和と共通部分が連結性ならばそれぞれ連結

1

命題 1.1. X を位相空間とし, $A, B \subset X$ を閉部分集合で, $X = A \cup B$ を満たすものとする. $X, A \cap B$ を連結とする. このとき, A, B はともに連結である.

証明. A, B どちらかが連結でないと仮定する. A の相対位相における開かつ閉集合 $S_1, S_2 \subset A$ で, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ かつ, $S_i \neq \varnothing, A \quad (i = 1, 2)$ かつ $A = S_1 \sqcup S_2$ をみたすものがとれる. 開集合 $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2 \subset X$ で, $\tilde{S}_1 \cap A = S_1, \tilde{S}_2 \cap A = S_2$ を満たすものがとれる. $\tilde{S}_1 \cap (A \cap B) \neq \varnothing, \tilde{S}_2 \cap (A \cap B) \neq \varnothing$ とすると, $\tilde{S}_1 \cap (A \cap B) \cap \tilde{S}_2 \cap (A \cap B) = \varnothing$ であるので, $A \cap B$ が連結であることに矛盾してしまうので, $\tilde{S}_1 \cap (A \cap B) \neq \varnothing, \tilde{S}_2 \cap (A \cap B) \neq \varnothing$ ではない. $A \cap B \subset \tilde{S}_1, A \cap B \subset \tilde{S}_2$ のいずれかが成り立つ. $A \cap B \subset \tilde{S}_1$ とすると,

$$X = (\tilde{S}_2 \cap B^c) \sqcup (\tilde{S}_1 \cup A^c)$$

が成り立つことを考えると, X が連結であることに矛盾する. □