正則性に関連する不等式 1

1

k を相応に大きな非負整数とする．f を $H^k(\mathbb{R}^n)$ の元とする．$f \in L^2$ であるので, L^2 におけるフーリエ変換が可能で, それを $\hat{f}$ で表すと, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ である．適当な定数 Const を用いると

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^k d\xi \le \mathrm{Const}\, \|f\|_{H^k}^2$$

が成り立つ．k が相応に大きいときには, $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-k} d\xi < \infty$ であることに注意しつつ, 適当に式変形すると

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi\right)^2 &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1+|\xi|^2)^k d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-k} d\xi\right) \\ &\le \mathrm{Const}\, \|f\|_{H^k}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-k} d\xi\right) < \infty\end{aligned}$$

であるので, $\int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi < \infty$ であるので, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ である．従って, L^1 におけるフーリエ変換の反転公式から, 殆ど至る所

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

が成り立つ．

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{iy\xi} d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)(e^{iy\xi} - e^{ix\xi})\right| d\xi \le \int_{\mathbb{R}^n} 2\left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi < \infty$$

を眺めると, 優収束定理を用いることで $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$ が連続であることがわかる．また,

$$|f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi\right| \le \mathrm{Const}\, \|f\|_{H^k}^2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-k} d\xi\right)$$

より,

$$|f(x)| \le \mathrm{Const}\, \|f\|_{H^k}^2$$

であるので,

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |f| \le \mathrm{Const}\, \|f\|_{H^k}^2$$

が成り立つ．さらに, $|\alpha| \le m$ であれば, $\partial^\alpha f \in H^{k-m}$ であることに注意しながら変形すると,

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f| \le \mathrm{Const}\, \|\partial^\alpha f\|_{H^{k-m}} \le \mathrm{Const}\, \|f\|_{H^k}$$

であるので,

$$\|f\|_{C^m} \le \mathrm{Const}\, \|f\|_{H^k}^2$$

が成り立つ．(k は具体的には少なくとも $k > \frac{n}{2} + m$ であればよい.)