snowflake 条件

1

定義 1.1. (L^p 距離空間). 距離空間 (X,d) は (X,d^p) が距離空間であるときに, L^p 距離空間という. また, d を L^p 距離関数という.

定義 1.2. d,d' を X 上の距離関数とする. $L \geq 1$ で

$$\frac{1}{L}d(x,y) \leq d'(x,y) \leq Ld(x,y) \quad (x,y \in X)$$

を満たすものが存在する時に, d,d' は (L-) 双リプシッツ同値であるという.

定義 1.3. (p-snowflake). $p>1$ とする. 距離空間 (X,d) は, d と双リプシッツ同値な L^p 距離関数 d' が存在する時に, p-snowflake 空間という. 適当な $p>1$ に対して p-snowflake 空間となるとき, 単に snowflake 空間という.

定義 1.4. (p-snowflake 条件). $p>1$ とする. 距離空間 (X,d) は $0<c<1$ で, 任意の有限個の点 $x_0,\cdots,x_N \in X$ に対して

$$cd^p(x_0,x_N) \leq \sum_{i=0}^{N-1} d^p(x_i,x_{i+1})$$

を満たすものが存在するとき, p-snowflake 条件を満たすという.

命題 1.5. $p>1$ とする. 距離空間 (X,d) に対して次は同値である.
(1)(X,d) は p-snowflake 空間である.
(2)(X,d) は p-snowflake 条件を満たす.

証明. ($\Rightarrow$). d' を d と双リプシッツ同値な L^p 距離とする.

$$\frac{1}{L}d(x,y) \leq d'(x,y) \leq Ld(x,y)$$

が成り立つので, 有限個の点 $x_0,\ldots,x_{N+1}$ に対して,

$$\frac{1}{L^p}d^p(x_0,x_N) \leq d'^p(x_0,x_N) \leq \sum d'^p(x_i,x_{i+1}) \leq L^p \sum d^p(x_i,x_{i+1})$$

が成り立つので, $c=\frac{1}{L^{2p}}>0$ ととれば p-snowflake 条件を満たす.
($\Leftarrow$). p-snowflake 条件を成立させる定数を $0<c<1$ とする.

$$d'(x,y) \coloneqq \inf\left\{\sum_{i=0}^{N-1} d^p(x_i,x_{i+1})\right\}^{\frac{1}{p}}$$

と定める (ただし，下限は，有限個の点 $x_0, \ldots, x_N$ で $x_0 = x, x_N = y$ であるもの全体を走る)．すると，$0 < c < 1, p > 1$ であることに注意すると，

$$c^{\frac{1}{p}} d(x,y) = \inf (c d^p(x,y))^{\frac{1}{p}} \leq \inf \left(\sum_{i=0}^{N-1} d^p(x_i, x_{i+1}) \right)^{\frac{1}{p}} \leq d(x,y) \leq \frac{1}{c^{\frac{1}{p}}} d(x,y)$$

が成り立つ． □