柱状領域の最大値原理

1

定義 1.1. (柱状領域). $\omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界な領域とする. $\partial\omega \times [0,T] \cup \omega_0$ をこの柱状領域の放物型境界という.

記号 1.2. $\omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界な領域, $0 < T < \infty$ とし, $t \in [0,T]$ とする.

$$\Omega_t \coloneqq \Omega \times \{t\}$$
$$(\partial\Omega)_0^T \coloneqq \partial\Omega \times [0,T]$$
$$\sqcup_0^T \Omega \coloneqq \Omega_0 \cup \partial\Omega \times [0,T]$$

命題 1.3. $\omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界な領域とする. $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$\partial_t u \le \Delta_x u \quad (x \in \Omega, 0 < t < T)$$

を満たし, 然るべき滑らかさをもつとする. このとき,

$$\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_0^T} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\sqcup_0^T \Omega} u(x,t)$$

が成り立つ.

証明. $\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_0^T} u(x,t) \ \ge\ \max_{(x,t)\in\sqcup_0^T\Omega} u(x,t)$ は明らかに成り立つので反対の不等式を示す. $\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_0^T} u(x,t) > \max_{(x,t)\in\sqcup_0^T\Omega} u(x,t)$ と仮定する (背理法). $\varepsilon > 0$ に対して

$$u^\varepsilon(x,t) \coloneqq u(x,t) + \varepsilon x^2$$

と定めると, ε が十分小さいときには,

$$\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}_0^T} u^\varepsilon(x,t) > \max_{(x,t)\in\sqcup_0^T \Omega} u^\varepsilon(x,t)$$

が成り立つ. v^ε の最大値を実現する点を (x_0, t_0) とすると, $x_0 \in \Omega, 0 < t \le T$ であるので,

$$\Delta_x v^\varepsilon(x_0,t_0) \le 0, \quad \partial_t v^\varepsilon(x_0,t_0) \ge 0$$

が成り立つ ($t_0 < T$ の時に最大値をとるときは, $\partial_t v^\varepsilon(x_0,t_0) = 0$ であるが, $t_0 = T$ の時に最大値をとる場合は $\partial_t v^\varepsilon(x_0,t_0) \ge 0$ までしか言えないことに注意する). 従って,

$$\partial_t u(x_0,t_0) = \partial_t v^\varepsilon(x_0,t_0) \ge 0 \ge \Delta_x v^\varepsilon(x_0,t_0) = \Delta_x u(x_0,t_0) + 2\varepsilon > \Delta_x u(x_0,t_0)$$

となるので矛盾する. □