# 曲面における Morse の補題

## 1

**命題 1.1.** (座標変換と臨界点におけるヘッセ行列). $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $C^2$ 級写像とし, $p$ を $f$ の臨界点とする. 座標系 $(x,y)$ を用いて計算したヘッセ行列を $H_p^f$, 座標系 $(X,Y)$ を用いて計算したヘッセ行列を $\tilde{H}_p^f$ とする.

$$J_p := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X}p & \frac{\partial x}{\partial Y}p \\ \frac{\partial y}{\partial X}p & \frac{\partial y}{\partial Y}p \end{pmatrix}$$

と定める. すると,

$$\tilde{H}_p^f = J_p^\top H_p^f J_p$$

が成り立つ.

**証明.** 省略. □

**命題 1.2.** (曲面におけるモースの補題).$M$ を 2 次元の可微分多様体とする. $f:M\to\mathbb{R}$ を $C^2$ 級の関数とし, $p\in M$ を $f$ の非退化な臨界点とする. このとき, $p$ のまわりの局所座標をうまく選べば,
(1)$f=x^2+y^2+c$
(2)$f=x^2-y^2+c$
(3)$f=-x^2-y^2+c$
と局所表示することができる. (ただし, $c$ は適当な定数.)

**証明.** $p$ は局所座標をとったときに, 原点に対応するようにしておく.
step:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}p \neq 0$$

となる局所座標がとれる.
$(\because)$ (1) 初めから $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}p\neq 0$ であれば, 終わり. (2)$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}p=0$ だが, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}p\neq 0$ であれば, $x,y$ をとりかえて終わり. (3)$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}p=0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}p=0$ の時を考える. $a\neq 0$ なる実数を用いて,

$$H_p^f = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

と表されるので,

$$x = X - Y, \quad y = X + Y$$

により座標変換を考えると, 座標変換のヤコビ行列を計算すると

$$J_p = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので, あたらしいヘッセ行列は

$$\tilde{H}_p^f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix}$$

となるので, 主張する局所座標がとれる. ▲

また,

step: $f(0,0) = 0$ である $C^1$ 級関数に対して, $(0,0)$ の十分小さな近傍上で, その上で定義された連続関数 $g_1, g_2$ を用いて

$$f(x,y) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y)$$

と表される.

$(\because)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^1 \frac{df(tx,ty)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)dt \\ &= x\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)dt + y\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)dt \end{aligned}$$

が成り立つ. ▲

続けると, 次が成り立つ.

step: $f(0,0) = 0$ である $C^1$ 級関数に対して, $(0,0)$ の十分小さな近傍上で, その上で定義された連続関数 $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}$ を用いて

$$f(x,y) = x^2 h_{11}(x,y) + xy(h_{12}(x,y) + h_{21}(x,y)) + y^2 h_{22}(x,y)$$

と表される.

$(\because)$ $g_1, g_2$ に対して前述の主張を繰り返せば良い. ▲

形を整えるために, $H_{11} \coloneqq h_{11}, H_{12} \coloneqq (h_{12} + h_{21})/2, H_{22} \coloneqq h_{22}$ とする. すると, 原点で局所的に

$$f(x,y) = x^2 H_{11}(x,y) + 2xyH_{12}(x,y) + y^2 H_{22}(x,y)$$

と表される. ので,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4H_{11}(0,0)$$

が成り立つ. 左辺は 0 ではないので, $H_{11}(0,0) \neq 0$ である. $H_{11}$ は連続なので, 原点まわりで局所的に 0 でない.

step:

$$X = \sqrt{|H_{11}|}(x + \frac{H_{12}}{H_{11} y})$$

とし, $y$ はそのままで, $(X, y)$ により新たな座標を定めると, 原点まわりで局所的に

$$f = \begin{cases} X^2 + (H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_11})y^2 & (H_{11} > 0) \\ -X^2 + (H_{22} - \frac{H_{12}^2}{H_11})y^2 & (H_{11} < 0) \end{cases}$$

が成り立つ.

(∵)

$$\begin{aligned} X^2 &= |H_{11}|\,(x^2 + 2\frac{H_{12}}{H_{11}}xy + \frac{H_{12}^2}{H_{11}^2}y^2) \\ &= \begin{cases} H_{11}x^2 + 2H_{12}xy + \frac{H_{12}^2}{H_11}y^2 & (H_{11} > 0) \\ -H_{11}x^2 + 2H_{12}xy + \frac{H_{12}^2}{H_11}y^2 & (H_{11} < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

であるので,

$$f(x, y) = \begin{cases} H_{11}x^2 + 2H_{12}xy + \frac{H_{12}^2}{H_11}y^2 - \frac{H_{12}^2}{H_11}y^2 + H_{22}y^2 & (H_{11} > 0) \\ -H_{11}x^2 + 2H_{12}xy + \frac{H_{12}^2}{H_11}y^2 - \frac{H_{12}^2}{H_11}y^2 + H_{22}y^2 & (H_{11} < 0) \end{cases}$$

となるから.

▲

最後に

step:

$$Y = \sqrt{\left|\frac{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}{H_11}\right|}y$$

とすることで, $(X, Y)$ が求める座標となる.

(∵) $p$ が非退化臨界点であることから

$$H_{11}(0,0)H_{22}(0,0) - H_{12}^2(0,0) = \frac{1}{4}\det H_p^f \neq 0$$

であるので, この座標変換は退化していない (きちんと同相である). 明らかに,

$$f = \begin{cases} X^2 + Y^2 & (H_{11} > 0, H_{11}H_{22} - H_{12}^2 > 0) \\ X^2 - Y^2 & (H_{11} > 0, H_{11}H_{22} - H_{12}^2 < 0) \\ -X^2 + Y^2 & (H_{11} < 0, H_{11}H_{22} - H_{12}^2 < 0) \\ -X^2 - Y^2 & (H_{11} < 0, H_{11}H_{22} - H_{12}^2 > 0) \end{cases}$$

が成り立つ. 2 行目と 3 行目の場合は, $x, y$ をとりかえることを考えると, 結局は主張のような 3 種類の形に帰着される. ▲

□

## 1.1 参考文献


松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店, 2005.