1-良い射影

1

定義 1.1. (良い射影). $A, B \subset X$ を部分集合とする. $a \in A$ は

$$^{\exists}\pi(a) \in A \cap B; b \in B \Rightarrow d(a,b) = d(a,\pi(a)) + d(\pi(a),b)$$

であるとき, B に良く射影される. 任意の点 $a \in A$ が B に良く射影される, A は B に良く射影されるという. A が B に良く射影され, B が A に良く射影されるとき, A, B は互いに良く射影されるという.

注意 1.2. $a \in A$ が B に良く射影されるとき, 類似度行列 Z の成分に関して, 当たり前だが任意の $b \in B$ に対して

$$z_{ab} = z_{a\pi(a)} z_{\pi(a)b}$$

が成り立つ.

命題 1.3. (和集合のマグニチュード). $A, B \subset X$ を X の有限部分集合で, $A, B, A \cap B$ がそれぞれウェイト $w^A, w^B, w^{A\cap B}$ を持つとする. A, B が互いに良く射影される.

$$w(x) \coloneqq \begin{cases} w^A(x) & x \in A \\ w^A(x) + w^B(x) - w^{A\cap B}(x) & x \in A \cap B \\ w^B(x) & x \in B \end{cases}$$

と定めると, これは $A \cup B$ のウェイトである. 従って,

$$\mathrm{Mag}(A \cup B) = \mathrm{Mag}(A) + \mathrm{Mag}(B) - \mathrm{Mag}(A \cap B)$$

が成り立つ.

証明. 実際, w がウェイトになることは例えば類似度行列の $a \in A$ 行目に関しては

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X} Z(a,x)w(x) &= \sum_{a'\in A} Z(a,a')w^A(a') + \sum_{b\in B} Z(a,b)w^B(b) - \sum_{c'\in A\cap B} Z(a,c)w^{A\cap B}(c) \\
&= \sum_{a'\in A} Z(a,a')w^A(a') \\
&\quad + \sum_{b\in B} Z(a,\pi(a))Z(\pi(a),b)w^B(b) - \sum_{c\in A\cap B} Z(a,\pi(a))Z(\pi(a),c)w^{A\cap B}(c) \\
&= 1 + Z(a,\pi(a))(\sum_{b\in B} Z(\pi(a),b)w^B(b) - \sum_{c\in A\cap B} Z(\pi(a),c)w^{A\cap B}(c)) \\
&= 1 + Z(a,\pi(a))(1-1) = 1
\end{aligned}$$

よりわかる. $b \in B$ 行目に関しても全く同様に示される. さらに, この $\sum_{x\in A\cup B} w(x)$ を計算すると, 主張が従う. □

命題 1.4. (1 点で交わる集合同士の和). $A, B \subset X$ を 1 点 ($c \in A \cap B$ で表す．) で共通部分をもつ有限部分集合とする．A, B がマグニチュードをもち, A, B が互いに良く射影されるとき, $A \cup B$ はメビウス行列をもち,

$$\mu_{A\cup B}(x,y) \coloneqq \begin{cases} \mu^A(x,y) & x, y \in A, (x,y) \neq (c,c) \\ \mu^B(x,y) & x, y \in B, (x,y) \neq (c,c) \\ \mu^A(c,c) + \mu^B(c,c) - 1 & (x,y) = (c,c) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられる．ただし, A, B のメビウス行列を $M^A = (\mu^A_{ij}), M^B = (\mu^B_{ij})$ で表している．

証明. 実際, 適当に成分を並べて

$$\begin{aligned} &Z^{A\cup B}\left(\begin{pmatrix} M^A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^B \end{pmatrix} - \operatorname{diag}(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\right) \\ &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} - \operatorname{diag}(0,\dots,0,1,0,\dots,0) = E \end{aligned}$$

と計算できる． □