正則関数の積分表示

1

命題 1.1. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を単純平曲戦 C で囲まれた領域とする. f を $\overline{\Omega}$ 上で正則な関数とする. このとき, 任意の $z \in \Omega$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

が成り立つ.

証明. z を中心とした十分小さい円周 $S(z;r)$ を考える.

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

は $\overline{C \setminus B(z;r)}$ で正則であるので,

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{S^1(z;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

が成り立つ. けっきょくのところ,

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\theta})}{z + re^{i\theta} - z}rie^{i\theta}dt = i\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta \to i\int_0^{2\pi} f(z)d\theta = 2\pi i f(z)$$

が成り立つ.

□