# 確率変数の収束

## 1

### 1.1

特に断りのない限り, $\{X_n\}$ は $(\Omega, F, P)$ 上の確率変数の列を表す.

**定義 1.1.**
$\{X_n\}$ が $X$ に概収束する. $:\Leftrightarrow P(\lim_n X_n = X) = 1$ が成り立つ.
$\{X_n\}$ が $X$ に確率収束する. $:\Leftrightarrow$ for $^\forall\varepsilon > 0, \lim_\mathrm{n} P(|\mathrm{X_n} - \mathrm{X}| > \varepsilon) = 0$ が成り立つ.

しばらくの間, $A_n(\varepsilon) \coloneqq [|X_n - X| > \varepsilon]$ とする.

**命題 1.2.** $[\lim_n X_n = X] = \bigcap_k \bigcup_N \bigcap_{n\geq N} \left(A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)^c$ である.

**証明.** 極限の定義より直ちに従う. □

**命題 1.3.** $\{X_n\}$ が $X$ に概収束する. $\Rightarrow$ $X$ に確率収束する.

**証明.**
$\{X_n\}$ が $X$ に概収束するならば,

$$
\begin{aligned}
0 = P\left(\left[\lim_n X_n = X\right]^c\right) &= P\left(\bigcup_k \bigcap_N \bigcup_{n\geq N} \left(A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) \\
&\geq P\left(\bigcap_N \bigcup_{n\geq N} \left(A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) \quad (\because \text{単調性}) \\
&\geq \limsup_n P\left(\left(A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) \quad (\because \text{Fatou})
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 故に, for $^\forall\mathrm{k}$, $\lim_\mathrm{n} P\left(\mathrm{A_n}\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right)\right) = 0$ が成り立つ. □

**命題 1.4.** for $^\forall\mathrm{k}$, $P\left(\bigcap_\mathrm{N} \bigcup_{\mathrm{n}\geq\mathrm{N}} \mathrm{A_n}\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right)\right) = 0 \Rightarrow \{\mathrm{X_n}\}$ が $X$ に概収束する.

**証明.** $P\left(\bigcup_k \bigcap_N \bigcup_{n\geq N} \left(A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right) \leq \sum_k P\left(\bigcap_N \bigcup_{n\geq N} A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_k 0 = 0$ □

**命題 1.5.** for $^\forall\mathrm{k}, \lim_\mathrm{N} \mathrm{P}\left(\sup_{\mathrm{n}\geq\mathrm{N}} |\mathrm{X_n} - \mathrm{X}| > \frac{1}{\mathrm{k}}\right) = 0 \Leftrightarrow \{\mathrm{X_n}\}$ が $X$ に概収束する.

**証明.** 下方連続性より, $P\left(\bigcap_N \bigcup_{n\geq N} A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \lim_N P\left(\bigcup_{n\geq N} A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)$ . □

**命題 1.6.** (Chevyshev の不等式)

$f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, 単調増加. $X: f(|X|)\in L^1(P)$ を満たす確率変数, $a>0$ に対して,

$$P(|X|>a)\leq\frac{1}{f(a)}E(f(|X|))$$

が成り立つ.

**証明.** $f(a)E\bigl(1_{[|X|>a]}\bigr)=E\bigl(f(a)1_{[|X|>a]}\bigr)\leq E\bigl(f(|X|)1_{[|X|>a]}\bigr)\leq E(f(|X|))$ □

**命題 1.7.** $\{X_n\}$ が $X$ に $L^p$ 収束する. $\Rightarrow$ $X$ に確率収束する.

**証明.** $P(|X_n-X|>\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon^p}E(|X_n-X|^p)$ □

**命題 1.8.** $\{X_n\}$ に対して, 以下が成り立つ.

$$X \text{ に確率収束} \Leftrightarrow \lim_n E\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right)=0$$

**証明.**

$(\Rightarrow)$ $A_n:=[|X_n-X|>\varepsilon]$ とすると, n を十分大きくとると次が成り立つ.

$$\begin{aligned}E\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right)&=E\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}1_{A_n}\right)+E\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}1_{{A_n}^c}\right)\\&\leq E(1\cdot 1_{A_n})+E(\varepsilon\cdot 1_{{A_n}^c})\\&\leq E(1\cdot 1_{A_n})+E(\varepsilon\cdot 1_{\Omega})\\&\leq\varepsilon+\varepsilon\qquad\Bigl(\because \text{確率収束するので } P(A_n) \text{ はいくらでも小さくできる.}\Bigr)\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$

$$P(|X_n-X|>\varepsilon)\leq\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}E\left(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right)\qquad\Bigl(\because \text{チェビシェフの不等式}\Bigr)$$

□

**定理 1.9.** $\{X_n\}$ が $X$ に確率収束する. $\Rightarrow$ $X$ に概収束する部分列がとれる.

**証明.** 命題 1.8 より, 十分大きな n をとると, $E\Bigl(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\Bigr)\leq\frac{1}{k^2}$ とできるので,
適当に部分列を取ることで, $\sum E\Bigl(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\Bigr)\leq\sum\frac{1}{k^2}<\infty$ が成り立つ.
$\sum E\Bigl(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\Bigr)=E\Bigl(\sum\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\Bigr)$ 故に, $\sum\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}$ は可積分なので a.s. で有限の値を取る.
即ち, $\lim_n\Bigl(\frac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\Bigr)=0$ が a.s. で成り立つので, $\lim_n|X_n-X|=0$ が a.s. で成り立つ.

□