双線形写像

付け焼き刃コース

V, W でベクトル空間, V^*, W^* でそれぞれの双対空間を表す. 係数体は $\mathbb{R}$ としておく.

1 双線形写像

定義 1.1. 双線形写像

$$b : V \times W \to \mathbb{R}$$

は,

$$b(v, w) = 0 \ \ ({}^\forall w \in W) \Rightarrow v = 0$$
$$b(v, w) = 0 \ \ ({}^\forall v \in V) \Rightarrow w = 0,$$

を満たす時に, 非退化であるという.

注意 1.2. この条件はすなわち, 任意の $w \in W$ に対して $b(\cdot, w)$ が単射であり, かつ任意の $v \in V$ に対して $b(v, \cdot)$ が単射であることと同じである.

命題 1.3. V, W を有限次元とする. 双線形形式 $b : V \times W \to \mathbb{R}$ で非退化なものが存在するならば,

$$V \simeq W^*, \quad W \simeq V^*$$

証明. Step:

$$\dim W = \dim V^* = \dim V = \dim W^*$$

($\because$) 線型写像を

$$\iota^b : W \to V^*; w \mapsto b(\cdot, w)$$

により定める.

$$\iota^b(w) = 0 \Rightarrow b(v, w) = 0 \ \ ({}^\forall v \in V) \Rightarrow w = 0$$

であるので, ι^b は単射であるので, $\dim W \leq \dim V^*$ が成り立つ. 全く同様にして, $\dim W \leq \dim V^*$ も成り立つ. 有限次元であることから,

$$\dim V = \dim V^*, \quad \dim W = \dim W^*$$

であるので,

$$\dim W \leq \dim V^* = \dim V \leq \dim W^* = \dim W$$

である. ▲

従って, ι^b は同じ次元のベクトル空間の間の単射線型写像であるので, 同型写像である. □

例 1.4. 無限次元の場合には, 非退化双線形写像 b の定める線型写像 ι^b は単射であっても全射であるとは限らない. $\mathbb{R}$ の中の有界閉区間 $[a,b]$ 上の滑らかな関数全体 $C^\infty([a,b])$ に

$$b(f,g) \coloneqq_{[a,b]} \int f(x)g(x)dx$$

により双線形写像を定めると, よく知られた結果としてこれは非退化である. 一方で, ディラック測度が定める双対空間の元を考えると, 全射でないことがわかる.

定義 1.5. 対称双線形写像 $b : V \times V \to \mathbb{R}$ は

$$b(v,v) > 0 \ \ ({}^\forall v (\neq 0) \in V)$$

が成り立つ時に, 正定値であるという.

命題 1.6. 正定値双線形形式は非退化である.

証明. $b(v,v_0) = 0 \quad (v \in V)$ とすると, $b(v_0,v_0) = 0$ である. $v_0 \neq 0$ とすると $b(v_0,v_0) > 0$ となるので, $v_0 = 0$ □

定義 1.7. 対称双線形写像 $b : V \times V \to \mathbb{R}$ は

$$b(v,v) \geq 0 \ \ ({}^\forall v (\neq 0) \in V)$$

が成り立つ時に, 半正定値であるという.

例 1.8. 例えば, 恒等的に 0 を与える双線形写像 $b = 0$ は半正定値であるが, 明らかに非退化でない.

命題 1.9. V を有限次元ベクトル空間とし, 基底を $\{e_i\}$ とする. 双線形写像 $b : V \times V \to \mathbb{R}$ に対して

$$b(v,w) = v^i b_{ij} w^j \quad (v = v^i e_i, w = w^i e_i \in V)$$

を満たす行列 $B = (b_{ij})$ が存在する.

証明.

$$b_{ij} \coloneqq b(e_i, e_j)$$

により定義すれば,

$$b(v,w) = b(v^i e_i, w^j e_j) = v^i b(e_i,e_j) w^j$$

が成り立つ. □