分裂する短完全系列の双対も分裂する短完全系列

1

A, B, C で適当な環 R 上の加群を, $A^\sharp, B^\sharp, C^\sharp$ でそれぞれの双対加群を表す.

命題 1.1.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

を加群の完全系列とする．このとき,

$$0 \longrightarrow C^\sharp \xrightarrow{g^\sharp} B^\sharp \xrightarrow{f^\sharp} A^\sharp$$

も加群の完全系列である.

証明. Step: $g^\sharp$ は単射である.
($\because$) $g^\sharp c' = 0$ である $c' \in C^\sharp$ をとる．任意に $c \in C$ をとり, $gb = c$ となる $b \in B$ をとると, $c'(c) = c'(gb) = (g^\sharp c')(b) = 0$ なので, $c' = 0$ である ▲
Step: $\mathrm{Im} g^\sharp \subset \mathrm{Ker} f^\sharp$
($\because$) $f^\sharp \circ g^\sharp = (g \circ f)^\sharp = 0$ ▲
Step: $\mathrm{Ker} f^\sharp \subset \mathrm{Im} g^\sharp$
($\because$) $b' \in \mathrm{Ker} f^\sharp$ をとる, $c' \in C^\sharp$ を $c \in C$ に対して, $gb = c$ をみたす $b \in B$ を好きにとって, $c'(c) := b'(b)$ とすることで定める．(もし, $gb_1 = gb_2 = c$ となる $b_1, b_2 \in B$ で $b'(b_1) \neq b'(b_2)$ なるものがあると不良定義となる．が, $0 = g(b_1 - b_2)$ より $b_1 - b_2 \in \mathrm{Ker} g$ であるので, $b_1 - b_2 \in \mathrm{Im} f$ なので, $a \in A$ で $f(a) = b_1 - b_2$ となるものをとると, $b'(b_1 - b_2) = b'(f(a)) = (f^\sharp b')(a) = 0$ となるので, $b'(b_1) = b'(b_2)$ となりきちんと定義されている．) すると, $c'(c) = c'(gb) = (g^\sharp c')(b)$ 故に, $g^\sharp c' = b'$ となる. ▲

□

命題 1.2.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

が分裂する短完全系列であるならば,

$$0 \longrightarrow C^\sharp \xrightarrow{g^\sharp} B^\sharp \xrightarrow{f^\sharp} A^\sharp \longrightarrow 0$$

も分裂する短完全系列である.

証明. $h \circ f = \mathrm{id}_A$ を満たす h が存在するので, $f^\sharp \circ h^\sharp = \mathrm{id}_A$ より, $f^\sharp$ が全射である．前述の命題と合わせると, 主張が従う. □