$\prod (1+x_n)$ の収束について

1

命題 1.1. 任意の x に対して

$$1 + x \le e^x$$

証明・ $f(x) := e^x - x - 1$ は f(0) = 0 で、変曲点が x = 0 だけ、 $x \ge 0 \Rightarrow f'(x) \le 0$ なので、グラフの形は、x = 0 あではだんだん下がってきて、x = 0 で最小値 0 をとって、そっから上昇していく.

命題 1.2. 非負の実数の列 $\{x_n\}$ は $\sum x_n < \infty$ を満たすならば、

$$\prod (1+x_n) < \infty$$

が成り立つ.

証明.

$$\prod (1+x_n) \le \prod e^{x_n} = e^{\sum x_n}$$

より, $P_N = \prod_{n=1}^N (1+x_n)$ は上に有界な広義増大列なので、収束する.

注意 1.3. $x_n \geq 0$ でないならば、これは成り立たない.例えば

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -2, x_5 = 1, \dots$$

を考えると $P_N = \prod_{n=1}^N (1+x_n)$ は収束しない.