接続の局所表示と第二構造方程式

1

注意 1.1. M で滑らかな多様体を表す. $\pi : E \to M$ で階数 r の滑らかなベクトル束を表す. $U \subset M$ を開集合, $e_1, \dots, e_r$ を E の U における局所フレームとする.

定義 1.2. (接続形式). U 上の 1 形式の族 $\left\{\omega_i^j\right\}$ で

$$\nabla_X e_i = \omega_i^j(X) e_j \quad ({}^\forall X \in \mathfrak{X}(U))$$

を満たすものを接続形式という.

定義 1.3. (曲率形式). U 上の 2 形式の族 $\left\{\Omega_i^j\right\}$ で

$$R(X,Y)e_i = \Omega_i^j(X,Y)e_j \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(U))$$

を満たすものを曲率形式という.

命題 1.4. (第二構造方程式).

$$\Omega_i^j(X,Y) = d\omega_i^j(X,Y) - \omega_i^k \wedge \omega_k^j(X,Y) \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(U))$$

証明.

$$\begin{aligned}
\Omega_i^j(X,Y)e_j &= R(X,Y)e_i = \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_{[X,Y]} e_i \\
&= \nabla_X(\omega_i^j(Y)e_j) - \nabla_Y(\omega_i^j(X)e_j) \\
&= (X(\omega_i^j(Y))e_j + \omega_i^j(Y)\omega_j^k(X)e_k) - (Y(\omega_i^j(X))e_j + \omega_i^j(X)\omega_j^k(Y)e_k) - \omega_i^j([X,Y])e_j \\
&= (X(\omega_i^j(Y))e_j + \omega_i^k(Y)\omega_k^j(X)e_j) - (Y(\omega_i^j(X))e_j + \omega_i^k(X)\omega_k^j(Y)e_j) - \omega_i^j([X,Y])e_j \\
&= (X(\omega_i^j(Y)) - Y(\omega_i^j(X)) - \omega_i^j([X,Y]))e_j + (\omega_i^k(Y)\omega_k^j(X) - \omega_i^k(X)\omega_k^j(Y))e_j \\
&= d\omega_i^j(X,Y)e_j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j(X,Y)e_j \\
&= (d\omega_i^j(X,Y) - \omega_i^k \wedge \omega_k^j(X,Y))e_j
\end{aligned}$$

□