$\prod(1+x_n)$ の収束について

1

命題 1.1. 任意の x に対して

$$1 + x \leq e^x$$

証明. $f(x) \coloneqq e^x - x - 1$ は $f(0) = 0$ で, 変曲点が $x = 0$ だけ. $x \geq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$ なので, グラフの形は, $x = 0$ あではだんだん下がってきて, $x = 0$ で最小値 0 をとって, そっから上昇していく. □

命題 1.2. 非負の実数の列 $\{x_n\}$ は $\sum x_n < \infty$ を満たすならば,

$$\prod(1 + x_n) < \infty$$

が成り立つ.

証明.

$$\prod(1 + x_n) \leq \prod e^{x_n} = e^{\sum x_n}$$

より, $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1 + x_n)$ は上に有界な広義増大列なので, 収束する. □

注意 1.3. $x_n \geq 0$ でないならば, これは成り立たない. 例えば

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -2, x_5 = 1, \ldots\cdots$$

を考えると $P_N = \prod_{n=1}^{N}(1 + x_n)$ は収束しない.