

# PAMSI - Sprawozdanie 4

Filip Guzy 218672

13 kwietnia 2016

## Algorytm sortowania szybkiego - quicksort

Algorytm sortowania szybkiego bazuje na zasadzie "Dziel i zwyciężaj". Jego działanie polega na wybraniu jednego elementu z sortowanego zbioru (tak zwanego pivotu), który będzie rozgranicznikiem dla dwóch podzbiorów, na jakie zostaną podzielone sortowane dane: elementów mniejszych lub równych pivotowi, oraz elementów większych od niego. Następnie owe podzbiory podlegają sortowaniu w ten sam sposób aż do momentu posortowania całości. Złożoność obliczeniowa quicksorta w dużym stopniu zależy od wyboru pivotu. Poniżej przedstawiono optymistyczny, średni oraz pesymistyczny przypadek złożoności obliczeniowej tego algorytmu a także sposoby wyboru pivotu i ich wpływ na złożoność.

### Złożoność obliczeniowa quicksort

#### 1. Przypadek optymistyczny:

Występuje, gdy wybrany pivot zawsze jest medianą sortowanego zbioru. W tym przypadku złożoność obliczeniowa sortowania szybkiego jest rzędu  $n \log(n)$ . Sytuacja, gdy pivot jest medianą danego zbioru jest w przypadku zwykłego jego losowania praktycznie niemożliwa do zaistnienia (a przynajmniej prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest bardzo niskie dla dużych zbiorów). Nie jest możliwe dodanie usprawnienia wyznaczającego medianę, które nie pogorszy złożoności obliczeniowej sortowania.

#### 2. Przypadek średni:

Występuje dla równomiernego rozkładu prawdopodobieństwa wyboru pivotu z tablicy. Złożoność obliczeniowa tego przypadku wynosi w przybliżeniu  $1,39n \log n$ , czyli jest o 39% większa niż w przypadku optymistycznym. Aby mieć pewność uzyskania przypadku średniego wystarczy wybrać element losowy lub ze środka tablicy.

#### 3. Przypadek pesymistyczny:

Występuje w sytuacji, gdy wybrany pivot jest najmniejszym lub największym elementem sortowanego zbioru. Złożoność obliczeniowa dla tego przypadku wynosi w przybliżeniu  $\frac{n^2}{2}$ . Najgorsza z możliwych opcji przypadku pesymistycznego występuje, gdy wybrany przez nas element jest skrajnym elementem posortowanego w przeciwną stronę zbioru. Wtedy złożoność osiąga rząd  $n^2$ .

### Sposoby wyboru pivotu

#### 1. Wybór pierwszego lub ostatniego elementu tablicy

Sposób ten jest najefektywniejszy obliczeniowo, ponieważ jego wykonanie jest możliwe w czasie stałym, zatem jego złożoność należy do  $O(1)$ . Największą jego wadą jest to, że gdy zbiór jest już uporządkowany, to złożoność sortowania będzie przypadkiem pesymistycznym, czyli rzędu  $n^2$ .

#### 2. Wybór ze środka lub losowanie elementu tablicy

Sposób ten jest gwarantem złożoności średniej sortowania. Randomizacja lub wybór ze środka minimalizuje ryzyko wystąpienia sytuacji w której dostajemy złożoność pesymistyczną. Złożoność obliczeniowa tego sposobu wyboru również jest stała, zatem zawiera się w  $O(1)$ .

#### 3. Przybliżona mediana

Sposób polega na wyborze kilku liczb z sortowanego zbioru, a następnie wyznaczeniu z nich mediany. Gwarantuje, że nigdy nie zajdzie sytuacja, w której zostanie wybrany największy lub najmniejszy element. Usprawnia on sortowanie każdego podzbioru, niestety kosztem złożoności obliczeniowej całego algorytmu. Można wykorzystywać różne algorytmy wyznaczające medianę, jednak w sytuacji dużego ryzyka wyboru najmniejszego elementu zwyczajnie lepiej zastosować inny algorytm sortowania. Złożoność takiego sposobu wyboru pivotu zależy od implementacji.

Algorytmy sortowania szybkiego wykorzystujące wybór pivotu z końca oraz środka tablicy, a także algorytm z medianą zostały zaimplementowane jako metody klasy Array w pliku algorytmy.cpp.

## Pomiary dla quicksort dla trzech metod pivotowania

Poniżej przedstawiono w trzech tabelach serie pomiarów oraz ich czasy wykonania (w ms), a także uśrednione wartości kolejno dla pivotowania poprzez wybór środkowego elementu, wybór elementu skrajnego oraz poprzez medianę.

Tabela 1: Quicksort - wybór środkowego elementu

	10	100	1000	1000000	1000000000
	0,00100005	0,012	0,154	151,368	223659
	0,00100005	0,0120001	0,136	153,077	221248
	0,000999928	0,0109999	0,308	152,559	221008
	0,00100005	0,011	0,137	150,222	217939
	0,00199997	0,012	0,137	149,222	221402
	0,000999928	0,0109999	0,159	151,14	222228
	0,00199997	0,012	0,139	151,778	222051
	0,00100005	0,012	0,155	152,525	219839
	0,000999928	0,011	0,154	152,466	222594
	0,000999928	0,0120001	0,151	150,932	221570
Średnia	0,0011999852	0,0116	0,163	151,5289	221353,8

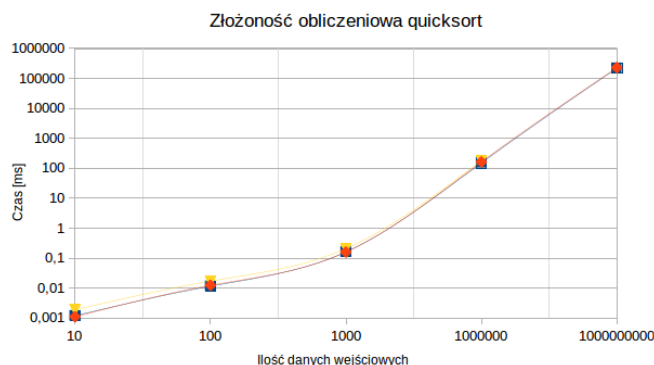
Tabela 2: Quicksort - wybór skrajnego elementu

	10	100	1000	1000000	1000000000
	0,00100005	0,012	0,157	161,768	227695
	0,00100005	0,012	0,157	165,162	231220
	0,000999928	0,013	0,154	166,774	231345
	0,000999928	0,012	0,168	160,029	228982
	0,00100005	0,012	0,158	163,658	230047
	0,00100005	0,013	0,156	160,722	231599
	0,00100005	0,012	0,155	157,433	230486
	0,00100005	0,012	0,175	164,203	229461
	0,00100005	0,0129999	0,158	159,69	229983
	0,00199997	0,013	0,156	165,832	230990
Średnia	0,0011000176	0,01239999	0,1594	162,5271	230180,8

Tabela 3: Quicksort - wybór poprzez medianę

	10	100	1000	1000000	1000000000
	0,00199997	0,0170001	0,194	182,761	
	0,00199997	0,0170001	0,208	184,158	
	0,00200009	0,017	0,22	183,918	
	0,00199997	0,018	0,19	179,07	
	0,00199997	0,017	0,193	179,208	
	0,00199997	0,0170001	0,192	185,702	
	0,00199997	0,017	0,25	181,744	
	0,00199997	0,0170001	0,209	182,57	
	0,00199997	0,018	0,19	181,608	
	0,00100005	0,016	0,251	184,466	
Średnia	0,00189999	0,01710004	0,2097	182,5205	

Poniżej przedstawiono również średnie wyniki pomiarów na wykresie w celu porównania złożoności.



Kolorem niebieskim oznaczono quicksort poprzez wybór środkowego elementu, czerwonym - skrajnego, natomiast żółtym - poprzez medianę. Można zauważyć, że usprawnienie algorytmu quicksort liczące medianę nieznacznie pogorszyło jego złożoność obliczeniową. Jak widać z przedstawionych danych, złożoność obliczeniowa sortowania szybkiego wynosi w przybliżeniu  $n \log n$ . Wszystkie trzy sposoby wyboru pivotu dla zróżnicowanych zbiorów gwarantują uzyskanie złożoności średniej. Pomiary dla miliarda w przypadku mediany nie zostały wykonane ze względu na błąd naruszenia ochrony pamięci podczas wykonywania tego algorytmu, którego źródło nie zostało jeszcze wykryte.

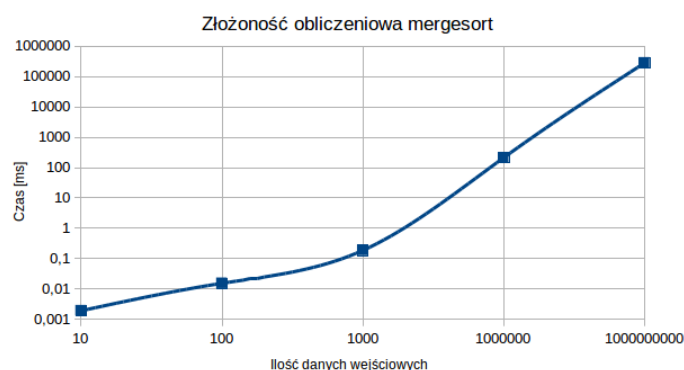
## Algorytm sortowania przez scalanie - mergesort

Algorytm sortowania przez scalanie to kolejny algorytm bazujący na metodzie "Dziel i zwyciężaj". Jego działanie polega na podziale sortowanej tablicy na połowy, a następnie kontynuację tego działania na podzbiorach do momentu uzyskania zbiorów jednoelementowych. Następnie wykorzystując działanie rekursji następuje scalanie podzbiorów i jednoczesne sortowanie ich elementów aż do momentu powrotu do jednego zbioru. Średnia złożoność algorytmu mergesort wynosi  $n \log n$ , natomiast pesymistyczna  $n^2$ , jednak wystąpienie tej drugiej jest bardzo mało prawdopodobne. Poniżej przedstawiono czasy sortowania (w ms) tym algorytmem zbiorów o różnych rozmiarach.

Tabela 4: Mergesort

	10	100	1000	1000000	1000000000
	0,00199997	0,015	0,175	209,028	285402
	0,00199997	0,015	0,176	220,542	285827
	0,00199997	0,0139999	0,174	210,991	280365
	0,00199997	0,0140001	0,212	211,248	284051
	0,00199997	0,0189999	0,175	213,839	280504
	0,00199997	0,0140001	0,234	212,437	288233
	0,00199997	0,02	0,175	214,579	289444
	0,00199997	0,0140001	0,175	211,321	287080
	0,00200009	0,0139999	0,191	212,394	288059
	0,00100005	0,014001	0,176	215,152	288223
Średnia	0,00189999	0,01530001	0,1863	213,1531	285718,8

Pomiary dla mergesort przedstawiono również na poniższym wykresie.



Pomiary wykonane dla algorytmu mergesort pokazały, że jest on mniej sprawny od quicksort, jednak jego średnia złożoność obliczeniowa rzędu  $n \log n$  jest bardziej prawdopodobna do uzyskania. Nieznaczne różnice w szybkości działania obu algorytmów są wynikiem tego, że sortowanie przez scalanie nie jest sortowaniem "w miejscu", gdyż wykorzystuje do tego zewnętrzny kontener przechowujący tymczasowo sortowane dane.

## Wnioski

Algorytm sortowania szybkiego jest efektywniejszy niż algorytm sortowania przez scalanie, jednak jego złożoność obliczeniowa jest bardziej zagrożona tzw. "ukwadratowaniem", czyli zaistnieniem przypadku pesymistycznego. Mergesort z dużym prawdopodobieństwem gwarantuje złożoność średnią, jednak jako algorytm, który nie sortuje "w miejscu" charakteryzuje się niezauważalnie większym czasem sortowania. Sposób wyboru pivotu dla sortowania szybkiego ma nieznaczny wpływ na jego złożoność obliczeniową.