

超距離空間の開球の中心による特徴づけ

1

命題 1.1. (X, d) を距離空間とする. 任意の $x \in X, r > 0$ に対して,

$$B(x; r) = B(y; r) \quad (y \in B(x; r))$$

が成り立つならば, (X, d) は超距離空間である.

証明. (X, d) が超距離空間でないとする (背理法). $x, y, z \in X$ で長二等間隔三頂点とならないものがとれる. すると,

$$m < R \leq M$$

とすると, $p \in B(x; R)$ で, $B(x; R) \neq B(p; R)$ となるものが存在する. (ただし, xy, yz, xz のうち最大の値を M , 2 番目に大きい値を m とする.) よって矛盾する.

□