グロタンディーク群

1

定義 1.1. 群の条件のうち, 逆元の存在を除いたものを半群という.

命題 1.2. H を可換半群とする. このとき, 可換群 $\tilde{H}$ と半群準同型 $j : H \to \tilde{H}$ で,
(普遍性) 任意の可換群 G と半群準同型 $f : H \to G$ に対して $f = \tilde{f} \circ j$ をみたす $\tilde{f}i : \tilde{H} \to$ がとれる. を満たすものが存在する.

証明. $H \times H$ に同値関係を $(n, m) \sim (n', m') \Leftrightarrow n + m' = m + n'$ で定める. 集合 $\tilde{H} \coloneqq H \times H/\sim$ に演算 $+$ を

$$[n, m] + [n', m'] = [n + n', m + m']$$

で定める. ($(n'', m'') \in [n', m']$ とすると, $n' + m'' = m' + n''$ であるので, $n + n'' + m + m' = m + m'' + n + n'$ となるので, $[n + n'', m + m''] = [n + n', m + m']$ となるので, 不良定義でない.) すると, $\tilde{H}$ は
Step: 可換である.
($\because$) 明らかである. ▲
Step: $[n, n]$ が単位元である.
($\because$) 適当に $[s, t] \in \tilde{H}$ をとる. $[n, n] + [s, t] = [n + s, n + t]$ であるが, $(n + s, n + t) \sim (s, t)$ であるので, $[n + s, n + t] = [s, t]$ ▲
Step: $[n, m]$ の逆元は $[m, n]$ である.
($\because$) $[n, m] + [m, n] = [n + m, n + m]$ となる. ▲
Step: 適当な $N \in H$ を用いて $j : H \to \tilde{H}; n \mapsto [n + N, N]$ と定めると, j は半群準同型である.
($\because$) $j(n + m) = [n + m + N, N] = [n + m + N + N, N + N] = j(n) + j(m)$ が成り立つ. ▲
Step: 任意の半群準同型 $f : H \to G$ に対して, $\tilde{f}([n, m]) \coloneqq f(n) - f(m)$ により $\tilde{f} : \tilde{H} \to G$ を定めると, $f = \tilde{f} \circ j$ が成り立つ.
($\because$) ($(n, m) \sim (n', m')$ であれば, $f(n') - f(m') = f(n' - m') = f(n - m) = f(n) - f(m)$ となるので不良定義ではない.) $\tilde{f}(j(n)) = \tilde{f}([n + N, N]) = f(n + N) - f(N) = f(n + N - N) = f(n)$ が成り立つ. ▲ 以上により示された. □

定義 1.3. 可換半群 H に対して以上のようにして定まる可換群 $\tilde{H}$ を H のグロタンディーク群という.

注意 1.4. $\tilde{H}$ に加法を定める際に, いかなる $N \in H$ をとっても, 結局は群として同型となる.