再生核ヒルベルト空間

1

定義 1.1. (再生核ヒルベルト空間). X を空でない集合とする．ヒルベルト空間 $\mathcal{H} \subset \{f \mid X$ 上の実数値関数$\}$ は, 任意の $x \in X$ に対して, δ_x が $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素となるとき, $\mathcal{X}$ 上の再生核ヒルベルト空間 (RKHS) という．

命題 1.2. $\mathcal{H}$ を集合 $\mathcal{X}$ 上の RKHS とする．$f_n \in \mathcal{H}$ がこの RKHS のノルムに関して $f \in \mathcal{H}$ に収束するならば, 各点収束する．

証明. 任意の $x \in X$ に対して,

$$|f_n x - fx| = |\delta_x f_n - \delta_x f| \leq \|\delta_x\| \, \|f_n - f\|_{\mathcal{H}}$$

が成り立つ． □

定義 1.3. (再生核). $\mathcal{H} \subset \{f \mid X$ 上の実数値関数$\}$ をヒルベルト空間とする．$k : X \times X \to \mathbb{R}$ は,
(1) 任意の $x \in X$ に対して, $k(\cdot, x) \in \mathcal{H}$ である．
(2) 任意の $x \in X, f \in \mathcal{H}$ に対して, $\langle f, k(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}} = f(x)$ が成り立つ．
を満たす時に, $\mathcal{H}$ の再生核という．再生核が存在するとき, 再生核をもつという．

命題 1.4. (再生核の存在). $\mathcal{H}$ を集合 X 上のヒルベルト空間とする．このとき次は同値である．
(1)$\mathcal{H}$ が RKHS である．
(2)$\mathcal{H}$ が再生核をもつ．

証明. ($\Rightarrow$). δ_x は有界線型作用素なので, 表現定理により定まる $f_{\delta_x} \in \mathcal{H}$ を用いて

$$k(y, x) := f_{\delta_x}(y) \quad (y \in X)$$

と定めると,

$$\langle g, k(\cdot, x)\rangle = \langle g, f_{\delta_x}\rangle = \delta_x g = g(x)$$

が成り立つ．
($\Leftarrow$). k を再生核とする．任意の $x \in X$ に対して,

$$\|\delta_x f\| = \langle f, k(\cdot, x)\rangle \leq \langle k(\cdot, x), k(\cdot, x)\rangle^{\frac{1}{2}} \|f\| = k(x, x)^{\frac{1}{2}} \|f\|$$

が成り立つので, δ_x は有界である． □

定義 1.5. X を集合, $k : X \times X \to \mathbb{R}$ を対称正定値関数とする．このとき,

$$\mathbb{R}\langle\{k(\cdot, x)_{x \in X}\}\rangle$$

に

$$\left\langle \sum_{x \in X} \lambda(x) k(\cdot, x), \sum_{x \in X} \xi(x) k(\cdot, x) \right\rangle \coloneqq \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \lambda(x) \xi(y) k(x, y)$$