パスメトリック空間

1

1.1 パスメトリック空間

1.2 パスメトリック空間の定義

定義 1.1. (パスメトリック空間). 距離空間 (X,d) は, 任意の二点 $x_0, x_1 \in X$ に対して

$$d(x_0,x_1) = \inf\left\{\sup_{\Pi} \sum d(c(t_i), c(t_{i+1})) \mid c \in C([0,1];X), c_0 = x_0, c_1 = x_1\right\}$$

が成り立つとき, パスメトリック空間という. ただし, sup は $[0,1]$ 区間のあらゆる分割を走る. $C([0,1];X)$ は $[0,1]$ から X への連続写像全体を表す.

注意 1.2. パスメトリック空間は, Length space ともいう.

定義 1.3. (ε 中点). $x_0, x_1 \in X$, $\varepsilon \geq 0$ に対して, $x \in X$ で

$$\sup\{d(x_0,x), d(x,x_1)\} \leq \frac{1}{2}d(x_0,x_1) + \varepsilon$$

を満たすものを ε 中点という.

命題 1.4. (X,d) を完備距離空間とする. 任意の $x_0, x_1 \in X$ に対し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ε 中点が存在するならば, (X,d) はパラメトリック空間である.

証明. 十分小さい ε_1 に対して

$$\begin{aligned}\sup\left\{d(x_0,x_{\frac{1}{2}}), d(x_{\frac{1}{2}},x_1)\right\} &\leq \frac{1}{2}d(x_0,x_1) + \varepsilon\frac{1}{2}d(x_0,x_1)\\ &= \frac{1}{2}d(x_0,x_1)(1+\varepsilon_1)\end{aligned}$$

を満たす $x_{\frac{1}{2}}$ がとれる. 次にこれまた十分小さい ε_2 に対して

$$\begin{aligned}&\sup\left\{d(x_0,x_{\frac{1}{4}}), d(x_{\frac{1}{4}},x_{\frac{1}{2}}), d(x_{\frac{1}{2}},x_{\frac{3}{4}})d(x_{\frac{3}{4}},x_1)\right\}\\ &\leq \frac{1}{2}(\frac{1}{2}d(x_0,x_1) + \varepsilon\frac{1}{2}d(x_0,x_1)) + \varepsilon_2(\frac{1}{2}d(x_0,x_1) + \varepsilon_1\frac{1}{2}d(x_0,x_1))\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}d(x_0,x_1)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\end{aligned}$$

を満たす $x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{3}{4}}$ がとれる. これを繰り返して, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ と $x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{4}}, x_{\frac{3}{4}}, x_{\frac{1}{8}}, \ldots$ を定める. ただし, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ は十分小さくとって $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon_k)$ が発散しないようにしておく. $[0,1]$ に含まれる二進有理数上で

$$d(x_{\frac{k}{2^n}}, x_{\frac{k+1}{2^n}}) \leq \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon_k)$$

が成り立つ．二進分数でない x_r の値を，r に収束する二進分数の列 $q_1, q_2, \dots$ をとり，$\{x_{q_i}\}$ を考えるとコーシー列になるので完備性から収束列となり，その値によって x_r を定める．これにより連続な曲線 $x : [0,1] \to X$ が定まるが，$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon_k)$ はいくらでも 1 に近くできるので，パラメトリック空間であることが示される． $\square$

命題 1.5. (X,d) を距離空間とする．(1) と (2) は必要十分である．
(1) 任意の $x_0, x_1 \in X$ に対し，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$x' \in X$ で

$$\sup d(x_0, x'), d(x', x_1) \leq \frac{1}{2} d(x_0, x_1) + \varepsilon$$

を満たすものが存在する．
(2) 任意の $x_0, x_1 \in X$ に対し，任意の $r_0 + r_1 \leq d(x,y)$ を満たす $r_0, r_1 > 0$ に対して

$$d(B(x_0; r_0), B(x_1; r_1)) \leq d(x_0, x_1) - r_1 - r_2$$

が成り立つ．

証明. 体調が良いときに埋める． $\square$

定義 1.6. (ε ネット)．部分集合 $A \subset X$ は，$X \subset B(A; \varepsilon)$ を満たす時に，ε ネットという．

命題 1.7. (距離空間におけるホップリノウの定理)．完備局所コンパクトパスメトリック空間は固有な距離空間である．(すなわち，任意の有界閉集合がコンパクトである.)

証明.

$$\rho(x) \coloneqq \sup\big\{R > 0 \mid \text{閉球 } D(x;R) \text{ がコンパクト}\big\}$$

と定める．
step: 任意の $x \in X$ に対して $\rho(x) > 0$ が成り立つ．
$(\because)$ X が局所コンパクトだから． ▲
step: ある点 $x \in X$ で $\rho(x) = \infty$ となるものが存在すれば，任意の点 x' に対して $\rho(x') = \infty$ である．
$(\because)$ x' の半径 r の閉球は $\sup\{d(x, x'') \mid x'' \in D(x;r)\}$ を半径とする x を中心とした閉球に含まれるから． ▲
step: $\rho(x) < \infty \Rightarrow D(x; \rho(x))$ はコンパクトである．
$(\because)$ $D(x; \rho(x) - \varepsilon)$ は $D(x; \rho(x))$ の有限集合でない ε ネット であるが，コンパクトであるので，(適当に半径 ε の開球の族による開被覆をとったあと有限部分被覆をとって，その開球の中心全体を考えると) 有限 ε ネットが存在する．従って，$D(x; \rho(x))$ は全有界である．また，閉集合であることから完備でもあるので，コンパクトである． ▲
step: 任意の $x_0, x_1 \in X$ に対して

$$|\rho(x_0) - \rho(x_1)| \leq |x_0 - x_1|$$

が成り立つ．(したがって，ρ は連続である.)
$(\because)$

▲

$\square$