$\sqrt{1-t}$

1

1.1

例 1.1. $\sqrt{1-t}$ と 0 の近傍で一致する冪級数を探す．候補としては

$$1+\frac{1}{1!}\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(-1)|_{t=0}t+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(-1)^2|_{t=0}t^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}(1-t)^{-\frac{5}{2}}(-1)^3|_{t=0}t^3+\cdots$$

である．n 次の係数を a_n とすると，適当に眺めると

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|-1|\frac{1}{n+1}\frac{2(n+1)-3}{2}\to 1$$

であることから，$(-1,1)$ でこの級数は各点収束する．この級数を $f(t)$ で表すことにする．適当に眺めると $f(t)=-\frac{1}{2(1-t)}f'(t)$ が成り立つので，$f(0)=1$ を初期条件としてこの微分方程式を解くと

$$f(t)=\sqrt{1-t}$$

が解であることがわかる．微分方程式の解の一意性から $(-1,1)$ で $\sum a_n t^n=\sqrt{1-t}$ であることがわかる．$[0,1)$ における状況を観察することにする．地道に $\left\{\sum_{n=0}^N a_n\cdot 1\right\}_N$ を評価すると，上に有界な単調増大列であることがわかるので，$\sum_{n=0}^\infty a_n$ は存在するので，f は $\{1\}$ を定義域に含み，$f(1)=\sum_{n=0}^\infty a_n$ である．従って，$[0,1)$ 上で冪級数 $f(t)$ は一様収束し，$f(t)=\sqrt{1-t}$ である．

1.2　参考文献

Matt Young, "The Stone-Weierstrass Theorem", https://mast.queensu.ca/ speicher/Section14.pdf, 2006.