

$\prod(1+x_n)$ の収束について

1

命題 1.1. 任意の x に対して

$$1+x \leq e^x$$

証明. $f(x) := e^x - x - 1$ は $f(0) = 0$ で, 変曲点が $x = 0$ だけ. $x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$ なので, グラフの形は, $x = 0$ あではだんだん下がってきて, $x = 0$ で最小値 0 をとって, そっから上昇していく. \square

命題 1.2. 実数の列 $\{x_n\}$ は $\sum x_n < \infty$ を満たすならば,

$$\prod(1+x_n) < \infty$$

が成り立つ.

証明.

$$\prod(1+x_n) \leq \prod e^{x_n} = e^{\sum x_n}$$

\square