局所等長写像が測地線を保存することの証明

1

注意 1.1. 接続は全てレビチビタ接続を採用する.

定義 1.2. (局所等長写像). (M, g_M) から (N, g_N) への局所微分同相写像 f で, $f^* g_N = g_M$ をみたすものを, 局所等長写像という.

定義 1.3. (等長写像). (M, g_M) から (N, g_N) への微分同相写像 f で, $f^* g_N = g_M$ をみたすものを, 等長写像という.

命題 1.4. $f : (M, g_M) \to (N, g_N)$ を局所微分同相写像とする. このとき, 任意の点 $p \in M, f(p) \in N$ のまわりの座標近傍 U, V で

$$df_q \partial_{i\,q} = \delta_{i\,f(q)} \quad ({}^\forall q \in U)$$

を満たすものが存在する. ただし, ∂_i, δ_i はそれぞれの局所座標の第 i 成分に関する偏微分により定まる接ベクトルである.

証明. 実際, p の周りで微分同相な開集合のペアを U, V とする. U における局所座標写像を $(x^1, \ldots, x^n)$ とする. このとき, V に対しては座標を $(x^1 \circ f^{-1}, \ldots, x^n \circ f^{-1})$ で定める. すると, N 上の滑らかな実数値関数 F に対して

$$\delta_i F = \frac{\partial F \circ f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i} \varphi \circ f^{-1} = (df \partial_i) F$$

が成り立つ. □

命題 1.5. $f : (M, g_M) \to (N, g_N)$ を局所微分同相写像とする. このとき, 任意の点 $p \in M, f(p) \in N$ のまわりで

$$g^M_{ij}(q) = g^N_{ij}(f(q)) \quad ({}^\forall q \in U)$$

をみたす局所座標がとれる.

証明. 直前の命題の通りに局所座標をとると,

$$\begin{aligned} g^N_{ij}(f(q)) &= g^N_{f(q)}(\delta_{i\,f(q)}, \delta_{j\,f(q)}) = g^N_{f(q)}(df \partial_{i\,q}, df \partial_{j\,q}) \\ &= (f^* g^N_q)(\partial_{i\,q}, \partial_{j\,q}) = g^M_q(\partial_{i\,q}, \partial_{j\,q}) = g^M_{ij}(q) \end{aligned}$$

□

命題 1.6. M の測地線の, 局所等長写像による像は N の測地線である.

証明. はじめの命題と同様の局所座標をとる. すると, クリストッフェル記号はリーマン計量によって決定されるので, ${\Gamma^M}^k_{ij}(q) = {\Gamma^N}^k_{ij}(f(q))$ が成り立つ. M における測地線 γ は

$$\partial_t^2(x^k \circ \gamma) + ({\Gamma^M}^k_{ij} \circ \gamma) \partial_t(x^i \circ \gamma) \partial_t(x^j \circ \gamma) = 0$$

なる (M, g) の測地線方程式を満たす. 従って, 曲線 $f \circ \gamma$ は

$$\begin{aligned} &\partial_t^2(x^k \circ f^{-1} \circ f \circ \gamma) + ({\Gamma^N}^k_{ij} \circ f \circ \gamma) \partial_t(x^i \circ f^{-1} \circ f \circ \gamma) \partial_t(x^j \circ f^{-1} \circ f \circ \gamma) \\ &= \partial_t^2(x^k \circ \gamma) + ({\Gamma^M}^k_{ij} \circ \gamma) \partial_t(x^i \circ \gamma) \partial_t(x^j \circ \gamma) = 0 \end{aligned}$$

となるので, (N, g_N) の測地線方程式をみたす. □