局所テストと同値な条件

1

設定 1.1. $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ とする.

定義 1.2. $T \in \mathcal{D}'$ が $x \in \mathbb{R}^n$ において局所的に C^∞ であるとは, x の開近傍 U_x と $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ で, $\mathrm{supp}\varphi \subset U_x$ である $\varphi \in \mathcal{D}$ に対して

$$T\varphi = \int f(x)\varphi(x)dx$$

を満たすものが存在することをいう.

注意 1.3. こういう f を, T を U_x において代表する関数ということにする.

命題 1.4. $T \in \mathcal{D}'$ が $x \in \mathbb{R}^n$ において局所的に C^∞ であることと, $\chi(x) \neq 0$ である $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して $\chi T \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ が成り立つことは必要十分である.

証明. ($\Leftarrow$). 明らか. ($\Rightarrow$). 適当な開集合 U_x と, T を U_x において代表する関数 $f \in C^\infty(U_x)$ をとる. $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ として, x で局所的に $\chi(x) \neq 0$ であるようなものをとると, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}'$ に対して,

$$(\chi T, \varphi) = (T, \chi\varphi)$$

であるが, $\mathrm{supp}\chi\varphi \subset U_x$ であるので,

$$(T, \chi\varphi) = \int f(x)\chi(x)\varphi(x)dx$$

が成り立つので, 超関数の意味で $\chi T = \chi f$ であるが, 右辺が $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ であるので, 主張が従う. $\square$