

ソボレフ空間におけるノルムの同値性

1

命題 1.1. m 階ソボレフ空間において

$$\|f\| := \int (1 + \|\xi\|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad \|f\|' := \int \sum_{|\alpha| \leq m} (\xi^\alpha)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

は同値なノルムである.

証明.

$$\begin{aligned} \xi^{(2\alpha_1, 2\alpha_2, \dots, 2\alpha_n)} &\leq |\xi_1|^{2\alpha_1} |\xi_2|^{2\alpha_2} \dots |\xi_n|^{2\alpha_n} \\ &\leq \|\xi\|^{2\alpha_1} \|\xi\|^{2\alpha_2} \dots \|\xi\|^{2\alpha_n} \\ &= \|\xi\|^{2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \leq \|\xi\|^{2m} \leq 1 + \|\xi\|^{2m} \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} (1 + \|\xi\|^2)^m &= (1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^m \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \text{Const}(\alpha) \xi^{2\alpha} \end{aligned}$$

を用いるとよい.

□