CW 複体の定義

1

定義 1.1. (胞体分割). ハウスドルフ空間 X は, X の disjoint な部分集合の族 $\{e_\lambda\}$ と dim という 各 e_λ に非負整数を対応させる ($\dim(e_\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ということ) で
(1)$X = \sqcup e_\lambda$ が成り立つ.
(2) 各 e_λ に対して, 連続写像 $\varphi_\lambda : D^{\dim e_\lambda} \to \bar{e}_\lambda$ で, $D^{\dim e_\lambda} \setminus S^{\dim e_\lambda - 1}$ への制限が, e_λ への同相写像となるものが存在する.
(3)$X^r \coloneqq \displaystyle\bigsqcup_{\dim(e_\lambda) \geq r} e_\lambda$ と表す時に, $\bar{e}_\lambda \setminus e_\lambda = \varphi_\lambda(S^{\dim e_\lambda - 1}) \subset X^{\dim e_\lambda - 1}$
をみたすものを, 胞体分割可能なハウスドルフ空間という. またこのとき, 各 e_λ を胞体 (cell), という. さらに, 組 $(X, \{e_\lambda\})$ を胞体複体という.

定義 1.2. (部分胞体複体). X をハウスドルフ空間, $\{e_\lambda\}$ を X の胞体分割とする. $A \subset X$ が X は, X の胞体分割の部分集合 $\{e_{\lambda'}\} \subset \{e_\lambda\}$ で
(1)$e_{\lambda'} \subset A \Rightarrow \overline{e_{\lambda'}} \subset A$
(2)$\{e_{\lambda'}\}$ は A の胞体分割である. が存在する時に, X の部分胞体複体という.

定義 1.3. 胞体の数が有限である胞体複体を有限胞体複体という. 任意の点 $x \in X$ に対して, $x \in \mathrm{Int}A$ を満たす部分胞体複体 A で有限なものが存在する時に, 局所有限であるという.

定義 1.4. (CW 複体). 胞体複体 X で,
(C) 任意の点 $x \in X$ に対して $x \in A$ を満たす部分胞体複体 A で有限なものが存在する.
(W)X の部分集合 F が閉集合であることの必要十分条件が, X の各胞体 e_λ に対して $\overline{e_\lambda} \cup F$ が閉集合となること, である. を満たす時に, X は CW 複体であるという.

命題 1.5. 胞体複体 X が $(C), (W)$ を満たすことと,
(C') 任意の胞体 $C_\lambda \subset X$ に対し, $e_\lambda \subset A$ を満たす部分胞体複体 A で有限なものが存在する.
(W') X の部分集合 F が閉集合であることの必要十分条件が, X の任意の有限部分複体 A に対して $A \subset F$ が閉集合となること, である.

証明. まず, (C) と (C') が必要十分であることは本当に簡単に確かめられる. 次に, (C), (C') が成り立つとして, $(W) \Leftrightarrow (W')$ を示したい. $F \subset X$ を部分集合とする.
$(w)$$X$ の各胞体 e_λ に対して $\overline{e_\lambda} \cup F$ が N の相対位相で閉集合となること
(w') X の任意の有限部分複体 A に対して $A \subset F$ が閉集合となること
が同値であることを示せば良い. $(\Rightarrow)$ 任意の有限部分胞体複体 $A \subset X$ に対して, A は適当な有限個の胞体を用いて $A = \sqcup_{\mathrm{finite}} e_\lambda = \cup_{\mathrm{finite}} \overline{e_\lambda}$ と表されるので, $A \cap F = \cup_{\mathrm{finite}} \overline{e_\lambda} \cap F$ は閉集合である. $(\Leftarrow)$ e_λ に対して

適当な有限部分胞体複体 A で $e_\lambda \subset A$ を満たすものが存在するので, $\overline{e_\lambda} \cap F = \overline{e_\lambda} \cap A \cap F$ は閉集合であるので, 常に成り立つ. 従って実際には $(\Leftarrow)$ を条件として課せばよい. $\square$

注意 1.6. (W') の条件の, $(\Rightarrow)$ は, A が有限部分胞体複体であれば, $A = \cup_{\mathrm{finite}} \overline{e_\lambda}$ であるので $A \cup F$ は閉である.

命題 1.7. 局所有限な胞体複体は CW 複体である.

証明. (C) 任意の $x \in X$ に対して有限部分複体 A で $x \in \mathrm{int}A$ を満たすものがとれるので, $x \in A$ なる有限部分複体 A がとれたことになる. (W') F^c が開集合であることを示す. $x \in F^c$ に対して, $x \in \mathrm{int}A$ を満たす部分胞体複体 A がとれるので. $A \cap F$ が閉集合であることに注意すると, $x \in \mathrm{int}A \cap (A \cap F)^c \subset F^c$ というように開近傍がとれる. $\square$

命題 1.8. CW 複体 X の部分胞体複体 A は閉集合であり, CW 複体でもある.

証明. X が CW 複体であるので, 任意の有限部分胞体複体 A' に対して $A \cap A'$ が閉集合であることを示せば, (W') を用いて A が閉集合であることが言える. $A \cap A'$ は有限胞体複体であるので, 閉集合である. 続いて CW 複体であることを示す. $F \subset A$ を, A の任意の部分胞体複体 B に対して $F \cap B$ が閉であるとする. X の任意の有限部分複体 $X' \subset X$ に対して $A \cap X'$ は A の有限部分胞体複体であるので, $F \subset A$ に注意すると $F \cap A \cap X' = F \cap X'$ は閉集合である. 従って X が CW 複体であることから, 条件 (W') を用いると, F は閉集合である. $\square$