ユークリッド空間と固有距離空間

1

定義 1.1. (X, d) を距離空間とする．任意の有界閉集合がコンパクトであるとき, 固有距離空間という．

命題 1.2. $\mathbb{R}^n$ をユークリッド空間, $\|\cdot\|$ をノルムとする．d を $\|\cdot\|$ が定める距離とする．$(\mathbb{R}^n, d)$ は完備である．

証明. ユークリッド空間におけるノルムが全て同値であることから従う．

□

命題 1.3. $\mathbb{R}^n$ をユークリッド空間, $\|\cdot\|$ をノルムとする．d を $\|\cdot\|$ が定める距離とする．距離空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ の部分集合 A が有界であることと, 全有界であることは必要十分である．

証明. ユークリッド空間の標準的なノルムを $\|\cdot\|_2$ で表すことにする．全有界ならば有界であることは明らかである．有界であるならば, 十分大きな半径の開球に含まれる．標準的なノルム $\|\cdot\|_2$ と同値なので, 標準的なノルムに関して適当な有限な半径の開球に含まれる．有限次元であることから, 標準的なノルムに関する半径有限の開球は任意の半径の有限個の開球で被覆することができる．もう一度ノルムの同値性を使うと, $\|\cdot\|_2$ の開球は適当にスケールした $\|\cdot\|$ の開球で含むことができる．まあ適当にこう言う感じで結局全部有界であることがいえる． □

例 1.4. $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ に通常の距離を備えた距離空間は, 固有距離空間ではない．なぜなら, $(0, 1)$ は相対位相を備えた距離空間 $((0, 1), d)$ において有界閉集合であるが, コンパクトではない．

命題 1.5. $\mathbb{R}^n$ をユークリッド空間, $\|\cdot\|$ をノルムとする．d を $\|\cdot\|$ が定める距離とする．距離空間 $(\mathbb{R}^n, d)$ の閉集合は固有距離空間である．

証明. $(\mathbb{R}^n, d)$ の有界集合は全有界である．$(\mathbb{R}^n, d)$ の閉集合は完備である．従って, 有界閉集合は完備かつ全有界であるのでコンパクトである．

□