Phương Trình Vi Phân

Nguyễn Thị Hiên

Đại Học Khoa Học Tự Nhiên
Đại Học Quốc Gia TP HCM

Khoa Toán-Tin Học

Ngày 31 tháng 12 năm 2020

Nội Dung

Phương trình vi phân

Định nghĩa

Phương trình vi phân là những phương trình mà ẩn là hàm số và phương trình có chứa đạo hàm.

Phương trình vi phân

Định nghĩa

Phương trình vi phân là những phương trình mà ẩn là hàm số và phương trình có chứa đạo hàm.

Ví dụ

Phương trình vi phân

$$y' = y$$

Giải phương trình là tìm một hàm y theo biến x sao cho $\forall x,\ y'(x) = y(x)$.

- Phương trình vi phân cấp một là một phương trình vi phân chứa một hàm số chưa biết và đạo hàm cấp một của hàm số đó. Tổng quát

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

- Phương trình vi phân cấp một là một phương trình vi phân chứa một hàm số chưa biết và đạo hàm cấp một của hàm số đó. Tổng quát

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

- Tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp một thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$ với x_0, y_0 cho trước được gọi là một bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Ví dụ

- Xét phương trình vi phân $y' = y$.

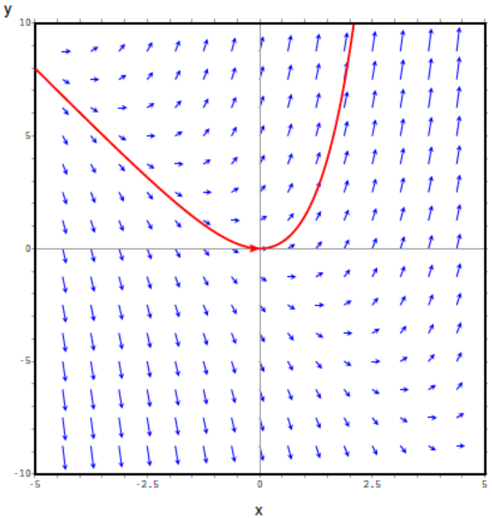
Ví dụ

- Xét phương trình vi phân $y' = y$.
- Xét bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Xét phương trình vi phân

$$y' = 2x + y$$



Mô hình với phương trình vi phân cấp một

Ví dụ (Mô hình tăng trưởng dân số)

Ta lập mô hình tăng trưởng dân số (số lượng cá thể trong một quần thể sinh vật nào đó) P theo thời gian t. Giả sử tốc độ tăng dân số tỉ lệ hằng với qui mô dân số và tốc độ này không thay đổi theo thời gian.

Mô hình với phương trình vi phân cấp một

Ví dụ (Mô hình tăng trưởng dân số)

Ta lập mô hình tăng trưởng dân số (số lượng cá thể trong một quần thể sinh vật nào đó) P theo thời gian t. Giả sử tốc độ tăng dân số tỉ lệ hằng với qui mô dân số và tốc độ này không thay đổi theo thời gian.

Tốc độ tăng trưởng dân số theo thời gian $\frac{dP}{dt}$.

Tốc đô tăng trưởng tương đối $\frac{\frac{dP}{dt}}{P}$.

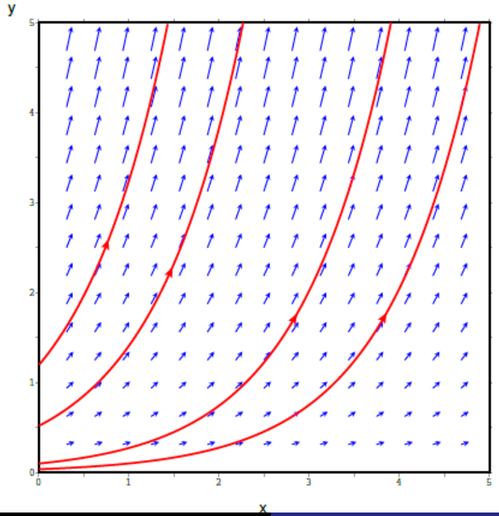
Vậy ta có mô hình

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

với k là hằng số tỉ lệ.

- Nếu $k > 0$ thì $\frac{dP}{dt}$ luôn dương, nên dân số luôn tăng. Sự phát triển của dân số không bị hạn chế bởi chiến tranh, bệnh dịch,...
- Nếu $k = 0$ thì $\frac{dP}{dt}$ luôn bằng 0, do đó P bằng một hằng số. Dân số không đổi. Nghiệm như vậy được gọi nghiệm cân bằng.
- Nếu $k < 0$ thì $\frac{dP}{dt}$ luôn âm, nên dân số luôn giảm.

Hình: Một số nghiệm của phương trình dân số $P = P_0 e^{kt}$ với $k = 1$ và một vài giá trị của P_0.



Mô hình với phương trình vi phân cấp một

Ví dụ (Mô hình tăng trưởng dân số có kìm hãm)

Ta lập mô hình tăng trưởng dân số (số lượng cá thể trong một quần thể sinh vật nào đó) P theo thời gian t. Nhưng dân số tăng lên thì những yếu tố kìm hãm xuất hiện như bệnh dịch, chiến tranh, lương thực, tài nguyên,...Tốc độ tăng dân số tương đối sẽ không phải là một hằng số.

Một mô hình đơn giản cho tốc độ tăng trưởng dân số tương đối sẽ phụ thuộc vào chính dân số:

$$\frac{P'}{P} = h(P).$$

Cụ thể lấy h là một hàm cấp 1:

$$h(P) = r\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

Trong đó r, K là các hằng số dương. Vậy ta có mô hình

$$\frac{P'}{P} = r\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

được gọi là mô hình hậu cần

- Nếu $P < K$ thì $P' > 0$, dân số sẽ tăng.
- P càng lớn thì $(1 - \frac{P}{K})$ càng nhỏ, tốc độ tăng tương đối sẽ giảm.
- Phương trình có một nghiệm hằng bằng $P(t) = K$, được gọi là nghiệm cân bằng. K được coi là mức trần của môi trường, nếu dân số khởi đầu ở một mức thấp hơn thì dân số không thể tăng vượt qua mức này.

- Phương trình vi phân cấp hai là một phương trình vi phân chứa một hàm số chưa biết và đạo hàm cấp hai của hàm số đó. Tổng quát

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0.$$

- Phương trình vi phân cấp hai là một phương trình vi phân chứa một hàm số chưa biết và đạo hàm cấp hai của hàm số đó. Tổng quát

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0.$$

- Tìm nghiệm của phương trình vi phân cấp hai thỏa mãn điều kiện $y(x_0) = y_0$ và $y'(x_0) = w_0$ với x_0, y_0 và w_0 cho trước được gọi là một bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = w_0. \end{cases}$$

Ví dụ

- Xét phương trình vi phân $y''(x) + y'(x) = 0$. Họ các nghiệm

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$$

với C_1, C_2 là các hằng số thực.

Ví dụ

- Xét phương trình vi phân $y''(x) + y'(x) = 0$. Họ các nghiệm

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x}$$

  với C_1, C_2 là các hằng số thực.
- Xét bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ví dụ (Mô hình chuyển động của lò xo)

Một mô hình từ cơ học cổ điểm: sự chuyển động của một vật có khối lượng m được đặt ở cuối của một lò xo đứng so với mặt đất. Gọi k là một hằng số dương phụ thuộc vào cấu tạo của lò xo. Ta có lực phục hồi là $-kx$.

Theo định luật thứ hai của Newton,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -kx(t),$$

hay ngắn gọn hơn:

$$mx'' = -kx.$$

Phương trình vi phân cấp một tách biến (PTVP cấp 1 biệt số phân li)

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 tách biến là phương trình vi phân cấp một mà trong đó dy/dx có thể được phân tích thành hàm của x nhân với một hàm của y; cụ thể

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y).$$

Cách giải phương trình tách biến $\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$

1. Viết dưới dạng vi phân

$$h(y)dy = g(x)dx$$

với $h = \frac{1}{f}$.

Cách giải phương trình tách biến $\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$

1. Viết dưới dạng vi phân

$$h(y)dy = g(x)dx$$

với $h = \frac{1}{f}$.

2. Lấy nguyên hàm 2 vế:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Ví dụ

1. Giải phương trình $y' = y$

Ví dụ

1. Giải phương trình $y' = y$
2. Giải phương trình tăng trưởng dân số

$$P' = kP$$

Ví dụ

1. Giải phương trình $y' = y$
2. Giải phương trình tăng trưởng dân số

$$P' = kP$$

3. Giải phương trình $(y^2 + xy^2)y' = 1$.

Phương trình vi phân cấp một đẳng cấp

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 đẳng cấp là phương trình có dạng

$$y'(x) = F\left(\frac{y(x)}{x}\right).$$

ngắn gọn

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

với F là hàm một biến.

Phương trình vi phân cấp một đẳng cấp

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp 1 đẳng cấp là phương trình có dạng

$$y'(x) = F\left(\frac{y(x)}{x}\right).$$

ngắn gọn

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

với F là hàm một biến.

Ví dụ

$y' = \frac{x-y}{x+y}$.

$y' = \frac{y+x}{x}$.

Cách giải phương trình đẳng cấp $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

1. Đặt $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y(x) = u(x)x$, đạo hàm của hàm tích $y'(x) = u'(x)x + u(x)$.

Cách giải phương trình đẳng cấp $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

1. Đặt $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y(x) = u(x)x$, đạo hàm của hàm tích $y'(x) = u'(x)x + u(x)$.
2. Thay vào phương trình ban đầu ta có $u'x + u = F(u)$ tách biến theo x và u.

Cách giải phương trình đẳng cấp $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

1. Đặt $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y(x) = u(x)x$, đạo hàm của hàm tích $y'(x) = u'(x)x + u(x)$.
2. Thay vào phương trình ban đầu ta có $u'x + u = F(u)$ tách biến theo x và u.
3. Giải phương trình ở bước 2 theo cách giải phương trình tách biến, ta tìm u, sau đó thay $u = \frac{y}{x}$ để tìm y theo x.

Ví dụ

1. Giải phương trình sau

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}.$$

Ví dụ

1. Giải phương trình sau
$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}.$$
2. Giải phương vi phân
$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad y(1) = 2.$$

Phương trình vi phân cấp một tuyến tính

Ví dụ

Giải phương trình $xy' + y = 2x$

Phương trình vi phân cấp một tuyến tính

Ví dụ

Giải phương trình $xy' + y = 2x$

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp một tuyến tính là một phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Cách giải phương trình tuyến tính

1. Tích thừa số tích phân

$$\mu(x) = e^{\int P(x)}dx$$

Suy ra $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$.

Cách giải phương trình tuyến tính

1. Tích thừa số tích phân

$$\mu(x) = e^{\int P(x)} dx$$

Suy ra $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$.

2. Nhân hàm $\mu(x)$ vào hai vế của phương trình vi phân

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x) = \mu(x)Q(x).$$

Cách giải phương trình tuyến tính

1. Tích thừa số tích phân

$$\mu(x) = e^{\int P(x)} dx$$

Suy ra $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$.

2. Nhân hàm $\mu(x)$ vào hai vế của phương trình vi phân

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x) = \mu(x)Q(x).$$

3. Do công thức đạo hàm của tích phương trình được viết lại

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)Q(x).$$

Cách giải phương trình tuyến tính

1. Tích thừa số tích phân

$$\mu(x) = e^{\int P(x)}dx$$

   Suy ra $\mu'(x) = \mu(x)P(x)$.

2. Nhân hàm $\mu(x)$ vào hai vế của phương trình vi phân

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)P(x)y(x) = \mu(x)Q(x).$$

3. Do công thức đạo hàm của tích phương trình được viết lại

$$(\mu(x)y(x))' = \mu(x)Q(x).$$

4. Lấy nguyên hàm :

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)Q(x)dx.$$

Ví dụ

1. Giải phương trình vi phân $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

Ví dụ

1. Giải phương trình vi phân $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.
2. Tìm nghiệm của bài toán giá trị đầu

$$x^2y' + xy = 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 2.$$

Phương trình vi phân Bernoulli

Định nghĩa

Phương trình vi phân Bernoulli là một phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Cách giải phương trình Bernoulli

1. Đặt $u = y^{1-n}$, biến đổi phương trình Bernoulli thành phương trình tuyến tính

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

Cách giải phương trình Bernoulli

1. Đặt $u = y^{1-n}$, biến đổi phương trình Bernoulli thành phương trình tuyến tính
$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$
2. Giải phương trìn trên bằng giống như phương trình vi phân tuyến tính cấp 1.

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $xy' + y = -xy^2$.

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $xy' + y = -xy^2$.
2. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$.

Phương trình vi phân toàn phần

Định nghĩa

Phương trình vi phân toàn phần là một phương trình có dạng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)} \Rightarrow Pdx + Qdy = 0.$$

Cách giải phương trình vi phân toàn phần

Ta tìm một hàm $f(x, y)$ sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q. \end{cases}$$

khi đó phương trình ẩn $f(x, y) = C$ với $C \in \mathbb{R}$ là một hằng số, xác định một nghiệm của phương trình vi phân.

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y' = \dfrac{-2xy}{1+x^2}$.

Ví dụ

Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y' = \dfrac{-2xy}{1+x^2}$.
2. $y' = \dfrac{-y^2}{2xy+1}$.

Phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Định nghĩa

Một phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng là một phương trình có dạng

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.

Định nghĩa (Phương trình đặc trưng (PTĐT))

Tương ứng phương trình vi phân trên với một phương trình với ẩn là một số thực hoặc số phức được gọi là phương trình đặc trưng cho phương trình phương trình vi phân trên, cụ thể:

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Cách giải phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$.

Cách giải phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$.
Bước 2: Biện luận dựa vào nghiệm của PTĐT:

với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Cách giải phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$.

Bước 2: Biện luận dựa vào nghiệm của PTĐT:

- nếu PTĐT có hai nghiệm thực khác nhau r_1, r_2 thì PTVP có nghiệm tổng quát là

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Cách giải phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$.

Bước 2: Biện luận dựa vào nghiệm của PTĐT:

- nếu PTĐT có hai nghiệm thực khác nhau r_1, r_2 thì PTVP có nghiệm tổng quát là
$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$
- nếu PTĐT có nghiệm thực kép là r_0 thì PTVP có nghiệm tổng quát là
$$y(x) = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x},$$

với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Cách giải phương trình vi phân cấp hai tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Bước 1: Giải phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$.

Bước 2: Biện luận dựa vào nghiệm của PTĐT:

- nếu PTĐT có hai nghiệm thực khác nhau r_1, r_2 thì PTVP có nghiệm tổng quát là
$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$
- nếu PTĐT có nghiệm thực kép là r_0 thì PTVP có nghiệm tổng quát là
$$y(x) = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x},$$
- nếu PTĐT có nghiệm phức là $\alpha \pm i\beta$, thì PTVP có nghiệm tổng quát là
$$y(x) = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)],$$

với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ví dụ

Tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

1. $y'' + 3y' - 10y = 0$

Ví dụ

Tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

1. $y'' + 3y' - 10y = 0$
2. $\begin{cases} 4y'' + 20y' + 25y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

Ví dụ

Tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau:

1. $y'' + 3y' - 10y = 0$
2. $\begin{cases} 4y'' + 20y' + 25y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$

Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Định nghĩa

Một phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng là một phương trình có dạng

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$, f là một hàm số liên tục trên một khoảng nào đó.

Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Định nghĩa

Một phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng là một phương trình có dạng

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$, f là một hàm số liên tục trên một khoảng nào đó.

- Giải một số phương trình vi phân với một phương pháp gọi là phương pháp hệ số bất định.

Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Định nghĩa

Một phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng là một phương trình có dạng

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$, f là một hàm số liên tục trên một khoảng nào đó.

- Giải một số phương trình vi phân với một phương pháp gọi là phương pháp hệ số bất định.
- Ta tìm một nghiệm riêng (nghiệm đặc biệt) của phương trình là nghiệm thỏa với một điều kiện nhất định.

Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Định nghĩa

Giả sử y là nghiệm tổng quát của phương trình và y_r là nghiệm riêng. Gọi y_0 là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, ta có

$$y = y_0 + y_r.$$

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

để được nghiệm tổng quát y_0 của phương trình này.

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất:

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

để được nghiệm tổng quát y_0 của phương trình này.

Bước 2: Tìm một nghiệm riêng y_r của phương trình không thuần nhất. Nếu hàm f là một dạng tổng, tức là $f = f_1 + \cdots + f_n$, thì ta tìm nghiệm riêng tương ứng $y_{r,1}, \ldots, y_{r,n}$ cho từng thành phần, khi đó $y_r = y_{r,1} + \cdots + y_{r,n}$.

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Bước 3: Nếu hàm f chỉ có một thành phần thì:

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Bước 3: Nếu hàm f chỉ có một thành phần thì:

a) Nếu f là một đa thức bậc n thì y_r là một đa thức bậc n, có dạng $y_r(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, với a_i là các hằng số.

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Bước 3: Nếu hàm f chỉ có một thành phần thì:

a) Nếu f là một đa thức bậc n thì y_r là một đa thức bậc n, có dạng $y_r(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, với a_i là các hằng số.

b) Nếu $f(x) = Ce^{kx}$ với C, k là các hằng số, thì $y_r = ae^{kx}$ với a là hằng số.

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Bước 3: Nếu hàm f chỉ có một thành phần thì:

a) Nếu f là một đa thức bậc n thì y_r là một đa thức bậc n, có dạng $y_r(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, với a_i là các hằng số.

b) Nếu $f(x) = Ce^{kx}$ với C, k là các hằng số, thì $y_r = ae^{kx}$ với a là hằng số.

c) Nếu $f(x) = Csin\alpha x$ hoặc $f(x) = C\cos\alpha x$ với C là hằng số, thì $y_r(x) = a\sin\alpha x + b\cos\alpha x$, với a, b là các hằng số.

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Bước 4: So sánh y_r với y_0. Nếu có thành phần trong y_r xuất hiện trong y_0 thì điều chỉnh y_r bằng cách nhân thêm x hoặc x^2 vào y_r và y_0 không còn thành phần chung.

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Bước 4: So sánh y_r với y_0. Nếu có thành phần trong y_r xuất hiện trong y_0 thì điều chỉnh y_r bằng cách nhân thêm x hoặc x^2 vào y_r và y_0 không còn thành phần chung.

Bước 5: Thế y_r vào phương trình không thuần nhất tương ứng để giải tìm các hệ số chưa biết.

Cách giải phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng

Bước 4: So sánh y_r với y_0. Nếu có thành phần trong y_r xuất hiện trong y_0 thì điều chỉnh y_r bằng cách nhân thêm x hoặc x^2 vào y_r và y_0 không còn thành phần chung.

Bước 5: Thế y_r vào phương trình không thuần nhất tương ứng để giải tìm các hệ số chưa biết.

Bước 6: Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là:

$$y = y_0 + y_r.$$

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân:

1. $y'' - y = x^2.$

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân:

1. $y'' - y = x^2$.
2. $y'' + y = e^{2x}$.

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân:

1. $y'' - y = x^2$.
2. $y'' + y = e^{2x}$.
3. $y'' - y' - 2y = sin2x$.

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân:

1. $y'' - y = x^2$.
2. $y'' + y = e^{2x}$.
3. $y'' - y' - 2y = sin2x$.
4. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$.

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình vi phân:

1. $y'' - y = x^2$.
2. $y'' + y = e^{2x}$.
3. $y'' - y' - 2y = sin2x$.
4. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$.
5. $y'' - y' - 12y = e^{4x} + 3x - 2$.