非負整数階ソボレフ空間と微分によるノルムの同値性

1

注意 1.1. ただしこれは, コンパクトな台を持つような関数に対してのみ成り立つことに注意. そうじゃない関数だと余分な項がぽろぽろでてくる.

命題 1.2. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $f, g \in \mathcal{D} \subset H_m$ に対して,

$$(f,g)_{H_m} = \int fg dx + {}_mC_1 \int Df\overline{Dg}dx + {}_mC_2 \int D^2f\overline{D^2g}dx + \cdots + {}_mC_m \int D^mf\overline{D^mg}dx$$

が成り立つ. ただし,

$$D^j := \begin{cases} \Delta^{j/2} & j = 0, 2, 4, \dots \\ \nabla\Delta^{(j-1)/2} & j = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

証明.

$$\begin{aligned}(f,g)_{H_m} &= (\langle\cdot\rangle^m Ff, \langle\cdot\rangle^m Fg) \\ &= (F^{-1}\langle\cdot\rangle^{2m}Ff, g) \\ &= ((I-\Delta)^m f, g) \\ &= (\sum_k {}_mC_k(-\Delta^k)f, g)\end{aligned}$$

最後に部分積分したら主張が従う.

□