滑らかでない関数への微分のおしつけはできるか

1

命題 1.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合, $1 \le p \le \infty$ とし, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ とする.

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi dx = -\int_\Omega \partial_i u \varphi dx \quad ({}^\forall \varphi \in C_c^1(\Omega))$$

が成り立つ.

証明. $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ をとる. 開集合 ω で, $\mathrm{supp}\varphi \subset \omega \Subset \Omega$ を満たすものをとる. 十分小さい ε_0 で, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ならば

$$\mathrm{supp}\varphi_\varepsilon \subset \omega$$

が成り立つようなものが存在する.

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi_\varepsilon dx = -\int_\Omega (\partial_i u) \varphi_\varepsilon dx$$

が成り立つので, 残りは, $\varphi_\varepsilon, \partial_i \varphi_\varepsilon$ が ω 上で一様収束することに注意すると主張が従う.

□