射影加群は自由加群の直和因子

1

1.1

注意 1.1. 本文中の加群は環 R 上のものとする.

定義 1.2. (短完全系列の分裂). 加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

は, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$ が B の直和因子であるときに分裂するという.

命題 1.3. 加群の短完全系列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

は, 準同型 $j : B \to A$ で $j \circ i = \mathrm{id}$ を満たすものが存在するならば, 分裂する.

証明. 実際, $B = \mathrm{Im} i \oplus \mathrm{Ker} j$ であることを確かめる. 任意の $b \in B$ に対して $i \circ j(b) \in \mathrm{Im} i, b - i \circ j(b) \in \mathrm{Ker} j$ ととれば, $b = i \circ j(b) + b - i \circ j(b)$ であるので, B は $\mathrm{Im} i, \mathrm{Ker} j$ の和空間である. また, $i(a) \in \mathrm{Im} i, b \in \mathrm{Ker} j$ に対して

$$i(a) + b = 0$$

であるならば, $0 = j \circ i(a) + j(b) = a + 0 = a$ より, $i(a) = 0$ であることがわかり, それによって $b = 0$ であることもわかる. 従って, 直和である. □

注意 1.4. 前述の証明をなぞると, $B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} B$ は $j \circ i = \mathrm{id}_B$ であれば, $B = \mathrm{Im} i \oplus \mathrm{Ker} j$

定義 1.5. (射影加群). 加群 P は, 任意の加群 B, A と全射準同型 $g : B \to A$ と準同型 $f : P \to A$ に対して準同型 $h : P \to B$ で $g \circ h = f$ をみたすものが存在する時に, 射影 (的) 加群という.

命題 1.6. 射影加群 P は自由加群の直和因子である.

証明. P を集合と見做したときの形式的有限和 $\sum_{\text{有限}} r_i a_i \quad (r_i \in R, a_i \in P)$ 全体により自然に定まる自由加群を $F(P)$ とする. 明らかに $F(P)$ から P への全射準同型が存在するのでそれを g で表すことにする. P は射影的加群なので, $g \circ h = \mathrm{id}_P$ を満たす準同型 $h : P \to F(P)$ が存在する. 従って, 図式

$$P \xrightarrow{h} F(P) \xrightarrow{g} P$$

は $g \circ h = \mathrm{id}_P$ を満たすので, $F(P) = \mathrm{Im} h \oplus \mathrm{Ker} g \simeq P \oplus \mathrm{Ker} g$ □