測度に付随するハーン分解と測度の変動

1

命題 1.1. (ハーン分解). (X, Σ, μ) を符号付測度空間とする．このとき, disjoint な可測集合 $P, N \in \Sigma$ で,
(1)$X = P \sqcup N$
(2)$A \in \Sigma, A \sum P \Rightarrow \mu A \geq 0$ (3)$A \in \Sigma, A \sum P \Rightarrow \mu A \leq 0$ を満たすものが存在する．

証明. 認めることにする． □

このような P, N による X の分解を X のハーン分解という．P を正の部分, N を負の部分ということにする．

定義 1.2. (符号付測度のジョルダン分解). (X, Σ, μ) を符号付測度空間とする．P, N を X の正, 負の部分とする．$E \in \Sigma$ に対して,

$$\mu^+(E) \coloneqq \mu(P \cap E), \quad \mu^-(E) \coloneqq -\mu(N \cap E),$$

と定め, それぞれ μ の正の部分, 負の部分という．$\mu = \mu^+ - \mu^-$ を μ のジョルダン分解という．

定義 1.3. (符号付測度の変動). (X, Σ, μ) を符号付測度空間とする．$\mu = \mu^+ - \mu^-$ を μ のジョルダン分解とする．

$$|\mu| \coloneqq \mu^+ + \mu^-$$

と定め, これを μ の変動という．$\|\mu\| \coloneqq |\mu|(X)$ と定め, これを μ の全変動という．

注意 1.4. 変動は, 実数値符号付測度の場合には, 有限可測分割による定義と一致するらしい．