等長写像メモ 2

1

命題 1.1. $f : M \to N$ を微分同相とする．

$$df[X,Y] = [dfX, dfY] \quad (X, Y \in \Gamma(TM))$$

が成り立つ．

証明.

$$((dfY)F) \circ f = ((dfY)_{f(\cdot)})F = (df_{(\cdot)}Y)F = Y_{(\cdot)}(F \circ f)$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}(df[X,Y])F &= [X,Y](F \circ f) = X(Y(F \circ f)) - Y(X(F \circ f)) \\ &= X(((dfY)F) \circ f) - Y(((dfX)F) \circ f) = (dfX)((dfY)F) - (dfY)((dfX)F) = [dfX, dfY]\end{aligned}$$

□

命題 1.2. $f : (M,g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を等長写像，$\nabla, \tilde{\nabla}$ をそれぞれ $(M,g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ のレビチビタ接続とする．このとき，

$$\begin{aligned}&(1) df(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{dfX} dfY \quad (X, Y \in \Gamma(TM)) \\ &(2) df(R(X,Y)Z) = R(dfX, dfY)dfZ \quad (X, Y, Z \in \Gamma(TM))\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明.

$$\check{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} := df(\nabla_X Y) \quad (\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(\tilde{M}))$$

により $\tilde{M}$ に新しい接続を定める (ただし，$X, Y := df^{-1}(X), df^{-1}(Y)$)．$p \in M$ に対して $\dot{c}_0 = X_p, c_0 = p$ なる曲線 c をとる．

$$\begin{aligned}\check{\nabla}_{\tilde{X}}(\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z})) &= \tilde{X}(\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z})) = (dfX)\tilde{g}(dfY, dfZ) \\ &= \partial_t|_0(\tilde{g}(dfY, dfZ) \circ (f(c(t))))) = \partial_t|_0(f^*\tilde{g}(Y,Z)_{c(t)}) = \partial_t|_0(g(Y,Z)) \\ &= X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = f^*\tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + f^*\tilde{g}(Y, \nabla_X Z) \\ &= \tilde{g}(\check{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z}) + \tilde{g}(\tilde{Y}, \check{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z})\end{aligned}$$

であることと，

$$\check{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \check{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}] = df(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - df[X,Y] = df[X,Y] - df[X,Y] = 0$$

であることから，$\check{\nabla}$ は $(\tilde{M}, \tilde{g})$ のレビチビタ接続である．従って，レビチビタ接続の一意性から，$\check{\nabla} = \tilde{\nabla}$ が成り立つ．すなわち，

$$\tilde{\nabla}_{dfX} dfY = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \check{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = df(\nabla_X Y)$$

である．(2) は $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ であるので，(1) と合わせると容易に従う． □

命題 1.3. $f : (M,g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ を等長写像とする．このとき，$v \in T_pM, df_p v \in T_{f(p)}\tilde{M}$ を始方向とする測地線 $\gamma, \tilde{\gamma}$ に対して

$$\begin{aligned}&(1) \tilde{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t) \\ &(2) df \circ P_{\gamma}^{s,t} = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} \circ df\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明. (1)$\tilde{\nabla}_{df\dot{\gamma}_t}(df\dot{\gamma}_t) = df(\nabla_{\dot{\gamma}_t}\dot{\gamma}_t) = 0$ なので，$f \circ \gamma(t)$ は測地線である．また，始点が $f \circ \gamma(0) = f(p)$ であり，始方向が $df(\dot{\gamma}_0) = df_p(v)$ であるので，$f \circ \gamma = \tilde{\gamma}$ が成り立つ．(2)$w \in T_{\gamma_s}M$ に対して，$\tilde{W}_t := df(P_{\gamma}^{s,t}(w))$ は $\tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}_t} df(P_{\gamma}^{s,t}(w)) = df(\nabla_{\dot{\gamma}_t}(P_{\gamma}^{s,t}w)) = 0$ より，$\tilde{W}_t$ は $\tilde{\gamma}_t$ に沿って平行なベクトル場であるので，

$$df(P_{\gamma}^{s,t}(w)) = \tilde{W}_t = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} \tilde{W}_s = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} df(P_{\gamma}^{s,s}(w)) = P_{\tilde{\gamma}}^{s,t} dfw$$

□

命題 1.4. $(M,g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ を同じ n 次元のリーマン多様体，$p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M}$ とする．

$$I : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$$

を等長な線型同型とする．$\varepsilon > 0$ を，指数写像を制限すると微分同相写像 $\exp_p : B(o_p; \varepsilon) \to B(p; \varepsilon), \exp_p : B(o_{\tilde{p}}; \varepsilon) \to B(\tilde{p}; \varepsilon)$ となるようにとる．微分同相写像を，

$$f := \exp_{\tilde{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1} : B(p; \varepsilon) \to B(\tilde{p}; \varepsilon)$$

で定める．
f が等長写像であることの必要十分条件は，
p を始点とする任意の正規測地線 $\gamma(t)$ $(|t| < \varepsilon)$ に対して

$$\begin{aligned}&\tilde{\gamma}(t) := f \circ \gamma(t) \\ &I_t := P_{\tilde{\gamma}}^{0,t} \circ I \circ P_{\gamma}^{t,0} : T_{\gamma(t)}M \to T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}\end{aligned}$$

と定めた時，

$$I_t(R(X,Y)Z) = \tilde{R}(I_tX, I_tY)I_tZ \quad (X, Y, Z \in T_{\gamma(t)}M)$$

が成り立つことである．

証明. 略 □