凸体の定めるノルム

1

命題 1.1. $K \subset \mathbb{R}^n$ を原点を含む凸体とする．このとき, $\|\cdot\|_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\|x\|_K \coloneqq \min\{t \geq 0 \mid x \in tK\}$$

により定めると, これはノルムである．

証明. 三角不等式以外は明らかである．任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\frac{x}{\|x\|_K + \|y\|_K} \in K, \quad \frac{y}{\|x\|_K + \|y\|_K} \in K$$

であることがわかるので,

$$\frac{x+y}{\|x\|_K + \|y\|_K} \in K$$

が従う．故に

$$\|x+y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K$$

が成り立つ． □

命題 1.2. $K \subset \mathbb{R}^n$ を原点を含む凸体とする．$B(0;R) \subset K$ が成り立つならば, 任意の $x \in K$ に対して

$$\|x\|_K \leq \frac{1}{R} \|x\|_2$$

が成り立つ．

証明.

$$\frac{x}{\|x\|/R} = R\frac{x}{\|x\|} \in \bar{B}(0;R) \subset K$$

が成り立つので, 主張が従う． □

命題 1.3. $K \subset \mathbb{R}^n$ を原点を含む凸体とする．$B(0;R) \subset K$ が成り立つならば, 写像 $x \mapsto \|x\|_K$ は $\frac{1}{R}$-Lipschitz 写像である．

証明. 任意 $x, y \in K$ に対して,

$$|\|x\|_K - \|y\|_K| \leq \|x-y\|_K \leq \frac{1}{R} \|x-y\|_2$$

□