縮小写像の原理

1

命題 1.1. (縮小写像の原理). (X, d) を完備距離空間, $f : X \to X$ を $0 < \lambda < 1$ で

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad ({}^\forall x, y \in X)$$

を満たすものが存在する写像とする. このとき, $p \in X$ で

$$fp = p$$

を満たすものがただ一つ存在する.

証明. 適当に $x_0 \in X$ をとる.

$$x_1 \coloneqq f(x_0),\ x_2 \coloneqq f(x_1), \ldots, x_n \coloneqq f(x_{n-1}), \ldots$$

と定めると, $n \leq m$ に対して,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots \lambda^{m-1}) d(x_0, fx_0) \end{aligned}$$

が成り立つ.

$$d(x_0, fx_0) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i < \infty$$

であるので, x_n はコーシー列である. X は完備であるので, $x_n (= f(x_{n-1}))$ は適当な点 x に収束する.

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad ({}^\forall x, y \in X)$$

より, f は連続であるので,

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = x$$

が成り立つ. □