対応集合とグロモフハウスドルフ距離と近似写像

1

定義 1.1. (対応集合). X, Y を集合とする. $\mathcal{R} \subset X \times Y$ は, 任意の $x \in X$ に対して, $y \in Y$ で $(x, y) \in \mathcal{R}$ を満たすものが存在し, かつ, 任意の $y \in Y$ に対して, $x \in X$ で $(x, y) \in \mathcal{R}$ を満たすものが存在するときに , 対応集合という.

命題 1.2. X, Y を集合とし, $f : X \to Y$ を全射とする. このとき,

$$\{(x, fx) \mid x \in X\}$$

は対応集合である.

証明. 明らかである. □

命題 1.3. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし, $\varepsilon > 0$ とする. $f : X \to Y$ を, $Y \subset (fX)_\varepsilon$ とする. このとき,

$$\{(x, y) \mid x \in X, yfx < \varepsilon\}$$

は対応集合である.

証明. □

定義 1.4. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. $\varepsilon > 0$ とする. $f : X \to Y$ は

$$|fxfx' - xx'| < \varepsilon$$

を満たすときに, ε 近似写像という.

命題 1.5. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし, $\varepsilon > 0$ とする. $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$ ならば, X から Y への 2ε 近似写像が存在する.

証明. $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$ ならば, 適当な (Z, d_Z) と等長写像 $T : X \to Z, S : Y \to Z$ で, $d_H(TX, SY) < \varepsilon$ を満たすものが存在する. $x \in X$ に対して, $fx \in Y$ を $TxSy < \varepsilon$ を満たす $y \in Y$ により定めると, $x, x' \in X$ に対して

$$fxfx' - xx' \leq SfxSfx' - xx' \leq SfxTx + TxTx' + Tx'Sfx' - xx' < 2\varepsilon$$

が成り立つ. □

命題 1.6. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とし, $\varepsilon > 0$ とする. ε 近似写像 $f : X \to Y$ で, $Y \subset (fX)_\varepsilon$ を満たすものが存在するならば, $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$ が成り立つ.

証明. $X \sqcup Y$ に $xy \coloneqq \inf\{xx' + y'y + \varepsilon \mid (x', y') \in \{(x, y) \mid x \in X, yfx < \varepsilon\}\}$ により距離を定めると, $d_H({}^{\iota}X, \iota Y) < \varepsilon$ が成り立つ. 多分. きちんと確認してないから気をつけて.

$\square$