

1 未満の snowflake

1

命題 1.1. (X, d) を距離空間とする. このとき, $1 < p$ に対して $(X, d^{1/p})$ も距離空間である.

証明.

$$d^{1/p}(x, y) > d^{1/p}(x, z) + d^{1/p}(z, y)$$

が成り立つ点 $x, y, z \in X$ が存在すると仮定すると, 両辺 p 乗すると,

$$d(x, y) > (d^{1/p}(x, z) + d^{1/p}(z, y))^p \geq d(x, z) + d(z, y)$$

が成り立つので, 三角不等式に矛盾する.

□