正則性に関連する不等式 1

1

k を相応に大きな非負整数とする．f を $H^k(\mathbb{R}^n)$ の元とする．$f \in L^2$ であるので，L^2 におけるフーリエ変換が可能で，それを $\hat{f}$ で表すと，$\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ である．適当な定数 Const を用いると

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|)^k d\xi \leq \mathrm{Const}\,\|f\|_{H^k}^2$$

が成り立つ．k が相応に大きいときには，$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-k}d\xi < \infty$ であることに注意しつつ，適当に式変形すると

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(\xi)\right|d\xi\right)^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2(1+|\xi|)^k d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-k}d\xi\right)\\ &\leq \mathrm{Const}\,\|f\|_{H^k}^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-k}d\xi\right) < \infty\end{aligned}$$

であるので，$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(\xi)\right|d\xi < \infty$ であるので，$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ である．従って，L^1 におけるフーリエ変換の反転公式から，殆ど至る所

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

が成り立つ．

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{iy\xi}d\xi - \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)(e^{iy\xi}-e^{ix\xi})\right|d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n}2\left|\hat{f}(\xi)\right|d\xi < \infty$$

を眺めると，優収束定理を用いることで $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ が連続であることがわかる．また，

$$|f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right| \leq \mathrm{Const}\,\|f\|_{H^k}^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-k}d\xi\right)$$

より，

$$|f(x)| \leq \mathrm{Const}\,\|f\|_{H^k}^2$$

であるので，

$$\sup_{\mathbb{R}^n}|f| \leq \mathrm{Const}\,\|f\|_{H^k}^2$$

が成り立つ．さらに，$|\alpha| \leq m$ であれば，$\partial^\alpha f \in H^{k-m}$ であることに注意しながら変形すると，

$$\sup_{\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f| \leq \mathrm{Const}\,\|\partial^\alpha f\|_{H^{k-m}} \leq \mathrm{Const}\,\|f\|_{H^k}$$

であるので，

$$\|f\|_{C^m} \leq \mathrm{Const}\,\|f\|_{H^k}^2$$

が成り立つ．(k は具体的には少なくとも $k > \frac{n}{2}+m$ であればよい.)