再生核ヒルベルト空間のデルタ関数による特徴づけ

1

定義 1.1. (再生核ヒルベルト空間). X を空でない集合とする．ヒルベルト空間 $\mathcal{H} \subset \{f \mid X$ 上の実数値関数$\}$ は, 任意の $x \in X$ に対して, δ_x が $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素となるとき, $\mathcal{X}$ 上の再生核ヒルベルト空間 (RKHS) という.

命題 1.2. $\mathcal{H}$ を集合 $\mathcal{X}$ 上の RKHS とする．$f_n \in \mathcal{H}$ がこの RKHS のノルムに関して $f \in \mathcal{H}$ に収束するならば, 各点収束する.

証明. 任意の $x \in X$ に対して,

$$|f_n x - f x| = |\delta_x f_n - \delta_x f| \leq \|\delta_x\| \, \|f_n - f\|_{\mathcal{H}}$$

が成り立つ. $\square$

定義 1.3. (再生核). $\mathcal{H} \subset \{f \mid X$ 上の実数値関数$\}$ をヒルベルト空間とする．$k : X \times X \to \mathbb{R}$ は,
(1) 任意の $x \in X$ に対して, $k(\cdot, x) \in \mathcal{H}$ である.
(2) 任意の $x \in X, f \in \mathcal{H}$ に対して, $\langle f, k(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}} = f(x)$ が成り立つ.
を満たす時に, $\mathcal{H}$ の再生核という．再生核が存在するとき, 再生核をもつという.

命題 1.4. (再生核の存在). $\mathcal{H}$ を集合 X 上のヒルベルト空間とする．このとき次は同値である.
(1)$\mathcal{H}$ が RKHS である.
(2)$\mathcal{H}$ が再生核をもつ.

証明. ($\Rightarrow$). δ_x は有界線型作用素なので, 表現定理により定まる $f_{\delta_x} \in \mathcal{H}$ を用いて

$$k(y, x) \coloneqq f_{\delta_x}(y) \quad (y \in X)$$

と定めると,

$$\langle g, k(\cdot, x) \rangle = \langle g, f_{\delta_x} \rangle = \delta_x g = g(x)$$

が成り立つ.
($\Leftarrow$). k を再生核とする．任意の $x \in X$ に対して,

$$\|\delta_x f\| = \langle f, k(\cdot, x) \rangle \leq \langle k(\cdot, x), k(\cdot, x) \rangle^{\frac{1}{2}} \|f\| = k(x, x)^{\frac{1}{2}} \|f\|$$

が成り立つので, δ_x は有界である. $\square$