多項式増大と緩増加超関数

1

定義 1.1. 急減少関数全体 $\mathcal{S}$ に

$$\|\varphi\|_N \coloneqq \sum_{|\alpha|,|\beta|<N} \|x\|^\alpha \left|\partial_x^\beta f(x)\right|$$

によりセミノルムを定める.

命題 1.2. $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して,

$$\|\varphi\|_N \geq \|x\|^N \sup |f(x)|$$

証明. あたりまえ. □

命題 1.3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を局所可積分関数とする. $M \in \mathbb{N}$ で

$$\int_{\|x\|\geq 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|^M} < \infty$$

をみたすものが存在するならば, f は緩増加超関数を定める.

証明. 任意に $\varphi \in \mathcal{S}$ をとる. 適当な $C > 0$ で

$$|(f,\varphi)| \leq \int_{\|x\|<1} |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx + \int_{\|x\|\geq 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|^M} \|x\|^M |\varphi(x)| \leq C\,\|\varphi\|_M$$

を満たすものが存在する. $\mathcal{S}$ における収束 $\varphi_n \to \varphi$ は, 任意のセミノルムに関しての収束であるので, もちろん $M \in \mathbb{N}$ に関しても収束する. □