接続と平行移動

1

1.1 接続と平行移動

定義 1.1. 滑らかな曲線 c に沿ったベクトル場 $X \in \Gamma(c^*TM)$ は, 任意の $t \in \mathrm{dom} c$ に対して

$$(\nabla_t^{c^*} X)(t) = 0$$

が成り立つときに, 曲線 c と平行であるという.

定義 1.2. 滑らかな曲線 c と, ベクトル場 $X_s \in T_{c(s)}M$ に対して同型写像 $P_t^s : T_{c(s)}M \to T_{c(t)}M$ を X_s を微分方程式

$$(\nabla_t^{c^*} V)(t) = 0, \quad V_s = X_s$$

の解の時刻 t における値 V_t で定め,

$$P_t^s X_s \coloneqq X_t$$

により定める.

注意 1.3. 同型写像であることは, 微分方程式の解の一意性から従う. また, 規約表記と同じ見方ができるように, P_t^s の右上と X_s の右下が同じ時刻になるように記号を定めている.

命題 1.4. $X \in \Gamma(c^*TM)$ を滑らかな曲線 c に平行なベクトル場とし, $s \in \mathrm{dom} c$ とする. $P_t^s X_s \in \Gamma(c^*TM)$ に対して

$$\nabla_t P_t^s X_s = 0$$

が成り立つ.

証明. そうなるように定義しているので明らか. □

命題 1.5. X を滑らかな曲線 c に沿った平行とは限らないベクトル場とする.

$$(\nabla_t^{c^*} X)_0 = \lim_{t \to 0} \frac{P_t^0 X_0 - X_0}{t}$$

が成り立つ.

証明. c_0 において正規直交基底 $\{e_{i0}\}$ をとり, $X_t = X_t^i P_t^0 e_{i0}$ と表示しておく.

$$(\nabla_t^{c^*} X)_0 = (\partial_t X^i)_0 e_{i0} + X_t^i (\nabla_t^{c^*} P_t^0 e_{i0})_0 = (\partial_t X^i)_0 e_{i0}.$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{P_0^t X_t - X_0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{P_0^t X_t^i P_t^0 e_{i0} - X_0^i e_{i0}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{X_t^i P_0^t P_t^0 e_{i0} - X_0^i e_{i0}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{X_t^i - X_0^i}{t} e_{i0} = (\partial_t X^i)_0$$

□

1.2 接空間の標準的な同一視について

設定 1.6. 多様体 M の p における接空間を, $v : C^\infty(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ でライプニッツ則をみたすもの全体として定義する.

設定 1.7. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の座標は恒等写像によりとる.

設定 1.8. 接空間 T_pM 上の滑らかな関数に対する, 同相写像で定めた座標に対応する偏微分作用素を $(\delta_i)v$ で表す.

定義 1.9. (ユークリッド空間の接空間と同一視). 線型写像 $\iota_p : \mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n$ を

$$\iota_p(e_i) \coloneqq (\partial_i)_p \quad (i = 1, \dots, n)$$

とし, これを線型に拡張することで定める. これをユークリッド空間と標準的な同一視という.

定義 1.10. (接空間の接空間と同一視). 線型写像 $\iota_v : T_pM \to T_v(T_p\mathbb{M})$ を

$$\iota_v((\partial_i)_p) \coloneqq (\delta_i)_v \quad (i = 1, \dots, n)$$

とし, これを線型に拡張することで定める. これを接空間と 2 次接空間の標準的な同一視という.

命題 1.11. T_pM 上の曲線 $\omega(t) \coloneqq t\xi$ に対して

$$\dot{\omega}(0) = \iota_o\xi$$

が成り立つ.

証明. $\xi = \xi^i(\partial_i)_p$ と表す. $\iota_o(\xi) = \iota_o(\xi^i(\partial_i)_p) = \xi^i(\delta_i)_o$ である. 滑らかな関数 $f : T_pM \to \mathbb{R}$ に対して

$$\partial_t|_{t=0} f(\omega(t)) = \nabla f(o) \cdot \xi = \xi^i((\delta_i)_o f) = \iota_o(\xi) f$$

より主張が従う. □

命題 1.12. T_pM 上の曲線 $\omega(s) \coloneqq t\xi + ts\zeta$ に対して

$$\dot{\omega}(0) = \iota_{t\xi}(t\zeta)$$

が成り立つ.

証明. $\zeta = \zeta^i(\partial_i)_p$ と表す. $\iota_{t\xi}(\zeta) = \iota_{t\xi}(\zeta^i(\partial_i)_p) = \zeta^i(\delta_i)_{t\xi}$ である. 滑らかな関数 $f : T_pM \to \mathbb{R}$ に対して

$$\partial_s|_{s=0} f(\omega(s)) = \nabla f(t\xi) \cdot (t\zeta) = t\zeta^i((\delta_i)_{t\xi} f) = \iota_{t\xi}(t\zeta) f$$

より主張が従う. □

命題 1.13.

$$d(\exp_p)_o \circ \iota_o = \mathrm{id}_{T_pM}$$

が成り立つ.

証明. 任意に $\xi \in T_pM$ をとる. T_pM 上の曲線 $\omega(t) \coloneqq t\xi$ を考える.

$$d(\exp_p)_o \circ \iota_o(\xi) = d(\exp_p)_o(\dot{\omega}(0)) = (\partial_t)|_{t=0}(\exp_p \circ \omega)(t) = (\partial_t)|_{t=0}(\exp_p(t\xi)) = \xi$$

□

1.3　ヤコビ場と指数写像

設定 1.14. 指数写像による座標近傍をとる.

命題 1.15. $J_0 = 0, (\nabla_t J)_0 = \eta \in T_p M$ を満たす $\exp_p(t\xi)$ に沿ったヤコビ場に対して

$$d(\exp_p)_{t\xi}\iota_{t\xi}\eta = \frac{1}{t}J_t$$

が成り立つ.

証明. このヤコビ場は $\exp_p(t\xi + ts\eta)$ の変分ベクトル場として与えられるので,

$$J_t = (\partial_s)|_{s=0}\exp_p(t\xi + ts\eta) = (d\exp_p)_{t\xi}(\iota_{t\xi}t\eta) = t(d\exp_p)_{t\xi}(\iota_{t\xi}\eta)$$

が成り立つ. □

命題 1.16. $J_0 = 0, (\nabla_t J)_0 = (\partial_i)_p \in T_p M$ を満たす $\exp_p(t\xi)$ に沿ったヤコビ場に対して

$$d(\exp_p)_{t\xi}\iota_{t\xi}(\partial_i)_p = \frac{1}{t}J_t, \quad (\partial_i)_{\exp_p t\xi} = \frac{1}{t}J_t$$

が成り立つ.

証明. 一つ目は前述の命題から直ちに従う. 二つ目は,

$$d(\exp_p)_{t\xi}\iota_{t\xi}(\partial_i)_p f = \partial_s|_{s=0}\exp_p(t\xi + ts(\partial_i)p)f = \partial_i(f\circ\exp_p)(\exp_p t\xi) = \partial_i|_{\exp_p(t\xi)}f$$

が成り立つ. □