Chương 4:Ánh xạ tuyến tính

Nguyễn Thị Thái Hà
Email: nttha@utc2.edu.vn

Định nghĩa

Cho X, Y là hai tập hợp khác rỗng. Một ánh xạ đi từ X tới Y là một quy tắc nào đấy cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$.

Mô tả ngắn gọn ánh xạ f, ta ký hiệu

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

hoặc

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- X là tập con của $\mathbb{R}$, tương ứng $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm số một biến số. Ví dụ,

$$f(x) = x^2 + 1,\ f(x) = e^x,\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}.$$

- X là tập con của $\mathbb{R}^2$, tương ứng $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm số hai biến số. Ví dụ,

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x) = x_1^2 + 3x_2.$$

Với ánh xạ f cho trước

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \rightarrow & Y \\ & x & \mapsto & y = f(x), \end{array}$$

ta gọi:

- X là tập nguồn của f.
- Y là tập đích của f.
- $y = f(x)$ là ảnh của x và gọi x là tạo ảnh của y.

Định nghĩa

Cho U, V là các không gian tuyến tính trên cùng trường $\mathbb{K}$. Ánh xạ $f : U \to V$ được gọi là *ánh xạ tuyến tính* nếu nó thỏa mãn hai điều kiện:

i) $f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in U$

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x), \ \forall x \in U, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$

Chú ý : Ta có thể thay i) và ii) bằng iii)

iii) $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \ \forall x, y \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$

Ví dụ

Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, được xác định như sau:

$$f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - 3x_2, 3x_1), \ \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.

Giải: Lấy hai phần tử bất kỳ $x, y \in \mathbb{R}^2$, giả sử $x = (x_1, x_2)$ và $y = (y_1, y_2)$, ta có $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$. Theo định nghĩa ánh xạ f, ta có :

$$\begin{aligned} f(x+y) =& f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ =& ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2), 3(x_1 + y_1)) \\ =& (x_1 + x_2, x_1 - 3x_2, 3x_1) + (y_1 + y_2, y_1 - 3y_2, 3y_1) \\ =& f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) = f(x) + f(y). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Lấy x bất kỳ thuộc $\mathbb{R}^2$ và lấy λ bất kỳ thuộc $\mathbb{R}$, giả sử $x = (x_1, x_2)$, ta có $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. Ta có :

$$\begin{aligned} f(\lambda x) =& f(\lambda x_1, \lambda x_2) \\ =& ((\lambda x_1) + (\lambda x_2), (\lambda x_1) - 3(\lambda x_2), 3(\lambda x_1)) \\ =& \lambda(x_1 + x_2, x_1 - 3x_2, 3x_1) = \lambda f(x). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Từ (4.1) và (4.2), ta khẳng định được rằng f là một ánh xạ tuyến tính.

Ví dụ

Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi
$f(x) = (x_2^2; 2x_1 - 3x_2)$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Hỏi f có là ánh xạ tuyến tính không?

Giải: Ta xét $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$ và tương ứng ta có $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. Nếu như $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ thì

$$\begin{aligned} f(\lambda x) =& f(\lambda x_1, \lambda x_2) = ((\lambda x_2)^2, 2(\lambda x_1) - 3(\lambda x_2)) \\ =& \lambda(\lambda x_2^2, 2x_1 - 3x_2) \neq \lambda f(x). \end{aligned}$$

Bởi vậy, ta khẳng định được f không phải là ánh xạ tuyến tính.

Định lý

Cho ma trận thực A cỡ $m \times n$, *ánh xạ ma trận* $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được xác định bởi $f_A(x) = Ax$, với mọi véc tơ cột $x \in \mathbb{R}^n$, là một ánh xạ tuyến tính.

Định lý

Cho ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$, khi đó:

1. $f(\theta_U) = \theta_V$.
2. $f(-x) = -f(x),\ \forall\, x \in U$.
3. $f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m) =$
   $\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \ldots + \lambda_m f(a_m),\ \forall\, a_i \in U$ và $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Ví dụ

Tìm ma trận chính tắc của $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, với
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Giải: Gọi A là ma trận chính tắc của f. Khi đó, A là ma trận duy nhất để $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ta có đẳng thức $f(x) = Ax$. Biểu diễn $f(x)$ dưới dạng cột và ta có biến đổi như sau:
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Từ đó, ta suy ra ma trận chính tắc A của ánh xạ f là
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cho ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ và cho cặp cơ sở $(a), (b)$ với $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là cơ sở của U và $(b) = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ là cơ sở của V. Ta có

$$\begin{cases} f(a_1) & = & a_{11}b_1 & + & a_{21}b_2 & + & \ldots & + & a_{m1}b_m \\ f(a_2) & = & a_{12}b_1 & + & a_{22}b_2 & + & \ldots & + & a_{m2}b_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(a_n) & = & a_{1n}b_1 & + & a_{2n}b_2 & + & \ldots & + & a_{mn}b_m \end{cases} \quad (\text{với } a_{ij} \in \mathbb{K}).$$

Ma trận ma trận của ánh xạ tuyến tính theo cặp cơ sở a và b là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ và cho cặp cơ sở $(a), (b)$ với $(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là cơ sở của U và $(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ là cơ sở của V. Ma trận A có các cột theo thứ tự là tọa độ của các phần tử $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ trên cơ sở (b) được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trên cặp cơ sở $(a), (b)$.

Quy trình để tìm ma trận của một ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$

- **Bước 1**: Lựa chọn cặp cơ sở $(a), (b)$ với (a) là cơ sở của U và (b) là cơ sở của V.
- **Bước 2**: Tính toán $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$.
- **Bước 3**: Biểu diễn $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ theo cơ sở (b).
- **Bước 4**: Ma trận của f trên cặp cơ sở $(a), (b)$ bằng cách lấy hệ số của các biểu diễn ở bước 3 viết theo dạng cột.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi
$$f(x) = (3x_1 + 5x_2 - 7x_3, x_1 + 2x_3), \ \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$
a) Tìm ma trận của f theo các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^2$.
b) Tìm ma trận của f theo cơ sở (a) của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở (b) của $\mathbb{R}^2$ cho như sau:
$$(a): \ a_1 = (2, 3, -1); \ a_2 = (1, 0, 2); \ a_3 = (1, 1, 1).$$
$$(b): \ b_1 = (0, 2); \ b_2 = (-1, 0).$$

Giải: a) Gọi cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$, với $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. Gọi cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $(e') = \{e'_1, e'_2\}$, với $e'_1 = (1, 0), e'_2 = (0, 1)$. Ta có
$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (3, 1) = 3e'_1 + 1e'_2,$$
$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (5, 0) = 5e'_1 + 0e'_2,$$

Từ đó, ta lập ra được ma trận của f trên cặp cơ sở chính tắc $(e), (e')$ là:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Tính $f(a_i),\ i = 1, 2, 3$ và biểu diễn trong cơ sở (b), ta có:

$$f(a_1) = f(2,3,-1) = (28,0) = 0.(0,2) + (-28).(-1,0) = 0b_1 - 28b_2,$$
$$f(a_2) = f(0,1,0) = (-11,5) = \frac{5}{2}.(0,2) + 11.(-1,0) = \frac{5}{2}b_1 + 11b_2,$$
$$f(a_3) = f(0,0,1) = (1,3) = \frac{3}{2}.(0,2) + (-1).(-1,0) = \frac{3}{2}b_1 - b_2.$$

Từ đó, ta nhận được ma trận của f cần tìm là $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -28 & 11 & -1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{P}_4[t]$ trong cơ sở chính tắc của các không gian tương ứng, biết rằng

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha t^4 + 2\beta t^3 + 5\gamma, \ \forall\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Giải: Cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^3$ là $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$, với $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. Cơ sở chính tắc của không gian $\mathbf{P}_4[t]$ là $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= f(1,0,0) = t^4 = 0.1 + 0.t + 0.t^2 + 0.t^3 + 1.t^4,\\
f(e_2) &= f(0,1,0) = 2t^3 = 0.1 + 2.t + 0.t^2 + 2.t^3 + 0.t^4,\\
f(e_3) &= f(0,0,1) = 5 = 5.1 + 0.t + 0.t^2 + 0.t^3 + 0.t^4.
\end{aligned}$$

Vậy ma trận của f trong các cơ sở chính tắc tương ứng có dạng

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Định lý

Cho ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$ và cho A là ma trận của f trên cặp cơ sở $(a), (b)$ với $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset U$, $(b) = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subset V$. Khi đó, với mọi $x \in U$ ta có đẳng thức tọa độ

$$[f(x)]_b = A[x]_a, \tag{4.11}$$

trong đó $[x]_a$ là tọa độ của x trên cơ sở (a), $[f(x)]_b$ là tọa độ của $f(x)$ trên cơ sở (b).

Nhận xét

Cho ánh xạ tuyến tính $f : U \to V$. Nếu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận sao cho với mỗi $x \in U$ ta có đẳng thức

$$[f(x)]_b = A[x]_a,$$

trong đó $[x]_a$ là tọa độ của x trên cơ sở (a) của U, $[f(x)]_b$ là tọa độ của $f(x)$ trên cơ sở (b) của V thì A chính là ma trận của f trên cặp cơ sở $(a), (b)$.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, xác định bởi
$f(x) = (x_1+2x_2-x_3, 2x_2-x_2+x_3, x_2+5x_3, 3x_1+4x_2)$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$

Tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$.

Giải: Giả sử $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$, $(e') = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$.

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,2,0,3) = e'_1 + 2e'_2 + 3e'_4,$$
$$f(e_2) = f(0,1,0) = (2,-1,1,4) = 2e'_1 - e'_2 + e'_3 + 4e'_4,$$
$$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,1,5,0) = -e'_1 + e'_2 + 5e'_3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ là ma trận cần tìm.}$$

Cách 2: Trên các cơ sở chính tắc $(e), (e')$ tương ứng của các không gian $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$, tọa độ của x chính là $[x]_e = (x_1, x_2, x_3)$, tọa độ của $f(x)$ chính là $[f(x)]_{e'} = (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_2 - x_2 + x_3, x_2 + 5x_3, 3x_1 + 4x_2)$. Ta biểu diễn các tọa độ dưới dạng cột và có tính toán

$$[f(x)]_{e'} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_2 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 5x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Do ma trận A cần tìm là ma trận duy nhất sao cho $[f(x)]_{e'} = A[x]_e$ với mọi $x \in \mathbb{R}^3$ nên

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 4.5

Cho không gian tuyến tính U. Một biến đổi tuyến tính của U được hiểu là ánh xạ tuyến tính đi từ không gian tuyến tính U vào chính không gian đó.

Chú ý

Các biến đổi tuyến tính cũng được gọi là các tự đồng cấu tuyến tính hoặc ngắn gọn hơn là tự đồng cấu. Đối với biến đổi tuyến tính $f : U \to U$, không gian tuyến tính U vừa là không gian nguồn, vừa là không gian đích. Do đó việc sử dụng một cặp hai cơ sở khác nhau để lập ma trận cho f là không cần thiết. Vì thế ta quy ước rằng việc lập ma trận của f chỉ sử dụng đến một cơ sở của không gian U.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi:
$f(x) = (2x_1+5x_2-4x_3, x_1-x_2+7x_3, 3x_1+x_2+x_3), \forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a) Tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Tìm ma trận của f theo cơ sở (a) cho như sau:

$$a_1 = (0, 1, 0);\ a_2 = (0, 0, 1);\ a_3 = (1, 0, 0).$$

c) Tìm ma trận của f theo cơ sở (b) cho như sau:

$$b_1 = (0, 0, 2);\ b_2 = (0, 3, 1);\ b_3 = (2, -1, 1).$$

Giải: a) Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$, với $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. Ta tính $f(e_i)$, $i = 1, 2, 3$ và biểu diễn trong cơ sở chính tắc (e), ta có:

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, 1, 3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3,$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (5, -1, 1) = 5e_1 - e_2 + e_3,$$

Vậy ma trận của f theo cơ sở chính tắc là $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Tính $f(a_i),\ i = 1, 2, 3$ và biểu diễn trong cơ sở (a), ta có:

$$f(a_1) = (5, -1, 1) = -(0, 1, 0) + (0, 0, 1) + 5(1, 0, 0) = -a_1 + a_2 + 5a_3,$$
$$f(a_2) = (-4, 7, 1) = 7(0, 1, 0) + (0, 0, 1) - 4(1, 0, 0) = 7a_1 + a_2 - 4a_3,$$
$$f(a_3) = (2, 1, 3) = (0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) + 2(1, 0, 0) = a_1 + 3a_2 + 2a_3.$$

Vậy ma trận của f theo cơ sở (a) là $A_a = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Tính $f(b_i),\ i = 1, 2, 3$ và tìm biểu diễn của chúng trong cơ sở (b). Việc tính toán chi tiết để tìm biểu diễn chứa đựng việc giải một chuỗi ba hệ Cramer. Bỏ qua các tính toán đó ta mô tả kết quả như sau:

$$
\begin{aligned}
f(b_1) &= (-8, 14, 2) = \frac{4}{3}b_1 + \frac{10}{3}b_2 - 4b_3,\\
f(b_2) &= (11, 4, 4) = -\frac{14}{6}b_1 + \frac{19}{6}b_2 + \frac{11}{2}b_3,\\
f(b_3) &= \frac{1}{2}b_1 + \frac{15}{6}b_2 - \frac{5}{2}b_3.
\end{aligned}
$$

Vậy ma trận của f theo cơ sở (a) là $A_b = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{14}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{10}{3} & \frac{19}{6} & \frac{15}{6} \\ -4 & \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Cho (a) và (b) là hai cơ sở không gian vector U ; biến đổi tuyến tính $f : U \to U$.
Ma trận của f trên cơ sở a là A_a.
Ma trận của f trên cơ sở b là A_b. Ta gọi T_{ab} và T_{ba} là các ma trận chuyển cơ sở tương ứng giữa hai cơ sở (a) và (b) của không gian tuyến tính U. Khi đó ta có

$$A_a = T_{ab}A_bT_{ba} = T_{ab}A_bT_{ab}^{-1} = T_{ba}^{-1}A_bT_{ba}.$$

Công thức giúp ta có thể tìm được ma trận của biến đổi tuyến tính trong cơ sở mới khi biết ma trận của nó trong cơ sở cũ và biết ma trận chuyển cơ sở.

Ví dụ

Cho biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi

$$f(x) = (2x_1 + 8x_2, 3x_1 - 5x_2), \forall\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.
b) Tìm ma trận của f trong cơ sở (a) của $\mathbb{R}^2$ cho như sau:
$a_1 = (1, 4),\ a_2 = (-2, 3)$.

Giải: a) Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $(e) = \{e_1, e_2\}$, với $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Ta có

$$f(e_1) = (2, 3) = 2e_1 + 3e_2; \quad f(e_2) = (8, -5) = 8e_1 - 5e_2.$$

Do đó, ma trận của f trong cơ sở chính tắc là $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

b) Ta có thể lập ma trận cho ánh xạ f trên cơ sở (a) thông qua việc tính toán $f(a_i)$ và biểu diễn chúng trong cơ sở (a). Hoặc cách sau

Gọi ma trận của f trong cơ sở (a) là A_a. Gọi T_{ea} là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (a). Ta có

$$a_1 = (1, 4) = e_1 + 4e_2; \quad a_2 = (-2, 3) = -2e_1 + 3e_2.$$

Từ đó, ta nhận được ma trận $T_{ea} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Để tìm ma trận chuyển cơ sở T_{ae}, ta có $T_{ae} = T_{ea}^{-1}. = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} A_a = T_{ae}A_eT_{ea} &= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 12 & 14 \\ -5 & -37 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 68 & 18 \\ -153 & -101 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ví dụ

Cho ma trận của biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ trong cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận của f trong cơ sở $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, biết $b_1 = a_1 + a_2 - a_3, b_2 = 2a_1 - 3a_2 - a_3, b_3 = a_1 + 2a_2 + 5a_3$.

Giải: Từ mối liên hệ giữa hai cơ sở (a) và (b) đã cho, ta suy ra ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (a) sang cơ sở (b) là

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ta cần tìm ma trận chuyển cơ sở từ (b) sang (a). Ta biết, $T_{ba} = T_{ab}^{-1}$.

Sau một số tính toán ta nhận được

$$T_{ba} = T_{ab}^{-1} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 7 & -6 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Từ đó, ta tìm được ma trận B của biến đổi tuyến tính f trong cơ sở (b) nhờ công thức

$$B = T_{ba}AT_{ab} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 13 & 11 & -7 \\ 7 & -6 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{31}\begin{pmatrix} -13 & 54 & 20 \\ 24 & 10 & 6 \\ 27 & 19 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 21 & 208 & 195 \\ 28 & 12 & 74 \\ 47 & -2 & 60 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa

Cho biến đổi tuyến tính f trên không gian tuyến tính U. Ta nói số λ là giá trị riêng của ánh xạ f nếu tồn tại một véc tơ $x \in U$ sao cho $x \neq \theta$ và

$$f(x) = \lambda x. \qquad (*)$$

Đồng thời, mỗi véc tơ $x \neq \theta$ thỏa mãn (*) được gọi là một véc tơ riêng của f tương ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được xác định bởi
$f(x) = (3x_1+x_2+2x_3, x_1+3x_2+2x_3, 3x_1+3x_2+5x_3)$, $\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$
Chứng minh rằng các véc tơ $a_1 = (1, 1, 2), a_2 = (2, 2, -3)$ là các véc tơ riêng của f và chỉ ra các giá trị riêng tương ứng.

Giải: Tính toán trực tiếp theo định nghĩa của f, ta thấy
$f(a_1) = f(1, 1, 2) = (8, 8, 16) = 8a_1$. Bởi vậy, a_1 là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 8$.
$f(a_2) = f(2, 2, -3) = (2, 2, -3) = a_2$. Bởi vậy, a_2 là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$.

Ta ký hiệu

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

và gọi $P_A(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Tiếp theo, nếu A là ma trận của một biến đổi tuyến tính f thì ta ký hiệu

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

và gọi $P_f(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của ánh xạ f.

Ta gọi phương trình $det(A - \lambda I) = 0$

hay $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ là phương trình đặc trưng

của ánh xạ f

Hệ $(A - \lambda I)x = 0$ là hệ đặc trưng ứng với giá trị riêng λ của f

Cách tìm giá trị riêng, véc tơ riêng

B1: Tìm ma trận A của f trong một cơ sở (a) nào đó.
B2: Giải phương trình đặc trưng của f (của A) để tìm các giá trị riêng của f.
B3: Nếu ở bước 2 ta tính được k giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ thì với mỗi giá trị riêng $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, k$, lập hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$(A - \lambda_i I)[x]_a = \theta$$

và giải hệ. Loại bỏ nghiệm tầm thường của hệ, từ các nghiệm còn lại ta đưa ra được các véc tơ riêng ứng với λ_i.

Chú ý

Nếu A là ma trận vuông thực cấp n thì A cũng chính là ma trận của ánh xạ ma trận

$$\begin{array}{rccc} f_A: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$$

trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$. Do đó để thuận tiện ta cũng gọi các giá trị riêng, véc tơ riêng của ánh xạ ma trận f_A là các giá trị riêng, véc tơ riêng của ma trận A. Ta cũng có quan niệm tương tự đối với các ma trận phức.

Ví dụ

Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Giải: Giải phương trình đặc trưng của ma trận A là

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 3 \\ 4 & 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda) + 12 + 12 - 12(2-\lambda) - 2(7-\lambda) - 6(3-\lambda) =$$

$$\Leftrightarrow \quad -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2(10-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 10 \end{array} \right.$$

Như vậy, ma trận A có hai giá trị riêng phân biệt là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 10$. Tương ứng với $\lambda_1 = 1$, ta tìm các véc tơ riêng bằng cách giải hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 - 3x_3, \\ x_1, x_3 \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

Loại bỏ nghiệm tầm thường trong kết quả trên ta nhận được các véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ là

$$x = (x_1, -2x_1 - 3x_3, x_3) = x_1(1, -2, 0) + x_3(0, -3, 1),\ x_1, x_3 \in \mathbb{R}, x_1^2 + x_3^2 \neq 0$$

Tiếp theo, với $\lambda_2 = 10$, ta giải hệ thuần nhất

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R}, \text{ tùy ý}, \\ x_3 = 2x_2. \end{cases}$$

Loại bỏ nghiệm tầm thường trong kết quả trên ta nhận được các véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 10$ là

$$x = (x_2, x_2, 2x_2) = x_2(1,1,2),\ x_2 \in \mathbb{R} \text{ tùy ý}, x_2 \neq 0.$$

Nhận xét

1. Đối với mỗi giá trị riêng λ tồn tại vô số véc tơ riêng tương ứng với nó.
2. Đối với mỗi véc tơ riêng x của f chỉ có duy nhất một giá trị riêng tương ứng với nó.

Ví dụ

Xét đa thức

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)^4(\lambda + 2)^2(\lambda - 2 + i), \quad (\text{ở đây } i^2 = -1).$$

Các nghiệm của $P(\lambda)$ là $\lambda = 1$ (bội 4), $\lambda = -2$ (bội 2), $\lambda = 2 - i$ (bội 1).

1. Mọi ma trận phức vuông cấp n có đủ n giá trị riêng phức (tính cả bội).
2. Mọi ma trận thực vuông cấp n có không quá n giá trị riêng thực (tính cả bội).
3. Các giá trị riêng phức thực sự của một ma trận thực vuông cấp n (nếu cần xét đến) được chia thành các cặp liên hợp với nhau.
4. Mọi ma trận thực vuông cấp n ứng với n lẻ có không ít hơn 1 giá trị riêng thực.
5. Nếu ma trận vuông thực A không có giá trị riêng thực thì cấp của A phải chẵn và $P_A(\lambda) > 0$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$. Nói riêng, $\det A > 0$.

Định nghĩa

Cho hai ma trận A và B vuông, cùng cỡ. Ta gọi B là ma trận đồng dạng với A nếu tồn tại một ma trận không suy biến T sao cho

$$B = T^{-1}AT. \tag{$*$}$$

Ta gọi $(*)$ là biến đổi đồng dạng chuyển ma trận A về ma trận B với ma trận chuyển T. Ký hiệu $B \sim A$.

Nhận xét

Nếu B đồng dạng với A, nghĩa là $B = T^{-1}AT$ thì $A = T_1^{-1}BT_1$ với $T_1 = T^{-1}$ và A cũng đồng dạng với B.

- Nếu $f : U \to U$ là một biến đổi tuyến tính và A, B là các ma trận của f trên các cơ sở khác nhau của U thì A, B là các ma trận đồng dạng với nhau.
- Nếu A, B là hai ma trận vuông cấp n đồng dạng với nhau và U là một không gian tuyến tính n chiều thì luôn tồn tại một biến đổi tuyến tính $f : U \to U$ sao cho A, B đều là ma trận của f trên hai cơ sở khác nhau của U.

Định nghĩa

Nếu ma trận vuông A đồng dạng với một ma trận dạng đường chéo B thì ta nói ma trận A chéo hóa được.

Định lý

Cho biến đổi tuyến tính f trên không gian n chiều U và cho B là ma trận của f trên cơ sở $(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Điều kiện cần và đủ để ma trận B có dạng đường chéo

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

là cơ sở $(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ được hình thành từ n véc tơ riêng của f và $f(b_i) = \lambda_i b_i,\ i = 1, 2, \dots, n$.

Hệ quả

Một ma trận vuông thực (hoặc phức) A với cấp n là ma trận chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$ (hoặc $\mathbb{C}^n$) là cơ sở gồm n véc tơ riêng của A.

Định lý

Cho ma trận vuông thực A cấp n. Ma trận A là ma trận chéo hóa được nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn

i) Ma trận A có đủ n nghiệm thực (tính cả bội). Điều này nghĩa là, nếu A có k giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ và bội tương ứng là $m_1, m_2, \ldots, m_k$ thì

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n. \tag{4.2}$$

ii) Với mỗi chỉ số $j, j = 1, 2, \ldots, k$, ta có đẳng thức

$$r(A - \lambda_j I) = n - m_j. \tag{4.3}$$

Kiểm tra tính chéo hóa

1. Nếu ma trận thực A có giá trị riêng phức thực sự thì A không chéo hóa được bằng ma trận chuyển thực.
2. Nếu A vuông cấp n mà có đủ n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.
3. Nếu ứng với tất cả các giá trị riêng λ_i, bội m_i, của A ta có $r(A - \lambda_i I) = n - m_i$, thì A chéo hóa được.
4. Nếu tồn tại một giá trị riêng λ_i nào đó của A mà $r(A - \lambda_i I) \neq n - m_i$ thì A không chéo hóa được.

Bài toán chéo hóa đối với ma trận vuông cấp ba

—Nếu A chỉ có một giá trị riêng thực và hai giá trị riêng còn lại là hai số phức thực sự liên hợp với nhau thì A không chéo hóa được bằng ma trận chuyển thực.

—Nếu A có ba giá trị riêng thực (tính cả bội) thì ta chia ra thành ba trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Ma trận A có ba giá trị riêng phân biệt. Trường hợp này ma trận A chéo hóa được.

Trường hợp 2: Ma trận A có một giá trị riêng đơn λ_1 và một giá trị riêng kép (bội 2) λ_2. Trường hợp này có hai tình huống như sau:

1. Nếu ứng với giá trị riêng bội 2 của A, hệ $(A - \lambda_2 I)x = \theta$ có hai ẩn tự do thì ma trận A chéo hóa được.
2. Nếu ứng với giá trị riêng bội 2 của A, hệ $(A - \lambda_2 I)x = \theta$ chỉ có một ẩn tự do thì ma trận A không chéo hóa được.

Trường hợp 3: Ma trận A có một giá trị riêng λ có bội 3 thì ta cũng có hai tình huống như sau:

1. Nếu A chéo hóa được thì ma trận chéo đồng dạng với A phải là λI và $A = T(\lambda I)T^{-1} = \lambda I$. Nói cách khác ma trận A phải là ma trận đường chéo λI.
2. Nếu $A \neq \lambda I$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ thì ma trận A không chéo hóa được.

Ví dụ

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sau một vài tính toán, ta xác định được các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Do ma trận A có ba giá trị riêng phân biệt nên A chéo hóa được.

Ví dụ

Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ có hai giá trị riêng phân biệt là $\lambda_1 = 1$ (bội $m_1 = 2$) và $\lambda_2 = 10$ (bội $m_2 = 1$).

Ta thấy

$$r(A - I) = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$r(A - 10I) = r\begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Mặt khác, $n - m_1 = 3 - 2 = 1; n - m_2 = 3 - 1 = 2$. Vậy ta có $r(A - \lambda_1 I) = n - m_1 = 1;\ r(A - \lambda_2 I) = n - m_2 = 2$. Suy ra A chéo hóa được.

Cách lập một cơ sở gồm n véc tơ riêng của A:

- **Bước 1**. Với mỗi không gian riêng E_{λ_j} ta lựa chọn một cơ sở δ_j

$$\delta_1 = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(m_1)}\},$$
$$\delta_2 = \{a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_2^{(m_2)}\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta_k = \{a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(m_k)}\}.$$

- **Bước 2**. Gộp tất cả các cơ sở của các không gian riêng, ta được một hệ có dạng

$$\delta = \{\underbrace{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(m_1)}}_{\text{ứng với } \lambda_1 \text{ bội } m_1}, \underbrace{a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_2^{(m_2)}}_{\text{ứng với } \lambda_2 \text{ bội } m_2}, \ldots, \underbrace{a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(m_k)}}_{\text{ứng với } \lambda_k \text{ bội } m_k}\}.$$

Hệ δ chính là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm các véc tơ riêng của A.

Chú ý

Ta có thể mô tả lại bước 1 ở trên như sau:

- Từ mỗi giá trị riêng bội 1, ta chọn ra một véc tơ riêng.
- Từ mỗi giá trị riêng bội 2, ta chọn ra hai véc tơ riêng không tỷ lệ (Hai véc tơ riêng tạo thành một hệ độc lập tuyến tính).
- Từ mỗi giá trị riêng bội 3, ta chọn ra ba véc tơ riêng tạo thành một hệ ba véc tơ độc lập tuyến tính.
- v.v..

Ví dụ

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tìm tất cả các giá trị riêng, véc tơ riêng của A.

b) Hỏi A có chéo hóa được không? Nếu được, hãy viết ma trận đường chéo B và ma trận chuyển T, sao cho $B = T^{-1}AT$.

Giải: a) Giải phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -(1-\lambda)^2(2+\lambda) + 16 + 16 + 16(2+\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\lambda^3 + 27\lambda + 27 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3+\lambda)^2(6-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = -3 \text{ (bội 2)} \\ \lambda_2 = 6 \text{ (bội 1)}\end{array}\right.$$

Vậy ma trận A có hai giá trị riêng phân biệt là $\lambda_1 = -3$ và $\lambda_2 = 6$.

Tương ứng với $\lambda_1 = -3$, bội $m_1 = 2$, ta tìm các véc tơ riêng bằng cách giải hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 2x_3 \\ x_1, x_3 \text{ tùy ý.} \end{cases}$$

Vậy các véc tơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -3$ có dạng

$$x = (x_1, -2x_1+2x_3, x_3) = x_1(1,-2,0)+x_3(0,2,1),\ x_1, x_3 \in \mathbb{R}, x_1^2+x_3^2 \neq 0.$$

Ta khẳng định ma trận A chéo hóa được nếu kiểm tra điều kiện (4.3) đối với hai giá trị riêng của A.
- Với $\lambda_1 = -3$, bội $m_1 = 2$ thì

$$r(A - \lambda_1 I) = r\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Còn $n - m_1 = 3 - 2 = 1$. Vậy $r(A - \lambda_1 I) = n - m_1 = 1$.
- Với $\lambda_1 = 6$, bội $m_2 = 1$ thì

$$r(A - \lambda_2 I) = r\begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 2 & -8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Còn $n - m_2 = 3 - 1 = 2$. Vậy $r(A - \lambda_2 I) = n - m_2 = 2$.

Vậy ma trận chéo B đồng dạng với A là

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

và ma trận chuyển T để đưa A về dạng chéo có dạng

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ

Tìm giá trị riêng, véc tơ riêng của ma trận sau và cho biết ma trận đó có chéo hóa được không:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Giải: Đa thức đặc trưng của A là

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^4.$$

Tương ứng, A có một giá trị riêng $\lambda = a$ (bội 4).

Với $\lambda = a$, giải hệ

$$(A - aI)x = \theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ có nghiệm x_1 tùy ý, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Vậy các véc tơ riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda = a$ có dạng
$x = (x_1, 0, 0, 0) = x_1(1, 0, 0, 0),\ x_1 \neq 0$ tùy ý.
Do $r(A - aI) = 3 \neq n - m = 4 - 4 = 0$, nên A không chéo hóa được.

Ví dụ

Xét ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính A^{2021}