

ヒルベルト空間上の写像の grad の定義

1

定義 1.1. (微分写像). $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ をヒルベルト空間, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ とする. $x \in H, v \in H$ に対して

$$df_x(v) := \lim_{\varepsilon} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}$$

と定め, これにより定まる (部分) 写像 $df_x: H \rightarrow \mathbb{R}$ を f の x における微分写像という.

定義 1.2. (grad). $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ をヒルベルト空間, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ とする. $x \in H$ に対して

$$\langle \nabla f x, v \rangle := df_x v \quad (v \in H)$$

により定まる (部分) 写像 $\nabla f: H \rightarrow \mathbb{R}$ を f の x におけるグラディエントという.