \coloneqq \mathrm{cl}(C_0^\infty(\Omega); \|\cdot\|_{H^s(\Omega)})$$

記号 1.14. ただし, $u \in \Omega \to \mathbb{R}$ に対して, $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を全体へのゼロ拡張として定義する.

注意 1.15. $u \in L^2(\Omega) \Rightarrow u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ は成り立つが, $u \in H^s(\Omega) \Rightarrow u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ は成り立たない. つまり一般には,

$$\{U \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid U|_\Omega = u \in H^s(\Omega)\}$$

が u_0 を含むとは限らないということ.

定義 1.16. (0 拡張可能ソボレフ空間).

$$\tilde{H}^s(\Omega) \coloneqq \{u \in H^s(\Omega) \mid u_0 \in H^s(\Omega R^n)\}$$

1.2 領域上の非正分数階ソボレフ

設定 1.17. $s < 0$ とする.

注意 1.18. 領域上の非正分数階ソボレフ空間は 0 拡張可能ソボレフ空間の双対として定義する.

定義 1.19.

$$H^s(\Omega) \coloneqq \left(\tilde{H}^{-s}(\Omega)\right)^*$$

定義 1.20. (領域上の非正分数階 0 拡張可能ソボレフ空間).

$$H^s(\Omega) \coloneqq \left(H^{-s}(\Omega)\right)^*$$