PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Chuỗi nào sau đây là chuỗi hội tụ:

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln\,n}{n^5+n^2+2}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+3}{n^2(\sqrt{n^3}+1)}$

D. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4n^2+n-1}{2n^2+8}\right)^n$

Giải

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\frac{n}{n+3}\right)^n} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(n.\ln\left(\frac{n}{n+3}\right)\right)}$

$\mathrm{I} = \lim_{n\to\infty}\left(n.\ln\left(\frac{n}{n+3}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n}{n+3}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+3}{n}.\frac{n+3-n}{(n+3)^2}}{\frac{-1}{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n(n+3)}.(-n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{-3}{1+\frac{3}{n}} = -3$

Ta có: $\lim_{n\to\infty} u_n = e^{-3} \neq 0 \Rightarrow$ Theo đk cần thì chuỗi phân kì

B. $\lim_{n\to\infty} u_n = 3 \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi phân kì

C. Ta dễ nhận thấy chuỗi số đã cho là chuỗi số dương.

Mặt khác, với $n \in N^*$ thì ta có ln(n) < n

⇨ $\frac{\ln n}{n^5+n^2+2} < \frac{n}{n^5+n^2+2} < \frac{n}{n^5} = \frac{1}{n^4}$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ hội tụ (chuỗi Riman ứng với alpha = 4 > 1)

→ Theo dấu hiệu so sánh, ta được chuỗi ban đầu hội tụ.

D. Ta có : C $= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n^2+n-1}{2n^2+8}\right)^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n-1}{2n^2+8} = \frac{4}{2} = 2 > 1$

Vậy chuỗi số đã cho phân kì theo tiêu chuẩn Cauchy

Câu 2. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(3^n)}{n^n}$ (1) và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.\sqrt[5]{\ln^2 n + 1}}$ (2)

A. Cả 2 đều phân kì

B. Chuỗi (1) hội tụ, chuỗi (2) phân kì

C. Chuỗi (1) phân kì, chuỗi (2) hội tụ

D. Cả 2 đều hội tụ

Giải

Chuỗi (1):

Ta có: $u_{n+1} = \frac{(n+1)!(3^{n+1})}{(n+1)^{n+1}} \quad = \frac{n!(n+1)(3^{n+1})}{(n+1)^{n+1}}$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!(n+1)(3^{n+1})}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!3^n}{n^n} = \frac{n!(n+1)(3^{n+1})}{(n+1)^{n+1}} . \frac{n^n}{n!3^n} = \frac{3.n^n}{(n+1)^n}$

Ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3.n^n}{(n+1)^n} = 3 . \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3. \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n = 3.\frac{1}{e} = \frac{3}{e} > 1$

→chuỗi đã cho phân kì

Chuỗi (2):

Chuỗi số trên là chuỗi số không âm, đơn điệu giảm.

Xét $\int_1^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x.\sqrt[5]{ln^2 x+1}}} dx$ (1)

Đặt t = lnx $\quad$ => $\quad$ dt $= \frac{1}{x}dx$

Từ đó => (1) ≈ $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{t^2+1}} dt = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{t^2+1}} dt + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{t^2+1}} dt$

Ta có: $\lim\limits_{0\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{t^2+1}}$ dt xác định -> tích phân hội tụ

Mặt khác, áp dụng tiêu chuẩn 3 tích phân suy rộng ta có: $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{t^2+1}} dt \approx \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{2}{5}}} dt$

Theo hệ quả, ta có: $\frac{1}{n^{\alpha}}$ có $\alpha \leq 1$ nên tích phân phân kì.

→ chuỗi số phân kì.

Câu 3: Cho hàm hai biến sau. Khẳng định nào là đúng?

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2y - x$

A. Đạt cực đại tại (0;1)

B. Đạt cực tiểu tại (1;0)

C. Đạt cực đại tại (1;0)

D. Đạt cực tiểu tại (0;1)

Giải

$\begin{cases} f'_x = 2x + y - 1 = 0 \\ f'_y = 2y + x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Xét điểm M $(x_0, y_0) = (0,1)$, ta có:

$$\begin{cases} A = f''_{xx} = 2 \\ B = f''_{xy} = 1 \\ C = f''_{yy} = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 2.2 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ M là cực trị

Mà A $> 0 \Rightarrow$ M (0,1) là cực tiểu

Câu 4: Hãy đổi thứ tự lấy tích phân sau:

$$\int_0^1 dx \int_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$$

A. $\int_1^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$

B. $\int_1^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$

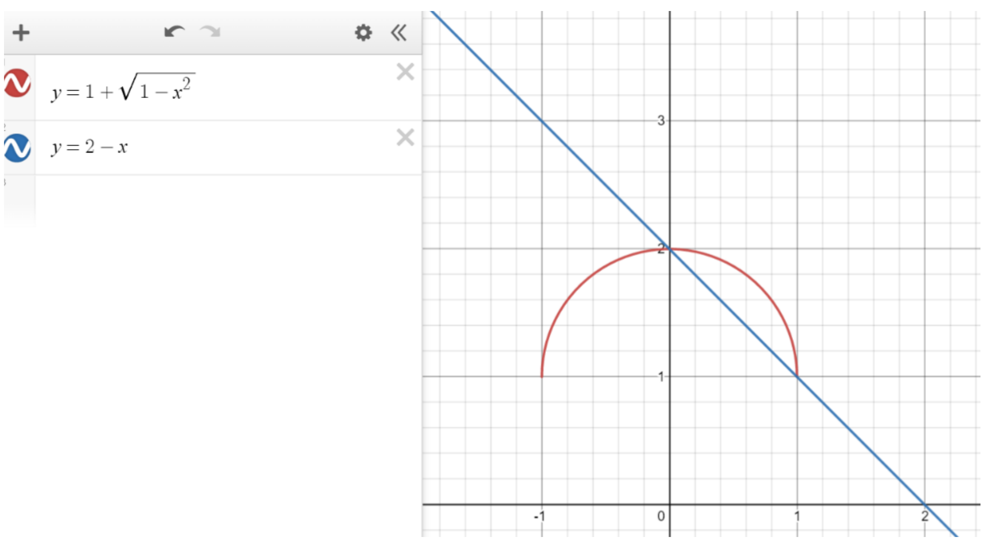
C. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$

D. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^{2-y} f(x,y)dx$

Giải

Ta có :

D = $\{0 \le x \le 1\,;\ 2 - x \le y \le 1 + \sqrt{1 - x^2}\}$



Thực hiện đổi thứ tự láy tích phân

$1 \ \le \ y \ \le 2$

$$\begin{cases} y = \ 2 - \ x \\ y = \ 1 + \sqrt{1 - x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \ y \\ x = \ \sqrt{2y - y^2} \end{cases} \Rightarrow \ 2 - y \le x \le \sqrt{2y - y^2}$$

$$D = \left\{1 \ \le \ y \ \le 2;\ 2 - y \le x \le \sqrt{2y - y^2}\right\} \Rightarrow \int_1^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$$

Câu 5: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: $y' + 2xy = 2x^3$.

A. $y = e^{-x^2}\left[C + e^{x^2}(-x^2 + 2)\right]$

B. $y = e^{-x^2}\left[C + e^{x^2}(x^2 - 2)\right]$

C. $y = e^{-x^2}\left[C + e^{x^2}(-x^2 + 1)\right]$

D. $y = e^{-x^2}\left[C + e^{x^2}(x^2 - 1)\right]$

Giải

- Nghiệm của phương trình được viết lại như sau:

$$y = e^{\int -2xdx}\left(C + \int 2x^3 e^{\int 2xdx} dx\right)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{-x^2}(C + \int 2x^3 e^{x^2} dx)$$

- $A = \int 2x^3 e^{x^2} dx$
- Đặt $x^2 = t$

$$\Rightarrow 2xdx = dt$$

$$\Rightarrow A = \int te^t dx$$

- Đặt $u = t\ va\ e^t dt = dv$

$$\Rightarrow du = dt\ va\ v = e^t$$

$$A = te^t - \int e^t dx$$

$$\Leftrightarrow A = te^t - e^t$$

$$\Leftrightarrow A = x^2 e^{x^2} - e^{x^2}$$

- Từ đó suy ra:

$$y = e^{-x^2}(C + x^2 e^{x^2} - e^{x^2})$$

Câu 6: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$xdx = \left(\frac{x^2}{y} - xy^3\right)dy, x \neq 0 \text{ và } y \neq 0.$$

A. $y = x(C - \frac{x^3}{3})$

C. $y = x(C + \frac{x^3}{3})$

B. $x = y(C - \frac{y^3}{3})$

D. $x = y(C + \frac{y^3}{3})$

Giải

- $Ta\ có$: $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - xy^3\right)dy$

$\leftrightarrow \dfrac{xdx}{dy} = \dfrac{x^2}{y} - xy^3$

- Mà: $\frac{dx}{dy} = x'$

$\leftrightarrow xx' = \dfrac{x^2}{y} - xy^3$

$\leftrightarrow x' = \dfrac{x}{y} - y^3$

- Nghiệm của phương trình được viết lại như sau:

$\rightarrow x = e^{\int \frac{1}{y}dy}(C - \int y^3 e^{-\int \frac{1}{y}dy} dy)$

$\leftrightarrow x = e^{ln|y|}(C - \int y^3 e^{-ln|y|} dy)$

$\leftrightarrow x = y(C - \int y^2 dy)$

$\leftrightarrow x = y(C - \dfrac{y^3}{3})$

Câu 7: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$

A. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{2x}$

B. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{2x}$

C. $y = C_1Ae^x + C_2e^{-3x} + e^{2x}$

D. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - e^{2x}$

Giải

Phương trình đặc trưng $k^2 + 2k - 3 = 0$

Nghiệm của phương trình đặc trưng: $y_1 = C_1e^x + C_2e^{-3x}$

Tìm nghiệm riêng : $y_r = k.e^{2x}$

Thay y_r vào phương trình ban đầu ta được : $y_r'' + 2y_r' - 3y_r = e^{2x} \rightarrow k = \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm tổng quát là : $y = y_1 + y_r = y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{2x}$

Câu 8: Tính $I = \iint_D 4xydxdy$ với D là miền bị giới hạn bởi các đường $x + y = 2$ và $x = y^2$

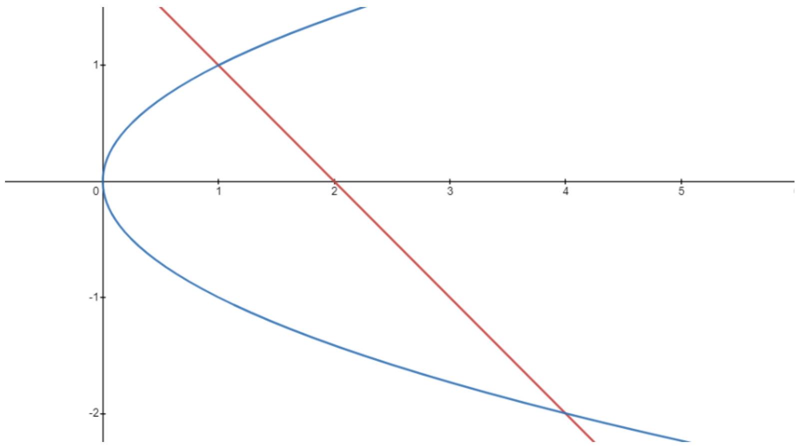
A. $I = 0$

B. $I = 1$

C. $I = -36$

D. $I = -18$

Giải



(Đường màu đỏ là x+y=2, đường màu xanh là $x = y^2$)

Ta có : x=2-y và $x = y^2$

Tìm giao điểm : $2 - y = y^2 \rightarrow y = 1$ và $y = -2$

Vậy ta có : $-2 \leq y \leq 1$ và $y^2 \leq x \leq 2 - y$(theo chiều của trục Ox đi từ đường $x = y^2$ sang đường x= 2-y)

Tháy vào tích phân ban đầu ta được : $\iint_{y^2}^{2-y} 4xydxdy = \int_{-2}^{1} 2(2 - y)^2\,y - 2y^2y = -36$

Câu 9: Tính thể tích khối vật thể Ω được giới hạn bởi $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases}$

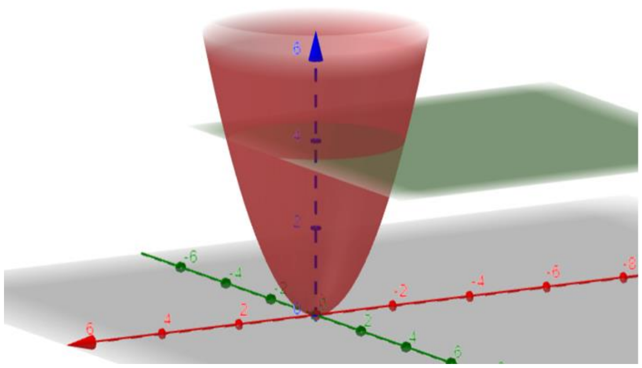
A. 4π

B. 8π

C. 16π

D. 2π

Giải



Đặt $\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{r}\cos\theta \\ \mathrm{y} = \mathrm{r}\sin\theta \\ \mathrm{z} = \mathrm{z} \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le \mathrm{r} \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \mathrm{r}^2 \le \mathrm{z} \le 4 \end{cases}$

Vì $\mathrm{r}^2 = x^2 + y^2 = \mathrm{z} = 4$

$$\Rightarrow V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} 1\mathrm{dV} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \mathrm{rdr} \int_{\mathrm{r}^2}^4 \mathrm{dz} = 8\pi$$

Câu 10: Xét tích phân $I = \iiint_E \mathrm{f(x,\ y,\ z)dV}$ với E là khối tạo bởi 4 mặt phẳng $\mathrm{x = 0, y = 0,}$ $\mathrm{z = 0}$ và $\mathrm{x + y + z = 1}$. Khi đó $I = ?$

A. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{1-x-y} \mathrm{f(x,\ y,\ z)}dz$

B. $\int_0^1 dx \int_0^{1-\mathrm{x}} dy \int_0^{1-x-y} \mathrm{f(x\ ,\ y,\ z)}dz$

C. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \mathrm{f(x, y, z)}dz$

D. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{\mathrm{x+y+z}} \mathrm{f(x, y, z)}dz$

Câu 11: Tính $I = \int\limits_C (x+y)ds$ với C là biên của tam giác OAB, với O(0,0), A(1,1), B(2,0)

A. $3\sqrt{2}+2$

B. $2\sqrt{2}+A2$

C. 3

D. $(2+\sqrt{2})\sqrt{2}+2$

Giải

$$Với \begin{cases} OA: y = x \\ AB: y = 2 - x \\ OB: y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_{OA} (x+y)ds + \int\limits_{AB} (x+y)ds + \int\limits_{OB} (x+y)ds$$

$$= \int\limits_0^1 (x+x)\sqrt{2}dx + \int\limits_1^2 \big(x+(2-x)\big)\sqrt{2}dx + \int\limits_0^2 xdx$$

$$= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2$$

$$= 3\sqrt{2} + 2$$

Câu 12: Tính tích phân đường $\mathrm{I} = \int_{OA} 3x^3dx + xdy$,

trong đó OA là cung $y = x^3$ đi từ $O(0,0)$ đến $A(1,1)$

A. $I = 1$

B. $I = 0$

C. $I = \frac{3}{2}$

D. Đáp án khác

Giải

Ta có $y = x^3 \Rightarrow dy = 3x^2dx$

Và OA với $O(0,0), A(1,1) \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 3x^3dx + x.3x^2dx = \frac{3}{2}$$

PHẦN TỰ LUẬN

Tìm Bán kính hội tụ R và Miền hội tụ D của chuỗi sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^{n}(x)^{n}$$

Đáp án: R=2, D=(-2;2)

Giải

Đặt $a_n = \left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^{n}$

Sử dụng định lý Cauchy: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{2n+1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow R = 2$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi số là $\boldsymbol{R = 2}$

$\Rightarrow$ Khoảng hội tụ (-2;2)

- $X = -2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^{n}(-2)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+10}{2n+1}\right)^{n}(-1)^{n}$

  Mà $\left(\frac{2n+10}{2n+1}\right)^{n} > 1 \Rightarrow$ chuỗi số phân kỳ

- $X = 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^{n}(2)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+10}{2n+1}\right)^{n}$

  Mà $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ chuỗi số phân kỳ

  Miền hội tụ (-2;2) $\Rightarrow -2 < x < 2$

  Vậy miền hội tụ của chuỗi số là (-2;2)