

1-良い射影

1

定義 1.1. (良い射影). $A, B \subset X$ を部分集合とする. $a \in A$ は

$$\exists \pi(a) \in A \cap B; b \in B \Rightarrow d(a, b) = d(a, \pi(a)) + d(\pi(a), b)$$

であるとき, B に良く射影される. 任意の点 $a \in A$ が B に良く射影される, A は B に良く射影されるという. A が B に良く射影され, B が A に良く射影されるとき, A, B は互いに良く射影されるという.

注意 1.2. $a \in A$ が B に良く射影されるとき, 類似度行列 Z の成分に関して, 当たり前だが任意の $b \in B$ に対して

$$z_{ab} = z_{a\pi(a)}z_{\pi(a)b}$$

が成り立つ.

命題 1.3. (和集合のマグニチュード). $A, B \subset X$ を X の有限部分集合で, $A, B, A \cap B$ がそれぞれウェイト $w^A, w^B, w^{A \cap B}$ を持つとする. A, B が互いに良く射影されるならば,

$$w(x) := \begin{cases} w^A(x) & x \in A \setminus B \\ w^A(x) + w^B(x) - w^{A \cap B}(x) & x \in A \cap B \\ w^B(x) & x \in B \setminus A \end{cases}$$

と定めると, これは $A \cup B$ のウェイトである. 従って,

$$\text{Mag}(A \cup B) = \text{Mag}(A) + \text{Mag}(B) - \text{Mag}(A \cap B)$$

が成り立つ.

証明. 実際, w がウェイトになることは例えば類似度行列の $a \in A$ 行目に関しては

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} Z(a, x)w(x) &= \sum_{a' \in A} Z(a, a')w^A(a') + \sum_{b \in B} Z(a, b)w^B(b) - \sum_{c \in A \cap B} Z(a, c)w^{A \cap B}(c) \\ &= \sum_{a' \in A} Z(a, a')w^A(a') \\ &\quad + \sum_{b \in B} Z(a, \pi(a))Z(\pi(a), b)w^B(b) - \sum_{c \in A \cap B} Z(a, \pi(a))Z(\pi(a), c)w^{A \cap B}(c) \\ &= 1 + Z(a, \pi(a))\left(\sum_{b \in B} Z(\pi(a), b)w^B(b) - \sum_{c \in A \cap B} Z(\pi(a), c)w^{A \cap B}(c)\right) \\ &= 1 + Z(a, \pi(a))(1 - 1) = 1 \end{aligned}$$

よりわかる. $b \in B$ 行目に関しても全く同様に示される. さらに, この $\sum_{x \in A \cup B} w(x)$ を計算すると, 主張が従う. □

命題 1.4. (1 点で交わる集合同士の和). $A, B \subset X$ を 1 点 ($c \in A \cap B$ で表す.) で共通部分をもつ有限部分集合とする. A, B がマグニチュードをもち, A, B が互いに良く射影されるとき, $A \cup B$ はメビウス行列をもち,

$$\mu_{A \cup B}(x, y) := \begin{cases} \mu^A(x, y) & x, y \in A, (x, y) \neq (c, c) \\ \mu^B(x, y) & x, y \in B, (x, y) \neq (c, c) \\ \mu^A(c, c) + \mu^B(c, c) - 1 & (x, y) = (c, c) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で与えられる. ただし, A, B のメビウス行列を $M^A = (\mu_{ij}^A), M^B = (\mu_{ij}^B)$ で表している.

証明. 実際, 適当に成分を並べて

$$\begin{aligned} Z^{A \cup B} & \left(\begin{pmatrix} M^A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^B \end{pmatrix} - \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \right) \\ & = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} - \text{diag}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = E \end{aligned}$$

と計算できる. □