一様線型非凸性と snowflake

1

定義 1.1. (一様線型非凸). $\eta > 0$ とし, $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. $A \subset V$ は 任意の $x, y \in A$ に対して, $c_y^x \in \mathrm{Conv}(\{x, y\})$ で

$$B(c_y^x, \eta \|y - x\|) \cap A = \varnothing$$

を満たすものが存在する時, η - 一様線型非凸 (ULNC) であるという.

命題 1.2. (X, d) を p-snowflake とし, $(V, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. このとき, 任意の L-双リプシッツ写像 $f : X \to V$ に対して, $f(X)$ は V において ULNC である.

証明. (X, d) は p-snowflake であるので $0 < c < 1$ を, 任意の有限個の点 $x_0, \ldots, x_n \in X$ に対して

$$c(x_0 x_n)^p \leq \sum (x_i x_i + 1)^p$$

を満たすようにとれる. N を十分大きくとり,

$$N \left(\frac{2L^2}{N} \right)^p < c$$

が成り立つようにしておく. 任意に 2 点 $x_0, x_N \in X$ をとる.

$$\begin{aligned}
&z_0 \coloneqq f x_0, \quad z_N \coloneqq f x_N, \\
&z_1 \coloneqq z_0 + \frac{1}{N}(z_N - z_0), \\
&z_2 \coloneqq z_0 + \frac{2}{N}(z_N - z_0), \\
&\vdots \\
&z_{N-1} \coloneqq z_0 + \frac{N-1}{N}(z_N - z_0).
\end{aligned}$$

と定める. 任意の $i = 1, \ldots, N-1$ に対して, $B(z_i; \frac{1}{2N} \|z_N - z_0\|) \cap f(X) \neq \varnothing$ と仮定する (背理法). $i = 1, \ldots, N-1$ に対して $x_i \in B(z_i; \frac{1}{2N} \|z_N - z_0\|) \cap f(X)$ がとれる.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{L} x_{i+1} x_i \leq \|f x_{i+1} - f x_i\| \leq \|f x_{i+1} - z_{i+1}\| + \|z_{i+1} - z_i\| + \|z_i - f x_i\| \\
&< \frac{1}{2N} \|z_N - z_0\| + \frac{1}{N} \|z_N - z_0\| + \frac{1}{2N} \|z_N - z_0\| \\
&< \frac{2}{N} \|z_N - z_0\| = \frac{2}{N} \|f x_N - f x_0\| \leq \frac{2}{N} L x_N x_0
\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$(x_{i+1}x_i)^p < \left(\frac{2L^2}{N}\right)^p (x_N x_0)^p$$

が成り立つ．すると,

$$c(x_N x_0)^p \leq \sum (x_i x_{i+1})^p < N \frac{2L^2}{N}^p (x_n x_0)^p < c(x_N x_0)^p$$

となり矛盾する．つまり, 適当な $i \in \{1, \dots, N-1\}$ で $B(z_i; \frac{1}{2N}\|z_N - z_0\|) \cap f(X) = \varnothing$ となるものが存在するので, $f(X)$ は V において $\frac{1}{2N}$-ULNC である．

$\square$