コンパクト台をもつ関数の原点における積分表示

1

注意 1.1. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を C^∞ 級のコンパクト台をもつ関数とすると,

$$\left[t^{k-1}f^{(k-1)}(t)\right]_0^\infty$$

こういう値は, 十分大きい R をとれば, $R^{k-1}f^(k-1)(R)=0$ となることに注意する.

命題 1.2. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を C^k 級のコンパクト台をもつ関数とする. この時,

$$f(0)=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}f^{(k)}(t)dt$$

が成り立つ.

証明. $k=1$ のとき, $-\int_0^\infty f'(t)dt=f(0)$ なので成り立つ. 部分積分を行うことで,

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}f^{(k)}(t)dt &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\left(\left[t^{k-1}f^{(k-1)}(t)\right]_0^\infty-\int_0^\infty(k-1)t^{k-2}f^{(k-1)}dt\right)\\ &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\left(0-0-\int_0^\infty(k-1)t^{k-2}f^{(k-1)}dt\right)\end{aligned}$$

が成り立つので, 帰納法を用いれば主張が従う.

□

命題 1.3. C^∞ 級写像 $\varphi(x):S^{n-1}\to\mathbb{R}$ を

$$\int_{S^{n-1}}\varphi(x)dx=\frac{(-1)^k}{(k-1)!}$$

を満たすものとする. このとき,
$u\in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{y}{\|y\|})\,\|y\|^{-n}\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+y)y^\alpha\right)dy$$

が成り立つ.

証明. $v \in S^{n-1}$ に対して,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}(\partial_t)^k u(x+tv)dt \\ &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+tv)v^\alpha\right)dt \end{aligned}$$

であるので, 両辺に $\varphi(v)$ をかけて $\int_{S^{n-1}}$ で積分すると,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{S^{n-1}}\varphi(v)\int_0^\infty t^{-n}t^k\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+tv)v^\alpha\right)t^{n-1}dtdv \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{y}{\|y\|})\,\|y\|^{-n}\,\|y\|^k\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+y)\frac{y}{\|y\|}^{\alpha}\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{y}{\|y\|})\,\|y\|^{-n}\left(\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha u(x+y)y^\alpha\right)dy \end{aligned}$$

となる. 2 つめの等号は極座標変換の逆を行った $(t^{n-1}dtdv \mapsto dy)$,

□

注意 1.4. C^∞ 級写像 $\varphi(x) : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ で

$$\int_{S^{n-1}}\varphi(x)dx = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}$$

を満たすものは存在するのかということについては, $\int_{S^{n-1}}\varphi(x)dx < \infty$ を適当に低数倍すりゃつくれるので, こういう関数はたくさん存在する.

命題 1.5. C^∞ 級写像 $\varphi(x) : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ を

$$\int_{S^{n-1}}\varphi(x)dx = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}$$

を満たすものとする. $\chi \in C_c^\infty[0,\infty)$ とする.
このとき,
$u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{y}{\|y\|})\,\|y\|^{-n}\sum_{l=0}^{k}\|y\|^{k-l}\left({}_kC_l\chi^{(k-l)}(\|y\|)\sum_{|\alpha|=l}\partial^\alpha u(x+y)y^\alpha\right)dy$$

が成り立つ.

証明. これまでと同様にして,

$$
\begin{aligned}
u(x) &= u(x)\chi(0) \\
&= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}(\partial_t)^k(\chi(t)u(x+tv))dt \\
&= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}\sum_{l=0}^{k}\left({}_kC_l\chi^{(k-l)}(t)\sum_{|\alpha|=l}\partial^\alpha u(x+tv)v^\alpha\right)dt \\
&= \frac{(-1)^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{-n}t^kt^{n-1}\sum_{l=0}^{k}\left({}_kC_l\chi^{(k-l)}(t)\sum_{|\alpha|=l}\partial^\alpha u(x+tv)v^\alpha\right)dt
\end{aligned}
$$

となるので, これまでと同様に両辺に $\varphi(v)$ をかけて $\int_{S^{n-1}}$ で積分をして, 極座標変換の逆を行うと,

$$
\int_{\mathbb{R}^n}^{k}\varphi(\frac{y}{\|y\|})\,\|y\|^{-n}\,\|y\|^k\sum_{l=0}^{k}\left({}_kC_l\chi^{k-l}(\|y\|)\sum_{|\alpha|=l}\partial^\alpha u(x+y)\left(\frac{y}{\|y\|}\right)^\alpha\right)dy
$$

となるので, 主張が従う.

□