ユークリッド空間の地面に対するトレース作用素

1

記号 1.1. $x = (x', x_n) \subset \mathbb{R}^n$ という表記をとることにする.

命題 1.2. $s < -1/2$ とする. このとき,

$$\int_{\mathbb{R}} \langle x \rangle^{2s} dx_n = \langle x' \rangle^{2s+1} \int_{\mathbb{R}} \langle t \rangle^{2s} dt$$

が成り立つ.

証明.

$$x_n = \langle x' \rangle t$$

により変数変換すると,

$$\langle x \rangle^2 = \langle x' \rangle^2 + x_n^2 = \langle x' \rangle^2 + \langle x' \rangle^2 t^2 = \left(1 + t^2\right) \langle x' \rangle^2 = \langle t \rangle^2 \langle x' \rangle^2$$

$$\int_{\mathbb{R}} \langle x \rangle^{2s} dx_n = \int \langle t \rangle^{2s} \langle x' \rangle^{2s} \langle x' \rangle dt$$

が成り立つ.

□

記号 1.3.

$$\Gamma_0 : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$$

を,

$$\Gamma_0 f(x') \coloneqq f(x', 0)$$

により定める.

命題 1.4. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$F(\Gamma_0 f)(\xi') = \int_{\mathbb{R}} F f(\xi', \xi_n) d\xi_n$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned}\Gamma_0 f(x') &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} Ff(\xi)e^{i(x',0)\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} Ff(\xi',\xi_n)d\xi_n\right)e^{ix'\xi'}d\xi'\end{aligned}$$

であるので,

$$F(\Gamma_0 f)(\xi') = \int_{\mathbb{R}} Ff(\xi',\xi_n)d\xi_n$$

が成り立つ.

□

命題 1.5. $s > 1/2$ とする. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|\Gamma_0 f\|_{H_{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim_s \|f\|_{H_s(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned}F(\Gamma_0 f)(\xi') &= \int_{\mathbb{R}} Ff(\xi',\xi_n)d\xi_n \\ &= \int \langle\xi\rangle^{-s}\langle\xi\rangle^{s}Ff(\xi)d\xi_n\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}|F(\Gamma_0 f)(\xi')|^2 &\le \int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{-2s}d\xi_n\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}(Ff(\xi',\xi_n))^2d\xi_n \\ &= \langle\xi\rangle^{-2s+1}\int_{\mathbb{R}}\langle t\rangle^{-2s}dt\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}(Ff(\xi',\xi_n))^2d\xi_n\end{aligned}$$

であるので,

$$\left|\langle\xi\rangle^{2s-1}|F(\Gamma_0 f)(\xi')|^2\right| \le \int_{\mathbb{R}}\langle t\rangle^{-2s}dt\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}Ff(\xi',\xi_n)d\xi_n$$

両辺を積分することで,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{2s-1}|F(\Gamma_0 f)(\xi')|^2d\xi' &\lesssim_s \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}(Ff(\xi',\xi_n))^2d\xi_n\right)d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{2s}(Ff(\xi))^2d\xi\end{aligned}$$

より主張が従う.

□