$\mathbb{R}^n$ の向きを保つ微分同相 f は, 恒等写像に滑らかにイソトピック

1

命題 1.1. $\mathbb{R}^n$ の向きを保つ微分同相 f は, 恒等写像に滑らかにイソトピックである.

証明. step: 最初から

$$f(0) = 0$$

と仮定してよい.
$(\because)$

$$g(x) \coloneqq f(x) - f(0)$$

と定めると,

$$H_t(x) \coloneqq f(x) - tf(0)$$

は f から g へのイソトピーである. ▲
step:

$$F(x,t) \coloneqq \begin{cases} \frac{f(tx)}{t} & 0 < t \leq 1 \\ df_0(x) & t = 0 \end{cases}$$

は, df_0 から f への滑らかなイソトピックである.
$(\because)$ よく知られた補題として, 0 の近傍で定義された滑らかな写像 $g_1, \dots, g_n$ で

$$f(x) = f(0) + x^1 g_1(x) + \cdots + x^n g_n(x)$$

を満たすものが存在する. 従って 0 の近傍で

$$F(x,t) = x^1 g_1(tx) + \cdots + x^n g_n(tx)$$

が成り立ち, これは map; $(t,x) \mapsto tx, g_i$ などが滑らかであることから, $\mathbb{R}^n \times [0,1]$ 上で滑らかである. $t = 0$ のときも F_0 が微分同相であることは, df_0 が線型同型であることからわかる. ▲
step: df_0 は恒等写像とイソトピックである.
$(\because)$ $GL_n^+ \coloneqq \{A \in GL_n \mid \det A \geq 0\}$ が弧状連結であることから, 主張が従う. ▲

□