二次接束プチメモ

神山翼

1　二次接束プチメモ

1.1　具体的構成

注意 1.1.

- M を滑らかな n 次元多様体とする．
- M の座標近傍系を $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ で表す．
- TM 上の滑らかな実数値関数全体を $C^\infty(TM;\mathbb{R})$ で表す．
- TM の自然な座標近傍系を $(W_\lambda, \tilde{\varphi}_\lambda)$ で表す．

定義 1.2. $(p, X_p) \in T_pM, i = 1, \ldots, n, n+1 \ldots, n+n$ に対して

$$\delta_i|_{(p,X_p)} : C^\infty(TM;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

を

$$\delta_i|_{(p,X_p)}F \coloneqq \frac{\partial F \circ \tilde{\varphi}^{-1}}{\partial v^i}(\varphi(p, X_p))$$

により定める．ただし，$\frac{\partial}{\partial v^i}$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の関数の第 i 成分に関する微分を表す．

$$\begin{aligned} T_{(p,X_p)}TM \coloneqq \Big\{ &(p, X_p, \mu^1_{(p,X_p)}\delta_1|_{(p,X_p)}, \ldots, \mu^n_{(p,X_p)}\delta_n|_{(p,X_p)}, \\ &\eta^1_{(p,X_p)}\delta_{n+1}|_{(p,X_p)}, \ldots, \eta^n_{(p,X_p)}\delta_{n+n}|_{(p,X_p)}) \\ &\mid (\mu^1_{(p,X_p)}, \ldots, \mu^n_{(p,X_p)}, \eta^1_{(p,X_p)}, \ldots, \eta^n_{(p,X_p)} \in \mathbb{R}^{2n}) \Big\} \end{aligned}$$

と定め，これを TM の (p, X_p) における接空間という．

$$TTM \coloneqq \bigsqcup_{(p,X_p)\in TM} T_{(p,X_p)}TM$$

と定め，これを M の二次接束という．

注意 1.3. TTM には標準的には，$A \subset TTM$ が開集合であることを，TM の座標近傍系の添字の任意の λ に対して

$$\Phi_\lambda(A \cap \pi^-_{TM}1(W_\lambda))$$

が $\mathbb{R}^{4n}$ で開集合であることにより定め，それによって位相を定める．ただし，π_{TM} は TTM から TM への自然な射影である．また，

$$\begin{aligned} &\Phi_\lambda(p, X_p, \mu^1_{(p,X_p)}\delta_1|_{(p,X_p)}, \ldots, \mu^n_{(p,X_p)}\delta_n|_{(p,X_p)}, \eta^1_{(p,X_p)}\delta_{n+1}|_{(p,X_p)}, \ldots \eta^n_{(p,X_p)}\delta_{n+n}|_{(p,X_p)}) \\ &\quad \coloneqq (\tilde{\varphi}_\lambda(p, X_p), \mu^1_{(p,X_p)}, \ldots, \mu^n_{(p,X_p)}, \eta^1_{(p,X_p)}, \ldots, \eta^n_{(p,X_p)}) \end{aligned}$$

により Φ_λ を定める．また，これにより TTM には可微分多様体の構造が定まる．

注意 1.4. 明らかな時には $\delta_i|_{(p,X_p)}$ の $|_{(p,X_p)}$ を省略する．

命題 1.5.

$$d\pi_{TM}\delta_i = \partial_i, \quad d\pi_{TM}\delta_{n+i} = 0$$

証明. $f : M \to \mathbb{R}$ を滑らかな実数値関数とする．

$$\begin{aligned} d\pi_{TM}(\delta_i)f &= \frac{\partial(f(\pi(\tilde{\varphi}^{-1}(p, X_p))))}{\partial v^i}(\tilde{\varphi}(p, X_p)) = \frac{\partial f(\varphi^{-1}(p))}{\partial x^i}(\varphi(p)) \\ d\pi_{TM}(\delta_{n+i})f &= \frac{\partial(f(\pi(\tilde{\varphi}^{-1}(p, X_p))))}{\partial v^{n+i}}(\tilde{\varphi}(p, X_p)) = 0 \end{aligned}$$

であることからわかる．　□

1.2 Vertical lift, Horizontal lift

定義 1.6.

$$K_{(p,X_p)} : T_{(p,X_p)}TM \to T_pM\,; A \mapsto d(\exp_p \circ \mathrm{sub}_X \circ \mathrm{Par}^p)A$$

と定める.

$$\mathrm{sub}_{V_p}(X_p) : T_pM \to T_pM; X_p \mapsto X_p - V_p$$

と定める.

さて,

$$\begin{aligned}
dY(X) &= dY(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial v^i} + X^i (\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial v^{n+k}} \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial v^i} + X(Y^k) \frac{\partial}{\partial v^{n+k}} \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial v^i} + X(Y^i) \frac{\partial}{\partial v^{n+i}} \\
\nabla_X Y &= \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} (Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}) \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i Y^k \Gamma^i_{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= X^i (\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + X^i Y^k \Gamma^i_{ik}) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
K((dYX)) &= d(\exp_p \circ \mathrm{sub}_{\pi_{TM}(dYX)_p} \circ \mathrm{Par}^p)(dYX) \\
&= \frac{d}{dt} (\exp_p \circ \mathrm{sub}_{\pi_{TM}(dYX)_p} \circ \mathrm{Par}^p(Y \circ \gamma(t)))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (\exp_p(\mathrm{Par}^p(Y \circ \gamma(t)) - \pi_{TM}(dYX)_p))|_{t=0} \\
&= d(\exp_p)_{\mathrm{Par}^p(Y \circ(\gamma(0)) - \pi_{TM}(dYX)_p} \frac{d}{dt} (\mathrm{Par}^p(Y \circ \gamma(t)) - \pi(dYX_p))|_{t=0} \\
&= d(\exp_p)_0 \frac{d}{dt} (\mathrm{Par}^p(Y \circ \gamma(t)))|_{t=0} \\
&= \mathrm{Id} \nabla_X Y \\
&= \nabla_X Y
\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}
K((dYX)) = 0 &\Leftrightarrow \nabla_X Y = 0 \\
&\Leftrightarrow X^i (\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + X^i Y^k \Gamma^i_{ik}) = 0 \\
&\Leftrightarrow X(Y^i) = -X^j Y^k \Gamma^i_{jk}
\end{aligned}$$

であるので, TM 上の関数 g に対して (M, TM の座標近傍を $\varphi, \tilde{\varphi}$ とすると)

$$\begin{aligned}
&(dYX)g = dg(dYX) = d(g \circ Y)X = X^i \partial_i (g \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi} \circ Y \circ \varphi^{-1}) = d(g \circ \tilde{\varphi}^{-1})(X^i \partial_i)(\tilde{\varphi} \circ Y \circ \varphi^{-1}) \\
&\varphi \circ Y \circ \varphi^{-1}\,; (x^1, \ldots, x^n, Y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, Y^n(x^1, \ldots, x^n))
\end{aligned}$$

なので, $dYX = X^1 \frac{\partial}{\partial v^1} + \cdots + X^n \frac{\partial}{\partial v^n} + (XY^1) \frac{\partial}{\partial v^{n+1}} + \cdots + (XY^n) \frac{\partial}{\partial v^{n+n}}$

$$dYX = X^i \frac{\partial}{\partial v^i} + X(Y^j) = X^i \frac{\partial}{\partial v^i} - X^i Y^k \Gamma^j_{ik} \frac{\partial}{\partial v^{n+j}} = X^i \frac{\partial}{\partial v^i} - X^j Y^k \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial v^{n+i}}$$

定義 1.7. $X \in TM$ の $Y \in TM$ における垂直リフト $X^V \in T_Y TM$ と水平リフト $X^H \in T_Y TM$ をそれぞれ

$$X^V_Y \coloneqq X^i \frac{\partial}{\partial v^{n+i}}, \quad X^H_Y \coloneqq X^i \frac{\partial}{\partial v^i} - X^j Y^k \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial v^{n+i}}$$

により定める.