有界線型拡張定理

1

命題 1.1. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とする．$(Y, \|\cdot\|_Y)$ が完備であるならば, X の稠密部分空間 A で定義される有界線型作用素は, 作用素ノルムを保ったまま, X 上に一意に拡張できる．

証明. $x \in X$ に対して, $\tilde{T}x$ を, $a_n \in A$ で $a_n \to x$ である点列を適当にひとつ選ぶと, Ta_n は完備ノルム空間 Y のコーシー列であるので, 極限が存在するので,

$$\tilde{T}(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} T(a_n)$$

により定める．well-defined であることを確かめるために, $b_n \in A$ で $b_n \to x$ である点列をとる．T は $a, b \in A$ に対して

$$\|Ta - Tb\| \leq \|T\| \, \|a - b\|$$

が成り立つため, 一様連続である．従って, $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ で

$$\|a - b\| \leq \delta \Rightarrow \|Ta - Tb\| < \varepsilon$$

を満たすものが存在する．従って, $N_1 \in \mathbb{N}$ で, $n \geq N_1$ ならば

$$\|Ta_n - Tb_n\| < \varepsilon$$

となるものがとれる．また, $N_2 \in \mathbb{N}$ で, $n \geq N_2$ ならば,

$$\left\|Tb_n - \tilde{T}x\right\| < \varepsilon$$

を満たすものが存在する．従って, $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ であるならば,

$$\left\|Tb_n - \tilde{T}x\right\| \leq \|Tb_n - Ta_n\| + \left\|Ta_n - \tilde{T}x\right\| < 2\varepsilon$$

が成り立つ．従って, $\tilde{T} : X \to Y$ は well-defined である．また, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, a, b \in X$ に対して,

$$\tilde{T}(c_1 a + c_2 b) - c_1 \tilde{T}(a) - c_2 \tilde{T}(b) = \lim \Big(T(c_1 a_n + c_2 b_n) - c_1 \tilde{T}(a_n) - c_2 \tilde{T}(b_n) \Big) = \lim 0 = 0$$

より線型である．また,

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \sup\left\{ \frac{\left\|\tilde{T}x\right\|}{\|x\|} \mid x \in X, x \neq 0 \right\} \geq \sup\left\{ \frac{\|Ta\|}{\|a\|} \mid a \in A, x \neq 0 \right\} = \|T\|$$

と

$$\left\|\tilde{T}x\right\| = \|\lim Ta_n\| = \lim \|Ta_n\| \leq \lim \|T\| \, \|a_n\| = \|T\| \, \|x\|$$

より, $\left\|\tilde{T}\right\| \leq \|T\|$ であることから,

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$$

が成り立つ. また, T の線型拡張 $\hat{T}: X \to Y$ で, $\left\|\hat{T}\right\| = \left\|\tilde{T}\right\|$ であるが, $\hat{T} \neq \tilde{T}$ であるものが存在するとする. $\tilde{T}x \neq \hat{T}x$ なる $x \in X$ をとると, $a_n \in A$ で $a_n \to x$ であるものがとれて,

$$0 \neq \hat{T}x - \tilde{T}x = \lim Ta_n - \lim Ta_n = 0$$

より矛盾するので, このような拡張は一意である. $\square$