モース関数の存在

1

1.1　参考文献

松本幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店, 2005.

1.2

設定 1.1. 多様体 M の次元は m としておく.

命題 1.2. ($\mathbb{R}^m$ におけるモース関数の存在). $U \subset \mathbb{R}^m$ を開集合, $f : U \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする. このとき, 適当な m 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ で

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m) - (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m)$$

が U 上のモース関数となるものが存在する. また, このとき, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ はいずれも絶対値がいくらでも小さくなるようとることができる.

証明. step: $a_1, \ldots, a_m$ が ∇f の臨界値でないならば,

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m) - (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m)$$

はモース関数である.
($\because$) $p \in U$ を $\tilde{f}$ の臨界点とする. $\nabla f_p - a = 0$ なので, $\nabla f_p = a$ なのだが, a は ∇f の臨界値ではないので, $p \in U$ は ∇f の臨界点ではない. 従って, ∇f の微分 H^f は非退化であるので, $\det H^f_p \neq 0$ が成り立つ. $\det H^{\tilde{f}} = \det H^f$ であるので, $p \in U$ は $\tilde{f}$ の非退化な臨界点である. つまり, 任意の臨界点が非退化臨界点であるので, $\tilde{f}$ はモース関数である. ▲

続き.
step: $a_1, \ldots, a_m$ は存在し, さらに絶対値がいくらでも小さくとれる
($\because$) ∇f の臨界値の集合はサードの定理から測度 0 であるので, 0 のいくらでも近くにもとめるものが存在する. (あたりまえだが, 0 がとれるわけではない.) ▲

□

命題 1.3. M がコンパクト多様体であるとき, 座標近傍による有限被覆と, コンパクト集合による有限被覆の組 $(\{U_i\}_{i=1}^N, \{K_i\}_{i=1}^N)$ で, $K_i \subset U_i \quad (i = 1, \ldots, N)$ を満たすものが存在する.

証明. 任意の $p \in M$ に対して $p \in U_p$ なる座標近傍をとる. U_p は開集合なので, 十分小さい半径の開球 $B(p; \varepsilon)$ を含む. $\{q \in M \mid d(p, q) \leq \varepsilon/2\}$ は, コンパクト集合 M に含まれる閉集合なのでコンパクト集合. これを K_p とする. $M = \cup_{p \in M} \mathrm{int}(K_p)$ なる被覆の有限部分被覆をとれば, もとめるような組が得られる. □

設定 1.4. M をコンパクトな多様体とする．$f, g : M \to \mathbb{R}$ は, M に対して, 有限個の座標近傍 U_i による被覆 $M = U_i$ と, 有限個のコンパクト集合 $K_i \in U_i$ による被覆 $M = \cup K_i$ の組 $(\{U_i\}, \{K_i\})$ をとったとき, 任意の K_i 上で

$$
\begin{aligned}
&|f(p) - g(p)| < \varepsilon \\
&|\partial_i f(p) - \partial_i g(p)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\
&|\partial_i \partial_j f(p) - \partial_i \partial_j g(p)| < \varepsilon \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

を満たす時に $(\{U_i\}, \{K_i\}, C^2, \varepsilon)$ の意味で近いという．

注意 1.5. $(\{U_i\}, \{K_i\})$ を別の $(\{U_i'\}, \{K_i'\})$ に取り替えることを考える．$(\{U_i\}, \{K_i\}, C^2, \varepsilon)$ の意味で近かったからといって, $(\{U_i'\}, \{K_i'\}, C^2, \varepsilon)$ の意味で近いとは限らない．例えば球面を二つ用意して, 二つの球面をまたがる被覆がない場合とある場合を考えれば良い．

設定 1.6. 今後, M には常に前述の $(\{U_i\}, \{K_i\})$ を適当にひとつ固定して備えておく．

命題 1.7. M を多様体, $C \in M$ をコンパクト集合, $g : M \to \mathbb{R}$ とする．C が g の退化した臨界点を含まなければ, 十分小さな $\varepsilon > 0$ で
$(\{U_i\}, \{K_i\}, C^2, \varepsilon)$ の意味で近い任意の滑らかな関数 f に対して C が f の退化した臨界点を含まないような ε がとれる．

証明. g の退化した臨界点が $C \cup K_i$ の中に存在しないことの必要十分条件は明らかに

$$
|\partial_1 g| + \cdots + |\partial_m g| + |\det(\partial_i \partial_j g)| > 0
$$

が $C \cap K_i$ 上で成り立つことなので, 十分小さい ε を選んでおくと, $(\{U_i\}, \{K_i\}, C^2, \varepsilon)$ の意味で近い滑らかな関数 f に対して

$$
|\partial_1 f| + \cdots + |\partial_m f| + |\det(\partial_i \partial_j f)| > 0
$$

が $C \cap K_i$ 上で成り立つ．従って, $C \cap K_i$ は退化臨界点を含まない．従って $C = \cup(C \cap K_i)$ は退化臨界点を含まない． □

命題 1.8. M を多様体とする．(U, K) を座標近傍と, $K \subset U$ を満たすコンパクト集合の組とする．このとき, 滑らかな関数 $h : U \to \mathbb{R}$ で
(1) $0 \leq h \leq 1$
(2) h は K の適当な開近傍 V の上で恒等的に 1 である．
(3) h は V を適当なコンパクト集合 $L \subset U$ の外部では恒等的に 0 である．M を満たすものが存在する．

証明. 多様体の基礎とかにかいてる． □

注意 1.9. (この h を (U, K) に適合したプリン関数ということにし, (K, V, L, U) を皿ということにする．)

命題 1.10. (閉多様体上のモース関数の存在). M を閉多様体, $g : M \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする．$(\{U_i\}, \{K_i\}, C^2, \varepsilon)$ の意味で近い滑らかな関数 $f : M \to \mathbb{R}$ で, モース関数となるものが存在する．

証明.

$$
C_0 \coloneqq \varnothing, C_i \coloneqq K_1 \cup \cdots \cup K_i
$$

と定める. $f_0 \coloneqq g$ とする. 滑らかな関数 $f_{i-1}: M \to \mathbb{R}$ で C_{i-1} に退化臨界点を含まないものが存在したとする. (U_i, K_i) に適合するプリン関数 h をとる. 皿を (K_i, V_i, L_i, U_i) とする.

$$f_i \coloneqq \begin{cases} f_{i-1}(x_1, \dots, x_m) - (a_1x_1 + \cdots + a_m x_m)h_i(x_1, \dots, x_m) & (x \in U_i) \\ f_{i-1}(x_1, \dots, x_m) & (x \in L_i) \end{cases}$$

として定める ($a_1, \dots, a_m$ はあとからうまく定める). すると, プリンは K_i 上で 1 なので, f_i は K_i で モース関数となるように $a_1, \dots, a_m$ をうまく定めればよい. 従って, f_i は K_i 上に退化臨界点を持たない.
step: $a_1, \dots, a_m$ はさらに f_i が f_{i-1} が $(\{U_i\}, \{K_i\}, C^2, \varepsilon)$ の意味で近いようにとりなおせる.
$(\because)$ U_i だと

$$\begin{aligned} &|f_i(p) - f_{i-1}(p)| = |a_1x_1 + \cdots a_m x_m|\, h_i(p) \\ &|\partial_k f_i(p) - \partial_k f_{i-1}(p)| = |a_k h_i(p) + (a_1x_1 + \cdots a_m x_m)\partial_k h_i(p)| \\ &|\partial_k\partial_l f_i(p) - \partial_k\partial_l f_{i-1}(p)| = |a_k \partial_l h_i(p) + a_l \partial_k h_i(p) + (a_1x_1 + \cdots a_m x_m)\partial_k\partial_l h(p)| \end{aligned}$$

であり, $h_i, \partial_k h_i, \partial_k\partial_l h_i$ は連続なのでコンパクト集合上では最大値をとるので, $a_1, \dots, a_m$ を十分小さくとれば, K_i 上では C^2 の意味で近い. K_i 以外のコンパクト集合 K_j の上では, 結局 K_i の外では $f_i = f_{i-1}$ であることを考えると, $K_j \cap L_i$ 上での評価を考えれば良い. $K_i \cap L_j$ は座標近傍 $U_i \cap U_j$ に含まれるので, 上の式の右辺に座標変換のヤコビ行列分の変化が生じるのだが, それもコンパクト集合上の連続関数なので $a_1, \dots, a_m$ を十分小さくとればよい. ▲

f_{i-1} は $K_1 \cup \cdots K_{i-1}$ 上に退化臨界点をもたないので, 上のようにして定めた $(\{U_i\}, \{K_i\}, C^2, \varepsilon)$ の意味で近い f_i も $K_1 \cup \cdots K_{i-1}$ に退化臨界点をもたない. K_i も f_i の退化臨界点を含まないので, $K_1 \cup \cdots K_{i-1} \cup K_i$ に退化臨界点を持たない. これを繰り返すことで, $M = \cup K_i$ 上に退化臨界点をもたない $(\{U_i\}, \{K_i\}, C^2, \varepsilon)$ の意味で近い滑らかな関数を構成できる.

□