ラプラス作用素と平均値の性質

記号 0.1. $⨍$ で平均積分, ω_n で n 次元単位球の体積, Δ でラプラス作用素を表す.

1

命題 1.1. (平均値の性質). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を連結開集合, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする. 任意の $x \in \Omega$ に対して

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \left(⨍_{B(x;r)} u(y)dy - u(x) \right) = \frac{1}{2(n+2)} \Delta u(x)$$

証明. 点 $x \in \Omega$ でテイラーの定理を適用すると, x の十分小さな開近傍 U_x の中の点 $y \in U_x$ に対して

$$u(y) = u(x) + \nabla u(y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^t J_x u(y-x) + o(|y-x|^2)$$

が成り立つ. 両辺を積分すると, 被積分関数が奇関数であるとかそういうことに注意しながら頑張って計算していくと,

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x;r)} u(y)dy \\
&= \int_{B(x;r)} u(x) + (\nabla u, (y-x)) + \frac{1}{2}(y-x)^t J_x u(y-x) + o(|y-x|^2)dy \\
&= \int_{B(0;r)} u(x)dz + \int_{B(0;r)} (\nabla u, z)dz + \frac{1}{2}\int_{B(0;r)} z^t J_x uzdz + \int_{B(0;r)} o(|z|^2)dz \\
&= u(x)\omega_n r^n + 0 + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j u)(x) \int_{B(0;r)} z_i z_j dz + o(|r|^{n+2}) \\
&= u(x)\omega_n r^n + 0 + \frac{1}{2}\left(\sum_i (\partial_i^2 u)(x) \int_{B(0;r)} z_i^2 dz + \sum_{i \neq j} (\partial_i \partial_j u)(x) \int_{B(0;r)} z_i z_j dz \right) + o(|r|^{n+2}) \\
&= u(x)\omega_n r^n + 0 + \frac{1}{2}\Delta u(x)\omega_n \frac{r^{n+2}}{n+2} + 0 + o(|r|^{n+2}).
\end{aligned}$$

□