# 強圧性とヒルベルト空間における稠密性

## 1

**命題 1.1.** $H$ をヒルベルト空間とする. $T : H \to H$ を有界作用素とする. $c > 0$ で

$$(Tu, u) \geq c \|u\|^2 \quad (u \in H)$$

を満たすならば, $TH$ は $H$ で稠密である.

**証明.** $(TH)^{\perp} = \{0\}$ でないと仮定 (背理法). $v \in H, v \neq 0$ で

$$(Tu, v) = 0 \quad (u \in H)$$

を満たすものをとると,

$$c \|v^2\| \leq (Tv, v) = 0$$

より $v = 0$ となるので矛盾する.

□

**命題 1.2.** $H$ をヒルベルト空間とする. $T : H \to H$ を有界作用素とする. $c > 0$ で

$$(Tu, u) \geq c \|u\|^2 \quad (u \in H)$$

を満たすならば, $T$ は全射である.

**証明.** $u \in H$ を適当にとる. $v_i \in H$ で $Tv_i \to u$ を満たすものがとれる.

$$c \|v_i - v_j\|^2 \leq \|T(v_i - v_j)\| \|v_i - v_j\|$$

なので,

$$\|v_i - v_j\| \leq \frac{1}{c} \|T(v_i - v_j)\| \to 0$$

より, $v_i$ は $H$ のコーシー列なので, 適当な $v \in H$ に収束する.
したがって, $Tv_i \to Tv$ なので $Tv = u$ となり主張が従う.

□