ベッセル関数

1　フロベニウスの方法

定義 1.1. (確定特異点). 2 階線形微分方程式

$$\partial_x^2 u(x) + b(x)\partial_x u(x) + c(x)u(x) = 0$$

において, x_0 は, $(x - x_0)b(x), (x - x_0)^2 c(x)$ が x_0 において実解析であるとき, 確定特異点という.

注意 1.2.

$$\partial_x^2 u(x) + b(x)\partial_x u(x) + c(x)u(x) = 0$$

は, たとえば 0 を確定特異点にもつとき,
$xb(x), x^2 c(x)$ を冪級数で表示し,

$$u = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

の形の解を探すことにすれば, 解けることが知られている.

2　ベッセル関数

定義 2.1. (ケプラーの方程式).

$$\frac{2\pi}{T} t = \varphi(t) - e\sin(\varphi(t))$$

をケプラー方程式という.

命題 2.2. φ をケプラー方程式の滑らかな解とすると, φ' は周期 T の偶関数である.

証明. t が 0 から T まで動くと, $\varphi(t)$ は 0 から 2π まで動くことをみとめると,

$$\frac{2\pi}{T} = (\varphi'(t) - e\cos(\varphi(t)))\varphi'(t)$$

より, わかる. □

命題 2.3.

$$\frac{2}{T}\int_0^T \varphi'(t)\cos\left(\frac{2\pi jt}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} \cos(j(\varphi - e\sin\varphi))d\varphi$$

証明. ただの変数変換. □

定義 2.4. (積分表示ベッセル関数). $j \geq 1$ に対して,

$$J_j(s) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(j\varphi - s\sin\varphi)d\varphi$$

と定め, これを積分表示ベッセル関数という.

命題 2.5.

$$J_j(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k\varphi - s\sin\varphi)}d\varphi$$

証明. 計算. □

命題 2.6.

$$J_j(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+k)!}(\frac{s}{2})^{2m+k}$$

証明. □

定義 2.7. (ベッセル微分方程式). $\nu \geq 0$ をパラメータとする微分方程式

$$x^2\partial_x^2 u + x\partial_x u + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0$$

をベッセル微分方程式という.

命題 2.8. ベッセル微分方程式において, $x = 0$ は確定特異点である.

証明. 明らか. □

定義 2.9. (第 1 種ベッセル関数).

$$J_\nu(x) \coloneqq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1+\nu+m)}\left(\frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}}\right)$$