S^1 の基本群

1

定義 1.1. (道の連結). $f, g : [0,1] \to X$ に対して

$$f \natural g := \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

2

設定 2.1.

$$c_n : [0,1] \to S^1; t \mapsto (\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt)$$
$$\pi : \mathbb{R} \to S^1; s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$$
$$\tilde{c}_n : [0,1] \to \mathbb{R}; t \mapsto nt$$

命題 2.2. $\pi_1(S^1)$ は $c(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi s)$ のホモトピー類が生成する無限巡回群と同型である.

証明. <u>step:</u>

$$[c_1]^n = [c_n]$$

$(\because)$ 明らかである. ▲

<u>step:</u> 任意の $l \in \pi(S^1, (1,0))$ に対して, $n \in \mathbb{Z}$ で $l \simeq c_n$ を満たすものが存在する. 従って

$$[l] = [c_n]$$

が成り立つ.

$(\because)$ $l : [0,1] \to S^1$ を $(1,0)$ を基点とするループとする. $\mathbb{R}$ へのリフト $\tilde{l} : [0,1] \to \mathbb{R}$ がとれる. ループ l は時刻 1 で基点に戻ってくるので, その持ち上げについて $\tilde{l}_1 \in \mathbb{Z}$ である. $\tilde{c}_{\tilde{l}_1}$ を考え,

$$(1-t)\tilde{l} + tc_{\tilde{l}_1}$$

を考えると, これは $\tilde{l}$ から $\tilde{c}_{\tilde{l}}$ へのホモトピーである. ▲

<u>step:</u> ($\tilde{l}$ は適当な c_n とホモトピックであるが, 別の c_m とホモトピックであるかもしれない.)

$$f \simeq c_n, f \simeq c_m \Rightarrow n = m.$$

$(\because)$ c_n から c_m へのホモトピーを f_t とする. $\mathbb{R}$ へのリフト $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ がとれる. $\tilde{f}_t(1)$ は t によらず同じである. $\tilde{f}_0(1) = n, \tilde{f}_1(1) = m$ であるので, $n = m$ が成り立つ. ▲

□