確率測度の正則性

1

命題 1.1. (基本的な不等式 1).

$$\begin{aligned}\mu(A \setminus B) &= \mu(A \cap B^c) = 1 - \mu((A \cap B^c)^c) \\ &= 1 - \mu(A^c \cup B) \geq 1 - \mu(A^c) - \mu(B) = \mu(A) - \mu(B).\end{aligned}$$

証明. 全くその通り. □

命題 1.2. (基本的な不等式 2). $B \subset C \subset A$ とする.

$$\mu(A \setminus B) \leq \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus B)$$

が成り立つ.

証明.

$$\mu(A \setminus B) = \mu((A \setminus C) \cup (C \setminus B))$$

より従う. □

命題 1.3. (基本的な不等式 3).

$$\mu(A \setminus (B \cap C)) \leq \mu(B^c) + \mu(A \setminus C)$$

証明.

$$\begin{aligned}\mu(A \setminus (B \cap C)) &= \mu(A \cap (B^c \cup C^c)) = \mu(A \cap B^c \cup A \cap C^c) \\ &\leq \mu(A \cap B^c) + \mu(A \cap C^c) \leq \mu(B^c) + \mu(A \cap C^c)\end{aligned}$$

より従う. □

2

定義 2.1. (正則な測度). (X, Σ) を可測空間とする. 測度 μ は, 任意の可測集合 $A \in \Sigma$ に対して, 任意の ε に対して

$$\begin{aligned}&(1) F \subset A \subset G \\ &(2) \mu(G \setminus F) < \varepsilon\end{aligned}$$

を満たす閉集合 F と開集合 G が存在するとき, 正則であるという.

定義 2.2. (内部正則性). (X, Σ) を可測空間とする. 測度 μ は, 任意の可測集合 $A \in \Sigma$ に対して, 任意の ε に対して

$$(1) F \subset A$$
$$(2) \mu(A) - \varepsilon < \mu(F) \leq \mu(A)$$

を満たす閉集合 F が存在するとき, 内部正則であるという.

定義 2.3. (外部正則性). (X, Σ) を可測空間とする. 測度 μ は, 任意の可測集合 $A \in \Sigma$ に対して, 任意の ε に対して

$$(1) A \subset G$$
$$(2) \mu(A) \leq \mu(G) < \mu(A) + \varepsilon$$

を満たす閉集合 F が存在するとき, 外部正則であるという.

命題 2.4. 距離空間におけるボレル確率測度は正則である.

証明.

$$\mathcal{S} \coloneqq \left\{ A \subset X \mid {}^{\forall}\varepsilon > 0, {}^{\exists}F : \mathrm{open}, {}^{\exists}G : \mathrm{close}; \mu(F \setminus G) < \varepsilon \right\}$$

とおく.
step: $\mathcal{S}$ は全ての閉集合を含む.
$(\because)$ A を閉集合とする. 十分大きな N をとって

$$A \subset A \subset B(A; \frac{1}{N})$$

かつ $\mu(F \setminus B(A; \frac{1}{N})) < \varepsilon$ が成り立つようにできる. ▲
step: $\mathcal{S}$ は σ 加法族である.
$(\because)$ $\varnothing \subset \varnothing \subset \varnothing$ により $\varnothing \in \mathcal{S}$. $A \in \mathcal{S}$ とすると, $F \subset A \subset G$ で条件を満たすものがとれる. $G^c \subset A^c \subset F^c$ を考えることで, $A^c \in \mathcal{S}$. $A_n \in \mathcal{S}$ とする. $F_n \subset A_n \subset G_n$ で条件を満たすものがとれる. 十分大きな N をとって

$$\bigcup_{n \leq N} F_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$$

を考え,

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \setminus \bigcup_{n \leq N} F_n) \leq \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) + \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \setminus \bigcup_{n \leq N} F_n)$$

を用いれば良い. ▲

故に, $\mathcal{S}$ は $\mathcal{B}(X)$ よりも大きな σ 加法族であるので, $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{S}$ となり, $\mathcal{B}(X)$ が主張における条件をみたす. □

命題 2.5. μ が正則なボレル確率測度であるならば, 任意の可測集合 A に対して

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F; \mathrm{close}, F \subset A.\}$$

が成り立つ.

証明. 任意の ε に対して $F \subset A \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon$ なる閉集合と開集合がとれる.

$$\mu(A) - \mu(F) \leq \mu(A \setminus F) < \varepsilon$$

より

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu(F) < \mu(A)$$

が成り立つ. □

命題 2.6. μ が正則なボレル確率測度であるならば, 任意の可測集合 A に対して

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) \mid G; \mathrm{close}, A \subset G.\}$$

が成り立つ.

証明. 閉集合のときの証明をパクればよい. □

命題 2.7. 任意の可測集合 A に対して

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F; \mathrm{close}, F \subset A.\}$$

が成り立つことと, μ が内部正則であることは必要十分である.

証明. 上限の定義より明らか. □

命題 2.8. 任意の可測集合 A に対して

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) \mid G; \mathrm{open}, A \subset G.\}$$

が成り立つことと, μ が外部正則であることは必要十分である.

証明. 下限の定義より明らか. □

命題 2.9.

$$f(x) \coloneqq (1 - \frac{1}{\varepsilon} d(x, F))^+$$

と有界一様連続関数を定める.

$$1_F \leq f \leq 1_{B(F;\varepsilon)}$$

が成り立つ.

証明. f はだいたい, 0 から 1 の間の値をとる台形の関数, □

命題 2.10. μ, ν を内部正則なボレル確率測度とする.

$$\mu f = \nu f \quad ({}^\forall f \in UC_b(X))$$

が成り立つならば, $\mu = \nu$ が成り立つ.

証明. 任意の閉集合 F に対して,

$$f(x) \coloneqq (1 - \frac{1}{\varepsilon} d(x, F))^+$$

と定めると,

$$\mu(F) \leq \mu f(f) = \nu(f) \leq \nu(B(F;\varepsilon))$$

が成り立つ. 測度の連続性から,

$$\mu(F) \leq \nu(F)$$

が成り立つ. 逆の不等式 $\nu(F) \leq \mu(F)$ も成り立つので,

$$\mu(F) = \nu(F)$$

が成り立つ. 任意の可測集合 A に対して

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F; \mathrm{close}, F \subset A.\} = \sup\{\nu(F) \mid F; \mathrm{close}, F \subset A.\} = \nu(A)$$

であるので, $\mu(A) = \nu(A)$ が成り立つ. □

命題 2.11. μ, ν を内部正則なボレル確率測度とする.

$$\mu f = \nu f \quad ({}^{\forall} f \in C_b(X))$$

が成り立つならば, $\mu = \nu$ が成り立つ.

証明.

$$UC_b(X) \subset C_b(X)$$

より明らかである. □

命題 2.12. μ, ν を正則なボレル確率測度とする.

$$\mu f = \nu f \quad ({}^{\forall} f \in C_b(X))$$

が成り立つならば, $\mu = \nu$ が成り立つ.

証明. 正則ならば内部正則なので, 明らかである. □

定義 2.13. (緊密性). (X, Σ) を可測空間とする. 確率測度 μ は, 任意の可測集合 $A \in \Sigma$ に対して, 任意の ε に対して

$$(1) K \subset A$$
$$(2) \mu(A) - \varepsilon < \mu(K) \leq \mu(A)$$

を満たすコンパクト集合 K が存在するとき, 緊密であるという.

命題 2.14. (X, Σ) を可測空間とする. 確率測度 μ が緊密であることの必要十分条件は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してコンパクト集合 $K \subset X$ で

$$1 - \varepsilon < P(K) \leq 1$$

を満たすものが存在することである.

証明. $\Rightarrow$ は $A = S$ とすれば明らか. $\Leftarrow$ を示す. A に対して $F \subset A$ で $\mu(A \setminus F) < \varepsilon/2$ となる閉集合 F がとれる. $\mu(K^c) < \varepsilon/2$ となるコンパクト集合 K がとれる. (基本的な不等式 3) に注意すると,

$$\mu(A) - \mu(K \cap F) \leq \mu(A \setminus (K \cap F)) \leq \mu(K^c) + \mu(A \setminus F) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

が成り立つ. □

命題 2.15. X が完備可分な距離空間であるならば, ボレル確率測度は緊密である.

証明. X は可分なので, 任意の半径 $\frac{1}{i}$ に対して, 可算個の開球 $\{B_{ij}\}_{j\in\mathbb{N}}$ で $X = \bigcup_j B_{ij}$ と被覆できる. 故に, 十分大きな $J(i)$ をとって

$$\mu\left((\bigcup_{j \leq J(i)} B_{ij})^c \right) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

とできる. 故に,

$$\mu\left((\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j \leq J(i)} B_{ij})^c \right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (\bigcup_{j \leq J(i)} B_{ij})^c \right) < \varepsilon.$$

であり, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j \leq J(i)} B_{ij}$ は完備な空間のなかの全有界な集合であるので, 相対コンパクトである. 閉包をとっても測度は変わらないので, $K = \mathrm{cl}(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j \leq J(i)} B_{ij})$ とすると, $\mu(K^c) < \varepsilon$ が成り立つ. □