メンガー凸性と測地性

1

定義 1.1. (X,d) を距離空間とする．$x,y \in X, t \in [0,1]$ に対して, $z \in X$ で

$$d(x,z) = td(x,y), \quad d(z,y) = (1-t)d(x,y)$$

を満たすものを, t 中間点という．

注意 1.2. 中間点という用語は, 別の使われ方もするので注意する．

命題 1.3. (X,d) を距離空間とする．

$$\{z \in Z \mid d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)\}$$

は有界閉集合である．

証明. $z_n \to z$ とすると,

$$d(x,z) + d(z,y) = \lim d(x,z_n) + \lim d(z_n,y) = \lim d(x,y) = d(x,y)$$

が成り立つので, 閉集合である．また,

$$d(x,z) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$$

が成り立つので, 有界である． □

命題 1.4. (X,d) をプロパー距離空間とする．TFAE
(1)(X,d) はメンガー凸 である．
(2) 任意の 2 点 $x,y \in X$ に対して, 1/2 中間点が存在する．．
(3) 任意の 2 点 $x,y \in X$ に対して, 任意の $t \in [0,1]$ に対して t 中間点が存在する．
(4)(X,d) は測地的である．

証明. $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4), (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ の順で示すことにする．
$(4) \Rightarrow (3)$．$x,y \in X$ に対して, x,y を結ぶ測地線 γ_y^x をとり, $z = \gamma_y^x(td(x,y))$ とすればよい．
$(3) \Rightarrow (2)$．明らかである．
$(2) \Rightarrow (4)$．$D \coloneqq \left\{\frac{k}{2^n}d(x,y) \mid n \in \mathbb{N}, k = 0,1,\ldots,2^n\right\} \subset [0,d(x,y)]$ と定める．D から X への等長写像 γ で, $\gamma(0) = x, \gamma(d(x,y)) = y$ を満たすものがつくれる．D は x を中心とする半径 $d(x,y)$ の閉球の中に含まれ, (X,d) がプロパーであることから半径有限の閉球はコンパクトであるので, 完備である (コンパクトならば完備であることを思い出しておく)．従って, $t \in [0,d(x,y)]$ に対して, $t_n \in D$ で $t_n \to t$ となる列をとる．$\gamma(t_n)$ は閉球の中のコーシー列であるので, 収束列である．

$$\gamma(t) \coloneqq \lim \gamma(t_n)$$

と定める．γ は定め方から連続写像である．$t, t' \in [0, d(x,y)]$ に対しては，$t_n \to t, t'_n \to t'$ となる D の点列をとると，

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) = \lim d(\gamma(t_n), \gamma(t'_n)) = \lim d(t_n, t'_n) = d(t, t')$$

が成り立つので，たしかに γ は x, y を結ぶ等長写像である．
(1) ⇒ (2)．前述の命題より，$S_x \coloneqq \left\{ z \in X \mid d(x,y) = d(x,z) + d(z,y), d(x,z) \leq \frac{1}{2} d(x,y) \right\}$ は有界閉集合であるので，(X, d) がプロパーであることからコンパクトである．連続関数

$$z \mapsto d(x,z)$$

を考え，S_x 上の最大値を実現する点を $z \in S_x$ とする．$d(x,z) = \frac{1}{2} d(x,y)$ であれば，この点 z が求める点であるので証明は終了する．$d(x,z) < \frac{1}{2} d(x,y)$ であったと仮定する．$T_y \coloneqq \left\{ w \in X \mid d(z,y) = d(z,w) + d(w,y), d(y,w) \leq \frac{1}{2} d(x,y) \right\}$ と定めて，連続関数

$$w \mapsto d(w,y)$$

の S_y 上の最大値を実現する点を $w \in S_y$ とする．$d(y,w) = \frac{1}{2} d(x,y)$ であれば，この点 w が求める点であるので証明は終了する．$d(w,y) < \frac{1}{2} d(x,y)$ であったと仮定する．

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y), \quad d(z,w) + d(w,y) = d(z,y)$$

であるので，

$$d(z,w) = d(x,y) - d(x,z) - d(z,y)$$

である．$d(x,z), d(z,y) < \frac{1}{2} d(x,y)$ であることから，$d(z,w) > 0$ であるので，メンガー凸性から，

$$d(z,\eta) + d(\eta,w) = d(z,w)$$

なる点 $\eta \in X$ がとれる．

$$d(x,\eta) + d(\eta,y) = d(x,y), \quad d(x,\eta) > d(x,z)$$

であることから，$d(x,z)$ が $z \mapsto d(x,z)$ の S_x 上の最大値であることに矛盾する．□