プロホロフ距離

1

定義 1.1. μ, ν を X 上のボレル確率測度とする.

$$d(\mu,\nu) \coloneqq \inf\{\varepsilon > 0 \mid \mu(A_\varepsilon) \geq \nu(A) - \varepsilon \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))\}$$

命題 1.2. μ, ν を X 上のボレル確率測度とし, $\varepsilon > 0$ とする.

$$\mu(A_\varepsilon) \geq \nu(A) - \varepsilon \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))$$

が成り立つことと,

$$\nu(A_\varepsilon) \geq \mu(A) - \varepsilon \quad ({}^\forall A \subset \mathcal{B}(X))$$

が成り立つことは, 必要十分である.

証明. $((A_\varepsilon)^c)_\varepsilon \subset A^c$ が成り立つので,

$$\mu(A^c) \geq \mu(((A_\varepsilon)^c)_\varepsilon) \geq \nu((A_\varepsilon)^c) - \varepsilon$$

が成り立つ. ので,

$$-\mu(A^c) \leq -\nu((A_\varepsilon)^c) + \varepsilon$$

であるので, 両辺に 1 を足すと, 確率測度であることから,

$$\mu(A) \leq \nu(A_\varepsilon) + \varepsilon$$

が成り立つ. 反対側も同様である. □

命題 1.3. μ, ν を X 上のボレル確率測度とする.

$$d(\mu,\nu) = d(\nu,\mu)$$

証明. 前述の命題より明らか. □