ウェイトを超関数とみなせるか

1

設定 1.1. $X = (X, d, \mu)$ を測度距離空間とする. $W_X \coloneqq \{w : X \to \mathbb{R} \mid \#[w \neq 0] < \infty\}$ とする.

命題 1.2. W_X は X 上の有限な台をもつ符号付き測度全体の集合との間に全単射が存在する.

証明. 明らかである. □

設定 1.3. $k : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を正定値対称連続関数とする.

設定 1.4. $(\cdot, \cdot)_k : W_X \times W_X \to \mathbb{R}_{\geq 0}; (w, v) \mapsto \sum_{x,y} w(x)k(x, y)v(y)$ と定めると, これは W_X の内積を定める. また, この内積により W_X を完備化した空間を $(\mathcal{W}_X, (\cdot, \cdot)_k)$ により表す.

定義 1.5. $w \in W_X$, $f : X \to \mathbb{R}$ に対して,

$$w(f) \coloneqq \int_X f(x) \left(\sum_y k(x, y)w(y) \right) d\mu$$

と定める.

命題 1.6. $w \in W_X$, $f : X \to \mathbb{R}$ とする.

$$w(f) = \int_X f(x)(\delta_x, w)_k d\mu$$

が成り立つ.

証明.

$$\sum_y k(x, y)w(y) = (\delta_x, w)_k$$

より明らか. □

命題 1.7. $w_n \in W_X, w \in \mathcal{W}_X$ とし, $w_n \to w \in \mathcal{W}_X$ とし, f を X 上の有界連続関数とする. $\int_X k(x.x)^{1/2} d\mu < \infty$ であるならば, $w_n(f)$ は $\mathbb{R}$ におけるコーシー列である.

証明.

$$\begin{aligned}
|w_n f - w_m f| &= \left| \int_X f(x) \left(\sum_y k(x,y)(w_n(y) - w_m(y)) \right) d\mu \right| \\
&= \int_X |f(x)(\delta_x, (w_n - w_m))_k| \, d\mu \\
&\leq |\sup f| \int_X |(\delta_x, w_n - w_m)_k| \, d\mu \\
&\leq |\sup f| \, \|w_n - w_m\|_k \int_X (\delta_x, \delta_x)_k^{1/2} d\mu \\
&= |\sup f| \, \|w_n - w_m\|_k \int_X k(x,x)^{1/2} d\mu < \infty
\end{aligned}$$

□

設定 1.8. k を $\int_X k(x,x)^{1/2} d\mu < \infty$ を満たす対称連続関数としておく.

定義 1.9. $w \in \mathcal{W}_X$ に対して, $w : C_c^\infty \to \mathbb{R}$ を

$$w(f) \coloneqq \lim w_n(f)$$

により定める. ただし, w_n は $w_n \to w$ をみたす適当な点列 $w_n \in W_X$ である.