Relations fondamentales de la dynamique des milieux continus déformables
Tenseur des contraintes de Cauchy

Plan

Lois universelles de la physique des milieux continus

- conservation de la masse
- bilan de quantité de mouvement
- bilan de moment cinétique
- bilan d'énergie
- bilan d'entropie

Masse

On suit un ensemble de particules de masse dm contenue initialement dans le volume dV en $\underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega_0$

$$dm = \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}})\, dV$$

champ de masse volumique initiale.
L'élément de volume dV devient dv en $\underline{\boldsymbol{x}} \in \Omega_t$ à l'instant t mais la masse contenue dans dv est la même, par définition du point matériel

$$dm = \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv$$

$$dm = \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}})dV = \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv = Constante$$

masse totale

$$m(\mathcal{M}) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}})\, dV = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv$$

Vitesses

- Vitesse d'une particule en mouvement

$$\underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) := \frac{d}{dt}\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$$

  représentation matérielle/lagrangienne de la vitesse

Vitesses

- Vitesse d'une particule en mouvement

$$\underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) := \frac{d}{dt}\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$$

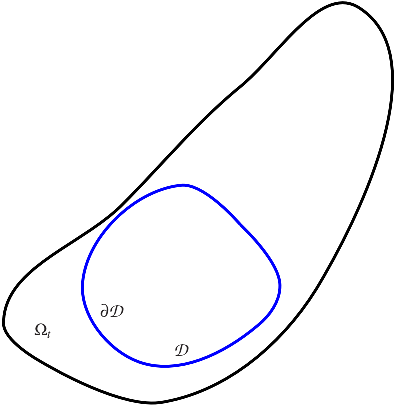
  représentation matérielle/lagrangienne de la vitesse
- C'est aussi la vitesse instantanée de la particule se trouvant à la position $\underline{\boldsymbol{x}}$ à l'instant t

$$\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) := \underline{\boldsymbol{V}}(\Phi^{-1}(\underline{\boldsymbol{x}}, t), t)$$

  représentation spatiale/eulérienne de la vitesse

Quantité de mouvement

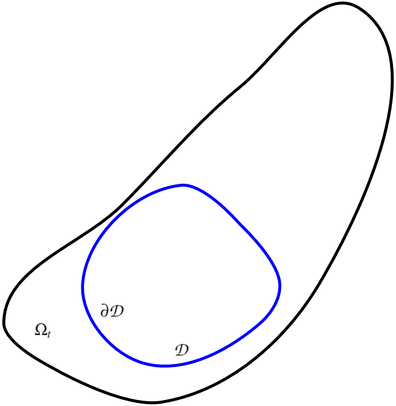
Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t



$$\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv =$$

Quantité de mouvement

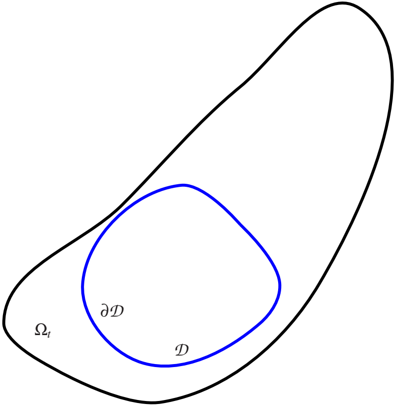
Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t



$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{\boldsymbol{v}}(\Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, t), t)\, dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)\, dV
\end{aligned}
$$

Quantité d'accélération

Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t

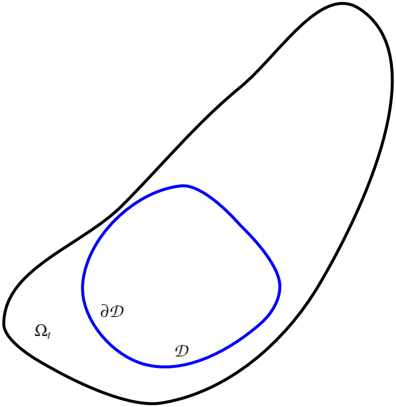


$$
\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathcal{D}_t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\,\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\,dv \\
&= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}})\,\underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)\,dV
\end{aligned}
$$

En l'absence de discontinuités,

Quantité d'accélération

Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t



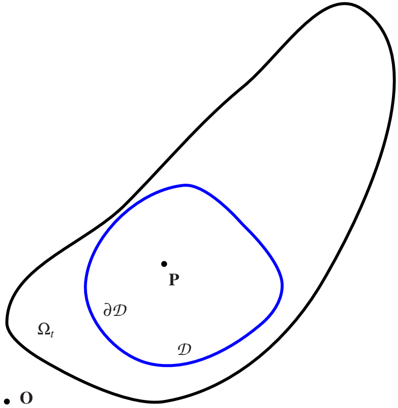
$$
\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathcal{D}_t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv \\
&= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}})\underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)\, dV
\end{aligned}
$$

En l'absence de discontinuités

$$
\begin{aligned}
\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(\mathcal{D}_t) &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}})\frac{d\underline{\boldsymbol{V}}}{dt}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)\, dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}})\frac{\partial\underline{\boldsymbol{V}}}{\partial t}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)\, dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{\boldsymbol{X}})\underline{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)\, dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{a}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv
\end{aligned}
$$

Moment cinétique

Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t et un point O de l'espace, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$

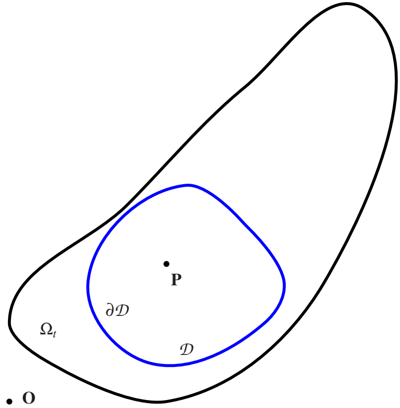


$$\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)\, dv$$

$$\underline{\boldsymbol{OP}} = \underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_{\,O}$$

Moment dynamique

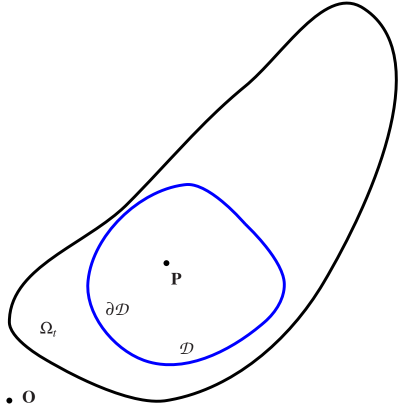
Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t et un point O de l'espace, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$



$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)\, dv$$

Moment dynamique

Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t et un point O de l'espace, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$

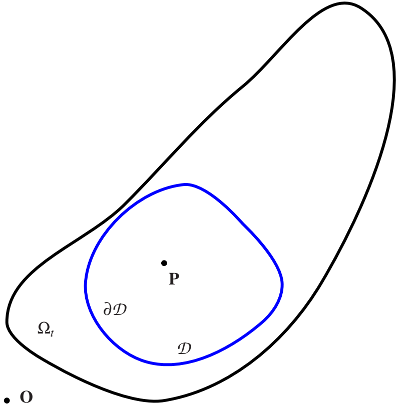


$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv = \int_{\mathcal{D}_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{a}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv$$

en l'absence de discontinuité des vitesses

Torseur dynamique

Soit $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$ un sous–domaine matériel de $\mathcal{M}$ à l'instant t et un point O de l'espace, fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$



torseur dynamique pour le domaine $\mathcal{D}_t$:

$$\{O, \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv, \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv\}$$

Plan

Relation fondamentale de la dynamique des milieux continus

Torseur dynamique = Torseur des efforts appliqués (référentiel galiléen)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{\boldsymbol{v}} \, dv = \underline{\boldsymbol{R}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho \underline{\boldsymbol{v}} \, dv = \underline{\boldsymbol{M}}_O$$

Plan

Plan

Champs de forces

Il existe une

- une **densité massique** $\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ de forces

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\,dist} = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{\boldsymbol{f}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\,dv$$

Exemple : accélération de la pesanteur (unité $\mathrm{N.kg^{-1}} \equiv \mathrm{m.s^{-2}}$)

$$\underline{\boldsymbol{f}} := \underline{\boldsymbol{g}}$$

hypothèse simplificatrice : $\underline{\boldsymbol{f}}$ ne dépend pas du domaine $\mathcal{D}_t$

Champs de forces

Il existe une

- une **densité massique** $\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)$ de forces

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\,dist} = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{\boldsymbol{f}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)\,dv$$

  Exemple : accélération de la pesanteur (unité N.kg^{-1} $\equiv$ m.s^{-2})

$$\underline{\boldsymbol{f}} := \underline{\boldsymbol{g}}$$

  hypothèse simplificatrice : $\underline{\boldsymbol{f}}$ ne dépend pas du domaine $\mathcal{D}_t$

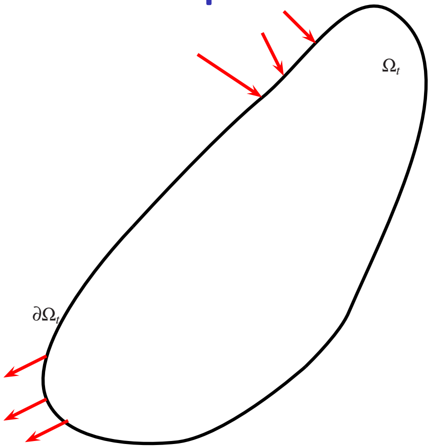
- une **densité massique** de couples

$$\underline{\boldsymbol{M}}_{\,O}^{\,dist} = \int_{\mathcal{D}_t} (\underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho \underline{\boldsymbol{f}} + \rho \underline{\boldsymbol{m}}\,)\,dv$$

  i.e. le moment des forces volumiques + des couples volumiques intrinsèques (électromagnétisme)
  simplification : $\underline{\boldsymbol{m}} = 0$

Plan

Efforts surfaciques

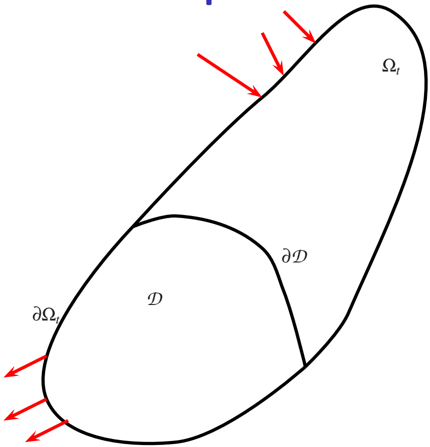


- efforts de contact sur $\partial\Omega_t$

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\,surf} = \int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\Omega_t, t)\, ds$$

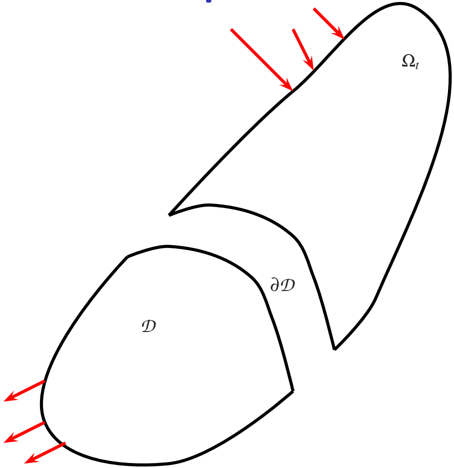
vecteur densité surfacique
de forces /
vecteur–contrainte
(unité N.m^{-2})

Efforts surfaciques



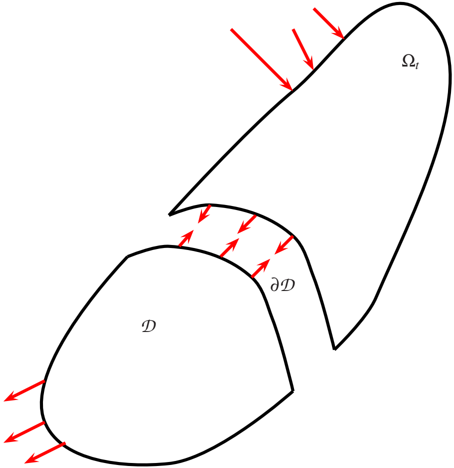
- efforts sur $\partial\mathcal{D}_t$?

Efforts surfaciques



- efforts sur $\partial\mathcal{D}_t$?

Efforts surfaciques



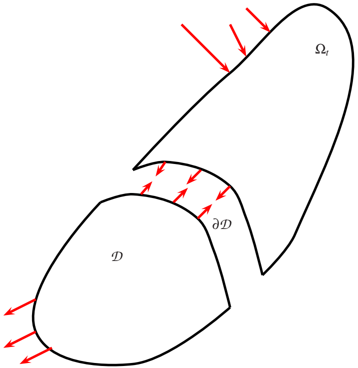
- efforts surfaciques sur $\partial\mathcal{D}_t$

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\,surf} = \int_{\partial\mathcal{D}_t} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}_t, t)\, ds$$

  Le pari de remplacer les efforts de champ à courte distance par des efforts surfaciques

- remplacer une action **non locale** par une action locale;
  en pratique, décroissance rapide des **forces de cohésion**
  ($\sim$ 10 atomes)

Efforts surfaciques



- densité surfacique de forces

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\,surf} = \int_{\partial\mathcal{D}_t} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}_t, t)\, ds$$

- densité surfacique de couples

$$\underline{\boldsymbol{M}}_{\,O}^{\,surf} = \int_{\partial\mathcal{D}_t} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_{\,O}) \wedge \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}_t, t)\, ds$$

hypothèse : pas de densité surfacique de couples intrinsèque (milieu **non polaire**)

Plan

Lois d'Euler du mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \underline{\boldsymbol{v}}\; dv = \underline{\boldsymbol{R}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho \underline{\boldsymbol{v}}\; dv = \underline{\boldsymbol{M}}_0$$

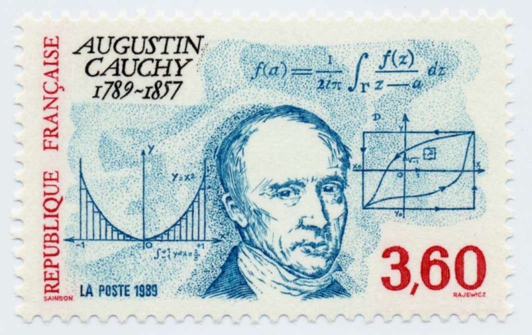
Lois d'Euler du mouvement

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \underline{\boldsymbol{v}}\; dv &= \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{t}}(\underline{\boldsymbol{x}}, \partial\Omega_t, t)\, ds \\
\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho \underline{\boldsymbol{v}}\; dv &= \int_{\Omega_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv \\
&+ \int_{\partial\Omega_t} \underline{\boldsymbol{OP}} \wedge \underline{\boldsymbol{t}}(\underline{\boldsymbol{x}}, \partial\Omega_t, t)\, ds
\end{aligned}$$

- Elles s'appliquent à tout sous–domaine $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$.
- On a besoin des deux équations!
- Référentiel non galiléen : mettre les forces d'inertie dans $\underline{\boldsymbol{f}}$

Plan

La controverse des “élasticiens” du XIX$^{\text{ème}}$ siècle

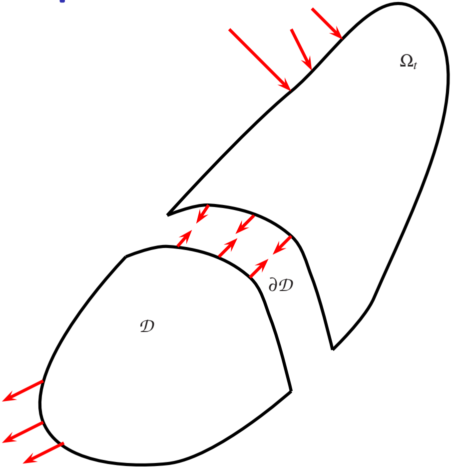


Côté français : Navier, Cauchy, Saint–Venant — l’hypothèse moléculaire

Côté anglais : Young, Green — l’approche phénoménologique

Plan

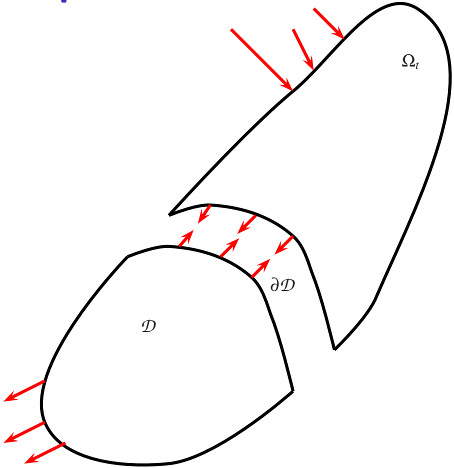
Description des efforts intérieurs



- le vecteur–contrainte

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\,surf} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}, t)\, ds$$

Description des efforts intérieurs

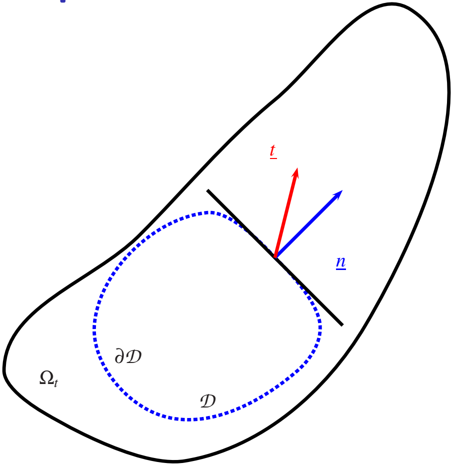


- le vecteur–contrainte

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\,surf} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}, t)\, ds$$

caractéristiques d'une surface?

Description des efforts intérieurs



- le vecteur–contrainte

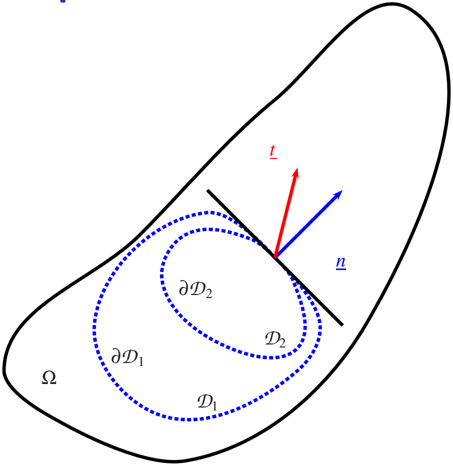
$$\underline{\boldsymbol{R}}^{\,surf} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}, t)\, ds$$

- le postulat de Cauchy :

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}, t) := \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \underline{\boldsymbol{n}}\,, t)$$

normale sortante

Description des efforts intérieurs



- le vecteur–contrainte

$$\underline{\boldsymbol{R}}^{surf} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}, t)\, ds$$

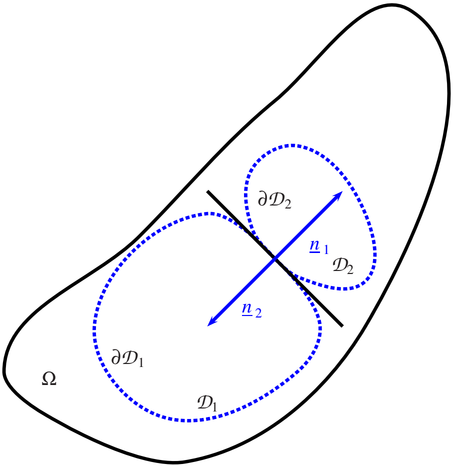
- le postulat de Cauchy :

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}, t) = \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \underline{\boldsymbol{n}}\,, t)$$

normale sortante

- une conséquence

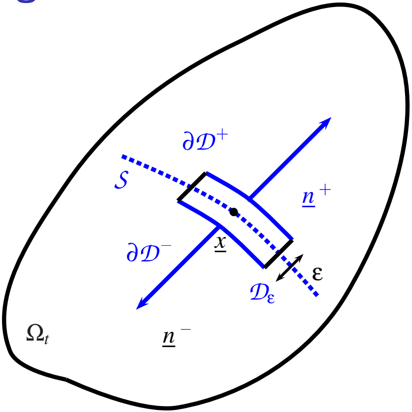
$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}_1, t) = \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \partial\mathcal{D}_2, t)$$



$\partial\mathcal{D}_2$
$\underline{n}_1$
$\mathcal{D}_2$
$\underline{n}_2$
$\partial\mathcal{D}_1$
Ω
$\mathcal{D}_1$

Plan

L'argument du cachet d'aspirine (pillbox argument)



- $S = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_\varepsilon$

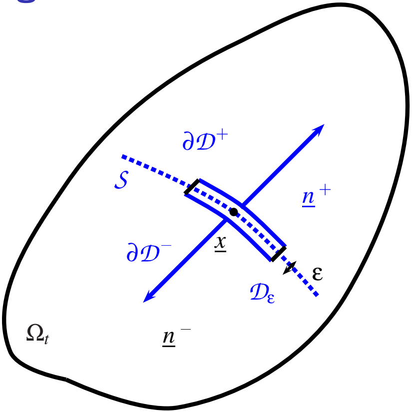
$$\partial\mathcal{D}_\varepsilon = \partial\mathcal{D}^+ \cup \partial\mathcal{D}^- \cup \mathcal{H}_\varepsilon$$

- $\underline{\boldsymbol{f}}\,,\underline{\boldsymbol{a}}$ bornées
- $\underline{\boldsymbol{t}}$ continu (pas d'efforts surfaciques concentrés)

- première loi d'Euler

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\epsilon} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds = \int_{\mathcal{D}_\epsilon} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}}\,)\,dv$$

L'argument du cachet d'aspirine



- $S = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_\varepsilon$

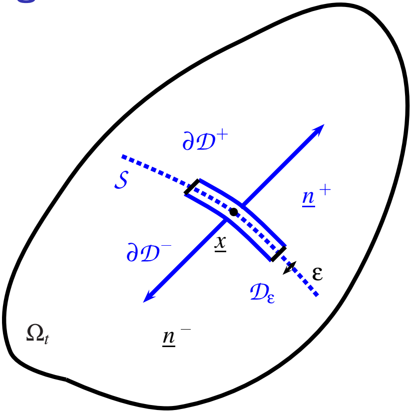
$$\partial\mathcal{D}_\varepsilon = \partial\mathcal{D}^+ \cup \partial\mathcal{D}^- \cup \mathcal{H}_\varepsilon$$

- $\underline{\boldsymbol{f}}\,,\underline{\boldsymbol{a}}$ bornées
- $\underline{\boldsymbol{t}}$ continu (pas d'efforts surfaciques concentrés)

- première loi d'Euler

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\epsilon} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds = \int_{\mathcal{D}_\epsilon} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}}\,)\,dv$$

L'argument du cachet d'aspirine



- $S = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_\varepsilon$

$$\partial\mathcal{D}_\varepsilon = \partial\mathcal{D}^+ \cup \partial\mathcal{D}^- \cup \mathcal{H}_\varepsilon$$

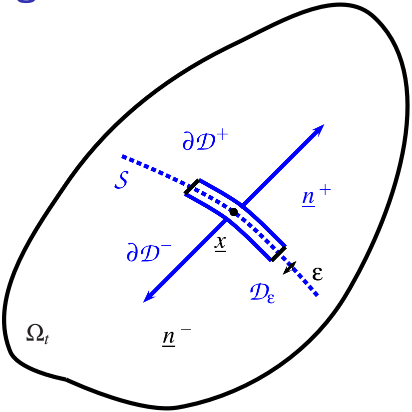
- $\underline{\boldsymbol{f}}\,, \underline{\boldsymbol{a}}$ bornées
- $\underline{\boldsymbol{t}}$ continu (pas d'efforts surfaciques concentrés)

- Lemme d'imparité

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, -\underline{\boldsymbol{n}}\,, t) = -\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \underline{\boldsymbol{n}}\,, t)$$

$$\textit{actio} = \textit{reactio}$$

L'argument du cachet d'aspirine



- $S = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_\varepsilon$

$$\partial\mathcal{D}_\varepsilon = \partial\mathcal{D}^+ \cup \partial\mathcal{D}^- \cup \mathcal{H}_\varepsilon$$

- $\underline{\boldsymbol{f}}\,, \underline{\boldsymbol{a}}$ bornées
- $\underline{\boldsymbol{t}}$ continu (pas d'efforts surfaciques concentrés)

- Lemme d'imparité

$$\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, -\underline{\boldsymbol{n}}\,, t) = -\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \underline{\boldsymbol{n}}\,, t)$$

$$\textit{actio} = \textit{reactio}$$

- Exemple de représentation de $\underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{n}}\,)$ remplissant cette condition?

Insuffisance de la représentation pression

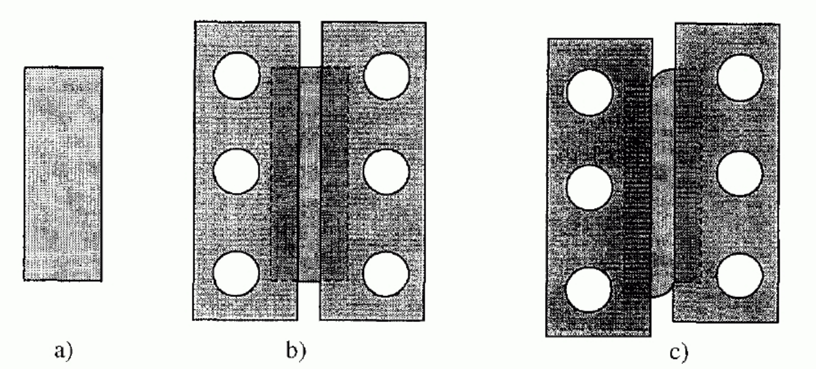
représentation des efforts surfaciques par un champ de pression :

$$\underline{\boldsymbol{t}} = -p\,\underline{\boldsymbol{n}}$$

Insuffisance de la représentation pression

représentation des efforts surfaciques par un champ de pression :

$$\underline{\boldsymbol{t}} = -p\,\underline{\boldsymbol{n}}$$



a) b) c)

De la surface au volume

- première loi d'Euler

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \underline{\boldsymbol{n}}\,, t)\, ds = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}}\,)\, dv$$

- Quelles sont les conditions sur $\underline{\boldsymbol{t}}$ pour qu'une intégrale de volume se réduise à une intégrale de surface?

Le théorème de la divergence et autres formes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} \; dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{v}} \, . \underline{\boldsymbol{n}} \; ds$$

Le théorème de la divergence et autres formes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}}\ dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{v}} . \underline{\boldsymbol{n}}\ ds$$

plus généralement,

$$\int_{\Omega} \bullet_{,i}\ dV = \int_{\partial\Omega} \bullet n_i\ ds$$

$$\int_{\Omega} \nabla f\ dv = \int_{\partial\Omega} f\, \underline{\boldsymbol{n}}\ ds$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}}\ dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{v}} . \underline{\boldsymbol{n}}\ ds$$

(coordonnées cartésiennes en BON pour l'expression en composantes)

De la surface au volume

- première loi d'Euler

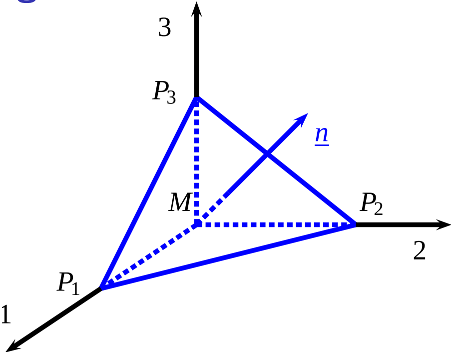
$$\int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \underline{\boldsymbol{n}}\,, t)\, ds = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)(\underline{\boldsymbol{a}}\, - \underline{\boldsymbol{f}}\,)\, dv$$

- Quelles sont les conditions sur $\underline{\boldsymbol{t}}$ pour que l'on puisse passer ainsi du volume à la surface?
  Si $\underline{\boldsymbol{t}}$ est un flux $\Longleftrightarrow$ $\underline{\boldsymbol{t}}$ linéaire en $\underline{\boldsymbol{n}}$ $\Longleftrightarrow$ $\underline{\boldsymbol{t}} = \bullet.\underline{\boldsymbol{n}}$, alors le passage surface–volume est possible.

  La réciproque constitue le théorème de Cauchy.

Plan

L'argument du tétraèdre de Cauchy

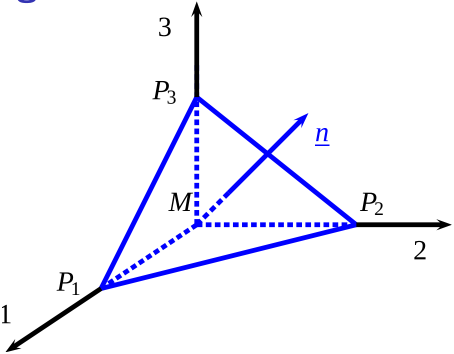


$$\underline{\boldsymbol{n}} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

tétraèdre $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ passant par le point $P(hn_1, hn_2, hn_3)$
hauteur h
surfaces S_1, S_2, S_3, S

$$\int_{\Delta_h} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}})\, dv = \int_{\partial \Delta_h} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{n}}, t)\, ds$$

L'argument du tétraèdre de Cauchy

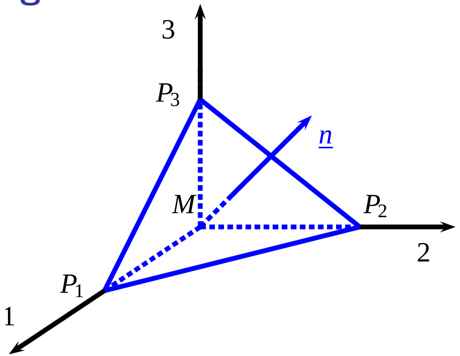


$$\underline{\boldsymbol{n}} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

tétraèdre $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ passant par le point $P(hn_1, hn_2, hn_3)$ hauteur h, surfaces S_1, S_2, S_3, S

$$\int_{\Delta_h} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t)(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}}) \, dv = \int_{\partial \Delta_h} \underline{\boldsymbol{t}}(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{n}}, t) \, ds$$

L'argument du tétraèdre de Cauchy



$\underline{\boldsymbol{n}} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$

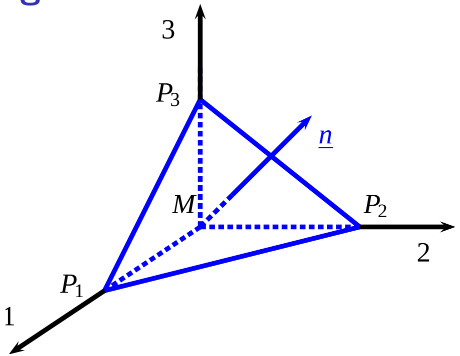
tétraèdre $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ passant par le point $P(hn_1, hn_2, hn_3)$

hauteur h

surfaces S_1, S_2, S_3, S

$$t_1(M, \underline{\boldsymbol{n}}) = t_1(M, \sum_{i=1}^{3} n_i \underline{\boldsymbol{e}}_i) = \sum_{i=1}^{3} n_i t_1(M, \underline{\boldsymbol{e}}_i)$$

L'argument du tétraèdre de Cauchy



$$\underline{\boldsymbol{n}} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

tétraèdre $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ passant par le point $P(hn_1, hn_2, hn_3)$

hauteur h

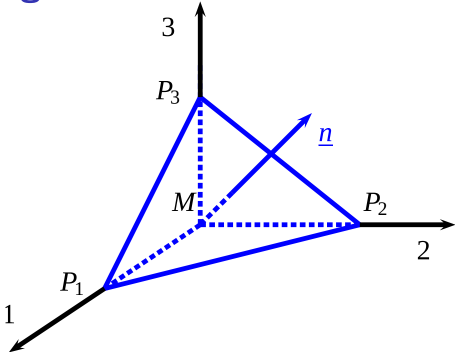
surfaces S_1, S_2, S_3, S

$$t_1(M, \underline{\boldsymbol{n}}) = t_1(M, \sum_{i=1}^{3} n_i \underline{\boldsymbol{e}}_i) = \sum_{i=1}^{3} n_i t_1(M, \underline{\boldsymbol{e}}_i)$$

$$t_2(M, \underline{\boldsymbol{n}}) = t_2(M, \sum_{i=1}^{3} n_i \underline{\boldsymbol{e}}_i) = \sum_{i=1}^{3} n_i t_2(M, \underline{\boldsymbol{e}}_i)$$

$$t_3(M, \underline{\boldsymbol{n}}) = t_3(M, \sum_{i=1}^{3} n_i \underline{\boldsymbol{e}}_i) = \sum_{i=1}^{3} n_i t_3(M, \underline{\boldsymbol{e}}_i)$$

L'argument du tétraèdre de Cauchy



$$\underline{\boldsymbol{n}} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

tétraèdre $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ passant par le point $P(hn_1, hn_2, hn_3)$
hauteur h
surfaces S_1, S_2, S_3, S

$$t_i(M, \underline{\boldsymbol{n}}) = \sum_{j=1}^{3} t_i(M, \underline{\boldsymbol{e}}_j) n_j$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \quad \sigma_{ij}(M) := t_i(M, \underline{\boldsymbol{e}}_j)$$

Le théorème de Cauchy

Il existe un champ de tenseurs du second ordre $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$ tel que, en tout point régulier de Ω_t ($\underline{\boldsymbol{t}}$ continu, $\underline{\boldsymbol{f}}, \underline{\boldsymbol{a}}$ finis),

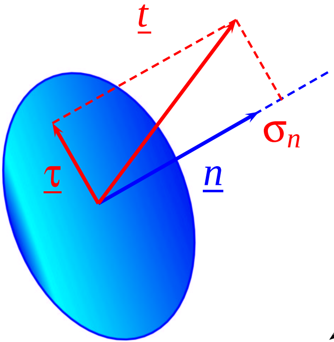
$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}$$

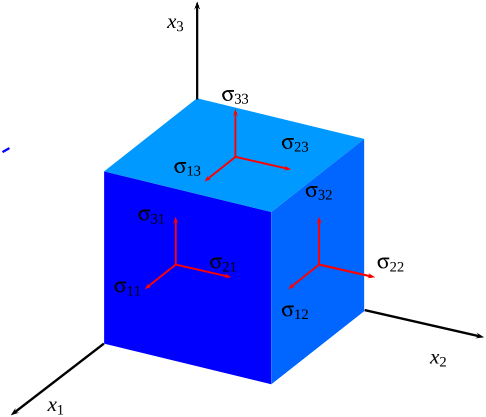
$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est la **machine** à produire les efforts s'exerçant sur les éléments de surface en M :

$$\underline{\boldsymbol{t}}\, ds = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}\, ds = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{ds}}$$





Plan

Plan

Première loi de Cauchy

- Efforts surfaciques

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds = \int_{\partial\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t).\underline{\boldsymbol{n}}\;ds$$

$$\int_{\partial\mathcal{D}} t_i(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds \quad = \quad \int_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)n_j\,ds$$

Première loi de Cauchy

- Efforts surfaciques

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds = \int_{\partial \mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t).\underline{\boldsymbol{n}}\ ds$$

$$\int_{\partial \mathcal{D}} t_i(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds = \int_{\partial \mathcal{D}} \sigma_{ij}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)n_j\,ds = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\,dv$$

(théorème de la divergence, coordonnées cartésiennes en BON)

Première loi de Cauchy

- Efforts surfaciques

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds = \int_{\partial\mathcal{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t).\underline{\boldsymbol{n}}\;ds$$

$$\int_{\partial\mathcal{D}} t_i(\underline{\boldsymbol{x}}\,,\underline{\boldsymbol{n}}\,,t)\,ds = \int_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij}(\underline{\boldsymbol{x}}\,,t)n_j\,ds = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\,dv$$

(théorème de la divergence)

- Application à la première loi d'Euler

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\rho(a_i - f_i) - \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)\,dv = 0$$

- En tout point régulier

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho(f_i - a_i) = 0$$

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho(\underline{\boldsymbol{f}}\, - \underline{\boldsymbol{a}}\,) = 0$$

Plan

Seconde loi de Cauchy

- Seconde loi d'Euler

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_O) \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}})\, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_O) \wedge (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}})\, ds$$

Dans une base cartésienne orthonormée directe d'origine $\underline{\boldsymbol{x}}_O$, la première composante vaut

$$\int_{\mathcal{D}} (x_2\rho(a_3 - f_3) - x_3\rho(a_2 - f_2))\, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} (x_2\sigma_{3j} - x_3\sigma_{2j})n_j\, ds$$

Seconde loi de Cauchy

- Seconde loi d'Euler

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_O) \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}})\, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_O) \wedge (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}})\, ds$$

Dans une base cartésienne orthonormée directe d'origine $\underline{\boldsymbol{x}}_O$, la première composante vaut

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (x_2 \rho(a_3 - f_3) - x_3 \rho(a_2 - f_2))\, dv &= \int_{\partial\mathcal{D}} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) n_j\, ds \\ &= \int_{\mathcal{D}} (x_2 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} + \delta_{2j}\sigma_{3j} - \delta_{3j}\sigma_{2j})\, dv \end{aligned}$$

Seconde loi de Cauchy

- Seconde loi d'Euler

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_{O}) \wedge \rho(\underline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{f}})\, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} (\underline{\boldsymbol{x}} - \underline{\boldsymbol{x}}_{O}) \wedge (\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}})\, ds$$

Dans une base cartésienne orthonormée directe d'origine $\underline{\boldsymbol{x}}_{O}$, la première composante vaut

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} (x_2\rho(a_3 - f_3) - x_3\rho(a_2 - f_2))\, dv &= \int_{\partial\mathcal{D}} (x_2\sigma_{3j} - x_3\sigma_{2j}) n_j\, ds \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(x_2 \frac{\partial\sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial\sigma_{2j}}{\partial x_j} + \delta_{2j}\sigma_{3j} - \delta_{3j}\sigma_{2j}\right) dv\end{aligned}$$

- Seconde loi de Cauchy (milieux non polaires)

$$\int_{\mathcal{D}} (\sigma_{32} - \sigma_{23})\, dv = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23} - \sigma_{32} &= 0 \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} &= 0 \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} &= 0\end{aligned}$$

Seconde loi de Cauchy

Le tenseur des contraintes est un tenseur euclidien d'ordre 2 **symétrique** : c'est une forme bilinéaire symétrique...

$$\underline{\boldsymbol{n}}_1 . \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}}_2 = \underline{\boldsymbol{n}}_2 . \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}}_1$$

... ou un endomorphisme auto–adjoint

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\underline{\boldsymbol{n}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}}$$

Conséquence?

Seconde loi de Cauchy

Le tenseur des contraintes est un tenseur euclidien d'ordre 2 **symétrique** : c'est une forme bilinéaire symétrique...

$$\underline{\boldsymbol{n}}_1 . \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}}_2 = \underline{\boldsymbol{n}}_2 . \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}}_1$$

... ou un endomorphisme auto–adjoint

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^T = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\underline{\boldsymbol{n}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}}$$

Conséquence : le tenseur des contraintes est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont réelles

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \, \underline{\boldsymbol{n}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{n}}_i, \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} . \underline{\boldsymbol{n}}_i = \sigma_i \, \underline{\boldsymbol{n}}_i \quad \textit{(no sum)}$$

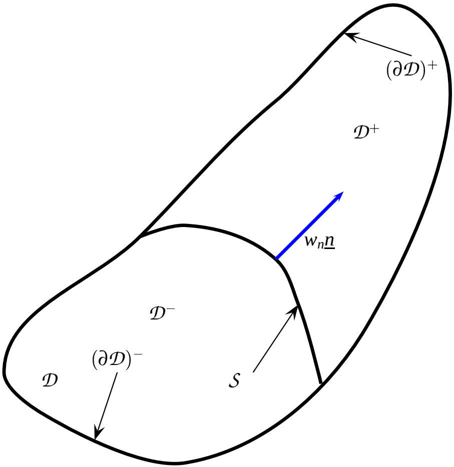
σ_i : contraintes principales

$\underline{\boldsymbol{n}}_i$: directions principales des contraintes

Plan

Surface de discontinuité mobile

cas de champs continus par morceaux



- vitesse de propagation

$$\underline{\boldsymbol{w}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{M_t M_{t+\Delta t}}}}}{\Delta t} = w_n \, \underline{\boldsymbol{n}}$$

vitesse relative de la matière / $\mathcal{S}$

$$U = \underline{\boldsymbol{v}} \, . \underline{\boldsymbol{n}} - w_n$$

- saut de f à travers $\mathcal{S}$

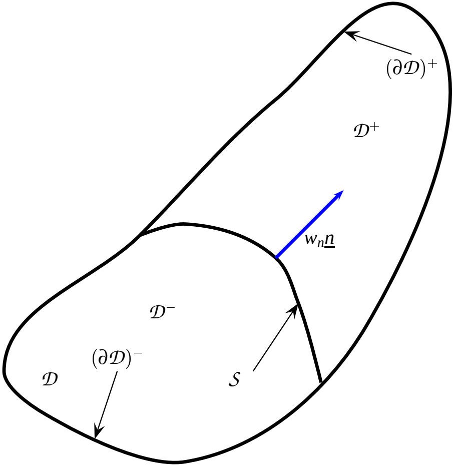
$$[\![f]\!] := f^+ - f^-$$

- conservation de la masse

$$[\![\rho U]\!] = 0$$

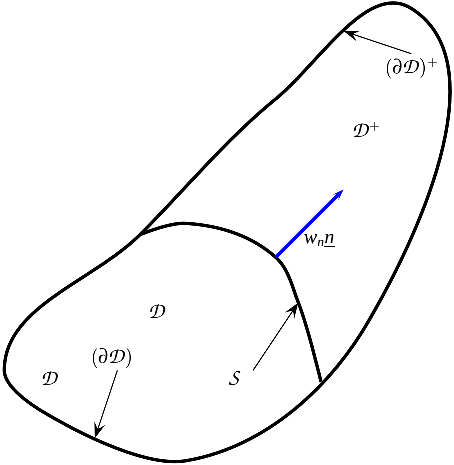
- cas $\mathcal{S}$ matérielle

Première loi d'Euler avec discontinuités



$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{v}}\; dv = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)\underline{\boldsymbol{f}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)\, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}\,(\underline{\boldsymbol{x}}\,, \underline{\boldsymbol{n}}\,, t)\, ds$$

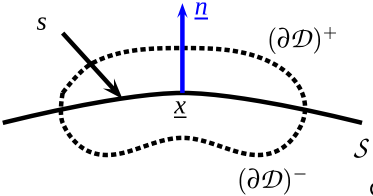
Première loi d'Euler avec discontinuités



un théorème de transport

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{v}} \; dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}} \; dv + \int_{\mathcal{S}} [\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!] \rho U \, ds$$

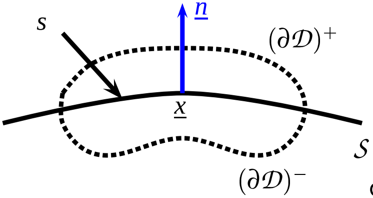
Equations aux discontinuités



domaine $S \subset \mathcal{D}, S \subset \mathcal{S}$

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}}\, dv + \int_S [\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!] \rho U \, ds = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t) \underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{n}}, t)\, ds$$

Equations aux discontinuités



domaine $S \subset \mathcal{D}, S \subset \mathcal{S}$

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\boldsymbol{a}}\, dv + \int_S [\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!] \rho U\, ds = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{\boldsymbol{x}}, t) \underline{\boldsymbol{f}}(\underline{\boldsymbol{x}}, t)\, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{t}}(\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{n}}, t)\, ds$$

à la limite $\mathcal{D} \to S$,

$$\int_S [\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!] \rho U\, ds = \int_S [\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!] . \underline{\boldsymbol{n}}\, ds$$

Equations aux discontinuités

- cas général

$$[\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!] . \underline{\boldsymbol{n}} - \rho U [\![\underline{\boldsymbol{v}}]\!] = 0$$

ondes de choc

- cas d'une surface de discontinuité $\mathcal{S}$ matérielle (ou cas statique)

$$[\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!] . \underline{\boldsymbol{n}} = 0$$

le vecteur–contrainte est continu au travers de toute surface matérielle

le tenseur des contraintes n'est pas nécessairement continu! (exemple : interfaces dans les composites)

Plan

Bilan : cas général

$\underline{t} = \underset{\sim}{\sigma}.\underline{n}$ — vecteur–contrainte

Equations de champ :

$\operatorname{div} \underset{\sim}{\sigma} + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$ — quantité de mouvement (Cauchy 1)

$\underset{\sim}{\sigma}^T = \underset{\sim}{\sigma}$ — moment cinétique (Cauchy 2)

Equations aux discontinuités :

$[\![\rho U]\!] = 0$

$[\![\underset{\sim}{\sigma}]\!].\underline{n} - \rho U [\![\underline{v}]\!] = 0$

Bilan : cas statique

$\underline{\boldsymbol{t}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}.\underline{\boldsymbol{n}}$	vecteur–contrainte
$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} + \rho\underline{\boldsymbol{f}} = 0$	quantité de mouvement
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}^{T} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$	moment cinétique
$[\![\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}]\!].\underline{\boldsymbol{n}} = 0$	continuité du vecteur–contrainte