回転群と運動群のハール測度

1

注意 1.1. 多分, 一般に, 局所コンパクト位相群にはハール測度が存在する.

記号 1.2.

$$LI_d \coloneqq \{(x_1,\dots,x_d) \in S^{d-1} \times \cdots \times S^{d-1} \mid x_1,\dots,x_d \text{は線型独立である.}\}$$

とする.

$$\varphi^{pgs} : LI_d \to SO_d$$

を以下のように定める. $(x_1,\dots,x_d)$ に対して, 添字順に直交化して $(z_1,\dots,z_d) \in (S^{d-1})^d$ を得て, 次に z_d のみに $+1$ か -1 をかけて $(\tilde{z}_1,\dots,\tilde{z}_d) \in (S^{d-1})^d$ を得る.

$$\exists R_\theta \in SO_d; R_\theta(e_1,\dots,e_d) = (\tilde{z}_1,\dots,\tilde{z}_d)$$

であるので, $(x_1,\dots,x_d)LI_d$ にこの $R_\theta \in SO_d$ を対応させる写像として φ^{pgs} を定める. 続いて, その拡張

$$\tilde{\varphi}^{pgs} : (S^{d-1})^d \to SO_d$$

を, LI_d に対してはそのまま φ^{pgs} で, $(S^{d-1})^d \setminus LI_d$ に対しては自明な回転 $(id_{\mathbb{R}^d})$ を与える, とすることで定める.

定義 1.3. (球面ルベーグ測度). ボレル可測空間 $(S^{d-1}, \mathcal{B}(S^{d-1}))$ に, $B \in \mathcal{B}S^{d-1}$ に対して

$$\sigma(A) \coloneqq d\mathrm{Leb}_d(\{sx \in \mathbb{R}^d \mid x \in B, 0 \le s \le 1\})$$

によりボレル測度 σ を定める. これを球面ルベーグ測度という.

命題 1.4. (回転群のハール測度). 回転群 SO_d 上にはハール確率測度が一意に存在する.

証明.

$$\tilde{\varphi}^{psd} : (S^{d-1})^d \to SO_d$$

は, LI_d 上で, 任意の $R_\theta \in SO_d$ に対して

$$\tilde{\varphi}^{psd}(R_\theta x_1,\dots,R_\theta x_d) = R_\theta \tilde{\varphi}^{psd}(x_1,\dots x_d)$$

が成り立つ.

$(S^{d-1})^d$ 上のボレル測度を, 積測度

$$\sigma^d \coloneqq \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma$$

で定める.

<u>step:</u> $(S^{d-1})^d \setminus LI_d$ は σ^d に関して測度ゼロの集合である.

$(\because)$

非正則行列 M に対して, tEM は任意の $t \in [0,1]$ に対して非正則行列であるので, $Set := \cup_{s\in[0,1]} s((S^{d-1})^d \setminus LI_d)$ は非正則行列に含まれるので, その d^2 次元ルベーグ測度はゼロである. $\sigma^d = d^2 Leb_{d^2}$ であるので, 主張が従う. ▲

<u>step:</u> $\tilde{\varphi}^{psd}$ はボレル可測である.

$(\because)$ 任意に開集合 $B \subset SO_d$ をとる. $B \cap SO_d \setminus \{Id_{\mathbb{R}^d}\}, B \cap \{Id_{\mathbb{R}^d}\}$ はそれぞれ開集合と 1 点であり, $\tilde{\varphi}^{psd} : (S^{d-1})^d$ の $LI_d, (S^{d-1})^d$ への制限はそれぞれ連続写像 (直交化は多項式で表されるので) と定値写像である. LI_d への制限は連続写像なので, その逆像は LI_d の開集合だが, LI_d 自体が開集合なので, 開集合である LI_d との共通部分は開集合であり従ってボレル集合である. 1 点の方の逆像は LI_d の補集合であり, それは閉集合なのでボレル集合である. 最後にボレル集合とボレル集合の合併はボレル集合であるので, 結局逆像がボレル集合なのでボレル可測である. ▲

$\tilde{\varphi}^{psd} : (S^{d-1})^d \to SO_d$ による押し出しによって有限測度を

$$\check{\nu} = \tilde{\varphi}^{psd}_{\#} \sigma^d$$

と定める.

<u>step:</u> $\check{\nu}$

$(\because)$ 任意に $R_{\theta_0} \in SO_d$ と非負可測関数 $f \geq 0$ をとる.

$$\begin{aligned}
\int_{SO_d} f(R_{\theta_0} R_\theta) d\check{\nu}(R_\theta) &= \int_{(S^{d-1})^d} f(R_{\theta_0} \tilde{\varphi}^{psd}(x_1, \ldots, x_d)) d\sigma^d \\
&= \int_{(S^{d-1})^d} f(\tilde{\varphi}^{psd}(R_{\theta_0} x_1, \ldots, R_{\theta_0} x_d)) d\sigma^d \\
&= \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} f(\tilde{\varphi}^{psd}(R_{\theta_0} x_1, \ldots, R_{\theta_0} x_d)) d\sigma(x_1) \ldots, d\sigma(x_d) \\
&= \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} f(\tilde{\varphi}^{psd}(x_1, \ldots, x_d)) d\sigma(x_1) \ldots, d\sigma(x_d) \\
&= \int_{SO_d} f(R_\theta) d\check{\nu}(R_\theta)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 最後の等号は, ルベーグ球面測度が R_θ 不変であることを用いた. ▲

従って, これは可測関数に関して積分左不変, 最後に, $\check{\nu}$ は有限なので, 適当に確率測度となるように正規化すればよい. □