1

1.1

X を集合とする．$\lesssim$ が同値関係かつ順序関係であるとき, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$x \lesssim y$$

が成り立つ．以下に証明を述べる．任意に $x, y \in X$ をとる．順序関係であるので, 全順序律より $x \lesssim y$ または, $y \lesssim X$ である．$y \lesssim x$ であるならば, 同値関係の対称律から $x \lesssim y$ である．従って, 主張が成り立つ.

2

2.1

$p \in P$ を $U(A)$ の下限とする．$U(A)$ の下界を $D(U(A))$ で表すことにする．p が $U(A)$ の最小元でないとする (背理法)．「$p \in U(A)$ かつ $q \in U(A) \Rightarrow p \leq q$」 が成り立たないので,「$p \notin U(A)$ または $x \in U(A)$ de $p \leq x$ でないものが存在する」が成り立つ．$p \notin U(A)$ とすると, $a \in A$ で $a \leq p$ でないものがとれる．a は任意の $q \in U(A)$ に対して $a \leq q$ をみたすので, $a \in D(U(A))$ である．p は $D(U(A))$ の最大元なので, $a \leq p$ が成り立つ．よって矛盾する．$x \in U(A)$ で $p \leq x$ でないものが存在すると, $p \in D(U(A))$ であるので, $p \leq x$ が成り立つ．よって矛盾する．いずれにせよ矛盾するので, 主張が従う.

2.2

任意に部分集合 A をとる．A の上界は P の部分集合なので, 下限が存在する．A の上界の下限は A の上限であるので, A は上限をもつ.

3

$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \{n, m\} \mapsto (\min\{n, m\}, \max\{n, m\})$ と定めると, $A, B \in P_2(\mathbb{N})$ が $A \neq B$ であるならば, $\max A = \max B$ と $\min A = \min B$ がともに成り立つことはないので (ともに成り立つならば, $A = B$ となるから), $f(A), f(B)$ は第一成分か第二成分のいずれかが異なる．従って f は単射である.

$$1 \mapsto (1,1),\ 2 \mapsto (1,2),\ 3 \mapsto (2,1),\ 4 \mapsto (1,3),\ 5 \mapsto (2,2),\ 6 \mapsto (3,1), 7 \mapsto (1,4), \ldots$$

と定める写像が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ への全単射であるので, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合である．$P_2(\mathbb{N})$ から可算集合への単射が存在するので, $P_2(\mathbb{N})$ は可算集合である.