

コンパクト空間の連続写像による像はコンパクト

1

命題 1.1. X, Y を位相空間とする. $f: X \rightarrow Y$ を全射連続する. このとき, Y はコンパクトである.

証明. Y の開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとる.

$$X = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda} U_{\lambda}\right) = \bigcup_{\lambda} f^{-1}(U_{\lambda})$$

が成り立つ, f は連続なので, 各 λ に対して $f^{-1}(U_{\lambda})$ は開集合であるため, $\{f^{-1}(U_{\lambda})\}$ は X の開被覆である. X はコンパクトであるので, 有限部分被覆 $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \dots, f^{-1}(U_N)\}$ がとれる.

$$X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup \dots \cup f^{-1}(U_N)$$

より,

$$Y = f(X) = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_N$$

が成り立つ. 従って, 有限部分被覆がとれるので, Y はコンパクトである.

□