Phân Hiệu Trường Đại Học Giao Thông Vận Tải tại TP. HCM

Bộ Môn Toán

Chương 1: Ma Trận và Định Thức (tt)

Giảng viên: Ths. Nguyễn Thị Thái Hà
Email : nttha@utc2.edu.vn

NỘI DUNG

III. Ma trận nghịch đảo

IV. Hạng của ma trận

III. Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa:

Cho A vuông cấp n.

A được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại B sao cho $AB = BA = I_n$.

Khi đó : B _ Ma trận nghịch đảo của A.

Chú ý:

- Ma trận nghịch đảo của A nếu có là duy nhất và được ký hiệu A^{-1}.

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

Định lý: Cho A là ma trận vuông

A khả nghịch khi và chỉ khi $\det A \neq 0$

III. Ma trận nghịch đảo

Chứng minh

$\Longrightarrow$ Giả sử A khả nghịch.

Khi đó tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1} thỏa $AA^{-1} = I$

Suy ra $\det(AA^{-1}) = \det I \Longrightarrow \det(A).\det(A^{-1}) = 1 \Longrightarrow detA \neq 0$

$\Longleftarrow$ Giả sử det A$\neq$ 0. Khi đó

$$\mathrm{B} = \frac{1}{detA}.A^* \text{ với } \qquad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Kiểm tra $A.B = I = BA \Longrightarrow$ Bài tập $thêm$

III. Ma trận nghịch đảo

Cách tìm ma trận nghịch đảo của A:

Bước 1 : Tìm det A

- detA = 0 $\Longrightarrow \nexists A^{-1}$ $\longrightarrow$ dừng.
- detA ≠ 0 $\Longrightarrow$ $\exists A^{-1}$ $\longrightarrow$ bước 2

Bước 2: Tính các phần bù đại số A_{ij}

Lập ma trận phụ hợp A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Bước 3: $$A^{-1} = \frac{1}{detA}.A^*$$

III. Ma trận nghịch đảo

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của A (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải

- det A =16 +3 – (-18) -4 =33 $\neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

- Tìm ma trận phụ hợp A^*: $A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6$

$A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3;$ $A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6;$

$A_{21} = -10;$ A_{22} =17; A_{23} =-1; $A_{31} = 7;$ A_{32} =-2; A_{33} =4.

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ -10 & 17 & -1 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 7 \\ 3 & 17 & -2 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 6 & -10 & 7 \\ 3 & 17 & -2 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

III. Ma trận nghịch đảo

<u>Chú ý</u> :

Ma trận nghịch đảo cho trường hợp vuông cấp 2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ với } ad \neq bc$$

Chéo chính đổi chỗ

Chéo phụ đổi dấu

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

III. Ma trận nghịch đảo

Ứng dụng giải phương trình ma trận

Tìm X biết

Dạng 1 : AX = B $\xLeftrightarrow{detA\neq 0} X = A^{-1}B$

$$\xLeftrightarrow{detA\neq 0} A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}.A)X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow I.X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Dạng 2: XA = B $\xLeftrightarrow{detA\neq 0} X = BA^{-1}$

Dạng 3: AXB = C $\xLeftrightarrow{detA\neq 0;detB\neq 0} X = A^{-1}.C.B^{-1}$

II. Ma trận nghịch đảo

Ví dụ : Tìm X biết $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (*)

Giải :

Đặt A = $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Khi đó (*) trở thành AX = B (dạng 1)

$$\det A = 17 \neq 0 \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta có X = $A^{-1}.B = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 23 & 16 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}$

Vậy X= $\begin{pmatrix} \frac{23}{17} & \frac{16}{17} \\ \frac{-9}{17} & \frac{-7}{17} \end{pmatrix}$

III. Ma trận nghịch đảo

Ví dụ : Tìm x để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ x & x & -2 & -2 \\ x & x & x & -1 \end{pmatrix}$$

Giải

A khả nghịch khi $detA \neq 0$ (*)

Lấy $c_4 - c_3 \to c_4; c_3 - c_2 \to c_3;\ c_2 - c_1 \to c_2$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 & 2 \\ x & x & -2 & -2 \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 2-x & 0 & 0 \\ x & 0 & -2-x & 0 \\ x & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (2-x)(-2-x)(-1-x)$$

III. Ma trận nghịch đảo

$$(*) \Leftrightarrow (2-x)(-2-x)(-1-x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \neq 0 \\ -2-x \neq 0 \\ -1-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Vậy Ma trận khả nghịch khi $x \neq \{-2; -1; 2\}$

VI. Hạng của ma trận

1.Ma trận bậc thang

Phần tử **khác không** đầu tiên của một hàng kể từ bên trái được gọi là **phần tử cơ sở** của hàng đó

Ma trận bậc thang là ma trận thỏa 2 điều sau:

1. Hàng không có phần tử cơ sở (nếu tồn tại) thì nằm dưới cùng
2. Phần tử cơ sở của hàng dưới nằm bên phải (không cùng cột) so với phần tử cở sở của hàng trên.

VI. Hạng của ma trận

Ví dụ : Nhận diện ma trận bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ là ma trận bậc thang

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ là ma trận bậc thang

VI. Hạng của ma trận

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Không phải là ma trận bậc thang

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Không phải là ma trận bậc thang

VI. Hạng của ma trận

Định lý

Mọi ma trận đều có thể đưa về ma trận bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng

Chú ý

Khi dùng các phép biến đổi sơ cấp ta thu được nhiều ma trận bậc thang khác nhau.

Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng

1. $h_i \leftrightarrow h_j$
2. $\alpha . h_i \rightarrow h_i \quad \forall \alpha \neq 0$
3. $h_i + \beta h_j \rightarrow h_i; \forall i \neq j$

$\propto h_i + \beta h_j \rightarrow h_i; \propto \neq 0$

VI. Hạng của ma trận

Ví dụ: Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng đưa ma trận sau về ma trận hình thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Giải

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \cancel{2} & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \cancel{3} & 5 & 5 & 1 & 2 \\ \cancel{4} & 5 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[4h_1 - h_4 \to h_4]{\substack{2h_1 - h_2 \to h_2 \\ 3h_1 - h_3 \to h_3}} \begin{pmatrix} \boxed{\neq 0} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

VI. Hạng của ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & \cancel{-2} & 1 & 5 & 1 \\ 0 & \cancel{-1} & 6 & 7 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_2 - h_4 \to h_4]{2h_2 - h_3 \to h_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \cancel{-3} & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{5h_4 + 3h_3 \to h_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -28 & 1 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa hạng của ma trận

Cho $A_{m\times n} \neq \theta$; ta gọi số nguyên dương r là hạng của A nếu thỏa hai điều kiện sau:

1. Có một định thức con cấp r của ma trận A có giá trị khác 0.
2. Nếu A có các định thức con cấp lớn hơn r thì các định thức con này bằng 0

Ký hiệu hạng của A r(A) = r

Ví dụ : Tính hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 2 & -2 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Giải

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 8 = -14 \neq 0$$

Vậy r(A) = 3

Ví dụ : Tính hạng của ma trận sau

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>**Giải**</u>

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-4-1)-(6+4+1) = -13 \neq 0$$

Vậy r(A) = 3

VI. Hạng của ma trận

Tính chất của hạng

1. $r(\theta) = 0.$

2. $Nếu\ A = (a_{ij})_{m\times n}$ thì r(A) ≤ min$\{m, n\}$

3. Nếu $A \xrightarrow{Biến\ đổi\ sơ\ cấp} B$ thì r(A) = r(B)

Nhận xét

Cho A là ma trận vuông cấp n.

Nếu det A ≠ **0** thì r(A) = n.

Nếu det A = 0 thì r(A)< n

VI. Hạng của ma trận

Ví dụ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 9 \\ 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(\mathrm{B}) = 3$$

VI. Hạng của ma trận

Cách tìm hạng ma trận A

+ Dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa A về ma trận hình thang B.

+ r(A) = số hàng khác 0 của B.

VI. Hạng của ma trận

Ví dụ : Tính hạng ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 6 \\ 1 & 5 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Giải

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 6 \\ 1 & 5 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{h_2 - 2h_1 \to h_2 \\ h_3 - h_1 \to h_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 - h_2 \to h_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy $r(A) = 3$

VI. Hạng của ma trận

Bài 1.24. Tính hạng của ma trận sau theo x

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & 1 & x & 1 \end{pmatrix}.$$