

フーリエ変換の可積分性とソボレフ空間

1

命題 1.1. k を十分大きい (具体的には $k > n/2$) とする. このとき, $u \in W^k(\mathbb{R}^n)$ ならば, $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

証明. コーシーシュワルツの不等式より

$$\left(\int |\hat{u}(\xi)| \right)^2 \leq \int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^k d\xi \int (1 + |\xi|^2)^{-k} d\xi$$

が成り立つ. k が十分大きいと

$$\int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^k d\xi \leq \text{Const } \|u\|^2, \quad \int (1 + |\xi|^2)^{-k} d\xi < \infty$$

が成り立つので, 主張が従う. □