区間のマグニチュード

命題 0.1. $\mu \coloneqq \frac{1}{2}(\delta_0 + \mathrm{Leb}|[0,d] + \delta_d)$ と定めると, 任意の $x \in [0,d]$ に対して,

$$\int_0^d e^{-|x-y|} d\mu = 1$$

が成り立つ.

証明. 任意の $x \in [0,d]$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\int_0^d e^{-d(x,y)} d\mu \\
&= e^{-(x-0)} + e^{-(d-x)} + \int_0^d e^{-|x-y|} dy \\
&= e^{-(x-0)} + e^{-(d-x)} + \int_0^x e^{-|x-y|} dy + \int_x^d e^{-|x-y|} dy \\
&= e^{-(x-0)} + e^{-(d-x)} + \int_0^x e^{-(x-y)} dy + \int_x^d e^{-(y-x)} dy \\
&= e^{-(x-0)} + e^{-(d-x)} + e^{-(x-y)}|_0^x + (-1)e^{-(y-x)}|_x^d \\
&= 2
\end{aligned}$$

が成り立つ. □