# 超関数の台

## 1

**記号 1.1.** $T \in \mathcal{D}'(X)$ を適当な $A \subset \mathbb{X}$ で局所テストするとは, 任意の $\mathrm{supp}\varphi \subset A$ を満たす $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ でテストすることをいう.

**定義 1.2.** $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ とする. $T$ は, 開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ で, 任意の $\mathrm{supp}\varphi \subset U$ である $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$T\varphi = 0$$

を満たすものが存在するとき, $U$ 上で 0 であるという.

**注意 1.3.** つまり, $U$ 上で局所テストして 0 であれば, $U$ 上で 0 という.

**定義 1.4.** (超関数の台).

$$\mathcal{U} \coloneqq \left\{ U \subset \mathbb{R}^n \mid U \text{ は開集合}, T \text{ は } U \text{ 上で } 0 \right\}$$

と定め,

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

を $T$ の台という.

**注意 1.5.** つまり, 局所的に 0 となる点を除いた集合が超関数の台.

**命題 1.6.**

$$x \in (\mathrm{supp} T)^c \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0; T\varphi = 0 \quad ({}^{\forall}\varphi \in C_c^{\infty}(B(x;\varepsilon)))$$

**証明.** $\Rightarrow$. $x \in \mathrm{supp}T^c$ なので, $x$ の開近傍 $U$ で $T\varphi = 0 \quad ({}^{\forall}\varphi \in C_c^{\infty}(U))$ がとれる. $B(x;\varepsilon) \subset U$ となる開球がとれて,

$$C_c^{\infty}(B(x;\varepsilon)) \subset C_c^{\infty}(U)$$

であるので,

$$T\varphi = 0 \quad ({}^{\forall}\varphi \in C_c^{\infty}(B(x;\varepsilon)))$$

が成り立つ.
$\Leftarrow$. そういう $\varepsilon$ をとる. $B(x;\varepsilon) \subset \mathcal{U}$ となるから, $B(x;\varepsilon) \subset \mathrm{supp}T^c$ となるので, $x \in \mathrm{supp}T^c$ が成り立つ.

$\square$

**定義 1.7.** (局所可積分関数の本質的台). $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\mathcal{U} \coloneqq \{U \subset \mathbb{R}^n \mid U : \mathrm{open}, f|_U = 0 \quad \mathrm{a.e.}\}$$

と定め,

$$\mathrm{supp} f^c \coloneqq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

と定める. $\mathrm{supp} f \coloneqq \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp} f^c$ を $f$ の本質的台という.

**命題 1.8.** (超関数台は本質的台と一致する). $u \in L^c_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ とする. $\mathrm{ess\,supp} u$ を $u$ の関数としての本質的台とし, $\mathrm{supp}^d u$ を $u$ の定める超関数の台とすると,

$$\mathrm{supp}^d u = \mathrm{ess\,supp} u$$

が成り立つ.

**証明.** $\subset$.

$$(\mathrm{supp}^d u)^c \supset (\mathrm{ess\,supp} u)^c$$

を示すことにする. $x \in (\mathrm{ess\,supp} u)^c$ とすると, $u|_{U_x} = 0 \quad \mathrm{a.e.}$ を満たす $x$ の開近傍 $U_x$ がとれる.

$$(u, \varphi) = 0 \quad (\varphi \in C_c^\infty(U_x))$$

が成り立つので主張が従う.
$\supset$. $f L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \in C_c^\infty(\Omega)$ が成り立つならば, $f|_\Omega = 0 \quad \mathrm{a.e.}$ であるという変分法の基本補題より主張が従う. □

**注意 1.9.** (ふつうの台と本質的台の違い). $[0,1]$ 上のディリクレ関数

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

を考えると, 関数としての台は $[0,1]$ であるが, 本質的台は $\varnothing$ である.

**命題 1.10.** (超関数微分の台). $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ とする. 任意の多重指数 $\alpha$ に対して,

$$\mathrm{supp} \partial^\alpha f \subset \mathrm{supp} f$$

が本質的台の意味で成り立つ.

**証明.**

$$(\mathrm{supp} \partial^\alpha f)^c \supset (\mathrm{supp} f)^c$$

を示すことにする. 開集合 $U \subset\supset (\mathrm{supp} f)^c$ をとる.

$\varphi \in C_c^\infty(U)$ をとると, $\partial^\alpha \varphi \in C_c^\infty(U)$ であるので,

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha \varphi) = 0$$

が成り立つので, $U \in (\mathrm{supp}\partial^\alpha f)^c$ が成り立つ. 以上により主張が従う.

$\square$