ピクセルと l_1 凸集合

1

注意 1.1. ちょっとこのノートの完成度低いです.

記号 1.2. (X, d) を距離空間とする.

$$((x, y)) \coloneqq \{z \in X \mid xy = xz + zy, \quad x \neq z \neq y\}$$
$$[[x, y]] \coloneqq \{z \in X \mid xy = xz + zy\}$$

という記号を用いることにする.

記号 1.3. $C_n \coloneqq [-1/2, 1/2]^n$ で n 次元単位立方体を表す. $\mathbb{H} \coloneqq \{z + 1/2 \mid z \in \mathbb{Z}\}$ で半整数全体を表す.

定義 1.4.

$$P_x(\lambda) \coloneqq \{\lambda(h + C_n) \mid h \in \mathbb{H}^n\}$$

を λ ピクセル集合族という. λ ピクセル集合族の要素を, λ ピクセル集合という.

定義 1.5. (λ-ピクセル). $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して,

$$A_\lambda \coloneqq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{H}^n, \lambda(h+C_n) \cap A \neq \varnothing} \lambda(h + C_n)$$

と定める.

命題 1.6. $I \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元有界閉区間 (つまり有界閉区間の n 個の直積) とする. $F \subset \mathbb{R}^n$ を $x, y \in F$ が

$$x + I \cap y + I = \varnothing$$

を満たすならば, $z \in F$ で $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y), \quad x \neq z, \quad z \neq y$ を満たすものが存在するような閉集合とする. このとき, $F + I$ は l_1 凸集合である.

証明. 工事中. □

命題 1.7. $A \subset \mathbb{R}^n$ が l_1 凸集合であるならば, 任意の $\lambda > 0$ に対して, A_λ は l_1 凸集合である.

証明.

$$L(\lambda) \coloneqq \{h \in \mathbb{H}^n \mid \lambda(h + C_n) \cap A \neq \varnothing\}$$

とする. このとき, $X = \lambda L(\lambda) + \lambda C_n$ が成り立つ. $\lambda h, \lambda h' \in \lambda L(\lambda)$ で $\lambda(h + C_n) \cap \lambda(h' + C_n) = \varnothing$ を満たすものをとる. $\lambda h_1 < \lambda h_1'$ となるようにしておく (ただし, h_1, h_1' はそれぞれ h, h' の第一成分である). 適当

に $x \in \lambda(h+C_n) \cap A, x' \in \lambda(h+C_n) \cap A$ をとる．A が l_1 凸であるので, $y \in ((x, x'))$ で

$$x_1 \leq \lambda(h_1 + 1/2) < y_1 < \lambda(h'_1 - 1/2) \leq x'_1$$

を満たすものが取れる (ただし, x_1, x'_1, y_1 は x, x', y の第一成分)．適当な $k \in \mathbb{H}^n$ で, $y \in \lambda(k+C_n)$ かつ, $k \in [[h, h']]$ を満たすものがとれる．k_1 を k の第一成分とすると, $\lambda(h_1+1/2) < y_1 < \lambda(h'_1 - 1/2)$ より, $h_1 < k_1 < h'_1$ であるので, $h \neq k \neq h'$ であるので, $k \in ((h, h'))$ が成り立つ．$\lambda L(\lambda)$ が閉集合であることから, 前述の命題より, A_λ は l_1 凸集合である． □

定義 1.8. $A \subset \mathbb{R}^n$ は λ ピクセル集合の有限和で表されるとき, λ -pixellated 集合という．適当な λ に対して λ-pixellated 集合である集合を, 単に pixellated 集合という．

命題 1.9. コンパクト l_1 凸集合全体において, pixellated l_1 凸集合 全体はハウスドルフ距離に関して稠密である．

証明. 集合 A に対して A_λ は λ を小さくしていけば A にいくらでも近くなるようにとれる．あとはコンパクト性から有限個のピクセル集合で被覆できるかどうかは適当に検討すればいい． □