閉作用素

1

1.1 閉作用素

X, Y でバナッハ空間を表すことにする.

注意 1.1. バナッハ空間に話を限定しないとすると, 必ずしも”グラフが閉集合であるならばグラフノルムに関して完備である” という命題はなりたたないが, 始域と終域がともにバナッハ空間であるときには, これらは同値になるので, どちらで定義してもよい.

命題 1.2. T が X から Y への有界作用素ならば, T は閉作用素である.

証明. $\|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y \leq (1 + \|T\|)\|x\|_X$ が成り立つので, $\|\cdot\|_X$ が完備なノルムならば $Dom(T)$ は T のグラフノルムに関しても完備である. □

命題 1.3. バナッハ空間上の有界作用素 T が $\overline{Dom(T)} = X$ を満たすならば, $Dom(T) = X$ である.

証明. $u \in X$ に収束する点列 $\{u_n\} \subset Dom(T)$ をとると, Y の点列 $\{Tu_n\}$ は T が有界作用素なので収束部分列をもつ. 従って, 閉作用素の定義から $u \in Dom(T)$ が成り立つ. □

注意 1.4. つまり, バナッハ空間上の有界作用素は, 稠密な定義域をもつならば, 全域写像である.

命題 1.5. 閉作用素 T が単射であるならば, その逆作用素 T^{-1} も閉作用素である.

証明. $\tau : X \times Y \to Y \times X; (x, y) \mapsto (y, x)$ という写像は同相写像であるので, $\Gamma(T)$ が $X \times Y$ の閉集合であれば, $\Gamma(T^{-1}) = \tau\Gamma(T)$ は $Y \times X$ の閉集合である. □

1.2 閉拡大

定義 1.6. ある作用素は, 閉作用素の拡張をもつとき, 前閉作用素, あるいは可閉であるという. そして, この拡張のことをその作用素の閉拡大という.

命題 1.7. (閉拡大をもつことの必要十分条件). $T : X \to Y$ が可閉であることの必要十分条件は
$x_n \in \mathrm{dom}(T), x_n \to 0, Tx_n \to y \Rightarrow y = 0$ が成り立つことである.

証明. $(\Rightarrow)$ T の閉拡大を S とすると, S が閉作用素であることから, $0 \in \mathrm{dom}(S)$ であり, $S(0) = y$ が成り立つので, $y = 0$ である. $(\Leftarrow)$ 作用素 S を $\mathrm{dom}(S) := \overline{\mathrm{dom}(T)}$ とし, Sx を, $x_n \to x$ となる点列 $x_n \in \mathrm{dom}(T)$ を好きにひとつとって, $Sx := \lim Tx_n$ により定める.
<u>claim:</u> Sx の値は点列 $x_n \in \mathrm{dom}(T)$ のとり方によらない.

(∵) $x_n \to 0, x'_n \to 0, Tx_n \to y, Tx'_n \to y'$ とすると, $x_n - x'_n \to 0, T(x_n - x'_n) = T(x_n) - T(x'_n) \to y - y'$ であるので $y - y' = 0$ ▲

<u>claim:</u> S は閉作用素である.

(∵) $x_n \to x, Sx_n \to y$ とすると, $x \in \mathrm{dom}(S), Sx = y$ となる. ▲

□

命題 1.8. (線形部分空間のグラフ化の必要十分条件). $X \times Y$ の部分空間 Γ がある線形作用素 $T : X \to Y$ のグラフになるための必要十分条件は, $\{0, y\} \in \Gamma \Rightarrow y = 0$ が成り立つことである.

証明. ($\Rightarrow$) $y = T(0) = 0 \cdot T(1) = 0$ より従う. ($\Leftarrow$) 任意の $X_0 \in X$ に対して $\{(x_0, y) \in X \times Y \mid y \in Y\}$ と Y の共通部分は 1 点である (2 点あるとしたら $(x_0, y_1), (x_0, y_2) \in \Gamma$ であるので, Γ が部分空間であることより $(0, y_1 - y_2) \in \Gamma$ なので $y_1 = y_2$ となる). x_0 をこの 1 点 (x_0, y) の y を対応させる写像を T とする. Γ が部分空間であることから $(x_1 + x_2, Tx_1 + Tx_2) \in \Gamma$ であるが, Γ が T のグラフであることから $Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2)$ となるので, T は線形作用素である. □

命題 1.9. $T_1 \subset T_2 \Leftrightarrow \Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2)$

証明. □

命題 1.10. (前閉作用素の最小の閉拡大の存在). T を前閉作用素とする. $\overline{\Gamma(T)}$ をグラフとする線形作用素は, T の最小の閉拡大である.

証明. $y \neq 0$ かつ $(0, y) \in \overline{\Gamma(T)}$ をみたす y が存在すると仮定すると, その十分近くに $y' \neq 0$ かつ $(0, y') \in \Gamma(T)$ をみたす y' がとれてしまうので矛盾する. 従って, $\overline{\Gamma(T)}$ をグラフとする線形作用素がとれるので, これを $\overline{T}$ とする. すると, $\overline{T}$ は最小の閉拡大であることが, 適当に他の閉拡大 T_1 をとると, $\Gamma\bar{T} \subset \Gamma T_1$ から従う. □

定義 1.11. (閉包). T が可閉であるとき, 最小の閉拡大を 閉包.

1.3 ヒルベルト空間の対称作用素と閉性

作用素のなかでも, 変換 (つまり始域と終域が同じであるもの) を扱う.

命題 1.12. $y \in X$ に対して $j_y \in X$ で

$$\langle x, j_y \rangle = \langle Tx, y \rangle \quad ({}^\forall x \in \mathrm{dom}T)$$

を満たすものが存在するとする. T が稠密に定義されているならば, このような j_y は一意である.

証明. j_y の他に, 同様の条件を満たす j'_y が存在したとする.

$$\langle x, j_y \rangle = \left\langle x, j'_y \right\rangle \quad ({}^\forall x \in \mathrm{dom}T)$$

が成り立つので,

$$\left\langle x, j_y - j'_y \right\rangle = 0 \quad ({}^\forall x \in \mathrm{dom}T)$$

が成り立ち, T が稠密に定義されているので, $x_n \to j_y - j'_y$ なる点列をとれば

$$\left\langle j_y - j'_y, j_y - j'_y \right\rangle = \lim \left\langle x_n, j_y - j'_y \right\rangle = 0$$

となるので, $j_y = j'_y$ が成り立つ. $\square$

注意 1.13. T が稠密に定義されていなければ, j_y は一意に定まるとは限らないので, 共役作用素をきちんと定義することができない.

T の共役作用素を T^* で表す.

命題 1.14. T を共役作用素 T^* は閉作用素である.

証明. $x_n \to x, T^* x_n \to y$ とする.
claim: $x \in \mathrm{dom} T$ であり, $T^* x = y$ が成り立つ.
$(\because)$ 任意の $z \in \mathrm{dom}(T)$ に対して

$$\langle Tz, x_n \rangle = \langle z, T^* x_n \rangle$$

が成り立つので, 極限をとることで

$$\langle Tz, x \rangle = \langle z, y \rangle$$

が成り立つ. 従って, $x \in \mathrm{dom}(T)$ であり, $T^* x = y$ ▲

$\square$

命題 1.15. T が定義域, 値域ともに稠密で, かつ単射であるならば

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

証明. T, T^{-1} ともに稠密定義されているので, 共役作用素が存在する.

$$\langle x, y \rangle = \left\langle T^{-1} T x, y \right\rangle = \left\langle Tx, (T^{-1})^* y \right\rangle \quad (x \in \mathrm{dom} T, y \in \mathrm{dom}(T^{-1})^*)$$

であるので, $(T^{-1})^* y \in \mathrm{dom} T^*$ であり, $T^*(T^{-1})^* y = y$ が成り立つ. $x \in \mathrm{dom} T^{-1}, y \in \mathrm{dom} T^*$ に対しては

$$\langle x, y \rangle = \left\langle T T^{-1} x, y \right\rangle = \left\langle T^{-1} x, T^* y \right\rangle$$

であるので, $T^* y \in \mathrm{dom}(T^{-1})^*$ であり, $(T^{-1})^* T^* y = y$ が成り立つ. つまり,

$$T^*(T^{-1})^* y = (T^{-1})^* T^* y = y$$

が成り立つ. $\square$

命題 1.16. $H' \subset H$ を部分空間とする. H' が稠密であることの必要十分条件は, $(H')^\perp = \{0\}$ である.

証明. $(\Rightarrow) x \in (H')^\perp$ をとる. $x_n \in H'$ で $x_n \to x$ となるものをとる.

$$\langle x, x \rangle = \lim \langle x_n, x \rangle = 0$$

であるので, $x = 0$ が成り立つ. $(\Leftarrow)$ $H = (H')^{\perp\perp} = \overline{H'}$ より従う. $\square$

命題 1.17. (逆写像の自己共役性の判定条件). 自己共役作用素 A が単射であるならば, A^{-1} は自己共役作用素である.

証明. claim: A の値域は稠密である.
$(\because)$ A の値域を RA で表すと, 前述の命題より, $RA^\perp = 0$ を示せば良い. $y \in RA^\perp$ を任意にとる.

$$\langle Ax, y \rangle = 0 \quad (x \in H)$$

が成り立つので, $y \in \mathrm{dom} A^*$ であり, $A^* y = 0$ である. つまり, $Ay = 0$ であるので, $y = 0$ なので, 主張が従う. ▲

A^{-1} は定義域, 値域ともに稠密な単射なので前述の命題より

$$A^{-1*} = A^{*-1} = A^{-1}$$

が成り立ち, 自己共役であることがいえた. □

1.4 対称作用素の半群

定義 1.18. (対称作用素の半群). H 上の対称作用素の族 $\{T_t\}_{t>0}$ で
(1)(全域性). $T_t \quad (t > 0)$ は全域写像.
(2)(半群性). $T_t T_s = T_{t+s} \quad (t, s > 0)$
(3)(縮小性). $\|T_t x\| \leq \|x\| \quad (t > 0, x \in H)$
(4)(強連続性). $\|T_t x - x\| \to 0 \quad (\text{as } t \downarrow 0, x \in H)$
を満たすものを, 全域縮小強連続対称半群, あるいは単に省略して半群という.

定義 1.19. (半群の生成作用素). $\langle T_t \rangle$ を半群とする.

$$Ax \coloneqq \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}$$

により定まる A をこの半群の生成作用素という. 定義域は, 極限が存在するような x 全体である.

定義 1.20. (レゾルベント). H 上の対称作用素の族 $\{G_\alpha\}_{\alpha>0}$ で
(1)(全域性). $G_\alpha \quad (\alpha > 0)$ は全域写像.
(2)(レゾルベント方程式). $G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta > 0)$
(3)(縮小性). $\|\alpha G_\alpha x\| \leq \|x\| \quad (\alpha > 0, x \in H)$
(4)(強連続). $\|\alpha G_\alpha x - x\| \to 0 \quad (\alpha \to \infty, x \in H)$
を満たすものを, (対称全域縮小) 強連続レゾルベント, あるいは単に省略してレゾルベントという.

命題 1.21. $\langle G_\alpha \rangle$ を強連続レゾルベントとする. 任意の $\alpha > 0$ に対して G_α は単射である.

証明. 任意の $\beta > 0$ に対して

$$G_\alpha x = 0 \Rightarrow G_\alpha x - G_\beta x + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta x = G_\beta x = 0 \quad (\beta > 0)$$

が成り立つので, 強連続性から

$$0 = \lim \|\beta G_\beta x - x\| = \|x\|$$

であるので, $x = 0$ □

定義 1.22. (レゾルベントの生成作用素). $\{G_\alpha\}$ をレゾルベントとする.

$$Ax \coloneqq \alpha x - G_\alpha^{-1} x$$

により定まる A をレゾルベントの生成作用素という. 定義域は $G_\alpha(H)$ である. (前述の命題より適切に定義される.)

定義 1.23. (半正定値対称作用素). 対称作用素 T は $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad (x \in \mathrm{dom}T)$ を満たす時に, 半正定値であるという. $\geq$ を $\leq$ におきかえて半負定値も同様に定義される.

命題 1.24. (逆写像の半定値性). 単射な対称作用素 T を半正 (resp. 負) 定値であるとする. このとき, T の値域上を定義域にもつ T^{-1} は半正 (resp. 負) 定値である.

証明. 任意に $x \in \mathrm{dom}T^{-1}$ をとると, $T^{-1}x \in \mathrm{dom}\ T$ であるので, T の半正定値性により

$$\left\langle T^{-1}x, x\right\rangle = \left\langle T^{-1}x, TT^{-1}x\right\rangle \leq$$

が成り立つ. □

命題 1.25. 強連続レゾルベント $\{G_\alpha\}$ の生成作用素 A は半負定値の自己共役作用素である.

証明. G_α は単射な自己共役作用素であるので, G_α^{-1} は自己共役作用素である. 故に, $A = \alpha - G_\alpha^{-1}$ により定義される A も自己共役作用素である.
<u>claim:</u>

$$\langle x, G_\alpha x\rangle \geq 0 \quad (x \in H)$$

($\because$) 任意の $x \in H$ に対して

$$\frac{d}{d\alpha}\langle x, G_\alpha x\rangle = -\langle G_\alpha x, G_\alpha x\rangle$$

となることがレゾルベント方程式を愚直に計算することでわかる. また, 縮小性から

$$\langle x, G_\alpha x\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle x, \alpha G_\alpha x\rangle \leq= \frac{1}{\alpha}\|x\|\,\|\alpha G_\alpha x\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\|\,\|x\|$$

となるので, $\lim\langle x, G_\alpha x\rangle = 0$ である. 従って, $\langle x, G_\alpha x\rangle$ は α に関して広義単調減少で 0 に収束するので, 負の値をとることがない. ▲

故に, G_α は半正定値であるので,

$$\langle Ax, x\rangle = \lim_{\alpha\downarrow 0}\left\langle \alpha x - G_\alpha^{-1}x, x\right\rangle = -\lim_{\alpha\downarrow 0}\left\langle G_\alpha^{-1}x, x\right\rangle \leq 0$$

□