LSS 不等式

1

記号 1.1. (X, d) を距離空間とする．$x, y \in X$ に対して

$$xy \coloneqq d(x, y)$$

という記号を用いることにする．

定義 1.2. (X, d) を距離空間とする．$n+1$ 点 $\{p, x_1, \ldots, x_n\}$ に対して,

$$k_p(x_i, x_j) \coloneqq x_i p^2 + x_j p^2 - x_i x_j^2$$

と定める．任意の非負関数 $\lambda : \{p, x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_i \sum_j \lambda(x_i)\lambda(x_j) k_p(x_i, x_j) \geq 0$$

が成り立つとき, $\{p, x_1, \ldots, x_n\}$ は p を中心とする (n 点)Lang-Schroeder-Strum 不等式を満たすと言う．

命題 1.3. $\{p, x_1, \ldots, x_n\}$ 上で d^2 が条件付き負であるならば, $\{p, x_1, \ldots, x_n\}$ は p 中心 LNN 不等式を満たす．

証明. 対称連続関数の pdf を参照． □

注意 1.4. LSS 不等式は「任意の非負関数 $\lambda : \{p, x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{R}$ に対して」という条件であるので, 対称連続関数が正であるという性質よりは弱い．従って, 逆は成り立たない．