距離空間の sup ノルムを備えた数列空間への等長埋め込み

1

定義 1.1. S を集合とする.

$$l_\infty(S) \coloneqq \left\{(r_\lambda)_{\lambda\in S} \in \mathbb{R}^{\#S} \mid \sup |r_\lambda| < \infty\right\}$$

と定める. sup ノルムを備えておく.

命題 1.2. 距離空間 (X, d) は, 数列空間 $l_\infty^{\#X}$ と等長同型である.

証明. $p \in X$ を適当にとっておく.

$$j : X \to l_\infty(X); x \mapsto (d(x,z) - d(p,z))_{z\in X}$$

と定めると,

$$d_{l_\infty(X)}(jx, jy) = \sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z)|$$

である.

step:

$$\sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y).$$

$(\because)$ 任意の $z \in X$ に対して, $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ が成り立つ. ▲

step:

$$\sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z)| \geq d(x,y).$$

$(\because)$ $z \in X$ として $z = y$ を選べばよい. ▲

従って, $\sup_{z\in X} |d(x,z) - d(y,z)| = d(x,y)$ であるので,

$$d_{l_\infty(X)}(jx, jy) = d(x,y)$$

が成り立つ. □

命題 1.3. (X, d) が可分な距離空間であるならば, (X, d) は数列空間 $l_\infty(\mathbb{N})$ へ等長に埋め込める.

証明. 可算稠密部分集合 $A \subset X$ をとる. $p \in A$ を適当にとっておく.

$$j : X \to l_\infty(\mathbb{N}); x \mapsto (d(x,z) - d(p,z))_{z\in A}$$

と定めると,

$$d_{l_\infty^{\# X}}(jx, jy) = \sup_{z \in X} |d(x, z) - d(y, z)|$$

である.

<u>step:</u>

$$\sup_{z \in A} |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y).$$

$(\because)$ 任意の $z \in A$ に対して, $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ が成り立つ. ▲

$y \in X$ に対して $y_n \in A, d(y_n, y) \leq \frac{1}{n}$ をとると,

<u>step:</u>

$$\sup_{z \in X} |d(x, z) - d(y, z)| \geq d(x, y_n) - \frac{1}{n}.$$

$(\because)$ $z \in A$ として $z = y_n$ を選べばよい. ▲

従って, $d(x, y_n) - \frac{1}{n} \sup_{z \in X} |d(x, z) - d(y, z)| = d(x, y)$ であるので, n に関して極限をとると,

$$d_{l_\infty(X)}(jx, jy) = d(x, y)$$

が成り立つ.

□