Phép Tính Vi Phân Hàm Một Biến

Nguyễn Thị Hiên

Đại Học Công Nghệ Thông Tin
Đại Học Quốc Gia TP HCM

Ngày 18 tháng 11 năm 2020

Nội Dung

1. Đạo hàm và vi phân của hàm số một biến số
   - Định nghĩa đạo hàm
   - Tính chất của đạo hàm
   - Đạo hàm hàm hợp
   - Đạo hàm của hàm ngược
   - Đạo hàm của hàm sơ cấp
   - Đạo hàm của hàm ẩn
   - Đạo hàm bậc cao
   - Cực trị của hàm số
   - Xấp xỉ tuyến tính
   - Định Lý giá trị trung bình
   - Qui tắc l'Hôpital

Định nghĩa đạo hàm

Định nghĩa

Đạo hàm của hàm f tại x_0 được cho bởi số thực

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

nếu giới hạn tồn tại. Khi giới hạn này tồn tại, hàm số f là có đạo hàm hay khả vi tại x_0 với đạo hàm $f'(x_0)$.

Với $h = x - x_0$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Với $h = x - x_0$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Giả sử biến x thay đổi một lượng Δx từ giá trị x_0. Lượng thay đổi tương ứng của giá trị của hàm $y = f(x)$ là
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$.
Đạo hàm của f tại x_0 là tỉ lệ của thay đổi của y so với của x tại x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Với $h = x - x_0$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Giả sử biến x thay đổi một lượng Δx từ giá trị x_0. Lượng thay đổi tương ứng của giá trị của hàm $y = f(x)$ là
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$.
Đạo hàm của f tại x_0 là tỉ lệ của thay đổi của y so với của x tại x_0 :

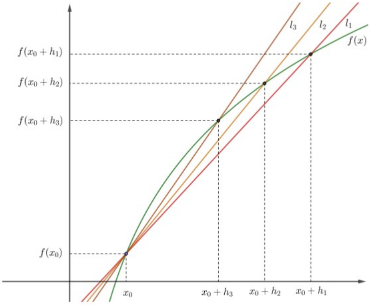
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Đạo hàm đo tỉ lệ thay đổi (đạo hàm đo tốc độ biến thiên).

Tiếp tuyến

Giả sử hàm f khả vi tại x_0, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số f tại $(x_0, f(x_0))$ là số thực $f'(x_0)$. Vậy đường thẳng tiếp tuyến của đồ thị hàm f tại x_0 có phương trình

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Hình 3.1.1: Bài toán hệ số góc của tiếp tuyến.

Vận tốc

Nếu f là vị trí của vật trên đường thẳng thực tại thời điểm t là hàm khả vi tại t thì số thực $f'(t)$, được gọi là vận tốc của vật tại thời điểm t.

Ví dụ

Ví dụ

- Cho f là một hàm hằng, tức là tồn tại số thực c sao cho $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm đạo hàm của f.

Ví dụ

Ví dụ

- Cho f là một hàm hằng, tức là tồn tại số thực c sao cho $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm đạo hàm của f.
- Với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, tính đạo hàm của hàm $f(x) = x^k$ tại $x = x_0$.

Ví dụ

Ví dụ

- Cho f là một hàm hằng, tức là tồn tại số thực c sao cho $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm đạo hàm của f.
- Với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, tính đạo hàm của hàm $f(x) = x^k$ tại $x = x_0$.
- Với $f(x) = \sqrt{x}$, tìm $f'(x)$ và miền xác định của f'.

Sự khả vi và sự liên tục

Định lý (Khả vi liên tục)

Nếu hàm số f khả vi tại x thì f liên tục tại x.

Ví dụ

Xét hàm số $f(x) = |x|$.

Tính chất của đạo hàm

Định lý

Cho các hàm số f và g có đạo hàm tại x, khi đó trong các công thức sau hàm bên vế trái có đạo hàm và hàm bằng vế phải:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Tính chất của đạo hàm

Định lý

Cho các hàm số f và g có đạo hàm tại x, khi đó trong các công thức sau hàm bên vế trái có đạo hàm và hàm bằng vế phải:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

Tính chất của đạo hàm

Định lý

Cho các hàm số f và g có đạo hàm tại x, khi đó trong các công thức sau hàm bên vế trái có đạo hàm và hàm bằng vế phải:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ *trong đó* α *là một hằng số thực.*

Tính chất của đạo hàm

Định lý

Cho các hàm số f và g có đạo hàm tại x, khi đó trong các công thức sau hàm bên vế trái có đạo hàm và hàm bằng vế phải:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ *trong đó* α *là một hằng số thực.*
4. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

Tính chất của đạo hàm

Định lý

Cho các hàm số f và g có đạo hàm tại x, khi đó trong các công thức sau hàm bên vế trái có đạo hàm và hàm bằng vế phải:

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ *trong đó* α *là một hằng số thực.*
4. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$, *với điều kiện* $g(x) \neq 0$.

Ví dụ

Tính đạo hàm

1. $(x^7 + 3x^6 - 2x^2 + 5)'$

Ví dụ

Tính đạo hàm

1. $(x^7 + 3x^6 - 2x^2 + 5)'$
2. $((x^2 + 3x - 1)(x^4 - 8x))'$

Ví dụ

Tính đạo hàm

1. $(x^7 + 3x^6 - 2x^2 + 5)'$
2. $((x^2 + 3x - 1)(x^4 - 8x))'$
3. $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'$

Đạo hàm của hàm hợp

Ví dụ

Tính đạo hàm của hàm $y = (x^2 + 1)^{100}$?

Đạo hàm của hàm hợp

Ví dụ

Tính đạo hàm của hàm $y = (x^2 + 1)^{100}$?

Ta đặt $u = x^2 + 1$, thì $y = u^{100}$.

Vi phân của Leibniz

Giả sử y là hàm của u và u là hàm của x, thì tỉ lệ thay đổi của y so với x bằng bao nhiêu? Ta viết đẳng thức của các số thực:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Vi phân của Leibniz

Giả sử y là hàm của u và u là hàm của x, thì tỉ lệ thay đổi của y so với x bằng bao nhiêu? Ta viết đẳng thức của các số thực:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Với giả thiết u khả vi theo x thì u liên tục theo x, nên $\Delta u \to 0$ kho $\Delta x \to 0$. Lấy giới hạn khi $\Delta x \to 0$, ta được

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Định lý (Quy tắc mắc xích (chain rule))

Nếu hàm số g khả vi tại x và hàm số f khả vi tại $g(x)$ thì hàm hợp $f \circ g$ khả vi tại x và

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Chứng minh.

Cho f bất kì khả vi tại $x = a$ thì

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a).$$

Đặt

$$\epsilon(\Delta x) = a\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a),$$

thì $\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta x) = 0$, ta viết được

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) = [f'(a) + \epsilon(\Delta x)]\Delta x.$$

$\square$

Chứng minh (tt).

Đặt $u = g(x)$ và áp dụng đẳng thức trên tại $x = a$ thì

$$\Delta u = [g'(a) + \epsilon_1(\Delta x)]\Delta x$$

với $\epsilon_1(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Đặt $y = f(u)$ và áp dụng đẳng thức trên tại $u = b = g(a)$ thì

$$\Delta y = [f'(b) + \epsilon_2(\Delta u)]\Delta u$$

với $\epsilon_2(\Delta u) \to 0$ khi $\Delta u \to 0$.
Kết hợp ta có,

$$\Delta y = [f'(b) + \epsilon_2(\Delta u)][g'(a) + \epsilon_1(\Delta x)]\Delta x.$$

Suy ra

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Ví dụ

Ví dụ

1. Tính đạo hàm của $y = (x^2 + 1)^{100}$.

Ví dụ

Ví dụ

1. Tính đạo hàm của $y = (x^2 + 1)^{100}$.
2. Tính đạo hàm $y = (x^3 - 4x^2 + 1)^5$.

Ví dụ

Ví dụ

1. Tính đạo hàm của $y = (x^2 + 1)^{100}$.
2. Tính đạo hàm $y = (x^3 - 4x^2 + 1)^5$.
3. Tính đạo hàm của $\sqrt[3]{x^3 + \sin x}$.

Đạo hàm của hàm ngược

Định lý

Giả sử $f : (a, b) \to (c, d)$ *là một song ánh liên tục và* f^{-1} *là hàm số ngược của* f. *Nếu có đọa hàm tại* $x \in (a, b)$ *và* $f'(x) \neq 0$, *thì* f^{-1} *có đạo hàm tại* $y = f(x)$, *và*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Đạo hàm của hàm lượng giác

1. Tính đạo hàm của $\sin(x)$.

Đạo hàm của hàm lượng giác

1. Tính đạo hàm của $\sin(x)$.
2. Tính đạo hàm của $\cos(x)$.

Đạo hàm của hàm lượng giác

1. Tính đạo hàm của $\sin(x)$.
2. Tính đạo hàm của $\cos(x)$.
3. Tính đạo hàm của $\tan(x)$.

Đạo hàm của hàm lượng giác

1. Tính đạo hàm của $\sin(x)$.
2. Tính đạo hàm của $\cos(x)$.
3. Tính đạo hàm của $\tan(x)$.
4. Tính đạo hàm của $\cot(x)$.

Đạo hàm của hàm lượng giác

1. Tính đạo hàm của $\sin(x)$.
2. Tính đạo hàm của $\cos(x)$.
3. Tính đạo hàm của $\tan(x)$.
4. Tính đạo hàm của $\cot(x)$.
5. Tính đạo hàm của hàm số $x = g(y) = \arcsin y$ với $-1 < y < 1$.

Đạo hàm của hàm mũ và hàm log

$$(e^x)' = e^x.$$

Đạo hàm của hàm mũ và hàm log

$$(e^x)' = e^x.$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Đạo hàm của hàm mũ và hàm log

$$(e^x)' = e^x.$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{y \ln a}.$$

Đạo hàm của hàm mũ và hàm log

$$(e^x)' = e^x.$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{y \ln a}.$$

Đặc biệt

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Đạo hàm của hàm lũy thừa

Công thức chung cho đạo hàm lũy thừa bất kì

$$(x^r)' = rx^{r-1},\ x > 0.$$

Định nghĩa hàm ẩn

Định nghĩa

Cho $y = f(x)$, giá trị của y phụ thuộc theo giá trị x và sự phụ thuộc này được biểu diễn một cách rõ ràng theo quy luật được cho bởi f, ta nói y là một hàm hiện của x.
Hàm thể hiện sự phụ thuộc của y vào x theo một đẳng thức được gọi là hàm ẩn.

Định nghĩa hàm ẩn

Định nghĩa

Cho $y = f(x)$, giá trị của y phụ thuộc theo giá trị x và sự phụ thuộc này được biểu diễn một cách rõ ràng theo quy luật được cho bởi f, ta nói y là một hàm hiện của x.
Hàm thể hiện sự phụ thuộc của y vào x theo một đẳng thức được gọi là hàm ẩn.

Ví dụ

Cho hàm số $x^3 + y^3 = 6y$. Tính y'?

Đạo hàm bậc cao

Định nghĩa (Đạo hàm cấp 2)

Nếu f có đạo hàm f' trong một khoảng nào đó thì f' cũng là một hàm. Nếu f' có đạo hàm thì đạo hàm này được gọi là đạo hàm cấp hai của f. Ta ký hiệu $f'' = (f')'$.

Đạo hàm bậc cao

Định nghĩa (Đạo hàm cấp 2)

Nếu f có đạo hàm f' trong một khoảng nào đó thì f' cũng là một hàm. Nếu f' có đạo hàm thì đạo hàm này được gọi là đạo hàm cấp hai của f. Ta ký hiệu $f'' = (f')'$.

Ví dụ

- Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Đạo hàm bậc cao

Định nghĩa (Đạo hàm cấp 2)

Nếu f có đạo hàm f' trong một khoảng nào đó thì f' cũng là một hàm. Nếu f' có đạo hàm thì đạo hàm này được gọi là đạo hàm cấp hai của f. Ta ký hiệu $f'' = (f')'$.

Ví dụ

- Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
- Xét hàm vị trí của vật trong không gian theo thời gian, thì đạo hàm bậc một là vận tốc chuyển động của vật, còn đạo hàm bậc hai là vận tốc thay đổi của vận tốc của vật, tức là gia tốc.

Đạo hàm bậc cao

Giả sử đạo hàm cấp $(n-1)$ được xác định, ký hiệu $f^{(n-1)}$, ta định nghĩa đạo hàm cấp n của f, ký hiệu là $f^{(n)}$, là đạo hàm của đọa hàm cấp $(n-1)$, tức là $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$.

Ví dụ

Đạo hàm bậc cao

Giả sử đạo hàm cấp $(n-1)$ được xác định, ký hiệu $f^{(n-1)}$, ta định nghĩa đạo hàm cấp n của f, ký hiệu là $f^{(n)}$, là đạo hàm của đọa hàm cấp $(n-1)$, tức là $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$.

Ví dụ

1. Tính đạo hàm đến cấp n của hàm $f(x) = \sin(x)$.

Đạo hàm bậc cao

Giả sử đạo hàm cấp $(n-1)$ được xác định, ký hiệu $f^{(n-1)}$, ta định nghĩa đạo hàm cấp n của f, ký hiệu là $f^{(n)}$, là đạo hàm của đọa hàm cấp $(n-1)$, tức là $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$.

Ví dụ

1. Tính đạo hàm đến cấp n của hàm $f(x) = \sin(x)$.
2. Tính đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \geq 0, \\ \frac{-x^2}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Cực trị của hàm số

Định nghĩa

Cho hàm f xác định trên miền D. Tại $c \in D$ nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc D thì ta nói f có giá trị cực địa toàn cục hay cực đại tuyệt đối, hay giá trị lớn nhất là $f(c)$ xảy ra tại c.

Cực trị của hàm số

Định nghĩa

Cho hàm f xác định trên miền D. Tại $c \in D$ nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc D thì ta nói f có giá trị cực địa toàn cục hay cực đại tuyệt đối, hay giá trị lớn nhất là $f(c)$ xảy ra tại c.

Định nghĩa

Tương tự, f có giá trị cực tiểu toàn cục hay cực tiểu tuyệt đối, hay giá trị nhỏ nhất là $f(c)$ xảy ra tại $c \in D$ nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi $x \in D$.

Cực trị của hàm số

Định nghĩa

Nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng mở (a, b) chứa c thì ta nói f có giá trị cực đại địa phương hay cực đại tương đối tại c.

Cực trị của hàm số

Định nghĩa

Nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng mở (a, b) chứa c thì ta nói f có giá trị cực đại địa phương hay cực đại tương đối tại c.

Định nghĩa

Nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng mở (a, b) chứa c thì ta nói f có giá trị cực tiểu địa phương hay cực tiểu tương đối tại c.

Cực trị của hàm số

Định nghĩa

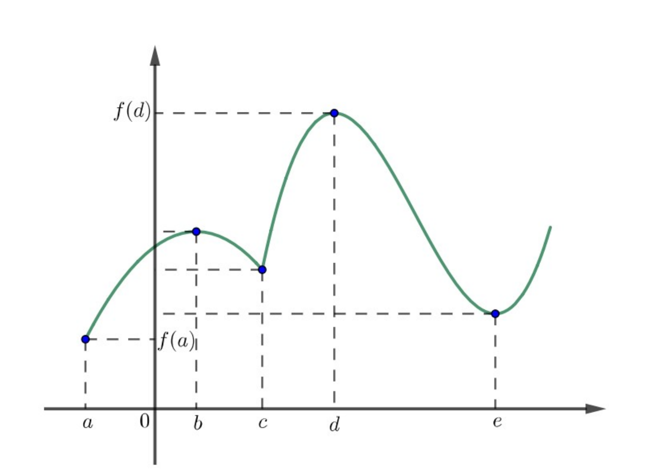
Nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng mở (a, b) chứa c thì ta nói f có giá trị cực đại địa phương hay cực đại tương đối tại c.

Định nghĩa

Nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng mở (a, b) chứa c thì ta nói f có giá trị cực tiểu địa phương hay cực tiểu tương đối tại c.

Chú ý

- Giá trị cực đại và cực tiểu được gọi chung là cực trị.
- Điểm tại đó xảy ra cực trị được gọi điểm cực trị.

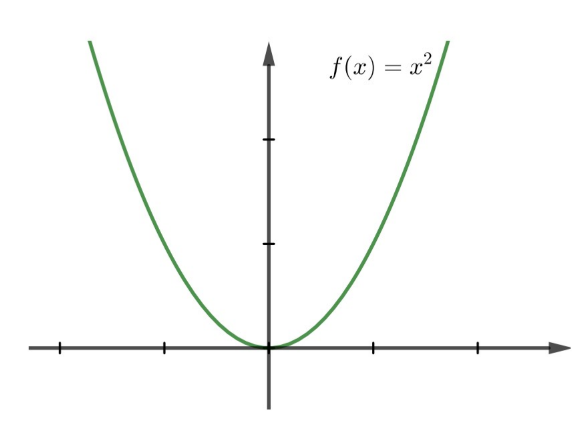


$f(d)$
$f(a)$
a
0
b
c
d
e

Cực trị của hàm số

Ví dụ

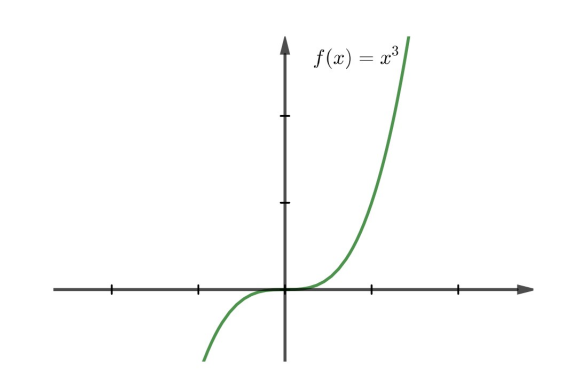
Xét $f(x) = x^2$ trên miền xác định $\mathbb{R}$.



Cực trị của hàm số

Ví dụ

Xét $f(x) = x^3$ trên miền xác định $\mathbb{R}$.



Cực trị của hàm số

Định lý (Định lý Fermat)

Nếu f có cực trị địa phương tại c và $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$.

Cực trị của hàm số

Định lý (Định lý Fermat)

Nếu f có cực trị địa phương tại c và $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$.

- Điểm tới hạn của hàm là những điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.

Cực trị của hàm số

Định lý (Định lý Fermat)

Nếu f có cực trị địa phương tại c và $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$.

- Điểm tới hạn của hàm là những điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Điểm dừng của hàm số là điểm tại đó đạo hàm bằng 0.

Ví dụ

1. Tìm điểm tới hạn của hàm $f(x) = |x|$.

Ví dụ

1. Tìm điểm tới hạn của hàm $f(x) = |x|$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

Sự tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Định lý (Định lý cực trị toàn cục)

Nếu f liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ thì f đạt giá trị cực đại toàn cục và giá trị cực tiểu toàn cục trên $[a, b]$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số trên một khoảng đóng $[a, b]$:

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn bên trong khoảng mở (a, b).

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số trên một khoảng đóng $[a, b]$:

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn bên trong khoảng mở (a, b).

Bước 2: Tính các giá trị của hàm tại các điểm tới hạn tìm được bước 1 và tại các điểm mút a và b.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số trên một khoảng đóng $[a, b]$:

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn bên trong khoảng mở (a, b).

Bước 2: Tính các giá trị của hàm tại các điểm tới hạn tìm được bước 1 và tại các điểm mút a và b.

Bước 3: Số lớn nhất trong các giá trị tìm được ở bước 2 là giá trị lớn nhất của hàm, số nhỏ nhất là giá trị nhỏ nhất của hàm.

Ví dụ

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$ trên đoạn $[-1, 3]$.

Tính tăng, giảm và cực trị

◇ Một hàm số được gọi là tăng nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Tính tăng, giảm và cực trị

- Một hàm số được gọi là tăng nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Một hàm số được gọi là tăng ngặt nếu giá trị của biến tăng ngặt thì giá trị của hàm không tăng:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Tính tăng, giảm và cực trị

- Một hàm số được gọi là tăng nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Một hàm số được gọi là tăng ngặt nếu giá trị của biến tăng ngặt thì giá trị của hàm không tăng:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Một hàm số được gọi là giảm nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không tăng:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Tính tăng, giảm và cực trị

◇ Một hàm số được gọi là tăng nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

◇ Một hàm số được gọi là tăng ngặt nếu giá trị của biến tăng ngặt thì giá trị của hàm không tăng:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

◇ Một hàm số được gọi là giảm nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không tăng:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

◇ Một hàm số được gọi là giảm ngặt nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Tính tăng, giảm và đạo hàm

Định lý

Giả sử f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên khoảng (a, b).
Hàm f là hàm giảm trên $[a, b]$ khi và chỉ khi $f' \leq 0$ trên (a, b).
Hàm f là hàm tăng trên $[a, b]$ khi và chỉ khi $f' \geq 0$ trên (a, b).

Định lý (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc nhất cho cực trị)

Cho hàm số f liên tục tại c và khả vi trong lân cận của c, nhưng không nhất thiết khả vi tại c. Giả sử c là một điểm tới hạn của f.

a) *Nếu $f'(x) > 0$ ở phía bên trái của c và $f'(x) < 0$ ở phía trên bên phải của c thì f có cực đại địa phương tại c.*

Định lý (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc nhất cho cực trị)

Cho hàm số f liên tục tại c và khả vi trong lân cận của c, nhưng không nhất thiết khả vi tại c. Giả sử c là một điểm tới hạn của f.

a) *Nếu $f'(x) > 0$ ở phía bên trái của c và $f'(x) < 0$ ở phía trên bên phải của c thì f có cực đại địa phương tại c.*

b) *Nếu $f'(x) < 0$ ở phía bên trái của c và $f'(x) > 0$ ở phía trên bên phải của c thì f có cực tiểu địa phương tại c.*

Định lý (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc nhất cho cực trị)

Cho hàm số f liên tục tại c và khả vi trong lân cận của c, nhưng không nhất thiết khả vi tại c. Giả sử c là một điểm tới hạn của f.

a) *Nếu $f'(x) > 0$ ở phía bên trái của c và $f'(x) < 0$ ở phía trên bên phải của c thì f có cực đại địa phương tại c.*
b) *Nếu $f'(x) < 0$ ở phía bên trái của c và $f'(x) > 0$ ở phía trên bên phải của c thì f có cực tiểu địa phương tại c.*
c) *Nếu $f'(x)$ không đổi dấu quanh điểm c thì f không có cực trị tại c.*

Hàm trơn

Giả sử hàm f có đạo hàm liên tục trên một khoảng, thì các điểm tới hạn của f là các điểm dừng của f.

Hàm trơn

Giả sử hàm f có đạo hàm liên tục trên một khoảng, thì các điểm tới hạn của f là các điểm dừng của f.

Định nghĩa

Nếu a, b là hai điểm dừng liên tiếp của f thì f' phải luôn dương hoặc luôn âm trên khoảng (a, b). Những hàm có tính chất trên được gọi là hàm trơn.

Xét tính tăng giảm và tìm cực trị của một hàm trơn trên một khoảng:

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn của hàm, bằng cách giải phương trình $f'(x) = 0$.

Xét tính tăng giảm và tìm cực trị của một hàm trơn trên một khoảng:

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn của hàm, bằng cách giải phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 2: Xét dấu của đạo hàm f' quanh các điểm tới hạn tìm được ở bước 1. Trên khoảng giữa hai điểm tới hạn liên tiếp, dấu của f' không đổi. Xét dấu của f' để xác định hàm f tăng hay giảm.

Xét tính tăng giảm và tìm cực trị của một hàm trơn trên một khoảng:

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn của hàm, bằng cách giải phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 2: Xét dấu của đạo hàm f' quanh các điểm tới hạn tìm được ở bước 1. Trên khoảng giữa hai điểm tới hạn liên tiếp, dấu của f' không đổi. Xét dấu của f' để xác định hàm f tăng hay giảm.

Bước 3: Tại một điểm tới hạn, nếu f' đổi tư âm sang dương thì f có cực tiểu địa phương tại đó, nếu f' đổi từ dương sang âm thì f có cực đại địa phương tại đó, nếu f' không đổi dấu thì f không có cực trị địa phương tại đó.

Ví dụ

Xét tính tăng giảm của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

Tính lồi, lõm và điểm uốn

Định lý (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai cho cực trị)

Giả sử f có đạo hàm cấp hai liên tục quanh điểm c và c là một điểm dừng của f.

a) *Nếu $f''(c) > 0$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại c.*

Tính lồi, lõm và điểm uốn

Định lý (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai cho cực trị)

Giả sử f có đạo hàm cấp hai liên tục quanh điểm c và c là một điêm dừng của f.

a) *Nếu $f''(c) > 0$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại c.*

b) *Nếu $f''(c) < 0$ thì f đạt cực đại địa phương tại c.*

Tính lồi, lõm và điểm uốn

Định lý (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai cho cực trị)

Giả sử f có đạo hàm cấp hai liên tục quanh điểm c và c là một điểm dừng của f.

a) *Nếu $f''(c) > 0$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại c.*

b) *Nếu $f''(c) < 0$ thì f đạt cực đại địa phương tại c.*

Tính lồi, lõm và điểm uốn

Định lý (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai cho cực trị)

Giả sử f có đạo hàm cấp hai liên tục quanh điểm c và c là một điêm dừng của f.

a) *Nếu $f''(c) > 0$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại c.*

b) *Nếu $f''(c) < 0$ thì f đạt cực đại địa phương tại c.*

Ví dụ

Xét cực trị của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

Hàm lồi-Hàm lõm

Định nghĩa

Hàm f được gọi là lồi trên khoảng (a, b) nếu với mọi x, y thuộc (a, b) và với mọi $\alpha \in [0, 1]$ thì

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Hàm lồi-Hàm lõm

Định nghĩa

Hàm f được gọi là lồi trên khoảng (a, b) nếu với mọi x, y thuộc (a, b) và với mọi $\alpha \in [0, 1]$ thì

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Định lý

Giả sử hàm f trơn trên khoảng (a, b). Khi đó f là lồi khi và chỉ khi f' là tăng. Tương tự, f là lõm khi và chỉ khi f' là giảm.

Hàm lồi-Hàm lõm

Định nghĩa

Hàm f được gọi là lồi trên khoảng (a, b) nếu với mọi x, y thuộc (a, b) và với mọi $\alpha \in [0, 1]$ thì

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Định lý

Giả sử hàm f trơn trên khoảng (a, b). Khi đó f là lồi khi và chỉ khi f' là tăng. Tương tự, f là lõm khi và chỉ khi f' là giảm.

Hệ quả

Giả sử hàm f có đạo hàm cấp hai liên tục trong khoảng (a, b). điều kiện cần và đủ để hàm f lồi trên (a, b) là $f'' \geq 0$ trên (a, b). Điều kiện cần và đủ để hàm f lõm trên (a, b) là $f'' \leq 0$ trên (a, b).

Định nghĩa

Điểm của đồ thị mà ở đó đồ thị đổi từ tính lồi sang lõm hoặc ngược lại, được gọi là điểm uốn của đồ thị (của hàm).

Định nghĩa

Điểm của đồ thị mà ở đó đồ thị đổi từ tính lồi sang lõm hoặc ngược lại, được gọi là điểm uốn của đồ thị (của hàm).

Mệnh đề

Giả sử hàm f có đạo hàm bậc hai liên tục quanh điểm c. Nếu f'' đổi dấu tại c thì f có điểm uốn tại c.

Ví dụ

Xét tính lồi của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

Xấp xỉ tuyến tính

Giả sử hàm f khả vi tại x thì

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nguyên lí xấp xỉ tuyến tính:

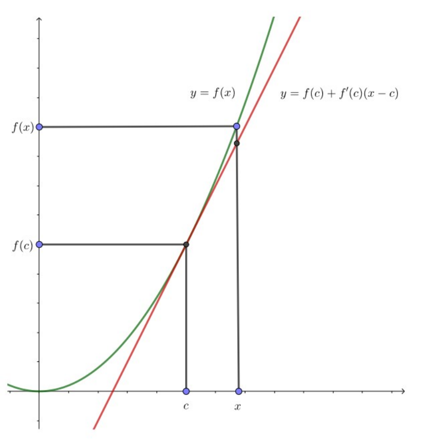
$$h \approx 0 \Rightarrow f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h.$$

Nếu viết $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ thì

$$\Delta x \approx 0 \Rightarrow \Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Xấp xỉ tuyến tính

t



Xấp xỉ đường cong đồ thị bởi tiếp tuyến của đồ thị

$$x \approx c \Rightarrow f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c).$$

Xấp xỉ tuyến tính

Ví dụ

- Ước lượng $\sqrt{1.01}$.

Xấp xỉ tuyến tính

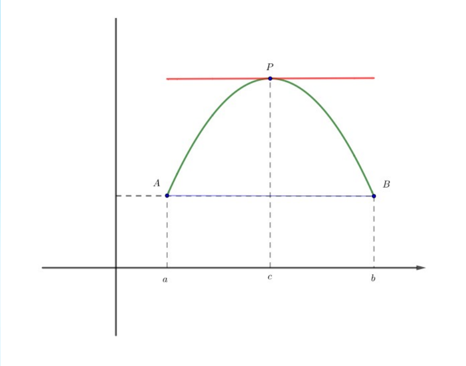
Ví dụ

- Ước lượng $\sqrt{1.01}$.
- Ước lượng $\dfrac{1}{4.002}$.

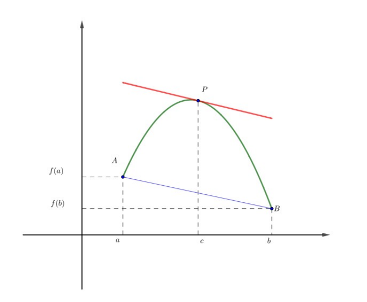
Các định lý giá trị trung bình

Định lý (Định lý Rolle)

Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng (a, b), và $f(a) = f(b)$, thì tồn tại một số thực thuộc (a, b) sao cho $f'(c) = 0$.



Các định lý giá trị trung bình



Định lý (Định lý giá trị trung bình-Định lý Lagrange)

Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì có $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý (Định lý giá trị trung bình Cauchy)

Nếu hai hàm f, g liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì tồn tại điểm c thuộc (a, b) sao cho

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Định lý (Định lý giá trị trung bình Cauchy)

Nếu hai hàm f, g liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì tồn tại điểm c thuộc (a, b) sao cho

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Hệ quả

Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x trong khoảng (a, b)

Định lý (Định lý giá trị trung bình Cauchy)

Nếu hai hàm f, g liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì tồn tại điểm c thuộc (a, b) sao cho

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Hệ quả

Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x trong khoảng (a, b) thì f là hàm hằng trên khoảng (a, b).

Định lý (Định lý giá trị trung bình Cauchy)

Nếu hai hàm f, g liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì tồn tại điểm c thuộc (a, b) sao cho

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Hệ quả

Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x trong khoảng (a, b) thì f là hàm hằng trên khoảng (a, b).

Hệ quả

Nếu $f'(x) = g'(x)$ với mọi x trong khoảng (a, b), thì $f - g$

Định lý (Định lý giá trị trung bình Cauchy)

Nếu hai hàm f, g liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì tồn tại điểm c thuộc (a, b) sao cho

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Hệ quả

Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x trong khoảng (a, b) thì f là hàm hằng trên khoảng (a, b).

Hệ quả

Nếu $f'(x) = g'(x)$ với mọi x trong khoảng (a, b), thì $f - g$ là hàm hằng trên khoảng (a, b).

Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Mệnh đề

Giả sử f và g khả vi trong khoảng (a, b) *và* $g'(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$. *Nếu* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ *và* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *bằng một số thực hoặc* $-\infty$ *hoặc* ∞, *thì*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Mệnh đề

Giả sử f và g khả vi trong khoảng (a, b) và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Nếu $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ và $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bằng một số thực hoặc $-\infty$ hoặc ∞, thì

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mệnh đề đúng nếu thay giới hạn $x \to a^+$ bằng $x \to b^-$ hoặc $x \to c$ với $c \in (a, b)$. Trường hợp $a = -\infty$ và $b = \infty$ mệnh đề vẫn đúng.

Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Ví dụ

Tính các giới hạn

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1};$$

2. $$\lim \frac{2x^3}{x-\sin x};$$

3. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}.$$

Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Mệnh đề

Giả sử f và g khả vi trong khoảng (a, b) và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Nếu $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bằng một số thực hoặc $-\infty$ hoặc ∞, thì

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Mệnh đề

Giả sử f và g khả vi trong khoảng (a, b) *và* $g'(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$. *Nếu* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$ *và* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *bằng một số thực hoặc* $-\infty$ *hoặc* ∞, *thì*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mệnh đề đúng nếu thay giới hạn $x \to a^+$ bằng $x \to b^-$ hoặc $x \to c$ với $c \in (a, b)$. Trường hợp $a = -\infty$ và $b = \infty$ mệnh đề vẫn đúng.

Ví dụ

Tính các giới hạn

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{2x+5};$$

Ví dụ

Tính các giới hạn

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{2x+5};$$

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2};$$

Ví dụ

Tính các giới hạn

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{2x+5};$$

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2};$$

3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

Một số định lý giới hạn cần lưu ý

Định lý

Nếu f liên tục tại b và $\lim_{x\to a} g(x) = b$, thì $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$, tức là

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Định lý

Nếu $r > 0$ là một số hữu tỉ, thì $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$,
Nếu $r > 0$ là một số hữu tỉ sao cho x^r xác định $\forall x$, thì $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$.

Các dạng vô định khác

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

Các dạng vô định khác

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.
2. $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Các dạng vô định khác

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.
2. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.
3. $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Các dạng vô định khác

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.
2. $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.
3. $\lim_{x\to 0^+} x^x$.
4. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Các dạng vô định khác

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.
2. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.
3. $\lim_{x\to 0^+} x^x$.
4. $\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
5. $\lim_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Các dạng vô định khác

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.
2. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.
3. $\lim_{x\to 0^+} x^x$.
4. $\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
5. $\lim_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$.
6. $\lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Các dạng vô định khác

Tính các giới hạn sau:

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.
2. $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.
3. $\lim_{x\to 0^+} x^x$.
4. $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
5. $\lim_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$.
6. $\lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$.
7. $\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1-cosx}$.