コンパクト集合と閉集合の距離と共通部分について

1

記号 1.1. (X, d) を距離空間とする．$A, B \subset X$ に対して，

$$d(A, B) \coloneqq \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}, \quad d(A, b) \coloneqq \inf\{d(a, b) \mid a \in A\}$$

という記号を用いる．

命題 1.2. (X, d) を距離空間とする．$A \subset X$ をコンパクト集合, $B \subset X$ を閉集合とする．

$$d(A, B) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \varnothing$$

が成り立つ．

証明. $\Rightarrow$. $A \cap B \neq \varnothing$ と仮定する (背理法)．$c \in A \cap B$ ととると, $d(A, B) \leq d(c, c) = 0$ となるので矛盾する．$\Leftarrow$. 任意の $a, a' \in A$ に対して，

$$d(B, a) = \inf\{d(b, a) \mid b \in A\} \leq \inf\{d(b, a) + d(a, a') \mid b \in A\}$$

が成り立つので，

$$|d(B, a) - d(B, a')| \leq d(a, a')$$

$d(B, \cdot)$ は A 上の連続関数である．A はコンパクト集合であるので, $d(B, \cdot)$ の最小値を実現する点 $a \in A$ がとれる．

$$d(B, a) = 0$$

であるので, $a \in \overline{B}$ である．B が閉集合であることから $\overline{B} = B$ であるので, $a \in B$ である．従って $A \cap B \neq \varnothing$ が成り立つ． $\square$

注意 1.3. $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続関数なので, $A \coloneqq \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ は $(\mathbb{R}^2, d)$ の閉集合である．閉集合 $B \coloneqq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\right\}$ との共通部分を考えると, $\tanh x < 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ であるので，

$$A \cap B = \varnothing$$

である一方で, $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$ であるので，

$$d(A, B) = 0$$

が成り立つ．