Chương 5: Không gian Euclide

Nguyễn Thị Thái Hà
Email: nttha@utc2.edu.vn

Định nghĩa 5.1

Cho U là không gian tuyến tính thực. Một tích vô hướng trong U là quy tắc,đặt mỗi cặp có thứ tự (x, y) gồm hai phần tử của U tương ứng với duy nhất số thực và ký hiệu là $\langle x, y\rangle$ sao cho bốn điều kiện sau được thỏa mãn

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, với mọi $x, y \in U$.
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, với mọi $x, y, z \in U$.
3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, với mọi $x, y \in U$ và với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ với mọi $x \in U$ và nếu $\langle x, x\rangle = 0$ thì ta phải có $x = \theta$.

Chú ý 5.1 Ta đã biết về tích vô hướng của các véc tơ trong không gian $2, 3$ chiều. Đây là hai ví dụ cụ thể của Định nghĩa 5.1. Nhìn theo chiều hướng ngược lại, Định nghĩa 5.1 là sự mở rộng của các định nghĩa đã có trong các không gian 2 hoặc 3 chiều thông thường lên các không gian thực nhiều chiều.

Định nghĩa 5.2

Cho không gian tuyến tính thực hữu hạn chiều U và một tích vô hướng $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ xác định trong U. Khi đó, ta gọi U cùng với tích vô hướng $\langle x, y \rangle$ là một không gian Euclid.

Nhận xét 5.1

Cho U là một không gian Euclid và cho M là một không gian con của U. Ta có thể sử dụng tích vô hướng của U cho tất cả phần tử của không gian con M. Bởi vậy không gian con M cũng là một không gian Euclid.

Ví dụ 5.1

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ *tích vô hướng chính tắc* được định nghĩa theo công thức sau
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \tag{5.1}$$
với mỗi cặp phần tử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ trong $\mathbb{R}^n$.

Ta cần kiểm tra $\langle x, y\rangle$ được định nghĩa trong (5.1) có thỏa mãn các yêu cầu của Định nghĩa 5.1 hay không. Thật vậy, từ (5.1) ta có
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n = \langle y, x\rangle$$
hay là tích $\langle x, y\rangle$ có tính chất đối xứng.
Tiếp theo, ta lấy $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ tùy ý trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó ta có
$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Bởi vậy ta có các tính toán như sau

$$\begin{aligned}\langle x+y, z\rangle &= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + \ldots + (x_n+y_n)z_n \\ &= (x_1z_1 + x_2z_2 + \ldots + x_nz_n) + (y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n) \\ &= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

Lấy $\lambda \in \mathbb{R}$ tùy ý. Khi đó $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$
và
$\langle \lambda x, y\rangle = (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 + \ldots + (\lambda x_n)y_n = \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) = \lambda\langle$
Xét $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tùy ý. Do $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n số thực nên ta có

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant 0.$$

Cuối cùng, nếu $\langle x, x\rangle = 0$ thì

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

và ta suy ra $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ hay là $x = \theta$.

Như vậy tích $\langle x, y\rangle$ được xác định bởi (5.1) là một tích vô hướng. Với tích vô hướng chính tắc ở trên, $\mathbb{R}^n$ trở thành một không gian Euclid.

Trong $\mathbb{R}^n$, ta vẫn có thể xây dựng tích vô hướng theo nhiều phương án khác. Chẳng hạn, ứng với mỗi bộ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ gồm n số thực dương, ta có thể chỉ ra rằng công thức

$$\langle x, y\rangle_\alpha = \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \ldots + \alpha_n x_n y_n$$

xác định trong $\mathbb{R}^n$ một tích vô hướng. Tuy nhiên, trong thực tế tích vô hướng chính tắc (5.1) là một trong các công cụ chính được sử dụng để mô tả các mối quan hệ, các ràng buộc và các quy luật vận động của các đối tượng trong những bài toán kỹ thuật, kinh tế. Bởi vậy trong tất cả các ví dụ và bài tập của chương này, khi ta đề cập đến không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ và không nói gì thêm thì cấu trúc không gian Euclid của $\mathbb{R}^n$ được quy ước là cấu trúc xác định bởi tích vô hướng chính tắc

Mệnh đề 5.1

Cho U là một không gian Euclid. Nếu $x, y, z \in U$ thì ta có các đẳng thức:

i) $\langle \theta, x \rangle = 0$.

ii) $\langle x - y, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle$.

Mệnh đề 5.2

Cho U là một không gian Euclid và x là một phần tử của U. Nếu với mọi $y \in U$ ta có $\langle x, y \rangle = 0$ thì $x = \theta$.

Mệnh đề 5.3

Cho U là một không gian Euclid và x, y là hai phần tử của U.
1) Nếu $u_1, u_2, \dots, u_n$ là các phần tử của U và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là n số thực sao cho $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ thì

$$\langle x, y\rangle = \lambda_1\langle u_1, y\rangle + \lambda_2\langle u_2, y\rangle + \dots + \lambda_n\langle u_n, y\rangle. \tag{5.5}$$

2) Nếu $v_1, v_2, \dots, v_n$ là các phần tử của U và $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ là n số thực sao cho $y = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n$ thì

$$\langle x, y\rangle = \mu_1\langle x, v_1\rangle + \mu_2\langle x, v_2\rangle + \dots + \mu_n\langle x, v_n\rangle. \tag{5.6}$$

Một vài trường hợp riêng của các công thức trong Mệnh đề 5.3 là

1. $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$.
2. $\langle u_1 + u_2 + \dots + u_n, y\rangle = \langle u_1, y\rangle + \langle u_2, y\rangle + \dots + \langle u_n, y\rangle$.
3. $\langle x, v_1 + v_2 + \dots + v_n\rangle = \langle x, v_1\rangle + \langle x, v_2\rangle + \dots + \langle x, v_n\rangle$.

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho U là một không gian Euclid và x, y là hai phần tử của U. Ta có bất đẳng thức

$$(\langle x, y\rangle)^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{5.7}$$

Phiên bản trong $\mathbb{R}^2$

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$

Phiên bản trong $\mathbb{R}^n$

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

Định nghĩa 5.3

Cho U là một không gian Euclid và x là một phần tử của U. Ta gọi $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ là chuẩn của x và ký hiệu là $\|x\|$.

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle. \tag{5.9}$$

Nhận xét 5.2

Xét không gian Euclid $\mathbb{R}^n$. Với mỗi phần tử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \tag{5.10}$$

hay là

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Ví dụ 5.9

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho các phần tử

$$x = (2, 1, 2); \quad y = (6, -3, 2).$$

Ta có

$$\|x\|^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \|x\| = 3,$$

$$\|y\|^2 = 6^2 + (-3)^2 + 2^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad \|y\| = 7.$$

Ví dụ 5.10

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử

$$x = (1, 1, 1, -1); \quad y = (5, -3, 1, 1).$$

Ta có

$$\|x\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \|x\| = 2,$$

$$\|y\|^2 = 5^2 + (-3)^2 + 1^2 + 1^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \|y\| = 6.$$

Các tính chất cơ bản của chuẩn

1. Với mọi phần tử x của không gian U ta có
$$\|x\| \geqslant 0, \tag{5.11}$$
và nếu $\|x\| = 0$ thì $x = \theta$.
2. Nếu x là một phần tử tùy ý trong U và λ là một số thực tùy ý thì
$$\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|. \tag{5.12}$$
3. Nếu x, y là hai phần tử tùy ý trong U thì ta có bất đẳng thức
$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \qquad \text{(Bất đẳng thức tam giác).} \tag{5.13}$$

Véc tơ chuẩn hóa

Cho U là một không gian Euclid và $x \neq \theta$ là một véc tơ của U. Ta đặt $e_x = \lambda x$ với $\lambda = \dfrac{1}{\|x\|}$, tức là $e_x = \dfrac{x}{\|x\|}$. Như vậy, ta có

$$\|e_x\| = |\lambda| \|x\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Định nghĩa 5.4

Cho U là một không gian Euclid và $x \neq \theta$ là một véc tơ của U. Ta gọi $e_x = \dfrac{x}{\|x\|}$ là *véc tơ chuẩn hóa của x.*

Ví dụ 5.11

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ

$$x = (5, 1, 3, -1), \quad y = (6, -5, 4, 2).$$

Chuẩn của hai véc tơ trên được tính như sau:

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 5^2 + 1^2 + 3^2 + (-1)^2 = 36 \;\Rightarrow\; \|x\| = 6,$$
$$\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = 6^2 + (-5)^2 + 4^2 + 2^2 = 81 \;\Rightarrow\; \|y\| = 9.$$

Các véc tơ chuẩn hóa của x và y được xác định như sau:

$$e_x = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{6}(5, 1, 3, -1);$$
$$e_y = \frac{y}{\|y\|} = \frac{1}{9}(6, -5, 4, 2).$$

Chú ý 5.5

Cho U là một không gian Euclid và u là một véc tơ của U. Nếu $\|u\| = 1$ thì ta gọi u là véc tơ chuẩn hóa hoặc là véc tơ đơn vị.

Nhận xét 5.4

Ta có thể bỏ qua các hệ số tỷ lệ dương khi tính véc tơ chuẩn hóa e_x của một phần tử x cho trước. Rõ hơn nếu $x = \lambda u$ với $\lambda > 0$ thì ta có đẳng thức

$$e_x = \frac{x}{\|x\|} = \frac{\lambda u}{\|\lambda u\|} = \frac{\lambda u}{|\lambda|\|u\|} = \frac{u}{\|u\|} \equiv e_u.$$

Như vậy nếu $x = \lambda u$ với $\lambda > 0$ thì việc tính véc tơ chuẩn hóa e_x của x có thể thực hiện trực tiếp từ u và bỏ qua hệ số λ.

Ví dụ 5.12

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho véc tơ
$$x = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$
Để xác định véc tơ chuẩn hóa của x ta biến đổi x thành
$$x = \frac{1}{8}(2, -1, -2, 4) = \frac{1}{8}u$$
với $u = (2, -1, -2, 4)$. Ta tính được véc tơ chuẩn hóa của x là
$$e_x = \frac{1}{5}(2, -1, -2, 4)$$
bằng cách sử dụng u và
$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = 2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 4^2 = 25 \;\Rightarrow\; \|u\| = 5.$$

Định nghĩa 5.5

Cho U là một không gian Euclid và x, y là hai phần tử của U. Ta định nghĩa $d(x, y)$ bởi công thức

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{5.14}$$

và gọi $d(x, y)$ là khoảng cách giữa các phần tử x và y.

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ công thức xác định khoảng cách của hai điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ chính là

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{5.15}$$

Công thức khoảng cách (5.15) trong hai trường hợp $n = 2, n = 3$ hoàn toàn trùng với công thức mà ta đã biết trước đây.

Định nghĩa 5.6

Ta gọi góc $\varphi \in [0, \pi]$ xác định bởi phương trình

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|.\|y\|}. \tag{5.16}$$

là góc giữa hai phần tử x, y.

Trường hợp có ít nhất một trong hai phần tử x, y là phần tử θ thì ta quy ước là góc giữa chúng có thể lấy một giá trị tùy ý.
Với định nghĩa nêu trên ta có thể mô tả tích vô hướng dưới dạng một phiên bản của định nghĩa trong không gian hình học hai hoặc ba chiều thông thường

$$\langle x, y\rangle = \|x\|.\|y\|\cos\varphi. \tag{5.17}$$

Ví dụ 5.13

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử $x = (1, 1, 1, 3)$ và $y = (1, 1, 1, -3)$.

Ta ký hiệu φ là góc giữa x, y. Ta có các tính toán như sau

$$\|x\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12 \Rightarrow \|x\| = 2\sqrt{3};$$
$$\|y\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + (-3)^2 = 12 \Rightarrow \|y\| = 2\sqrt{3};$$
$$\langle x, y\rangle = 1.1 + 1.1 + 1.1 + 3.(-3) = -6$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Từ đó ta tính được $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ hay là $\varphi = 120^o$.

Định nghĩa 5.7

Cho U là một không gian Euclid và x, y là hai phần tử của U. Nếu góc giữa x, y là $\frac{\pi}{2}$ thì x, y được gọi là hai véc tơ *trực giao* với nhau và ký hiệu là $x \perp y$.

Ta khẳng định được rằng $x \perp y$ khi và chỉ khi $\langle x, y \rangle = 0$.

Ví dụ 5.14

Trong không gian $\mathbb{R}^5$ cho hai phần tử

$$x = (1, 2, 1, 1, 2), y = (-1, 2, -3, 2, -1)$$

Ta có

$$\langle x, y \rangle = 1.(-1) + 2.2 + 1.(-3) + 1.2 + 2.(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \perp y.$$

Ví dụ 5.15

Cho M là không gian con hai chiều của không gian Euclide $\mathbb{R}^4$ có một cơ sở gồm hai véc tơ $u = (1, 1, 1, -1)$, $v = (2, -2, -1, 1)$. Hãy tìm véc tơ có độ dài đơn vị thuộc M sao cho véc tơ đó trực giao với véc tơ $w = (1, 2, 1, 2)$.

Giải Giả sử x là phần tử cần tìm. Vì $x \in M$ và hệ $\{u, v\}$ là một cơ sở của M nên ta suy ra rằng tồn tại $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sao cho

$$x = \lambda u + \mu v.$$

Do $x \perp w$ nên $\langle x, w \rangle = 0$ hay là

$$\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle = 0.$$

Tính toán trực tiếp từ giả thiết, ta có

$$\langle u, w \rangle = 2, \langle v, w \rangle = -1.$$

Từ đó ta suy ra được
$$2\lambda - \mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 2\lambda.$$
Do đó ta có tính toán như sau
$$x = \lambda u + \mu v = \lambda u + 2\lambda v = \lambda(u + 2v)$$
và
$$\|x\| = |\lambda|\|u + 2v\|.$$
Tính toán trực tiếp từ giả thiết ta có
$$u + 2v = (1, 1, 1, -1) + (4, -4, -2, 2) = (5, -3, -1, 1),$$
$$\|u + 2v\|^2 = 5^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \|u + 2v\| = 6.$$
Như vậy $\|x\| = |\lambda|\|u + 2v\| = 6|\lambda|$. Do x là véc tơ có độ dài đơn vị hay là $\|x\| = 1$ nên ta có
$$6|\lambda| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{1}{6}.$$
Từ đó $x = \lambda(u + 2v) = \pm\frac{1}{6}(5, -3, -1, 1)$.

Mệnh đề 5.5

Nếu x, y là hai phần tử của không gian Euclid U và $x \perp y$. Ta có đẳng thức
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Định nghĩa 5.8

Trong không gian Euclid U cho hệ phần tử $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Ta gọi hệ (a) là hệ trực giao nếu $a_i \perp a_j$ với mọi $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ và $i \neq j$.

Ví dụ 5.17

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 1, 1, 1); \quad a_2 = (1, 1, -1, -1); \; a_3 = (1, -1, 1, -1).$$

Ta có

$$\langle a_1, a_2 \rangle = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 \perp a_2,$$
$$\langle a_1, a_3 \rangle = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 \perp a_3,$$
$$\langle a_2, a_3 \rangle = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 \perp a_3.$$

Như vậy, ta kết luận được hệ (a) là một hệ trực giao.

Định lý 5.1

Trong không gian Euclid U cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ sao cho $a_i \neq \theta$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$. Nếu hệ (a) là một hệ trực giao thì hệ (a) là một hệ độc lập tuyến tính.

Định lý trên khẳng định rằng một hệ trực giao là hệ độc lập tuyến tính nếu nó không chứa véc tơ θ. Như vậy trong một không gian Euclid n chiều mọi hệ trực giao không chứa véc tơ θ đều có không quá n phần tử.

Trong một không gian Euclid n chiều U, mỗi hệ trực giao gồm n phần tử và không chứa véc tơ θ đều là một cơ sở của chính không gian U.

Nếu hệ (a) nào đấy là một cơ sở của không gian Euclid U và (a) cũng là một hệ trực giao thì ta gọi (a) là một cơ sở trực giao của U.

Mệnh đề 5.6

Cho U là một không gian Euclid n chiều và cho $(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở trực giao của U. Khi đó mọi phần tử $x \in U$ đều có biểu diễn duy nhất trên cơ sở (u) theo công thức sau đây

$$x = \frac{\langle x, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle x, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \ldots + \frac{\langle x, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n. \tag{5.18}$$

Thủ tục trực giao hóa Gram-Schmidt

Nếu cho trước một hệ độc lập tuyến tính $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ thì ta luôn luôn xây dựng được một hệ trực giao $(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ theo một thủ tục có tên là thủ tục trực giao hóa Gram-Schmidt. Thủ tục trực giao hóa Gram-Schmidt gồm các bước như sau:

Bước 1. Ta đặt $u_1 = a_1$. Do hệ (a) độc lập tuyến tính nên $a_1 \neq \theta$ và ta có

$$\langle u_1, u_1 \rangle = \langle a_1, a_1 \rangle > 0.$$

Bước 2. Ta xác định u_2 dưới dạng $u_2 = a_2 + \lambda_{21} u_1$ sao cho $u_2 \perp u_1$. Với λ_{21} được xác định theo công thức

$$\lambda_{21} = -\frac{\langle a_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}. \tag{5.19}$$

Bước 3.Xác định u_3 dưới dạng $u_3 = a_3 + \lambda_{31}u_1 + \lambda_{32}u_2$ sao cho $u_3 \perp u_1, u_3 \perp u_2$.

$$\lambda_{31} = -\frac{\langle a_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} \tag{5.20}$$

$$\lambda_{32} = -\frac{\langle a_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}. \tag{5.21}$$

Bước k, $k \geqslant 4$ .Với $k \geqslant 4$ ta xây dựng u_k theo công thức

$$u_k = a_k + \lambda_{k1}u_1 + \ldots + \lambda_{k,k-1}u_{k-1}$$

$$\lambda_{k1} = -\frac{\langle a_k, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}, \ldots, \lambda_{k,k-1} = -\frac{\langle a_k, u_{k-1}\rangle}{\langle u_{k-1}, u_{k-1}\rangle}. \tag{5.22}$$

Thực hiện đủ m bước ta nhận được hệ trực giao $(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ như mong muốn.

Ví dụ 5.18

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ độc lập tuyến tính $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (2,2,1); \quad a_2 = (4,-2,5), a_3 = (6,7,8).$$

Hãy thực hiện thủ tục trực giao hóa Gram-Schmidt đối với hệ (a) đã cho.

Giải: Trước tiên, ta đặt $u_1 = a_1 = (2,2,1)$.
Tiếp theo, u_2 được xác định dưới dạng $u_2 = a_2 + \lambda_{21} u_1$ sao cho $u_2 \perp u_1$. Theo công thức (5.19) ta có

$$\lambda_{21} = -\frac{\langle a_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = -\frac{9}{9} = -1.$$

Với $\lambda_{21} = -1$ ta nhận được

$$u_2 = a_2 - u_1 = (4,-2,5) - (2,2,1) = (2,-4,4).$$

Cuối cùng, u_3 được xác định dưới dạng $u_3 = a_3 + \lambda_{31}u_1 + \lambda_{32}u_2$ sao cho $u_3 \perp u_1, u_3 \perp u_2$. Các hệ số $\lambda_{31}, \lambda_{32}$ được tính theo công thức (5.20), (5.21) như sau

$$\lambda_{31} = -\frac{\langle a_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = -\frac{34}{9}, \quad \lambda_{32} = -\frac{\langle a_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9}.$$

Như vậy với $\lambda_{31} = -\frac{34}{9}, \lambda_{32} = -\frac{4}{9}$, ta thu được

$$u_3 = a_3 - \frac{34}{9}u_1 - \frac{4}{9}u_2 = (6, 7, 8) - (\frac{68}{9}, \frac{68}{9}, \frac{34}{9}) - (\frac{8}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{16}{9})$$
$$= (-\frac{22}{9}, \frac{11}{9}, \frac{22}{9}) = \frac{11}{9}(-2, 1, 2).$$

Như vậy kết quả thực hiện thủ tục trực giao hóa Gram-Schmidt đối với hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ cho ta hệ trực giao $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ với

$$u_1 = (2, 2, 1); \quad u_2 = (2, -4, 4); \quad u_3 = \frac{11}{9}(-2, 1, 2).$$

Thủ tục Gram-Schmidt giúp cho ta đưa ra được các khẳng định sau đây:

- Trong một không gian Euclid n chiều, nếu xuất phát từ một cơ sở thông thường ta luôn xây dựng được một cơ sở trực giao.
- Trong không gian vô hạn chiều U có trang bị tích vô hướng, với mỗi số tự nhiên n ta luôn xây dựng được một hệ trực giao gồm n phần tử của U.

Định nghĩa 5.9

Cho U là một không gian Euclid n chiều và cho hệ $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Ta gọi hệ (e) là một cơ sở trực chuẩn của không gian U nếu nó thỏa mãn 2 yêu cầu sau:

1. Các véc tơ trong hệ (e) đều là véc tơ đơn vị
$$\|e_i\| = 1 \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, n.$$
2. Hệ (e) là hệ trực giao, tức là
$$e_i \perp e_j \text{ với mọi } i \neq j.$$

Từ định nghĩa trên ta có thể nói rằng mỗi cơ sở trực chuẩn cũng chính là một cơ sở trực giao. Đặc điểm riêng của mỗi cơ sở trực chuẩn là cả n véc tơ trong cơ sở đó đều là véc tơ đơn vị.

Ta cũng có các lưu ý sau đây.

1. Mỗi cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid vẫn là một cơ sở theo nghĩa thông thường (tức là hệ này vừa là hệ độc lập tuyến tính vừa là hệ sinh của U).
2. Nếu không quan tâm đến số phần tử thì mỗi hệ trực giao với tất cả phần tử đều là véc tơ đơn vị sẽ được gọi là hệ trực chuẩn.
3. Hệ $(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ là một hệ trực chuẩn nếu như
$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j; \\ 1 & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$
4. Mỗi hệ trực chuẩn của không gian Euclid U là một cơ sở trực chuẩn khi hệ có số phần tử đúng bằng số chiều của U.
5. Một hệ trực chuẩn của không gian Euclid U nếu không phải là một cơ sở trực chuẩn của U thì có số phần tử nhỏ hơn $\dim U$.

Ví dụ 5.20

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho hệ $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ với

$$u_1 = \frac{1}{7}(6, 3, 2), \quad u_2 = \frac{1}{7}(-3, 2, 6), u_1 = \frac{1}{7}(2, -6, 3).$$

Tính toán trực tiếp trên hệ (u) ta nhận được

$$\|u_1\|^2 = \langle u_1, u_1\rangle = \frac{1}{49}(6^2 + 3^2 + 2^2) = \frac{49}{49} = 1 \Rightarrow \quad \|u_1\| = 1,$$

$$\|u_2\|^2 = \langle u_2, u_2\rangle = \frac{1}{49}((-3)^2 + 2^2 + 6^2) = \frac{49}{49} = 1 \Rightarrow \quad \|u_2\| = 1,$$

$$\|u_3\|^2 = \langle u_3, u_3\rangle = \frac{1}{49}(2^2 + (-6)^2 + 3^2) = \frac{49}{49} = 1 \Rightarrow \quad \|u_3\| = 1,$$

$$\langle u_1, u_2\rangle = \frac{1}{49}(-18 + 6 + 12) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 \perp u_2,$$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = \frac{1}{49}(12 - 18 + 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 \perp u_3,$$
$$\langle u_2, u_3 \rangle = \frac{1}{49}(-12 - 6 + 18) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 \perp u_3.$$

Như vậy ta kết luận được hệ (u) là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 5.21

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với

$$u_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \quad u_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1),$$
$$u_3 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \quad u_4 = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1).$$

Sau những tính toán trực tiếp như trong ví dụ trước, ta cũng khẳng định

Ví dụ 5.22

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ ta xét hệ cơ sở chính tắc $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, trong đó

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), ..., e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Ta chỉ ra được rằng cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$ là một cơ sở trực chuẩn.

Định lý 5.2

Cho không gian Euclid n chiều U cho hệ $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của U. Nếu $[x]_e = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $[y]_e = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là tọa độ của x, y trên cơ sở trực chuẩn (e) thì :

i) $x_i = \langle x, e_i \rangle$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$;

ii) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$;

iii) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Định lý trên cho ta thấy rằng:

1. Trong một không gian Euclid n chiều việc tính toán tích vô hướng theo tọa độ của các phần tử trên một cơ sở trực chuẩn hoàn toàn tương tự với các tính toán đối với tích vô hướng chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$.
2. Có thể sử dụng tích vô hướng để tính tọa độ của các phần tử trên một cơ sở trực chuẩn.
3. Khai triển của phần tử x trên cơ sở trực chuẩn $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ có dạng
$$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 + \ldots + \langle x, e_n\rangle e_n. \tag{5.23}$$

Ví dụ 5.23

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở trực chuẩn $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ với

$$u_1 = \frac{1}{3}(2,1,2), \quad u_2 = \frac{1}{3}(2,-2,-1), u_1 = \frac{1}{3}(1,2,-2).$$

Hãy tính tọa độ của phần tử $x = (5,2,6)$ trên cơ sở (u).

Giải: Ký hiệu $[x]_u = (x_1, x_2, x_3)$ là tọa độ cần tính của x trên cơ sở (u). Vì (u) là một cơ sở trực chuẩn nên ta có tính toán như sau:

$$x_1 = \langle x, u_1 \rangle = \frac{1}{3}(10+2+12) = 8; \quad x_2 = \langle x, u_2 \rangle = \frac{1}{3}(10-4-6) = 0,$$

$$x_3 = \langle x, u_3 \rangle = \frac{1}{3}(5+4-12) = -1.$$

Như vậy tọa độ của x trên cơ sở (u) là $[x]_u = (8, 0, -1)$.

Ví dụ 5.24

Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^5$, cho hệ trực giao $(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_5\}$ với

$$\begin{aligned} u_1 &= (3, 5, 1, -1, 0), \quad u_2 = (5, -3, -1, -1, 0), \quad u_3 = (2, 0, 2, 8, -3), \\ u_4 &= (1, 3, -11, 7, 12), \quad u_5 = (1, -3, 13, 1, 12). \end{aligned}$$

Việc chuẩn hóa hệ (u) được thực hiện như sau

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{6}(3, 5, 1, -1, 0), \quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{6}(5, -3, -1, -1, 0), \\ e_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{9}(2, 0, 2, 8, -3), \quad e_4 = \frac{u_4}{\|u_4\|} = \frac{1}{18}(1, 3, -11, 7, 12), \\ e_5 &= \frac{u_5}{\|u_5\|} = \frac{1}{18}(1, -3, 13, 1, 12). \end{aligned}$$

Kết quả chuẩn hóa hệ (u) chính là hệ trực chuẩn (e). Hơn nữa, hệ (e) có 5 phần tử và $\dim \mathbb{R}^5 = 5$ nên hệ (e) là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^5$.

Ta thấy rằng từ mỗi cơ sở thông thường $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ của một không gian Euclid n chiều U, đều có thể xây dựng được một cơ sở trực chuẩn của U.Các bước được thực hiện cụ thể như sau:

1. Thực hiện thủ tục trực giao hóa Gram-Schmidt đối với hệ (a) để thu được hệ trực giao $(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$;
2. Chuẩn hóa hệ (u), ta thu được một cơ sở trực chuẩn của U.