数学総合講義 H レポート

1　問 1

命題 1.1. $f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ であるならば,

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x)$$

が成り立つ.

証明.

$$f_t(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-t\xi^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y}f(y)dy\right)d\xi$$

と定める. $e^{ix\xi}e^{-t\xi^2}e^{-i\xi y}f(y)$ が y に関して可積分で, $e^{-t\xi^2}\|f\|_{L^1}$ が ξ に関して可積分であるので, フビニの定理より,

$$\begin{aligned}
f_t(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi}e^{-t\xi^2}d\xi\right)f(y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}f(y)dy
\end{aligned}$$

が成り立つ. $\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$ は $\mathbb{R}$ における熱核であるので,

$$\lim_{t\to 0}\|f_t - f\|_{L^1} = 0$$

が成り立つ. 従って, 概収束部分列がとれることと, $\left|e^{ix\xi}e^{-t\xi^2}\mathcal{F}f(\xi)\right| \leq |\mathcal{F}f(\xi)| \in L^1$ より優収束定理が成り立つことから,

$$f(x) = \lim_{t\to 0}f_t(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y}f(y)dy\right)d\xi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x)$$

が成り立つ. □

命題 1.2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x)$$

が成り立つ.

証明. $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ であることと, 急減少関数のフーリエ変換が急減少関数であることから, 主張が従う. □

2 問 2

命題 2.1. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とする. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ が完備であるならば, X の稠密部分空間 A で定義される有界線型作用素は, 作用素ノルムを保ったまま, X 上に一意に拡張できる.

証明. $x \in X$ に対して, $\tilde{T}x$ を, $a_n \in A$ で $a_n \to x$ である点列を適当にひとつ選ぶと, Ta_n は完備ノルム空間 Y のコーシー列であるので, 極限が存在するので,

$$\tilde{T}(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} T(a_n)$$

により定める. well-defined であることを確かめるために, $b_n \in A$ で $b_n \to x$ である点列をとる. T は $a, b \in A$ に対して

$$\|Ta - Tb\| \leq \|T\| \, \|a - b\|$$

が成り立つため, 一様連続である. 従って, $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で

$$\|a - b\| \leq \delta \Rightarrow \|Ta - Tb\| < \varepsilon$$

を満たすものが存在する. 従って, $N_1 \in \mathbb{N}$ で, $n \geq N_1$ ならば

$$\|Ta_n - Tb_n\| < \varepsilon$$

となるものがとれる. また, $N_2 \in \mathbb{N}$ で, $n \geq N_2$ ならば,

$$\left\|Tb_n - \tilde{T}x\right\| < \varepsilon$$

を満たすものが存在する. 従って, $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ であるならば,

$$\left\|Tb_n - \tilde{T}x\right\| \leq \|Tb_n - Ta_n\| + \left\|Ta_n - \tilde{T}x\right\| < 2\varepsilon$$

が成り立つ. 従って, $\tilde{T} : X \to Y$ は well-defined である. また, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, a, b \in X$ に対して,

$$\tilde{T}(c_1 a + c_2 b) - c_1\tilde{T}(a) - c_2\tilde{T}(b) = \lim\Bigl(T(c_1 a_n + c_2 b_n) - c_1\tilde{T}(a_n) - c_2\tilde{T}(b_n)\Bigr) = \lim 0 = 0$$

より線型である. また,

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \sup\left\{\frac{\left\|\tilde{T}x\right\|}{\|x\|} \mid x \in X, x \neq 0\right\} \geq \sup\left\{\frac{\|Ta\|}{\|a\|} \mid a \in A, x \neq 0\right\} = \|T\|$$

と

$$\left\|\tilde{T}x\right\| = \|\lim Ta_n\| = \lim \|Ta_n\| \leq \lim \|T\| \, \|a_n\| = \|T\| \, \|x\|$$

より, $\left\|\tilde{T}\right\| \leq \|T\|$ であることから,

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$$

が成り立つ. また, T の線型拡張 $\hat{T} : X \to Y$ で, $\left\|\hat{T}\right\| = \left\|\tilde{T}\right\|$ であるが, $\hat{T} \neq \tilde{T}$ であるものが存在するとする. $\tilde{T}x \neq \hat{T}x$ なる $x \in X$ をとると, $a_n \in A$ で $a_n \to x$ であるものがとれて,

$$0 \neq \hat{T}x - \tilde{T}x = \lim Ta_n - \lim Ta_n = 0$$

より矛盾するので, このような拡張は一意である. □

3　問 3

命題 3.1. (縮小写像の原理). (X,d) を完備距離空間, $f : X \to X$ を $0 < \lambda < 1$ で

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) \quad ({}^\forall x, y \in X)$$

を満たすものが存在する写像とする．このとき, $p \in X$ で

$$fp = p$$

を満たすものがただ一つ存在する．

証明. 適当に $x_0 \in X$ をとる．

$$x_1 \coloneqq f(x_0),\ x_2 \coloneqq f(x_1), \ldots, x_n \coloneqq f(x_{n-1}), \ldots$$

と定めると, $n \leq m$ に対して,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots \lambda^{m-1}) d(x_0, fx_0) \end{aligned}$$

が成り立つ．

$$d(x_0, fx_0) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i < \infty$$

であるので, x_n はコーシー列である．X は完備であるので, $x_n (= f(x_{n-1}))$ は適当な点 x に収束する．

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y) \quad ({}^\forall x, y \in X)$$

より, f は連続であるので,

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = x$$

が成り立つ． □