

距離空間の安定的 p 正定値性

1

命題 1.1. (X, d) を距離空間とする. $x, y, z \in X$ で

$$d(x, y) = d(y, z) = \frac{1}{2}d(x, z)$$

を満たすものが存在するならば, 任意の $p > 2$ に対して, 適当な $s(p) > 0$ で, $(X, s(p)d)$ が p 正定値でないものが存在する.

証明. $d(x, y) = d(y, z) = \frac{1}{2}d(x, z) = \alpha$ と表すことにする. $\lambda = -\delta_x + -\delta_z + 2\delta_y$ とする.

$$\begin{aligned}\sum \sum \lambda(x)\lambda(y)d^p(x, y) &= -4\alpha^p - 4\alpha^p + 2(2\alpha)^p \\ &= 2\alpha^p(2^p - 4)\end{aligned}$$

であるので, $p > 2$ のとき, d^p は条件付き負の対称連続関数ではない.

□

命題 1.2. (X, d) が安定的 2 正定値距離空間であるならば, ヒルベルト空間への等長埋め込みが存在する.

証明.

□