基本群と基点の取り替え

1

設定 1.1.

$$J \coloneqq [0,1]$$

と表す.

定義 1.2. (道の連結). $f, g : J \to X$ に対して

$$f \natural g \coloneqq \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

定義 1.3. (逆路). $f : J \to X$ に対して

$$\bar{f}(t) \coloneqq f(1-t)$$

と定める.

設定 1.4. $c_q^p : J \to X$ で $c_0 = p, c_1 = 1$ なる適当な連続曲線を表す.

命題 1.5. (基点のとりかえ). X を弧状連結とする. $\beta_q^p : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,q)$ を

$$\beta_q^p([f]) \coloneqq [c_q^p \natural f \natural \overline{c_q^p}]$$

により定めると, これは同型写像である.

証明. step: 準同型である.
$(\because)$

$$\beta_q^p[f \natural g] = [c_q^p \natural f \natural g \natural \overline{c_q^p}] = [c_q^p \natural f \natural \overline{c_q^p} \natural c_q^p \natural g \natural \overline{c_q^p}] = [c_q^p \natural f \natural \overline{c_q^p}][c_q^p \natural g \natural \overline{c_q^p}] = \beta_q^p[f]\beta_q^p[g]$$

$\blacktriangle$

step: 全単射である.
$(\because)$ β_p^q を考えると,

$$\beta_q^p \circ \beta_p^q = \mathrm{id}, \quad \beta_p^q \circ \beta_q^p = \mathrm{id}$$

が成り立つ. $\blacktriangle$

$\square$