

間の点に関する基本補題

1

定義 1.1. (X, d) を距離空間とする.

$$xy = xz + zy$$

が成り立つときに, $\chi(x, z, y) = 1$ そうでない時に, $\chi(x, z, y) = 0$ として関数 χ を定める.

注意 1.2. 少し気持ち悪いかもしれないが, X における 4 点 を $1, 2, 3, 4$ という記号で表す.

命題 1.3. (X, d) を距離空間とする. 任意の 4 点 $1, 2, 3, 4 \in X$ に対して

$$\chi(1, 2, 3)\chi(1, 3, 4) = \chi(2, 3, 4)\chi(1, 2, 4)$$

が成り立つ.

証明. step:

$$\chi(1, 2, 3) = 1, \quad \chi(1, 3, 4) = 1 \Rightarrow \chi(2, 3, 4) = 1, \quad \chi(1, 2, 4) = 1$$

(\because) $\chi(1, 3, 4) = 0$ とすると,

$$24 = 12 + 24 - 12 \geq 14 - 12 = 23 + 34 > 24$$

となり矛盾する. また, $\chi(2, 3, 4) = 0$ とすると,

$$12 + 24 > 14 = 12 + 23 + 34 \geq 12 + 24$$

となり矛盾する. ▲

step:

$$\chi(1, 2, 3) = 1, \quad \chi(1, 3, 4) = 0, \quad \chi(2, 3, 4) = 1 \Rightarrow \chi(1, 2, 4) = 0$$

$$\chi(1, 2, 3) = 1, \quad \chi(1, 3, 4) = 0, \quad \chi(1, 2, 4) = 1 \Rightarrow \chi(2, 3, 4) = 0$$

(\because) 上は

$$14 - 12 < 23 + 34 = 24$$

より

$$14 < 12 + 24$$

が成り立つ. 下は

$$12 + 24 = 14 < 13 + 34 = 12 + 23 + 34$$

より

$$24 < 23 + 34$$

である.

▲

step:

$$\chi(1, 2, 3) = 0, \quad \chi(1, 3, 4) = 1, \quad \chi(2, 3, 4) = 1 \Rightarrow \chi(1, 2, 4) = 0$$

$$\chi(1, 2, 3) = 0, \quad \chi(1, 3, 4) = 1, \quad \chi(1, 2, 4) = 1 \Rightarrow \chi(2, 3, 4) = 0$$

(\therefore) 省略する.

▲

step:

$$\chi(1, 2, 3) = 0, \quad \chi(1, 3, 4) = 0, \quad \chi(2, 3, 4) = 1 \Rightarrow \chi(1, 2, 4) = 0$$

$$\chi(1, 2, 3) = 0, \quad \chi(1, 3, 4) = 0, \quad \chi(1, 2, 4) = 1 \Rightarrow \chi(2, 3, 4) = 0$$

(\therefore) 上は

$$14 - 12 < 23 + 34 = 24$$

より,

$$14 < 12 + 24$$

である. 下は,

$$12 + 24 = 14 < 13 + 34 < 12 + 23 + 34$$

より

$$24 < 23 + 34$$

である.

▲

以上により主張が従う.

□