距離空間上の力学系の定義

1

1.1

定義 1.1. (距離空間上の力学系). (X, d) を距離空間とする．写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}}$ は,
(1) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi_t : X \to X$ は連続である.
(2) 任意の $x \in X$ に対して, $t \mapsto \varphi_t x$ は連続である.
(3) 任意の $x \in X$ に対して, $\varphi_0 x = x$ が成り立つ.
(4) 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対して, $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ が成り立つ.
を満たす時, X 上のフロー, あるいは力学系という.

命題 1.2. (X, d) を距離空間とする．写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}}$ をフローとする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, φ_t は同相写像である.

証明. φ_t に対して φ_{-t} は両側逆写像であるので, 全単射であり, ともに連続であるから.

□

定義 1.3. (フローの半軌道). (X, d) を距離空間とする．写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}}$ をフローとする．$x \in X$ に対して,

$$\gamma^+ x \coloneqq \{\varphi_t x \mid t \geq 0\}, \quad \gamma^- x \coloneqq \{\varphi_t x \mid t \leq 0\}$$

と定め, それぞれ x の正の半軌道, 負の半軌道という.

定義 1.4. (距離空間上の半流). (X, d) を距離空間とする．写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ は,
(1) 任意の $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $\varphi_t : X \to X$ は連続である.
(2) 任意の $x \in X$ に対して, $t \mapsto \varphi_t x$ は連続である.
(3) 任意の $x \in X$ に対して, $\varphi_0 x = x$ が成り立つ.
(4) 任意の $t, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して, $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ が成り立つ.
を満たす時, X 上の半流という.

定義 1.5. (半流の半軌道). (X, d) を距離空間とする．写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を半流とする．$x \in X$ に対して,

$$\gamma^+ x \coloneqq \{\varphi_t x \mid t \geq 0\}$$

と定め, x の正の半軌道という．また, 曲線 $\{c(t)\}_{t\leq 0}$ で $c_0 = x$ かつ

$$t \in (-\infty, 0], 0 \leq s \leq -t \Rightarrow \varphi_s(c_t) = c_{t+s}$$

を満たすものを, x の負の半軌道という.

定義 1.6. (平衡点). (X,d) を距離空間とする. 写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を半流とする. $x \in X$ で

$$\varphi_t x = x \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0})$$

を満たすものを, φ_t の平衡点という.

定義 1.7. (正不変集合). (X,d) を距離空間とする. 写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を半流とする. $S \subset X$ で

$$\varphi_t S \subset S \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0})$$

を満たすものを, φ_t の正不変集合という.

定義 1.8. (不変集合). (X,d) を距離空間とする. 写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を半流とする. $S \subset X$ で

$$\varphi_t S = S \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0})$$

を満たすものを, φ_t の不変集合という.

命題 1.9. 不変集合ならば, 正不変集合である.

証明. 定義より明らか. □

命題 1.10. $x \in X$ を平衡点とする. $\{x\}$ は不変集合である.

証明. 定義より明らか. □

定義 1.11. (リャプノフ安定). (X,d) を距離空間とする. 写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を半流とする. $x \in X$ は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で

$$\varphi_t B(x;\delta) \subset B(x;\varepsilon) \quad (0 \leq t)$$

満たすときリャプノフ安定という.

定義 1.12. (弱漸近的安定). (X,d) を距離空間とする. 写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を半流とする. $x \in X$ は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ で

$$y \in B(x;\delta) \Rightarrow, \lim_{t\to\infty} \varphi_t y = x$$

を満たすものがとれるとき, 弱漸近的安定という.

定義 1.13. (X,d) を距離空間とする. 写像の族 $\{\varphi_t : X \to X\}_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ を半流とする. $x \in X$ は, リャプノフ安定かつ弱漸近的安定であるとき, 漸近的安定であるという.

例 1.14. 2 次元球面の赤道上に適当に点 $x \in S^2$ をとり, x で接する小円全体を軌道とするフローを考えると, 球面の任意の点 $y \in S^2$ に対して $\lim_{t\to\infty} \varphi_t y = x$ が成り立つが, 明らかにリャプノフ安定ではない.