ヘッセ構造

1

1.1 ヘッセ構造

定義 1.1. (平坦接続). 接続 ∇ は,

$$T(X,Y) \coloneqq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \quad R(X,Y)Z \coloneqq \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

がともに 0 のとき, 平坦接続という. 多様体と平坦接続の組 (M,∇) を平坦多様体という.

注意 1.2. 極めて当たり前だが, 平坦接続はレビチビタ接続と一致するとは限らない. レビチビタ接続は, 捩れがなく, 計量と整合的なものである.

定義 1.3. (アファイン座標系). 平坦接続 ∇ に対して,

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$$

を満たす局所座標系 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ を ∇ のアファイン座標系という.

定義 1.4. 多様体 M 上の平坦接続 ∇ と擬リーマン計量 g の組 (∇,g) は D の任意のアファイン座標 $\{x_1,\ldots,x_n\}$ に対して ある関数 f で

$$g_{ij} = \partial_i \partial_j F$$

を満たすものが存在する (すなわち, $g = Ddf$ である) とき, ヘッセ構造であるという. またこのとき, g をヘッセ計量, F を g の ∇ に関するポテンシャル, (M,∇,g) をヘッセ多様体という.

注意 1.5. 以降, g は単にリーマン計量とするが, 諸々の結果は擬リーマン計量でも成立する.

定義 1.6. (コシュール型計量). ヘッセ計量 g は, 閉 1 次微分形式 ω で

$$g = D\omega$$

を満たすものが存在する時に, コシュール型であるという.

命題 1.7. (M,∇^f) を平坦多様体, ∇^L をレビチビタ接続とする.

$$\gamma_X Y \coloneqq \nabla^L_X Y - \nabla^f_X Y$$

によりテンソル γ を定める. $\gamma_{\partial_j} \partial_k = \gamma^i_{jk} \partial_i$ により γ^i_{jk} を定める. このとき,

$$\gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$$

が成り立つ.

証明.

$$\gamma_{\partial_j}\partial_k = \nabla^L_{\partial_j}\partial_k - \nabla^f_{\partial_j}\partial_k$$

なのだが, $\nabla^f_{\partial_j}\partial_k = 0$ である. □

命題 1.8.

$$\gamma_{ijk}(:= \gamma^l_{ij}g_{lk}) = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk})$$

が成り立つ.

証明. クリストッフェル記号に対して

$$\Gamma_{ijk}(:= \Gamma^l_{ij}g_{lk}) = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk})$$

が成り立つことから従う. □

命題 1.9. g がヘッセ計量であることと,

$$\partial_j g_{ij} = \partial_i g_{kj}$$

が成り立つことは必要十分である.

証明. $\Rightarrow$. ポテンシャル F を用いて $g_{ij} = \partial_{ij}F$ と表されることから従う. $\Leftarrow$. $h_j := g_{ij}dx^i$ とおくと, $dh_j = dg_{ij} \wedge dx^i = \sum_{k<i}(\partial_k g_{ij} - \partial_i g_{kj})dx^k \wedge dx^i = 0$ となり閉形式であるので, ポアンカレの補題から局所的に適当な関数 φ_j を用いて $h_j = d\varphi_j$ と表される. $h := \varphi_j dx^j$ も同様に計算すると $dh = 0$ となるので, 再びポアンカレの補題より, 適当な関数 φ を用いて局所的に $h = d\varphi$ と表される. すると, $\partial_i\partial_j\varphi = \partial_i\varphi_j = g_{ij}$ が成り立つ. □

命題 1.10. g がヘッセ計量であるならば,

$$\gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{ir}\partial_k g_{rj}, \quad \gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}$$

証明.

$$\partial_j g_{ij} = \partial_i g_{kj}$$

が成り立つから. □

1.2 双対ヘッセ構造 (工事中)

設定 1.11. $\mathbb{R}^*_n$ を $\mathbb{R}^n$ の双対ベクトル空間とする. $\mathbb{R}^n$ の標準アファイン座標系 $\{x_1, \ldots, x_n\}$(0 を原点として $e_1, \ldots, e_n$ を大域フレームとするアファイン座標) に関する $\mathbb{R}^*_n$ の双対アファイン座標系 (0 を原点とし, $e_1 \ldots, e_n$ の双対基底を大域フレームとする座標系) を $\{x^*_1, \ldots, x^*_n\}$ とする. $\mathbb{R}^*_n$ の標準平坦接続を ∇^{*f} で表すことにする.

定義 1.12. (勾配写像). 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上にヘッセ構造 $(\nabla^f.g)$ が与えられている時, Ω から $(\mathbb{R}^*_n, \nabla^{*f})$ への写像 ι を

$$x^*i \circ \iota = -\partial_i\varphi$$

によって (つまり, 局所表示の i 成分が $-\partial_i\varphi$ であるように) さだめる. これを, (Ω, ∇^f, g) から $(\mathbb{R}^*_n, \nabla^{*f})$ への勾配写像という.