順序集合において上界の下限は上限

1

命題 1.1. $(P, \leq)$ を順序集合とし, $A \subset P$ とし, $U(A)$ で A の上界を表す. $U(A)$ が下限をもつならば, それは A の上限である.

証明. $p \in P$ を $U(A)$ の下限とする. $U(A)$ の下界を $D(U(A))$ で表すことにする. p が $U(A)$ の最小元でないとする (背理法). 「$p \in U(A)$ かつ $q \in U(A) \Rightarrow p \leq q$」 が成り立たないので, 「$p \notin U(A)$ または $x \in U(A)$ de $p \leq x$ でないものが存在する」が成り立つ. $p \notin U(A)$ とすると, $a \in A$ で $a \leq p$ でないものがとれる. a は任意の $q \in U(A)$ に対して $a \leq q$ をみたすので, $a \in D(U(A))$ である. p は $D(U(A))$ の最大元なので, $a \leq p$ が成り立つ. よって矛盾する. $x \in U(A)$ で $p \leq x$ でないものが存在すると, $p \in D(U(A))$ であるので, $p \leq x$ が成り立つ. よって矛盾する. いずれにせよ矛盾するので, 主張が従う.

□

命題 1.2. $(P, \leq)$ を順序集合とする. P の任意の部分集合が下限をもつならば, 任意の部分集合が上限をもつ.

証明. 任意に部分集合 A をとる. A の上界は P の部分集合なので, 下限が存在する. A の上界の下限は A の上限であるので, A は上限をもつ.

□