# 対称連続関数の正と負のタイプについて

## 1

**設定 1.1.** $X$ で適当な位相空間を表す.

**定義 1.2.** (対称な関数). $S$ を集合とする. $f : S \times S \to \mathbb{R}$ は

$$f(x,y) = f(y,x) \quad ({}^\forall x, y \in S)$$

を満たす時に, 対称であるという.

**定義 1.3.** (Positive type). 対称な連続関数 $k : X \times X \to \mathbb{R}$ は有限な台をもつ任意の関数 $\lambda : X \to \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \lambda(x)\lambda(y)k(x,y) \geq 0$$

を満たす時に, 正であるという.

**命題 1.4.** (和, 積に関する positivity の保存). 対称連続関数 $k_1, k_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ が正ならば, $k_1 + k_2, k_1k_2$ も正である.

**証明.** 明らか. □

**命題 1.5.** (各点収束に関する positivity の保存). $k_t : X \times X \to \mathbb{R}$ を正の対称連続関数の族とする. $k_t$ が対称連続関数 $k : X \times X \to \mathbb{R}$ に各点収束するならば, $k$ も正である.

**証明.** 有限な台をもつ関数 $\lambda : X \to \mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \lambda(x)\lambda(y)k(x,y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \lambda(x)\lambda(y) \lim k_t(x,y) \geq 0$$

が成り立つ. □

**命題 1.6.** 対称連続関数 $k : X \times X \to \mathbb{R}$ が正ならば, $e^k$ も正の対称連続関数である.

**証明.**

$$e^{k(x,y)} := \sum \frac{1}{n!}(k(x,y))^n$$

であることから, 正の対称連続関数の各点収束の極限であるから. □

**定義 1.7.** (Conditionally of negative type). 対称な連続関数 $k : X \times X \to \mathbb{R}$ は有限な台をもつ任意の関数 $\lambda : X \to \mathbb{R}$ で $\sum_{x \in X} \lambda(x) = 0$ を満たすものに対して,

$(1) k(x,x)=0 \quad (^\forall x\in X)$
(2)

$$\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\lambda(x)\lambda(y)k(x,y)\leq 0$$

を満たす時に, 条件付き負であるという.

**命題 1.8.** (各点収束に関する条件付き negativity の保存). $k_t : X\times X\to\mathbb{R}$ を条件付き負の対称連続関数の族とする. $k_t$ が対称連続関数 $k : X\times X\to\mathbb{R}$ に各点収束するならば, $k$ も条件付き負である.

**証明.** 有限な台をもつ関数 $\lambda : X\to\mathbb{R}$ で, $\sum_{x\in X}\lambda(x)=0$ を満たすものに対して

$$\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\lambda(x)\lambda(y)k(x,y)=\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\lambda(x)\lambda(y)\lim k_t(x,y)\leq 0$$

が成り立つ. □

**命題 1.9.** $(H,d_H)$ をヒルベルト空間 $(H,\langle,\rangle)$ の定める距離空間とする. $d_H^2$ は条件付き負の対称連続関数である.

**証明.**

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\lambda(x)\lambda(y)d_H^2(x,y)\\
&=\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\lambda(x)\lambda(y)\left\|x-y\right\|^2\\
&=\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\lambda(x)\lambda(y)\left\|x\right\|^2-\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\lambda(x)\lambda(y)2\langle x,y\rangle+\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\lambda(x)\lambda(y)\left\|y\right\|^2\\
&=0-\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}\lambda(x)\lambda(y)2\langle x,y\rangle+0\\
&=-\left\|\sum_{x\in X}\lambda(x)x\right\|^2\leq 0.
\end{aligned}$$

□

**注意 1.10.** $k$ を $k(x,x)=0 \quad (^\forall x\in X)$ を満たす対称連続関数とする. $k$ が正であるとき, $-k$ は条件付き負
$k$ が条件付き負であるとき, $-k$ は正であるとは限らない.

**命題 1.11.** 対称連続関数 $k : X\times X\to\mathbb{R}$ が条件付き負であるならば, ヒルベルト空間 $(H,\langle,\rangle)$ と $f : X\to H$ で

$$k\coloneqq f^*d_H^2$$

を満たすものが存在する. (ただし, $f^*d_H^2(x,y)\coloneqq d_H^2(f(x),f(y))$ と定める. )

**証明.**

$$V\coloneqq\left\{\lambda : X\to\mathbb{R}\mid \#[\lambda\neq 0]<\infty,\sum_{x\in X}\lambda(x)=0\right\}$$

双線形写像を

$$\langle \lambda, \xi \rangle := -\frac{1}{2} \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} \lambda(x)\xi(y)k(x,y)$$

で定める.

$$N := \{\lambda : X \to \mathbb{R} \mid \langle \lambda, \lambda \rangle = 0\}$$

と定める.

$$\lambda_1, \lambda_2 \in N \Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) \leq 2 \|\lambda_1\| \|\lambda_2\| = 0$$

となることから, $N$ は部分空間であることに注意する. $V/N$ に $\langle [\lambda], [\xi] \rangle := \langle \lambda, \xi \rangle$ で内積を定める (この内積が well-defined であることは, コーシーシュワルツより従う). この内積に関して, 完備化してできるヒルベルト空間を $(H, \langle , \rangle)$ とする.

$$f : X \to H; x \mapsto [\delta_x - \delta_p]$$

と定めると,

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\|^2 &= \|[(\delta_x - \delta_p) - (\delta_y - \delta_p)]\|^2 \\
&= \|[\delta_x - \delta_y]\|^2 \\
&= \|\delta_x\|^2 - 2\langle \delta_x, \delta_y \rangle + \|\delta_y\|^2 \\
&= -\frac{1}{2}(k(x,x) - 2k(x,y) + k(y,y)) \\
&= k(x,y)
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

**命題 1.12.** $k : X \times X \to \mathbb{R}$ を正の対称連続関数とすると, 任意の $x, y \in X$ に対して $k(x,x) = k(y,y)$ が成り立つならば,

$$\varphi(x,y) := k(x,x) - k(x,y)$$

で定まる対称連続関数は, 条件付き負である.

**証明.** $\sum_{x \in X} \lambda(x) = 0$ である有限な台をもつ関数 $\lambda$ に対して,

$$\sum \sum \lambda(x)\lambda(y)(k(x,x) - k(x,y)) = 0 - \sum \sum \lambda(x)\lambda(y)k(x,y) \leq 0.$$

□

**命題 1.13.** 対称連続関数 $k : X \times X \to \mathbb{R}$ が, $k(x,x) = 0 \quad ({}^\forall x \in X)$ を満たすとする. 適当な点 $p \in X$ に対して,

$$\kappa(x,y) := k(x,p) + k(y,p) - k(x,y)$$

対称連続関数を定める. このとき, $\kappa$ が正であることと, $k$ が条件付き負であることは必要十分である.

**証明.** $(\Rightarrow)$. $\kappa$ が正であるので, 有限な台をもち, $\sum \lambda(x) = 0$ を満たす関数 $\lambda : X \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\sum \sum \lambda(x)\lambda(y)k(x,y) &= -(0 + 0 - \sum \sum \lambda(x)\lambda(y)k(x,y)) \\
&= -\sum \sum \lambda(x)\lambda(y)(k(x,p) + k(y,p) - k(x,y)) \\
&= -\sum \sum \lambda(x)\lambda(y)\kappa(x,y) \leq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ.
$(\Leftarrow)$. $k$ が条件付き負なので, ヒルベルト空間 $(H, \langle , \rangle)$ と, 連続写像 $f : X \to H$ で, $k = f^* d_H^2$ を満たすものがとれる.

$$\begin{aligned}\kappa(x,y) &= \|fx - fp\|^2 + \|fy - fp\|^2 - \|fx - fy\|^2 \\ &= 2\langle fx - fp, fy - fp\rangle\end{aligned}$$

であるので, 有限な台をもつ関数 $\lambda$ に対して

$$\sum\sum \lambda(x)\lambda(y)\kappa(x,y) = 2\sum\sum \|\lambda(x)(fx - fp)\|^2 \geq 0$$

が成り立つ. □

**命題 1.14.** (シェーンベルクの定理). 対称連続関数 $k : X \times X \to \mathbb{R}$ が, $k(x,x) = 0 \quad ({}^\forall x \in X)$ を満たすならば, (1)(2) は同値である.
(1)$k$ は条件付き負である. (2) 任意の正の実数 $s > 0$ に対して $e^{-sk}$ は正である.

**証明.** ((2) $\Rightarrow$ (1)).

$$k(x,y) = \lim_{s\to 0} -\frac{e^{-k(x,y)s} - e^{-k(x,y)0}}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{e^{-k(x,x)s} - e^{-k(x,y)s}}{s}$$

が成り立つ. 従って, 条件付き負の対称連続関数の各点収束先になっているので, 条件付き負である.
((1) $\Rightarrow$ (2)). 任意に $s > 0$ をとる. $sk$ が条件付き負であるので, $p \in X$ を適当に選んで

$$s\kappa(x,y) := sk(x,p) + sk(y,p) - sk(x,y)$$

と定めると, これは正の対称連続関数である.
<u>step:</u>

$$e^{-sk(x,p)}e^{-sk(y,p)}$$

は正の対称連続関数である.
$(\because)$

$$\sum\sum \lambda(x)\lambda(y)e^{-sk(x,p)}e^{-sk(y,p)} = \left|\sum \lambda(x)e^{-sk(x,p)}\right|^2 \geq 0$$

▲

従って, $e^{s\kappa(x,y)}$ と $e^{-sk(x,p)}e^{-sk(y,p)}$ はそれぞれ正の対称連続関数であるので, その積である

$$e^{-sk(x,y)} = e^{s\kappa(x,y)}e^{-sk(x,p)}e^{-sk(y,p)}$$

も正の対称連続関数である. □

**命題 1.15.** $x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$ に対して

$$x^\alpha = \left(\int_0^\infty \frac{1 - e^{-y}}{y^{\alpha+1}} dy\right)^{-1} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-tx}}{t^{\alpha+1}} dt$$

が成り立つ.

**証明.** $\int_0^\infty \frac{1-e^{-tx}}{t^{\alpha+1}}$ を $y = tx$ で積分変換すると形式的にこの式が出てくる. 収束と発散については不明. □

**命題 1.16.** 対称連続関数 $k$ が条件付き負であるならば, $0 < \alpha \leq 1$ に対して $k^\alpha$ も条件付き負である.

**証明.** $\sum \lambda(x) = 0$ である有限な台をもつ関数 $\lambda : X \to \mathbb{R}$ をとる.

$$\begin{aligned}\sum\sum \lambda(x)\lambda(y)k^\alpha(x,y) &= \left(\int_0^\infty \frac{1-e^{-y}}{y^{\alpha+1}}dy\right)^{-1} \int_0^\infty \sum\sum \lambda(x)\lambda(y)\frac{1-e^{-tk(x,y)}}{t^{\alpha+1}}dt \\ &= \mathrm{Const} \int_0^\infty \sum\sum \lambda(x)\lambda(y)\frac{-e^{-tk(x,y)}}{t^{\alpha+1}}dt \leq 0\end{aligned}$$

□