微分のフーリエ変換

1

命題 1.1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする.

$$F(\partial_j f) = i\xi_j F(f)$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned}
\partial_j f &= \partial_j \left(\int F f e^{-x\xi} d\xi \right) \\
&= \int F f \partial_j e^{-x\xi} d\xi \\
&= i\xi_j \int F f e^{ix\xi} d\xi \\
&= i\xi_j f
\end{aligned}$$

□

命題 1.2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする.

$$F(\partial_j^2 f) = -\xi_j^2 F(f)$$

が成り立つ.

証明. さっきの命題からすぐわかる.

□

命題 1.3. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする.

$$F(\Delta_x f) = -\left\|\xi\right\|^2 F(f)$$

が成り立つ.

証明. 明らか.

□

命題 1.4. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする.

$$F((I-\Delta_x)f) = (1+\|\xi\|^2)F(f)$$

が成り立つ.

証明. 明らか.

□