ウェイトが満たす微分方程式

1

定義 1.1. $u \in \mathcal{S}'$ に対して,

$$(I-\Delta)^{s/2}u := F^{-1}(\langle\cdot\rangle^s F(u))$$

と定める.

命題 1.2. $A \subset X$ とし, w を A の標準ウェイトとする. 任意の $\varphi \in C_c^\infty(A^c)$ に対して,

$$((I-\Delta)^{(n+1)/2}Zw, \varphi)_{L^2} = 0$$

が成り立つ.

証明. $Zv = \varphi$ を満たす v が存在するので, これをとる. とりかたより, v は Z の A の広義 0 ウェイトであることに注意する.

$$\begin{aligned}
((I-\Delta)^{(n+1)/2}Zw, \varphi)_{L^2} &= ((I-\Delta)^{(n+1)/2}Zw, Zv)_{L^2} \\
&= (F^{-1}(\langle\cdot\rangle^{(n+1)}F(Zw)), Zv)_{L^2} \\
&= (\langle\cdot\rangle^{(n+1)}F(Zw), F(Zv))_{L^2} \\
&= (\langle\cdot\rangle^{(n+1)/2}F(Zw), \langle\cdot\rangle^{(n+1)/2}F(Zv))_{L^2} \\
&= (Zw, Zv)_{H_{(n+1)/2}} \\
&= (w, v)_{H_{-(n+1)/2}} \\
&= n!\omega_n(w, v)_Z \\
&= 0
\end{aligned}$$

最後の等号は, 標準ウェイトと広義 0 ウェイトとの Z 内積が 0 であるという事実を用いた.

□