等長写像が接続を保存することの証明

1

命題 1.1. $f : M \to N$ を微分同相とする.

$$df[X,Y] = [dfX, dfY] \quad (X,Y \in \Gamma(TM))$$

が成り立つ.

証明.

$$((dfY)F) \circ f = ((dfY)_{f(\cdot)})F = (df_{(\cdot)}Y)F = Y_{(\cdot)}(F \circ f)$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned}(df[X,Y])F &= [X,Y](F \circ f) = X(Y(F \circ f)) - Y(X(F \circ f))\\ &= X(((dfY)F) \circ f) - Y(((dfX)F) \circ f) = (dfX)((dfY)F) - (dfY)((dfX)F) = [dfX, dfY]\end{aligned}$$

□

命題 1.2. $f : (M,g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を等長写像, $\nabla, \tilde{\nabla}$ をそれぞれ $(M,g), (\tilde{M},\tilde{g})$ のレビチビタ接続とする. このとき,

$$\begin{aligned}&(1) df(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{dfX} dfY \quad (X,Y \in \Gamma(TM))\\ &(2) df(R(X,Y)Z) = R(dfX, dfY)dfZ \quad (X,Y,Z \in \Gamma(TM))\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明.

$$\check{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} := df(\nabla_X Y) \quad (\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(\tilde{M}))$$

により $\tilde{M}$ に新しい接続を定める (ただし, $X, Y := df^{-1}(X), df^{-1}(Y)$). $p \in M$ に対して $\dot{c}_0 = X_p, c_0 = p$ なる曲線 c をとる.

$$\begin{aligned}\check{\nabla}_{\tilde{X}}(\tilde{g}(\tilde{Y},\tilde{Z})) &= \tilde{X}(\tilde{g}(\tilde{Y},\tilde{Z})) = (dfX)\tilde{g}(dfY, dfZ)\\ &= \partial_t|_0(\tilde{g}(dfY, dfZ) \circ (f(c(t)))) = \partial_t|_0(f^*\tilde{g}(Y,Z)_{c(t)}) = \partial_t|_0(g(Y,Z))\\ &= X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = f^*\tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + f^*\tilde{g}(Y, \nabla_X Z)\\ &= \tilde{g}(\check{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z}) + \tilde{g}(\tilde{Y}, \check{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z})\end{aligned}$$

であることと,

$$\check{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \check{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X} - [\tilde{X},\tilde{Y}] = df(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - df[X,Y] = df[X,Y] - df[X,Y] = 0$$

であることから, $\check{\nabla}$ は $(\tilde{M},\tilde{g})$ のレビチビタ接続である. 従って, レビチビタ接続の一意性から, $\check{\nabla} = \tilde{\nabla}$ が成り立つ. すなわち,

$$\tilde{\nabla}_{dfX} dfY = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \check{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = df(\nabla_X Y)$$

である. (2) は $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ であるので, (1) と合わせると容易に従う. □

命題 1.3. $f : (M,g) \to (\tilde{M},\tilde{g})$ を等長写像とする. このとき, $v \in T_pM, df_pv \in T_{f(p)}\tilde{M}$ を始方向とする測地線 $\gamma, \tilde{\gamma}$ に対して

$$\begin{aligned}&(1)\tilde{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)\\ &(2) df \circ P_{\gamma}^{s,t} = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} \circ df\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. (1)$\tilde{\nabla}_{df\dot{\gamma}_t}(df\dot{\gamma}_t) = df(\nabla_{\dot{\gamma}_t}\dot{\gamma}_t) = 0$ なので, $f \circ \gamma(t)$ は測地線である. また, 始点が $f \circ \gamma(0) = f(p)$ であり, 始方向が $df(\dot{\gamma}_0) = df_p(v)$ であるので, $f \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ が成り立つ. (2)$w \in T_{\gamma_s}M$ に対して, $\tilde{W}_t := df(P_{\gamma}^{s,t}(w))$ は $\tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}_t} df(P_{\gamma}^{s,t}(w)) = df(\nabla_{\dot{\gamma}_t}(P_{\gamma}^{s,t}w)) = 0$ より, $\tilde{W}_t$ は $\tilde{\gamma}_t$ に沿って平行なベクトル場であるので,

$$df(P_{\gamma}^{s,t}(w)) = \tilde{W}_t = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t}\tilde{W}_s = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} df(P_{\gamma}^{s,s}(w)) = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} dfw$$

□