

Equilibre des solides thermoélastiques dans l'hypothèse des petites perturbations

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Thermoélasticité linéarisée en petites déformations

- contexte des déformations thermoélastiques infinitésimales

$$\|\tilde{\boldsymbol{E}}\| \ll 1, \quad \frac{|T - T_0|}{T_0} \ll 1$$

les grandes rotations sont autorisées!

- potentiel thermoélastique quadratique

$$\rho_0 \psi_0(\tilde{\boldsymbol{E}}, T) =$$

Thermoélasticité linéarisée en petites déformations

- contexte des déformations thermoélastiques infinitésimales

$$\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\| \ll 1, \quad \frac{|T - T_0|}{T_0} \ll 1$$

les grandes rotations sont autorisées!

- potentiel thermoélastique quadratique

$$\begin{aligned}\rho_0 \psi_0(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, T) = & -\rho_0(T - T_0)\hat{s}^0 + \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0} (T - T_0)^2 \\ & - (T - T_0) \tilde{\boldsymbol{P}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}$$

Thermoélasticité linéarisée en petites déformations

- contexte des déformations thermoélastiques infinitésimales

$$\|\tilde{\boldsymbol{E}}\| \ll 1, \quad \frac{|T - T_0|}{T_0} \ll 1$$

les grandes rotations sont autorisées!

- potentiel thermoélastique quadratique

$$\begin{aligned}\rho_0 \psi_0(\tilde{\boldsymbol{E}}, T) &= -\rho_0(T - T_0)\hat{s}^0 + \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 : \tilde{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{2} \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0}(T - T_0)^2 \\ &\quad - (T - T_0)\tilde{\boldsymbol{P}} : \tilde{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{E}} : \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{E}}\end{aligned}$$

- lois d'état linéaires (affines)

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\Pi}} &= \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}} = \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{E}} - \tilde{\boldsymbol{P}}(T - T_0) \\ \rho_0 s_0 &= -\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial T} = \rho_0 \hat{s}^0 + \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0}(T - T_0) + \tilde{\boldsymbol{P}} : \tilde{\boldsymbol{E}}\end{aligned}$$

Thermoélasticité linéarisée en petites déformations

- contexte des déformations thermoélastiques infinitésimales

$$\|\boldsymbol{\xi}\| \ll 1, \quad \frac{|T - T_0|}{T_0} \ll 1$$

- lois d'état linéaires (affines)

$$\underline{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\boldsymbol{E}}} = \underline{\Pi}^0 + \underline{\Lambda} : \underline{\boldsymbol{E}} - \underline{\boldsymbol{P}}(T - T_0)$$

$$\rho_0 s_0 = -\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial T} = \rho_0 \hat{s}^0 + \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0}(T - T_0) + \underline{\boldsymbol{P}} : \underline{\boldsymbol{\xi}}$$

$\underline{\Lambda}$ tenseur des modules d'élasticité

C_ε chaleur massique à déformation constante

$\underline{\alpha} = \underline{\Lambda}^{-1} : \underline{\boldsymbol{P}}$ tenseur des dilatations thermiques

$\underline{\Pi}^0$ état de contrainte initial au point \underline{X}

- déformations d'origine thermique

$$\underline{\boldsymbol{\xi}}^{th} = (T - T_0)\underline{\alpha}$$

$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi}^0 + \underline{\Lambda} : (\underline{\boldsymbol{E}} - \underline{\boldsymbol{\xi}}^{th})$$

Tenseur des modules d'élasticité

- rigidités élastiques d'un corps matériel

$$\Lambda_{ijkl} := \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial E_{kl}}$$

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{E}, T) := \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{E}}(\tilde{E}, T) = \Lambda_{ijkl}(\tilde{E}, T) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$$

tenseur euclidien d'ordre 4

Tenseur des modules d'élasticité

- rigidités élastiques d'un corps matériel

$$\Lambda_{ijkl} := \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial E_{kl}}$$

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{E}, T) := \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{E}}(\tilde{E}, T) = \Lambda_{ijkl}(\tilde{E}, T) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$$

tenseur euclidien d'ordre 4

- symétries mineures du tenseur des modules résultant de la symétrie des tenseurs $\tilde{\Pi}$ et \tilde{E}

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{ijlk} = \Lambda_{jikl}$$

Tenseur des modules d'élasticité

- rigidités élastiques d'un corps matériel

$$\Lambda_{ijkl} := \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial E_{kl}}$$

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{E}, T) := \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{E}}(\tilde{E}, T) = \Lambda_{ijkl}(\tilde{E}, T) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$$

tenseur euclidien d'ordre 4

- symétries mineures du tenseur des modules résultant de la symétrie des tenseurs $\tilde{\Pi}$ et \tilde{E}

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{ijlk} = \Lambda_{jikl}$$

- symétries majeures du tenseur des modules résultant de l'existence du potentiel d'élasticité

$$\Lambda_{ijkl} =$$

Tenseur des modules d'élasticité

- rigidités élastiques d'un corps matériel

$$\Lambda_{ijkl} := \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial E_{kl}}$$

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{E}, T) := \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{E}}(\tilde{E}, T) = \Lambda_{ijkl}(\tilde{E}, T) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$$

tenseur euclidien d'ordre 4

- symétries mineures du tenseur des modules résultant de la symétrie des tenseurs $\tilde{\Pi}$ et \tilde{E}

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{ijlk} = \Lambda_{jikl}$$

- symétries majeures du tenseur des modules résultant de l'existence du potentiel d'élasticité

$$\Lambda_{ijkl} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial E_{ij}} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{kl}} \right) = \frac{\partial \Pi_{kl}}{\partial E_{ij}} = \Lambda_{klij}$$

Tenseur des modules d'élasticité

- rigidités élastiques d'un corps matériel

$$\Lambda_{ijkl} := \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial E_{kl}}$$

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{E}, T) := \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{E}}(\tilde{E}, T) = \Lambda_{ijkl}(\tilde{E}, T) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$$

tenseur euclidien d'ordre 4

- symétries mineures du tenseur des modules résultant de la symétrie des tenseurs $\tilde{\Pi}$ et \tilde{E}

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{ijlk} = \Lambda_{jikl}$$

- symétries majeures du tenseur des modules résultant de l'existence du potentiel d'élasticité

$$\Lambda_{ijkl} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial E_{ij}} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial E_{kl}} \right) = \frac{\partial \Pi_{kl}}{\partial E_{ij}} = \Lambda_{klij}$$

- tenseur des **souplesse**s

$$\tilde{E} = \tilde{E}^{th} + \tilde{S} : (\tilde{\Pi} - \tilde{\Pi}^0), \quad \tilde{S} = \tilde{\Lambda}^{-1}$$

Thermoélasticité linéarisée en petites déformations

cas des matériaux **isotropes**

$$\underline{\Pi} = \alpha_0(I_E, T)\underline{1} + \alpha_1(I_E, T)\underline{\underline{E}} + \alpha_2(I_E, T)\underline{\underline{E}}^2$$

I_E symbolise les invariants principaux de $\underline{\underline{E}}$

Thermoélasticité linéarisée en petites déformations

cas des matériaux **isotropes**

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}} = \alpha_0(I_E, T)\tilde{\mathbf{1}} + \alpha_1(I_E, T)\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}} + \alpha_2(I_E, T)\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^2$$

I_E symbolise les invariants principaux de $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}} = \Pi^0\tilde{\mathbf{1}} + \lambda(\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}})\tilde{\mathbf{1}} + 2\mu\tilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - P(T - T_0)\tilde{\mathbf{1}}$$

λ, μ **coefficients de Lamé** (MPa)

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Thermoélasticité linéarisée en petites transformations

- le contexte des transformations infinitésimales

$$\underline{\underline{H}} = \text{Grad } \underline{u} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\omega}}$$

$$\|\underline{\underline{H}}\| \ll 1, \quad \frac{|T - T_0|}{T_0} \ll 1$$

$$\|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \ll 1, \quad \|\underline{\underline{\omega}}\| \ll 1$$

les grandes rotations ne sont pas autorisées!

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

$$\underline{\underline{E}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Thermoélasticité linéarisée en petites transformations

- le contexte des transformations infinitésimales

$$\tilde{\boldsymbol{H}} = \text{Grad } \underline{\boldsymbol{u}} = \tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\mathbf{1}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\|\tilde{\boldsymbol{H}}\| \ll 1, \quad \frac{|T - T_0|}{T_0} \ll 1$$

$$\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\| \ll 1, \quad \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}\| \ll 1$$

les grandes rotations ne sont pas autorisées!

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}} \simeq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

- solides thermoélastiques linéaires

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}} = \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - (T - T_0) \tilde{\boldsymbol{P}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}} = \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}), \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th} = (T - T_0) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$$

Thermoélasticité linéarisée en petites transformations

- retour sur le tenseur des contraintes de Cauchy

$$\underline{\sigma} = \frac{\rho}{\rho_0} \underline{F} \cdot \underline{\Pi} \cdot \underline{F}^T = \frac{\rho}{\rho_0} (\underline{1} + \underline{H}) \cdot (\underline{\Pi}^0 + \underline{\Lambda} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{th})) \cdot (\underline{1} + \underline{H}^T)$$

- linéarisation en ne gardant que les termes d'ordre 1 en \underline{H}

Thermoélasticité linéarisée en petites transformations

- relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations infinitésimales

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho_0} \tilde{\boldsymbol{F}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}} \cdot \tilde{\boldsymbol{F}}^T = \frac{\rho}{\rho_0} (\tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\boldsymbol{H}}) \cdot (\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th})) \cdot (\tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\boldsymbol{H}}^T)$$

- linéarisation en ne gardant que les termes d'ordre 1 en $\tilde{\boldsymbol{H}}$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{th}) + \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 - (\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \tilde{\boldsymbol{H}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 + \tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 \cdot \tilde{\boldsymbol{H}}^T$$

Thermoélasticité linéarisée en petites transformations

- relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations infinitésimales

$$\tilde{\sigma} = \frac{\rho}{\rho_0} \tilde{F} \cdot \tilde{\Pi} \cdot \tilde{F}^T = \frac{\rho}{\rho_0} (\tilde{1} + \tilde{H}) \cdot (\tilde{\Pi}^0 + \tilde{\Lambda} : (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^{th})) \cdot (\tilde{1} + \tilde{H}^T)$$

- linéarisation en ne gardant que les termes d'ordre 1 en \tilde{H}

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\Lambda} : (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^{th}) + \tilde{\Pi}^0 - (\text{trace } \tilde{\varepsilon}) \tilde{\Pi}^0 + \tilde{H} \cdot \tilde{\Pi}^0 + \tilde{\Pi}^0 \cdot \tilde{H}^T$$

- en pratique, on a $\|\tilde{\Pi}^0\| \ll \|\tilde{\Lambda}\|$, $\frac{\sigma_0}{\mu} \sim 10^{-3}$

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\Lambda} : (\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}^{th}) + \tilde{\Pi}^0 + \tilde{\omega} \cdot \tilde{\Pi}^0 - \tilde{\Pi}^0 \cdot \tilde{\omega}$$

Thermoélasticité linéarisée en petites transformations

- relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations infinitésimales

$$\underline{\sigma} = \frac{\rho}{\rho_0} \underline{F} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{F}^T = \frac{\rho}{\rho_0} (\underline{1} + \underline{H}) \cdot (\underline{\underline{\Pi}}^0 + \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{th})) \cdot (\underline{1} + \underline{H}^T)$$

- linéarisation en ne gardant que les termes d'ordre 1 en \underline{H}

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{th}) + \underline{\underline{\Pi}}^0 - (\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{\underline{\Pi}}^0 + \underline{H} \cdot \underline{\underline{\Pi}}^0 + \underline{\underline{\Pi}}^0 \cdot \underline{H}^T$$

- en pratique, on a $\|\underline{\underline{\Pi}}^0\| \ll \|\underline{\underline{\Lambda}}\|$, $\frac{\sigma_0}{\mu} \sim 10^{-3}$

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{th}) + \underline{\underline{\Pi}}^0 + \underline{\omega} \cdot \underline{\underline{\Pi}}^0 - \underline{\underline{\Pi}}^0 \cdot \underline{\omega}$$

- linéarisation autour d'un **état naturel**: $\underline{\underline{\Pi}}^0 = 0 \implies \underline{\sigma} = \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{th})$
- linéarisation autour d'un **état quasi-naturel** $\|\underline{\omega} \cdot \underline{\underline{\Pi}}^0\| \ll \|\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\varepsilon}\|$

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\Pi}}^0 + \underline{\underline{\Lambda}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{th})$$

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Solide thermoélastique isotrope linéaire dans l'état quasi-naturel

- décomposition de la déformation totale $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^{th}$ avec $\tilde{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0)\mathbf{1}$
- loi de comportement thermoélastique linéaire isotrope (état quasi-naturel)

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^0\mathbf{1} + \lambda(\text{trace } \tilde{\varepsilon}^e)\mathbf{1} + 2\mu\tilde{\varepsilon}^e$$

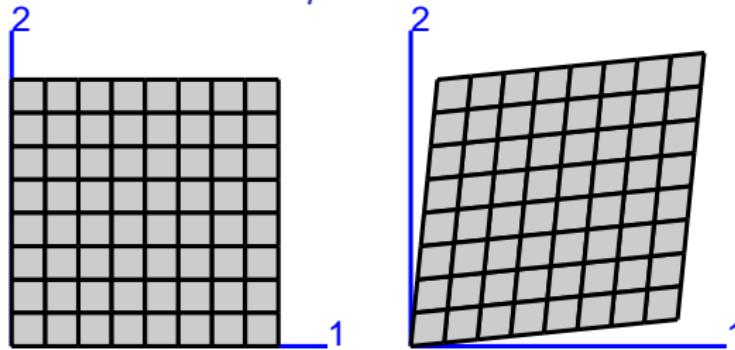
$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^0\mathbf{1} + \lambda(\text{trace } \tilde{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\tilde{\varepsilon} - 3\kappa\alpha(T - T_0)\mathbf{1}$$

avec

$$\kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

module de compressibilité

Module de cisaillement μ



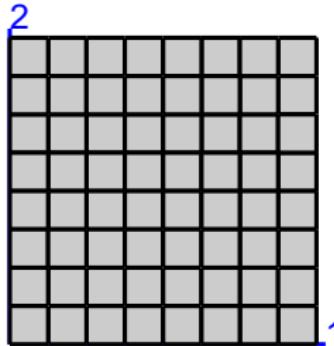
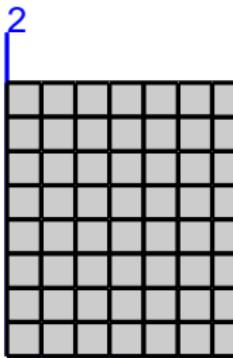
cisaillement simple

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\gamma}{2} X_2 \\ u_2 = \frac{\gamma}{2} X_1 \\ u_3 = 0 \end{cases} \quad [\boldsymbol{H}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\varepsilon}], \quad [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12} = \mu \gamma$$

acier : $\mu = 80000$ MPa, aluminium : $\mu = 26000$ MPa
PU : $\mu = 400$ MPa

Module de compressibilité κ



dilatation pure

$$\underline{u} = A \underline{X}, \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = A \underline{1}, \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}} = 3\kappa \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\text{trace } \underline{\boldsymbol{\sigma}} = 3\kappa \text{ trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

acier : $\kappa = 165000$ MPa, aluminium : $\kappa = 70000$ MPa

PU : $\kappa = 1700$ MPa, eau : $\kappa = 2000$ MPa

Les valeurs propres du tenseur des modules d'élasticité

- $\tilde{\Lambda}$ est un endomorphisme sur les tenseurs d'ordre 2 symétriques. Il est symétrique (auto-adjoint). On peut le voir aussi comme une forme bilinéaire symétrique :

$$\sigma : \tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon} : \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon}^* : \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}$$

- les valeurs propres du tenseur des modules d'élasticité isotrope linéarisée $\tilde{\Lambda}_{iso}^{iso}$ sont

Les valeurs propres du tenseur des modules d'élasticité

- $\tilde{\Lambda}$ est un endomorphisme sur les tenseurs d'ordre 2 symétriques. Il est symétrique (auto-adjoint). On peut le voir aussi comme une forme bilinéaire symétrique :

$$\sigma : \tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon} : \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon}^* : \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}$$

- les valeurs propres du tenseur des modules d'élasticité isotrope linéarisée $\tilde{\Lambda}^{iso}$ sont

- 3κ d'ordre 1

$$\tilde{\Lambda}^{iso} : \tilde{\varepsilon}^{sph} = 3\kappa \tilde{\varepsilon}^{sph}$$

- 2μ d'ordre 5

$$\tilde{\Lambda}^{iso} : \tilde{\varepsilon}^{dev} = 2\mu \tilde{\varepsilon}^{dev}$$

- **stabilité** locale du milieu élastique autour de l'état naturel : le tenseur des modules est défini positif

$$\kappa > 0, \quad \mu > 0$$

(i.e. l'état naturel est observable)

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Inversion de la loi de thermoélasticité linéaire isotrope

- trace et déviateur

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}^e) \underline{\mathbf{1}} + 2\mu \underline{\varepsilon}^e$$

Inversion de la loi de thermoélasticité linéaire isotrope

- trace et déviateur

$$\Rightarrow \text{trace } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{3\kappa} \text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^{\text{dev}} = \frac{1}{2\mu} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}{3} \tilde{\mathbf{1}} + (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^{\text{dev}} = \frac{\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{9\kappa} \tilde{\mathbf{1}} + \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}}{2\mu}$$

Inversion de la loi de thermoélasticité linéaire isotrope

- trace et déviateur

$$\Rightarrow \text{trace } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{3\kappa} \text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^{\text{dev}} = \frac{1}{2\mu} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}{3} \tilde{\mathbf{1}} + (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^{\text{dev}} = \frac{\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{9\kappa} \tilde{\mathbf{1}} + \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}}{2\mu}$$

- relations d'élasticité linéaire isotrope (état naturel)

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \tilde{\mathbf{1}}$$

E module de Young (MPa), ν coefficient de Poisson

Inversion de la loi de thermoélasticité linéaire isotrope

- trace et déviateur

$$\Rightarrow \text{trace } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1}{3\kappa} \text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^{\text{dev}} = \frac{1}{2\mu} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e}{3} \mathbf{1} + (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e)^{\text{dev}} = \frac{\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{9\kappa} \mathbf{1} + \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}}{2\mu}$$

- relations d'élasticité linéaire isotrope (état naturel)

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{1}$$

E module de Young (MPa), ν coefficient de Poisson

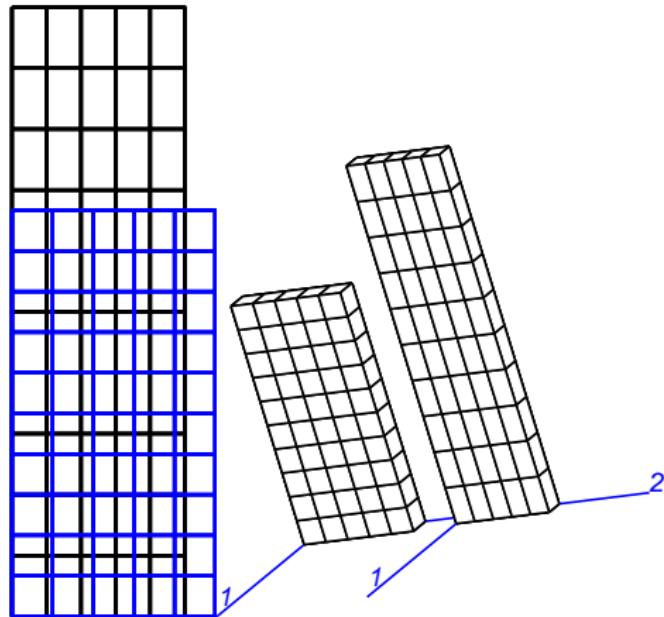
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}, \quad \kappa = \frac{3\lambda+2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

- stabilité élastique

$$E > 0, \quad -1 < \nu < 0.5$$

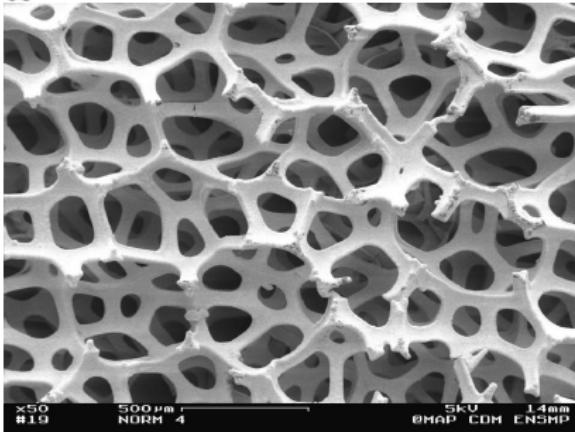
Traction simple en élasticité linéaire isotrope



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -\nu \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{E} \end{bmatrix}$$

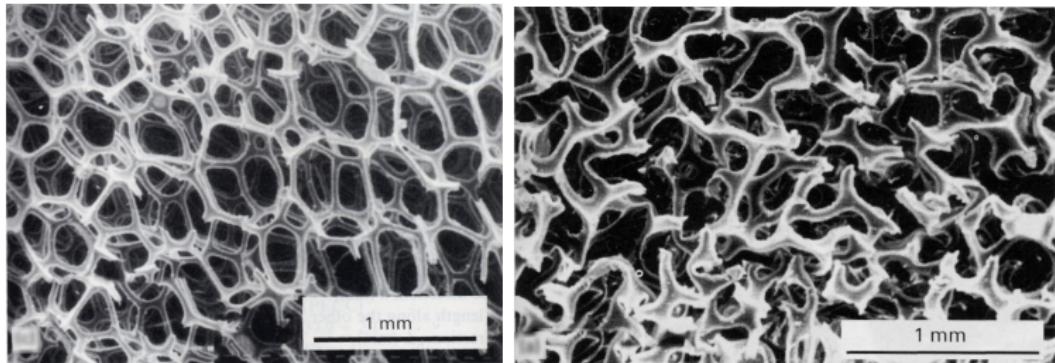
- acier : $E = 200000$ MPa, $\nu = 0.3$
aluminium : $E = 70000$ MPa, $\nu = 0.33$,
PU $E = 2000$ MPa, $\nu = 0.4$
en général $0 < \nu < 0.5$
- matériaux cellulaires



$$\nu \simeq 0$$

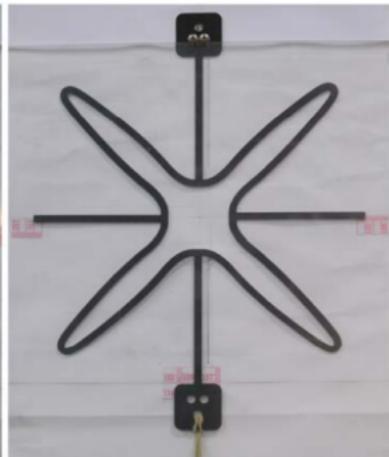
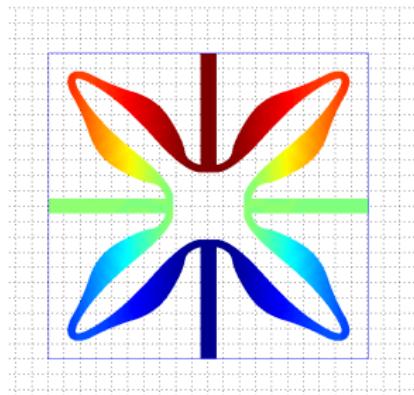
Matériaux auxétiques

coefficient de Poisson négatif !



[Lakes, 1987]

Métamatériaux : matériaux architecturés auxétiques



[Wang et al., 2017, Wang et al., 2019]

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Notation de Voigt

représentation matricielle de l'algèbre des tenseurs d'ordre 2 symétriques

- matrice des rigidités

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

- le nombre de composantes indépendantes dépend du groupe des symétries matérielles du milieu considéré
cas **triclinique** : 21 coefficients indépendants

Notation de Voigt

représentation matricielle de l'algèbre des tenseurs d'ordre 2 symétriques

- matrice des rigidités

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

- le nombre de composantes indépendantes dépend du groupe des symétries matérielles du milieu considéré
cas **monoclinique** : 13 coefficients indépendants

Notation de Voigt

représentation matricielle de l'algèbre des tenseurs d'ordre 2 symétriques

- matrice des rigidités

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

- le nombre de composantes indépendantes dépend du groupe des symétries matérielles du milieu considéré
cas **orthotrope** : 9 coefficients indépendants

Notation de Voigt

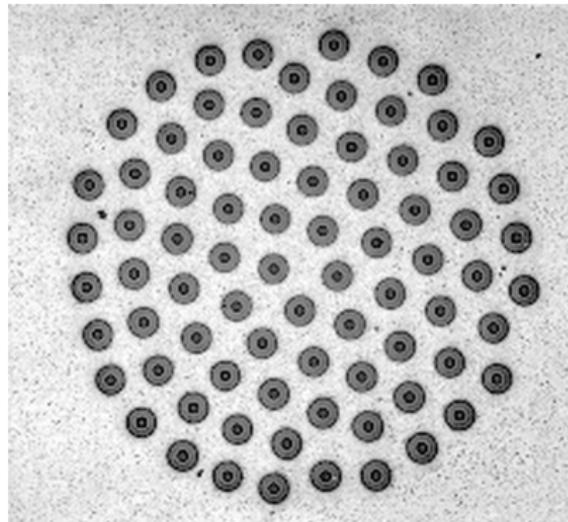
représentation matricielle de l'algèbre des tenseurs d'ordre 2 symétriques

- matrice des rigidités

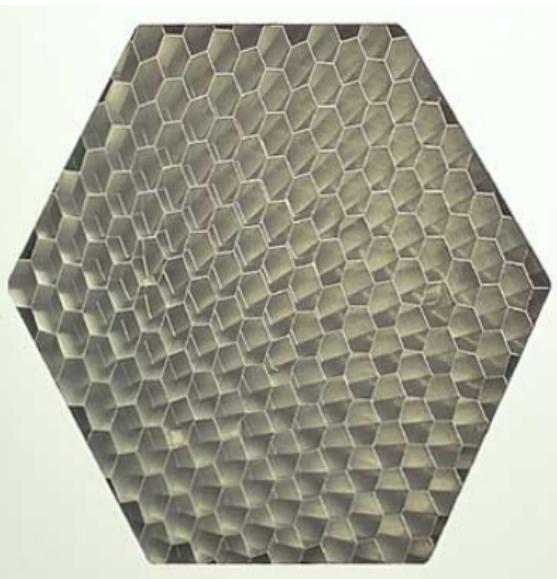
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{31} = 2\varepsilon_{31} \\ \gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

- le nombre de composantes indépendantes dépend du groupe des symétries matérielles du milieu considéré
cas **isotrope** : 2 coefficients $C_{11} = \lambda + 2\mu$, $C_{12} = \lambda$, $C_{44} = \mu$

Isotropie transverse



matériaux composites
(fibre 100 μm)



nids d'abeille
(taille de cellule 1 cm)

[Carrère et al., 2003]

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Equation de la chaleur

- équation de la chaleur en thermoélasticité linéaire

$$\rho_0 T_0 \dot{s} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} = 0$$

$$\rho_0 s = \rho_0 s^0 + \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0} (T - T_0) + 3\alpha\kappa(\operatorname{trace} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

Equation de la chaleur

- équation de la chaleur en thermoélasticité linéaire

$$\rho_0 T_0 \dot{s} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} = 0$$

$$\rho_0 s = \rho_0 s^0 + \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0} (T - T_0) + 3\alpha\kappa(\operatorname{trace} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

- conduction thermique linéarisée $\underline{\boldsymbol{q}} = -k \nabla T$

$$\rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \underbrace{3\kappa\alpha T_0 (\operatorname{trace} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})}_{\text{couplage thermomécanique}} - k \Delta T = 0$$

Equation de la chaleur

- équation de la chaleur en thermoélasticité linéaire

$$\rho_0 T_0 \dot{s} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} = 0$$

$$\rho_0 s = \rho_0 s^0 + \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0} (T - T_0) + 3\alpha\kappa(\operatorname{trace} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

- conduction thermique linéarisée $\underline{\boldsymbol{q}} = -k \nabla T$

$$\rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \underbrace{3\kappa\alpha T_0 (\operatorname{trace} \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}})}_{\text{couplage thermomécanique}} - k \Delta T = 0$$

- régime permanent $\Delta T = 0$
- régime homogène (adiabatique) $\rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + 3\kappa\alpha T_0 (\operatorname{trace} \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = 0$

Equation de la chaleur

- équation de la chaleur en thermoélasticité linéaire

$$\rho_0 T_0 \dot{s} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} = 0$$

$$\rho_0 s = \rho_0 s^0 + \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0} (T - T_0) + 3\alpha\kappa(\operatorname{trace} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

- conduction thermique linéarisée $\underline{\boldsymbol{q}} = -k \nabla T$

$$\rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \underbrace{3\kappa\alpha T_0 (\operatorname{trace} \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}})}_{\text{couplage thermomécanique}} - k \Delta T = 0$$

- régime permanent $\Delta T = 0$
- régime homogène (adiabatique) $\rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + 3\kappa\alpha T_0 (\operatorname{trace} \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = 0$
traction simple :
quand on tire, le matériau se refroidit!

$$T - T_0 = -\frac{E\alpha T_0}{\rho_0 C_\varepsilon} \varepsilon_{33}$$

$$T - T_0 = -\frac{200 \cdot 10^9 \times 10^{-5} \times 300}{7800 \times 500} \times 0.001 \simeq -0.15 \text{K}$$

Equation de la chaleur

- équation de la chaleur en thermoélasticité linéaire

$$\rho_0 T_0 \dot{s} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{q}} = 0$$

$$\rho_0 s = \rho_0 s^0 + \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0} (T - T_0) + 3\alpha\kappa(\operatorname{trace} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

- conduction thermique linéarisée $\underline{\mathbf{q}} = -k \nabla T$

$$\rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + \underbrace{3\kappa\alpha T_0 (\operatorname{trace} \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}})}_{\text{couplage thermomécanique}} - k \Delta T = 0$$

- régime permanent $\Delta T = 0$
- régime homogène (adiabatique) $\rho_0 C_\varepsilon \dot{T} + 3\kappa\alpha T_0 (\operatorname{trace} \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = 0$
traction simple :
quand on tire, le matériau se refroidit!

$$T - T_0 = -\frac{E\alpha T_0}{\rho_0 C_\varepsilon} \varepsilon_{33}$$

- échauffements importants dans le cas de comportements non linéaires (viscoplasticité)

Plan

1 Loi de comportement thermoélastique linéarisée

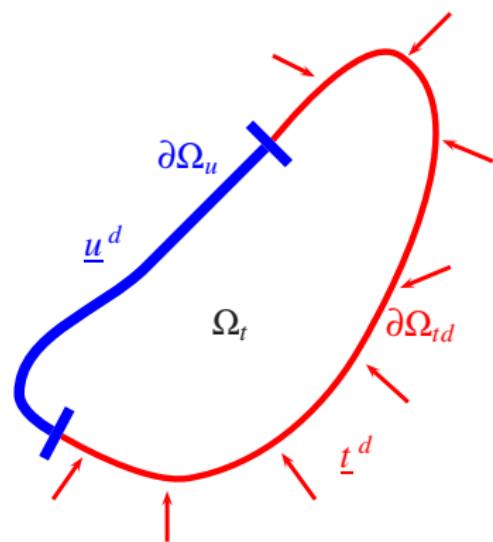
- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

2 Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

3 Bilan

Problème d'équilibre d'un solide thermoélastique



- sollicitations (champ $T(\underline{x})$ donné)
 - efforts volumiques

$$\rho \underline{f}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega_t$$

- efforts surfaciques

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t}^d(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial\Omega_{td}$$

- déplacements imposés

$$\underline{u} = \underline{u}^d, \quad \underline{x} \in \partial\Omega_u$$

- équation de champ

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0, \quad \underline{x} \in \Omega_t$$

- loi de comportement élastique

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathcal{F}_{\Omega_0}(\underline{F}(\underline{X}), T(\underline{X}))$$

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

L'hypothèse des petites perturbations (HPP)

les hypothèses présidant à la linéarisation du problème d'équilibre sont :

- contexte infinitésimal : petite déformation+petite rotation

$$\|\text{Grad } \underline{u}\| \sim h \ll 1$$

L'hypothèse des petites perturbations (HPP)

les hypothèses présidant à la linéarisation du problème d'équilibre sont :

- contexte infinitésimal : petite déformation+petite rotation

$$\|\text{Grad } \underline{u}\| \sim h \ll 1$$

- variations limitées de température

L'hypothèse des petites perturbations (HPP)

les hypothèses présidant à la linéarisation du problème d'équilibre sont :

- contexte infinitésimal : petite déformation+petite rotation

$$\|\text{Grad } \underline{u}\| \sim h \ll 1$$

- variations limitées de température
- état initial naturel

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 = 0$$

dans le cas d'un état initial quasi-naturel, les résultats sont valides en remplaçant $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ par $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$

L'hypothèse des petites perturbations (HPP)

les hypothèses présidant à la linéarisation du problème d'équilibre sont :

- contexte infinitésimal : petite déformation+petite rotation

$$\|\text{Grad } \underline{\boldsymbol{u}}\| \sim h \ll 1$$

- variations limitées de température
- état initial naturel

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}}^0 = 0$$

dans le cas d'un état initial quasi-naturel, les résultats sont valides en remplaçant $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ par $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^0$

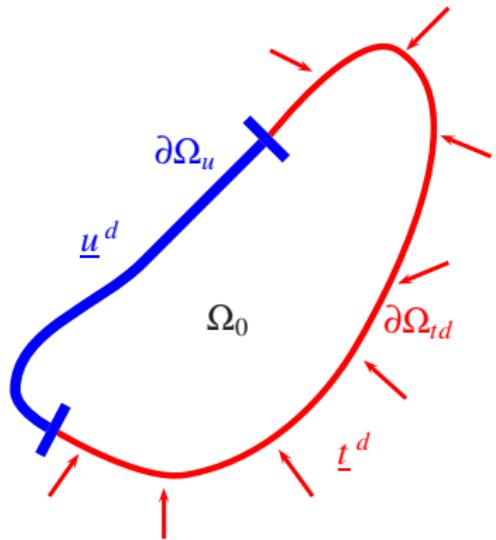
- solide thermoélastique **homogène** (et isotrope dans la suite, par commodité). Si le milieu est homogène par morceaux, il faudra écrire des conditions d'interface

Elles constituent le cadre HPP.

Problème d'équilibre thermoélastique linéarisé

- sollicitations (champ $T(\underline{X})$ donné)
 - efforts surfaciques

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{N} = \underline{t}^d(\underline{X}), \quad \underline{X} \in \partial\Omega_{td}$$



- déplacements imposés

$$\underline{u} = \underline{u}^d, \quad \underline{X} \in \partial\Omega_u$$

- équation de champ

$$\operatorname{Div} \underline{\sigma}(\underline{X}) + \rho_0 \underline{f}(\underline{X}) = 0, \quad \underline{X} \in \Omega_0$$

- loi de comportement élastique (état naturel)

$$\underline{\sigma}(\underline{X}) = \underline{\Lambda} : (\underline{\varepsilon} - (T - T_0) \underline{\alpha})$$

in fine, tout se passe dans les équations **comme si \underline{X} et \underline{x} coïncidaient.**

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Problème d'équilibre thermoélastique linéarisé

le problème aux limites posé consiste à chercher les champs $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ sur Ω_0 tels que

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{u} + (\text{grad } \underline{u})^T), \forall \underline{X} \in \Omega_0 & \text{compatibilité} \\ \text{Div } \underline{\sigma} + \rho_0 \underline{f} = 0, \forall \underline{X} \in \Omega_0 & \text{équilibre} \\ \underline{\sigma} = \underline{\Lambda} : (\underline{\varepsilon} - (T - T_0) \underline{\alpha}), \forall \underline{X} \in \Omega_0 & \text{loi de comportement} \\ u_i = u_i^d, \forall \underline{X} \in \partial \Omega_u^i & \text{conditions aux limites} \\ t_i = \sigma_{ij} N_j = t_i^d, \forall \underline{X} \in \partial \Omega_{td}^i & \end{array} \right.$$

conditions aux limites : en chaque point du bord, il faut donner 3 informations (déplacement ou effort) selon trois directions orthogonales

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

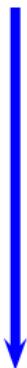
② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

Schéma de résolution par la méthode des déplacements

déplacement

$$\underline{u}$$

$$\underline{\varepsilon} = (\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T)/2$$

déformations

$$\underline{\varepsilon}$$

Schéma de résolution par la méthode des déplacements

déplacement

$$\underline{u}$$

$$\underline{\varepsilon} = (\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T)/2$$

déformations

$$\underline{\varepsilon}$$

contraintes

$$\underline{\sigma}$$

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\underline{\varepsilon}$$

loi de comportement



Schéma de résolution par la méthode des déplacements

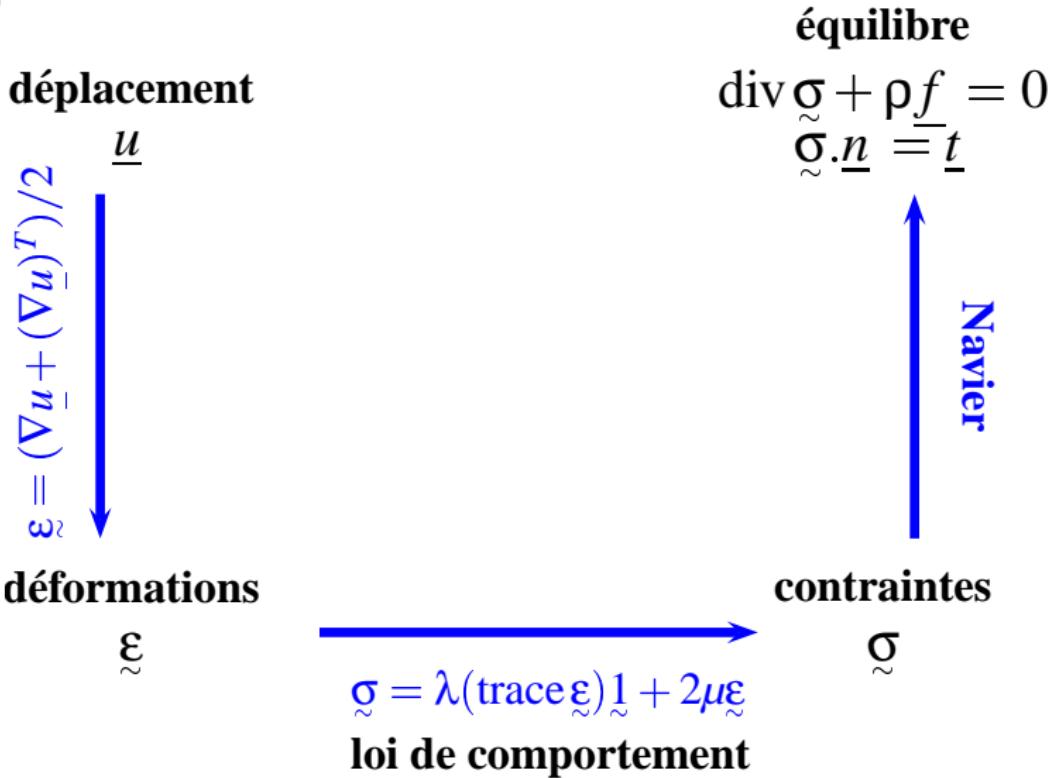


Schéma de résolution par la méthode des contraintes

équilibre

$$\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \rho f = 0$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{t}$$



contraintes

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$$

Schéma de résolution par la méthode des contraintes

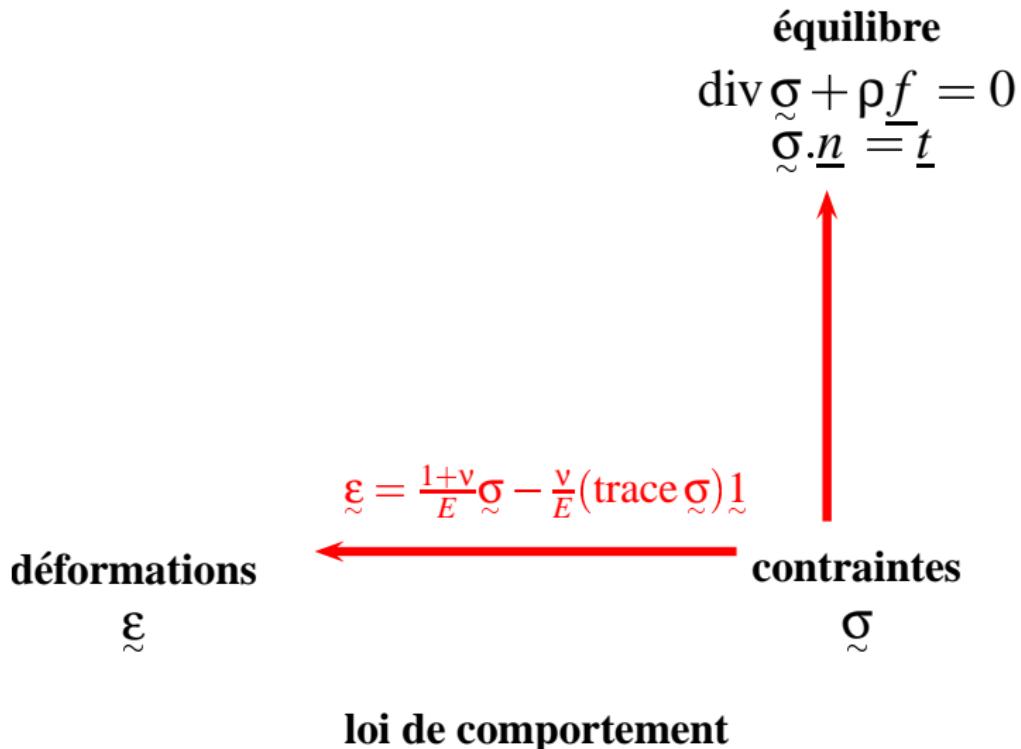
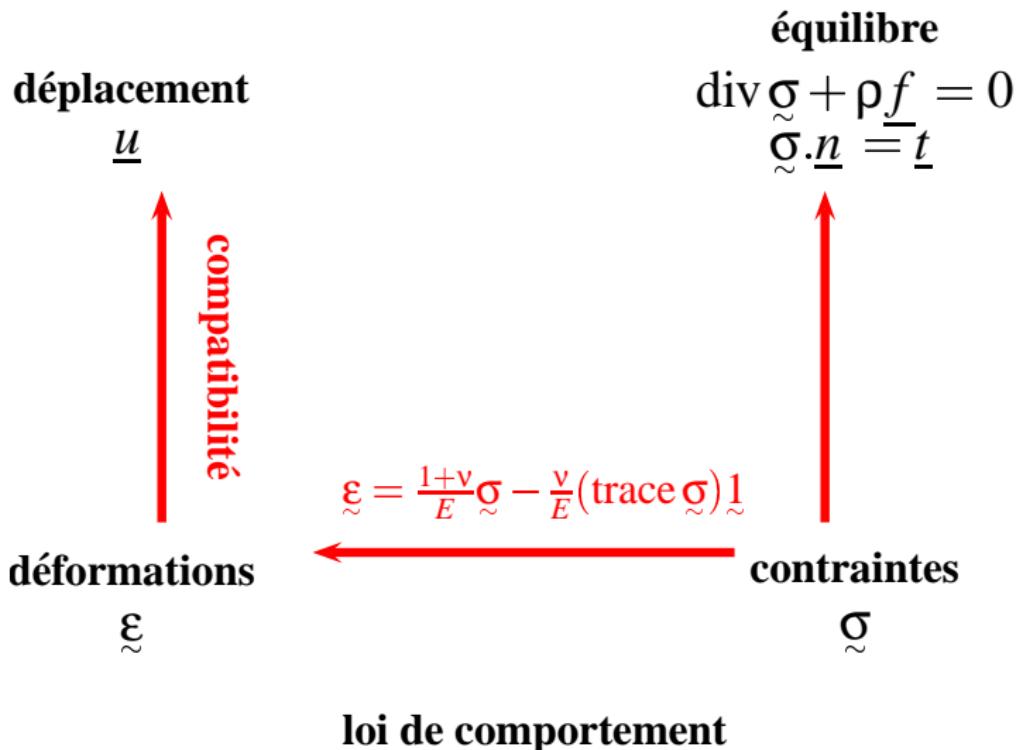


Schéma de résolution par la méthode des contraintes



Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

La question de l'unicité

- Théorème des travaux virtuels dans le cas statique (en l'absence de discontinuité)

Le champ de contraintes $\underline{\sigma}$ sur un corps matériel Ω soumis aux conditions \underline{f} , \underline{t}^d et \underline{u}^d vérifie les équations d'équilibre

div $\underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0$ en tout point si et seulement si, on a

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^* dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial \Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^* dS + \int_{\partial \Omega_u} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS$$

pour tout champ \underline{u}^ tel que $\underline{u}^* = \underline{u}^d$ sur $\partial \Omega_u$.*

La question de l'unicité

- Théorème des travaux virtuels dans le cas statique (en l'absence de discontinuité)

Le champ de contraintes $\underline{\sigma}$ sur un corps matériel Ω soumis aux conditions \underline{f} , \underline{t}^d et \underline{u}^d vérifie les équations d'équilibre

div $\underline{\sigma}$ + $\rho \underline{f}$ = 0 en tout point si et seulement si, on a

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^* dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^* dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS$$

pour tout champ \underline{u}^ tel que $\underline{u}^* = \underline{u}^d$ sur $\partial\Omega_u$.*

- Soient maintenant $(\underline{\sigma}_A, \underline{\varepsilon}_A)$ et $(\underline{\sigma}_B, \underline{\varepsilon}_B)$ deux solutions sur Ω du problème aux limites

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_A : \underline{\varepsilon}_A dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}_A dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}_A dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}_A \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS$$

la question de l'unicité

- Théorème des travaux virtuels dans le cas statique (en l'absence de discontinuité)

Le champ de contraintes $\underline{\sigma}$ sur un corps matériel Ω soumis aux conditions $\underline{f}, \underline{t}^d$ et \underline{u}^d vérifie les équations d'équilibre

div $\underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0$ en tout point si et seulement si, on a

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^* dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^* dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS$$

pour tout champ \underline{u}^ tel que $\underline{u}^* = \underline{u}^d$ sur $\partial\Omega_u$.*

- Soient maintenant $(\underline{\sigma}_A, \underline{\varepsilon}_A)$ et $(\underline{\sigma}_B, \underline{\varepsilon}_B)$ deux solutions sur Ω du problème aux limites

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_A : \underline{\varepsilon}_A dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}_A dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}_A dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}_A \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS$$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_A : \underline{\varepsilon}_B dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}_B dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}_B dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}_A \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS$$

la question de l'unicité

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_A : \underline{\varepsilon}_A \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}_A \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}_A \, dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}_A \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d \, dS$$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_A : \underline{\varepsilon}_B \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}_B \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}_B \, dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}_A \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d \, dS$$

la question de l'unicité

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_A : \underline{\varepsilon}_A \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}_A \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}_A \, dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}_A \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d \, dS$$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_A : \underline{\varepsilon}_B \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}_B \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}_B \, dS + \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}_A \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d \, dS$$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_A : \Delta \underline{\varepsilon} \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \Delta \underline{u} \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \Delta \underline{u} \, dS$$

$$\Delta \underline{u} = \underline{u}_A - \underline{u}_B, \quad \Delta \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_A - \underline{\varepsilon}_B$$

la question de l'unicité

$$\int_{\Omega} \sigma_A : \Delta \underline{\varepsilon} \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\Delta u} \, dV + \int_{\partial \Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{\Delta u} \, dS$$

$$\int_{\Omega} \sigma_B : \Delta \underline{\varepsilon} \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\Delta u} \, dV + \int_{\partial \Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{\Delta u} \, dS$$

la question de l'unicité

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_A : \Delta \underline{\varepsilon} \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\Delta u} \, dV + \int_{\partial \Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{\Delta u} \, dS$$

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}_B : \Delta \underline{\varepsilon} \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{\Delta u} \, dV + \int_{\partial \Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{\Delta u} \, dS$$

$$\int_{\Omega} \underline{\Delta \sigma} : \Delta \underline{\varepsilon} \, dV = 0$$

$$\underline{\Delta \sigma} = \underline{\sigma}_A - \underline{\sigma}_B$$

la question de l'unicité

$$\int_{\Omega} \Delta \tilde{\sigma} : \Delta \tilde{\varepsilon} \, dV = 0$$

loi de comportement

$$\tilde{\sigma}_A = \underset{\approx}{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}_A, \quad \tilde{\sigma}_B = \underset{\approx}{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}_B$$

d'où

$$\int_{\Omega} \Delta \tilde{\varepsilon} : \underset{\approx}{\Lambda} : \Delta \tilde{\varepsilon} \, dV = 0$$

une **condition suffisante d'unicité** : $\underset{\approx}{\Lambda}$ défini positif

Existence et unicité

- Problème aux limites de **Dirichlet**

$$\underline{u}(\underline{X}) = \underline{u}^d(\underline{X}), \quad \forall \underline{X} \in \partial\Omega_0$$

l'existence et l'unicité sont assurées
le problème est **bien posé**

- Problème aux limites de **Neumann**

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t}^d, \quad \forall \underline{X} \in \Omega_0$$

l'existence est assurée ainsi que l'unicité à un mouvement de corps rigide près (mais rotation infinitésimale)

- Conditions aux limites mixtes $\partial\Omega_u^i, \partial\Omega_{td}^i$
- Conditions aux limites non linéaires (contact)

Théorème de superposition

Le problème (\mathcal{P}) ainsi posé est linéaire. On entend par là que si

- $(\underline{\mathbf{u}}^A, \underline{\boldsymbol{\sigma}}^A)$ est une solution du problème (\mathcal{P}) pour les données $(\underline{\mathbf{f}}^A, u_i^{dA}, t_i^{dA})$;
- et si $(\underline{\mathbf{u}}^B, \underline{\boldsymbol{\sigma}}^B)$ est une solution du problème (\mathcal{P}) pour les données $(\underline{\mathbf{f}}^B, u_i^{dB}, t_i^{dB})$;

alors, pour tous les réels λ_A et λ_B ,

- $(\lambda_A \underline{\mathbf{u}}^A + \lambda_B \underline{\mathbf{u}}^B, \lambda_A \underline{\boldsymbol{\sigma}}^A + \lambda_B \underline{\boldsymbol{\sigma}}^B)$ est une solution du problème (\mathcal{P}) pour les données $(\lambda_A \underline{\mathbf{f}}^A + \lambda_B \underline{\mathbf{f}}^B, \lambda_A u_i^{dA} + \lambda_B u_i^{dB}, \lambda_A t_i^{dA} + \lambda_B t_i^{dB})$.

Cette propriété est parfois appelée **principe de superposition**. Elle permet de calculer l'état de contrainte et de déformation d'un solide pour plusieurs chargement successifs. C'est tout à fait licite à condition toutefois de veiller à chaque étape à la validité du cadre HPP (transformation infinitésimale et états successifs quasi-naturels).

Pour l'appliquer, il faut que les domaines $\partial\Omega_u^i$ et $\partial\Omega_d^i$ soient identiques pour les deux chargements A et B .

Plan

① Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

② Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

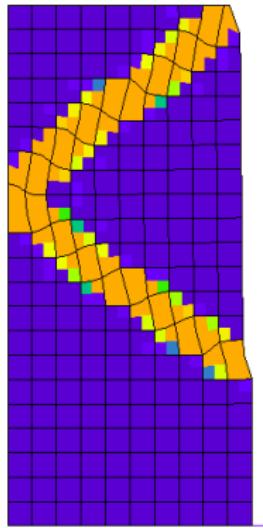
- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

③ Bilan

la question de la stabilité



flambage



localisation

Warning! Le cadre HPP a un domaine de validité limité. Pour déterminer ce domaine, il faut en sortir!

Lorsque l'unicité de la solution est perdue, certaines solutions peuvent être instables. Exemple : état de compression homogène dans une barre élancée (flambage d'Euler)

Plan

1 Loi de comportement thermoélastique linéarisée

- Cas des déformations infinitésimales
- Cas des transformations infinitésimales
- Solides thermoélastiques linéaires isotropes
- Module de Young et coefficient de Poisson
- Anisotropie
- Couplage thermoélastique

2 Le problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

- Linéarisation des équations d'équilibre
- Formulation du problème aux limites
- Schémas de résolution
- Existence et unicité
- Stabilité

3 Bilan

Bilan

déplacement

\underline{u}

$$\mathcal{Z} / \mathcal{Z}_T(\bar{\Delta}) + \bar{\Delta} = \mathfrak{Z}$$


compatibilité

déformations

ε

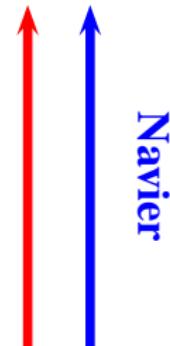
$$\varepsilon = \frac{1+v}{E} \sigma - \frac{v}{E} (\text{trace } \sigma) \mathbf{1}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\sigma = \lambda (\text{trace } \varepsilon) \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon$$

loi de comportement

$$\begin{aligned}\text{équilibre} \\ \text{div } \tilde{\sigma} + \rho \underline{f} = 0 \\ \tilde{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t}\end{aligned}$$



Navier

constraintes

σ

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon}$$

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon}$$

Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div } \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u} + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$$

Déplacement u

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon}$$

Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div } \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u} + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$$

Déplacement u

Existence et unicité des solutions : oui

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon}$$

Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda + \mu) \text{grad} (\text{div } \underline{u}) + \mu \Delta \underline{u} + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$$

Déplacement \underline{u}

Existence et unicité des solutions : oui

- Fluides newtoniens :

$$\underline{\sigma} = -p \underline{1} + \lambda(\text{trace } \underline{D}) \underline{1} + 2\mu \underline{D}$$

Coefficients de viscosité (Pa.s) : λ, μ

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon}$$

Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div } \underline{u}) + \mu\Delta \underline{u} + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$$

Déplacement \underline{u}

Existence et unicité des solutions : oui

- Fluides newtoniens :

$$\underline{\sigma} = -p \underline{1} + \lambda(\text{trace } \underline{D}) \underline{1} + 2\mu \underline{D}$$

Coefficients de viscosité (Pa.s) : λ, μ

$$(\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div } \underline{v}) + \mu\Delta \underline{v} - \text{grad } p + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$$

Vitesse $\underline{v} = \dot{\underline{u}}$

Navier vs Navier–Stokes

- Solides élastiques linéaires isotropes : loi de Hooke + HPP

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\xi}) \underline{1} + 2\mu \underline{\xi}$$

Constantes de Lamé (Pa) : λ, μ

$$(\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div } \underline{u}) + \mu\Delta \underline{u} + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$$

Déplacement \underline{u}

Existence et unicité des solutions : oui

- Fluides newtoniens :

$$\underline{\sigma} = -p \underline{1} + \lambda(\text{trace } \underline{D}) \underline{1} + 2\mu \underline{D}$$

Coefficients de viscosité (Pa.s) : λ, μ

$$(\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div } \underline{v}) + \mu\Delta \underline{v} - \text{grad } p + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$$

Vitesse $\underline{v} = \dot{\underline{u}}$

Existence et unicité des solutions : ???

L'un des 23 problèmes posés par Hilbert en 1900.

L'un des 7 problèmes non résolus à 1 million de dollars posé au Collège de France en 2000.

-  Carrère, N., Feyel, F., and Kruch, S. (2003).
Multi-scale modelling of silicon carbide reinforced titanium MMCs : Application to advanced compressor design.
Aerospace Science and Technology, 7:307–315.
-  Lakes, R. (1987).
Foam structures with a negative poisson's ratio.
Science, 235:1038–1040.
-  Wang, Z. P., Poh, L. H., Dirrenberger, J., Zhu, Y., and Forest, S. (2017).
Isogeometric shape optimization of smoothed petal auxetic structures via computational periodic homogenization.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 323:250–271.
-  Wang, Z.-P., Poh, L.-H., Zhu, Y., Dirrenberger, J., and Forest, S. (2019).
Systematic design of tetra-petals auxetic structures with stiffness constraint.
Materials & Design, 170:107669.