ガウス RKHS のフーリエ変換による表示

1

命題 1.1.

$$k(x,y) \coloneqq e^{\frac{\|x-y\|^2}{2}}$$

を再生核とする RKHS は

$$H_k \coloneqq \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{1}{e^{-\frac{\xi^2}{2}}} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \right\}$$

に内積を,

$$\langle f, g \rangle_H \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{1}{e^{-\frac{\xi^2}{2}}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

で定めたものである.

証明. 任意に $y \in X$ をとる. 実際, $k^y(x) \coloneqq k(x,y)$ と表すことにすると,

$$\hat{k}^y(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2}} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-i\xi(u+y)} du = e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-i\xi y}$$

$$\langle f, k(\cdot, y) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{1}{e^{-\frac{\xi^2}{2}}} \hat{f}(\xi) \overline{e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-i\xi y}} d\xi = f(y)$$

が成り立つ.

□