パスメトリック空間

1

1.1　パスメトリック空間

1.2　パスメトリック空間の定義

定義 1.1. (パスメトリック空間). 距離空間 (X, d) は, 任意の二点 $x_0, x_1 \in X$ に対して

$$d(x_0, x_1) = \inf\left\{\sup_{\Pi} \sum d(c(t_i), c(t_{i+1})) \mid c \in C([0,1]; X), c_0 = x_0, c_1 = x_1\right\}$$

が成り立つとき, パスメトリック空間という. ただし, sup は $[0,1]$ 区間のあらゆる分割を走る. $C([0,1]; X)$ は $[0,1]$ から X への連続写像全体を表す.

命題 1.2. (X, d) を完備距離空間とする. 任意の $x_0, x_1 \in X$ に対し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $x' \in X$ で

$$\sup d(x_0, x'), d(x', x_1) \leq \frac{1}{2} d(x_0, x_1) + \varepsilon$$

を満たすものが存在するならば, (X, d) はパラメトリック空間である.

証明. 十分小さい ε_1 に対して

$$\begin{aligned} \sup d(x_0, x_{\frac{1}{2}}), d(x_{\frac{1}{2}}, x_1) &\leq \frac{1}{2} d(x_0, x_1) + \varepsilon \frac{1}{2} d(x_0, x_1) \\ &= \frac{1}{2} d(x_0, x_1)(1 + \varepsilon_1) \end{aligned}$$

を満たす $x_{\frac{1}{2}}$ がとれる. 次にこれまた十分小さい ε_2 に対して

$$\begin{aligned} &\sup d(x_0, x_{\frac{1}{4}}), d(x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{1}{2}}), d(x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{3}{4}}) d(x_{\frac{3}{4}}, x_1) \\ &\leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2} d(x_0, x_1) + \varepsilon \frac{1}{2} d(x_0, x_1)) + \varepsilon_2(\frac{1}{2} d(x_0, x_1) + \varepsilon_1 \frac{1}{2} d(x_0, x_1)) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} d(x_0, x_1)(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \end{aligned}$$

を満たす $x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{3}{4}}$ がとれる. これを繰り返して, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ と $x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{3}{4}}, x_{\frac{1}{8}}, \ldots$ を定める. ただし, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ は十分小さくとって $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_k)$ が発散しないようにしておく. $[0,1]$ に含まれる二進有理数上で

$$d(x_{\frac{k}{2^n}}, x_{\frac{k+1}{2^n}}) \leq \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_k)$$

が成り立つ. 二進分数でない x_r の値を, r に収束する二進分数の列 $q_1, q_2, \ldots$ をとり, $\{x_{q_i}\}$ を考えるとコーシー列になるので完備性から収束列となり, その値によって x_r を定める. これにより連続な曲線 $x : [0,1] \to X$ が定まるが, $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_k)$ はいくらでも小さくできるので, パラメトリック空間であることが示される. □

命題 1.3. (X, d) を距離空間とする. (1) と (2) は必要十分である.
(1) 任意の $x_0, x_1 \in X$ に対し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $x' \in X$ で

$$\sup d(x_0, x'), d(x', x_1) \leq \frac{1}{2} d(x_0, x_1) + \varepsilon$$

を満たすものが存在する.
(2) 任意の $x_0, x_1 \in X$ に対し, 任意の $r_0 + r_1 \leq d(x, y)$ を満たす $r_0, r_1 > 0$ に対して

$$d(B(x_0; r_0), B(x_1; r_1)) \leq d(x_0, x_1) - r_1 - r_2$$

が成り立つ.

証明. 体調が良いときに埋める. □