l_1 内在的体積

1

記号 1.1. $\mathbb{R}^n$ に l_1 距離を備えた距離空間を $l_1^n = (\mathbb{R}^n, d_{l_1})$ で表す.

定義 1.2. (座標部分空間). $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ を標準基底とする. 部分空間 $P \subset R^n$ は, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 個の異なる標準基底 $e_{k_1}, \ldots, e_{k_i}$ で, $P = \mathrm{Span}(e_{k_1}, \ldots, e_{k_i})$ を満たすものがとれるとき, (i 次元の) 座標部分空間という. $G'_{n,i}$ で R^n における i 次元座標部分空間全体を表す. ただし, 0 次元座標部分空間は, $0 \in \mathbb{R}^n$ として定める.

命題 1.3. R^n において, 異なる i 次元座標部分空間は, ${}_nC_i$ 個存在する. すなわち, $\#G'_{n,i} =_n C_i$ である.

証明. 省略. $\square$

記号 1.4. $P \in G'_{n,i}$ に対して,

$$\pi_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

で, P への正射影を現す.

定義 1.5. (l_1 内在的体積). $A \subset R^n$ に対して,

$$V'_{n,i} \coloneqq \sum_{P \in G'_{n,i}} \mathrm{vol}_i(\pi_P A)$$

により, $V'_{n,i} : 2^X \to \mathbb{R}$ を定める.

例 1.6. $A \coloneqq [0,3] \times [0,5] \subset \mathbb{R}^2$ とする.

$$V'_{2,0}(A) = 1, \quad V'_{2,1} = 3 + 5 = 8, \quad V'_{2,2} = 15$$

例 1.7. $A \coloneqq B(0; r) \subset l_1^3$ とする.

$$V'_{3,0}(A) = 1, \quad V'_{3,1}(A) = r\omega_1 + r\omega_1 + r\omega_1 = 3r\omega_1 = 3r \cdot 2,$$

$$V'_{3,2}(A) = r^2\omega_2 + r^2\omega_2 + r^2\omega_2 = 3r^2\omega_2 = 3r^2 \cdot 2, \quad V'_{3,3} = r^3\omega_3 = r^3 \cdot \frac{2^3}{2!}$$

注意 1.8. l_1^n において, $B(0; r) \subset l_1^n$ の体積は

$$\mathrm{vol}_n(B_r) = \frac{2^n}{n!}$$

です.

命題 1.9. (i 次斉次性). $A(\subset \mathbb{R}^n) \in \mathrm{dom}(V'_{n,i})$ に対して, $sA \in \mathrm{dom}(V'_{n,i})$ であるならば,

$$V'_{n,i}(sA) = s^i V'_{n,i}(A)$$

が成り立つ.

証明. 省略. □

命題 1.10. (内在性). $\iota^n_{n+1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0)$ と定めると, 任意の $A \subset (\mathbb{R}^n) \in \mathrm{dom}(V'_{n,i})$ に対して, $\iota^n_{n+1} A \in \mathrm{dom}(V'_{n+1,i})$ であるならば,

$$V'_{n,i}(A) = V'_{n+1,i}(\iota^n_{n+1} A)$$

証明. 省略. □