凸性と l_1 測地的凸性と直交凸性

1

記号 1.1. (X,d) を距離空間とする. $x, y \in X$ に対して, x から y への測地線全体を

$$\Gamma_y^x$$

で表す.

定義 1.2. (測地的凸). (X,d) を距離空間とする. $A \subset X$ は, 任意の $x, y \in A$ に対して, $\gamma_y^x \in \Gamma_y^x$ で

$$\mathrm{image}\gamma_y^x \subset A$$

を満たすものが存在する時, 測地的凸集合という.

定義 1.3. (l_1 測地的凸性). $A \subset \mathbb{R}^n$ は l_1 距離に関して測地的凸であるとき, l_1 測地的凸であるという.

記号 1.4. $x \in \mathbb{R}^n, i \in 1, \ldots, n$ に対して,

$$L_{i,x} := \{x + re_i \subset \mathbb{R}^n \mid r \in \mathbb{R}\}$$

と定める. (これは i 軸に平行な直線である.)

定義 1.5. (直交凸性). $A \subset \mathbb{R}^n$ は, 任意の $i \in \{1, \ldots, n\}, x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$A \cap L_{i,x}$$

が凸集合であるとき, 直交凸であるという.

命題 1.6. $A \subset \mathbb{R}^n$ が凸集合であるならば, l_1 測地的凸である.

証明. 任意の異なる 2 点 $x, y \in A$ に対して, $\gamma(t) := x + \frac{t}{d(x,y)}(y-x)$ は $((x + \frac{t}{d(x,y)}(y-x)) - (x + \frac{s}{d(x,y)}(y-x))$ を考えることにより, $)l_1$ 距離に関して測地線である. 凸性より, $\mathrm{image}\gamma \subset A$ であるので, 主張が従う. □

命題 1.7. $x, y \in \mathbb{R}^n$ を, 第 i 成分のみが異なる 2 点とする. このとき, Γ_y^x の要素は x, y を結ぶ線分ただ一つである.

証明. □

命題 1.8. $A \subset \mathbb{R}^n$ が l_1 測地的凸であるならば, 直交凸である.

証明. 任意の $i \in \{1, \ldots, n\}, x \in \mathbb{R}^n$ に対して, (空でないとき) 2 点 $p, q \in A \cap L_{i,x}$ をとる. p, q は第 i 成分のみが異なる 2 点であるので, p, q を結ぶ測地線は p, q を結ぶ線分のみである. A が l_1 測地的凸であることから, この p, q を結ぶ線分は A に含まれ, 当然 $L_{i,x}$ に含まれるので, $A \cap L_{i,x}$ は凸集合である.

□