超関数の同値な定義に関する命題

1

設定 1.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし, $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(U)$ とする.

命題 1.2. $T \in \mathcal{D}'$ であるならば, 任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対して, C, m で

$$|T\varphi| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi| \quad ({}^\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(K))$$

を満たすものが存在する.

証明. 存在しないと仮定する (背理法). コンパクト集合 $K \subset U$ で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_n \imath C_c^\infty(K)$ で

$$|T\varphi_n| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha \varphi_n|$$

を満たすものがとれる. $c_n \in \mathbb{R}$ を $|Tc_n\varphi_n| = 1$ となるようにとる. すると,

$$1 = |Tc_n\varphi_n| > n \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha c_n\varphi_n|$$

が成り立つので,

$$1/n > \sum_{|\alpha| \leq n} \sup |\partial^\alpha c_n\varphi_n|$$

である. 従って, $C_c^\infty(K)$ の位相で $c_n\varphi_n \to 0$ であるが, $Tc_n\varphi_n \to 0$ ではないので, 矛盾する. □

注意 1.3. 逆は明らかに成り立つので, これを同値な定義として採用してもよい.