Phép Tính Tích Phân Hàm Nhiều Biến

Nguyễn Thị Hiên

Đại Học Khoa Học Tự Nhiên
Đại Học Quốc Gia TP HCM

Khoa Toán-Tin Học

Ngày 16 tháng 12 năm 2021

Nội Dung

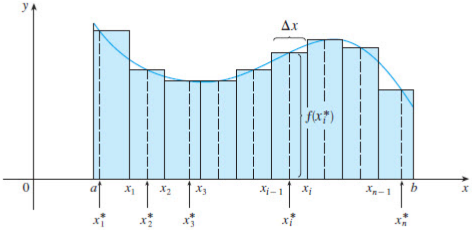
1. ## Tích phân bội 2 (tích phân kép)
   - Định nghĩa tích phân kép. Điều kiện khả tích
   - Tính chất của tích phân kép
   - Cách tính tích phân kép. Đổi thứ tự lấy tích phân
   - Đổi biến số lấy tích phân kép. Tính tích phân theo tọa độ cực
2. ## Tích phân bội 3
   - Định nghĩa tích phân bội 3. Điều kiện khả tích
   - Cách tính tích phân bội 3
   - Tính chất của tích phân bội 3
   - Đổi biến số lấy tích phân bội 3. Tính tích phân theo tọa độ trụ, tọa độ cầu
     - Tính tích phân theo tọa độ trụ
     - Tính tích phân theo tọa độ cầu
3. ## Ứng dụng của tích phân bội
   - Tính khối lượng của bản phẳng hoặc vật thể
   - Xác định trọng tâm của bản phẳng hoặc vật thể

Định nghĩa

Nhắc lại định nghĩa về tích phân

Cho $f(x)$ xác định trong đoạn $[a,b]$, ta chia $[a,b]$ thành n đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ với độ rộng $\Delta x = (b-a)/n$ và chọn x_i^* là những điểm chính giữa của mỗi khoảng nhỏ, khi đó ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

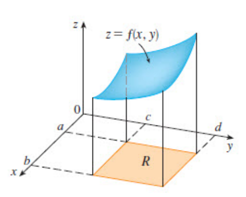


Định nghĩa

Định nghĩa

Trong trường hợp $\mathbb{R}^2$, chúng ta xét một hàm f trên hình chữ nhật sau:

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

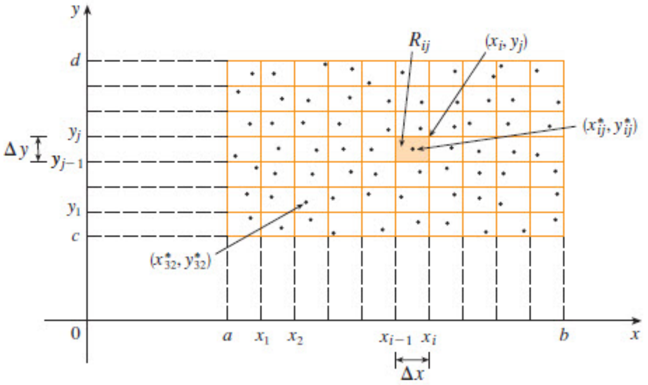


Ta tính thể tích của miền

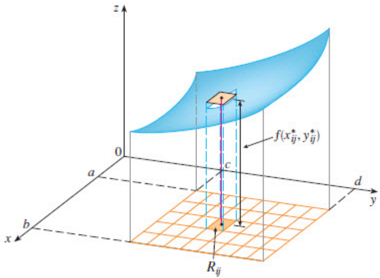
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

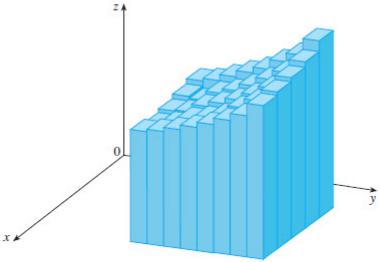
Định nghĩa

$$R_{ij} = [xi\text{-}1, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$$



Định nghĩa





$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

với $\Delta A = \Delta x.\Delta y$

Định nghĩa

Tích phân bội hai của f trên miền R là

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

nếu giới hạn tồn tại.

Định nghĩa

Tích phân bội hai của f trên miền R là

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

nếu giới hạn tồn tại.
Nếu $f(x,y) \geq 0$, ta có thể tích V của miền xác định bởi hình chữ nhật R và mặt phẳng $z = f(x,y)$ là

$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

Tính chất

♠ $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$

Tính chất

- $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$
- $\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA$ với c là hằng số.

Tính chất

- $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$
- $\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA$ với c là hằng số.
- Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với mọi $(x,y) \in R$, ta có

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$$

Cách tính tính phân kép

Cho $f(x, y)$ là hàm số hai biến xác định trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$,

$$S = \iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx$$

Cách tính tính phân kép

Cho $f(x, y)$ là hàm số hai biến xác định trên hình chữ nhật $R = [a, b] \times [c, d]$,

$$S = \iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx$$

1. Tính

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

Cách tính tính phân kép

Cho $f(x,y)$ là hàm số hai biến xác định trên hình chữ nhật $R=[a,b]\times[c,d]$,

$$S=\iint_R f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

1. Tính
$$A(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$
2. Tính
$$S=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Cách tính tính phân kép

Ví dụ 1

Tính các tích phân

a)

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$$

Cách tính tính phân kép

Ví dụ 1

Tính các tích phân

a)

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 ydydx$$

b)

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 ydxdy$$

Cách tính tính phân kép

Theorem 1 (Định lý Fubini)

Nếu f là hàm liên tục trên hình chữ nhật

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

thì

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy \tag{1}$$

Cách tính tính phân kép

Ví dụ 2

Tính các tích phân

a)
$$\iint_R (x - 3y^2)dA$$
với $R = \{(x, y)|0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

b)
$$\iint_R y\sin(xy)dA$$
với $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

c) Tìm thể tính miền tạo bởi $x^2 + 2y^2 + z = 16$ và mặt $x = 2, y = 2$ với hệ trục tọa độ $Oxyz$.

Cách tính tính phân kép

Lưu ý

Nếu $f(x, y) = g(x)h(y)$ và $R = [a, b] \times [c, d]$, theo định lý Fubini ta có:

$$\iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy$$

với $R = [a, b] \times [c, d]$

Cách tính tính phân kép

Lưu ý

Nếu $f(x,y) = g(x)h(y)$ và $R = [a,b] \times [c,d]$, theo định lý Fubini ta có:

$$\iint_R g(x)h(y)dA = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy$$

với $R = [a,b] \times [c,d]$

Ví dụ 3

Tính

$$\iint_R \sin x \cos y dA$$

với $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Cách tính tính phân kép

Định nghĩa một hàm F trên miền R

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Khi đó

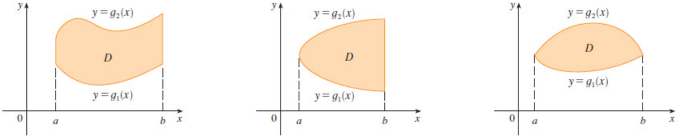
$$\iint_R F(x,y)dA = \iint_D f(x,y)dA \qquad (2)$$

Cách tính tính phân kép

Phân miền D thành hai loại sau:

Loại I:

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

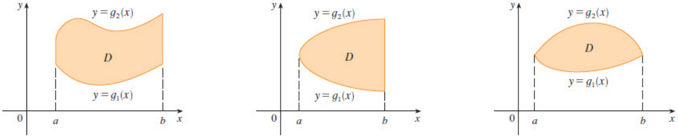


Cách tính tính phân kép

Phân miền D thành hai loại sau:

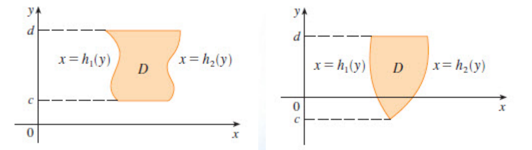
Loại I:

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



Loại II:

$$D = \{(x, y) |, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), c \leq y \leq d\}$$



Cách tính tính phân kép

Nếu f liên tục trên miền D loại I

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dydx \quad (3)$$

Cách tính tính phân kép

Nếu f liên tục trên miền D loại I

$$D = \{(x,y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

thì

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \tag{3}$$

Nếu f liên tục trên miền D loại II

$$D = \{(x,y)|, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), c \leq y \leq d\}$$

thì

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dxdy \tag{4}$$

Cách tính tính phân kép

Ví dụ 4

Tính các tích phân kép sau

a)

$$\iint_D (x+2y)dA$$

với D tạo bởi các parabol $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

Cách tính tính phân kép

Ví dụ 4

Tính các tích phân kép sau

a)

$$\iint_D (x+2y)dA$$

với D tạo bởi các parabol $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

b) Tính thể tích tạo bởi phần dưới mặt phẳng $z = x^2 + y^2$ và phần trên miền D trong hệ tọa độ Oxy tạo bởi đường thẳng $y = 2x$ và parabol $y = x^2$

Cách tính tính phân kép

Ví dụ 4

Tính các tích phân kép sau

a)

$$\iint_D (x+2y)dA$$

với D tạo bởi các parabol $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$.

b) Tính thể tích tạo bởi phần dưới mặt phẳng $z = x^2 + y^2$ và phần trên miền D trong hệ tọa độ Oxy tạo bởi đường thẳng $y = 2x$ và parabol $y = x^2$

c) Tính $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)dydx$

Tính chất

- $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$

Tính chất

- $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$
- $\iint_D cf(x,y)dA = c\iint_D f(x,y)dA$ với c là hằng số.

Tính chất

- $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$
- $\iint_D cf(x,y)dA = c\iint_D f(x,y)dA$ với c là hằng số.
- Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với mọi $(x,y) \in D$, ta có

$$\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA$$

Tính chất

- $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$
- $\iint_D cf(x,y)dA = c\iint_D f(x,y)dA$ với c là hằng số.
- Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với mọi $(x,y) \in D$, ta có

$$\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA$$

- Nếu $D = D_1 \cup D_2$ với D_1 và D_2 giao với nhau bằng rỗng và bị chặn, ta có

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

Tính chất

- $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$
- $\iint_D cf(x,y)dA = c\iint_D f(x,y)dA$ với c là hằng số.
- Nếu $f(x,y) \geq g(x,y)$ với mọi $(x,y) \in D$, ta có

$$\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA$$

- Nếu $D = D_1 \cup D_2$ với D_1 và D_2 giao với nhau bằng rỗng và bị chặn, ta có

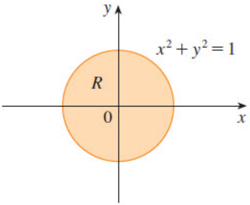
$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

- Nếu hàm $f(x,y) = 1$ trên miền D, diện tích của D

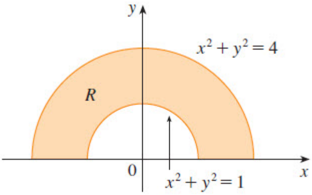
$$\iint_D 1\,dA = A(D)$$

Tính tích phân theo tọa độ cực

Tính tích phân kép $\iint_R f(x,y)dA$ với R được biểu diễn dưới dạng



(a) $R=\{(r,\theta)\mid 0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

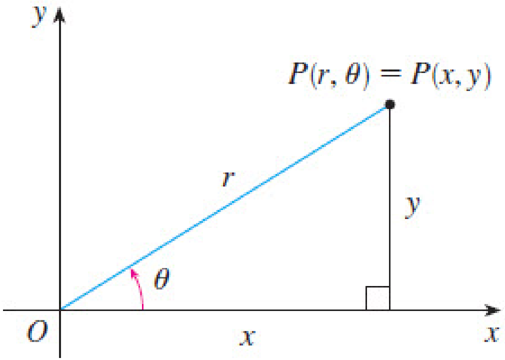


(b) $R=\{(r,\theta)\mid 1\leq r\leq 2, 0\leq\theta\leq \pi\}$

Tính tích phân theo tọa độ cực

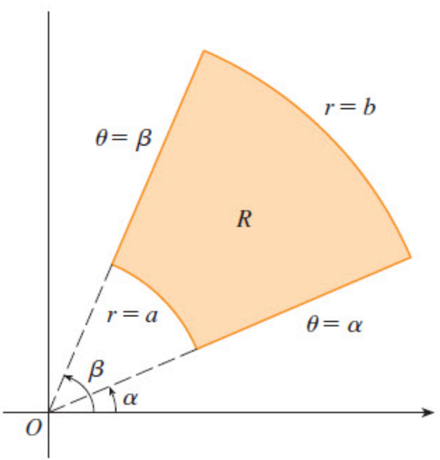
Vậy R trong hệ tọa độ (r, θ) được biến đổi như sau

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$



Tính tích phân theo tọa độ cực

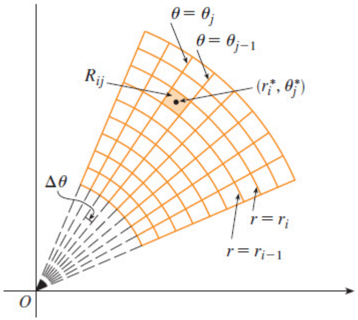
Vậy $R = \{(r, \theta) | a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$

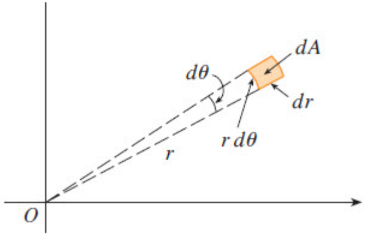


Tính tích phân theo tọa độ cực

Nếu f liên tục trên hình chữ nhật theo tọa độ cực
$R = \{(r,\theta) | a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$ với $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$
thì

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta \qquad (5)$$





Tính tích phân theo tọa độ cực

Ví dụ 5

1. Tính $\iint_R (3x + 4y^2)dA$ với R là nửa trên mặt phẳng giới hạn bởi các đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.
2. Tìm thể tích của khối bị chặn bởi mặt phẳng $z = 0$ và parabol $z = 1 - x^2 - y^2$.

Tính tích phân theo tọa độ cực

Nếu f liên tục trên miền tọa độ cực có dạng

$$D = \{(r,0)|\alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

thì

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\theta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta \qquad (6)$$

Tính tích phân theo tọa độ cực

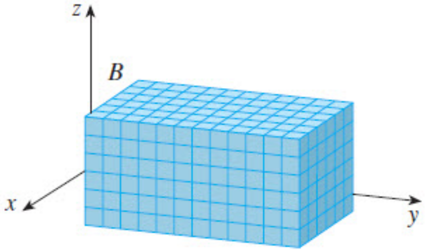
Ví dụ 6

1. Tính miền diện tích của miền đóng là một cánh hoa hồng $r = \cos 2\theta$
2. Tính thể tích khối dưới mặt phẳng parabol $z = x^2 + y^2$ trên mặt phẳng xy và nằm trong khối trụ $x^2 + y^2 = 2x$.

Định nghĩa

Cho hàm f xác định trên một hình hộp chữ nhật

$$B = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

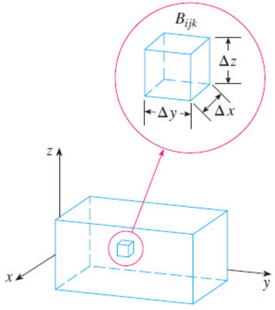


Định nghĩa

Tích phân bội ba của hàm f trên hình hộp chữ nhật B

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V \quad (7)$$

nếu giới hạn tồn tại.



Cách tính tích phân bội ba

Định lý 1 (Định lý Fubini cho tích phân bội 3)

Nếu f liên tục trên hình hộp chữ nhật $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, *thì*

$$\iiint_B f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz \qquad (8)$$

Cách tính tích phân bội ba

Ví dụ 7

1. Tính tích phân bội 3 của $\iiint_B xyz^2 dV$, với hình hộp chữ nhật B

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

Cách tính tích phân bội ba

Ví dụ 7

1. Tính tích phân bội 3 của $\iiint_B xyz^2 dV$, với hình hộp chữ nhật B

$$B = \{(x, y, z) | 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\}$$

2. Tính tích phân bội 3 của $\iiint_B (xy + z^2) dV$, với hình hộp chữ nhật B

$$B = \{(x, y, z) | 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 3\}$$

Cách tính tích phân bội ba

Định nghĩa 1

Xét hàm F xác định trên miền B như sau

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in E \subset B \\ 0, & (x,y,z) \in B \setminus E \end{cases}$$

Khi đó

$$\iiint_B F(x,y,z)dV = \iiint_E f(x,y,z)dV \qquad (9)$$

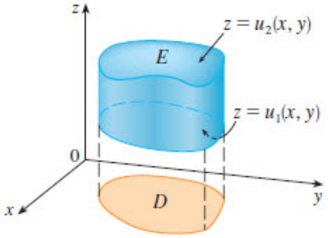
Cách tính tích phân bội ba I

Khi đó ta chia miền E thành hai loại

1. Loại I:

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \le z \le u_2(x, y)\}$$

với D là hình chiếu của E trên mặt phẳng xy.

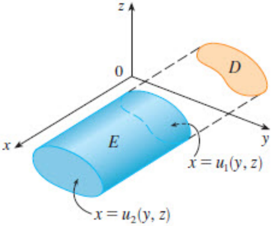


Cách tính tích phân bội ba II

2. Loại II:

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

với D là hình chiếu của E trên mặt phẳng yz.

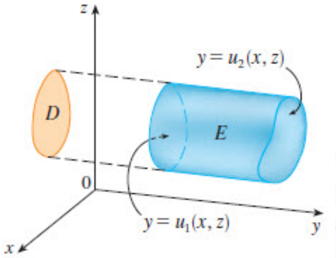


Cách tính tích phân bội ba III

3. Loại III:

$$E = \{(x, y, z) | (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

với D là hình chiếu của E trên mặt phẳng xz.



Cách tính tích phân bội ba

Cách tính tích phân bội 3 tương ứng

1. Loại I:

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA \quad (10)$$

2. Loại I:

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right] dA \quad (11)$$

3. Loại I:

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right] dA \quad (12)$$

Cách tính tích phân bội ba I

Với miền E loại một, cách tính cụ thể có hai trường hợp và tương tự cho miền E loại II và loại III.

- Loại Ia:

$$E = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Khi đó

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dzdydx \qquad (13)$$

- Loại Ib:

$$E = \{(x, y, z) | c \leq y \leq d, h_1(x) \leq y \leq h_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

Khi đó

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dzdxdy \qquad (14)$$

Cách tính tích phân bội ba

Ví dụ 8

1. Tính $\iiint_E z dV$ với E là khối lăng trụ tam giác tạo bởi 4 mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z = 1$

Cách tính tích phân bội ba

Ví dụ 8

1. Tính $\iiint_E zdV$ với E là khối lăng trụ tam giác tạo bởi 4 mặt phẳng $x = 0, y = 0, z = 0$ và $x + y + z = 1$
2. Tính $\int_0^1 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y)dxdydz$

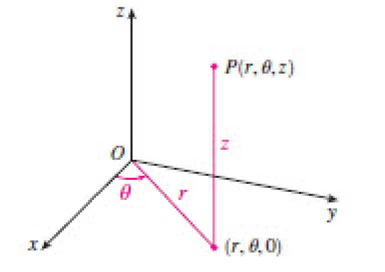
Tọa độ trụ

Một điểm $P(x, y, z)$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ được biểu diễn trong hệ tọa độ trụ như sau:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z \tag{15}$$

Với

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad z = z \tag{16}$$



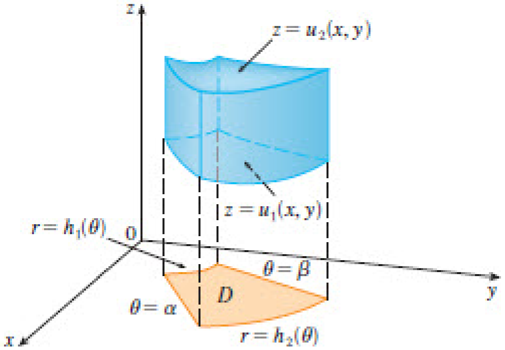
Tính tích phân theo tọa độ trụ I

Giả sử E miền loại I có hình chiếu D trên mặt xy, hàm f liên tục

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

với D biểu diễn như sau:
$D = \{(r, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$

Tính tích phân theo tọa độ trụ II



Tính tích phân theo tọa độ trụ III

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\right] dA \qquad (17)$$

Cụ thể,

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta \qquad (18)$$

Tính tích phân theo tọa độ trụ

Ví dụ 9

♣ Tính $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx$

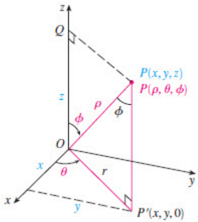
Tính tích phân theo tọa độ trụ

Ví dụ 9

- Tính $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)dzdydx$
- Tính $\iiint_E zdV$ với E là miền bị giới hạn bởi parabol $z=x^2+y^2$ và mặt phẳng $z=4$.

Tọa độ cầu

Xét điểm $P(x, y, z)$ trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ được biểu diễn qua hệ tọa độ cầu



$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta \quad z = \rho \cos\phi$$

Với

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

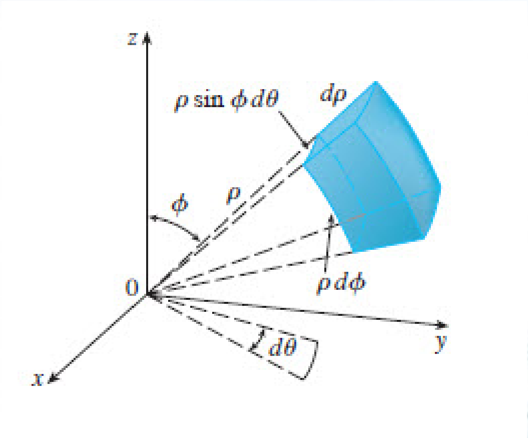
và $0 \leq \phi \leq \pi$

Tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu I

Xét f liên tục trong miền E được biểu diễn trong tọa độ cầu

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

Tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu II



Tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu III

Công thức tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi \tag{19}$$

Tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Công thức được mở rộng với miền E

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta, \phi) \le \rho \le g_2(\theta, \phi)\}$$

Tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Công thức được mở rộng với miền E

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d, g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

Ví dụ 10

- Tính $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ với B là quả cầu đơn vị

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Tính tích phân bội ba trong tọa độ cầu

Công thức được mở rộng với miền E

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) | \alpha \le \theta \le \beta, c \le \phi \le d, g_1(\theta, \phi) \le \rho \le g_2(\theta, \phi)\}$$

Ví dụ 10

- Tính $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ với B là quả cầu đơn vị

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

- Sử dụng tọa độ cầu tính thể tích của khối nằm trên hình nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và dưới quả cầu $x^2 + y^2 + z^2 = z$

Tính khối lượng của bản phẳng không đồng chất

Cho khối lượng riêng của một bản là hàm số liên tục $\rho(x, y)$. Khối lượng của bản được tính bằng

$$m = \iint_D \rho(x, y) dxdy \tag{20}$$

Tính khối lượng của bản phẳng không đồng chất

Cho khối lượng riêng của một bản là hàm số liên tục $\rho(x, y)$. Khối lượng của bản được tính bằng

$$m = \iint_D \rho(x, y) dxdy \tag{20}$$

Ví dụ 11

Tính khối lượng của bản phẳng chiếm miền D xác định bởi $x^2 + y^2 - R^2 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$ biết khối lượng riêng $\rho(x, y) = xy$.

Moment quán tính của bản phẳng

Cho bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng $\rho(x, y)$. Các công thức tính moment quán tính của bản phẳng đối với trục Ox, Oy, và gốc tọa độ lần lượt là

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dxdy \tag{21}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dxdy \tag{22}$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy \tag{23}$$

Moment quán tính của bản phẳng

Cho bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng $\rho(x, y)$. Các công thức tính moment quán tính của bản phẳng đối với trục Ox, Oy, và gốc tọa độ lần lượt là

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dxdy \tag{21}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dxdy \tag{22}$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dxdy \tag{23}$$

Ví dụ 12

Tính moment quán tính đối với gốc tọa độ của miền tròn D xác định bởi $x^2 + y^2 - 2Rx \leq 0$, biết khối lượng riêng $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Xác định trọng tâm của bản phẳng

Cho bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng $\rho(x, y)$. Tọa độ trọng tâm G của bản phẳng lần lượt là

$$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy} \tag{24}$$

$$y_G = \frac{\iint_D y\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy} \tag{25}$$

Xác định trọng tâm của bản phẳng

Cho bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng $\rho(x, y)$. Tọa độ trọng tâm G của bản phẳng lần lượt là

$$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy} \tag{24}$$

$$y_G = \frac{\iint_D y\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy} \tag{25}$$

Ví dụ 13

Xác định trọng tâm G của một bản đồng chất xác định bởi $x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$.