斉次超関数と f.p.

1

1.1

設定 1.1. 特に始域をかいてないときは, $\mathbb{R}^n$ を指すことにする.

定義 1.2. $u \in \mathcal{D}'$ に対して, $M_t u \in \mathcal{D}'$ を

$$(M_t u, \varphi) = \frac{1}{|t|^n}(u, M_{1/t}\varphi) \quad (t \neq 0,\ \ \varphi \in \mathcal{D})$$

により定義する.

注意 1.3. これは, 変数変換を通して $(u(t\cdot), \varphi) = (u, \frac{1}{|t|^n}\varphi((1/t)\cdot))$ が成り立つことを逆手にとって定義している.

定義 1.4. (斉次超関数). $u \in \mathcal{D}'$ で, 任意の $t > 0$ に対して超関数の意味で

$$M_t u = t^a u$$

を満たすものを a 次斉次超関数という.

注意 1.5.

定義 1.6. (関数の有限部分). $g : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ とする. 異なる非負実部複素数 $a_1, \ldots, a_N$ (ただし, いずれかひとつは 0 でない) と, (異なるとは限らない) 複素数 $b_1, \ldots, b_{N+2}$ で

$$g(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\varepsilon^{a_j}} + b_{N+1}\log\varepsilon + b_{N+2} + o(1) \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

を満たすものが存在するときに, b_{N+2} を g の有限部分といい,

$$\mathrm{f.p.}_{\varepsilon\downarrow 0}$$

により表す. この定義の仕方は, a_j, b_j の取り方によらずユニークである.

命題 1.7.

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\varepsilon^{a_j}} + b_{N+1}\log\varepsilon + b_{N+2}\right) = 0$$

ならば, 全ての j について $b_j = 0$ が成り立つ.

証明. strongly elliptic systems and boundary integral equations, 補題 5.2 . $\square$

注意 1.8. g が $r > 0$ の周りでローラン展開可能で, 負べきの項が有限個であれば, これは単に 0 次の項と一致する.

注意 1.9. 負ベキの項と, 対数項がない場合は, これは単に

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$$

と一致する.

1.2

定義 1.10. (有限部分拡張). $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ に対して,

$$(\mathrm{f.p.}u, \varphi) = \mathrm{f.p.}_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\|x\| > \varepsilon} ju(x)\varphi(x)dx \quad ({}^\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$$

により, f.p.u を定める.