Phép Tính Vi Phân Hàm Một Biến

Nguyễn Thị Hiên

Đại Học Công Nghệ Thông Tin
Đại Học Quốc Gia TP HCM

Ngày 24 tháng 11 năm 2020

Nội Dung

1. Nguyên hàm và tích phân
2. Tích phân suy rộng
3. Ứng dụng của tích phân

Tích phân

Nguyên hàm và tích phân bất định

Nguyên hàm

Nguyên hàm: Hàm F là nguyên hàm của hàm f trên D khi $F' = f$ trên D.

Nguyên hàm và tích phân bất định

- Người ta ký hiệu $\int f(x)dx$ là nguyên hàm bất kỳ, theo biến x, của f. Tương tự, $\int f(u)du$ là nguyên hàm của f theo biến u. Ký hiệu trên còn được gọi là **tích phân bất định** của f.
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $\mathrm{f(x)}$ với C là một hằng số. Do đó, tích phân bất định $\int f(x)\mathrm{d}x$ vừa có thể đại diện cho một nguyên hàm bất kì vừa có thể đại diện cho một họ của các nguyên hàm sai khác nhau một hằng số C.

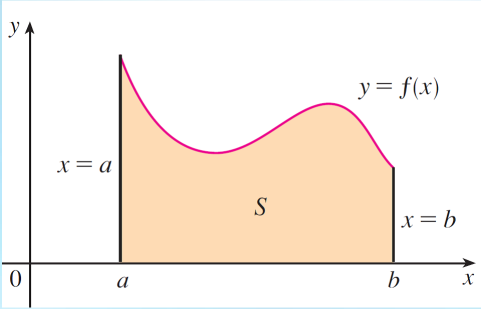
Tính chất nguyên hàm

- $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.
- $\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$ với $c \neq 0$.

Bài toán diện tích và quãng đường

Bài toán diện tích hình thang cong

Cho miền S được bao quanh bởi các đường: đồ thị của hàm số $f \geq 0$; hai đường thẳng đứng $x = a$, $x = b$; và trục hoành như hình bên.



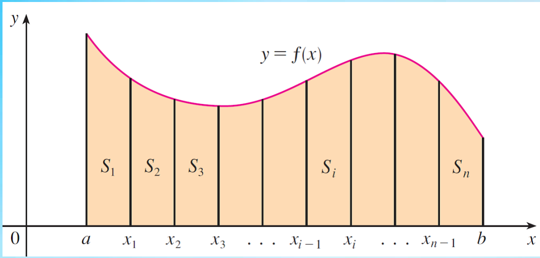
Bài toán diện tích và quãng đường

Trước tiên, ta chia hình S thành n dải băng có chiều rộng đều nhau như hình dưới. Chiều rộng mỗi dải là $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Các dải băng này chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn con

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

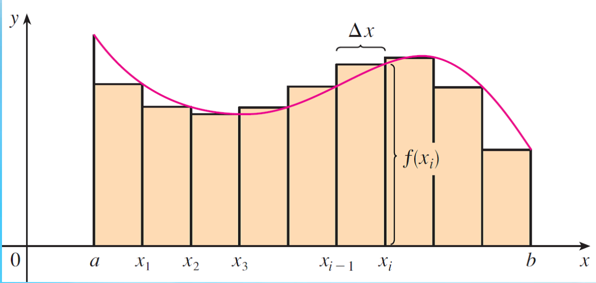
trong đó $x_0 = a$, $x_n = b$ và các điểm biên của những đoạn con là

$$x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2\Delta x$$
$$x_3 = a + 3\Delta x$$
$$\vdots$$



Bài toán diện tích và quãng đường

Diện tích dải băng thứ *i* bởi diện tích hình chữ nhật có bề rộng Δx, chiều cao là giá trị của f tại điểm biên phải của đoạn con.



Ta đặt tổng diện tích các hình chữ nhật này là R_n (chữ R chỉ "right", biên phải)

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

Bài toán diện tích và quãng đường

Với cách tương tự, nếu ta chọn chiều cao hình chữ nhật là giá trị của f tại điểm biên trái của mỗi đoạn con, thì ta có tổng diện tích các hình chữ nhật là

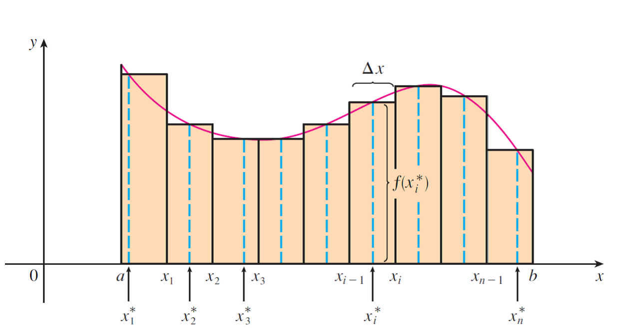
$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x.$$

Thay vì lấy điểm biên trái hoặc phải, ta cũng có thể chọn chiều cao hình chữ nhật là giá trị của f tại điểm bất kỳ x_i^* của đoạn con thứ i, $[x_{i-1}, x_i]$. Ta gọi các điểm $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ là các **điểm mẫu** và ta có tổng diện tích các hình chữ nhật là

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x.$$

Bài toán diện tích và quãng đường

Hình sau minh họa các hình chữ nhật với chiều cao $f(x_i^*)$



Người ta chứng minh được nếu f liên tục thì ba giới hạn sau tồn tại và bằng nhau

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

và người ta định nghĩa giá trị A là diện tích của hình S đã nói lúc

Tích phân

Định nghĩa tích phân

Với hàm f xác định trên $[a, b]$, ta chia $[a, b]$ thành n đoạn con có độ dài $\Delta x = (b-a)/n$ với các điểm biên là $x_0 = a$, $x_i = a + i\Delta x$ $(i = \overline{1, n})$. Gọi x_i^* là **điểm mẫu** bất kỳ trong đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$.
Tích phân từ a **đến** b **của** f được định nghĩa là

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

miễn là giới hạn trên tồn tại, và khi giới hạn tồn tại ta nói f **khả tích** trên $[a, b]$.

Qui ước

Người ta qui ước rằng $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Tích phân

Chú thích 1. Nghĩa chính xác của giới hạn trong định nghĩa tích phân ở trên là:
Với số $\varepsilon > 0$ bấy kỳ cho trước, luôn tồn tại số tự nhiên N sao cho bất đẳng thức

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \right| < \varepsilon$$

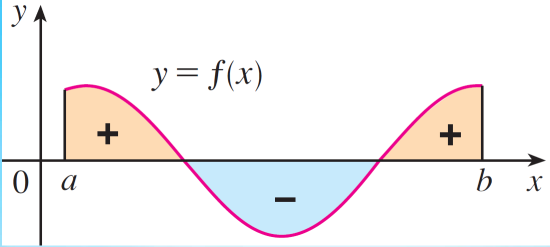
đúng với mọi số tự nhiên $n > N$ và với mọi cách chọn điểm mẫu x_i^* trong đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$.

Định lý

Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, hoặc có hữu hạn điểm gián đoạn kiểu bước nhảy (loại 1), luôn khả tích trên $[a, b]$.

Tích phân

Chú thích 2. Tổng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ được gọi là tổng tích phân, có vẻ như là tổng diện tích của những hình chữ nhật. Nếu hàm f không âm trên đoạn $[a, b]$ thì tích phân của f mang ý nghĩa là diện tích của hình thang cong như đã giới thiệu ở đầu chương. Nhưng nếu hàm f đổi dấu trên đoạn $[a, b]$ thì tích phân của f là hiệu của phần diện tích nằm trên trục hoành với phần diện tích nằm dưới trục hoành như hình vẽ dưới đây



Tích phân

Chú thích 3. Ký hiệu $\int_a^b f(x)dx$ là một số, không phụ thuộc vào x, nghĩa là

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr \text{ v.v..}$$

Chú thích 4. Mặc dù trong định nghĩa tích phân, ta chia đoạn $[a, b]$ thành những đoạn con đều nhau. Nhưng trong thực tế, người ta không nhất thiết làm thế, nghĩa là chia $[a, b]$ thành những đoạn con có độ dài Δx_i không đều nhau, miễn là khi $n \to \infty$ thì các độ dài đó nhỏ dần về 0.

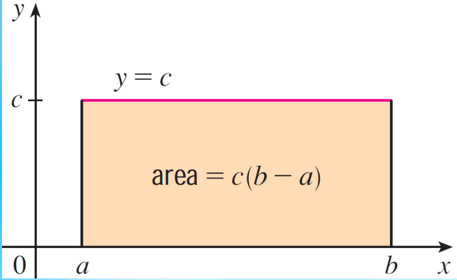
Tích phân

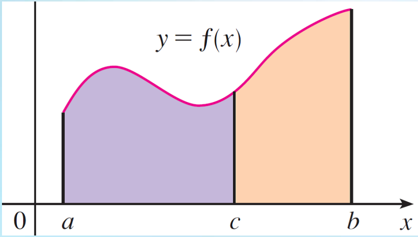
Tính chất của tích phân

1. $\int_a^b c dx = c(b-a)$, trong đó c là hằng số bất kỳ.
2. $\int_a^b \left[f(x) \pm (x)\right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, c là hằng số bất kỳ.
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Tích phân

Hai hình sau minh họa cho tính chất 1 và 4





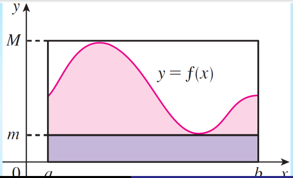
Tích phân

Tính chất so sánh tích phân

5. Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
6. Nếu $\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
7. Nếu $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Minh họa tính chất 7:



Định lý cơ bản của giải tích

Định lý cơ bản của giải tích, như tên gọi của nó, nói lên mối liên giữa hai phép tính cơ bản quan trọng của giải tích là đạo hàm và tích phân.

Ta xét lại bài toán chuyển động trước đây. Giả sử một vật chuyển động với hàm vị trí là s, nghĩa là tại thời điểm t, vật dịch chuyển khoảng cách (có hướng) là $s(t)$ so với mốc (vật ở mốc tại thời điểm $t = 0$). Khi đó vận tốc tức thời tại thời điểm t là $s'(t)$.

Ngược lại, nếu biết trước vận tốc tức thời $v(t)$ của xe tại mỗi thời điểm t, thì quãng đường xe đi được trong khoảng thời gian $[0, x]$ là

$$s(x) = \int_0^x v(t)dt.$$

Như vậy bài toán tính vận tốc tức thời (đạo hàm) và bài toán tính quãng đường (tích phân) là hai tiến trình ngược nhau. Tổng quát, ta có định lý sau đây.

Định lý cơ bản của giải tích

Định lý cơ bản của giải Tích

Giả sử f là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.

1. Hàm số g định bởi
$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$
liên tục trên $[a, b]$, có đạo hàm trên (a, b) và $g'(x) = f(x)$.
Viết cách khác là $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$.
2. Nếu F là nguyên hàm bất kỳ của f, nghĩa là $F' = f$, thì
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Định lý cơ bản của giải tích

Hệ quả

Giả sử f là hàm số có đạo hàm f' cũng là hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Quy tắc tính tích phân

Một số nguyên hàm thường gặp

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, với $a \neq -1$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$, $a > 0$
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$, $a > 0$

Quy tắc tính tích phân

Định lý: Quy tắc đổi biến

1. Nếu g là hàm số khả vi mà miền giá trị của g là một khoảng, và hàm f liên tục trên khoảng này, thì

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f(u)du,$$

trong đó $u = g(x)$, và công thức trên phù hợp với hình thức vi phân "$du = g'(x)dx$".

2. Nếu g' liên tục trên $[a, b]$ và f liên tục trên miền giá trị của g, thì

$$\int_a^b f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

trong đó $u = g(x)$.

Quy tắc tính tích phân

Hệ quả

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn đối xứng $[-a, a]$.

- Nếu f là hàm số chẵn, nghĩa là $\forall x \in [-a, a], f(-x) = f(x)$, thì
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$
- Nếu f là hàm số lẻ, nghĩa là $\forall x \in [-a, a], f(-x) = -f(x)$, thì
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Quy tắc tính tích phân

Định lý: Quy tắc tích phân từng phần

1. Nếu hai hàm số f và g có đạo hàm thì

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Một hình thức khác dễ nhớ hơn nếu đặt $u = f(x)$ và $v = g(x)$, ta có

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

2. Nếu hai đạo hàm f' và g' liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Tích phân suy rộng

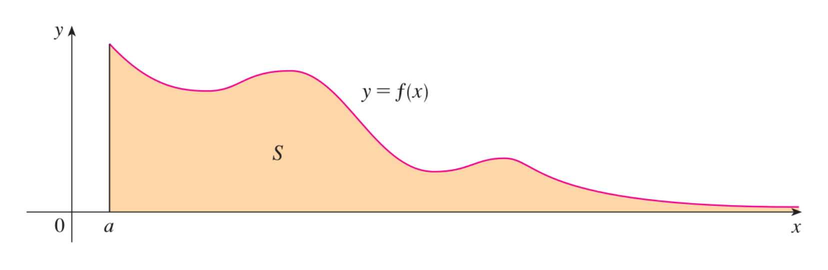
TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Trong định nghĩa của tích phân $\int_a^b f(x)dx$, hàm số f xác định tại mọi điểm của đoạn hữu hạn $[a, b]$.

- Nếu cận tích phân a hay b được thay bởi vô cực thì tích phân đó được gọi là tích phân suy rộng loại I. Ví dụ, $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$.
- Nếu cận tích phân a và b là số thực hữu hạn, nhưng đoạn $[a, b]$ chứa điểm gián đoạn vô cực của hàm f, hoặc f không xác định tại một điểm thuộc $[a, b]$, thì tích phân đó được gọi là tích phân suy rộng loại II. Ví dụ, $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$.

Nhưng nghĩa của các tích phân suy rộng là gì?

Tích phân suy rộng



Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 1

1. Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 1

2. Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \leq b$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 1

3. Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ký hiệu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Nếu **một trong hai** tích phân, $\int_a^\infty f(x)dx$ hay $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ phân kỳ, thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ phân kỳ.

Chú ý

Trong trường hợp các tích phân suy rộng loại 1 nói trên phân kỳ, thì các ký hiệu tích phân đó **không có nghĩa** là một số nào cả.

Tích phân

Định lý

Tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ $(a > 0)$ hội tụ khi $p > 1$, phân kỳ khi $p \leq 1$.

Chứng minh. Sinh viên tự chứng minh.

Tích phân suy rộng

Ví dụ

Tính các tích phân sau

- $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$
- $\int_{0}^{\infty} \frac{2x+1}{e^{3x}} dx.$

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 2

1. Nếu $\int_a^t f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \in [a, b)$ (f không xác định tại b hoặc có giới hạn vô cực tại b) và tồn tại giới hạn $\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 2

2. Nếu $\int_t^b f(x)dx$ tồn tại với mọi $t \in (a, b]$ (f không xác định tại a hoặc có giới hạn vô cực tại a), và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ta cũng ký hiệu

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 2

3. Giả sử f xác định trên (a, b). Xét số $c \in (a, b)$ tùy ý, nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, đồng thời ký hiệu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Nếu **một trong hai** tích phân, $\int_a^c f(x)dx$ hay $\int_c^b f(x)dx$ phân kỳ, thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 2

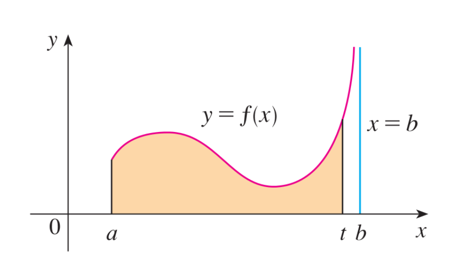
4. Giả sử f xác định trên $[a, c) \cup (c, b]$. (thông thường f có giới hạn vô cực tại c). Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, và ta có các khái niệm như định nghĩa ở mục 3.

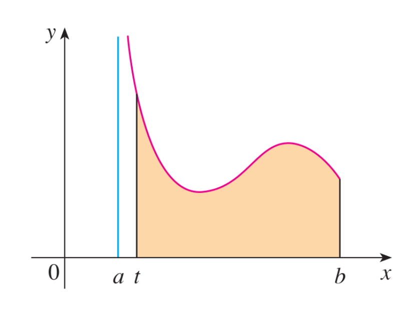
Chú ý

Trong trường hợp các tích phân suy rộng loại 2 nói trên phân kỳ, thì các ký hiệu tích phân đó **không có nghĩa** là một số nào cả.

Tích phân suy rộng

Hai hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = a$ và $x = b$, nghĩa là hàm số có giới hạn vô cực tại a hay b. Lúc đó, giá trị tích phân suy rộng (nếu hội tụ) là diện tích phần tô màu khi t tiến về a hay b.





Tích phân suy rộng

Chú ý

Mặc dù ta có công thức nguyên hàm $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|$, nhưng đẳng thức sau đây là vô nghĩa

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2,$$

lý do là hàm dưới dấu tích phân không xác định tại 1 trong miền lấy tích phân. Nói cách khác $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ là tích phân suy rộng loại 2 phân kỳ (sẽ được kiểm chứng sau đây).

Tích phân suy rộng

Ví dụ

Chứng minh tích phân suy rộng $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ phân kỳ.

giải

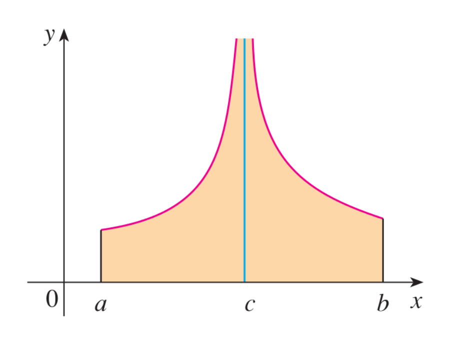
Hàm dưới dấu tích phân không xác định tại $1 \in (0,3)$. Ta chỉ cần chứng minh tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$ là phân kỳ. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{t\to 1^+} \int_t^3 \frac{dx}{x-1} \\ &= \lim_{t\to 1^+} (\ln 2 - \ln|t-1|) = \infty,\end{aligned}$$

nghĩa là giới hạn không tồn tại (như là số hữu hạn). Vậy tích phân suy rộng $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ phân kỳ, với ý nghĩa trong hình minh họa kế bên là diện tích phần tô màu vô hạn.



Tích phân suy rộng

Định lý

Với số $c \in (a, b)$, tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-c|^p}$ hội tụ khi $p < 1$, phân kỳ khi $p \geq 1$.

Sinh viên tự chứng minh định lý trên.

Hệ quả

Với $a < c < b$, hai tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^c \frac{1}{(c-x)^p}$ và $\displaystyle\int_c^b \frac{1}{(x-c)^p}$ cùng hội tụ khi $p < 1$, cùng phân kỳ khi $p \geq 1$.

Tích phân suy rộng

Ví dụ

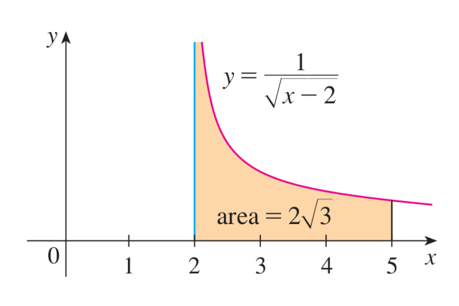
Tính
$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$$

Tích phân suy rộng

Ví dụ

Tính

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$$

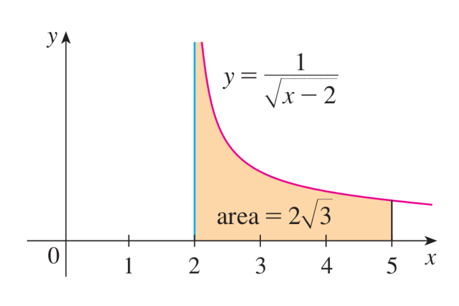


Tích phân suy rộng

Ví dụ

Tính

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$$



Tính tích phân suy rộng (nếu nó hội tụ)

- $\int_0^1 \ln x dx$.
- $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối

1. Nếu $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ và

$$\left|\int_a^{\infty} f(x)dx\right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)|dx.$$

   Ta cũng có kết quả tương tự như trên đối với những hình thức khác của tích phân suy rộng loại 1.

2. Giả sử $\int_a^b f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 2. Nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ và

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Chú ý: Chiều ngược lại của tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối không đúng. Chẳng hạn $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ hội tụ, trong khi $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn so sánh 1: Dạng bất đẳng thức

1. Giả sử f, g là hai hàm số thỏa $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với mọi $x \geq M$ (M là một số nào đó). Khi đó
   - Nếu $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ cũng hội tụ.
   - Nếu $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ phân kỳ thì $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ cũng phân kỳ.

   Ta cũng có cách so sánh tương tự đối với tích phân $\int_{-\infty}^a$.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Ghi chú. Để dễ áp dụng, ta nhớ một cách đại khái rằng "*Nếu lớn hội tụ thì nhỏ hội tụ; Nếu nhỏ phân kỳ thì lớn phân kỳ*".

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh 1: dạng bất đẳng thức

2. Giả sử $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ là hai tích phân suy rộng loại 2, trong đó $c \in [a, b]$ là **điểm kỳ dị** của tích phân, nghĩa là tại đó hai hàm f và g không xác định hoặc có giới hạn vô cực. Hơn nữa $f(x) \geq g(x) \geq 0$ với mọi x thuộc một lân cận của c. Khi đó,

   - Nếu $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ cũng hội tụ.
   - Nếu $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ cũng phân kỳ.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Sinh viên làm bài tập ví dụ sau đây

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+1} dx$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+\sin^2 x} dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x\sin x} dx$

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh 2

Cho f, g là các hàm số **dương**.

1. Nếu
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$
thì $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

   Ta cũng có cách so sánh tương tự đối với $\int_{-\infty}^{a}$.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Tiêu chuẩn so sánh 2

Cho f, g là các hàm số **dương**.

2. Nếu $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 2 với $c \in [a, b]$ là **điểm kỳ dị** của tích phân, và nếu

$$\lim_{x \to \mathbf{c}} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty)$$

thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Tích phân suy rộng - Các tiêu chuẩn hội tụ

Sinh viên làm các bài tập ví dụ sau

Ví dụ

Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau:

1. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2 + \ln x + 1}{x^5 + 3x^2 + 3} dx$
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^4 - x}} dx$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x)^2(2 + x)}} dx$

Tính xấp xỉ tích phân

Có hai tình huống mà ta không thể biết chính xác giá trị của tích phân:

- Tình huống thứ nhất là không thể tìm được biểu thức tường minh, như là biểu thức của hàm sơ cấp, của nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân, ví dụ như hai tích phân sau đây
$$\int_0^1 e^{x^2}dx \text{ và } \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}dx.$$
- Tình huống thứ hai là hàm dưới dấu tích phân được cho bởi bảng giá trị các dữ liệu thu thập được từ việc đo đạc bởi các dụng cụ thiết bị trong khoa học, kỹ thuật. Nghĩa là những hàm này không được biểu diễn bởi biểu thức hàm tường minh.

Trong cả hai tình huống trên, chúng ta buộc phải tính xấp xỉ giá trị của tích phân.

Tính xấp xỉ tích phân

Có nhiều phương pháp tính xấp xỉ tích phân trong Toán học, như là quy tắc hình thang, qui tắc trung điểm, qui tắc Simpson v.v.. Chúng ta chỉ nghiên cứu quy tắc trung điểm.

Ý chính của phương pháp xấp xỉ tích phân là dựa vào định nghĩa của tích phân, đó là giới hạn của tổng Riemann. Vậy ta có thể lấy tổng Riemann làm giá trị xấp xỉ cho tích phân

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

trong đó $\Delta x = (b-a)/n$, x_i^* là điểm mẫu bất kỳ trong đoạn con thứ i, $[x_{i-1}, x_i]$, và $x_i = a + i\Delta x$ với $i = \overline{0, n}$.

Tính xấp xỉ tích phân

Tổng Riemann ứng với các điểm mẫu là biên trái được ký hiệu bởi $L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$. Tương tự cho tổng Riemann với các điểm biên phải $R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Hai phép xấp xỉ

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n \text{ và } \int_a^b f(x)dx \approx R_n$$

lần lượt được gọi là **phép xấp xỉ theo biên trái** và **phép xấp xỉ theo biên phải**. Nếu tổng Riemann với các điểm mẫu là trung điểm của hai biên trái và phải thì ta có quy tắc trung điểm.

Tính xấp xỉ tích phân

Quy tắc trung điểm

Phép xấp xỉ tích phân theo quy tắc trung điểm là

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = \Delta x\big[f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) + \cdots + f(\overline{x}_n)\big]$$

trong đó $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

và $\overline{x}_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ "trung điểm" của $[x_{i-1}, x_i]$.

Sau đây là đánh giá sai số trong phép xấp xỉ ở trên

Tính xấp xỉ tích phân

Đánh giá sai số của phép xấp xỉ

Đặt $E_M = \int_a^b f(x)dx - M_n$ là sai số trong phép xấp xỉ theo qui tắc trung điểm. Nếu có hằng số $K > 0$ sao cho $\forall x \in [a, b], |f''(x)| \leq K$ thì độ lớn sai số được đánh giá bởi

$$|E_M| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}.$$

Tính xấp xỉ tích phân

Ví dụ

Hãy tính xấp xỉ giá trị của $\int_0^1 \cos(x^2)dx$ chính xác đến bốn chữ số ở phần thập phân.

Giải

Nhắc lại rằng hai số r_1 và r_2 khớp nhau đến bốn chữ số ở hàng thập phân có nghĩa là $|r_1 - r_2| \leq 0,0001$. Để dễ giải thích, ta lấy ví dụ $r_1 = 2,3157\overline{a_1 a_2 \ldots}$ và $r_2 = 2,3157\overline{b_1 b_2 \ldots}$, thì ta có

$$|r_1 - r_2| = 0,0000\overline{c_1 c_2 c_3 \ldots} \leq 0,0001.$$

Ta xét hàm số f định bởi $f(x) = \cos(x^2)$ thì $f''(x) = -4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2)$. Ta có

$$\forall x \in [0,1], |f''(x)| \leq 4x^2|\cos(x^2)| + 2|\sin(x^2)| \leq 4 + 2 = 6.$$

Vậy nếu ta xấp xỉ tích phân theo quy tắc trung điểm thì độ lớn sai số E_M được đánh giá bởi

Tích phân

$$|E_M| \leq \frac{6(1-0)^3}{24n^2} = \frac{1}{4n^2}.$$

Để phép xấp xỉ đạt độ chính xác như yêu cầu thì ta chọn một giá trị của n sao cho

$$\frac{1}{4n^2} \leq 0,0001 \Leftrightarrow 4n^2 \geq 10^4 \Leftrightarrow n \geq 50.$$

Ta lấy $n = 50$ thì $\Delta x = (1-0)/50 = 1/50$, $x_i = 0 + i\Delta x = i/50$, $\overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = (2i-1)/100$ và

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^{50} f(\overline{x}_i) = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} \cos\left[\frac{(2i-1)^2}{100^2}\right]$$

$$= 0,9045 \text{ (dùng máy Casio với toán tử } \textstyle\sum).$$

Ứng dụng của tích phân

Ứng dụng tích phân:
- Tính giá trị trung bình
- Tính tâm khối lượng
- Tính kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên

Giá trị trung bình

Xét hàm số f xác định trên đoạn $[a, b]$. Đoạn $[a, b]$ được chia thành n đoạn con có độ dài $\Delta x = (b - a)/n$, với các điểm biên của các đoạn con là

$$x_0 = a; x_1 = a + \Delta x; \ldots; x_i = a + i\Delta x; \ldots; x_n = b.$$

Trên các đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$ lấy một điểm mẫu x_i^* thì giá trị trung bình của n giá trị $f\left(x_1^*\right), \ldots, f\left(x_n^*\right)$ là

$$\frac{f\left(x_1^*\right) + \cdots + f\left(x_n^*\right)}{n} = \frac{f\left(x_1^*\right) + \cdots + f\left(x_n^*\right)}{(b-a)/\Delta x} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x.$$

Nếu lấy giới hạn khi $n \to \infty$, tổng Riemann ở trên trở thành tích phân, và ta định nghĩa giá trị trung bình của f trên đoạn $[a, b]$ là

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x (\text{ nếu } f \text{ liên tục trên } [a; b]\ ).$$

Giá trị trung bình

Ví dụ.

Nhiệt độ (độ C) t giờ sau 9 giờ sáng được mô hình hóa bởi $T(t) = 30 + 14\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$. Tìm nhiệt độ trung bình giữa 9 giờ sáng và 9 giờ tối.
Giá trị trung bình của T giữa 9 giờ sáng ($t = 0$) và 9 giờ tối ($t = 12$) là

$$\frac{1}{12-0}\int_0^{12} T(t)dt = \frac{1}{12}\int_0^{12}\left(30 + 14\sin\frac{\pi t}{12}\right)dt \approx 38,9.$$

Khối lượng

Giả sử một vật được mô tả bởi đoạn $[a; b]$ (chẳng hạn thanh sắt) và có mật độ khối lượng tại điểm $x, x \in [a; b]$, là $\rho(x)$. Khi đó $\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x$ là khối lượng của vật.

Ví dụ. Tìm khối lượng của một thanh kim loại thẳng dài 2 mét có mật độ khối lượng $\rho(x) = 1 + x(2 - x)(\mathrm{kg}/\mathrm{m})$, với x là khoảng cách từ một đầu của thanh kim loại đến điểm đang xét. Khối lượng của thanh bằng

$$\int_0^2 \rho(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 [1 + x(2 - x)]dx = 10/3 \quad (\mathrm{kg}).$$

Công

Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của một lực. Công của lực là khái niệm vật lý đại diện cho tác động của lực vào chuyển động. Nếu lực nằm cùng chiều chuyển động của vật thì toàn bộ lực biến thành công. Nếu một vật di chuyển một khoảng cách d trên một đường thẳng dưới tác động của một lực hằng F cùng chiều chuyển động thì công là tổng tác động của lực vào chuyển động, chính bằng tổng của đại lượng F trên đoạn có chiều dài d, do đó được định nghĩa trong vật lí là số $F \cdot d$.
Bây giờ xét trường hợp tổng quát hơn, lực F có thể thay đổi độ lớn, tuy vẫn cùng phương chuyển động. Đặt một trục tọa độ trên phương chuyển động. Vị trí của vật được cho bởi số thực x còn độ lớn lực tác động lên vật tại điểm đó được cho bởi $F(x)$. Giả sử vật di chuyển từ vị trí $x = a$ tới vị trí $x = b$. Công của lực F là tổng của hàm F trên đoạn $[a, b]$, cho bởi tích phân

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x.$$

Động năng I

Ví dụ. Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của tổng lực F. Giả sử vị trí của vật ở thời điểm t là $x(t)$. Vận tốc của vật là $v(t) = x'(t)$ và gia tốc của vật là $a(t) = v'(t) = x''(t)$. Giả sử vị trí ban đầu của vật là $x(t_0) = a$ và vị trí cuối là $x(t_1) = b$. Ta định nghĩa động năng (năng lượng có từ chuyển động) của vật là $K(t) = \frac{1}{2}m(v(t))^2 = \frac{1}{2}m(x'(t))^2$.
Theo cơ học Newton, $F = ma = mx''$. Do đó công của lực F khi vật di chuyển từ a tới b là

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t))x'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} mx''(t)x'(t)dt.$$

Động năng II

Chú ý hệ thức $\left((x')^2\right)' = 2x'x''$, ta biến đổi

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{1}{2}\left((x'(t))^2\right)' dt$$
$$= \frac{1}{2}m\left(x'\left(t_1\right)\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(x'\left(t_0\right)\right)^2 = K\left(t_1\right) - K\left(t_0\right)$$

Vậy ta thu được bằng phương pháp toán học một định luật vật lí: công của lực tác động đúng bằng biến thiên động năng.