1

(2). Y の開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとる.

$$X = f^{-1}(\bigcup_\lambda U_\lambda) = \bigcup_\lambda f^{-1}(U_\lambda)$$

が成り立つ, f は連続なので, 各 λ に対して $f^{-1}(U_\lambda)$ は開集合であるため, $\left\{f^{-1}(U_\lambda)\right\}$ は X の開被覆である. X はコンパクトであるので, 有限部分被覆 $\left\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_N)\right\}$ がとれる.

$$X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup \cdots f^{-1}(U_N)$$

より,

$$Y = f(X) = U_1 \cup U_2 \cup \cdots U_N$$

が成り立つ. 従って, 有限部分被覆がとれるので, Y はコンパクトである.
(3). 多分この命題は成り立たない. X として 2 点からなる部分集合 $\{p, q\} \subset \mathbb{R}^n$ をとると, $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}$ は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合なので, $\{p\}, \{q\}, \{p, q\}$ は閉集合である. 従って $\{p, q\}$ には離散位相が入るのでハウスドルフである.
(4). $\Rightarrow$. $A \cap B \neq \varnothing$ と仮定する (背理法). $c \in A \cap B$ ととると, $d(A, B) \leq d(c, c) = 0$ となるので矛盾する.
$\Leftarrow$. 任意の $a, a' \in A$ に対して,

$$d(B, a) = \inf\{d(b, a) \mid b \in A\} \leq \inf\{d(b, a) + d(a, a') \mid b \in A\}$$

が成り立つので,

$$|d(B, a) - d(B, a')| \leq d(a, a')$$

$d(B, \cdot)$ は A 上の連続関数である. A はコンパクト集合であるので, $d(B, \cdot)$ の最小値を実現する点 $a \in A$ がとれる.

$$d(B, a) = 0$$

であるので, $a \in \overline{B}$ である. B が閉集合であることから $\overline{B} = B$ であるので, $a \in B$ である. 従って $A \cap B \neq \varnothing$ が成り立つ. また, $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続関数なので, $A \coloneqq \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ は $(\mathbb{R}^2, d)$ の閉集合である. 閉集合 $B \coloneqq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\right\}$ との共通部分を考えると, $\tanh x < 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ であるので,

$$A \cap B = \varnothing$$

である一方で, $\lim_{x \to \infty} \tanh(x) = 1$ であるので,

$$d(A, B) = 0$$

が成り立つ.

(6)

A, B どちらかが連結でないと仮定する. A の相対位相における開かつ閉集合 $S_1, S_2 \subset A$ で, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ かつ, $S_i \neq \varnothing, A \quad (i = 1, 2)$ かつ $A = S_1 \sqcup S_2$ をみたすものがとれる. 開集合 $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2 \subset X$ で, $\tilde{S}_1 \cap A = S_1, \tilde{S}_2 \cap A = S_2$ を満たすものがとれる. $\tilde{S}_1 \cap (A \cap B) \neq \varnothing, \tilde{S}_2 \cap (A \cap B) \neq \varnothing$ とすると, $\tilde{S}_1 \cap (A \cap B) \cap \tilde{S}_2 \cap (A \cap B) = \varnothing$ であるので, $A \cap B$ が連結であることに矛盾してしまうので, $\tilde{S}_1 \cap (A \cap B) \neq \varnothing, \tilde{S}_2 \cap (A \cap B) \neq \varnothing$ ではない. $A \cap B \subset \tilde{S}_1, A \cap B \subset \tilde{S}_2$ のいずれかが成り立つ. $A \cap B \subset \tilde{S}_1$ とすると,

$$X = (\tilde{S}_2 \cap B^c) \sqcup (\tilde{S}_1 \cup A^c)$$

が成り立つことを考えると, X が連結であることに矛盾する.