一様非凸性と snowflake

1

定義 1.1. (一様非凸). $0 < \delta < \frac{1}{2}$ とする. (X, d) を距離空間とする. 任意の 2 点 $x, y \in X$ に対して, $\lambda(x, y) \in (0, 1)$ で

$$B(x; (\lambda + \delta)d(x, y)) \cap B(y; (1 - \lambda + \delta)d(x, y)) = \varnothing$$

を満たすものが存在する時に, (X, d) は δ-一様非凸 (UNC) であるという.

注意 1.2. $1-\lambda, \lambda \leq \delta$ の時は, $B(x; (\lambda+\delta)d(x, y)) \cap B(y; (1-\lambda+\delta)d(x, y)) \neq \varnothing$ であるので, $\lambda \in (\delta, 1-\delta)$ に条件を置き換えてもよい.

命題 1.3. $0 < \delta < \frac{1}{2}$ とすると,
(1)$4\delta^2 - \delta \leq \delta$ が成り立つ.
(2)$0 \leq 4\delta(\frac{1}{2} - \delta) \leq \frac{1}{4}$ が成り立つ.

証明. 計算するだけ. □

命題 1.4. (X, d) を距離空間とする. (X, d) が δUNC であるならば, (X, d) は p-snowflake である. ただし,

$$p := \frac{\log 2}{\log 2 - (1 + 4\delta^2)}$$

である.

証明.

$$D := 4d(\frac{1}{2} - \delta), \quad c := D^p$$

と定める. $N+1$ 個の点 $x_0, \ldots, x_N$ に対して

$$cd^p(x_0, x_N) \leq \sum d^p(x_i, x_{i+1})$$

が成り立つことを帰納法により示す. $N = 1$ の時, $c \leq 1$ より明らかに成り立つ. $1, \ldots, N$ 個の点に対して成り立つとする. 任意に $x, y \in X$ をとり, $N+1$ 個の点列 $x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y$ をとる. δ-UNC であることから, 適当な $\lambda \in (\delta, 1-\delta)$ で,

$$B(x; (\lambda + \delta)d(x, y)) \cap B(y; (1 - \lambda + \delta)d(x, y)) = \varnothing$$

を満たすものがとれる. $B(x; (\lambda + \delta)d(x, y)) \setminus B(x; (\lambda + 4\delta^2 - \delta)d(x, y))$ に $\{x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y\}$ の点が含まれるかどうかに応じて,
(1) 任意の $x_k \in \{x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y\}$ に対して

$$d(x, x_k) \leq (\lambda + 4\delta^2 - \delta)d(x, y)$$

または

$$(\lambda+\delta)d(x,y) \leq d(x,x_k)$$

が成り立つ．あるいは

(2) ある $x_k \in \{x=x_0,x_1,\ldots,x_N=y\}$ に対して，

$$(\lambda+4\delta^2-\delta)d(x,y) \leq d(x,x_k), \quad d(x_k,y) \geq (1-\lambda+\delta)d(x,y)$$

が成り立つ．

(1) の場合，$x_k,x_{k+1} \in \{x=x_0,x_1,\ldots,x_N=y\}$ で

$$d(x,x_k) \leq (\lambda+4\delta^2-\delta)d(x,y), \quad (\lambda+\delta)d(x,y) \leq d(x,x_{k+1})$$

を満たすものがとれる．

$$Dd(x,y) \leq d(x,x_{k+1})-d(x,x_k) \leq d(x_k,x_{k+1})$$

が成り立つので，

$$D^pd^p(x,y) \leq d^p(x_k,x_{k+1}) \leq \sum d^p(x_o,x_{i+1})$$

が成り立つ．

(2) の場合，帰納法の仮定より，

$$D^pd^p(x,x_k) \leq \sum_{[} i=0]^{k-1}d^p(x_i,x_{i+1}), \quad D^pd^p(x_k,y) \leq \sum_{[} i=k]^{N-1}d^p(x_i,x_{i+1})$$

が成り立つので，

$$D^p(d^p(x,x_k)+d^p(x_k,y)) \leq \sum d^p(x_i,x_{i+1})$$

が成り立つ．

$$d(x,x_k) \leq (\lambda+4\delta^2-\delta)d(x,y), \quad (\lambda+\delta)d(x,y) \leq d(x,x_{k+1})$$

より，

$$(1+4\delta^2)d(x,y) \leq d(x,x_k)+d(x_k,y)$$

であるので，p に対して，

$$d^p(x,y) \leq d^p(x,x_k)+d^p(x_k,y)$$

が成り立つ．従って，

$$D^pd^p(x,y) \leq D^p(d^p(x,x_k)+d^p(x_k,y)) \leq \sum d^p(x_i,x_{i+1})$$

が成り立つ．以上により主張が従う． □