類似度写像とエネルギー

1

設定 1.1.

$$Z(R,p;X)u(x) := \int_X e^{-Rd^p(x,y)}u(y)dy$$

と定める.

命題 1.2. $A \subset \mathbb{R}^n$ を $\int_o^\infty R^z \left(\int_{A\times A} \frac{1}{R}e^{-Rd(x,y)}dxdy\right)dR < \infty$ を満たす部分集合とする. このとき, $\mathrm{Re}z > 0$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\int_{A\times A} \frac{1}{d^z(x,y)}dxdy = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_o^\infty R^z \left(\int_{A\times A} \frac{1}{R}e^{-Rd(x,y)}dxdy\right)dR$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^\infty r^{z-1}e^{-r}dr \\ &= \int_0^\infty (Rd)^{z-1}e^{-Rd}ddR = \int_0^\infty d^z R^{z-1}e^{-Rd}dR\end{aligned}$$

より

$$\int_{A\times A} \frac{1}{d^z(x,y)}dxdy = \int_{A\times A}\left(\int_0^\infty R^{z-1}e^{-Rd(x,y)}dR\right)dxdy$$

が成り立つ. $\int_o^\infty R^z \left(\int_{A\times A} \frac{1}{R}e^{-Rd(x,y)}dxdy\right)dR < \infty$ が成り立つとき, フビニの定理を適用できるので, 積分が交換できて主張が従う. □