長さ構造

1

1.1　長さ構造

設定 1.1. X, Y で距離空間を表す．それぞれが備える距離 d_X, d_Y も混乱の恐れのない限り d で表す．

定義 1.2. (伸長)． $f : X \to Y$ に対して $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に値をとる

$$\mathrm{dil}(f) \coloneqq \sup_{x,x' \in X, x \neq x'} \frac{d(fx, fx')}{d(x, x')}$$

と定め，これを f の伸長という．

定義 1.3. (局所伸長)． $f : X \to Y$ に対して $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に値をとる

$$\mathrm{dil}_x(f) \coloneqq \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{dil}(f|_{B(x;\varepsilon)})$$

と定め，これを f の $x \in X$ における局所伸長という．

定義 1.4. (リプシッツ写像)． $\mathrm{dil}(f) < \infty$ を満たす写像をリプシッツ写像という．

命題 1.5. 任意の点 $x \in X$ において，$\mathrm{dil}_x f \leq \mathrm{dil} f$ が成り立つ．

証明. □

定義 1.6. (リプシッツ写像の総伸長)． $f : [a, b] \to Y$ をリプシッツ写像とする．

$$l(f) \coloneqq \int_a^b \mathrm{dil}_t f dt$$

と定め，これを f の (リプシッツ写像) 総伸長という．

定義 1.7. (連続写像の総伸長)．リプシッツ連続でない連続写像 $f : [a, b] \to Y$ に対して，

$$l(f) = \sup \sum d(f(t_i), f(t_{i+1}))$$

で定める．ただし，上限は全ての n 分割 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b$ を走る．これを f の (連続写像) 総伸長という．

注意 1.8. 絶対連続な写像に関しては，リプシッツ写像総伸長と連続写像総伸長は一致するらしい．

定義 1.9. (長さ構造)． X を集合とする．区間全体を添字集合とする，閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ から X への写像の族 $\{\mathcal{C}(I)\}_I$ と，全ての閉区間に関して $\mathcal{C}(I)$ を足し合わせた $\mathcal{C} = \cup_I \mathcal{C}(I)$ 上の関数 $l : C \to \mathbb{R}$ の組 $(\{\mathcal{C}(I)\}_I, l)$ で

(1)$l(f) \geq 0 \quad (f \in C)$ かつ $l(f)=0$ であることの必要十分条件が f が定値写像 であることである.
(2-1)$I \subset J$ ならば, 任意の $f \in \mathcal{C}(J)$ に対して $f|_I \in C(I)$ が成り立つ.
(2-2)$f \in \mathcal{C}([a,b]), g \in \mathcal{C}([b,c])$ で $f(b)=g(b)$ を満たすものに対して, $h(t) \coloneqq \begin{cases} f(t) & (t \in [a,b]) \\ g(t) & (t \in [b,c]) \end{cases}$ により定まる写像は $h \in \mathcal{C}([a,c])$ であり, $l(h)=l(f)+l(g)$ が成り立つ.
(3) 区間 I, J に対して $\varphi : I \to J$ が同相写像であるならば, $f \in \mathcal{C}(J)$ に対して $f \circ \varphi \in \mathcal{C}(I)$ であり, $l(f \circ \varphi) = l(f)$ が成り立つ.
(4) 任意の閉区間 $I=[a,b]$ と $f \in \mathcal{C}([a,b])$ に対して, $t \mapsto l(f|_{[a,t]})$ は連続である.
を満たすとき, 長さ構造という.

定義 1.10. (長さ擬距離). X を集合とする. $(\{\mathcal{C}(I)\}_I, l)$ を X の長さ構造とする.

$$d_l(x,y) \coloneqq \inf\{l(f) \mid f \in \mathcal{C}, x, y \in \mathrm{im}(f)\}$$

をこの長さ構造が定める長さ擬距離という.

例 1.11. 距離 d を備えた集合 X に対して標準的に定まる長さ構造は, $\mathcal{C}(I)$ を I から X への連続写像とし, l を総伸長とした $(\{\mathcal{C}(I)\}_I, l)$ である.

命題 1.12. X に長さ構造 $(\{\mathcal{C}(I)\}_I, l)$ を備え, この長さ構造から定まる長さ擬距離を d_l とする. 距離空間 (X, d_l) に前述のようにして標準的な長さ構造 $(\{\mathcal{C}(I)\}_I, \tilde{l})$ を定める. (すなわち, $\mathcal{C}(I)$ を I から X への連続写像とし, $\tilde{l}$ を連続写像総伸長とした $(\{\mathcal{C}(I)\}_I, \tilde{l})$ である.) このとき, l がコンパクト開位相を備えた $\mathcal{C}(I)$ 上で下半連続であるならば,

$$l = \tilde{l}$$

が成り立つ.

証明. <u>step:</u>

$$l(f) \leq \tilde{l}(f)$$

$(\because)$ $t \mapsto l(f|_{[a,t]})$ は $[a,b]$ 上で一様連続なので適当に $\eta > 0$ で $|t-t'| < \eta$ ならば $d_l(f(t), f(t')) < \varepsilon$ となるものをとる. 区間 $[a,b]$ の n 分割を, 各メッシュの長さが η を超えないように分割する. 長さ擬距離の定義から

$$d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) = \left\{l(g) \mid g \in \mathcal{C}([t_i, t_{i+1}]) g_{t_i} = f_{t_i}, g_{t_{i+1}} = f_{t_{i+1}}\right\}$$

であるので, $g_i \in \mathcal{C}([t_i, t_{i+1}])$ で

$$d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) \leq l(g_i) \leq d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{n}$$

を満たすものがとれる. $g_0, \cdots, g_n$ を繋ぎ合わせたものを $h_\varepsilon \in \mathcal{C}([a,b])$ とすると,

$$\tilde{l}(f) = \sup \sum d_l(f(t_i), f(t_{i+1}))$$

であるので,

$$l(h_\varepsilon) = \sum l(g_i) \leq \sum d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) + n \cdot \frac{\varepsilon}{n} \leq \tilde{l}(f) + \varepsilon$$

が成り立つ．また, 任意の $t \in [a,b]$ に対して $t \in [t_i, t_{i+1}]$ なる i をみつけて,

$$
\begin{aligned}
&d_l(h_\varepsilon(t), f(t)) \\
&\le d_l(h_\varepsilon(t), h_\varepsilon(t_{i+1})) + d_l(h_\varepsilon(t_{i+1}), f(t_{i+1})) + d_l(f(t_{i+1}), f(t)) \\
&< d_l(h_\varepsilon(t), h_\varepsilon(t_{i+1})) + 0 + \varepsilon \\
&< l(g_i) + \varepsilon \\
&< d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{n} + \varepsilon < 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つ．(もしかしたら嘘書いてるかも.) l がコンパクト開位相に関して下半連続なので

$$l(f) \le \liminf l(h_\varepsilon)$$

であり, $\liminf l(h_\varepsilon) \le \lim(\tilde{l}(f) + \varepsilon) = \tilde{l}(f)$ であるので, 主張は示された. ▲

つぎに逆側の不等号を考える.

<u>step:</u>

$$\tilde{l}(f) \le l(f)$$

$(\because)$ 定義通りに追っていくと,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{l}(f) \\
&= \sup \sum d_l(f(t_i), f(t_{i+1})) \\
&\le \sup \sum \inf\{l(g) \mid g \in \mathcal{C}([0,1]), g(0) = f(t_i), g(1) = f(t_{i+1})\} \\
&\le \sup \sum l(f|_{t_i, t_{i+1}}) = l(f)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．二つ目の等号では

$$\{l(g) \mid g \in \mathcal{C}, f(t_i), f(t_{i+1}) \in \mathrm{img}\} \subset \{l(g) \mid g \in \mathcal{C}([0,1]), g(0) = f(t_i), g(1) = f(t_{i+1})\}$$

を用いた. ▲

従って, 命題の主張が成り立つ. □

1.2

命題 1.13. $f : S^n \to S^n$ は, $\mathrm{dil} f < 2$ であるならば, $\mathrm{deg} f \in \{1, 0, -1\}$ である.

証明. f が全射でない場合は $\mathrm{deg} f = 0$ である．f が全射である場合を考える.

$$\varepsilon \coloneqq 2 - \mathrm{dil} f > 0$$

と定める．適当に好きな $y \in S^n$ をとる.

<u>step:</u> $f^{B(y;\varepsilon)}$ は S^n の適当な開半球に含まれる.

$(\because)$ y' を y の対蹠点とする．$x' \in f^{-1}(y')$ を好きにとる．任意に $z \in f^{-1}(B(y;\varepsilon))$ をとる．$\mathrm{dil} f < 2 - \varepsilon$ であるので, $\frac{d(f(x'), f(z))}{d(x', z)} \le 2 - \varepsilon$ が成り立つ．また, y' は y の対蹠点であるので, $B(y;\varepsilon)$ に属する $f(z)$ に対しては, $d(y', f(z)) < \pi - \varepsilon$ が成り立つ．従って,

$$d(x', z) \ge \frac{1}{2-\varepsilon} d(y') \ge \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．これはすなわち $f^{B(y;\varepsilon)}$ が S^n の x' を中心とした開半球とは逆の (つまり, x' の対蹠点を中心とする) 開半球に含まれることを意味する．

▲

□