確率論における独立性の定義

1

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ で $\mathbb{R}$ のボレル集合族を表す. $\sigma(X) \coloneqq \left\{X^{-1}(B) \in F \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$

定義 1.1.

(1) F の部分 σ 代数の族 $\{\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n\}$ が独立.
$\Leftrightarrow P(\bigcap_i B_i) = \prod_i P(B_i) \quad \left(\mathrm{for}\ {}^\forall B_1 \in \mathcal{G}_1, \dots, {}^\forall B_\mathrm{n} \in \mathcal{G}_\mathrm{n}\right)$

(2) F の部分 σ 代数の (有限個とは限らない) 族 $\{\mathcal{G}_\lambda \subset F \mid \lambda \in \Lambda\}$ が独立.
$\Leftrightarrow$ 任意の有限部分族 $\{\mathcal{G}_{\lambda_i}, \dots, \mathcal{G}_{\lambda_n}\} \subset \{\mathcal{G}_\lambda\}$ が独立.

(3) 確率変数の族 $\{X_1, \dots, X_n\}$ が独立. $\Leftrightarrow \{\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)\}$ が独立.

(4) 確率変数の (有限個とは限らない) 族 $\{X_\lambda\}$ が独立. $\Leftrightarrow$ 任意の有限部分族 $\{X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}\} \subset \{X_\lambda\}$ が独立.

(5) 事象の列 $\{A_n \in F\}$ が独立. $\Leftrightarrow \{\mathcal{A}_i\}$ が独立.(但し, $\mathcal{A}_i \coloneqq \{\Omega, \varnothing, A_i, {A_i}^c\}$)