

## 三角不等式の一種

### 1

**命題 1.1.**  $(X, d)$  を距離空間とする.  $x, y, z \in X$  を  $d(x, z) \leq d(z, y)$  をみたす 3 点とする. このとき,  $0 < p < 1$  に対して

$$d^p(x, y) \leq p d^p(x, z) + d^p(z, y)$$

が成り立つ.

**証明.**  $0 < p < 1$  なので  $f(t) = (t + c)^p$  は凹関数であるので,

$$f(t) \leq f(0) + f'(0)t$$

が成り立つので,

$$(t + c)^p \leq c^p + p c^{p-1} t$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned} d^p(x, y) &\leq (d(x, z) + d(z, y))^p \leq d^p(z, y) + p d^{p-1}(z, y) d(x, z) \\ &\leq d^p(z, y) + \alpha d^p(x, z) d(x, z) = p d^p(x, z) + d^p(z, y) \end{aligned}$$

が成り立つ. □