Khoa Khoa học và Kỹ thuật Thông tin

Chào mừng đến với BHT KHKTTT và BHT HTTT

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

ÔN TẬP CHƯƠNG 3: KHÔNG GIAN VECTOR

Câu 1: Kiểm tra W có phải là không gian con của V không?

W = $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x - y + 2z = 0\}$ V= $\mathbb{R}^3$

Giải

(0, 0, 0) $\in W$ => W $\neq \emptyset$

$\forall u = (x, y, z) \in W$ => x – y + 2z = 0

$\forall v = (x_1, y_1, z_1) \in W$ => $x_1 - y_1 + 2z_1 = 0$

Ta có: u + v = (x+ x_1 , y + y_1, z + z_1)

Xét x + x_1 – (y + y_1) + 2(z + z_1)= (x – y + 2z) +(x_1 - y_1 + 2z_1) = 0 + 0 = 0

=> u + v $\in W$ (1)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u = \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$Xét: \lambda x - \lambda y + 2\lambda z = \lambda\,(x - y + 2z) = 0$

$=> \lambda u \in W$ (2)

$Vậy\, W \subset$ V

Câu 2: Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ vector $a_1 = (1,2,3)$, $a_2 = (2,1,0)$, $a_3 = (0,1,2)$. Hệ trên độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải

Ma trận các hệ số của hệ trên là $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Do A là ma trận vuông $\Rightarrow \det A = 12 \neq 0$

- Vậy hệ độc lập tuyến tính (Nếu ma trận không vuông thì sử dụng hạng ma trận để xét)

Câu 3: Tìm cơ sở, số chiều của không gian nghiệm hệ:

$$\begin{cases} 4x_5 - 3x_4 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_4 - 3x_5 - x_3 + 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_5 + 2x_1 + x_4 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Giải:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x_5 - 3x_4 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_4 - 3x_5 - x_3 + 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_5 + 2x_1 + x_4 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 \qquad - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_4 + 4x_5 \\ x_2 = x_4 - 4x_5 \\ x_3 = x_4 + x_5 \\ x_4, x_5 \end{cases}$$

$\Rightarrow W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2x_4 + 4x_5, x_4 - 4x_5, x_4 + x_5, x_4, x_5) \mid x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$

Có $(-2x_4 + 4x_5, x_4 - 4x_5, x_4 + x_5, x_4, x_5) = x_4(-2, 1, 1, 1, 0) + x_5(4, -4, 1, 0, 1)$

⇒ Mọi bộ nghiệm đều được biểu diễn được qua

S = {(-2, 1, 1, 1, 0); (4, -4, 1, 0, 1)}

Mà S độc lập tuyến tính

⇒ Một cơ sở của W là S = {(-2, 1, 1, 1, 0); (4, -4, 1, 0, 1)}

⇒ dim W = 2

Câu 4: Trong không gian vector $\mathbb{R}^4$ cho hệ vector $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với

$a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (1, 2, -1, 1)$

$a_3 = (2, 1, 3, 1)$, $a_4 = (1, 3, -2, 2)$

Chứng minh hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là hệ độc lập tuyến tính

Hệ trên có phải là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$ không? Vì sao?

Giải:

Ta có: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Do A là ma trận vuông => detA = $-2 \neq 0$

Vậy hệ độc lập tuyến tính

Vì hệ trên độc lập tuyến tính mà dim $\mathbb{R}^4$ = 4 = số phần tử của hệ

Câu 5: Trong không gian tuyến tính 3 chiều U cho 2 hệ cơ sở (a) = $\{a_1, a_2, a_3\}$ và (b) = $\{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$b_1 = a_1 + a_2 - 3a_3,\ b_2 = 2a_1 - 3a_2 + 2a_3,\ b_3 = 4a_1 + 5a_2 + 1a_3$$

Cho biết $[X]_a = (1, -3, 5)$. Hãy tìm $[X]_b$

Giải:

Có $[X]_b = T_{ba}[X]_a$

Mà $T_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} => T_{ba} = T_{ab}^{-1} = 1/73.\begin{pmatrix} 13 & -6 & -22 \\ 16 & -13 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$

Suy ra $[X]_b = 1/73.\begin{pmatrix} -79 \\ 60 \\ 8 \end{pmatrix}$

Câu 6: Hãy tìm tọa độ của vector x= (8, 8, 19, 19) trong cơ sở dưới đây của không gian vector $\mathbb{R}^4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$a_1 = (1, 1, 2, 3)$, $a_2 = (2, 1, 3, 4)$, $a_3 = (2, 3, -2, 1)$, $a_4 = (1, 3, 3, 1)$

Giải:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 19 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Suy ra tọa độ x trên cơ sở (a) là [x] = (92/35, 89/35, -23/35, 8/5)

Câu 7: Tìm một cơ sở và số chiều của không gian vector

W = $\left\{\begin{pmatrix} a-2b & 2a \\ 3a+b & a+5b \end{pmatrix}\right\}$

Giải:

A = $\begin{pmatrix} a-2b & 2a \\ 3a+b & a+5b \end{pmatrix}$ = $a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ + b$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

=> Mọi ma trận đều được biểu diễn qua S = $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right\}$

Mà S độc lập tuyến tính

=> S là cơ sở, dim W = 2

Trên không gian $\mathbb{R}^3$ cho các tập hợp con W.

Hãy chỉ ra tập hợp con W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$.

A. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 5y + 8z = 1\}$

B. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$

C. $W = \{(x, y, z) \mid 6x - 2yz = 0\}$

D. $W = \{(x, y, z) \mid 2x - 5z^2 = 0\}$

Giải:

Xét ý B:

- $(0,0,0) \in W$ => $W \neq \emptyset$

$\forall u = (x, y, z) \in W$ => $2x - y + 3z = 0$

$\forall v = (x_1, y_1, z_1) \in W$ => $2x_1 - y_1 + 3z_1 = 0$

- Ta có: $u + v = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$

Xét $2(x + x_1) - (y + y_1) + 3(z + z_1) = (2x - y + 3z) + (2x_1 - y_1 + 3z_1) = 0$

=> $u + v \in W$ (1)

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u = \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Xét: $2\lambda x - \lambda y + 3\lambda z = \lambda(2x - y + 3z) = 0$

=> $\lambda u \in W$ (2)

Vậy $W \subset V$

* Ý A loại vì $(0, 0, 0) \notin W$

C,D loại vì có y.z và z.z

Trên không gian $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông thực, cấp 2, cho tập hợp W.

Hãy chỉ ra tập hợp W là không gian con của $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$

- A. $W = \left\{ A = \begin{pmatrix} ac & b \\ c^4 & b+3a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
- B. $W = \left\{ A = \begin{pmatrix} ab & 2b \\ b^3 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- C. $W = \left\{ A = \begin{pmatrix} 3a & 5b \\ -b & a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- D. $W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ ab & -2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

- **Giải:**

- Xét ý C:
- - Có $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ∈ W => W ≠ ∅
- - Cho u = $\begin{pmatrix} 3a & 5b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$, v = $\begin{pmatrix} 3a' & 5b' \\ -b' & a'+b' \end{pmatrix}$, u, v ∈ W, k, h ∈ R
- Có ku+hv = $\begin{pmatrix} 3ka+3ha' & 5kb+5hb' \\ -kb-hb' & ka+kb+ha'+hb' \end{pmatrix}$
- $= \begin{pmatrix} 3(ka+ha') & 5(kb+hb') \\ -(kb+hb') & (ka+ha')+(kb+hb') \end{pmatrix} \in W$
- => Là không gian con
- * Loại các đáp án còn lại vì chứa tích của ab, c^4,…

Trên không gian $\mathbb{R}^5$ cho không gian con

$$W = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_3 + 7x_5 - x_4 + x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_4 - x_5 + 2x_1 - x_3 = 0 \\ 5x_3 - 8x_4 - 3x_1 + 2x_2 + 12x_5 = 0 \\ 7x_4 - 9x_5 + 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong các khẳng định sau:

- A. Cơ sở của W là $\{\gamma_1 = (1,-1,1,0,0), \gamma_2 = (0,-2,0,1,1), \gamma_3 = (0,0,-4,-1,1), \gamma_4 = (0,0,0,-5,2)\}$ và $\dim_{\mathbb{R}} W = 4$
- B. Cơ sở của W là $\{\gamma_1 = (0,-2,1,0,3), \gamma_2 = (1,-3,-1,2,0)\}$ và $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$
- C. Cơ sở của W là $\{\gamma_1 = (1,-1,1,0,0), \gamma_2 = (0,-2,0,1,1), \gamma_3 = (0,0,-4,-1,1)\}$ và $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$
- D. Cơ sở của W là $\{\gamma_1 = (1,-1,0), \gamma_2 = (0,-2,3), \gamma_3 = (0,0,-4)\}$ và $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$

Trên không gian $\mathbb{R}^5$ cho không gian con

$$W = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_3 + 7x_5 - x_4 + x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_4 - x_5 + 2x_1 - x_3 = 0 \\ 5x_3 - 8x_4 - 3x_1 + 2x_2 + 12x_5 = 0 \\ 7x_4 - 9x_5 + 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Giải:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -8 & 12 \\ 3 & -1 & -4 & 7 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

=> 2 phương trình 5 ẩn => nghiệm có 3 tham số

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a - 2b + 2c \\ x_2 = -a + b - 3c \\ x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_5 = c \end{cases}$$

=> S = {(1, -1, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 1, 0), (2, -3, 0, 0, 1)}

Dim W = 3

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chương 4: Không gian Euclid

I. TÍCH VÔ HƯỚNG

CHƯƠNG 4: KHÔNG GIAN EUCLID

I. ĐỊNH NGHĨA

+ Cho V là một không gian vector. Một **tích vô hướng** trên V là một quy tắc cho tương ứng 2 vector x, y ∈ V.

\+ Ký hiệu : $< x, y >$

\+ Thỏa các điều kiện sau : ∀ x, y, z ∈ $\mathbb{V}, a \in \mathbb{R}$

$(1) < x, y > = < y, x >$

$(2) < x + y,\ z > = < x, z > + < y, z >$

$(3) < ax, y > =\ a < x, y >$

$(4) < x, x > \geq 0, < x, x > = 0 \ \Leftrightarrow x\ = 0$

=> Một không gian vector V cùng với tích vô hướng trên V được gọi là một không gian Euclid.

II. TÍNH CHẤT

- Từ định nghĩa, ta có các tính chất sau

(1) $< x, ay + bz > = a < x, y > + b < x, z >$

(2) $< x, ay > = a < x, y >$

(3) $< x, 0 > = 0$

Ví dụ 1: $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, < x, y > = x_1y_1 + x_2y_2$

Chứng minh quy tắc đã cho là một tích vô hướng trên tập $\mathbb{R}^2$

Giải :

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ và $a \in \mathbb{R}$

$< x, y > = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = < y, x >$

$< x + y, z > = (x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2$

$= x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2$

$= x_1z_1 + x_2z_2 + y_1z_1 + y_2z_2 = < x, z > + < y, z >$

$< ax, y > = ax_1y_1 + ax_2y_2 = a(x_1y_1 + x_2y_2) = a < x, y >$

$< x, x > = {x_1}^2 + {x_2}^2 \geq 0$

$< x, x > = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x = (0,0)$

=> Khi đó quy tắc trên là một tích vô hướng (được gọi là tích vô hướng chính tắc) trên $\mathbb{R}^2$. Do đó $\mathbb{R}^2$ là 1 không gian vector Euclid cùng với tích vô hướng này.

Ví dụ 2 : Cho $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

Đặt $< x, y > = 3x_1y_1 + 4x_2y_2$

=> Khi đó quy tắc đã cho là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$

Ví dụ 3 : Trên $\mathrm{P}_2[x]$, ta cho một quy tắc như sau :

Với f, g $\in \mathrm{P}_2[x]$, đặt $< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

=> Quy tắc trên là tích vô hướng. Do đó $\mathrm{P}_2[x]$, là một không gian vector EUCLIDE.

Trên không gian Euclide $\mathbb{R}^2$ cho ánh xạ:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + mx_2y_2 \quad , \forall x = (x_1; x_2), \quad \forall y = (y_1; y_2).$$

Tìm m để ánh xạ $\langle x, y\rangle$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^2$.

- A. Đáp án khác
- B. $m \geq 0$
- C. $m > 1$
- D. $m \neq 1$

Giải:

C/m tích vô hướng thỏa 4 tính chất:

1/ $<x, y> = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + mx_2y_2 = y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + my_2x_2 = <y,x>$

2/ $<ax, y> = ax_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + amx_2y_2$

$= a(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + mx_2y_2) = a<x, y>$

3/ $<x + x', y> = (x_1 + x_1')y_1 + (x_1 + x_1')y_2 + (x_2 + x_2')y_1 + m(x_2 + x_2')y_2$

$= (x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + mx_2y_2) + (x_1'y_1 + x_1'y_2 + x_2'y_1 + mx_2'y_2) = <x, y> + <x', y>$

4/ $<x, x> = x_1^2 + 2x_1x_2 + mx_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + (m - 1)x_2^2$

=> $m - 1 > 0$ => $m > 1$ (m=0 thì không thỏa $<x, x> = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$)

Trên $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $W = \{(x; y; z) \mid x - 3y + 8z = 0\}$.

a/ Giải phương trình: $x - 3y + 8z = 0$.

b/ Chứng tỏ W là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ được sinh bởi một tập hợp.

c/ Chỉ ra một cơ sở của W và cho biết số chiều của W.

Giải:

a/ S = {(x, y, z) = (3y – 8z, y, z) | y, z ∈ R}

b/ Có (0, 0, 0) ∈ W nên W ≠ ∅

$\forall u = (x, y, z) \in W$ => x – 3y + 8z = 0

$\forall v = (x_1, y_1, z_1) \in W$ => $x_1 - 3y_1 + 8z_1 = 0$

ku + hv = ($kx + hx_1$, $ky + hy_1$, $kz + hz_1$)

Xét ($kx + hx_1$) – 3($ky + hy_1$) + 8($kz + hz_1$)

= k(x – 3y + 8z) + h($x_1 - 3y_1 + 8z_1$) = 0

=> ku + hv ∈ W

Vậy W là không gian con của R^3

c/ Cơ sở của W là S = {(3, 1, 0), (-8, 0, 1)}

Dim W = 2

II. ĐỘ DÀI VECTOR

CHƯƠNG 4: KHÔNG GIAN EUCLID

I. ĐỊNH NGHĨA

- Cho V là một không gian vector EUCLID và $x \in V$. Độ dài của x là một số được kí hiệu : $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$
- Nếu $\|x\| = 1$ thì ta nói x là vector đơn vị
- Với mỗi $x \in V, x \neq 0$ ta có vector đơn vị $\overline{x} = \frac{1}{\|x\|} x$
- Vector $\overline{x}$ được gọi là sự chuẩn hóa vector x

Ví dụ 4: Trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc. Nếu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì

$$\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

Ví dụ 5: Trên $\mathrm{P}_2[x]$, ta cho một tích vô hướng xác định bởi $< f, g > = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$

Tính độ dài của $f = x^2 + 2x + 3$

Giải:

- $||f|| = \sqrt{< f, f >}$
- $< f, f > = \int_0^1 (x^2 + 2x + 3)^2\, dx = \frac{293}{15}$
- $||f|| = \sqrt{\frac{293}{15}}$

II. TÍNH CHẤT

- Cho V là một không gian vector EUCLID và $x, y \in V, k \in \mathbb{R}$. Khi đó :

(1) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\|kx\| = |k|\|x\|$

(3) Bất đẳng thức Cauchy – Schwart : $|< x, y >| \leq \|x\|. \|y\|$

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

III. GÓC GIỮA 2 VECTOR

CHƯƠNG 4: KHÔNG GIAN EUCLID

I. ĐỊNH NGHĨA

- Cho V là một không gian vector Euclid và $x, y \in V$. Góc giữa x và y được xác định bởi :

$$\cos(\widehat{x,y}) = \frac{< x, y >}{\|x\|.\|y\|}$$

Ví dụ 6: Trong không gian vector Euclid $\mathbb{R}^2$ (với tích vô hướng chính tắc) . Tính góc giữa 2 vector x = (2, 2), y = (5, 0)

Giải:

- $< x, y > = 2.5 + 2.0 = 10$
- $\|x\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
- $\|y\| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$
- $\cos(\widehat{x,y}) = \frac{<x,y>}{\|x\|.\|y\|} = \frac{10}{2\sqrt{2}.5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{x,y}) = \frac{\pi}{4}$

IV. TRỰC GIAO, TRỰC CHUẨN

CHƯƠNG 4: KHÔNG GIAN EUCLID

I. ĐỊNH NGHĨA

- Cho V là một không gian Euclid và $x, y \in V$. Ta nói vector x trực giao với vector y, kí hiệu : $x \perp y$, nếu $< x, y > = 0$
- Một hệ S = {x_1, x_2, x_3, … , x_n} thuộc V được gọi là hệ trực giao nếu các phần tử của S đôi một trực giao với nhau.
- Một hệ S = {x_1, x_2, x_3, … , x_n} thuộc V được gọi là hệ trực chuẩn nếu :

  + S là hệ trực giao

  + $\|x_i\| = 1 \ \forall i$
- Quy ước : tập gồm 1 vector luôn được xem là trực giao
- Một hệ S được gọi là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid khi là một hệ trực chuẩn và là một cơ sở của không gian Euclid đó.

- **Ví dụ :** Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là một cơ sở trực chuẩn vì
- Với $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$
- $< e_1, e_2 > = < e_1, e_3 > = < e_2, e_3 > = 0$
- $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$

II. PHƯƠNG PHÁP TRỰC GIAO HÓA GRAM - SCHMIDT

- Cho $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ là một hệ các vector của không gian Euclid V. Ta xây dựng được một hệ trực giao $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ như sau:

- $v_1 = u_1$
- $v_2 = u_2 - \frac{<u_2,v_1>}{<v_1,v_1>} v_1$
- $v_3 = u_3 - \frac{<u_3,v_1>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<u_3,v_2>}{<v_2,v_2>} v_2$
- $v_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{<u_i,v_k>}{<v_k,v_k>} v_k$

Nếu $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ là một hệ trực giao không chứa vector không thì $\left\{\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_2\|}\right)\right\}$ là một hệ trực chuẩn. Quá trình này gọi là chuẩn hoá hệ đã cho.

Nhận xét : Quá trình trực chuẩn hoá một tập $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ bất kì.

+ Dùng phương pháp trực giao hoá Gram – Schmidt, ta được một tập trực giao $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$.

+ Chuẩn hoá các vector v_i và đặt $w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$

+ $\{w_1, w_2, \ldots w_n\}$ là một tập trực chuẩn

Ví dụ 3: Trong $P_2[x]$ với tích vô hướng $< p, q > = \int_1^0 p(x)q(x)dx$,

Trực giao hoá hệ các vector $\{f_1(x) = 1 + x, f_2(x) = 2 - x + x^2\} \rightarrow \{g_1, g_2\}$

Giải:

- $g_1(x) = f_1(x) = 1 + x$
- $g_2(x) = f_2(x) - \frac{<f_2(x), g_1(x)>}{<g_1(x), g_1(x)>} g_1(x) = (2 - x + x^2) - \frac{\int_1^0 (2-x+x^2)(1+x)\,dx}{\int_1^0 (1+x)^2\,dx}(1 + x)$

$$= \frac{23}{28} - \frac{61}{28}x + x^2$$

Trên không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp

$S = \{u_1 = (1;-1;1;-1), u_2 = (1;1;3;-1), u_3 = (-3;7;1;0), u_4 = (0;0;1;0)\}$ là một cơ sở, và cho một tích vô hướng:

$$<x, y> = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \ , \ \forall x = (x_1; x_2; x_3; x_4), \ \ \forall y = (y_1; y_2; y_3; y_4).$$

Hỏi tập hợp nào sau đây là cơ sở trực giao có được từ S (bằng phương pháp Gram-Schmidt) ?

- A. $\{v_1 = (1;-1;1;-1), v_2 = (0;1;1;0), v_3 = (-1;0;-2;0), v_4 = (-1;2;1;-1)\}$
- B. $\{v_1 = (1;-1;1;-1), v_2 = (0;1;1;0), v_3 = (1;0;0;1), v_4 = (1;2;-1;-2)\}$
- C. $\{v_1 = (1;-1;1;-1), v_2 = (0;1;1;0), v_3 = (1;-1;1;3), v_4 = (2;1;-1;0)\}$
- D. $\{v_1 = (1;-1;1;-1), v_2 = (0;1;1;0), v_3 = (-1;-1;2;2), v_4 = (-2;-1;0;2)\}$

Trên không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp

$$S = \{u_1 = (1;-1;1;-1), u_2 = (1;1;3;-1), u_3 = (-3;7;1;0), u_4 = (0;0;1;0)\}$$ là một cơ sở, và cho một tích vô hướng:

$$<x, y> = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \ , \ \forall x = (x_1; x_2; x_3; x_4), \ \ \forall y = (y_1; y_2; y_3; y_4).$$

Hỏi tập hợp nào sau đây là cơ sở trực giao có được từ S (bằng phương pháp Gram-Schmidt) ?

Giải:

Trực giao hoá :

$v_1 = u_1 = (1;-1;1;-1)$

$v_2 = u_2 - \frac{<u_2,v_1>}{<v_1;v_1>} v_1$

$= (1;1;3;-1) - (1;-1;1;-1) = (0;2;2;0) = (0, 1, 1, 0)$

$v_3 = u_3 - \frac{<u_3,v_1>}{<v_1;v_1>} v_1 - \frac{<u_3;v_2>}{<v_2;v_2>} v_2 = (-3;7;1;0) - \frac{-9}{4}(1;-1;1;-1) -$
$2(0;2;2;0) = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}) = (1, -1, \ 1, 3)$

$v_4 = u_4 - \frac{<u_4,v_1>}{<v_1,v_1>} v_1 - \frac{<u_4,v_2>}{<v_2,v_2>} v_2 - \frac{<u_4,v_3>}{<v_3,v_3>} v_3$

Trên không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ cho không gian con:

$$W = \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Hãy xác định một cơ sở trực chuẩn của W (bằng phương pháp Gram-Schmidt) trong các tập hợp sau:

A. $\left\{ v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}; -\frac{2}{\sqrt{30}}; \frac{5}{\sqrt{30}} \right) \right\}$

B. $\left\{ v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right), v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}; \frac{2}{\sqrt{30}}; \frac{5}{\sqrt{30}} \right) \right\}$

C. Đáp án khác

D. $\left\{ v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right), v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}; \frac{2}{\sqrt{30}}; -\frac{5}{\sqrt{30}} \right) \right\}$

Trên không gian Euclide $\mathbb{R}^3$ cho không gian con:

$$W = \{(x_1; x_2; x_3) | x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Hãy xác định một cơ sở trực chuẩn của W (bằng phương pháp Gram-Schmidt) trong các tập hợp sau:

Giải:

Cách 1:

- Giải phương trình: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ => 1 phương trình 3 ẩn => nghiệm sẽ biểu diễn theo 2 tham số:

$(x_1, x_2, x_3) = \{(2x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in R\}$

=> $(2x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(2, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1)$

=> Hệ S = {(2, 1, 0), (-1, 0, 1)}, mà hệ độc lập tuyến tính

=> S là cơ sở của không gian nghiệm phương trình

=> Trực chuẩn hóa hệ trên, ta sẽ được đáp án B

Cách 2:

B1: Kiểm tra xem đáp án nào là hệ trực chuẩn

B2: Thay các vector vào phương trình, nếu tất cả vector trong hệ thỏa là nghiệm phương trình thì chọn đáp án đó

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ LẮNG NGHE <3 <3