Phép Tính Vi Phân Hàm Một Biến

Nguyễn Thị Hiên

Đại Học Công Nghệ Thông Tin
Đại Học Quốc Gia TP HCM

Ngày 1 tháng 12 năm 2020

Nội Dung

- Khái niệm chuỗi số
- Tính chất của chuỗi số
- Các dấu hiệu hội tụ
- Chuỗi hàm

Chuỗi số

Khái niệm chuỗi số

Định nghĩa và ký hiệu chuỗi số

Cho trước dãy số $(a_n)_{n\geq n_0}$. Tổng hình thức

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \text{ hay là}$$

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là chuỗi số.

Khái niệm chuỗi số

Định nghĩa và ký hiệu chuỗi số

Cho trước dãy số $(a_n)_{n \geq n_0}$. Tổng hình thức

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n, \text{ hay là}$$

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là chuỗi số.
Với mỗi $n \geq n_0$, xét tổng gồm hữu hạn số hạng

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n.$$

Các tổng s_n như trên được gọi là **tổng riêng phần**. Dãy $(s_n)_{n \geq n_0}$ được gọi là dãy tổng riêng phần.

Khái niệm chuỗi số

Ghi chú. Nếu số hạng đầu tiên a_{n_0} đã được hiểu ngầm thì chuỗi trên được ký hiệu ngắn gọn là $\sum a_n$.

Khái niệm chuỗi số

Ghi chú. Nếu số hạng đầu tiên a_{n_0} đã được hiểu ngầm thì chuỗi trên được ký hiệu ngắn gọn là $\sum a_n$.

Chuỗi số hội tụ, tổng chuỗi

Nếu dãy các tổng riêng phần của chuỗi hội tụ về s thì ta nói chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hội tụ và ta gọi s là tổng của chuỗi. Lúc đó ta có thể viết

$$s = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Nếu dãy các tổng riêng phần của chuỗi phân kỳ thì ta nói chuỗi phân kỳ.

Khái niệm chuỗi số

Ghi chú.

- Mặc dù ký hiệu của chuỗi có dấu "$\sum$", có dấu "$+$", nhưng chúng không hề mang ý nghĩa của tổng hay của phép cộng thông thường.

Khái niệm chuỗi số

Ghi chú.

- Mặc dù ký hiệu của chuỗi có dấu "$\sum$", có dấu "$+$", nhưng chúng không hề mang ý nghĩa của tổng hay của phép cộng thông thường.
- Nếu chuỗi hội tụ thì ký hiệu của chuỗi cũng là ký hiệu cho tổng chuỗi.

Khái niệm chuỗi số

Ghi chú.

- Mặc dù ký hiệu của chuỗi có dấu "$\sum$", có dấu "$+$", nhưng chúng không hề mang ý nghĩa của tổng hay của phép cộng thông thường.
- Nếu chuỗi hội tụ thì ký hiệu của chuỗi cũng là ký hiệu cho tổng chuỗi.
- Nếu chuỗi phân kỳ thì "$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$" chỉ đơn thuần là ký hiệu chuỗi, không phải là tổng chuỗi.

Khái niệm chuỗi số

Ghi chú.

- Mặc dù ký hiệu của chuỗi có dấu "$\sum$", có dấu "$+$", nhưng chúng không hề mang ý nghĩa của tổng hay của phép cộng thông thường.
- Nếu chuỗi hội tụ thì ký hiệu của chuỗi cũng là ký hiệu cho tổng chuỗi.
- Nếu chuỗi phân kỳ thì "$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$" chỉ đơn thuần là ký hiệu chuỗi, không phải là tổng chuỗi.
- Hai chuỗi $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ có cùng bản chất, nghĩa là việc thêm hay bỏ vài số hạng đầu của chuỗi sẽ không ảnh hưởng đến tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

Khái niệm chuỗi số

Chuỗi hình học

- Chuỗi hình học là chuỗi có dạng $\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n$ (với $a \neq 0$), nghĩa là mỗi số hạng tổng quát khi nhân với số r sẽ cho số hạng tiếp theo. Số r giống như **công bội** trong cấp số nhân.

Khái niệm chuỗi số

Chuỗi hình học

- Chuỗi hình học là chuỗi có dạng $\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n$ (với $a \neq 0$), nghĩa là mỗi số hạng tổng quát khi nhân với số r sẽ cho số hạng tiếp theo. Số r giống như **công bội** trong cấp số nhân.
- Chuỗi hình học hội tụ khi $|r| < 1$, lúc đó
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n = \frac{ar^{n_0}}{1-r}$$
(tổng chuỗi bằng số hạng đầu chia cho "1 trừ công bội").

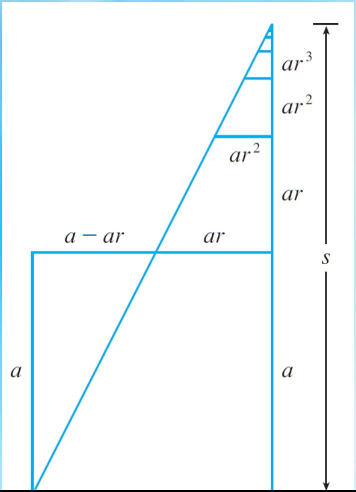
Khái niệm chuỗi số

Chuỗi hình học

- Chuỗi hình học là chuỗi có dạng $\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n$ (với $a \neq 0$), nghĩa là mỗi số hạng tổng quát khi nhân với số r sẽ cho số hạng tiếp theo. Số r giống như **công bội** trong cấp số nhân.
- Chuỗi hình học hội tụ khi $|r| < 1$, lúc đó
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} ar^n = \frac{ar^{n_0}}{1-r}$$
(tổng chuỗi bằng số hạng đầu chia cho "1 trừ công bội").
- Nếu $|r| \geq 1$ thì chuỗi hình học phân kỳ.

Khái niệm chuỗi số

Cái tên chuỗi hình học bắt nguồn từ minh họa sau cho sự hội tụ của $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, với $a > 0$ và $0 < r < 1$:



Với các tam giác được xây dựng như hình bên và s là tổng chuỗi, thì, do tính chất đồng dạng của các tam giác, ta có

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar},$$

vì thế $s = \dfrac{a}{1 - r}$

Khái niệm chuỗi số

Chuỗi điều hòa

- Chuỗi điều hòa là chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Khái niệm chuỗi số

Chuỗi điều hòa

- Chuỗi điều hòa là chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Chuỗi điều hòa thì phân kỳ.

Tính chất của chuỗi số

Mệnh đề 1

- Nếu $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi tổng $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n + b_n)$ là hội tụ và $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$.

Tính chất của chuỗi số

Mệnh đề 1

- Nếu $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi tổng $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n + b_n)$ là hội tụ và $\sum_{n=n_0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$.
- Cho số $\alpha \neq 0$. Chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha a_n$ hội tụ. Trong trường hợp hai chuỗi này hội tụ thì

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

Tính chất của chuỗi số

Ghi chú của mệnh đề 1

- Nếu $\sum a_n$ hội tụ, trong khi $\sum b_n$ phân kỳ, thì chuỗi tổng $\sum(a_n + b_n)$ là phân kỳ, chuỗi $\sum \alpha b_n$ cũng phân kỳ.

Tính chất của chuỗi số

Ghi chú của mệnh đề 1

- Nếu $\sum a_n$ hội tụ, trong khi $\sum b_n$ phân kỳ, thì chuỗi tổng $\sum(a_n + b_n)$ là phân kỳ, chuỗi $\sum \alpha b_n$ cũng phân kỳ.
- Nếu cả hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng phân kỳ thì ta không có kết luận gì về chuỗi tổng $\sum(a_n + b_n)$.

Tính chất của chuỗi số

Điều kiện cần (chưa đủ) để chuỗi hội tụ

Nếu $\sum a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Do đó, nếu dãy (a_n) phân kỳ hoặc có giới hạn khác 0 thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

Tính chất của chuỗi số

Điều kiện cần (chưa đủ) để chuỗi hội tụ

Nếu $\sum a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Do đó, nếu dãy (a_n) phân kỳ hoặc có giới hạn khác 0 thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

Chú ý: Điều kiện $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ chưa đủ để suy ra chuỗi $\sum a_n$ hội tụ. Ví dụ, chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n}$ phân kỳ, mặc dù $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Các dấu hiệu hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh dạng bất đẳng thức

Cho hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ thỏa: $\forall n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq b_n$.

(i) Nếu chuỗi (lớn) $\sum b_n$ hội tụ thì chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ hội tụ.

Các dấu hiệu hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh dạng bất đẳng thức

Cho hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ thỏa: $\forall n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq b_n$.

(i) Nếu chuỗi (lớn) $\sum b_n$ hội tụ thì chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ hội tụ.

(ii) Nếu chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ phân kỳ thì chuỗi (lớn) $\sum b_n$ phân kỳ.

Các dấu hiệu hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh dạng bất đẳng thức

Cho hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ thỏa: $\forall n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq b_n$.

(i) Nếu chuỗi (lớn) $\sum b_n$ hội tụ thì chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ hội tụ.

(ii) Nếu chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ phân kỳ thì chuỗi (lớn) $\sum b_n$ phân kỳ.

Các dấu hiệu hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh dạng bất đẳng thức

Cho hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ thỏa: $\forall n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq b_n$.

(i) Nếu chuỗi (lớn) $\sum b_n$ hội tụ thì chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ hội tụ.

(ii) Nếu chuỗi (nhỏ) $\sum a_n$ phân kỳ thì chuỗi (lớn) $\sum b_n$ phân kỳ.

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Các dấu hiệu hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh dạng lim

Giả sử hai chuỗi $\sum a_n, \sum b_n$ thỏa điều kiện
$\forall n \geq n_0, a_n \geq 0,\ b_n > 0$, đồng thời $K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

1. Nếu K là số thực dương thì hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Các dấu hiệu hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh dạng lim

Giả sử hai chuỗi $\sum a_n, \sum b_n$ thỏa điều kiện
$\forall n \geq n_0, a_n \geq 0,\ b_n > 0$, đồng thời $K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

1. Nếu K là số thực dương thì hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
2. Nếu $K = 0$ ($\sum a_n$ "giống chuỗi nhỏ") và chuỗi $\sum b_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ.

Các dấu hiệu hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh dạng lim

Giả sử hai chuỗi $\sum a_n, \sum b_n$ thỏa điều kiện $\forall n \geq n_0, a_n \geq 0,\ b_n > 0$, đồng thời $K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

1. Nếu K là số thực dương thì hai chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
2. Nếu $K = 0$ ($\sum a_n$ "giống chuỗi nhỏ") và chuỗi $\sum b_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ.
3. Nếu $K = \infty$ ($\sum a_n$ "giống chuỗi lớn") và chuỗi $\sum a_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum b_n$ hội tụ.

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

1. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{n^2-4n-5}{3n^3+5n-7}$.

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

1. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{n^2-4n-5}{3n^3+5n-7}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

1. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{n^2-4n-5}{3n^3+5n-7}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{4^n}\right)$.

Tiêu chuẩn tích phân

Tiêu chuẩn tích phân

Cho $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa $f(x) \geq 0$, $a_k = f(k)$ là hàm giảm. Khi đó $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ hội tụ.

Hơn nữa, khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f(k)$ hội tụ, đặt $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ và $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, ta có

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq S - S_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Tiêu chuẩn tích phân

Ví dụ. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ hội tụ $\Leftrightarrow p > 1$.

Tiêu chuẩn tích phân

Ví dụ. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ hội tụ $\Leftrightarrow p > 1$.

Ví dụ. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi (tùy theo tham số).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$.

Các dấu hiệu hội tụ

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh bất đẳng thức và kỹ thuật tương tự như chứng minh về chuỗi điều hòa, người ta chứng minh được kết quả sau

Các dấu hiệu hội tụ

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh bất đẳng thức và kỹ thuật tương tự như chứng minh về chuỗi điều hòa, người ta chứng minh được kết quả sau

Chuỗi Dirichlet

- Cho số thực α. Chuỗi $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ được gọi là chuỗi Dirichlet (nếu $\alpha = 1$ thì nó là chuỗi điều hòa).

Các dấu hiệu hội tụ

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh bất đẳng thức và kỹ thuật tương tự như chứng minh về chuỗi điều hòa, người ta chứng minh được kết quả sau

Chuỗi Dirichlet

- Cho số thực α. Chuỗi $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ được gọi là chuỗi Dirichlet (nếu $\alpha = 1$ thì nó là chuỗi điều hòa).
- Chuỗi Dirichlet hội tụ khi $\alpha > 1$; phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

Các dấu hiệu hội tụ

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh bất đẳng thức và kỹ thuật tương tự như chứng minh về chuỗi điều hòa, người ta chứng minh được kết quả sau

Chuỗi Dirichlet

- Cho số thực α. Chuỗi $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ được gọi là chuỗi Dirichlet (nếu $\alpha = 1$ thì nó là chuỗi điều hòa).
- Chuỗi Dirichlet hội tụ khi $\alpha > 1$; phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

Các dấu hiệu hội tụ

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh bất đẳng thức và kỹ thuật tương tự như chứng minh về chuỗi điều hòa, người ta chứng minh được kết quả sau

Chuỗi Dirichlet

- Cho số thực α. Chuỗi $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ được gọi là chuỗi Dirichlet (nếu $\alpha = 1$ thì nó là chuỗi điều hòa).
- Chuỗi Dirichlet hội tụ khi $\alpha > 1$; phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

Chú ý: trong thực hành khảo sát sự hội tụ của chuỗi, người ta thường so sánh với chuỗi hình học và chuỗi Dirichlet.

Các dấu hiệu hội tụ

Chuỗi đan dấu

Cho dãy số (a_n) sao cho $\forall n, a_n \geq 0$. Khi đó chuỗi $\sum(-1)^n a_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} a_n$ được gọi là chuỗi đan dấu, vì các số hạng tổng quát được sắp theo thứ tự âm dương xen kẽ.

Các dấu hiệu hội tụ

Chuỗi đan dấu

Cho dãy số (a_n) sao cho $\forall n, a_n \geq 0$. Khi đó chuỗi $\sum(-1)^n a_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} a_n$ được gọi là chuỗi đan dấu, vì các số hạng tổng quát được sắp theo thứ tự âm dương xen kẽ.

Chuỗi Leibniz

Chuỗi đan dấu $\sum(-1)^n a_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} a_n$ $(\forall n, a_n > 0)$ được gọi là chuỗi Leibniz, nếu:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. Dãy (a_n) là dãy (dương) giảm.

Các dấu hiệu hội tụ

Chuỗi đan dấu

Cho dãy số (a_n) sao cho $\forall n, a_n \geq 0$. Khi đó chuỗi $\sum(-1)^n a_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} a_n$ được gọi là chuỗi đan dấu, vì các số hạng tổng quát được sắp theo thứ tự âm dương xen kẽ.

Chuỗi Leibniz

Chuỗi đan dấu $\sum(-1)^n a_n$ hoặc $\sum(-1)^{n-1} a_n$ $(\forall n, a_n > 0)$ được gọi là chuỗi Leibniz, nếu:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. Dãy (a_n) là dãy (dương) giảm.

Định lý (Leibniz)

Chuỗi Leibniz hội tụ và có tổng s thỏa $|s| \leq a$, trong đó a là giá trị tuyệt đối của số hạng đầu tiên.

Các dấu hiệu hội tụ

Hội tụ tuyệt đối

Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ.

Các dấu hiệu hội tụ

Hội tụ tuyệt đối

Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ.

Hội tụ có điều kiện

Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là **hội tụ có điều kiện** khi chuỗi này hội tụ, nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Các dấu hiệu hội tụ

Hội tụ tuyệt đối

Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ.

Hội tụ có điều kiện

Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là **hội tụ có điều kiện** khi chuỗi này hội tụ, nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Định lý

Nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ (hội tụ tuyệt đối kéo theo hội tụ).

Các dấu hiệu hội tụ

Hội tụ tuyệt đối

Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ.

Hội tụ có điều kiện

Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là **hội tụ có điều kiện** khi chuỗi này hội tụ, nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Định lý

Nếu chuỗi $\sum |a_n|$ hội tụ, thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ (hội tụ tuyệt đối kéo theo hội tụ).

Ví dụ.

- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ hội tụ tuyệt đối.
- Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ có điều kiện.

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn d'Alembert)

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn d'Alembert)

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn d'Alembert)

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.
3. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ thì, nói chung, ta không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum a_n$.

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn Cô-si)

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn Cô-si)

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.

Các dấu hiệu hội tụ

Định lý (Tiêu chuẩn Cô-si)

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$ thì chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối (do đó cũng hội tụ).
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, thì chuỗi $\sum a_n$ phân kỳ.
3. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ thì, nói chung, ta không có kết luận gì về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi $\sum a_n$.

Các dấu hiệu hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{(n+1)}.(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{3.3^n.(n+1).n!}{(n+1)^n.(n+1)} = \frac{3.3^n.n!}{(n+1)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3.3^n.n!}{(n+1)^n}.\frac{n^n}{3^n.n!} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{e} > 1.$$

Vậy chuỗi phân kỳ theo tiêu chuẩn d'Alembert.

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với

$$a_n = n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n .$$

Các dấu hiệu hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với

$$a_n = n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3} \right)^n .$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+3} . \sqrt[n]{n^5} = \frac{3}{4} < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Cô si.

Các dấu hiệu hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với

$$a_n = \frac{2.5.8.\ldots.(3n-1)}{1.6.11.\ldots.(5n-4)}$$

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ với

$$a_n = \frac{2.5.8.\ldots.(3n-1)}{1.6.11.\ldots.(5n-4)}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2.5.8.\ldots.(3(n+1)-1)}{1.6.11.\ldots.(5(n+1)-4)} = \frac{2.5.8.\ldots.(3n+2)}{1.6.11.\ldots.(5n+1)} \\
&= \frac{2.5.8.\ldots.(3n-1)(3n+2)}{1.6.11.\ldots.(5n-4)(5n+1)} = a_n.\frac{(3n+2)}{(5n+1)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)}{(5n+1)} = \frac{3}{5} < 1$$

Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn d'Alembert.

Các dấu hiệu hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)\cos 3n}{\sqrt[3]{n^7+n+1}}$$

Các dấu hiệu hội tụ

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)\cos 3n}{\sqrt[3]{n^7+n+1}}$$

Chuỗi trên có dấu tùy ý. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ là chuỗi dương

$$|a_n| = \frac{(2n+3)|\cos 3n|}{\sqrt[3]{n^7+n+1}} \leq \frac{(2n+3)}{\sqrt[3]{n^7+n+1}} \sim \frac{2n}{n^{7/3}} = \frac{2}{n^{4/3}}$$

Vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối (ký hiệu $\sim$ có nghĩa là hai dãy số hạng tổng quát trên tạo nên hai chuỗi cùng bản chất).

Chuỗi hàm

Định nghĩa

Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ các hàm số thực có cùng một miền xác định. Với một giá trị x trong miền xác định ta có một dãy số thực $(u_n(x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$ và một chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
Nếu với mỗi x chuỗi số hội tụ về một số thực thì ta xét hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi chuỗi hàm, kí hiệu

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Chuỗi hàm

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)(x) = (u_1+u_2+\cdots)(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Một chuỗi hàm là tổng của một dãy hàm.
Giá trị của một chuỗi hàm tại một điểm là một chuỗi số.

Ví dụ

Cho chuỗi hàm

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Định nghĩa lượng vô cùng bé (VCB)

Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé, viết tắt là VCB tại x_0 nếu $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

Định nghĩa lượng vô cùng bé (VCB)

Cho $\alpha(x), \beta(x)$ là hai VCB tại x_0, và $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m$

- nếu $m = 0$ thì $\alpha(x)$ được gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ tại x_0, kí hiệu $\alpha(x) = \mathbf{o}(\beta(x))$ tại x_0,
- nếu $m \neq 0$ thì $\alpha(x), \beta(x)$ được gọi là VCB cùng cấp tại x_0,
- nếu $m = 1$ $\alpha(x), \beta(X)$ được gọi là hai VCB tương đương tại x_0, kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ tại x_0.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Định nghĩa lượng vô cùng lớn (VCL)

Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng lớn, viết tắt là VCL tại x_0 nếu hàm số $\frac{1}{\alpha(x)}$ là VCB tại x_0.

Định nghĩa lượng vô cùng lớn (VCL)

Cho $\alpha(x), \beta(x)$ là hai VCL tại x_0, và $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m$

- nếu $m = \infty$ thì $\alpha(x)$ được gọi là VCL bậc cao hơn $\beta(x)$ tại x_0, kí hiệu $\alpha(x) = \mathbf{O}(\beta(x))$ tại x_0,
- nếu $m \neq 0$ thì $\alpha(x), \beta(x)$ được gọi là VCL cùng cấp tại x_0,
- nếu $m = 1$ $\alpha(x), \beta(X)$ được gọi là hai VCL tương đương tại x_0, kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ tại x_0.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Hệ quả

Nếu $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ và $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ tại x_0 thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Ví dụ

Tìm giới hạn

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \sin 5x}.$$

Tính chất của lượng VCB

Khi $\varepsilon \to 0$ thì

- $\mathbf{o}(\varepsilon) \pm \mathbf{o}(\varepsilon) = \mathbf{o}(\varepsilon)$
- Với hằng số k bất kỳ, $k\mathbf{o}(\varepsilon) = \mathbf{o}(\varepsilon)$
- $\mathbf{o}(\varepsilon_1).\mathbf{o}(\varepsilon_2) = \mathbf{o}(\varepsilon_1.\varepsilon_2)$, khi $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \to 0$.

Ví dụ

Cho $\alpha \neq \beta$, tìm giới hạn

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin(\alpha x) - \sin(\beta x)}.$$

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Đa thức Taylor

Giả sử f là hàm số có đạo hàm đến cấp n tại điểm a. Khi đó, đa thức Taylor bậc n xung quanh điểm a của f được định nghĩa là

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

tức là tổng riêng phần bậc n của Khai triển Taylor.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Đa thức Taylor

Giả sử f là hàm số có đạo hàm đến cấp n tại điểm a. Khi đó, đa thức Taylor bậc n xung quanh điểm a của f được định nghĩa là

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

tức là tổng riêng phần bậc n của Khai triển Taylor.
Lượng chênh lệch $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ được gọi là **phần dư** của Khai triển Taylor của f.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Công thức Taylor với dư số Peano.

Giả sử f là hàm số có đạo hàm đến cấp $n-1$ trong lân cận của điểm a và có đạo hàm đến cấp n tại a. Lúc đó

1. Đa thức **xấp xỉ tốt nhất** của f đến bậc n xung quanh điểm a là đa thức Taylor T_n, theo nghĩa

$$f(x) = T_n(x) + \mathbf{o}\big((x-a)^n\big), \text{ hay là}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathbf{o}\big((x-a)^n\big).$$

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Công thức Taylor với dư số Peano.

Giả sử f là hàm số có đạo hàm đến cấp $n-1$ trong lân cận của điểm a và có đạo hàm đến cấp n tại a. Lúc đó

1. Đa thức **xấp xỉ tốt nhất** của f đến bậc n xung quanh điểm a là đa thức Taylor T_n, theo nghĩa

$$f(x) = T_n(x) + \mathbf{o}\big((x-a)^n\big), \text{ hay là}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathbf{o}\big((x-a)^n\big).$$

2. Ngược lại, nếu P_n là đa thức bậc n xấp xỉ tốt nhất cho f xung quanh điểm a, theo nghĩa

   $f(x) - P_n(x) = \mathbf{o}\big((x-a)^n\big)$,

   thì P_n là đa thức Taylor của f

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Định lý trên muốn nói rằng **đa thức xấp xỉ tối hảo của** f **đến bậc** n **xung quanh điểm** a là duy nhất.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Định lý trên muốn nói rằng **đa thức xấp xỉ tối hảo của** f **đến bậc** n **xung quanh điểm** a là duy nhất.

Sở dĩ có thuật ngữ "*xấp xỉ tối hảo (tốt nhất)*" là vì lượng chênh lệch giữa f và đa thức Taylor T_n, tức là dư số R_n, là lượng VCB bậc cao hơn $(x-a)^n$ khi $x \to a$.

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Định lý trên muốn nói rằng **đa thức xấp xỉ tối hảo của f đến bậc n xung quanh điểm** a là duy nhất.

Sở dĩ có thuật ngữ "*xấp xỉ tối hảo (tốt nhất)*" là vì lượng chênh lệch giữa f và đa thức Taylor T_n, tức là dư số R_n, là lượng VCB bậc cao hơn $(x-a)^n$ khi $x \to a$.

Tuy nhiên, khi thực hiện phép xấp xỉ xung quanh điểm a, $f(x) \approx T_n(x)$, với dư số Peano có dạng $R_n(x) = \mathbf{o}\big((x-a)^n\big)$, thì ta không đánh giá được độ chính xác phép xấp xỉ, nghĩa là không biết độ lớn sai số $|R_n(x)|$ nhỏ đến mức nào. Do đó, ta có công thức Taylor với dư số Lagrange sau đây

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Chuỗi Taylor, Mac-Laurin

Chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \quad (1)$$

$$+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \quad (2)$$

được gọi là chuỗi Taylor của hàm f tại a (Khai triển Taylor của hàm f tại a).
Trường hợp $a = 0$, chuỗi Taylor này được gọi là chuỗi Maclaurin:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Vài công thức Mac-Laurin cơ bản I

Sau đây là vài công thức Mac-Laurin của một số hàm cơ bản, dạng dư số Peano

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \mathbf{o}(x^n)$
2. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathbf{o}(x^n)$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathbf{o}(x^{2n+2})$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{o}(x^{2n+1})$
5. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathbf{o}(x^{2n+2})$
6. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathbf{o}(x^{2n+1})$

Vài công thức Mac-Laurin cơ bản II

7. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + \mathbf{o}(x^n)$
8. $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathbf{o}(x^{2n+2})$

Công thức Taylor, Mac-Laurin

Các ứng dụng của công thức Taylor, Mac-Laurin

1. Xấp xỉ hàm f bởi một đa thức bậc n.
2. Tìm đạo hàm cấp cao của f tại điểm a
3. Tìm giới hạn của hàm số.
4. Tính gần đúng với độ chính xác cho trước.

Công thức Taylor, Mac-Laurin

Ví dụ

1. Viết công Mac-Laurin đến bậc n của hàm số f_1 và f_2 định bởi $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$ và $f_2(x) = \frac{1}{1+x}$.
2. Viết công thức Mac-Laurin đến bậc 3 của hàm f định bởi $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$.
3. Tính $f'''(0)$.

Công thức Taylor, Mac-Laurin

Ví dụ

1. Viết công Mac-Laurin đến bậc n của hàm số f_1 và f_2 định bởi $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$ và $f_2(x) = \frac{1}{1+x}$.
2. Viết công thức Mac-Laurin đến bậc 3 của hàm f định bởi $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$.
3. Tính $f'''(0)$.

GIẢI

1. Hai hàm f_1 và f_2 thỏa các giả thiết của công thức Mac-Laurin (công thức Taylor xung quanh điểm $a = 0$). Do đó

$$f_1(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathbf{o}(x^n),$$
$$f_2(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathbf{o}(x^n).$$

Công thức Taylor, Mac-Laurin

2. Tách phân thức và áp dụng khai triển của f_1 ở trên, ta có

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x/3}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \mathbf{o}(x^3)\right]$$

$$- \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \mathbf{o}(x^3)\right]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5x}{36} + \frac{19x^2}{216} + \frac{65x^3}{1296} + \mathbf{o}(x^3).$$

3. Theo hệ số của x^3 ở trên thì $\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{65}{1296}$. Suy ra $f'''(0) = \frac{65}{216}$.

Công thức Taylor, Mac-Laurin

Ví dụ

Tìm khai triển Maclaurin đến cấp 5 của hàm f định bởi $f(x) = e^{2x-x^2}$.

GIẢI. Lưu ý rằng $\mathbf{o}((2x-x^2)^k) = \mathbf{o}(x^k)$. Áp dụng công thức Mac-Laurin cơ bản, ta có

$$
\begin{aligned}
e^{2x-x^2} &= 1 + (2x - x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} \\
&\quad + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} + \mathbf{o}(x^5).
\end{aligned}
$$

Khi khai triển các nhị thức $(2x-x^2)^k$, ta chỉ giữ lại hạng tử chứa bậc không vượt quá 5, các hạng tử còn lại có dạng $\mathbf{o}(x^5)$, sau đó rút gọn, sắp xếp các số hạng theo bậc tăng dần, ta được

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \mathbf{o}(x^5)$$

Công thức Taylor, Mac-Laurin

Ví dụ

Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - sinx}{x^3}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \mathbf{o}(x^3) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathbf{o}(x^3)$$

$$\Rightarrow \tan x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{3} + \mathbf{o}(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^3)\right)$$

$$\Rightarrow \tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + \mathbf{o}(x^3)$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - sinx}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + \mathbf{o}(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + \lim_{x \to 0} \frac{\mathbf{o}(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} + 0.$$

Chuỗi lũy thừa

Định nghĩa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi mà các số hạng là các chuỗi mà số hạng là các hàm có dạng lũy thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

trong đó x là biến số và các hằng số C_n là hệ số của chuỗi.

Định nghĩa

Một chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1 (x-a) + C_2 (x-a)^2 + C_3 (x-a)^3 + \cdots$$

Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định lý

a) *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ *hội tụ tại* $x = x_0$ *thì nó hội tụ tại mọi điểm* x *thỏa mãn* $|x-a| < |x_0 - a|$.

b) *Nếu chuỗi lũy thừa* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ *phân kì tại* $x = x_1$ *thì nó phân kì tại mọi điểm thỏa mãn* $|x-a| > |x_1 - a|$.

Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa có một trong ba khả năng xảy ra

(i) Chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x.

(iii) Có một số thực dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x - a| < R$ và phân kì nếu $|x - a| > R$.

Số thực R được gọi bán kính hội tụ của chuỗi.
Trong trường hợp (i) $R = 0$.
Trong trường hợp (ii) $R = \infty$.

Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định nghĩa

Khoảng hội tụ của chuỗi là khoảng chứa tất cả các giá trị của x mà chuỗi hội tụ.

- TH (i) khoảng hội tụ chỉ chứa a.
- TH (ii) khoảng hội tụ $(-\infty, \infty)$.
- TH (iii) Hai điểm đầu mút $a - R$ và $a + R$ phải xét cụ thể.

Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Định lý

Qui tắc tìm bán kính hội tụ Nếu $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \rho$ *hay* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = \rho$ *thì bán kính hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ *là*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < \infty, \\ 0 & \text{nếu } \rho = \infty, \\ \infty & \text{nếu } \rho = 0. \end{cases}$$

Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Ví dụ

Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}$.