R^n 上のソボレフ空間と近似ソボレフ空間は一致する

1

命題 1.1. $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ とする．

$$H^m(\mathbb{R}^n) = H_0^m(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．

証明. ρ_ε を軟化子とする．$\chi \in C_c^\infty$ を

$$0 \leq \chi \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad \chi(x) = 1 \quad (\|x\| \leq 1)$$

であるプリンする．$\chi_n(x) \coloneqq \chi(\frac{x}{n})$ と定める．

$$\chi_n(\rho_{1/n} * u) \in C_c^\infty(\Omega)$$

を考える．

任意に $|\alpha| \leq m$ をとる．

<u>step:</u>

$$\left\|\chi_n(\rho_{1/n} * \partial^\alpha u) - \partial^\alpha u\right\| \to 0$$

$(\because)$

$$\begin{aligned}\left\|\chi_n(\rho_{1/n} * \partial^\alpha u) - \partial^\alpha u\right\|_{L^2} &= \left\|\chi_n(\rho_{1/n} * \partial^\alpha u) - \chi_n \partial^\alpha u + \chi_n \partial^\alpha u - \partial^\alpha u\right\|_{L^2} \\ &\leq \left\|\chi_n(\rho_{1/n} * \partial^\alpha u) - \chi_n \partial^\alpha u\right\|_{L^2} + \|\chi_n \partial^\alpha u - \partial^\alpha u\|_{L^2} \\ &\leq \left\|\rho_{1/n} * \partial^\alpha u - \partial^\alpha u\right\|_{L^2} + \left(\int |(\chi_n - 1)\partial^\alpha u|^2 \, dx\right)^{1/2} \\ &\to 0 + 0\end{aligned}$$

▲

<u>step:</u>

$$\left\|\sum_{0<\beta\leq\alpha} {}_\alpha C_\beta (\partial^{\alpha-\beta}\chi_n)(\rho_{1/n} * \partial^\alpha u)\right\|_{L^2} \to 0$$

$(\because)$

$\partial^\beta \chi(x/n) = n^{-|\beta|}(\partial^\beta\chi)(x/n)$ であることに注意すると, $\sup\left|\partial^\beta\chi_n(x)\right| \leq \frac{1}{n^{|\beta|}}\sup\partial^\beta\chi(x)$

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{0<\beta\leq\alpha} {}_\alpha C_\beta (\partial^{\alpha-\beta}\chi_n)(\rho_{1/n} * \partial^\alpha u)\right\|_{L^2} &\leq \sum_{0<\beta\leq\alpha} {}_\alpha C_\beta \sup\left|\partial^{\alpha-\beta}\chi_n\right| \left\|\rho_{1/n} * \partial^\alpha u\right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{0<\beta\leq\alpha} {}_\alpha C_\beta \frac{1}{n^{|\alpha-\beta|}} \sup\left|\partial^{\alpha-\beta}\chi\right| \left\|\partial^\alpha u\right\|_{L^2} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

以上のことから

$$\begin{aligned}
\left\|\partial^\alpha\chi_n(\rho_{1/n} * u) - \partial^\alpha u\right\|_{H^m} &= \left\|\chi_n\partial^\alpha(\rho_{1/n} * u) + \sum_{0<\beta\leq\alpha} {}_\alpha C_\beta \partial^\beta\chi_n\partial^{\alpha-\beta}(\rho_{1/N} * u) - \partial^\alpha u\right\| \\
&\leq \left\|\chi_n(\rho_{1/n} * \partial^\alpha u) - \partial^\alpha u + \sum_{0<\beta\leq\alpha} {}_\alpha C_\beta \partial^{\alpha-\beta}\chi_n\partial^\beta(\rho_{1/N} * u)\right\|
\end{aligned}$$

▲

□