コンパクト距離空間のバナッハ埋め込み定理

1

命題 1.1. 任意のコンパクト距離空間に対して, カントール集合からの全射連続写像が存在する.

命題 1.2. 任意のコンパクト距離空間は, $C([0,1])$ に等長に埋め込める.

証明. コンパクト距離空間を K で表すことにする. K は可分であるので, K の可算稠密部分集合を K' とする. フレシェ埋め込みにより, $l^\infty := \{\lambda : K' \to \mathbb{R}\}$ に sup ノルムを備えた空間に等長に埋め込める. K' の生成する自由 $\mathbb{Q}$ 加群 $\mathbb{Q}\langle K' \rangle \subset l^\infty$ を考えると,

$$K' \subset \mathbb{Q}\langle K' \rangle \subset l^\infty$$
$$K = \overline{K'} \subset \overline{\mathbb{Q}\langle K' \rangle} \subset l^\infty$$

が成り立つ. $X := \overline{\mathbb{Q}\langle K' \rangle}$ とおくと, X^* の単位閉球を B で表すと, B は弱 * 位相に関してコンパクトであり, X が可分であることから, この位相に関して距離化可能である. カントール集合 $\mathcal{C}$ から B への全射連続写像 $f : \mathcal{C} \to B \subset X^*$ がとれる.

$$F : X \to C(\mathcal{C}); x \mapsto \langle f(\cdot), x \rangle$$

と定めると, $x, y \in X$ に対して

$$\|Fx - Fy\|_\infty = \sup_{c \in \mathcal{C}} \langle f(c), x - y \rangle \leq \sup_{c \in \mathcal{C}} \|fc\| \, \|x - y\| \leq \|x - y\|_X$$

が成り立つ. また, ハーンバナッハの定理より, $x - y \in X$ に対して, $T \in B$ で

$$\langle T, x - y \rangle = \|x - y\|_X$$

を満たすものが存在する. f は $\mathcal{C}$ から B への全射であるので, 適当な $c \in \mathcal{C}$ で

$$\langle fc, x - y \rangle = \|x - y\|$$

を満たすものが存在するので,

$$\|Fx - Fy\|_\infty = \sup_{c \in \mathcal{C}} \langle f(c), x - y \rangle \geq \|x - y\|_X$$

が成り立つ. 故に,

$$\|Fx - Fy\|_\infty = \|x - y\|_X$$

が成り立つ. 故に $F : X \to C(\mathcal{C})$ は等長埋め込みである. $\mathcal{C}$ は $[0,1]$ の閉集合であり, $[0,1]$ は閉集合同士を分離できるので, Tietze の拡張定理より一様ノルムを保った連続拡張 ι が存在する. 包含写像 $K \subset \overline{\mathbb{Q}\langle K' \rangle}$ を $i : K \to \overline{\mathbb{Q}\langle K' \rangle}$ で表すと $\iota \circ F \circ i : K \to C(\mathcal{C})$ は等長埋め込みである.

□