Phép Tính Vi Phân Hàm Một Biến

Nguyễn Thị Hiên

Đại Học Công Nghệ Thông Tin
Đại Học Quốc Gia TP HCM

Ngày 7 tháng 10 năm 2021

Nội Dung

1. Hàm số một biến số thực
   - Tập hợp và ánh xạ
   - Ánh xạ
   - Tập hợp các số thực
   - Đồ thị. Đường thẳng
   - Hàm số sơ cấp
2. Giới hạn và sự liên tục của hàm số một biến số
   - Định nghĩa giới hạn hàm số
   - Các giới hạn mở rộng
   - Hàm số liên tục
   - Tính chất của hàm số liên tục

Khái niệm tập hợp

Khái niệm

Tập hợp là sự ghép nhóm các đối tượng có tính chất chung nào đó. Các đối tượng đó gọi là các phần tử của tập hợp.

Khái niệm tập hợp

Khái niệm

Tập hợp là sự ghép nhóm các đối tượng có tính chất chung nào đó. Các đối tượng đó gọi là các phần tử của tập hợp.

- Nếu x là một phần tử của tập hợp A, kí hiệu $x \in A$.

Khái niệm tập hợp

Khái niệm

Tập hợp là sự ghép nhóm các đối tượng có tính chất chung nào đó. Các đối tượng đó gọi là các phần tử của tập hợp.

- Nếu x là một phần tử của tập hợp A, kí hiệu $x \in A$.
- Nếu x không là phần tử của tập hợp A, kí hiệu $x \notin A$.

Khái niệm tập hợp

Khái niệm

Tập hợp là sự ghép nhóm các đối tượng có tính chất chung nào đó. Các đối tượng đó gọi là các phần tử của tập hợp.

- Nếu x là một phần tử của tập hợp A, kí hiệu $x \in A$.
- Nếu x không là phần tử của tập hợp A, kí hiệu $x \notin A$.
- Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, kí hiệu $\emptyset$.

Mô tả tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.

Mô tả tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.

Ví dụ

♣ $A = \{x, y, z, t\}$.

Mô tả tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.

Ví dụ

- $A = \{x, y, z, t\}$.
- B tập hợp gồm các thứ trong tuần.

  $B = \{$thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy, chủ nhật$\}$

Mô tả tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.

Ví dụ

- $A = \{x, y, z, t\}$.
- B tập hợp gồm các thứ trong tuần.

$$B = \{\text{thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy, chủ nhật}\}$$

Mô tả tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.

Ví dụ

- $A = \{x, y, z, t\}$.
- B tập hợp gồm các thứ trong tuần.

  $B = \{$thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy, chủ nhật$\}$

- Chỉ ra những tính chất của các phần tử tập hợp đó và chỉ các phần tử đó mới có. Giả sử A là tập hợp các phần tử có tính chất $\mathcal{P}$, ta viết $A = \{x|\mathcal{P}\}$.

Mô tả tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.

Ví dụ

- $A = \{x, y, z, t\}$.
- B tập hợp gồm các thứ trong tuần.

$$B = \{\text{thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy, chủ nhật}\}$$

- Chỉ ra những tính chất của các phần tử tập hợp đó và chỉ các phần tử đó mới có. Giả sử A là tập hợp các phần tử có tính chất $\mathcal{P}$, ta viết $A = \{x|\mathcal{P}\}$.

Ví dụ

Tập hợp C gồm các sinh viên năm nhất là nữ.

Tập hợp

Định nghĩa

A là tập con của B nếu mọi phần tử của A cũng là phần tử của B. Kí hiệu $A \subset B$.

Tập hợp

Định nghĩa

A là tập con của B nếu mọi phần tử của A cũng là phần tử của B. Kí hiệu $A \subset B$.

Ví dụ

Nếu $A = \{x, y, z\}$ và $B = \{x, y, z, t\}$ thì $A \subset B$.

Tập hợp

Định nghĩa

A là tập con của B nếu mọi phần tử của A cũng là phần tử của B. Kí hiệu $A \subset B$.

Ví dụ

Nếu $A = \{x, y, z\}$ và $B = \{x, y, z, t\}$ thì $A \subset B$.

Định nghĩa

A bằng (trùng) B nếu mỗi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập B và ngược lại. Kí hiệu $A = B$.

Biểu diễn tập hợp

Biểu diễn một tập hợp một cách trực quan ta có thể dùng biểu đồ

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phép hợp (hội))

Hợp (hội) của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A và tất cả các phần tử của B, kí hiệu $A \cup B$. Vậy $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A$ hoặc $x \in B)$.

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phép hợp (hội))

Hợp (hội) của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A và tất cả các phần tử của B, kí hiệu $A \cup B$. Vậy $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A$ hoặc $x \in B)$.

Ví dụ

Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $B = \{a, c, x, y\}$ thì $A \cup B = \{a, b, c, x, y, z\}$.

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phép giao)

Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A mà cũng là phần tử của B, kí hiệu $A \cap B$. Vậy
$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } x \in B)$.

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phép giao)

Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A mà cũng là phần tử của B, kí hiệu $A \cap B$. Vậy
$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \in B)$.

Ví dụ

Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $B = \{a, c, x, y\}$ thì $A \cap B = \{a, x\}$.

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phép hiệu)

Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A mà không thuộc B, kí hiệu $A \setminus B$. Vậy
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \notin B)$.

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phép hiệu)

Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A mà không thuộc B, kí hiệu $A \setminus B$. Vậy
$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \notin B)$.

Ví dụ

Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $B = \{a, c, x, y\}$ thì $A \setminus B = \{b, z\}$.

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phần bù)

Nếu $A \subset E$ thì $E \setminus A$ được gọi là phần bù của A trong E.

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phần bù)

Nếu $A \subset E$ thì $E \setminus A$ được gọi là phần bù của A trong E.

Ví dụ

Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $E = \{a, b, c, x, y, z\}$ thì $E \setminus A = \{c, y\}$.

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phép tích)

Tích của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp gồm tất cả các cặp có thứ tự (x, y) với $x \in A$ và $y \in B$, kí hiệu $A \times B$. Vậy $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } y \in B)$.

Các phép toán trên tập hợp

Định nghĩa (Phép tích)

Tích của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp gồm tất cả các cặp có thứ tự (x, y) với $x \in A$ và $y \in B$, kí hiệu $A \times B$. Vậy $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A$ và $y \in B)$.

Ví dụ

Cho $A = \{a, b\}$ và $B = \{x, y\}$ thì
$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$.

Ánh xạ

Định nghĩa

Ánh xạ f từ tập hợp X đến tập hợp Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với mỗi phần tử duy nhất y của Y. Kí hiệu:

$$\begin{aligned} f: \quad & X \to Y \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Ánh xạ

Định nghĩa

Ánh xạ f từ tập hợp X đến tập hợp Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với mỗi phần tử duy nhất y của Y. Kí hiệu:

$$\begin{aligned} f: \quad & X \to Y \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

- Tập X gọi là tập nguồn hay miền xác định của ánh xạ.

Ánh xạ

Định nghĩa

Ánh xạ f từ tập hợp X đến tập hợp Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với mỗi phần tử duy nhất y của Y. Kí hiệu:

$$\begin{aligned} f:\quad & X \to Y \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

- Tập X gọi là tập nguồn hay miền xác định của ánh xạ.
- Tập Y gọi là tập hợp đích của ánh xạ.

Ánh xạ

Định nghĩa

Ánh xạ f từ tập hợp X đến tập hợp Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với mỗi phần tử duy nhất y của Y. Kí hiệu:

$$\begin{aligned} f: \quad & X \to Y \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

- Tập X gọi là tập nguồn hay miền xác định của ánh xạ.
- Tập Y gọi là tập hợp đích của ánh xạ.
- Phần tử y được gọi là ảnh của x và x được gọi là tiền ảnh của y.

Ánh xạ

- Cho $A \subset X$, tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử của A qua ánh xạ f được gọi là ảnh của A qua f, là tập hợp

$$f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Ánh xạ

- Cho $A \subset X$, tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử của A qua ánh xạ f được gọi là ảnh của A qua f, là tập hợp

$$f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

- Ảnh của miền xác định X được gọi là miền giá trị của ánh xạ f. Kí hiệu $f(X)$.

Ánh xạ

- Cho $A \subset X$, tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử của A qua ánh xạ f được gọi là ảnh của A qua f, là tập hợp

$$f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

- Ảnh của miền xác định X được gọi là miền giá trị của ánh xạ f. Kí hiệu $f(X)$.
- Cho B là tập con bất kì của Y, ta gọi tập hợp các tiền ảnh của các phần tử trong B qua ánh xạ f là tiền ảnh của B qua f là tập

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

Ánh xạ

- Một ánh xạ là một đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau có hai ảnh khác nhau, nghĩa là $\forall x_1, x_2 \in X$ nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ánh xạ

- Một ánh xạ là một đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau có hai ảnh khác nhau, nghĩa là $\forall x_1, x_2 \in X$ nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Một ánh xạ là một toàn ánh nếu mọi phần tử của tập đích đều là ảnh nghĩa là $\forall y \in Y, \exists x \in X$, sao cho $y = f(x)$; hay $f(X) = Y$.

Ánh xạ

- Một ánh xạ là một đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau có hai ảnh khác nhau, nghĩa là $\forall x_1, x_2 \in X$ nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Một ánh xạ là một toàn ánh nếu mọi phần tử của tập đích đều là ảnh nghĩa là $\forall y \in Y, \exists x \in X$, sao cho $y = f(x)$; hay $f(X) = Y$.
- Một ánh xạ là một song ánh nếu nó vừa là một đơn ánh vừa là một toàn ánh.

Ánh xạ ngược

Định nghĩa

Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh thì với bất kỳ $y \in Y$ tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Khi đó ánh xạ $g : Y \to X$ xác định bởi $g(y) = x \iff y = f(x)$ được gọi là ánh xạ ngược của f, và kí hiệu f^{-1}.

Ánh xạ ngược

Định nghĩa

Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh thì với bất kỳ $y \in Y$ tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Khi đó ánh xạ $g : Y \to X$ xác định bởi $g(y) = x \iff y = f(x)$ được gọi là ánh xạ ngược của f, và kí hiệu f^{-1}.

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 1$.

- Chứng minh f là song ánh.

Ánh xạ ngược

Định nghĩa

Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh thì với bất kỳ $y \in Y$ tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Khi đó ánh xạ $g : Y \to X$ xác định bởi $g(y) = x \iff y = f(x)$ được gọi là ánh xạ ngược của f, và kí hiệu f^{-1}.

Ví dụ

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = 2x + 1$.

- Chứng minh f là song ánh.
- Tìm ánh xạ ngược của f.

Các tập hợp số

- Tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Các tập hợp số

- Tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

- Tập hợp các số nguyên.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Các tập hợp số

- Tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

- Tập hợp các số nguyên.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- Tập hợp các số hữu tỉ.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}.$$

Các tập hợp số

- Tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

- Tập hợp các số nguyên.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Tập hợp các số hữu tỉ.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

- Tập hợp tát cả các số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi tập số thực $\mathbb{R}$.

Cho tập $A \subset \mathbb{R}$.

- Tập A là bị chặn trên nếu có một số thực α lớn hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và α được gọi là một chặn trên của tập A.

Cho tập $A \subset \mathbb{R}$.

- Tập A là bị chặn trên nếu có một số thực α lớn hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và α được gọi là một chặn trên của tập A.
- Tập A là bị chặn dưới nếu có một số thực β nhỏ hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và β được gọi là một chặn dưới của tập A.

Cho tập $A \subset \mathbb{R}$.

- Tập A là bị chặn trên nếu có một số thực α lớn hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và α được gọi là một chặn trên của tập A.
- Tập A là bị chặn dưới nếu có một số thực β nhỏ hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và β được gọi là một chặn dưới của tập A.
- Một tập gọi là bị chặn (giới nội) nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

Cho tập $A \subset \mathbb{R}$.

- ♢ Tập A là bị chặn trên nếu có một số thực α lớn hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và α được gọi là một chặn trên của tập A.
- ♢ Tập A là bị chặn dưới nếu có một số thực β nhỏ hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và β được gọi là một chặn dưới của tập A.
- ♢ Một tập gọi là bị chặn (giới nội) nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.
- ♢ Nếu có phần tử $\alpha \in A$ sao cho α lớn hơn hay bằng mọi phần tử thuộc tập A, thì α được gọi là phần tử lớn nhất của tập A, kí hiệu $\max A$.

Cho tập $A \subset \mathbb{R}$.

- Tập A là bị chặn trên nếu có một số thực α lớn hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và α được gọi là một chặn trên của tập A.
- Tập A là bị chặn dưới nếu có một số thực β nhỏ hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và β được gọi là một chặn dưới của tập A.
- Một tập gọi là bị chặn (giới nội) nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.
- Nếu có phần tử $\alpha \in A$ sao cho α lớn hơn hay bằng mọi phần tử thuộc tập A, thì α được gọi là phần tử lớn nhất của tập A, kí hiệu $\max A$.
- Nếu có phần tử $\beta \in A$ sao cho β nhỏ hơn hay bằng mọi phần tử thuộc tập A, thì β được gọi là phần tử nhỏ nhất của tập A, kí hiệu $\min A$.

Mệnh đề (Tính đầy đủ)

Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$, *nếu bị chặn thì có chặn trên nhỏ nhất, nếu bị chặn dưới thì có chặn dưới lớn nhất.*

Mệnh đề (Tính đầy đủ)

Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$, nếu bị chặn thì có chặn trên nhỏ nhất, nếu bị chặn dưới thì có chặn dưới lớn nhất.

★ Chặn trên nhỏ nhất của tập A được gọi biên trên (cận trên) của A và kí hiệu $\sup A$.

Mệnh đề (Tính đầy đủ)

Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$, nếu bị chặn thì có chặn trên nhỏ nhất, nếu bị chặn dưới thì có chặn dưới lớn nhất.

- ★ Chặn trên nhỏ nhất của tập A được gọi biên trên (cận trên) của A và kí hiệu $\sup A$.
- ★ Chặn dưới lớn nhất của tập A được gọi biên dưới (cận dưới) của A và kí hiệu $\inf A$.

Mệnh đề (Tính đầy đủ)

Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$, *nếu bị chặn thì có chặn trên nhỏ nhất, nếu bị chặn dưới thì có chặn dưới lớn nhất.*

- ★ Chặn trên nhỏ nhất của tập A được gọi biên trên (cận trên) của A và kí hiệu $\sup A$.
- ★ Chặn dưới lớn nhất của tập A được gọi biên dưới (cận dưới) của A và kí hiệu $\inf A$.

Mệnh đề (Tính đầy đủ)

Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$, nếu bị chặn thì có chặn trên nhỏ nhất, nếu bị chặn dưới thì có chặn dưới lớn nhất.

- ★ Chặn trên nhỏ nhất của tập A được gọi biên trên (cận trên) của A và kí hiệu $\sup A$.
- ★ Chặn dưới lớn nhất của tập A được gọi biên dưới (cận dưới) của A và kí hiệu $\inf A$.

Ví dụ

Xét các tập $A = (0, 1]$ và $B = [0, \infty)$. Tìm chặn trên, chặn dưới, max, min, sup, inf (nếu có).

Các ánh xạ từ một tập con của tập hợp các số thực vào tập hợp các số thực được gọi là các hàm số (hàm số thực với biến số thực).

Đồ thị. Đường thẳng.

♣ Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Đồ thị của hàm f là tập hợp tất cả các điểm (x, y) trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.

Đồ thị. Đường thẳng.

- Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Đồ thị của hàm f là tập hợp tất cả các điểm (x, y) trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.
- Một đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ là đồ thị của một hàm số có dạng $y = ax + b$ hoặc $x = c$ với a, b, c là các hằng số thực.

Đồ thị. Đường thẳng.

- Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Đồ thị của hàm f là tập hợp tất cả các điểm (x, y) trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.
- Một đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ là đồ thị của một hàm số có dạng $y = ax + b$ hoặc $x = c$ với a, b, c là các hằng số thực.
- a được gọi là hệ số góc (độ nghiêng) hay độ dốc của đường thẳng. Hệ số góc không định nghĩa cho đường $x = c$.

Đồ thị. Đường thẳng.

- Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Đồ thị của hàm f là tập hợp tất cả các điểm (x, y) trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.
- Một đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ là đồ thị của một hàm số có dạng $y = ax + b$ hoặc $x = c$ với a, b, c là các hằng số thực.
- a được gọi là hệ số góc (độ nghiêng) hay độ dốc của đường thẳng. Hệ số góc không định nghĩa cho đường $x = c$.
- Các hàm có dạng $y = ax + b$ được gọi là các hàm số tuyến tính.

Xét (x_0, y_0) và (x_1, y_1) là hai điểm bất kì trên đường thẳng không thẳng đứng l. Ta có $y_0 = ax_0 + b$ và $y_1 = ax_1 + b$ nên hệ số góc của đường thẳng nối hai điểm là:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Xét (x_0, y_0) và (x_1, y_1) là hai điểm bất kì trên đường thẳng không thẳng đứng l. Ta có $y_0 = ax_0 + b$ và $y_1 = ax_1 + b$ nên hệ số góc của đường thẳng nối hai điểm là:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Ví dụ

Tìm hệ số góc của đường thẳng nối hai điểm $(4, 6)$ và $(0, 7)$?

Xét (x_0, y_0) và (x_1, y_1) là hai điểm bất kì trên đường thẳng không thẳng đứng l. Ta có $y_0 = ax_0 + b$ và $y_1 = ax_1 + b$ nên hệ số góc của đường thẳng nối hai điểm là:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Ví dụ

Tìm hệ số góc của đường thẳng nối hai điểm $(4, 6)$ và $(0, 7)$?

Chú ý

Hai đường thẳng được gọi là song song nếu chúng khác nhau nhưng có cùng một hệ số góc hoặc cùng thẳng đứng

Ví dụ

Nhiệt độ theo đơn vị Celsius x và nhiệt độ theo đơn vị Fahrenheit y có quan hệ tuyến tính với nhau, đó là 0^o Celsius hay 32^o Fahrenheit là nhiệt độ đông của nước và 100^o Celsius hay 212^o Fahrenheit là nhiệt độ sôi của nước. Tìm phương trình biểu diễn mối liên hệ của độ Celsius và độ Fahrenheit?

Hàm lượng giác

- Hàm $\sin$ và hàm $\cos$ xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị trên $[-1, 1]$.

Hàm lượng giác

- Hàm $\sin$ và hàm $\cos$ xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị trên $[-1, 1]$.
- $\sin$ và $\cos$ là hàm tuần hoàn có chu kì 2π.

Hàm lượng giác

- Hàm $\sin$ và hàm $\cos$ xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị trên $[-1, 1]$.
- $\sin$ và $\cos$ là hàm tuần hoàn có chu kì 2π.
- $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$.

Hàm lượng giác

- Hàm $\sin$ và hàm $\cos$ xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị trên $[-1, 1]$.
- $\sin$ và $\cos$ là hàm tuần hoàn có chu kì 2π.
- $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$.
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Hàm lượng giác

- Hàm $\sin$ và hàm $\cos$ xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị trên $[-1, 1]$.
- $\sin$ và $\cos$ là hàm tuần hoàn có chu kì 2π.
- $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$.
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Hàm lượng giác

- Hàm $\sin$ và hàm $\cos$ xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị trên $[-1, 1]$.
- $\sin$ và $\cos$ là hàm tuần hoàn có chu kì 2π.
- $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$.
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$.

Hàm lũy thừa và hàm mũ

- Với $x \in \mathbb{R}$ khác 0, nếu $n \in \mathbb{Z}^+$ thì x^n là tích của n số x.

Hàm lũy thừa và hàm mũ

- Với $x \in \mathbb{R}$ khác 0, nếu $n \in \mathbb{Z}^+$ thì x^n là tích của n số x.
- nếu $n \in \mathbb{Z}^-$ thì $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. $x^0 = 1$.

Hàm lũy thừa và hàm mũ

- Với $x \in \mathbb{R}$ khác 0, nếu $n \in \mathbb{Z}^+$ thì x^n là tích của n số x.
- nếu $n \in \mathbb{Z}^-$ thì $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. $x^0 = 1$.
- Hàm $f(x) = x^r$ với $r \in \mathbb{R}$ được gọi hàm lũy thừa.

Hàm lũy thừa và hàm mũ

- Với $x \in \mathbb{R}$ khác 0, nếu $n \in \mathbb{Z}^+$ thì x^n là tích của n số x.
- nếu $n \in \mathbb{Z}^-$ thì $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. $x^0 = 1$.
- Hàm $f(x) = x^r$ với $r \in \mathbb{R}$ được gọi hàm lũy thừa.
- Hàm $f(x) = a^x$, với $a > 0, a \neq 1$ được gọi là hàm mũ

Hàm lũy thừa và hàm mũ

- Với $x \in \mathbb{R}$ khác 0, nếu $n \in \mathbb{Z}^+$ thì x^n là tích của n số x.
- nếu $n \in \mathbb{Z}^-$ thì $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. $x^0 = 1$.
- Hàm $f(x) = x^r$ với $r \in \mathbb{R}$ được gọi hàm lũy thừa.
- Hàm $f(x) = a^x$, với $a > 0, a \neq 1$ được gọi là hàm mũ
- Hàm ngược của hàm mũ a^x là hàm lô-ga-rít cơ số a, kí hiệu $\log_a$.

Hàm lũy thừa và hàm mũ

- Với $x \in \mathbb{R}$ khác 0, nếu $n \in \mathbb{Z}^+$ thì x^n là tích của n số x.
- nếu $n \in \mathbb{Z}^-$ thì $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. $x^0 = 1$.
- Hàm $f(x) = x^r$ với $r \in \mathbb{R}$ được gọi hàm lũy thừa.
- Hàm $f(x) = a^x$, với $a > 0, a \neq 1$ được gọi là hàm mũ
- Hàm ngược của hàm mũ a^x là hàm lô-ga-rít cơ số a, kí hiệu $\log_a$.
- Hằng số $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Hàm lũy thừa và hàm mũ

- Với $x \in \mathbb{R}$ khác 0, nếu $n \in \mathbb{Z}^+$ thì x^n là tích của n số x.
- nếu $n \in \mathbb{Z}^-$ thì $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. $x^0 = 1$.
- Hàm $f(x) = x^r$ với $r \in \mathbb{R}$ được gọi hàm lũy thừa.
- Hàm $f(x) = a^x$, với $a > 0, a \neq 1$ được gọi là hàm mũ
- Hàm ngược của hàm mũ a^x là hàm lô-ga-rít cơ số a, kí hiệu $\log_a$.
- Hằng số $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- Hàm mũ $y = e^x$ có hàm ngược được gọi là hàm lô-ga-rít tự nhiên, kí hiệu $\ln$.

Ví dụ

Giả sử một đại lượng A thay đổi theo thời gian t (như dân số của một quần thể, số tiền trong một tài khoản,...). Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ số lượng của A là $A(0)$. Sau mỗi đơn vị đo thời gian (một kỳ hạn,...) thì lượng A tăng lên (lãi) với một tỉ lệ r (như tốc độ tăng dân số, lãi suất ngân hàng, ...) và lãi được nhập vào lượng trước đó. Ta muốn biết tại thời điểm t thì giá trị của đại lượng A là bao nhiêu?

Hàm hợp

Định nghĩa

Cho trước hai hàm số f và g sao cho tập giá trị của g nằm trong tập xác định của f, thì hàm hợp $f \circ g$ được định nghĩa

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Hàm hợp

Định nghĩa

Cho trước hai hàm số f và g sao cho tập giá trị của g nằm trong tập xác định của f, thì hàm hợp $f \circ g$ được định nghĩa

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ví dụ

Cho các hàm mũ $f(x) = e^x$ và hàm $g(x) = \sin x$. Tìm $f \circ g$ và $g \circ f$

Hàm hợp

Định nghĩa

Cho trước hai hàm số f và g sao cho tập giá trị của g nằm trong tập xác định của f, thì hàm hợp $f \circ g$ được định nghĩa

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ví dụ

Cho các hàm mũ $f(x) = e^x$ và hàm $g(x) = \sin x$. Tìm $f \circ g$ và $g \circ f$

Chú ý

Tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp của các hàm lũy thừa, hàm mũ , hàm log, hàm lượng giác, hàm lượng giác ngược được gọi các hàm số sơ cấp.

Điểm tụ

Định nghĩa

Điểm $a \in D$ được gọi là một điểm tụ hay điểm giới hạn của D nếu mọi khoảng mở của $\mathbb{R}$ chứa a đều chứa một một điểm của D khác a.

Điểm tụ

Định nghĩa

Điểm $a \in D$ được gọi là một điểm tụ hay điểm giới hạn của D nếu mọi khoảng mở của $\mathbb{R}$ chứa a đều chứa một một điểm của D khác a.

Ví dụ

Điểm 0 là điểm tụ của $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nhưng 0 không là điểm tụ của $\{0\} \cup (1, \infty)$.

Giới hạn của hàm số

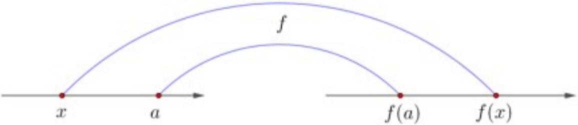
Định nghĩa

Cho f là một hàm số được xác định trên tập D và a là một điểm tụ của D. Ta nói giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a là L, viết là

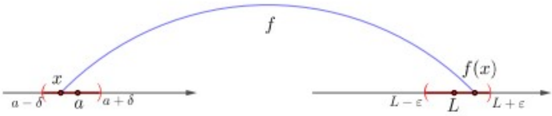
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Nếu với mọi $\epsilon > 0$ có một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$



Hình 2.1.6: Hàm số f.



Hình 2.1.7: Giới hạn của hàm số f.

Ví dụ

- Chứng minh $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$.

Ví dụ

- Chứng minh $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$.
- Chứng minh $\lim_{x\to 2} x^2=4$.

Tính chất của giới hạn

Mệnh đề

Giới hạn nếu tồn tại là duy nhất.

Tính chất của giới hạn

Định lý

Giả sử các giới hạn $\lim_{x\to a} f(x)$ *và* $\lim_{x\to a} g(x)$ *tồn tại. Khi đó các giới hạn ở vế trái của các đẳng thức dưới dây tồn tại và bằng vế phải:*

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

Tính chất của giới hạn

Định lý

Giả sử các giới hạn $\lim_{x \to a} f(x)$ *và* $\lim_{x \to a} g(x)$ *tồn tại. Khi đó các giới hạn ở vế trái của các đẳng thức dưới dây tồn tại và bằng vế phải:*

1. $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$.
2. $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$.

Tính chất của giới hạn

Định lý

Giả sử các giới hạn $\lim_{x\to a} f(x)$ *và* $\lim_{x\to a} g(x)$ *tồn tại. Khi đó các giới hạn ở vế trái của các đẳng thức dưới dây tồn tại và bằng vế phải:*

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.

Tính chất của giới hạn

Định lý

Giả sử các giới hạn $\lim_{x\to a} f(x)$ *và* $\lim_{x\to a} g(x)$ *tồn tại. Khi đó các giới hạn ở vế trái của các đẳng thức dưới dây tồn tại và bằng vế phải:*

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
2. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.
3. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, *nếu* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Ví dụ

Ví dụ

1. Tính $\lim_{x\to 3} x^2 - 2x + 6$.

Ví dụ

Ví dụ

1. Tính $\lim_{x\to 3} x^2 - 2x + 6$.
2. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, tính $\lim_{x\to a} x^n$.

Ví dụ

Ví dụ

1. Tính $\lim_{x\to 3} x^2 - 2x + 6$.
2. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, tính $\lim_{x\to a} x^n$.
3. Tìm
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

Tính chất giới hạn

Định lý (Tính chất so sánh)

Nếu $f(x) \leq g(x)$ *khi* x *gần* a, *có thể ngoại trừ tại* a, *và các giới hạn của hàm số* f *và* g *tồn tại khi* x *tiến đến* a *thì*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Tính chất giới hạn

Định lý (Tính chất so sánh)

Nếu $f(x) \leq g(x)$ khi x gần a, có thể ngoại trừ tại a, và các giới hạn của hàm số f và g tồn tại khi x tiến đến a thì

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Hệ quả

Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ khi x tiến gần a, có thể ngoại trừ tại a, và $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, thì

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Ví dụ

Tìm

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Giới hạn của hàm số thông qua giới hạn của dãy số

Mệnh đề

Cho a là một điểm tụ của miền xác định của hàm số f. Hai điều sau tương đương:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = L$;

Giới hạn của hàm số thông qua giới hạn của dãy số

Mệnh đề

Cho a là một điểm tụ của miền xác định của hàm số f. Hai điều sau tương đương:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = L$;
2. *Với mọi dãy* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *hội tụ về a, dãy số* $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ *hội tụ về L. Tức là, với mọi dãy* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Giới hạn của hàm số thông qua giới hạn của dãy số

Hệ quả

Nếu một trong hai điều sau xảy ra thì hàm số f không có giới hạn tại a :

1. *có một dãy* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *sao cho* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *nhưng dãy* $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ *phân kỳ,*

Giới hạn của hàm số thông qua giới hạn của dãy số

Hệ quả

Nếu một trong hai điều sau xảy ra thì hàm số f không có giới hạn tại a :

1. *có một dãy* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *sao cho* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *nhưng dãy* $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ *phân kỳ,*
2. *có hai dãy* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *và* $\{y_n\}_{n\geq 1}$ *sao cho*

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

nhưng

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Ví dụ

Tìm giới hạn $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$.

Giới hạn một phía

Định nghĩa

Giới hạn bên trái của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$ được định nghĩa nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Kí hiệu $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Giới hạn một phía

Định nghĩa

Giới hạn bên trái của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$ được định nghĩa nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, -\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

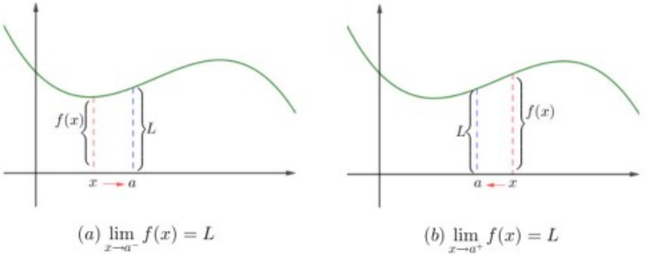
Kí hiệu $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Định nghĩa

Giới hạn bên phải của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$ được định nghĩa nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Kí hiệu $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.



Hình 2.1.8: Giới hạn bên trái và bên phải.

Ví dụ

Mệnh đề

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *khi và chỉ khi* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *và* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Ví dụ

Mệnh đề

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *khi và chỉ khi* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *và* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Ví dụ

Tìm giới hạn của

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Giới hạn ở vô cùng

Định nghĩa

Cho hàm số f được xác định khi a đủ lớn. Ta nói giới hạn của f khi x tiến tới vô cùng là một số thực L, và kí hiệu

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

nếu $f(x)$ gần L tùy ý miễn x đủ lớn. Tức là, nếu với mọi số dương M sao cho nếu $x > M$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

Định nghĩa

Cho hàm số f được xác định khi a đủ nhỏ. Ta nói giới hạn của f khi x tiến tới âm vô cùng là một số thực L, và kí hiệu

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

nếu $f(x)$ gần L tùy ý miễn x đủ nhỏ. Tức là, nếu với mọi số dương M sao cho nếu $x < -M$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

Ví dụ

- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Ví dụ

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Ví dụ

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
- Tìm

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{3x+4}.$$

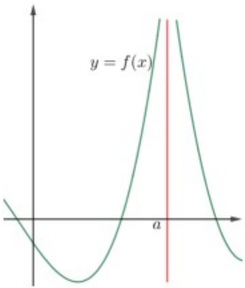
Giới hạn bằng vô cùng

Định nghĩa

Cho hàm số f được xác định ở gần a nhưng có thể không xác định tại a. Ta nói giới hạn của f khi x tiến tới a là vô cùng và kí hiệu

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

nếu $f(x)$ lớn tùy ý miễn x đủ gần nhưng không bằng a. Tức là, nếu với mọi số dương M tồn tại một số dương δ sao cho nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $f(x) > M$.



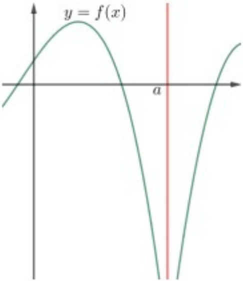
Hình 2.1.9: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Định nghĩa

Cho hàm số f được xác định ở gần a nhưng có thể không xác định tại a. Ta nói giới hạn của f khi x tiến tới a là âm vô cùng và kí hiệu

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

nếu $f(x)$ nhỏ tùy ý miễn x đủ gần nhưng không bằng a. Tức là, nếu với mọi số dương M tồn tại một số dương δ sao cho nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $f(x) < -M$.



Hình 2.1.10: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Ví dụ

Tìm các giới hạn

- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$.

Ví dụ

Tìm các giới hạn

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$.
- $\lim_{x\to\infty} x$.

Ví dụ

Tìm các giới hạn

- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$.
- $\lim_{x\to\infty} x$.
- $\lim_{x\to -\infty} 4x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Hàm số liên tục

Định nghĩa

Hàm số f xác định trên tập D được gọi là liên tục tại $a \in D$ nếu $f(x)$ gần $f(a)$ tùy ý miễn x đủ gần a. Hoàn toàn bằng kí hiệu thì:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Hàm số liên tục

Định nghĩa

Hàm số f xác định trên tập D được gọi là liên tục tại $a \in D$ nếu $f(x)$ gần $f(a)$ tùy ý miễn x đủ gần a. Hoàn toàn bằng kí hiệu thì:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

- Hàm số f không liên tục tại a thì còn được gọi là gián đoạn tại a.

Hàm số liên tục

Định nghĩa

Hàm số f xác định trên tập D được gọi là liên tục tại $a \in D$ nếu $f(x)$ gần $f(a)$ tùy ý miễn x đủ gần a. Hoàn toàn bằng kí hiệu thì:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

- Hàm số f không liên tục tại a thì còn được gọi là gián đoạn tại a.
- Hàm số f được gọi là liên tục trên tập D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Hàm số liên tục

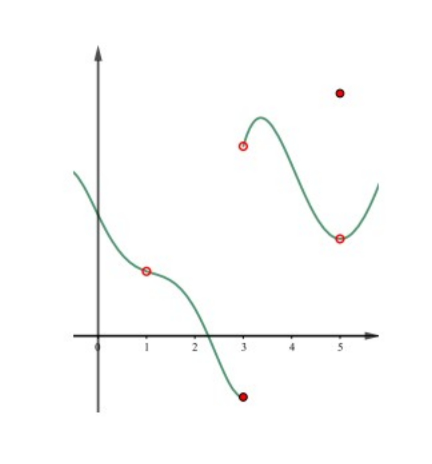
Định nghĩa

Hàm số f xác định trên tập D được gọi là liên tục tại $a \in D$ nếu $f(x)$ gần $f(a)$ tùy ý miễn x đủ gần a. Hoàn toàn bằng kí hiệu thì:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

- Hàm số f không liên tục tại a thì còn được gọi là gián đoạn tại a.
- Hàm số f được gọi là liên tục trên tập D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.
- Hàm số f xác định trên tập D là liên tục tại $a \in D$ nếu a không phải là một điểm tụ của D hoặc nếu là một điểm tụ của D thì

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$


0
1
2
3
4
5

Xác định hàm số liên tục tại một điểm tụ a

cần thỏa các yêu cầu sau:

1. $f(a)$ được xác định,

Xác định hàm số liên tục tại một điểm tụ a

cần thỏa các yêu cầu sau:

1. $f(a)$ được xác định,
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ tồn tại,

Xác định hàm số liên tục tại một điểm tụ a

cần thỏa các yêu cầu sau:

1. $f(a)$ được xác định,
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ tồn tại,
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Tính chất của hàm số liên tục

Định lý

Nếu f và g liên tục tại a thì các hàm số sau cũng liên tục a :
$f+g, f-g, fg$ *và* $\frac{f}{g}$ *nếu* $g(a) \neq 0$.

Tính chất của hàm số liên tục

Định lý

Nếu f và g liên tục tại a thì các hàm số sau cùng liên tục a : $f+g, f-g, fg$ *và* $\frac{f}{g}$ *nếu* $g(a) \neq 0$.

Định lý

Nếu g liên tục tại a và f liên tục tại $g(a)$ thì hàm hợp $f \circ g$ liên tục tại a.

Tính chất của hàm số liên tục

Định lý

Nếu f và g liên tục tại a thì các hàm số sau cùng liên tục a :
$f+g, f-g, fg$ *và* $\frac{f}{g}$ *nếu* $g(a) \neq 0$.

Định lý

Nếu g liên tục tại a và f liên tục tại $g(a)$ thì hàm hợp $f \circ g$ liên tục tại a.

Định lý

Các hàm số sơ cấp đều liên tục trên tập xác định của chúng.

Ví dụ

Ví dụ

- Các hàm số $h(x) = \cos(x^2)$ và $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}-3}$ liên tục trên tập hợp số thực.
- Hàm số $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ liên tục trên miền xác định là đoạn $[-1, 1]$.
- Tìm giới hạn

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x^2 + x \sin x}{2018 + \cos x}.$$

Mệnh đề

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Mệnh đề

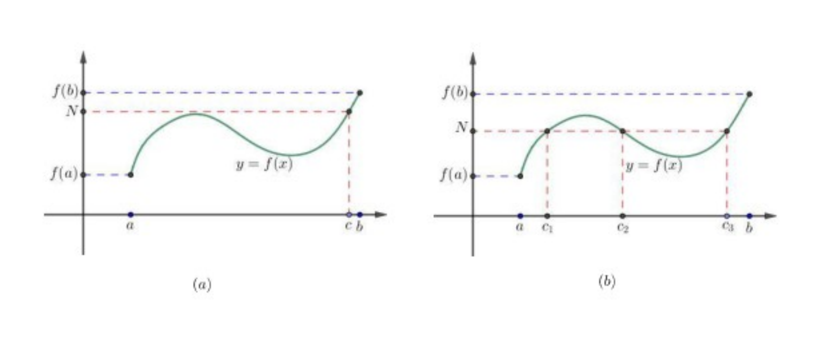
Hàm số f là liên tục tại a khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *hội tụ về a thì dãy* $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ *hội tụ về* $f(a)$*, tức là với mọi dãy* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Định lý giá trị trung gian

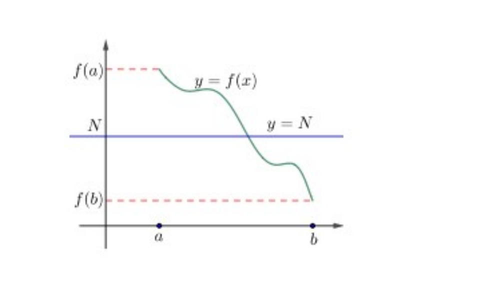
Định lý (Định lý giá trị trung gian)

Giả sử f liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ và N là một số bất kỳ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$. Khi đó tồn tại một số $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = N$.


f(b)
N
f(a)
y = f(x)
a
c b
(a)
f(b)
N
f(a)
y = f(x)
a
c1
c2
c3
b
(b)

Tính chất của đồ thị hàm số liên tục

Đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng đóng là liên thông.



- Chứng tỏ phương trình

$$3x^3 - 2017x^2 + 2018x - 2 = 0$$

có một nghiệm nằm giữa 0 và 1.

- Chứng tỏ phương trình

$$3x^3 - 2017x^2 + 2018x - 2 = 0$$

có một nghiệm nằm giữa 0 và 1.

- Chỉ ra sự tồn tại nghiệm của phương trình sau

$$\sqrt[3]{x} = 2017 - x - x^2$$

trong khoảng $(0, 45)$.