デルタ関数のフーリエ変換

命題 0.1. $p\in\mathbb{R}^n$ とする. デルタ関数 $\delta_p\in\mathbb{D}'(\mathbb{R}^n)$ のフーリエ変換は関数であり、

$$\widehat{\delta_p}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ip \cdot x}$$

で与えられる.

証明. $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$(F\delta_p,f)=(\delta_p,Ff)=Ff(p)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}f(y)e^{-ip\cdot y}dy$$

が成り立つ.