臨界値を含まない水位上昇

1

設定 1.1. M を多様体, $f : M \to \mathbb{R}$ とする．区間 $I \in \mathbb{R}$ に対して

$$M_I \coloneqq \{p \in M \mid f(p) \in I\}$$

という記号を導入する．

定義 1.2. (上向きベクトル場). M を閉多様体, $f : M \to \mathbb{R}$ をモース関数とする．X を M の滑らかなベクトル場とする．X は
(1) $p \in M$ が f の臨界点ではないならば, $X_p f > 0$
(2) $p \in M$ が f の指数 λ の臨界点であるならば, p のまわりの局所座標で, f, X をそれぞれ

$$\begin{aligned} f &= -x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2 \\ X &= -2x_1\partial_1 - \cdots - 2x_\lambda\partial_\lambda + 2x_{\lambda+1}\partial_{\lambda+1} + \cdots + 2x_m\partial_m \end{aligned}$$

と局所表示できるようなものがとれる．f に適合した上向きベクトル場 という．

命題 1.3. M を連結な閉多様体, $f : M \to \mathbb{R}$ をモース関数とする．$[a, b]$ の中に f の臨界値を含まなければ, $M_{[a,b]}$ は

$$[f = a] \times [0, 1]$$

と微分同相である．

証明. □

命題 1.4. M を連結な閉多様体, $f : M \to \mathbb{R}$ をモース関数とする．a, A をそれぞれ f の最小値と最大値とする．$a < b < c < A$ なる実数 b, c に対して, $M_{[b,c]}$ が f の臨界値を含まないならば, $M_{(-\infty,b]}$ と $M_{(-\infty,c]}$ は微分同相である．

証明. □