# Training Cấu Trúc Rời Rạc

Ban Học tập Đoàn khoa MMT&TT

**Trainer:**

Nguyễn Cao Thi - MMTT2021
Phan Huy Vũ - ATTN2021
Đinh Bùi Huy Phương - ATTT2021

# Training Cấu Trúc Rời Rạc

## NỘI DUNG ÔN TẬP

1

**Đại số Boole**

2

**Lý thuyết đồ thị**

3

**Cây**

# Đại số Boole

# Đại số Boole

1. Định nghĩa
2. Tính chất
3. Hàm Boole
4. Dạng nối rời chính tắc
5. Bìa Karnaugh
6. Mạch logic

# Đại số Boole

## I. Khái niệm

Trong đại số trừu tượng, đại số Boole là một cấu trúc đại số có các tính chất cơ bản của cả các phép toán trên tập hợp và các phép toán logic. Cụ thể, phép toán trên tập hợp được quan tâm là phép toán giao, phép toán hợp, phép toán bù và các phép toán logic là Và, Hoặc, Không.

# Đại số Boole

## II. Tính chất

- Tính giao hoán: $\begin{cases} x \wedge y = y \wedge x \\ x \vee y = y \vee x \end{cases}$
- Tính hấp thụ : $\begin{cases} x \wedge (x \vee y) = x \\ x \vee (x \wedge y) = x \end{cases}$
- Tính kết hợp : $\begin{cases} (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \end{cases}$
- Tính trung hòa: $\begin{cases} x \wedge 1 = x \\ x \vee 0 = x \end{cases}$
- Tính phân phối : $\begin{cases} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \vee z) \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \end{cases}$
- Tính bù: $\begin{cases} x \wedge \neg x = 0 \\ x \vee \neg x = 1 \end{cases}$

# Đại số Boole

## III. Hàm boole

### 1. Biến Boole

- Biến x được gọi là biến Boole nếu nó chỉ nhận các giá trị trong tập {0, 1}.

### 2. Hàm Boole

- Một hàm từ tập $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)|x_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n\}$ tới tập {0,1} được gọi là 1 hàm Boole bậc n.

- Ví dụ: F(x, y, z) = x + y + z

# Đại số Boole

## IV. Dạng nối rời chính tắc

### 1. Một số định nghĩa

- Từ đơn là mỗi biến Boole $x_i$ hoặc $\overline{x_i}$ trong tập hợp các hàm Boole n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ theo n biến
- Đơn thức là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.
- Từ tối tiểu (đơn thức tối tiểu) là tích khác không của đúng n từ đơn.
- Công thức đa thức là công thức biểu diễn hàm Boole thanh tổng của các đơn thức.
- Dạng nối rời chính tắc bản chất chính là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các từ tối tiểu.

# Đại số Boole

## IV. Dạng nối rời chính tắc

### 2.Ví dụ

➢ Xét hàm Boole với ba biến x, y, z ta có:

- x, y , z, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ là các đơn thức
- xyz là là từ tối tiểu (Đơn thức tối tiểu)
- xy, xz, $\bar{x}$y là đơn thức
- xyz, x$\bar{y}$z là một dạng nối rời chính tắc

# Đại số Boole

## IV. Dạng nối rời chính tắc

### 3. Cách tìm dạng nối rời chính tắc

- Bước 1: Bổ sung các từ đơn còn thiếu vào các đơn thức.
- Bước 2: Với mỗi đơn thức thu được ở bước 1, ta nhân đơn thức đó với tổng của những từ đơn bị thiếu và phần bù của nó trong đơn thức đó.
- Bước 3: Tiếp tục khai triển hàm thu được ở bước 2 và loại bỏ những đơn thức bị trùng. Công thức đa thức thu được chính là dạng nối rời chính tắc của hàm Boole ban đầu.

# Đại số Boole

## IV. Dạng nối rời chính tắc

### 3. Cách tìm dạng nối rời chính tắc

Ví dụ: Tìm dạng nối rời chính tắc của

F(x,y,z,t) = xyz v $\bar{x}$yt.

F(x,y,z,t) = xyz(t v $\bar{t}$) v $\bar{x}$yt(z v $\bar{z}$)

= xyz$\bar{t}$+xyzt+ $\bar{x}$yzt+ $\bar{x}$y$\bar{z}$t

# Đại số Boole

## V. Bìa Karnaugh (bìa Kar)

Bìa Karnaugh là một công cụ vô cùng thuận tiện cho việc đơn giản các biểu thức trong đại số Boole.

### 1. Cách biểu diễn bìa Kar

Biểu diễn theo từ đơn

| | $x$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | | | | | $\bar{t}$ |
| $z$ | | | | | $t$ |
| $\bar{z}$ | | | | | $t$ |
| $\bar{z}$ | | | | | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | $y$ | $y$ | $\bar{y}$ | |

Biểu diễn theo dạng kí số

| zt \ xy | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | | | |
| 11 | | | | |
| 10 | | | | |

# Đại số Boole

## V. Bìa Karnaugh (bìa Kar)

### 2. Một số thuật ngữ trong bìa Kar

- Tế bào là Hình chữ nhật gồm $2^{n-k}$ ($0 \le k \le n$) ô kề nhau
- Tế bào lớn là một tế bào không bị chứa trong tế bào nào khác

  - Tế bào gồm 1 ô: $x\bar{y}z\bar{t}$, $\bar{x}y\bar{z}t$,....
  - Tế bào gồm 2 ô: $x\bar{y}z$, $\bar{x}\bar{z}t$,...
  - Tế bào gồm 4 ô: $xz$, $\bar{x}\bar{z}$.

➢ Tế bào lớn: $xz$, $\bar{x}\bar{z}$

| | x | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| z | x | x | | | $\bar{t}$ |
| z | x | x | | | t |
| $\bar{z}$ | | | x | x | t |
| $\bar{z}$ | | | x | x | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | y | y | $\bar{y}$ | |

# Đại số Boole

## V. Bìa Karnaugh (bìa Kar)

### 3. Dùng bìa Kar để tìm dạng nối rời chính tắc

Dạng nối rời chính tắc bản chất chính là tổng các tế bào gồm 1 ô duy nhất.

Ví dụ: Tìm dạng nối rời chính tắc của

$F(x,y,z,t) = xyz \vee \bar{x}yt.$

| | $x$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | | x | | | $\bar{t}$ |
| $z$ | | x | x | | $t$ |
| $\bar{z}$ | | | x | | $t$ |
| $\bar{z}$ | | | | | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | $y$ | $y$ | $\bar{y}$ | |

➢ Dạng nối rời chính tắc:

$F(x,y,z,t)= xyz\bar{t}+xyzt+ \bar{x}yzt+ \bar{x}y\bar{z}t$

# Đại số Boole

## V. Bìa Karnaugh (bìa Kar)

### 4. Dùng bìa Kar để đơn giản các biểu thức trong đại số Boole (tìm công thức đa thức tối tiểu)

❖ Các bước tìm công thức đa thức tối tiểu của f:

Bước 1: Vẽ bìa Kar của f

Bước 2: Xác định tế bào lớn của f

Bước 3: Xác định tế bào lớn nhất thiết phải chọn

Bước 4: Xác định họ phủ.

Bước 5: Xác định công thức đa thức tối tiểu

# Đại số Boole

## V. Bìa Karnaugh (bìa Kar)

### 4. Tìm công thức đa thức tối tiểu.

Ví dụ: tìm các công thức đa thức tối thiểu của hàm $f$:

$$f(x,y,z,t) = \bar{y}zt \vee \bar{y}z\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$

Bước 1: Vẽ bìa Kar(f)

| | $x$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | | | * | * | $\bar{t}$ |
| $z$ | * | * | | * | $t$ |
| $\bar{z}$ | | | | | $t$ |
| $\bar{z}$ | * | * | * | * | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | $y$ | $y$ | $\bar{y}$ | |

# Đại số Boole

## V. Bìa Karnaugh (bìa Kar)

### 4. Tìm công thức đa thức tối tiểu.

Bước 2: Tìm các tế bào lớn.

| | $x$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | | | * 3 | * 4 3 | $\bar{t}$ |
| $z$ | * 5 2 | * 2 | | * 4 5 | $t$ |
| $\bar{z}$ | | | | | $t$ |
| $\bar{z}$ | * 1 | * 1 | * 3 1 | * 3 1 | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | $y$ | $y$ | $\bar{y}$ | |

$T_1 = \bar{z}\bar{t}$

$T_2 = xzt$

$T_3 = \bar{x}\bar{t}$

$T_4 = \bar{x}\bar{y}z$

$T_5 = \bar{y}zt$

# Đại số Boole

## V. Bìa Karnaugh (bìa Kar)

### 4. Tìm công thức đa thức tối tiểu.

Bước 3: Xác định tế bào lớn nhất thiết phải chọn .

| | $x$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | | | 3 | 4 3 | $\bar{t}$ |
| $z$ | 5 2 | 2 | | 4 * 5 | $t$ |
| $\bar{z}$ | | | | | $t$ |
| $\bar{z}$ | 1 | 1 | 3 1 | 3 1 | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | $y$ | $y$ | $\bar{y}$ | |

$T_1 = \bar{z}\bar{t}$

$T_2 = xzt$

$T_3 = \bar{x}\bar{t}$

$T_4 = \bar{x}\bar{y}z$

$T_5 = \bar{y}zt$

- Có 3 ô chỉ nằm trong 1 tế bào lớn ⇒ có 3 tế bào lớn nhất thiết phải chọn: $T_1, T_2, T_3$.

# Đại số Boole

## V. Bìa Karnaugh (bìa Kar)

### 4. Tìm công thức đa thức tối tiểu.

Bước 4: Xác định họ phủ.

| | x | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| z | | | 3 | 4 3 | $\bar{t}$ |
| z | 5 2 | 2 | | * 4 5 | t |
| $\bar{z}$ | | | | | t |
| $\bar{z}$ | 1 | 1 | 3 1 | 3 1 | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | y | y | $\bar{y}$ | |

$T_1 = \bar{z}\bar{t}$

$T_2 = xzt$

$T_3 = \bar{x}\bar{t}$

$T_4 = \bar{x}\bar{y}z$

$T_5 = \bar{y}zt$

- Có 2 phủ:

(1) $T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_4$

(2) $T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee T_5$

# Đại số Boole

## V. Bìa Karnaugh (bìa Kar)

### 4. Tìm công thức đa thức tối tiểu.

Bước 5: Xác định công thức đa thức tối tiểu

- Có 2 phủ:

(1) $\bar{z}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{x}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z$

(2) $\bar{z}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{x}\bar{t} \vee \bar{y}zt$

Ta thấy 2 phủ đơn giản như nhau nên ta có 2 công thức đa thức tối tiểu:

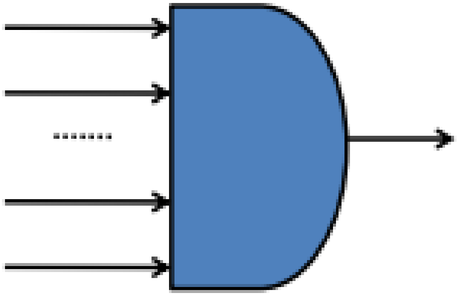
- $\bar{z}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{x}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z$
- $\bar{z}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{x}\bar{t} \vee \bar{y}zt$

# Đại số Boole

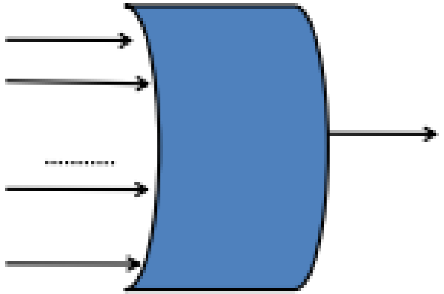
## VI. Mạch logic

❖ Các cổng cơ bản:

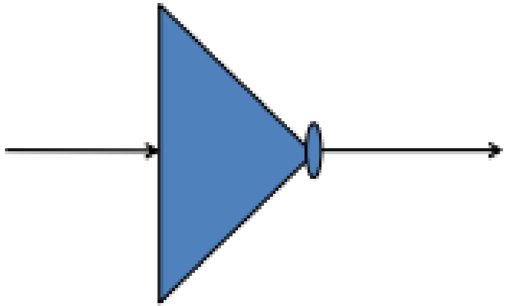
Cổng AND



Cổng OR



Cổng NOT

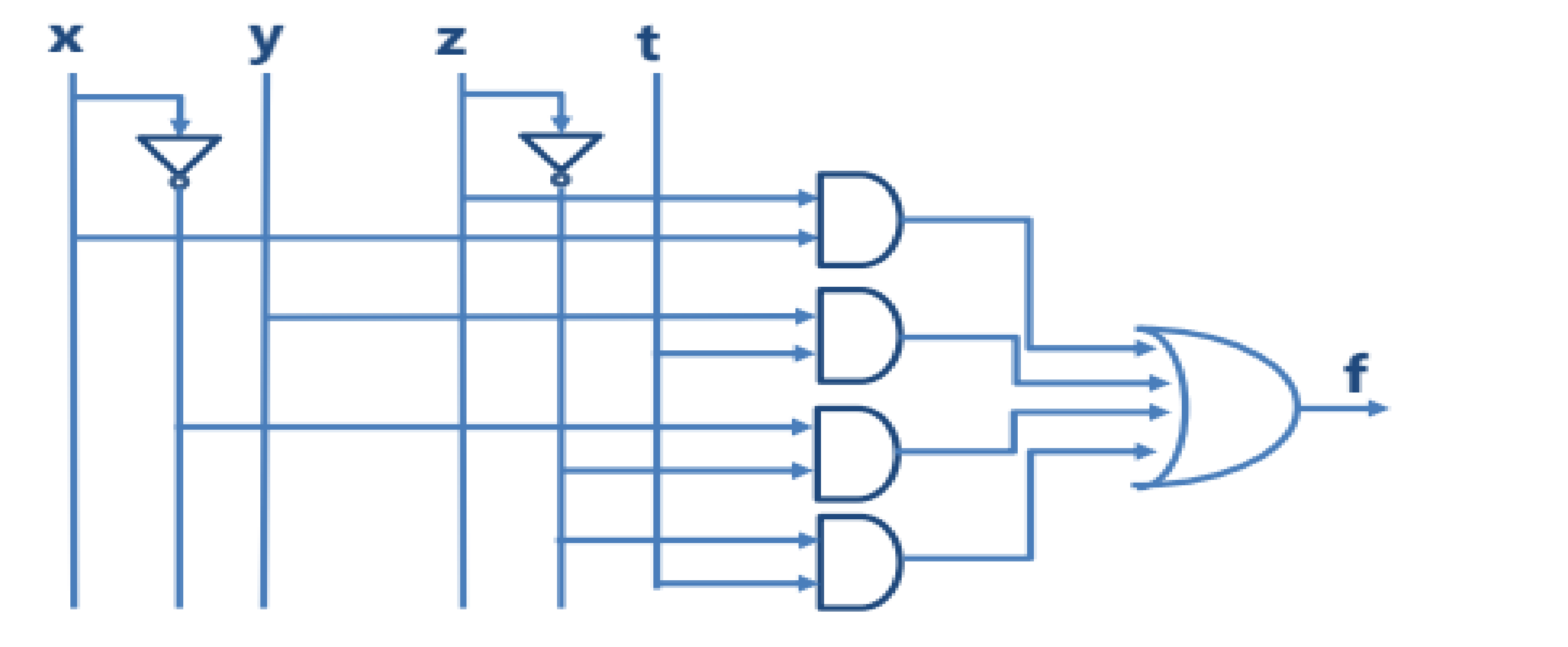


# Đại số Boole

## VI. Mạch logic

❖ Ví dụ: Vẽ sơ đồ mạch cho hàm sau:

$f = xz + yt + \bar{x}\bar{z} + \bar{z}t$



# Đại số Boole

❖ **Ví dụ**

**Câu 1.** *(4 điểm)* Cho hàm Boole 4 biến $f(x, y, z, t)$, biết

$$f^{-1}(0) = \{0110, 0011, 1001, 0001, 1100, 0111\}.$$

a) Hãy tìm dạng nối rời chính tắc của hàm $f$.

b) Hãy tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm $f$.

c) Hãy vẽ sơ đồ mạch cho một công thức đa thức tối tiểu của hàm $f$ vừa tìm được.

# Đại số Boole

❖ **Ví dụ**

**Câu 1.** *(4 điểm)* Cho hàm Boole 4 biến $f(x, y, z, t)$, biết

$$f^{-1}(0) = \{0110, 0011, 1001, 0001, 1100, 0111\}.$$

a) Hãy tìm dạng nối rời chính tắc của hàm $f$.

Ta có bìa Kar

| | $x$ | $x$ | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | • | • | | • | $\bar{t}$ |
| $z$ | • | • | | | $t$ |
| $\bar{z}$ | | • | • | | $t$ |
| $\bar{z}$ | • | | • | • | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | $y$ | $y$ | $\bar{y}$ | |

⇒ Dạng nối rời chính tắc:

f(x, y, z,t) = $x\bar{y}z\bar{t} + xyz\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}zt + xyzt +$
$xy\bar{z}t + \bar{x}y\bar{z}t + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$

# Đại số Boole

❖ **Ví dụ**

b) Hãy tìm các công thức đa thức đa thức tối tiểu

| | x | x | $\bar{x}$ | $\bar{x}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| z | • 1 2 | • 2 | | • 1 | $\bar{t}$ |
| z | • 2 | 4 • 2 | | | t |
| $\bar{z}$ | | 4 3 • | 3 • 6 | | t |
| $\bar{z}$ | • 1 | | 5 • 6 | 5 • 1 | $\bar{t}$ |
| | $\bar{y}$ | y | y | $\bar{y}$ | |

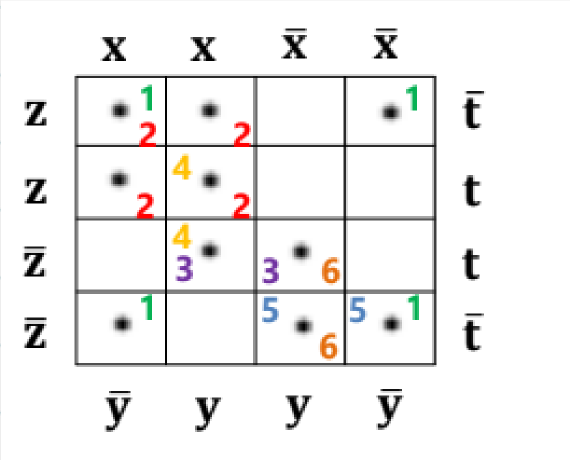
❖ Các tế bào lớn:

- $T_1 = \bar{y}\bar{t}$
- $T_2 = \mathrm{xz}$
- $T_3 = \mathrm{y}\bar{z}t$
- $T_4 = \mathrm{xyt}$
- $T_5 = \bar{x}\bar{z}\bar{t}$
- $T_6 = \bar{x}y\bar{z}$

# Đại số Boole

❖ **Ví dụ**

b) Hãy tìm các công thức đa thức đa thức tối tiểu

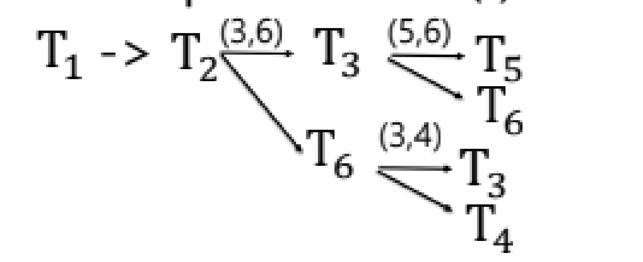



❖ Các tế bào lớn:

- $T_1 = \bar{y}\bar{t}$
- $T_2 = \mathrm{xz}$
- $T_3 = y\bar{z}t$
- $T_4 = \mathrm{xyt}$
- $T_5 = \bar{x}\bar{z}\bar{t}$
- $T_6 = \bar{x}y\bar{z}$

⇒ Tế bào lớn nhất thiết phải chọn $T_1,\ T_2$

-Sơ đồ phủ cho Kar(f):




⇒ Có 4 Phủ:

$T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_5$ (1)

$T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_6$ (2)

$T_1 \cup T_2 \cup T_6 \cup T_3$ (3)

$T_1 \cup T_2 \cup T_6 \cup T_4$ (4)

# Đại số Boole

❖ **Ví dụ**

b) Hãy tìm các công thức đa thức đa thức tối tiểu

(1) = $\bar{y}\bar{t} + xz + y\bar{z}t + \bar{x}\bar{z}\bar{t}$

(2) = $\bar{y}\bar{t} + xz + y\bar{z}t + \bar{x}y\bar{z}$

(4) = $\bar{y}\bar{t} + xz + \bar{x}y\bar{z} + xyt$

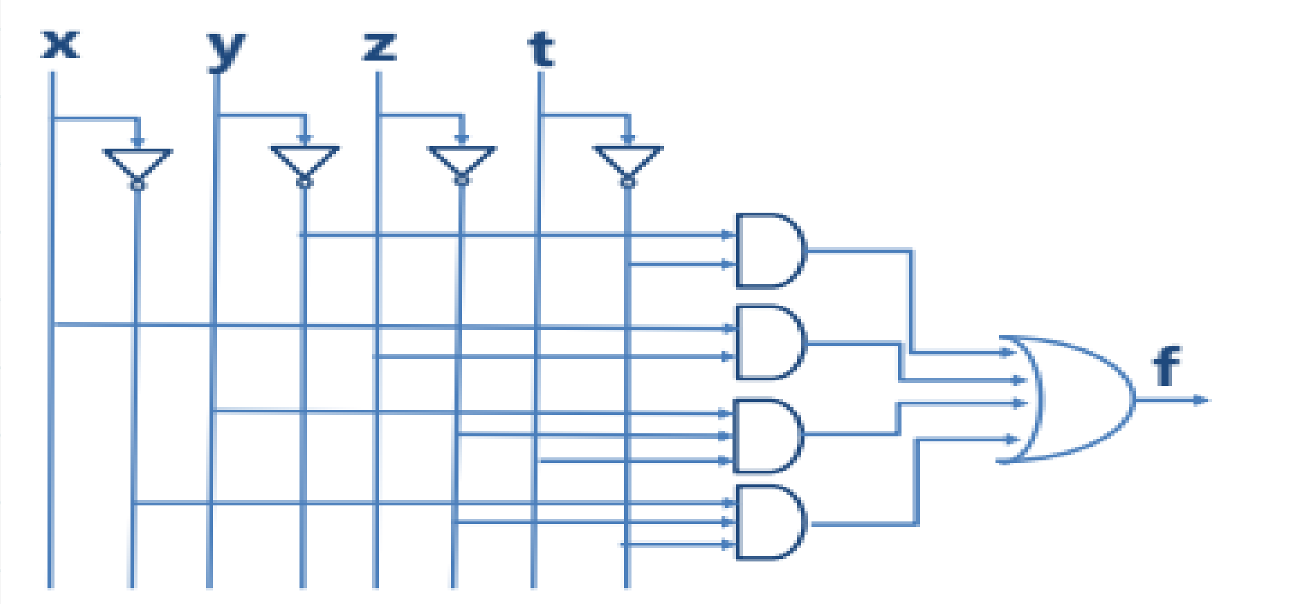
⇒ 3 phủ đơn giản như nhau nên có 3 công thức đa thức tối tiểu: (1), (2), (4)

# Đại số Boole

❖ **Ví dụ**

c) Vẽ sơ đồ mạch cho công thức đa thức tối tiểu của hàm f vừa tìm được.

$$f = \bar{y}\bar{t} + xz + y\bar{z}t + \bar{x}\bar{z}\bar{t}$$



2.

# LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Một số khái niệm cơ bản

# Lý thuyết đồ thị

- Các khái niệm cơ bản
- Biểu diễn đồ thị
- Một số đồ thị đặc biệt
- Sự đẳng cấu của các đồ thị
- Đồ thị có hướng
- Đường đi và chu trình
- Sự liên thông

# Phân loại đồ thị

- Đơn đồ thị
- Đa đồ thị
- Đồ thị tầm thường
- Đồ thị rỗng

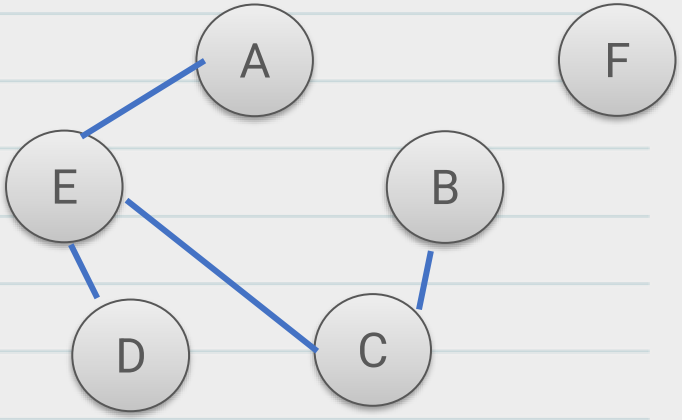
- Đồ thị vô hạn
- Đồ thị hữu hạn

- Đồ thị vô hướng
- Đồ thị có hướng
- Đồ thị hỗn hợp

# Đồ thị vô hướng

- **G = (V, E)** với V ≠ ∅, trong đó V là tập đỉnh, E là tập cạnh.

V = {A, B, C, D, E, F}
E = {(E, A), (E, C), (E, D), (C, B)}
- Hai đỉnh có cùng cạnh gọi là hai đỉnh kề
- Một cạnh nối hai đỉnh trùng nhau gọi là khuyên




- **Cạnh bội:** Các cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh
- **Đơn đồ thị:** Đồ thị không có vòng và cạnh song song
- **Đa đồ thị:** Các đồ thị không phải là đơn đồ thị
- **Đồ thị đầy đủ**

- Đồ thị mà mọi cặp đỉnh đều kề nhau
- Kn : đơn đồ thị đầy đủ

- **Đồ thị con**: Đồ thị G' = (V', E'), trong đó V', E' là con của V, E

# Đồ thị vô hướng

- **Bậc của đỉnh:** Đỉnh kề với n đỉnh có bậc n, đỉnh cô lập (n = 0), đỉnh treo (n = 1).

- Định lý 1: Trong mọi đồ thị G = (V, E), tổng số bậc của các đỉnh của G bằng 2 lần số cạnh của nó

- Định lý 2: Trong mọi đơn đồ thị G = (V, E), nếu số đỉnh nhiều hơn 1 thì tồn tại ít nhất hai đỉnh cùng bậc.

- Định lý 3: Trong mọi đơn đồ thị G = (V, E), nếu số đỉnh nhiều hơn 2 và có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không đồng thời có bậc bằng 0 hoặc n-1.

# Biểu diễn đồ thị

- **Biểu diễn hình học**

- Mỗi đỉnh = một điểm
- Mỗi cạnh = một đường (cong hoặc thẳng) nối 2 đỉnh liên thuộc với nó

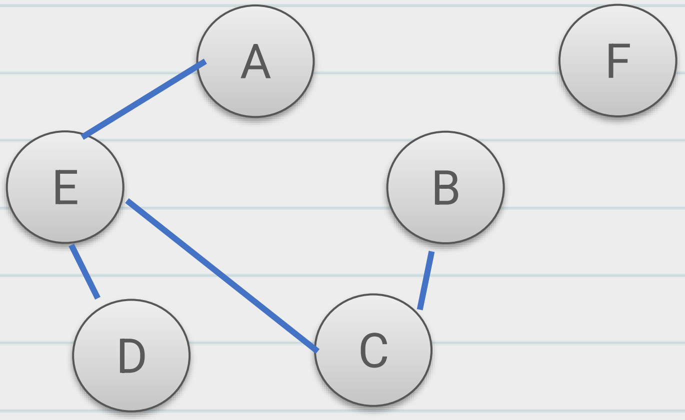
- **Biểu diễn bằng ma trận kề**

Ma trận vuông cấp n (số đỉnh của đồ thị)
- $a_{ij} = 1$, nếu là một cạnh của G
- $a_{ij} = 0$, nếu không là một cạnh của G

*Tính chất*
- Phụ thuộc vào thứ tự liệt kê của các đỉnh
- Ma trận là đối xứng
- Một vòng được tính là một cạnh ($a_{kk} = 1$)

# Biểu diễn đồ thị

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| B | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| E | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |



# Biểu diễn đồ thị

- **Biểu diễn bằng ma trận liên thuộc**

Ma trận M = $(a_{ij})_{nxm}$

- $a_{ij}$ = 1 nếu cạnh $e_j$ liên thuộc với $v_i$ của G

- $a_{ij}$ = 0 nếu cạnh không liên thuộc với $v_i$ của G

*Tính chất*

- Các cột tương ứng với các cạnh bội là giống nhau trong ma trân liên thuộc

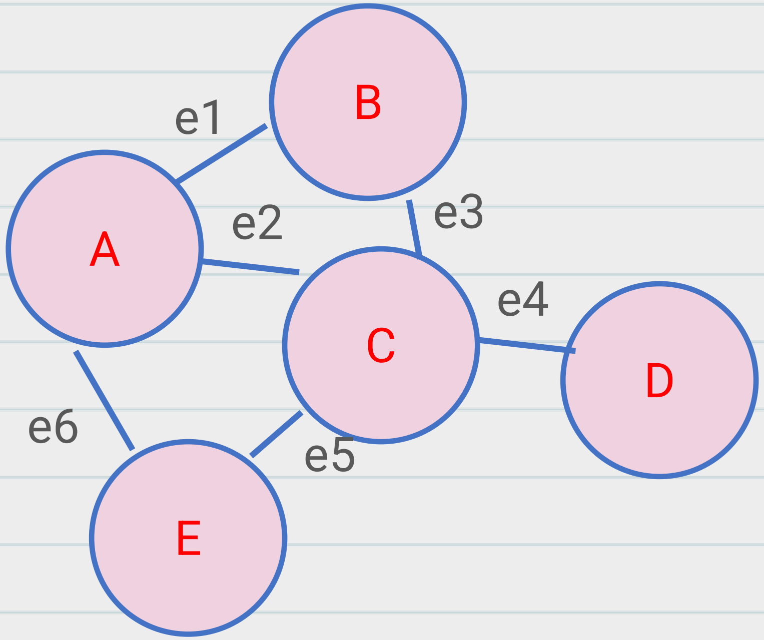
- Các vòng ứng với một cột có đúng một phần tử bằng 1 ứng với đỉnh nối với vòng đó.

- Biểu diễn bằng bảng (danh sách liền kề):

Lưu trữ các đỉnh liền kề với một đỉnh

# Biểu diễn đồ thị

| | e1 | e2 | e3 | e4 | e5 | e6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| B | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |



# Đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị đầy đủ Kn**

- Đơn đồ thị
- Số đỉnh: |V| = n
- Bậc: deg(v) = n – 1, với mọi v thuộc V
- Số cạnh: |E| = n(n - 1) / 2

- **Đồ thị vòng Cn**

- Đơn đồ thị
- Số đỉnh: |V| = n <= 3
- Bậc: deg(v) = 2, với mọi v thuộc V
- Số cạnh: |E| = n

# Đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị hình bánh xe Wn**

- Nối các đỉnh của Cn với một đỉnh mới u ta được Wn
- Số đỉnh: |V| = n + 1, n <= 3
- Bậc: deg(v) = 3, với mọi v thuộc V \ {u}, deg(u) = n
- Số cạnh: |E| = 2n

- **Đồ thị đều bậc k (Đồ thị k-đều)**

- Mọi đỉnh đều có cùng bậc k
- Số đỉnh: |V| = n
- Bậc: deg(v) = k, với mọi v thuộc V
- Số cạnh: |E| = n.k/2
- VD: Cn là đồ thị đều bậc 2, Kn là đồ thị đều bậc (n-1)

# Đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị bù**

- Hai đơn đồ thị G và G’ được gọi là bù nhau khi chúng có chung các đỉnh
- Cạnh nào thuộc G thì không thuộc G’ và ngược lại
- Ký hiệu: G’

- **Đồ thị lưỡng phân**

- Tập các đỉnh của G có thể phân thành 2 tập hợp không rỗng, rời nhau sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh thuộc tập này đến một đỉnh thuộc tập kia.
- Ký hiệu: Km,n

# Đẳng cấu đồ thị

- Hai đồ thị vô hướng $G1 = (X1, U1)$ và $G2 = X2, U2$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu :

– Có cùng số đỉnh.
– Có cùng số đỉnh bậc $k$, mọi $k$ nguyên dương ≥ 0.
– Cùng số cạnh.
– Cùng số thành phần

- **Định lý:** Hai đồ thị có ma trận liền kề (theo một thứ tự nào đó của các đỉnh) bằng nhau thì đẳng cấu với nhau

# Đẳng cấu đồ thị

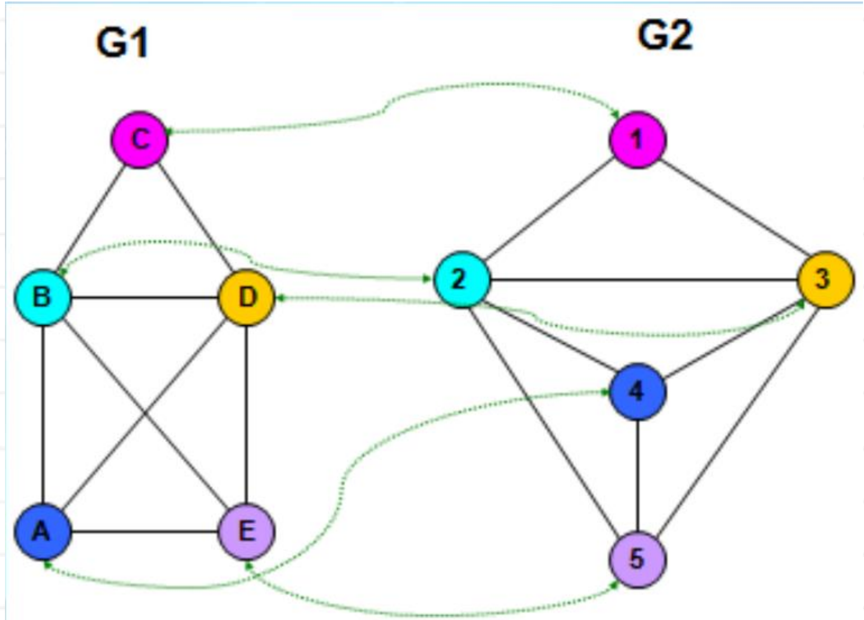
– Có cùng số đỉnh.

–

Có cùng số đỉnh bậc $k$, mọi nguyên dương ≥ 0.

– Cùng số cạnh.

– Cùng số thành phần



# Đồ thị có hướng

- G = (V, E)

- Tập đỉnh V
- Tập cạnh (cung) E = { (a, b) | a,b thuộc V }

- e = (a, b) thuộc E, ký hiệu: e = $\overrightarrow{ab}$

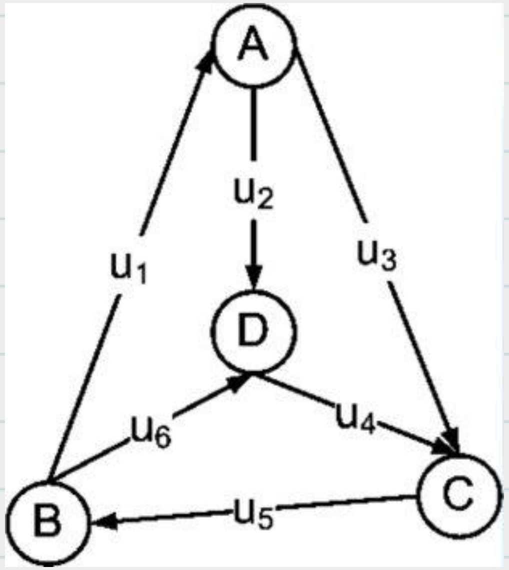
- e có hướng từ a đến b
- a: đỉnh đầu; - b: đỉnh cuối
- e là khuyên (vòng) khi a ≡ b

G được gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng của nó là đầy đủ

# Đồ thị có hướng

- **Bậc của đỉnh**

– **Nửa bậc ngoài** của đỉnh $x$ là số các cạnh đi ra khỏi đỉnh $x$, ký hiệu d+($x$).
– **Nửa bậc trong** của đỉnh x là số các cạnh đi vào đỉnh $x$, ký hiệu d−($x$).
– **Bậc** của đỉnh $x$: d x = d+($x$) + d−($x$)

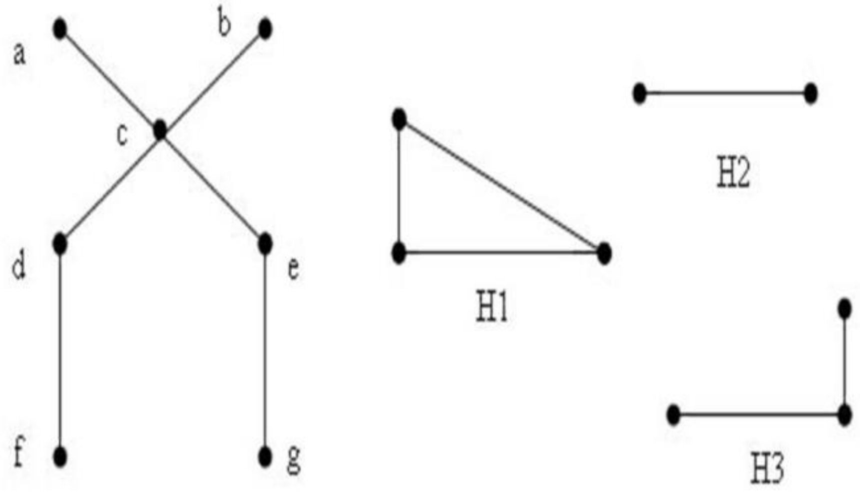



- Tổng bậc vào của các đỉnh bằng tổng bậc ra và bằng số cạnh của đồ thị
- Đồ thị cân bằng: Tổng bậc vào = tổng bậc ra.

# Tính liên thông

- **Định nghĩa**

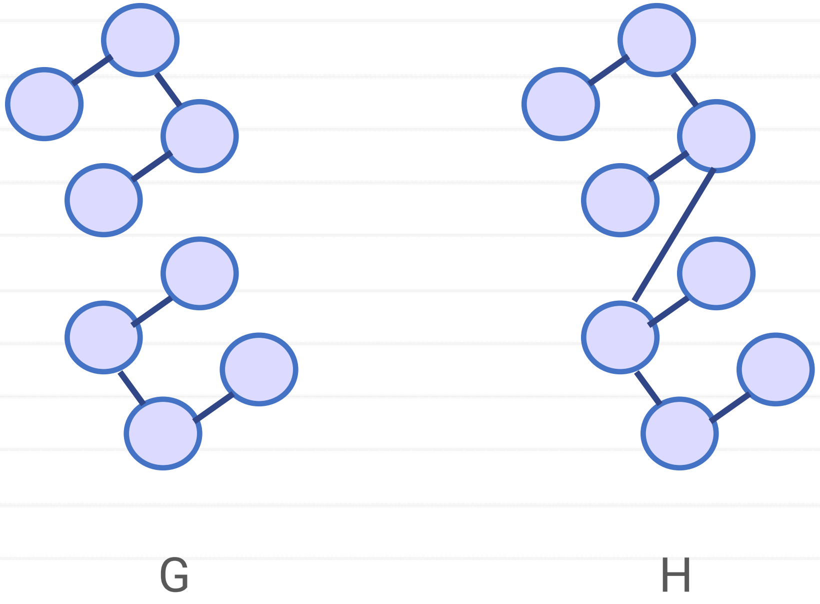
- Hai đỉnh v, u trong đồ thị G được gọi là liên thông nếu tồn tại một đường đi nối chúng với nhau.
- Đồ thị G gọi là liên thông nếu hai đỉnh phân biệt bất kỳ trong đồ thị đều liên thông. Ngược lại thì ta gọi là đồ thị không liên thông.



# Tính liên thông

- Một thành phần liên thông của một đồ thị vô hướng là một đồ thị con trong đó:

– Giữa bất kì hai đỉnh nào đều có đường đi đến nhau
– Không thể nhận thêm bất kì một đỉnh nào mà vẫn duy trì tính chất trên



# Đường đi và chu trình Euler

- Chu trình Euler

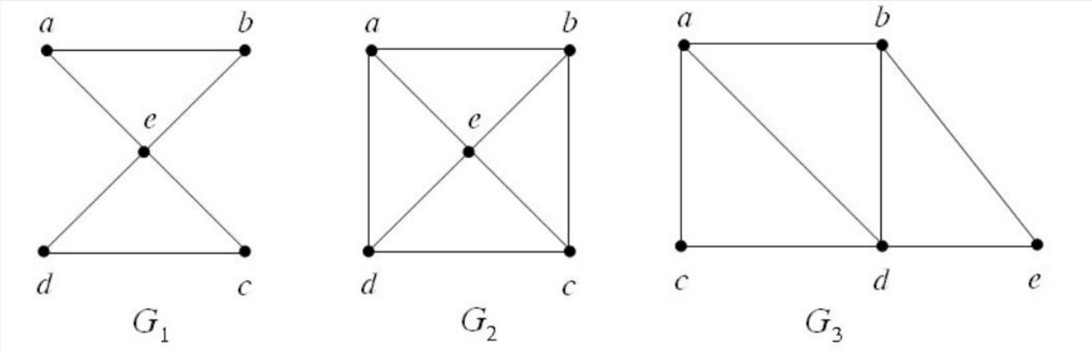
Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G.

- Đồ thị Euler

Đồ thị có chứa một chu trình Euler

- Đường đi Euler

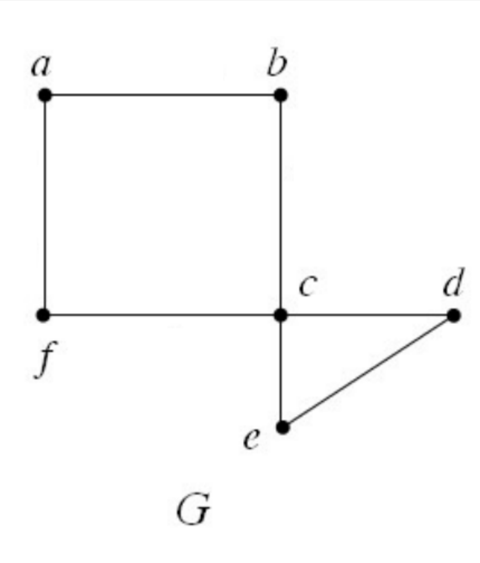
Đường đi đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G

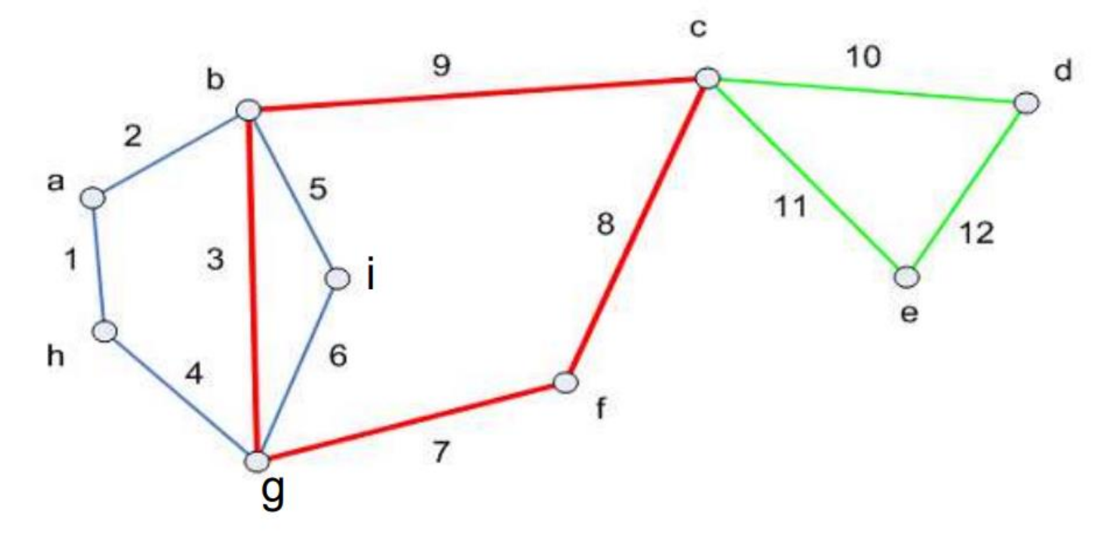


# Đường đi và chu trình Euler

- Định lý về chu trình Euler

Một đồ thị liên thông G=(V, E) có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.



# Đường đi và chu trình Euler

- Tìm chu trình Euler

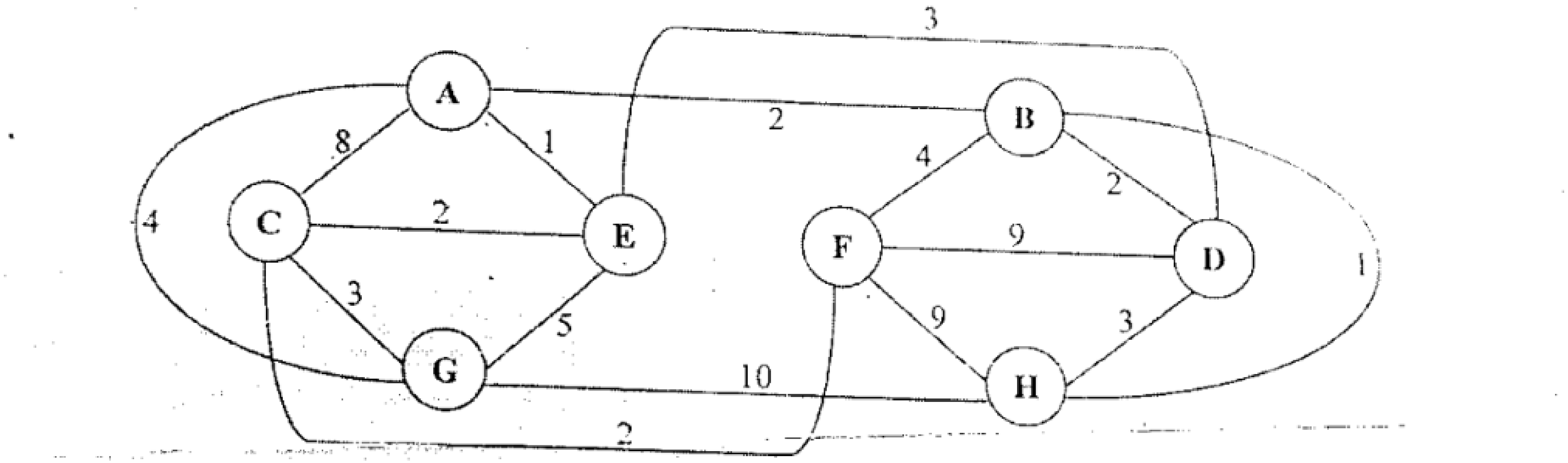
**Bước 1**: Chọn đỉnh v làm đỉnh bắt đầu. Xây dựng chu trình đơn (con) bất kỳ C.

**Bước 2**: Loại bỏ các cạnh trong C khỏi đồ thị. Loại bỏ các đỉnh cô lập (nếu có).

**Bước 3:** Lấy một đỉnh chung của C và đồ thị còn lại để chu trình đơn (con) tiếp theo $C_0$ . Rồi ghép vào C và quay lại bước 2. Lặp cho đến khi các cạnh được đưa hết vào C.

**Câu 2**: (6 điểm)

Cho **G** là đồ thị vô hướng, có trọng số như sau:




a/ Hỏi **G** có chu trình (hay đường đi) Euler không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm chu trình (hay đường đi) Euler của **G**.

b/ Hỏi **G** có chu trình (hay đường đi) Hamilton không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm chu trình (hay đường đi) Hamilton của **G**.

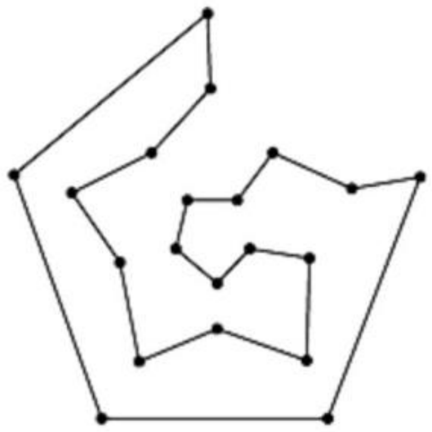
# Chu trình & đường đi Hamilton

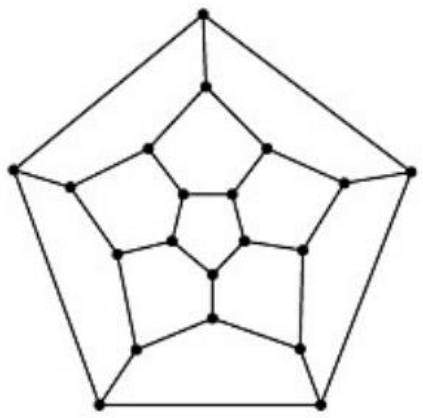
- Chu trình Hamilton

Chu trình bắt đầu từ một đỉnh v nào đó qua tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đúng một lần rồi quay trở về v được gọi là chu trình Hamilton

- Đồ thị Hamilton

Đồ thị có chứa chu trình Hamilton





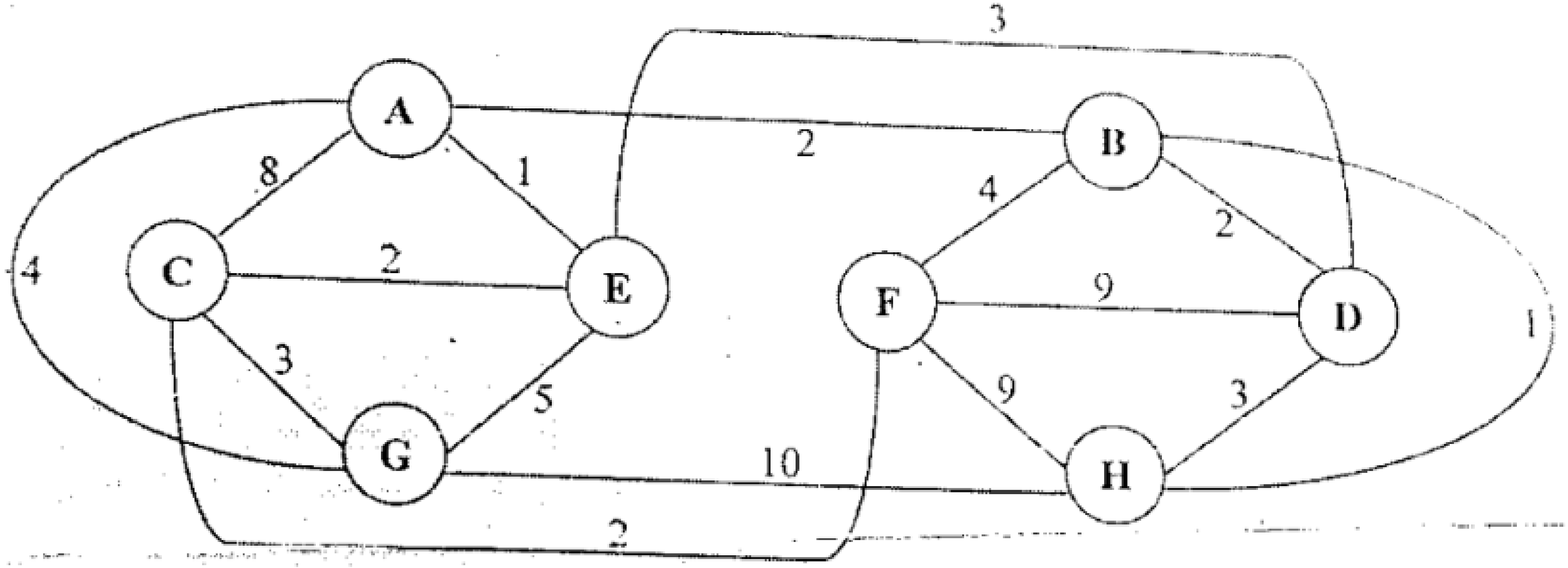
# Chu trình & đường đi Hamilton

**Phương pháp tìm chu trình Hamilton**

- **Qui tắc 1:** Nếu tồn tại một đỉnh v của G có d(v)<=1 thì đồ thị G không có chu trình Hamilton.
- **Qui tắc 2:** Nếu đỉnh v có bậc là 2 thì cả 2 cạnh tới v đều phải thuộc chu trình Hamilton.
- **Qui tắc 3:** Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con nào.
- **Qui tắc 4:** Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh tới một đỉnh v đặt vào chu trình Hamilton rồi thì không thể lấy thêm cạnh nào tới v nữa, do đó có thể xóa mọi cạnh còn lại tới v.

**Câu 2**: (6 điểm)

Cho **G** là đồ thị vô hướng, có trọng số như sau:




a/ Hỏi **G** có chu trình (hay đường đi) Euler không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm chu trình (hay đường đi) Euler của **G**.

b/ Hỏi **G** có chu trình (hay đường đi) Hamilton không? Vì sao? Nếu có, hãy tìm chu trình (hay đường đi) Hamilton của **G**.

# 3.

# TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT THUẬT TOÁN DIJKSTRA

# Một số khái niệm cơ bản

## Ý tưởng

- Ở mỗi lần lặp, thuật toán sẽ tìm ra 1 đỉnh với đường đi ngắn nhất từ a tới đỉnh này là xác định

## Ký hiệu

- Nhãn của đỉnh v: **L(v)** Lưu trữ độ dài đường đi ngắn nhất từ a tới v được biết cho tới thời điểm hiện tại

- Tập S: tập các đỉnh mà đường đi ngắn nhất từ a đến chúng đã xác định

- Trọng số cạnh uv: **w(uv)**

# Các bước thực hiện thuật toán Dijkstra
# Tìm đường đi ngắn nhất từ a tới z

**Bước 1:** Khởi tạo

$L(a) = 0$; $L(v) = \infty$, $S = \emptyset$

**Bước 2:** Nếu $z \in S$ thì thuật toán kết thúc

**Bước 3:** Chọn đỉnh

Chọn u sao cho: $L(u) = \min \{ L(v) \mid v \notin S \}$

Đưa u vào tập S: $S = S \cup \{u\}$

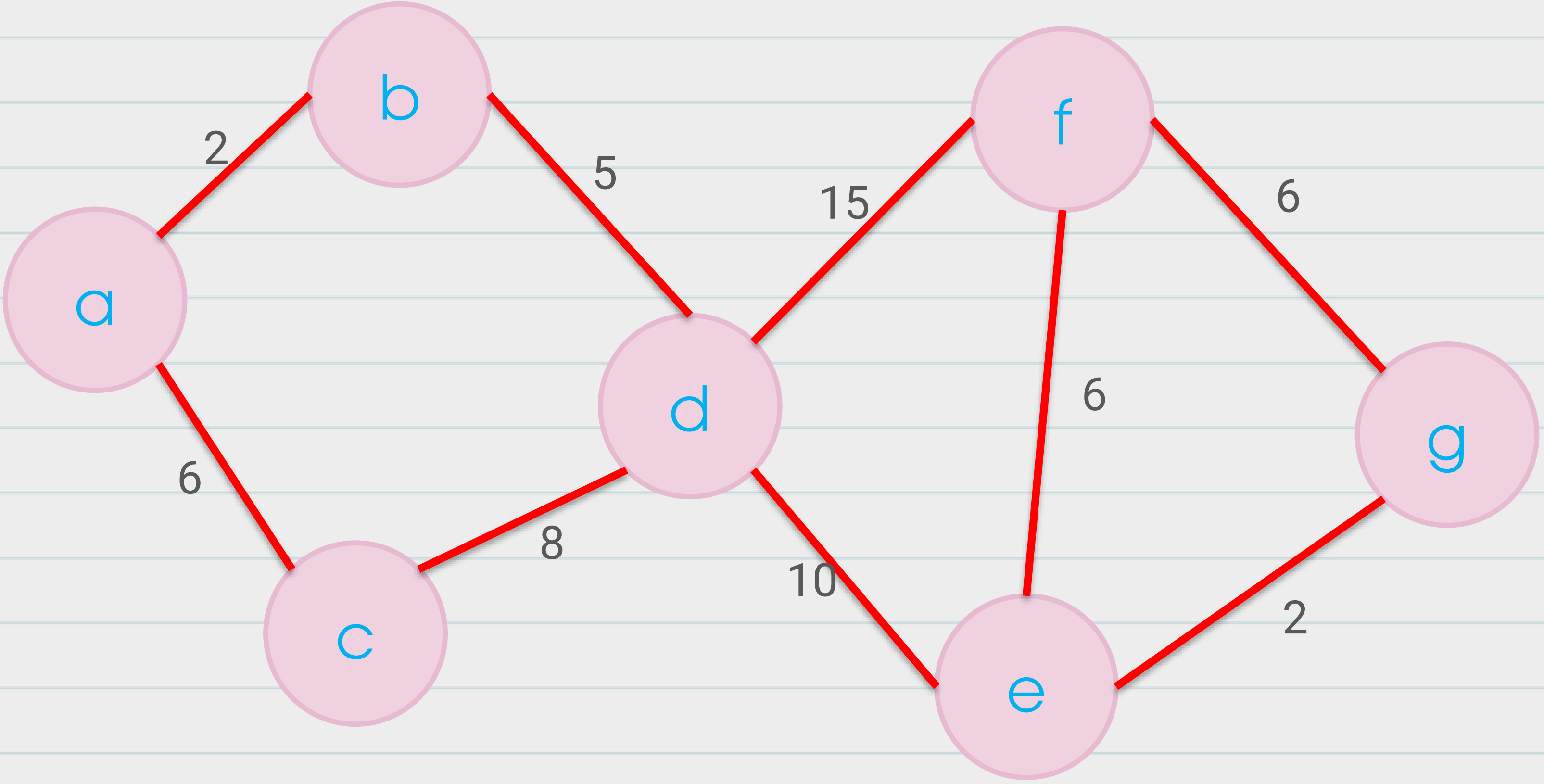
**Bước 4:** Sửa nhãn

Với mỗi đỉnh v ($v \notin S$) kề với u

$L(v) = \min \{ L(v); L(u) + w(uv) \}$

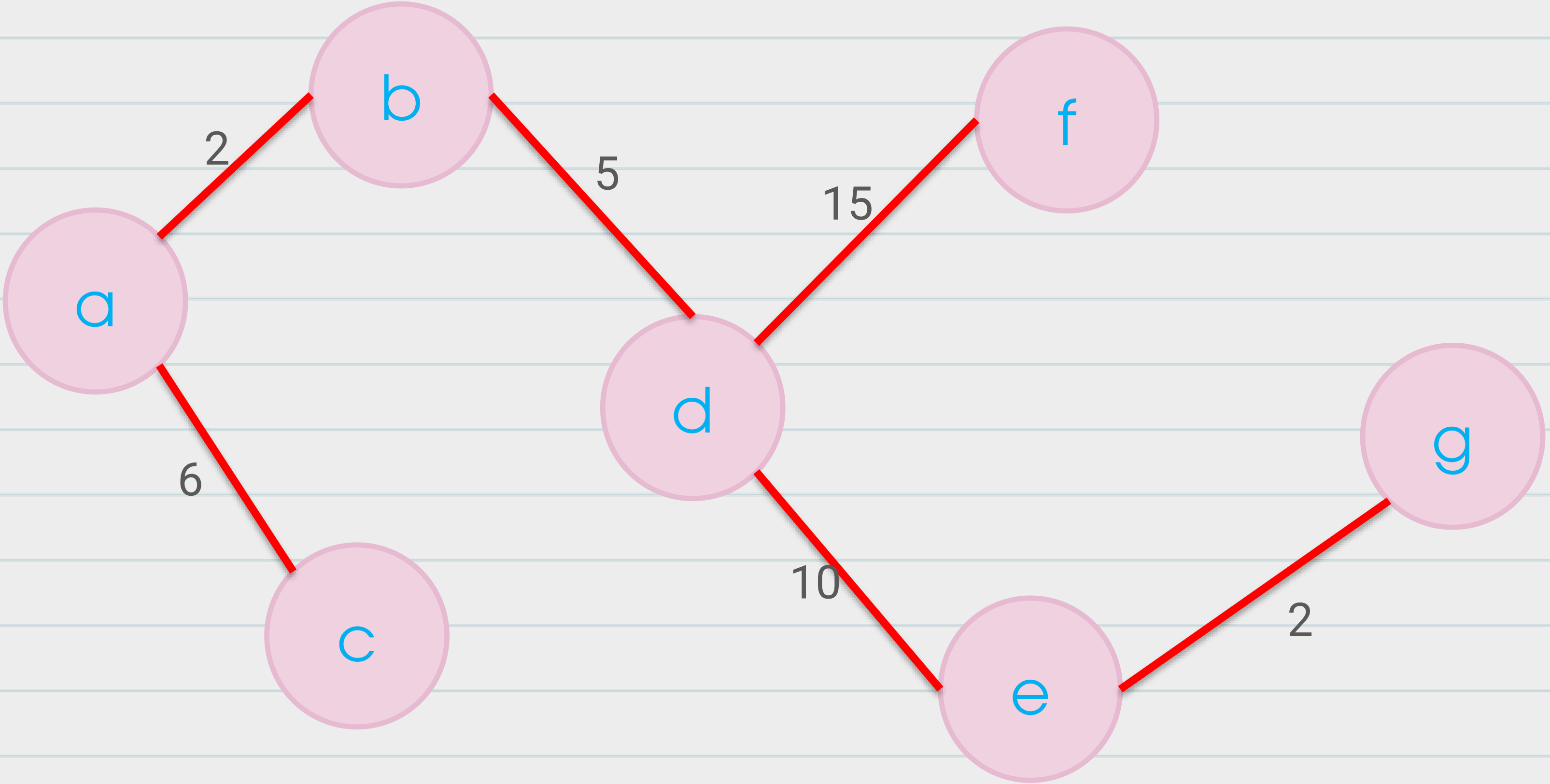
**Bước 5:** Quay lại bước 2

# Tìm đường đi ngắn nhất từ a tới các đỉnh còn lại

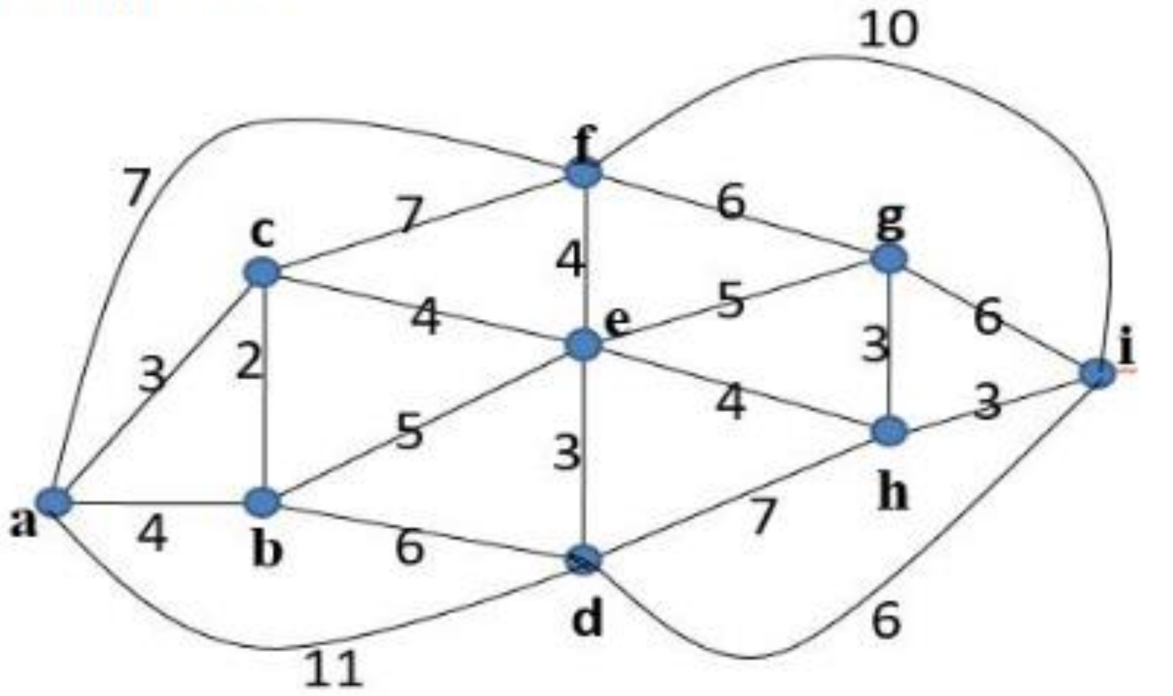


| Bước lặp | a | b | c | d | e | f | g | Tập S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Khởi tạo | 0, a | ∞, a | ∞, a | ∞, a | ∞, a | ∞, a | ∞, a | {∅} |
| 1 | **0, a** | 2, a | 6, a | ∞, a | ∞, a | ∞, a | ∞, a | {a} |
| 2 | - | **2, a** | 6, a | ∞, a | ∞, a | ∞, a | ∞, a | {a, b} |
| 3 | - | - | **6, a** | 7, b | ∞, a | ∞, a | ∞, a | {a, b, c} |
| 4 | - | - | - | **7, b** | ∞, a | ∞, a | ∞, a | {a, b, c, d} |
| 5 | - | - | - | - | **17, d** | 22, d | ∞, a | {a, b, c, d, e} |
| 6 | - | - | - | - | - | 22, d | **19, e** | {a, b, c, d, e, g} |
| 7 | **0, a** | **2, a** | **6, a** | **7, b** | **17, d** | **22, d** | **19, e** | {a, b, c, d, e, g, f} |

# Đường đi ngắn nhất tìm được

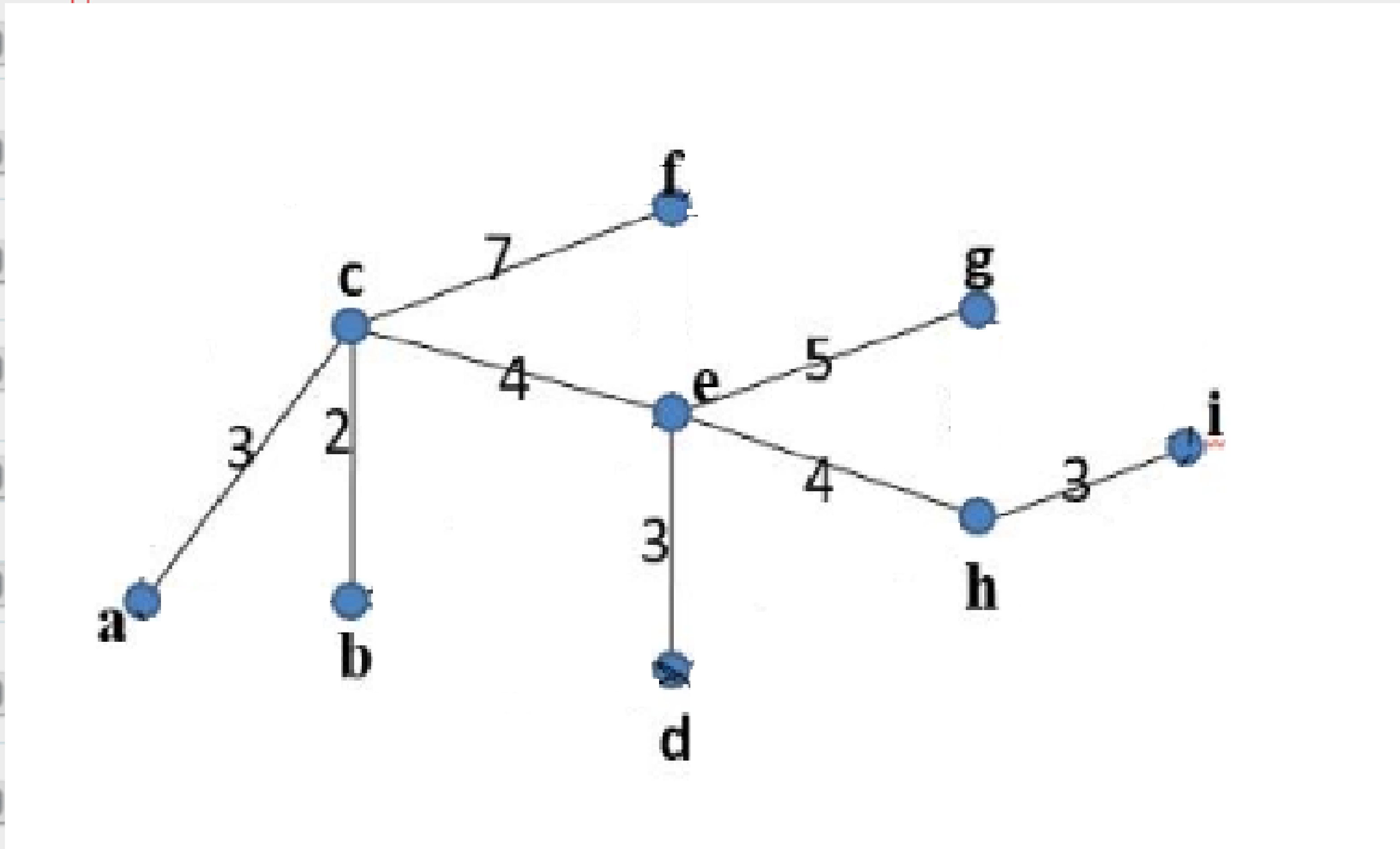


**Câu 3.** *(5.0 điểm)* Cho đồ thị G sau:




**Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh c tới các đỉnh còn lại của G**

| **Bước lặp** | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** | **h** | **i** | **Tập S** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Khởi tạo | ∞, c | ∞, c | 0, c | ∞, c | ∞, c | ∞, c | ∞, c | ∞, c | ∞, c | {∅} |
| 1 | 3, c | 2, c | **0, c** | ∞, c | 4, c | 7, c | ∞, c | ∞, c | ∞, c | {c} |
| 2 | 3, c | **2, c** | **-** | ∞, c | 4, c | 7, c | ∞, c | ∞, c | ∞, c | {c, b} |
| 3 | **3, c** | - | - | 8, b | 4, c | 7, c | ∞, c | ∞, c | ∞, c | {c, b, a} |
| 4 | - | - | - | 8, b | **4, c** | 7, c | ∞, c | ∞, c | ∞, c | {c, b, a, e} |
| 5 | - | - | - | **7, e** | - | 7, c | 9, e | 8, e | ∞, c | {c, b, a, e, d} |
| 6 | - | - | - | - | - | **7, c** | 9, e | 8, e | 13, d | {c, b, a, e, d, f} |
| 7 | - | - | - | - | - | - | 9, e | **8, e** | 13, d | {c, b, a, e, d, f, h} |
| 8 | - | - | - | - | - | - | **9, e** | - | 11, h | {c, b, a, e, d, f, h, g} |
| 9 | **3, c** | **2, c** | **0, c** | **7, e** | **4, c** | **7, c** | **9, e** | **8, e** | **11, h** | {c, b, a, e, d, f, h, g, i} |




Đường đi ngắn nhất từ đỉnh c tới các đỉnh còn lại của G

| Đường đi | Độ dài |
|---|---|
| c -> a | 3 |
| c -> b | 2 |
| c -> d | 7 |
| c -> e | 4 |
| c -> f | 7 |
| c -> g | 9 |
| c -> h | 8 |
| c -> i | 11 |

# 4.

## CÂY

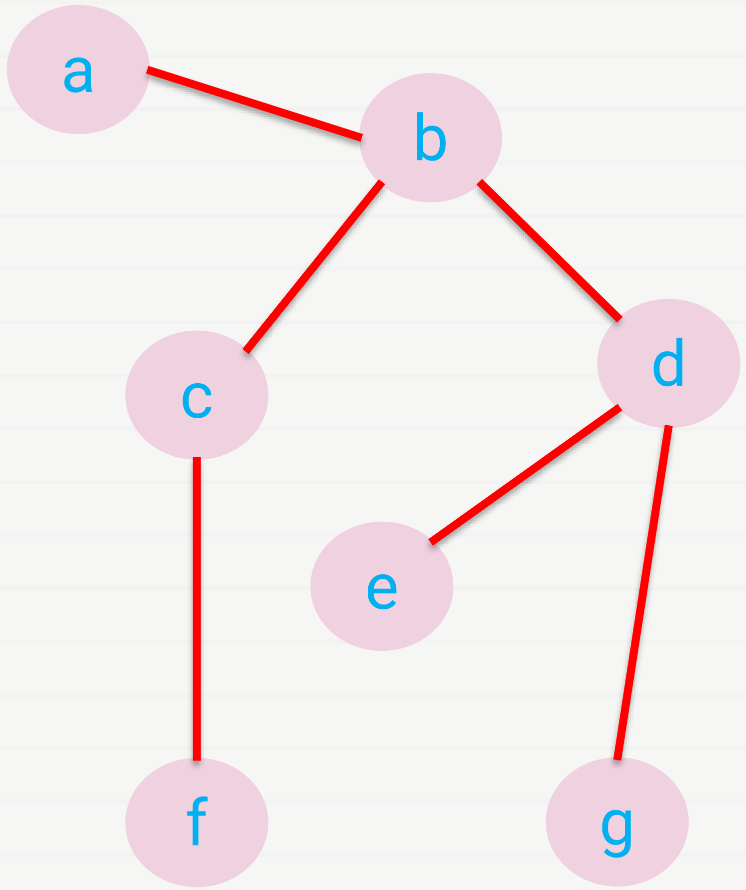
## Một số khái niệm cơ bản

### Cây là gì?

- Cây là một <u>đồ thị vô hướng</u>, <u>liên thông</u> và <u>không có chu trình sơ cấp</u>

=> Cây không có cạnh bội hay khuyên
=> Cây là một đơn đồ thị

## Ví dụ về cây



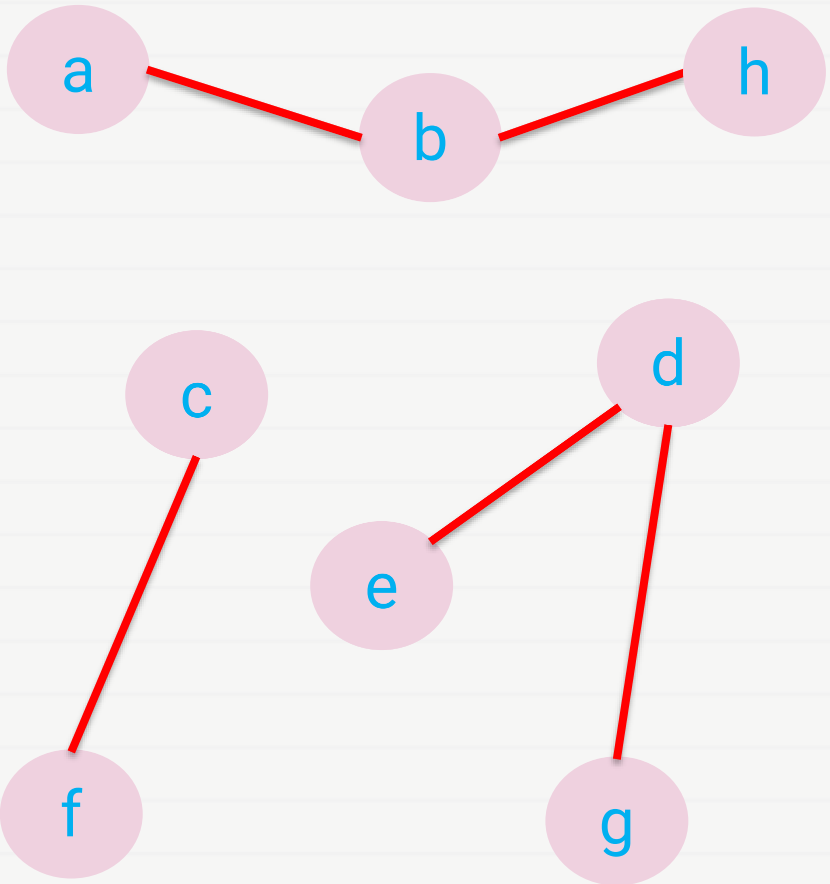
# Một số khái niệm cơ bản

## Rừng là gì?

- Rừng là một <u>đồ thị vô hướng</u> và <u>không có chu trình sơ cấp</u>

=> Rừng có thể có nhiều thành phần liên thông
=> Mỗi thành phần liên thông là một cây

## Ví dụ về rừng



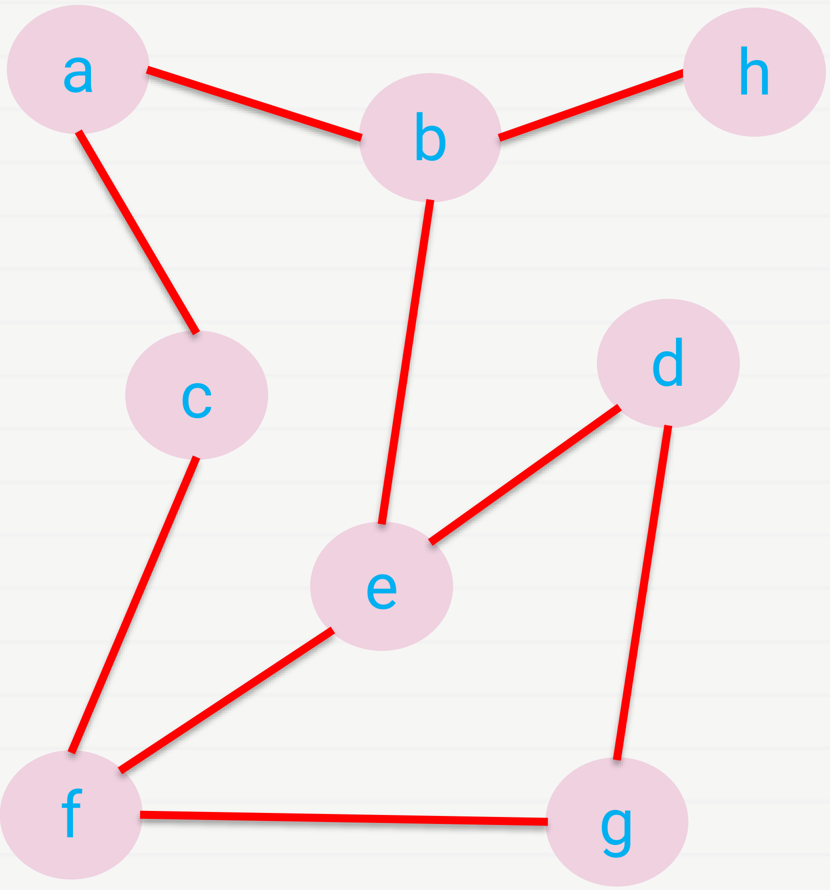
# Một số khái niệm cơ bản

## Cây khung là gì?

- Cây khung của đồ thị G là một cây thỏa 2 điều kiện sau:

+ Đồ thị con của G
+ Chứa tất cả các đỉnh của G

## Ví dụ về cây khung




Đồ thị G

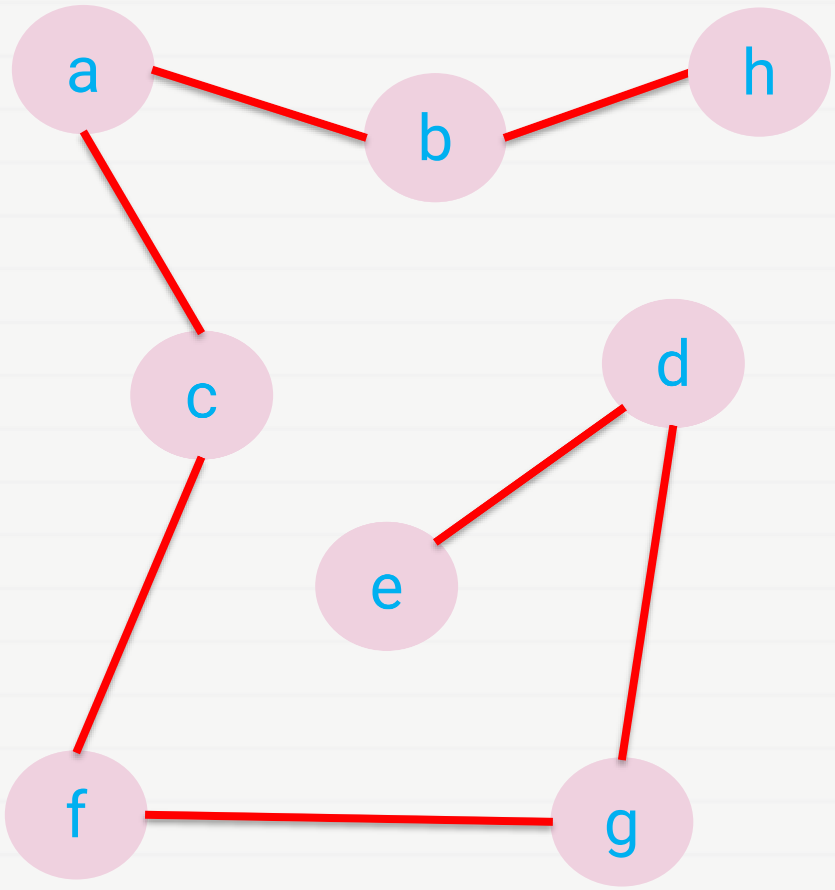
## Một số khái niệm cơ bản

### Cây khung là gì?

- Cây khung của đồ thị G là một cây thỏa 2 điều kiện sau:

+ Đồ thị con của G
+ Chứa tất cả các đỉnh của G

## Ví dụ về cây khung




Cây khung 1

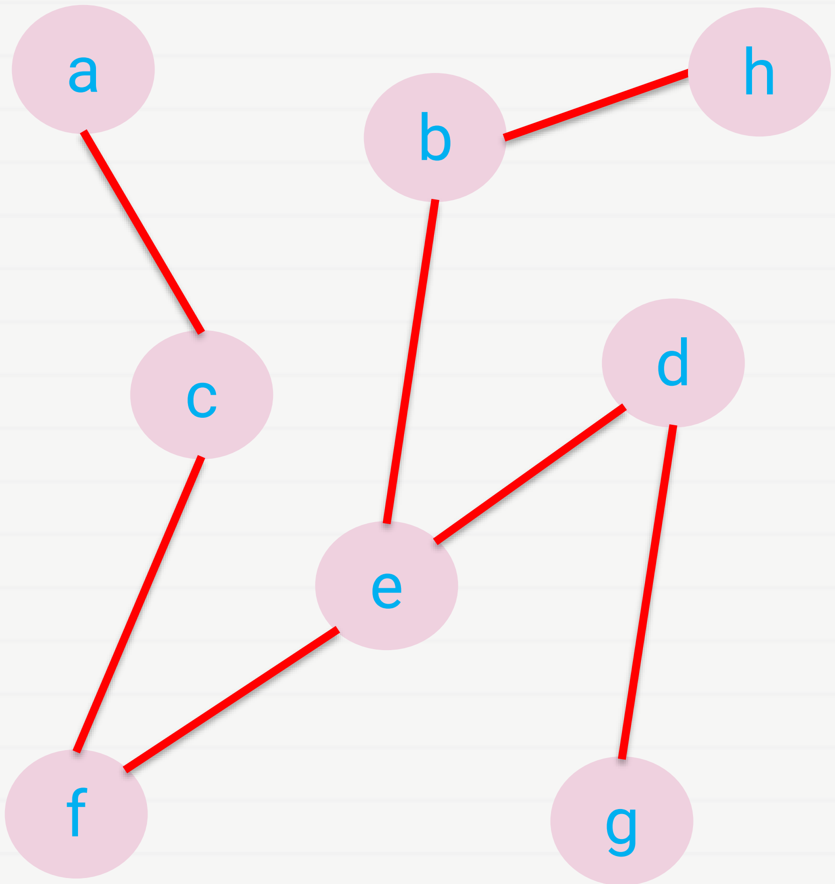
# Một số khái niệm cơ bản

## Cây khung là gì?

- Cây khung của đồ thị G là một cây thỏa 2 điều kiện sau:

+ Đồ thị con của G
+ Chứa tất cả các đỉnh của G

## Ví dụ về cây khung



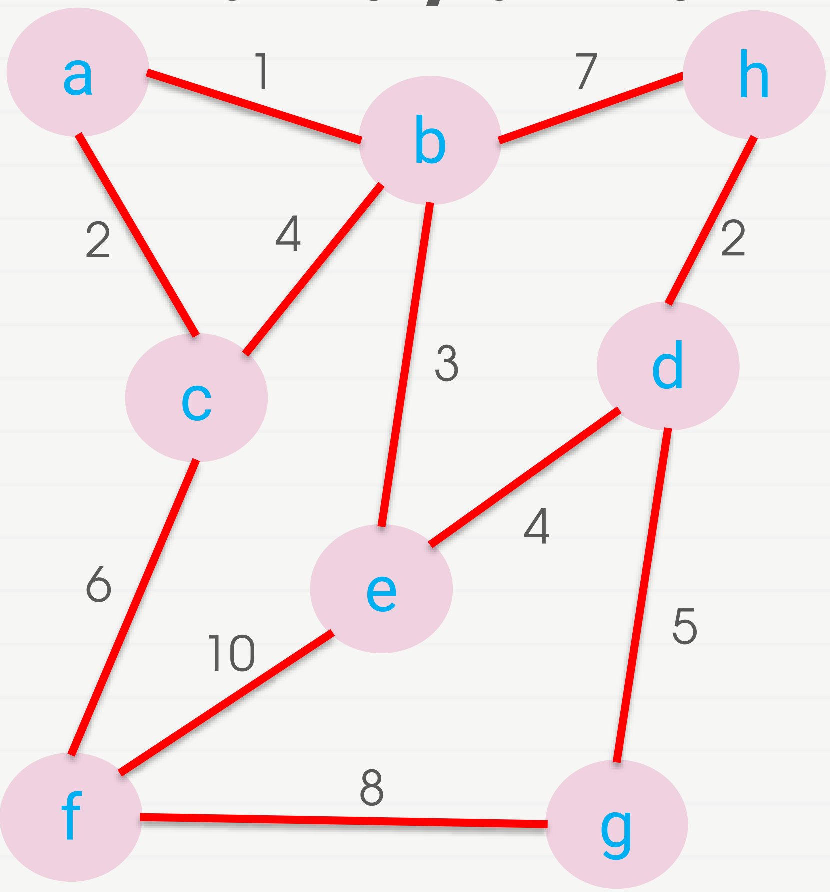

Cây khung 2

# Một số khái niệm cơ bản

## Cây khung nhỏ nhất/ lớn nhất của đồ thị

- Cây khung nhỏ nhất/lớn nhất của đồ thị liên thông có trọng số G là cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất/lớn nhất

## Ví dụ về cây khung nhỏ nhất/lớn nhất



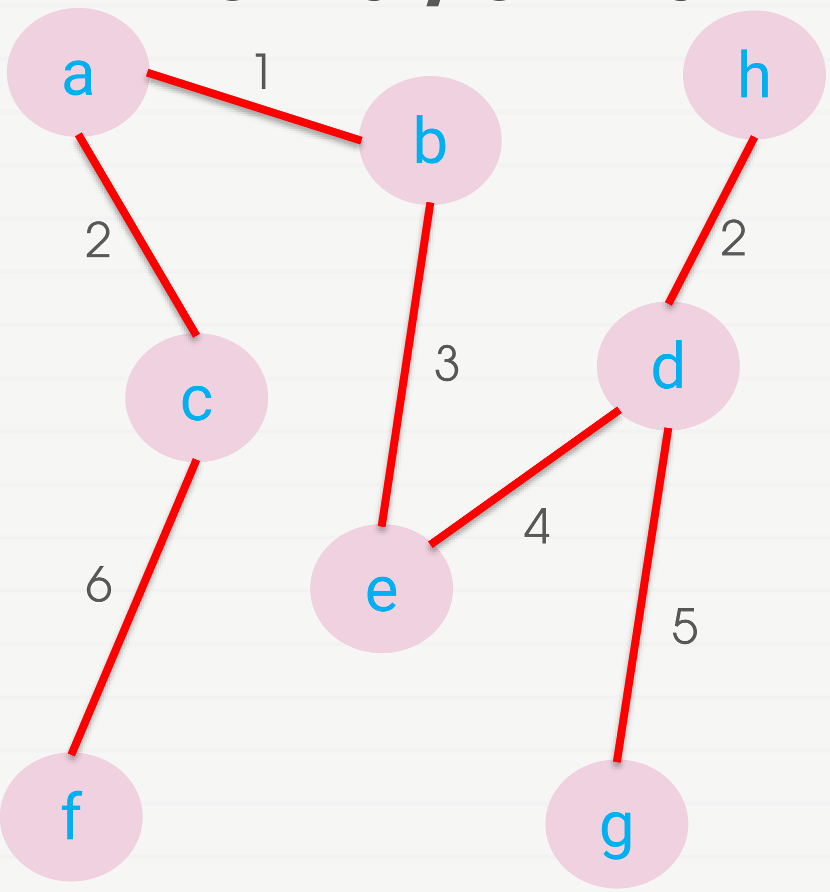

Đồ thị có trọng số G

# Một số khái niệm cơ bản

## Cây khung nhỏ nhất/ lớn nhất của đồ thị

- Cây khung nhỏ nhất/lớn nhất của đồ thị liên thông có trọng số G là cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất/lớn nhất

## Ví dụ về cây khung nhỏ nhất/lớn nhất



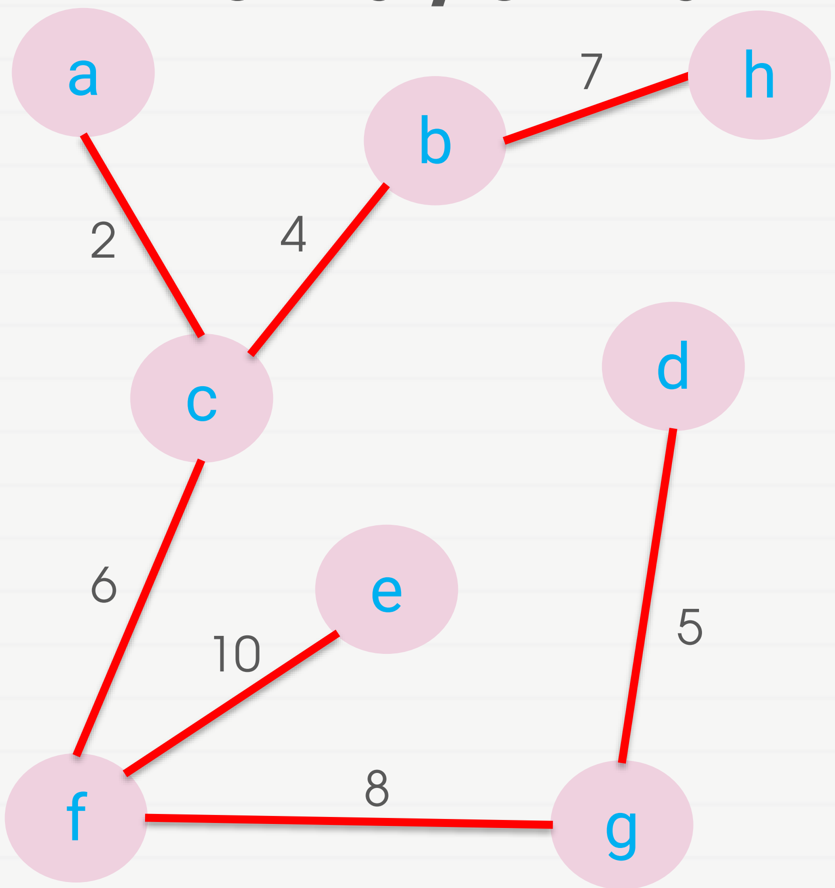

Cây khung nhỏ nhất
Tổng trọng số: 23

## Một số khái niệm cơ bản

### Cây khung nhỏ nhất/ lớn nhất của đồ thị

- Cây khung nhỏ nhất/lớn nhất của đồ thị liên thông có trọng số G là cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất/lớn nhất

### Ví dụ về cây khung nhỏ nhất/lớn nhất




Cây khung lớn nhất
Tổng trọng số: 42

# Phương pháp tìm cây khung nhỏ nhất/lớn nhất

Có 2 thuật toán chính để tìm cây khung nhỏ nhất/lớn nhất của một đồ thị liên thông có trọng số G

1

Thuật toán Prim

2

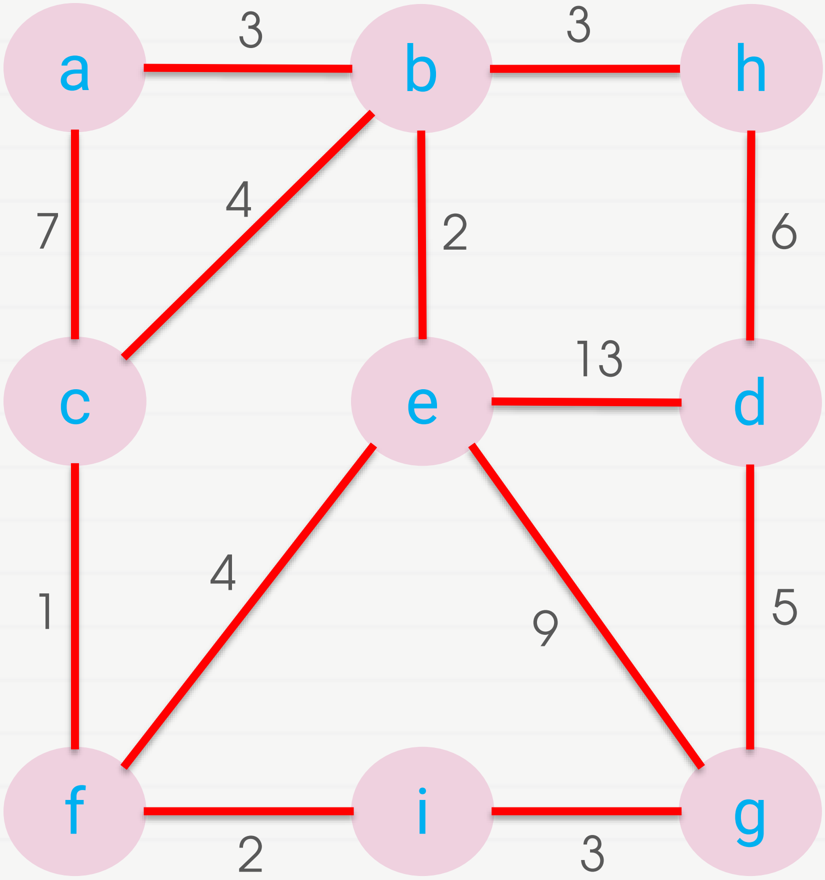
Thuật toán Kruskal

# Các bước thực hiện thuật toán Prim

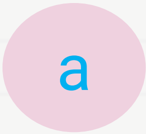
**Bước 1:** Chọn 1 đỉnh bất kỳ để đặt vào cây khung T

**Bước 2:** Trong khi cây khung T có ít hơn n đỉnh hoặc ít hơn (n – 1) cạnh, ghép vào cây khung T cạnh có trọng số nhỏ nhất/lớn nhất liên thuộc với một đỉnh của T mà không tạo ra chu trình trong T

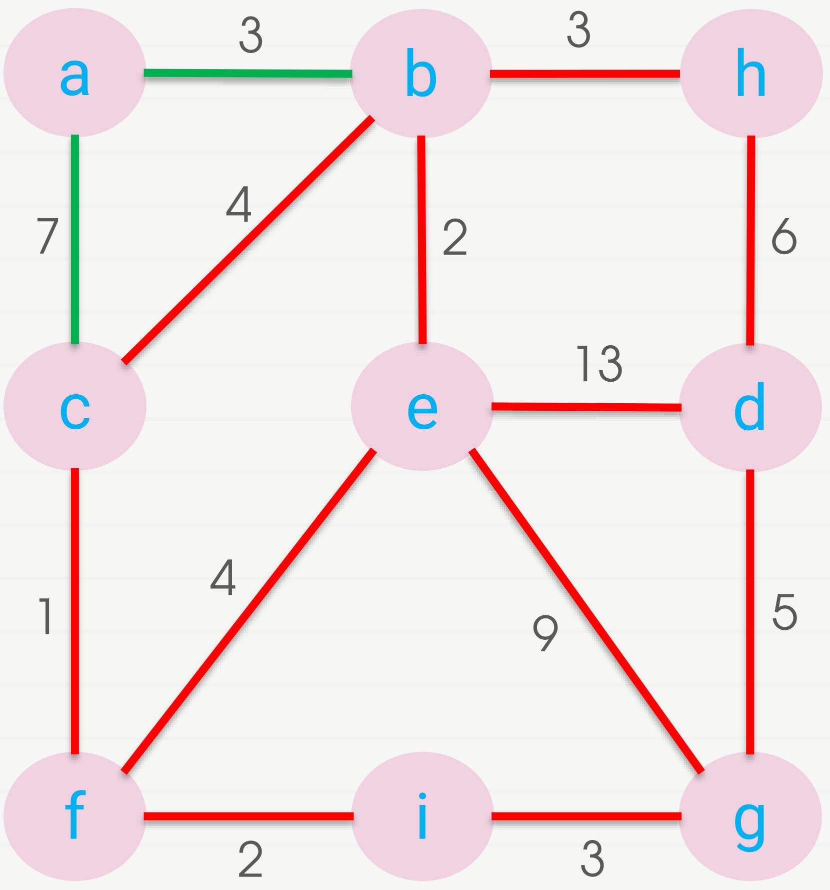
# Đồ thị G



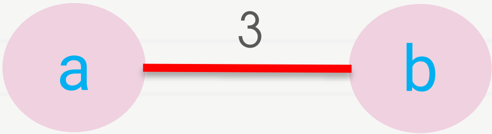

# Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim



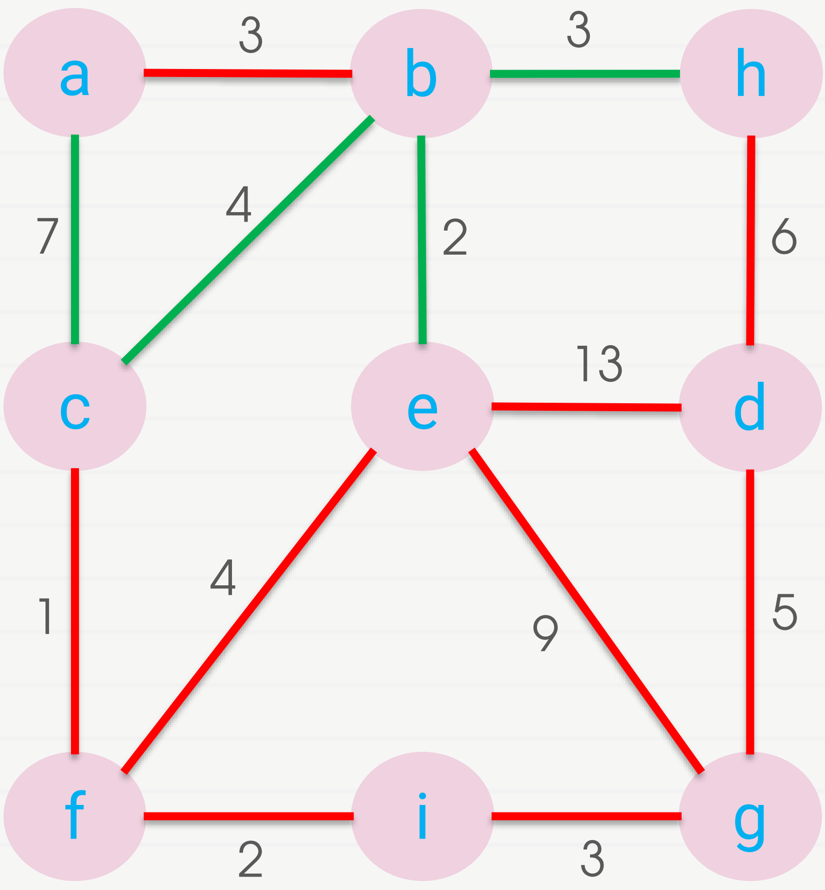
## Đồ thị G



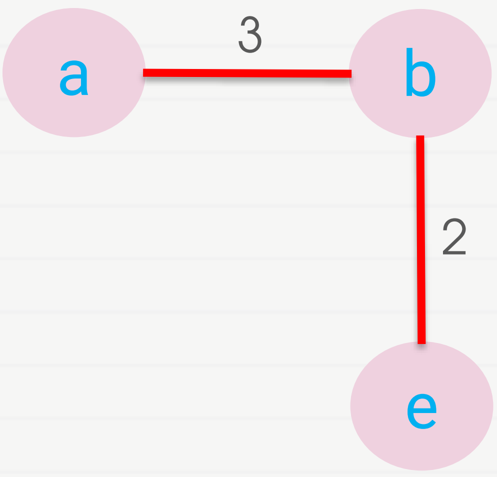

## Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim



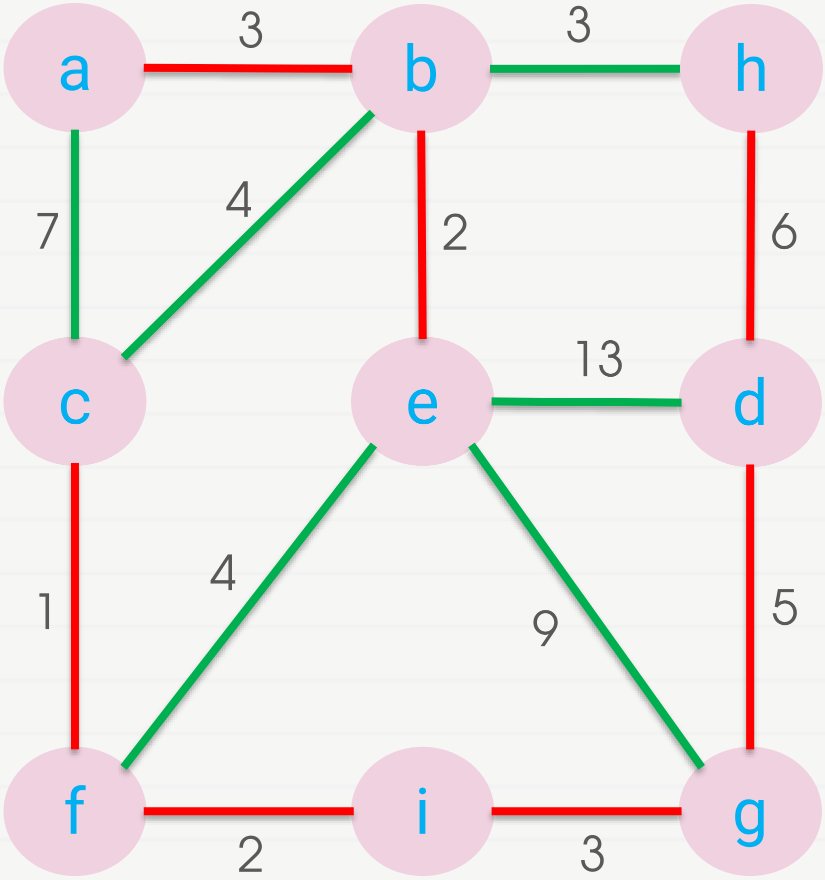
# Đồ thị G



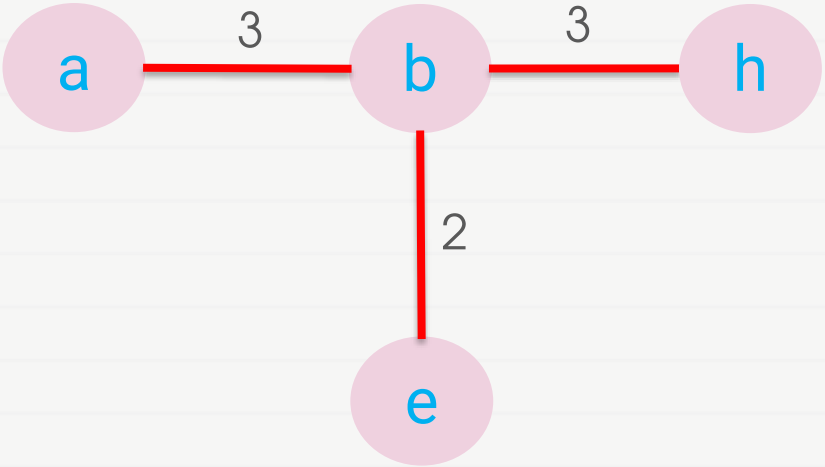

# Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim



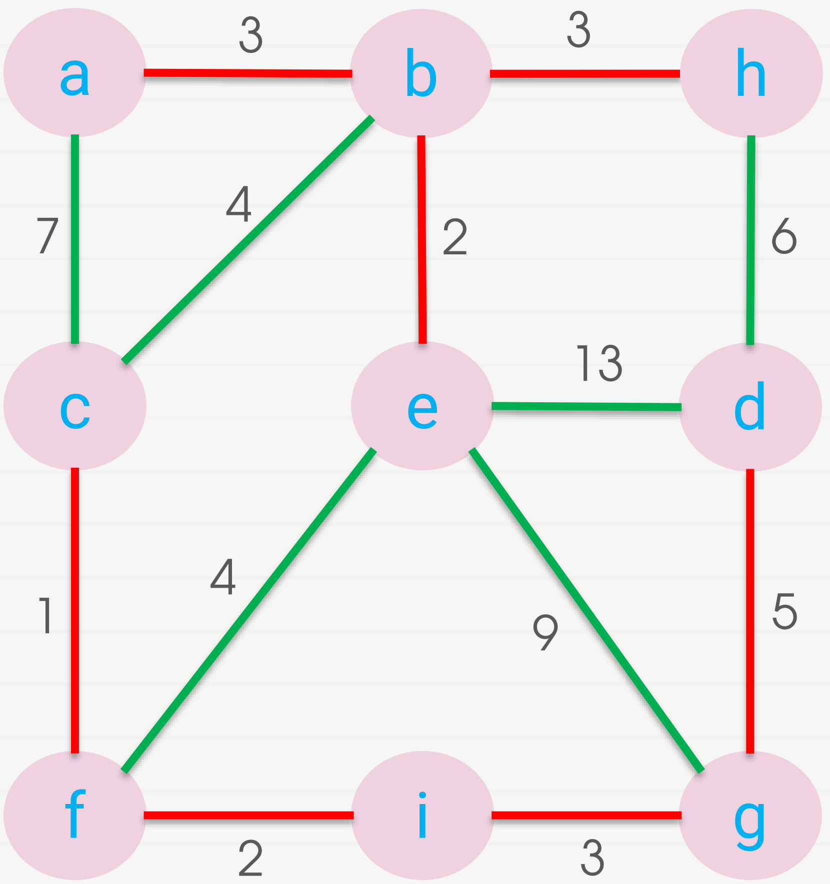
# Đồ thị G



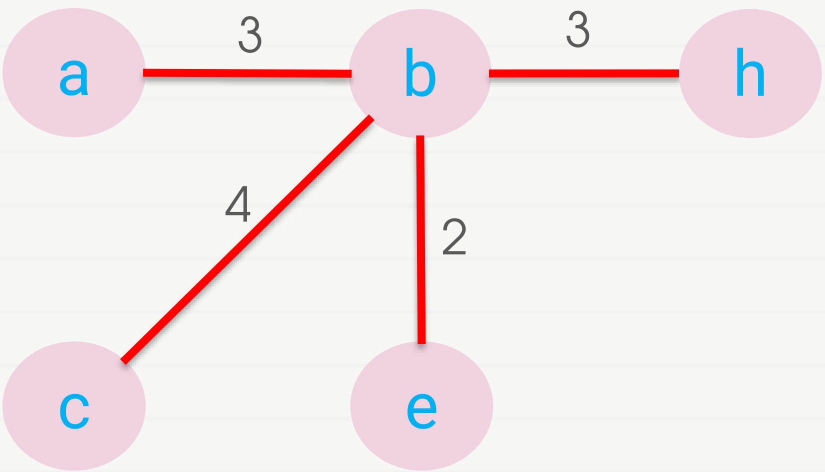

# Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim



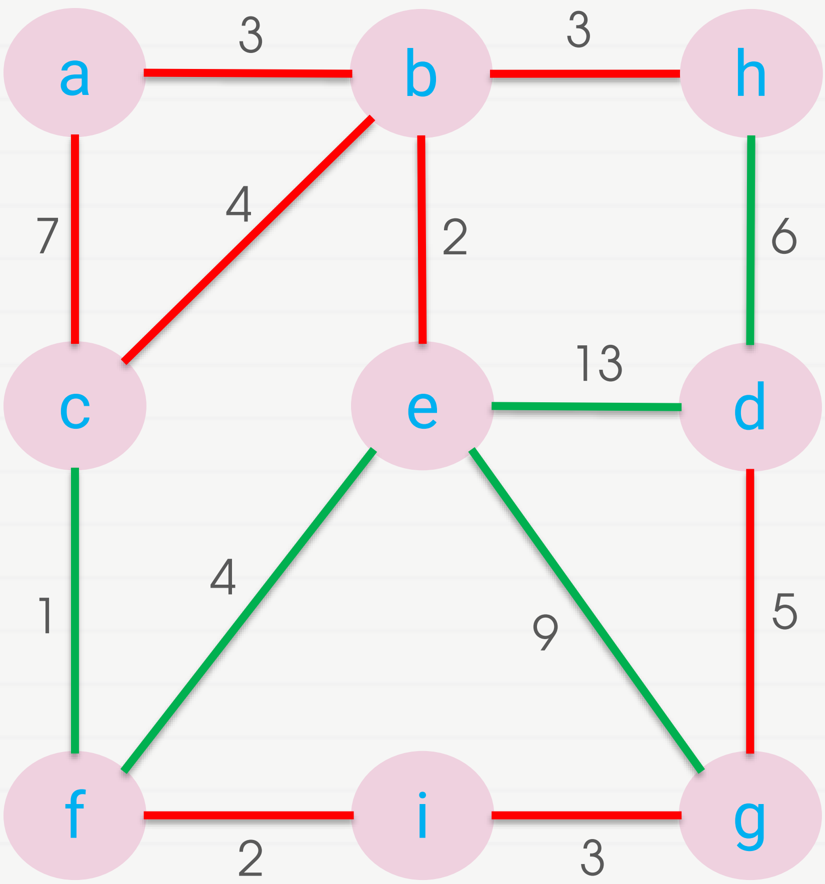
# Đồ thị G



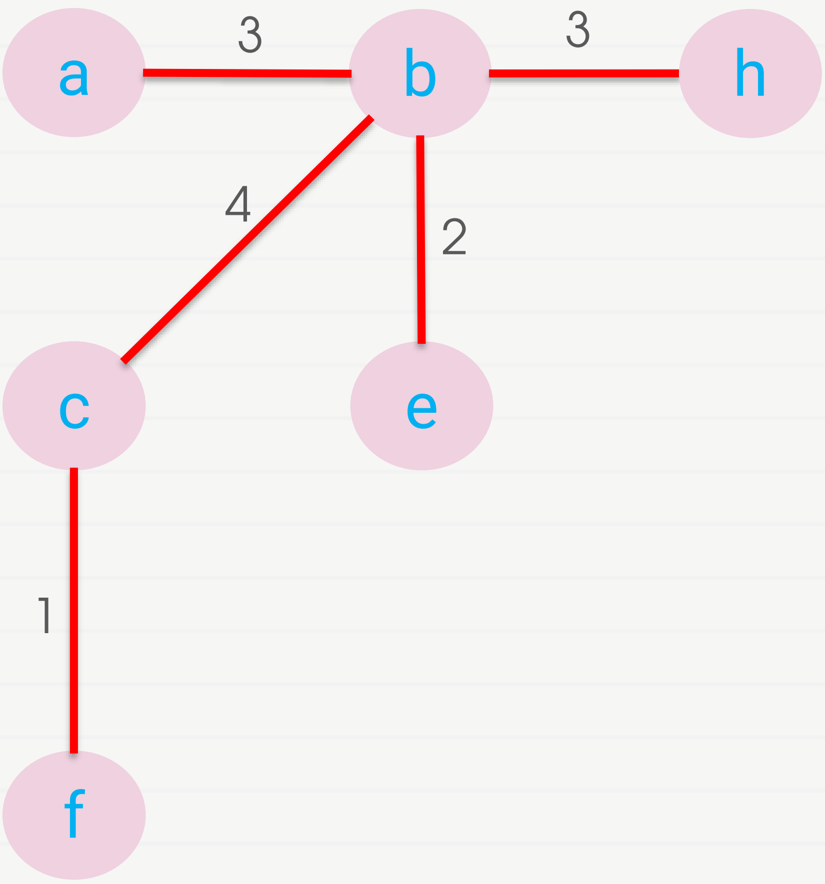

# Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim



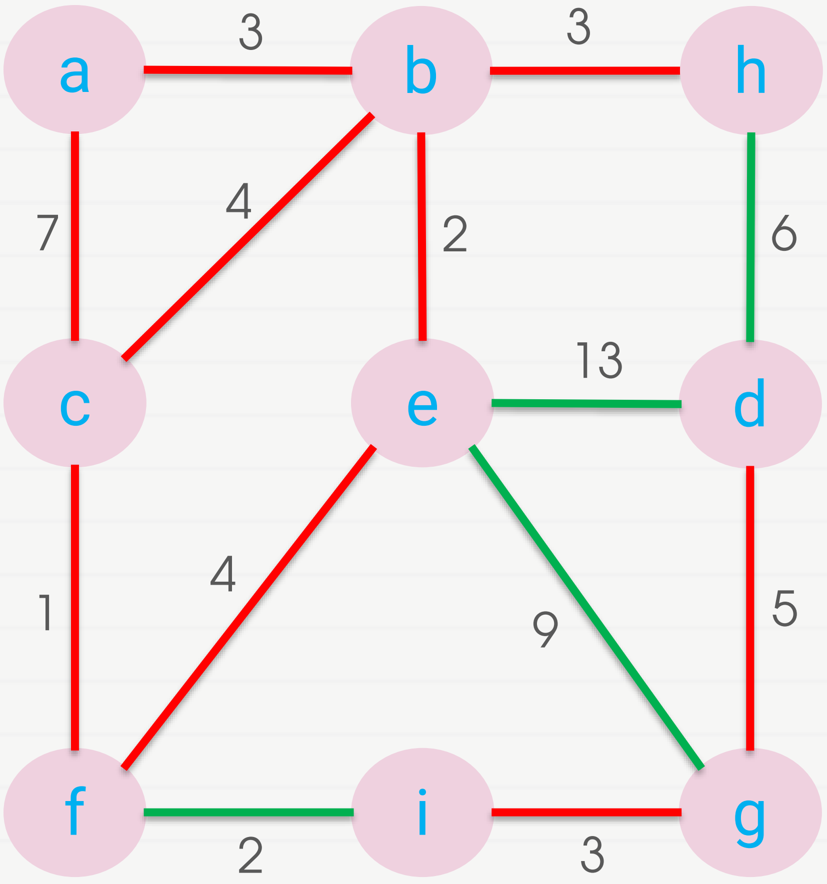
## Đồ thị G



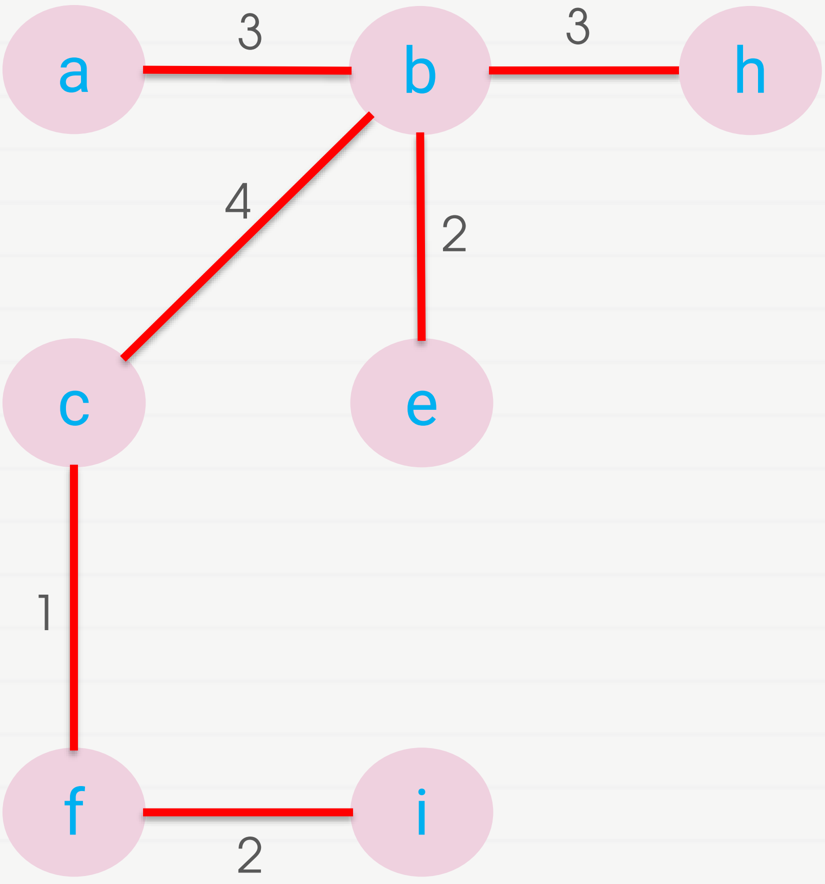

## Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim



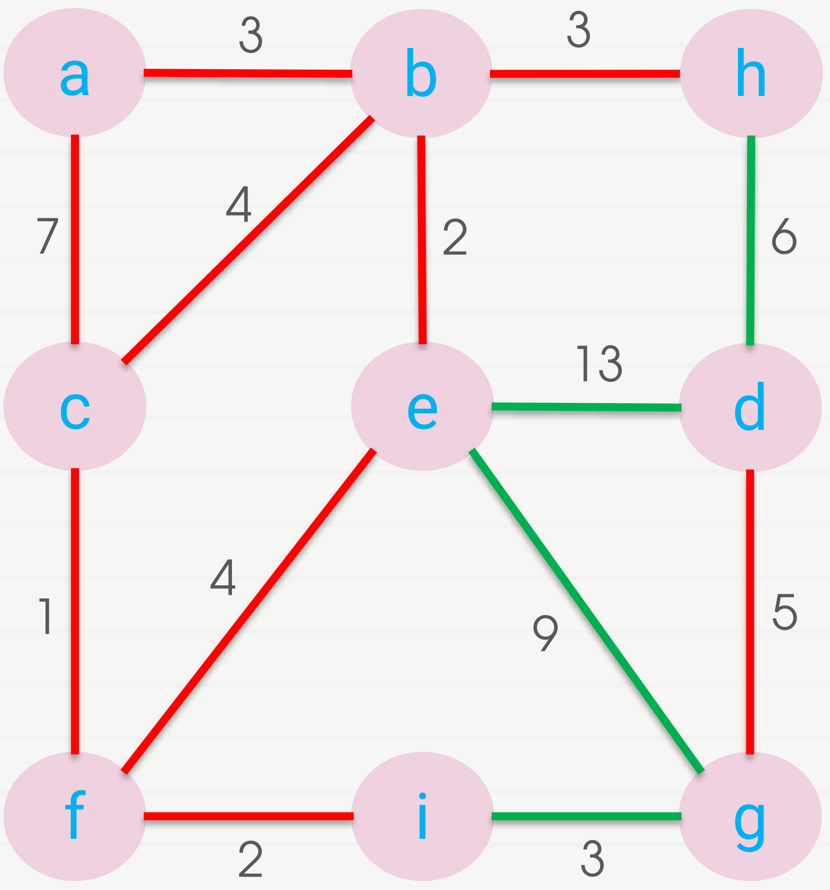
## Đồ thị G



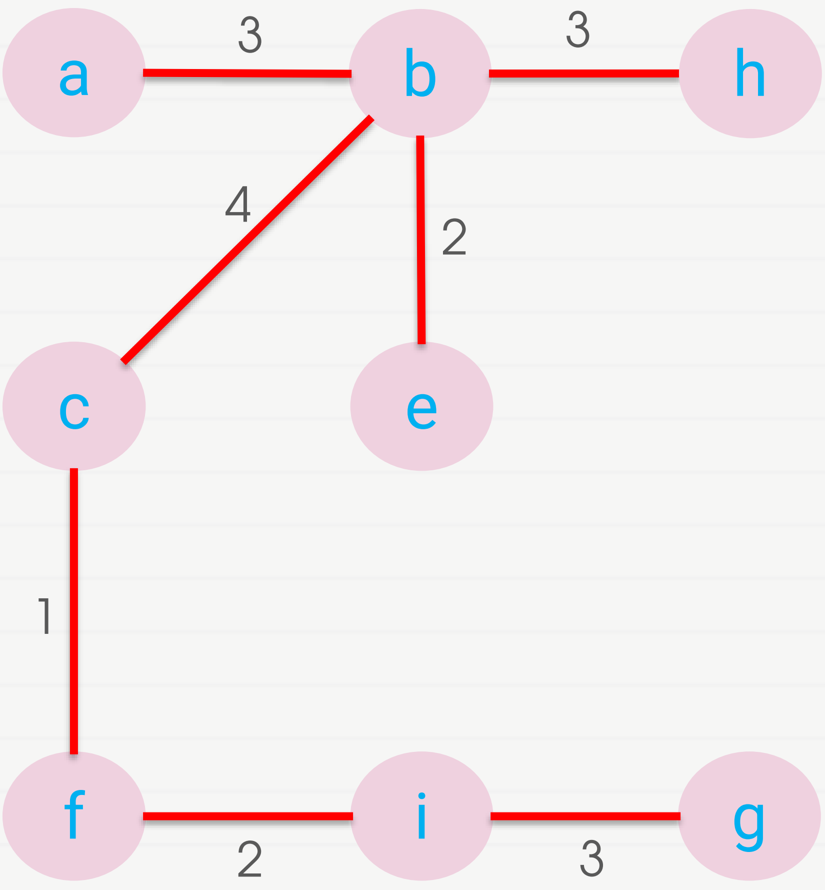

## Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim



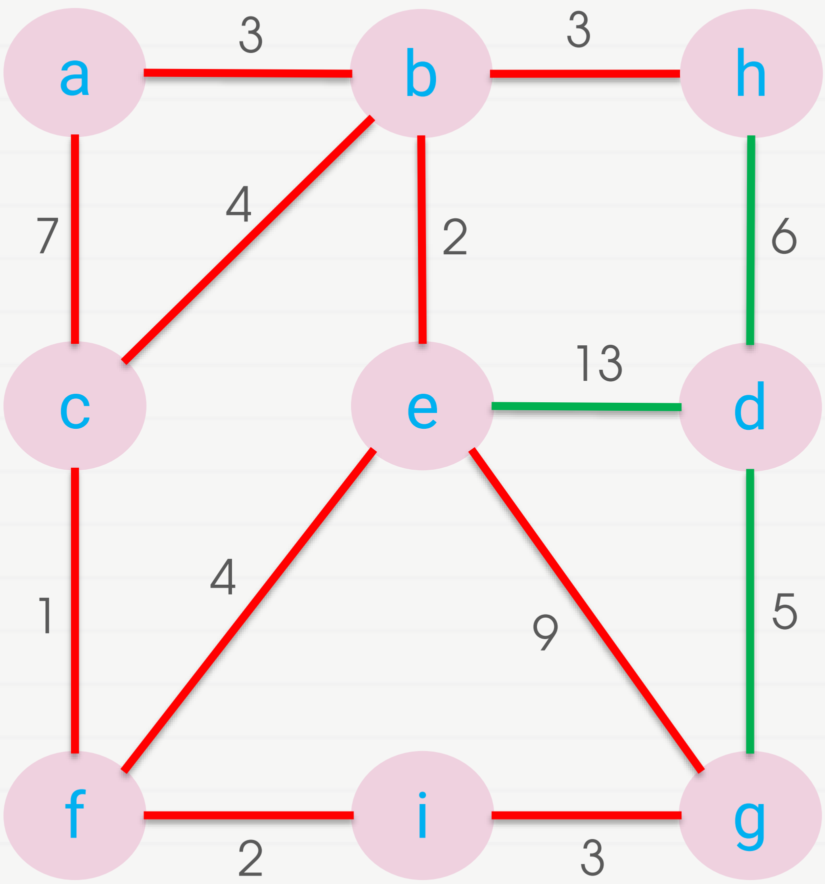
# Đồ thị G



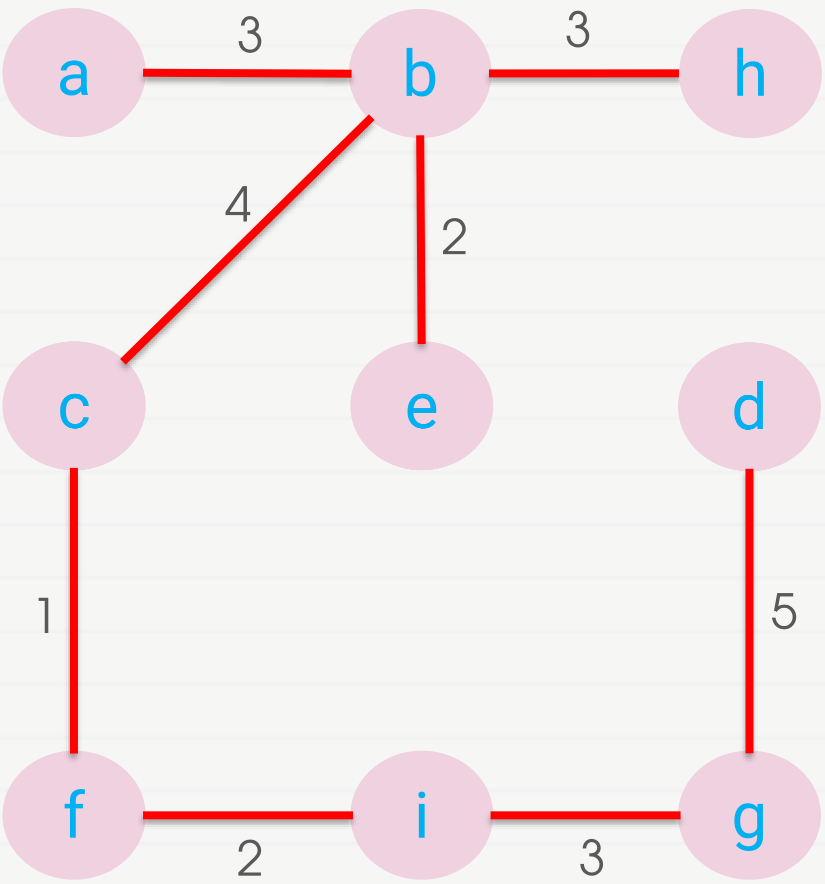

# Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim



## Đồ thị G




## Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Prim



# Bảng miêu tả

| V | E | Trọng số |
|---|---|---|
| a | ab | 3 |
| b | be | 2 |
| e | bh | 3 |
| h | bc | 4 |
| c | cf | 1 |
| f | fi | 2 |
| i | ig | 3 |
| g | gd | 5 |
| d | - | - |

# Bảng miêu tả

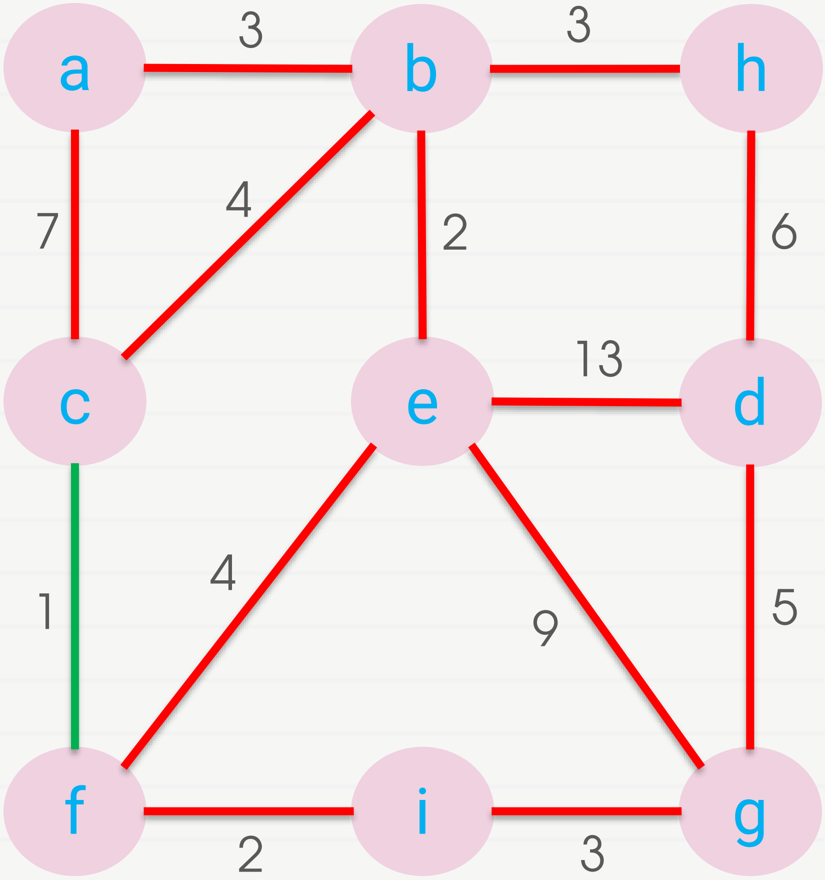
| $V_T$ | $E_T$ | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | ø | 0 | 3a | 7a | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| b | ab | - | - | 4b | ∞ | 2b | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| e | be | - | - | 4b | 13e | - | 4e | 9e | 3b | ∞ |
| h | bh | - | - | 4b | 6h | - | 4e | 9e | - | ∞ |
| c | bc | - | - | - | 6h | - | 1c | 9e | - | ∞ |
| f | cf | - | - | - | 6h | - | - | 9e | - | 2f |
| i | fi | - | - | - | 6h | - | - | 3i | - | - |
| g | ig | - | - | - | 5g | - | - | - | - | - |
| d | gd | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

## Các bước thực hiện thuật toán Kruskal

**Bước 1:** Chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất/lớn nhất đặt vào cây khung T

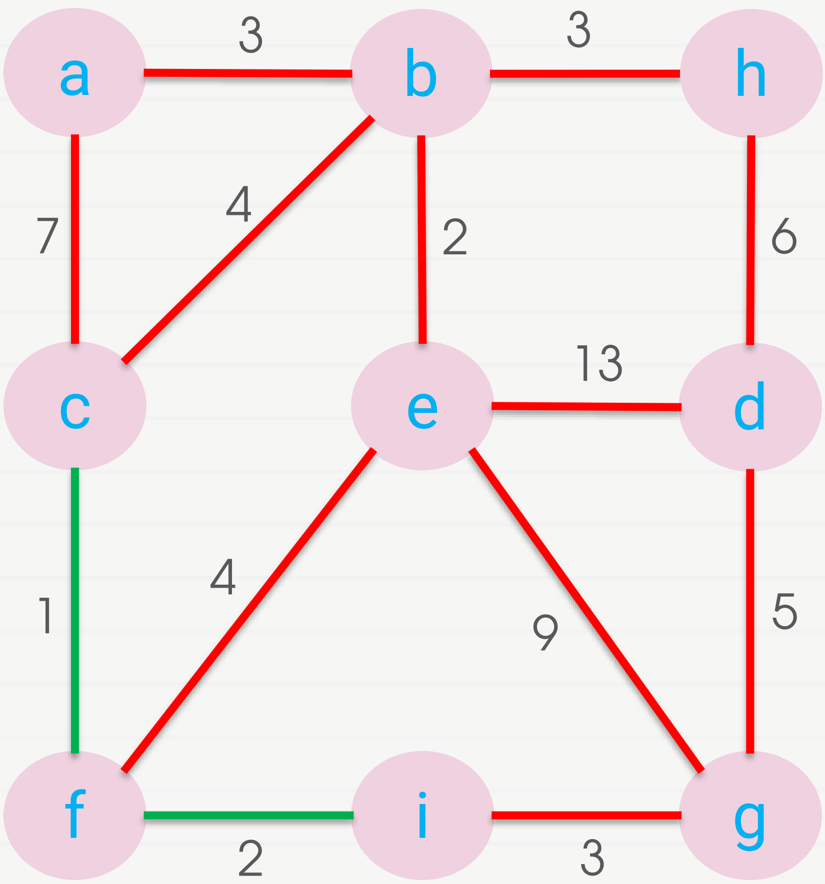
**Bước 2:** Trong khi cây khung T có ít hơn n đỉnh hoặc ít hơn (n – 1) cạnh, ghép vào cây khung T cạnh có trọng số nhỏ nhất/lớn nhất chưa thuộc cây khung T mà không tạo ra chu trình trong T

## Đồ thị G

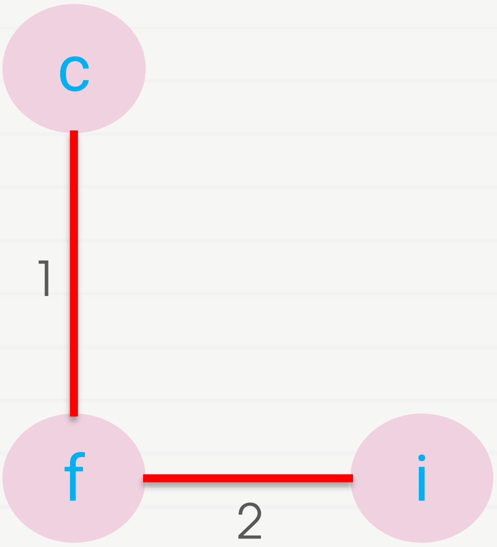



## Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal

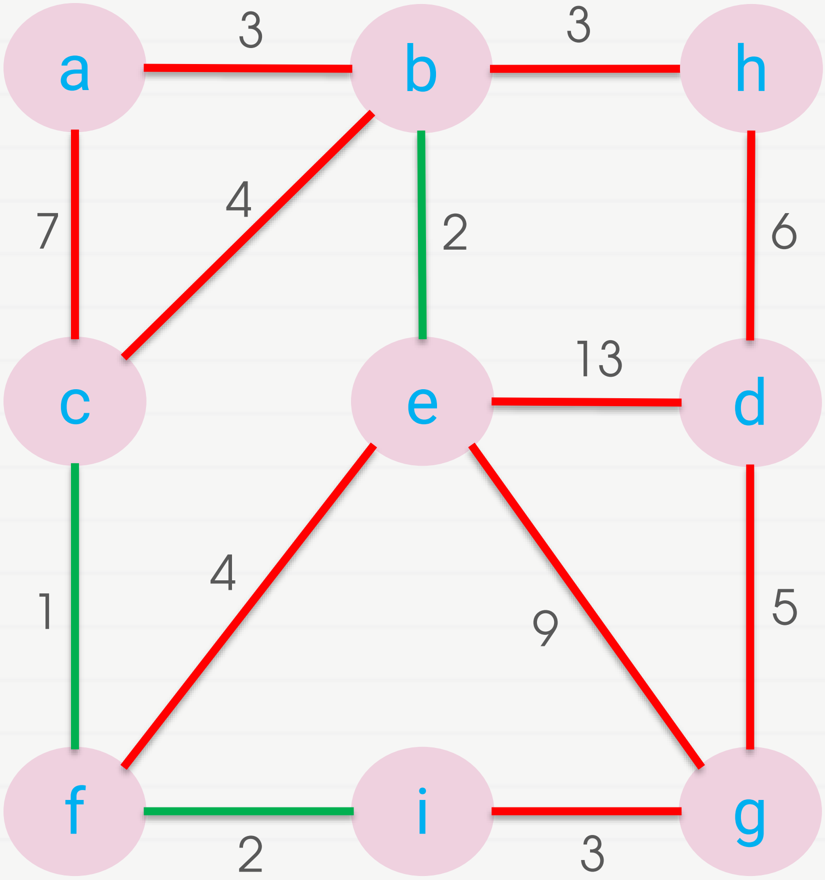
# Đồ thị G



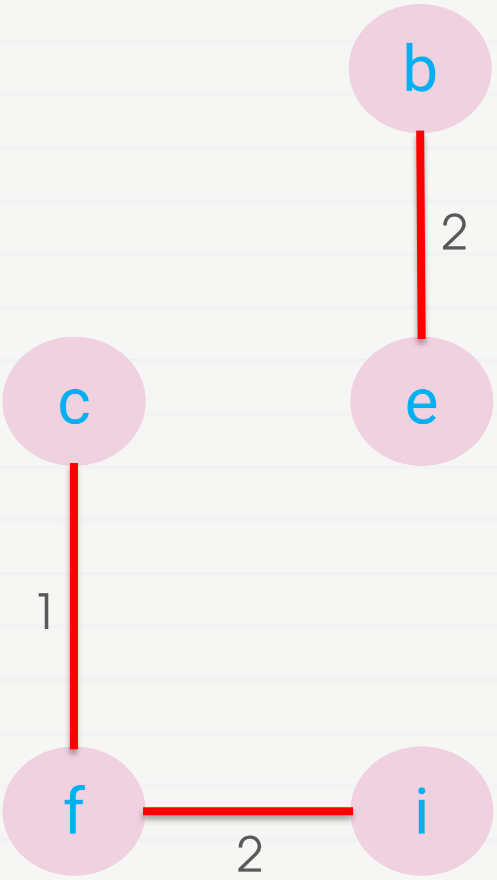

# Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal



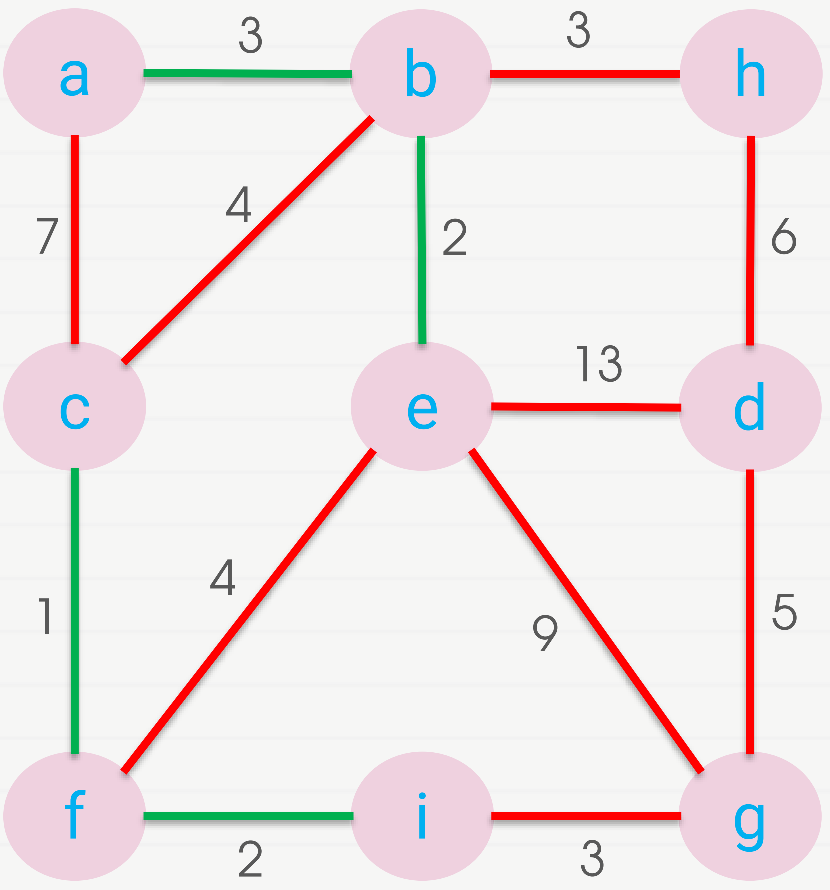
## Đồ thị G



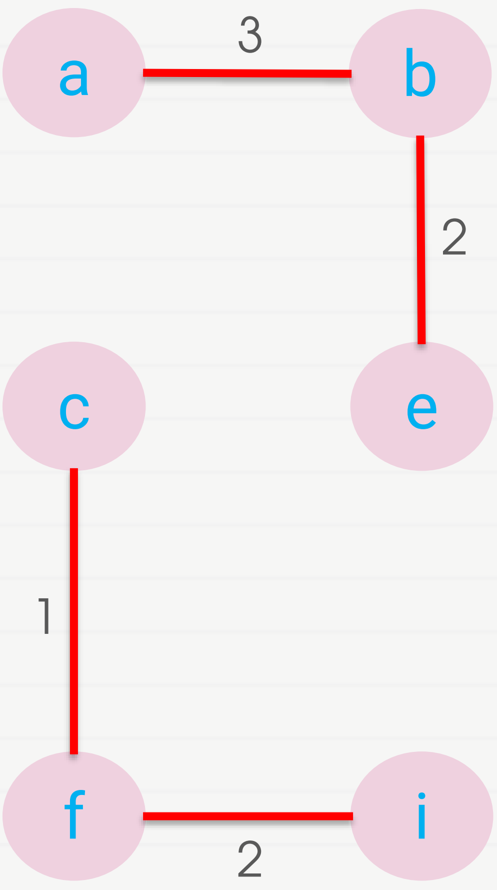

## Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal



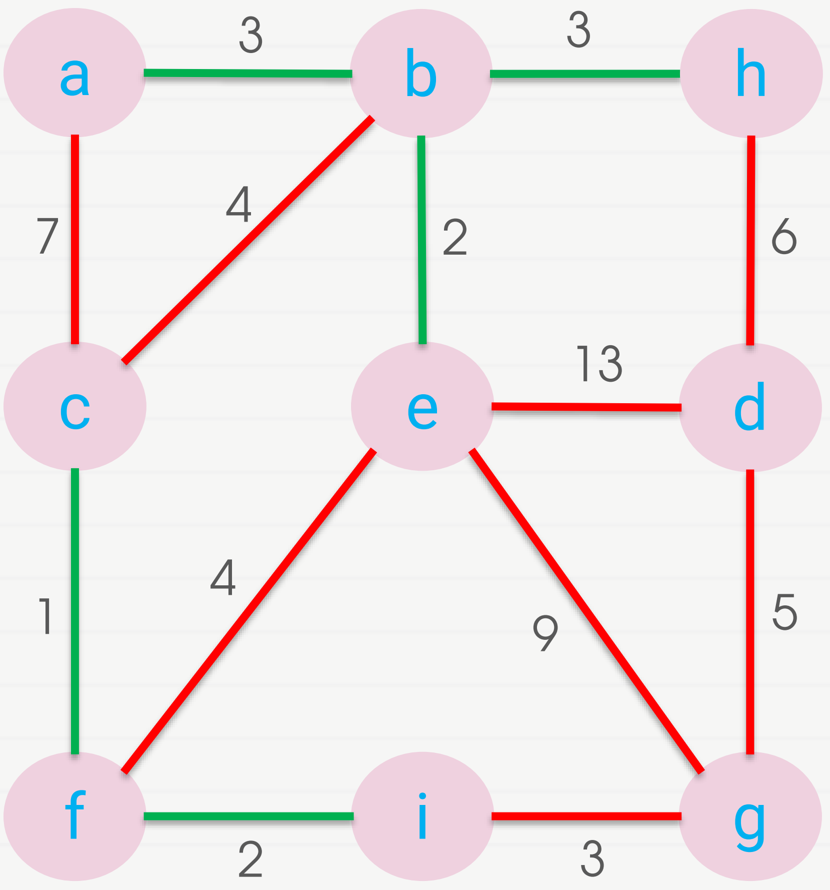
## Đồ thị G



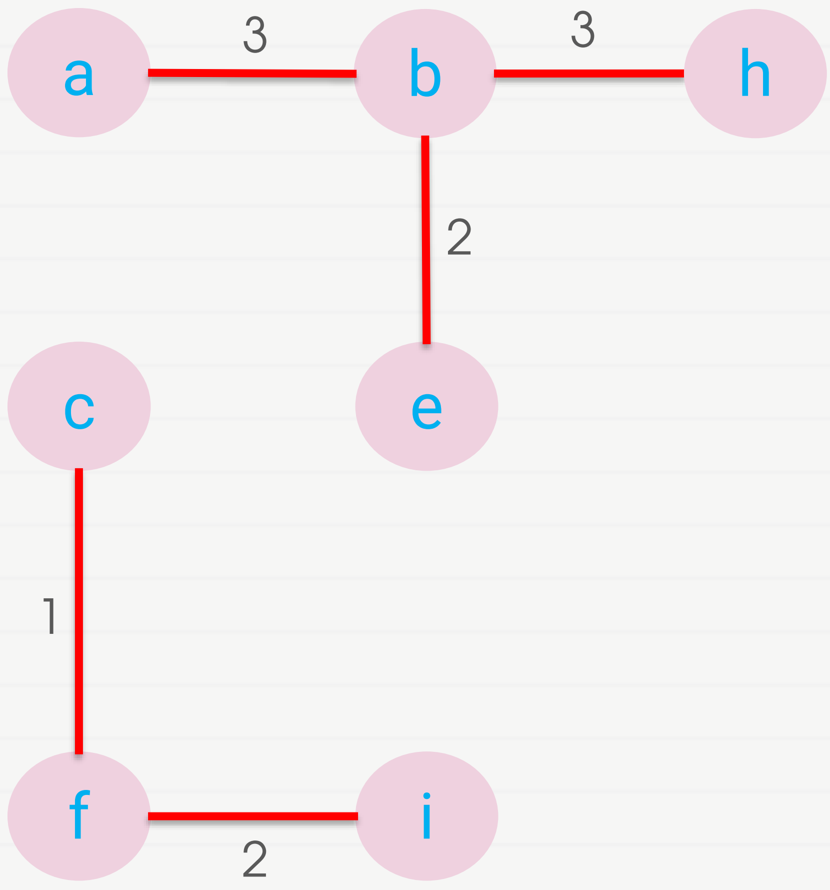

## Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal



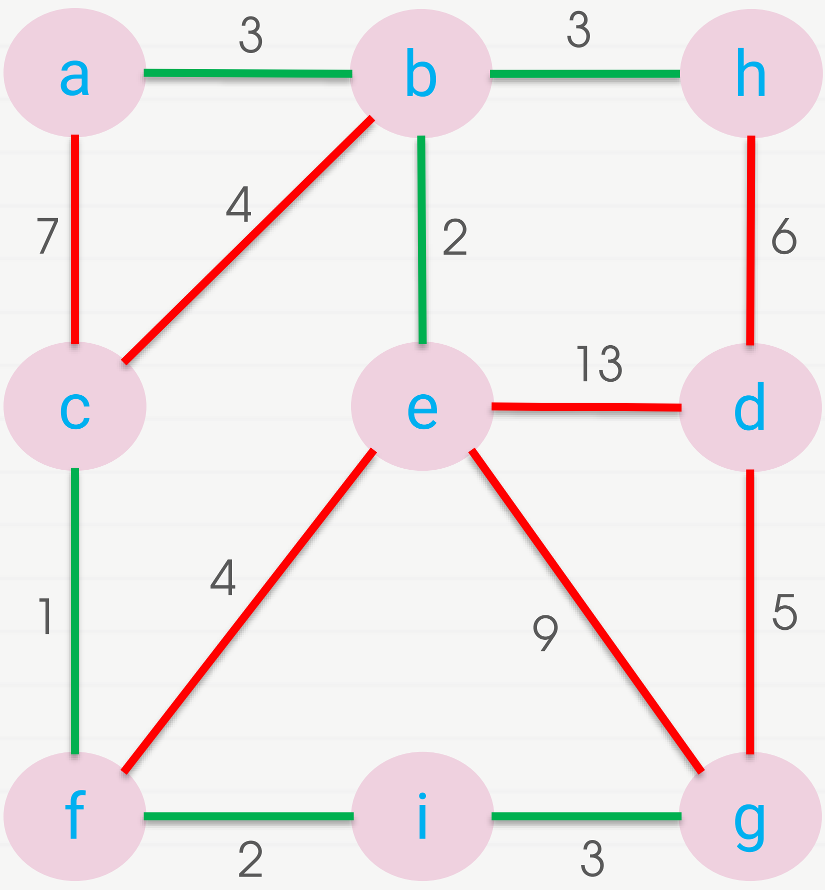
# Đồ thị G



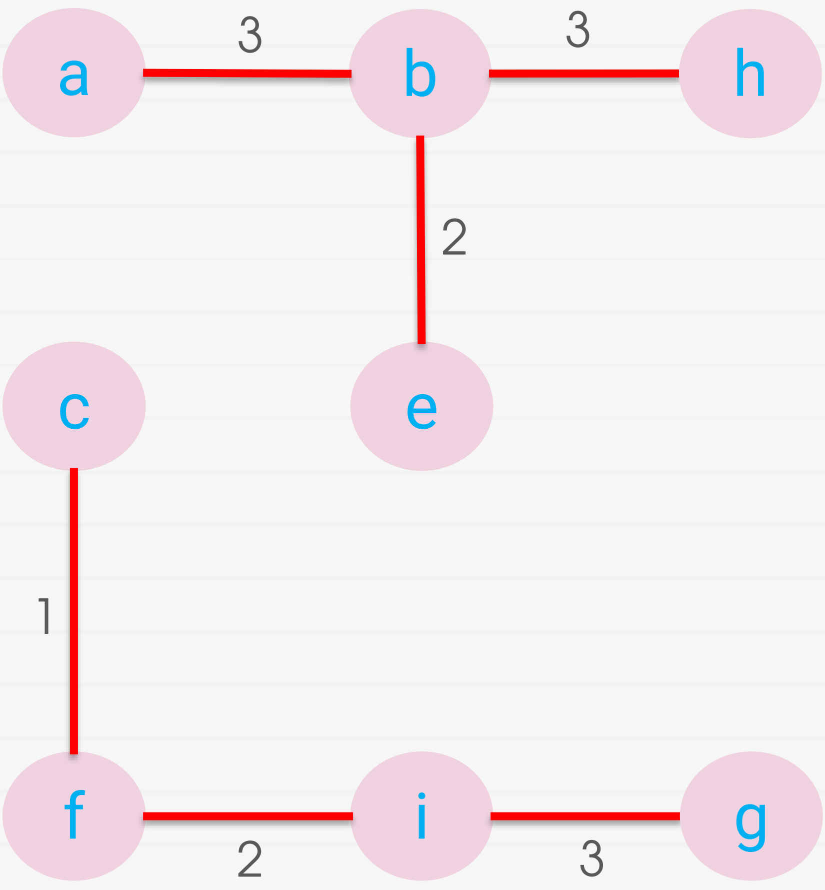

# Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal



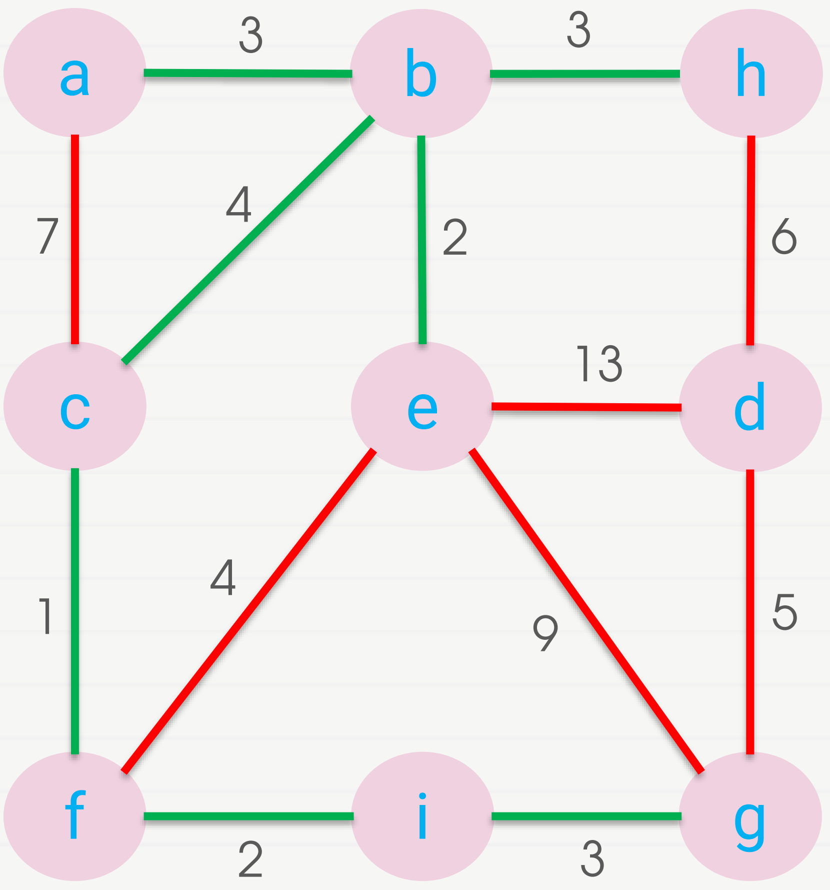
# Đồ thị G



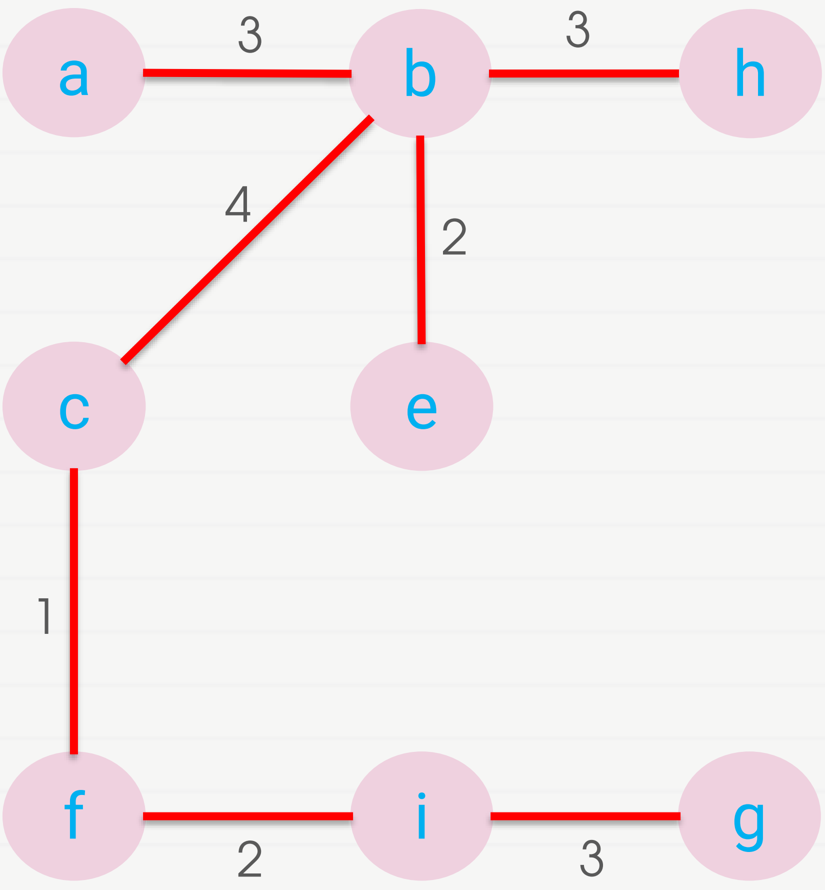

# Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal



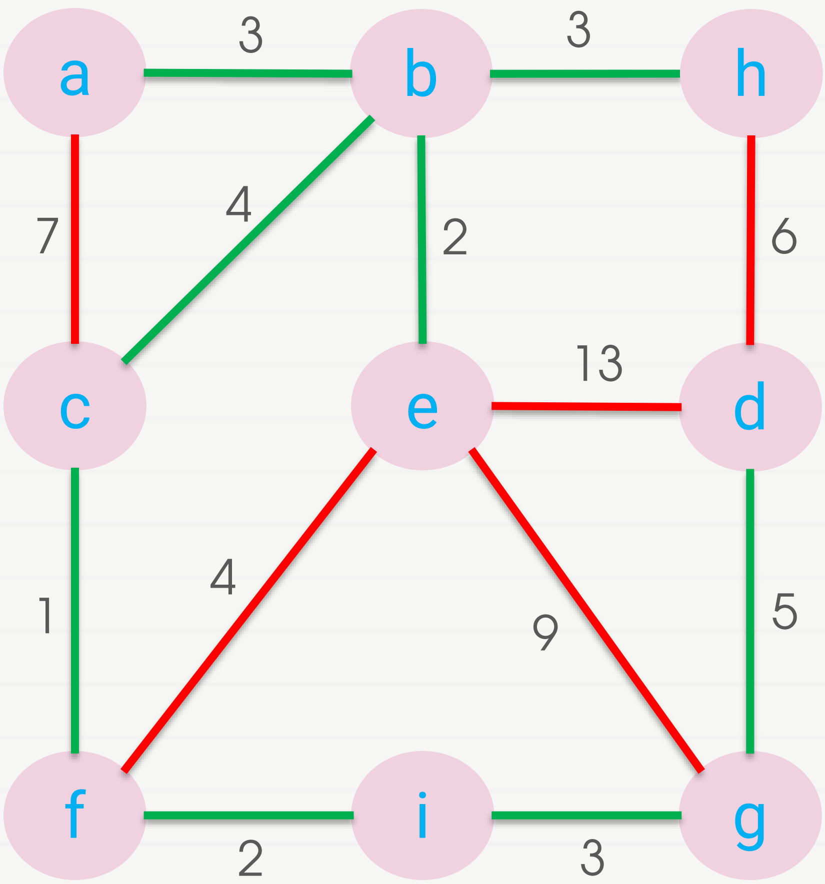
## Đồ thị G



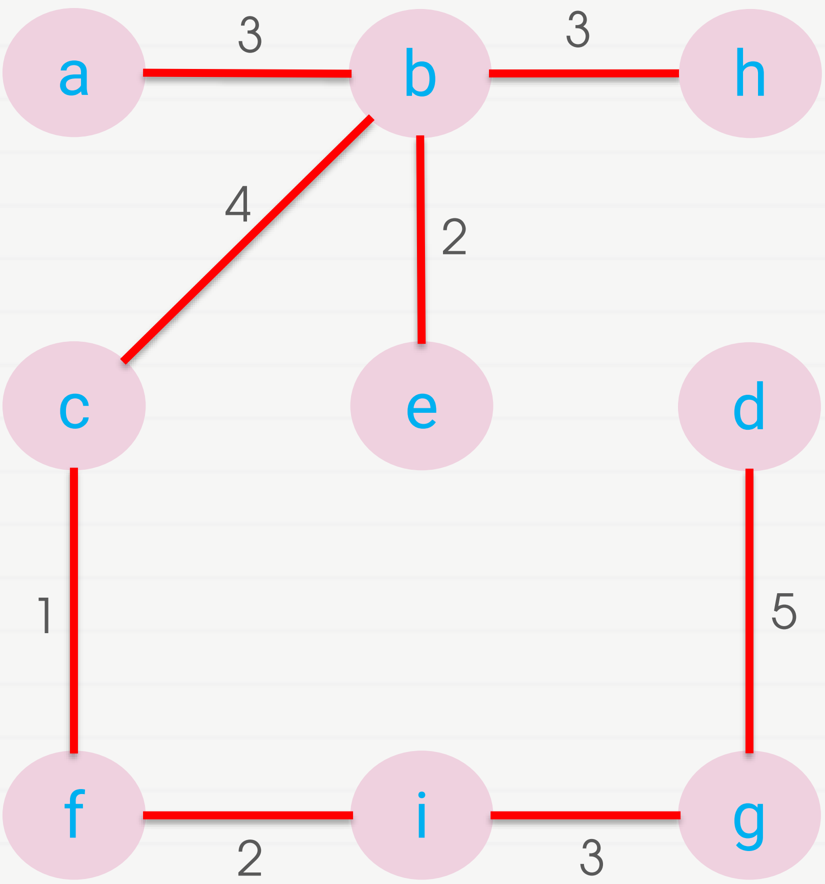

## Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal



## Đồ thị G



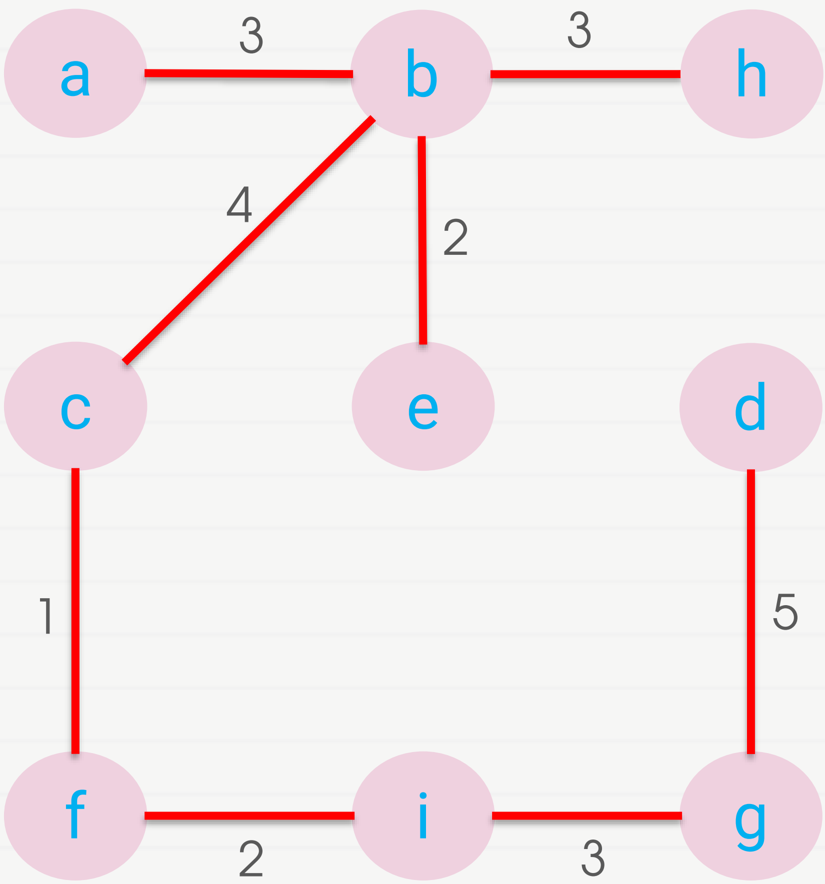

## Tìm cây khung nhỏ nhất bằng thuật toán Kruskal



# Bảng miêu tả

| Bước chọn | E | Trọng số |
|---|---|---|
| 1 | cf | 1 |
| 2 | fi | 2 |
| 3 | be | 2 |
| 4 | ab | 3 |
| 5 | bh | 3 |
| 6 | gi | 3 |
| 7 | bc | 4 |
| 8 | gd | 5 |

# Cây khung nhỏ nhất T

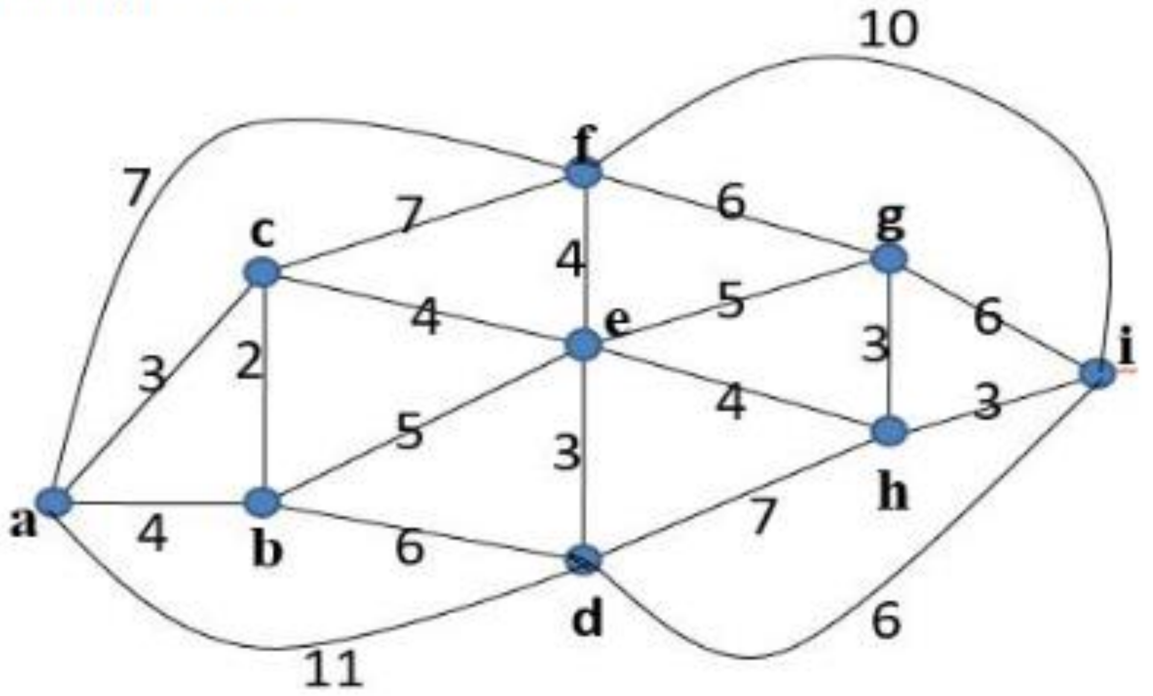



Vậy đồ thị G có cây khung nhỏ nhất T gồm tập cạnh

$E_T$ = **ab** ∪ **be** ∪ **bh** ∪ **bc** ∪ **cf** ∪ **fi** ∪ **ig** ∪ **gd**

**Có độ dài (trọng số)** = 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 5 = 23

**<u>Câu 3</u>.** *(5.0 điểm)* Cho đồ thị G sau:




# Tìm cây khung có trọng số lớn nhất T

# Sử dụng Prim

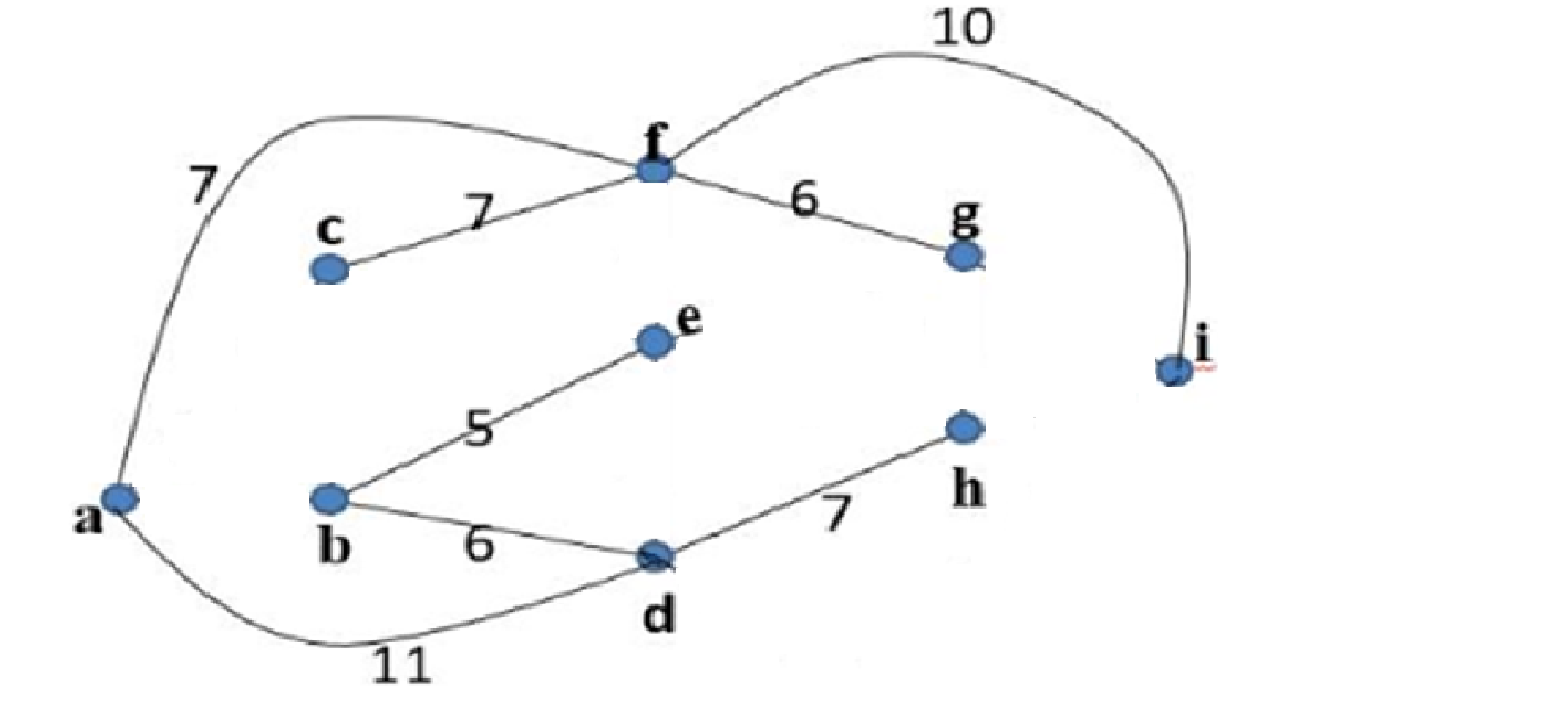
| V | E | Trọng số |
|---|---|---|
| a | ad | 11 |
| d | af | 7 |
| f | fi | 10 |
| i | fc | 7 |
| c | dh | 7 |
| h | db | 6 |
| b | fg | 6 |
| g | be | 5 |
| E | - | - |

# Sử dụng Prim

| $V_T$ | $E_T$ | a | b | c | d | e | f | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | ø | 0 | 4a | 3a | <u>11a</u> | ∞ | 7a | ∞ | ∞ | ∞ |
| d | ad | - | 6b | 3a | - | 3d | <u>7a</u> | ∞ | 7d | 6d |
| f | af | - | 6b | 7f | - | 4f | - | 6f | 7d | <u>10f</u> |
| i | fi | - | 6b | <u>7f</u> | - | 4f | - | 6f | 7d | - |
| c | fc | - | 6d | - | - | 4f | - | 6f | <u>7d</u> | - |
| h | dh | - | <u>6d</u> | - | - | 4f | - | 6f | - | - |
| b | db | - | - | - | - | 5b | - | <u>6f</u> | - | - |
| g | fg | - | - | - | - | <u>5b</u> | - | - | - | - |
| e | be | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

# Sử dụng Kruskal

| Bước chọn | E | Trọng số |
|---|---|---|
| 1 | ad | 11 |
| 2 | fi | 10 |
| 3 | af | 7 |
| 4 | cf | 7 |
| 5 | dh | 7 |
| 6 | fg | 6 |
| 7 | bd | 6 |
| 8 | be | 5 |




**Cây khung có trọng số lớn nhất T**
**Tổng trọng số: 59**