S^2 の基本群

1

命題 1.1. X が基点 $p \in X$ を含む弧状連結な開集合 $\{U_\lambda\}$ の和で表され, 任意の共通部分 $U_\lambda \cap U_\lambda \mu$ は弧状連結であるとする．このとき, X の任意のループは, 適当な U_λ に含まれるループの連結とホモトピックである．(たとえば, U_λ に含まれるループと, U_μ に含まれるループの連結など.)

証明. $p \in X$ を基点とするループ $f : [0,1] \to X$ をとる．$f([0,1])$ はコンパクトなので, 有限部分被覆 $\{U_i\}$ がとれる．任意の $t \in [0,1]$ に対して $f(t)$ は適当な U_i に含まれているので, f の連続性から, t の開近 V_t で, $f(V_t)$ が U_i に含まれるものがとれる．$(a,b) = V_t$ の境界の点 a,b の像 $f(a), f(b)$ が境界 ∂U_i に属する場合は, (a,b) を十分小さく縮めて $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ とし, これを改めて V_t とすることで, $f(\overline{V}_t) \subset U_i$ となるようにしておく．このような V_t の族は $[0,1]$ の開被覆であるので, コンパクト性から有限部分被覆をとる.

$$V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_N$$

と適当にうまく並べて, $[s_{i_2}, t_{i_2}] = V_{i_2}$ と表しておいて,

$$[0, t_{i_1}], [t_{i_1}, t_{i_2}], \ldots, [t_N, 1]$$

と分割することで, $f([t_{i_n}, t_{i_m}])$ が適当な U_λ に含まれるようにしておく.

$$t_{i_k} \in V_{i_k} \cap V_{i_{k+1}}$$

であり, $f(t_{i_k}) \in U_\alpha \cap U_\beta$ であり, $U_\alpha \cap U_\beta$ は弧状連結なので, p と $f(t_{i_k})$ を結ぶ道 c_k がとれる.

$$f_1 \coloneqq [0, t_{i_1}], f_2 \coloneqq f|_{[t_{i_1}, t_{i_2}]}, \ldots, f_{N+1} \coloneqq f|_{[t_N, 1]}$$

と定め,

$$f_1 \natural \bar{c}_1 \natural c_1 \natural f_2 \natural \bar{c}_2 \natural c_2 \natural f_3 \cdots \natural c_N \natural f_{N+1}$$

を考えると, これがもとめる □

命題 1.2.

$$\pi_1(S^2) = 0$$

証明. S^2 は適当に赤道上に基点 p をとって, 北半球を少し広げたもの (N で表す) と, 南半球を少し広げたもの (S で表す) で被覆する．それらは前述の命題の条件を満たしているので S^2 の任意のループは N のループと S のループの連結とホモトピックである．N, S はともに $\mathbb{R}^2$ と同相であるので, これらのループは可縮である．従って, S^2 の任意のループは自明なループとホモトピックである. □