多項式増大度について

1

命題 1.1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする．適当な $C > 0$ で

$$|f(x)| \leq C(1 + \|x\|^n) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

を満たすものが存在することと，適当な $C > 0$ で

$$|f(x)| \leq C(1 + \|x\|)^n \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

を満たすものが存在することは必要十分である．

証明. $\Rightarrow$.

$$1 + \|x\|^n \leq (1 + \|x\|)^n$$

が成り立つ．
$\Leftarrow$. $(1 + \|x\|)^n \leq C(1 + \|x\|^n) \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R}^n)$ を満たす $C > 0$ が存在しないとする (背理法)．すると，

$$\varphi(x) \coloneqq \frac{(1 + \|x\|)^n}{(1 + \|x\|^n)}$$

により定まる関数は非有界ということになる．しかし，$\|x\| \to \infty$ において $\varphi(x) \to 1$ となり，$\varphi(x)$ が連続関数であることと合わせると，十分大きい閉球 $\hat{B}(0; R)$ を考えることにより有界であることがわかるので矛盾である． $\square$