ネットによる連続写像の特徴づけ

1

1.1　前置き

設定 1.1. X で適当な位相空間を表す.

定義 1.2. (ネット). 有向集合 Λ と $x : \Lambda \to X$ の組 (x, Λ) を X のネットという. これを単に $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で表す.

定義 1.3. (共終). A を順序集合, B を A の部分集合とする. 任意の $a \in A$ に対して, $b \in B$ で

$$a \leq b$$

を満たすものが存在するとき, B は A と共終であるという.

定義 1.4. (強共終). A を順序集合, B を A の部分集合とする. 任意の $a \in A$ に対して, $b_0 \in B$ で

$$b \geq b_0 \Rightarrow a \leq b$$

を満たすものが存在するとき, B は A と強共終であるという.

定義 1.5. (部分ネット). (x, Λ) を X のネットとする. Λ' を有向集合, $\varphi : \Lambda' \to \Lambda$ とする. $(x, \varphi(\Lambda'))$ は, $\varphi(\Lambda')$ が Λ と強共終であるとき, (x, Λ) の部分ネットという. これを単に $\left\{x_{\varphi(\lambda')}\right\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ で表す.

定義 1.6. (補有限回属する). $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X のネット, $S \subset X$ を X の部分集合とする. $\{x_\lambda\}$ は $\lambda_0 \in \Lambda$ で

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in S$$

を満たすとき, S に補有限回属するという.

定義 1.7. (頻繁に属する). $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X のネット, $S \subset X$ を X の部分集合とする. $\{x_\lambda\}$ は 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $\lambda' \geq \lambda$ で

$$x_{\lambda'} \in S$$

を満たすとき, S に頻繁に属するという.

定義 1.8. (普遍ネット). X のネット $\{x_\lambda\}$ は, 任意の部分集合 $S \subset X$ に対して, S に補有限回属するか, あるいは S^c に補有限回属するとき, 普遍ネットであるという.

定義 1.9. (収束点). $\{x_\lambda\}$ を X のネットとし, $a \in X$ とする. a の任意の近傍 V_a に対して, $\{x_\lambda\}$ が V_a に補有限回属するとき, a を $\{x_\lambda\}$ の収束点という. $a = \lim x_\lambda$ と表す.

命題 1.10. (閉包のネットによる特徴づけ). $S \subset X$ を部分集合とする. $x \in \bar{S}$ であることと, x に収束する S のネットが存在することは必要十分である.

証明. $\Rightarrow$ を示す. x は S の閉包に属しているので, x の任意の近傍 V に対して, $x_V \in S \cap V$ なる点がとれる. x の近傍全体 $\mathcal{N}_x$ に, $V \leq U :\Leftrightarrow V \supset U$ により順序を定めて有向集合とする. すると, $\{x_V\}_{V \in \mathcal{N}_x}$ は x に収束する S のネットである. $\Leftarrow$ を示す. $x \in X \setminus \bar{S}$ であると, $X \setminus \bar{S}$ は閉集合なので, 小さい x の開近傍 U_x で $\bar{S}$ と共通部分を持たないものをとると, U_x に補有限回属する S のネットはとれないので x に収束することに矛盾する. $\square$

定義 1.11. (堆積点). $\{x_\lambda\}$ を X のネットとし, $a \in X$ とする. a の任意の近傍 V_a に対して, $\{x_\lambda\}$ が V_a に頻繁に属するとき, a を $\{x_\lambda\}$ の堆積点という.

1.2 本編

命題 1.12. (連続写像のネットによる特徴づけ). X, Y を位相空間, $f : X \to Y$, $x \in X$ とする. f が連続であることと, X の任意の収束ネット $\{x_\lambda\}$ に対して $\{fx_\lambda\}$ が $f(\lim x_\lambda)$ に収束する Y の収束ネットとなることは, 必要十分である.

証明. $\Rightarrow$ を示す. X の, $x \in X$ に収束するネット $\{x_\lambda\}$ をとる. 任意に $f(x)$ の近傍 U をとり, その逆像を V_x とする. V_x は x の近傍であるので, $\{x_\lambda\}$ は補有限回 V_x に属する. 従って, $\{fx_\lambda\}$ は U に補有限回属するので, 示された. $\Leftarrow$ 連続でない点 x があるとする. $f(x)$ の近傍 U で, x の任意の近傍の f による像が U に含まれないものがとれる. そこで, x の任意の近傍 V に対して $y \in f(V) \setminus U$ が取れるので, $x_V \in V$ で $fx_V = y$ を満たすものがとれる. x の近傍全体 $\mathcal{N}_x$ に, $V \leq U :\Leftrightarrow V \supset U$ により順序を定めて有向集合とする. すると, $\{x_V\}_{V \in \mathcal{N}_x}$ は x に収束する X のネットである. 一方で, 任意の V に対して fx_V は fx の近傍 U に含まれないので, fx には収束しないので矛盾する. $\square$