コルモゴロフ拡張定理

1

こっから射影を p で書きたいからという理由で, 確率測度を P とかではなく普通に μ で表す頻度が増える. $(X, \mathcal{F}_X, \mu)$ を測度空間, $(Y, \mathcal{F}_Y)$ を可測空間とする. $\mathcal{F}_X/\mathcal{F}_Y$ 可測写像 $f : X \to Y$ に対して

$$f_{\#}\mu \coloneqq \mu \circ f^{-1}$$

という記号を導入する.

定理 1.1. (Hopf の拡張定理)
有限加法族 F_0 上の有限加法的確率測度 μ が $\sigma(F_0)$ 上の σ 加法的確率測度 (即ち, 単に確率測度) に一意に拡張できる.
$\Leftrightarrow$ 任意の単調減少列 $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ について, $\lim_n \mu(A_n) > 0$ ならば, $\bigcap_i A_i \neq \varnothing$ が成り立つ.

証明. 続編に収録. □

定理 1.2. (Kolmogorov の拡張定理)
μ_n を $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の確率測度とする.
$\mu_n = p_{1,\dots,n}{}_{\#}\mu_{n+k} \quad \big(\text{for } {}^{\forall}\text{k} \geq 1\big) \Rightarrow {}^{\exists}\mu : (\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ 上の確率測度 s.t. $\mu_n = p_{1,\dots,n}{}_{\#}\mu \quad \text{for } {}^{\forall}\text{n}$

証明.
$\mathcal{S} \coloneqq \big\{ p_{1,\dots,n}{}^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N} \big\}$ 上の有限加法的確率測度 μ' を $p_{1,\dots,n}{}_{\#}\mu' \coloneqq \mu_n$ で定める.
任意の単調減少列 $\{S_i\} \subset \mathcal{S}$ について, $\lim_n \mu'(S_k) > 0$ ならば, $\bigcap_k S_k \neq \varnothing$ を示せば, Hopf の拡張定理より $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上の確率測度に拡張できる. 従って, $\alpha \coloneqq \lim_n \mu'(S_k) > 0$ として以下それを示す.
減少列 $\{S_i = p_{1,\dots,n}(A_i)\}$ をとり, 各 k に対して $A_k \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^k\big)$ となるよう添字を付けなおして, 部分列をとる.
A_k をコンパクト集合 K_k で内側から近似しておく.
$\{\mu'\big(p_{1,\dots,k}{}^{-1}(A_k) \setminus p_{1,\dots,k}{}^{-1}(K_k)\big) = \mu'\big(p_{1,\dots,k}{}^{-1}(A_k \setminus K_k)\big)$
$\quad = p_{1,\dots,k}{}_{\#}\mu'(A_k \setminus K_k)\mu_k(A_k \setminus K_k) \leq \frac{\alpha}{2^{k+1}}$ が成立.$\}$

$$\begin{aligned}
\mu'\left(\bigcap_{k=1}^{n} \big\{p_{1,\dots,k}{}^{-1}(K_k)\big\}\right) &\geq \mu'\big(p_{1,\dots,n}{}^{-1}(A_n)\big) - \mu'\left(p_{1,\dots,n}{}^{-1}(A_n) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} p_{1,\dots,k}{}^{-1}(K_k)\right)^c\right) \\
&= \mu'\big(p_{1,\dots,n}{}^{-1}(A_n)\big) - \mu'\left(\bigcup_{k=1}^{n} p_{1,\dots,n}{}^{-1}(A_n) \cap \big(p_{1,\dots,k}{}^{-1}(K_k)\big)^c\right) \\
&= \mu'\big(p_{1,\dots,n}{}^{-1}(A_n)\big) - \sum_{k=1}^{n} \mu'\Big(p_{1,\dots,n}{}^{-1}(A_n) \cap \big(p_{1,\dots,k}{}^{-1}(K_k)\big)^c\Big) \\
&= \alpha - \frac{\alpha}{2} \qquad = \qquad \frac{\alpha}{2} \qquad > \qquad 0
\end{aligned}$$

$\big($第一不等号は, $K_k \subset A_n$ 故に, $\bigcap_{k=1}^n p_{1,\ldots,k}{}^{-1}(K_k) \subset p_{1,\ldots,n}{}^{-1}(A_n)$ だから.$\big)$
$\bigcap_{k=1}^n p_{1,\ldots,k}{}^{-1}(K_k) \neq \varnothing$ なので, 各 n に対して,
$x^n \coloneqq (x_1{}^n, x_2{}^n, \ldots) \in \bigcap_{k=1}^n p_{1,\ldots,k}{}^{-1}(K_k) \subset \mathbb{R}^\infty$ をとり $\{x^n\} \subset \mathbb{R}^\infty$ という列をつくると,
$n \leq m \Rightarrow x^m \in \bigcap_{k=1}^n p_{1,\ldots,k}{}^{-1}$ なので, $p_{1,\ldots,n}(x^m) \in K_1, \ldots, K_n$ である. 従って,
$x_1{}^1, x_1{}^2, x_1{}^3, \ldots \in K_1$
$x_2{}^1, x_2{}^2, x_2{}^3, \ldots \in K_2$
$x_3{}^1, x_3{}^2, x_3{}^3, \ldots \in K_3$
となるので, うまく収束部分列をとる操作を繰り返すことで, $(x_1, \ldots, x_n) \in \bigcap_{k=1}^n K_k$ である.
故に, $x = (x_1, x_2 \ldots) \in \bigcap_{k=1}^\infty K_k$ なる元をとると, $x \in \bigcap S_k$ が成り立つ.

$\square$