ブラウウン運動の variation

1

設定 1.1. 区間 $[0,t]$ の n 分割と, 最大区間幅を

$$
\begin{aligned}
&\Delta_n[0,t] \coloneqq \{(t_0^n, t_1^n, \ldots, t_n^n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_n^n = t\} \\
&|\Delta_n[0,t]| = \max\Bigl\{\bigl|t_{k+1}^n - t_k^n \mid k = 0, \ldots, n-1\bigr|\Bigr\}
\end{aligned}
$$

により定める.

命題 1.2. (ブラウン運動の variation). $\{B_t\}$ を標準ブラウン運動とする. $t \geq 0$ とする. 任意の, 分割の列 で

$$
\lim_n |\Delta_n[0,t]| = 0
$$

を満たすものに対して, L^2 の意味で

$$
\sum_{k=1}^n \Bigl(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}\Bigr)^2 \to t
$$

が成り立つ.

証明.

$$
V_n \coloneqq \sum_{k=1}^n (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2
$$

と定める.

$$
\begin{aligned}
&E((V_n - t)^2) \\
&= E(V_n^2) - 2tE(V_n) + t^2 \\
&= \sum_{j,k} E((B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2) - 2t^2 + t^2 \\
&= \sum_k E((B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^4) + 2\sum_{[} j<k]E((B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n})^2 (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2) - t^2 \\
&= \sum_k (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 E(B_1^4) + 2\sum_{j<k} (t_j^n - t_{j-1}^n)(t_k^n - t_{k-1}^n) - t^2 \\
&= 3\sum_k (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 + 2\sum_{j<k} (t_j^n - t_{j-1}^n)(t_k^n - t_{k-1}^n) - t^2 \\
&= 3\sum_k (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 + 2\sum_{j<k} (t_j^n - t_{j-1}^n)(t_k^n - t_{k-1}^n) - (\sum_j (t_j^n - t_{j-1}^n))(\sum_k (t_k^n - t_{k-1}^n)) \\
&= 3\sum_k (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 - \sum_k (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 \\
&= 2\sum_k (t_j^n - t_{j-1}^n)^2 \leq 2t\,|\Delta_n[0,t]|
\end{aligned}
$$

となることから, 極限をとることで L^2 収束することが従う. $\square$

命題 1.3. $\{B_t\}$ を標準ブラウン運動とする. $t > 0$ とする. 任意の, 分割の列 で

$$\lim_n |\Delta_n[0,t]| = 0$$

を満たすものに対して,

$$\sum_k \left| B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right| \to \infty$$

が $a.s.$ で成り立つ.

証明. 背理法により, ある分割の列で, 発散しないものが存在すると仮定する.

$$M = \sup_n \sum_k \left| B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right| < \infty$$

であると仮定する. 前述の命題より, L^2 の意味で

$$\sum_{k=1}^n \left(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right)^2 \to t$$

が成り立つので, 確率収束の意味でこれが成り立つ. 従って, 適当な部分列をとって $a.s.$ で $\sum_k (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2$ が t に収束するようにできる. しかし,

$$\sum_k (B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 \leq M \sup_{1 \leq k \leq n} \left| B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n} \right|$$

が成り立ち, $\{B_t\}$ の連続性より右辺は分割を細かくすると 0 に $a.s.$ で収束する. よって矛盾する. $\square$