



<u>Çâu 1:</u> Kiếm tra W có phải là không gian con của V không?

W =
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 2z = 0\}$$
 V= \mathbb{R}^3

<u>Giải</u>

$$(0, 0, 0) \in W => W \neq \emptyset$$

$$\forall u = (x, y, z) \in W \implies x - y + 2z = 0$$

$$\forall v = (x_1, y_1, z_1) \in W \Rightarrow x_1 - y_1 + 2z_1 = 0$$

Ta có:
$$u + v = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$$

Xét
$$x + x_1 - (y + y_1) + 2(z + z_1) = (x - y + 2z) + (x_1 - y_1 + 2z_1) = 0 + 0 = 0$$

$$=> u + v \in W(1)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$
, $\lambda u = \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$$X\acute{e}t: \lambda x - \lambda y + 2\lambda z = \lambda (x - y + 2z) = 0$$

$$=> \lambda u \in W(2)$$

$$V$$
â y $W \subset V$



<u>Gâu 2:</u> Trong \mathbb{R}^3 cho hệ vector $a_1 = (1,2,3), \ a_2 = (2,1,0), \ a_3 = (0,1,2)$. Hệ trên độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

<u>Giải</u>

Ma trận các hệ số của hệ trên là A =
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Do A là ma trận vuông ⇒ detA = 12 ≠ 0

Vậy hệ độc lập tuyến tính (Nếu ma trận không vuông thì sử dụng hạng ma trận để xét)

Câu 3: Tìm cơ sở, số chiều của không gian nghiệm hệ:

$$4x_5 - 3x_4 - 2x_1 - x_2 = 0$$

$$3x_1 + 5x_4 - 3x_5 - x_3 + 2x_2 = 0$$

$$x_3 - x_5 + 2x_1 + x_4 + 2x_2 = 0$$

<u>Giải:</u>

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}
4x_5 - 3x_4 - 2x_1 - x_2 = 0 \\
3x_1 + 5x_4 - 3x_5 - x_3 + 2x_2 = 0
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
-2x_1 - x_2 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\
3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0
\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_4 + 4x_5 \\ x_2 = x_4 - 4x_5 \\ x_3 = x_4 + x_5 \\ x_4, x_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2x_4 + 4x_5, x_4 - 4x_5, x_4 + x_5, x_4, x_5) \mid x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

Có $(-2x_4 + 4x_5, x_4 - 4x_5, x_4 + x_5, x_4, x_5) = x_4(-2, 1, 1, 1, 0) + x_5(4, -4, 1, 0, 1)$

- ⇒ Mọi bộ nghiệm đều được biểu diễn được qua
- S = {(-2, 1, 1, 1, 0); (4, -4, 1, 0, 1)} Mà S độc lập tuyến tính
- \Rightarrow Một cơ sở của W là S = {(-2, 1, 1, 1, 0); (4, -4, 1, 0, 1)}
- \Rightarrow dim W = 2





$$a_1 = (1, 2, 1, 2), a_2 = (1, 2, -1, 1)$$

$$a_3 = (2, 1, 3, 1), a_4 = (1, 3, -2, 2)$$

Chứng minh hệ {a₁, a₂, a₃, a₄} là hệ độc lập tuyến tính

Hệ trên có phải là một cơ sở của không gian ℝ⁴ không? Vì sao?

Giải:

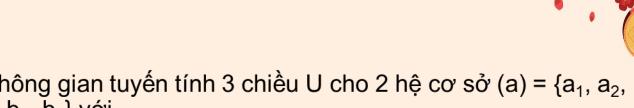
Ta có: A =
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Do A là ma trận v<mark>uông => detA = -2</mark> ≠ 0

Vậy hệ độc lập tuyến tính

Vì hệ trên độc lập tuyến tính mà dim $\mathbb{R}^4 = 4 = số phần tử của hệ$





Gâu 5: Trong không gian tuyến tính 3 chiều U cho 2 hệ cơ sở (a) = $\{a_1, a_2, a_3\}$ và (b) = $\{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$b_1 = a_1 + a_2 - 3a_3$$
, $b_2 = 2a_1 - 3a_2 + 2a_3$, $b_3 = 4a_1 + 5a_2 + 1a_3$
Cho biết $[X]_a = (1, -3, 5)$. Hãy tìm $[X]_b$

Giải:

Có
$$[X]_b = T_{ba}[X]_a$$

Mà
$$T_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = > T_{ba} = T_{ab}^{-1} = 1/73. \begin{pmatrix} 13 & -6 & -22 \\ 16 & -13 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Suy ra
$$[X]_b = 1/73. \binom{-79}{60}$$

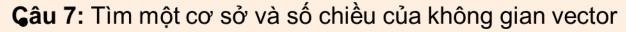
Gâu 6: Hãy tìm tọa độ của vector x= (8, 8, 19, 19) trong cơ sở dưới đây của hhông gian vector $\mathbb{R}^4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$$a_1 = (1, 1, 2, 3), a_2 = (2, 1, 3, 4), a_3 = (2, 3, -2, 1), a_4 = (1, 3, 3, 1)$$

Giải:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 19 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Suy ra tọa độ x trên cơ sở (a) là [x] = (92/35, 89/35, -23/35, 8/5)



$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a - 2b & 2a \\ 3a + b & a + 5b \end{pmatrix} \right\}$$

Giải:

$$A = \begin{pmatrix} a - 2b & 2a \\ 3a + b & a + 5b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

=> Mọi ma trận đều được biểu diễn qua S =
$$\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\}$$

Mà S độc lập tuyến tính

=> S là cơ sở, dim W = 2



Hãy chỉ ra tập hợp con W là không gian véc tơ con của $\,\mathbb{R}^3\,$.

A.
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - 5y + 8z = 1\}$$

B.
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z) \mid 6x - 2yz = 0\}$$

D.
$$W = \{(x, y, z) | 2x - 5z^2 = 0\}$$

Giải:

Xét ý B:

$$-(0,0,0) \in W => W \neq \emptyset$$

$$\forall u = (x, y, z) \in W \implies 2x - y + 3z = 0$$

$$\forall v = (x_1, y_1, z_1) \in W \Longrightarrow 2x_1 - y_1 + 3z_1 = 0$$

- Ta có:
$$u + v = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$$

Xét
$$2(x + x_1) - (y + y_1) + 3(z + z_1) = (2x - y + 3z) + (2x_1 - y_1 + 3z_1) = 0$$

$$=> u + v \in W(1)$$

$$- \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
, $\lambda u = \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$$X\acute{e}t: 2\lambda x - \lambda y + 3\lambda z = \lambda (2x - y + 3z) = 0$$

$$=> \lambda u \in W(2)$$

$$V$$
â y $W \subset V$

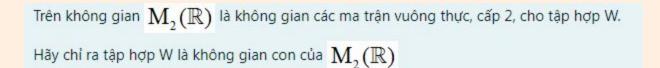
* Ý A loại vì (0, 0, 0) ∉ W C,D loại vì có y.z và z.z











W =
$$\left\{ A = \begin{pmatrix} ac & b \\ c^4 & b+3a \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

B.
$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} ab & 2b \\ b^3 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

W =
$$\left\{ A = \begin{pmatrix} 3a & 5b \\ -b & a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ ab & -2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Giải:

- Xét ý C:
- - Có $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$
- - Cho u = $\begin{pmatrix} 3a & 5b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$, v = $\begin{pmatrix} 3a' & 5b' \\ -b' & a'+b' \end{pmatrix}$, u, v ∈ W, k, h ∈ R
 - Có ku+hv = $\begin{pmatrix} 3ka + 3ha' & 5kb + 5hb' \\ -kb hb' & ka + kb + ha' + hb' \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3(ka + ha') & 5(kb + hb') \\ -(kb + hb') & (ka + ha') + (kb + hb') \end{pmatrix} \in W$$

- => Là không gian con
- * Loại các đáp án còn lại vì chứa tích của ab, c⁴,...



$$W = \begin{cases} X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 & 2x_3 + 7x_5 - x_4 + x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_4 - x_5 + 2x_1 - x_3 = 0 \\ 5x_3 - 8x_4 - 3x_1 + 2x_2 + 12x_5 = 0 \\ 7x_4 - 9x_5 + 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong các khẳng định sau:

- O A. Cơ sở của W là $\{\gamma_1=(1,-1,1,0,0), \gamma_2=(0,-2,0,1,1), \gamma_3=(0,0,-4,-1,1), \gamma_4=(0,0,0,-5,2)\} \text{ và } \dim_{\mathbb{R}} W=4$
- $^{\odot}$ B. Cơ sở của W là $\{\gamma_1=(0,-2,1,0,3),\gamma_2=(1,-3,-1,2,0)\}$ và $\dim_{\mathbb{R}}W=2$
- $\text{C.} \quad \text{Co sở của W là } \{ \gamma_1 = (1,-1,1,0,0), \gamma_2 = (0,-2,0,1,1), \gamma_3 = (0,0,-4,-1,1) \} \text{ và } \dim_{\mathbb{R}} W = 3$
- $\hbox{ D. Co sở của W là } \{\gamma_1=(1,-1,0), \gamma_2=(0,-2,3), \gamma_3=(0,0,-4)\} \hbox{ và } \dim_{\mathbb{R}} W=3$

$$W = \begin{cases} X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 & 2x_3 + 7x_5 - x_4 + x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_4 - x_5 + 2x_1 - x_3 = 0 \\ 5x_3 - 8x_4 - 3x_1 + 2x_2 + 12x_5 = 0 \\ 7x_4 - 9x_5 + 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải:

=> 2 phương trình 5 ẩn => nghiệm có 3 tham số

=>
$$\begin{cases} x_1 = a - 2b + 2c \\ x_2 = -a + b - 3c \\ x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_5 = c \end{cases}$$

$$=> S = \{(1, -1, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 1, 0), (2, -3, 0, 0, 1)\}$$

Dim W = 3



I. TÍCH VÔ HƯỚNG

CHƯƠNG 4: KHÔNG GIAN EUCLID







- **t** Cho V là một không gian vector. Một **tích vô hướng** trên V là một quy tắc cho tương ứng 2 vector x, y ∈ V.
- + Ký hiệu : $\langle x, y \rangle$
- + Thỏa các điều kiện sau : $\forall x, y, z \in \mathbb{V}, a \in \mathbb{R}$

$$(1) < x, y > = < y, x >$$

$$(2) < x + y, z > = < x, z > + < y, z >$$

$$(3) < ax, y > = a < x, y >$$

$$(4) < x, x > \ge 0, < x, x > = 0 \iff x = 0$$

=> Một không gian vector V cùng với tích vô hướng trên V được gọi là một không gian Euclid.



Từ định nghĩa, ta có các tính chất sau

$$(1) < x, ay + bz > = a < x, y > +b < x, z >$$

$$(2) < x, ay > = a < x, y >$$

$$(3) < x, 0 > = 0$$

Ví dụ 1: $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ Chứng minh quy tắc đã cho là một tích vô hướng trên tập \mathbb{R}^2

Giải:

$$\forall x = (x_{1}, x_{2}), y = (y_{1}, y_{2}), z = (z_{1}, z_{2}) \in \mathbb{R}^{2} \ v \grave{a} \ a \in \mathbb{R}$$

$$\langle x, y \rangle = x_{1}y_{1} + x_{2}y_{2} = y_{1}x_{1} + y_{2}x_{2} = \langle y, x \rangle$$

$$\langle x + y, z \rangle = (x_{1} + y_{1})z_{1} + (x_{2} + y_{2})z_{2}$$

$$= x_{1}z_{1} + y_{1}z_{1} + x_{2}z_{2} + y_{2}z_{2}$$

$$= x_{1}z_{1} + x_{2}z_{2} + y_{1}z_{1} + y_{2}z_{2} = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle ax, y \rangle = ax_{1}y_{1} + ax_{2}y_{2} = a(x_{1}y_{1} + x_{2}y_{2}) = a \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle = x_{1}^{2} + x_{2}^{2} \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff x_{1} = x_{2} = 0$$

$$\iff x = (0,0)$$

=> Khi đó quy tắc trên là một tích vô hướng (được gọi là tích vô hướng chính tắc) trên \mathbb{R}^2 . Do đó \mathbb{R}^2 là 1 không gian vector Euclid cùng với tích vô hướng này.



Ví dụ 2: Cho
$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$
,

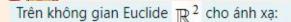
$$\text{Đặt} < x, y > = 3x_1y_1 + 4x_2y_2$$

=> Khi đó quy tắc đã cho là một tích vô hướng trên \mathbb{R}^2

Ví dụ 3: Trên $P_2[x]$, ta cho một quy tắc như sau :

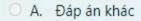
Với f, g
$$\in P_2[x]$$
, đặt $< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x) dx$

=> Quy tắc trên là tích vô hướng. Do đó $P_2[x]$, là một không gian vector EUCLIDE.



$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + m x_2 y_2$$
, $\forall x = (x_1; x_2), \forall y = (y_1; y_2)$

Tìm m để ánh xạ $\langle x,y \rangle$ là một tích vô hướng trên \mathbb{R}^2 .



- \bullet B. $m \ge 0$
- \bigcirc C. m > 1
- OD. $m \neq 1$

Giải:

C/m tích vô hướng thỏa 4 tính chất:

$$1/\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + mx_2y_2 = y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + my_2x_2 = \langle y, x \rangle$$

$$2/ < ax, y> = ax_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + amx_2y_2$$

= $a(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + mx_2y_2) = a < x, y>$

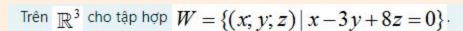
$$3/ < x + x', y> = (x_1 + x_1')y_1 + (x_1 + x_1')y_2 + (x_2 + x_2')y_1 + m(x_2 + x_2')y_2$$

= $(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + mx_2y_2) + (x_1'y_1 + x_1'y_2 + x_2'y_1 + x_1'y_1 + x_1'y_2 + x_2'y_1 + x_1'y_1 + x$

$$mx_2'y_2) = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$4/, $x> = x12 + 2x1x2 + mx22 = (x1 + x2)2 + (m - 1)x22$$$

=> m - 1 > 0 => m > 1 (m=0 thì không thỏa
$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$
)



a/ Giải phương trình: x-3v+8z=0.

b/ Chứng tỏ W là không gian véc tơ con của \mathbb{R}^3 được sinh bởi một tập hợp.

c/ Chỉ ra một cơ sở của W và cho biết số chiều của W .

Giải:

a/
$$S = \{(x, y, z) = (3y - 8z, y, z) \mid y, z \in R\}$$

b/ Có
$$(0, 0, 0) \in W$$
 nên $W \neq \emptyset$

$$\forall u = (x, y, z) \in W => x - 3y + 8z = 0$$

$$\forall v = (x_1, y_1, z_1) \in W \Longrightarrow x_1 - 3y_1 + 8z_1 = 0$$

$$ku + hv = (kx + hx_1, ky + hy_1, kz + hz_1)$$

Xét
$$(kx + hx_1) - 3(ky + hy_1) + 8(kz + hz_1)$$

$$= k(x - 3y + 8z) + h(x_1 - 3y_1 + 8z_1) = 0$$

$$=> ku + hv \in W$$

Vậy W là khôn<mark>g gian con của R³</mark>

c/ Cơ sở của W là
$$S = \{(3, 1, 0), (-8, 0, 1)\}$$

$$Dim W = 2$$

II. ĐỘ DÀI VECTOR

CHƯƠNG 4: KHÔNG GIAN EUCLID







- Cho V là một không gian vector EUCLID và $x \in V$. Độ dài của x là một số được kí hiệu : $||x|| = \sqrt{< x, x>}$
- Nếu ||x|| = 1 thì ta nói x là vector đơn vị
- Với mỗi $x \in V, x \neq 0$ ta có vector đơn vị $\overline{x} = \frac{1}{\|x\|}x$
- Vector \overline{x} được gọi là sự chuẩn hóa vector x

Ví dụ 4: Trong \mathbb{R}^n với tích vô hướng chính tắc. Nếu $x=(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ thì

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$





Tính độ dài của $f = x^2 + 2x + 3$

Giải:

•
$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

•
$$< f, f > = \int_0^1 (x^2 + 2x + 3)^2 dx = \frac{293}{15}$$

•
$$||f|| = \sqrt{\frac{293}{15}}$$

III. TÍNH CHẤT



- (1) $||x|| \ge 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2) ||kx|| = |k|||x||
- (3) Bất đẳng thức Cauchy Schwart : $|\langle x, y \rangle| \le ||x|| \cdot ||y||$
- $(4) ||x + y|| \le ||x|| + ||y||$



CHƯƠNG 4: KHÔNG GIAN EUCLID







Gho V là một không gian vector Euclid và $x, y \in V$. Góc giữa x và y được xác định bởi :

$$\cos(\widehat{x,y}) = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Ví dụ 6: Trong không gian vector Euclid \mathbb{R}^2 (với tích vô hướng chính tắc). Tính góc giữa 2 vector $\mathbf{x} = (2, 2), \mathbf{y} = (5, 0)$

Giải:

•
$$\langle x, y \rangle = 2.5 + 2.0 = 10$$

•
$$||x|| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

•
$$||y|| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$$

•
$$\cos(\widehat{x,y}) = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{10}{2\sqrt{2}.5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{x,y}) = \frac{\pi}{4}$$

IV. TRỰC GIAO, TRỰC CHUẨN

CHƯƠNG 4: KHÔNG GIAN EUCLID





- Cho V là một không gian Euclid và $x, y \in V$. Ta nói vector x trực giao với vector y, kí hiệu : $x \perp y$, nếu < x, y > = 0
- Một hệ S = {x₁, x₂, x₃, ..., x_n} thuộc V được gọi là hệ trực giao nếu các phần tử của S đôi một trực giao với nhau.
- Một hệ S = {x₁, x₂, x₃, ..., x_n} thuộc V được gọi là hệ trực chuẩn nếu :
 - + S là hệ trực giao
 - $+ \|x_i\| = 1 \ \forall i$
- Quy ước : tập gồm 1 vector luôn được xem là trực giao
- Một hệ S được gọi là cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid khi là một hệ trực chuẩn và là một cơ sở của không gian Euclid đó.

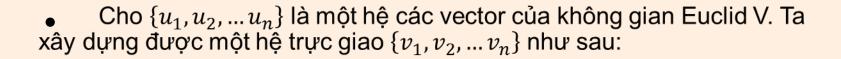


• Với
$$e_1 = (1,0,0)$$
; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$

•
$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0$$

•
$$||e_1|| = ||e_2|| = ||e_3|| = 1$$

II. PHƯƠNG PHÁP TRỰC GIAO HÓA GRAM -SCHMIDT



•
$$v_1 = u_1$$

•
$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

•
$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

•
$$v_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$$

Nếu $\{e_1,e_2,\dots e_n\}$ là một hệ trực giao không chứa vector không thì $\{\left(\frac{e_1}{\|e_1\|},\frac{e_2}{\|e_2\|},\dots,\frac{e_n}{\|e_2\|}\right)\}$ là một hệ trực chuẩn. Quá trình này gọi là chuẩn hoá hệ đã cho.



Nhận xét : Quá trình trực chuẩn hoá một tập $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ bất kì.

- + Dùng phương pháp trực giao hoá Gram Schmidt, ta được một tập trực giao $\{v_1,v_2,\dots v_n\}$.
 - + Chuẩn hoá các vector v_i và đặt $w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$
 - + $\{w_1, w_2, \dots w_n\}$ là một tập trực chuẩn

Ví dụ 3: Trong $P_2[x]$ với tích vô hướng $< p,q> = \int_1^0 p(x)q(x)dx$, Trực giao hoá hệ các vector $\{f_1(x)=1+x,f_2(x)=2-x+x^2\} \rightarrow \{g_1,g_2\}$ **Giải**:

•
$$g_1(x) = f_1(x) = 1 + x$$

•
$$g_2(x) = f_2(x) - \frac{\langle f_2(x), g_1(x) \rangle}{\langle g_1(x), g_1(x) \rangle} g_1(x) = (2 - x + x^2) - \frac{\int_1^0 (2 - x + x^2)(1 + x) dx}{\int_1^0 (1 + x)^2 dx} (1 + x)$$

$$= \frac{23}{28} - \frac{61}{28}x + x^2$$





Trên không gian Euclide ℝ⁴ cho tập hợp

 $S = \{u_1 = (1;-1;1;-1), u_2 = (1;1;3;-1), u_3 = (-3;7;1;0), u_4 = (0;0;1;0)\} \ \text{là một cơ sở, và cho một tích vô hướng:}$

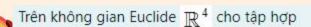
$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$
, $\forall x = (x_1; x_2; x_3; x_4)$, $\forall y = (y_1; y_2; y_3; y_4)$.

Hỏi tập hợp nào sau đây là cơ sở trực giao có được từ S (bằng phương pháp Gram-Schmidt) ?

A.
$$\{v_1 = (1; -1; 1; -1), v_2 = (0; 1; 1; 0), v_3 = (-1; 0; -2; 0), v_4 = (-1; 2; 1; -1)\}$$

$$v_1 = (1; -1; 1; -1), v_2 = (0; 1; 1; 0), v_3 = (1; -1; 1; 3), v_4 = (2; 1; -1; 0)$$

O.
$$\{v_1 = (1; -1; 1; -1), v_2 = (0; 1; 1; 0), v_3 = (-1; -1; 2; 2), v_4 = (-2; -1; 0; 2)\}$$



 $S = \{u_1 = (1; -1; 1; -1), u_2 = (1; 1; 3; -1), u_3 = (-3; 7; 1; 0), u_4 = (0; 0; 1; 0)\} \text{ là một cơ sở, và cho một tích vô hướng:}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$
, $\forall x = (x_1; x_2; x_3; x_4)$, $\forall y = (y_1; y_2; y_3; y_4)$.

Hỏi tập hợp nào sau đây là cơ sở trực giao có được từ S (bằng phương pháp Gram-Schmidt) ?

Giải:

Trực giao hoá:

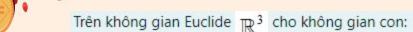
$$v_{1} = u_{1} = (1; -1; 1; -1)$$

$$v_{2} = u_{2} - \frac{\langle u_{2}, v_{1} \rangle}{\langle v_{1}; v_{1} \rangle} v_{1}$$

$$= (1; 1; 3; -1) - (1; -1; 1; -1) = (0; 2; 2; 0) = (0, 1, 1, 0)$$

$$v_{3} = u_{3} - \frac{\langle u_{3}, v_{1} \rangle}{\langle v_{1}; v_{1} \rangle} v_{1} - \frac{\langle u_{3}; v_{2} \rangle}{\langle v_{2}; v_{2} \rangle} v_{2} = (-3; 7; 1; 0) - \frac{-9}{4} (1; -1; 1; -1) - 2(0; 2; 2; 0) = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}) = (1, -1, 1, 3)$$

$$v_{4} = u_{4} - \frac{\langle u_{4}, v_{1} \rangle}{\langle v_{1}, v_{1} \rangle} v_{1} - \frac{\langle u_{4}, v_{2} \rangle}{\langle v_{2}, v_{2} \rangle} v_{2} - \frac{\langle u_{4}, v_{3} \rangle}{\langle v_{3}, v_{3} \rangle} v_{3}$$



$$W = \{(x_1; x_2; x_3) | x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Hãy xác định một cơ sở trực chuẩn của W (bằng phương pháp Gram-Schmidt) trong các tập hợp sau:

A.
$$\left\{ v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}; -\frac{2}{\sqrt{30}}; \frac{5}{\sqrt{30}} \right) \right\}$$

B.
$$\left\{ v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right), v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}; \frac{2}{\sqrt{30}}; \frac{5}{\sqrt{30}} \right) \right\}$$

O C. Đáp án khác

D.
$$\left\{ v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0 \right), v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}; \frac{2}{\sqrt{30}}; -\frac{5}{\sqrt{30}} \right) \right\}$$



Trên không gian Euclide 😭 3 cho không gian con:

$$W = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \middle| x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Hãy xác định một cơ sở trực chuẩn của W (bằng phương pháp Gram-Schmidt) trong các tập hợp sau:

Giải:

Cách 1:

- Giải phương trình: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 => 1$ phương trình 3 ẩn => nghiệm sẽ biểu diễn theo 2 tham số:

$$(x_1, x_2, x_3) = \{(2x_2 - x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in R\}$$

$$=> (2x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(2, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1)$$

=> S là cơ sở của không gian nghiệm phương trình

=> Trực chuẩn hóa hệ trên, ta sẽ được đáp án B

Cách 2:

B1: Kiểm tra xem đáp án nào là hệ trực chuẩn

B2: Thay các vector vào phương trình, nếu tất cả vector trong hệ thỏa là nghiệm phương trình thì chọn đáp án đó

