Chương 3: Không gian tuyến tính

Nguyễn Thị Thái Hà
Email: nttha@utc2.edu.vn

3.1. Cấu trúc tuyến tính của không gian $\mathbb{R}^n$

Ta xét các dãy có thứ tự gồm n số thực

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Nếu ký hiệu dãy số trên bởi x thì ta viết

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Đặt

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Định nghĩa

Cho x, y là hai phần tử của $\mathbb{R}^n$ với biểu diễn tường minh là $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Ta nói rằng x, y là hai phần tử bằng nhau nếu $x_i = y_i$ với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$ và ký hiệu là $x = y$.

Định nghĩa

Cho x, y là hai phần tử nào đấy của $\mathbb{R}^n$ với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ là một số thực tùy ý. Tổng của x với y được ký hiệu là $x + y$. Tích của số λ với phần tử $x \in \mathbb{R}^n$ được ký hiệu là λx. Chúng được cho bởi công thức

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Ví dụ

Trong tập hợp $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử

$$x = (1, 2, -2, 1), \quad y = (3, 1, 4, 2)$$

Với định nghĩa của phép cộng nêu trên ta có

$$x + y = (1, 2, -2, 1) + (3, 1, 4, 2) = (4, 3, 2, 3).$$

$$2x = 2(1, 2, -2, 1) = (2, 4, -4, 2),$$

$$(-3)y = -3(3, 1, 4, 2) = (-9, -3, -12, -6)$$

và

// $2x - 3y$

$$2x + (-3)y = (2, 4, -4, 2) + (-9, -3, -12, -6) = (-7, 1, -16, -4).$$

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, ta gọi phần tử $(0, 0, \ldots, 0)$ của $\mathbb{R}^n$ được cấu tạo từ một dãy gồm n số 0 là phần tử không và ký hiệu phần tử này là θ.

Cho $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một phần tử của $\mathbb{R}^n$. Nếu đổi dấu tất cả các số thực cấu tạo nên phần tử x thì ta thu được một phần tử mới của $\mathbb{R}^n$. Ta gọi phần tử thu được là phần tử đối của x và ký hiệu là $-x$.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho phần tử

$$x = (2, -3, 0, 1).$$

$\theta_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$

$\theta_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$

Phần tử đối của x là

$$-x = (-2, 3, 0, -1).$$

Các tính chất sau đây là các đặc trưng của cấu trúc tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$:

1. Tính chất giao hoán của phép cộng
$$x + y = y + x, \qquad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n.$$
2. Tính chất kết hợp của phép cộng
$$(x + y) + z = x + (y + z), \qquad \text{với mọi } x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$
3. Tính chất trung hòa của phần tử không
$$x + \theta = x, \qquad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}^n.$$
4. Tính chất khử của phần tử đối
$$x + (-x) = \theta, \qquad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}^n.$$

5. Tính chất bất biến của phép nhân vô hướng với đơn vị 1
$$1\,x = x, \qquad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}^n.$$
6. Tính chất phân phối của phép nhân vô hướng đối với phép cộng của hệ số
$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \qquad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}^n \text{ và với mọi } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
7. Tính chất kết hợp của phép nhân vô hướng đối với phép nhân của hệ số
$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \qquad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}^n \text{ và với mọi } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
8. Tính chất phân phối của phép nhân vô hướng đối với phép cộng của phần tử
$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \qquad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ và với mọi } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$0x = \theta, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\lambda\theta = \theta \text{ với mọi } \theta \in \mathbb{R}^n.$$

Định nghĩa

Cho $x, y \in \mathbb{R}^n$, ta định nghĩa hiệu x trừ y chính là tổng của phần tử x và phần tử đối của y. Ký hiệu kết quả thu được là $x - y$.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ

$$x = (1, 2, 0, -1); \quad y = (2, 1, 3, 2).$$

Phép tính $x - y$ thực hiện như sau:

$$x - y = (1, 2, 0, -1) - (2, 1, 3, 2) = (-1, 1, -3, -3).$$

Cùng với x, y được cho ở trên, nếu lựa chọn các hệ số $\lambda = 1, \mu = -2$ thì ta cũng tính toán được phần tử $x - 2y$ như sau

$$x - 2y = (1, 2, 0, -1) - (4, 2, 6, 4) = (-3, 0, -6, -5).$$

Các tính chất với phép trừ

1. Quy tắc chuyển vế

$$x + y = z \quad \Leftrightarrow \quad x = z - y.$$

2. Quy luật giản ước đối với phép cộng

$$x + y = x + z \quad \Leftrightarrow \quad y = z.$$

Định nghĩa

Cho tập U khác tập rỗng và trường $\mathbb{K}$ (chỉ xét $\mathbb{K} = \mathbb{R}; \mathbb{K} = \mathbb{C}$) . Ta gọi U là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ nếu thỏa ba yêu cầu sau

i) Trong U có một phép toán hai ngôi và ta gọi phép toán này là phép cộng.

ii) Với mỗi $x \in U$ và mỗi $\lambda \in \mathbb{K}$, ta có quy tắc kết hợp λ với x thành một phần tử mới thuộc U. ký hiệu phần tử nhận được là λx và gọi quy tắc này là phép nhân vô hướng . Ta gọi các phần tử của $\mathbb{K}$ là các đại lượng vô hướng.

iii) Phép cộng và nhân vô hướng nêu trên phải thỏa 8 tiên đề sau:

Định nghĩa (tiếp)

Tiên đề 1. $x + y = y + x, \quad \forall\, x, y \in U.$

Tiên đề 2. $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall\, x, y, z \in U.$
Tiên đề 3. $x + \theta = \theta + x = x, \quad \forall\, x \in U.$

Tiên đề 4. Mọi phần tử trong U đều có phần tử đối
$x + x' = x' + x = \theta.$

Tiên đề 5. $1x = x, \quad \forall\, x \in U.$

Tiên đề 6.

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \forall\, x \in U,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Tiên đề 7. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad \forall\, x \in U,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$

Tiên đề 8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall\, x, y \in U,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}.$

Chú ý

Cho U là một không gian tuyến tính.

1. Nếu trường $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ thì ta gọi U là một không gian tuyến tính thực.
2. Nếu trường $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ thì ta gọi U là không gian tuyến tính phức.

Mệnh đề

Cho U là một không gian tuyến tính. Khi đó ta có các khẳng định sau

- Phép cộng trong U chỉ có duy nhất một phần tử trung hòa θ.
- Mỗi phần tử thuộc U có duy nhất một phần tử đối.
- $0.x = \theta, \quad \forall\, x \in U,$
- $(-1).x = -x, \quad \forall\, x \in U.$
- $\lambda\theta = \theta \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$

Chú ý

Cho U là không gian tuyến tính và $x, y, z \in U$. Ta có các tính chất sau:
• Ta gọi tổng của x và phần tử đối $(-y)$ của y là "x trừ đi y" và ký hiệu là $x - y$.
• Quy tắc chuyển vế

$$x + y = z \quad \Leftrightarrow \quad x = z - y.$$

• Luật giản ước đối với phép cộng

$$x + y = x + z \quad \Leftrightarrow \quad y = z.$$

Ta xét tập hợp
$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n)|\ z_i \in \mathbb{C}\}.$$
Cho phần tử $z, z' \in \mathbb{C}^n$ với $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$. Ta nói z, z' là hai phần tử bằng nhau và ký hiệu là $z = z'$ nếu $z_i = z'_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Trong tập $\mathbb{C}^n$ ta cũng xây dựng phép cộng hai phần tử và phép nhân một phần tử với một số phức giống như các phép toán trong không gian $\mathbb{R}^n$. Tương tự ta cũng chỉ ra được $\mathbb{C}^n$ với hai phép toán này là một không gian tuyến tính phức.

Ký hiệu $P[t;\mathbb{R}]$ là tập hợp các đa thức của biến t với hệ số thực. Một phần tử trong $P[t;\mathbb{R}]$ có biểu diễn tổng quát là

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0,$$

trong đó các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là $(n+1)$ số thực. Nếu $a_n \neq 0$ thì ta nói $P(t)$ là đa thức bậc n và ký hiệu là $\deg P(t) = n$. Lấy hai phần tử P, Q tùy ý trong $P[t;\mathbb{R}]$ và lấy $\lambda \in \mathbb{R}$ tùy ý. Nếu $n = \max\{\deg P, \deg Q\}$ thì ta biểu diễn được P, Q dưới dạng sau:

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0;$$
$$Q(t) = b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0.$$

Ta nói hai đa thức P, Q là hai đa thức bằng nhau nếu

$$P(t) = (t) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Trong tập hợp $P[t;\mathbb{R}]$, tổng $P+Q$ và tích λP được định nghĩa là

$$(P+Q)(t) = (a_n+b_n)t^n + (a_{n-1}+b_{n-1})t^{n-1} + \ldots + (a_1+b_1)t + (a_0+b_0$$
$$\lambda P(t) = (\lambda a_n)t^n + (\lambda a_{n-1})t^{n-1} + \ldots + (\lambda a_1)t + (\lambda a_0).$$

Hai phép toán trên thỏa mãn 8 tiên đề trong định nghĩa của không gian tuyến tính. Như vậy $P[t;\mathbb{R}]$ là một không gian tuyến tính thực.

Định nghĩa

Cho U là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ và M là một tập con khác rỗng của U. Ta gọi M là một không gian con của U.Nếu M đóng kín với phép cộng và phép nhân, nghĩa là

i) Với mỗi cặp (x, y) mà $x, y \in M$, ta luôn có $x + y \in M$.

ii) Với mỗi $x \in M$ và với mỗi $\lambda \in \mathbb{K}$ ta luôn có $\lambda x \in M$.

Khi đó, M là một không gian tuyến tính với hai phép toán này

Ví dụ

Ta đã biết rằng $P_n[t]$ là không gian tuyến tính. nếu $m \leqslant n$ thì $P_m[t]$ là tập con của $P_n[t]$. Các phép toán tuyến tính trong những không gian này được xác định hoàn toàn như nhau. Như vậy ta khẳng định được rằng:

- Với mọi số nguyên dương n, $P_n[t]$ là không gian con của không gian tuyến tính $P[t]$;
- Với mọi m, n nguyên dương sao cho $m \leqslant n$, $P_m[t]$ là không gian con của không gian tuyến tính $P_n[t]$.

Nhận xét

Nếu M là một không gian con của không gian tuyến tính U thì phần tử không của không gian U cũng là phần tử của M, hay là $\theta_U \in M$.

Cách chứng minh một tập con của không gian U là một không gian con

1. Chỉ ra $M \neq \varnothing$. Ta thường thực hiện bằng cách chỉ ra rằng $\theta \in M$.
2. Chỉ ra M là tập con đóng kín với phép cộng và phép nhân.

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính thực $\mathbb{R}^3$, xét các tập con được cho như sau:

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$
$$N = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0\},$$
$$P = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 - x_2 = 0\},$$
$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 x_2 = 0\}.$$

Thứ nhất, các tập con được xét đều là tập con khác rỗng.
Thứ hai, các kết quả về việc xác minh hai yếu tố đóng kín đối với phép cộng và đóng kín đối với phép nhân được ghi lại lại trong bảng dưới đây

Tập hợp con	Kết quả kiểm tra tính đóng kín của phép cộng	Kết quả kiểm tra tính đóng kín của phép nhân	Tập hợp đó có là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không?
M	Có	Có	**Có**
N	Có	Không	**Không**
P	Có	Có	**Có**
Q	Không	Có	**Không**

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$, cho tập con

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Hãy chứng minh rằng M là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Giải: Phần tử không $\theta = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Tổng của các số thực cấu tạo thành phần tử θ là

$$0 + 0 + 0 = 0$$

nên $\theta \in M$. Từ đây, ta suy ra $M \neq \varnothing$.
Lấy $x, y \in M$ tùy ý. Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$. Do $x, y \in M$ nên ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Ta có

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Khi đó

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3) = (x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3) = 0+0 = 0.$$

Từ đó ta suy ra $x+y \in M$.
Tiếp theo ta xét $x \in M$ như mô tả ở trên và $\lambda \in \mathbb{R}$ tùy ý. Ta có

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Khi đó

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda 0 = 0.$$

Từ đó suy ra $\lambda x \in M$.
Vậy M là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$, cho tập con

$$N = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0\}.$$

Hãy chỉ ra rằng N không phải là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Giải: Xét phần tử $x_0 = (1, 1, 1)$. Tổng của các số thực cấu tạo thành phần tử x_0 là

$$1 + 1 + 1 = 3.$$

Vì $3 > 0$ nên $x_0 \in N$. Tiếp theo chọn $\lambda_0 = -2$. Ta có

$$\lambda_0 x_0 = -2(1, 1, 1) = (-2, -2, -2).$$

Từ các số thực cấu tạo thành phần tử $\lambda_0 x_0$ ta có

$$(-2) + (-2) + (-2) = -6.$$

Vì $-6 < 0$ nên $\lambda_0 x_0 \notin N$. Tập N không phải là tập đóng kín đối với phép nhân vô hướng. Như vậy, N không phải là một không gian con

Mệnh đề

Trong không gian tuyến tính U cho tập con $M \neq \varnothing$. Khi đó, M là một không gian con của U nếu và chỉ nếu M thỏa mãn: với mọi $x, y \in M$, với mọi $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, phần tử $\lambda x + \mu y$ là phần tử thuộc M.

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$, cho tập con

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 - x_2 = 0\}.$$

Hãy chỉ ra rằng P là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Giải: Xét $\theta = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Hiệu của hai số thực đầu tiên trong ba số thực cấu tạo lên θ là $0 - 0 = 0$ nên $\theta \in P$. Từ đây, ta suy ra $P \neq \varnothing$.

Lấy $x, y \in P$ tùy ý và lấy $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tùy ý. Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$. Từ $x, y \in P$, ta có đẳng thức

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = 0.$$

Ta có

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3).$$

Khi đó

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) - (\lambda x_2 + \mu y_2) = \lambda(x_1 - x_2) + \mu(y_1 - y_2) = \lambda 0 + \mu 0 = 0.$$

Từ đó suy ra $\lambda x + \mu y \in P$. Như vậy, P là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa

Cho $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ là một hệ bao gồm m phần tử của không gian tuyến tính U. Ta gọi mỗi biểu thức có dạng

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$$

là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a).

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (2, 1, 1), \quad a_2 = (1, -1, 3), a_3 = (2, 3, 4).$$

Ta có tổ hợp tuyến tính

$2a_1 + 4a_2 - a_3 = (4, 2, 2) + (4, -4, 12) - (2, 3, 4) = (6, -5, 10)$

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (2, 3, 1, 1), a_3 = (3, 2, 3, 2), a_4 = (1, -6, 5, 2).$$

Hãy tính các tổ hợp tuyến tính sau

a) $a_1 - 3a_2 + 2a_3 - a_4$,

b) $7a_1 - 5a_2 + 2a_3 - 3a_4$.

Giải:

a) $a_1 - 3a_2 + 2a_3 - a_4 = (1, -1, 2, 1) - (6, 9, 3, 3) + (6, 4, 6, 4) - (1, -6, 5, 2) = (0, 0, 0, 0).$

b) $7a_1 - 5a_2 + 2a_3 - 3a_4 = (7, -7, 14, 7) - (10, 15, 5, 5) + (6, 4, 6, 4) - (3, -18, 15, 6) = (0, 0, 0, 0).$

Định nghĩa

Cho $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ trong không gian tuyến tính U và phần tử $x \in U$. Nếu tồn tại m hằng số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ thuộc $\mathbb{K}$ sao cho

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \qquad (*)$$

thì ta gọi x là tổ hợp tuyến tính của hệ (a). Ta gọi đẳng thức $(*)$ là biểu diễn tuyến tính của x theo các phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Phần tử θ cũng là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a):

$$\theta = 0\,a_1 + 0\,a_2 + \ldots + 0\,a_m.$$

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với
$$a_1 = (1,1,1,1), \quad a_2 = (1,-1,1,2), a_3 = (2,3,1,2).$$
Hãy chỉ ra rằng phần tử $x = (6,6,4,7)$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a).

Giải: Giả sử rằng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là ba số thực sao cho
$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

Ta biến đổi đẳng thức này như sau:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(1,1,1,1)+\lambda_2(1,-1,1,2)+\lambda_3(2,3,1,2)=(6,6,4,7)\\
\Leftrightarrow&(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3,\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3)=(6,6,4,7)\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=6\\ \lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=6\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=4\\ \lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=7\end{cases}
\end{aligned}$$

Giải hệ theo phương pháp khử Gauss ta thu được nghiệm $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$. Như vậy ta khẳng định được x có biểu diễn trên hệ (a) là

$$x=a_1+a_2+2a_3.$$

Tương ứng, phần tử x là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a).

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với
$$a_1 = (1,1,1,0), \quad a_2 = (2,-1,1,0), a_3 = (1,2,4,3).$$
Hãy chỉ ra rằng phần tử $x = (2,1,3,5)$ không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a).

Giải: Giả sử rằng tồn tại ba số thực $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sao cho ta có đẳng thức
$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$
Ta biến đổi đẳng thức này như sau
$$\lambda_1(1,1,1,0) + \lambda_2(2,-1,1,0) + \lambda_3(1,2,4,3) = (2,1,3,5)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3, 3\lambda_3) = (2,1,3,5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 3 \\ \qquad\qquad 3\lambda_3 = 5 \end{cases}$$

Sinh viên giải hệ bằng phương pháp Gauss. Sau một vài biến đổi ta chỉ ra rằng $r(A) = 3$ và $r(\overline{A}) = 4$. Do $r(A) \neq r(\overline{A})$ nên hệ phương trình vô nghiệm và đó là điều phải chứng minh.

Định nghĩa

Cho không gian tuyến tính U và $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ là một hệ gồm m phần tử của không gian U. Ta gọi hệ (a) là một hệ sinh của U nếu mọi phần tử $x \in U$ luôn tồn tại các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ trong trường $\mathbb{K}$ sao cho x có biểu diễn tuyến tính

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m.$$

Ví dụ

Hãy chỉ ra rằng $(a) = \{a_1; a_2; a_3\}$ là một hệ sinh của không gian $\mathbb{R}^3$. với

$$a_1 = (1, 1, 2),\ a_2 = (1, 2, 1),\ a_3 = (2, 1, 1).$$

Giải: Xét phần tử $x \in \mathbb{R}^3$. Giả sử rằng $x = (x_1, x_2, x_3)$. Ta cần chỉ ra rằng luôn tồn tại các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sao cho đẳng thức sau xảy ra $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

Ta có biến đổi như sau:

$$\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(2,1,1) = (x_1, x_2, x_3)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (x_1, x_2, x_3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = x_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = x_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_3 \end{cases}$$

Ta nhận thấy rằng việc chỉ ra hệ (a) là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$ chính là việc chứng minh hệ phương trình tuyến tính trên có nghiệm với mọi x_1, x_2, x_3.
Do $\det A = -4 \neq 0$ nên hệ phương trình trên là hệ Cramer và luôn luôn có nghiệm với mọi x_1, x_2, x_3. Như vậy ta khẳng định được hệ (a) là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ với

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng hệ (e) là một hệ sinh của $\mathbb{R}^n$. Thật vậy, xét phần tử $x \in \mathbb{R}^n$ tùy ý. Giả sử rằng $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ta có tính toán như sau:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n. \end{aligned}$$

Phân tích trên cho thấy rằng mọi phần tử của $\mathbb{R}^n$ đều có biểu diễn trên hệ (e) và ta kết luận được (e) là một hệ sinh của $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa

Cho U là một không gian tuyến tính trên trường $\mathbb{K}$ và cho $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ là một hệ gồm m phần tử của U. Ta gọi hệ (a) là một hệ độc lập tuyến tính nếu như đẳng thức

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = \theta, \qquad \lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \ldots, m$$

chỉ có thể xảy ra khi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ cho hệ $\varepsilon = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ với

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Ta khẳng định rằng hệ ε là một hệ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử rằng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là n số thực sao cho

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \theta.$$

Biến đổi đẳng thức trên theo trình tự như sau:

$$\begin{aligned} & \lambda_1(1,0,\ldots,0) + \lambda_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + \lambda_n(0,0,\ldots,1) = (0,0,\ldots,0) \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0,0,\ldots,0) \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

Kết quả biến đổi cho phép ta đưa ra khẳng định đã nêu ở trên.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với
$$a_1 = (1,1,2),\ a_2 = (1,2,1),\ a_3 = (2,1,1).$$
Hãy chỉ ra rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là một hệ độc lập tuyến tính.

Giải: Giả sử rằng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là ba số thực sao cho
$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \theta.$$

$$\lambda_1(1,1,2) + \lambda_2(1,2,1) + \lambda_3(2,1,1) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 02\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

Ký hiệu A là ma trận hệ số của hệ thuần nhất trên. Ta tính định thức của A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 - 8 - 1 - 1 = -4.$$

Do $\det A = -4 \neq 0$ nên hệ thuần nhất thu được trên cũng chính là một hệ Cramer. Như vậy hệ có nghiệm duy nhất và nghiệm duy nhất đó phải là nghiệm tầm thường

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Vậy hệ (a) là hệ độc lập tuyến tính.

Định nghĩa

Trong không gian tuyến tính U cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ gồm m phần tử của U. Ta gọi hệ (a) là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu như hệ này không phải là hệ độc lập tuyến tính.

Nhận xét Hệ $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu tồn tại dãy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ không đồng thời bằng không để cho

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = \theta.$$

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ ta xét hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với

$$a_1 = (1,0,0),\ a_2 = (0,1,0),\ a_3 = (0,0,1),\ a_4 = (1,2,3).$$

Thực hiện các tính toán ta có

$$a_4 = (1,2,3) = (1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3.$$

Từ đây ta thu được đẳng thức

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_4 = \theta.$$

Trong đẳng thức trên, tổ hợp tuyến tính ở vế trái có chứa các hệ số khác 0. Điều này khẳng định hệ (a) là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với
$$a_1 = (1, 1, -2),\ a_2 = (1, -2, 1),\ a_3 = (-2, 1, 1).$$
Hãy chỉ ra rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Giải: Giả sử rằng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là ba số thực sao cho ta có đẳng thức
$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \theta.$$

$$\lambda_1(1, 1, -2) + \lambda_2(1, -2, 1) + \lambda_3(-2, 1, 1) = (0, 0, 0)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3, -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ký hiệu A là ma trận hệ số của hệ thuần nhất thu được ở trên. Ta tính định thức của A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 2 + 8 - 1 - 1 = 0.$$

Do $\det A = 0$ nên hệ thuần nhất ở trên có nghiệm không tầm thường. Từ đó ta khẳng định được rằng hệ (a) là hệ phụ thuộc tuyến tính.

3.6. Hệ độc lập tuyến tính và hệ phụ thuộc tuyến tính

Nhận diện nhanh hệ độc lập tuyến tính /phụ thuộc tuyến tính

Trong không gian vector U để xét $(a) = \{a_1, a_2, \dots a_m\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính, ta thực hiện:

1. Lập ma trận A có các hàng (hoặc cột) là các vector $a_1, a_2, \dots, a_n$.
2. Đưa A về ma trận bậc thang. Tìm hạng A.
   - Nếu $r(A) = m$ thì $\{a_1, a_2, \dots a_m\}$ độc lập tuyến tính.
   - Nếu $r(A) \neq m$ thì $\{a_1, a_2, \dots a_m\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với

$$a_1 = (2,0,0,0),\ a_2 = (1,1,0,0),\ a_3 = (-2,1,3,0),\ a_4 = (-1,4,3,0).$$

Hãy cho biết hệ (a) là hệ độc lập tuyến tính hay là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Giải: Ta lập được A như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta thấy rằng A là ma trận hình thang và $r(A) = 3$. Do $r(A)$ nhỏ hơn số phần tử của hệ (a) nên hệ (a) phụ thuộc tuyến tính.

1. Hệ một phần tử $\{x\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $x = \theta$.
2. Hệ một phần tử $\{x\}$ là hệ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $x \neq \theta$.
3. Hệ có hai phần tử $\{x, y\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi hai phần tử của hệ tỷ lệ (tức là $x = \lambda y$ hoặc $y = \lambda x$ với λ nào đấy).
4. Tập con khác rỗng của một hệ độc lập tuyến tính cũng là hệ độc lập tuyến tính.
5. Một hệ chứa hệ con phụ thuộc tuyến tính thì hệ đó cũng phụ thuộc tuyến tính.
6. Áp dụng
    - Trong một hệ độc lập tuyến tính mọi phần tử đều khác θ.
    - Hệ có chứa phần tử θ là hệ phụ thuộc tuyến tính.
    - Hệ có chứa hai phần tử tỷ lệ là hệ phụ thuộc tuyến tính.

- Nếu lược bỏ một phần tử ra khỏi một hệ độc lập tuyến tính thì các phần tử còn lại cũng độc lập tuyến tính.
- Nếu thêm một phần tử vào một hệ phụ thuộc tuyến tính thì ta nhận được một hệ mới cũng là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Định nghĩa

Trong không gian tuyến tính U cho một dãy có thứ tự gồm n phần tử

$$(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}.$$

Ta gọi dãy phần tử (e) là một hệ cơ sở của không gian U nếu nó thỏa mãn hai yêu cầu sau:

i) Hệ (e) là một hệ độc lập tuyến tính.

ii) Hệ (e) là một hệ sinh của không gian U.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ hệ $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ với

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Ta khẳng định được hệ (e) là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Cơ sở (e) trong ví dụ này được gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ

Xét không gian $M_2(\mathbb{R})$ gồm các ma trận vuông thực cấp 2. Ta xét hệ $(e) = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ với

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hệ (e) được giới thiệu ở trên là một cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

Định nghĩa

Cho không gian tuyến tính U có một cơ sở gồm n phần tử. Khi đó ta gọi n là số chiều của U và ký hiệu là $\dim U$.

Ví dụ

Ta đã giới thiệu về cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^n$. Cơ sở này có n phần tử nên ta khẳng định được rằng

$$\dim \mathbb{R}^n = n.$$

Kết quả

Trong không gian tuyến tính U n chiều

1. Mọi hệ độc lập tuyến tính đều có số lượng phần tử không vượt quá n.
2. Mọi hệ có số lượng phần tử không ít hơn $n+1$ đều là hệ phụ thuộc tuyến tính;
3. Mọi cơ sở đều có đúng n phần tử.
4. Mọi hệ có số phần tử bằng n và độc lập tuyến tính thì đều là cơ sở của không gian U

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (3, 5, 1), \quad a_2 = (1, -2, 4), \quad a_3 = (1, 4, 3).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ (a) là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$.

Giải: Ký hiệu A là ma trận của hệ (a) trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Từ giả thiết ta lập được A như sau

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 4 + 20 + 2 - 15 - 48 = -55.$$

- Do $\det A = -55 \neq 0$ nên $r(A) = 3$. Vì $r(A)$ bằng số phần tử của hệ (a) nên ta khẳng định được hệ (a) độc lập tuyến tính.
- Ta biết rằng mọi hệ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ có số phần tử bằng số chiều của $\mathbb{R}^3$ đều là cơ sở của chính không gian này.
- Vì $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ nên kết luận được rằng hệ (a) là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ với

$$a_1 = (2, 0, 0, 0),\ a_2 = (2, 1, 0, 0), a_3 = (1, 2, 3, 0),\ a_4 = (3, 1, 1, -2).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ (a) là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

Giải:

Như vậy ta khẳng định được hệ (a) là hệ độc lập tuyến tính. Do $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ nên mỗi hệ độc lập tuyến tính bao gồm 4 phần tử trong $\mathbb{R}^4$ chính là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$. Vì hệ (a) có 4 phần tử nên ta kết luận được rằng hệ (a) là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

Mệnh đề

Cho M là không gian con của không gian tuyến tính U. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\dim M \leqslant \dim U.$$

Cách tìm cở sở của không gian có hệ sinh

content...

Cách tìm cở sở của không gian nghiệm

content...

Định nghĩa

Trong không gian tuyến tính U cho hệ cơ sở $(e) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Nếu $x \in U$ có biểu diễn

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

thì ta gọi dãy số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là tọa độ của x trên cơ sở (e), ký hiệu là $[x]_e$.

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n \Longleftrightarrow [x]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ ta xét cơ sở chính tắc $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ trong đó
$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$
và xét phần tử $x = (2, 3, 4)$.

Dễ dàng thu được biểu diễn của x trên cơ sở (e) là
$$x = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3.$$
Vậy tọa độ của x trên cơ sở (e) là $[x]_e = (2, 3, 4)$.

Nhận xét

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ tọa độ của mỗi phần tử x trên cơ sở chính tắc hoàn toàn trùng với biểu diễn tường minh của x.

Ví dụ

Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 2, 1), \quad a_2 = (2, -1, 2), \quad a_3 = (1, 2, 3)$$

và cho phần tử $x = (4, 3, 6)$.

Quá trình tìm tọa độ $[x]_a$ của x trên cơ sở (a) được quy về việc giải hệ Cramer sau đây

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_1 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

Việc giải hệ trên cho kết quả cụ thể là $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ và tọa độ của x trên cơ sở (a) là $[x]_a = (1, 1, 1)$.

Mệnh đề

Cho không gian tuyến tính n chiều U với hệ cơ sở $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Nếu các phần tử $x, y \in U$ có các tọa độ tương ứng là $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ thì ta có các khẳng định như sau:

1. Tọa độ của phần tử $x + y$ là
$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$
2. Với mỗi hệ số $\lambda \in K$, tọa độ của phần tử λx là
$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

- Tọa độ của phần tử đối $(-x)$ ứng với x là
$$(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n);$$
- Tọa độ của hiệu $x - y$ là
$$(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n).$$

Cho không gian tuyến tính n chiều U. Trong U ta xét hai cơ sở $(a), (b)$ với

$$(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$
$$(b) = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Ma trận chuyển cơ sở từ (a) sang (b) được ký hiệu

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [b_1]_a & [b_2]_a & \vdots & [b_n]_a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Cụ thể ma trận chuyển cở sở trong không gian 3 chiều

Giả sử không gian tuyến tính 3 chiều U. Trong U ta xét hai cơ sở $(a), (b)$ với

$$(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$$

Biết

$$b_1 = x_{11}a_1 + x_{21}a_2 + x_{31}a_3$$

$$b_2 = x_{12}a_1 + x_{22}a_2 + x_{32}a_3$$

$$b_3 = x_{13}a_1 + x_{23}a_2 + x_{33}a_3.$$

Khi đó

$$T_{ab} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

Quan hệ của các ma trận chuyển cơ sở

Cho $(a), (b), (c)$ là các cơ sở của không gian vector U, $x \in U$

1. $T_{ba} = T_{ab}^{-1}$
2. $T_{ac} = T_{ab}.\ T_{bc}$
3. $[x]_a = T_{ab}.\ [x]_b$

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính ba chiều U cho các cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ và cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (a) sang cơ sở (b) là

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Từ ma trận chuyển T_{ab} đã biết ta có thể tính toán ma trận chuyển theo chiều ngược lại, tức là ma trận chuyển cơ sở T_{ba} từ cơ sở (b) sang cơ sở (a). Kết quả thu được là

$$T_{ba} = T_{ab}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$, $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$a_1 = (1, 3, -2), \quad a_2 = (2, 2, 3), \quad a_3 = (2, -1, 3),$$
$$b_1 = (2, -3, 1), \quad b_2 = (1, 4, 2), \quad b_3 = (2, 5, 4).$$

Từ hai cơ sở được cho ta lập được các ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc (e) tới hai cơ sở $(a), (b)$ là

$$T_{ea} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_{eb} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tính toán nghịch đảo của ma trận T_{ea} ta nhận được kết quả

$$T_{ea}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ -7 & 7 & 7 \\ 13 & -7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Như vậy, ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (a) sang cơ sở (b) là

$$T_{ab} = T_{ea}^{-1}.\, T_{eb} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ -7 & 7 & 7 \\ 13 & -7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 12 & -3 & -6 \\ -28 & 35 & 49 \\ 43 & -23 & -25 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ

Trong không gian tuyến tính ba chiều U cho hai cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$, $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ và cho biết ma trận chuyển cơ sở từ (a) sang cơ sở (b) là

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Xét phần tử $x \in U$ sao cho

$$x = 3a_1 + 12a_2 + 5a_3.$$

Tính toán tọa độ $[x]_b$.

Ta có tọa độ của x trên cơ sở (a) là $[x]_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

Cách 1: Đặt $[x]_b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Ta có đẳng thức

$$[x]_a = T_{ab} [x]_b$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_1 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Giải hệ Cramer thu được ở trên ta thu được kết quả là $[x]_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cách 2: Ta biến đổi công thức

$$[x]_a = T_{ab}\,[x]_b$$

về đẳng thức

$$[x]_b = T_{ab}^{-1}\,[x]_a.$$

Tính toán T_{ab}^{-1} từ ma trận T_{ab} đã cho ta thu được

$$T_{ab}^{-1} = \frac{-1}{23}\begin{pmatrix} -12 & -1 & 5 \\ 10 & -3 & -8 \\ 9 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Từ đó ta xác định được tọa độ x_b là

$$x_b = T_{ab}^{-1}\,[x]_a = \frac{-1}{23}\begin{pmatrix} -12 & -1 & 5 \\ 10 & -3 & -8 \\ 9 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$