3 次元球面から 2 次元球面へのホップ写像

1

1.1　3 次元球面の中の 2 次元トーラス

$$S^3 = \left\{ (z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \mid \left|z^1\right|^2 + \left|z^2\right|^2 = 1 \right\}$$

を, あえて

$$S^3 = \left\{ (\cos(\frac{\xi}{2})e^{i\theta_1}, \sin(\frac{\xi}{2})e^{i\theta_2}) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 \leq \frac{\xi}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^1 \right\}$$

と表す.

$$T_{\frac{\xi}{2}} := \left\{ (\cos(\frac{\xi}{2})e^{i\theta_1}, \sin(\frac{\xi}{2})e^{i\theta_2}) \in \mathbb{C}^2 \mid \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^1 \right\}$$

と定めると, これは $T^2 = S^1 \times S^1$ と微分同相である. (ただし, $\xi = 0, \pi$ の時は, 退化して S^1 と微分同相である.)

1.2　S^3 の U(1) による軌道空間

あたりまえだが, $U(1) = \{a \in \mathbb{C} \mid |a| = 1\}$ である.
右作用 : $S^3 \times U(1) \to S^3$ を

$$((z^1, z^2), a) \mapsto (z^1 a, z^2 a)$$

により定める.

命題 1.1. $(z^1, z^2), (w^1, w^2)$ が同じ軌道上にある. $\Leftrightarrow$ $\frac{z^1}{z^2} = \frac{w^1}{w^2} \in \hat{\mathbb{C}}$.
(但し, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ であり, $z^2 = 0$ のときは $z^1/z^2 = \infty$ であると定める.)

証明. 明らかである. □

つまり, 軌道全体と $\hat{\mathbb{C}}$ が全単射である.

$$\mathcal{P} : S^3 \to S^2 = S^3/U(1); (z^1, z^2) \mapsto \hat{\rho}_1\left(\frac{z^1}{z^2}\right)$$

と定める. (但し, $\hat{\rho}_1 : \hat{\mathbb{C}} \to S^2$ は立体射影.)
　これをホップ写像という.