ウェイトはなんならソボレフ空間に属する

1

記号 1.1. M_X で X 上の有限な台をもつ複素測度全体を表す. $w, v \in M_X$ に対して

$$(w, v)_Z := \int Zw(x)d\bar{v}(x)$$

により内積を定める.

設定 1.2.

$$X = \mathbb{R}^n$$

とする.

命題 1.3. $M_X \subset H_{-(n+1)/2}$ が成り立つ.

証明. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\delta_x \subset H_{-(n+1)/2}$ であることから主張が従う.

□

命題 1.4. $\mathbb{R}^n$ 上の関数

$$e^{-\|x\|}$$

のフーリエ変換は

$$\frac{n!\omega_n}{(2\pi)^{n/2}}\langle x\rangle^{-(n+1)}$$

である.

証明. 認めることにする. □

命題 1.5. 包含写像 $W_X \to H_{-(n+1)/2}$ は有界線型作用素である.

証明. $w = \sum_i c_i\delta_{x_i} \in W_X$ を適当にとる. $F(\delta_x)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-ix\xi}$ であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
(w,w)_{H_{-(n+1)/2}} &= \int \langle\xi\rangle^{-(n+1)/2} F(w)(\xi) \langle\xi\rangle^{-(n+1)/2} \overline{F(w)(\xi)} d\xi \\
&= \int \langle\xi\rangle^{-(n+1)} \sum c_i \overline{c_j} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\right)^2 e^{-ix_i\xi} e^{ix_j\xi} d\xi \\
&= \sum c_i \overline{c_j} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\right)^2 \int \langle\xi\rangle^{-(n+1)} e^{i(x_j-x_i)\xi} d\xi \\
&= \sum c_i \overline{c_j} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\right)^2 \int \left(\frac{n!\omega_n}{(2\pi)^{n/2}}\right)^{-1} Fz(\xi) e^{i(x_j-x_i)\xi} d\xi \\
&= \sum c_i \overline{c_j} \frac{1}{n!\omega_n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int Fz(\xi) e^{i(x_j-x_i)\xi} d\xi \\
&= \sum c_i \overline{c_j} \frac{1}{n!\omega_n} z(x_j - x_i) \\
&= \frac{1}{n!\omega_n} (w,w)_Z
\end{aligned}
$$

より主張が従う.

□

命題 1.6.

$$\mathcal{W}_X \subset H_{-(n+1)/2}$$

が成り立つ.

証明. 有界線型拡張定理より従う. □