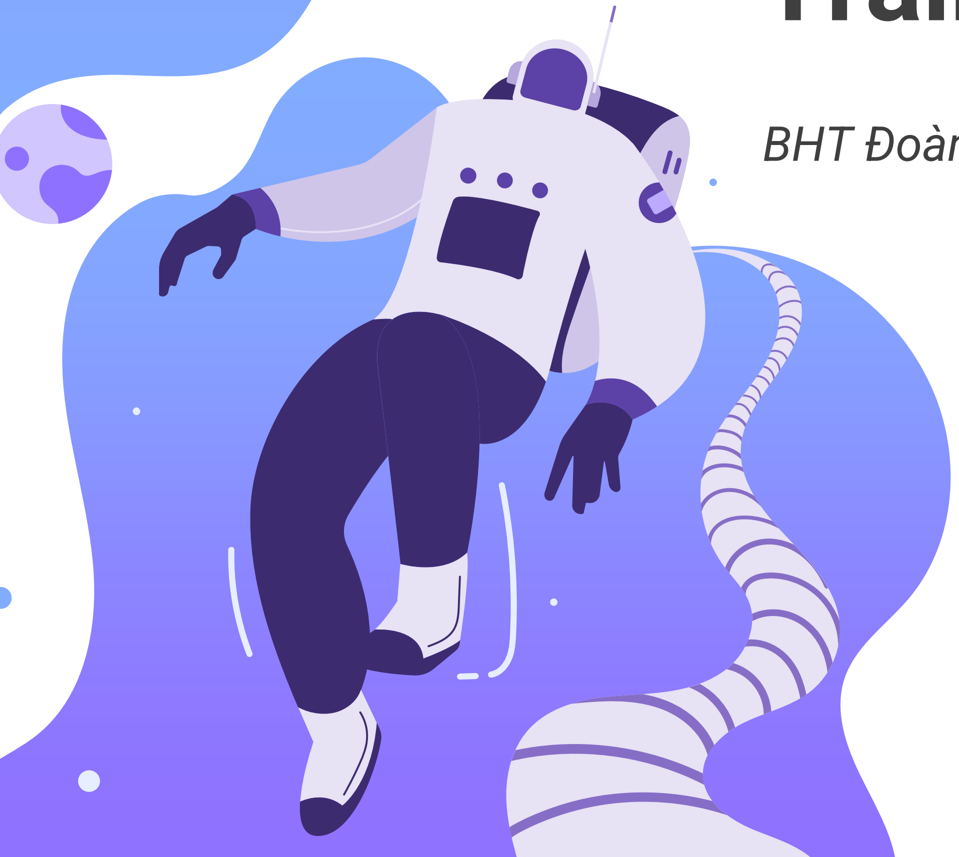
NC LEARNING SPACE
Ban Học tập Đoàn khoa Mạng máy tính và Truyền thông

Training Giải Tích

BHT Đoàn khoa MMT&TT – Training cuối kì K16



Trainers: Nguyễn Cao Thi – MMTT 2021

Đinh Bùi Huy Phương – ATTT2021

Lâm Hải Đăng – ATCL 2021

Các Kiến Thức Cần Ôn Tập

1) Cực trị tự do hàm hai biến

2) Chuỗi số

3) Tích phân bội 2

4) Tích phân bội 3

5) Tích phân đường loại 1 và 2

6) Phương trình vi phân

Cực trị hàm 2 biến

Cực trị tự do

Giả sử cho hàm số $z = f(x,y)$

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Điểm $M_0(x_0, y_0)$ thỏa $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ được gọi là điểm dừng, M_0 có thể không là cực trị.

Cực trị hàm 2 biến

Cực trị tự do

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ có điểm dừng là M_0 và có đạo hàm riêng cấp hai tại lân cận của điểm M_0

Đặt A = $f_{x^2}''(M_0)$, B = $f_{xy}''(M_0)$, C $= f_{y^2}''(M_0)$ và $\Delta = AC - B^2$

- Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A > 0 \end{cases}$ thì f(x,y) đạt cực tiểu tại M_0
- Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ A < 0 \end{cases}$ thì f(x,y) đạt cực đại tại M_0
- Nếu Δ < 0 thì f(x,y) không đạt cực trị tại M_0
- Nếu Δ = 0 thì không thể kết luận

Chuỗi số

1. Chuỗi cơ bản

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$$

- Hội tụ nếu $|q| < 1$
- Phân kỳ nếu $|q| \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- Hội tụ nếu $\alpha > 1$
- Phân kỳ nếu $\alpha \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$$

- Hội tụ nếu $\alpha > 1$ hoặc $\alpha = 0$ và $\beta > 1$
- Phân kỳ nếu $\alpha \leq 1$ hoặc $\alpha = 0$ và $\beta < 1$

Chuỗi số

2. Tiêu chuẩn D'Alembert (Tiêu chuẩn tỉ số)

Cho chuỗi bất kì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, giả sử $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D$

- Nếu D < 1 thì chuỗi hội tụ.
- Nếu D > 1 thì chuỗi phân kỳ.
- Nếu D = 1 thì chưa thể kết luận

3. Tiêu chuẩn Cauchy (Tiêu chuẩn căn thức)

Cho chuỗi bất kì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, giả sử $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = c$

- Nếu C < 1 thì chuỗi hội tụ.
- Nếu C > 1 thì chuỗi phân kỳ.
- Nếu C = 1 thì chưa thể kết luận

Chuỗi lũy thừa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad \text{hay} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Với $a_0, a_1, a_2, \ldots$ là các hằng số.

Phương pháp tìm bán kính hội tụ

NC LEARNING SPACE

Ban Học tập Đoàn khoa Mạng máy tính và Truyền thông

Nếu tồn tại

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r \text{ hoặc } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$$

R

0 nếu $r = +\infty$

$\frac{1}{r}$ nếu $0 < r < +\infty$

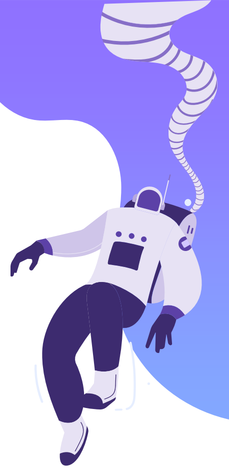
$+\infty$ nếu $r = 0$

Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

1. Tìm bán kính hội tụ R, suy ra khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa là (-R; R)

2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số tại $x = \pm R$

Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa



Nếu các chuỗi số phân kỳ tại $x = \pm R$ thì kết luận miền hội tụ của chuỗi hàm là $(-R; R)$

Nếu chuỗi số phân kỳ tại $x = R$ và hội tụ tại $x = -R$ thì kết luận miền hội tụ của chuỗi hàm là $[-R; R)$

Tương tự ta có các miền hội tụ $(-R; R]$ và $[-R; R]$

Tích Phân Kép

I) Định nghĩa tích phân kép

Cho $f = f(x, y)$ xác định trên miền đóng và bị chặn D.

Tích phân kép của f trên miền D là giới hạn (Nếu có).

$$\mathrm{I} = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot S_{D_i} \right)$$

Nếu I tồn tại ta nói f khả tích trên D

Tích Phân Kép

II) Tích chất của tích phân kép

1) $S_D = \int\int 1dxdy$

2) $\iint_D \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy$

3) $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$

4) Nếu D được chia làm hai miền D_1 và D_2 không dẫm lên nhau:

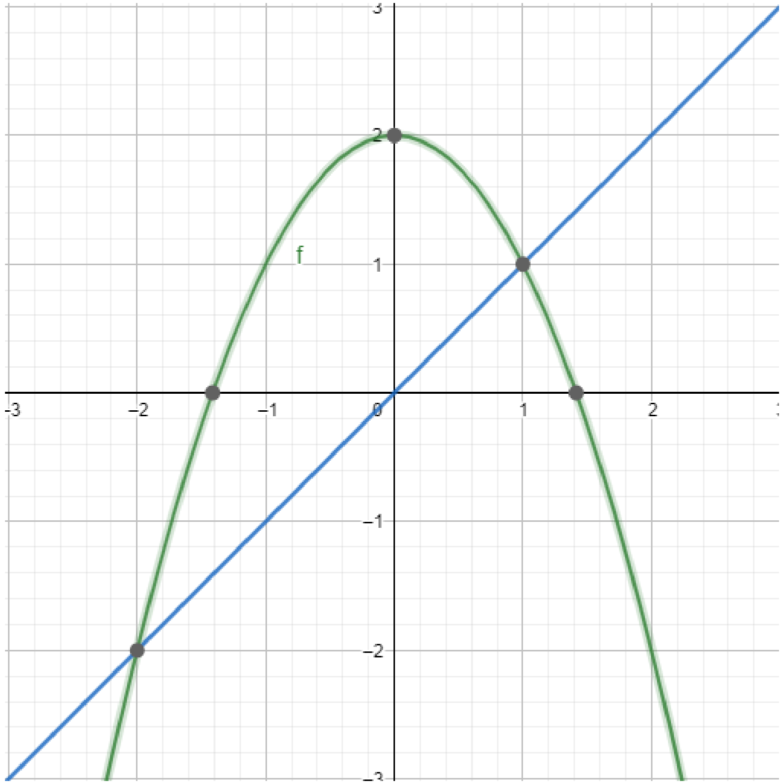
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

5) $\forall (x,y) \epsilon D$, $f(x,y) \leq g(x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$

Tích Phân Kép

III. Các dạng bài thường gặp

1) Tính tích phân kép $I = \iint_D \mathrm{xydxdy}$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi y=$2 - x^2$, y=x



$$D: \begin{cases} -2 \leq \mathrm{x} \leq 1 \\ \mathrm{x} \leq \mathrm{y} \leq 2 - x^2 \end{cases}$$

Tích Phân Kép

*

III. Các dạng thường gặp

1) Tính tích phân kép $I = \iint_D xydxdy$, trong đó D là miền phẳng giới hạn bởi y=2 $-\ x^2$, y=x

$$D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2 - x^2 \end{cases}$$

$$\iint_D xydxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_x^{2-x^2} xydy = \int_{-2}^{1} \left[x\frac{y^2}{2}\right]_x^{2-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(x\frac{(2-x^2)^2}{2} - x\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{9}{8}$$

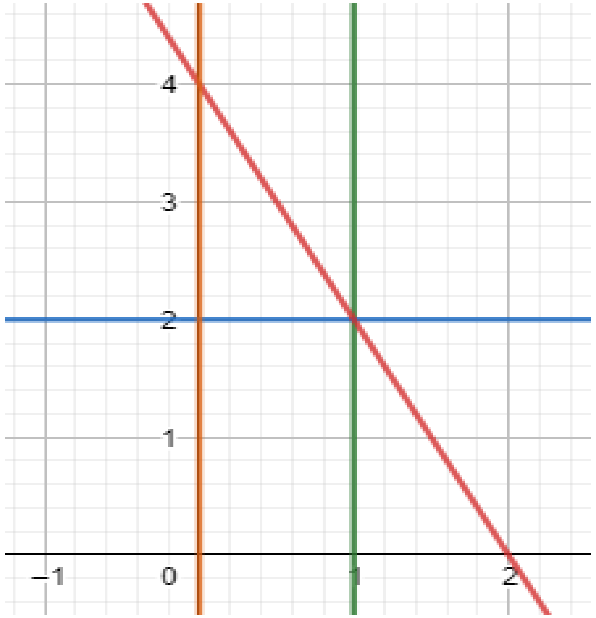
Tích Phân Kép

*

III. Các dạng thường gặp

2) Đổi thứ tự lấy tích phân của tích phân sau $\int_0^1 dx \int_2^{4-2x} f(x, y)dy$

D: $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2 \le y \le 4 - 2x \end{cases}$



=> D: $\begin{cases} 2 \le y \le 4 \\ 0 \le x \le \frac{4-y}{2} \end{cases}$

Tích Phân Kép

*

III) Các dạng thường các gặp

3) Tính phân trong tọa độ cực *(áp dụng khi gặp đường tròn)*

Đặt: $\begin{cases} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{cases}$

Jacobi: J=r

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\varphi & -rsin\varphi \\ sin\varphi & rcos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Nếu đặt x, y theo biến u, v

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

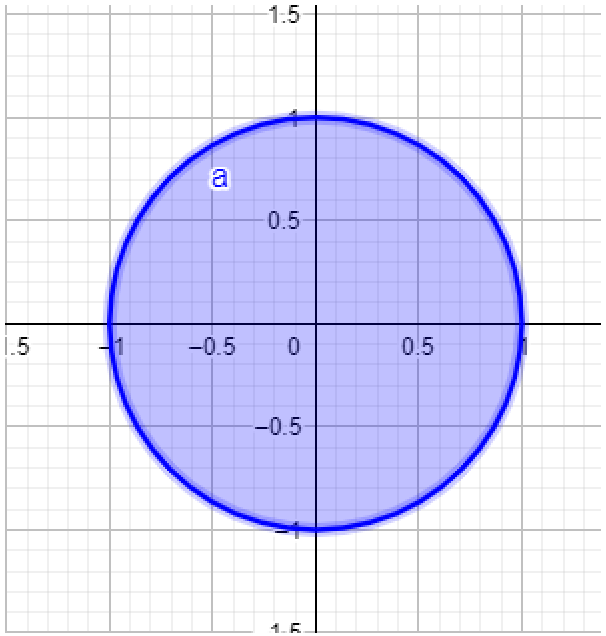
Tích Phân Kép

III. Các dạng thường gặp

Ví dụ: Tính tích phân I=$\iint_D \frac{2dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ với miền D: $x^2 + y^2 \leq 1$

Đặt:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Tích Phân Kép

Ví dụ: Tính tích phân I=$\iint_D \frac{2dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ với miền D: $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

I=$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1+r^2}} rdr$

$= 2\pi.2(\sqrt{2} - 1)$=$4\pi(\sqrt{2} - 1)$

Tích Phân Kép

III) Các dạng thường gặp

4) Tính thể tích

Công thức: V(r)= $\iint_D (f_2(x,y) - f_1(x,y))dxdy$

Ví dụ: Tính thể tích vật thể bị giới hạn:
y=$\sqrt{x}$, y=0,z=0, x+z=1

Z=0 (mặt dưới)

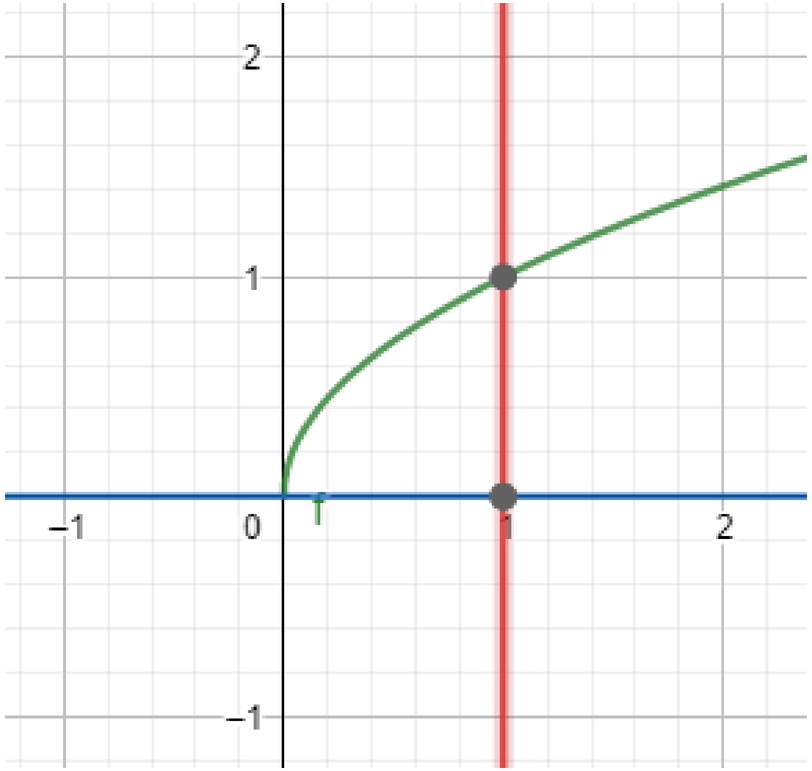
Z=1-x (mặt trên)

$$\Rightarrow \mathrm{V} = \iint\limits_D (1-x)\,dx\,dy$$

- Hàm điều kiện $\begin{cases} y = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$
- Hình chiếu giao tuyến 1-x=0

Tích Phân Kép

$$V = \iint\limits_D (1 - x)\, dx dy$$



$$\Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} (1 - x) dy = \int_0^1 (1 - x) y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x)\sqrt{x} dx$$

$$= \frac{4}{15}$$

Tích Phân Bội Ba

I. Định nghĩa.

- f=f(x,y,z) xác định trên vật thể đóng, bị chặn Ω
- Chia Ω một cách tùy ý ra thanh n khối nhỏ: $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$
- Thể tích tương đương mỗi khối $V(\Omega_1)$, $V(\Omega_2)$,…,$V(\Omega_n)$.
- Trên mỗi khối Ω_i lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$.
- Lập tổng tích phân: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot V(\Omega_i)$
- Cho n→ $+\infty$ sao cho Max $\{d_i\} \overset{\Omega}{\to} 0$, nếu $I_n \to I$ xác định không phụ thuộc cách chia miền Ω , và cách lấy điểm M_i thì I được gọi là tích phân bội ba của f=f(x,y,z) trên khối

  I=$\iiint_{\Omega'} f\,(x, y, z)dxdydz$
- Khi đó, f gọi là khả tích trên Ω

Tích Phân Bội Ba

II. Tính chất

1. $.V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} dxdydz$

2. $\iiint_{\Omega} \alpha\, f(x,y,z)dxdydz = \alpha \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$

3. $\iiint_{\Omega}(f+g)dxdyz = \iiint_{\Omega} fdxdydz + \iiint_{\Omega} gdxdydz$

4. Nếu Ω được chia làm hai khối Ω_1 và Ω_2 không dẫm lên nhau:

$$\iiint_{\Omega} fdxdydz = \iiint_{\Omega_1} fdxdydz + \iiint_{\Omega_2} fdxdydz$$

5. $\forall (x,y,z) \epsilon \Omega, f(x,y,z) \le g(x,y,z) \Rightarrow \iiint_{\Omega} fdxdydz \le \iiint_{\Omega} gdxdydz$

Tích Phân Bội Ba

III. Các dạng bài thường gặp

1) Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$ $\quad \Omega: \begin{cases} 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ x \le y \le 2x \\ 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} dy \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_x^{2x} \frac{1 - x^2 - y^2}{2} dy = \int_0^{\frac{1}{4}} \left.\frac{(1 - x^2)y}{2} - \frac{y^3}{6}\right|_x^{2x} dx = \frac{43}{3072}$$

Tích Phân Bội Ba

III. Các dạng bài thường gặp

2) Tính tích phân $I = \iiint\limits_{\Omega} (1 - x - y - z)\,dxdydz$ $\quad \Omega: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$

Z=0 (cận dưới)

Z=1-x-y (cận trên)

$$I = \iint\limits_{D} z(1 - x - y) - \frac{z^2}{2}\Bigg|_{0}^{1-x-y} dxdy$$

$$= \iint\limits_{D} \frac{1}{2}(1 - x - y)^2 dxdy$$

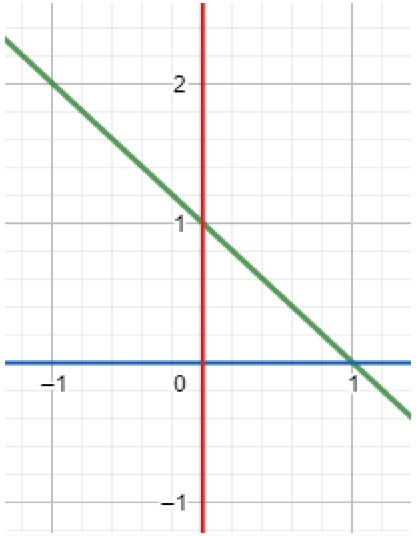
Tích Phân Bội Ba

III. Các dạng bài thường gặp

2)

*Hàm điều kiên: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

* Hình chiếu giao tuyến: 1-x-y=0 $\Rightarrow$ y=1-x



$$\Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}$$

Tích Phân Bội Ba

III. Các dạng bài thường gặp

$$I = \iint\limits_D \frac{1}{2}(1 - x - y)^2 dxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2}(1 - x - y)^2\, dy$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{6}(1 - x - y)^3 \Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1 - x)^3 dx = \frac{1}{24}$$

Tích Phân Bội Ba

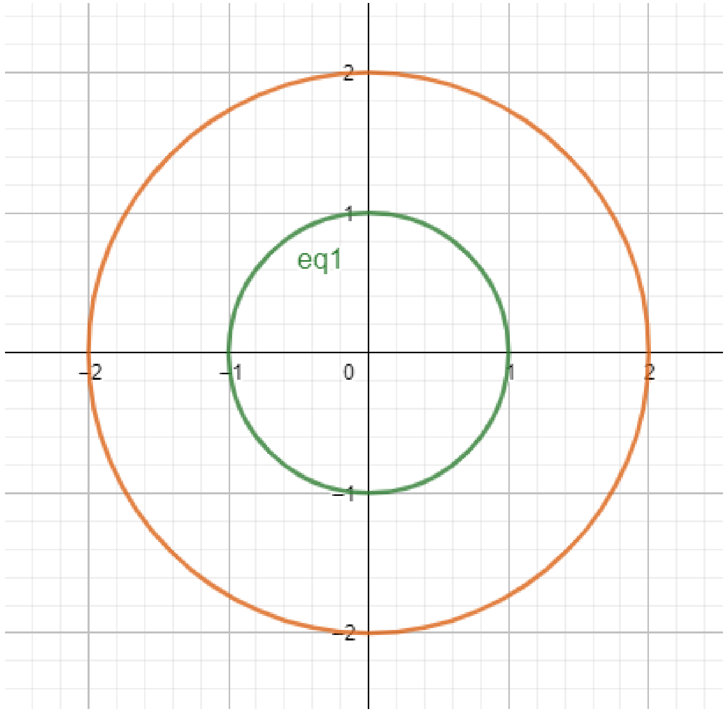
III. Các dạng bài thường gặp

3) Tính phân trong tọa độ cầu

Tính tích phân $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\Omega: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

❖ Mặt cắt

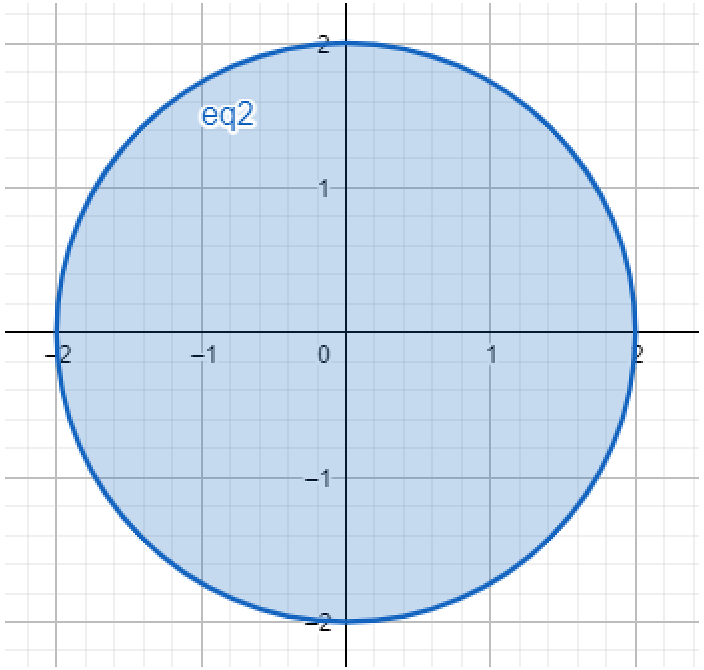
$\begin{cases} x^2+z^2=1 \\ x^2+z^2=4 \end{cases}$



Tích Phân Bội Ba

III. Các dạng bài thường gặp

❖ Mặt chiếu

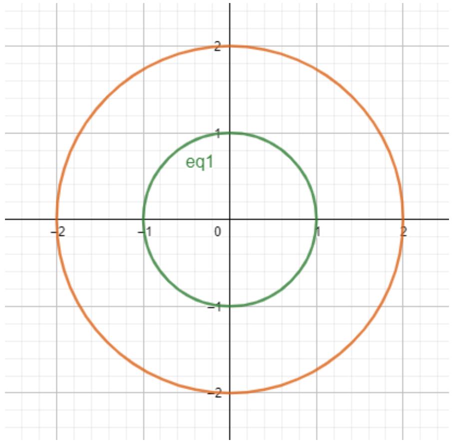


$$x^2 + y^2 = 4$$

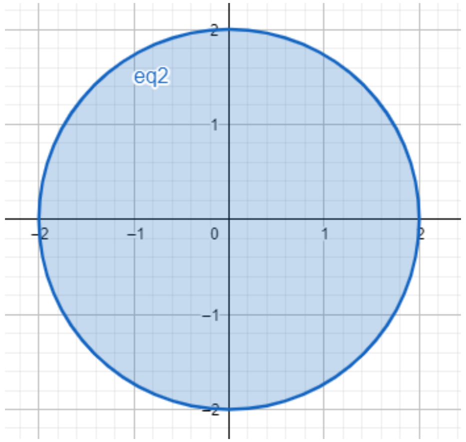
Tích Phân Bội Ba

III. Các dạng bài thường gặp

❖Mặt cắt



❖Mặt chiếu



- Đặt:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ J=$\rho^2\sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 1 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Tích Phân Bội Ba

III. Các dạng bài thường gặp

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- Đặt:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 1 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow J = \rho^2 \sin\theta$

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{\rho} \cdot p^2 \sin\theta d\rho$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{1} \rho d\rho$$

$$= 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 6\pi$$

Tích Phân Đường Loại 1

Kí hiệu: $\int\limits_C f(x,y)ds$ hoặc $\int\limits_C f(x,y)dl$

Phương pháp tính:

a) Đường cong C có phương trình tham số

Cung C cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $(t_1 \le t \le t_2)$

$$\boxed{\int\limits_C f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t)).\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt}$$

Tích Phân Đường Loại 1

Chú ý:

- C là đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = R^2$

Đặt $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ t: 0 -> 2π

- C là elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Đặt $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ t: 0 -> 2π

Ví dụ

Tính tích phân đường $I = \int_C xy\,\mathrm{ds}$, $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Đặt $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}' = -2\sin t\,\mathrm{dt} \\ \mathrm{y}' = 3\cos t\,\mathrm{dt} \end{cases}$ t: 0 -> $\frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t.3\sin t\sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t}\,dt$$

$$I = \frac{38}{5}$$

Tích Phân Đường Loại 1

b) Đường cong C trong Oxy có phương trình tổng quát

Cung C cho bởi phương trình : y = y(x), a ≤ x ≤ b

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x)).\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx}$$

Tương tự, cung C cho bởi phương trình : x = x(y), c ≤ y ≤ d

$$\boxed{\int_C f(x,y)dl = \int_c^d f(x(y),y).\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}\,dy}$$

Tích Phân Đường Loại 1

Đặc biệt:

- Nếu C có phương trình y = α (hằng số) với a ≤ x ≤ b thì:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x,\alpha)dx$$

- Nếu C có phương trình x = α (hằng số) với a ≤ y ≤ b thì:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(\alpha,y)dy$$

Ví dụ

Tính tích phân đường $I = \int_C 6xydl$, trong đó C là tam giác có các đỉnh $O(0;0), A(1;0), B(1,1)$.

A. $I = 3 + 2\sqrt{2}$.   B. $I = 2 + 3\sqrt{3}$.   C. $I = 3 + 2\sqrt{3}$.   D. $I = 5$.

$$I = \int_C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} = 0 + 2\sqrt{2} + 3$$

- Trên OA: $y = 0$, $dl = dx$, x: 0 -> 1. Suy ra $\int_{OA} 6xy\,dl = \int_0^1 0\,dx = 0$.
- Trên AB: $x = 1$, $dl = dy$, y: 0 -> 1. Suy ra $\int_{AB} 6xy\,dl = \int_0^1 6y\,dy = 3$.
- Trên OB: $y = x$, $dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx = \sqrt{2}\,dx$, x: 0 -> 1.

Suy ra $\int_{OB} 6xy\,dl = \int_0^1 6x^2\,dl = \int_0^1 6\sqrt{2}x^2\,dx = 2\sqrt{2}$.

Tích Phân Đường Loại 1

Tương tự , ta có định nghĩa tích phân đường trong không gian.

$f = f(x, y, z)$ xác định trên đường cong C trong không gian.

C cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2 \\ z = z(t) \end{cases}$

$$I = \int_C f(x,y,z)dl$$

$$\boxed{\int_C f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t)).\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt}$$

Tích Phân Đường Loại 2

Kí hiệu: $$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Chú ý: Tích phân đường loại 2 phụ thuộc vào chiều của C vì khi thay đổi chiều thì $(x_k - x_{k-1})$, $(y_k - y_{k-1})$ đổi dấu, do đó khi viết tích phân ta cần ghi rõ điểm đầu và cuối

$$\boxed{\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}$$

Tích Phân Đường Loại 2

Phương pháp tính:

a) Đường cong C có phương trình tham số

Cung C cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ | t = a : ứng với điểm đầu
t = b : ứng với điểm cuối cùng

$$\boxed{\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b P\big(x(t),y(t)\big).x'(t)\,dt + \int_a^b Q\big(x(t),y(t)\big).y'(t)\,dt}$$

Tích Phân Đường Loại 2

b) Đường cong C trong Oxy có phương trình tổng quát

Các hàm P(x,y) và Q(x,y) liên tục trên tập mở D chứa cung trơn C.

1) C: $y = y(x)$, $x = x_1$ là hoành độ điểm đầu, $x = x_2$: điểm cuối cùng.

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \big(P(x,y(x)) + Q(x,y(x)).y'(x)\big)dx}$$

2) C: $x = x(y)$, $y = y_1$ là tung độ điểm đầu, $y = y_2$: điểm cuối cùng.

$$\boxed{\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \big(P(x(y),y).x'(y) + Q(x(y),y)\big)dy}$$

Tích Phân Đường Loại 2

Tích phân đường loại 2 trong không gian:

Cung AB có phương trình tham số: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t);\ \ a \le t \le b$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t)dt + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t)dt + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) \right) dt$$

$$= \int_a^b \left(P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) + R \cdot z'(t) \right) dt$$

Ví dụ

Tính tích phân đường $I = \int_{AB} 2xydx + x^2dy$ với AB là cung parabol $y = x^2$ từ $A(-1,1)$ đến $B(1,1)$.

A. $I = \frac{3}{4}$.   B. $I = 0$.   C. $I = 2$.   D. $I = -\frac{3}{4}$.

$$AB: \begin{cases} y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx \\ x: -1 \to 1 \end{cases}$$

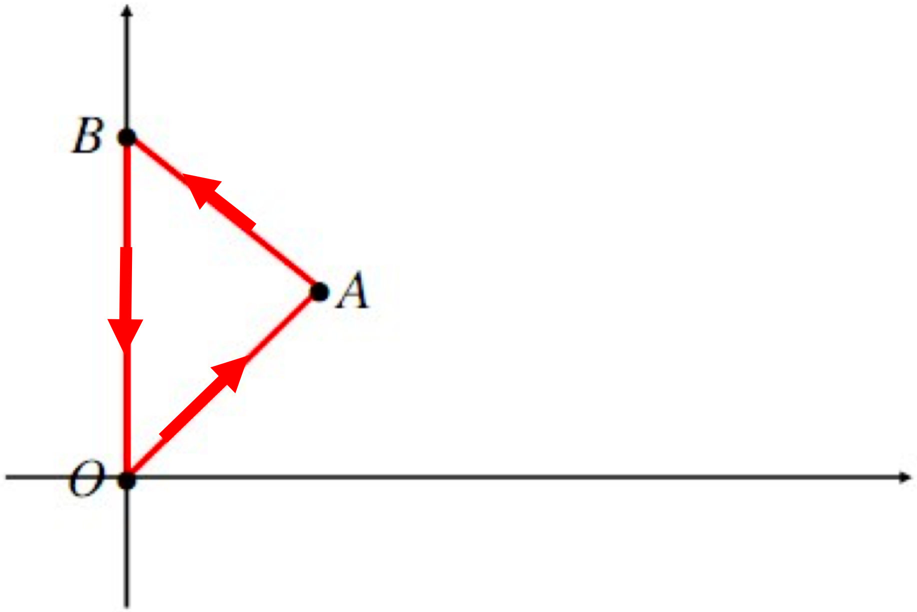
$$I = \int_{-1}^{1} 2x.x^2\,dx + x^2.2x\,dx$$

$$I = \int_{-1}^{1} 4x^3\,dx = 0$$

Ví dụ

Tính $I = \int_C (x^2 + 3y)\,dx + 2y\,dy$, trong đó C là biên tam giác OAB, với O(0,0); A(1,1); B(0,2), ngược chiều kim đồng hồ

$$I = \int_C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}$$



Ví dụ

Tính $I=\int\limits_C (x^2+3y)\,dx+2y\,dy$, trong đó C là biên tam giác OAB, với O(0,0); A(1,1); B(0,2), ngược chiều kim đồng hồ

$$I=\int\limits_C=\int\limits_{OA}+\int\limits_{AB}+\int\limits_{BO}=\frac{17}{6}-\frac{11}{6}-4=-3$$

$$OA:\begin{cases} y=x \Rightarrow dy=dx \\ x:0\to 1\end{cases}$$

$$\int\limits_{OA}=\int\limits_0^1 (x^2+3x)\,dx+2x\,dx$$

$$=\int\limits_0^1 (x^2+5x)\,dx=\frac{17}{6}$$

$$AB:\begin{cases} y=2-x \Rightarrow dy=-dx \\ x:1\to 0\end{cases}$$

$$\int\limits_{AB}=\int\limits_1^0 \left(x^2+3.(2-x)\right)dx-2.(2-x)\,dx$$

$$=\int\limits_1^0 (x^2-x+2)\,dx=-\frac{11}{6}$$

$$BO:\begin{cases} x=0 \Rightarrow dx=0 \\ y:2\to 0\end{cases}$$

$$\int\limits_{BO}=\int\limits_2^0 (0^2+3y).0+2y\,dy$$

$$=\int\limits_2^0 2y\,dy=-4$$

Phương trình vi phân

1/ Định nghĩa

Phương trình chứa **đạo hàm hay vi phân** của một hoặc một vài hàm cần tìm được gọi là **phương trình vi phân**

Cấp cao nhất của đạo hàm trong phương trình vi phân gọi là **cấp của phương trình vi phân**

Dạng tổng quát phương trình vi phân cấp n:

$$F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$$

Phương trình vi phân

NC LEARNING SPACE
Ban Học tập Đoàn khoa Mạng máy tính và Truyền thông

2/ Các dạng phương trình vi phân cấp 1

a) Phương trình vi phân tách biến

b) Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

c) Phương trình vi phân đẳng cấp

d) Phương trình vi phân toàn phần

e) Phương trình Bernoulli

Phương trình vi phân

2a) Phương trình vi phân tách biến

Dạng: **f(x)dx + g(y)dy = 0**

Cách giải: tích phân 2 vế ta được

$$\int \boldsymbol{f(x)dx} + \int \boldsymbol{g(y)dy} = \mathrm{C}$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$

Giải: $\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dy}{1+y^2} = C$

$\Leftrightarrow$ arctan(x) + arctan(y) = C

Phương trình vi phân

2a) Phương trình vi phân tách biến

Dạng: $\mathbf{f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0}$

Cách giải: đưa về phương trình tách biến:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$

Giải: $\frac{xdx}{x^2 - 1} + \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0$, nguyên hàm 2 vế ta có:

$$\int \frac{xdx}{x^2 - 1} + \int \frac{ydy}{y^2 - 1} = \ln|C|$$

$\Leftrightarrow \ln|x^2 - 1| + \ln|y^2 - 1| = \ln|C|$ $(C \neq 0)$

e mũ 2 vế được $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$

Phương trình vi phân

2a) Phương trình vi phân tách biến

Dạng: **y’ = f(ax + by + c), b $\neq$ 0, a $\neq$ 0**

Cách giải: **Đặt u = ax + by + c** => u’ = a + by’

⇔ u’ – a = b * f(u) ⇔ **u’ = a + b * f(u)**

Nếu **a + b * f(u) = 0**, giải **tìm u**. Kiểm tra có phải là nghiệm.

Nếu **a + b * f(u) $\neq$ 0**, chia 2 vế cho a + b * f(u)

=> $\frac{du}{a + b * f(u)} = dx$ (Phương trình tách biến)

Phương trình vi phân

2b) Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Dạng: **y' + p(x)y = q(x)**

Cách giải:

$$\mathbf{y} = e^{\int -p(x)dx}\left[\int q(x) * e^{\int p(x)dx}\, dx + C\right]$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $2xdy + (x^2 - 6y)dx = 0$

Giải: Chia 2 vế cho dx ta có: $2xy' + x^2 - 6y = 0$

$\Leftrightarrow y' - \frac{3y}{x} = -\frac{x}{2}$ => $p(x) = \frac{-3}{x}$, $q(x) = \frac{-x}{2}$

$$y = e^{\int -p(x)dx}\left[\int q(x) * e^{\int p(x)dx}\, dx + C\right]$$

$$\Rightarrow y = e^{\int \frac{3}{x}dx}\left[\int \frac{-x}{2} * e^{\int \frac{-3}{x}dx}\, dx + C\right] = x^3\left(\frac{1}{2x} + C\right) = Cx^3 + \frac{x^2}{2}$$

Phương trình vi phân

2c) Phương trình vi phân đẳng cấp

Dạng: **y' = f**$\left(\frac{y}{x}\right)$

Cách giải: **Đặt u =** $\frac{y}{x}$ => x * u = y

⇔ y' = u + x * u' ⇔ **x * u' = f(u) – u**

Nếu **f(u) – u = 0**, giải pt này ta được các nghiệm riêng

Nếu **f(u) – u** $\neq$ **0** => $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$ (Phương trình tách biến)

Phương trình vi phân

2c) Phương trình vi phân đẳng cấp

Dạng: **y' = f**$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ với f(x, y) là hàm đẳng cấp bậc 0

⇔ $\forall t \in \mathbf{R}$ ta có f(tx, ty) = f(x, y)

Cách giải: đưa về dạng **y' = f**$\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}\right)$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$ (*)

Giải: (*) $\Leftrightarrow y' = \dfrac{2y^2 - x^2}{xy} = \dfrac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{y}{x}}$, đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow x * u' = f(u) - u$

$f(u) - u = \dfrac{2u^2 - 1}{u} - u = \dfrac{u^2 - 1}{u} \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{udu}{u^2 - 1}$, nguyên hàm 2 vế ta có:

$$2(\ln|Cx|) = \ln|u^2 - 1| \Leftrightarrow C^2x^2 = u^2 - 1 \Leftrightarrow C^2x^2 = \frac{y^2}{x^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \pm x\sqrt{C^2x^2 + 1}$$

Phương trình vi phân

2c) Phương trình vi phân đẳng cấp

Dạng: **y' = f**$\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0)

Đổi biến $\mathbf{X = x - x_0, Y = y - y_0 \Rightarrow y' = Y' \Rightarrow Y' = f}\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a + b\frac{Y}{X}}\right)$

Phương trình vi phân

Trường hợp 2: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix}$ **= 0**, giả sử $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$

Đổi biến: **u = ax + by** => u' = a + by'

=> u' − a = b * f$\left(\frac{ku+c_1}{u+c}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} = a$ **+ b * f**$\left(\frac{ku+c_1}{u+c}\right)$ (Phương trình tách biến)

Phương trình vi phân

2d) Phương trình vi phân toàn phần

Dạng: **P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0** trong đó $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Cách giải: Nghiệm tổng quát của phương trình: u(x, y) = C

với **u(x, y) =** $\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C$

Trong đó **(x_0, y_0) là một điểm tùy ý mà P, Q liên tục**

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$

Giải: Ta có $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, chọn $x_0 = 0, y_0 = 0$

Nghiệm tổng quát:

$$u(x, y) = \int_0^x (x + y + 1)dx + \int_0^y (3 - y^2)dy + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + xy + x + 3y - \frac{y^3}{3} = C$$

Phương trình vi phân

2e) Phương trình vi phân Bernoulli

Dạng: **$y' + p(x)y = q(x) * y^a$**, $a \neq 1, a \neq 0$

Cách giải: chia 2 vế cho y^a

Đặt **$z = y^{1-a}$** $\Rightarrow z' = \dfrac{(1-a)y'}{y^a}$

$\Rightarrow z' + (1-a)p(x)z = (1-a)q(x)$

Phương trình vi phân tuyến tính với hàm z(x)

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: y' - $\frac{y}{2x} = 5x^2y^5$

Giải: a = 5, đặt z = y^{-4} ta có: z' + $\frac{2z}{x} = -20x^2$

$\Rightarrow$ Phương trình vi phân tuyến tính

$\Rightarrow$ z = $e^{\int -\frac{2}{x}dx}\left[\int -20x^2 * e^{\int \frac{2}{x}} dx + C\right]$ = $\frac{1}{x^2}(C - 4x^5) = y^{-4}$

$\Rightarrow y^4 = \frac{x^2}{C-4x^5}$

Phương trình vi phân

NC LEARNING SPACE
Ban Học tập Đoàn khoa Mạng máy tính và Truyền thông

3/ Các dạng phương trình vi phân cấp 2

a) Phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

b) Phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$$

Phương trình vi phân

NC LEARNING SPACE
Ban Học tập Đoàn khoa Mạng máy tính và Truyền thông

3a) Phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng

Dạng: $\mathbf{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0\ (*)}$

Phương trình $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình (*)

Phương trình vi phân

NC LEARNING SPACE
Ban Học tập Đoàn khoa Mạng máy tính và Truyền thông

3a) Phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng

Nếu phương trình đặc trưng có **2 nghiệm phân biệt k_1, k_2**

=> Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Nếu phương trình đặc trưng có **nghiệm kép $k_1 = k_2$**

=> Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$$

Phương trình vi phân

3a) Phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng

Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức

$$\begin{cases} k_1 = A + iB \\ k_2 = A - iB \end{cases}$$

=> Nghiệm tổng quát của phương trình (*) là:

$$y = e^{Ax}[C_1\cos(Bx) + C_2 sin(Bx)]$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: y” – 4y’ + 29y = 0 (*)

Giải: Phương trình đặc trưng của (*) là: $k^2 - 4k + 29 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 + 5i \\ k = 2 - 5i \end{array}\right. \Rightarrow A = 2, B = 5$$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = e^{2x}[C_1\cos(5x) + C_2\sin(5x)]$$

Phương trình vi phân

NC LEARNING SPACE
Ban Học tập Đoàn khoa Mạng máy tính và Truyền thông

3b) Phương trình tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng

Dạng: $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$

Nghiệm tổng quát có dạng: $y = \bar{y} + y^*$

Với: $\bar{y}$ **là nghiệm tổng quát** của phương trình thuần nhất

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

y^* là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$$

Tìm nghiệm riêng y*

NC LEARNING SPACE
Ban Học tập Đoàn khoa Mạng máy tính và Truyền thông

Trường hợp 1: f(x) = $e^{ax}P_n(x)$

$$\mathbf{y^*} = x^h e^{ax} H_n(x)$$

Trong đó: **h = 0 nếu a không là nghiệm** của phương trình đặc trưng

h = 1 nếu a là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng

h = 2 nếu a là nghiệm kép của phương trình đặc trưng

Tìm nghiệm riêng y*

Trường hợp 2: $f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos(Bx) + Q_m(x)\sin(Bx)]$

Nếu **a** $\pm iB$ **không là nghiệm** của phương trình đặc trưng:

$$y^* = e^{ax}[H_l(x)\cos(Bx) + K_l(x)\sin(Bx)]$$

Nếu **a** $\pm iB$ **là nghiệm bội h** của phương trình đặc trưng:

$$y^* = x^h e^{ax}[H_l(x)\cos(Bx) + K_l(x)\sin(Bx)]$$

L = max(n, m)

Tìm nghiệm riêng y*

Trường hợp 3: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Với $f_1(x)$, $f_2(x)$ có dạng:

$e^{ax}P_n(x)$ hay $e^{ax}[P_n(x)cos(Bx) + Q_m(x)sin(Bx)]$

Khi đó nghiệm riêng **y* =** $y_1^* + y_2^*$

Với y_1^* là **nghiệm riêng** của phương trình: **y'' + a$_1$y' + a$_2$y =** $f_1(x)$

y_2^* là **nghiệm riêng** của phương trình: **y'' + a$_1$y' + a$_2$y =** $f_2(x)$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y'' - 4y = xe^{x} + \cos(2x)$

Giải: $y = \bar{y} + y^*$

1/ Tìm $\bar{y}$: xét phương trình thuần nhất $y'' - 4y = 0$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y'' - 4y = xe^{x} + \cos(2x)$

2/ Tìm y*: ta có $f(x) = xe^{x} + \cos(2x), y* = y_1^* + y_2^*$

Xét 2 phương trình vi phân không thuần nhất

$$y'' - 4y = xe^{x} \text{ và } y'' - 4y = \cos(2x)$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: y'' – 4y = $xe^x + \cos(2x)$

Xét: y'' – 4y = xe^x (*)

a = 1 không là nghiệm của phương trình đặc trưng

$\Rightarrow y_1^* = e^x(Ax + B)$

$\Rightarrow y_1^{*\prime} = e^x(Ax + B) + e^xA = e^x(Ax + B + A)$

$\Rightarrow y_1^{*\prime\prime} = e^x(Ax + B + A) + e^xA = e^x(Ax + B + 2A)$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y'' - 4y = xe^x + \cos(2x)$

Thay vào (*) ta có: $e^x(-3Ax - 3B + 2A) = xe^x$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A = 1 \\ 2A - 3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-1}{3} \\ B = \dfrac{-2}{9} \end{cases}$$

Vậy $y_1^* = e^x\left(\frac{-1}{3}x + \frac{-2}{9}\right)$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y'' - 4y = xe^{x} + \cos(2x)$

Xét: $y'' - 4y = \cos(2x)$ (**)

$a = 0$, $B = 2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng

$\Rightarrow y_2^* = A\cos(2x) + B\sin(2x)$

$\Rightarrow y_2^{*\prime} = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$

$\Rightarrow y_2^{*\prime\prime} = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y'' - 4y = xe^x + \cos(2x)$

Thay vào (**) ta có: $-8A\cos(2x) - 8B\sin(2x) = \cos(2x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8A = 1 \\ -8B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-1}{8} \\ B = 0 \end{cases}$$

Vậy $y_2^* = \frac{-1}{8}\cos(2x)$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y'' - 4y = xe^{x} + \cos(2x)$

Nghiệm tổng quát của phương trình đầu là:

$$y = \bar{y} + y_1^* + y_2^* = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + e^{x}\left(\frac{-1}{3}x + \frac{-2}{9}\right) - \frac{1}{8}\cos(2x)$$

Cảm ơn các bạn đã tham gia và lắng nghe buổi ôn tập hôm nay

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y' = x^2 + 2xy - 1 + y^2$

Giải: $y' = (x+y)^2 - 1$ = (x + y – 1)(x + y + 1)

Đặt u = x + y => u' = 1 + y' = 1 + (u – 1)(u + 1) = $u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{u^2}$ = dx

Nguyên hàm 2 vế ta có:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{u} + C = x \Leftrightarrow \frac{-1}{x+y} = x - C \Leftrightarrow y = \frac{1}{C-x} - x$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y'\cos(2y) - \sin y = 0$

Giải: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin y}{\cos(2y)} \Leftrightarrow \dfrac{[1-2\sin^2(y)]dy}{\sin y} = dx$

$\Leftrightarrow \int \dfrac{[1-2\sin^2(y)]dy}{\sin y} = \int dx \Leftrightarrow x = \int \dfrac{dy}{\sin y} - \int 2\sin y dy + C$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos(y)}{1+\cos(y)} + 2\cos(y) + C = x \Leftrightarrow x = \ln\left|\tan\left(\dfrac{y}{2}\right)\right| + 2\cos(y) + C$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

Giải: $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow y' = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$, nguyên hàm 2 vế ta có:

$$\ln|x| + \ln|C| = \ln\left|\sqrt{1 + u^2} + u\right| \Leftrightarrow Cx = \sqrt{1 + u^2} + u$$

$$\Leftrightarrow C^2 x^2 - 2Cxu = 1 \Leftrightarrow C^2x^2 - 2Cy = 1$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y' = \frac{x - y + 1}{x + y + 3}$

Giải: Xét hpt $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (-1, -2).

Đặt X = x + 1, Y = y + 2, ta có $Y' = \frac{1 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$

=> phương trình vi phân đẳng cấp

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $y' = \frac{x - y + 1}{x + y + 3}$

Đặt $u = \frac{Y}{X}$ => $Y' = u + X * u'$ => $X * u' = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{-u^2 - 2u + 1}{1+u}$

$\Rightarrow \frac{(1+u)du}{-u^2 - 2u + 1} = \frac{dX}{X}$, nguyên hàm 2 vế ta có:

$\ln|X| - \frac{1}{2}\ln|C| = \frac{-1}{2}\ln|-u^2 - 2u + 1|$, e mũ 2 vế ta có:

$$CX^{-2} = -u^2 - 2u + 1$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: y' = $\frac{x - y + 1}{x + y + 3}$

$$CX^{-2} = -\left(\frac{Y}{X}\right)^2 - 2\frac{Y}{X} + 1$$

Nhân 2 vế cho X^2 được C = - $Y^2 - 2XY$ + X^2

Thay X = x + 1, Y = y + 2 ta có:

$$C = -(y+2)^2 - 2(x+1)(y+2) + (x+1)^2$$

$$x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 6y = C$$

Ví dụ

Giải phương trình vi phân: $(2x - 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0$ (*)

Giải: (*) $\Leftrightarrow y' = \dfrac{-2x + 2y + 1}{x - y + 1}$ => $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, Đặt $u = x - y$

=> $u' = 1 - y' = 1 - \dfrac{-2u + 1}{u + 1} = \dfrac{3u}{u + 1}$ (phương trình tách biến)

=> $\dfrac{(u+1)du}{u} = 3dx$, nguyên hàm 2 vế ta có: $3x = u + \ln|u| + C$

Thay $u = x - y$ vào được $2x + y - \ln|x - y| = C$