

Introduction à la Mécanique des Milieux Continus

Samuel Forest

Centre des Matériaux/UMR 7633
Mines ParisTech, PSL University /CNRS
BP 87, 91003 Evry, France
Samuel.Forest@mines-paristech.fr



Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Plan

1 Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

2 Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

3 Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

4 Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Structures du génie civil



Structures du génie civil



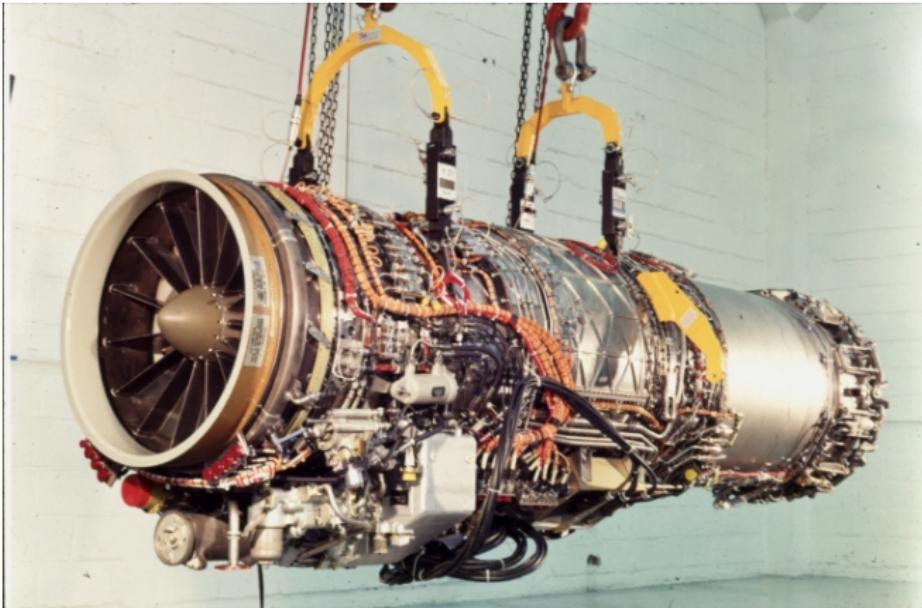
La commission administrative a conclu que deux événements étaient à l'origine de l'effondrement, qui a causé la mort de 4 personnes et blessé 3 autres, le 23 mai 2004 : "d'une part, le pliage et la perforation de la coque en béton armé par les étais métalliques qui devaient la soutenir. D'autre part, la rupture et la chute de la poutre qui supportait la coque".

La commission a "fait des propositions pour améliorer les règles et pratiques pour des constructions non courantes, notamment pour accepter les modalités étude et de contrôle liées à leur complexité, instaurer, dans certains cas, un suivi de la vie des ouvrages".

L'enquête administrative avait pointé la faible résistance initiale de la structure (insuffisance du ferrailage, faible épaisseur du béton...), conduisant le gestionnaire de la plate-forme à décider en mars de détruire la voûte de la jetée pour la reconstruire totalement. "La structure en béton doit être remplacée tout ou partie par une structure en acier".

Le coût de l'opération est estimé à 150 millions d'euros et sera "très largement couvert par les assurances".

Structures industrielles



moteur d'avion

Los Angeles, le 2 juin 2006...



COPYRIGHT GUSTAVO BERTRÁN

AIRLINERS.NET

Los Angeles, le 2 juin 2006...



COPYRIGHT GUSTAVO BERTRÁN

AIRLINERS.NET

Los Angeles, le 2 juin 2006...



Los Angeles, le 2 juin 2006...



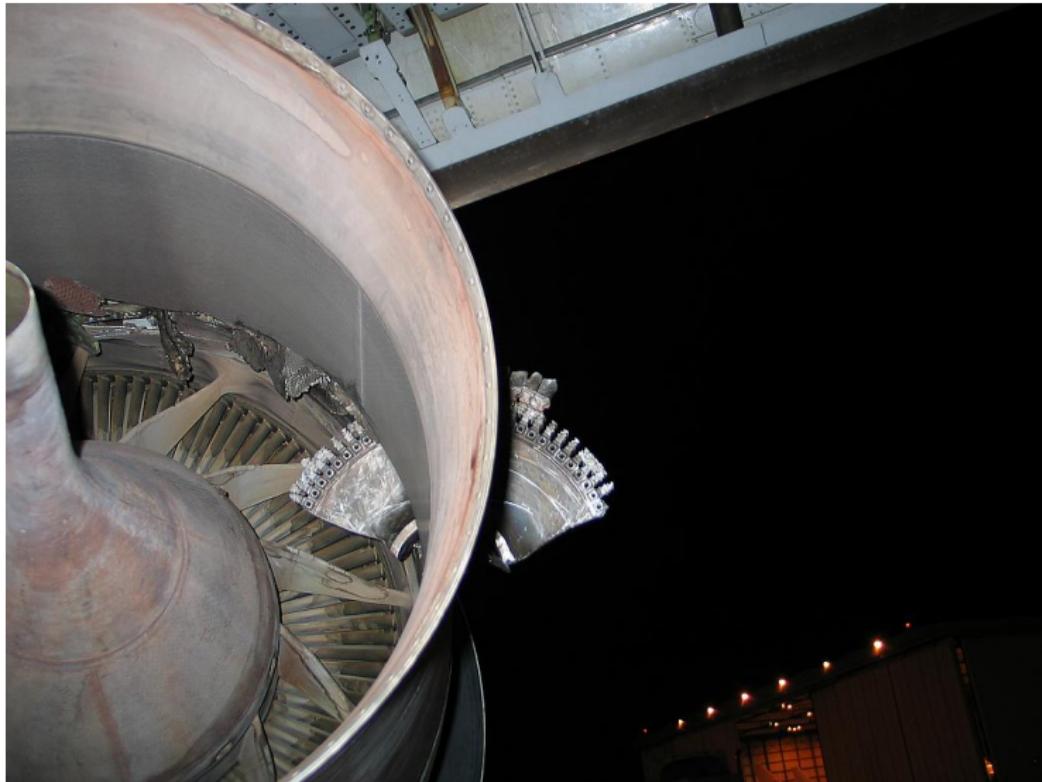
Los Angeles, le 2 juin 2006...



Los Angeles, le 2 juin 2006...



Los Angeles, le 2 juin 2006...



Batam Island, Indonesia, le 4 novembre 2010...



Batam Island, Indonesia, le 4 novembre 2010...



<http://www.atsb.gov.au/newsroom/news-items/qantas-airbus-a380-singapore.aspx>

Batam Island, Indonesia, le 4 novembre 2010...



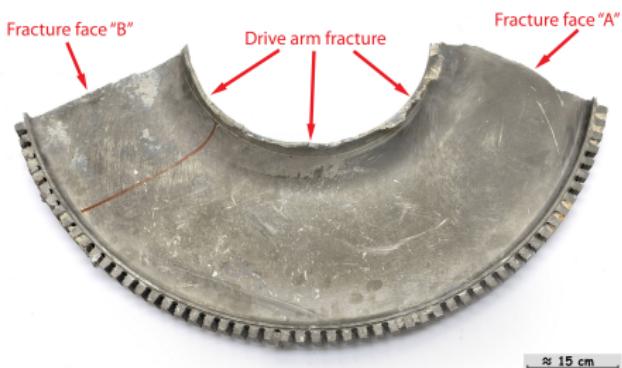
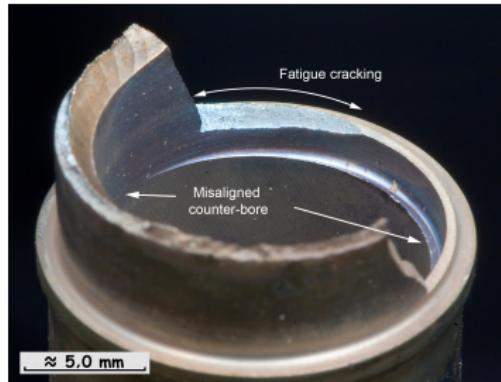
<http://www.atsb.gov.au/newsroom/news-items/qantas-airbus-a380-singapore.aspx>

Batam Island, Indonesia, le 4 novembre 2010...



<http://www.atsb.gov.au/newsroom/news-items/qantas-airbus-a380-singapore.aspx>

Batam Island, Indonesia, le 4 novembre 2010...



<http://www.atsb.gov.au/newsroom/news-items/qantas-airbus-a380-singapore.aspx>

Batam Island, Indonesia, le 4 novembre 2010...

*An interim ATSB investigation report has confirmed the sequence of events that led to the 4 November 2010 **uncontained engine failure** on board a Qantas **A380** aircraft over Batam Island, Indonesia.*

*Released today, the report highlights how the intermediate pressure turbine disc in the aircraft's No. 2 engine had been weakened by an oil fire. As a result, the **disc separated from its shaft**, increased its rotation speed **and broke into several parts**. Sections of the fractured **disc** and other engine components **penetrated the aircraft's left wing** and a number of other areas on the aircraft, resulting in significant structural and systems damage.*

*The oil fire that weakened the disc was due to a manufacturing defect in an oil feed pipe. That defect resulted in **fatigue cracking** in the pipe, so that oil sprayed into an engine cavity where it ignited because of the high air temperature.*

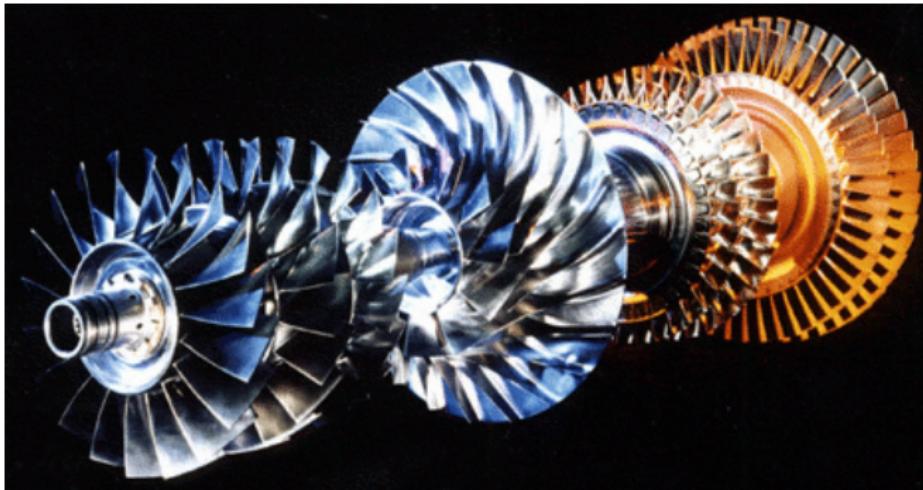
Eclatement de disque de turbine

Essai de survitesse réalisé sur banc jusqu'à éclatement



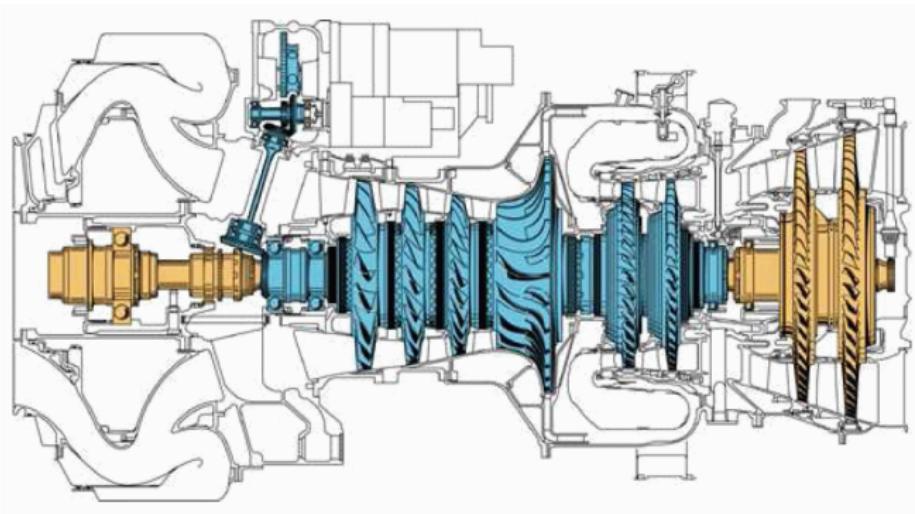
source : Safran Helicopter Engines

Turbine de moteur d'hélicoptère



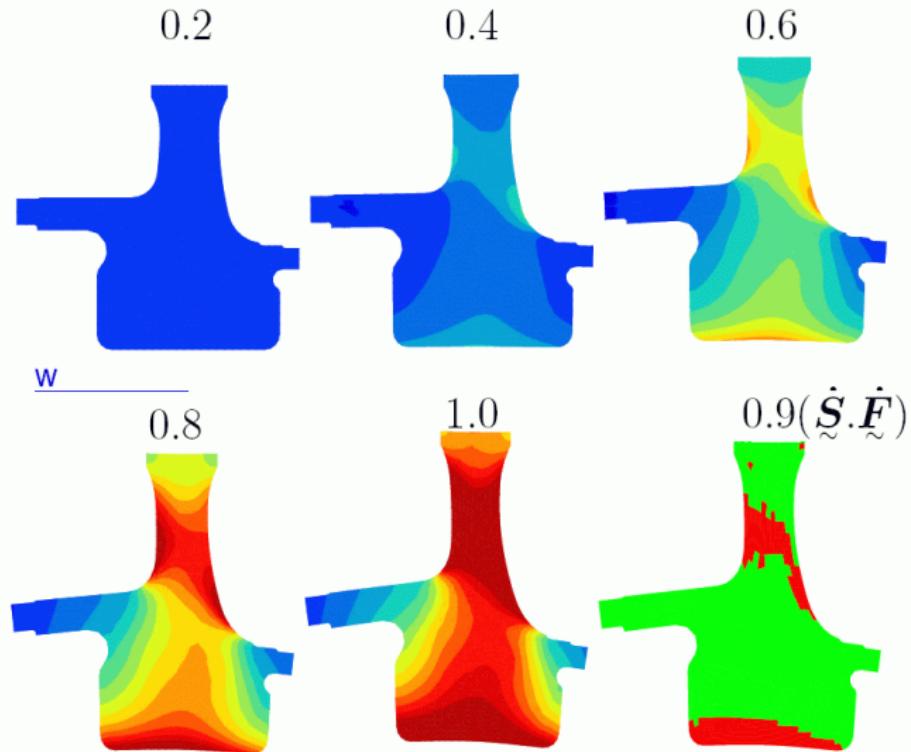
source : Safran Helicopter Engines

Turbine de moteur d'hélicoptère



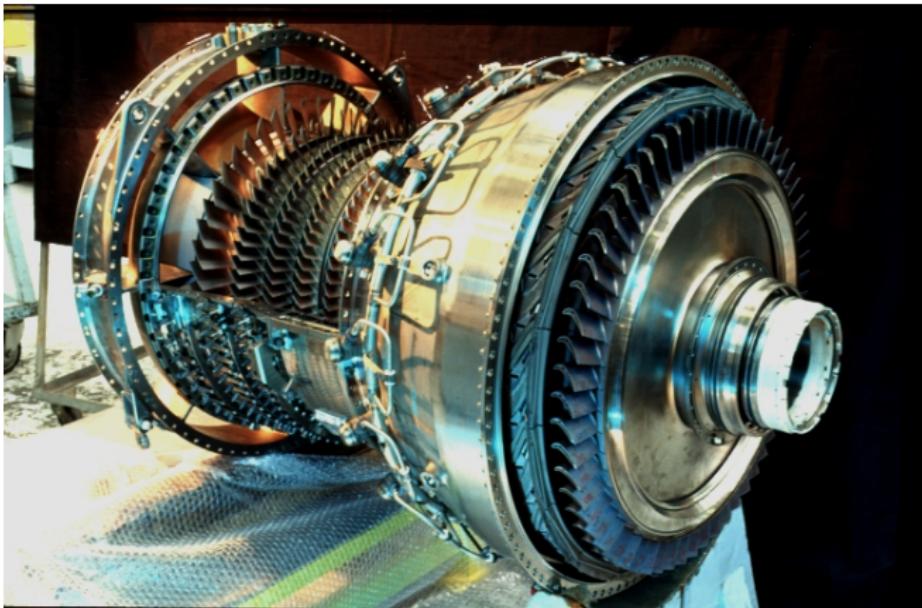
source : Safran Helicopter Engines

Prévision de l'éclatement d'un disque de turbine



calcul de structure par éléments finis, carte des déformations
[Mazière, 2006]

Structures industrielles



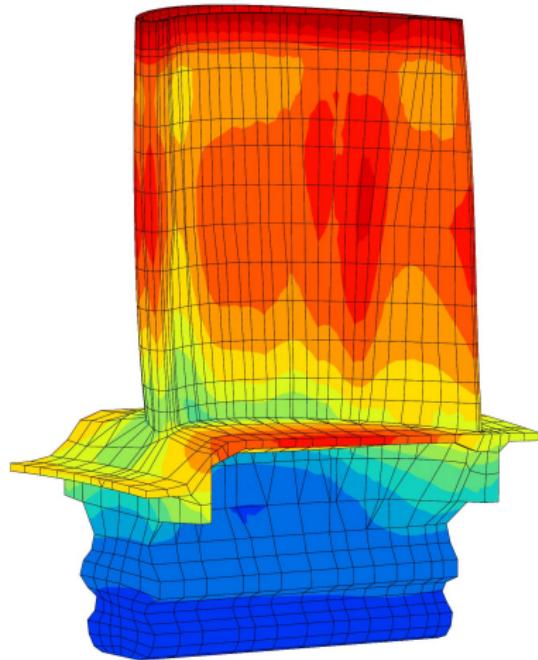
compresseur / chambre de combustion / turbine haute pression

Structures industrielles



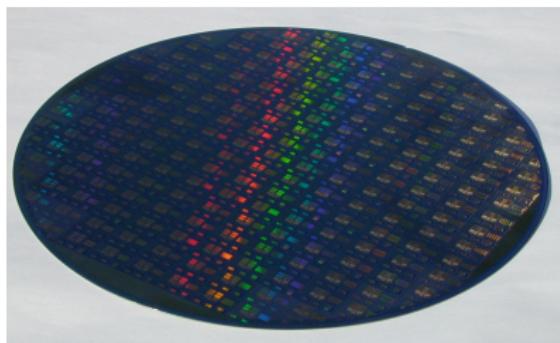
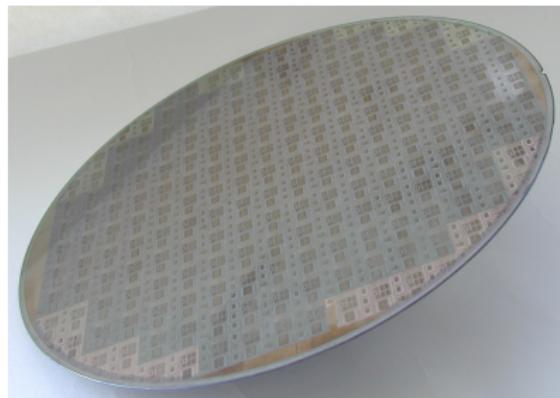
disque de turbine / aubes de turbine

Thermomécanique des structures



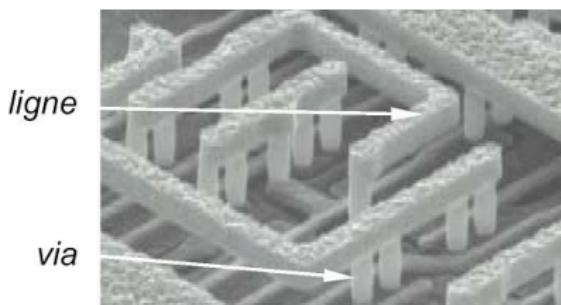
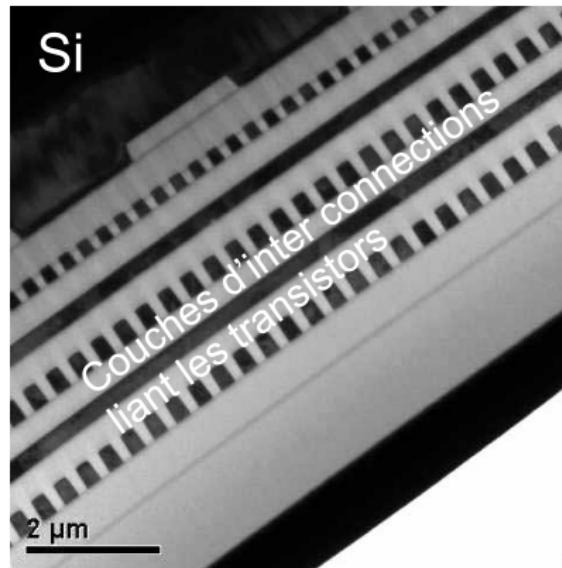
champ de température dans une aube de turbine
couplage thermomécanique

Micro-mécanique des composants électroniques



wafer de silicium avec ses microprocesseurs

Micro-mécanique des composants électroniques



processeur multicouches / circuits de connections

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

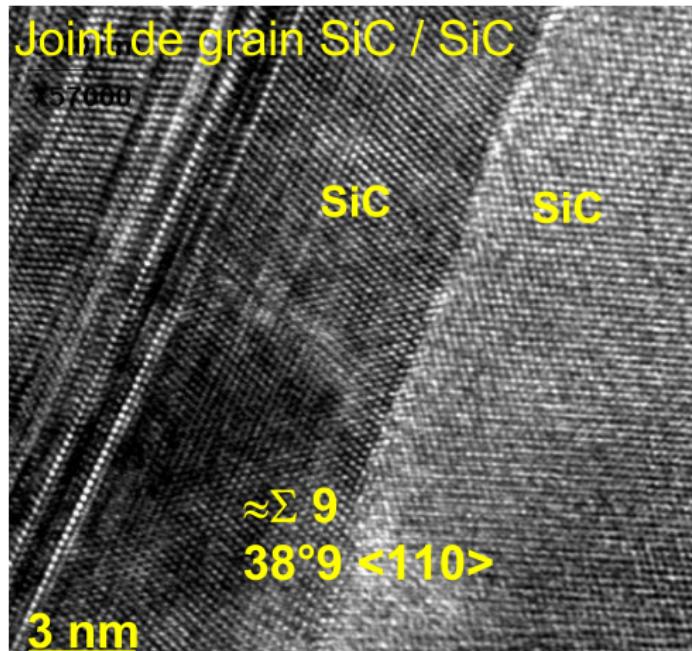
③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

La nature n'est pas continue...



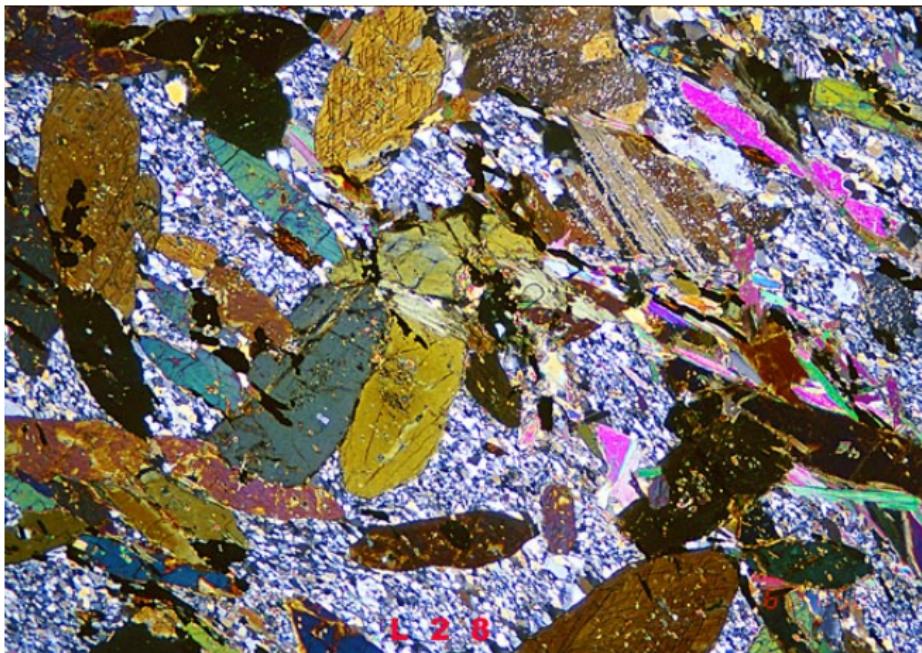
Les matériaux ont une structure multiéchelles : échelle **atomique**
(matériau céramique)

La nature n'est pas continue...



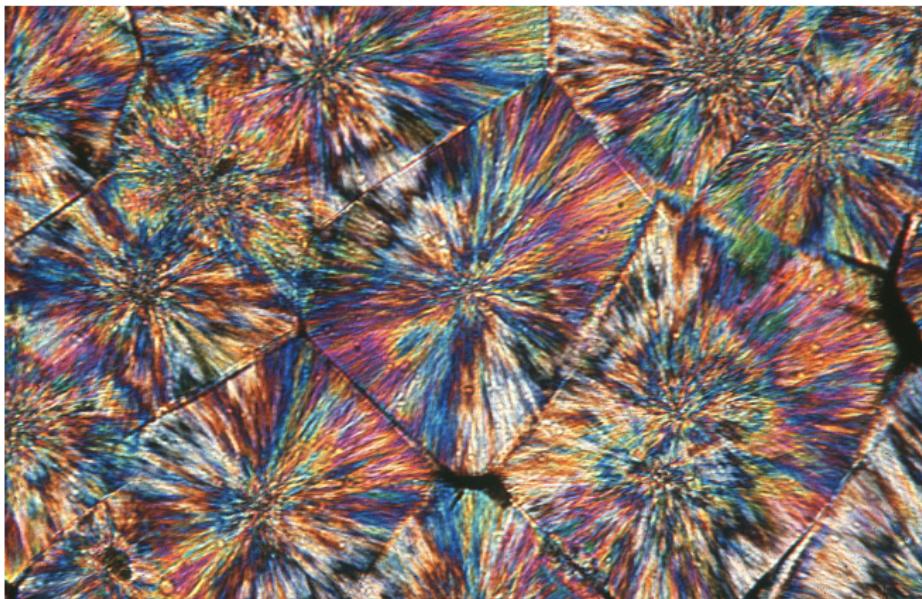
Les matériaux ont une structure multiéchelles : échelle microscopique
microstructure **granulaire** : grain d'un polycristal de zinc (revêtement de
tôle d'acier galvanisée)

La nature n'est pas continue...



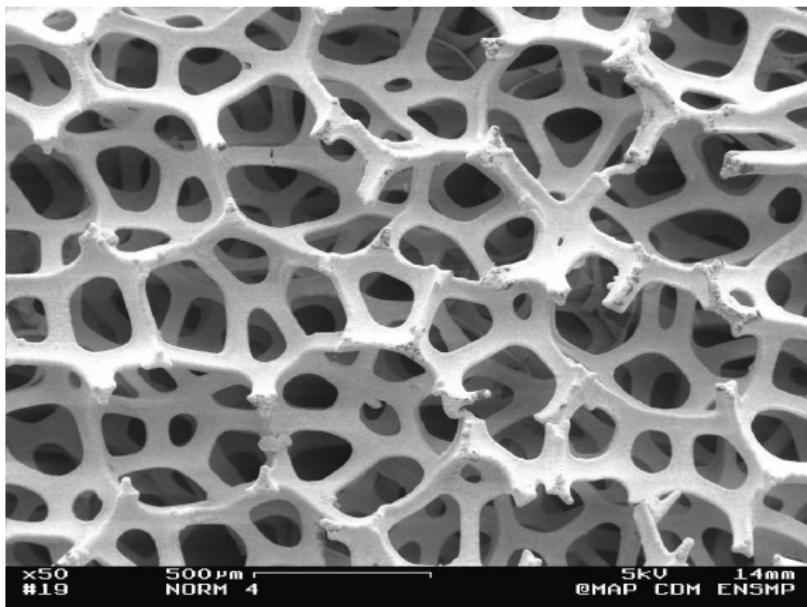
Les matériaux ont une structure multiéchelles : échelle microscopique
microstructure **granulaire** : cristaux d'hornblende et quartz dans une
roche métamorphique (taille de grain $\sim 50\mu\text{m}$)

La nature n'est pas continue...



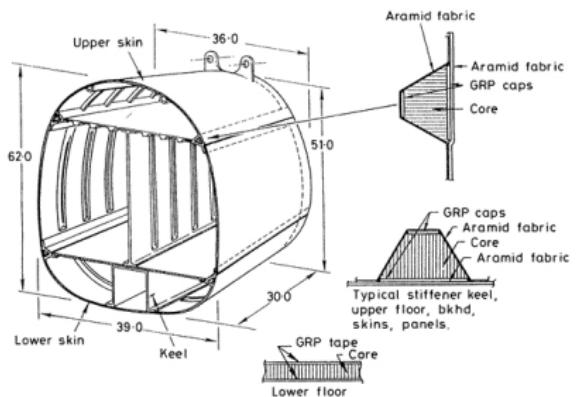
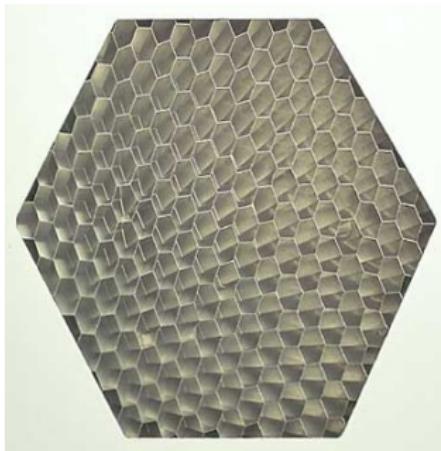
Les matériaux ont une structure multiéchelles : échelle microscopique
microstructure **granulaire** : sphérolites dans un polymère semi-cristallin

La nature n'est pas continue...



Les matériaux ont une structure multiéchelles : échelle microscopique
microstructure **cellulaire** : mousse de polyuréthane à porosité ouverte
(pavage de l'espace par des polyèdres)

Matériaux composites



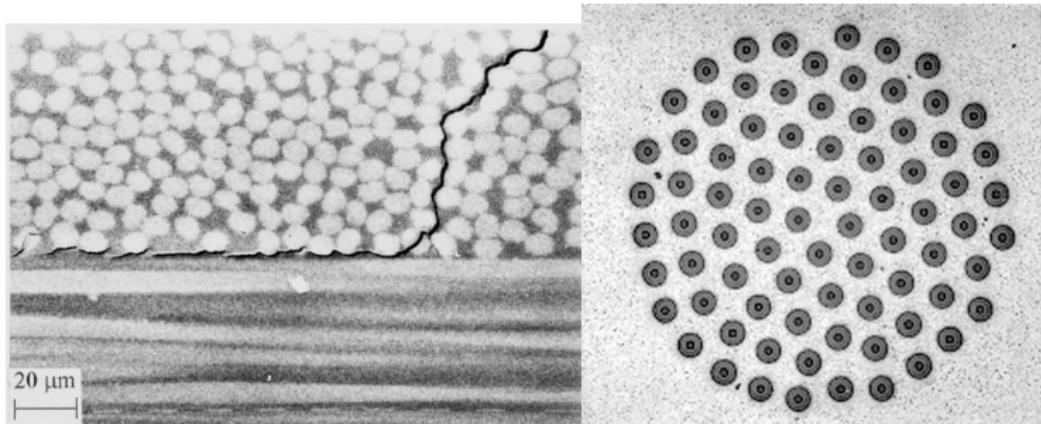
Les matériaux ont une structure multiéchelles : échelle microscopique
structure **périodique** : nid d'abeilles en aluminium

Radôme de nez d'avion



Atterrissage d'urgence à Istanbul – 29 juillet 2017

Matériaux composites



Les matériaux ont une structure multiéchelles : échelle microscopique
composites carbone–époxy / composite à matrice métallique

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

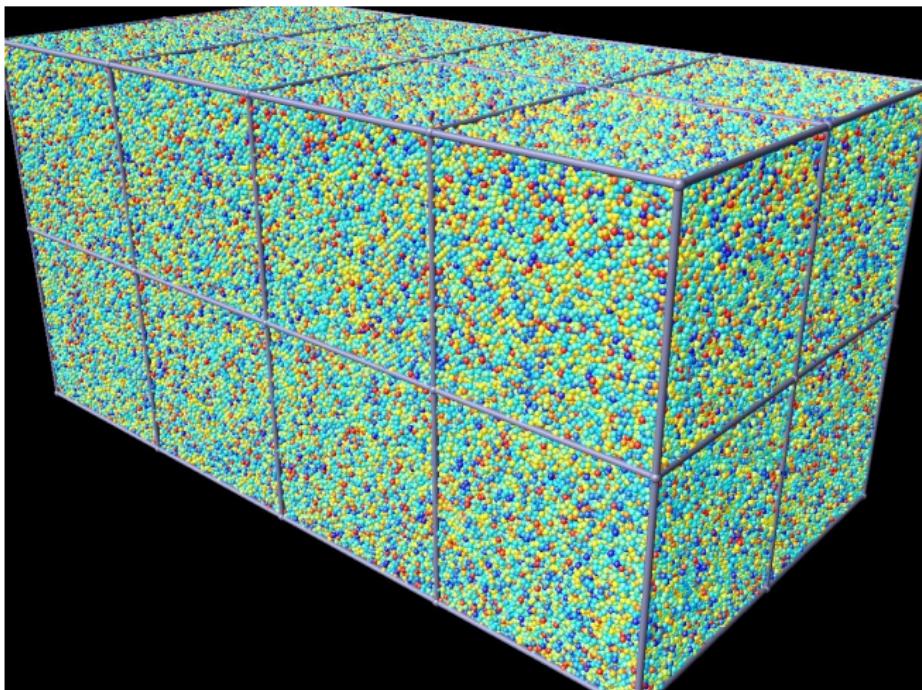
③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Dynamique moléculaire

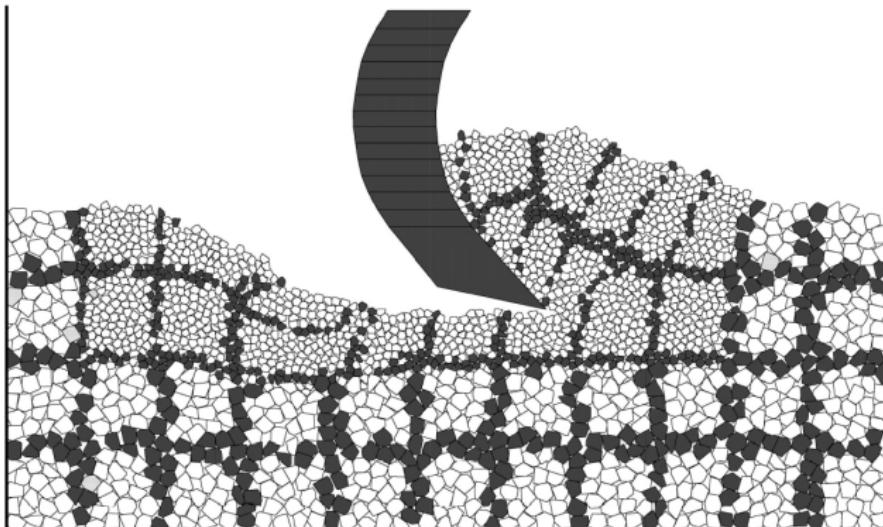


partir des équations de Newton...

limites : 10^9 atomes, potentiels atomiques, informations inutiles...

démarche de **Navier, Cauchy** : *l'hypothèse moléculaire*

Mécanique des milieux granulaires



simulation numérique d'un milieu granulaire : mécanique des solides indéformables + contact (non linéaire)
limites : quelques milliers de grains
intérêts : lignes matérielles

[Nouguier, ECL, 2004]

Plan

1 Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

2 Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

3 Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

4 Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

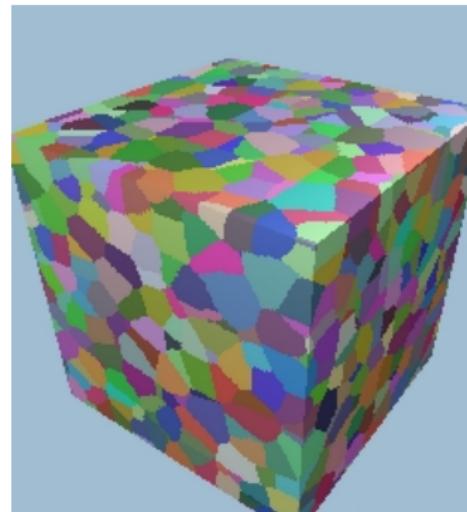
L'élément de volume dV de la mécanique des milieux continus

- Notion de **point matériel ou particule** : un volume infinitésimal dV centré en X dans l'espace affine euclidien
- $dV \sim$ Volume Elémentaire Représentatif

$$d \ll L_{VER} \ll L$$

d taille des hétérogénéités
 L_{VER} taille physique du VER
 L taille de la structure

- on va suivre le point matériel sans s'occuper des constituants contenus dans le VER...



VER pour un polycristal métallique

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

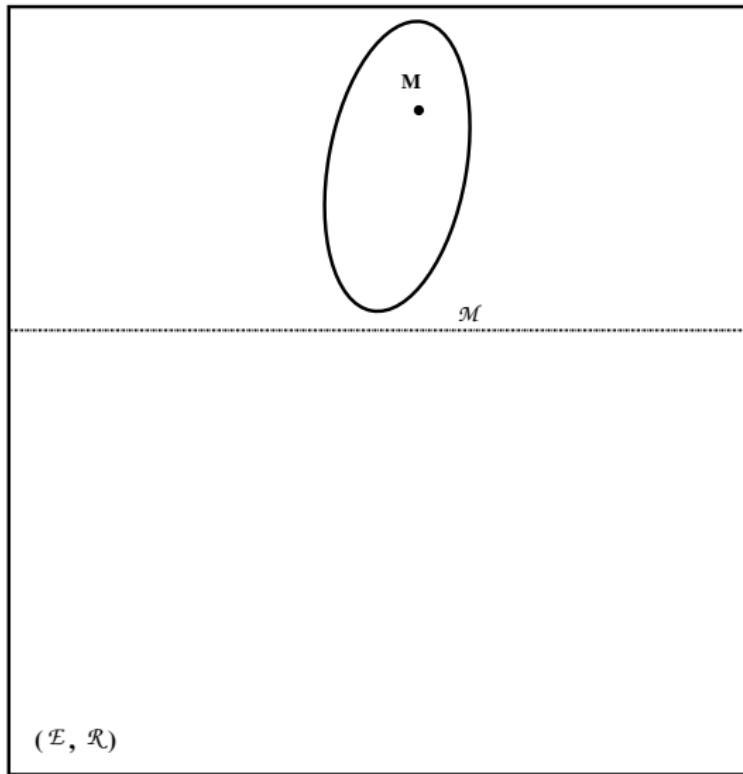
③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

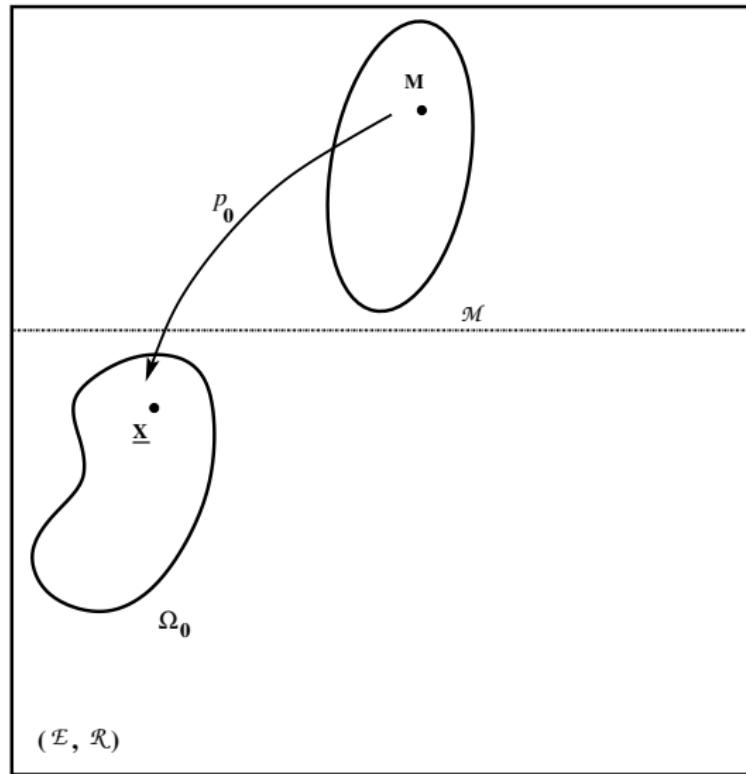
- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Corps matériel \mathcal{M}



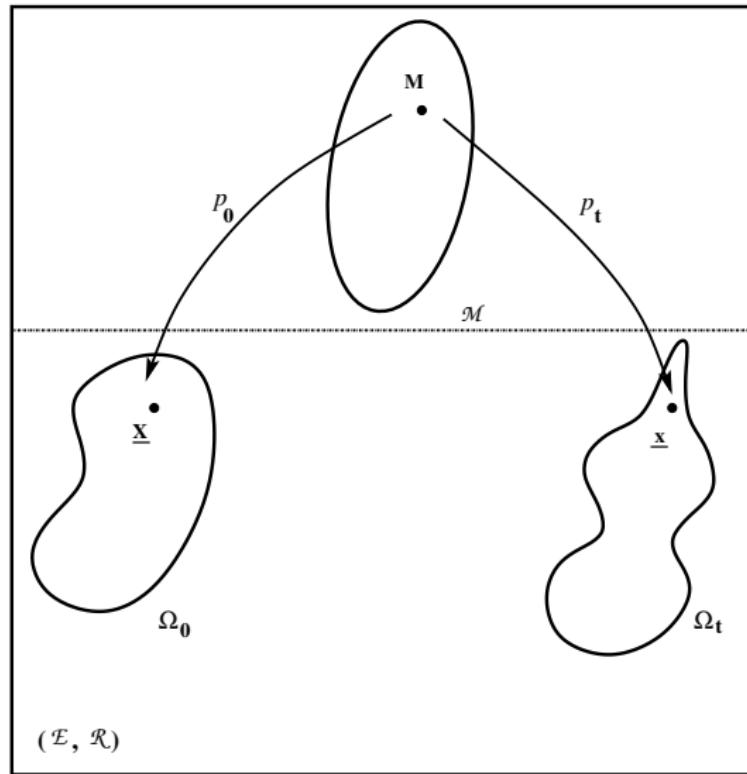
Le corps matériel \mathcal{M}
est un ensemble de
points matériels

Placement de référence dans l'espace physique



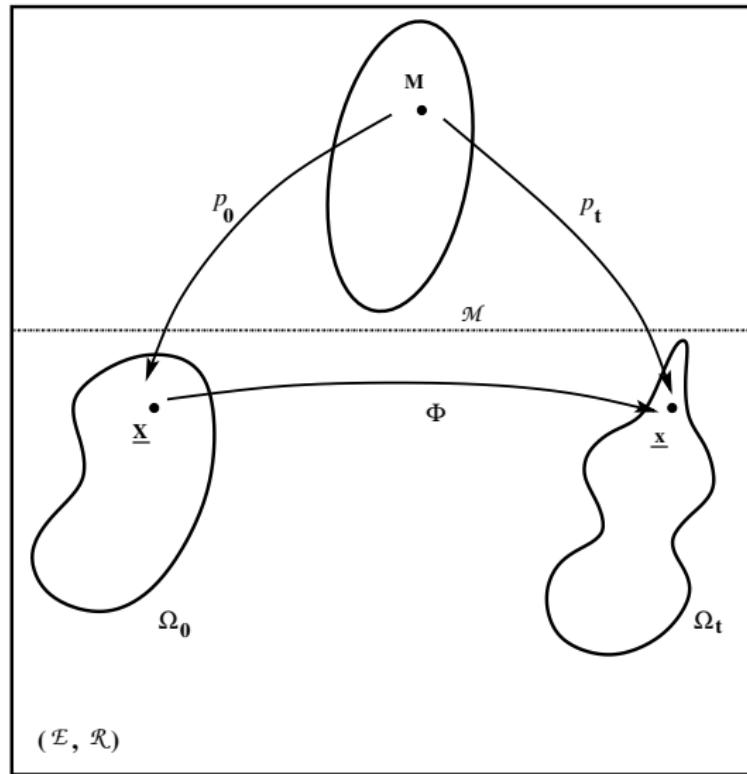
- Ω_0 est la position occupée dans l'espace physique \mathcal{E} muni d'un référentiel \mathcal{R} à un instant donnée t_0
- le point matériel $M \in \mathcal{M}$ occupe la position \underline{X} dans cette configuration
- on l'adoptera comme **configuration de référence**

Configuration actuelle dans l'espace physique



- Ω_t est la position actuelle occupée par le corps matériel dans l'espace physique \mathcal{E} à l'instant t
- le point matériel $M \in \mathcal{M}$ occupe la position x dans cette configuration
- on l'appelle **configuration actuelle**

Configuration actuelle dans l'espace physique



- La transformation

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$$

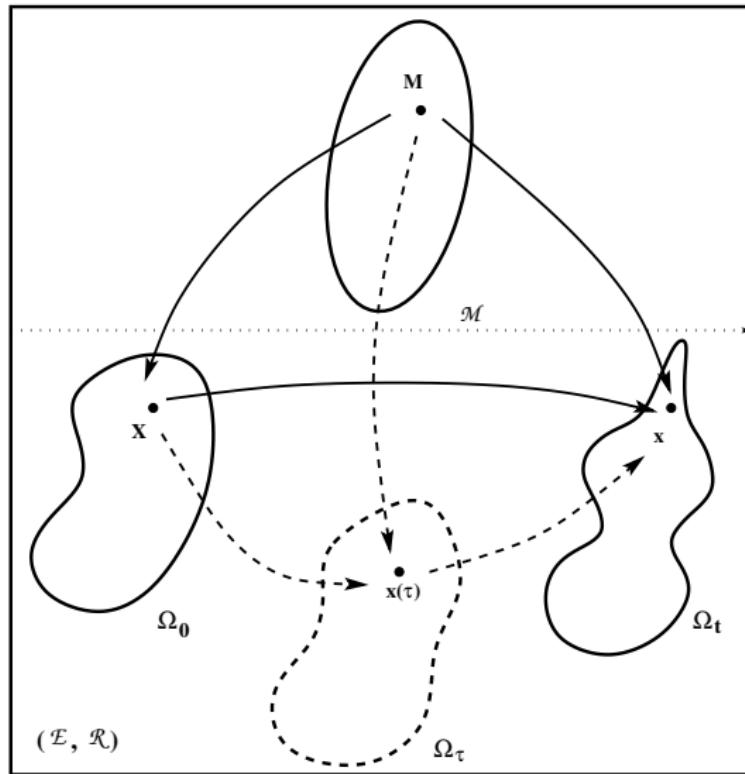
fait passer de Ω_0 à
 Ω_t

- La transformation est supposée **bijective et bicontinue**

$$\underline{X} = \Phi^{-1}(\underline{x}, t)$$

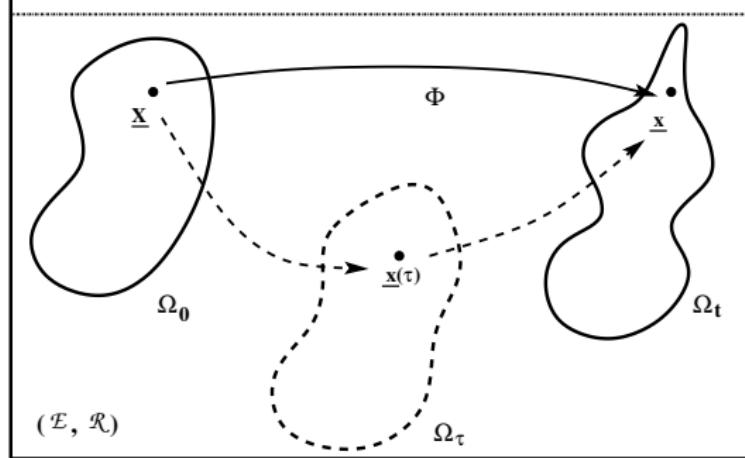
- pas de fission!
- pas de fusion!

Configuration intermédiaire du corps matériel



- La position de \mathcal{M} à $0 \leq \tau \leq t$ est notée Ω_τ s'appelle **configuration intermédiaire** du corps matériel
- La transformation $\Phi(\underline{\mathcal{X}}, \tau)_{0 \leq \tau \leq t}$ contient **l'histoire de déformation** du corps matériel entre ces instants

Transformation du milieu continu



- La transformation

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$$

fait passer de Ω_0 à
 Ω_t

- Le déplacement du point matériel est défini par

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x} - \underline{X}$$

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \Phi(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

Champs de tenseurs sur M

Des grandeurs physiques et thermomécaniques peuvent être attachées à chaque point du corps matériel.

On distingue alors deux situations :

- cas des **milieux à microstructure** sous-jacente : plutôt "solides"
 L'élément de volume $dV \in \Omega_0$ centré en \underline{X} devient $dv \in \Omega_t$ centré en \underline{x} . dV et dv contiennent les mêmes particules matérielles.
 champs de fonctions tensorielles $F(\underline{X}, t)$
 c'est l'approche ...
 - cas des **milieux sans microstructure** sous-jacente : plutôt "fluides"
 Les particules matérielles sont interchangeables et non identifiées.
 On ne s'intéresse qu'aux quantités moyennes (vitesses) relatives aux particules traversant dv centré au point géométrique $\underline{x} \in \Omega_t$ à l'instant t
 champs de fonctions tensorielles $f(\underline{x}, t)$
 c'est l'approche ...

Points de vue lagrangien et eulérien

- cas des **milieux à microstructure** sous-jacente : “solides”
L’élément de volume $dV \in \Omega_0$ centré en \underline{X} devient $dv \in \Omega_t$ centré en \underline{x} . dV et dv contiennent les mêmes particules matérielles.
champs de fonctions tensorielles $F(\underline{X}, t)$
c'est l'approche **lagrangienne ou matérielle**
- cas des **milieux sans microstructure** sous-jacente : “fluides”
Les particules matérielles sont interchangeables et non identifiées.
On ne s’intéresse qu’aux quantités moyennes (vitesses) relatives aux particules traversant dv centré au point géométrique $\underline{x} \in \Omega_t$ à l’instant t
champs de fonctions tensorielles $f(\underline{x}, t)$
c'est l'approche **eulérienne ou spatiale**
- Les points de vue lagrangien et eulérien sont équivalents :

$$f(\underline{x}, t) := F(\Phi^{-1}(\underline{x}, t), t), \quad F(\underline{X}, t) := f(\Phi(\underline{X}, t), t)$$

Un exemple de transformation du milieu continu

$$\underline{x}(t) = \underline{\tilde{Q}}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$$

$$x_i = Q_{ij} X_j + c_i$$

$\underline{\tilde{Q}}$ tenseur d'ordre 2 orthogonal : $\underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\tilde{Q}}^T = \underline{\tilde{Q}}^T \cdot \underline{\tilde{Q}} = \underline{1}$ avec $\det \underline{\tilde{Q}} = 1$

Un exemple de transformation du milieu continu

$$\underline{x}(t) = \underline{\tilde{Q}}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$$

$$x_i = Q_{ij} X_j + c_i$$

$\underline{\tilde{Q}}$ tenseur d'ordre 2 orthogonal : $\underline{\tilde{Q}} \cdot \underline{\tilde{Q}}^T = \underline{\tilde{Q}}^T \cdot \underline{\tilde{Q}} = \underline{1}$ avec $\det \underline{\tilde{Q}} = 1$
Il s'agit d'un

mouvement de corps rigide = **rotation**(t) + **translation**(t) d'ensemble

La rotation et la translation ne doivent pas dépendre de \underline{X} . La dépendance en t peut être quelconque (accélération non nulle).

Dans un repère cartésien orthonormé dont le troisième axe est l'axe de rotation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Milieux continus ou presque...

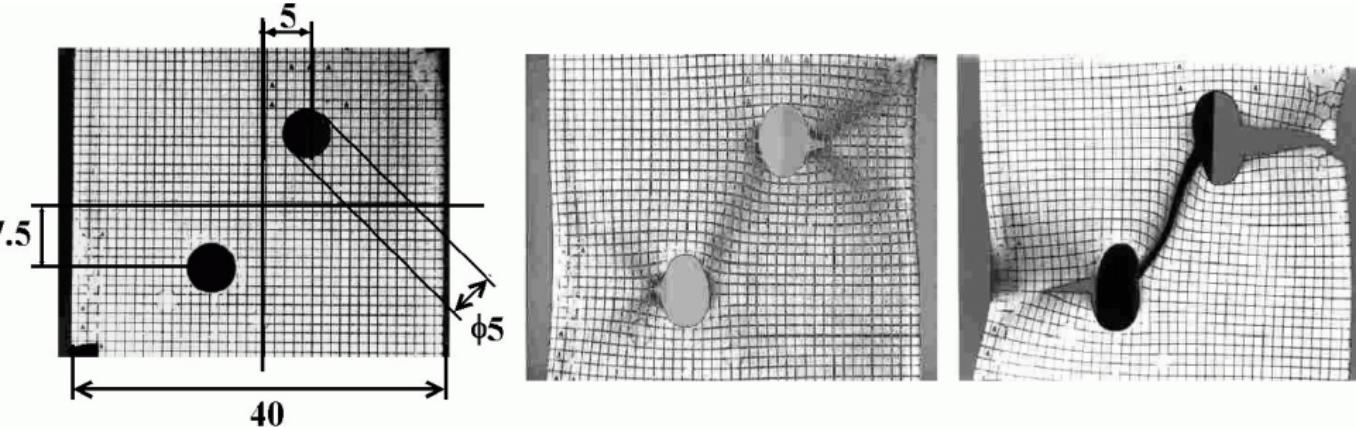
Les discontinuités sont tout à fait envisageables en MMC

- sur des domaines de mesure nulle (surfaces, lignes, points); les grandeurs mécaniques sont continues “presque partout” ...

Milieux continus ou presque...

Les discontinuités sont tout à fait envisageables en MMC

- sur des domaines de mesure nulle (surfaces, lignes, points); les grandeurs mécaniques sont continues “presque partout” ...
- **fissure** : le déplacement est discontinu

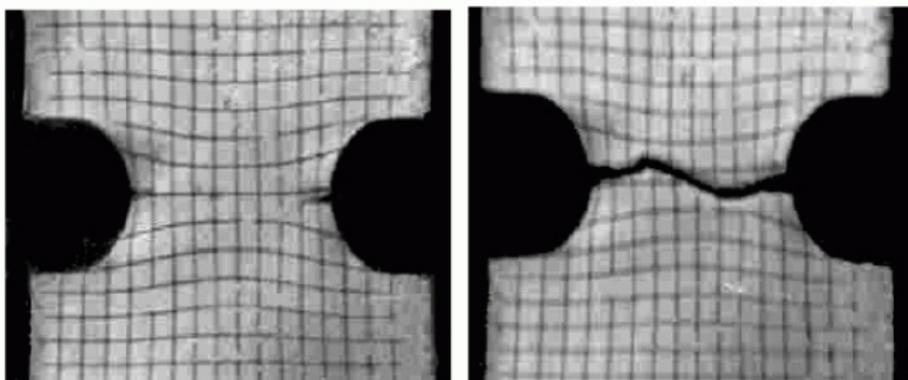


Milieux continus ou presque...

Les discontinuités sont tout à fait envisageables en MMC

- sur des domaines de mesure nulle (surfaces, lignes, points); les grandeurs mécaniques sont continues “presque partout” ...
- **fissure** : le déplacement est discontinu

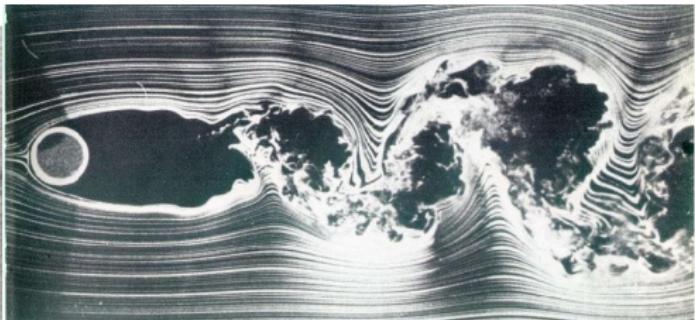
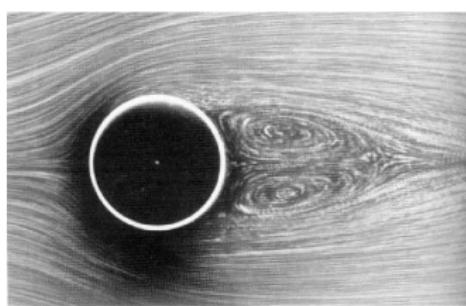
Mécanique de la rupture



Milieux continus ou presque...

Les discontinuités sont tout à fait envisageables en MMC

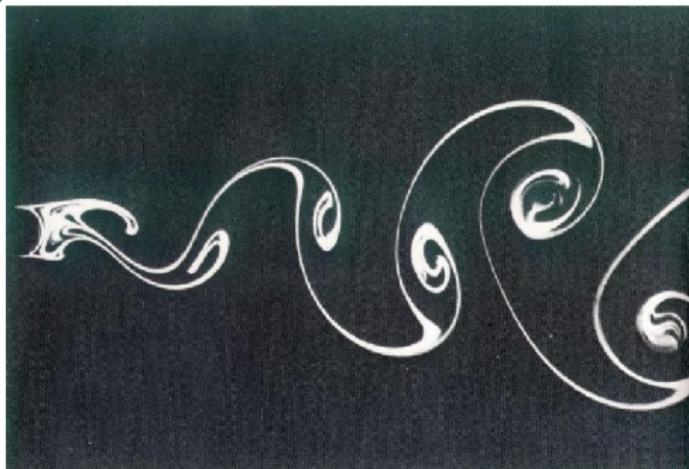
- sur des domaines de mesure nulle (surfaces, lignes, points); les grandeurs mécaniques sont continues “presque partout” ...
- fissures
- **sillage** d'un cylindre dans un fluide, décollement



Milieux continus ou presque...

Les discontinuités sont tout à fait envisageables en MMC

- sur des domaines de mesure nulle (surfaces, lignes, points); les grandeurs mécaniques sont continues “presque partout” ...
- **mécanique des solides** : fissures, interfaces...
- **mécanique des fluides** : sillages, ondes de chocs, cas turbulent non envisagé ici
en réalité, couches limites...



Plan

1 Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

2 Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

3 Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

4 Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Plan

1 Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

2 Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

3 Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

4 Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Mécanique des solides indéformables

- les solides indéformables ne peuvent subir que des mouvements de la forme

$$\underline{x}(t) = \underline{Q}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$$

combien de nombres d'inconnues (à l'instant t)?

Mécanique des solides indéformables

- les solides indéformables ne peuvent subir que des mouvements de la forme

$$\underline{x}(t) = \underline{Q}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$$

6 degrés de liberté : 3 translations + 3 angles de rotation (angles d'Euler)

Mécanique des solides indéformables

- les solides indéformables ne peuvent subir que des mouvements de la forme

$$\underline{x}(t) = \underline{Q}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$$

6 degrés de liberté : 3 translations + 3 angles de rotation (angles d'Euler)

- Relation fondamentale de la dynamique
torseur des efforts appliqués : $\{O, \underline{R}, \underline{\mathbf{M}}_o\}$

Mécanique des solides indéformables

- les solides indéformables ne peuvent subir que des mouvements de la forme

$$\underline{x}(t) = \underline{Q}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$$

6 degrés de liberté : 3 translations + 3 angles de rotation (angles d'Euler)

- Relation fondamentale de la dynamique

torseur des efforts appliqués : $\{O, \underline{R}, \underline{M}_O\}$

règle de transformation :

$$\{O', \underline{R}', \underline{M}_{O'}\}, \quad \text{avec} \quad \underline{R}' = \underline{R}, \quad \underline{M}_{O'} = \underline{M}_O + \underline{O}' \underline{O} \wedge \underline{R}$$

Mécanique des solides indéformables

- les solides indéformables ne peuvent subir que des mouvements de la forme

$$\underline{x}(t) = \underline{Q}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$$

6 degrés de liberté : 3 translations + 3 angles de rotation (angles d'Euler)

- Relation fondamentale de la dynamique

torseur des efforts appliqués : $\{O, \underline{R}, \underline{M}_O\}$

torseur dynamique (des quantités d'accélération) : $\{O, \underline{A}, \frac{d}{dt}\underline{\sigma}_O\}$

Mécanique des solides indéformables

- les solides indéformables ne peuvent subir que des mouvements de la forme

$$\underline{x}(t) = \underline{Q}(t) \cdot \underline{X} + \underline{c}(t)$$

6 degrés de liberté : 3 translations + 3 angles de rotation (angles d'Euler)

- Relation fondamentale de la dynamique

torseur des efforts appliqués : $\{O, \underline{R}, \underline{M}_O\}$

torseur dynamique (des quantités d'accélération) :

$\{O, \underline{A} = m\underline{a}_G, \frac{d}{dt}\underline{\sigma}_O\}$

Il existe au moins un référentiel dit galiléen tel que

$$\underline{A} = \underline{R}, \quad \frac{d}{dt}\underline{\sigma}_0 = \underline{M}_O$$

6 équations : le système est "fermé, clos"

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Nécessité des lois de comportement

- solide indéformable : le torseur des efforts appliqués détermine sans ambiguïté le mouvement
- corps déformable : son mouvement dépend des efforts appliqués et de la nature du matériau
 - un même chargement appliqué à une barre d'acier ou de caoutchouc ne conduit pas à la même transformation...

Nécessité des lois de comportement

- solide indéformable : le torseur des efforts appliqués détermine sans ambiguïté le mouvement
- corps déformable : son mouvement dépend des efforts appliqués et de la nature du matériau
 - un même chargement appliqué à une barre d'acier ou de caoutchouc ne conduit pas à la même transformation...
- la loi de comportement permet de prendre en compte les propriétés de la matière dans la modélisation. On reviendra en détail sur sa forme.
- Variété des comportements
 - **élasticité** ← exemple développé dans ce cours
 - **viscosité** ← exemple développé dans ce cours
 - **viscoélasticité** ← exemple développé dans ce cours
 - plasticité
 - élastoviscoplasticité...

Plan

1 Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

2 Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

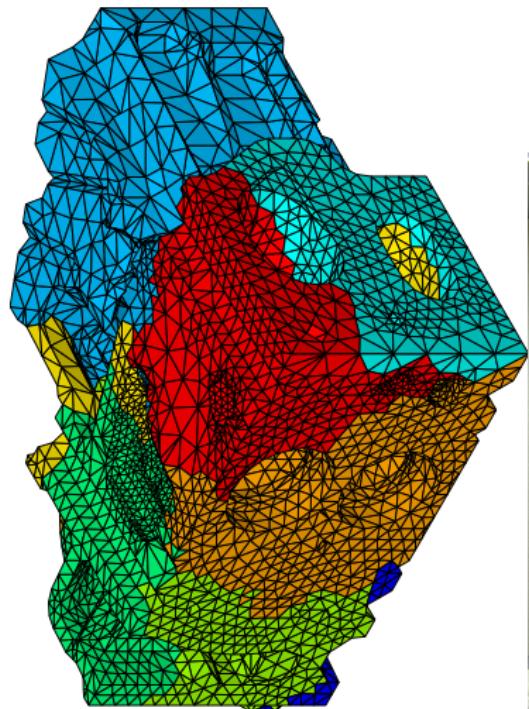
3 Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

4 Plan du cours

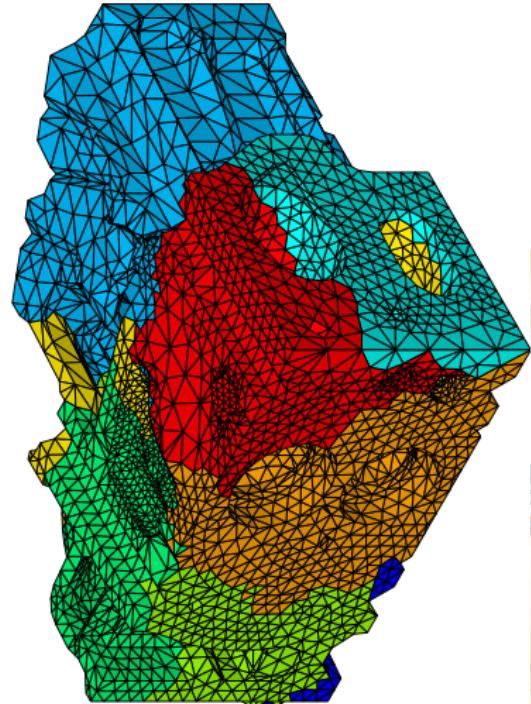
- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Exemple de mise en œuvre de la MMC



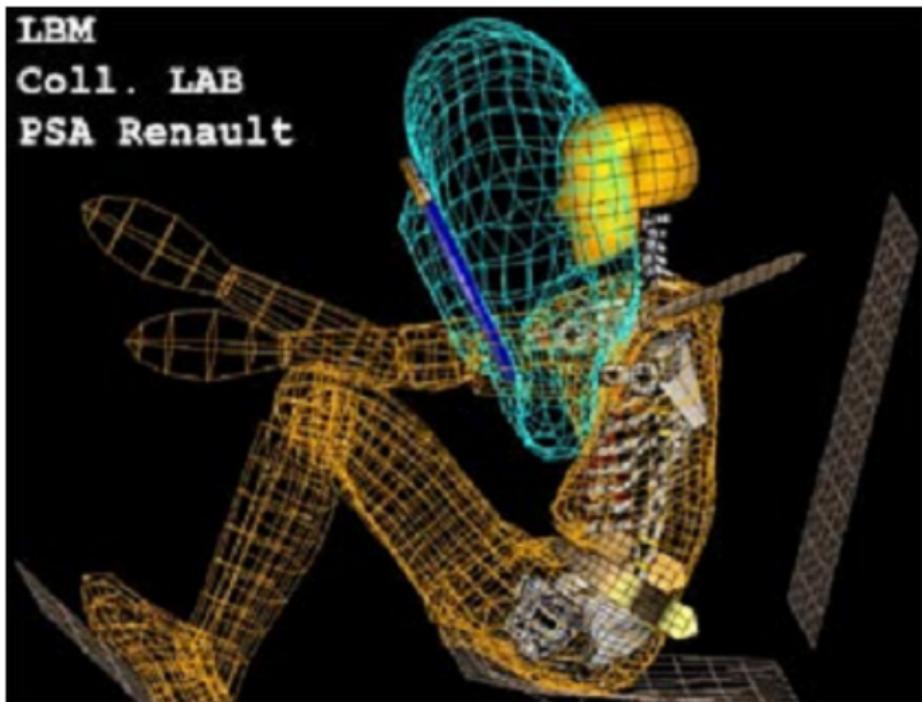
simulation numérique de la réponse d'une culasse automobile
(calcul parallèle)

Exemple de mise en œuvre de la MMC



simulation numérique de la réponse d'une culasse automobile
(calcul parallèle)

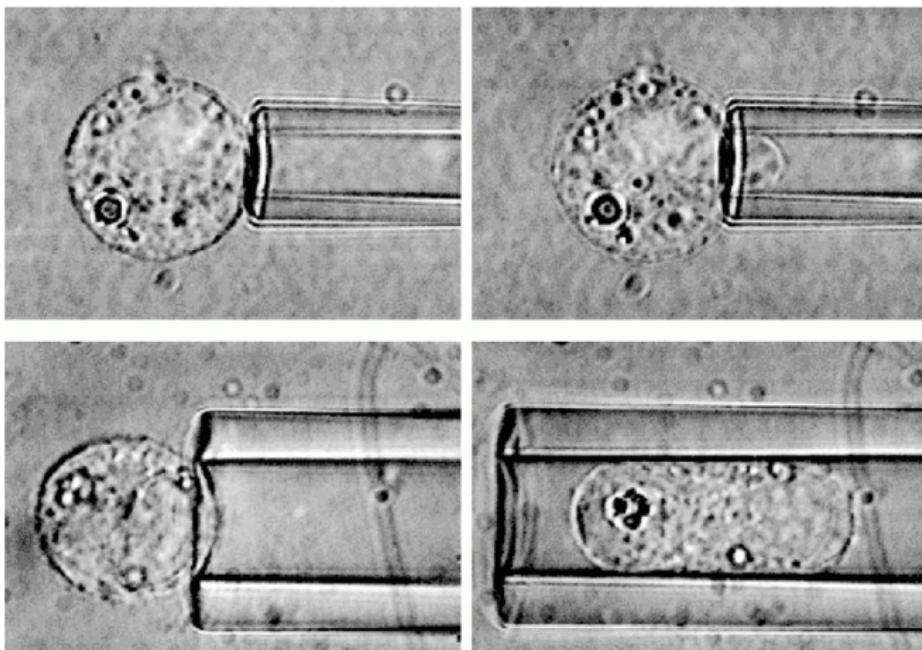
Bio-mécanique



simulation numérique du choc passager automobile

[ENSAM Paris, 2003]

Mécanique du vivant



comportement viscoélastique d'une cellule vivante

[Suresh, 2003]

Plan

1 Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

2 Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

3 Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

4 Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Notations

champs de tenseurs euclidiens; base orthonormée ($\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$)

- tenseurs d'ordre 0 : scalaires

$$f(\underline{\mathbf{X}}, t)$$

- tenseurs d'ordre 1 : vecteurs

$$\underline{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$$

$$\underline{\mathbf{x}} = x_i \underline{\mathbf{e}}_i, \quad [\underline{\mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- tenseurs d'ordre 2 : applications linéaires / formes bilinéaires

$$\underline{\mathbf{C}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$$

$$\underline{\mathbf{C}} = C_{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j, \quad [\underline{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

- opérations sur les tenseurs dans une base **orthonormée**

$$\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{b}} = a_i b_i = [\underline{\mathbf{a}}]^T [\underline{\mathbf{b}}], \quad \underline{\mathbf{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \sigma_{ij} n_j \underline{\mathbf{e}}_i, \quad [\underline{\mathbf{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}}] = [\underline{\mathbf{\sigma}}] [\underline{\mathbf{n}}]$$

$$\underline{\mathbf{m}} \cdot \underline{\mathbf{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = m_i \sigma_{ij} n_j = [\underline{\mathbf{m}}]^T [\underline{\mathbf{\sigma}}] [\underline{\mathbf{n}}]$$

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Plan du cours oral

Amphis

- A1. Introduction : du discret au continu
- A2. Tenseurs : pour la mécanique et la physique
- A3. Le tenseur des contraintes : une vraie nouveauté
- A4. Cinématique : déformation du milieu continu

Travail personnel : fluides parfaits incompressibles

- A5. Lois de comportement : nécessité et principes fondamentaux, hyperélasticité
 - A6. Comportement thermoélastique linéarisé
 - A7. Fluides viscoélastiques et fluides newtoniens
 - A8. Approches énergétiques : encadrement de solutions
- Exercices** : problèmes d'équilibre linéarisé des solides thermoélastiques (traction, flexion, torsion, réservoirs sous pression, ondes élastiques, etc.) et écoulements de fluides (obstacle dans un canal, écoulements de Poiseuille, Couette-Taylor etc.)

Supports de cours

- le livre en deux volumes + sa version pdf à télécharger depuis le site
- le site web
 - Site officiel campus :
<https://moodle.minesparis.psl.eu/enrol/index.php?id=837>
 - Compléments : <http://mms2.ensmp.fr/>
 - retrouvez les transparents sur le site web!
- les exercices

Votre lien avec les cours de l'Ecole : moodle.minesparis.psl.eu

The screenshot shows a Moodle course page. At the top, there's a navigation bar with icons for PSL, Moodle, and user status (You are currently using guest access). Below the bar, the course title 'Mécanique des milieux continus' is displayed. The breadcrumb navigation shows Home / Courses / Ingénieur Civil / Semestre 2 / UE23 / MIN_21-22_ECU23.1 / Enrolment options. On the left, there's a sidebar with links for Home and Calendar. The main content area is titled 'Enrolment options' and lists several teaching staff: Anna Ask, Sylvia Feld-Pavet, Samuel FOREST, Laurent LACOURT, Aldo MARANO, Vincent MAUREL, Matthieu MAZIERE, and Vladislav YASTREBOV. A section titled 'Self enrolment (Étudiant)' is shown, with a note that guests cannot access it and a 'Continue' button. At the bottom, a copyright notice states: 'Unless otherwise stated, any resource made available on this site is subject to copyright.'



MINES | PSL

Login to Moodle

[PSL ACCOUNT](#)

For users not registered with PSL

[EXTERNAL ACCOUNT ▾](#)

[SUPPORT](#)

[LOG IN AS A GUEST](#)



Fédération Éducation - Recherche

Select your organisation

In order to access the service Moodle MINESParis-PSL please select or search the organisation you are affiliated with.

x v

- Remember selection for this web browser session.
 Remember selection permanently and bypass this step from now on.





PSL

Service d'Authentification Centralisée de Mines ParisTech

Enter Username & Password

Username: —

Password: —



[Forgot your password?](#)

For security reasons, please [log out](#) and exit your web browser when you are done accessing services that require authentication!

PSL Moodle Samuel FOREST

MIN_21-22_ECU23.1

Participants Badges Notes Annonces Forum MMC Programme du cours 2022 Le poly officiel MMC 2022 Récapitulatifs et Formulaire tirés du poly par Théophile Candela (P19) Résumés du poly par Théophile Candela (P19) Corrige examen MMC 2020 Correspondance entre le cours écrit et le cours oral Examen MMC 2020 Corrige examen MMC 2020 Examen MMC 2021 Corrige examen MMC 2021

Mécanique des milieux continus

Tableau de bord / Mes cours / Ingénieur Civil / Semestre 2 / UE23 / MIN_21-22_ECU23.1 Activer le mode édition

Annonces Forum MMC Programme du cours 2022 Le poly officiel MMC 2022 Récapitulatifs et Formulaire tirés du poly par Théophile Candela (P19) Résumés du poly par Théophile Candela (P19) Correspondance entre le cours écrit et le cours oral Examen MMC 2020 Corrige examen MMC 2020 Examen MMC 2021 Corrige examen MMC 2021

introduction-MMC

Introduction Introduction-MMC-Consignes Tenseurs-planches-2020

Recherche forums Valider Recherche avancée

Dernières annonces Ajouter un nouveau sujet... (Aucune annonce n'a encore été publiée)

Événements à venir Aucun événement à venir Vers le calendrier...

Activité récente Activité depuis le samedi 5 février 2022, 08:43 Rapport complet des activités récentes... Aucune activité récente

Quelques recommandations

- Le cours de Mécanique des Milieux Continus est un cours **difficile**, enseigné en un temps record ...
- Le pouvoir de **fascination** de l'une des plus belles disciplines de la Physique moderne naîtra d'un travail assidu!
- Les connaissances nécessaires à l'examen sont le contenu du cours oral et des PC.
- On ne peut pas faire des exercices sur toutes les parties du cours...
- Le poly est épais car les explications sont détaillées. Il dépasse largement le contenu du cours. On s'y référera pour toute démonstration ou prolongement des résultats du cours.
Téléchargeable à distance, il pourra jouer le rôle de *handbook* pour vos séjours à l'étranger ou en entreprise.

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Unité d'enseignement M²E

Mécanique–Matériaux– Energie

- Responsable de l'UE : Michel Bellet (Cemef)
- Génie énergétique par P. Stabat et son équipe
- Matériaux pour l'ingénieur par K. Inal et son équipe

Il fait appel à des notions qui seront développées dans le détail en

- Mathématiques : algèbre/analyse, calcul des variations, fonction de la variable complexe, etc.
- Physique : mécanique statistique
- Cristallographie \Leftarrow importance des symétries

Prolongements

- Eléments Finis, Non linear computational mechanics
- Géomécanique et géologie de l'ingénieur; Hydrogéologie;
- Calcul scientifique; Eléments finis S3733 - S3735;
- Physique des solides; Mise en œuvre des polymères; etc.

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- **Equipe enseignante**
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

L'équipe enseignante 1/2



Dr. Anna Ask (ONERA the French aerospace lab) : mécanique des matériaux, plasticité cristalline, champs de phase



Dr. Sylvia Feld-Payet (ONERA the French aerospace lab) : mécanique de l'endommagement, mécanique des structures



Dr. Samuel Forest (CNRS) : mécanique des milieux continus généralisés, matériaux cristallins



Dr. Laurent Lacourt (Mines ParisTech) : mécanique des matériaux, mécanique numérique, réduction de modèles

L'équipe enseignante 2/2



Dr. Aldo Marano (ONERA) : mécanique des matériaux, mécanique numérique, plasticité cristalline FFT



Dr. Vincent Maurel (Mines ParisTech) : métallurgie mécanique, matériaux à haute température, mécanique des revêtements et barrières thermiques



Prof. Matthieu Mazière (Mines ParisTech) : plasticité et rupture des matériaux, instabilités viscoplastiques



Dr. Vladislav Yastrebov (CNRS) : mécanique et physique du contact–frottement, mécanique numérique

Vous appartenez à l'un de ces 8 groupes : vous ne pouvez PAS en changer!

Plan

① Les objets de la mécanique des milieux continus

- Structures, microstructures, nanostructures
- Matière, matériaux
- Modélisations discrètes

② Le modèle continu

- Du discret au continu : notion de point matériel
- Transformation du milieu continu
- Discontinuités, singularités

③ Comportement des matériaux

- Cas des solides rigides
- Le problème de fermeture : lois de comportement
- Exemples de modélisations continues

④ Plan du cours

- Champs de tenseurs–Notations
- Démarche adoptée / supports pédagogiques
- Liens avec l'UE M2E et les autres cours de l'Ecole
- Equipe enseignante
- Evaluation : examen écrit et projet personnel

Evaluation

- Examen écrit (2/3) : 3 heures en grand amphi, tous documents autorisés
- Travail personnel : étude du chapitre sur les écoulements des fluides parfaits incompressibles, à *préparer pour la PC3*
- **Projet personnel en petits groupes (1/3)**: restitution orale d'un problème de mécanique des milieux continus et de sa résolution
 - Choix des problèmes par groupe au sein de chaque PC : à la suite de la PC5
 - Restitution devant le responsable de chaque PC : le 11 avril 2022 après-midi
 - Règlement détaillé :

moodle.minesparis.psl.eu/pluginfile.php/51899/mod_resource/content/1/ReglementTravauxPratiquesPC3.pdf

- Banque de problèmes :

moodle.minesparis.psl.eu/pluginfile.php/51900/mod_resource/content/1/Liste-des-problemes22.pdf