

二つの距離空間の貼り合わせ

1

命題 1.1. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, \mathcal{R} を対応集合とする. $d : X \sqcup Y \times X \sqcup Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $d|_{X \times X} = d_X, d|_{Y \times Y} = d_Y$ とし, $x \in X, y \in Y$ に対しては

$$d(x, y) := \inf\{xx' + y'y \mid (x', y') \in \mathcal{R}\}$$

と定めると, これは距離になる.

証明. 三角不等式だけ確認することになると, 任意に $x \in X, y \in Y$ をとり, 任意に $z \in X$ をとると,

$$\begin{aligned} xy &= \inf\{xx' + y'y \mid (x', y') \in \mathcal{R}\} \\ &\leq \inf\{xz + zx' + y'y \mid (x', y') \in \mathcal{R}\} \\ &= xz + zy \end{aligned}$$

が成り立つ. $z \in Y$ の時も同様である. □

命題 1.2. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間, \mathcal{R} を対応集合とし, $r > 0$ とする. $d : X \sqcup Y \times X \sqcup Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $d|_{X \times X} = d_X, d|_{Y \times Y} = d_Y$ とし, $x \in X, y \in Y$ に対しては

$$d(x, y) := \inf\{xx' + y'y + r \mid (x', y') \in \mathcal{R}\}$$

と定めると, これは距離になり, $d_H(X, Y) \leq r$ が成り立つ.

証明. 任意の $x \in X$ に対して, $y \in Y$ で $(x, y) \in \mathcal{R}$ を満たすものをとると,

$$d(x, y) := \inf\{xx' + y'y + r \mid (x', y') \in \mathcal{R}\} \leq xx + yy + r = r$$

が成り立つ. 距離になるかどうかは要確認. □