法則収束

1

設定 1.1. $X_{\#}\mu = \mu \circ X^{-1}$ という表記を用いる.

定義 1.2.

(1) X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数とするとき, 確率測度 $X_{\#}P$ を X の分布 (あるいは法則) という.

(2) $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$($\mathbb{R}^n$ のボレル確率測度) に対して,

$$F(x) \coloneqq \mu\left(\prod_{i=1}^{n}(\infty, x_i]\right) \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

により定まる関数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を μ の分布関数という.

定義 1.3. $\mu_k, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の分布関数をそれぞれ F_k, F とする.
μ_k が μ に分布収束 (法則収束) する. $:\Leftrightarrow \lim_k F_k(x) = F(x) \quad \big(\mathrm{for}\ {}^{\forall}\mathrm{x} : \mathrm{F}\ の連続点\big)$ が成り立つ.

命題 1.4. $\mu_k, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の分布関数をそれぞれ F_k, F とする.
μ_k が μ に弱収束する. $\Leftrightarrow$ μ_k が μ に分布収束 (法則収束) する.

証明.
$(\Rightarrow)$ $f_i(x) \coloneqq \sup\{f(y) - i \cdot d(x, y) \mid y \in \mathbb{R}^n\}, f_j(x) \coloneqq \inf\{f(y) + j \cdot d(x, y) \mid y \in \mathbb{R}^n\}$ とすると,
$\{f_i\}, \{f_j\}$ はそれぞれ $1_{(-\infty,x]}, 1_{(\infty,x)}$ に各点収束する有界連続関数の減少列と増大列であり,
$\int f_j d\mu_k \leq F_k(x) \leq \int f_j d\mu_k$ が成り立ち, k について極限をとることで,
$\int f_j d\mu \leq \liminf_k F_k(x) \leq \limsup_k F_k(x) \leq \int f_j d\mu$ が成り立つ. i,j について極限をとることで,
$\mu(-\infty, x) \leq \liminf_k F_k(x) \leq \limsup_k F_k(x) \leq \mu(-\infty, x]$ が成り立ち, x が F の連続点である時にはこれらの不等号は実際には等号であることから結論が従う.

$$(\Leftarrow)\ \left|\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_n - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu\right| \leq \left|\int_{(-\infty,a]\cup(b,\infty)} f d\mu_n\right| + \left|\int_{(-\infty,a]\cup(b,\infty)} f d\mu\right| + \sum_{k=0}^{m-1}\left|\int_{(a_k,a_{k+1}]} f d\mu_n - \int_{(a_k,a_{k+1}]} f d\mu\right|$$

$$\leq \left|\int_{(-\infty,a]\cup(b,\infty)} f d\mu_n\right| + \left|\int_{(-\infty,a]\cup(b,\infty)} f d\mu\right| + \sum_{k=0}^{m-1}\left|\int_{(a_k,a_{k+1}]} f(x) - f(a_k) + f(a_k) d\mu_n - \int_{(a_k,a_{k+1}]} f(x) - f(a_k) + f(a_k) d\mu\right|$$

より, $a, b, a_1, \ldots, a_m$ をかなりうまくとればよい.

$\square$