局所等長写像と被覆

1

命題 1.1. $(M,g),(N,h)$ を同じ n 次元の連結リーマン多様体とする.
M が完備で, 局所等長写像 $f:(M,g)\to(N,h)$ が存在するとき, 次が成り立つ.
(1)N は完備である.　(2)f は全射である.　(3) f は被覆写像である.

証明. (1) 局所等長写像は測地線を保存するので, 任意に N の測地線 γ^N をとる. $f^{-1}(\gamma_0^N)$ を始点, $df_{\gamma_0^N}^{-1}(\dot{\gamma}_0)$ を始方向とする M の測地線を γ^M で表すと, $f\circ\gamma^M=\gamma^N$ が M の完備性より $\mathbb{R}$ 上で成り立つ. 従って, N の測地線は $\mathbb{R}$ を定義域に含むので N は完備である.
(2) 適当に 2 点 $q_1,q_2\in N$ をとると, ある正規測地線 γ^N で $\gamma_0^N=q_1,\gamma_l^N=q_2$ を満たすものがとれる. (1) の証明と同様に, 対応する測地線を γ^M で表すと, $f(\gamma_l^M)=\gamma_l^N=q_2$ となるので, f は全射である.
(3) 任意に $q\in N$ をとる. $r>0$ を q における単射半径より小さくとる. $\{p_\alpha\}=f^{-1}(q)$ とする. f が測地線の長さを保つことに注意すると, $f^{-1}(B(q;r))\subset\bigcup B(p_\alpha;r)$ と $B(p_\alpha)\subset f^{-1}(B(q;r))$ が成り立つので, $\bigcup B(p_\alpha;r)=f^{-1}(B(q;r))$ が成り立つ. また, exp_{p_α} の $B(p_\alpha;r)$ への制限は微分同相となることから, $f=\exp_{p_\alpha}^{-1}\circ df_{p_\alpha}\circ\exp_q$ の $B(Op_\alpha;r)$ への制限は微分同相である. また, $p'\in B(p_\alpha;r)\cap B(p_\beta;r)$ がとれるとする (背理法). p' から p_α への測地線 $\gamma^{M,\alpha}$ と, p' から p_β への測地線 $\gamma^{M,\beta}$ をそれぞれとって, N へうつすと, ともに $f(p')\in N$ から $q\in N$ への測地線 (γ^N とする) であるので, N において互いに一致する. $df_{p'}$ は同型写像であるので, $\gamma^{M,\alpha},\gamma^{M,\beta}$ の始方向はともに $df_{p'}^{-1}(\dot{\gamma}_0^N)$ であるので, $\gamma^{M,\alpha}=\gamma^{M,\beta}$ であるので, $p_\alpha=p_\beta$ となり $\alpha=\beta$ なので矛盾する. $\alpha\neq\beta\Rightarrow B(p_\alpha;r)\cup B(p_\beta;r)$ である. よって f は被覆写像である. □