

ĐÁP ÁN

Câu 1: Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên có phân phối đồng thời như sau:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,12	0,15	0,03
2	0,28	0,35	0,07

a. X và Y có độc lập hay không? Vì sao? (0,5 điểm)

Bảng phân phối xác suất của X :

X	1	2
P	0,3	0,7

Bảng phân phối xác suất của Y :

Y	1	2	3
P	0,4	0,5	0,1

Ta có:

$$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = 0,12$$

Suy ra X và Y độc lập.

X và Y độc lập khi:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \quad , \forall i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

b. Giả sử $Y > 1$, tính xác suất $X > 1$ (0,5 điểm)

$$P(X > 1 | Y > 1) = \frac{P(X > 1 | Y > 1)}{P(Y > 1)} = \frac{0,35 + 0,07}{0,5 + 0,1} = \frac{7}{10}$$

c. Tính $P(Y > X)$ (0,5 điểm)

$$P(Y > X) = 0,15 + 0,03 + 0,07 = 0,25$$

Câu 2: Cho (X, Y) là vecto ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + y), & \text{khi } -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases}$$

a. Xác định hằng số C (0,5 điểm)

Vì $f(x, y)$ là hàm mật độ đồng thời của X và Y nên:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 dx \int_0^1 C(x^2 + y) dy = 1$$

$$\Leftrightarrow C \int_{-1}^1 x^2 + \frac{1}{2} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{3}{5}$$

b. Tìm hàm mật độ thành phần của X, Y. Cho biết X, Y có độc lập với nhau hay không?

Hàm mật độ thành phần của X (0,75đ)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$= \begin{cases} \int_0^1 \frac{3}{5} (x^2 + y) dy, & x \in [-1; 1] \\ 0 & , x \notin [-1; 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{5} x^2 + \frac{3}{10}, & x \in [-1; 1] \\ 0 & , x \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Hàm mật độ thành phần của Y (0,75đ)

$$\begin{aligned}
 f_Y(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \\
 &= \begin{cases} \int_{-1}^1 \frac{3}{5} (x^2 + y) dx, & y \in [0; 1] \\ 0 & , y \notin [0; 1] \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{6y}{5} + \frac{2}{5}, & y \in [0; 1] \\ 0 & , y \notin [0; 1] \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét tính độc lập của 2 BNN (0,25đ)

Ta có:

$$f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(x)$$

Nên X, Y không độc lập (X, Y phụ thuộc)

c. Tính xác suất $P(Y < 0,6 | X < 0,5)$ (0,75 điểm)

$$P(Y < 0,6 | X < 0,5) = \frac{P(X < 0,5; Y < 0,6)}{P(X < 0,5)}$$

Mà:

$$P(X < 0,5) = \int_{-\infty}^{0,5} f_X(x) dx = \frac{3}{5} \int_{-1}^{0,5} x^2 + \frac{1}{2} dx = 0,675$$

$$P(X < 0,5; Y < 0,6) = \int_{-\infty}^{0,5} dx \int_{-\infty}^{0,6} f(x, y) dy$$

$$= \int_{-1}^{0,5} dx \int_0^{0,6} \frac{3}{5} (x^2 + y) dy = \frac{3}{5} \int_{-1}^{0,5} \left(\frac{3}{5} x^2 + \frac{9}{50} \right) dx = 0,297$$

Vậy

$$P(Y < 0,6|X < 0,5) = \frac{P(X < 0,5; Y < 0,6)}{P(X < 0,5)} = \frac{0,297}{0,675} = \frac{11}{25}$$



Câu 3: Người ta dùng phương pháp hấp thu nguyên tử (AAS) để phân tích hàm lượng kẽm(Zn) có trong tóc. Một kỹ thuật viên đã tiến hành phân tích một số mẫu tóc thu thập từ người dân ở thành phố A và thu được số liệu như sau:

X(ppm)	188	190	193	195	196	198	199	204
Số mẫu	3	4	5	10	7	3	2	1

Trong đó X là hàm lượng kẽm trong tóc, đơn vị là ppm (phần triệu)

a. Hãy ước lượng hàm lượng kẽm trung bình trong tóc của người dân ở thành phố A với độ tin cậy 95% (1 điểm)

Điều kiện: σ chưa biết, cỡ mẫu lớn

Xử lý số liệu: $n = 35$; $\bar{x} = 194,4857$; $s = 3,4502$

Độ tin cậy: $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \varphi(t_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2} = 0,475$

$\Rightarrow t_\alpha = 1,96$ (tra bảng Laplace)

Sai số: $\varepsilon = t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{3,4502}{\sqrt{35}} = 1,1431$

Khoảng ước lượng: (193,3426 ; 195,6288)

b. Nếu muốn ước lượng độ tin cậy là 97% và độ chính xác không quá 1,2 ppm thì cần thu thập và phân tích ít nhất bao nhiêu mẫu tóc? (1 điểm)

Độ tin cậy: $1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow \varphi(t_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2} = 0,485$

$\Rightarrow t_\alpha = 2,17$ (tra bảng Laplace)

Sai số: $\varepsilon = t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon_0 \Rightarrow n \geq (t_\alpha \frac{s}{\varepsilon_0})^2 = 38,9265$

Phải phân tích ít nhất 39 mẫu tóc

Câu 4: Một mẫu ngẫu nhiên gồm 199 nhà đầu tư trong một thành phố lớn, 104 trong số họ đồng ý với câu nói rằng: “Lưu lượng tiền mặt trong hoạt động kinh doanh là một số có giá trị của khả năng sinh lời.” Hãy kiểm định giả thuyết ở mức ý nghĩa 10% dựa vào kiểm định “hai đuôi” rằng phân nửa số nhà đầu tư (50%) sẽ đồng ý với câu nói trên.

Giả thiết: (0,25đ)

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 = 0,5 \\ H_1: p \neq 0,5 \end{cases}$$



Ta có: (1đ)

$$f = \frac{104}{199} = 0,523$$

$$t = \frac{t - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} = \frac{0,523 - 0,5}{\sqrt{0,5(1 - 0,5)/199}} = 0,65$$

So sánh: (1đ)

$$t_{\alpha/2} = t_{5\%} = 1,645$$

$t = 0,65 < t_{\alpha/2} = 1,645$: Chấp nhận giả thuyết H_0

Kết luận: (0,25đ) Những số liệu trên không đủ bằng chứng để bác bỏ giả thuyết H_0 cho rằng 50% các nhà đầu tư trong công ty đồng ý rằng lưu lượng tiền mặt trong hoạt động kinh doanh là một số đo có giá trị của khả năng sinh lời.

Câu 5: Theo dõi thu nhập (X triệu đồng/ tháng) và giá trị đặt tour du lịch (Y triệu đồng) ta được bảng số liệu sau

X \ Y	10	11	12	13	14
8	2				
9		2	4		
10			3	4	
11				2	1
12					2

- a. Hãy tính hệ số tương quan mẫu và nhận xét về tính tuyến tính của X và Y (mạnh hay yếu? đồng biến hay nghịch biến?) (0,5đ)
 $r = 0,903 \Rightarrow$ tính tuyến tính mạnh, đồng biến

b. Viết phương trình hồi quy Y theo X. Dự đoán giá trị của Y khi X là 4 triệu đồng. (0,5đ)

Phương trình hồi quy: $Y = 3,112 + 0,933X$

Khi $X = 4$ thì $Y = 6,844$

Cách bấm máy (Casio fx-580VN X)

Bước 1: Shift → menu → ▼ → 3(Thống kê) → 1(Mở tần số)

Bước 2: Menu → 6 (Thống kê) → 2($y=a+bx$) → nhập bảng số liệu

Bước 3: OPTN → 4(Tính hồi quy)

