

マグニチュードの \inf による特徴づけ

1

命題 1.1. $A \subset X$ をコンパクト距離空間とする.

$$\text{Mag}_f A = \inf\{(w, w)_z \mid Zw(a) = f(a) \quad (a \in A)\}$$

が成り立つ.

証明. w_A を f ウェイトとする. (すなわち $w_A \in \mathcal{W}_A$ かつ, $Zw_A(a) = f(a)$ ($a \in A$) を満たす.) 任意の $w \in \mathcal{W}_X$; $Zw(a) = f(a)$ ($a \in A$) に対して,

$$\begin{aligned} \text{Mag}_f A &= (w_A, w_A)_z \\ &= w_A(Zw_A) \\ &= w_A(f) \\ &= w_A(Zw) \\ &= (w_A, w)_z \\ &\leq (w_A, w_A)_z^{1/2} (w, w)_z^{1/2} \end{aligned}$$

が成り立つ. また下限は w_A により実現される. □