急減少関数

1

定義 1.1. (急減少セミノルム族). $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して,

$$p_m(f) \coloneqq \sup_x (1 + |x|^2)^m \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial_x^\alpha f(x)|$$

と定め, $\{p_m\}$ を急減少セミノルム族という.

定義 1.2. (急減少関数).

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \coloneqq \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid p_m(f) < \infty \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)\}$$

を急減少関数の空間という. 急減少関数の空間には, 急減少セミノルム族が定めるセミノルム位相を備える.

注意 1.3. セミノルム位相に関する一般論から, 急減少関数の空間における連続性に関して

$$f_n \to f \Leftrightarrow p_m(f_n - f) \to 0$$

が成り立つ.

注意 1.4. 造語だけど, 急減少空間における収束を急減少収束っていうことにする.

命題 1.5. $f_n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする. f_n が f に急減少収束するなら, 一様収束する.

証明. $m = 0$ の時に $p_m(f_n - f)$ を考えるとよい. □

定義 1.6. (緩増加関数). 急減少関数の双対空間を緩増加関数といい, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で表す.

命題 1.7. デルタ関数は緩増加関数である.

証明. f_n を f に急減少収束する関数の族とすると, f_n は f に一様収束する. 従って, $\delta_p f_n = f_n(p) \to \delta_p f = f(p)$ が成り立つ. □