相対エントロピーの導出

注意 0.1. N が十分大きいとき

$$\log(N!) \sim N \log N - N$$

が成り立つことを用いる.

状況設定

全体で N 個の玉があり, それぞれの玉には 1 から k までの番号がつけられているとする. 玉の割合を

$$p_1, p_2, \ldots p_k$$

とする. 当然 $1 = p_1 + \cdots + p_k$ が成り立っている.

つまるところ, 番号 i の玉が Np_i 個ある.

並び替えが何通りあるかを考えると

$$\frac{N!}{(Np_1!) \cdots (Np_k!)}$$

である. 天下り的に対数をとり, スターリングの公式を用いると,

$$\begin{aligned}
\log(N!) - \sum \log(Np_i!) &\sim (N \log N - N) - (\sum \{Np_i \log(Np_i) - (Np_i)\}) \\
&= (N \log N - N) - (\sum \{Np_i(\log N + \log p_i) - (Np_i)\}) \\
&= -\sum Np_i \log p_i
\end{aligned}$$

が成り立つ. これを N で割り, ”平均” 的なものを考えると,

$$-\sum p_i \log p_i$$

である.