Hàm nhiều biến

Nguyễn Thị Hiên

Đại Học Khoa Học Tự Nhiên
Đại Học Quốc Gia TP HCM

Khoa Toán-Tin Học

Ngày 7 tháng 10 năm 2021

Nội Dung

1 Hàm nhiều biến

- Hàm nhiều biến
- Giới hạn của hàm số
- Hàm số liên tục
- Đạo hàm của hàm số
  - Đạo hàm riêng
  - Mặt phẳng tiếp xúc. Xấp xỉ tuyến tính
  - Đạo hàm riêng cấp cao
- Đạo hàm của hàm vector
  - Đạo hàm của hàm hợp
  - Đạo hàm theo hướng
  - Đạo hàm hàm ẩn
- Cực trị của hàm số nhiều biến
  - Cực trị không có ràng buộc
  - Cực trị có ràng buộc
  - Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

Tập $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa

Với mỗi số nguyên dương n, tập hợp $\mathbb{R}^n$ là tập hợp tất cả các bộ có thứ tự n số thực, tức là
$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$.

Tập mở và tập đóng trong $\mathbb{R}^n$

Cho $x \in \mathbb{R}^n$ và $\epsilon > 0$. Các tập hợp
$B(x,\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n | \|x - y\| < \epsilon\}$: quả cầu mở;
$B'(x,\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n | \|x - y\| \leq \epsilon\}$: quả cầu đóng;
$S(x,\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n | \|x - y\| = \epsilon\}$: mặt cầu tâm x bán kính ϵ trong $\mathbb{R}^n$.

Điểm trong

Định nghĩa

Điểm x là một điểm trong của một tập $D \subset \mathbb{R}^n$ nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho quả cầu $B(x, \epsilon$ chứa trong D.

- Tập tất cả các điểm trong của D được gọi là phần trong của D, kí hiệu D°.
- Tập D được gọi là tập mở nếu mọi điểm của D đều là điểm trong của D.

Ví dụ

Quả cầu $B(x, \epsilon)$ là một tập mở.

Điểm biên

Định nghĩa

Điểm $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm biên của tập $D \subset \mathbb{R}^n$ nếu một quả cầu $B(x, \epsilon)$ bất kì chứa ít nhất một điểm thuộc D và một điểm không thuộc D.

- Tập hợp tất cả các điểm biên của D, kí hiệu ∂D.
- Điểm biên của D có thể thuộc D hoặc không thuộc D.

Ví dụ

Mặt cầu $S(x, \epsilon)$ là biên của quả cầu $B(x, \epsilon)$.

Tập đóng

Định nghĩa

Tập $D \subset \mathbb{R}^n$ là một tập đóng nếu D chứa mọi điểm biên của nó.

Ví dụ

1. Quả cầu đóng $B(x, \epsilon)$ và mặt cầu $S(x, \epsilon)$ là các tập đóng.
2. Tập $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x < b, a \leq y < b\}$ không là tập mở cũng không là tập đóng trong $\mathbb{R}^2$.

Điểm tụ

Định nghĩa

Điểm $x \in \mathbb{R}^n$ là một điểm tụ hay điểm giới hạn của tập $D \subset \mathbb{R}^n$ nếu một quả cầu $B(x, \epsilon)$ bất kì chứa ít nhất một điểm thuộc D khác với x.

Ví dụ

Quả cầu bỏ đi tâm $B(a, r) \setminus \{a\}$ có một điểm tụ a.

Thuật ngữ lân cận của một điểm trong $\mathbb{R}^n$ để chỉ một tập mở của $\mathbb{R}^n$ chứa điểm đó.

Hàm nhiều biến

Định nghĩa

Cho một tập không rỗng $D \subset \mathbb{R}^n$, ánh xạ

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

được gọi là một hàm số được xác định trên D.

Ta gọi D là tập xác định, f là hàm số, x là biến số, $f(x)$ là giá trị của f tại x.

Đồ thị hàm số

Định nghĩa

Đồ thị của hàm số f là tập hợp tất cả các điểm $(x_1, \ldots, x_n, y)$ trong không gian $\mathbb{R}^{n+1}$ sao cho $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Ví dụ

Cho hàm số $f : D \to \mathbb{R}$ với $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ và $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có đồ thị là tập hợp $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$.

Định nghĩa

Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$ theo biến x và a là một điểm tụ của D. Ta nói hàm f có giới hạn $L \in \mathbb{R}$ khi x dần đến a nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

hay

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap (B(a, \delta) \setminus \{a\}), f(x) \in B(L, \epsilon).$$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ hoặc viết $f(x) \to L$ khi $x \to a$.

Chú ý

Ta có thể xét những giới hạn như

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + 4y^2}$$

Cho (x, y) dần tới $(0, 0)$ mà không bằng $(0, 0)$, nơi hàm không được xác định.

Ví dụ

1. Nếu f là một hàm riêng, nghĩa là có $c \in \mathbb{R}$ với $f(x) = c$ với mọi x, thì rõ rằng $\lim_{x \to a} f(x) = c$.
2. Xét hàm lấy tọa độ $f(x, y) = x$. Do tính chất của khoảng cách Euclid, $|x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, do đó để $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x - x_0| < \epsilon$ thì chỉ cần $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \epsilon$. Ta kết luận

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} x = x_0.$$

Mệnh đề

Giả sử $f, g : D \to \mathbb{R}^n$ *là 2 hàm số có giới hạn khi* $x \to a$. *Khi đó:*

a) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$,

b) $\lim_{x\to a}[kf(x)] = k\lim_{x\to a} f(x)$ *với* k *là một hằng số,*

c) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$,

d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ *nếu* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$,

e) *Nếu* $f \leq g$ *thì* $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Hệ quả (Tiêu chuẩn kẹp)

Giả sử $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ *và* $f \leq g \leq h$. *Giả sử* f *và* h *có cùng giới hạn* L *khi* $x \to a$. *Khi đó* g *cũng có giới hạn là* L *khi* $x \to a$.

Ví dụ

Tính giới hạn

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} x^2y^3 + 5.$$

Hàm số liên tục

Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$, ta nói f liên tục tại $a \in D$ nếu a không là một điểm tụ của D, còn nếu a là một điểm tụ của D thì

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Bằng kí hiệu thì

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Các kết quả nói rằng hàm só cấp, tổng hiệu, tích, thương, hàm hợp của các hàm liên tục là hàm liên tục vẫn đúng cho hàm nhiều biến.

Ví dụ

1. Hàm hằng là hàm liên tục.
2. Hàm lấy tọa độ $f(x, y) = x$, là hàm liên tục.
3. Hàm $g(x, y) = x^2$ là hàm liên tục.
4. Hàm $f(x, y) = x^2y^3$ là hàm liên tục.

Đại lượng vô cùng bé

Định nghĩa lượng vô cùng bé (VCB)

Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng bé, viết tắt là VCB tại x_0 nếu $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

Định nghĩa lượng vô cùng bé (VCB)

Cho $\alpha(x), \beta(x)$ là hai VCB tại x_0, và $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m$

- nếu $m = 0$ thì $\alpha(x)$ được gọi là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ tại x_0, kí hiệu $\alpha(x) = \mathbf{o}(\beta(x))$ tại x_0,
- nếu $m \neq 0$ thì $\alpha(x), \beta(x)$ được gọi là VCB cùng cấp tại x_0,
- nếu $m = 1$ $\alpha(x), \beta(X)$ được gọi là hai VCB tương đương tại x_0, kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ tại x_0.

Đại lượng vô cùng lớn

Định nghĩa lượng vô cùng lớn (VCL)

Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là vô cùng lớn, viết tắt là VCL tại x_0 nếu hàm số $\frac{1}{\alpha(x)}$ là VCB tại x_0.

Định nghĩa lượng vô cùng lớn (VCL)

Cho $\alpha(x), \beta(x)$ là hai VCL tại x_0, và $\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m$

- nếu $m = \infty$ thì $\alpha(x)$ được gọi là VCL bậc cao hơn $\beta(x)$ tại x_0, kí hiệu $\alpha(x) = \mathbf{O}(\beta(x))$ tại x_0,
- nếu $m \neq 0$ thì $\alpha(x), \beta(x)$ được gọi là VCL cùng cấp tại x_0,
- nếu $m = 1$ $\alpha(x), \beta(X)$ được gọi là hai VCL tương đương tại x_0, kí hiệu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ tại x_0.

Đại lượng vô cùng bé

Hệ quả

Nếu $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ và $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ tại x_0 thì

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Ví dụ

Tìm giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x\sin 5x}.$$

Tính giới hạn hàm số nhiều biến

Ví dụ (Tính giới hạn của các hàm số)

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-1}{x^2+y^2}.$$

Tính giới hạn hàm số nhiều biến

Ví dụ (Tính giới hạn của các hàm số)

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-1}{x^2+y^2}.$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+2y}{x^2-4y^2}.$$

Tính giới hạn hàm số nhiều biến

Ví dụ (Tính giới hạn của các hàm số)

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-1}{x^2+y^2}.$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+2y}{x^2-4y^2}.$$
3. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}.$$

Tính giới hạn hàm số nhiều biến

Ví dụ (Tính giới hạn của các hàm số)

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-1}{x^2+y^2}.$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+2y}{x^2-4y^2}.$$
3. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}.$$
4. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{1-\sqrt{1+xy}}.$$

Tính giới hạn hàm số nhiều biến

Ví dụ (Tính giới hạn của các hàm số)

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-1}{x^2+y^2}.$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+2y}{x^2-4y^2}.$$
3. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}.$$
4. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{1-\sqrt{1+xy}}.$$
5. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}.$$

Tính giới hạn hàm số nhiều biến

Ví dụ (Tính giới hạn của các hàm số)

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-1}{x^2+y^2}.$$
2. $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+2y}{x^2-4y^2}.$$
3. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}.$$
4. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{1-\sqrt{1+xy}}.$$
5. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}.$$
6. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2+x^2y}{x^2+y^2}.$$

Chứng minh giới hạn không tồn tại

Bước 1: Kiểm tra giới hạn của $f(x, y)$ tại a có dạng vô định.

Chứng minh giới hạn không tồn tại

Bước 1: Kiểm tra giới hạn của $f(x, y)$ tại a có dạng vô định.

Bước 2: Chọn hai dãy $\{M_n\}$ và $\{N_n\}$ cùng tiến tới a nhưng $\lim\limits_{M_n \to a} f(x_{M_n}, y_{M_n}) \neq \lim\limits_{N_n \to a} f(x_{N_n}, y_{N_n})$.

Chứng minh giới hạn không tồn tại

Ví dụ

1. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Chứng minh giới hạn không tồn tại

Ví dụ

1. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
2. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

Chứng minh giới hạn không tồn tại

Ví dụ

1. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
2. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$.
3. Tính $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - 2xy}{4 - x^2}$.

Khảo sát sự liên tục của hàm số

1. Xét sự liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 3xy - 1 & (x,y) \neq (2,0) \\ 5 & (x,y) = (2,0). \end{cases}$$

Khảo sát sự liên tục của hàm số

1. Xét sự liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 3xy - 1 & (x,y) \neq (2,0) \\ 5 & (x,y) = (2,0). \end{cases}$$

2. Xét sự liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3(x-y)}{x^3 - y^3} & (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

Đạo hàm riêng

Ví dụ

Điểm môn học f phụ thuộc vào điểm giữa kì x và điểm cuối kỳ y. Ta muốn nếu điểm cuối kì thay đổi trong khi điểm giữa kì giữ nguyên thì điểm môn học thay đổi thế nào?

Cho một hàm số nhiều biến $z = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}^n$.
Xét điểm $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ là một điểm trong của D.
Cố định $x_2 = a_2, x_3 = a_3, \ldots, x_n = a_n$ thì $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là hàm chỉ theo một biến là x_1.
Nếu hàm này có đạo hàm tại $x_1 = a_1$ thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm riêng phần của hàm $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ theo biến x_1 (biến thứ nhất) tại điểm $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Định nghĩa

Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ là một điểm trong của D. Giới hạn

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h_i},$$

nếu có, được gọi là đạo hàm riêng theo biến thứ i của f tại a.

Định nghĩa

Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ là một điểm trong của D. Giới hạn

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h_i},$$

nếu có, được gọi là đạo hàm riêng theo biến thứ i của f tại a.

- Giải thiết a là điểm trong của miền xác định là để đảm bảo tồn tại $f(a_1, a_2, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ khi h_i đủ nhỏ.
- Kí hiệu đạo hàm riêng phần trên bởi một số cách như $f_{x_i}(x), f'_{x_i}(x), D_i f(x), \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, hay $\frac{\partial z}{\partial x_i}(x)$.

Ý nghĩa đạo hàm riêng

- Đạo hàm riêng đo tỉ lệ thay đổi giữa giá trị của hàm với giá trị của biến đang xét tại điểm đang xét.

Ý nghĩa đạo hàm riêng

- Đạo hàm riêng đo tỉ lệ thay đổi giữa giá trị của hàm với giá trị của biến đang xét tại điểm đang xét.
- Khi tính đạo hàm riêng theo biến nào thì ta coi các biến còn lại là hằng số.

Đạo hàm riêng

Ví dụ

1. Điểm môn học f phụ thuộc vào điểm giữa kì x và điểm cuối kì y theo công thức

$$f(x, y) = 30\%x + 70\%y$$

Hỏi nếu điểm cuối kì tăng 1 trong khi điểm giữa kì giữ nguyên thì điểm môn học thay đổi thế nào?

Đạo hàm riêng

Ví dụ

1. Điểm môn học f phụ thuộc vào điểm giữa kì x và điểm cuối kì y theo công thức
$$f(x,y) = 30\%x + 70\%y$$
Hỏi nếu điểm cuối kì tăng 1 trong khi điểm giữa kì giữ nguyên thì điểm môn học thay đổi thế nào?
2. Cho $f(x,y) = x^3y^2$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$?

Đạo hàm riêng

Ví dụ

a) Tính đạo hàm riêng tại $(1, 0)$ của $f(x, y) = 4 - \sqrt{x}\cos y$.

Đạo hàm riêng

Ví dụ

a) Tính đạo hàm riêng tại $(1, 0)$ của $f(x, y) = 4 - \sqrt{x}\cos y$.

b) Tính đạo hàm riêng tại $(0, 1)$ của $f(x, y) = e^x(y^2 + x)$.

Đạo hàm riêng

Ví dụ

a) Tính đạo hàm riêng tại $(1,0)$ của $f(x,y) = 4 - \sqrt{x}\cos y$.

b) Tính đạo hàm riêng tại $(0,1)$ của $f(x,y) = e^x(y^2+x)$.

c) Tìm đạo hàm riêng của $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$.

Đạo hàm riêng

Ví dụ

a) Tính đạo hàm riêng tại $(1, 0)$ của $f(x, y) = 4 - \sqrt{x} \cos y$.

b) Tính đạo hàm riêng tại $(0, 1)$ của $f(x, y) = e^x(y^2 + x)$.

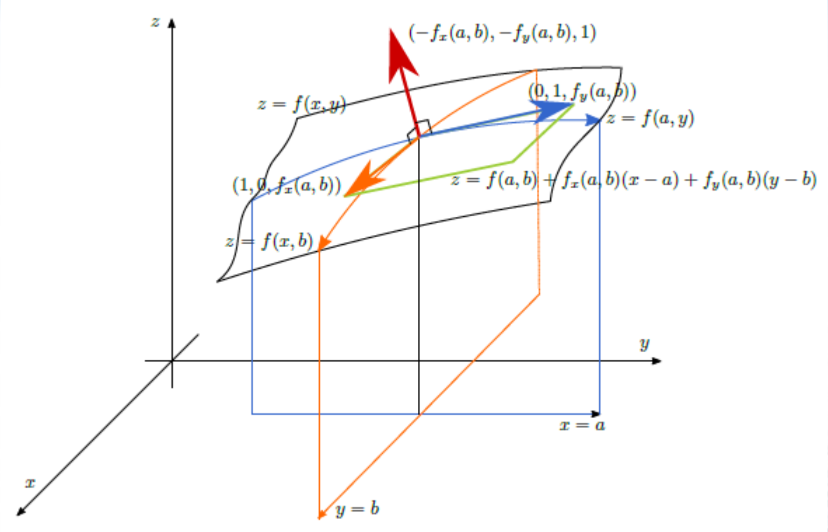
c) Tìm đạo hàm riêng của $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$.

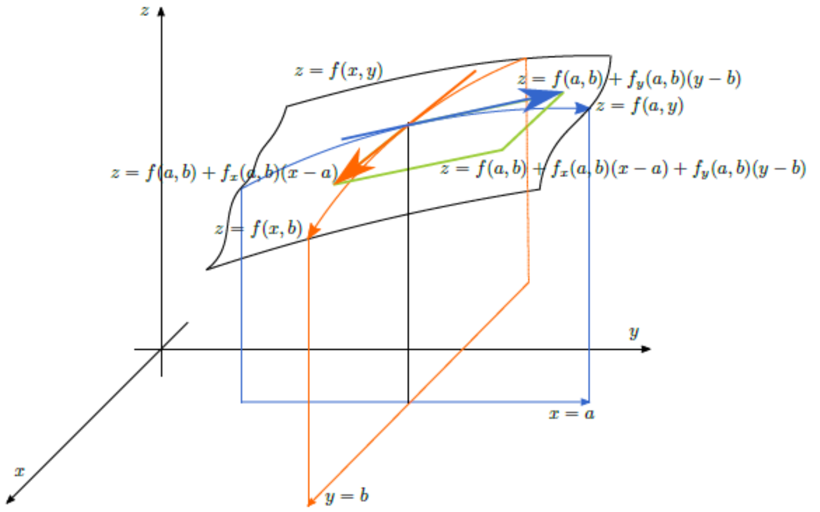
d) Tính đạo hàm riêng tại $(1, 2)$ của $f(x, y) = \ln \dfrac{y}{x}$.

Mặt phẳng tiếp xúc

Xét hàm $z = f(x, y)$. Giả sử hàm f có đạo hàm riêng tại điểm (a, b). Mặt phẳng tiếp xúc của đồ thị f ở điểm (a, b). có phương trình

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \qquad (1)$$

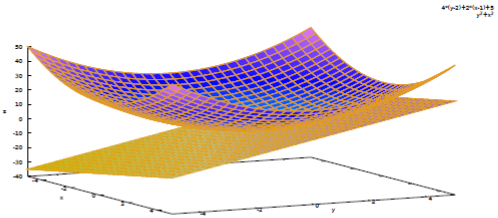

z
$(-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1)$
$(0, 1, f_y(a,b))$
$z = f(x,y)$
$z = f(a,y)$
$(1, 0, f_x(a,b))$
$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$
$z = f(x,b)$
y
$x = a$
x
$y = b$



z
$z = f(x, y)$
$z = f(a, b) + f_y(a, b)(y - b)$
$z = f(a, y)$
$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a)$
$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$
$z = f(x, b)$
y
$x = a$
x
$y = b$

Xấp xỉ tuyến tính

Hình: Mặt phẳng tiếp xúc của $z = x^2 + y^2$ tại $(x, y) = (1, 2)$



Ta dùng mặt phẳng tiếp xúc để xấp xỉ đồ thị.

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Đặt $\Delta x = x - a, \Delta y = y - b, \Delta f(x, y) = f(x, y) - f(a, b)$, ta có

$$\Delta f(x, y) \approx f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y.$$

Ví dụ

1. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị hàm $z = x^3y + 2x^4y^5$ tại điểm $(x, y) = (1, 1)$.

Ví dụ

1. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị hàm $z = x^3y + 2x^4y^5$ tại điểm $(x, y) = (1, 1)$.
2. Tìm thiết diện tại $M(0, 1)$ của $f(x, y) = 1 + y\sin x$.

Ví dụ

1. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị hàm $z = x^3y + 2x^4y^5$ tại điểm $(x, y) = (1, 1)$.
2. Tìm thiết diện tại $M(0, 1)$ của $f(x, y) = 1 + y \sin x$.
3. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm $f(x, y) = x^2y^3$ gần điểm $(x, y) = (2, 1)$.

Ví dụ

1. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị hàm $z = x^3y + 2x^4y^5$ tại điểm $(x, y) = (1, 1)$.
2. Tìm thiết diện tại $M(0, 1)$ của $f(x, y) = 1 + y\sin x$.
3. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm $f(x, y) = x^2y^3$ gần điểm $(x, y) = (2, 1)$.
4. Tính gần đúng giá trị của $\sqrt{3.09^2 - 4.88}$.

Ví dụ

1. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị hàm $z = x^3y + 2x^4y^5$ tại điểm $(x, y) = (1, 1)$.
2. Tìm thiết diện tại $M(0, 1)$ của $f(x, y) = 1 + y\sin x$.
3. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm $f(x, y) = x^2y^3$ gần điểm $(x, y) = (2, 1)$.
4. Tính gần đúng giá trị của $\sqrt{3.09^2 - 4.88}$.
5. Cho $f_x(10, 20) = 1$; $f_y(10, 20) = -5$; $f(10, 20) = 45$. Hãy ước lượng $f(11, 18)$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Cho $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nếu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tồn tại mọi điểm $x \in D$, ta có hàm mới

$$\begin{array}{rccc} \frac{\partial f}{\partial x_i}: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \end{array}$$

Đạo hàm riêng cấp 2 của f được tính

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j}$$

Tương tự, nếu f có các đạo hàm riêng cấp 2 tại mọi điểm của D thì đạo hàm riêng cấp 3 của f được tính là đạo hàm riêng theo các biến của các đạo hàm riêng cấp 2

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j x_k}.$$

Ví dụ

1. Tìm đạo hàm riêng cấp hai của $f(x, y) = x^2e^y + x^2y^2 - y^4$
2. Tính đạo hàm riêng cấp hai tại $(\pi, 0)$ của $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$.
3. Tính đạo hàm riêng cấp hai tại $(2, 2)$ của $f(x, y) = \sqrt{xy}$.
4. Tìm đạo hàm riêng f'''_{xxx} và f'''_{yyy} của $f(x, y) = y^2e^x - x^3 \sin y$.

Định lý

Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trên D thì

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

trên D, với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Chú ý

Hàm mà tất cả các đạo hàm riêng đều tồn tại và liên tục được gọi là hàm khả vi liên tục (hàm trơn).

Hàm vector

Hàm vector là các ánh xạ $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Mỗi hàm vector f là một bộ của m hàm số của n biến, cụ thể

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \\ &\quad f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

Rút gọn $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ trong đó f_i là các hàm số của n biến.

Ví dụ

- Một ánh xạ $r : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, r(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t))$ là một đường đi hay một chuyển động trong $\mathbb{R}^m$, mô tả chuyển động trong không gian theo thời gian.
- Hàm $t \mapsto (x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t)$ là một đường xoắn trong $\mathbb{R}^3$.

Ma trận Jacobi

Ma trận Jacobi của f là ma trận các đạo hàm riêng của các hàm thành phần của hàm f, kí hiệu

$$J_f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Gradient

Khi $m = 1$ ta có hàm số nhiều biến $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, khi đó ma trận Jacobi là một ma trận có 1 dòng và n cột được gọi là gradient của f, kí hiệu

$$gradf = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Ví dụ

Xét hàm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x, y) = x^2 + y^2$. Tính $\nabla f(0, 1)$?

Đạo hàm của hàm hợp

Định lý

Cho hàm số $f(x,y)$ với $x = x(t)$ và $y = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Giả sử f, x và y khả vi liên tục. Đặt $z(t) = f((x(t), y(t))$. Khi đó

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}(t).$$

Rút gọn

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Trong trường hợp x, y là hàm của t và các biến khác nữa, thì đạo hàm của f theo t là các đạo hàm riêng được tính

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Một cách viết khác $z'(t) \approx \frac{\Delta z}{\Delta t} \approx f_x(x,y)x'(t) + f_y(x,y)y'(t)$.

Ví dụ

- Giả sử $f(x, y) = x^3y^3$ với $x(t) = t^4$ và $y(t) = t^5$. Tìm $\dfrac{df}{dt}$.
- Cho z là một hàm khả vi liên tục theo hai biến x, y, với x, y là hai hàm khả vi liên tục theo biến t. Giả sử $x(0) = 1, y(0) = 2, x'(0) = 3, y'(0) = 4, z_x(1, 2) = 5, z_y(1, 2) = 6$. Hãy tính $z'(0)$.
- Cho $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ và f là một hàm của x, y Tính $\frac{\partial f}{\partial r}$ và $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Ví dụ

a) Tìm đạo hàm $\frac{\partial z}{\partial t}$ và $\frac{\partial z}{\partial s}$ biết

$$z = ye^x, x = s + t,\ y = \sqrt{s^2 + t^2}.$$

b) Chứng minh rằng:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

nếu $z = f(x^2 - y^2)$.

Định lý

Cho $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với $x_i = x_i(t)$ là các hàm số khả vi liên tục và viết $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Ta có

$$(f \circ x)'(t) = \nabla f(x(t)) \cdot x'(t).$$

Ví dụ

1. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm $f(x, y) = x - xy + y^2$ gần điểm $(x, y) = (5, 6)$. Ước lượng $f(5.1, 5.9)$.

Ví dụ

1. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm $f(x, y) = x - xy + y^2$ gần điểm $(x, y) = (5, 6)$. Ước lượng $f(5.1, 5.9)$.
2. Tính xấp xỉ $\frac{1}{\sqrt{2.99^2+3.01^2}}$.

Ví dụ

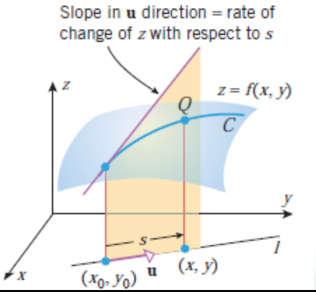
1. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm $f(x,y) = x - xy + y^2$ gần điểm $(x,y) = (5,6)$. Ước lượng $f(5.1, 5.9)$.
2. Tính xấp xỉ $\frac{1}{\sqrt{2.99^2+3.01^2}}$.
3. Cho $f(x,y) = ln(x^2+y^2)$. Chứng minh $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

Định nghĩa đạo hàm theo hướng

Định nghĩa

Cho hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và x là một điểm trong của D. Đạo hàm của hàm f tại điểm x theo hướng vector $u \in \mathbb{R}^n$ được định nghĩa

$$D_u f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$



Ý nghĩa đạo hàm theo hướng

- Tỉ lệ thay đổi của hàm theo biến của nó khi biến chỉ được thay đổi theo một hướng cho trước.

Ý nghĩa đạo hàm theo hướng

- Tỉ lệ thay đổi của hàm theo biến của nó khi biến chỉ được thay đổi theo một hướng cho trước.
- Các vector có độ dài bằng 1 để chỉ hướng. (Chiều dài vector chỉ hướng không làm ảnh hưởng tới các khái niệm liên quan tới hướng).

Đặt $g(t) = f(x + tu)$ thì

$$D_u f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Đặt $g(t) = f(x + tu)$ thì

$$D_u f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Trong trường hợp riêng $m = 1$, ta có

$$g'(t) = \nabla f(x + tu) \cdot \frac{d}{dt}(x + tu) = \nabla f(x + tu) \cdot u,$$

suy ra $g'(0) = \nabla f(x) \cdot u$.

Đặt $g(t) = f(x + tu)$ thì

$$D_u f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Trong trường hợp riêng $m = 1$, ta có

$$g'(t) = \nabla f(x + tu) \cdot \frac{d}{dt}(x + tu) = \nabla f(x + tu) \cdot u,$$

suy ra $g'(0) = \nabla f(x) \cdot u$.
Vậy ta công thức biểu diễn đạo hàm theo hướng qua vector gradient:

$$D_u f(x) = \nabla f(x) \cdot u.$$

Ví dụ

Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ tại điểm $(1, 2)$ theo hướng của vector $(3, 4)$.

Ví dụ

Tìm đạo hàm của hàm $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ tại điểm $(1,2)$ theo hướng của vector $(3,4)$.

Bài giải

- Ta tính $f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, suy ra $\nabla(1,2) = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.
- Vector đơn vị theo hướng của vector $(3,4)$ là $u = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(3,4) = (3/5, 4/5)$.
- Đạo hàm của hàm $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ tại điểm $(1,2)$ theo hướng của vector $(3,4)$ là

$$D_u f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot u = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \cdot (3/5, 4/5) = 11/5\sqrt{5}.$$

Ví dụ

a) Tính đạo hàm theo hướng $u = (1, 2)$ của

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2.$$

b) Tính đạo hàm theo hướng $u = (2, 4)$ của

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

tại $(-1, 1)$.

- u là các vector của cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n, u = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ thì đạo hàm theo hướng u chính là các đạo hàm riêng. Cụ thể:

$$D_{e_1} f = \nabla f \cdot e_i = D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

- u là các vector của cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n, u = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ thì đạo hàm theo hướng u chính là các đạo hàm riêng. Cụ thể:

$$D_{e_1} f = \nabla f \cdot e_i = D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

- Đạo hàm riêng là trường hợp riêng của đạo hàm theo hướng.

Ý nghĩa của vector gradient

- Nếu u là vector đơn vị chỉ hướng ta có

$$D_u f(x) = \nabla f(x) \cdot u \leq \|\nabla f(x)\| \|u\| = \|\nabla f(x)\|$$

với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\nabla f(x)$ và u cùng hướng.

Ý nghĩa của vector gradient

- Nếu u là vector đơn vị chỉ hướng ta có

$$D_u f(x) = \nabla f(x) \cdot u \leq \|\nabla f(x)\| \|u\| = \|\nabla f(x)\|$$

  với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\nabla f(x)$ và u cùng hướng.
- Giá trị lớn nhất của $D_u f(x)$ là $\|\nabla f(x)\|$ xảy ra khi $u = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$. (Giá trị của hàm tăng nhanh nhất theo hướng của vector gradient).

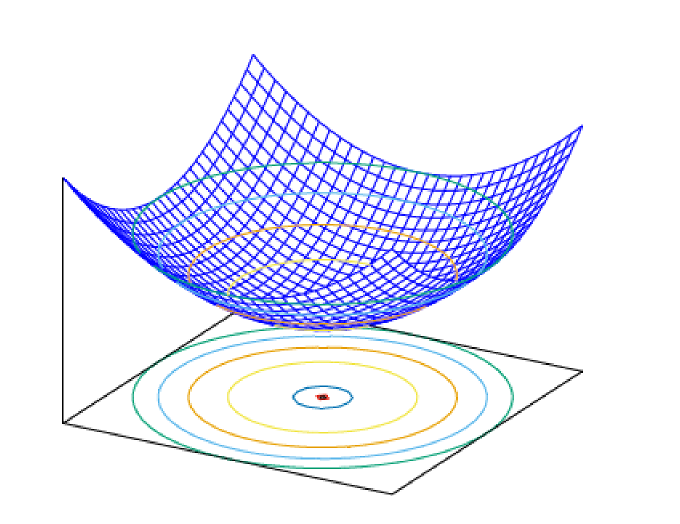
Ý nghĩa của vector gradient

- Nếu u là vector đơn vị chỉ hướng ta có

$$D_u f(x) = \nabla f(x) \cdot u \leq \|\nabla f(x)\| \|u\| = \|\nabla f(x)\|$$

  với dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\nabla f(x)$ và u cùng hướng.
- Giá trị lớn nhất của $D_u f(x)$ là $\|\nabla f(x)\|$ xảy ra khi $u = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$. (Giá trị của hàm tăng nhanh nhất theo hướng của vector gradient).
- Giá trị nhỏ nhất của $D_u f(x)$ là $-\|\nabla f(x)\|$ xảy ra khi $u = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$. (Giá trị của hàm giảm nhanh nhất theo hướng đối của vector gradient).

Hình: Đồ thị hàm $z = x^2 + y^2$



Tập mức

- Với mỗi số thực c cố định, phương trình $f(x) = c$ xác định tập $C = f^{-1}(\{c\})$, được gọi là tập mức của hàm f ứng với mức c.

Tập mức

- Với mỗi số thực c cố định, phương trình $f(x) = c$ xác định tập $C = f^{-1}(\{c\})$, được gọi là tập mức của hàm f ứng với mức c.
- Vector gradient của một hàm luôn vuông góc với tập mức của hàm đó và chỉ theo hướng tăng của mức.

Đạo hàm của hàm cho ở dạng ẩn

Trường hợp $n = 2$
Cho điểm (x_0, y_0) thỏa phương trình $f(x, y) = c$ có vector gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ khác 0. Phương trình cho đường thẳng tiếp xúc của đường thẳng cho ở dạng ẩn $f(x, y) = c$ tại (x_0, y_0) là

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0.$$

Ví dụ

Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong sau

1. $x + y^2 = 4$ tại điểm $(1, \sqrt{3})$.

Ví dụ

Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong sau

1. $x + y^2 = 4$ tại điểm $(1, \sqrt{3})$.
2. $x^2y + xy^2 = 2$ tại điểm $(1, 1)$.

Trường hợp $n = 3$
Tại một điểm (x_0, y_0, z_0) thỏa phương trình $f(x, y, z) = c$ vector $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ khác 0 thì phương trình $f(x, y, z) = c$ xác định một mặt cong trong $\mathbb{R}^3$.
Mặt phẳng tiếp xúc của mặt mức $f(x, y, z) = c$ tại một điểm (x_0, y_0, z_0) có phương trình

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0.$$

Ví dụ

Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc của mặt phẳng

1. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tại điểm $(1, 2, 2)$.

Ví dụ

Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc của mặt phẳng

1. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tại điểm $(1, 2, 2)$.
2. $x^2y + y^2z - z^2x = 1$ tại điểm $(1, 1, 0)$.

Cực trị địa phương

Định nghĩa

Hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có cực đại địa phương (hay cực đại tương đối) tại $a \in D$ nếu có một quả cầu $B(a, r) \subset D$ sao cho $f(a) \geq f(x)$ với mọi $x \in B(a, r)$. Điểm a được gọi là một điểm cựa đại địa phương.

Cực trị địa phương

Định nghĩa

Hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có cực đại địa phương (hay cực đại tương đối) tại $a \in D$ nếu có một quả cầu $B(a, r) \subset D$ sao cho $f(a) \geq f(x)$ với mọi $x \in B(a, r)$. Điểm a được gọi là một điểm cựa đại địa phương.

Định nghĩa

Hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có cực tiểu địa phương (hay cực tiểu tương đối) tại $a \in D$ nếu có một quả cầu $B(a, r) \subset D$ sao cho $f(a) \leq f(x)$ với mọi $x \in B(a, r)$. Điểm a được gọi là một điểm cựa đại địa phương.

Cực đại và cực tiểu được gọi là cực trị.

Cực trị toàn cục

Định nghĩa

Hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có cực đại toàn cục (cực đại tuyệt đối) tại $a \in D$ nếu $f(a) \geq f(x)$ với mọi $x \in D$. Khi đó $f(a)$ là giá trị lớn nhất của f.

Cực trị toàn cục

Định nghĩa

Hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có cực đại toàn cục (cực đại tuyệt đối) tại $a \in D$ nếu $f(a) \geq f(x)$ với mọi $x \in D$. Khi đó $f(a)$ là giá trị lớn nhất của f.

Định nghĩa

Hàm $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ có cực tiểu toàn cục (cực tiểu tuyệt đối) tại $a \in D$ nếu $f(a) \leq f(x)$ với mọi $x \in D$. Khi đó $f(a)$ là giá trị lớn nhất của f.

Cực trị không có ràng buộc

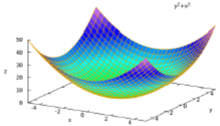
Định lý (Điều kiện cần cấp 1)

Nếu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to R$ *khả vi tại a và f có cực trị địa phương tại a thì* $\nabla f(a) = 0$, *nghĩa là* $\forall i = 1, \ldots, n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

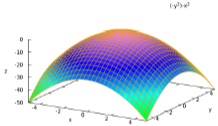
- Một điểm dừng (điểm tới hạn) là điểm các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu.

- Một điểm dừng (điểm tới hạn) là điểm các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu.
- Tìm cực trị địa phương trong các điểm dừng.

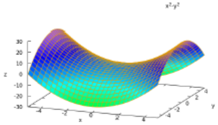
- Một điểm dừng (điểm tới hạn) là điểm các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu.
- Tìm cực trị địa phương trong các điểm dừng.
- Tại một điểm dừng là điểm yên khi hàm không có cực trị địa phương tại điểm đó.



$z = x^2 + y^2$



$z = -x^2 - y^2$



$z = x^2 - y^2$

Điều kiện đủ cho trường hợp hai biến

Ma trận Hess là ma trận các đạo hàm riêng bậc hai

$$Hess(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Tìm cực trị của hàm hai biến

1. Tìm điểm dừng (x_0, y_0) bằng cách giải hệ phương trình $\nabla f(x, y) = 0$.

Tìm cực trị của hàm hai biến

1. Tìm điểm dừng (x_0, y_0) bằng cách giải hệ phương trình $\nabla f(x, y) = 0$.
2. Tính định thức của ma trận $Hess(f, (x_0, y_0))$:

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2.$$

Tìm cực trị của hàm hai biến

1. Tìm điểm dừng (x_0, y_0) bằng cách giải hệ phương trình $\nabla f(x, y) = 0$.
2. Tính định thức của ma trận $Hess(f, (x_0, y_0))$:

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2.$$

3. Biện luận:

Tìm cực trị của hàm hai biến

1. Tìm điểm dừng (x_0, y_0) bằng cách giải hệ phương trình $\nabla f(x, y) = 0$.
2. Tính định thức của ma trận $Hess(f, (x_0, y_0))$:

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2.$$

3. Biện luận:
   - Nếu $D(x_0, y_0) > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực trị địa phương của hàm f. Để phân loại điểm cực trị ta xét tiếp:

Tìm cực trị của hàm hai biến

1. Tìm điểm dừng (x_0, y_0) bằng cách giải hệ phương trình $\nabla f(x, y) = 0$.
2. Tính định thức của ma trận $Hess(f, (x_0, y_0))$:

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2.$$

3. Biện luận:
   - Nếu $D(x_0, y_0) > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực trị địa phương của hàm f. Để phân loại điểm cực trị ta xét tiếp:
     - ♣ Nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ thì f có cực tiểu trị địa phương tại (x_0, y_0).

Tìm cực trị của hàm hai biến

1. Tìm điểm dừng (x_0, y_0) bằng cách giải hệ phương trình $\nabla f(x, y) = 0$.
2. Tính định thức của ma trận $Hess(f, (x_0, y_0))$:

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) . \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 .$$

3. Biện luận:
   - Nếu $D(x_0, y_0) > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực trị địa phương của hàm f. Để phân loại điểm cực trị ta xét tiếp:
     - ♣ Nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ thì f có cực tiểu trị địa phương tại (x_0, y_0).
     - ♣ Nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ thì f có cực đại địa phương tại (x_0, y_0).

Tìm cực trị của hàm hai biến

1. Tìm điểm dừng (x_0, y_0) bằng cách giải hệ phương trình $\nabla f(x, y) = 0$.
2. Tính định thức của ma trận $Hess(f, (x_0, y_0))$:

$$D(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0).\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2.$$

3. Biện luận:
   - Nếu $D(x_0, y_0) > 0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực trị địa phương của hàm f. Để phân loại điểm cực trị ta xét tiếp:
     - Nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ thì f có cực tiểu trị địa phương tại (x_0, y_0).
     - Nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ thì f có cực đại địa phương tại (x_0, y_0).
   - Nếu $D(x_0, y_0) < 0$ thì điểm (x_0, y_0) không là điểm cực trị của f, và là một điểm yên của f.

Ví dụ

Tìm và phân loại các điểm tới hạn của hàm số

1. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

Ví dụ

Tìm và phân loại các điểm tới hạn của hàm số

1. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$
2. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

Trường hợp tổng quát và chứng minh

Cho f khả vi liên tục mọi cấp trong một quả cầu $B(x, r)$. Với h sao cho $\|h\| < r$ ta đặt $g(t) = f(x + th), \ t \in (-1, 1)$. Hàm g khả vi liên tục mọi cấp và ta có:

$$g'(t) \quad = \quad \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + th)h_i, \tag{2}$$

Trường hợp tổng quát và chứng minh

Cho f khả vi liên tục mọi cấp trong một quả cầu $B(x,r)$. Với h sao cho $\|h\| < r$ ta đặt $g(t) = f(x+th),\ t \in (-1,1)$. Hàm g khả vi liên tục mọi cấp và ta có:

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i, && (2)\\
g'(0) &= \sum_{1 \le i \le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i, && (3)
\end{aligned}
$$

Trường hợp tổng quát và chứng minh

Cho f khả vi liên tục mọi cấp trong một quả cầu $B(x,r)$. Với h sao cho $\|h\| < r$ ta đặt $g(t) = f(x+th),\ t \in (-1,1)$. Hàm g khả vi liên tục mọi cấp và ta có:

$$g'(t) = \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i, \tag{2}$$

$$g'(0) = \sum_{1\leq i\leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i, \tag{3}$$

$$g''(t) = \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+th)h_i h_j, \tag{4}$$

Trường hợp tổng quát và chứng minh

Cho f khả vi liên tục mọi cấp trong một quả cầu $B(x, r)$. Với h sao cho $\|h\| < r$ ta đặt $g(t) = f(x + th),\ t \in (-1, 1)$. Hàm g khả vi liên tục mọi cấp và ta có:

$$g'(t) = \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + th)h_i, \tag{2}$$

$$g'(0) = \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i, \tag{3}$$

$$g''(t) = \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + th)h_i h_j, \tag{4}$$

$$g''(0) = \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)h_i h_j \tag{5}$$

Khai triển Taylor

Cho f khả vi liên tục cấp hai trong một quả cầu $B(x,r)$. Với mọi $h \in B(0,r)$ ta có

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i + \frac{1}{2} \sum_{1\le i\le n} \sum_{1\le j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\theta h) h_i h_j,$$

với $\theta \in (0,1)$ phụ thuộc vào h.

Khai triển Taylor

Cho f khả vi liên tục cấp hai trong một quả cầu $B(x,r)$. Với mọi $h \in B(0,r)$ ta có

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i + \frac{1}{2}\sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\theta h)h_i h_j,$$

với $\theta \in (0,1)$ phụ thuộc vào h. Một công thức khác là

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i + \frac{1}{2}\sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x)h_i h_j + \epsilon(h)\|h\|^2,$$

với $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$.

Định lý

Giả sử f có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một quả cầu chứa x và x là một điểm dừng của f, tức $\nabla f(x) = 0$.

- *Nếu ma trận* $Hess(f, x)$ *xác định âm, nghĩa là* $\forall h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *thì* $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j < 0$, *thì f có cực đại địa phương tại x.*

Định lý

Giả sử f có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một quả cầu chứa x và x là một điểm dừng của f, tức $\nabla f(x) = 0$.

- *Nếu ma trận Hess(f, x) xác định âm, nghĩa là $\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ thì $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j < 0$, thì f có cực đại địa phương tại x.*
- *Nếu ma trận Hess(f, x) xác định dương, nghĩa là $\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ thì $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j > 0$, thì f có cực tiểu địa phương tại x.*

Định lý

Giả sử f có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trên một quả cầu chứa x và x là một điểm dừng của f, tức $\nabla f(x) = 0$.

- *Nếu ma trận Hess(f, x) xác định âm, nghĩa là $\forall h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ thì $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j < 0$, thì f có cực đại địa phương tại x.*
- *Nếu ma trận Hess(f, x) xác định dương, nghĩa là $\forall h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ thì $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j > 0$, thì f có cực tiểu địa phương tại x.*
- *Nếu ma trận Hess(f, x) không xác định dương và cũng không xác định âm, thì f không có cực trị tại x, và x được gọi là điểm yên của f.*

Cực trị có ràng buộc

Bài toán

$$\begin{cases} \text{Tìm cực trị của } f(x,y) \\ \text{thỏa } g(x,y) = c. \end{cases} \qquad (6)$$

Cực trị có ràng buộc

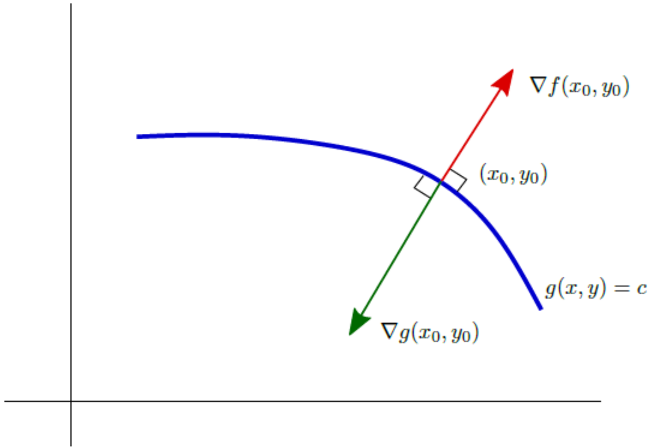
Bài toán

$$\begin{cases} \text{Tìm cực trị của } f(x, y) \\ \text{ thỏa } g(x, y) = c. \end{cases} \tag{6}$$

Xét tại điểm dừng của f là (x_0, y_0), ta có

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

với $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là nhân tử Lagrange.



$\nabla f(x_0, y_0)$
(x_0, y_0)
$g(x, y) = c$
$\nabla g(x_0, y_0)$

Phương pháp nhân tử Lagrange

Định lý (Điều kiện cần cấp 1)

Giả sử f và g khả vi liên tục trên tập mở Ω trong $\mathbb{R}^2$. Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm địa phương của bài toán (6) tỏa $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, thì phải tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0.$$

Ví dụ

Tìm cực trị của hàm $f(x, y) = x + y$ thỏa $x^2 + y^2 = 1$.

Định lý

Cho f và g_i, $1 \leq i \leq p$ khả vi liên tục trên một tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Xét bài toán

$$\begin{cases} \text{Tìm cực trị của } f(x,y) \\ \text{thỏa } g_i(x,y) = c_i, \ 1 \leq i \leq p < n. \end{cases} \tag{7}$$

Nếu các điều kiện sau thỏa

- *a là nghiệm địa phương của (7),*

Định lý

Cho f và g_i, $1 \leq i \leq p$ khả vi liên tục trên một tập mở trong $\mathbb{R}^n$. Xét bài toán

$$\begin{cases} \text{Tìm cực trị của } f(x,y) \\ \text{thỏa } g_i(x,y) = c_i, \; 1 \leq i \leq p < n. \end{cases} \quad (7)$$

Nếu các điều kiện sau thỏa

- *a là nghiệm địa phương của (7),*
- *$\nabla g_1(a), \nabla g_2(a), \ldots, \nabla g_p(a)$ độc lập tuyến tính, thì tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$\nabla f(a) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(a) = 0.$$

Ví dụ

- Tìm các điểm trên mặt $2x - 4y = 3$ mà gần nhất với gốc tọa độ.

Ví dụ

- Tìm các điểm trên mặt $2x - 4y = 3$ mà gần nhất với gốc tọa độ.
- Tìm điểm trên mặt bầu dục $g(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 3z^2 = 9$ mà tại đó nhiệt độ $f(x, y, z) = 750 + 5x - 2y + 9z$ là cao nhất.

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

- Khảo sát bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (Tìm cực trị toàn cục).

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

- Khảo sát bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (Tìm cực trị toàn cục).
- Một tập con của không gian $\mathbb{R}^n$ được gọi là bị chặn nếu nó được chứa trong một quả cầu với bán kính đủ lớn.

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

- Khảo sát bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (Tìm cực trị toàn cục).
- Một tập con của không gian $\mathbb{R}^n$ được gọi là bị chặn nếu nó được chứa trong một quả cầu với bán kính đủ lớn.
- Một tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ còn được gọi là một tập compắc.

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất

- Khảo sát bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (Tìm cực trị toàn cục).
- Một tập con của không gian $\mathbb{R}^n$ được gọi là bị chặn nếu nó được chứa trong một quả cầu với bán kính đủ lớn.
- Một tập đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ còn được gọi là một tập compắc.

Định lý

Một hàm liên tục trên một tập compact thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đó.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm trên một tập compact.

1. Tìm các giá trị của f ở phần trong của tập D, dùng các phương pháp của cực trị không có ràng buộc.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm trên một tập compact.

1. Tìm các giá trị của f ở phần trong của tập D, dùng các phương pháp của cực trị không có ràng buộc.
2. Tìm các giá trị cực trị của f trên biên của tập D, dùng các phương pháp của cực trị có ràng buộc.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm trên một tập compact.

1. Tìm các giá trị của f ở phần trong của tập D, dùng các phương pháp của cực trị không có ràng buộc.
2. Tìm các giá trị cực trị của f trên biên của tập D, dùng các phương pháp của cực trị có ràng buộc.
3. Số lớn nhất trong các giá trị ở Bước 1 và Bước 2 là giá trị lớn nhất và số nhỏ nhất trong các giá trị này là giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ

- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trong hình chữ nhật $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

Ví dụ

- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trong hình chữ nhật $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.
- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f theo các ràng buộc được cho

$$f(x,y) = x^2 y;\ x^2 + y^2 = 1.$$

Ví dụ

- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ trong hình chữ nhật $D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.
- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f theo các ràng buộc được cho
$$f(x, y) = x^2y; \ x^2 + y^2 = 1.$$
- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f theo các ràng buộc được cho
$$f(x, y) = xy - x - 2y$$
trên tam giác D với các đỉnh $(3, 0), (0, 6), (0, 0)$.