Chương 6: Dạng Toàn Phương

6.1. Dạng toàn phương

Định nghĩa 6.1

Dạng toàn phương trong R^n là một hàm thực $f : X \to \mathbb{R}$, $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n : f(x) = x^T.A.x$, trong đó A là ma trận đối xứng thực và được gọi là ma trận của dạng toàn phương (trong cơ sở chính tắc).

Chú ý: R^n gồm các véc tơ viết dưới dạng cột. x^T là để chuyển lại dưới dạng hàng để phép toán $x^T Ax$ thực hiện được.

Ví dụ: Cho $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ Dạng toàn phương trong R^2 là

$$f(x) = x^T Ax = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2.$$

6.1. Dạng toàn phương

Dạng toàn phương trong R^2

$$f(x) = x^T A x = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2.$$

Dạng toàn phương trong R^3

$$f(x) = x^T A x = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Dx_1x_2 + 2Ex_1x_3 + 2Fx_2x_3$$

6.1. Dạng toàn phương

Ví dụ: Cho dạng toàn phương trong R^3

$$f(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 8x_2x_3$$

Ma trận của dạng toàn phương là $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

6.2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Định nghĩa(Dạng chính tắc của dạng toàn phương)

Cho dạng toàn phương $f(x) = x^T Ax, x \in R^n$. Giả sử P là ma trận khả nghịch cấp n, ta đặt

$$x = Py \Longrightarrow f(x) = y^T P^T APy = y^T Dy$$

Nếu D là ma trận chéo thì

$$f(x) = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

gọi là dạng chính tắc của dạng toàn phương f.
Phép biến đổi $x = Py$ gọi là phép biến đổi không suy biến.

- Mọi dạng toàn phương đều có dạng chính tác.
- Có nhiều dạng chính tắc $y^T Dy$ của một dạng toàn phương $x^T Ax$

6.2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Dạng chính tắc của dạng toàn phương

Cho dạng toàn phương $f(x) = x^T Ax, x \in R^n$. Vì A là ma trận đối xứng thực nên tồn tại P là ma trận trực giao thỏa

$$A = PDP^T$$

Khi đó $f(x) = x^T Ax = x^T PDP^T x = (P^T x)^T.D.(P^T x)$. Đặt

$$y = P^T x \Longleftrightarrow x = Py,$$

ta được

$$g(y) = y^T Dy = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Dạng toàn phương $x^T Ax$ được đưa về dạng chính tắc bằng phép biến đổi $x = Py$ gọi là phép biến đổi trực giao (P là ma trận trực giao).

Các bước đưa DTP về Dạng CT bằng phép biến đổi trực giao

Phép biến đổi trực giao: Mọi dạng toàn phương $f(x) = x^T Ax$ luôn đưa được về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao

1. Viết ma trận A của dạng toàn phương.
2. Chéo hóa A bởi ma trận trực giao P và ma trận chéo D.
3. Kết luận: dạng chính tắc cần tìm là $f(x) = y^T Dy$.
   Phép biến đổi cần tìm $x = Py$.

Ví dụ: Đưa dạng toàn phương $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 - 4x_2^2$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao. Nêu rõ phép biến đổi.

Bài giải

Ma trận của f là $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Đa thức đặc trưng $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25$.

Trị riêng của A là $\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = 5 \end{array}\right.$

$$\lambda_1 = -5 : \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5 : \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Vậy dạng chính tắc của dạng toàn phương là:

$$f = -5y_1^2 + 5y_2^2$$

Phép biến đổi tương ứng là:

$$x = Py \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Ví dụ: Đưa dạng toàn phương:

$$f\left(x_1,\, x_2,\, x_3\right) = -4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao. Nêu rõ phép biến đổi.

Bài giải

Ma trận của dạng toàn phương: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$p\left(\lambda\right) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 \Rightarrow TR:\ \lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = \lambda_3 = 4.$

Với $\lambda_1 = -2$, ta có: $P_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$

Với $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, ta có: $P_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$.

Do đó, ma trận trực giao:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Dạng chính tắc: $f = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$
và phép biến đổi tương ứng là $x = Py$.

Các bước đưa DTP về Dạng CT bằng phép Thuật Toán Lagrange

1. Chọn 1 số hạng x_k^2 có hệ số khác không. Lập thành 2 nhóm
   - Nhóm 1: gồm tất cả các số hạng chứa x_k
   - Nhóm còn lại: không chứa x_k
2. Trong nhóm 1: lập thành bình phương
3. Lặp lại quá trình cho nhóm thứ 2 cho đến khi dược dạng tổng bình phương.

Ví dụ: Đưa dạng toàn phương

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

Bài giải

Vì các hệ số x_1^2, x_2^2, x_3^2 khác 0 nên ta có thể gom theo x_1, x_2 hoặc x_3. Ở đây, ta gom theo x_1 trước.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3)\right] + \left(2x_2^2 - 7x_3^2\right) \\ &= \left[x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3) + 4(x_2 - 2x_3)^2\right] - 4(x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2x_2^2 + 16x_2x_3 - 23x_3^2. \end{aligned}$$

Làm tương tự cho x_2

$$\begin{aligned} -2x_2^2 + 16x_2x_3 - 23x_3^2 &= -2\left(x_2^2 - 8x_2x_3 + 16x_3^2\right) + 9x_3^2 \\ &= -2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = x_2 - 4x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_1 = y_3 \end{cases}$$

Dạng chính tắc cần tìm là:

$$f(x) = g(y) = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2.$$

Ví dụ: Đưa dạng toàn phương $f = x_1x_2 - 2x_2x_3$ về dạng chính tắc bằng thuật toán Lagrange.

Bài giải

Vì f không có số hạng bình phương nên ta sẽ làm xuất hiện bình phương như sau. Đặt:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f &= y_1^2 - y_2^2 - 2\left(y_1 - y_2\right)y_3 \\ &= \left(y_1^2 - 2y_1y_3\right) - y_2^2 + 2y_2y_3 \\ &= \left(y_1 - y_3\right)^2 - y_3^2 - y_2^2 + 2y_2y_3 \\ &= \left(y_1 - y_3\right)^2 - \left(y_2 - y_3\right)^2 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 2z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

Lúc này, ta có dạng chính tắc là:

$$f = z_1^2 - z_2^2 + 0.z_3^2.$$

Ví dụ: Đưa dạng toàn phương

$$f = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2$$

về dạng chính tắc chính tắc bằng thuật toán Lagrange.

Bài giải

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[x_1^2 + 4x_1(x_2 + x_3)\right] + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2x_3. \end{aligned}$$

Phần còn lại $8x_2x_3$ không có số hạng bình phương. Ta đặt:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_1 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 4y_2 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$$

Dạng chính tắc cần tìm là:

$$f = y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_3^2.$$

Phân loại dạng toàn phương

Dạng toàn phương $f(x) = x^T Ax$ được gọi là

- Xác định dương nếu $\forall x \neq 0 : f(x) > 0$.
- Xác định âm nếu $\forall x \neq 0 : f(x) < 0$.
- Nửa xác định dương nếu $\begin{cases} \forall x \in R^n : & f(x) \geq 0 \\ \exists x_0 \neq 0 : & f(x_0) = 0 \end{cases}$
- Nửa xác định âm nếu $\begin{cases} \forall x \in R^n : & f(x) \leq 0 \\ \exists x_0 \neq 0 : & f(x_0) = 0 \end{cases}$
- Không xác định dấu nếu $\exists x_1, x_2 \in R^n : \begin{cases} f(x_1) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{cases}$

Ví dụ: Phân loại dạng toàn phương

$$f = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Dùng thuật toán Lagrange: $f(x) = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 3x_3^2 \geq 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy f là dạng toàn phương xác định dương.

8.3.Phân loại dạng toàn phương

Tính chất

Cho dạng toàn phương ở dạng chính tắc

$$f(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

- Nếu $\lambda_k > 0; \forall k$ thì f xác định dương.
- Nếu $\lambda_k < 0; \forall k$ thì f xác định âm.
- Nếu $\begin{cases} \forall k = 1, \ldots, n & : \lambda_k \geq 0 \\ \exists k_0 \neq 0 & : \lambda_{k_0} = 0 \end{cases}$ thì f nửa xác định dương.
- Nếu $\begin{cases} \forall k = 1, \ldots, n & : \lambda_k \leq 0 \\ \exists k_0 \neq 0 & : \lambda_{k_0} = 0 \end{cases}$ thì f nửa xác định âm.
- $\exists k_1; k_2 : \lambda_{k_1}.\lambda_{k_2} < 0$ thì f không xác định dấu.

Nếu dùng biến đổi trực giao đưa về dạng chính tắc thì các λ_k là các giá trị riêng. Do đó, dựa vào giá trị riêng ta có thể phân loại được dạng toàn phương.

8.4.Chỉ số quán tính-Tiêu chuẩn Sylvester

Định nghĩa

Giả sử dạng toàn phương đưa về chính tắc được:

$$f(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

- Số các hệ số dương được gọi là chỉ số quán tính dương.
- Số các hệ số âm được gọi là chỉ số quán tính âm.

  Chỉ số quán tính dương và chỉ số quán tính âm của dạng toàn phương là những đại lượng bất biến không phụ thuộc vào cách đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Tiêu chuẩn Sylvester

Cho ma trận vuông cấp n. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Đặt $\Delta_1 = |a_{11}|; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}; \end{vmatrix}; \dots; \Delta_n = detA.$

Tiêu chuẩn Sylvester Cho dạng toàn phương $f(x) = x^T A$

- $f(x)$xác định dương khi và chỉ khi $\Delta_i > 0; \quad \forall i = 1, \dots, n.$
- $f(x)$xác định âm khi và chỉ khi $(-1)^i \Delta_i > 0; \quad \forall i = 1, \dots, n.$

Chú ý Sylvester chỉ kết luận được cho trường hợp xác định dương và xác định âm, 3 trường hợp còn lại không kết luận được mà phải dùng Lagrange hoặc giá trị riêng.

Ví dụ:

Ma trận của dạng toàn phương f là

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Bài giải

Ta có:

$$\Delta_1 = 5 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Vậy f xác định dương theo tiêu chuẩn Sylvester.

Ví dụ:

Cho dạng toàn phương

$$f(x) = -5x_1^2 - x_2^2 - mx_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Với giá trị nào của m thì dạng toàn phương f xác định âm.

Bài giải

Ma trận của dạng toàn phương f là

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

Ta có: $\Delta_1 = -5 < 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m + 2.$$

f xác định âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -m + 2 < 0 \Leftrightarrow m > 2$$

Ví dụ:

Tìm m để dạng toàn phương sau không xác định dấu

$$f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + mx_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Bài giải

Trường hợp không xác định dấu thì không thể dùng Sylvester.
Vì ma trận dạng toàn phương có m nên biện luận dấu của giá trị riêng là rất khó.
Ta nên dùng Lagrange như sau:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3\right) + 5x_2^2 + mx_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + x_2^2 + 14x_2x_3 + (m-9)\,x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + (x_2 + 7x_3)^2 + (m-58)\,x_3^2 \end{aligned}$$

2 hệ số đầu tiên dương. Để f không xác định dấu thì

$$m - 58 < 0 \Leftrightarrow m < 58.$$

Ví dụ:

Tìm m để ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ m & 1 & 4 \end{pmatrix}$ có 2 giá trị riêng dương và 1 giá trị riêng âm.

Bài giải

Việc biện luận dấu của đa thức đặc trưng $P(\lambda)$ là rất khó. Ta sử dụng luật quán tính giải quyết bài này.

Xét dạng toàn phương $f = x^T Ax$.

A có 2 TR dương và 1 TR âm tức là f có 2 chỉ số dương và 1 một chỉ số âm trong dạng chính tắc.

Để tìm chỉ số quán tính trong trường hợp này, ta dùng Lagrange là tốt nhất.

$$\begin{aligned} f = x^T Ax &= 5x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2mx_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= \left[x_2^2 + 2x_2(2x_1 + x_3)\right] + 5x_1^2 + 4x_3^2 + 2mx_1x_3 \\ &= (x_2 + 2x_1 + x_3)^2 - (2x_1 + x_3)^2 + 5x_1^2 + 4x_3^2 + 2mx_1x_3 \\ &= (x_2 + 2x_1 + x_3)^2 + x_1^2 + 3x_3^2 + 2(m-2)x_1x_3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f &= (x_2 + 2x_1 + x_3)^2 + [x_1 + (m-2)\,x_3]^2 + 3x_3^2 - (m-2)^2 x_3^2 \\
&= (x_2 + 2x_1 + x_3)^2 + [x_1 + (m-2)\,x_3]^2 + \left(-m^2 + 4m - 1\right) x_3^2.
\end{aligned}
$$

Để f có 2 chỉ số dương, 1 chỉ số âm thì

$$
-m^2 + 4m - 1 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 2 - \sqrt{3} \\ m > 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.
$$