# 熱核が熱方程式の解であることの証明 (ユークリッド空間)

## 1

**定義 1.1.** $t > 0$ に対して $h_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$h_t(x, y) \coloneqq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}$$

で定め, これを対称連続関数の形の熱核という. また, $p_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を,

$$p_t(x) \coloneqq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

で定める. これを単に熱核という.

**命題 1.2.** (熱核は熱方程式の解). $t \in \mathbb{R}_{>0}, x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\partial_t p(t, x) = \Delta_x p(t, x)$$

が成り立つ.

**証明.**

$$u(t, x) \coloneqq \log p = -\frac{n}{2} \log t - \frac{\|x\|^2}{4t} + \mathrm{Const}$$

と定めると, $p(t, x) = e^{u(t,x)}$ である.

$$\begin{aligned}
(\partial_t u(t, x)) &= -\frac{n}{2}\frac{1}{t} + \frac{\|x\|^2}{4t^2}, \\
(\partial_{x_i} u(t, x)) &= -\frac{x_i}{2t}, \\
(\partial_{x_i}^2 u(t, x)) &= -\frac{1}{2t}
\end{aligned}$$

であることから,

$$(\partial_t u) = \Delta_x u + (\nabla u, \nabla u)$$

が成り立つ.

$$\partial_t p(t, x) = (\partial_t u(t, x))e^{u(t,x)}, \quad \Delta_x p(t, x) = (\Delta_x u(t, x) + (\nabla_x u(t, x), \nabla_x u(t, x)))e^{u(t,x)}$$

であるので,

$$\partial_t p(t, x) = \Delta_x p(t, x)$$

が成り立つ. □