文系大学生のための数学のための古典力学のための数学

30 分コース

1

1.1　$\mathbb{R}$ における微分方程式

例 1.1. (自由度 1 の系). 適当な $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を与え, 写像 $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で

$$\ddot{x} = f(x)$$

を満たすものを考える. このとき, $x_0\in\mathbb{R}$ を適当な点とし, 神託により頭に思い浮かんだ

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x} f(y)dy$$

を t について微分すると

$$\dot{x}\ddot{x} - f(x)\dot{x} = \dot{x}\ddot{x} - \ddot{x}\dot{x} = 0$$

が成り立つ. 従って x がこの微分方程式の解であるならば, $\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x} f(y)dy$ の値は時間によらず一定である. つまり, この微分方程式の解 x とその微分 $\dot{x}$ の軌道は, $\mathbb{R}^2$ における $\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x} f(y)dy$ の等高線に対応する.

注意 1.2. 当然, $\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int_{x_0}^{x} f(y)dy + \mathrm{Const}$ も時間によらず一定である.

例 1.3. 例えば,

$$\ddot{x} = -x$$

という微分方程式を考えると,

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2$$

は時間によらず一定である. $\left\{(x,\dot{x})\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 = r^2\right\}$ は原点を中心とする半径 r の円の円周である.

1.2　$\mathbb{R}^2$ における微分方程式

例 1.4. 適当な $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を与え, 写像 $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ で

$$\ddot{x} = f(x)$$

を満たすものを考える. 神託により, $\nabla U = -f$ なる $U:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が頭に思い浮かんだとする. すると,

$$\frac{1}{2}\langle\dot{x},\dot{x}\rangle + U$$

を t について微分すると

$$\langle \ddot{x}, \dot{x} \rangle + \langle \nabla U, \dot{x} \rangle = \langle \ddot{x}, \dot{x} \rangle - \langle f, \dot{x} \rangle = \langle \ddot{x}, \dot{x} \rangle - \langle \ddot{x}, \dot{x} \rangle = 0$$

となるので, $\frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + U$ の値は時間によらず一定である.

命題 1.5. (ポテンシャルの存在のための十分条件). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とする. このとき, 任意の $p, q \in \mathbb{R}^2$ に対して, p, q を結ぶ任意の区分的滑らかな曲線 $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ の線積分 $\int_a^b f(c(t)) \cdot dc$ が同じ値を取る (つまり, 線積分の値が始点と終点のみに依り, それらを結ぶ曲線のとりかたには依らない) ならば, 関数 $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で, $\nabla U = -f$ となるものが存在する.

証明. 適当に $p_0 \in \mathbb{R}^2$ をとり,

$$U(p) := -\int_a^b f(c(t)) \cdot dc$$

により関数 $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を定める. $p = (x, y)$ における U の勾配を考えたい. 例えば $(1, 0)$ への方向微分を考える際に, p_0, p を結ぶ曲線 c をひとつとって, c を終点から真横に延長した区分的曲線を

$$c^h(t) := \begin{cases} c(t) & (t \in [a, b]) \\ (x + (t - b), y) & (t \in [b, b + h]) \end{cases}$$

で定める.

$$\begin{aligned}
\partial_x U(x, y) &= -\lim_{h \to 0} \frac{U((x, y) + h(1, 0)) - U(x, y)}{h} \\
&= -\lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{b+h} f(c^h(t)) \cdot dc^h + \int_a^b f(c(t)) \cdot dc}{h} \\
&= -\lim_{h \to 0} \frac{\int_b^{b+h} \langle f(c^h(t)), (1, 0) \rangle dt}{h} \\
&= -\lim_{h \to 0} \frac{\int_b^{b+h} f_1(x + (t - b), y) dt}{h} \\
&= -\lim_{h \to 0} \frac{\int_0^h f_1(x + t, y) dt}{h} = -f_1(x, y)
\end{aligned}$$

同様に $\partial_y U(x, y) = -f_2(x, y)$ であるので

$$\nabla U = -f$$

であることが示された. □

命題 1.6. $x_0 \in \mathbb{R}^3, \check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする. $f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x) := \check{f}(\|x - x_0\|) \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$$

により定めると, 関数 $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ で $\nabla U = f$ を満たすものが存在する.

証明. (sketch) にとどめる. 任意に二点 $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ をとり, (0 を避けて) 適当に p, q を結ぶ区分的に滑らかな曲線 c をとる. 線積分の値は c のパラメータの取り方によらないので, 弧長パラメータにとりかえておく.

$$\int_0^l \left\langle \check{f}(\|c(t) - x_0\|) \frac{c(t) - x_0}{\|c(t) - x_0\|}, \dot{c}(t) \right\rangle dt$$

を極座標 (r, θ) で観察すると, 結局 p から q へ直進する曲線に沿って線積分するのと変わらない. □

1.3 $\mathbb{R}^3$ における微分方程式

例 1.7. $x_0 \in \mathbb{R}^3, \check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．$f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x) \coloneqq \check{f}(\|x - x_0\|)\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$$

により定める．微分方程式

$$\ddot{x} = f(x) \quad \left(= \check{f}(\|x - x_0\|)\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right)$$

を満たす $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を考える．ここで, 神託により, ベクトル積により定まる

$$(x - x_0) \times \dot{x}$$

という量を考え, t に関する微分を計算すると,

$$\dot{x} \times \dot{x} + (x - x_0) \times \ddot{x} = \dot{x} \times \dot{x} + (x - x_0) \times \left(\check{f}(\|x - x_0\|)\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) = 0 + 0$$

となるので, この量は時間によらずに一定である．

1.4 解析力学的観点

例 1.8. $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とし, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を,

$$\ddot{x} = -\nabla U(x)$$

を満たす写像とする．このとき, 神託により

$$L(x, \dot{x}, t) \coloneqq \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle - U(x)$$

という関数を考えると,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\dot{x} + \nabla U(x) = \ddot{x} - \ddot{x} = 0$$

なので

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

を満たす．当たり前だが, 逆に, x を $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ を満たす写像とすると

$$\ddot{x} + \nabla U(x) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

なので,

$$\ddot{x} = -\nabla U(x)$$

を満たす．

例 1.9. 適当に $L:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};(t,x,y)\mapsto L(t,x,y)$ という関数を考える．座標変換を

$$\begin{cases} q \coloneqq x \\ p \coloneqq \frac{\partial L}{\partial y} \end{cases}$$

で定め, 偶然この座標変換が微分同相だったとする．(x,y) が時間に依存する場合を考え, (突然, L の y に関するルジャンドル変換を施すことで)

$$H(t,q,p)\coloneqq\langle p(t),y(t)\rangle-L(t,x(t),y(t))$$

により新たな関数 H を定める．すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p^i}&=\partial_{p^i}(\langle p(t),y(t)\rangle-L(t,x(t),y(t)))=y^i(t)+\sum_j p^j\frac{\partial y^j}{\partial y^i}-\sum_j\frac{\partial L}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial p^i}\\&=y^i(t)+\sum_j(p^j-\frac{\partial L}{\partial y^j})\frac{\partial y^j}{\partial p^i}=y^i(t)+\sum_j 0\cdot\frac{\partial y^j}{\partial p^i}=y^i(t)\end{aligned}$$

であるので,

$$\frac{dx^i}{dt}-y^i=\frac{dq^i}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p^i}$$

が成り立つ．さらに,

$$\begin{aligned}-\frac{\partial H}{\partial q^i}&=-\sum_j(p^j\frac{\partial y^i}{\partial q^i}-\frac{\partial L}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial q^i}-\frac{\partial L}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial q^i})=-\sum_j(p^j\frac{\partial y^i}{\partial q^i}-\frac{\partial L}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial q^i}-\frac{\partial L}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial q^i})\\&=-\sum_j((p^j-\frac{\partial L}{\partial y^j})\frac{\partial y^j}{\partial q^i}-\frac{\partial L}{\partial x^j}\delta_{ij})=\frac{\partial L}{\partial x^i}\end{aligned}$$

より

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y^i}-\frac{\partial L}{\partial x^i}=\frac{dp^i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

が成り立つ．まとめると, 二つの微分方程式

$$\begin{cases} y &= \dot{x} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \end{cases}\qquad\begin{cases} \frac{dq}{dt} = & \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} = & -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

は等価であることがわかる．