

有理数と順序

1

命題 1.1. 全単射 $n: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ で,

$$n(q) < n(q') \Leftrightarrow q < q'$$

を満たすものは存在しない.

証明. 存在すると仮定する. $n^{-1}(1), n^{-1}(2) \in \mathbb{N}$ をとる. 有理数であることから,

$$\exists q'' \in (n^{-1}(1), n^{-1}(2)) \cap \mathbb{Q}$$

であるが, 1 より大きく, 2 未満の自然数は存在しないので矛盾する.

□