密度関数が各点収束するならば弱収束する

1

命題 1.1. $(X, \mathcal{B}(X)$ をボレル可測空間, ν を σ 有限なボレル測度とし, μ_n をボレル確率測度 とする. $\frac{d\mu_n}{d\nu}$ が $\frac{d\mu}{d\nu}$ に各点収束するならば, μ_n は μ に弱収束する.

証明. 任意の開集合 $\mathcal{O}$ に対して, $\mu(O) = \lim \mu_n(O)$ が成り立つことを示す. $f_n \coloneqq \frac{d\mu_n}{d\nu}, f \coloneqq \frac{d\mu}{d\nu}$ と表すことにする.

$$0 = \int_X f - f_n d\nu = \int_X (f - f_n)^+ + (f - f_n)^- d\nu$$

より

$$\int_X (f - f_n)^+ d\nu = \int_X -(f - f_n)^- d\nu$$

$$\begin{aligned}
|\mu(O) - \mu_n(O)| &\leq \int_O |f - f_n| \, d\nu \\
&\leq \int_X |f - f_n| \, d\nu \\
&= \int_X (f - f_n)^+ - (f - f_n)^- d\nu \\
&= \int_X 2(f - f_n)^+ d\nu
\end{aligned}$$

が成り立つ.

$$(f - f_n)^+ \leq f$$

であるので, 優収束定理を用いると主張が成り立つ. 任意の開集合 $\mathcal{O}$ に対して, $\mu(O) = \lim \mu_n(O)$ が成り立つので, $\mu(O) \leq \liminf \mu_n(O)$ が成り立つ. 従って弱収束する.

□