

# 帯域制限超関数

## 1

**定義 1.1.** (帯域制限超関数). 緩増加超関数  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  で,  $FT$  がコンパクトな台をもつものを, 帯域制限超関数という.

**命題 1.2.** (帯域制限超関数の表現).  $T$  を帯域制限超関数とする. このとき, 緩増加関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  で,

$$T\varphi = \int f(x)\varphi(x)dx$$

を満たすものが存在する.

**証明.**  $\chi \in \mathcal{S}$  を  $\text{supp} FT$  上で 1 であるものとする. 任意の  $\varphi \in \mathcal{S}$  に対して

$$\begin{aligned}(T, \varphi) &= (FT, F^{-1}\varphi) \\ &= (\chi FT, F^{-1}\varphi) \\ &= (F^{-1}(\chi FT), \varphi)\end{aligned}$$

が成り立つので, 超関数の意味で

$$T = F^{-1}(\chi FT) = F^{-1}(F(F^{-1}\chi) \cdot FT) = F^{-1}((2\pi)^{n/2}F((F^{-1}\chi) * T)) = (2\pi)^{n/2}F^{-1}\chi * T$$

急減少関数と, 緩増加超関数の畳み込みは  $C^\infty$  級関数であるので, 主張が従う. □