ĐÁP ÁN

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Câu 1: Cho ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{bmatrix}$$

Cho biết $\det(A) = -8$. Vậy $m = ?$

A. 1 **B.** -1 **C.** 0 **D.** ± 1

Giải:

Ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix} = m^2 - 9 = -8 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Câu 2: Cho ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận khả nghịch của ma trận A.

A. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ **C.** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Giải:

Ta có:

$$A^{-1} = \frac{1}{(-2).2 - 3.1} . \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Câu 3: Cho hai ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tìm tích của hai ma trận đã cho.

A. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} 13 & 12 \\ -2 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ **C.** $\begin{bmatrix} 13 & -2 & 5 \\ 12 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} 13 & 2 & 12 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Giải:

Ta có:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1+5.2 & 3.(-1)+5.3 \\ 0.1+(-1).2 & 0.(-1)+(-1).3 \\ 1.1+2.2 & 1.(-1)+2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ -2 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Câu 4: Tìm ma trận X sao cho thõa mãn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **C.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Giải:

Phương trình có dạng $A.X = B \Leftrightarrow X = A^{-1}.B$

$$X = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -8 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Câu 5: Cho hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

A. Phương trình vô nghiệm

B. Phương trình có một nghiệm duy nhất

C. Phương trình vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số

D. Phương trính vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số

<u>Giải</u>

Ta có:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_3 - 2h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vì $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4 = n$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số.

Câu 6: Cho $v = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$. Tập nào dưới đây là một không gian con của $\mathbb{R}^3$:

A. $\{x \in \mathbb{R}^3 | x + v = \theta\}$

B. $\{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x, v \rangle = 0\}$

C. $\{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x, v \rangle = 1\}$

D. $\{x \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3v = \theta\}$

Câu 7: Cho các tập: $A = \{(1,2)\}, B = \{(1,2),(3,4)\}, C = \{(1,2),(-1,2),(3,4)\}$

Tập nào sau đây độc lập tuyến tính?

A. Tập A và B độc lập tuyến tính

B. Tập A và C độc lập tuyến tính

C. Tập B và C độc lập tuyến tính

D. Tập A độc lập tuyến tính

Giải

Ta có: Tập A gồm một vector khác không nên độc lập tuyến tính.

Tập B gồm hai vector không tỉ lệ với nhau nên độc lập tuyến tính.

Tập C có $r(A) < n$ nên phụ thuộc tuyến tính.

Câu 8: Cho $\mathbb{R}$ – Không gian vector $\mathbb{R}^2$, cho các tập vector $B = \{(1,2),(-3,m)\}$. Tìm m để B phụ thuộc tuyến tính.

A. $m = 6$

B. Với mọi số thực m

C. Không tồn tại m

D. $m = -6$

Giải

Để B phụ thuộc tuyến tính thì $m = -6$.

Câu 9: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 4 \end{cases}$$

A. Hệ phương trình vô nghiệm

B. Hệ phương trình có duy nhất một nghiệm

C. Hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc 1 tham số

D. Hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số

Giải

Ta có:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vì $r(A) = 2 < 3 = r(\overline{A})$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 10: Cho A, Blà các ma trận cấp 3 thõa mãn $det(A) = 2, det(B) = -3$. Tính $det(A^T B^2)$.

A. -12 B. 18 C. -6 D. 6

Giải:

$$det(A^T B^2) = det(A).det(B)^2 = 2.(-3)^2 = 18$$

Câu 11: Cho $v_1 = (1,2,3), v_\alpha = (1,2,0), v_3 = (1,0,0)$. Tìm tọa độ của $v = (-1,2,-3)$ trong cơ sở nói trên.

A. $(-1,2,-2)$ **B.** $(-3,2,-3)$ **C.** $(1,-2,3)$ **D.** $(-1,2,-3)$

Giải:

$$(-1,2,-3) = \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,2,0) + \alpha_3(1,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ 2\alpha_1 + 2a_2 = 2 \\ 3\alpha_1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Câu 12: Trong $\mathbb{R}$-không gian vector $\mathbb{R}^2$ cho hai cơ sở

$B = \{u_1 = (1,0), u_2 = (0,1)\}$ và $C = \{v_1 = (2,1), v_2 = (3,4)\}$

Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở C.

A. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Giải:

Giả sử $v_1 = a_1u_1 + a_2u_2$, khi đó

$$(2,1) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = (a_1, a_2)$$

Suy ra $a_1 = 2, a_2 = 1$ và $v_1 = 2u_1 + u_2$.

Giả sử $v_2 = b_1u_1 + b_2u_2$ khi đó

$$(3,4) = b_1(1,0) + b_2(0,1) = (b_1, b_2)$$

Suy ra $b_1 = 3, b_2 = 4$ và $u_2 = 3u_1 + 4u_2$.

Như vậy $T_{BC} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Câu 13: Cho tích vô hướng $\varphi(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$, trên không gian vector Euclide $\mathbb{R}^2$. Tính độ dài và góc giữa hai vector $f_1(1,1)$ và $f_2(-1,1)$.

A. 1 B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Giải:

Cho $x = (x_1, x_2)$, ta có $\|x\|^2 = \varphi(x, x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2$.

Vậy $\|f_1\| = \sqrt{5}, \|f_2\| = 3$. Góc giữa hai vector là:

$$cos(f_1, f_2) = \frac{\varphi(f_1, f_2)}{\|f_1\|\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Câu 14: Trong $\mathbb{R}^3$, trực giao hóa các vector

$$u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)$$

A. $\left\{(1,1,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)\right\}$

B. $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right), (1,1,1)\right\}$

C. $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right), (1,1,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)\right\}$

D. $\left\{(1,1,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right), (0,0,0)\right\}$

Giải : Ta có

$v_1 = u_1 = (1,1,1);$

$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right);$

$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right);$

Ta có một tập trực giao của $\mathbb{R}^3$ là $\left\{(1,1,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)\right\}$.

Câu 15: Tìm các giá trị riêng của ma trận A trên tập số thực $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A. $\lambda = -1$
B. $\lambda = -1, \lambda = 2$
C. $\lambda = 2$
D. Không tồn tại

Giải:

- Đa thực đặc trưng $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 + 3\lambda + 2$$

- Giá trị riêng: Nghiệm của phương trình $-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$ là $\lambda = -1$ hoặc $\lambda = 2$. Ta có hai giá trị riêng $\lambda = -1, \lambda = 2$.

Câu 16: Tìm vector riêng của ma trận B:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

A. $\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} 2t \\ 0 \end{bmatrix}$ **C.** $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$

Giải: Ta có:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

+ $\lambda_1 = -1$

$$[A - (-1)I]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 = 0 \\ 8x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

Ứng với giá trị $\lambda_1 = -1$, ta có các vector riêng $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$ *với* $t \in \mathbb{R}$.

Câu 17: Cho ma trận $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Tính B^{10}.

A. $\begin{bmatrix} -1022 & 0 & -2046 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1023 & 0 & 2047 \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} -1022 & 0 & -2046 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1023 & 0 & 2047 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1022 & 0 & 2046 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1023 & 0 & 2047 \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} -1022 & 0 & -2046 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1023 & 0 & -2047 \end{bmatrix}$

Giải: Ta có: B chéo hóa được và ma trận chéo hóa B là

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ và } P^{-1}BP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Khi đó, ta có:

$$B^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow B^{10} = \begin{bmatrix} -1022 & 0 & -2046 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1023 & 0 & 2047 \end{bmatrix}$$

Câu 18: Chính tắc hóa dạng toàn phương sau trên $\mathbb{R}^3$

$$p(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

A. $p(x) = z_1^2 - 2z_2^2 + z_3^2$

B. $p(x) = z_1^2 - 4z_2^2 + 5z_3^2$

C. $p(x) = z_1^2 - 2z_2^2 + 5z_3^2$

D. $p(x) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 5z_3^2$

Giải:

$$p(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$
$$= (x_1 - 2x_2)^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

Ta có:

$$p(x) = y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2 - 4y_2y_3$$
$$= y_1^2 - 2(y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2) + 2y_3^2 + 3y_3^2$$
$$= y_1^2 - 2(y_2 + y_3)^2 + 5y_3^2$$

Đặt $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

Ta được: $q(x) = z_1^2 - 2z_2^2 + 5z_3^2$

Câu 19: Tìm một cơ sở cho không gian nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

A. $\{(-13,4,0,1)\}$

B. $\{(7,-2,1,0), (-13,4,0,1)\}$

C. $\{(7,-2,1,0)\}$

D. Không tồn tại

Giải:

Ta xét ma trận bổ sung:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & \bigg| & 0\\ 1 & 3 & -1 & 1 & \bigg| & 0\\ 2 & 5 & -4 & 6 & \bigg| & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & \bigg| & 0\\ 0 & 1 & 2 & -4 & \bigg| & 0\\ 0 & 1 & 2 & -4 & \bigg| & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & \bigg| & 0\\ 0 & 1 & 2 & -4 & \bigg| & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bigg| & 0\end{bmatrix}$$

Ta thấy $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc vào hai tham số.

Đặt $x_3 = t_1; x_4 = t_2$, ta suy ra:

$$x_1 = -5x_4 + 3x_3 - 2x_2 = -13t_2 + 7t_1$$

$$x_2 = 4x_4 - 2x_3 = 4t_2 - 2t_1$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$X = \{(13t_2 + 7t_1, 4t_2 - 2t_1, t_1, t_2) | t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

Cho $t_1 = 1, t_2 = 0$ ta được 1 nghiệm cơ bản $X_1 = (7, -2,1,0)$

Cho $t_1 = 0, t_2 = 1$ ta được 1 nghiệm cơ bản $X_1 = (-13,4,0,1)$

Như vậy $\{(7, -2,1,0), (-13,4,0,1)\}$ là một cơ sở của X.

Câu 20: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$. Nhận định nào sau đây là đúng?

A. $AB = BA$

B. AB xác định nhưng BA không xác định

C. $BA = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

D. Không xác định