直交凸体上の単調かつ平行移動不変な付値は連続

1

定義 1.1. (直交凸体). $\mathbb{R}^n$ の直交凸かつコンパクトな集合を直交凸体といい, その全体を $\mathcal{K}$ で表す.

注意 1.2. $\mathcal{K}$ にはハウスドルフ距離を備えておく.

記号 1.3. n 次元単位立方体を

$$C_n := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$$

で表す.

記号 1.4. $R \geq 0$ とする. $\mathcal{K}_n[R]$ で, RC_n に含まれる直交凸集合を表す.

記号 1.5. $\nu_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n; x \mapsto (0, \ldots, x, \ldots, 0)$ で第 i 成分への入射を表すことにする.

命題 1.6. 単調増大な付値は, 非負である.

証明. φ を付値とする. $\varphi(\varnothing) = 0$ であるという付値の定義から明らか. □

命題 1.7. (区間との和に関する連続性). $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ を, 単調かつ平行移動不変な付値とする. このとき, 任意の $K \in \mathcal{K}$ に対して

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi(K + \nu_i[-\delta/2, \delta/2]) = \varphi(K)$$

が任意の i に対して成り立つ.

証明. 任意に $K \in \mathcal{K}$ をとる.

$$F : [0, \infty) \to \mathbb{R}; \delta \mapsto \varphi(K + \nu_i[-\delta/2, \delta/2]) - \varphi(K)$$

と定める. 付値の定義から包除原理が成り立つことと, 平行移動不変であることに注意すると,

$$\begin{aligned} &F(\delta_1 + \delta_2) = \varphi(K + \nu_i[-\delta_1, \delta_2]) - \varphi(K) \\ &= \varphi(K + \nu_i[-\delta_1, 0]) + \varphi(K + \nu_i[0, \delta_2]) - \varphi(K) - \varphi(K) = F(\delta_1) + F(\delta_2) \end{aligned}$$

が成り立つので, 加法的である. φ が単調であること合わせると, F は単調かつ加法的な関数であるので,

$$F(\delta) = \delta F(1)$$

が成り立つ. φ が単調増大であるときには, 十分大きい $R \geq 0$ をとると,

$$\begin{aligned} &0 \leq F(1) = \varphi(K + \nu_i[-1/2, 1/2]) - \varphi(K) \\ &\leq \varphi(K + \nu_i[-1/2, 1/2]) \leq \varphi(RC_n) \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って,

$$0 \leq F(\delta) = \delta F(1) \leq \delta\varphi(RC_n)$$

が成り立つので, $\delta \to 0$ と極限をとればよい. φ が単調減少のときも同様にしてできる. $\square$

命題 1.8. (キューブとの和に関する連続性). $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ を, 単調かつ平行移動不変な付値とする. このとき, 任意の $K \in \mathcal{K}$ に対して

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi(K + \delta C_n) = \varphi(K)$$

が成り立つ.

証明. $R \geq 0$ は十分大きくとっておく. 前述の命題の証明と全く同様に

$$0 \leq F(\delta) \leq \delta\varphi(RC_n)$$

が成り立つ. すなわち

$$0 \leq \varphi(K + \nu_i[-\delta/2, \delta/2]) \leq \varphi(K) + \delta\varphi(RC_n)$$

$$C_n = \nu_1[-1/2, 1/2] + \nu_2[-1/2, 1/2] + \cdots \nu_n[-1/2, 1/2]$$

であるので, 任意の $\delta \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\varphi(K + \delta C_n) \\
&= \varphi(K + \nu_1[-1/2, 1/2] + \nu_2[-1/2, 1/2] + \cdots \nu_n[-1/2, 1/2]) \\
&= \varphi(K + \nu_1[-1/2, 1/2] + \nu_2[-1/2, 1/2] + \cdots \nu_{n-1}[-1/2, 1/2]) + \delta\varphi(RC_n) \\
&= \varphi(K + \nu_1[-1/2, 1/2] + \nu_2[-1/2, 1/2] + \cdots \nu_{n-2}[-1/2, 1/2]) + 2\delta\varphi(RC_n) \\
&\cdots \\
&= \varphi(K) + n\delta\varphi(RC_n)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 故に,

$$0 \leq \varphi(K + \delta C_n) - \varphi(K) \leq n\delta(RC_n)$$

が成り立つので, 極限をとればよい. $\square$

注意 1.9. 適当に証明を読めば, 一様収束であることもわかる.

命題 1.10. $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ を, 単調かつ平行移動不変な付値とする. このとき, φ は連続である.

証明. $\square$