

2 点距離空間の p マグニチュードについて

1

命題 1.1. 2 点距離空間 $(\{x, y\}, d)$ のマグニチュードは

$$\text{Mag}^p(\{x, y\}) := 1 + \tanh \frac{d^p(x, y)}{2}$$

で与えられる.

証明. 計算すればわかる. □

命題 1.2. $X = (\{x, y\}, d)$ を 2 点距離空間とする. $0 < p < q < \infty$ とすると,

$$(1) 0 < s < \frac{1}{D} \Rightarrow \text{Mag}^p(sX) > \text{Mag}^q(sX).$$

$$(2) s = \frac{1}{D} \Rightarrow \text{Mag}^p(sX) = \text{Mag}^q(sX).$$

$$(3) \frac{1}{D} < s < \infty \Rightarrow \text{Mag}^p(sX) < \text{Mag}^q(sX).$$

が成り立つ. ただし, $D := d(x, y)$ と定めてある.

証明.

$$\left(1 + \tanh \frac{D^q}{2}\right) - \left(1 + \tanh \frac{D^p}{2}\right) = \tanh \frac{D^q}{2} - \tanh \frac{D^p}{2}$$

である. \tanh が単調増大であるので,

$$\frac{D^p}{2} \leq \frac{D^q}{2}$$

となるのはいつかを考えれば良い. □

命題 1.3. $X = (\{x, y\}, d)$ を 2 点距離空間, $0 < p < \infty$ とする.

$$(1) \lim_{p \rightarrow 0} \text{Mag}^p(X) = 1.$$

$$(2) \lim_{p \rightarrow \infty} \text{Mag}^p(X) = 2.$$

が成り立つ.

証明. 明らかである. □