ODE 初期値問題の局所的な解の存在と一意性

1

注意 1.1. 変数の記号が t であるものを時間変数, x であるものを空間変数と呼ぶことにする. また $|\cdot|$ で L^1 ノルムを表す.

命題 1.2. $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を

$$D \coloneqq \{(t,x) \mid |t|\le a, |x-x_0|\le b\}$$

を定義域に含む写像とする.
f が D で連続かつ, 空間変数に関してリプシッツ連続 であるならば, 常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

は $\left\{t\in \mid |t|\le \min\left\{a, \frac{b}{\sup_D f}\right\}\right\}$ を定義域に含む解を持つ.

証明. $M \coloneqq \max\{\sup_D f_1, \dots, \sup_D f_n\}$ とする.

$$x_1 \coloneqq x_0 + \int_0^t f(s,x_0)ds, \quad x_{n+1}(t) \coloneqq x_0 + \int_0^t f(s,x_n(s))ds$$

と定める. ただし, x_n の定義域は, 最低限 $\left\{t\in\mathbb{R} \mid |t|\le\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}\right\}$ を含めば,

$$|x_n(t)-x_0| \le \left|\int_0^t |f(s,x_n(s))|\,ds\right| \le M\,|t| \le b$$

と x_n の値域が f の空間変数の定義域に含まれ, うまく定義される. 帰納法とリプシッツ連続性より

$$\begin{aligned}
|x_n(t)-x_n(t)| &\le \left|\int_0^t (f(s,x_n(s)) - f(s,x_n(s)))ds\right| \\
&\le \left|\mathrm{Lip}\int_0^t |x_n(s)-x_{n-1}(s)|\,ds\right| \\
&\le \mathrm{Const}\frac{\mathrm{Lip}^n t^n}{n!}
\end{aligned}$$

を得るので, $\{x_n\}$ はある関数 x に一様収束し,

$$|f(t,x_n(t)) - f(t,x(t))| \le \mathrm{Lip}\,|x_n(t)-x(t)|$$

であることから, $f(\cdot,x_n(\cdot))$ も一様収束するので,

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x_n(s))ds$$

の両辺の極限をとることで, x が解であることがわかる. 一意性は他に y という解があったら, 定義域上の任意の t で

$$|x(t) - y(t)| \leq \mathrm{Const}\frac{\mathrm{Lip}^n t^n}{n!}$$

が任意の n について成り立つので, 極限をとることで両者は一致する. □