楕円体の球面切断

1

定義 1.1. $\mathbb{R}^n$ において, $E \subset \mathbb{R}^n$ は適当な正の実数 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ で

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1 \right\}$$

を満たすものが存在するときに, (原点中心の)n 次元楕円体という.

命題 1.2. $E \subset \mathbb{R}^{2-1}$ を $2n-1$ 次元楕円体とする. このとき, n 次元部分空間 $L \subset \mathbb{R}^{2n-1}$ で,

$$E \cap L = B^{2n-1} \cap L$$

を満たすものが存在する.

$L \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$x_1\sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_n^2}} - x_{2n-1}\sqrt{\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{2n-1}^2}} = 0$$
$$x_2\sqrt{\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_n^2}} - x_{2n-2}\sqrt{\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{2n-2}^2}} = 0$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}\sqrt{\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_n^2}} - x_{2n-1}\sqrt{\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2}} = 0$$

を満たす部分空間とする. $x \in L$ ならば,

証明.

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_{2n-1}^2}{a_{2n-1}^2} = \frac{1}{a_n^2}(x_1^2 + x_{2n-1}^2)$$
$$\frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_{2n-2}^2}{a_{2n-2}^2} = \frac{1}{a_n^2}(x_2^2 + x_{2n-2}^2)$$
$$\vdots$$
$$\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} + \frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} = \frac{1}{a_n^2}(x_{n-1}^2 + x_{n+1}^2)$$

□

が成り立つ. 従って, $x \in E \cap L$ ならば,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 + \cdots x_{2n-2}^2 + x_{2n-1}^2 = a_n^2(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots \frac{x_n^2}{a_n^2} + \cdots + \frac{x_{2n-2}^2}{a_{2n-2}^2} + \frac{x_{2n-1}^2}{a_{2n-1}^2}) \leq a_n^2$$

が成り立つので, $E \cap L \subset B^{2n-1} \cap L$. また逆に, $x \in L$ が $x \notin E$ であるならば, $\|x\| > a_n^2$ となり矛盾するので, $B^{2n-1} \cap L \subset E \cap L$ が成り立つ.