フーリエ反転公式

1

命題 1.1. $f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ であるならば,

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x)$$

が成り立つ.

証明.

$$f_t(x) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-t\xi^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y}f(y)dy\right)d\xi$$

と定める. $e^{ix\xi}e^{-t\xi^2}e^{-i\xi y}f(y)$ が y に関して可積分で, $e^{-t\xi^2}\left\|f\right\|_{L^1}$ が ξ に関して可積分であるので, フビニの定理より,

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi}e^{-t\xi^2}d\xi\right)f(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}f(y)dy \end{aligned}$$

が成り立つ. $\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$ は $\mathbb{R}$ における熱核であるので,

$$\lim_{t\to 0}\|f_t - f\|_{L^1} = 0$$

が成り立つ. 従って, 概収束部分列がとれることと, $\left|e^{ix\xi}e^{-t\xi^2}\mathcal{F}f(\xi)\right| \leq |\mathcal{F}f(\xi)| \in L^1$ より優収束定理が成り立つことから,

$$f(x) = \lim_{t\to 0}f_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y}f(y)dy\right)d\xi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x)$$

が成り立つ. □

命題 1.2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x)$$

が成り立つ.

証明. $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ であることと, 急減少関数のフーリエ変換が急減少関数であることから, 主張が従う. □