部分多様体の曲率

1

設定 1.1. (M, g) をリーマン多様体, $N \subset M$ を部分多様体, $\iota : N \to M$ を包含写像, $h \coloneqq \iota^* g$ とする.

命題 1.2. $X, Y, Z, W \in T_pN$ に対して (T_pM でないことに注意),

$$R^M(X,Y,Z,W) = R^N(X,Y,Z,W) + g((\nabla^M_X Z)^\perp, (\nabla^M_Y W)^\perp) - g((\nabla^M_Y Z)^\perp, (\nabla^M_X W)^\perp)$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned} R^M(X,Y)Z &= \nabla^M_X(\nabla^M_Y Z) - \nabla^M_Y(\nabla^M_X Z) - \nabla^M_{[X,Y]}Z \\ &= \nabla^M_X((\nabla^M_Y Z)^\top + (\nabla^M_Y Z)^\perp) - \nabla^M_Y((\nabla^M_X Z)^\top + (\nabla^M_X Z)^\perp) \\ &\quad - ((\nabla^M_{[X,Y]}Z)^\top + (\nabla^M_{[X,Y]}Z)^\perp) \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} (R^M(X,Y)Z)^\top &= (\nabla^M_X((\nabla^M_Y Z)^\top + (\nabla^M_Y Z)^\perp))^\top - (\nabla^M_Y((\nabla^M_X Z)^\top + (\nabla^M_X Z)^\perp))^\top \\ &\quad - ((\nabla^M_{[X,Y]}Z)^\top + (\nabla^M_{[X,Y]}Z)^\perp)^\top \\ &= (\nabla^M_X((\nabla^M_Y Z)^\top + (\nabla^M_Y Z)^\perp))^\top - (\nabla^M_Y((\nabla^M_X Z)^\top + (\nabla^M_X Z)^\perp))^\top \\ &\quad - ((\nabla^M_{[X,Y]}Z)^\top + 0) \\ &= \nabla^N_X\nabla^N_Y Z + (\nabla^M_X(\nabla^M_Y Z)^\perp)^\top - \nabla^N_Y\nabla^N_X Z - (\nabla^M_Y(\nabla^M_X Z)^\perp)^\top - \nabla^N_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

が成り立つ. $W \in T_pN$ より, $R(X,Y,Z,W) = g((R(X,Y)Z)^\top, W)$ であるので, 上の式において W との内積をとることにする.

$$\begin{aligned} ((\nabla^M_X(\nabla^M_Y Z)^\perp)^\top, W) &= -((\nabla^M_X W)^\perp, (\nabla^M_Y Z)^\perp) \\ ((\nabla^M_Y(\nabla^M_X Z)^\perp)^\top, W) &= -((\nabla^M_Y W)^\perp, (\nabla^M_X Z)^\perp) \end{aligned}$$

であるので,

$$R^M(X,Y,Z,W) = R^N(X,Y,Z,W) + g((\nabla^M_X Z)^\perp, (\nabla^M_Y W)^\perp) - g((\nabla^M_Y Z)^\perp, (\nabla^M_X W)^\perp)$$

が成り立つ. □