

## Chapitre 17

# Le problème de Saint–Venant

On considère une poutre cylindrique homogène  $\Omega$  de longueur  $\ell$  et de section droite<sup>1</sup> courante  $S$  simplement connexe de forme quelconque. Les frontières de  $\Omega$  sont ses extrémités, à savoir les sections  $S_0$  et  $S_\ell$ , et le contour latéral  $\mathcal{A}$ , de sorte que le bord  $\partial\Omega = S_0 \cup \mathcal{A} \cup S_\ell$ . Les barycentres des sections  $S_0$  et  $S_\ell$  sont respectivement les points  $O$  et  $G_\ell$ . L'axe 3 du système de coordonnées cartésiennes orthonormées utilisé dans ce problème désigne l'axe du cylindre unissant les barycentres de toutes les sections. Les axes 1 et 2 sont choisis parallèles aux directions principales d'inertie des sections droites :

$$\int_S X_1 dS = \int_S X_2 dS = \int_S X_1 X_2 dS = 0$$

Les moments d'inertie principaux des sections sont notés :

$$I_1 = \int_S X_2^2 dS, \quad I_2 = \int_S X_1^2 dS$$

Soit  $R$  une dimension caractéristique de la section, par exemple la plus grande demi-distance entre deux points quelconques de la section.

Le problème de Saint–Venant consiste à rechercher les contraintes et les déplacements qui règnent dans la poutre soumise à ses extrémités à un torseur d'efforts appliqués, la surface latérale étant libre de toute force. La section  $S_\ell$  de la poutre, de normale sortante  $\underline{n} = \underline{e}_3$ , est soumise à des efforts dont le torseur résultant est

$$\{G_\ell, \quad \underline{R}_\ell, \quad \underline{M}_\ell\}, \quad \underline{R}_\ell = T_1 \underline{e}_1 + T_2 \underline{e}_2 + N \underline{e}_3, \quad \underline{M}_\ell = M_1 \underline{e}_1 + M_2 \underline{e}_2 + M_3 \underline{e}_3$$

comme sur la figure 17.1. La poutre est en équilibre statique à condition que le torseur des efforts suivant soit appliqué à la section  $S_0$  de normale sortante  $-\underline{e}_3$  :

$$\{O, \underline{R}_0 = -\underline{R}_\ell, \underline{M}_O = -\underline{OG}_\ell \wedge \underline{R}_\ell - \underline{M}_\ell\}$$

ce qui donne

$$M_{O1} = -M_1 + \ell T_2, \quad M_{O2} = -M_2 - \ell T_1, \quad M_{O3} = -M_3 \quad (17.1)$$

L'application d'un effort normal  $N$ , les autres composantes du torseur étant nulles, correspond à l'essai de traction/compression simple traité au paragraphe 9.2.1 tandis que l'essai de flexion normale<sup>2</sup> associé à l'application d'un moment  $M_1$  ou  $M_2$  par rapport à l'un des axes d'inertie de la section, a fait l'objet du paragraphe 9.2.2. Le cas de l'application d'un couple de torsion pure  $M_3 = \mathcal{C}$  à l'exclusion de toute autre composante non nulle du torseur est traité au chapitre 16. L'application des efforts résultants  $T_1$  et  $T_2$ , dits efforts tranchants, constitue la nouveauté de ce chapitre. Elle s'accompagne nécessairement, on le voit au travers de (17.1), de l'existence de moments de flexion  $M_1$  et  $M_2$  affines en  $X_3$ . C'est pourquoi l'application d'un effort  $T_1$  ou  $T_2$  est parfois appelée flexion simple<sup>3</sup>.

1. Une section droite désigne une section perpendiculaire à l'axe du cylindre.

2. On trouve les dénominations de flexion normale, flexion pure ou flexion circulaire (dans le contexte infinitésimal).

3. Noter également la dénomination de flexion complexe par (Mandel, 1994) !

En l'état, le problème aux limites considéré est mal posé dans la mesure où seul le torseur des efforts appliqués aux extrémités est donné. Lorsque la poutre est suffisamment élancée, i.e.  $R/\ell \ll 1$ , le principe de Saint-Venant permet d'affirmer que la solution du problème ne dépend pratiquement pas de la façon dont ces efforts sont appliqués sur  $S_0$  et  $S_\ell$ . L'objectif du chapitre est donc, d'une part, de proposer une distribution surfacique d'efforts permettant de réaliser les torseurs appliqués  $\{O, \underline{R}_O, \underline{M}_O\}$  et  $\{G_\ell, \underline{R}_\ell, \underline{M}_\ell\}$ , et, d'autre part, de résoudre le problème d'équilibre élastique linéarisé bien posé correspondant.

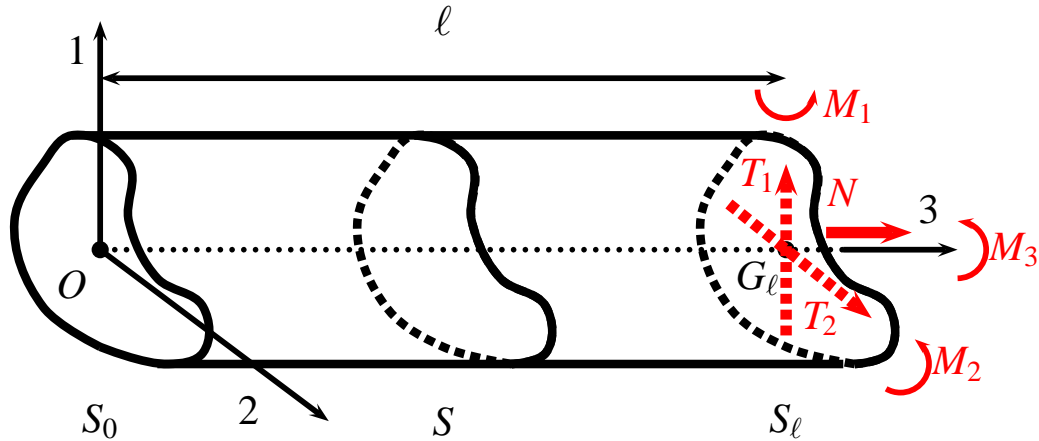


FIGURE 17.1 – Géométrie de la poutre étudiée ainsi que le torseur des efforts appliqués à l'extrémité  $S_\ell$ .

## 17.1 Statique du problème de Saint-Venant

### 17.1.1 Une propriété remarquable des contraintes

On s'intéresse aux états de contraintes permettant de satisfaire la propriété suivante : *le vecteur-contrainte qui s'exerce au point courant sur toute facette parallèle aux génératrices du cylindre est, lui aussi, parallèle aux génératrices.*

Quel est l'état de contrainte imposé par cette propriété ?

Montrer qu'une contrainte principale au moins est nulle et que les vecteurs propres correspondants sont perpendiculaires à  $\underline{e}_3$ .

Le vecteur normal à une facette parallèle aux génératrices a pour composantes  $[n_1 \ n_2 \ 0]^T$ . Le vecteur-contrainte associé est parallèle aux génératrices si ses première et deuxième composantes sont nulles :

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = 0, \quad \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = 0, \quad \forall n_1, n_2$$

Les contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  sont donc nulles, ce qui conduit à l'état de contraintes suivant :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (17.2)$$

Le déterminant de la matrice précédente est nul de sorte qu'elle admet une valeur propre nulle. D'autre part, la trace de la matrice est  $\sigma_{33}$  ce qui indique que la somme des deux autres valeurs propres vaut  $\sigma_{33}$ . Les contraintes principales sont les racines du polynôme caractéristique en  $\sigma$  :

$$\sigma(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma - \sigma^2)$$

Les contraintes principales sont donc :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + \tau^2}), \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + \tau^2}), \quad \text{avec} \quad \tau^2 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$$

Les composantes de  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  sont alors  $[\sigma_{13}n_3, \quad \sigma_{23}n_3, \quad \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3]$  pour un vecteur  $\underline{n}$  donné. Elles s'annulent lorsque  $\underline{n}$  est une direction principale pour la valeur propre nulle. Cela requiert en général que  $n_3$  de sorte que les directions principales correspondantes sont orthogonales à l'axe 3.

### 17.1.2 Forme des contraintes dans le problème de Saint-Venant

On va montrer que les états de contraintes solutions du problème de Saint-Venant satisfont la propriété précédente<sup>4</sup>.

On considère donc l'état de contraintes (17.2). Etablir d'abord que les composantes  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  ne dépendent pas de la variable  $X_3$ .

Montrer que la contrainte  $\sigma_{33}$  est nécessairement de la forme :

$$\sigma_{33} = a_1X_1X_3 + a_2X_2X_3 + a_3X_3 + a_4X_1 + a_5X_2 + a_6 \quad (17.3)$$

Montrer que l'on peut exprimer tous les coefficients de ce polynôme en fonction des composantes des forces et moments appliqués  $\underline{R}_\ell$  et  $\underline{M}_\ell$ .

En l'absence de forces de volume et dans le cas statique, les conditions d'équilibre local exigent que la divergence du tenseur des contraintes s'annule en tout point de l'intérieur de  $\Omega$ . En particulier, les conditions

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = \sigma_{13,3} = 0, \quad \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = \sigma_{23,3} = 0$$

appliquées à la forme proposée (17.2) excluent la dépendance en  $X_3$  des composantes de cisaillement. La loi d'élasticité isotrope linéarisée par rapport à l'état naturel fournit ensuite

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\nu\sigma_{33} & 0 & (1+\nu)\sigma_{13} \\ 0 & -\nu\sigma_{33} & (1+\nu)\sigma_{23} \\ (1+\nu)\sigma_{13} & (1+\nu)\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (17.4)$$

Les équations de compatibilité (2.153) à (2.155) exigent alors que

$$\sigma_{33,22} + \sigma_{33,11} = 0, \quad \nu\sigma_{33,33} - \sigma_{33,22} = 0, \quad \sigma_{33,11} - \nu\sigma_{33,33} = 0$$

système homogène dont la solution est

$$\sigma_{33,11} = \sigma_{33,22} = \sigma_{33,33} = 0$$

La condition de compatibilité (2.157) indique en outre que  $\sigma_{33,12} = 0$ . Par conséquent la composante  $\sigma_{33}$  est affine par rapport aux variables  $X_1$  et  $X_2$  et les coefficients correspondants dépendent de  $X_3$  de manière affine, ce qui conduit à la forme (17.3).

Les valeurs des coefficients  $a_i$  s'obtiennent en calculant les contribution de  $\sigma_{33}$  aux forces et moments résultants sur les extrémités du barreau.

Les forces résultantes normales aux sections  $S_0$  et  $S_\ell$  sont égales à  $-N$  et  $N$  respectivement :

$$\int_{S_0} \sigma_{33} dS = -a_6 S = -N, \quad \int_{S_\ell} \sigma_{33} dS = a_3 \ell S + a_6 S = N$$

On calcule ensuite le moment résultant sur la surface  $S_\ell$  :

$$\underline{M}_\ell = \int_{S_\ell} \underline{G}_\ell \underline{M} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3) dS = \begin{bmatrix} \int_{S_\ell} X_2 \sigma_{33} dS \\ \int_{S_\ell} -X_1 \sigma_{33} dS \\ \int_{S_\ell} X_1 \sigma_{23} - X_2 \sigma_{13} dS \end{bmatrix} \quad (17.5)$$

4. Cette caractérisation est due à Louis Brun.

Les deux premières composantes fournissent les relations :

$$a_2 I_1 \ell + a_5 I_1 = M_1, \quad -a_1 I_2 \ell - a_4 I_2 = M_2$$

Le moment résultant sur la face  $S_0$  vaut ensuite

$$\underline{M}_O = \int_{S_0} \underline{OM} \wedge (\underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_3)) dS = \begin{bmatrix} \int_{S_\ell} -X_2 \sigma_{33} dS \\ \int_{S_\ell} X_1 \sigma_{33} dS \\ \int_{S_\ell} -X_1 \sigma_{23} + X_2 \sigma_{13} dS \end{bmatrix}$$

Les deux premières composantes fournissent les relations :

$$-a_5 I_1 = -M_1 + \ell T_2, \quad -a_4 I_2 = -M_2 - \ell T_1$$

Finalement, on obtient

$$a_1 = \frac{T_1}{I_2}, \quad a_2 = \frac{T_2}{I_1}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{M_2 + \ell T_1}{I_2}, \quad a_5 = \frac{M_1 - \ell T_2}{I_1}, \quad a_6 = \frac{N}{S}$$

### 17.1.3 Détermination des contraintes de cisaillement

Montrer que

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \quad (17.6)$$

et, par conséquent, que

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left( \sigma_{31} + a_1 \frac{X_1^2}{2} + f(X_2) \right) = \frac{\partial}{\partial X_2} \left( -\sigma_{32} - a_2 \frac{X_2^2}{2} - g(X_1) \right) \quad (17.7)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérivables arbitraires.

En déduire qu'il existe une fonction  $\Psi(X_1, X_2)$  permettant d'exprimer les contraintes de cisaillement sous la forme :

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} - a_1 \frac{X_1^2}{2} - f(X_2) \quad (17.8)$$

$$\sigma_{32} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} - a_2 \frac{X_2^2}{2} - g(X_1) \quad (17.9)$$

Montrer enfin que l'on peut choisir  $f$  et  $g$  de telle sorte que la fonction  $\Psi$  soit solution de l'équation

$$\Delta_2 \Psi = -2A \quad (17.10)$$

où  $A$  est une constante encore indéterminée.

Pour cela, on établira d'abord que les contraintes de cisaillement sont solutions des équations de Poisson :

$$\Delta \sigma_{31} + \frac{a_1}{1+\nu} = 0, \quad \Delta \sigma_{32} + \frac{a_2}{1+\nu} = 0 \quad (17.11)$$

La relation (17.6) est une conséquence de la première équation d'équilibre locale portant sur les contraintes, une fois que l'expression polynomiale (17.3) est prise en compte. La relation (17.7) s'en déduit. On considère alors la forme différentielle

$$\alpha(X_1, X_2) = a(X_1, X_2) dX_1 + b(X_1, X_2) dX_2$$

avec

$$a(X_1, X_2) = -\sigma_{32} - a_2 \frac{X_2^2}{2} - g(X_1), \quad b(X_1, X_2) = \sigma_{31} + a_1 \frac{X_1^2}{2} + f(X_2)$$

La relation (17.7) signifie que  $\partial a / \partial X_2 = \partial b / \partial X_1$ . Il s'ensuit que la forme différentielle  $\alpha$  est exacte. Il existe<sup>5</sup> donc une fonction  $\Psi(X_1, X_2)$  telle que  $\alpha = d\Psi$ . Les relations (17.8) et (17.9) s'en déduisent. Pour établir les équations de Poisson (17.11), on a recours aux deux équations de compatibilité (2.156) et (2.158) encore inexploitées qui fournissent :

$$(1 + \nu)\sigma_{23,12} = -\nu\sigma_{33,31} + (1 + \nu)\sigma_{13,22}, \quad (1 + \nu)\sigma_{13,12} = -\nu\sigma_{33,32} + (1 + \nu)\sigma_{23,11}$$

Les termes  $\sigma_{23,12}$  et  $\sigma_{13,12}$  peuvent être éliminés des deux équations précédentes en dérivant l'équation d'équilibre  $\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3}$  par rapport à  $X_1$  d'une part et par rapport à  $X_2$  d'autre part. Les équations (17.11) s'en déduisent.

La fonction de contrainte  $\Psi$  peut alors être substituée dans les équations de Poisson pour obtenir :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{13} &= \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} - a_1 - f''(X_2) = -\frac{a_1}{1 + \nu} \\ \Delta\sigma_{23} &= -\Delta \frac{\partial \Psi}{\partial X_1} - a_2 - g''(X_1) = -\frac{a_2}{1 + \nu} \end{aligned}$$

Le gradient du laplacien de  $\Psi$  peut être obtenu à partir des équations précédentes :

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \Delta \Psi = -g'' - \frac{\nu a_2}{1 + \nu}, \quad \frac{\partial}{\partial X_2} \Delta \Psi = f'' + \frac{\nu a_1}{1 + \nu}$$

Le choix

$$f(X_2) = -\frac{\nu a_1}{1 + \nu} \frac{X_2^2}{2}, \quad g(X_1) = -\frac{\nu a_2}{1 + \nu} \frac{X_1^2}{2}$$

implique que le gradient de  $\Delta \Psi$  est nul et que par conséquent le laplacien de  $\Psi$  est constant.

#### 17.1.4 Condition sur les surfaces latérales de la poutre

Le vecteur normal en tout point  $M \in \mathcal{A}$  a pour composantes  $[n_1, n_2, 0]$ . Le vecteur-contrainte en un tel point est donc

$$\underline{t} = (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2)\underline{e}_3$$

Il doit s'annuler car la surface  $\mathcal{A}$  est libre d'effort, ce qui fournit la condition :

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0 \quad (17.12)$$

qui indique que la contrainte tangentielle sur chaque section

$$\underline{\tau} = \sigma_{31}\underline{e}_1 + \sigma_{32}\underline{e}_2$$

est orthogonale à  $\underline{n}$ , i.e.  $\underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0$ . Cette propriété résulte de la propriété générique des états de contraintes étudiés au paragraphe 17.1.1.

Donner les valeurs que doit prendre la fonction de contrainte  $\Psi$  sur le bord  $\partial S$  de chaque section  $S$ .

Montrer ensuite que  $\Psi$  se décompose en la somme d'une fonction harmonique  $\Psi_1(X_1, X_2)$  et d'une fonction polynomiale par rapport aux variables  $X_1$  et  $X_2$ .

Formuler le problème de Dirichlet dont  $\Psi_1$  est la solution unique.

Montrer enfin que cette fonction de contrainte  $\Psi_1$  se met sous la forme

$$\Psi_1 = a_1\psi_1 - a_2\psi_2 + A\psi \quad (17.13)$$

où les fonctions  $\psi_1(X_1, X_2)$ ,  $\psi_2(X_1, X_2)$  et  $\psi(X_1, X_2)$  sont harmoniques et vérifient les conditions de Dirichlet :

$$\psi = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) + Cste, \quad d\psi_1 = \left(\frac{X_1^2}{2} - \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{X_2^2}{2}\right)dX_2, \quad d\psi_2 = \left(\frac{X_2^2}{2} - \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{X_1^2}{2}\right)dX_1 \quad (17.14)$$

5. En toute rigueur, le résultat est obtenu pour une section de poutre simplement connexe. La présence de trous au sein de la section ajoute des conditions sur les bords intérieurs des trous.

Interpréter les trois contributions ainsi introduites. On est donc amené à résoudre trois problèmes de Dirichlet distincts assurés d'une solution unique. La fonction harmonique  $\psi$  est d'ailleurs solution du même problème de Dirichlet (16.44) que la fonction de contrainte de torsion introduite dans le chapitre consacré à la torsion. Cette fonction de contrainte caractérise donc l'effet de torsion du problème de Saint-Venant. On y reviendra.

La condition au bord (17.12) s'exprime en fonction de  $\Psi$  et exige que

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} - a_1 \frac{X_1^2}{2} + \frac{\nu a_1}{1+\nu} \frac{X_2^2}{2} \right) n_1 - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial X_1} + a_2 \frac{X_2^2}{2} - \frac{\nu a_2}{1+\nu} \frac{X_1^2}{2} \right) n_2 = 0$$

Comme  $n_1$  et  $n_2$  sont respectivement proportionnels à  $dX_2/ds$  et  $-dX_1/ds$  où  $s$  désigne l'abscisse curviligne le long du contour  $\partial S$ , la condition précédente devient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial X_1} dX_1 = \left( a_1 \frac{X_1^2}{2} - \frac{\nu a_1}{1+\nu} \frac{X_2^2}{2} \right) dX_2 + \left( -a_2 \frac{X_2^2}{2} + \frac{\nu a_2}{1+\nu} \frac{X_1^2}{2} \right) dX_1$$

Le membre de gauche est la variation  $d\Psi$  le long de  $\partial S$ . Cette condition implique que

$$d\Psi(X_1, X_2) = a_1 \frac{X_1^2}{2} dX_2 - \frac{\nu a_1}{1+\nu} d \frac{X_2^3}{6} - a_2 \frac{X_2^2}{2} dX_1 + \frac{\nu a_2}{1+\nu} d \frac{X_1^3}{6}, \quad \forall \underline{X} \in \partial S \quad (17.15)$$

La constante qui apparaît lors de l'intégration n'a pas d'importance puisque sa valeur ne modifie pas les contraintes.

Cherchons alors une fonction harmonique  $\Psi_1$  et une fonction polynomiale  $h(X_1, X_2)$  telle que  $\Psi = \Psi_1 + h$ . Comme  $\Delta \Psi_1 = 0$ , on doit avoir  $\Delta h = -2A$  ce qui conduit au choix  $h(X_1, X_2) = -A(X_1^2 + X_2^2)/2$ . La fonction harmonique  $\psi_1$  est donc solution d'un problème de Dirichlet et elle doit prendre les valeurs obtenues en intégrant :

$$d\Psi_1(X_1, X_2) = a_1 \frac{X_1^2}{2} dX_2 - \frac{\nu a_1}{1+\nu} d \frac{X_2^3}{6} - a_2 \frac{X_2^2}{2} dX_1 + \frac{\nu a_2}{1+\nu} d \frac{X_1^3}{6} + \frac{A}{2} d(X_1^2 + X_2^2), \quad \forall \underline{X} \int \partial S \quad (17.16)$$

à une constante additive près. Cette condition aux limites incite à décomposer  $\Psi_1$  en trois fonctions harmoniques  $\psi_1, \psi_2, \psi$  prenant les valeurs (17.14) sur le contour  $\partial S$ .

Les deux premiers termes de la décomposition (17.13) mettent en valeur les contributions dues aux efforts tranchants  $T_1$  et  $T_2$  présents au travers des constantes  $a_1$  et  $a_2$ . Il reste à analyser la contribution proportionnelle à la constante  $A$  encore non précisée.

La fonction  $\psi$  est la fonction harmonique intervenant dans le problème de torsion étudié au paragraphe 16.2.4, cf. les conditions (16.44). La constante  $A$  apparaît donc liée au problème de torsion étudié dans la section suivante. Les fonctions harmoniques  $\psi_1$  et  $\psi_2$  caractérisent quant à elles les effets respectifs de l'application des effort tranchants  $T_1$  et  $T_2$ .

### 17.1.5 Centre de torsion

En utilisant une condition encore inexploitée, montrer que la constante  $A$  peut être déterminée et mise sous la forme :

$$A = \frac{M_3 + T_1 X_2^C - T_2 X_1^C}{J} \quad (17.17)$$

où  $X_1^C, X_2^C$  sont les coordonnées d'un point C appelé centre de torsion<sup>6</sup> de la section  $S_l$  :

$$X_1^C = \frac{1}{I_2} \int_{S_l} X_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_2} + \frac{X_2}{2} \left( \frac{\nu}{1+\nu} X_2^2 - X_1^2 \right) dS \quad (17.18)$$

$$X_2^C = \frac{1}{I_1} \int_{S_l} X_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial X_2} + \frac{X_1}{2} \left( \frac{\nu}{1+\nu} X_1^2 - X_2^2 \right) dS \quad (17.19)$$

6. ou centre de cisaillement dans de nombreux ouvrage.

Donner l'expression de  $J$  et son interprétation.

Même dans le cas où  $M_3 = 0$ , la constante  $A$  n'est en général pas nulle.

Imaginer des circonstances conduisant à  $A = 0$ .

La condition encore inexploitée concerne le moment de torsion induit par la distribution de contraintes de cisaillement sur la section  $S_l$  et donné par la troisième composante de l'équation (17.5) :

$$\int_{S_l} (\sigma_{23}X_1 - \sigma_{13}X_2) dS = M_3 \quad (17.20)$$

On rappelle que les contraintes de cisaillement trouvées sont de la forme

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} - a_1 \frac{X_1}{2} + \frac{\nu a_1}{1+\nu} \frac{X_2^2}{2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} - a_2 \frac{X_2}{2} + \frac{\nu a_2}{1+\nu} \frac{X_1^2}{2} \quad (17.21)$$

où  $\Psi = a_1\psi_1 - a_2\psi_2 + A\psi - A(X_1^2 + X_2^2)/2$ .

Noter que les fonctions harmoniques  $\psi_1, \psi_2, \psi$  solutions des problèmes de Dirichlet définis dans la section précédente ne dépendent pas de  $A$ . La substitution de ces relations dans la condition de moment de torsion (17.20) conduit à l'équation

$$JA - T_1X_2^C + T_2X_1^C = M_3$$

où

$$J = \int_{S_l} (X_1^2 + X_2^2 - X_1 \frac{\partial \psi}{\partial X_1} - X_2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2}) dS$$

On reconnaît le moment d'inertie de torsion (16.45) introduit dans le chapitre consacré à la torsion. La constante  $A$  caractérise donc la torsion induite non seulement par le moment  $M_3$  mais également par les efforts tranchants.

Les facteurs de  $T_2$  et  $-T_1$  s'interprètent comme les coordonnées d'un point  $C$  données par les relations (17.18) et (17.19). La signification mécanique de ce point apparaît lorsque l'on calcul le moment résultant sur la section  $S_l$  par rapport à ce point :

$$\underline{\mathbf{M}}_l^C = \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{G}}_l \wedge \underline{\mathbf{R}}_l + \underline{\mathbf{M}}$$

La troisième composante de ce moment par rapport à  $C$  intervient la relation (17.17) sous la forme :

$$M_{l3}^C = M_3 + T_1X_2^C - T_2X_1^C$$

La constante  $A$  est donc le rapport entre le moment de torsion par rapport au point  $C$  et le moment d'inertie de torsion  $J$ . Cela justifie la dénomination de centre de torsion pour le point  $C$ .

On voit que l'application d'une traction  $N$  et/ou de flexion  $M_1, M_2$  n'entraîne aucune torsion de la poutre quelque que soit la géométrie de la section. Par contre, dans le cas d'un effort tranchant  $T_1$  appliqué suivant un axe d'inertie de la section (avec  $\underline{\mathbf{M}} = 0$  et  $N = T_2 = 0$ ), l'effet de torsion induite n'est en général pas nul. Le centre de torsion  $C$  est alors situé sur l'axe 1 comme on le voit.

## 17.2 Poutre droite de section quelconque soumise à un effort tranchant

Dans cette section, on étudie dans le détail le cas particulier du problème de Saint-Venant précédent obtenu en se limitant à l'application d'un effort tranchant.

On considère une poutre cylindrique  $\Omega$  de longueur  $L$  et de section droite<sup>7</sup> courante  $S$  de forme *a priori* quelconque. Les frontières de  $\Omega$  sont ses extrémités, à savoir les sections  $S_0$  et  $S_L$ , et le contour latéral  $\mathcal{A}$ , de sorte que  $\partial\Omega = S_0 \cup \mathcal{A} \cup S_L$ . Les barycentres des sections  $S_0$  et  $S_L$  sont respectivement les

7. Une section droite désigne une section perpendiculaire à l'axe du cylindre.

points  $O$  et  $G_L$ . L'axe 1 du système de coordonnées cartésiennes orthonormées utilisé dans ce problème désigne l'axe du cylindre unissant les barycentres de toutes les sections, comme sur la figure 17.2. Les axes 2 et 3 sont choisis parallèles aux directions principales d'inertie des sections droites :

$$\int_S X_2 dS = \int_S X_3 dS = \int_S X_2 X_3 dS = 0$$

Les moments quadratiques principaux des sections sont notés :

$$I_3 = \int_S X_2^2 dS, \quad I_2 = \int_S X_3^2 dS$$

Soit  $R$  une dimension caractéristique de la section, par exemple la plus grande demi-distance entre deux points quelconques de la section.

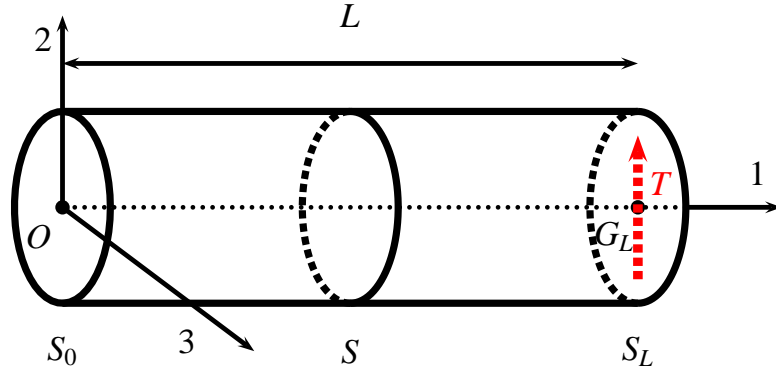


FIGURE 17.2 – Géométrie de la poutre étudiée ainsi que la charge  $T$  appliquée à l'extrémité  $S_L$ .

La section  $S_L$  de la poutre est soumise à des efforts dont le torseur résultant est

$$\{G_L, \underline{R}_L, \underline{M}_L\} = \{G_L, T\mathbf{e}_2, 0\}$$

où  $T$  désigne l'effort résultant tangentiel appliqué sur  $S_L$  et traditionnellement appelé effort tranchant. Les surfaces latérales  $\mathcal{A}$  sont libres de tout effort appliqué.

Calculer le torseur  $\{O, \underline{R}_0, \underline{M}_0\}$  des efforts à appliquer à la section  $S_0$  pour que la poutre soumise à l'effort tranchant précédent soit en équilibre statique.

L'équilibre statique exige que torseur des efforts appliqués à la structure dans son ensemble soit nul, ce qui implique

$$\underline{R}_0 = -\underline{R}_L = -T\mathbf{e}_2, \quad \underline{M}_0 = \underline{OG}_L \wedge \underline{R}_0 - \underline{M}_L = -LT\mathbf{e}_3$$

Il apparaît qu'il est nécessaire d'appliquer un moment  $-LT$  sur la section  $S_0$  pour contrecarrer le moment créé par rapport au point  $O$  par l'effort tranchant appliqué en  $S_L$ .

L'essai consistant à appliquer un tel effort tranchant à une poutre s'appelle flexion simple, par opposition à la flexion pure étudiée au chapitre 8.2.2 du cours.

En l'état, le problème aux limites considéré est mal posé dans la mesure où seul le torseur des efforts appliqués aux extrémités est donné. Lorsque la poutre est suffisamment élancée, i.e.  $R/L \ll 1$ , le principe de Saint-Venant permet d'affirmer que la solution du problème ne dépend pratiquement pas de la façon dont ces efforts sont appliqués sur  $S_0$  et  $S_L$ . L'objectif du problème est donc, d'une part, de proposer une distribution surfacique d'efforts permettant de réaliser les torseurs appliqués  $\{O, \underline{R}_0, \underline{M}_0\}$  et  $\{G_L, \underline{R}_L, \underline{M}_L\}$ , et, d'autre part, de résoudre le problème d'équilibre élastique linéarisé bien posé correspondant.

La poutre, initialement dans son état naturel, est constituée d'un matériau homogène de comportement élastique isotrope linéaire. Le module de Young et le coefficient de Poisson sont notés  $E$  et  $\nu$  respectivement. Dans l'ensemble du problème, on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. L'effet de la gravité ou d'efforts volumiques en général n'est pas pris en compte. La situation envisagée est isotherme et on ne considère pas les variations de température durant l'essai.



### 17.2.1 Contraintes dans la poutre en flexion simple

Nous allons mettre en œuvre la méthode des contraintes pour résoudre le problème de la flexion simple. Le tenseur des contraintes est recherché de la forme

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17.22)$$

#### Dépendance des fonctions inconnues

Les composantes des contraintes de la forme (17.22) sont a priori des fonctions des variables  $X_1, X_2, X_3$ . Montrer toutefois que les composantes de cisaillement  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$  ne peuvent pas dépendre de  $X_1$ .

En l'absence de forces de volume et dans le cas statique, les conditions d'équilibre local exigent que la divergence du tenseur des contraintes s'annule en tout point de l'intérieur de  $\Omega$ . En particulier, les conditions

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0, \quad \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0$$

appliquées à la forme proposée (17.22) excluent la dépendance en  $X_1$  des composantes de cisaillement.

#### Forme des contraintes

Calculer le champ du tenseur des déformations régnant dans la poutre en fonction des composantes de contraintes inconnues.

En déduire que la composante axiale de contrainte est de la forme polynomiale suivante :

$$\sigma_{11} = a_1 X_1 X_2 + a_2 X_1 X_3 + a_3 X_1 + a_4 X_2 + a_5 X_3 + a_6 \quad (17.23)$$

où les  $(a_i)_{i=1,6}$  sont six constantes que l'on déterminera dans la suite.

Montrer également que les contraintes de cisaillement sont solutions des deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\Delta_2 \sigma_{12} + \frac{a_1}{1+\nu} = 0, \quad \Delta_2 \sigma_{13} + \frac{a_2}{1+\nu} = 0 \quad (17.24)$$

où  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2}$  est l'opérateur laplacien bidimensionnel dans le plan  $(2, 3)$  des sections droites de la poutre.

La loi d'élasticité isotrope linéarisée par rapport à l'état naturel fournit

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & (1+\nu)\sigma_{12} & (1+\nu)\sigma_{13} \\ (1+\nu)\sigma_{12} & -\nu\sigma_{11} & 0 \\ (1+\nu)\sigma_{13} & 0 & -\nu\sigma_{11} \end{bmatrix} \quad (17.25)$$

La dérivée par rapport à  $X_1$  de l'équation d'équilibre local encore inexploitée fournit

$$\sigma_{11,11} + \sigma_{12,21} + \sigma_{13,31} = \sigma_{11,11} = 0$$

Les équations de compatibilité portant sur les composantes des déformations conduisent aux conditions suivantes sur les composantes des contraintes

$$\sigma_{11,22} = 0, \quad \sigma_{11,33} = 0, \quad \sigma_{11,23} = 0$$

Ces trois conditions conduisent à la forme (17.23).

Les deux conditions de compatibilité non encore exploitées exigent que

$$(1+\nu)\sigma_{12,23} - (1+\nu)\sigma_{31,22} + \nu a_2 = 0, \quad (1+\nu)\sigma_{13,23} - (1+\nu)\sigma_{12,33} + \nu a_1 = 0$$

Or, les dérivées de la première équation d'équilibre par rapport à  $X_2$  et  $X_3$  indiquent que :

$$\sigma_{12,23} = -\sigma_{13,33} - a_2, \quad \sigma_{13,23} = -\sigma_{12,22} - a_1$$

La combinaison de ces résultats conduit aux équations de Poisson (17.24).

### Détermination des contraintes de cisaillement

Montrer que

$$a_1 X_2 + a_2 X_3 + a_3 + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \quad (17.26)$$

et, par conséquent, que

$$\frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{a_3}{2} X_2 + a_2 X_2 X_3 + \sigma_{12} + f(X_3) \right) = \frac{\partial}{\partial X_3} \left( -\frac{a_3}{2} X_3 - a_1 X_2 X_3 - \sigma_{13} - g(X_2) \right) \quad (17.27)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérivables arbitraires.

En déduire qu'il existe une fonction  $\psi(X_2, X_3)$  permettant d'exprimer les contraintes de cisaillement sous la forme :

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - \frac{a_3}{2} X_2 - a_2 X_2 X_3 - f(X_3) \quad (17.28)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial X_2} - \frac{a_3}{2} X_3 - a_1 X_2 X_3 - g(X_2) \quad (17.29)$$

Montrer enfin que l'on peut choisir  $f$  et  $g$  de telle sorte que la fonction  $\psi$  soit solution de l'équation

$$\Delta_2 \psi = A \quad (17.30)$$

où  $A$  est une constante encore indéterminée.

La relation (17.26) est une conséquence de la première équation d'équilibre locale portant sur les contraintes, une fois que l'expression polynomiale (17.3) est prise en compte. La relation (17.27) s'en déduit. On considère alors la forme différentielle

$$\alpha(X_2, X_3) = b(X_2, X_3) dX_2 + a(X_2, X_3) dX_3$$

avec

$$a(X_2, X_3) = \frac{a_3}{2} X_2 + a_2 X_2 X_3 + \sigma_{12} + f(X_3), \quad b(X_2, X_3) = -\frac{a_3}{2} X_3 - a_1 X_2 X_3 - \sigma_{13} - g(X_2)$$

La relation (17.27) signifie que  $\partial b / \partial X_3 = \partial a / \partial X_2$ . Il s'ensuit que la forme différentielle  $\alpha$  est exacte. Il existe<sup>8</sup> donc une fonction  $\psi(X_2, X_3)$  telle que  $\alpha = d\psi$ . Les relations (17.28) et (17.29) s'en déduisent. On utilise ensuite le fait que les contraintes de cisaillement vérifient les équations de Poisson (17.24) :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \sigma_{12} &= \frac{\partial}{\partial X_3} \Delta_2 \psi - f'''(X_3) = -\frac{a_1}{1+\nu} \\ \Delta_2 \sigma_{13} &= -\frac{\partial}{\partial X_2} \Delta_2 \psi - g''(X_2) = -\frac{a_2}{1+\nu} \end{aligned}$$

Le choix

$$f(X_3) = \frac{a_1}{1+\nu} \frac{X_3^2}{2}, \quad g(X_2) = \frac{a_2}{1+\nu} \frac{X_2^2}{2}$$

implique que le gradient de  $\Delta_2 \psi$  est nul et que par conséquent le laplacien de  $\psi$  est constant.

---

8. En toute rigueur, le résultat est obtenu pour une section de poutre simplement connexe. La présence de trous au sein de la section ajoute des conditions sur les bords intérieurs des trous.

### Forces et moments résultants

Montrer que l'on peut déterminer les constantes du polynôme (17.3) en fonction des conditions de chargement de la poutre :

$$\begin{aligned} a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 0 \\ a_1 = \frac{T}{I_3}, \quad a_4 = -\frac{LT}{I_3} \end{aligned}$$

Le champ des contraintes prend ainsi la forme

$$\sigma_{11} = \frac{T}{I_3} X_2 (X_1 - L), \quad \sigma_{12} = \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - \frac{a_1}{1+\nu} \frac{X_3^2}{2}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial X_2} - a_1 X_2 X_3 \quad (17.31)$$

La forme des contraintes normales  $\sigma_{11}$  évoque les contraintes établies dans le cas de la flexion pure mais avec un moment variable  $T(X_1 - L)$  dépendant de la position  $X_1$ . C'est ainsi que l'application d'un effort tranchant s'accompagne nécessairement d'une composante de flexion, ce qui justifie la dénomination de flexion simple également attachée à cet essai.

Les forces résultantes normales aux sections  $S_0$  et  $S_L$  sont nulles :

$$\int_{S_0} \sigma_{11} dS = a_6 S = 0, \quad \int_{S_L} \sigma_{11} dS = a_3 L S + a_6 S = 0$$

C'est pourquoi  $a_3 = a_6 = 0$ .

On calcule ensuite le moment résultant sur la surface  $S_L$  :

$$\underline{\underline{M}}_L = \int_{S_L} \underline{\underline{G}}_L \underline{\underline{M}} \wedge (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_1) dS = \begin{bmatrix} \int_{S_L} X_2 \sigma_{13} - X_3 \sigma_{12} dS \\ \int_{S_L} X_3 \sigma_{11} dS \\ \int_{S_L} -X_2 \sigma_{11} dS \end{bmatrix} = 0$$

Les moments par rapport aux axes 2 et 3 sont nuls ce qui conduit à

$$a_2 L I_2 + a_5 I_2 = 0, \quad a_1 L I_3 + a_4 I_3 = 0$$

Le moment résultant sur la face  $S_0$  vaut ensuite

$$\underline{\underline{M}}_O = \int_{S_0} \underline{\underline{O}} \underline{\underline{M}} \wedge (\underline{\underline{\sigma}} \cdot (-\underline{\underline{e}}_1)) dS = \begin{bmatrix} \int_{S_0} -X_2 \sigma_{13} + X_3 \sigma_{12} dS \\ \int_{S_0} -X_3 \sigma_{11} dS \\ \int_{S_0} X_2 \sigma_{11} dS \end{bmatrix} = -LT \underline{\underline{e}}_3$$

ce qui permet de déterminer  $a_5 I_2 = 0$ ,  $a_4 I_3 = -LT$  et finalement  $a_2 = 0$  et  $a_1 = T/I_3$ .

### Condition sur les surfaces latérales de la poutre

Ecrire la condition qui lie les contraintes en tout point du bord  $\mathcal{A}$  de la poutre. Interpréter cette relation en introduisant la contrainte tangentielle

$$\underline{\underline{\tau}} = \sigma_{12} \underline{\underline{e}}_2 + \sigma_{13} \underline{\underline{e}}_3$$

A ce stade, on ne cherchera pas à exploiter cette condition.

Le vecteur normal en tout point  $M \in \mathcal{A}$  a pour composantes  $[0, n_2, n_3]$ . Le vecteur-contrainte en un tel point est donc

$$\underline{\underline{t}} = (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3) \underline{\underline{e}}_1$$

Il doit s'annuler car la surface  $\mathcal{A}$  est libre d'effort, ce qui fournit la condition :

$$\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \quad (17.32)$$

qui indique que la contrainte tangentielle  $\underline{\underline{\tau}}$  est orthogonale à  $\underline{\underline{n}}$ , ou, autrement dit, qu'elle doit être tangente au contour extérieur de chaque section de la poutre.

### 17.2.2 Détermination des déplacements

La méthode systématique de construction du champ de déplacement à partir du champ de déformation établi dans la partie précédente est maintenant mise en œuvre. Montrer ainsi, au terme d'un travail méticuleux, que le champ de déplacement prend la forme

$$u_1 = \frac{a_1}{E} X_2 \left( \frac{X_1^2}{2} - L X_1 + \nu \frac{X_2^2}{6} - (2 + \nu) \frac{X_3^2}{2} \right) + \frac{1 + \nu}{E} \varphi(X_2, X_3) \quad (17.33)$$

$$u_2 = \frac{a_1}{E} \left( \frac{X_1^2}{2} \left( L - \frac{X_1}{3} \right) + \frac{\nu}{2} (X_1 - L) (X_3^2 - X_2^2) \right) + \frac{1 + \nu}{E} A X_1 X_3 \quad (17.34)$$

$$u_3 = a_1 \frac{\nu}{E} (L - X_1) X_2 X_3 - \frac{1 + \nu}{E} A X_1 X_2 \quad (17.35)$$

à un mouvement de corps rigide infinitésimal près. La composante  $u_1$ , engendrée par la flexion, fait intervenir la fonction  $\varphi(X_2, X_3)$ , solution, à une constante près, du système d'équations

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - A X_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}, \quad -2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2} + A X_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} \quad (17.36)$$

Justifier l'existence de cette fonction  $\varphi$ .

On rappelle que les composantes non nulles du tenseur des déformations infinitésimales sont

$$\begin{aligned} E \varepsilon_{11} &= a_1 X_2 (X_1 - L), & E \varepsilon_{22} &= E \varepsilon_{33} = -\nu a_1 X_2 (X_1 - L) \\ E \varepsilon_{12} &= (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - a_1 \frac{X_3^2}{2}, & E \varepsilon_{13} &= -(1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial X_2} - a_1 (1 + \nu) X_2 X_3 \end{aligned}$$

La méthode systématique de construction des déplacements en coordonnées cartésiennes consiste à calculer le gradient des rotations infinitésimales qui s'exprime en fonction du gradient des déformations :

$$\omega_{12,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{12,1}, \quad \omega_{12,2} = \varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1}, \quad \omega_{12,3} = \varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1}$$

dont on déduit la composante de rotation par rapport à l'axe 3 :

$$\omega_{12} = \frac{a_1}{E} \left( X_1 \left( \frac{X_1}{2} - L \right) + \nu \frac{X_2^2}{2} - (1 + \nu) \frac{X_3^2}{2} \right) + \frac{1 + \nu}{E} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - A X_3 \right)$$

Au passage, on a utilisé le fait que le laplacien de  $\psi$  est égal à la constante  $A$ . De même,

$$\begin{aligned} \omega_{23,1} &= \varepsilon_{21,3} - \varepsilon_{31,2}, & \omega_{23,2} &= 0, & \omega_{23,3} &= -\varepsilon_{33,2} \\ \omega_{31,1} &= 0, & \omega_{31,2} &= \varepsilon_{32,1} - \varepsilon_{12,3}, & \omega_{31,3} &= \varepsilon_{33,1} - \varepsilon_{13,3} \end{aligned}$$

si bien que

$$\omega_{23} = a_1 \frac{\nu}{E} (X_1 - L) X_3 + \frac{1 + \nu}{E} A X_1, \quad \omega_{31} = \frac{a_1}{E} X_2 X_3 + \frac{1 + \nu}{E} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X_2} - A X_2 \right) \quad (17.37)$$

Le gradient du déplacement est la somme des déformations et des rotations infinitésimales :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \varepsilon_{11} = \frac{a_1}{E} X_2 (X_1 - L) \\ u_{1,2} &= \varepsilon_{12} + \omega_{12} = \frac{a_1}{E} \left( \frac{X_1^2}{2} - L X_1 + \nu \frac{X_2^2}{2} - (2 + \nu) \frac{X_3^2}{2} \right) + \frac{1 + \nu}{E} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - A X_3 \right) \\ u_{1,3} &= \varepsilon_{13} + \omega_{13} = -(2 + \nu) \frac{a_1}{E} X_2 X_3 - \frac{1 + \nu}{E} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2} - A X_2 \right) \end{aligned} \quad (17.38)$$

En vue d'intégrer les équations précédentes, on peut remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial X_3} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - AX_3 \right) = \frac{\partial}{\partial X_2} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2} + AX_2 \right)$$

en tenant compte du fait que le laplacien de  $\psi$  vaut  $A$ . Dans le cas d'une section simplement connexe, il existe donc une fonction  $\varphi$  vérifiant les conditions (17.36). Cette fonction permet alors d'intégrer les équations précédentes et d'obtenir la fonction  $u_1(X_1, X_2, X_3)$ .

Le calcul de  $u_2$  et  $u_3$  est plus simple car il ne fait pas intervenir la fonction  $\varphi$  mais doit être fait soigneusement pour aboutir aux expressions annoncées.

### Fonction de gauchissement

La fonction  $\varphi$  est appelée fonction de gauchissement. Montrer qu'elle est solution d'un problème de Neumann posé sur une section  $S$  de contour  $\partial S$ , que l'on explicitera.

Vérifier que la condition nécessaire d'existence d'une solution au problème de Neumann ainsi posé est remplie. On admettra alors qu'une telle solution existe et est unique, à une constante près.

On vérifie d'abord que les relations (17.36) impliquent que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_3 \partial X_2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2 \partial X_3} = 0$$

Les contraintes de cisaillement doivent également satisfaire la condition (17.32) sur le bord  $\partial S$  de la section :

$$\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = \frac{\partial \psi}{\partial X_3}n_2 - \frac{\partial \psi}{\partial X_2}n_3 - \frac{a_1}{1+\nu} \frac{X_3^2}{2}n_2 - a_1X_2X_3n_3 = 0 \quad (17.39)$$

En tenant compte des relations (17.36) liant les fonctions  $\psi$  et  $\varphi$ , on obtient la condition au bord :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_2}n_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial X_3}n_3 = \text{Grad } \varphi \cdot \underline{n} = \left( \frac{a_1}{1+\nu} X_3^2 - AX_3 \right) n_2 + (2a_1X_2X_3 + AX_2)n_3 =: q^d(X_2, X_3) \quad (17.40)$$

Il s'agit donc d'une condition de flux du gradient de  $\varphi$  imposé au bord à la valeur  $q^d$ . Comme on l'a vu au début du chapitre consacré à la torsion d'une barre cylindrique, une condition nécessaire d'existence d'une solution du problème de Poisson  $\Delta_2 \varphi = 0$  avec la condition de bord (17.40) est que la circulation de  $q^d$  le long de  $\partial S$  soit nulle. On pose :

$$P = -(2a_1X_2X_3 + AX_2), \quad Q = \frac{a_1}{1+\nu} X_3^2 - AX_3$$

On calcule alors la circulation de  $q^d$  le long du contour  $\partial S$  grâce à la formule de Green :

$$\int_{\partial S} q^d dl = \int_{\partial S} QdX_3 + PdX_2 = \int_S \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} - \frac{\partial P}{\partial X_3} \right) dX_2 dX_3 = \int_S 2a_1X_2 dX_2 dX_3 = 0$$

La condition nécessaire d'existence de la solution du problème de Neumann ainsi posé est bel et bien remplie.

### Détermination de la constante $A$

À l'aide d'une condition encore inexploitée jusqu'ici, établir l'équation permettant de déterminer la constante  $A$  apparue dans la formule (17.30).

Montrer que si la section  $S$  admet l'axe 2 comme axe de symétrie, alors la constante  $A$  est nulle. On admettra ce résultat si l'on n'a pu l'établir.

Un autre effet concomitant de l'application d'un effort tranchant à une poutre est une possible torsion de la poutre. L'effet de torsion est particulièrement lisible sur les composantes de déplacement  $u_2$  et  $u_3$

au travers des termes proportionnels à  $A$  avec les monomes  $X_1X_2$  et  $X_1X_3$ , similaires à ceux trouvés dans l'étude de la torsion d'une barre de section quelconque.

Dans le cas présent, les moments de torsion  $M_1$  appliqués aux sections  $S_0$  et  $S_L$  sont nuls, ce qui se traduit par la condition :

$$\int_{S_0} (X_2\sigma_{13} - X_3\sigma_{12})dX_2dX_3 = 0$$

condition apparue au paragraphe 17.2.1 mais non exploitée jusqu'ici. En introduisant les expressions (17.31) des contraintes et en tenant compte de (17.36), la condition suivante est obtenue :

$$\int_{S_0} (X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} - X_3 \frac{\partial \varphi}{\partial X_2})dS - A(I_2 + I_3) + \int_{S_0} \frac{a_1}{1+\nu} X_3^3 dS = 0 \quad (17.41)$$

La première intégrale peut se transformer de la manière suivante grâce à la formule de Green :

$$\int_{S_0} (\frac{\partial}{\partial X_3}(X_2\varphi) - \frac{\partial}{\partial X_2}(X_3\varphi))dS = - \int_{\partial S_0} \varphi(X_3dX_2 + X_2dX_3)$$

Cette intégrale est invariante si l'on ajoute une constante à  $\varphi$ , comme il se doit. L'évaluation de cette intégrale requiert la connaissance de  $\varphi$  assujettie à la connaissance de la géométrie de la section. Toutefois, on peut affirmer qu'elle dépend linéairement de  $A$  car le problème de Neumann considéré est linéaire par rapport à la constante imposée  $A$ . Il s'ensuit que l'équation (17.41) permet de déterminer  $A$  sans ambiguïté.

On en conclut que l'application d'un effort tranchant sur une poutre de section quelconque s'accompagne d'une torsion de la poutre en raison du couplage ainsi mis en évidence.

Lorsque la surface est invariante par la symétrie axiale  $X_3 \rightarrow -X_3$ , l'intégrale  $\int_{S_0} X_3^3 dX_2dX_3$  s'annule et, par conséquent, la constante  $A$  est nulle aussi. Torsion et flexion simple sont alors découplées.

### 17.2.3 Cas d'une poutre de section circulaire

Les résultats précédents sont maintenant explicités dans le cas d'une poutre en forme de cylindre de révolution. La section de la poutre correspond alors à un disque de rayon  $R$ .

### 17.2.4 Fonction de gauchissement pour une section circulaire

Dans le cas d'une section circulaire, la fonction  $\varphi$  prend la forme polynomiale suivante que l'on admettra<sup>9</sup> :

$$\varphi(X_2, X_3) = a_1 \frac{3+2\nu}{4(1+\nu)} (X_3^2 X_2 - \frac{X_2^3}{3} + R^2 X_2) \quad (17.42)$$

Vérifier qu'il s'agit bel et bien de la solution, à une constante près, du problème de Neumann posé au paragraphe 17.2.2.

Comme la section circulaire présente une symétrie centrale, la constante  $A$  est nulle d'après les résultats du paragraphe 17.2.2. On trouve alors effectivement que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2} = -a_1 \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)} X_2 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_3^2} \implies \Delta \varphi = 0$$

Dans le cas circulaire, le système de coordonnées cylindriques devient avantageux :

$$X_2 = r \cos \theta, \quad X_3 = r \sin \theta, \quad \underline{n} = [0 \quad \cos \theta \quad \sin \theta]^T, \quad 0 \leq r \leq R, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

où  $\underline{n}$  est la normale à la surface latérale  $\mathcal{A}$ . Nous allons vérifier que la condition de bord (17.40) est satisfaite. Pour cela, on voit d'une part que

$$\frac{a_1}{1+\nu} X_3^2 n_2 + 2a_1 X_2 X_3 n_3 = a_1 \frac{3+2\nu}{1+\nu} R^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

9. De manière équivalente, on a  $\psi(X_2, X_3) = a_1 \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} (\frac{X_3^3}{3} - X_3 X_2 + R^2 X_3)$ .

et d'autre part que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} R^2 \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} R^2 \sin \theta = a_1 \frac{3 + 2\nu}{1 + \nu} R^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

### Etude du contexte infinitésimal

Dans le cas d'une section circulaire, les champs de déplacements (17.33) à (17.35) prennent la forme suivante :

$$u_1 = \frac{a_1}{E} X_2 \left( X_1 \left( \frac{X_1}{2} - L \right) - \frac{1}{4} (X_2^2 + X_3^2) + \frac{1 + 2\nu}{4} R^2 \right) \quad (17.43)$$

$$u_2 = \frac{a_1}{E} \left( \frac{X_1^2}{2} \left( L - \frac{X_1}{3} \right) + \frac{\nu}{2} (X_1 - L) (X_3^2 - X_2^2) \right) \quad (17.44)$$

$$u_3 = a_1 \frac{\nu}{E} (L - X_1) X_2 X_3 \quad (17.45)$$

Donner les conditions portant sur  $T, E, R$  et  $L$  garantissant que les transformations obtenues restent infinitésimales. En notant  $\epsilon = R/L \ll 1$  l'élancement de la poutre, identifier quelle est la condition la plus sévère ?

Calculons d'abord le moment quadratique pour une section circulaire :

$$I_3 = I_2 = \frac{\pi R^4}{4}$$

Les composantes du gradient du champ des déplacements doivent rester suffisamment petites. En particulier, la solution proposée est licite à condition que :

$$|u_{1,1}| = \left| \frac{a_1}{E} X_2 (X_1 - L) \right| \leq \left| \frac{a_1}{E} R L \right| \sim \frac{|T|}{ER^2} \frac{L}{R} \ll 1$$

$$|u_{1,3}| = \left| \frac{a_1}{E} X_2 X_3 \right| \leq \left| \frac{a_1}{E} R^2 \right| \sim \frac{|T|}{ER^2} \ll 1$$

Une condition supplémentaire est obtenue en exigeant que

$$|u_{1,2}| \ll 1 \implies \left| \frac{a_1}{E} L^2 \right| \sim \frac{|T|}{ER^2} \frac{L^2}{R^2} \ll 1$$

L'analyse des autres composantes n'apporte pas de nouvelle restriction. En remarquant que l'élancement  $R/L = \epsilon$  doit être suffisamment petit pour que le principe de Saint-Venant puisse s'appliquer, les trois conditions précédentes peuvent être réécrites respectivement sous la forme :

$$\frac{|T|}{ER^2} \ll \epsilon, \quad \frac{|T|}{ER^2} \ll 1, \quad \frac{|T|}{ER^2} \ll \epsilon^2$$

où il apparaît que c'est la dernière condition qui est la plus contraignante. Par exemple, si l'élancement est de 0.1, l'effort tranchant appliqué devra être plus petit qu'un centième de la force  $ER^2$ . Le fait que le module de Young soit 100 à 1000 fois plus grand que les contraintes typiques supportées par les matériaux laisse une marge de pertinence respectable à la solution obtenue dans l'hypothèse des petites perturbations.

### Déformée de la fibre moyenne et gauchissement de la section

Quelle forme prend la fibre moyenne initialement située en  $X_2 = X_3 = 0$  ?

Montrer que les sections droites ne restent pas planes après déformation. Pour cela on pourra étudier la déformée de la ligne d'équation  $X_1 = X_0, X_3 = 0$  à  $X_0$  fixé. On appelle gauchissement de la surface cet écart à la planéité que l'on illustrera graphiquement.

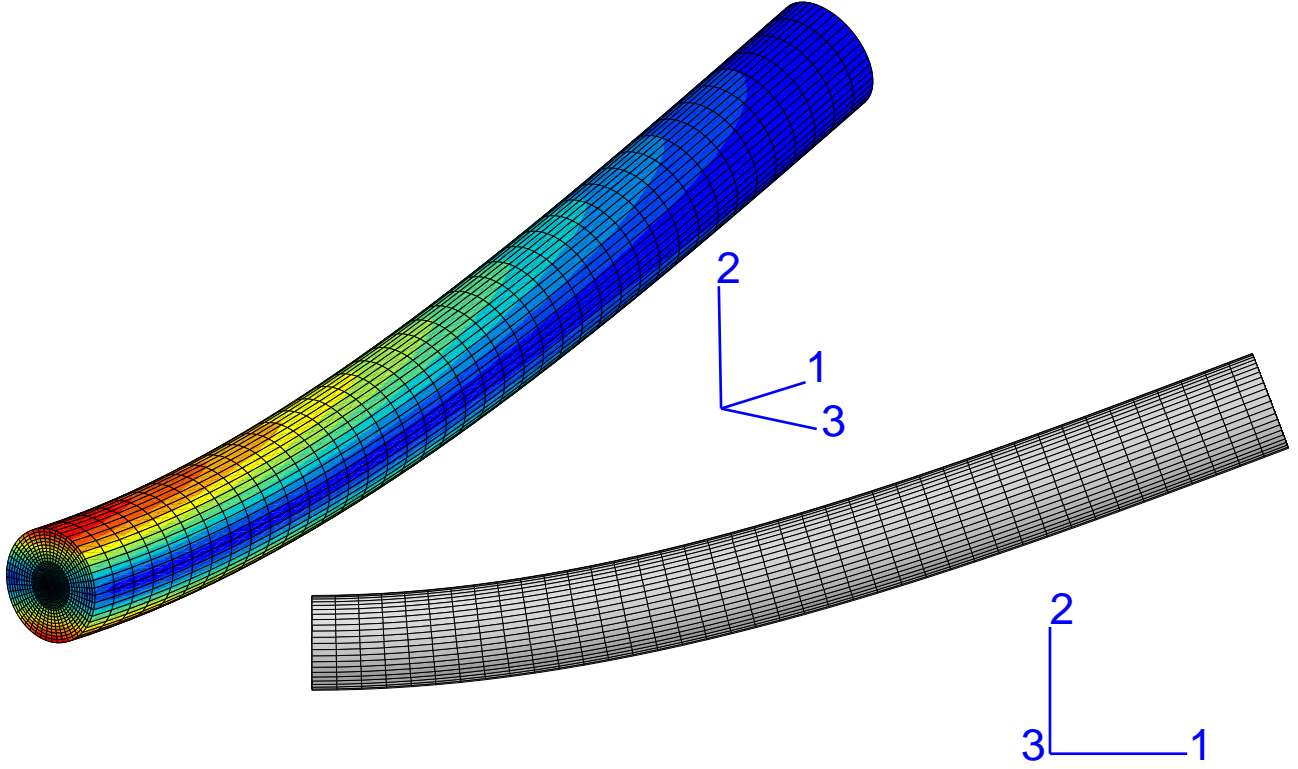


FIGURE 17.3 – Poutre de section circulaire encastrée d'un côté et soumise à une effort tranchant de l'autre : vue 3D montrant également le champ de contrainte équivalente de von Mises (valeurs presque nulles en bleu, et maximales en rouge), et vue de profil. L'élancement de la poutre est  $R/L = 0.05$ .

La nouvelle position d'un point de la fibre moyenne est donnée par

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = -\frac{a_1}{E} \frac{X_1^2}{2} \left( \frac{X_1}{3} - L \right), \quad x_3 = 0$$

Le nouveau lieu des points de la ligne moyenne a donc pour équation :

$$x_2 = -\frac{a_1}{E} \left( \frac{x_1^3}{6} - \frac{L}{2} x_1^2 \right)$$

Cette forme combine la forme parabolique due à la flexion induite par l'effort tranchant et un terme de degré 3 caractéristique de la flexion simple. La déformée de la poutre est illustrée en 3D sur la figure 17.3.

Les points de la ligne d'équation  $X_1 = X_0, X_3 = 0$  adoptent la nouvelle position

$$x_1 = X_0 + \frac{a_1}{E} \left( \left( \frac{X_0^2}{2} - LX_1 \right) X_2 - \frac{1}{4} (X_2^3 + (1 + 2\nu) R^2 X_2) \right)$$

$$x_2 = X_2 + \frac{a_1}{E} \left( L \frac{X_0^2}{2} - \frac{X_0^3}{6} - \frac{\nu}{2} (X_0 - L) X_2^2 \right), \quad x_3 = 0$$

Au premier ordre, l'équation de la ligne transformée est

$$x_1 = X_0 + x_2 \frac{a_1}{E} \left( \frac{X_0^2}{2} - LX_0 + \frac{1 + 2\nu}{4} R^2 \right) - \frac{x_2^3}{4}$$

La contribution en  $X_2^3$  représente l'écart à la planéité.



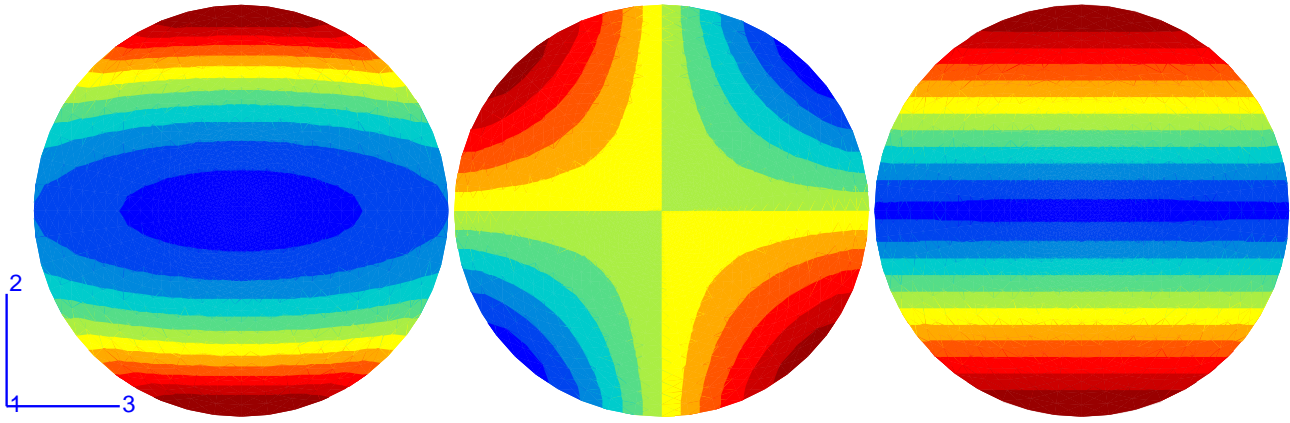


FIGURE 17.4 – Champs de contrainte  $\sigma_{12}$  (à gauche),  $\sigma_{13}$  (au milieu) et de la contrainte équivalente de von Mises (à droite), dans une section droite située au milieu de la poutre. Les contraintes de cisaillement ne dépendent pas du choix de la section. Les valeurs minimales et maximales sont respectivement bleues et rouges.

### Analyse des contraintes et limite d'élasticité

En tout point de chaque section droite, donner l'expression de la contrainte normale à cette section. A quel(s) endroit(s) la valeur absolue de cette contrainte normale est-elle maximale? Quelle est la valeur de ce maximum en fonction de  $|T|$  et de la géométrie de la poutre.

Montrer que la norme de la contrainte tangentielle  $\|\underline{\tau}\|$  est maximale au centre de chaque section et prend la valeur :

$$\|\underline{\tau}\|_{max} = |a_1| \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} R^2 = \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)} \frac{|T|}{\pi R^2} \quad (17.46)$$

Indiquer quelle est, de la contrainte normale maximale et du cisaillement maximal, la contrainte dominante.

On suppose que la limite d'élasticité du matériau constitutif de la poutre est bien décrite par un critère de von Mises. Indiquer, qualitativement, à quel endroit de la poutre la plasticité va apparaître en tout premier lieu.

Dans le cas de la section circulaire, les contraintes prennent la forme :

$$\sigma_{11} = a_1(X_1 - L)X_2 \quad (17.47)$$

$$\sigma_{12} = a_1 \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} (X_3^2 - X_2^2 + R^2) - \frac{a_1}{1+\nu} \frac{X_3^2}{2} \quad (17.48)$$

$$\sigma_{13} = -a_1 \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} X_2 X_3 \quad (17.49)$$

La contrainte normale à la section en chaque point est  $\sigma_{11}$ . Sa valeur maximale est atteinte en  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = \pm R$  et vaut :

$$|\sigma_{11}|_{max} = |a_1| RL = 4 \frac{|T|}{\pi R^2} \frac{L}{R} = 4 \frac{|T|}{\pi R^2} \frac{1}{\epsilon}$$

Sa dépendance en  $1/\epsilon$  en fait une contrainte forte de traction ou de compression en  $X_2 = \pm R$  selon le signe de  $T$ .

Les contraintes tangentielles s'expriment plus simplement en coordonnées cylindriques

$$\sigma_{12} = a_1 \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} r^2 \sin^2 \theta + a_1 \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} (R^2 - r^2), \quad \sigma_{13} = -a_1 \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} r^2 \sin \theta \cos \theta$$

On calcule alors

$$\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 = \frac{a_1^2}{4^2(1+\nu)^2} \left( (1+2\nu)^2 r^4 \sin^2 \theta + (1+2\nu)(3+2\nu)r^2(R^2 - r^2) \sin^2 \theta + (3+2\nu)^2 \frac{(R^2 - r^2)^2}{4} \right)$$

La contrainte tangentielle est donc la plus grande le long de l'axe 3 correspondant à  $\theta = \pi/2$  comme le montre la figure 17.4. Le polynôme correspondant

$$\tau^2(r) = \frac{a_1^2}{4^2(1+\nu)^2} \left( (1+2\nu)((1+2\nu)r^4 + (3+2\nu)r^2(R^2 - r^2)) + (3+2\nu)^2 \frac{(R^2 - r^2)^2}{4} \right)$$

prend sa valeur maximale en  $r = 0$ , donnée effectivement par (17.46).

Le rapport

$$\frac{|\sigma_{11}|_{max}}{\tau_{max}} = \frac{8(1+\nu)}{3+2\nu} \frac{L}{R} = \frac{8(1+\nu)}{3+2\nu} \frac{1}{\epsilon}$$

montre que la contrainte normale domine sur le cisaillement par un facteur  $1/\epsilon$ .

La contrainte équivalente de von Mises est définie par :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}$  représente le déviateur des contraintes. Une déformation plastique risque d'apparaître dès que la contrainte équivalente de von Mises atteint une valeur critique. On voit que les contraintes normales et tangentielles contribuent toutes les deux à la contrainte de von Mises. Comme la contrainte normale est dominante à l'extrémité  $S_0$ , il est probable que la plasticité va commencer en  $X_1 = 0, X_2 = \pm R$ . Le champ de contrainte équivalente de von Mises est illustré sur la figure 17.4 à droite sur une section droite prise au milieu de la poutre et sur la figure 17.3 à gauche et confirme cette intuition.

### Application numérique : flèche de la poutre

Dans le cas d'une poutre en acier de dimensions  $L = 100$  mm et  $R = 10$  mm encastree en  $S_0$  et soumise à un effort tranchant  $T$ , réalisé en suspendant un poids de 100 kg à l'extrémité  $S_L$ , calculer la flèche de la poutre, définie comme le déplacement  $u_2$  du barycentre de la section  $S_L$ . L'encastrement en  $S_0$  sera traduit ici par le fait que le barycentre de  $S_0$  ne se déplace pas et que la section  $S_0$  ne subit aucune rotation de corps rigide.

Cette situation correspond peu ou prou au problème considéré par Galilée comme le montre le fameux dessin de la figure 17.5, à ceci près que Galilée a considéré une poutre en bois de section rectangulaire.

Evaluer les contraintes tangentielles et normales maximales. Pensez-vous que la limite d'élasticité soit franchie et que la poutre métallique soit irrémédiablement fléchi par cette charge ?

La flèche  $\delta$  est calculée en  $X_1 = L, X_2 = X_3 = 0$  grâce à l'expression (17.44) du déplacement  $u_2$  :

$$\delta = \frac{a_1}{E} \frac{L^3}{3} = \frac{4T}{3\pi R E \epsilon^3}$$

Pour l'acier, le module de Young vaut typiquement 200000 MPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . On calcule alors une flèche de -0.2 mm lorsque l'on accroche un poids de 100 kg à l'extrémité de la poutre encastree. La contrainte normale maximale atteinte est de 125 MPa tandis que le cisaillement maximal vaut 4.3 MPa. Un acier de bonne qualité peut tout à fait se comporter de manière élastique sous un tel chargement. La limite d'élasticité d'un acier peut aller de 100 MPa à plus de 3 GPa pour les aciers dits à haute résistance. Cela dépend de sa composition métallurgique et des traitements thermomécaniques subis par l'acier lors de son élaboration. On vérifie également que les conditions du contexte infinitésimal sont bien remplies :  $T/(ER^2) \sim 10^{-5} \ll \epsilon^2 = 0.01$ . L'élancement de la poutre  $\epsilon = 0.1$  est toutefois un peu élevé.

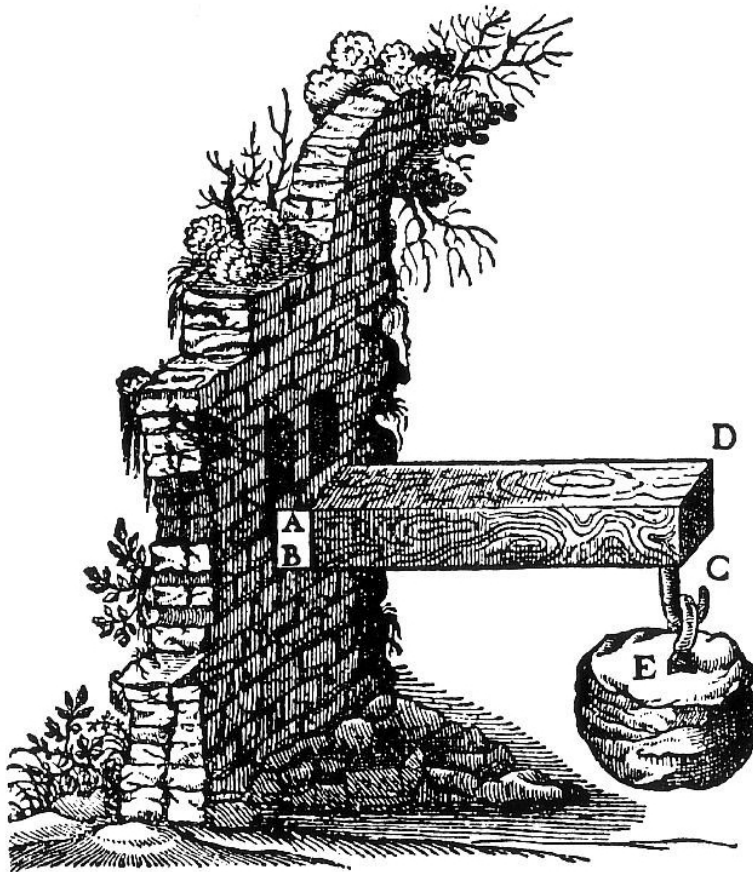


FIGURE 17.5 – Dessin paru dans les *Discorsi e Dimonstrazioni matematiche intorno a due nuoue scienze attenanti alla mecanica ed i movimenti locali* de Galilée (1638).

### Remarque dans le cas d'une section annulaire

Si la poutre est un tube, le problème de Neumann est à compléter par des conditions sur la frontière intérieure de la couronne. Remarquer que la fonction de gauchissement (17.42) ne convient plus, en raison de la présence du terme faisant intervenir le rayon extérieur  $R$  qui ne permet pas de satisfaire la condition intérieure. On trouvera dans le livre de (Muskhelishvili, 1977) les modifications à apporter à la fonction de gauchissement pour résoudre le problème du tube soumis à un effort tranchant.

### 17.2.5 Epilogue : retour sur le problème de Saint-Venant

Arrivés au terme de la résolution du problème de la flexion simple, et forts de la connaissance des solutions des problèmes de traction/compression simple, flexion pure et torsion d'une poutre acquises en exercice, justifier que nous sommes en mesure de fournir une solution exhaustive au problème dit de Saint-Venant consistant à imposer un torseur quelconque donné sur l'une des extrémités de la poutre.

Saint-Venant publia pour la première fois la solution générale de ce problème en 1856 dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences. Ce n'est toutefois que récemment que le principe de Saint-Venant, invoqué dans la résolution du problème du même nom, a été converti en théorème, pour une poutre suffisamment élancée, par (Toupin, 1965; Ladevèze, 1983).

Pour un exposé explicite de cette solution générale, on consultera avantageusement les références (Ballard and Millard, 2011), ainsi que les classiques (Mandel, 1994; Love, 1944; Muskhelishvili, 1977).

La solution générale du problème de Saint-Venant résulte de la superposition de la solution de 6 problèmes indépendant : une résultante normale imposée (traction/compression d'une barre), 2 efforts

tranchants dans les directions 2 et 3, un moment de torsion par rapport à l'axe 1 et deux moments de flexion par rapport aux axes 2 et 3. Les problèmes de traction, torsion et flexion normale ont déjà été traités dans les chapitres précédents. Le cas de l'effort tranchant a fait l'objet de ce chapitre. La solution du problème d Saint-Venant est donc désormais exhaustive.