Tích phân đường và tích phân mặt

Nguyễn Thị Hiên

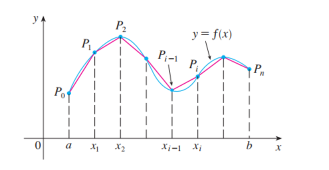
Ngày 20 tháng 1 năm 2022

Nội dung

Khái niệm tích phân đường loại 1

Định nghĩa

Cho một cung đường cong trơn C xác định bởi một hàm $f : L \to \mathbb{R}$ với $y = f(x)$. f liên tục trên $[a, b]$



Chiều dài L của C

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

Khái niệm tích phân đường loại 1

Với

$$\begin{aligned}|P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\Delta x\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \qquad (1)$$

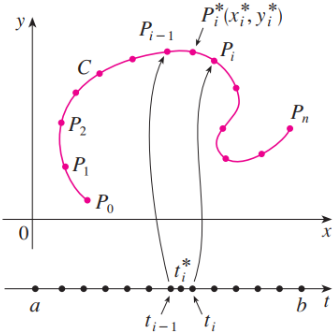
hay

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

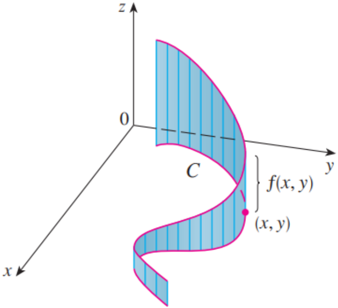
Khái niệm tích phân đường loại 1

Nếu đường cong C định nghĩa bởi phương trình tham số

$$x = f(t); \quad y = g(t); \ \alpha \leq t \leq \beta;$$



Khái niệm tích phân đường loại 1



Khái niệm tích phân đường loại 1

Nếu đường cong C định nghĩa bởi phương trình tham số

$$x = f(t); \quad y = g(t); \ \alpha \le t \le \beta;$$

với $\frac{dx}{dt} = f'(t) > 0$
Vậy ta có

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt \quad (2) \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (3) \end{aligned}$$

Khái niệm tích phân đường loại 1

Nếu đường cong C định nghĩa bởi phương trình tham số

$$x = x(t); \quad y = y(t); \; a \leq t \leq b;$$

Định nghĩa

Tích phân của f theo đường cong C là

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i \tag{4}$$

nếu giới hạn tồn tại.

Khái niệm tích phân đường loại 1

Vậy ta có

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt \qquad (5)$$

Ví dụ

- *Tính* $\int_C (2+x^2y)ds$ *với* C *là nửa trên đường tròn đơn vị* $x^2+y^2=1$.
- *Tính* $\int_C y^3 ds$ *với* $C: x=t^3,\ y=t, 0 \le t \le 2$

Khái niệm tích phân đường loại 1

Nếu C đường cong trơn từng đoạn, nghĩa là C là hợp của $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Tích phân của f theo đường cong C được tính bằng:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y) + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)dsds$$

Ví dụ

Tính $\int_C 2xds$ với C gồm C_1 là parabol $y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ và tiếp theo là C_2 là đoạn thẳng từ $(1,1)$ đến $(1,2)$.

Khái niệm tích phân đường loại 2

Tích phân đường của f theo đường cong C đối với x và đối với y lần lượt là:

$$\int_C f(x,y)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i. \tag{6}$$

$$\int_C f(x,y)dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta y_i. \tag{7}$$

Khái niệm tích phân đường loại 2

Cho C là đường cong với phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$.

Tích phân đường của f theo đường cong C đối với x và đối với y lần lượt là:

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt \tag{8}$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(x(t),y(t))y'(t)dt \tag{9}$$

Xét tích phân đường đối với x và y đồng thời xảy ra, ta có

$$\int_C P(x,y)dx + \int_C Q(x,y)dy = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Tính tích phân đường loại 2

Chú ý

Tham số hoá đường thẳng bắt đầu tại r_0 *và kết thúc tại* r_1 *là*

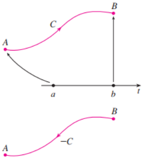
$$\mathrm{r}(t) = (1-t)\mathrm{r}_0 + t\mathrm{r}_1 \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ví dụ

Tính $\int_C y^2dx + xdy$ *với* C

- C *là đoạn thẳng từ* $(-5,-3)$ *đến* $(0,2)$
- C *là đường cong parabol* $x = 4 - y^2$ *từ* $(-5,-3)$ *đến* $(0,2)$.

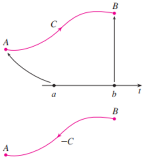
Tính tích phân đường loại 2



Đường cong tạo bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$, hoá có định hướng dương theo giá trị tăng dần của tham số. Nếu $-C$ cùng đường cong nhưng ngược hướng, ta có:

$$\int_{-C} f(x,y)dx = -\int_C f(x,y)dx \quad \int_{-C} f(x,y)dy = -\int_C f(x,y)dy$$

Tính tích phân đường loại 2



Đường cong tạo bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$, hoá có định hướng dương theo giá trị tăng dần của tham số. Nếu $-C$ cùng đường cong nhưng ngược hướng, ta có:

$$\int_{-C} f(x,y)dx = -\int_C f(x,y)dx \quad \int_{-C} f(x,y)dy = -\int_C f(x,y)dy$$

Chú ý

Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc vào hướng của đường cong

$$\int_{-C} f(x,y)ds = \int_C f(x,y)ds.$$

Tính tích phân đường trong không gian

Giả sử là đường cong trơn trong không gian C cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad a \leq t \leq b$$

hoặc phương trình véc-tơ $\mathrm{r}(t) = x(t)\mathrm{i} + y(t)\mathrm{j} + z(t)\mathrm{k}$.
Tích phân của hàm f theo đường cong C được tính bởi

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)ds &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta s_i \\ &= \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt\end{aligned}$$

Tính tích phân đường trong không gian

Tích phân đường của f trên đường cong C theo x, y, z cũng được định nghĩa:

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)dz &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta z_i \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt.\end{aligned}$$

Do đó tích phân đường loại hai trên đường cong C có dạng

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \qquad (10)$$

Tính tích phân đường trong không gian

Ví dụ

1. *Tính* $\int_C y \sin z ds$ *với* C *là đường cong có phương trình tham số*
$$x = \cos t;\ \ y = \sin t;\ \ z = t;\ \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$
2. *Tính* $\int_C ydx + zdy + xdz$ *với* C *là đường chứa đoạn thẳng* C_1 *từ* $(2, 0, 0)$ *đến* $(3, 4, 5)$ *và* C_2 *là đoạn thẳng* $(3, 4, 5)$ *đến* $(3, 4, 0)$.

Định nghĩa tích phân mặt loại một

Cho mặt cong S trơn với diện tích khác không. Hàm $f(x, y, z)$ xác định trên S và $M(x, y, z) \in S$

1. Phân hoạch
   Chia mặt cong S thành ΔS_i sao cho
   $$S = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta S_i$$
   mà
   $$\bigcap_{i=1}^{n} \Delta S_i = 0$$
2. Mỗi ΔS_i, chọn $M(x_i, y_i, z_i)$ bất kỳ và lập tổng tích phân
   $$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$$

Định nghĩa tích phân mặt loại một

Định nghĩa

Nếu giới hạn $\lim_{n\to\infty} I_n = I$ *hữu hạn thì ta nói rằng hàm* $f(x,y,z)$ *khả tích mặt loại một trên* S *và ký hiệu*

$$I = \iint_S f(x,y,z)dS \tag{11}$$

S *là mặt cong lấy tích phân còn* $f(x,y,z)$ *là hàm dưới dấu tích phân mặt.*

Điều kiện lấy tích phân

Nếu S là mặt trơn thì các lớp hàm khả tích trên mặt cong trơn S là các hàm bị chặn, hàm liên tục hay liên tục từng miền.

Cách tính tích phân mặt loại một

Mặt S cho bởi $z = \varphi(x, y)$ xác định trên D :
Do S trơn nên tồn tại z'_x, z'_y liên tục

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy \tag{12}$$

Vậy

$$\begin{aligned} I &= \iint_S f(x, y, z) dS \qquad (13) \\ &= \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy \qquad (14) \end{aligned}$$

với D là hình chiếu của S lên mặt Oxy.

Cách tính tích phân mặt loại một

Mặt S cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases} \qquad (s,t) \in D \subset \mathbb{R}^2 \tag{15}$$

thì tích phân mặt loại một được tính:

$$\iint_S f(x,y,z) = \iint_D f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))\sqrt{EG - F^2}dsdt \tag{16}$$

với

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{17}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \tag{18}$$

Tích phân mặt loại 1

Ví dụ

- *Tính* $\iint_S y dS$ *với* S *là mặt phẳng* $z = x + y^2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$.
- *Tính tích phân* $\iint_S x^2 dS$ *với* S *là quả cầu đơn vị* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Tích phân mặt loại 2

Định nghĩa

*Mặt định hướng Cho mặt cong S trong không gian $\mathbb{R}^3$,
nếu S không kín sẽ có hai phía: Trên -dưới,
nếu S kín thì có hai phía: Trong - ngoài.
Tại điểm $M \in S$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ vuông góc với S.
Ta quy ước: $\overrightarrow{n}$ dương là lên trên, ra ngoài mặt S.
$\overrightarrow{n}$ âm là xuống dưới, vào trong mặt S.*

Tích phân mặt loại 2

Tương tự tích phân đường loại hai, hàm vecto $F(x, y, z)$ có dạng

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k} \qquad (19)$$

Lập tổng

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^{n}[P(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i \Delta z_i + \\ &+Q(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i \Delta x_i + \\ &+R(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i \Delta x_i] \end{aligned} \qquad (20)$$

Tích phân mặt loại 2

Nếu giới hạn $\lim_{n\to\infty} I_n = I$ hữu hạn thì ta nói hàm $F(x, y, z)$ khả tích mặt loại hai trên S và kí hiệu:

$$I = \iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy \quad (21)$$

Cách tính tích phân mặt loại 2

Đưa tích phân mặt loại hai về loại một

Ta có

$$\Delta y_i \Delta z_i = \cos\alpha ds \tag{22}$$

$$\Delta z_i \Delta x_i = \cos\beta ds \tag{23}$$

$$\Delta x_i \Delta y_i = \cos\gamma ds \tag{24}$$

nên

$$I = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{25}$$

$$= \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma] ds \tag{26}$$

Cách tính tích phân mặt loại 2

Tính $\iint_S Pdydz, \iint_S Qdzdx, \iint_S Rdxdy$ độc lập từng tích phân và cộng lại

- Nếu $\overrightarrow{n}$ hợp với mặt cong S một góc nhọn thì

$$\iint_S = \iint_D R(x, y, \varphi(x, y))dxdy \tag{27}$$

- Nếu $\overrightarrow{n}$ hợp với mặt cong S một góc tù thì

$$\iint_S = -\iint_D R(x, y, \varphi(x, y))dxdy \tag{28}$$

Công thức Stokes

Định lý

Giả sử S mặt có định hướng trơn từng khúc có biên trơn L và các hàm P, Q, R liên tục có các đạo hàm riêng liên tục trong miền mở của mặt S, khi đó

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Công thức Ostrogradski

Định lý

Giả sử V là miền giới nội bởi mặt có định hướng trơn S và các hàm P, Q, R liên tục có các đạo hàm riêng liên tục trong miền mở của mặt S,

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \tag{29}$$