同じ位相を定める距離

1

命題 1.1. X を集合, d, d' を X 上の距離関数とする.
(1) 任意の $x \in X, \varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で

$$\{y \in X \mid d(x,y) < \delta\} \subset \{y \in X \mid d'(x,y) < \delta\}$$

を満たすものが存在する.
(2) 任意の $x \in X, \varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で

$$\{y \in X \mid d'(x,y) < \delta\} \subset \{y \in X \mid d(x,y) < \delta\}$$

を満たすものが存在する.
の (1)(2) を満たすとき, d, d' は同じ位相を定める.

証明. $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ をそれぞれ d, d' の定める位相とする. 任意に $U \in \mathcal{O}$ をとる. 任意に $x \in U$ をとると, $\varepsilon > 0$ で,

$$\{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subset U$$

を満たすものがとれる. 適当な $\delta > 0$ で

$$\{y \in X \mid d'(x,y) < \delta\} \subset \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subset U$$

を満たすものがとれるので, U は $\mathcal{O}'$ に関する開集合でもある. 従って, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ が成り立つ.
同様にして, $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ も成り立つので, $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ が成り立つ. □