開球の中心になるかどうかについて

1

定義 1.1. (X, d) を距離空間とする. $x, y, z \in X$ は,

$$xy, yz, xz$$

のうち,

$$\max xy, yz, xy$$

と一致するものが 2 つ以上存在する時に, 長二等間隔三頂点であるという.

命題 1.2. (X, d) を距離空間, $x \in X$ とする. $y, z \in X$ で x, y, z が長二等間隔三頂点とならないものが存在する時,

$$m < R \leq M$$

とすると, $p \in B(x; R)$ で, $B(x; R) \neq B(p; R)$ となるものが存在する.
(ただし, xy, yz, xz のうち最大の値を M , 2 番目に大きい値を m とする.)

証明. (1)$xy \leq yz \leq xz$ のとき, $y \in B(x; R), z \notin B(x; R)$ だが, $z \in B(y; R)$ である.
(2)$xy \leq xz \leq yz$ のとき, $y, z \in B(x; R)$ だが, $z \notin B(y; R)$ である.
(3)$yz \leq xy \leq xz$ のとき, $y \in B(x; R), z \notin B(x; R)$ だが, $z \in B(y; R)$ である.
(4)$xz \leq xy \leq yz$ のとき, $y, z \in B(x; R)$ だが, $z \notin B(y; R)$ である.
(5)$yz \leq xz \leq xy$ のとき, $z \in B(x; R), y \notin B(x; R)$ だが, $y \in B(z; R)$ である.
(6)$xz \leq yz \leq xy$ のとき, $z \in B(x, R), y \notin B(x; R)$ だが, $y \in B(z; R)$ である.

□

注意 1.3. 長二等間隔三頂点 だと, $m = M$ となるので, 上のような R がとれない.