# 1

以下の, ラウチの比較定理の version を認めることにする.

**命題 1.1.** (ラウチ比較定理の ver). $M, \tilde{M}$ を完備リーマン多様体, $\gamma, \tilde{\gamma}$ をそれぞれ $\gamma_0 = p \in M, \tilde{\gamma}_0 = \tilde{p} \in \tilde{M}$ なる $M, \tilde{M}$ の正規測地線とする. $J, \tilde{J}$ をそれぞれ, $J, \tilde{J}$ を $J_0, \tilde{J}_0$ でそれぞれ $\gamma, \tilde{\gamma}$ に接し, $\|J_0\| = \left\|\tilde{J}_0\right\|, \|\nabla_t J_0\| = \left\|\nabla_t \tilde{J}_0\right\|, \langle\dot{\gamma}_0, \nabla_t J_0\rangle = \langle\dot{\tilde{\gamma}}_0, \nabla_t \tilde{J}_0\rangle$ をみたす $\gamma, \tilde{\gamma}$ に沿ったヤコビ場とする. $t_0(p), \tilde{t}_0(\tilde{p})$ をそれぞれ $p, \tilde{p}$ における, $\gamma, \tilde{\gamma}$ に沿った第一共役値とする. このとき, $(t_0(p) \leq \tilde{t}_0(\tilde{p})$ が成り立ち, )

$$\|J_t\| \leq \left\|\tilde{J}_t\right\| \quad (0 \leq t < t_0(p))$$

が成り立つ.

**注意 1.2.** 一般的な用語ではない全くの造語であるが, ここで, $p \in M$ に対して $\exp_p|_{B(o_p;r)}$ がはめ込みとなる $r$ の上限をはめ込み半径, 埋め込み (同相なはめ込み) となる $r$ の上限を埋め込み半径と呼ぶことにする.

**命題 1.3.** $M, \tilde{M}$ を完備リーマン多様体, $p, \tilde{p}$ をそれぞれ $M, \tilde{M}$ の一点とする. $p$ のはめ込み半径を $r_1$, $\tilde{p}$ の埋め込み半径を $r_2$ とし, $r \leq \max r_1, r_2$ とする.

**証明.** □

**定義 1.4.** $p, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ を $p = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$ をみたす 3 点とする.

$$l_p := \left\{tp_1 + (1-t)p_2 \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0,1)\right\}$$

を $p$ を中心とする開線分という. また, 単位ベクトル $\frac{p_2 - p_1}{\|p_2 - p_1\|} \in S^1$ をこの開線分の方向という.

**問題.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $C^\infty$ 級の写像とする. $p \in \mathbb{R}^2$ を任意の点とする. このとき, $p$ を中心とする開線分 $l_p$ で
(条件) 任意の $q \in l_p$ に対して $\frac{f(q)}{\|f(q)\|} \in \mathbb{R}^2$ が $l_p$ の方向と一致しない.
を満たすものは存在するか.

**解答.** □