距離空間のマグニチュード

1 マグニチュード

1.1 有限距離空間のマグニチュード

定義 1.1. (類似度行列). (X,d) を有限距離空間とする.

$$Z : X \times X \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto e^{-d(x,y)}$$

を (X,d) の類似度行列という.

定義 1.2. (ウェイト, コウェイト). (X,d) を有限距離空間, Z を X の類似度行列とする. $w : X \to \mathbb{R}$ で, 任意の $p \in X$ に対して

$$\sum_{x\in X} Z(p,x)w(x) = 1$$

を満たすものを, X のウェイトという. また, 任意の $p \in X$ に対して

$$\sum_{x\in X} w(x)Z(x,p) = 1$$

を満たすものを, X のコウェイトという.

命題 1.3. (X,d) を有限距離空間, w, v を X のウェイトとする. このとき,

$$\sum_{x\in X} w(x) = \sum_{x\in X} v(x)$$

が成り立つ.

証明.

$$\sum_{x\in X} w(x) = \sum_{x\in X}(\sum_{y\in X} v(y)Z(y,x))w(x) = \sum_{y\in X} v(y)$$

□

定義 1.4. (有限距離空間のマグニチュード). (X,d) を有限距離空間とする. X のウェイト w が存在する時, X はマグニチュードをもつといい,

$$\mathrm{Mag}(X) \coloneqq \sum_{x\in X} w(x)$$

と定め, この値を X のマグニチュードという.

注意 1.5. X のマグニチュードはウェイトのとりかたに依らない.

定義 1.6. (メビウス行列). (X, d) を有限距離空間, Z を X の類似度行列とする.

$$M : X \times X \to \mathbb{R}$$

で, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$\sum_{z \in X} Z(x,z)M(z,y) = \delta(x,y)$$

を満たす写像を X のメビウス行列という.

命題 1.7. (X, d) を有限距離空間とする. X のメビウス行列 M が存在するならば, X のウェイト w は存在し,

$$w(x) = \sum_{y \in X} M(x,y) \quad ({}^{\forall} x \in X)$$

が成り立つ.

証明. 実際,

$$\sum_{y \in X}(Z(x,y)\sum_{z \in X} M(y,z)) = \sum_{z \in X}\sum_{y \in X} Z(x,y)M(y,z) = \sum_{z \in X} \delta(x,z) = 1$$

が成り立つ. □

命題 1.8. (X, d) を有限距離空間とする. X のウェイトが存在することと, X のメビウス行列が存在することは必要十分である.

証明. メビウス行列が存在するならば, ウェイトが存在することは既に命題 1.7 で示してある. X のウェイトが存在するとする. X の類似度行列を Z とする. 対称行列は対角化可能であるので, $\lambda : X \to \mathbb{R}$ と $P : X \times X \to \mathbb{R}$ で, 任意の $x \in X$ に対して

$$\sum_{y \in X} \lambda(y)w(y)P(x,y) = \sum_{y \in X} P(x,y)$$

が成り立つ. 固有ベクトルは線型独立なので任意の $x \in X$ に対して,

$$\lambda(x)w(x) = 1$$

が成り立つ. 故に, $\lambda(x) \neq 0$ である. 固有値に 0 を含まない対称行列は正則行列であるので, X はメビウス行列をもつ. □

命題 1.9. (X, d) を有限距離空間とする. X のメビウス行列が存在するならば,

$$\mathrm{Mag}(X) = \sum_{(x,y) \in X \times X} M(x,y)$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned}\sum_{(x,y) \in X \times X} M(x,y) &= \sum_{x \in X}\sum_{y \in X} M(x,y) = \sum_{x \in X}\sum_{y \in X}(M(x,y)\sum_{z \in X} Z(y,z))w(z) \\ &= \sum_{x \in X}\sum_{y \in X}\sum_{z \in X} M(x,y)Z(y,z)w(z) = \sum_{z \in X} w(z)\end{aligned}$$

□

命題 1.10. (X,d) を有限距離空間とする．

$$\#\{t \in (0,\infty) \mid tX \text{ はマグニチュードを持たない}\} < \infty$$

が成り立つ．

証明. $N := \#X$ とし，距離空間 $tX = (X, td)$ の類似度行列を Z^{tX} で表すことにする．$M_N(\mathbb{R})$ において，正則行列全体 $GL_N(\mathbb{R})$ は開集合であるので，単位行列 I の開近傍 U_I で $U_I \subset GL_N(\mathbb{R})$ を満たすものがとれる．$\lim_{t\to\infty} Z^{tX} = I$ であるので，十分大きな T をとると，$t \in (0,T) \Rightarrow \det Z^{tX} = 0$ が成り立つようにできる．

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; t \mapsto Z^{tX}$$

により正則関数を定める．f が $(0,T)$ に無限個のゼロ点を持つとすると，相対点列コンパクトであることから，$\mathbb{C}$ における収束部分列をもつ．従って，f が正則関数であることから，一致の定理より f は $\mathbb{C}$ 全体で 0 となるが，これは矛盾である．故に，ゼロ点は $(0,T)$ に高々有限個しか存在しない．□

1.2 様々な空間のマグニチュード

命題 1.11. (2 点空間のマグニチュード)．距離空間 $X = (\{p,q\}, d)$ のマグニチュードは

$$\mathrm{Mag}(X) =$$

証明. □

命題 1.12. (l_1 直積距離空間のマグニチュード)．$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を有限距離空間とする．

$$d^{l_1}_{X\times Y}((x_0,y_0),(x_1,y_1)) := d_X(x_0,x_1) + d_Y(y_0,y_1)$$

とする．距離空間 $X \times_1 Y = (X \times Y, d^{l_1}_{X\times Y})$ のマグニチュードは

$$\mathrm{Mag}(X \times_1 Y) = \mathrm{Mag}(X)\mathrm{Mag}(Y)$$

で与えられる．

証明. □

定義 1.13. (斉次距離空間)．(X,d) を距離空間とする．群 G で X に等長かつ推移的に作用するものが存在するとき，(X,d) を斉次距離空間という．

記号 1.14. (X,d) を距離空間，G を X に作用する推移的な群とする．$x, y \in X$ に対して

$$gx = y$$

を満たす g を g^x_y で表すことにする．

命題 1.15. G を (X,d) に推移的かつ等長な作用をする群とする．任意の $g \in G$ について

$$g : X \to X$$

は全単射等長写像である．

証明. 任意の $x \in X$ に対して

$$gg^{-1}x = x$$

なので g は全射である．等長的であるので，単射である．故に主張が従う．□

命題 1.16. (X, d) を有限な斉次距離空間とする．任意の $g \in G$ と, 任意の $p, q \in X$ に対して

$$\sum_{p \in X} d(x, p) = \sum_{p \in X} d(y, p)$$

が成り立つ．

証明.

$$\sum_{p \in X} d(x, p) = \sum_{p \in X} d(g_y^x x, g_y^x p) = \sum_{p \in X} d(y, g_y^x p) = \sum_{q \in X} d(y, q)$$

□

命題 1.17. (X, d) を有限な斉次距離空間とする．任意の $p \in X$ に対して

$$\mathrm{Mag}(X) = \frac{\# X}{\sum_{x \in X} d(p, x)}$$

が成り立つ．

証明. □

定義 1.18. (scattered space). 有限距離空間 (X, d) は任意の $x, y \in X$ に対して $\log(\# X - 1) < d(x, y)$ を満たす時に, scattered 空間という．

命題 1.19. (X, d) を有限な距離空間とする．X が scattered 空間であるならば, X のメビウス行列が存在する．すなわち, X はマグニチュードをもつ．

証明. X の類似度行列を Z とする．Z が正定値であることを示す．実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$-|a|\,|b| \leq ab \leq |a|\,|b|$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} x^t Z x = \sum_i x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i z_{i,j} x_j &> \sum_i x_i^2 - \frac{1}{\# X - 1} \sum |x_i|\,|x_j| \\ &= (1 - \frac{1}{\# X - 1}) \sum_i x_i^2 + \frac{1}{\# X - 1} \sum_i x_i^2 - \frac{1}{\# X - 1} \sum_{i \neq j} |x_i|\,|x_j| \\ &= (1 - \frac{1}{\# X - 1}) \sum_i x_i^2 + \frac{1}{2(\# X - 1)} \sum_{i \neq j} (|x|_i - |x|_j)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

なので, 半正定値である．また, $x^t Z x = 0$ のとき, $x \neq 0$ であるとすると,

$$0 = x^t Z x > (1 - \frac{1}{\# X - 1}) \sum_i x_i^2 + \frac{1}{2(\# X - 1)} \sum_{i \neq j} (|x|_i - |x|_j)^2$$

となり矛盾するので, $x = 0$ である．従って, $x^t Z x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ が成り立つので, 正定値である．従って Z は正定値対称行列なので, (固有値が全て正であることから) 正則行列であり, 逆行列をもつので, 主張が従う． □

定義 1.20. (正定値距離空間). (X, d) を有限な距離空間とする．X は, 類似度行列が正定値行列であるとき, 正定値距離空間という．

命題 1.21. 正定値距離空間は, マグニチュードをもつ.

証明. 類似度行列が正定値対称行列なので, 逆行列をもつ. □

命題 1.22. scattered 空間は, 正定値距離空間である.

証明. □

1.3 無限距離空間のマグニチュード

2 マグニチュードホモロジー

3 凸

定義 3.1. (凸体). $A \subset \mathbb{R}^n$ は, コンパクトかつ凸であるとき, 凸体という.

4 不変測度

定義 4.1. (不変測度). 位相群 G 上のボレル測度 ν で, 任意の $A \in \mathcal{B}(G)$ に対して

$$\nu(gA) = \nu(A) \quad ({}^\forall g \in G)$$

を満たすものを, 左不変測度という.

$$\nu(A) = \nu(Ag) \quad ({}^\forall g \in G)$$

を満たすものを, 右不変測度という.

$$\nu(A) = \nu(A^{-1})$$

を満たすものを inverse 不変測度という. また, 左不変かつ右不変かつ inverse 不変な測度を不変測度という.

定義 4.2. (ハール測度). 位相群 G 上のコンパクト集合に対して有限な測度を定めるボレル測度 ν で, 左不変かつ正則なものを左ハール測度という. また, 右不変かつ正則なものを右ハール測度という. 左不変かつ右不変かつ正則なものをハール測度という.

定義 4.3. (積分左不変). G を位相群, ν を G 上の測度, $\mathcal{F}$ を可測関数の族とする. 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_G f(hg)d\nu(g) = \int_G f(g)d\nu(g) \quad ({}^\forall h \in G)$$

が成り立つ. とき, G は $\mathcal{F}$ に関して積分左不変であるという.

命題 4.4. G を位相群, ν を G 上の左不変測度とすると, G は可測関数に関して積分左不変である.

証明.

$$h^{-1}A = \{x \in G \mid hx \in A\}$$

であることから,

$$g \in h^{-1}A \Leftrightarrow hg \in A$$

であるので,

$$\begin{aligned}\int_G 1_A(hg)d\nu(g) &= \nu(\{g\in G \mid hg\in A\}) \\ &= \nu(\{g\in G \mid g\in h^{-1}A\}) \\ &= \nu(h^{-1}A) = \nu(A) = \int_G 1_A(g)\nu(g)\end{aligned}$$

より, 定義関数に対しては成り立つ. 従って, 任意の非負可測関数に対して成り立つ. □

命題 4.5. G を位相群, $\mathcal{F}$ を可測関数の族, ν を G 上の $\mathcal{F}$ に関して積分左不変な測度とする. このとき, 任意の $f\in\mathcal{F}, h\in G$ に対して

$$\int_G f(g^{-1}h)d\nu(g) = \int_G f(g^{-1})d\nu(g)$$

が成り立つ.

証明.

$$\int_G f(g^{-1}h)d\nu(g) = \int_G f((h^{-1}g)^{-1})d\nu(g) = \int_G f(g^{-1})d\nu(g).$$

□

命題 4.6. G を位相群, ν を G 上の測度とする. $C_c(G;\mathbb{R}_{\geq 0})$ に関して積分左不変であるならば, 左不変測度である.

証明. □

命題 4.7. 逆不変測度であることと, 非負 $C_c(G)$ に関して積分逆不変であることは必要十分である.

証明. □

命題 4.8. 第二可算なコンパクト群 G 上の左ハール測度 ν は不変測度である.

証明. $\nu(G)=1$ となるように正規化しておく. 任意の非負連続関数 f に対して,

$$\int_G f(g^{-1})d\nu(g) = \int_G\int_G f(g^{-1}h)d\nu(g)d\nu(h) = \int_G\int_G f(g^{-1}h)d\nu(h)d\nu(g) = \int_G f(h)d\nu(h)$$

となり, $C(G;\mathbb{R}_{\geq 0})$ に関して積分逆不変性が成り立つ. G はコンパクトなので, $C(G;\mathbb{R}_{\geq 0}) = C_c(G;\mathbb{R}_{\geq 0})$ であるので, 前述の命題から, ν は逆不変である. また, 任意の連続関数 $f\in C(G)$ に対して

$$\int_G f(gh)d\nu(g) = \int_G f(g^{-1}h)d\nu(g) = \int_G f(g^{-1})d\nu(g) = \int_G f(g)d\nu(g)$$

より右不変でもある. □

記号 4.9. (あとで消す). (G,ν) コンパクト第二可算ハウスドルフ連続推移的, ハール確率測度. (E,α,ρ) 第二可算ハウスドルフ, 局所有限ボレル測度,

注意 4.10. (あとで消す). (G,ν) コンパクトリー群ハール確率空間. (E,α,ρ) 多様体, 自明でない局所有限ボレル測度, 局所有限ボレル測度.

命題 4.11. G をハウスドルフ空間 E に連続かつ推移的に作用するコンパクト群とする．G, E は可算開基をもつ．ν を G 上のハール確率測度とする．$\rho \neq 0, \alpha$ を E 上の局所有限ボレル測度とする．ρ が G 不変であるならば, 任意の $A, B \in \mathcal{B}(E)$ に対して

$$\int_G \alpha(A \cap gB) d\nu(g) = \alpha(A)\rho(B)/\rho(E)$$

が成り立つ.

証明. □

命題 4.12. G を集合 X に作用する群とし, $B \subset X, h \in G$ とする．このとき,

$$\{hg \in G \mid gp \in B\} = \{f \in G \mid fp \in hB\}$$

証明.

$$hg \in \text{左} \Rightarrow h(gp) \in hB, \quad fp \in \text{右} \Rightarrow h^{-1}fp \in B$$

□

命題 4.13. (G 不変ボレル測度の一意的存在). G をコンパクト群, ν をハール確率測度とする．(満たされがちな, ある程度良い条件を仮定する．すなわち, G の作用は連続かつ推移的, G, E は第二可算ハウスドルフ空間である．) このとき, $p \in E$ を適当な点として,

$$\rho(B) := \nu(\{g \in G \mid gp \in B\}) \quad (B \in \mathcal{B}(E))$$

は E 上の G 不変ボレル確率測度である.

証明. (一意性は工事中).

$$\begin{aligned}\rho(B) &= \nu(\{g \in G \mid gp \in B\}) = \nu(h\{g \in G \mid gp \in B\}) \\ &= \nu(\{hg \in G \mid gp \in B\}) = \nu(\{f \in G \mid fp \in hB\})\end{aligned}$$

□

注意 4.14. 推移性は点 p のとりかたに依らないところに効いてくる?