ボックスのマグニチュードと l_1 内在的体積

1

設定 1.1. ユークリッド空間には l_1 距離を備えておく.

記号 1.2. V'_i で i 次の l_1 内在的体積を表す.

記号 1.3. $J = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ のかたちの集合を n 次元ボックスという.

命題 1.4. n 次元ボックス $J \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathrm{Mag}(J; d_{l_1}) = 1 \cdot V'_0(J) + \frac{1}{2}V'_1(J) + \frac{1}{2^2}V'_2(J) + \cdots \frac{1}{2^n}V'_n(J)$$

が成り立つ.

証明. $A, B \subset \mathbb{R}$ に対して $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ の l_1 距離に関するマグニチュードは

$$\mathrm{Mag}(A \times B) = \mathrm{Mag}(A)\mathrm{Mag}(B)$$

が成り立つ. $\mathrm{Mag}([a,b]) = 1 + \frac{1}{2}(b-a)$ であるので, $J = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ とし, $d_i =:= b_i - a_i$ とすると,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mag}(J) &= \prod(1 + \frac{1}{2}d_i) = 1 + \frac{1}{2}\sum_i d_i + \frac{1}{2^2}\sum_{i<j} d_i d_j + \cdots \frac{1}{2^n}d_1 \cdots d_n \\ &= 1 \cdot V'_0(J) + \frac{1}{2}V'_1(J) + \frac{1}{2^2}V'_2(J) + \cdots \frac{1}{2^n}V'_n(J)\end{aligned}$$

□