有限補集合位相

1　有限補集合位相

定義 1.1. $\{\varnothing\} \cup \big\{U \subset X \mid U^c\text{が有限集合}\big\}$ なる位相を有限補集合位相 (cofinite 位相) という.

有限補集合位相を $\mathcal{O}_{cf}$ で表すことにする.

命題 1.2. X が有限集合でないならば, $(X, \mathcal{O}_{cf})$ はハウスドルフ空間でない.

証明. ハウスドルフ空間であると仮定する. 好きに異なる二点 $p, q \in \mathbb{R}$ をとる. p, q それぞれの開近傍 U_p, U_q で $U_p \cap U_q = \varnothing$ となるものをとる. $U_q \subset U_p^c$ であるので U_q は有限集合である. 従って, U_q^c は有限集合ではないので開集合でなくなる. よって矛盾である. □

命題 1.3. $(X, \mathcal{O}_{cf})$ は T1 空間である.

証明. 二点 $p, q \in X$ に対してそれぞれ $X \setminus \{p\}, X \setminus \{q\}$ ととればよい. □

命題 1.4. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{cf})$ は T1 空間だがハウスドルフ空間ではない.

証明. $\mathbb{R}^n$ は有限集合でない. □

命題 1.5. $(X, \mathcal{O}_{cf})$ はコンパクトである.

証明. 任意に開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ をとる. 適当に $U \in \{U_\lambda\}$ をとると, $\mathbb{R} \setminus U$ は有限集合なので, それを $\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ とする. p_i を含む $\mathcal{U} \setminus \{U\}$ の集合を U_i, とすると, $U, U_1, \ldots, U_N$ で $\mathbb{R}^n$ を被覆できる. □

定義 1.6. $V \subset X, p \in X$ とする. V は, p の開近傍 U_p で $U_p \subset V$ をみたすものが存在するとき, p の近傍であるという.

命題 1.7. X が不可算集合であるならば, $(X, \mathcal{O}_{cf})$ は第一可算公理を満たさない.

証明. 第一可算公理を満たすとする. 適当に $p \in \mathbb{R}^n$ をとり, p の可算基本近傍系 $\mathcal{V}_p \coloneqq \big\{V \mid V \text{ は } p \text{ の近傍}\big\}$ をとる. $\{p\} \cup (\bigcup_{v_i \subset \mathcal{V}_p} V_i^c)$ は可算集合となるので, 不可算集合 $\mathbb{R}^n$ と一致しない. そこで,

$$q \in \mathbb{R}^n \setminus \left(\{p\} \cup (\bigcup_{v_i \subset \mathcal{V}_p} V_i^c) \right)$$

をとる. $q \in V_i$ となるので $V_i \not\subset \mathbb{R} \setminus \{q\}$ である. 一方で, $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{q\}$ であり, $\mathbb{R}^n \setminus \{q\}$ の補集合は有限であるので, これは p の開近傍である. 故に近傍であるので, $V_i \in \mathcal{V}_p$ で $V_i \subset \mathbb{R}^n \setminus \{q\}$ となるものがとれるので矛盾する. □

2 可算補集合位相

定義 2.1. $\{\varnothing\} \cup \left\{ U \subset X \mid U^c\text{が可算集合} \right\}$ なる位相を可算補集合位相 (cocountable) という.

可算補集合位相を $\mathcal{O}_{cc}$ で表すことにする.

命題 2.2. X が不可算集合であるならば, $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_{cc})$ はハウスドルフ空間ではない.

証明. 命題 1.2 を真似ればよい. □

命題 2.3. $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_{cc})$ は T1 空間である.

証明. 命題 1.3 を真似ればよい. □

命題 2.4. $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_{cc})$ はリンデレーフである.

証明. 命題 1.5 を真似ればよい. □

命題 2.5. X が不可算集合であるならば, $(X, \mathcal{O}_{cc})$ は第一可算公理を満たさない.

証明. 命題 1.7 を真似ればよい. □