

ニュートン空間

1

定義 1.1. (X, d) を距離空間, f を X 上の局所リプシッツ関数とする. 任意の X の速度 1 の絶対連続曲線 $\gamma : [0, L_\gamma] \rightarrow X$ に対して

$$|f(\gamma(L_\gamma)) - f(\gamma(0))| = \int_0^{L_\gamma} g(\gamma(t)) dt$$

を満たす非負ボレル関数 $g : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を, f の上勾配という. f の上勾配全体を $UG(f)$ で表すことにする.

定義 1.2. (ニュートン空間). (X, d) を距離空間とする.

$$N^{1,p} := \left\{ u \in L^p(X) \mid \left(\int_X |u|^p d\mu + \inf_{g \in UG(u)} \int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$
$$\|u\| := \left(\int_X |u|^p d\mu + \inf_{g \in UG(u)} \int_X g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定め, $(N^{1,p}, \|\cdot\|)$ をニュートン空間という.

注意 1.3. $\|\cdot\|$ はセミノルムであるので, ノルムにしようと思ったら適当に空間を割っておく必要がある.