反応拡散方程式の比較原理

1

記号 1.1. $\omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界な領域, $0 < T < \infty$ とし, $t \in [0, T]$ とする.

$$
\begin{aligned}
&\Omega_t \coloneqq \Omega \times \{t\} \\
&(\partial\Omega)_0^T \coloneqq \partial\Omega \times [0, T] \\
&\sqcup_0^T \Omega \coloneqq \Omega_0 \cup \partial\Omega \times [0, T] \\
&(\partial\Omega)_0^\infty \coloneqq \partial\Omega \times [0, \infty) \\
&\sqcup_0^\infty \Omega \coloneqq \Omega_0 \cup \partial\Omega \times [0, \infty)
\end{aligned}
$$

命題 1.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする. $u, f, u_0, \varphi, v, g, v_0, \psi$ を

$$
\begin{cases}
\partial_t u(x,t) = \Delta_x u(x,t) + f(x,t) & (x \in \Omega_0^\infty \setminus \sqcup_0^\infty \Omega) \\
u(x,0) = u_0(x) & (x \in \Omega_0) \\
u(x,t) = \varphi(x,t) & (x \in \sqcup_0^\infty \Omega \setminus \Omega_0)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\partial_t v(x,t) = \Delta_x v(x,t) + g(x,t) & (x \in \Omega_0^\infty \setminus \sqcup_0^\infty \Omega) \\
v(x,0) = v_0(x) & (x \in \Omega_0) \\
v(x,t) = \varphi(x,t) & (x \in \sqcup_0^\infty \Omega \setminus \Omega_0)
\end{cases}
$$

(が意味をなして) 成り立つ実数値関数とする.

$$
f \leq g, \quad u_0 \leq v_0, \quad \varphi \leq \psi
$$

であるならば,

$$
u \leq v
$$

が成り立つ.

証明. $u - v$ に最大値原理を用いると主張が従う.

□