コーシー=リーマン関係式

1

命題 1.1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が $z = x + iy$ で微分可能であるならば,

$$\begin{cases} \partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y) \\ \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y) \end{cases}$$

が成り立つ.

証明. 複素微分可能であるので, $(x + h) + iy \to x + iy$ と近づけるときと, $x + i(y + h) \to x + iy$ と近づけるときとで, 極限が一致する.

$$\lim \frac{f((x + h) + iy) - f(x + iy)}{h}, \quad \lim \frac{f(x + i(y + h)) - f(x + iy)}{ih}$$

が一致するので,

$$u_x + iv_y = -iu_y + v_y$$

が成り立つ. □