かんたん 2-snowflake 条件

1

命題 1.1. $a, b, c \geq 0$ が

$$\sqrt{2}a \leq b + c$$

を満たすならば,

$$a^2 \leq b^2 + c^2$$

を満たす.

証明.

$$\sqrt{2}a \leq b + c$$

が成り立つので,

$$a^2 \leq \frac{1}{2}b^2 + bc + \frac{1}{2}c^2$$

が成り立つ. 相加相乗平均を用いると,

$$\begin{aligned} a^2 &\leq \frac{1}{2}b^2 + bc + \frac{1}{2}c^2 \\ &\leq \frac{1}{2}b^2 + \left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2\right) + \frac{1}{2}c^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)b^2 + \lim \frac{1}{2^n}bc + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)c^2 \end{aligned}$$

$$= b^2 + c^2$$

□

命題 1.2. (X, d) を距離空間とする. 任意の $x, y, z \in X$ に対して

$$\sqrt{2}d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

が成り立つなら, (X, d^2) は距離空間である.

証明. 前述の命題より明らか. □