Gelfand-Mazur

1

注意 1.1. 本文中に登場する多元環は, 特に断らない限り, 結合的であるとする.

定義 1.2. (ノルム環). 多元環 A とノルム $\|\cdot\|$ の組 $(A, \|\cdot\|)$ で, 任意の二点 $x, y \in A$ に対して

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

を満たすものを, ノルム環という.

定義 1.3. (バナッハ環). ノルムに関して完備であるノルム環を, バナッハ環という. 単位元をもつバナッハ環を, 単位的バナッハ環という.

注意 1.4. A をノルム環, $1 \in A$ を単位元とするとき, $\|1\| = 1$ であるとは限らないが, 常に適当に正規化して $\|1\| = 1$ であるようにしておく.

定義 1.5. バナッハ環 A の可逆元全体を $GL(A)$ で表す.

定義 1.6. A を単位的バナッハ環, $x \in A$ とする.

$$\mathrm{Sp}(x; A) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - x \notin GL(A)\}$$

と定め, これを x の A におけるスペクトルという.

定義 1.7. X をバナッハ空間, $z_0 \in \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{C}$ とする. $f : \mathbb{C} \to X$ は,

$$\lim_{z \to z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \xi \right\| = 0$$

を満たす $\xi \in X$ が存在する時に, z_0 において微分可能であるという. また, このとき $f'(z_0) \coloneqq \xi$ と表す. また, $\mathrm{dom}(f)$ の領域の任意の点において微分可能であるとき, f はその領域で正則であるという.

命題 1.8. A を単位的バナッハ環とする. $x \in A$ が $\|x\| < 1$ を満たすならば, $1 - x \in GL(A)$ である.

証明. 無限級数 $1 + x + x^2 + \cdots$ は収束して A に属する. これが $1 - x$ の逆元である. □

命題 1.9. $GL(A)$ は A の開集合である.

証明. 任意に $x \in GL(A)$ をとる. $B(x; \frac{1}{\|x\|})$ が $GL(A)$ に含まれることを示せば良い. $y \in B(x; \frac{1}{\|x\|})$ に対して

$$\left\|1 - x^{-1}y\right\| \leq \left\|x^{-1}\right\| \|x - y\| < \left\|x^{-1}\right\| \frac{1}{\|x\|} = 1$$

であるので, 前述の命題より $x^{-1}y \in GL(A)$ であるので, $y = xx^{-1}y$ の逆元として $(x^{-1}y)^{-1}x^{-1}$ がとれるので, $y \in GL(A)$ である. $\square$

命題 1.10. A を単位的バナッハ環, $x \in A$ とする. $\lambda \in \mathrm{Sp}(x;A) \Rightarrow |\lambda| \leq \|x\|$ が成り立つ.

証明. $|\lambda| > \|x\|$ であるならば, $\lambda 1 - x$ の逆元として, 収束する無限級数 $\frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{\lambda}x + (\frac{1}{\lambda}x)^2 + \cdots)$ がとれるので, $\lambda \notin \mathrm{Sp}(x;A)$ である. $\square$

命題 1.11. A を単位的バナッハ環, $x \in A$ とする. このとき, $\mathrm{Sp}(x;A)$ は閉集合である.

証明. $f : \mathbb{C} \to A; \lambda \mapsto \lambda 1 - x$ は,

$$\|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|(\lambda 1 - x) - (\mu 1 - x)\| = |\lambda - \mu|$$

より連続であり, $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(x;A) = f^{-1}(GL(A))$ であるので, 主張が従う. $\square$

命題 1.12. $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(x;A)$ に対して

$$(\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda 1 - x)^{-1}(\mu 1 - x)^{-1}$$
$$(\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu 1 - x)^{-1}(\lambda 1 - x)^{-1}$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned}(\mu - \lambda)(\lambda 1 - x)^{-1}(\mu 1 - x)^{-1} &= (\lambda 1 - x)^{-1}((\mu 1 - x) - (\lambda 1 - x))(\mu 1 - x)^{-1} \\ &= (\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1}\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu)(\mu 1 - x)^{-1}(\lambda 1 - x)^{-1} &= (\mu 1 - x)^{-1}((\lambda 1 - x) - (\mu 1 - x))(\lambda 1 - x)^{-1} \\ &= (\mu 1 - x)^{-1} - (\lambda 1 - x)^{-1}\end{aligned}$$

よりわかる. $\square$

命題 1.13. $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(x;A)$ に対して,

$$\frac{(\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1}}{\lambda - \mu} = -(\mu 1 - x)^{-2} + (\mu 1 - x)^{-1}((\mu 1 - x)^{-1} - (\lambda 1 - x)^{-1})$$

が成り立つ.

証明. 素朴に計算する. $\square$

命題 1.14. $f : A \to A; x \mapsto x^{-1}$ は連続である.

証明. 省略する. $\square$

命題 1.15. A をバナッハ環, $f : \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(x;A) \to A$ を $f(\lambda) \coloneqq (\lambda 1 - x)^{-1}$ により定めると, f は $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(x;A)$ 上で正則である.

証明. $\frac{(\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1}}{\lambda - \mu} = -(\mu 1 - x)^{-2} + (\mu 1 - x)^{-1}((\mu 1 - x)^{-1} - (\lambda 1 - x)^{-1})$ であるので,

$$\frac{(\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1}}{\lambda - \mu} - (-(\mu 1 - x)^{-2}) = (\mu 1 - x)^{-1}((\mu 1 - x)^{-1} - (\lambda 1 - x)^{-1})$$

となり, あとは逆元を取る操作が連続であることから,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\mu}\left\|\frac{(\lambda 1-x)^{-1}-(\mu 1-x)^{-1}}{\lambda-\mu}-(-(\mu 1-x)^{-2})\right\| &\leq \lim_{\lambda\to\mu}\left\|(\mu 1-x)^{-1}\right\|\left\|((\mu 1-x)^{-1}-(\lambda 1-x)^{-1})\right\| \\ &= 0\end{aligned}$$

なので主張が従う. □

命題 1.16. A をバナッハ環, $x \in A$ とする. このとき, $\mathrm{Sp}(x;A)$ は空でない.

証明. 空であるとすると, $(\lambda 1-x)^{-1}$ は $\mathbb{C}$ 上で正則であり, 無限遠点で消える連続関数なので有界でもある. 有界な整関数は定数関数である. また, 無限遠点で消えることと合わせると, $(\lambda 1-x)^{-1}$ 恒等的に 0 でなければならない. 一方で, $(\lambda 1-x)^{-1}=0 \in A$ となることはない (零環でないから積の逆元が和の単位元となることはない) ので矛盾. □

命題 1.17. (Gelfand-Mazur). A を単位的可換バナッハ環とする. A が体であるならば, $A \simeq \mathbb{C}$ である.

証明. 任意の $x \in A$ に対して, $\mathrm{Sp}(x;A)$ は空でないので, 適当に $\lambda \in \mathrm{Sp}(x;A)$ をとる. すると, $\lambda 1-x \in A$ は積の逆元を持たない. A が体であることから, 積の逆元を持たないのは和の逆元に限られる. 従って, $\lambda 1-x=0$ であるので, $x=\lambda 1$ である. これにより定まる対応 $A \to \mathbb{C}; x \mapsto \lambda$ を考えると, 準同型である. 体から体への準同型は単射であることと, 明らかに全射であることから, 同型である. □