Chương 2: Hệ Phương Trình Tuyến Tính

Giảng viên: Ths. Nguyễn Thị Thái Hà
Email : nttha@utc2.edu.vn

Nội Dung

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

II. Hệ phương trình Cramer.

III. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn là hê có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

Trong đó

+ a_{ij} và b_i là các số cho trước $\forall\, i = 1,2,\ldots,n$ và j = 1,2,….,m

+ x_1, x_2,….., x_n là n ẩn cần tìm.

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Một dãy có thứ tự n số $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ được gọi là nghiệm của hệ (*) nếu thay $x_1 = c_1; x_2 = c_2; \ldots; x_n = c_n$ vào hệ thì m phương trình của hệ trở thành m đẳng thức đúng.

Một hệ phương trình tuyến tính có thể:

- Có nghiệm duy nhất → Hệ tương thích
- Có vô số nghiệm → Hệ tương thích
- Vô nghiệm → Hệ không tương thích

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Hệ (*) được viết lại dưới dạng ma trận

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow \mathrm{AX} = b$$

A : ma trận hệ số; X: cột ẩn; b: cột tự do

Ma trận hệ số mở rộng của hệ (*) $\overline{A} = \left(A \middle| b \right)$

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Ví dụ: Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 \qquad\qquad + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Dạng ma trận AX = b

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận hệ số mở rộng

$$\overline{A} = \left(A \middle| b \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 5 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Chú ý:

- Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu có chung tập nghiệm.
- Chương trình phổ thông, giải hệ bằng phương pháp khử (cộng) và thế. Để khử ẩn, ta đã dùng các phép biến đổi quen thuộc
  - Nhân 1 số khác 0 vào 2 vế của phương trình.
  - Cộng một phương trình với một phương trình khác đã nhân với 1 số.
  - Sắp xếp các phương trình theo thứ tự bất kỳ

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Nhận xét

-Mỗi hàng của **ma trận hệ số mở rộng $\overline{A}$** tương ứng với một phương trình trong hệ phương trình tuyến tính.

- 03 phép biến đổi sơ cấp trên hàng được áp dụng cho $\overline{A}$ không làm thay đổi nghiệm của hệ ban đầu.

Nhắc lại : BĐSC trên hàng

1. $h_i \leftrightarrow h_j$
2. $\alpha . h_i \rightarrow h_i \quad \forall\, \alpha \neq 0$
3. $h_i + \beta h_j \rightarrow h_i ; \; \forall\, i \neq j$

$\propto h_i + \beta h_j + \cdots + \gamma h_k \rightarrow h_i ; \propto \neq 0$

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Ví dụ : Giải $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -3 \end{cases}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -6 & -3 \end{array}\right)$$

Giải

Lấy pt (2) – pt(1); pt(3)-pt(1)

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \\ -4x_2 - 2x_3 = -6 \\ -x_2 - 11x_3 = -12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -11 & -12 \end{array}\right)$$

Lấy 4pt(3)-pt(2)

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 9 \\ -4x_2 - 2x_3 = -6 \\ -42x_3 = -42 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -42 & -42 \end{array}\right)$$

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Định lý (Kronecker – Capeli)

Cho hệ $AX = b \ (*)$

- Hệ (*) vô nghiệm khi và chỉ khi $r(A) \neq r(\bar{A})$
- Hệ (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $r(A) = r(\bar{A})$ = số ẩn
- Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\bar{A})$ < số ẩn

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Phương pháp Gauss Giải hệ AX = b

- Bước 1: Lập ma trận hệ số mở rộng $\bar{A}$.
- Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa ma trận hệ số mở rộng $\bar{A}$ về dạng ma trận hình thang. Dùng định lý kiểm tra điều kiện có nghiệm của hệ.
- Bước 3: Viết hệ phương trình tương ứng với ma trận hình thang.
- Bước 4: Tìm nghiệm (nếu có) của hệ từ dưới lên.

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Ví dụ : Giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Giải

Ma trận hệ số mở rộng của hệ $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 6 \\ 1 & 5 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[h_3 - h_1 \to h_3]{h_2 - 2h_1 \to h_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 - h_2 \to h_3} \boxed{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}$$

Ta thấy $r(A) = 2$ và $r(\bar{A})$=3

Vì $r(A) \neq r(\bar{A})$ nên hệ trên vô nghiệm

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Ví dụ : Giải hệ phương trình tuyến tính sau $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 23 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 22 \end{cases}$

Giải

Ma trận hệ số mở rộng của hệ

$$\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 23 \\ 4 & 6 & 6 & 2 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[h_4 - 4h_1 \to h_4]{\substack{h_2 - 2h_1 \to h_2 \\ h_3 - 3h_1 \to h_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & 11 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 18 & -6 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[h_4 - 2h_2 \to h_4]{h_3 - h_2 \to h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{h_4 - h_3 \to h_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Ta thấy $r(A) = r(\bar{A}) = 4 =$ số ẩn

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_2 + 7x_3 - 5x_4 = -5 \\ 4x_3 + 3x_4 = 10 \\ x_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2.43 - 3.4 + 2.(-2) = 6 \\ -x_2 + 7.4 - 5.(-2) = -5 \\ 4.x_3 + 3.(-2) = 10 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1 = -64$

$\Rightarrow x_2 = 43$

$\Rightarrow x_3 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -64 \\ x_2 = 43 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -4 \end{cases}$$ là nghiệm duy nhất của hệ

Hay nghiệm duy nhất của hệ là (-64; 43; 4; -2)

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Định nghĩa

Ẩn cơ sở là ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở.
Ẩn tự do là ẩn tương ứng với cột không có phần tử cơ sở

Chú ý:

Trong trường hợp hệ có vô số nghiệm:

+ Xác định các ẩn cơ sở, các ẩn tự do.
+ Ẩn tự do cho thuộc R
+ Tìm các ẩn cơ sở theo ẩn tự do

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Ví dụ : Giải hệ phương trình tuyến tính sau theo phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \\ 6x_1 + 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 13 \end{cases}$$

Giải

Ma trận hệ số mở rộng của hệ

$$\overline{A} = \left(A|b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 2 & 6 \\ 6 & 10 & -3 & 1 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow[h_2 - 2h_2 \to h_2]{\substack{h_1 + h_2 + h_3 - h_4 \to h_4 \\ h_1 + h_2 - h_3 \to h_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có $r(A) = r(\bar{A}) = 3 <$ số ẩn $= 4$

$\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm với ẩn tự do là x_4.

I. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Hệ ban đầu tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ -x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -2 \\ x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -9 - 17x_4 \\ x_2 = 7 + 11x_4 \\ x_3 = 1 + 3x_4 \\ x_4 \in R \end{cases}$$

Từ phương trình cuối $\Longrightarrow x_3 = 1 + 3x_4$

Thay $x_3 = 1 + 3x_4$ vào pt thứ 2 ta được

$$x_2 = 2 + 5x_3 - 4x_4 = 2 + 5(1 + 3x_4) - 4x_4 = 7 + 11x_4$$

Tiếp tục thay $x_3 = 1 + 3x_4$ và $x_2 = 7 + 11x_4$ vào pt đầu tiên

$$x_1 = 3 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 - 2(7 + 11x_4) + 2(1 + 3x_4) - x_4 = -9 - 17x_4$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là $\begin{cases} x_1 = -9 - 17x_4 \\ x_2 = 7 + 11x_4 \\ x_3 = 1 + 3x_4 \\ x_4 \in R \end{cases}$

II. Hệ phương trình Cramer

Định nghĩa

- Một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn được gọi là hệ vuông.
- Hệ vuông n ẩn AX = b (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $detA \neq 0$ và nghiệm được tính bằng công thức

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Với

D = det A

D_i là định thức ma trận thu được từ A bằng cách thay cột i bằng cột tự do b.

Lúc này, ta gọi (*) là hệ Cramer.

II. Hệ phương trình Cramer

Ví dụ: Giải hệ sau bằng phương pháp Cramer $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 26 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 = -37 \end{cases}$ (*)

Giải

Ta có $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ b= $\begin{pmatrix} 21 \\ 26 \\ -37 \end{pmatrix}$

D = det A = - 9 $\neq$ 0 $\Rightarrow$ (*) là hệ Cramer.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & 2 & 5 \\ 26 & 3 & 6 \\ -37 & -6 & -9 \end{vmatrix} = -12; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 21 & 5 \\ 2 & 26 & 6 \\ 1 & -37 & -9 \end{vmatrix} = -20;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 21 \\ 2 & 3 & 26 \\ 1 & -6 & -37 \end{vmatrix} = -25.$$

Nghiệm của hệ $x_1 = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{20}{9}$; $x_3 = \frac{25}{9}$.

III. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa

❖ Hệ phương trình thuần nhất là hệ có dạng AX = θ.

❖ Hệ thuần nhất luôn có nghiệm $x = (x_1; x_2; \dots; x_n) = (0,0,\dots,0) = \theta$ gọi là nghiệm tầm thường.

- Hệ thuần nhất hoặc có duy nhất nghiệm tầm thường hoặc có vô số nghiệm .
- Hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường (nghiệm khác θ) nghĩa là có vô số nghiệm.

III. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Tính chất

- Hệ thuần nhất AX = θ.

  r(A) = số ẩn: hệ có duy nhất nghiệm tầm thường.

  r(A) < số ẩn : hệ có vô số nghiệm

- Hệ vuông thuần nhất AX = 0

  det(A) $\neq$ 0: hệ có duy nhất nghiệm tầm thường.

  det(A) = 0: hệ có vô số nghiệm

Bài Tập

2.11 Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 = \lambda \end{cases}$

a. Tìm λ để hệ được cho có nghiệm.

b. Giải hệ thuần nhất tương ứng với hệ được cho.

Giải

Ma trận hệ số mở rộng của hệ $\overline{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & -1 & -7 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[3h_2 - 2h_1 \to h_2]{h_3 - 2h_2 \to h_3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 13 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -13 & \lambda - 6 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 + h_2 \to h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{array}\right)$$

a. Với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ ta luôn có $r(A) = 2$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\bar{A}) \Leftrightarrow r(\bar{A}) = 2$

$$\Leftrightarrow \lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 5}$$

Bài Tập

b. Giải hệ thuần nhất tương ứng với hệ được cho.

Hệ thuần nhất tương ứng với hệ được cho là
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Dựa trên biến đổi đưa $\bar{A}$ về dạng ma trận bậc thang ở câu a. Ta có

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \left(A \middle| \theta\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vì r(A) = 2 < số ẩn = 4 nên hệ có vô số nghiệm. Ẩn tự do là $x_3; x_4$

Hệ (*) tương đương với hệ

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 7x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 2x_2 - x_3 + 2x_4 \\ x_2 = -7x_3 - 13x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5x_3 - 8x_4 \\ x_2 = -7x_3 - 13x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Kiến Thức cần nắm vững trong chương 2

1. Nội dung định lý **Kronecker – Capeli**.

2. Cách giải hệ bằng phương pháp Gauss. Rèn kỹ năng tìm nghiệm trong trường hợp hệ có vô số nghiệm.

3.Các tính chất của hệ thuần nhất và giải được hệ thuần nhất.