次元の異なるベクトル空間のあいだの線型写像のヤコビアン

1

注意 1.1. 内積空間として有限次元のものを考えることにする.

命題 1.2. V を内積空間, $\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_n\}$ をそれぞれ V の基底とする. 正則行列 A を

$$v = Aw$$

を満たす行列とすると,

$$\det(v_i, v_j) = (\det A)^2 \det(w_i, w_j)$$

が成り立つ.

証明.

$$\det(v_i, v_j) = \det(vv^t) = \det(Aww^tA^t) = (\det A)^2 \det(ww^t) = (\det A)^2 \det(w_i, w_j).$$

□

命題 1.3. V を内積空間, 任意の $p \in \mathbb{N}$ 個の元 $x_1, \dots, x_p$ に対して

$$\det(x_i, x_j) \leq \prod \|x_i\|$$

が成り立つ.

証明. v_i, w_i を次が成り立つように定めていく.

$$\begin{aligned}
&x_1 = v_1 + w_1 \quad (v_1 = 0, w_1 = x_1) \\
&x_2 = v_2 + w_2 \quad (v_2 \in \operatorname{span}(x_1), w_2 \in \operatorname{span}(x_1)^{\perp}) \\
&x_3 = v_3 + w_3 \quad (v_3 \in \operatorname{span}(x_1, x_2), w_3 \in \operatorname{span}(x_1, x_2)^{\perp}0) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

すると, 落ち着いて計算すると $i \neq j \Rightarrow (w_i, w_j) = 0$ となるので,

$$\det(x_i, x_j) = \det(w_i, w_j) \leq \prod \|w_i\|^2 \leq \prod \|x_i\|^2$$

が成り立つ. □

定義 1.4. V, W をそれぞれ次元が $m \geq n$ の内積空間とする. $F : V \to W$ を線型写像とする.

$$JF \coloneqq \sup\left\{ \sqrt{\det((Fu_i, Fu_j))_{i,j=1,\dots,n}} \mid u_1, \dots, u_n \text{は } V \text{ の正規直交系} \right\}$$

と定め, これを F のヤコビアンという.

注意 1.5. V を内積空間とするとき, 任意の 1 次独立なベクトルの組 $v_1, \dots, v_n$ に対して $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$ の正規直交基底を $u_1, \dots, u_n$ とすると, $v = Au$ なる正則行列 A がとれる. 故に

$$\det(v_i, v_j) = (\det A)^2 \det(u_i, u_j) = (\det A)^2 \geq 0$$

であるので, 線形写像のヤコビアンの定義でルートをとるところは well-defined である.

命題 1.6. F が全射でないとき, $JF = 0$ である.

証明. F が全射でない時, $\dim \mathrm{Im} F < n$ である. 適当に V の正規直交系 $u_1, \dots, u_n$ をとると, ある添字 $i \neq j$ で, $a \in \mathbb{R}$ で $Fu_i = aFu_j$ となるものがとれるようなものが存在する.

$$(Fu_k, Fu_i) = (Fu_k, aFu_j) \quad (k = 1, \dots, n)$$

が成り立つ. □

命題 1.7. (F のヤコビアンの explicit な表示). F が全射であるとき, $(\ker F)^{\perp}$ の任意の基底 $v_1, \dots, v_n \in (\ker F)^{\perp}$ に対して,

$$JF = \frac{\sqrt{\det(Fv_i, Fv_j)}}{\sqrt{\det(v_i, v_j)}}$$

が成り立つ.

証明. $(\ker F)^{\perp}$ の任意の正規直交基底 $u_1, \dots, u_n \in (\ker F)^{\perp}$ と任意の基底 $v_1, \dots, v_n \in (\ker F)^{\perp}$, V の任意の正規直交系 $w_1, \dots, w_n \in V$ を適当にとっておく.

$$w_i = w_i^P + w_i^K \quad (w_i^P \in (\ker F)^{\perp}, w_i^K \in \ker F)$$

とおくと, $w^P = Au$ なる正則行列 A がとれる.

$$\frac{\sqrt{\det(Fw_i^P, Fw_j^P)}}{\sqrt{\det(w_i^P, w_j^P)}} = \frac{\sqrt{\det A \det(Fu_i, Fu_j)}}{\sqrt{\det A \det(u_i, u_j)}} = \sqrt{\det(Fu_i, Fu_j)}$$

が成り立っていることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\det(Fw_i, Fw_j) &= \det(Fw_i^P, Fw_j^P) \leq \det(Fu_i, Fu_j) \det(w_i^P, w_j^P) \\
&\leq \det(Fu_i, Fu_j) \prod \|w_i^P\|^2 \\
&\leq \det(Fu_i, Fu_j) \prod \|w_i\|^2 \\
&= \det(Fu_i, Fu_j) \cdot 1 \\
&= \frac{\det(Fv_i, Fv_j)}{\det(v_i, v_j)}
\end{aligned}$$

従って,

$$JF \leq \frac{\sqrt{\det(Fv_i, Fv_j)}}{\sqrt{\det(v_i, v_j)}} \leq JF.$$

□