

# 類似度写像とエネルギー

## 1

設定 1.1.

$$Z(R, p; X)u(x) := \int_X e^{-Rd^p(x,y)} u(y) dy$$

と定める.

命題 1.2.  $A \subset \mathbb{R}^n$  を  $\int_0^\infty R^z \left( \int_{A \times A} \frac{1}{R} e^{-Rd(x,y)} dx dy \right) dR < \infty$  を満たす部分集合とする. このとき,  $\operatorname{Re} z > 0$  なる  $z \in \mathbb{C}$  に対して,

$$\int_{A \times A} \frac{1}{d^z(x,y)} dx dy = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty R^z \left( \int_{A \times A} \frac{1}{R} e^{-Rd(x,y)} dx dy \right) dR$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty r^{z-1} e^{-r} dr \\ &= \int_0^\infty (Rd)^{z-1} e^{-Rd} dR = \int_0^\infty d^z R^{z-1} e^{-Rd} dR \end{aligned}$$

より

$$\int_{A \times A} \frac{1}{d^z(x,y)} dx dy = \int_{A \times A} \left( \int_0^\infty R^{z-1} e^{-Rd(x,y)} dR \right) dx dy$$

が成り立つ.  $\int_0^\infty R^z \left( \int_{A \times A} \frac{1}{R} e^{-Rd(x,y)} dx dy \right) dR < \infty$  が成り立つとき, フビニの定理を適用できるので, 積分が交換できて主張が従う.  $\square$