$\mathbb{RP}^n$ の胞体分割

1

$n = 2$ でやってみる. 球面 S^2 の北半球 S^2_+ を考えて, 赤道上の対蹠点を同一視することで $\mathbb{RP}^2$ を構成する.

$$\varphi : D^2 \to \mathbb{RP}^2; (x, y) \mapsto [(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})]$$

という写像を考えると, 様子を想像したらわかるように全射連続写像であり, $D^2 \setminus S^1$ への制限が $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{RP}^1$ への同相写像になる. そんな感じで $e^2 := \mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{RP}^1 =:, e^1 := \mathbb{RP}^1 \setminus \mathbb{RP}^0, e^0 := \mathbb{RP}^0$ てな感じで

$$\mathbb{RP}^2 = e^2 \sqcup e^1 \sqcup e^0$$

という胞体分割ができる.

全く同様にして

$$\mathbb{RP}^n = e^n \sqcup e^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup e^0$$

という胞体分割がみつかる.