

# 測度が定める距離

## 1

**命題 1.1.**  $X$  を距離空間,  $\mu$  を  $X$  上の外測度,  $S : X \rightarrow X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  とする.

$$(1) S(x, y) = S(y, x) \quad (\forall x, y \in X)$$

$$(2) \mu(S(x, y)) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(3) S(x, y) \subset S(x, z) \cup S(z, y) \quad (x, y, z \in X)$$

を満たすとする. このとき,

$$d(x, y) := \mu(S(x, y))$$

は  $X$  上の距離を定める.

**証明.** 適当に確かめたらわかる. □

**定義 1.2.** 外測度と集合値関数の組  $(\mu, S)$  が前述の命題の (1), (2), (3) を満たすとき, 距離を誘導するという.

**例 1.3.** 実数直線  $\mathbb{R}$  において,

$$S(x, y) := [x, y]$$

と定める.  $\mu$  としてルベーグ測度をとる.

**例 1.4.** 平面の中の三脚  $T \subset \mathbb{R}^2$  を考える.

$$S(x, y) := x \text{ から } y \text{ への最短経路}$$

と定める.  $\mu$  としてルベーグ測度をとる.