Trường Đại học Công nghệ Thông tin

Khoa Khoa học và Kỹ thuật Thông tin

BAN HỌC TẬP

Chào Mừng Các Bạn Đến Với Buổi Training

GIẢI TÍCH

Nội Dung Thi Cuối Kì

- Chuỗi số dương & Chuỗi luỹ thừa
- Cực trị tự do hàm hai biến
- Tích phân bội 2 & tích phân bội 3
- Tích phân đường loại 1 & Tích phân đường loại 2
- Phương trình vi phân cấp 1.
- Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng.

TÍCH PHÂN BỘI 2

1. Định Nghĩa

❖ Tích phân bội 2:

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

❖ Tính diện tích của D: với $f(x,y) = 1$ thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = S(D)$$

2. Tính Chất

1. $\iint_D C.f(x,y)dxdy = C.\iint_D f(x,y)dxdy$
2. $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$
3. Nếu D được chia thành 2 miền D1, D2 không dẫm lên nhau thì:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D2} f(x,y)dxdy$$

4. Nếu $\forall (x,y) \in D, f(x,y) \le g(x,y)$ thì:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy$$

5. Giả sử M, m tương ứng với GTLN & GTNN của f(x,y) trên D. Khi đó:

$$m.S_D \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M.S_D$$

6. (Định lý về GT trung bình) Tồn tại điểm M ∈ D, sao cho: $\iint_D f(x,y)dxdy = f(M).S_D$

3. Một số phương pháp tính tích phân kép

a. Đưa về tích phân lặp

- Đưa về tích phân lặp
- Đổi thứ tự lấy tích phân

b. Phương pháp đổi biến

- Đổi biến tổng quát
- Đổi biến sang tọa độ cực.

a. Đưa về tích phân lặp

- Giả sử hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn D
- Nếu $D=\{(x,y): a\le x\le b; y_1(x) \le y\le y_2(x)\}$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

- Tương tự: Nếu $D=\{(x,y): c\le y\le d; x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

* Chú ý: (Định lý Fubini)

- Nếu D là hình chữ nhật $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

- Nếu D $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ và $f(x,y) = g(x)h(y)$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

Đổi thứ tự lấy tích phân

Để đổi thứ tự lấy tích phân ta thực hiện các bước sau:

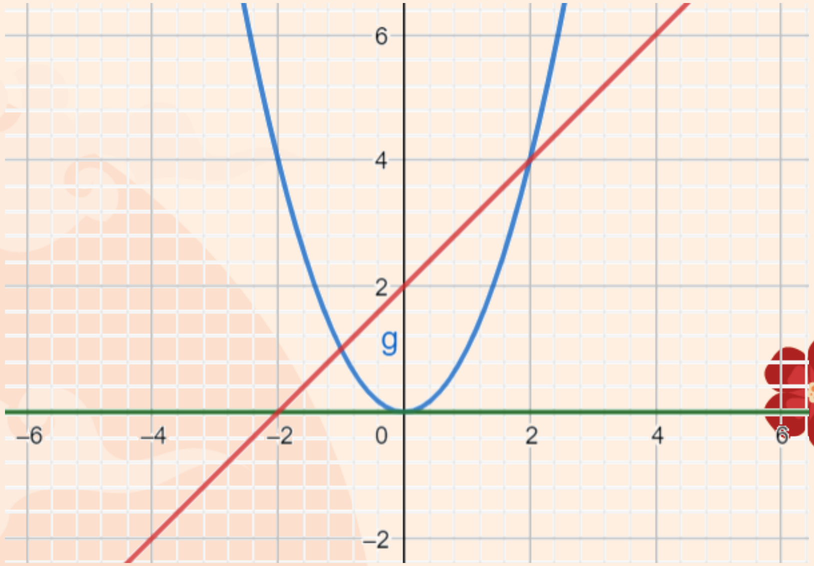
- **Bước 1:** Từ tích phân cho trước, ta biểu diễn và vẽ miền *D*.
- **Bước 2:** Từ hình vẽ, ta biểu diễn lại miền *D* theo hướng chiếu khác.
- **Bước 3:** Viết lại tích phân lặp.

VD1. Tìm cận của tích phân $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ với miền D xác định bởi các đường $y = x^2$ và $x = y - 2$

Chiếu theo y:

$D = \{(x,y): -1 \le x \le 2; x^2 \le y \le x + 2\}$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$$



VD2. Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$ với miền D giới hạn bởi các đường

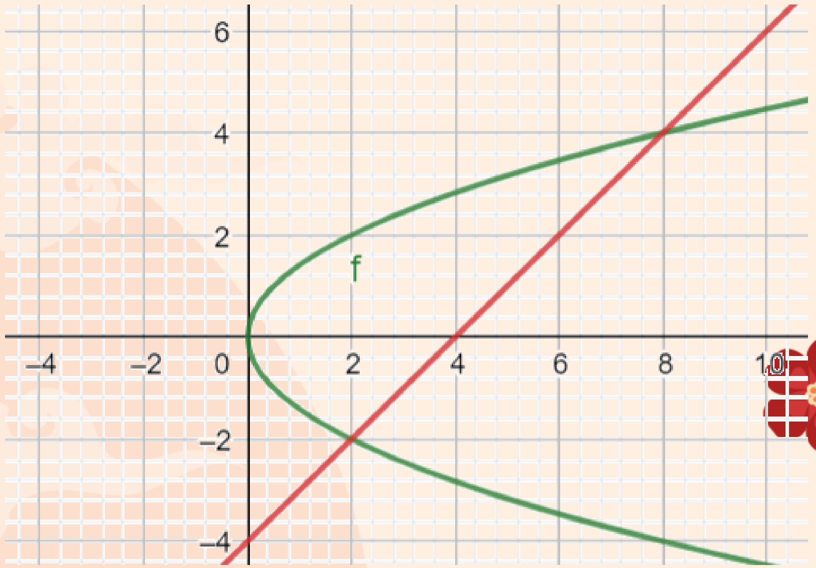
$y = x - 4, y^2 = 2x$

Chiếu theo x:

$$D = \{(x,y): -2 \le y \le 4; \frac{y^2}{2} \le x \le y+4\}$$

$$I = \int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xydx = \int_{-2}^{4}\left(y.\frac{x^2}{2}\Big|_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=y+4} \right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4} \right)dy = 90$$



b. Phương pháp đổi biến

Đổi biến tổng quát

- Giả sử $x = x(u, v); y = y(u, v)$ là hai hàm có đạo hàm riêng liên tục trên miền đóng bị chắn D_{uv}. Gọi

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid x = x(u, v); y = y(u, v); (u, v) \in D_{uv}\}$$

- Định thức Jacobi:

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trên } \mathrm{D_{uv}}$$

Thì

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\big(x(u, v), y(u, v)\big).|J|dudv$$

VD. Tính $\iint\limits_D dxdy$ với D giới hạn bởi các đường

$$y = 1 - x;\ y = 2 - x; y = 2x - 1; y = 2x - 3$$

Giải: Viết lại $x + y = 1; x + y = 2; 2x - y = 1; 2x - y = 3$

Đặt $u = x + y; v = 2x - y$ thì $x = \frac{u+v}{3}, y = \frac{2u-v}{3}$

$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{3}; D_{uv} = \{(u,v): 1 \le u \le 2; 1 \le v \le 3\}$

$$V\text{ậy} \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 dv = \frac{2}{3}$$

b. Phương pháp đổi biến

Đổi biến sang tọa độ cực

Công thức thể hiện mối liên hệ giữa toạ độ cực (r, φ) và toạ độ Descartes (x, y) là:

$$\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \end{cases}, r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Khi đó định thức Jacobi: $J = r$

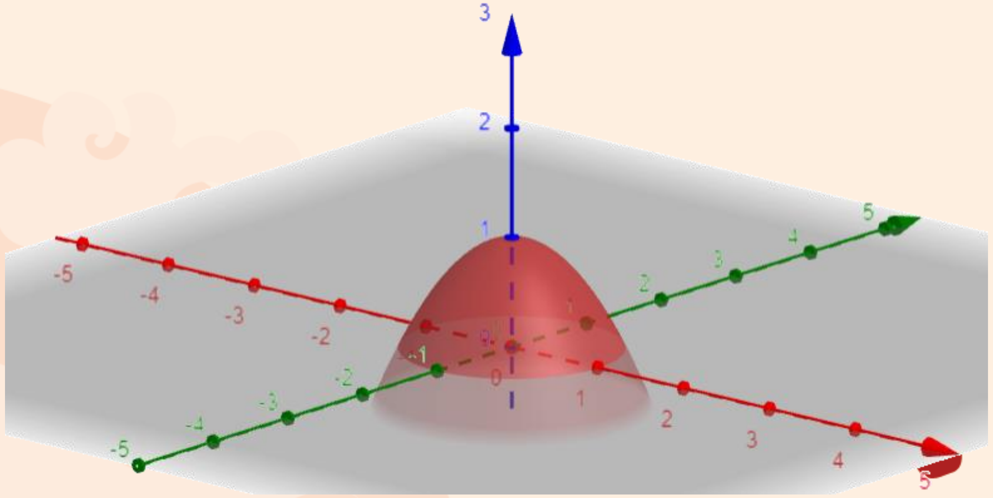
$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_{r\varphi}} f(r.\cos\varphi, r.\sin\varphi).r.drd\varphi$$

∗ Chú ý: *Đổi biến trong toạ độ cực thường được dùng khi biên của D là hình tròn hay một phần của hình tròn.*

VD. Tính tích phân $\iint\limits_{D}(1-x^2-y^2)dxdy$ với $D: \begin{cases} z \le 1 - x^2 - y^2 \\ z \ge 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = r.cos\varphi \\ y = r.sin\varphi \end{cases}$; $0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\iint_{D} (1-x^2-y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}(1-r^2)rdrd\varphi$$



$$= \frac{\pi}{3}$$

Bài Tập Tự Luyện

$$\int_0^2 \int_2^3 (2-y)(x-2)\,dydx$$

$$\iint_D (2x+y+3)dxdy, D: 0 \le x \le 2; x^2 \le y \le 2x$$

Tính diện tích miền $D: y = 2\sqrt{1-x^2}; x = \pm 1; y = -1$

TÍCH PHÂN BỘI 3

1. Định Nghĩa

- Tích phân bội 3:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz$$

- Tính diện tích của D: với $f(x, y, z) = 1$ thì:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = V(\Omega)$$

2. Tính Chất

1. $$\iiint\limits_{\Omega} C.f(x,y,z)dxdydz = C\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

2. $$\iiint\limits_{\Omega} [f(x,y,z) + g(x,y,z)]dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dxdydz$$

3. Nếu Ω được chia thành 2 miền Ω_1, Ω_2 không dẫm lên nhau thì:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dxdydz$$

4. Nếu $\forall (x,y,z) \in \Omega, f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ thì:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dxdydz$$

3. Một số Phương Pháp tính

a. Tính tích phân bội 3:

- Chiếu miền Ω lên mặt phẳng toạ độ

b. Phương pháp đổi biến:

- Đổi biến tổng quát
- Đổi biến trong toạ độ trụ
- Đổi biến trong toạ độ cầu

a. Tính Tích Phân Bội 3
Chiếu lên mặt phẳng toạ độ

Giả sử khối Ω có hình chiếu lên Oxy là miền D, được giới hạn bởi mặt dưới có phương trình $z = u(x, y)$ và mặt trên có phương trình $z = v(x, y)$ Khi đó:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{D} \left[\int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy$$

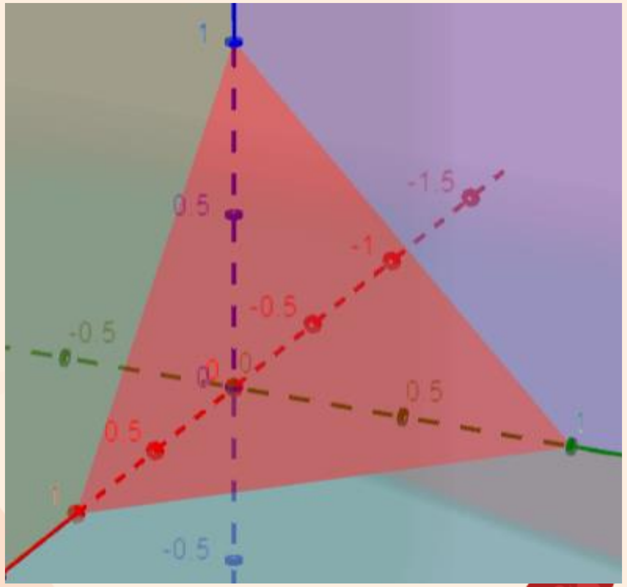
$*$ *Tương tự với* Oxz, Oyz

Chú ý:

Nếu Ω là khối hình hộp chữ nhật $a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; m \leq z \leq n$:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_m^n f(x,y,z)dz$$

VD. Tính $\iiint_E z\,dV$ với E là khối lăng trụ tam giác tạo bởi 4 mặt phẳng x = 0, y = 0, z = 0 và x + y + z = 1



$$D = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$$

$$E = \{(x, y, z): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}$$

$$\iiint_E z\,dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy = \int_0^1 \frac{1}{6}(1-x)^3 dx$$

$$= \frac{1}{24}$$

b. Phương pháp đổi biến

Đổi biến tổng quát:

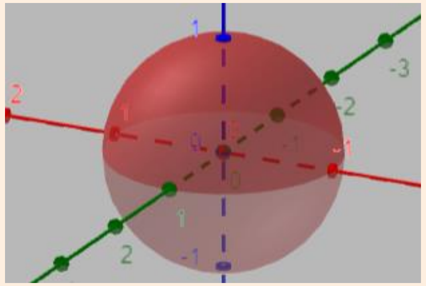
Giả sử $x = x(u,v,w); y = y(u,v,w); z = z(u,v,w)$ là ba hàm có đạo hàm riêng liên tục trên miền đóng bị chắn Ω.

Gọi $\Omega = \{(x,y,z) | x = x(u,v,w); y = y(u,v,w); z = z(u,v,w); (u,v,w) \in \Omega_1\}$

Định thức Jacobi: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$ trên Ω thì ta có:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,\mathrm{w})\big).|J|dudvdw$$

VD. Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} 2dxdydz$ với Ω: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} \le 1 \\ z \ge 0 \end{cases}$



Giải:

Đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = u \\ \dfrac{y}{2} = v \\ \dfrac{z}{1} = w \end{cases} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\,.\,2\,.\,1 = 6$

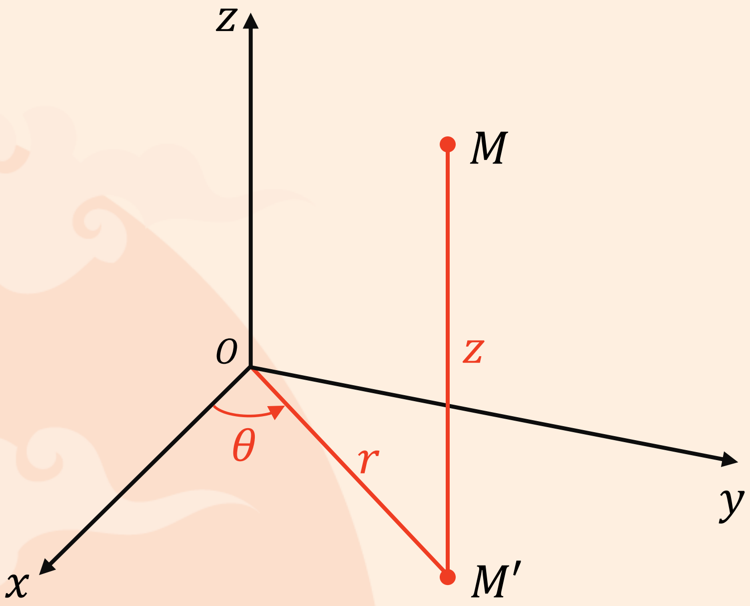
$$\Rightarrow \iiint\limits_{\Omega_{u,v,w}} 2.6dudvdw = 12.\left(\frac{1}{2}\right)V = \frac{12}{2}.\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) = 8\pi$$

b. Phương pháp đổi biến

Đổi biến trong toạ độ trụ:

- Tọa độ trụ của điểm M(x,y,z) là bộ ba số (r, θ, z) với (r, θ) là tọa độ cực của hình chiếu M xuống mặt phẳng Oxy.

- Mối liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ trụ



$$\begin{cases} x = r.cos\theta \\ y = r.sin\theta \\ z = z \end{cases}$$ với $r \geq 0; 0 \leq \theta \leq 2\pi; -\infty < z < +\infty$

Ta có:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z).rdzdrd\theta$$

VD1. Tính thể tích Ω là khối vật thể giới hạn bởi: $\begin{cases} x^2 + z^2 \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} x = r\sin\theta \\ y = y \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$\iiint_{\Omega} 1dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_{-1}^1 dy$$

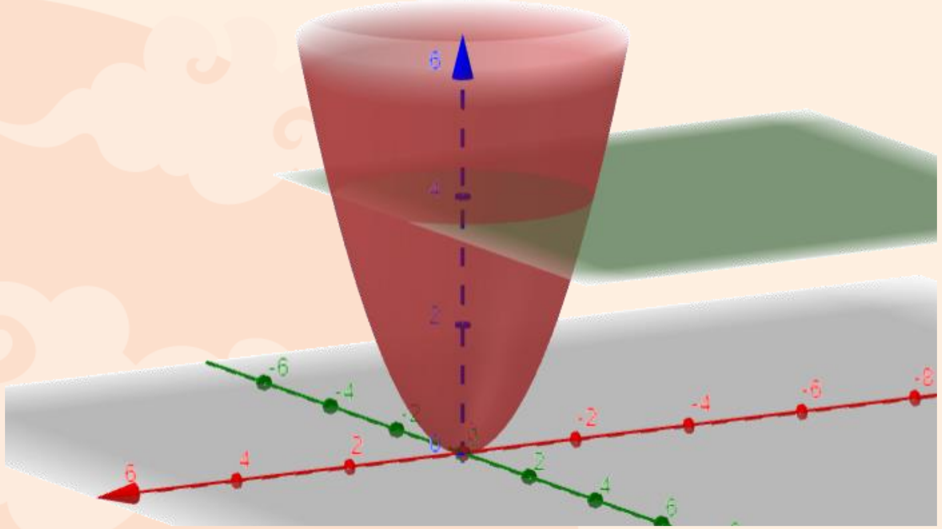
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2rdr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

VD2. Tính $\iiint\limits_E zdV$ với E là miền giới hạn bởi paraboloid $z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = 4$

$$E = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \le 4;\ x^2 + y^2 \le z \le 4\}$$

Đặt: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ r^2 \le z \le 4 \end{cases}$



$$\iiint_E zdV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 rdr \int_{r^2}^4 zdz$$

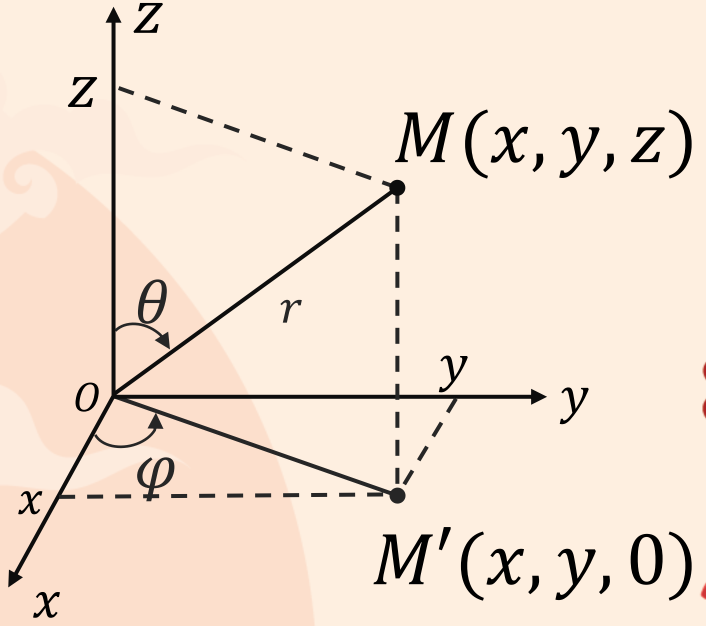
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(8 - \frac{r^4}{2}\right) rdr = \frac{64\pi}{3}$$

b. Phương pháp đổi biến

Đổi biến trong toạ độ cầu:

- Tọa độ cầu của một điểm M(x,y,z) là bộ ba số (r, θ, φ) với $r = OM$, θ là góc giữa trục Oz và $\overrightarrow{OM}$, φ là góc giữa trục Ox và $\overrightarrow{OM'}$, với M' là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy.

- Mối liên hệ của tọa độ Descartes và tọa độ cầu



$$\begin{cases} x = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$$ với $r \geq 0; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Ta có:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi\,, r\sin\theta\sin\theta\,, r\cos\theta).r^2.\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

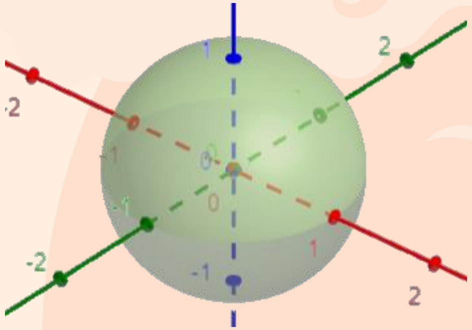
VD1. Tính $I = \iiint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, $D: \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$

Đặt:

- $x = r\sin\theta\cos\varphi$
- $y = r\sin\theta\sin\varphi$
- $z = r\cos\theta$
- $|J| = r^2\sin\theta$

D’:

- $0 \leq r \leq 1$
- $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^2 r^2 dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \frac{1}{5} d\theta$$

$$= -\frac{1}{5}\int_0^{2\pi} \cos\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{5}$$

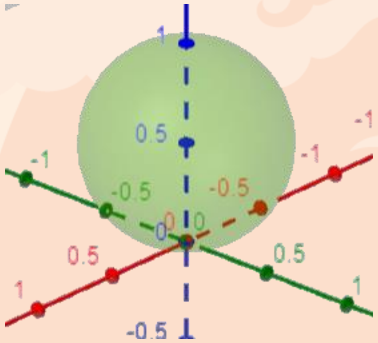
VD2. Tính $I = \iiint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{dxdydz}$, D: $\{x^2 + y^2 + z^2 \le z\}$

Đặt:

- $x = rsin\theta cos\varphi$
- $y = rsin\theta sin\varphi$
- $z = rcos\theta$
- $|J| = r^2 sin\theta$

V':

- $0 \le r \le cos\theta$
- $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
- $0 \le \varphi \le 2\pi$



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta \int_0^{cos\theta} rr^2 dr$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta \frac{cos^4\theta}{4} d\theta$$

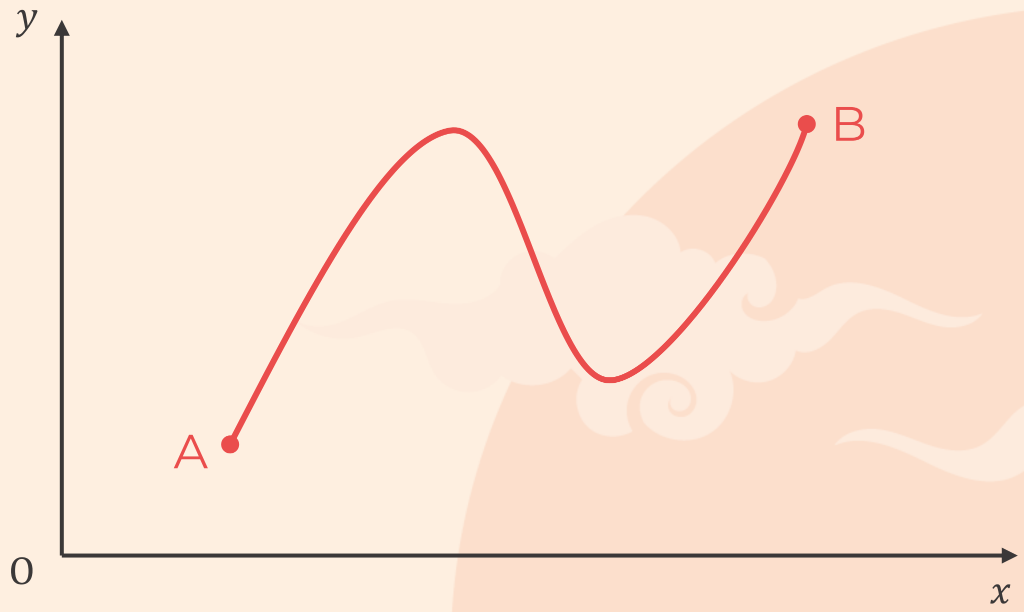
$$\Rightarrow I = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{cos^5\theta}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{20}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{10}$$

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 1

1. Kí Hiệu

Cho
- AB là đường cong hữu hạn trong mặt phẳng Oxy.
- f(x, y) xác định trên đường cong.



Kí hiệu $I = \int_{AB} f(x,y)ds$

Hoặc $I = \int_{AB} f(x,y)dl$

2. Tính Chất

- Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc vào chiều đường đi

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds$$

- $L = \int_{AB} 1ds =$ độ dài cung AB

- $AB = C_1 \cup C_2 \Rightarrow \int_{AB} f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds$

- $\int_{AB} (f+g)ds = \int_{AB} fds + \int_{AB} gds$
- $\int_{AB} \alpha.fds = \alpha \int_{AB} fds$

3. Cách Tính

❖ (C) viết dưới dạng tham số: $x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$

$$\int_{c} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\, dt$$

❖ (C) viết dưới dạng: $y = y(x), x_1 \leq x \leq x_2$

$$\int_{c} f(x,y)ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

❖ (C) viết dưới dạng: $x = x(y), y_1 \leq y \leq y_2$

$$\int_{c} f(x,y)ds = \int_{y_1}^{y_2} f(x(y),y) \sqrt{[x'(y)]^2 + 1}\, dy$$

3. Cách Tính

❖ (C) có dạng phương trình trong toạ độ cực: $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$

Khi đó ta có: $\begin{cases} r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta \\ x = r(\varphi).cos\varphi \\ y = r(\varphi).sin\varphi \end{cases}$

$$\int_C f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(r(\varphi).cos\varphi, r(\varphi).sin\varphi)\sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

❖ (C) có dạng phương trình tham số trong không gian:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_1 \le t \le t_2$$

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

VD1. Tính $I = \int_C xyds$ với C là đường cong $y = x^2$ nối từ điểm $(0,0)$ đến $(\sqrt{2}, 2)$

(C) có dạng $y = y(x) = x^2, 0 \leq x \leq 2$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\sqrt{2}} x.x^2.\sqrt{(2x)^2 + 1}dx = \frac{149}{60} \approx 2.48$$

VD2. Tính $I = \int_C (x+y)ds$ với C là biên của tam giác OAB, với O(0,0), A(1,1), B(2,0)

$$\Rightarrow \mathrm{I} = \int_{OA} (x+y)ds + \int_{AB} (x+y)ds + \int_{OB} (x+y)ds \quad, \text{Với } \begin{cases} OA: y = x \\ AB: y = 2-x \\ OB: y = 0 \end{cases}$$

$$= \int_0^1 (x+x)\sqrt{2}dx + \int_1^2 (x+(2-x))\sqrt{2}dx + \int_0^2 xdx$$

$$= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2$$

$$= 3\sqrt{2} + 2$$

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2

1. Định Nghĩa

$$\int_{\widehat{D}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- Nếu D được tạo bởi phương trình $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ điểm đầu và
- điểm cuối tương ứng với $t = t_1, t = t_2$ thì

$$\int_{t_1}^{t_2} P\big(x(t), y(t)\big).x'(t)dt + Q\big(x(t), y(t)\big).y'(t)dt$$

VD1. $\int_{\widehat{D}} (x+y)dx + (2x-y)dy$

a) D là đoạn thẳng AB nối $A(0,2)$đến $B(1,3)$

Đoạn thẳng AB: $y = x + 2$

Đặt: $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = dt \end{cases}$

Thay vào tích phân ban đầu :

$$\int_0^1 (t + t + 2)dt + (2t - (t+2))dt = \frac{3}{2}$$

VD2. $\int\limits_{\widehat{D}} (x+y)dx + (2x-y)dy$

b) D là nửa dưới của (E): $x^2 + y^2 = 9$

$$\begin{cases} x = 3cost \\ y = 3sint \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -3sint.dt \\ dy = 3cost.dt \end{cases} (\pi \le t \le 2\pi)$$

Thay vào tích phân ban đầu :

$$\int_{\pi}^{2\pi} (3\cos t + 3\sin t)(-3\sin t)dt + (2.3\cos t - 3\sin t)(3\cos t)dt = \frac{9}{2}\pi$$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Phương Trình Vi Phân Cấp 1

- PTVP cấp 1 tổng quát có dạng $F(x, y, y') = 0$ hay $y' = f(x, y)$

Với:

- x là biến độc lập, $y(x)$ là hàm chưa biết và $y'(x)$ là đạo hàm của nó.
- Nghiệm tổng quát của ptvp cấp 1 là hàm $y = \varphi(x, c)$

Phương Trình Phân Ly (Tách Biến)

- Có dạng $f(x)dx + \ g(y)dy = 0$
- Cách giải: $\int f(x)dx + \ \int g(y)dy = \ c$

1. $xdx \ + \ 2ydy \ = \ 0$

$$\Rightarrow \int xdx + \int 2ydy = C$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = C$$

Một số phương trình vi phân có thể đưa về dạng tách biến

PT dạng $y' = f(y)\ (f(y) \neq 0)$

Cách giải: đưa về dạng $\frac{dy}{f(y)} = dx$

PT có dạng $y' = f(ax + by + c)$

Cách giải:

+ Đặt $z = ax + by + c$, thay vì tìm $y(x)$ thì tìm hàm $z(x)$

+ $z' = a + by' \Rightarrow y' = (z' - a) / b$

+ thay vào pt ban đầu $z' - a = bz$

PT có dạng $f_1(x).g_1(y)dx + f_2(x).g_2(y)dy = 0$

Cách giải: nếu $g_1(y).f_2(x) \neq 0$ chia 2 vế cho $g_1(y).f_2(x)$

Giải PT tách biến: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$

Phương Trình Phân Ly

VD. $y' = x + y$

Đặt $z = x + y \Rightarrow z' = y' + 1$

Thay vào phương trình ban đầu ta được $z' - 1 = z$

+ TH1: $z \neq -1$ ta có:

$\frac{dz}{z+1} = dx \Rightarrow \ln|z+1| = x + C$

$\Rightarrow z = -1 + c \cdot e^x \Rightarrow x + y = -1 + ce^x \Rightarrow y = ce^x - x - 1$

+ TH2: $z = -1 \Rightarrow y = -x - 1$ (nhận)

Phương Trình Phân Ly

VD1. $ydx + 2xdy = 0$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{2x} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{2x} + \int \frac{dy}{y} = C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|y| = C$$

Phương Trình Phân Ly

VD2. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

$$\Rightarrow x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(1 - x^2)}dx + \frac{y}{(y^2 + 1)}dy = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(1 - x^2)}dx + \int \frac{y}{(y^2 + 1)}dy = C$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2}\ln|1 - x^2| + \frac{1}{2}\ln|y| = C$$

Phương Trình Đẳng Cấp

- Có dạng $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$
- Cách giải: Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$
- Thay y' vào PT ban đầu, giải PT : $xu' = f(u) - u$

VD1. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} - 2$$

- Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$$u'x + u = u^2 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}x = u^2 - u - 2$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2 - u - 2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} + C = \int \frac{du}{u^2 - u - 2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} + C = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+1}\right) \mathrm{du}$$

$$\Rightarrow \ln|x| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right|$$

Phương Trình Tuyến Tính Cấp 1

Có dạng: $y' + P(x)y = Q(x)$

+ nếu $Q(x) = 0$, phương trình tuyến tính cấp 1 thuần nhất.

+ nếu $Q(x) \neq 0$, phương trình tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.

Cách giải:

Nghiệm tổng quát của PTTT cấp 1 có dạng:

$$y = e^{-\int P(x)dx}.\left(\int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx + c\right)$$

VD1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

$(P(x) = 2x, Q(x) = xe^{-x^2})$

$$\Rightarrow y = Ce^{\int -2xdx} + e^{\int -2xdx} \int xe^{-x^2} e^{\int 2xdx} dx$$

$$\Rightarrow y = Ce^{-x^2} + e^{-x^2} \int xdx$$

$$\Rightarrow y = Ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2}$$

VD2. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$

$$\Rightarrow y' - \frac{y}{x(x+1)} = 1$$

$$\left(P(x) = -\frac{1}{x(x+1)}, Q(x) = 1\right)$$

$$\Rightarrow y = Ce^{\int \frac{dx}{x(x+1)}} + e^{\int \frac{dx}{x(x+1)}} \int e^{-\int \frac{dx}{x(x+1)}} dx$$

$$\Rightarrow y = Ce^{\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|} + e^{\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|} \int e^{-\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|} dx$$

$$\Rightarrow y = C\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+1} \int \frac{x}{x+1} dx$$

$$\Rightarrow y = C\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+1}(x + 1 - ln|x+1|)$$

Phương Trình Bernouli

- Có dạng: $y' + P(x)y = Q.y^n$
- Cách giải: Đặt $z = y^{1-n}$, đưa pt ban đầu về dạng PTTT cấp 1

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

VD. $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^3}y^2$

Đặt $z = y^{-1}$, ta có:

$\rightarrow z' - \frac{1}{x}z = \frac{1}{x^3}$

$\left(P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = \frac{1}{x^3}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{z} = Ce^{\int -\frac{1}{x}dx} + e^{\int -\frac{1}{x}dx}\int \frac{1}{x^3}e^{\int \frac{1}{x}dx}dx$

$\Rightarrow \mathrm{z} = C(-x) + (-x)\left(\frac{-1}{2}x^{-2}\right)(-x)$

$\Rightarrow \mathrm{z} = -Cx + \frac{-1}{2}$

Phương Trình Vi Phân Toàn Phần

- Có dạng: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, với điều kiện $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

- Cách giải: Giải phương trình vi phân toàn phần là tìm $u(x,y)=C$ sao cho:

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

- Cách giải: $U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$

VD. $y' = \dfrac{2xy}{-1-x^2}$ $\Rightarrow (2xy)dx + (1+x^2)dy = 0$

Đặt $P = 2xy, Q = 1 + x^2$ $\Rightarrow \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 2x$

Chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$, ta có nghiệm phương trình tổng quát:

$$\int_0^x (2xy)dx + \int_0^y (1-0^2)dy = c$$

$\Rightarrow x^2y + y = c$

Thừa Số Tích Phân

Khi phương trình $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ không là phương trình vi phân hoàn toàn nhưng có hàm $H(x,y)$ sao cho khi nhân 2 vế phương trình với $H(x,y)$ ta được phương trình:

$$H(x,y)P(x,y)dx + H(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

là phương trình vi phân toàn phần.

Vậy hàm $H(x,y)$ được gọi là thừa số tích phân.

- Cách giải: Ta chỉ xét 2 trường hợp đơn giản nhất:

Nếu $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = f(x)$ khi đó: $H(x,y) = H(x) = \ e^{\int f(x)dx}$

Nếu $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = g(y)$ khi đó: $H(x,y) = H(x) = \ e^{-\int g(y)dy}$

VD. $(2y^2e^x + 3)\,dx + e^x y\,dy = 0$

Ta có: $\frac{\partial P}{dy} \neq \frac{\partial Q}{dx}$

Ta có: $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = 3$ Thừa số tích phân : $\mathrm{H}(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

Nhân thừa số tích phân cho 2 vế của phương trình ban đầu:

$$e^{3x}.(2y^2e^x + 3)\,dx + e^x.e^x y\,dy = 0$$

Nên đây là phương trình vi phân toàn phần, chọn $x_0 = y_0 = 0$ ta có tích phân tổng quát:

$$\int_0^x e^{3x}.(2y^2e^x + 3)dx + \int_0^y e^0.e^0 ydy = c$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y^2}{2}\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{3x}\right) + \frac{y^2}{2} = c \Leftrightarrow y^2 = \frac{2\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{4x} + 1}$$

Phương Trình Vi Phân Cấp 2

Phương trình vi phân cấp 2 có dạng tổng quát:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ hay } y'' = f(x, y, y')$$

Phương Trình Vi Phân Tuyến Tính Cấp 2 Với Hệ Số Hằng

Phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng số, có dạng:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Cách giải:

Xét phương trình đặc trưng: $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.

Nếu pt có 2 nghiệm phân biệt k_1, k_2 thì nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y = c_1 e^{k_1.x} + c_2 e^{k_2.x}$$

Nếu pt có nghiệm kép $k_1 = k_2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y = c_1 e^{k_1.x} + c_2 x e^{k_1.x}$$

Nếu pt có nghiệm phức $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ thì nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x)$$

Phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng số

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

Cách giải: Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$y = y_1 + y_r$$

Với y_1 là nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

y_r là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

Tìm Nghiệm Riêng

- Nếu f là 1 đa thức bậc n thì $\mathrm{y_r}$ là đa thức bậc n, có dạng

$\mathrm{y_r} = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ với a_i là hằng số

- Nếu $\mathrm{f(x)} = Ce^{kx}$ với C, k là hằng số thì $\mathrm{y_r}$ = ae^{kx} với a là hằng số

- Nếu $\mathrm{f(x)} = C\sin\alpha x$ hoặc $C\cos\alpha x$ với C là hằng số, thì

$$\mathrm{y_r} = \mathrm{a}\sin\alpha x + b\cos\alpha x$$

$$2y'' - y' - y = 2xe^x$$

- Xét phương trình đặc trưng:

$$2K^2 - K - 1 = 0$$

$$\Rightarrow K = 1 \text{ và } K = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Y = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

- ta có $\alpha = 1$ là nghiệm của phương trình đặc trưng nên $y_r = xe^x(\mathrm{Ax} + \mathrm{B})$là nghiệm của phương trình

$$\Rightarrow y^* = xe^x(Ax + B)$$

$$\Rightarrow y^* = e^x(Ax^2 + Bx)$$

$$\Rightarrow y^{*\prime} = e^x[Ax^2 + (2A + B)x + B]$$

$$\Rightarrow y^{*\prime\prime} = e^x[Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B]$$

- Đồng nhất hệ số:

$$6Ax + 4A - 3B = 2x$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3}, \mathrm{B} = \frac{4}{9}$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x} + xe^x\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right)$$

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$$

- Xét phương trình đặc trưng:

$$K^2 - 6K + 9 = 0 \Rightarrow K = 3$$

$$\Rightarrow Y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$$

- $\propto = 0$ là nghiệm của ptdt

$$\Rightarrow y^* = Ax^2 + Bx + C$$

$$\Rightarrow y^{*\prime} = 2Ax + B$$

$$\Rightarrow y^{*\prime\prime} = 2A$$

- Đồng nhất hệ số:

$$2A - 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - x + 3$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{9}, \mathrm{B} = \frac{5}{27}, C = \frac{11}{27}$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$y = Y + y^* = C_1e^{3x} + C_2e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$$

UIT Trường Đại học Công nghệ Thông tin | Khoa Khoa học và Kỹ thuật Thông tin

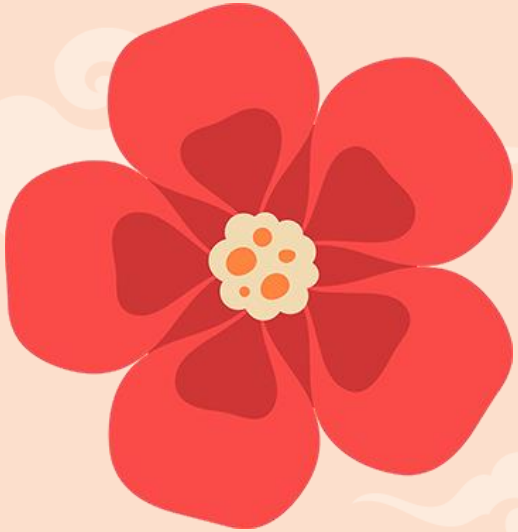
BAN HỌC TẬP

Cảm Ơn Các Bạn Đã Tham Gia Buổi Training

CHÚC CÁC BẠN THI TỐT

KHÁI NIỆM

- Hello xin chào :3 chúc mọi người một năm mới nhiều may mắn nhé!
- Mấy cái dưới này là bông hoa mình tách ra, các bạn có thể sử dụng tùy ý nhe (vd: gắn đầu dòng các câu hỏi,…).
- Font chữ “khái niệm” mình cũng có đính kèm trong drive nhé.



KHÁI NIỆM

KHÁI NIỆM

KHÁI NIỆM

KHÁI NIỆM

KHÁI NIỆM

- Kính chúc cả nhà một năm mới tràn đầy niềm vui và hạnh phúc.
- Gửi nhà mình nhiều lời yêu thương thắm thiết, lời cảm ơn chân thành, và cả những lời hứa hẹn một năm mới thật là bùng nổ.
- Chúc cho cả nhà mình những điều tốt đẹp nhất, chúc cho Ban mình một năm nữa đánh dấu sự trưởng thành và khởi sắc

Bìa không có logo (dùng để chuyển nội dung)