距離空間のヒルベルト空間への等長埋め込み

1

定義 1.1. (Conditionally of negative type). X を位相空間とする. 連続関数 $\phi : X \times X \to \mathbb{R}$ は
(1)$x \in X \Rightarrow \phi(x,x) = 0$.
(2)$x, y \in X \Rightarrow \phi(x,y) = \phi(y,x)$.
(3)$n \in N, x_1, \ldots, x_n \in X, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, \sum c_i = 0 \Rightarrow, \sum\sum c_i c_j \phi(x_i, x_j) \leq 0$.
を満たす時に, CND(conditionally of negative type) 核という.

命題 1.2. (GNS 構成法). X を位相空間, 連続関数 $\phi : X \times X \to \mathbb{R}$ を CND 核, $x_0 \in X$ とする. このとき, ヒルベルト空間と連続関数の組 (H, f) で,

$$\phi(x,y) = \|f(x) - f(y)\|^2 \quad (x, y \in X)$$

を満たすものが存在する.

証明.

$$V \coloneqq \left\{ \lambda : X \to \mathbb{R} \mid \#[\lambda \neq 0] < \infty, \sum_{x \in X} \lambda(x) = 0 \right\}$$

双線形写像を

$$\langle \lambda, \xi \rangle \coloneqq -\frac{1}{2} \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \lambda(x) \xi(y) \phi(x,y)$$

で定める.

$$N \coloneqq \{\lambda : X \to \mathbb{R} \mid \langle \lambda, \lambda \rangle = 0\}$$

と定める.

$$\lambda_1, \lambda_2 \in N \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) \leq 2 \|\lambda_1\| \|\lambda_2\| = 0$$

となることから, N は部分空間であることに注意する. V/N に $\langle [\lambda], [\xi] \rangle \coloneqq \langle \lambda, \xi \rangle$ で内積を定める. この内積に関して, 完備化してできるヒルベルト空間を $(H, \langle , \rangle)$ とする.

$$f : X \to H; x \mapsto [\delta_x - \delta_{x_0}]$$

と定めると,

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\|^2 &= \|[(\delta_x-\delta_{x_0})-(\delta_y-\delta_{x_0})]\|^2\\&= \|[\delta_x-\delta_y]\|^2\\&= \|\delta_x\|^2-2\langle\delta_x,\delta_y\rangle+\|\delta_y\|^2\\&= -\frac{1}{2}(\phi(x,x)-2\phi(x,y)+\phi(y,y))\\&= \phi(x,y)\end{aligned}$$

が成り立つ. □