

Gelfand-Mazur

1

注意 1.1. 本文中に登場する多元環は, 特に断らない限り, 結合的であるとする.

定義 1.2. (ノルム環). 多元環 A とノルム $\|\cdot\|$ の組 $(A, \|\cdot\|)$ で, 任意の二点 $x, y \in A$ に対して

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

を満たすものを, ノルム環という.

定義 1.3. (バナッハ環). ノルムに関して完備であるノルム環を, バナッハ環という. 単位元をもつバナッハ環を, 単位的バナッハ環という.

注意 1.4. A をノルム環, $1 \in A$ を単位元とすると, $\|1\| = 1$ であるとは限らないが, 常に適当に正規化して $\|1\| = 1$ であるようにしておく.

定義 1.5. バナッハ環 A の可逆元全体を $GL(A)$ で表す.

定義 1.6. A を単位的バナッハ環, $x \in A$ とする.

$$\mathrm{Sp}(x; A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - x \notin GL(A)\}$$

と定め, これを x の A におけるスペクトルという.

定義 1.7. X をバナッハ空間, $z_0 \in \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{C}$ とする. $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ は,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \xi \right\| = 0$$

を満たす $\xi \in X$ が存在する時に, z_0 において微分可能であるという. また, このとき $f'(z_0) := \xi$ と表す. また, $\mathrm{dom}(f)$ の領域の任意の点において微分可能であるとき, f はその領域で正則であるという.

命題 1.8. A を単位的バナッハ環とする. $x \in A$ が $\|x\| < 1$ を満たすならば, $1 - x \in GL(A)$ である.

証明. 無限級数 $1 + x + x^2 + \cdots$ は収束して A に属する. これが $1 - x$ の逆元である. □

命題 1.9. $GL(A)$ は A の開集合である.

証明. 任意に $x \in GL(A)$ をとる. $B(x; \frac{1}{\|x\|})$ が $GL(A)$ に含まれることを示せば良い. $y \in B(x; \frac{1}{\|x\|})$ に対して

$$\|1 - x^{-1}y\| \leq \|x^{-1}\| \|x - y\| < \|x^{-1}\| \frac{1}{\|x\|} = 1$$

であるので, 前述の命題より $x^{-1}y \in GL(A)$ であるので, $y = xx^{-1}y$ の逆元として $(x^{-1}y)^{-1}x^{-1}$ がとれるので, $y \in GL(A)$ である. \square

命題 1.10. A を単位的バナッハ環, $x \in A$ とする. $\lambda \in \text{Sp}(x; A) \Rightarrow |\lambda| \leq \|x\|$ が成り立つ.

証明. $|\lambda| > \|x\|$ であるならば, $\lambda 1 - x$ の逆元として, 収束する無限級数 $\frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{\lambda}x + (\frac{1}{\lambda}x)^2 + \dots)$ がとれるので, $\lambda \notin \text{Sp}(x; A)$ である. \square

命題 1.11. A を単位的バナッハ環, $x \in A$ とする. このとき, $\text{Sp}(x; A)$ は閉集合である.

証明. $f: \mathbb{C} \rightarrow A; \lambda \mapsto \lambda 1 - x$ は,

$$\|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|(\lambda 1 - x) - (\mu 1 - x)\| = |\lambda - \mu|$$

より連続であり, $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(x; A) = f^{-1}(GL(A))$ であるので, 主張が従う. \square

命題 1.12. $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(x; A)$ に対して

$$\begin{aligned} (\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1} &= (\mu - \lambda)(\lambda 1 - x)^{-1}(\mu 1 - x)^{-1} \\ (\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1} &= (\mu - \lambda)(\mu 1 - x)^{-1}(\lambda 1 - x)^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda)(\lambda 1 - x)^{-1}(\mu 1 - x)^{-1} &= (\lambda 1 - x)^{-1}((\mu 1 - x) - (\lambda 1 - x))(\mu 1 - x)^{-1} \\ &= (\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1} \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu)(\mu 1 - x)^{-1}(\lambda 1 - x)^{-1} &= (\mu 1 - x)^{-1}((\lambda 1 - x) - (\mu 1 - x))(\lambda 1 - x)^{-1} \\ &= (\mu 1 - x)^{-1} - (\lambda 1 - x)^{-1} \end{aligned}$$

よりわかる. \square

命題 1.13. $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(x; A)$ に対して,

$$\frac{(\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1}}{\lambda - \mu} = -(\mu 1 - x)^{-2} + (\mu 1 - x)^{-1}((\mu 1 - x)^{-1} - (\lambda 1 - x)^{-1})$$

が成り立つ.

証明. 素朴に計算する. \square

命題 1.14. $f: A \rightarrow A; x \mapsto x^{-1}$ は連続である.

証明. 省略する. \square

命題 1.15. A をバナッハ環, $f: \mathbb{C} \setminus \text{Sp}(x; A) \rightarrow A$ を $f(\lambda) := (\lambda 1 - x)^{-1}$ により定めると, f は $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(x; A)$ 上で正則である.

証明. $\frac{(\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1}}{\lambda - \mu} = -(\mu 1 - x)^{-2} + (\mu 1 - x)^{-1}((\mu 1 - x)^{-1} - (\lambda 1 - x)^{-1})$ であるので,

$$\frac{(\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1}}{\lambda - \mu} - (-(\mu 1 - x)^{-2}) = (\mu 1 - x)^{-1}((\mu 1 - x)^{-1} - (\lambda 1 - x)^{-1})$$

となり, あとは逆元を取る操作が連続であることから,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \left\| \frac{(\lambda 1 - x)^{-1} - (\mu 1 - x)^{-1}}{\lambda - \mu} - (-(\mu 1 - x)^{-2}) \right\| \leq \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \|(\mu 1 - x)^{-1}\| \|((\mu 1 - x)^{-1} - (\lambda 1 - x)^{-1})\| = 0$$

なので主張が従う. □

命題 1.16. A をバナッハ環, $x \in A$ とする. このとき, $\text{Sp}(x; A)$ は空でない.

証明. 空であるとする, $(\lambda 1 - x)^{-1}$ は \mathbb{C} 上で正則であり, 無限遠点で消える連続関数なので有界でもある. 有界な整関数は定数関数である. また, 無限遠点で消えることと合わせると, $(\lambda 1 - x)^{-1}$ 恒等的に 0 でなければならない. 一方で, $(\lambda 1 - x)^{-1} = 0 \in A$ となることはない (零環でないから積の逆元が和の単位元となることはない) ので矛盾. □

命題 1.17. (Gelfand-Mazur). A を単位的可換バナッハ環とする. A がさらに体であるならば, $A \simeq \mathbb{C}$ である.

証明. 任意の $x \in A$ に対して, $\text{Sp}(x; A)$ は空でないので, 適当に $\lambda \in \text{Sp}(x; A)$ をとる. すると, $\lambda 1 - x \in A$ は積の逆元を持たない. A が体であることから, 積の逆元を持たないのは和の逆元に限られる. 従って, $\lambda 1 - x = 0$ であるので, $x = \lambda 1$ である. これにより定まる対応 $A \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto \lambda$ を考えると, 準同型である. 体から体への準同型は単射であることと, 明らかに全射であることから, 同型である. □