ニュートンポテンシャルとポアソン方程式

1

定義 1.1. (ラプラス方程式の基本解). $F : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}$ を

$$F(z) \coloneqq \frac{1}{(n-2)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})} \frac{1}{|z|^{n-2}}$$

で定め, これを次元 3 以上のラプラス方程式の基本解という.

命題 1.2. (ラプラス方程式の基本解). F を次元 3 以上のラプラス方程式の基本解とする. $F_a(x) \coloneqq F(x-a)$ として $\mathbb{R}^n \setminus a$ の関数を定めると,

$$\Delta F_a(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

が成り立つ.

証明. 例えば $n = 3$ の時を見てみる.

$$(\partial_x)^2 F(x,y,z) = \frac{3(x-a)^2}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

なので,

$$\begin{aligned}
&((\partial_x)^2 + (\partial_y)^2 + (\partial_z)^2) F(x,y,z) \\
&= \frac{3((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= 3 - 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

命題 1.3. F を次元 3 以上のラプラス方程式の基本解, $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ とする. $F_x(y) \coloneqq F(x-y) = F(y-x)$ と定めると,

$$\mathrm{div}(F_x \nabla \mu - \mu \nabla F_x) = F_x \Delta \mu$$

が成り立つ.

証明. F_x が $\mathbb{R}^n \setminus x$ で調和であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(F_x \nabla \mu) &= (\nabla F_x, \nabla \mu) + F_x \Delta \mu \\
\mathrm{div}(\mu \nabla F_x) &= (\nabla \mu, \nabla F_x) + \mu \Delta F_x = (\nabla \mu, \nabla F_x) + 0
\end{aligned}$$

であるので, 上から下を引けばよい. □

命題 1.4. ($\mathbb{R}^n$ におけるポアソン方程式の基本解). $N \geq 3$ と s るう. $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ とする.

$$u \coloneqq F * \mu$$

は $-\delta u = \mu \quad \in \mathbb{R}^n$ を満たす有界かつ滑らかな関数である.

証明. $\mu\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ であるので, 積分記号下の微分が行えて,

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x-y)\Delta\mu(y)dy$$

が成り立つ. 任意の $r > 0$ に対して, $\overline{B(x;r)}^c$ (これ自体は連結な開集合だが, 非有界である. しかし, 無限遠点で消えるベクトル場であれば, 十分大きな開球との共通部分を考えて, 極限をとることで発散定理を適用することで,)

$$\int_{\overline{B(x;r)}^c} F_x(y)\Delta\mu(y)dy = \int_{\partial B(x;r)} ((F_x\nabla\mu - \mu\nabla F_x), -\xi)d\mathcal{H}_{n-1}$$

が成り立つ (ただし, $\xi_z \coloneqq \frac{z-x}{r}$). また,

$$z \in \partial B(x;r) \Rightarrow F(z) \coloneqq \frac{1}{(n-2)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})}\frac{1}{r^{n-2}}$$
$$z \in \partial B(x;r) \Rightarrow \nabla(F_x(z), \xi(z)) = \frac{-1}{\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})r^{n-1}}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\int_{\overline{B(x;r)}^c} F_x(y)\Delta\mu(y)dy &= \frac{r}{(n-2)\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}r^{n-1})}\int_{\partial B(x;r)}(\nabla\mu, \xi)d\mathcal{H}_{n-1} \\ &\quad - \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1}r^{n-1})}\int_{\partial B(x;r)}\mu d\mathcal{H}_{n-1}\end{aligned}$$

が成り立つ. ルベーグの微分定理より, $r \to 0$ とすると, 右辺の 1 項目は 0 に収束し, 2 項目は $-\mu(x)$ に収束するので,

$$\Delta u(x) = \lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(x;r)}} F(x-y)\Delta\mu(y)dy = -\mu(x)$$

が成り立つ. □