# 単調な関数の不連続点の個数

## 1

**命題 1.1.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を単調増加関数とする．このとき, 不連続点は高々可算個しない.

**証明.** $(-R, R)$ において, ジャンプが 1 以上の点が非可算個あると, $|f(-R) - f(R)| < \infty$ であることに矛盾するので, 結局のところ, ジャンプが 1 以上の点は $\mathbb{R}$ 全体で高々可算個しかない．すると, ジャンプが $\frac{1}{n}$ 以上の点の集合を $A_n$ とすると, 不連続点全体は $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とかける．高々可算個の点の集合の可算個の和なので, これは高々可算個である． □