実数値関数のメジアン

1

定義 1.1. (メジアン). $(X, \mathcal{B}, \mu)$ をボレル確率空間とし, $f : X \to \mathbb{R}$ とする.

$$\mathrm{Med} f \coloneqq \sup \left\{ t \mid \mu([f \leq t]) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

と定め, これを f のメジアンという.

命題 1.2. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ をボレル確率空間とし, $f : X \to \mathbb{R}$ とする.

$$\mu([f < \mathrm{Med} f]) \leq \frac{1}{2}, \quad \mu([f > \mathrm{Med} f]) \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned} \mu([f < \mathrm{Med} f]) &= \mu(\lim \bigcup_{n=1}^{N} [f \leq \mathrm{Med} f - \frac{1}{n}]) \\ &= \lim \mu([f \leq \mathrm{Med} f - \frac{1}{N}]) \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

例 1.3. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ として, $1_{[0,1/2]}$ を考えると, $\mathrm{Med} 1_{[0,1/2]} = 1$ なので

$$\begin{aligned} &\mu([f < \mathrm{Med} f]) = \frac{1}{2}, \quad \mu([f \leq \mathrm{Med} f]) = 1 \\ &\mu([f > \mathrm{Med} f]) = 0, \quad \mu([f \geq \mathrm{Med} f]) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ. つまるところ, $[f < \mathrm{Med} f]$ に等号をいれて $[f \leq \mathrm{Med} f]$ としてしまうと, $[f \leq \mathrm{Med} f] \leq 1/2$ という評価は得られない. また, $Ef = \frac{1}{2}$ なので, 中央値と期待値は一致しない.

命題 1.4. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ をボレル確率空間とし, $f : X \to \mathbb{R}$ とする.

$$\mu([f \leq \mathrm{Med} f]) \geq \frac{1}{2}, \quad \mu([f \geq \mathrm{Med} f]) \geq \frac{1}{2}$$

が成り立つ.

証明. $[f \leq \mathrm{Med} f]^c = [f > \mathrm{Med} f]$ なので前述の命題より明らか.

□