# BAN HỌC TẬP KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM
## CHUỖI TRAINING CUỐI HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2021 - 2022


**Ban học tập**

Khoa Công Nghệ Phần Mềm
Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin
ĐHQG Hồ Chí Minh

**Email / Group**

bht.cnpm.uit@gmail.com
fb.com/groups/bht.cnpm.uit

# Training

# Đại số Tuyến tính

**Thời gian training:**

**Microsoft Team:**

**Trainer:** Đặng Phước Sang-KHNT2021

ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM

BAN HỌC TẬP

Sharing is learning

# Nội dung Training

## I. Ma trận – Định thức

1. Ma trận
   - 1.1 Các định nghĩa
   - 1.2 Các dạng ma trận
   - 1.3 Các phép toán trên ma trận
2. Định thức
   - 2.1 Khái niệm định thức
   - 2.2 Tính chất của định thức
3. Hạng của một ma trận
   - 3.1 Định nghĩa
   - 3.2 Các phép biến đổi sơ cấp
   - 3.3 Phương pháp tìm hạng của ma trận

# Nội dung Training

4. Ma trận nghịch đảo
   4.1 Định nghĩa và tính chất
   4.2 Cách tìm ma trận nghịch đảo

## II. Hệ phương trình tuyến tính

1. Khái niệm hệ phương trình tuyến tính
2. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp khử Gauss
3. Quy tắc Cramer
4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

# Nội dung Training

## III. Không gian vector

1. Khái niệm không gian vecto
2. Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính
3. Cơ sở và chiều của không gian vecto
4. Không gian Euclide

## IV. Chéo hóa ma trận-Dạng toàn phương

1. Trị riêng và vecto riêng của ma trận
2. Chéo hóa ma trận
3. Dạng toàn phương

# MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

# Ma trận - Định thức

## 1. Ma trận

### 1.1 Định nghĩa ma trận

❖ Ma trận A cấp m x n trên $\mathbb{R}$ là một hệ thống gồm m x n số $a_{ij} \in \mathbb{R}(i = 1, m; j = 1, n)$ và được sắp thành bảng gồm m dòng và n cột:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Các số $a_{ij}$ được coi là các phần tử của A ở dòng thứ i cột thứ j

Cặp số (m,n) được gọi là kích thước của A

# Ma trận - Định thức

- Khi m=1 ta gọi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \text{ là ma trận dòng}$$

- Khi n=1 ta gọi $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ là ma trận cột
- Khi m=n=1 ta gọi:

$$A = [a_{11}] \text{ là ma trận gồm 1 phần tử}$$

- Tập hợp các ma trận A trên R được ký hiệu là $M_{m,n}(\mathbb{R})$ để cho gọn ta viết là $A = (a_{ij})_{mxn}$

# Ma trận - Định thức

## 1.2 Các dạng ma trận

❖**Ma trận không**

- Là ma trận có các phần tử bằng 0
- Ký hiệu:

+ $O_{mxn}$: ma trận không cỡ m x n

+ $O_n$: ma trận không cỡ n x n

Ví dụ:

$$O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ là ma trận không cỡ 3x3

# Ma trận - Định thức



## ❖ Ma trận vuông

Nếu một ma trận có số hàng bằng số cột ( bằng n) thì ta nói nó là một ma trận vuông cấp n. Tập các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$ được kí hiệu là $M_n(\mathbb{R})$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

### ❖**Ma trận tam giác**

+ Ma trận vuông có các phần tử nằm phía dưới đường chéo chín
đều bằng 0 gọi là ma trận tam giác trên.
+ Ma trận vuông có các phần tử nằm phía trên đường chéo chínl
đều bằng 0 gọi là ma trận tam giác dưới.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Ma trận tam giác trên Ma trận tam giác dưới

# Ma trận - Định thức

❖ **Ma trận đơn vị**

- Là ma trận có các phần tử đường chéo chính là 1
- Các phần tử còn lại bằng 0
- Kí hiệu:

$I_n$:ma trận đơn vị cỡ n x n

Ví dụ:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ là ma trận đơn vị cỡ 3x3

# Ma trận - Định thức

## ❖ Ma trận bậc thang

Là ma trận thỏa các điều kiện sau:

- Các hàng bằng 0(nếu có) nằm dưới các hàng khác 0
- Dưới phần tử khác 0 đầu tiên(tính từ bên trái) của mỗi dòng khác 0 là các phần tử 0

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

# Ma trận - Định thức

## ❖ Ma trận chuyển vị

Cho ma trận A=$(a_{ij})_{m\times n}$, ma trận chuyển vị của A kí hiệu là $A^T$ =$(b_{ij})_{n\times m}$ trong đó $b_{ij} = a_{ji}$

Ví dụ: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -9 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Khi đó: $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

# Ma trận - Định thức

## 1.3 Các phép toán trên ma trận

**Phép cộng ma trận**

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{mxn}$$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+3 & 3+5 \\ 4+2 & 5+4 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Lưu ý: Tổng của hai ma trận *khác cấp không tồn tại*.

Định lý: Cho A,B,C là các ma trận cấp $m \times n$. Khi đó:

- A + B = B + A
- (A + B) + C = A + (B + C)
- O + A = A

# Ma trận - Định thức

## Phép nhân ma trận

❖ **Nhân một số với một ma trận**

$$cA = \left(ca_{ij}\right)_{mxn}$$

Định lý: Cho A, B, C là các ma trận cấp m×n và x, y ∈ R.

- $(x + y)A = xA + yA$
- $x(A + B) = xA + xB$
- $1.A = A$
- $0.A = O$
- $x(yA) = (xy)A$

# Ma trận - Định thức

❖**Nhân hai ma trận:** Nếu A là ma trận m x n và B là ma trận n x p

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Tích ma trận C=AB được xác định là ma trận m x p

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Trong đó $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

(với $i = 1,\ldots, m$ và $j = 1,\ldots, p$.)

# Ma trận - Định thức

Lưu ý 1: $AB \neq BA$

Lưu ý 2: Tích hai ma trận AB chỉ thực hiện khi số cột của A bằng số hàng của B

Định lý: Cho A,B là các ma trận cấp $m \times n$, C là ma trận cấp $n \times p$ và $\alpha \in R$.Khi đó:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AC)^T = C^T A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

Sharing is learning

## 2. Định thức

### 2.1 Khái niệm định thức:

Định thức của ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu det(A) hay $|A|$,là một số thực được định nghĩa:

- Nếu $A = (a_{11})$ thì det(A)= $a_{11}$
- Nếu A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$thì det(A)= $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
- Nếu A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ thì

det(A)= $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}\ a_{23}a_{32}$

- Nếu A là ma trận tam giác thì $\det(A) = a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn}$

# Ma trận - Định thức

Chú ý: $\det I_n = 1; \qquad \det O_n = 0$

❖ **Phần bù đại số**

- Cho A là ma trận vuông cấp n, ta kí hiệu $\mathbf{M_{ik}}$ là ma trận vuông cấp n−1 nhận được từ ma trận A bằng cách bỏ hàng thứ i và cột thứ k.

- Khi đó $\mathbf{A_{ik} = (-1)^{i+k}\det(M_{ik})}$ được gọi là **phần bù đại số của $\mathbf{a_{ik}}$.**

# Ma trận - Định thức

Sharing is learning

❖**Khai triển Laplace:** Cho A là ma trận vuông cấp n. Định thức của A được tính bằng công thức sau:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{h=1}^{n} a_{hj}A_{hj}$$

Ví dụ: Tính các định thức sau

$$a.\ A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

A.8

B.5

C.0

D.10

# Ma trận - Định thức

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - 3.5.7 - 2.4.9 - 8.6.1 = 0$$

b. $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

A. 324

B. 224

C. 97

D. 256

# Ma trận - Định thức

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Để ý thấy rằng dòng thứ 3 của định thức có hai phần tử bằng 0 nên khi triển theo dòng này sẽ chỉ có hai số hạng

$$= (-2).(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 5.(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 224$$

# Ma trận - Định thức

c. $C = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

A. 36
B. 45
C. -45
D. -36

Vì đây là ma trận tam giác trên nên:

$$\det(A) = 2.1.(-3).6 = -36$$

# Ma trận - Định thức

## 2.2 Các tính chất của định thức :

- Đổi chỗ 2 hàng hoặc 2 cột của ma trận thì định thức đổi dấu

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

- Nhân 1 hàng (cột) của ma trận với 1 số k thì định thức nhân lên k.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

- Nhân một số c vào hàng i rồi cộng vào hàng j thì định thức không đổi dấu

# Ma trận - Định thức

- **Định thức bằng 0 khi:**
  - Ma trận có một hàng (cột) bằng 0 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$
  - Ma trận có hai hàng (cột) giống nhau $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$
  - Ma trận có một hàng (cột) này là bội của một hàng (cột) khác

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

# Ma trận - Định thức

- Định thức **không thay đổi** qua phép **chuyển vị**:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

- Cho A là một ma trận vuông cấp n và c$\in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$\det(cA) = c^n \det(A)$$

- Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Khi đó

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Ví dụ : Cho A, B là các ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn det(A) = 2 và det(B) = -3. Tính det($2AB^T$).

Ta có: det($B^T$) = det(B) = -3.

det($2AB^T$) = $2^3 \det(A) \det(B^T) = 8.2.(-3) = -48.$

# Ma trận - Định thức

## 3.2 Các phép biến đổi sơ cấp:

Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận:

- $h_i \leftrightarrow h_j (c_i \leftrightarrow c_j)$
- $h_i \leftrightarrow a.h_j (c_i \leftrightarrow a.c_j)$ với $a \neq 0$
- $h_i \leftrightarrow h_i + a.h_j \ (c_i \leftrightarrow c_i + a.c_j\ )$
- Ta dùng kí hiệu $A \rightarrow B$ để chỉ ma trận B nhận được từ A sau hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp trên A

Lưu ý:

- Hạng của một ma trận không thay đổi qua các phép biến đổi sơ cấp.
- Mọi ma trận (khác không) đều có thể đưa về dạng hình thang nhờ các phép biến đổi sơ cấp

# Ma trận - Định thức

## 3. Hạng của ma trận

### 3.1 Định nghĩa:

- Cho A là ma trận cấp m x n. Ma trận được tạo thành từ các phần tử  nằm ở phần giao giữa r hàng và r cột của ma trận A gọi là ma trận con cấp r của A. Định thức của ma trận con cấp r của A gọi là định thức con cấp r của A.

- Hạng của một ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác 0 có trong A. Kí hiệu hạng của ma trận là rank(A) hay r(A).

# Ma trận - Định thức

## 3.3 Phương pháp tìm hạng của ma trận:

**Bước 1:** Đưa ma trận cần tìm về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng và cột

**Bước 2:** Số hàng khác 0 của ma trận bậc thang chính là hạng của ma trận đã cho

Ví dụ: Tính hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

# Ma trận - Định thức

$$A=\begin{bmatrix}2&1&11&2\\1&0&4&-1\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{h_1\to h_2}\begin{bmatrix}1&0&4&-1\\2&1&11&2\\11&4&56&5\\2&-1&5&-6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{h_2\to h_2-2h_1\\ h_3\to h_3-11h_1\\ h_4\to h_4-2h_1}}\begin{bmatrix}1&0&4&-1\\0&1&3&4\\0&4&12&16\\0&-1&-3&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[]{\substack{h_3\to h_3-4h_2\\ h_4\to h_4+h_2}}\begin{bmatrix}1&0&4&-1\\0&1&3&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Vậy r(A)=2

# 4. Ma trận nghịch đảo

## 4.1 Định nghĩa và tính chất:

- A là ma trận vuông cấp n. Ma trận A được gọi là khả nghịch nếu có ma trận vuông B cấp n sao cho $\mathbf{A.B=B.A=I_n}$.
- Ma trận B được gọi là ma trận nghịch đảo của A.
- Kí hiệu: $B = A^{-1}$.

Tính chất: Cho A, B là các ma trận vuông khả nghịch. Khi đó

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ với $k \in N$
- $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$ với $c \neq 0$.

## 4.2 Cách tìm ma trận nghịch đảo

❖**Ma trận phụ hợp**

Định nghĩa: Cho ma trận vuông A cấp n khả nghịch và $A_{ij}$ là phần bù đại số của phần tử $a_{ij}$. Khi đó ma trận:

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

được gọi là **ma trận phụ hợp** của A.

❖**Cách tìm ma trận nghịch đảo**: Cho ma trận vuông A cấp n khả nghịch. Khi đó:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} P_A$$

# Ma trận - Định thức

Cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là một ma trận khả nghịch. Khi đó:

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

**Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có)

$$a.\, A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có |A| = 3 ≠ 0 do đó A là ma trận khả nghịch.

$A_{11} = 3 \qquad A_{21} = 3 \qquad A_{31} = -3$

$A_{12} = 2 \qquad A_{22} = 3 \qquad A_{32} = -1$

$A_{13} = -4 \qquad A_{23} = -6 \qquad A_{33} = 5$

# Ma trận - Định thức

Vậy $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -2 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Vậy $B^{-1} = \frac{1}{(1.5-2.3)}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Định lý: Cho A, B là các ma trận khả nghịch. Khi đó:

- $AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C$
- $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$
- $AXB = C \Leftrightarrow X = A^{-1}.C.B^{-1}$
- $AX + kC = D \Leftrightarrow X = A^{-1}(D - kC)$

# HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

# Hệ phương trình tuyến tính

## 1. Khái niệm hệ phương trình tuyến tính:

Một hệ phương trình tuyến tính **m phương trình n biến số** là một tập hợp gồm **m phương trình tuyến tính có n biến số** được cho như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Các số $a_{ij}$ là hệ số của $x_j$; $b_i$ được gọi là hệ số tự do

# Hệ phương trình tuyến tính

Cho hệ phương trình tuyến tính gồm **m phương trình n biến số**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

Ma trận A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ Được gọi là **ma trận hệ số**

# Hệ phương trình tuyến tính

Ma trận $\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ được gọi là **ma trận bổ sung (ma trận mở rộng)**

Ma trận cột X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ được gọi là **ma trận biến số** Ma trận cột B = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ được gọi là **ma trận hệ số tự do**

# Hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính (2) được viết lại dưới dạng:
**AX = B**. Và ta gọi đây là dạng ma trận của hệ (2)

## 2.Giải hệ phương trình tuyến tính bằng pp khử Gauss

Định lý :Cho hệ phương trình tuyến tính gồm m phương trình, n biến số. Giả sử A là ma trận hệ số và $\overline{A}$ là ma trận bổ sung. Khi đó:

1. Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ => Hệ phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ => Hệ phương trình có duy nhất 1 nghiệm.
3. Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = k < n$ => Hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc vào n – k tham số.

# Hệ phương trình tuyến tính

❖**Các bước giải phương trình bằng phương pháp khử Gauss**

- **Bước 1.** Viết ma trận bổ sung $\overline{A}$
- **Bước 2.** Sử dụng các biến đổi sơ cấp ***trên hàng*** để đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng ma trận bậc thang (thu gọn).
- **Bước 3.** Từ ma trận bậc thang, ta có 1 hệ phương trình tương ứng với hệ ban đầu.
- **Bước 4.** Sử dụng thay thế lùi để tìm các nghiệm.
- **Bước 5.** Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì ta đặt các tham số tương ứng cho các biến có hệ số không phải là phần tử cơ sở.

# Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = -11 \\ 4x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & -11 \\ 4 & -8 & 6 & 7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 4h_1]{h_2 \to h_2 + 2h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

# Hệ phương trình tuyến tính

Vì $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < n = 4$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc vào 2 tham số. Đặt $x_2 = a; x_4 = b$ . Khi đó

$$\begin{cases} 2x_3 = -x_4 - 3 \\ x_1 = 4 + 2x_2 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{-1}{2}b - \frac{3}{2} \\ x_1 = 4 + 2a - b \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\{(4 + 2a - b, a, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

# Hệ phương trình tuyến tính

## 3. Quy tắc Cramer

Hệ phương trình CRAMER là hệ phương trình tuyến tính **AX = B** trong đó:

- ✓ **A là ma trận vuông**
- ✓ **Det (A) ≠ 0**

Hệ phương trình CRAMER luôn có duy nhất 1 nghiệm xác định bởi:

$$\boldsymbol{x_i = \frac{|A_i|}{|A|}}$$

Trong đó, $A_i$ là ma trận nhận được khi thay **cột thứ i bằng cột B** trong ma trận A

# Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$A.(-9,7,-4)$

$B.(9,-7,-4)$

C. $(9,7,4)$

$D.(-4,7,-9)$

# Hệ phương trình tuyến tính

Ta có các định thức

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 14 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

# Hệ phương trình tuyến tính

Khi đó:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-18}{2} = -9 \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{14}{2} = 7$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-8}{2} = -4$$

Vậy nghiệm là $\{(-9, 7, -4)\}$ hoặc $\begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -4 \end{cases}$

# Hệ phương trình tuyến tính

## 4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là hệ phương trình dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Dạng tổng quát: AX = 0

# Hệ phương trình tuyến tính

❖ ***Nhận xét: r(A) = r($\bar{A}$)***

✓ Nếu *r(A)* = *n* thì hệ phương trình có duy nhất 1 nghiệm (0,0,…0). Nghiệm này được gọi là **nghiệm tầm thường**.

✓ Nếu *r(A)* = *k* < *n* thì hệ phương trình có vô số nghiệm, phụ thuộc vào n – k tham số.

Đặt n – k tham số này là $t_1, t_2, \ldots, t_{n-k}$ Lần lượt cho:

- $t_1 = 1, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm $X_1$.
- $t_1 = 0, t_2 = 1, \ldots, t_{n-k} = 0$, tìm được 1 nghiệm $X_2$.

  …..

- $t_1 = 0, t_2 = 0, \ldots, t_{n-k} = 1$, tìm được 1 nghiệm $X_{n-k}$.

Khi đó $X_1, X_2, \ldots, X_{n-k}$ gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất.

# Hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ: Tìm nghiệm và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 2h_1]{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_3 \to h_3 - h_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

# Hệ phương trình tuyến tính

Vì *r(A)* = 2 < 4 nên hệ phương trình có vô số nghiệm và phụ thuộc vào 2 tham số. Đặt $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$; khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ \quad\; x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3t_1 - 5t_2 \\ \quad\;\; x_2 = -2t_1 + 4t_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7t_1 - 13t_2 \\ x_2 = -2t_1 + 4t_2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\{(7t_1 - 13t_2, -2t_1 + 4t_2, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

Cho $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ ta được 1 nghiệm cơ bản là $X_1 = (7, -2, 1, 0)$

$t_1 = 0$, $t_2 = 1$ ta được 1 nghiệm cơ bản là $X_2 = (-13, 4, 0, 1)$

# KHÔNG GIAN VECTOR

# Không gian vector

## 1. Khái niệm không gian vecto

Cho tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là không gian vector nếu:

- V tồn tại hai phép toán:

  i) Phép cộng: $\forall x, y \in V$ thì $x + y \in V$

  ii) Phép nhân: $\forall x \in V, \alpha \in R$ thì $\alpha x \in V$

- Hai phép toán thỏa mãn 8 tiên đề sau:

  ($x, y, z \in V$ và $\alpha, \beta \in R$)

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\exists \theta \in V: x + \theta = x$
4. $\exists (-x) \in V: x + (-x) = \theta$
5. $1x = x$
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

# Không gian vector

## ❖ Không gian vecto con

Cho V là không gian vector, W là tập con của V. Khi đó W là không gian con của V khi và chỉ khi:

i) $W \neq \emptyset$

ii) $\forall x, y \in W$, ta có $x + y \in W$

iii) $\forall x \in W, \alpha \in R$ ta có $\alpha x \in W$

- Hoặc:

i) $W \neq \emptyset$

ii) $\forall x, y \in W, \alpha \in R$ ta có $\alpha x + y \in W$

# Không gian vector

❖**Các bước chứng minh không gian con:**

Bước 1: Xét xem vector θ có thuộc W không?

(Chứng minh W ≠ Ø)

- Nếu $\theta \notin W$ thì kết luận W không là không gian con của V
- Nếu $\theta \in W$ thì chuyển sang bước 2

Bước 2: Lấy x, y là 2 vector bất kì trong W, từ đó suy ra dạng của x, y (dựa vào tính chất của W). Kiểm tra x + y với αx có thỏa tính chất của W không.

- Nếu thỏa thì suy ra $x + y \in W$ và $\alpha x \in W$, kết luận W là không gian con của V
- Nếu không thỏa thì chỉ ra 1 trường hợp cụ thể và kết luận W không là không gian con của V

# Không gian vector

**Ví dụ:** Kiểm tra W có phải là không gian con của V không?

$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$ $V = \mathbb{R}^2$

$(0, 0) \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$

$\forall u = (x, y) \in W \Rightarrow x - y = 0$

$\forall v = (x_1, y_1) \in W \Rightarrow x_1 - y_1 = 0$

Ta có: $u + v = (x + x_1, y + y_1)$

Xét $x + x_1 - (y + y_1) = (x - y) + (x_1 - y_1) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow u + v \in W$ (1

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

$Xét: \lambda x - \lambda y = \lambda(x - y) = 0 \quad \Rightarrow \lambda u \in W$ (2)

$Vậy\ W \subset V$

# Không gian vector

## 2. Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

### ❖Kiểm tra độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính trong không gian vecto

Bước 1: Lập ma trận bằng cách xếp vector thành các dòng.

Bước 2:

- Với ma trận vuông và không vuông: Xác định hạng r(A) của A.
  - Nếu r(A) = số vector thì các vector độc lập tuyến tính
  - Nếu r(A) < số vector thì các vector phụ thuộc tuyến tính
- Với ma trận vuông: Ta tính định thức det(A)
  - Nếu $\det(A) \neq 0$ thì các vecto độc lập tuyến tính
  - Nếu $\det(A) = 0$ thì các vecto phụ thuộc tuyến tính

# Không gian vector

➢ Trường hợp các vector là đa thức, ma trận,..: Dùng định nghĩa đưa về hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

- Hệ có nghiệm tầm thường ⇒ Hệ độc lập tuyến tính
- Hệ vô số nghiệm ⇒ Hệ phụ thuộc tuyến tính

**Ví dụ:** Trong $\mathbb{R}^4$ cho hệ vecto $a_1 = (1, 0, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 2, 3)$, $a_3 = (1, 2, 3, 4)$. Hệ trên độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

A. Độc lập tuyến tính

B. Phụ thuộc tuyến tính

# Không gian vector

Ma trận các hệ số của hệ trên là

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[h_4-h_1\to h_4]{h_3-h_1\to h_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4-3h_2\to h_4]{h_3-2h_2\to h_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{h_4-h_3\to h_4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

r(A) =3 = số vecto nên hệ độc lập tuyến tính

# Không gian vector

**Ví dụ:** Cho hệ vecto S={2-x,2x-$x^2$,6-5x+$x^2$ }. Hệ trên độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

A. Độc lập tuyến tính

B. Phụ thuộc tuyến tính

Cách 1: Giả sử $k_1(2-x)+k_2(2x-x^2)+k_3(6-5x+x^2)=0$

Xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2k_1+0k_2+6k_3=0 \\ -1k_1+2k_2-5k_3=0 \\ 0k_1-1k_2+1k_3=0 \end{cases}$$

# Không gian vector

Đổi chỗ các phương trình để thuận tiện cho việc tính toán

$$\begin{cases} -1k_1 + 2k_2 - 5k_3 = 0 \\ 0k_1 - 1k_2 + 1k_3 = 0 \\ 2k_1 + 0k_2 + 6k_3 = 0 \end{cases}$$

Xét ma trận bổ sung của phương trình

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to 2h_1 + h_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

# Không gian vector

$$\xrightarrow{h_3 \to 4h_2 + h_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nhận thấy $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$ ⇒Phụ thuộc tuyến tính

Cách 2:

Vì ma trận A vuông ⇒detA=((-1).(-1).6+2.2.1)-(2.-1.-5)=0

⇒ phụ thuộc tuyến tính

# Không gian vector

**Ví dụ**: Trong $\mathbb{R}^3$, tìm m để tập các vecto sau độc lập tuyến tính x= (1, 2, 3), y = (2, 3, 4), z = (m, 0, -1)

A. m≠1 B. m≠ −1 C. m≠3 D. m≠ −3

Ta có : A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

det A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

$= 1.3.(-1) + 2.0.3 + m.2.4 - 3.3.m - 4.0.1 - (-1).2.2$

$= 1 - m$

Vậy để tập các vecto độc lập tuyến tính ⇔ det A ≠ 0 ⇔ 1 - m ≠ 0

⇔ m ≠ 1

# Không gian vector

## 3. Cơ sở và chiều của không gian vecto

❖ **Định nghĩa:** Cho $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là cơ sở của kgvt V

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Hệ S độc lập tuyến tính} \\ \forall x \in V \text{ đều biểu diễn được qua S} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n$

- Khi đó **số chiều** kgvt của V = **dim V = n = số phần tử của S**

**Chú ý:**

- V có thể có nhiều cơ sở khác nhau.
- Kgvt bé nhất $V = \{\theta\}$ không có cơ sở và có chiều bằng 0.

# Không gian vector

## ❖Cở sở chính tắc

Các ví dụ minh họa cho cơ sở chính tắc và chiều của các **kgvt đặc biệt**:

a) $R^3 = \{a, b, c\} \Rightarrow S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$\dim R^3 = 3$

$\Rightarrow S_{tq} = \{(1, 0, 0,\dots, 0), (0, 1, 0,\dots, 0),\dots,(0, 0, 0,\dots, 1)\}$; **$\dim R^n = n$**

b) $M_{2x2} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\} \Rightarrow S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

$\dim M_{2x2} = 4$

$\Rightarrow M_{mxn}$ tương tự ; **$\dim M_{mxn} = mxn$**

# Không gian vector

c) $P_2 = \{a + bx + cx^2\} \Rightarrow S = \{1, x, x^2\}$

$\dim P_2 = 3$

$\Rightarrow P_n = \{1, x, x^2,\ldots, x^n\}$ ; $\mathbf{\dim P_n = n+1}$

❖**Kiểm tra hệ S là cơ sở của không gian vecto V**

Nếu S là cơ sở của kgvt V thì:

- Hệ S hệ độc lập tuyến tính
- Dim V = số phần tử của S

# Không gian vector

**Ví dụ :** Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ vector $\{a_1, a_2, a_3\}$ với $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $a_3 = (2, 1, 4)$

a) Chứng minh hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ độc lập tuyến tính

b) Cho biết hệ trên có là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ không? Tại sao?

a)Ta có:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ là hệ vuông => tính det $A = 4 \neq 0$ => độc lập tuyến tính

b) Vì hệ trên độc lập tuyến tính và dim $\mathbb{R}^3 = 3$ = số phần tử của hệ

Suy ra hệ trên là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$

# Không gian vector

**❖Tọa độ vecto**

Định nghĩa: Cho S là cơ sở của kgvt V. Khi đó vector $x \in V$ có biểu diễn duy nhất qua S

$$\mathbf{x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_n e_n \; (*)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Tọa độ } x = [x]_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

# Không gian vector

**Ví dụ:** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ cơ sở $(a) = \{ a_1, a_2, a_3 \}$ với $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, -1, 2)$, $a_3 = (1, 2, 3)$, $x = (4, 3, 6)$.

Tìm tọa độ của x trên cơ sở (a)

A. (1,2,1)

B. (4,3,6)

C. (-1,1,1)

D. (1,1,1)

# Không gian vector

Ta có: $[x]_a = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x$$

$\Leftrightarrow x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = (4, 3, 6)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Vậy tọa độ của x trên cơ sở (a) là $[x]_a = (1, 1, 1)$

# Không gian vector

**Ví dụ:** Trong không gian $R^3$ cho hệ vector $\{a_1, a_2, a_3\}$ với
$a_1 = (-2, 1, 1)$, $a_2 = (1, -2, 1)$, $a_3 = (1, 1, 2)$

a) Chứng minh hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ độc lập tuyến tính

b) Tìm biểu diễn tuyến tính nếu có của phần tử $x = (1, 3, -2)$ qua hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$

a) Ta có:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ là hệ vuông => tính $\det A = 12 \neq 0$ => độc lập tuyến tính

b) Ta có

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$$

# Không gian vector

Lập hệ 3 phương trình 3 ẩn và giải ta được

$$\lambda_1 = \frac{-7}{6};\ \lambda_2 = \frac{-11}{6};\ \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-7}{6}a_1 - \frac{11}{6}a_2 + \frac{1}{2}a_3$$

❖ **Ma trận chuyển cơ sở:**

Định nghĩa: Cho kgvt V có các cơ sở

$$(a) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

$$(b) = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$$

Ma trận chuyển từ a → b là ma trận tọa độ của b theo cơ sở a. Kí hiệu $T_{ab}$

# Không gian vector

Chú ý: Với (a),(b),(c) là các cơ sở của kgvt V

1) $T_{ab} = T_{ba}^{-1}$
2) $T_{ac} = T_{ab}T_{bc}$
3) $[x]_a = T_{ab}[x]_b$

**Ví dụ:** Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$cho hai hệ cơ sở
(a) = $\{a_1, a_2, a_3\}$ và (b) = $\{b_1, b_2, b_3\}$ với
$a_1 = (3, 1, 4)$, $a_2 = (5, -4, 2)$, $a_3 = (2, 1, 1)$
$b_1 = (3, -2, 3)$, $b_2 = (4, 1, -2)$, $b_3 = (3, 4, 2)$
Hãy tính ma trận chuyển cơ sở từ hệ (b) sang hệ (a).

# Không gian vector

$$[a_1]_{(b)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow [a_1]_{(b)} = \begin{pmatrix} \frac{68}{97} \\ \frac{-27}{97} \\ \frac{65}{97} \end{pmatrix}$$

$$[a_2]_{(b)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow [a_2]_{(b)} = \begin{pmatrix} \frac{132}{97} \\ \frac{56}{97} \\ \frac{-45}{97} \end{pmatrix}$$

# Không gian vector

$$[a_3]_{(b)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow [a_3]_{(b)} = \begin{pmatrix} \frac{19}{97} \\ \frac{11}{97} \\ \frac{31}{97} \end{pmatrix}$$

Vậy ma trận chuyển từ (b) sang (a) là $T_{ba} = \frac{1}{97}\begin{pmatrix} 68 & 132 & 19 \\ -27 & 56 & 11 \\ 65 & -45 & 31 \end{pmatrix}$

# Không gian vector

## 4. Không gian Euclide

Định nghĩa: Cho V là một $\mathbb{R}$- không gian vecto. Một tích vô hướng trên V là một quy tắc cho tương ứng hai vecto x,y ∈ V với duy nhất một số thực kí hiệu là $\langle x, y\rangle$ thỏa các điều kiện dưới đây: với mọi x, y, z $\epsilon$ V; a ∈ $\mathbb{R}$ ta có:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
3. $\langle ax, y\rangle = \mathrm{a}\langle x, y\rangle$
4. $\langle x, y\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

# Không gian vector

## ❖Độ dài vecto

- Cho E là không gian vec-tơ Euclid và $x \in V$ ta định nghĩa độ dài của vec-tơ x, ký hiệu $\|x\|$ , là một số thực không âm xác định bởi:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

- Nếu $\|x\| = 1$ thì ta nói $x$ là vecto đơn vị.
- Với mỗi $x \in V$, $x \neq \theta$ ta có vecto đơn vị $\bar{x} = \frac{1}{\|x\|} x$

$\Longrightarrow$Vecto $\bar{x}$ được gọi là sự chuẩn hóa vecto $x$

- Trong $R^n$ với tích vô hướng chính tắc. Nếu $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$

thì $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

# Không gian vector

Trên $P_2[x]$ với tích vô hướng tích phân. Khi đó:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Ví dụ: Trên $P_2[x]$ ta cho một tích vô hướng xác định bởi $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Tính độ dài của $f(x) = x^2 + 2x + 3$

A. $\sqrt{\frac{293}{15}}$ B. $\sqrt{\frac{134}{15}}$ C. $\sqrt{\frac{59}{3}}$ D. $\sqrt{\frac{236}{15}}$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x^2+2x+3)^2 dx} = \sqrt{\frac{293}{15}}$$

# Không gian vector

**❖Góc giữa hai vecto:**

Cho V là một không gian vecto Euclid và $x, y \in V$. Góc giữa hai vecto x và y được xác định: $\cos(\widehat{x,y}) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

Ví dụ: Trong không gian vecto Euclid $\mathbb{R}^2$ ( với tích vô hướng chính tắc). Tính góc giữa vecto x=(2,2), y=(5,0)

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{2}$

$$\langle x, y\rangle = 2.5 + 2.0 = 10$$

$$\|x\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\|y\| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$$

$$\cos(\widehat{x,y}) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{10}{2\sqrt{2}.5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow (\widehat{x,y}) = \frac{\pi}{4}$$

Sharing is learning

# Không gian vector

## ❖ Trực giao hóa và trực chuẩn hóa bằng phương pháp Gram-Schmit

Định lý: Cho $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một tập các vecto của không gian Euclid V, Ta xây dựng được một tập trực giao $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ như sau:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$v_2 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

$$v_n = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$$

# Không gian vector

Định lý: Quá trình trực chuẩn hóa là một tập $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ bất kì.

1. Dùng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmit ta được một tập trực giao $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
2. Chuẩn hóa các vecto $v_i$ và đặt $w_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$

Ví dụ: Trong $P_2[x]$với tích vô hướng $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ trực giao hóa hệ các vecto $\{f_1(x) = 1 + x\,;\ f_2(x) = 2 - x + x^2\}$

$$g_1(x) = f_1(x) = 1 + x$$

$$g_2(x) = f_2(x) - \frac{\langle f_2(x), g_1(x)\rangle}{\langle g_1(x), g_1(x)\rangle} g_1(x)$$

Sharing is learning

# Không gian vector

$$= (2 - x + x^2) - \frac{\int_0^1 (2 - x + x^2)(1 + x)dx}{\int_0^1 (1 + x)^2 dx}(1 + x)$$

$$= (2 - x + x^2) - \frac{\frac{11}{4}}{\frac{7}{3}}(1 + x)$$

$$= \frac{23}{28} - \frac{61}{28}x + x$$

# Không gian vector



Ví dụ: Trong $\mathbb{R}^3$ trực chuẩn hóa các vecto $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $\quad u_3 = (1,1,0)$

$$v_1 = u_1 = (0,\ 1,\ 1)$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$v_2 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3})$$

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$w_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$w_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

# CHÉO HÓA MA TRẬN DẠNG TOÀN PHƯƠNG



ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM
BAN HỌC TẬP
Sharing is learning

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

Sharing is learning

## 1. Trị riêng và vecto riêng của ma trận

Định lí: Số $\lambda \in \mathbb{R}$ là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi $\lambda$ là nghiệm của phương trình det(A- $\lambda$I) $= 0$

Định nghĩa: Cho A là một ma trận vuông. Ta gọi det(A- $\lambda$I) là đa thức đặc trưng của A và kí hiệu là $P_A(\lambda)$

Ví dụ: Tìm các giá trị riêng và các vecto riêng của ma trận A trên tập số thực

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & -2 \\ -3 & 3-\lambda & 6 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda$$

$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6$

Các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6$

- Với $\lambda_1 = 0$, giải phương trình (A-0I)X=0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}a \\ x_2 = \frac{-3}{2}a \\ x_3 = a \end{cases}$

Các vecto riêng của A ứng với $\lambda_1 = 0$ là $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{-3}{2}a \\ a \end{bmatrix}, a \neq 0$

- Với $\lambda_2 = 6$, giải phương trình (A- 6I)X=0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 = 2b - a \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases}$

Các vecto riêng của A ứng với $\lambda_2 = 6$ là $\begin{bmatrix} 2b - a \\ a \\ b \end{bmatrix}, a^2 + b^2 \neq 0$

Quay lại

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

## 2. Chéo hóa ma trận

Định nghĩa: Một ma trận vuông A gọi là chéo hóa được nếu tồn tại một ma trận khả nghịch Q sao cho $Q^{-1}AQ = D$ là một ma trận chéo

Định lý: Một ma trận vuông A cấp n là chéo hóa được khi và chỉ khi A có n vecto riêng độc lập tuyến tính. Khi đó tồn tại một ma trận Q có các cột là các vecto riêng của ma trận A sao cho $Q^{-1}AQ$ là một ma trận chéo với các phhafn tử trên đường chéo là các giá trị riêng của A

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

Ví dụ: Chéo hóa ma trận A= $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Đầu tiên ta tìm giá trị riêng và vecto riêng như đã làm ở ví dụ trước

Các vecto riêng độc lập tuyến tính

- Với $\lambda_1 = 0$ cho a=2 thì $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$
- Với $\lambda_2 = 6$ cho a=1, b=0 thì $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $cho\ a = 0, b = 1\ thì \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

Khi đó: Q= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Nhận xét: Ma trận chéo D có các phần tử nằm trên đường chéo chính là trị riêng của A, mỗi trị riêng ở vị trí tương ứng với vị trí vecto riêng ứng với trị riêng đó

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

Ví dụ: Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{bmatrix}$. Tính $A^{2021}$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -8 & 6 \\ -1 & -8-\lambda & 7 \\ 1 & -14 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12$$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

Các giá trị riêng của A là $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

- Với $\lambda_1 = -2$, giải phương trình (A+2I)X=0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & 6 & 0 \\ -1 & -6 & 7 & 0 \\ 1 & -14 & 13 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 0 \\ -1 & -6 & 7 & 0 \\ 1 & -14 & 13 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \\ 1 & -14 & 13 & 0 \end{array}\right]$$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{cases}$

Các vecto riêng của A ứng với $\lambda_1 = -2$ là $\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}, a \neq 0$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

- Với $\lambda_2 = 2$, giải phương trình (A- 2I)X=0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -8 & 6 & 0 \\ -1 & -10 & 7 & 0 \\ 1 & -14 & 9 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -10 & 7 & 0 \\ 1 & -14 & 9 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & -18 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1}{3} b \\ x_2 = \dfrac{-2}{3} b \\ x_3 = b \end{cases}$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

Các vecto riêng của A ứng với $\lambda_2 = 2$ là $\begin{bmatrix} \frac{-1}{3}b \\ \frac{-2}{3}b \\ b \end{bmatrix}, b \neq 0$

- Với $\lambda_3 = 3$, giải phương trình (A- 3I)X=0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -8 & 6 & 0 \\ -1 & -11 & 7 & 0 \\ 1 & -14 & 8 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{8}{3} & -2 & 0 \\ -1 & -11 & 7 & 0 \\ 1 & -14 & 8 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{8}{3} & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{3} & 5 & 0 \\ 0 & -\frac{50}{3} & 10 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{8}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{50}{3} & 10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5}c \\ x_2 = \frac{3}{5}c \\ x_3 = c \end{cases}$

Các vecto riêng của A ứng với $\lambda_2 = 2$ là $\begin{bmatrix} \frac{2}{5}c \\ \frac{3}{5}c \\ c \end{bmatrix}, c \neq 0$

Các vecto riêng độc lập tuyến tính

- Với $\lambda_1 = -2$ cho a=1 thì $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Với $\lambda_2 = 2$ cho b=−3 thì $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

- Với $\lambda_3 = 3$ cho c = 5 thì $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Khi đó: Q=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow D = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow A = QDQ^{-1} \Longrightarrow A^2 = QDQ^{-1}QDQ^{-1} = QD^2Q^{-1}$$

$$\Longrightarrow A^{2021} = QD^{2021}Q^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^{2021} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2021} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2021} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

## 3. Dạng toàn phương

Định nghĩa: Cho q là một dạng toàn phương trên V. Nếu có một cở sở B sao cho với mọi $x \in V$ biểu thức Q có dạng:

$$q(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

Trong đó $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x)_B$ thì ta nói q có dạng chính tắc đối với cơ sở B và B được gọi là cở sở chính tắc tương ứng với q

Định lý: (Định lý Largane) Cho q là dạng toàn phương trên một $\mathbb{R}$- không gian vecto V khi đó luôn có một cở sở E là chính tắc tương ứng với q (tức là q có dạng chính tắc đối với cơ sở E)

# Ma trận - Định thức

Ví dụ: Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$f(x,x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3$$

Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} f(x,x) &= 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 \\ &= (9x_1^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3) + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_2x_3 \\ &= (3x_1 - x_2 - x_3)^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 10x_2x_3 \\ &= (3x_1 - x_2 - x_3)^2 + 5(x_2 + x_3)^2 \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = 3x_1 - x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \end{cases}$, ta được dạng toàn phương trên về chính tắc là:

$$f = y_1^2 + 5y_2^2$$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

Ví dụ: Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ xác định.

Với $x = (x_1, x_2, x_3)$ đặt $q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Tìm dạng chính tắc và cơ sở chính tắc tương ứng với q

Đặt B là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Với $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ta có $(x)_B = (x_1, x_2, x_3)$

Đặt $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\Longrightarrow q(x) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)y_3 + 6((y_1 - y_2)y_3$$
$$= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$$
$$= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2) - 2y_2^2 + 8y_2y_3$$
$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2$$

# Chéo hóa ma trận-Dạng toàn

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2 - 4y_3^2) - 2y_3^2$$
$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 - 6y_3^2$$

Đặt $\begin{cases} z = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

Khi đó dạng chính tắc là $q(x) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$

Với phép biến đổi: $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = y_3 = z_3 \end{cases}$

Đặt C là cơ sở chính tắc tương ứng với q.

Cơ sở $C = \{(1,1,0), (1,-1,0), (3,-1,1)\}$

# BAN HỌC TẬP KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM
# CHUỖI TRAINING CUỐI HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2021 - 2022

ĐOÀN KHOA CÔNG NGHỆ PHẦN MỀM
BAN HỌC TẬP
Sharing is learning

# HẾT

## CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ THEO DÕI.
## CHÚC CÁC BẠN CÓ KẾT QUẢ THI THẬT TỐT!


**Ban học tập**

Khoa Công Nghệ Phần Mềm
Trường ĐH Công Nghệ Thông Tin
ĐHQG Hồ Chí Minh

**Email / Group**

bht.cnpm.uit@gmail.com
www.facebook.com/groups/bht.cnpm.uit/
www.facebook.com/bhtcnpm