

## カイファン距離とプロホロフ距離の関係

### 1

命題 1.1.  $(X, \mu)$  を測度空間,  $(Y, d)$  を距離空間,  $f, g : X \rightarrow Y$  を  $\mu$  可測写像とする.

$$d_P(f_{\#}\mu, g_{\#}\mu) \leq d_{\text{KF}}^{\mu}(f, g)$$

が成り立つ.

証明.  $\varepsilon := d_{\text{KF}}^{\mu}(f, g)$  とする. 任意に  $Y$  のボレル集合  $A$  をとる.

$$S := \{x \mid d(fx, gx) \geq \varepsilon\}$$

とする.

step:

$$g^{-1}A \cap S \subset f^{-1}A_{\varepsilon}$$

( $\therefore$ ) 任意に  $x \in g^{-1}A \cap S$  をとる.  $gx \in A, x \in S$  であるので,  $fx \in A_{\varepsilon}$  が成り立つ. 故に  $x \in f^{-1}A_{\varepsilon}$  である.

▲

従って,

$$g_{\#}\mu(A) = \mu(g^{-1}(A)) = \mu(g^{-1}A \cap S) + \mu(g^{-1}A \cap S^c) \leq \mu(f^{-1}A_{\varepsilon}) + \mu(X \cap S^c) \leq f_{\#}\mu(A_{\varepsilon}) + \varepsilon$$

が成り立つ.

□