

# ウェイトはなんならソボレフ空間に属する

## 1

記号 1.1.  $M_X$  で  $X$  上の有限な台をもつ複素測度全体を表す.  $w, v \in M_X$  に対して

$$(w, v)_Z := \int Zw(x)d\bar{v}(x)$$

により内積を定める.

設定 1.2.

$$X = \mathbb{R}^n$$

とする.

命題 1.3.  $M_X \subset H_{-(n+1)/2}$  が成り立つ.

証明. 任意の  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して  $\delta_x \in H_{-(n+1)/2}$  であることから主張が従う.

□

命題 1.4.  $\mathbb{R}^n$  上の関数

$$e^{-\|x\|}$$

のフーリエ変換は

$$\frac{n!\omega_n}{(2\pi)^{n/2}}\langle x \rangle^{-(n+1)}$$

である.

証明. 認めることにする.

□

命題 1.5. 包含写像  $W_X \rightarrow H_{-(n+1)/2}$  は有界線型作用素である.

証明.  $w = \sum_i c_i \delta_{x_i} \in W_X$  を適当にとる.  $F(\delta_x)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ix\xi}$  であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
(w, w)_{H_{-(n+1)/2}} &= \int \langle \xi \rangle^{-(n+1)/2} F(w)(\xi) \langle \xi \rangle^{-(n+1)/2} \overline{F(w)(\xi)} d\xi \\
&= \int \langle \xi \rangle^{-(n+1)} \sum c_i \bar{c}_j \left( \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \right)^2 e^{-ix_i \xi} e^{ix_j \xi} d\xi \\
&= \sum c_i \bar{c}_j \left( \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \right)^2 \int \langle \xi \rangle^{-(n+1)} e^{i(x_j - x_i) \xi} d\xi \\
&= \sum c_i \bar{c}_j \left( \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \right)^2 \int \left( \frac{n! \omega_n}{(2\pi)^{n/2}} \right)^{-1} Fz(\xi) e^{i(x_j - x_i) \xi} d\xi \\
&= \sum c_i \bar{c}_j n! \omega_n \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int Fz(\xi) e^{i(x_j - x_i) \xi} d\xi \\
&= \sum c_i \bar{c}_j n! \omega_n z(x_j - x_i) \\
&= n! \omega_n (w, w)_Z
\end{aligned}$$

より主張が従う.

□

**命題 1.6.**

$$\mathcal{W}_X \subset H_{-(n+1)/2}$$

が成り立つ.

**証明.** 有界線型拡張定理より従う.

□