CAT(0) の 2-四角不等式による特徴づけ

1

定義 1.1. (CAT(0))(X,d) を測地的距離空間とする．任意の $x,y,z\in X$ に対して,

$$d^2(x,\gamma_z^y(\frac{1}{2}d(y,z)))\leq\frac{1}{2}d^2(x,y)+\frac{1}{2}d^2(x,z)-\frac{1}{4}d^2(y,z)$$

が成り立つとき, CAT(0) 空間であるという．ただし, γ_z^y は y,z を結ぶ測地線を表す.

定義 1.2. (X,d) を距離空間とする．4 点 $x,y,z,w\in X$ は,

$$d^2(x,z)+d^2(y,w)\leq d^2(x,y)+d^2(y,z)+d^2(x,w)+d^2(z,w)$$

が成り立つとき, 2-四角不等式をみたすという．任意の 4 点が 2-四角不等式を満たすとき, (X,d) は 2-四角不等式を満たすという.

注意 1.3. d^2 に関して, 対角線の和より周長の方が長いことを意味する不等式．しかしながら, 別に絵を描く時に本当に対角に位置しているかどうかとは関係ない．例えば, x,z,y,w を左上, 右上, 左下, 右下の順にかくと, x,y,z,w に関する四角形不等式の左辺 $d^2(x,z)+d^2(y,w)$ は, 絵的には対角ではない.

命題 1.4. (X,d) を距離空間とする．$(X,\sqrt{d})$ は 2-四角不等式を満たす.

証明. 任意の 4 点 $x,y,z,w\in X$ に対して,

$$\begin{aligned}
&d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)\\
&d(x,z)\leq d(x,w)+d(w,z)\\
&d(y,w)\leq d(y,x)+d(x,w)\\
&d(y,w)\leq d(y,z)+d(z,w)
\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$2(d(x,z)+d(y,w))\leq 2(d(x,y)+d(y,z)+d(z,w)+d(w,x))$$

が成り立つ．よって主張が従う. □

命題 1.5. 測地的距離空間 (X,d) が 2-四角不等式を満たすならば, 任意の 3 点 $x,y,z\in X$ に対して

$$d(y',z')\leq d(y,z)$$

が成り立つ．ただし, γ_y^x,γ_z^x をそれぞれ x から y, x から z の測地線とし, $y':=\gamma_y^x(\frac{1}{2}d(x,y)),\gamma_z^x(\frac{1}{2}d(x,z))$ とする.

証明. x, y', y, z' に対して 2-四角不等式を用いると,

$$\begin{aligned}d^2(x,y)+d^2(y',z') &\le d^2(x,y')+d^2(y',y)+d^2(y,z)+d^2(z,z')\\ &\le (\frac{1}{2}d(x,y))^2+(\frac{1}{2}d(x,y))^2+d^2(y,z')+(\frac{1}{2}d(z',x))^2\\ &= \frac{1}{2}d(x,y)^2+d^2(y,z')+\frac{1}{4}d^2(z',x)\end{aligned}$$

同様にして, x, y', z, z' に対して 2-四角不等式を用いると,

$$d^2(x,z)+d^2(y',z') \le \frac{1}{2}d(x,z)^2+d^2(y',z)+\frac{1}{4}d^2(x,y)$$

従って,

$$2d^2(y',z')+\frac{1}{4}d^2(x,y)+\frac{1}{4}d^2(x,z) \le d^2(y,z')+d^2(y',z)$$

が成り立つ. また, y, z, z', y' に 2-四角不等式を用いると

$$d^2(y',z')+d^2(y',z) \le d^2(y,z)+\frac{1}{4}d^2(x,y)+\frac{1}{4}d^2(x,z)+d^2(y',z')$$

が成り立つので, それと組み合わせると,

$$d^2(y',z') \le d^2(y,z)$$

が成り立つ. 従って, $d(y',z') \le d(y,z)$ が成り立つ. □

命題 1.6. 測地的距離空間 (X,d) が 2-四角形不等式を満たすとする. このとき, 任意の $x,y,z,w \in X$ に対して

$$d^2(y,w)+d^2(x,z) \le 2d^2(w,x)+d^2(x,y)+\frac{1}{2}d^2(y,z)+d^2(z,w)$$

が成り立つ.

証明. γ_z^y を y, z を結ぶ測地線とし, $o \coloneqq \gamma_z^y(\frac{1}{2}d(y,z))$ とする. そして, w,x,y,o と w,x,o,z に 2-四角不等式を用いると,

$$\begin{aligned}d^2(w,y)+d^2(x,o) &\le d^2(x,w)+d^2(w,o)+d^2(o,y)+d^2(x,y)\\ d^2(w,o)+d^2(x,z) &\le d^2(w,z)+d^2(z,y)+d^2(o,x)+d^2(x,w)\end{aligned}$$

であるので, これらを足す.

□

命題 1.7. 測地的距離空間 (X,d) が 2-四角形不等式を満たすとする. このとき, 任意の $x,y,z,w \in X$ に対して

$$2d^2(x,y)+2d^2(x,z)-d^2(y,z)-4d^2(x,o) \ge 2\big(2d^2(y',y)+2d(y',z)-d^2(y,z)-4d(y',o)\big)$$

が成り立つ. ただし, γ_z^y を y, z を結ぶ測地線とし, $o \coloneqq \gamma_z^y(\frac{1}{2}d(y,z))$ とし, γ_x^y を x, y を結ぶ測地線とし $y \coloneqq \gamma_y^x(\frac{1}{2}d(x,y))$ と定める.

証明. o, y', x, z に対して 2-四角不等式を用いる. □

命題 1.8. (X,d) を測地的空間とする. このとき, 次は同値である.
(1)(X,d) は CAT(0) である.
(2)(X,d) が 2-四角不等式を満たす.

証明. $(\Rightarrow)$. 任意に $x,y,z,w \in X$ をとる. γ_y^z を y,z を結ぶ測地線とし, $o := \gamma_z^y(\frac{1}{2}d(y,z))$ と定める.

$$
\begin{aligned}
&d^2(x,o)+\frac{1}{4}d^2(y,z) \leq \frac{1}{2}d^2(x,y)+\frac{1}{2}d^2(x,z)\\
&d^2(w,o)+\frac{1}{4}d^2(y,z) \leq \frac{1}{2}d^2(w,y)+\frac{1}{2}d^2(w,z)\\
&\frac{1}{2}d^2(x,w) \leq \frac{1}{2}d^2(x,w)+2d^2(o,\gamma_w^x(\frac{1}{2}d(x,w))) \leq d^2(x,o)+d^2(w,o)
\end{aligned}
$$

が成り立つ (ただし, γ_w^x は x,w を結ぶ測地線を表す). 従って,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}d^2(x,w)+\frac{1}{2}d^2(y,z) &\leq d^2(x,o)+d^2(w,o)+\frac{1}{2}d^2(y,z)\\
&\leq \frac{1}{2}(d^2(x,y)+d^2(y,z)+d^2(z,w)+d^2(w,x))
\end{aligned}
$$

が成り立つ.
$(\Leftarrow)$. γ_y^z を y,z を結ぶ測地線とし, $o := \gamma_y^z(\frac{1}{2}d(y,z))$ とする. γ_x^y を y から x への測地線とし, $y_n := \gamma_x^y(\frac{1}{2^n}d(y,x))$ とする. $\gamma_{y_n}^z$ を y_n,z を結ぶ測地線とし, $z_n := \gamma_{y_n}^z(\frac{1}{2}d(y_n,z))$ とする.

$$
\begin{aligned}
&2d^2(x,y)+2d^2(x,z)-d^2(y,z)-4d^2(x,w) \geq 2^n\bigl(2d^2(y_n,y)+2d^2(y_n,z)-d^2(y,z)-4d(y_n,o)\bigr)\\
&2d^2(y_n,y)+2d(y_n,z)-d^2(y,z)-4d^2(y_n,o) \geq 2\bigl(2d^2(z_n,y)+2d^2(y_n,z)-d^2(y,z)-4d^2(y_n,o)\bigr)
\end{aligned}
$$

が成り立つので, z_n,y,o,z に 2-四角不等式を用いると,

$$
d^2(z_n,o);d^2(y,z) \leq d^2(z_n,y)+c^2(z_n,z)+\frac{1}{2}d^2(y,z)
$$

が成り立つので, これらを合わせると,

$$
2d^2(x,y)+2d^2(x,z)-d^2(y,z)-4d^2(x,o) \geq -2^{n+2}d^2(z_n,w) \geq -2^{n+2}d^2(z_n,z) = -2^{2-n}d^2(x,y)
$$

が成り立つので極限をとれば, 主張が従う. □

1.1 参考文献

T. sato. An alternative proof of Berg and Nikolaev's characterization of CAT(0)-spaces via quadrilateral inequality, 2009.