

1A



VIANNEY

Mais t'es pas là, mais t'es où ?
Palum ?

SOMMAIRE

Préface.....	2
Maths 1 (sujet + corrigé).....	3-23
MMC (sujet + corrigé).....	24-65
Optimisation (s + c).....	66-77
QSE (s. + exemple).....	78-81
Physique quantique (s + c).....	82-105
DATA (s + c + e + projet).....	106-129
Génie énergétique (s + c).....	130-140
Physique statistique (s + c).....	141-154
Maths 2 (s + c).....	155-173
Comptabilité générale (s).....	174-180
EC [Janco] (s).....	181

Élève mineur,

Si vous êtes en train de lire ces lignes, c'est probablement que l'heure est grave, de toute évidence les pâles approche et ça commence à sentir le roussi. Ce n'est pas le stress qui accompagne un DS de prépa pas tout à fait assez préparé qui vous saisit aux tripes, celui-là ne vous impressionne sûrement même plus... Non, cette fois c'est le stress de devoir réaliser un DS *pas du tout* préparé, une **Pâle** pour nommer ce maux qui n'était jusqu'à maintenant qu'une lointaine fiction. La barre des 10/20 qui vous paraissait si simple à atteindre au début de l'année parait pratiquement infranchissable après ces quelques semaines ~~de décrochage scolaire~~ d'intégration...

Infranchissable ? Non ! Un petit Palum peuplé des corrigés des pâles de l'année précédentes permet aux mineurs de résister encore et toujours à l'échec scolaire ! Cet objet mythique que vous tenez entre vos mains devrait vous permettre de réussir (ou au moins de sauver les meubles). Alors Biérologue, listeux, peigne, picheur, fraîcheur, chaleur, si vous lisez ces lignes, c'est qu'il est encore temps ! Je ne vous retiens pas plus longtemps, filez découvrir ces pages.

Álvaro Alvites et Alban Revel

VP Palum Eldoramine

Examen – Calcul Différentiel, Intégral et Stochastique

STEP, MINES ParisTech*

15 septembre 2020 (#81fed9b)

Table des matières

Calcul intégral	1
Préambule	2
Intervalle borné	3
Calcul Différentiel	3
Préliminaires dans \mathbb{R}^2	3
Cadre général	5
Probabilités	6
Préliminaires – Espérance et fonction de répartition	6
Etude du maximum – Loi de Fréchet	7

L'examen comporte 3 exercices indépendants notés comme suit :

Intitulé de l'exercice	Barème	Hors barème
Calcul Intégral	20 pts	+4 pts
Calcul Différentiel	20 pts	+6 pts
Probabilités	20 pts	+8 pts

Utilisez un jeu de copies différent pour chaque exercice et indiquez l'intitulé de l'exercice en en-tête de chaque copie.

Calcul intégral

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs.

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_k < +\infty$ et $0 \leq b_k < +\infty$.

*Ce document est un des produits du projet **boisgera/CDIS**, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d'utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de valeurs définie par $x_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{2k+1} = x_{2k} + a_k \text{ et } x_{2k+2} = x_{2k+1} + b_k.$$

$(x_0 = 0, x_1 = a_0, x_2 = a_0 + b_0, x_3 = a_0 + b_0 + a_1, x_4 = a_0 + b_0 + a_1 + b_1, \text{ etc.}).$
On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_{2k} \leq x < x_{2k+1}, \\ -1 & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_{2k+1} \leq x < x_{2k+2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

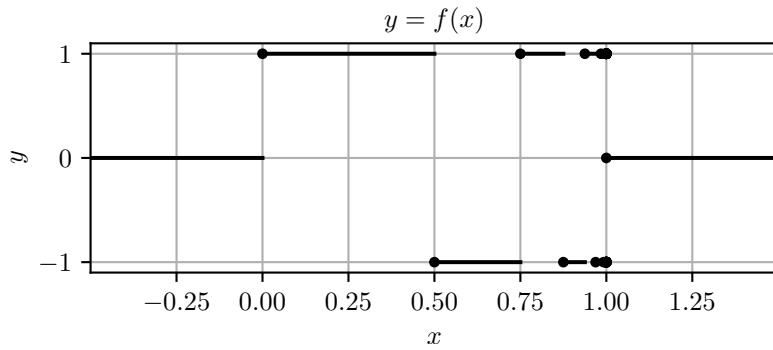


FIGURE 1 – Graphe de f pour $a_k = 2^{-2k-1}$ et $b_k = 2^{-2k-2}$.

Préambule

On s'intéresse dans un premier temps à la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0, x_n]$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné.

1. Soit $\delta > 0$. Montrer que la fonction γ qui à tout $t \in [0, x_n]$ associe l'ensemble

$$\gamma(t) =]t - \delta/2, t + \delta/2[$$

est une jauge sur $[0, x_n]$.

2. Sommes-nous certains qu'il existe une subdivision pointée \mathcal{D} de $[0, x_n]$ subordonnée à la jauge γ ? En construire une le cas échéant.
3. Quelle est la valeur de l'intégrale de f sur $[0, x_n]$? Justifier que f est bien intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur $[0, x_n]$ ainsi que la valeur de cette intégrale.
4. Soit \mathcal{D} une subdivision pointée de $[0, x_n]$ subordonnée à γ . Montrer que¹

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_0^{x_n} f(x) dx \right| \leq 2(n+1)\delta.$$

1. **Indication :** on pourra considérer toutes les paires $(t, [a, b]) \in \mathcal{D}$ intervenant dans la somme de Riemann $S(f, \mathcal{D})$ puis majorer

$$\left| f(t)(b-a) - \int_a^b f(x) dx \right|$$

en distinguant les intervalles $[a, b]$ qui contiennent au moins un x_k ($k \in \{0, \dots, n\}$) et ceux qui n'en contiennent pas.

Intervalle borné

On suppose dans cette section que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 2^{-2k-1}$ et $b_k = 2^{-2k-2}$.

5. Calculer x_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la limite $S := \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ existe et est finie (on donnera sa valeur).
6. Montrer que la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, x_n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil. En déduire que la fonction f est mesurable.

7. Montrer que pour tout couple (a, b) tel que $0 \leq a \leq b \leq +\infty$, l'intervalle $[a, b]$ est mesurable. Quelles sont les ensembles $f^{-1}(A)$ possibles quand A est un sous-ensemble de \mathbb{R} ? En déduire la mesurabilité de f par une méthode alternative à la question précédente.
8. Relier pour $n \in \mathbb{N}$ les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx \text{ et } \int_0^{x_n} f(x) dx.$$

Est-ce que la fonction f est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil ? Justifier. Le cas échéant, calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

9. Est-ce que la restriction de f à $[0, S]$ est intégrable au sens de Riemann ?

Calcul Différentiel

On définit la fonction distance $d_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ à un ensemble A non-vide de \mathbb{R}^n par

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n . Lorsqu'un point $a \in A$ vérifie $\|x - a\| = d_A(x)$, on dit que a est un *projété* de x sur A . On notera l'ensemble des projetés d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ sur A comme

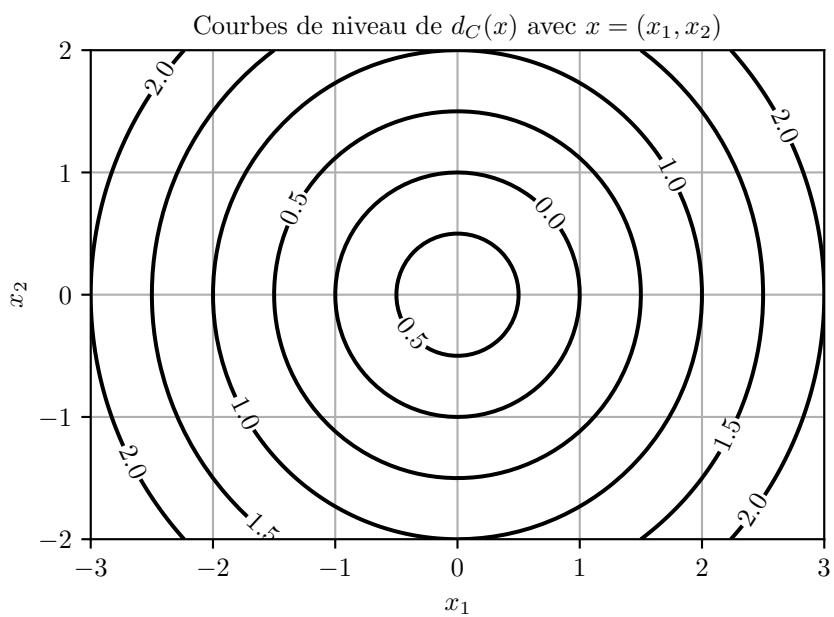
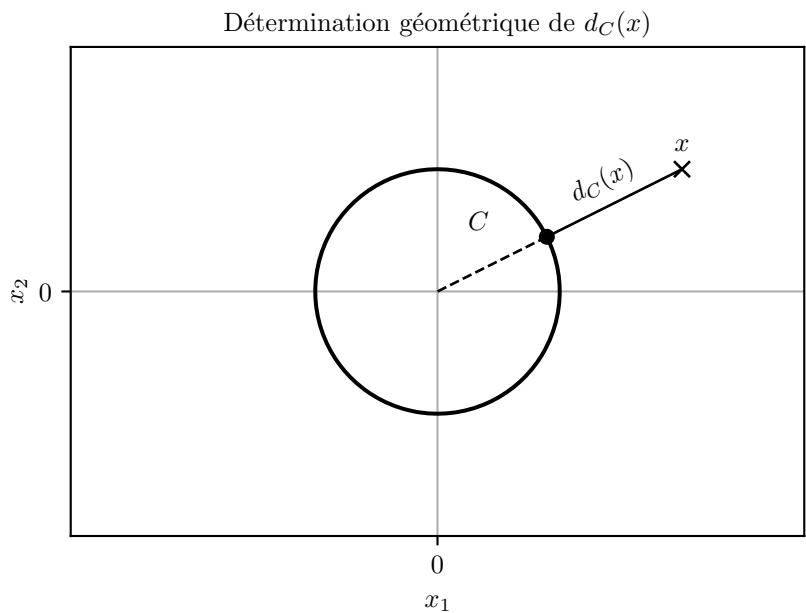
$$\Pi_A(x) = \{a \in A \mid \|x - a\| = d_A(x)\}.$$

Préliminaires dans \mathbb{R}^2

Notons C le cercle de \mathbb{R}^2 centré en $(0, 0)$ et de rayon 1 défini par

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}.$$

Dans \mathbb{R}^2 , on a $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.



- Justifier que pour $x \in \mathbb{R}^2$,

$$d_C(x) = \begin{cases} \|x\| - 1 & \text{si } \|x\| \geq 1 \\ 1 - \|x\| & \text{si } \|x\| < 1 \end{cases}.$$

Explicitier $\Pi_C(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}^2$.

2. Montrer que d_C n'est pas différentiable en $x = (0, 0)$. En étudiant le rapport $\frac{d_C(x+tx)}{t}$ lorsque t tend vers 0, montrer que d_C n'est pas non plus différentiable en $x \in C$.

On définit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} d_C(x) & \text{si } \|x\| \geq 1 \\ -d_C(x) & \text{si } \|x\| < 1 \end{cases}$$

3. Expliciter f . Montrer que f est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer son gradient ∇f et sa hessienne H_f .
4. Calculer $\|\nabla f\|$. En déduire que f est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire que

$$|f(x_a) - f(x_b)| \leq \|x_a - x_b\| \quad \forall (x_a, x_b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Cadre général

5. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}.$$

6. En se ramenant à un compact, montrer que si A est fermé alors pour tout x , $\Pi_A(x)$ est non vide. Montrer de plus que

$$\forall x \in A, \Pi_A(x) = \{x\} \quad \text{et} \quad \forall x \notin A, \Pi_A(x) \subset \partial A.$$

Dans la suite, on suppose A fermé. On admet pour l'instant que le carré de la distance à A , c'est-à-dire d_A^2 , est différentiable en x si et seulement si $\Pi_A(x)$ est un singleton, noté $p_A(x)$, et que les dérivées directionnelles s'écrivent alors pour $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_A(x + tv)^2 - d_A(x)^2}{t} = 2 \langle v, x - p_A(x) \rangle. \quad (1)$$

Soit D_A l'ensemble des points x tel que $\Pi_A(x)$ est un singleton.

7. Soit $x \in D_A$. En utilisant l'équation (1), exprimer le gradient de d_A^2 en x en fonction de $p_A(x)$.
8. En déduire que d_A est différentiable sur $D_A \setminus \partial A$ et calculer son gradient.

La dernière question de l'exercice établit une partie de l'équivalence admise plus haut.

9. On veut montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_A(x + tv)^2 - d_A(x)^2}{t} = 2 \inf_{p \in \Pi_A(x)} \langle v, x - p \rangle.$$

Pour cela,

— Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $p \in \Pi_A(x)$,

$$\frac{d_A(x + tv)^2 - d_A(x)^2}{t} \leq 2 \langle v, x - p \rangle + t\|v\|^2.$$

— Soit une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^+ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = 0$, et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de A telle que $p_k \in \Pi_A(x + t_k v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que (p_k) est bornée et en déduire qu'il existe une sous-suite $(p_{\sigma(k)})$ convergente vers $p_0 \in \Pi_A(x)$.

— Conclure en observant que

$$\frac{d_A(x + t_{\sigma(k)} v)^2 - d_A(x)^2}{t_{\sigma(k)}} \geq 2 \langle v, x - p_{\sigma(k)} \rangle + t_{\sigma(k)} \|v\|^2.$$

10. En déduire que d_A^2 n'est pas différentiable en x si $\Pi_A(x)$ n'est pas un singleton.

Probabilités

Dans tout cet exercice, nous nous intéressons à la modélisation probabiliste de la hauteur d'eau maximale de la Seine (sur l'échelle d'Austerlitz) une année donnée. Nous la représentons par une variable aléatoire X **positive** de fonction de répartition F et de densité f .

Préliminaires – Espérance et fonction de répartition

L'objectif de cette première partie est de prouver l'équivalence

$$\begin{array}{c} \text{la variable aléatoire positive } X \text{ est intégrable } (X \in \mathcal{L}^1) \\ \Updownarrow \\ 1 - F \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+. \end{array} \quad (E)$$

1. Soit $g : (x, u) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto 1_{[x, +\infty[}(u) f(u)$.

i. Vérifier l'absolue intégrabilité de $g_u : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x, u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ et de $g_x : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x, u)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

ii. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) du = 1 - F(x).$$

iii. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) dx = u f(u).$$

2. En déduire l'équivalence (E).

3. Supposons $X \in \mathcal{L}^1$. Donner deux expressions équivalentes de son espérance.

Etude du maximum – Loi de Fréchet

En théorie des valeurs extrêmes, une distribution classique pour modéliser des maxima est la loi de Fréchet de paramètre $\xi > 0$, de fonction de répartition

$$F_\xi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\{-x^{-\xi}\} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle fait partie de la famille des lois dites *à queue épaisse*. Nous allons en étudier quelques propriétés et évaluer leur impact sur la modélisation des crues de la Seine.

On suppose dans un premier temps que X suit une loi de Fréchet de paramètre 1 (dite *Fréchet standard*) et on fixe $\alpha > 0$.

4. Quelle est la loi de X^α ?
5. On propose d'étudier l'intégrabilité de X^α .
 - i. Montrer que $X^\alpha \in \mathcal{L}^1$ ssi $\alpha < 1$.
 - ii. Lorsqu'elle est bien définie, calculer $\mathbb{E}(X^\alpha)$. On pourra faire appel à la fonction gamma

$$\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On suppose maintenant et dans tout le reste de l'exercice que X suit une loi de Fréchet de paramètre $\xi > 0$.

6. Nous allons étudier le comportement de sa queue de distribution.
 - i. Donner un équivalent de $1 - F(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$, puis calculer, pour tout $x > 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > xt \mid X > t)$.
 - ii. Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour que $X^\alpha \in \mathcal{L}^1$.
 - iii. Proposer une interprétation de ces résultats au regard du phénomène étudié.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_n la hauteur d'eau maximale de l'année n . On suppose que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, de même loi que X .

7. On note $M_n := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ la hauteur d'eau maximale sur n années.
 - i. Montrer qu'il existe $a_n > 0$ tel que $a_n M_n$ a la même loi que X . On dit que la loi de Fréchet est *max-stable*.
 - ii. En déduire que $\mathbb{P}(M_n > x) \sim n \mathbb{P}(X > x)$ quand $x \rightarrow +\infty$. Interpréter ce résultat au regard du phénomène réel étudié.
8. On note $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ le cumul des hauteurs d'eau maximales sur n années. Montrer que $\mathbb{P}(S_n > x) \sim n \mathbb{P}(X > x)$ quand $x \rightarrow +\infty$. Comparer ce résultat au précédent et interpréter.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur n et faire intervenir les événements $\{X_n > (1 - \delta)x\}$, $\{X_n > \delta x\}$, $\{S_{n-1} > (1 - \delta)x\}$ et $\{S_{n-1} > \delta x\}$ pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ arbitrairement petit.

Examen – Corrigé

STEP, MINES ParisTech*

15 septembre 2020 (#81fed9b)

Table des matières

Calcul intégral	1
Calcul Différentiel	5
Probabilités	9
Préliminaires – Espérance et fonction de répartition	9
Etude du maximum – Loi de Fréchet	10

Calcul intégral

Question 1 Si $\delta > 0$ et $t \in [0, x_n]$, $\gamma(t) =]t - \delta/2, t + \delta/2[$ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} qui contient t . La fonction γ est donc une jauge sur $[0, x_n]$.

Question 2 Le lemme de Cousin établit l'existence d'une telle jauge. Si l'on souhaite une solution plus explicite, on peut par exemple rechercher une telle subdivision pointée \mathcal{D}_m sous la forme

$$\left\{ \left(\frac{k+1/2}{m}, \left[\frac{k}{m}x_n, \frac{k+1}{m}x_n \right] \right) \mid k \in \{0, \dots, m-1\} \right\}$$

(on vérifiera qu'il s'agit bien d'une subdivision pointée de $[0, x_n]$). Pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$, on a

$$\gamma \left(\frac{k+1/2}{m} \right) = \left[\frac{k+1/2}{m} - \frac{\delta}{2}, \frac{k+1/2}{m} + \frac{\delta}{2} \right],$$

donc si $1/2m < \delta/2$ – c'est-à-dire si $m > 1/\delta$ – on a

$$\left[\frac{k}{m}x_n, \frac{k+1}{m}x_n \right] \subset \gamma \left(\frac{k+1/2}{m} \right)$$

*Ce document est un des produits du projet  **boisgera/CDIS**, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d'utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

et \mathcal{D}_m est subordonnée à γ . Il suffit donc de choisir un entier m strictement plus grand que $1/\delta$ pour que \mathcal{D}_m fournisse l'exemple de subdivision recherché.

Question 3 Pour tout entier k , la restriction de la fonction f à l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est égale presque partout (sauf en x_{k+1}) à la fonction constante égale à 1 si k est pair et -1 sinon ; cette restriction est donc intégrable et de même intégrale que la constante considérée. La fonction constante égale à $\lambda \in \{-1, 1\}$ admet comme primitive la fonction $x \mapsto \pm \lambda x$; par le théorème fondamental du calcul, son intégrale sur $[x_k, x_{k+1}]$ existe et vaut

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = [x \mapsto x]_{x_k}^{x_{k+1}} = x_{k+1} - x_k = a_{k/2} \text{ si } k \text{ est pair}$$

et de même

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = [x \mapsto -x]_{x_k}^{x_{k+1}} = x_{k+1} - x_k = -b_{(k-1)/2} \text{ si } k \text{ est impair.}$$

La fonction f étant intégrable sur tous les intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ tels que $0 \leq k \leq n-1$, elle est intégrable sur $[0, x_n]$ et

$$\int_0^{x_n} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \sum_{k \leq (n-1)/2} a_k - \sum_{k \leq (n-2)/2} b_k.$$

Question 4 Soit \mathcal{D} une subdivision pointé subordonnée à γ . Si $(t, [a, b]) \in \mathcal{D}$ et l'intervalle $[a, b]$ ne contient aucun x_k , alors la restriction de f à $[a, b]$ est constante. On a donc dans ce cas

$$\left| f(t)(b-a) - \int_a^b f(x) dx \right| = 0.$$

En général, on note que $|f|$ est constante et égale à 1 sur $[0, x_n]$. Par conséquent, pour tout $(t, [a, b]) \in \mathcal{D}$,

$$|f(t)(b-a)| \leq |f(t)||b-a| = (b-a)$$

et

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx = (b-a),$$

donc

$$\left| f(t)(b-a) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq 2(b-a).$$

Il y a au plus $(n+1)$ éléments $(t, J) \in \mathcal{D}$ tels que $\ell(J) > 0$ qui contiennent un x_k avec $k \in \{0, \dots, n\}$ et pour tous ces intervalles J , comme $J \subset \gamma(t)$ et que

$\ell(\gamma(t)) = \delta$, on a $\ell(J) \leq \delta$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left| S(f, \mathcal{D}) - \int_0^{x_n} f(x) dx \right| &= \left| \sum_{(t,J) \in \mathcal{D}} f(t) \ell(J) - \int_J f(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{(t,J) \in \mathcal{D}} \left| f(t) \ell(J) - \int_J f(x) dx \right| \\ &\leq 2(n+1)\delta. \end{aligned}$$

Question 5 Par récurrence, on peut établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_k = 1 - 2^{-k}$. En effet, cette relation est vraie au rang 0 ; si elle est vraie pour x_{2k} alors

$$x_{2k+1} = x_{2k} + a_k = (1 - 2^{-2k}) + 2^{-2k-1} = 1 - 2^{-2k}(1 - 1/2) = 1 - 2^{-2k-1}$$

et de même, si elle est vraie pour x_{2k+1} alors

$$x_{2k+2} = x_{2k+1} + b_k = (1 - 2^{-2k-1}) + 2^{-2k-2} = 1 - 2^{-2k-1}(1 - 1/2) = 1 - 2^{-2k-2}.$$

On a donc $S := \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 - 2^{-k} = 1$.

Question 6 La fonction f_n est intégrable car elle est l'extension par zéro à \mathbb{R} de la restriction de f à $[0, x_n]$, dont nous savons qu'elle est intégrable. Or f est la limite simple des fonctions f_n :

- pour tout $x \in [0, S[$, $f_n(x) = f(x)$ à partir du moment où $x_n > x$, ce qui finit nécessairement par arriver puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = S$.
- pour tout $x \notin [0, S[$, $f_n(x) = f(x) = 0$ pour tout entier n .

La fonction f est donc mesurable comme limite simple de fonctions intégrables.

Question 7 Soit (a, b) une paire de réels telle que $0 \leq a \leq b \leq +\infty$. On a

$$[a, b] = [a, b] \setminus \{b\}.$$

Les ensembles $[a, b]$ et $\{b\} = [b, b]$ sont (des intervalles) fermés, donc mesurables. Le complémentaire $[a, b]$ de $\{b\}$ dans $[a, b]$ est donc mesurable.

Si A est un sous-ensemble de \mathbb{R} , comme $f(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\}$, on a

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A \cap \{-1, 0, 1\})$$

Il suffit donc de déterminer l'image réciproque par f des sous-ensembles de $\{-1, 0, 1\}$, qui sont en nombre fini. Or pour tout $A \subset \{-1, 0, 1\}$, on a

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a).$$

Comme

$$E_0 := f^{-1}(0) =]-\infty, 0[\cup [S, +\infty[= \mathbb{R} \setminus [0, S[,$$

$$E_1 := f^{-1}(1) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [x_{2k}, x_{2k+1}[\quad \text{et} \quad E_{-1} := f^{-1}(-1) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [x_{2k+1}, x_{2k+2}[,$$

l'ensemble $f^{-1}(A)$ peut être égal à \emptyset , E_1 , E_{-1} , E_0 , $E_1 \cup E_0$, $E_{-1} \cup E_0$, $E_{-1} \cup E_1$ (c'est-à-dire $[0, S[$) ou bien \mathbb{R} .

Dans tous les cas, $f^{-1}(A)$ est un ensemble mesurable (comme union dénombrable d'ensembles mesurables ou complémentaire d'ensemble mesurable) et ce quel que soit l'ensemble A (il n'est même pas nécessaire de se restreindre aux ensembles ouverts ou fermés). Par le critère de l'image réciproque, la fonction f est donc mesurable.

Question 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n coïncide avec f sur $[0, x_n]$ et est nulle en dehors de cet intervalle ; on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{x_n} f(x) dx$$

Les fonctions f_n sont intégrables et convergent simplement vers f . On a également $-h \leq f_n \leq h$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est intégrable (ainsi que $-h$ par linéarité de l'intégrale). Par le théorème de convergence dominée, f est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{x_n} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \leq (n-1)/2} a_k - \sum_{k \leq (n-2)/2} b_k.$$

On a

$$\sum_{k=0}^p a_k = \sum_{k=0}^p 2^{-2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1 - (1/4)^{p+1}}{1 - 1/4}$$

et

$$\sum_{k=0}^p b_k = \sum_{k=0}^p 2^{-2k-2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^p \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \frac{1 - (1/4)^{p+1}}{1 - 1/4}$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \leq (n-1)/2} a_k - \sum_{k \leq (n-2)/2} b_k = \frac{1}{2} \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Question 9 La restriction de f à l'intervalle $[0, S]$ est encadrée par les constantes -1 et 1 . Elle est également continue en tout point $x \in [0, S]$ qui n'appartient pas à l'ensemble $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{S\}$, ensemble qui est dénombrable, donc négligeable ; la fonction f est donc continue presque partout. Par le critère d'intégrabilité de Lebesgue, elle est donc Riemann-intégrable sur $[0, S]$.

Calcul Différentiel

Question 1 Si $x = (0, 0)$ alors tout point de C est à une distance de 1 de x , donc

$$d_C(x) = 1 \quad , \quad \Pi_C(x) = C .$$

Supposons maintenant $x \neq (0, 0)$. $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ avec $r = \|x\|$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Par ailleurs, un point $a \in C$ s'écrit $a = (\cos \rho, \sin \rho)$, $\rho \in [0, 2\pi]$. On a donc

$$\begin{aligned} \|x - a\|^2 &= (r \cos \theta - \cos \rho)^2 + (r \sin \theta - \sin \rho)^2 \\ &= r^2 + 1 - 2r(\cos \theta - \cos \rho + \sin \theta - \sin \rho) = r^2 + 1 - 2r \cos(\theta - \rho) \end{aligned}$$

Donc le minimum est atteint pour $\cos(\theta - \rho) = 1$, i.e. $\theta = \rho$. On a alors

$$\|x - a\|^2 = r^2 + 1 - 2r = (r - 1)^2 = (\|x\| - 1)^2$$

d'où $d_C(x) = \pm(\|x\| - 1)$. De plus, le point $a \in C$ pour laquelle cette distance est atteinte est $(\cos \theta, \sin \theta)$, i.e.,

$$\Pi_C(x) = \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\} .$$

Question 2 Au voisinage de $x = (0, 0)$,

$$d_C(x) = 1 - \|x\| = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} .$$

La dérivée partielle par rapport à x_1 de d_C en $x = 0$, si elle existe, est donnée par

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_C(t, 0) - d_C(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - |t| - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{|t|}{t} .$$

Mais cette limite n'existe pas car $-t/|t| = -1$ pour $t > 0$ et 1 pour $t < 0$. Donc d_C n'est pas différentiable en 0.

Prenons maintenant $x \in C$, c'est-à-dire tel que $\|x\| = 1$. L'idée est de montrer que dans la direction donnée par le vecteur x , la différentielle n'existe pas. Supposons en effet que d_C est différentiable en x . Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$d_C(x + tx) = d_C(x) + dd_C(x) \cdot tx + o(|t|) = dd_C(x) \cdot tx + o(|t|) ,$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_C(x + tx)}{t} = dd_C(x) \cdot x$$

Mais pour t petit, selon si $t > 0$ ou $t < 0$, $x + tx$ est à l'intérieur du cercle ou à l'extérieur et donc puisque $\|x\| = 1$, soit

$$d_C(x + tx) = \|x + tx\| - 1 = (1 + t)\|x\| - 1 = t$$

soit

$$d_C(x + tx) = 1 - \|x + tx\| = 1 - (1 + t)\|x\| = -t .$$

Donc $d_C(x + tx)/t$ n'admet pas de limite quand t tend vers 0 et d_C n'est pas différentiable en x .

Question 3 De l'expression de $d_C(x)$ on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \|x\| - 1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1.$$

Pour $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, f admet pour dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

qui sont continues au voisinage de x . Donc f est continûment différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$. On en déduit

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix} = \frac{x}{\|x\|} .$$

De même, ∇f est continûment différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ donc f est deux fois continûment différentiable de matrice Hessienne

$$H_f(x) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} & -\frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ -\frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & 1 - \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|^3} \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}$$

On note que f est différentiable partout sauf en $x = (0, 0)$, c'est-à-dire seulement là où $\Pi_C(x)$ est un singleton.

Question 4 Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\|\nabla f(x)\| = 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, on déduit que pour tout (x_a, x_b) tels que le segment $[x_a, x_b] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|f(x_a) - f(x_b)| \leq \|x_a - x_b\|$. Si maintenant $0 \in [x_a, x_b]$, il existe une direction $v \in \mathbb{R}^2$ telle que $0 \notin [x_a + tv, x_b + tv]$ pour tout $t > 0$. Alors pour tout $t > 0$, $|f(x_a + tv) - f(x_b + tv)| \leq \|(x_a + tv) - (x_b + tv)\| = \|x_a - x_b\|$, et en passant à la limite lorsque t tend vers 0, on obtient l'inégalité demandée car f est continue sur \mathbb{R}^2 .

Question 5 $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$ implique qu'il existe une suite de point $a_n \in A$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - a_n\| = 0$$

donc que x est dans l'adhérence de A . Réciproquement, si une telle suite existe, $\inf_{a \in A} \|x - a\| \leq 0$ et donc nécessairement puisque $\|x - a\| \geq 0$ pour tout $a \in A$, $d_A(x) = 0$.

Question 6 Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Fixons $a_0 \in A$ et $r := \|x - a_0\|$. Soit B la boule fermée centrée en a_0 et de rayon r . Comme $a_0 \in A \cap B$, $A \cap B$ est non vide. De plus, $A \cap B$ est fermé comme intersection de fermés, et borné car B est bornée. Donc $A \cap B$ est compact. L'application $a \mapsto \|x - a\|$ est continue sur $A \cap B$ donc elle admet un minimum atteint en $a^* \in A \cap B$. Par définition de d_A , on a donc $d_A(x) = \|x - a^*\|$ et $a^* \in \Pi_A(x)$.

Soit $x \in A$. Alors $d_A(x) = 0$ et donc nécessairement $\Pi_A(x) = \{x\}$.

Soit $x \notin A$. Par définition, $\Pi_A(x) \subset A$, donc pour montrer le résultat il faut montrer que $\Pi_A(x) \cap \mathring{A}$ est vide. Prenons donc un point $a_0 \in \mathring{A}$ et montrons que $a_0 \notin \Pi_A(x)$. Par définition de l'intérieur, il existe une boule B centrée en a_0 et incluse dans A . L'idée est de montrer qu'il y aura forcément un point plus près de x dans B . Prenons un point a' sur le segment $[x, a_0]$ c'est-à-dire pour lequel il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que

$$a' = \lambda x + (1 - \lambda)a_0 .$$

On a alors

$$\|a' - x\| = \|(1 - \lambda)(a_0 - x)\| = |1 - \lambda| \|a_0 - x\| < \|a_0 - x\|$$

pour tout $\lambda \in]0, 1]$. Or pour λ suffisamment petit, $a' \in B \subset A$ et a' est plus proche de x que a_0 . Donc $a_0 \notin \Pi_A(x)$ et $\Pi_A(x) \subset \partial A$.

Question 7 Soit $x \in D_A$. On nous dit qu'alors d_A^2 est différentiable en x . Alors par définition du gradient, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$d_A(x + tv)^2 = d_A(x)^2 + \langle \nabla d_A^2(x), tv \rangle + o(t\|v\|)$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_A(x + tv)^2 - d_A(x)^2}{t} = \langle \nabla d_A^2(x), v \rangle .$$

D'après l'équation (1) de l'énoncé, on en déduit que

$$\nabla d_A^2(x) = 2(x - p_A(x)) .$$

Question 8 Tout d'abord d_A est constante égale à zero sur l'ouvert \mathring{A} donc elle y est différentiable de gradient $\nabla d_A = 0$.

Ensuite, vu que $d_A = \sqrt{d_A^2}$, d_A est différentiable en x si d_A^2 est différentiable en x et $d_A^2(x) \neq 0$, donc si $\Pi_A(x) \in D_A \setminus A$. Soit $g_1 :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ défini par $g_1(t) = \sqrt{t}$ et $g_2 : D_A \setminus A \rightarrow]0, +\infty[$ défini par $g_2 = d_A^2$. On a

$$d_A = g_1 \circ g_2$$

et donc par la règle de différentiation en chaîne, pour tout $x \in D_A \setminus A$,

$$dd_A(x) \cdot h = dg_1(g_2(x)) \cdot dg_2(x) \cdot h .$$

Or pour $k \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, +\infty[$, $dg_1(t) \cdot k = \frac{1}{2\sqrt{t}}k$, et pour $h \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $dg_2(x) \cdot h = \langle \nabla d_A^2(x), h \rangle$. Donc

$$dd_A(x) \cdot h = \frac{1}{2\sqrt{d_A^2(x)}} \langle \nabla d_A^2(x), h \rangle$$

soit

$$\nabla d_A(x) = \frac{1}{d_A(x)}(x - p_A(x)) = \frac{x - p_A(x)}{\|x - p_A(x)\|} .$$

On a donc la différentiabilité sur $(D_A \setminus A) \cup \mathring{A} = D_A \setminus \partial A$.

Question 9 Soient $v \in \mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$.

- Soient $t > 0$ et $p \in \Pi_A(x)$. Pour tout $p_t \in \Pi_A(x + tv)$,

$$\begin{aligned} \frac{d_A(x + tv)^2 - d_A(x)^2}{t} &= \frac{\|x + tv - p_t\|^2 - \|x - p\|^2}{t} \\ &\leq \frac{\|x + tv - p\|^2 - \|x - p\|^2}{t} \\ &\leq 2 \langle v, x - p \rangle + t\|v\|^2. \end{aligned}$$

puisque $d_A(x + tv)$ minimise la distance à A et $p_t \in A$.

- Soit une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^+ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = 0$, et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de A telle que $p_k \in \Pi_A(x + t_k v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} |p_k| &= |x + t_k v + p_k - (x + t_k v)| \leq |x + t_k v| + |x + t_k v - p_k| \\ &\leq d_A(x + t_k v) + |x + t_k v| \\ &\leq d_A(x + t_k v) - d_A(x) + d_A(x) + |x + t_k v| \end{aligned}$$

Et d'après le point précédent, $\lim d_A(x + t_k v) - d_A(x) = 0$ donc (p_k) est bornée. (p_k) est bornée dans le fermé A donc elle vit dans un compact et on peut en extraire une sous-suite $(p_{\sigma(k)})$ qui converge vers $p_0 \in A$.

Vu que $\lim \|x + t_{\sigma(k)} v - p_{\sigma(k)}\| = \|x - p_0\|$, et que $\|x + t_{\sigma(k)} v - p_{\sigma(k)}\| = d_A(x + t_{\sigma(k)} v)$, on en déduit $\|x - p_0\| = d_A(x)$ et donc que $p_0 \in \Pi_A(x)$.

- Finalement, puisque pour tout k , $d_A(x) \geq \|x - p_{\sigma(k)}\|$ par définition de la distance,

$$\begin{aligned} \frac{d_A(x + t_{\sigma(k)} v)^2 - d_A(x)^2}{t_{\sigma(k)}} &= \frac{\|x + t_{\sigma(k)} v - p_{\sigma(k)}\|^2 - \|x - p_{\sigma(k)}\|^2}{t_{\sigma(k)}} \\ &\geq 2 \langle v, x - p_{\sigma(k)} \rangle + t_{\sigma(k)}\|v\|^2 \\ &\geq 2 \langle v, x - p_0 \rangle + 2 \langle v, p_0 - p_{\sigma(k)} \rangle + t_{\sigma(k)}\|v\|^2 \\ &\geq 2 \inf_{p \in \Pi_A(x)} \langle v, x - p \rangle + \Delta_k \end{aligned}$$

avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_k = 0$. Donc $\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{d_A(x + tv)^2 - d_A(x)^2}{t} \geq 2 \inf_{p \in \Pi_A(x)} \langle v, x - p \rangle$.

Par ailleurs, on sait par le premier point que $\frac{d_A(x + tv)^2 - d_A(x)^2}{t} \leq 2 \inf_{p \in \Pi_A(x)} \langle v, x - p \rangle + \Delta(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \Delta(t) = 0$. On en déduit que $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{d_A(x + tv)^2 - d_A(x)^2}{t} \geq 2 \inf_{p \in \Pi_A(x)} \langle v, x - p \rangle$. Ceci montre donc que la limite existe et vaut nécessairement $2 \inf_{p \in \Pi_A(x)} \langle v, x - p \rangle$.

Question 10 Supposons que d_A^2 est différentiable en x . Alors nécessairement, d'après la question précédente, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \nabla d_A^2(x), v \rangle = 2 \inf_{p \in \Pi_A(x)} \langle v, x - p \rangle.$$

Une idée est de montrer que la fonction à droite n'est pas linéaire si $\Pi_A(x)$ n'est pas un singleton. Soient donc $p_1, p_2 \in \Pi_A(x)$. Vu que pour tout $p \in \Pi_A(x)$, $\|x - p\| = d_A(x)$, en prenant $v_1 = -(x - p_1)$, on obtient

$$\langle \nabla d_A^2(x), v_1 \rangle = 2 \inf_{p \in \Pi_A(x)} -\langle x - p_1, x - p \rangle = -2 \langle x - p_1, x - p_1 \rangle = -2d_A(x)^2.$$

De même, pour $v_2 = -(x - p_2)$

$$\langle \nabla d_A^2(x), v_2 \rangle = -2 \langle x - p_2, x - p_2 \rangle = -2d_A(x)^2.$$

Par linéarité, on obtient donc

$$\langle \nabla d_A^2(x), v_1 + v_2 \rangle = -4d_A(x)^2.$$

Mais par ailleurs,

$$\langle \nabla d_A^2(x), v_1 + v_2 \rangle = 2 \inf_{p \in \Pi_A(x)} -\langle x - p_1, x - p \rangle - \langle x - p_2, x - p \rangle ,$$

et le seul moyen d'obtenir $-4d_A(x)^2$ est d'avoir simultanément

$$-\langle x - p_1, x - p \rangle = -d_A(x)^2 \quad , \quad -\langle x - p_2, x - p \rangle = -d_A(x)^2$$

et donc $x - p_1 = x - p = x - p_2$, soit $p_1 = p_2$. Donc il faut que $\Pi_A(x)$ soit réduit à un singleton.

Probabilités

Préliminaires – Espérance et fonction de répartition

Question 1 Étudions la fonction

$$g : (x, u) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto 1_{[x, +\infty[}(u) f(u) = \begin{cases} f(u) & \text{si } x \leq u, \\ 0 & \text{si } x > u. \end{cases}$$

- i. Remarquons d'abord que f étant positive (c'est une densité), toutes les fonctions partielles de g le sont aussi; l'intégrabilité coïncide ici avec l'absolue intégrabilité. Soient $x, u \in \mathbb{R}_+$.
 - D'après l'expression de g on a $g_u(x) \leq f(u) 1_{[0, u]}(x)$. La fonction partielle g_u est donc positive et majorée par le produit d'une constante et de l'indicatrice d'un segment, qui est trivialement intégrable sur \mathbb{R}_+ . Par le critère d'intégrabilité dominée, g_u l'est donc aussi pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.
 - De même, $g_x(u) \leq f(u)$. La fonction partielle g_x est donc positive et majorée par une densité, par définition (absolument) intégrable. Par le critère d'intégrabilité dominée, g_x l'est donc aussi sur \mathbb{R}_+ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- ii. Comme g_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ , on peut calculer son intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) du &= \int_{\mathbb{R}_+} 1_{[x, +\infty[}(u) f(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} (1 - 1_{[0, x[}(u)) f(u) du \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(u) du - \int_0^x f(u) du \right) \\ &= 1 - F(x) \end{aligned}$$

car X est une variable positive (sa densité est nulle sur \mathbb{R}_-^*).

iii. Comme g_u est intégrable sur \mathbb{R}_+ , on peut calculer son intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) dx &= \int_{\mathbb{R}_+} 1_{[x, +\infty]}(u) f(u) dx = f(u) \int_{\mathbb{R}_+} 1_{[0, u]}(x) dx \\ &= f(u) \int_0^u 1 dx = u f(u). \end{aligned}$$

Question 2 Nous allons montrer les deux sens de l'équivalence.

- Commençons par supposer que $1 - F$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . D'après la question précédente, cela signifie que $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) du$ est (absolument) intégrable. D'après le théorème de Tonelli, g est donc absolument intégrable sur \mathbb{R}_+^2 . Le théorème de Fubini garantit alors que la fonction $u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) dx = u f(u)$ est intégrable, ce qui signifie justement que $X \in \mathcal{L}^1$ pour X une variable aléatoire positive.
- Réciproquement, supposons que $X \in \mathcal{L}^1$, c'est-à-dire que $u \in \mathbb{R}_+ \mapsto u f(u) = \int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) dx$ est (absolument) intégrable. Le théorème de Tonelli garantit alors que g est absolument intégrable sur \mathbb{R}_+^2 , puis celui de Fubini que la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) du = 1 - F(x)$ l'est également.

Nous avons donc montré l'équivalence (E).

Question 3 Par définition, puisque X est positive nous avons d'abord

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}_+} x f(x) dx.$$

Or d'après la question 1, en utilisant à nouveau le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} u f(u) du &= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) dx \right) du = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}_+} g(x, u) du \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} 1 - F(x) dx. \end{aligned}$$

On peut donc écrire de manière équivalente

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}_+} 1 - F(x) dx.$$

Etude du maximum – Loi de Fréchet

Question 4 La loi de X^α est déterminée par sa fonction de répartition que nous allons donc expliciter. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$ elle vaut $\mathbb{P}(X^\alpha \leq x)$. Or comme X est positive ($F(0) = 0$), pour tout $x \in \mathbb{R}_-$ on a directement $\mathbb{P}(X^\alpha \leq x) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^\alpha$ étant bijective et croissante ($\alpha > 0$ par hypothèse), on obtient

$$\mathbb{P}(X^\alpha \leq x) = \mathbb{P}\left(X \leq x^{\frac{1}{\alpha}}\right) = F_{\frac{1}{\alpha}}(x).$$

Puisque $F_{\frac{1}{\alpha}}$ est nulle sur \mathbb{R}_- , on en déduit que l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, X^α suit une loi de Fréchet de paramètre $\frac{1}{\alpha}$.

Question 5

- Comme X est positive, d'après la première partie et la question précédente, $X^\alpha \in \mathcal{L}^1$ ssi $1 - F_{\frac{1}{\alpha}}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* (inclure ou non $\{0\}$ ne change rien).

La convexité de l'exponentielle nous assure que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x e^x.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$ on a

$$x^{-\frac{1}{\alpha}} \exp\left\{-x^{-\frac{1}{\alpha}}\right\} \leq 1 - F_{\frac{1}{\alpha}}(x) \leq x^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

En outre, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a aussi

$$0 < 1 - F_{\frac{1}{\alpha}}(x) \leq 1. \quad (2)$$

- Soit $\alpha < 1$. La fonction d'intérêt $1 - F_{\frac{1}{\alpha}}$ est positive et majorée sur \mathbb{R}_+^* par

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{cases} x^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{si } x > 1, \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Or, quand $\alpha < 1$, cette dernière fonction est bien intégrable (par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* . Par le critère d'intégrabilité dominée, $1 - F_{\frac{1}{\alpha}}$ l'est donc également. On en conclut que le “si” de l'équivalence à démontrer est vrai.

- Soit $\alpha \geq 1$. On a $\exp\left\{-x^{-\frac{1}{\alpha}}\right\} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$; il existe donc $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$ on a $\exp\left\{-x^{-\frac{1}{\alpha}}\right\} > \frac{1}{2}$. Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{\alpha}}$ n'est pas intégrable sur $]x_0, +\infty[$ pour $\alpha \geq 1$. Comme elle minore $1 - F_{\frac{1}{\alpha}}$ sur ce même intervalle, $1 - F_{\frac{1}{\alpha}}$ n'y est pas non plus intégrable. A fortiori, elle ne l'est donc pas non plus sur tout \mathbb{R}_+^* . On en conclut que le “seulement si” de l'équivalence recherchée est vrai lui aussi.

Finalement, nous avons bien $X^\alpha \in \mathcal{L}^1$ ssi $\alpha < 1$.

- Soit $\alpha < 1$. Ici, il est plus facile d'utiliser la définition de $\mathbb{E}(X^\alpha)$ faisant intervenir la densité de X^α . Puisque $F_{\frac{1}{\alpha}}$ est continue et dérivable partout, il en existe bien une, qui coïncide avec la dérivée de $F_{\frac{1}{\alpha}}$:

$$f_{\frac{1}{\alpha}} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}-1} \exp\left\{-x^{-\frac{1}{\alpha}}\right\} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \int_{\mathbb{R}} x f_{\frac{1}{\alpha}}(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{1}{\alpha}} \exp\left\{-x^{-\frac{1}{\alpha}}\right\} dx,$$

et par le changement de variable $u = x^{-\frac{1}{\alpha}}$ on obtient directement

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{-\alpha} \exp\{-u\} du = \Gamma(1 - \alpha).$$

Question 6

- i. Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$1 - F(x) = 1 - F_\xi(x) = 1 - \exp\{-x^{-\xi}\} = 1 - (1 - x^{-\xi} + o(x^{-\xi})) \sim x^{-\xi}.$$

Par conséquent, pour tout $x > 1$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a

$$\mathbb{P}(X > xt \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > xt)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{1 - F(xt)}{1 - F(t)} \sim \frac{x^{-\xi} t^{-\xi}}{t^{-\xi}} = x^{-\xi}.$$

- ii. D'après la question 5, X a la même loi que $Y^{\frac{1}{\xi}}$, où Y suit une loi de Fréchet standard. On a donc $X^\alpha \in \mathcal{L}^1$ ssi $Y^{\frac{\alpha}{\xi}} \in \mathcal{L}^1$, qui est équivalent, d'après la question 5.i, à $\alpha < \xi$.
- iii. Ces résultats illustrent pourquoi la loi de Fréchet est dite *à queue épaisse* : $1 - F_\xi$ décroît lentement vers 0, à la même vitesse que l'inverse d'une fonction puissance, et ce d'autant plus que ξ est petit. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - F_\xi(x) = \mathbb{P}(X > x)$, cela signifie que les événements extrêmes que sont les dépassements de très grandes hauteurs d'eau (qui auraient des conséquences environnementales, sociales, économiques dramatiques) ne sont pas si rares que ça. En particulier, lorsque $\xi \leq 1$, ils sont tellement fréquents que X n'admet pas d'espérance ; cela n'a plus de sens de définir un comportement moyen lorsque la variabilité est trop grande. En outre, la convergence $\mathbb{P}(X > xt \mid X > t) \rightarrow x^{-\xi}$ quand $t \rightarrow +\infty$ et $x > 1$ indique que sachant qu'une crue exceptionnelle a déjà eu lieu, la probabilité d'en observer une plus importante encore reste (relativement) élevée. Le choix de la loi de Fréchet pour modéliser la hauteur d'eau maximale de la Seine permet donc de se prémunir des risques dans le cadre du changement climatique.

Remarque. On se rend encore plus compte de l'aspect “queue épaisse” si on compare $1 - F_\xi$ à $1 - \Phi$, où Φ est la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite, de densité φ . En effet, nous avons vu en TD que quand $x \rightarrow +\infty$,

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},$$

qui décroît exponentiellement vite vers 0. Ainsi, pour $x \rightarrow +\infty$ on a

$$\frac{1 - F_\xi(x)}{1 - \Phi(x)} \sim \frac{x^{1-\xi}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},$$

qui tend d'autant plus vite vers $+\infty$ que ξ est petit, c'est-à-dire que la queue de la distribution de X est épaisse.

Question 7

- i. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors par indépendance et même distribution que X des

variables aléatoires X_1, \dots, X_n on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n \leq x) &= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq x\right) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)^n = F_\xi(x)^n \\ &= \exp\{-n x^{-\xi}\} = \exp\left\{-\left(n^{-\frac{1}{\xi}} x\right)^{-\xi}\right\} \\ &= F_\xi\left(n^{-\frac{1}{\xi}} x\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on pose $a_n = n^{-\frac{1}{\xi}}$ on obtient bien

$$\mathbb{P}(a_n M_n \leq x) = \mathbb{P}\left(n^{-\frac{1}{\xi}} M_n \leq x\right) = \mathbb{P}\left(M_n \leq n^{\frac{1}{\xi}} x\right) = F_\xi(x),$$

ce qui signifie que $a_n M_n$ a la même loi que X .

ii. En utilisant les questions 6.i et 7.i, quand $x \rightarrow +\infty$ on a directement

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(M_n > x)}{n \mathbb{P}(X > x)} &= \frac{1}{n} \frac{1 - \mathbb{P}(M_n \leq x)}{1 - \mathbb{P}(X \leq x)} = \frac{1}{n} \frac{1 - F_\xi\left(n^{-\frac{1}{\xi}} x\right)}{1 - F_\xi(x)} \\ &\sim \frac{1}{n} \frac{\left(n^{-\frac{1}{\xi}} x\right)^{-\xi}}{x^{-\xi}} = 1.\end{aligned}$$

Ce résultat signifie que pour un seuil x très grand, la hauteur d'eau maximale sur n années a n fois plus de chances de dépasser x qu'en une seule année. Le risque de crue exceptionnelle croît de manière linéaire avec le nombre d'années écoulées.

Question 8 Notons (\mathcal{P}_n) l'équivalence à démontrer.

- **Initialisation.** (\mathcal{P}_1) est trivialement vraie.
- **Hérédité.** Soit $n > 1$ et supposons que (\mathcal{P}_{n-1}) est vraie. On fixe pour le moment $x > 0$.

On a l'inclusion des événements

$$\left(\{S_{n-1} > x\} \cup \{X_n > x\}\right) \subset \{S_n > x\},$$

qui combinée au caractère indépendant et identiquement distribué de X_1, \dots, X_n donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > x) &\geq \mathbb{P}(S_{n-1} > x) + \mathbb{P}(X_n > x) - \mathbb{P}(S_{n-1} > x, X_n > x) \\ &= \mathbb{P}(S_{n-1} > x) + \mathbb{P}(S_{n-1} \leq x) \mathbb{P}(X > x).\end{aligned}$$

Ainsi, quand $x \rightarrow +\infty$, d'après (\mathcal{P}_{n-1}) on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{n \mathbb{P}(X > x)} &\geq \frac{n-1}{n} \frac{\mathbb{P}(S_{n-1} > x)}{(n-1) \mathbb{P}(X > x)} + \frac{1}{n} \mathbb{P}(S_{n-1} \leq x) \\ &\rightarrow \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1.\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ on a l'inclusion

$$\{S_n > x\} \subset \{S_{n-1} > (1-\delta)x\} \cup \{X_n > (1-\delta)x\} \cup \{S_{n-1} > \delta x, X_n > \delta x\},$$

qui donne sous les hypothèses d'indépendance et de même loi de X_1, \dots, X_n

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > x) &\leq \mathbb{P}(S_{n-1} > (1-\delta)x) + \mathbb{P}(X_n > (1-\delta)x) \\ &\quad + \mathbb{P}(S_{n-1} > \delta x, X_n > \delta x) \\ &= \mathbb{P}(S_{n-1} > (1-\delta)x) + \mathbb{P}(X_n > (1-\delta)x) \\ &\quad + \mathbb{P}(S_{n-1} > \delta x) \mathbb{P}(X > \delta x).\end{aligned}$$

Par conséquent, quand $x \rightarrow +\infty$, d'après (\mathcal{P}_{n-1}) et la question 6.i on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{n \mathbb{P}(X > x)} &\leq \frac{\mathbb{P}(S_{n-1} > (1-\delta)x)}{n \mathbb{P}(X > x)} + \frac{\mathbb{P}(X > (1-\delta)x)}{n \mathbb{P}(X > x)} \\ &\quad + \frac{\mathbb{P}(X > \delta x)}{n \mathbb{P}(X > x)} \mathbb{P}(S_{n-1} > \delta x) \\ &= (n-1) \frac{\mathbb{P}(S_{n-1} > (1-\delta)x)}{(n-1) \mathbb{P}(X > (1-\delta)x)} \frac{\mathbb{P}(X > (1-\delta)x)}{n \mathbb{P}(X > x)} \\ &\quad + \frac{\mathbb{P}(X > (1-\delta)x)}{n \mathbb{P}(X > x)} \\ &\quad + \frac{\mathbb{P}(X > \delta x)}{n \mathbb{P}(X > x)} \frac{\mathbb{P}(S_{n-1} > \delta x)}{(n-1) \mathbb{P}(X > \delta x)} (n-1) \mathbb{P}(X > \delta x) \\ &\sim \left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \right) (1-\delta)^{-\xi} + \frac{\delta^{-2\xi}}{n} (n-1) x^{-\xi} \\ &\rightarrow (1-\delta)^{-\xi},\end{aligned}$$

qui tend vers 1 lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que (\mathcal{P}_n) est vraie.

— **Conclusion.** La propriété (\mathcal{P}_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En combinant ce résultat avec celui de la question 7.ii on obtient

$$\mathbb{P}(S_n > x) \sim \mathbb{P}(M_n > x)$$

quand $x \rightarrow +\infty$. Cela implique que la loi des excès du maximum domine celle de la somme. En d'autres termes, pour un très grand seuil $x > 0$, l'événement extrême $\{S_n > x\}$ est essentiellement dû à l'événement $\{M_n > x\}$.

“En envoyant sa copie ou en validant son QCM, l’élève s’engage à avoir réalisé l’examen seul ou seule, sans l’aide d’une personne ou d’autres personnes.”

Mécanique des Milieux Continus Examen 2020

L’examen comporte un problème de mécanique des solides et un exercice de mécanique des fluides. En général, les questions de l’examen peuvent être résolues indépendamment les unes des autres même s’il faut les aborder dans l’ordre proposé. Si vous bloquez sur une question au début qui est un peu raide, il faut bien en convenir, passez à la suite ! Le problème et l’exercice sont sans aucun doute trop longs pour être traités en 3 heures mais il n’est pas nécessaire de l’avoir résolu dans son ensemble pour obtenir la note maximale. L’objectif est que vous ne vous ennuyez pas et que vous appreniez des choses sur l’anisotropie d’une part et sur l’écoulement autour d’un cylindre, d’autre part !

Première partie

Comportement élastique anisotrope des aubes de turbine monocristallines

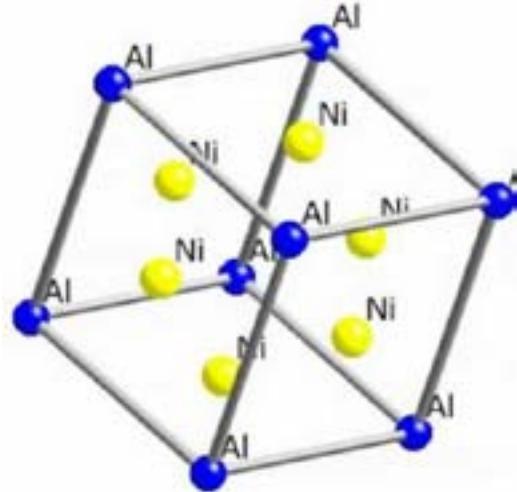
Les aubes de turbine des parties chaudes des turboréacteurs de moteurs d’avion, situées à l’aval de la chambre de combustion sont souvent des pièces monocristallines constituées d’un superalliage à base de nickel. L’aube représentée sur la figure 1(a) est un monocrystal métallique d’une dizaine de centimètres de hauteur. Les ingénieurs tirent profit du comportement anisotrope de ce cristal à symétrie cubique en optimisant son orientation par rapport à la direction principale du chargement. L’aube de turbine, accrochée au disque, est en rotation rapide autour de l’axe du disque et subit de ce fait une force d’inertie dans la direction verticale sur la figure 1(a). On représentera cette sollicitation de manière approchée par un effort de traction dans le problème proposé. De plus, l’aube subit le flux des gaz de combustion qui induit, en particulier, un effort de torsion sur la pale. Ce chargement sera également étudié dans ce problème.

Les superalliages à base de nickel comportent aussi une part significative d’aluminium. Ils ont la propriété remarquable d’avoir une limite d’élasticité qui reste très élevée et constante jusqu’à 800°C avant de décroître progressivement lorsque la température augmente, comme c’est le cas de la plupart des alliages métalliques.

Les monocristaux métalliques présentent un comportement mécanique très anisotrope. L’objectif du problème est d’aborder l’élasticité et la plasticité anisotropes dans le cas de la classe de symétrie cubique qui est celle du matériau monocristallin étudié ici.



(a)



(b)

FIGURE 1: Monocristal de superalliage à base de nickel : (a) aube de turbine de moteur d'avion en monocristal (hauteur $\simeq 10$ cm) ; (b) maille cristalline Ni_3Al cubique à faces centrées.

On se place dans le contexte infinitésimal et on considère l'état de référence comme naturel. Le comportement du matériau est élastique linéarisé, du moins jusqu'à ce que sa limite d'élasticité soit atteinte. On se place dans le cas statique, dans des conditions isothermes pour simplifier et on ne considère pas les efforts volumiques.

1. Préliminaire : le tenseur d'élasticité cubique

Le monocristal de symétrie cubique est entièrement caractérisé par la maille cristalline élémentaire de forme cubique de la figure 1(b) dont les arêtes parallèles aux vecteurs unitaires ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$) constituent une base orthonormée. On introduit le vecteur directeur d'une des quatre grandes diagonales du cube :

$$\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) \quad (1)$$

Il y a trois structures cristallines cubiques : cubique primitive (CP), cubique centrée (CC) et cubique à faces centrées (CFC). La maille du superalliage à base de nickel Ni_3Al est CFC comme le montre la figure 1b, avec les atomes d'aluminium aux sommets et les atomes de nickel au centre des faces du cube. La réplication de la maille élémentaire par les translations $a(u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k})$, $\forall u, v, w \in \mathbb{Z}$, où a est le paramètre de maille, i.e. la longueur de l'arête du cube élémentaire, permet de pavier l'espace et de décrire le monocristal périodique complet.

1.1. Le groupe d'invariance de configuration pour la classe de symétrie cubique

La classe de symétrie cubique contient 5 sous-groupes ponctuels. La maille cristalline de la figure 1(b) respecte les symétries appartenant au groupe \mathcal{O}_h caractérisé par les générateurs

suivants :

$$\mathbf{R}(2\pi/3\underline{\mathbf{c}}), \mathbf{R}(\pi/2\underline{\mathbf{i}}), \mathbf{R}_j, -\underline{\mathbf{1}}$$

La notation $\mathbf{R}(\theta \underline{\mathbf{a}})$ désigne la rotation d'angle θ autour de l'axe $\underline{\mathbf{a}}$, tandis que \mathbf{R}_j désigne la réflexion par rapport au plan de normale $\underline{\mathbf{j}}$, appelé plan-miroir. La symétrie centrale, ou inversion, est $-\underline{\mathbf{1}}$. Le groupe complet est obtenu en combinant autant de fois qu'on veut les éléments générateurs. Il contient 48 éléments. Parmi eux, il y a 24 rotations : l'identité, 3 rotations d'angle π par rapport à $\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}}$, 8 rotations d'angle $\pm 2\pi/3$ par rapport aux 4 grandes diagonales du cube, 6 rotations d'angle π par rapport aux 6 diagonales des faces du cube et les 6 rotations d'angle $\pm\pi/2$ par rapport aux arêtes du cube. La maille élémentaire de la figure 1(b) est invariante par application de toutes ces transformations.

Le groupe d'invariance de la configuration de référence dénuée de contrainte (état naturel) considérée dans la suite est exactement le groupe \mathcal{O}_h ainsi caractérisé.

On admettra l'ensemble de ces résultats.

1.2. Tenseur de structure de l'élasticité cubique

Le triplet $(\underline{\mathbf{i}}, \underline{\mathbf{j}}, \underline{\mathbf{k}})$ de la maille élémentaire dans la configuration dénuée de contrainte constitue le trièdre directeur caractérisant la matière de symétrie cubique. Dans le contexte infinitésimal, nous ne distinguerons pas les versions lagrangiennes et eulériennes de ces vecteurs. Les tenseurs de structure pour la symétrie cubique sont les tenseurs invariants par les éléments du groupe \mathcal{O}_h . On montre qu'il y a un seul tenseur de structure pour ce groupe et qu'il est d'ordre 4. Il s'agit de :

$$\underline{\mathfrak{T}} = \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}} \quad (2)$$

construit à partir des produits tensoriels des vecteurs du trièdre directeur¹.

On admettra ce résultat.

1.3. Potentiel d'élasticité cubique linéarisée

Le potentiel d'élasticité linéarisée est une fonction $\rho\psi(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \underline{\mathfrak{T}})$ de la déformation infinitésimale et du tenseur de structure. L'invariance tensorielle de cette fonction exige qu'elle soit isotrope par rapport à ses arguments. En se limitant aux termes quadratiques par rapport à $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (état naturel), montrer que cette fonction dépend de trois invariants mettant en jeu les tenseurs $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\underline{\mathfrak{T}}$.

En déduire qu'il existe trois modules d'élasticité cubique, κ, μ et γ tels que la loi de Hooke s'écrive :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \kappa(\text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \underline{\mathbf{1}} + 2\mu \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}} + 2\gamma \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3)$$

où $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}}$ désigne la partie déviatorique ou déviateur de $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$. On rappelle la décomposition de tout tenseur d'ordre 2 :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{3}(\text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \underline{\mathbf{1}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}}$$

Donner l'expression du potentiel d'élasticité en fonction des 3 modules κ, μ et γ .

1. On rappelle les notations concernant le produit tensoriel. Le produit tensoriel de deux vecteurs $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}$ est un tenseur d'ordre 2 dont les composantes sont les $u_i v_j : \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{v}} = u_i v_j \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j$. Plus généralement, $\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} = u_i u_j u_k u_l \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \otimes \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}_l$.

1.4. Le tenseur d'élasticité linéaire cubique

Vérifier que la loi d'élasticité linéaire (3) permet de définir le tenseur d'élasticité d'ordre 4 :

$$\tilde{\Lambda} = 3\kappa \tilde{K} + 2\mu \tilde{J} + 2\gamma \tilde{\Sigma} \quad (4)$$

tel que $\sigma = \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}$. Les opérateurs d'ordre 4, \tilde{I} , \tilde{J} et \tilde{K} sont définis par leur action sur les tenseurs symétriques d'ordre 2 :

$$\tilde{I} : \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{J} : \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^{\text{dev}}, \quad \tilde{K} : \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{3}(\text{trace } \tilde{\varepsilon}) \mathbf{1} \quad (5)$$

avec la relation $\tilde{I} = \tilde{J} + \tilde{K}$.

Des notations plus commodes pour manipuler les tenseurs d'élasticité d'ordre 4 dans le cas cubique sont introduites par l'intermédiaire des tenseurs d'ordre 4 suivants :

$$\tilde{L} := \tilde{I} - \tilde{\Sigma}, \quad \tilde{M} := \tilde{\Sigma} - \tilde{K} \quad \text{avec} \quad \tilde{K} + \tilde{L} + \tilde{M} = \tilde{I} \quad (6)$$

où $\tilde{\Sigma}$ est le tenseur de structure cubique (2). Montrer qu'une écriture alternative de (4) est alors :

$$\tilde{\Lambda} = 3k \tilde{K} + 2\mu_1 \tilde{L} + 2\mu_2 \tilde{M} \quad (7)$$

et exprimer les nouveaux modules k , μ_1 et μ_2 en fonction des modules précédents κ , μ et γ .

Quelle relation particulière doivent satisfaire k , μ_1 , μ_2 pour que l'élasticité cubique devienne isotrope ?

Vérifier, sans longs calculs, ou admettez, que le tenseur des souplesses, défini comme l'inverse du tenseur des modules d'élasticité, se met sous la forme :

$$\tilde{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{3k} \tilde{K} + \frac{1}{2\mu_1} \tilde{L} + \frac{1}{2\mu_2} \tilde{M} \quad (8)$$

tel que $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\Lambda}^{-1} : \sigma$.

1.5. Equivalence avec la notation matricielle usuelle

On considère la déformation d'extension simple dans la direction \underline{i} du cristal

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \underline{i} \otimes \underline{i} \quad (9)$$

Calculer la contrainte associée $\sigma = \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}$ en fonction de ε , k , μ_1 , μ_2 , en utilisant le tenseur d'élasticité cubique (7).

On utilisera avec profit les règles de calcul tensoriel suivantes :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) \cdot \underline{u} = (\underline{d} \cdot \underline{u}) \underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c}, \quad (\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) : (\underline{u} \otimes \underline{v}) = (\underline{c} \cdot \underline{u})(\underline{d} \cdot \underline{v}) \underline{a} \otimes \underline{b}$$

où $\underline{d} \cdot \underline{u}$ est le produit scalaire des deux vecteurs \underline{d} et \underline{u} .

Pour vous entraîner à manipuler ces opérations, montrer que :

$$\tilde{\Sigma} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) = \underline{i} \otimes \underline{i}, \quad \tilde{\Sigma} : (\underline{j} \otimes \underline{k}) = 0$$

Les ingénieurs travaillant sur les milieux anisotropes, tels que les composites, utilisent également la notation matricielle suivante en considérant les composantes des différents tenseurs dans la base orthonormée privilégiée liée au cristal ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$). Il est en effet possible de ranger les composantes indépendantes de Λ_{pqrs} dans une matrice 6×6 C_{ij} de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (10)$$

où C_{11}, C_{12}, C_{44} sont les trois modules indépendants intervenant dans cette représentation. Ecrite par rapport à une autre base que la base privilégiée ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$), la matrice 6×6 comporterait moins de composantes nulles et le fait qu'elle ne dépende que de trois constantes indépendantes ne serait pas apparent.

Grâce au calcul des contraintes pour l'extension simple considérée ici, identifier C_{11} et C_{12} en fonction de k et μ_2 .

Comment identifier C_{44} ?

Quelle est la condition portant sur les modules C_{ij} pour que l'élasticité soit isotrope ?

On définit le coefficient ou facteur d'anisotropie A :

$$A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (11)$$

Que vaut A dans le cas particulier isotrope ?

2. Traction simple d'une barre monocrystalline en élasticité cubique

On considère le champ de contrainte de traction simple dans la direction du vecteur \underline{d} (unitaire) :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \|\underline{d}\| = 1 \quad (12)$$

où σ est la contrainte de traction imposée.

2.1. Calcul de la déformation de traction

Le tenseur des déformations associé aux contraintes (12) se calcule par l'inverse de la loi de Hooke cubique (8) :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\Lambda}^{-1} : \underline{\sigma} \quad (13)$$

Exprimer $\underline{\varepsilon}$ en fonction des produits tensoriels $\underline{d} \otimes \underline{d}, \underline{i} \otimes \underline{i}, \underline{j} \otimes \underline{j}, \underline{k} \otimes \underline{k}$, de σ et des modules k, μ_1, μ_2 .

2.2. Module de Young dans la direction \underline{d}

Contrairement au cas de l'élasticité isotrope, il n'y a pas de module de Young unique en élasticité cubique. On appelle module de Young E_d dans la direction \underline{d} le rapport entre la contrainte axiale et la déformation dans la direction de traction :

$$E_d = \frac{\sigma}{\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}} \quad (14)$$

Elément	C_{11} (GPa)	C_{12} (GPa)	C_{44} (GPa)	k (GPa)	μ_1 (GPa)	μ_2 (GPa)	A
aluminium (CFC)	108.2	61.3	28.5	76.93	28.5	23.45	1.22
cuivre (CFC)	168.4	121.4	75.4	137.1	75.4	23.5	3.21
nickel (CFC)	246.5	147.3	124.7	180.4	124.7	49.6	2.51
fer (CC)	228	132	116.5	164	116.5	48	2.43
niobium (CC)	245.5	139	29.3	174.5	29.3	53.4	0.55

TABLE 1: Modules d'élasticité de plusieurs monocristaux métalliques à structure cubique. CFC et CC désignent respectivement les structures cubique à faces centrées et cubique centrée.

En utilisant les résultats de la question précédente, évaluer d'abord la déformation dans la direction de traction, c'est-à-dire $\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}$, puis montrer que l'inverse du module de Young dans la direction \underline{d} s'écrit :

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) \quad (15)$$

où les composantes d_l du vecteur \underline{d} sont dans la base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

2.3. Module de Young selon trois directions du cristal

Donner successivement les modules de Young lorsque $\underline{d} = \underline{i}$, puis $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j})/\sqrt{2}$ et enfin $\underline{d} = \underline{c} = (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})/\sqrt{3}$.

Commenter les résultats.

Faire l'application numérique dans le cas du monocrystal de nickel en utilisant les valeurs des modules d'élasticité de la table 1.

Commenter également les propriétés élastiques rassemblées dans ce tableau pour plusieurs métaux purs.

2.4. Modules de Young extrémaux

Déterminer les extrema du module de Young (15) en fonction de la direction de traction \underline{d} .

Donner les valeurs de ces extrema et les directions pour lesquelles ces extrema sont atteints.

Commenter.

3. Torsion d'une barre monocristalline en élasticité cubique

On considère maintenant le problème de la torsion d'une barre de section circulaire constituée d'un superalliage à base de nickel monocristallin. La section du cylindre est un disque de rayon R , la longueur de la barre est ℓ et l'axe du cylindre est parallèle à la direction \underline{e}_3 de la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ représentée sur la figure 2. On applique le couple $\underline{M} = C\underline{e}_3$ à l'extrémité $x_3 = \ell$ et le couple opposé à sa base. Les surfaces latérales de la barre sont libres de tout effort. Le comportement du matériau constitutif de la barre obéit à la loi d'élasticité cubique linéaire décrite par les équations (7).

L'objectif de cette section est de montrer que la réponse du cylindre dépend de l'orientation du cristal, c'est-à-dire du trièdre directeur matériel $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ par rapport au repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ attaché à la barre.

On propose de mettre en œuvre la méthode des déplacements déjà utilisée dans le cas isotrope en partant d'un champ de la forme :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (16)$$

où le déplacement u_3 , faisant intervenir la fonction inconnue φ , correspond à un gauchissement de la surface $X_3 = Cste$ après déformation. Les coordonnées du point matériel dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sont X_1, X_2, X_3 . Le coefficient α désigne un angle par unité de longueur.

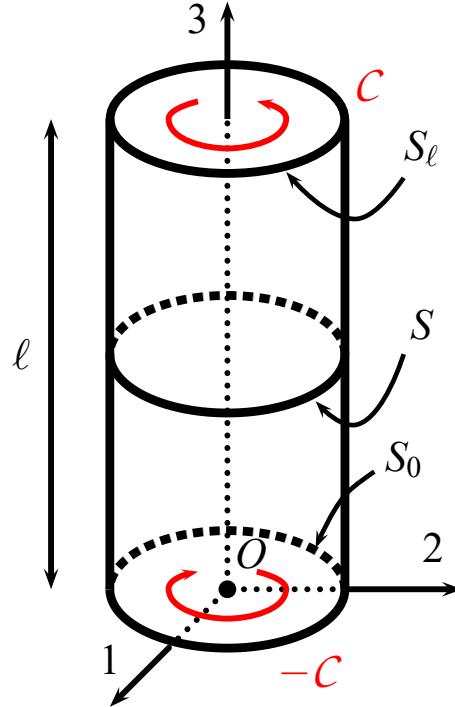


FIGURE 2: Torsion d'un barreau cylindrique : schéma de principe.

3.1. Torsion d'une barre parallèle à \underline{k}

On commence par le cas où le trièdre directeur est parallèle aux vecteurs de la base considérée :

$$\underline{e}_1 = \underline{i}, \quad \underline{e}_2 = \underline{j}, \quad \underline{e}_3 = \underline{k}$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à l'une des arêtes du cube de la maille cristalline de la figure 1(b).

Le champ des déformations qui se déduit de (16) se met sous la forme

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{13}(\underline{i} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{i}) + \varepsilon_{23}(\underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j}) \quad (17)$$

1. Exprimer ε_{13} et ε_{23} en fonction de α, X_1, X_2 et de φ .
2. Calculer les contraintes en utilisant la loi d'élasticité cubique (7).
3. Donner alors les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement.

4. Conclure et donner l'expression finale des contraintes.
5. Etablir enfin la relation liant le couple et l'angle par unité de longueur pour la torsion par rapport à l'axe $\underline{e}_3 = \underline{k}$:

$$\mathcal{C} = \mu_1 \frac{\pi R^4}{2} \alpha \quad (18)$$

Commenter le résultat.

3.2. Torsion d'une barre d'axe parallèle à $\underline{i} + \underline{k}$

On considère cette fois-ci une barre de section circulaire dont les axes sont orientés de la façon suivante par rapport au trièdre directeur cristallographique :

$$\underline{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} - \underline{k}), \quad \underline{e}_2 = \underline{j}, \quad \underline{e}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} + \underline{k}) \quad (19)$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à la diagonale d'une des faces du cube de la maille cristalline de la figure 1.

On adopte ici aussi la proposition (16) pour le champ de déplacements. Le tenseur des déformations reste de la forme :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{13}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \varepsilon_{23}(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) \quad (20)$$

1. Exprimer ce tenseur en fonction de produits tensoriels impliquant uniquement $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$.
2. Calculer ensuite le tenseur des contraintes en utilisant la loi (7).
3. Exprimer enfin ce tenseur des contraintes en fonction de produits tensoriels de $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$.
4. Donner l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire la fonction de gauchissement. Cette fonction est-elle harmonique ?
5. Donner les conditions de bord correspondantes.
6. Trouver la fonction de gauchissement associée. Vérifiez qualitativement que cette fonction conduit au gauchissement illustré sur la figure 3. Commenter.
7. Finalement, montrer que les seules composantes de contraintes non nulles s'expriment de la manière suivante :

$$\sigma_{13} = -2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_2, \quad \sigma_{23} = 2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_1 \quad (21)$$

8. Calculer alors la force et le moment de torsion résultant sur la surface supérieure S_ℓ .
9. Donner la relation entre le couple \mathcal{C} et l'angle par unité de longueur α .

4. Critère de plasticité cubique

Le dimensionnement des aubes de turbine monocristallines nécessite de prendre en compte la limite d'élasticité du monocristal de superalliage à base de nickel pour tout type de chargement. Pour cela, il faut élaborer un critère de plasticité, à savoir une fonction des contraintes généralisant les critères de Tresca ou von Mises, valides pour les matériaux isotropes, au cas de la symétrie cubique. Tout comme le potentiel d'élasticité, le critère de plasticité doit être une fonction tensorielle des contraintes et du tenseur de structure, i.e. une fonction isotrope par

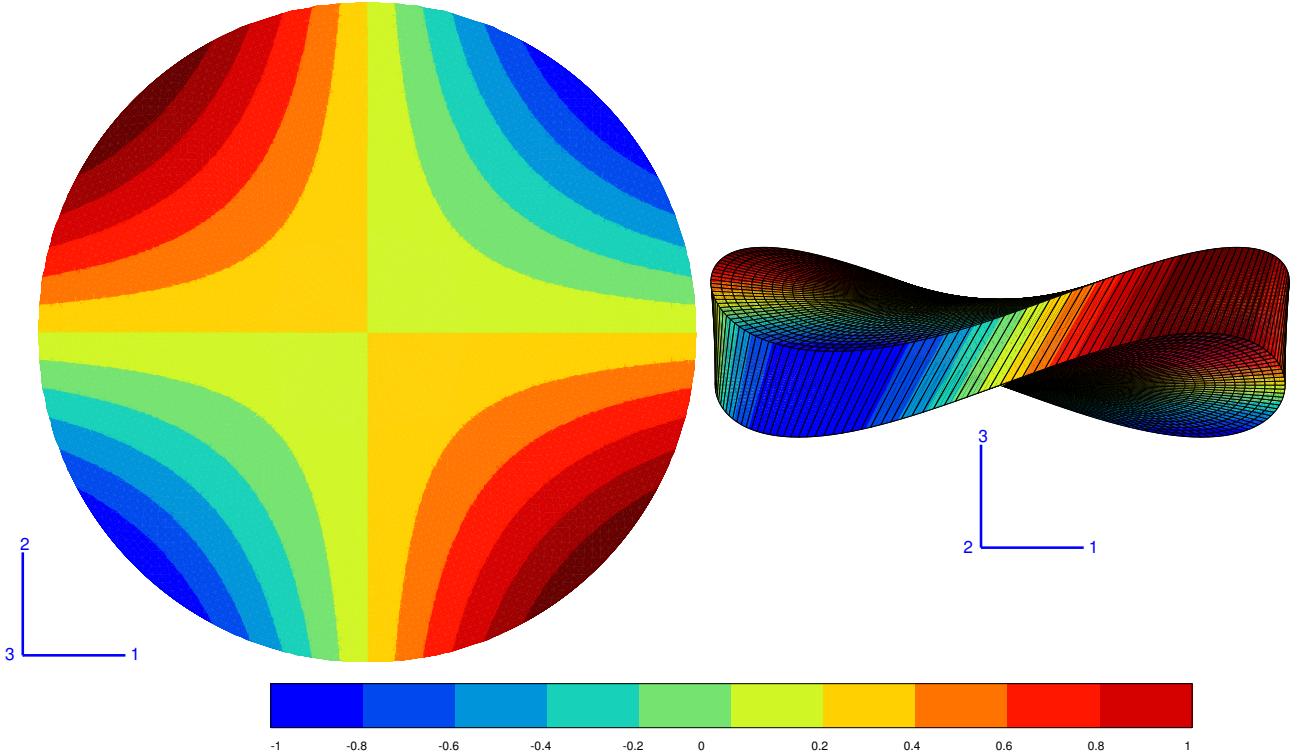


FIGURE 3: Champ de déplacement u_3 sur un tronçon de la barre en torsion dont l'axe est orienté parallèlement à $\underline{i} + \underline{k}$: lignes de niveau dans la section (valeurs normalisées par la valeur maximale, à gauche), vue latérale du tronçon déformé (déplacement exagérés d'un facteur 10), à droite.

rapport aux deux arguments. La dépendance est toutefois restreinte au déviateur des contraintes car on sait que le comportement plastique des métaux est généralement insensible à la pression hydrostatique. En se limitant à une forme quadratique comme pour le potentiel d'élasticité, on est alors en mesure de proposer le critère de plasticité suivant :

$$f(\sigma, \tilde{\Sigma}) = \left(F\sigma^{\text{dev}} : \sigma^{\text{dev}} + L\sigma^{\text{dev}} : \tilde{\Sigma} : \sigma^{\text{dev}} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \quad (22)$$

où F, L et σ_0 sont les trois paramètres du modèle de plasticité. Tant que $f(\sigma, \tilde{\Sigma})$ est négative, le comportement du matériau reste élastique. Lorsque $f(\sigma, \tilde{\Sigma}) = 0$, la limite d'élasticité est atteinte. La présence commode du facteur $\sqrt{2/3}$ est purement conventionnelle. Dans le critère apparaît la contrainte équivalente définie par

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(F\sigma^{\text{dev}} : \sigma^{\text{dev}} + L\sigma^{\text{dev}} : \tilde{\Sigma} : \sigma^{\text{dev}} \right)^{1/2} \quad (23)$$

que l'on peut interpréter comme une norme anisotrope du tenseur des contraintes. Pour des raisons de stabilité de l'écoulement plastique, la convexité de la fonction f par rapport aux composantes des contraintes est exigée. Elle est garantie en particulier lorsque $F > 0, L \geq 0$.

4.1. Limite d'élasticité en traction simple

On considère l'état de traction simple dans la direction \underline{d} du cristal :

$$\sigma = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \text{avec} \quad \|\underline{d}\| = 1 \quad (24)$$

Calculer le déviateur $\tilde{\sigma}^{\text{dev}}$ de ce tenseur de contraintes.

Evaluer $\tilde{\sigma}^{\text{dev}} : \tilde{\sigma}^{\text{dev}}$.

Evaluer $\tilde{\sigma}^{\text{dev}} : \tilde{\Sigma} : \tilde{\sigma}^{\text{dev}}$.

Donner la valeur critique de σ pour laquelle le critère (22) s'annule. C'est la limite d'élasticité du monocristal en traction dans la direction \underline{i} . Elle s'exprime en fonction de F, L, σ_0 et des composantes de \underline{d} dans la base du cristal $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

Donner les trois limites d'élasticité pour la traction selon les directions $\underline{i}, \underline{i} + \underline{j}, \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$.

Chercher les extrema de la limite d'élasticité par rapport à l'orientation de \underline{d} .

Pour quelles directions du cristal la limite d'élasticité est-elle la plus élevée ?

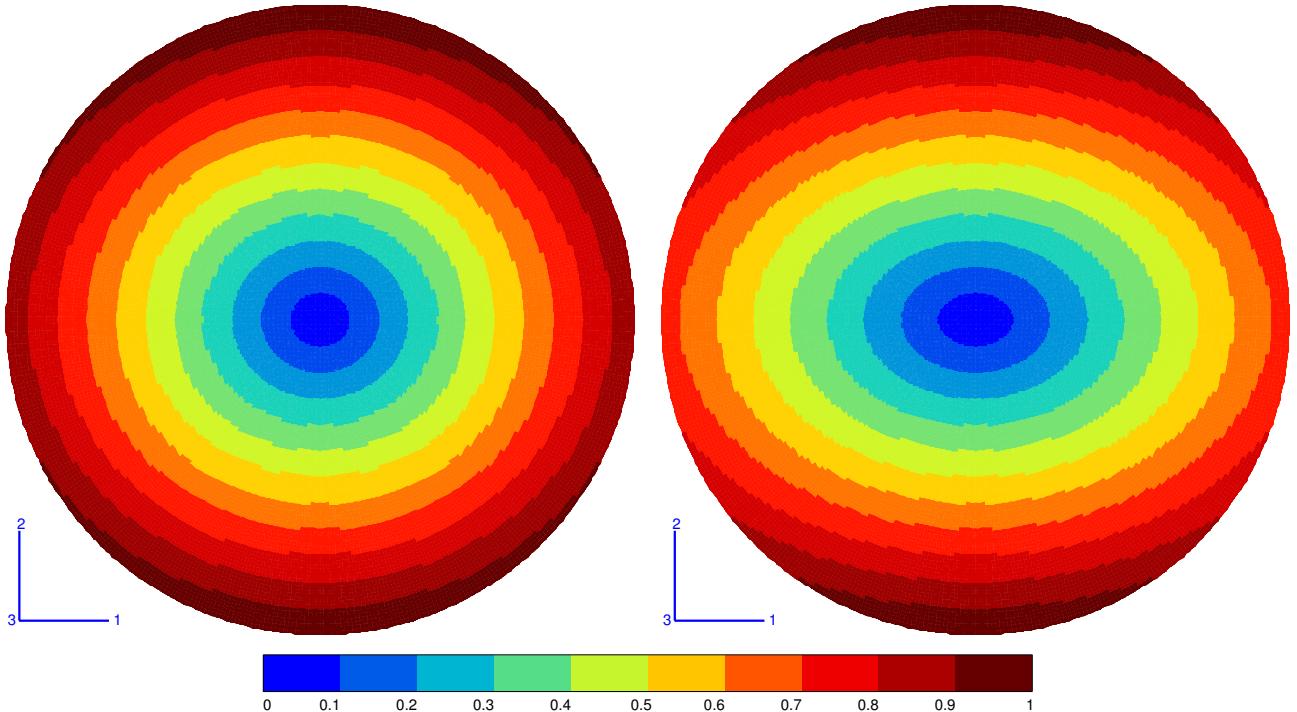


FIGURE 4: Champ de contrainte équivalente σ_{eq} (normée par la valeur maximale) pour deux valeurs des paramètres F et L : $F = 1 = 4L$ à gauche, $F = L = 1$ à droite, cf. équation (23) pour la définition de la contrainte équivalente. La section représentée est issue d'une barre monocristalline en torsion autour de l'axe $\underline{e}_3 = (\underline{i} + \underline{k})/\sqrt{2}$, avec $\underline{e}_2 = \underline{j}$.

4.2. Limite d'élasticité en torsion

On applique maintenant le critère de plasticité au cas de la torsion d'une barre monocristalline pour les deux orientations traitées au paragraphe 3.

Utiliser les champs de contraintes trouvés aux paragraphes 3.1 et 3.2 pour déterminer l'angle de torsion par unité de longueur critique α_0 pour lequel la plasticité commence. On traitera d'abord la torsion autour de \underline{k} puis on passera à la torsion autour de $\underline{i} + \underline{k}$.

On indiquera également à quel endroit la limite d'élasticité est atteinte pour la première fois.

Le champ de contrainte équivalente, σ_{eq} donnée par (23), est illustré sur la figure 4 pour deux valeurs du couple de paramètres F, L , dans le cas de la torsion autour de l'axe $\underline{i} + \underline{k}$. Commenter ces figures à la lumière des résultats tout juste acquis concernant la limite d'élasticité pour la barre en torsion selon l'axe $\underline{i} + \underline{k}$.

Deuxième partie

L'écoulement autour d'un cylindre revisité

L'objectif de cet exercice est de prolonger l'étude de l'écoulement plan irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre O et de rayon R fixe par rapport au référentiel d'observation. La géométrie du cylindre et le système de coordonnées sont indiqués sur la figure 5(a).

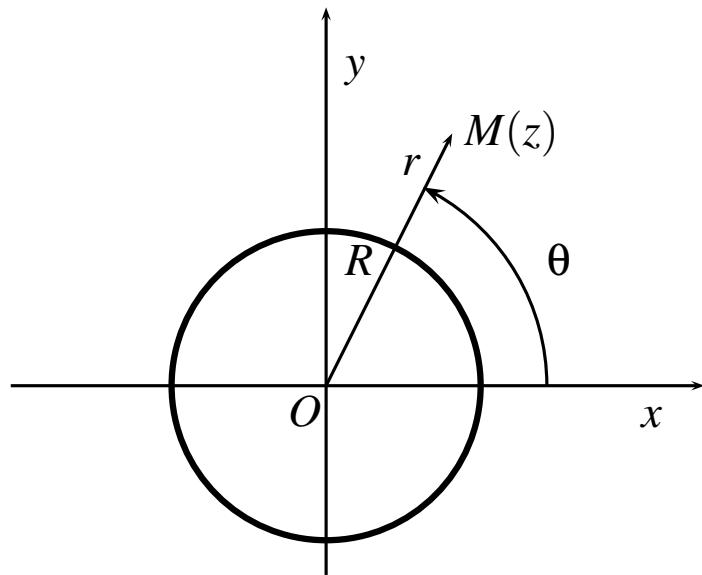


FIGURE 5: Géométrie du cylindre et système de coordonnées : le point M d'affixe z est repéré par les coordonnées r, θ et les composantes cartésiennes des vecteurs considérés dans l'exercice sont exprimées en fonction de ces coordonnées.

5. Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation

On considère l'écoulement plan défini par le potentiel complexe suivant :

$$f(z) = V_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z \quad (25)$$

On adoptera la détermination principale du logarithme complexe :

$$\log z = \log |z| + i \arg(z), \quad \text{avec } \arg(z) \in [0, 2\pi] \quad (26)$$

où V_0, Γ sont des réels donnés et i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Pour fixer les idées, on prendra $V_0 \geq 0, \Gamma \geq 0$. On rappelle que la variable complexe z désigne le point de coordonnées (x, y) dans le repère cartésien orthonormé d'origine O dans le plan considéré.

5.1. Nature de l'écoulement

En dérivant le potentiel complexe, donner le champ des vitesses. Donner également la fonction de courant associée à cet écoulement. On exprimera les vitesses dans le repère cartésien orthonormé d'origine O en fonction des coordonnées r, θ , comme sur la figure 5.

Justifier que, quel que soit Γ , ce champ de vitesses fournit une solution du problème de l'écoulement stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre O et de rayon R , le fluide étant animé de la vitesse horizontale V_0 à l'infini. Cela illustre que ce problème possède une infinité de solutions.

5.2. Réalisation de l'écoulement

Imaginer comment provoquer expérimentalement l'apparition de la contribution proportionnelle à Γ au champ de vitesse étudié.

Interpréter la quantité Γ .

5.3. Etude des lignes de courant

Déterminer les points de l'écoulement où la vitesse est nulle. Discuter et interpréter physiquement ces résultats en fonction du paramètre

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi RV_0} \quad (27)$$

Donner l'équation caractérisant les lignes de courant.

Tracer qualitativement ces lignes. Pour cela, on ne cherchera pas à exploiter l'équation trouvée mais on s'inspirera plutôt du nombre de points d'arrêt déterminés précédemment selon les différents cas apparus dans la discussion.

5.4. Efforts sur le cylindre

Calculer la résultante des efforts agissant sur le cylindre fixe.

Ce résultat résout-il le paradoxe de D'Alembert ?

Quel effet remarquable émerge de ce résultat ?

En connaissez-vous des applications pratiques ?

Première partie

Comportement élastique anisotrope des aubes de turbine monocrystallines

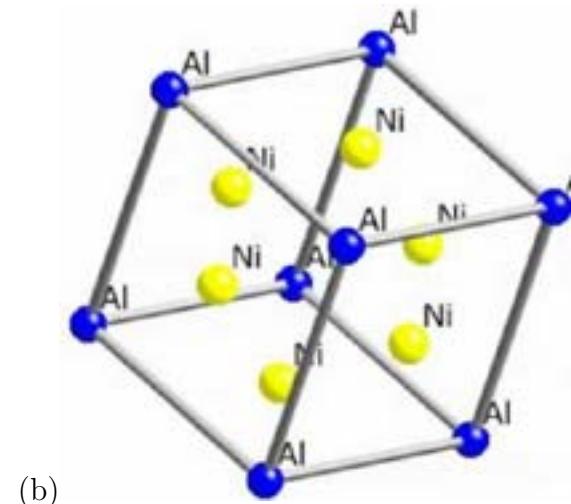


FIGURE 1: Monocristal de superalliage à base de nickel : (a) aube de turbine de moteur d'avion en monocristal (hauteur $\simeq 10$ cm) ; (b) maille cristalline Ni_3Al cubique à faces centrées.

Les aubes de turbine des parties chaudes des turboréacteurs de moteurs d'avion, situées à l'aval de la chambre de combustion sont souvent des pièces monocrystallines constituées d'un superalliage à base de nickel. L'aube représentée sur la figure 1 à gauche est un monocristal métallique d'une dizaine de centimètres de hauteur. Les ingénieurs tirent profit du comportement anisotrope de ce cristal à symétrie cubique en optimisant son orientation par rapport à la direction principale du chargement. L'aube de turbine, accrochée au disque, est en rotation rapide autour de l'axe du disque et subit de ce fait une force d'inertie dans la direction verticale sur la figure 1a. On représentera cette sollicitation de manière approchée par un effort de traction dans le problème proposé. De plus, l'aube subit le flux des gaz de combustion qui induit, en particulier, un effort de torsion sur la pale. Ce chargement sera également étudié dans ce problème.

Les superalliages à base de nickel comportent aussi une part significative d'aluminium. Ils ont la propriété remarquable d'avoir une limite d'élasticité qui reste très élevée et constante jusqu'à

800°C avant de décroître progressivement lorsque la température augmente, comme c'est le cas de la plupart des alliages métalliques.

Les monocristaux métalliques présentent un comportement mécanique très anisotrope. L'objectif du problème est d'aborder l'élasticité et la plasticité anisotropes dans le cas de la classe de symétrie cubique qui est celle du matériau monocristallin étudié ici.

On se place dans le contexte infinitésimal et on considère l'état de référence comme naturel. Le comportement du matériau est élastique linéarisé, du moins jusqu'à ce que sa limite d'élasticité soit atteinte. On se place dans des conditions isothermes pour simplifier et on ne considère pas les efforts volumiques.

1. Préliminaire : le tenseur d'élasticité cubique

Le monocrystal de symétrie cubique est entièrement caractérisé par la maille cristalline élémentaire de forme cubique de la figure 1 (à droite) dont les arêtes parallèles aux vecteurs unitaires ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$) constituent une base orthonormée. On introduit le vecteur directeur d'une des quatre grandes diagonales du cube :

$$\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) \quad (1)$$

Il y a trois structures cristallines cubiques : cubique primitive (CP), cubique centrée (CC) et cubique à faces centrées (CFC). La maille du superalliage à base de nickel Ni₃Al est CFC comme le montre la figure 1b, avec les atomes d'aluminium aux sommets et les atomes de nickel au centre des faces du cube. La réplication de la maille élémentaire par les translations $a(u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k})$, $\forall u, v, w \in \mathbb{Z}$, où a est le paramètre de maille, i.e. la longueur de l'arête du cube élémentaire, permet de pavier l'espace et de décrire le matériau cristallin périodique complet.

1.1. Le groupe d'invariance de configuration pour la classe de symétrie cubique

La classe de symétrie cubique contient 5 sous-groupes ponctuels. La maille cristalline de la figure 1 respecte les symétries appartenant au groupe \mathcal{O}_h caractérisé par les générateurs suivants :

$$\tilde{\mathbf{R}}(2\pi/3\underline{c}), \tilde{\mathbf{R}}(\pi/2\underline{i}), \tilde{\mathbf{R}}_j, -\tilde{\mathbf{1}}$$

d'après [Zheng \(1994\)](#). La notation $\tilde{\mathbf{R}}(\theta \underline{a})$ désigne la rotation d'angle θ autour de l'axe \underline{a} , tandis que $\tilde{\mathbf{R}}_j$ désigne la réflexion par rapport au plan de normale \underline{j} , appelé plan-miroir. La symétrie centrale, ou inversion, est $-\tilde{\mathbf{1}}$. Le groupe complet est obtenu en combinant autant de fois qu'on veut les éléments générateurs. Il contient 48 éléments. Parmi eux, il y a 24 rotations : l'identité, 3 rotations d'angle π par rapport à $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, 8 rotations d'angle $\pm 2\pi/3$ par rapport aux 4 grandes diagonales du cube, 6 rotations d'angle π par rapport aux 6 diagonales des faces du cube et les 6 rotations d'angle $\pm\pi/2$ par rapport aux arêtes du cube. La cellule élémentaire de la figure 1 est invariante par application de toutes ces transformations.

Le groupe d'invariance de la configuration de référence dénuée de contrainte (état naturel) considérée dans la suite est exactement le groupe \mathcal{O}_h ainsi caractérisé.

On admettra l'ensemble de ces résultats.

1.2. Tenseur de structure de l'élasticité cubique

Le triplet $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ de la maille élémentaire dans la configuration dénuée de contrainte constitue le trièdre directeur caractérisant la matière de symétrie cubique. Dans le contexte infinitésimal, nous ne distinguerons pas les versions lagrangiennes et eulériennes de ces vecteurs. Les tenseurs de structure pour la symétrie cubique sont les tenseurs invariants par les éléments du groupe O_h . On montre¹ qu'il y a un seul tenseur de structure pour ce groupe et qu'il est d'ordre 4. Il s'agit de :

$$\tilde{\mathfrak{T}} = \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \quad (2)$$

construit à partir des produits tensoriels des vecteurs du trièdre directeur.

On admettra ce résultat.

Dans la suite, on fera appel à la notation abrégée

$$\underline{u}^4 := \underline{u} \otimes \underline{u} \otimes \underline{u} \otimes \underline{u} \quad (3)$$

où la notation \underline{u}^4 désigne le tenseur d'ordre 4 obtenu par quatre produits tensoriels.

1.3. Potentiel d'élasticité cubique linéarisée

Le potentiel d'élasticité linéarisée est une fonction $\rho\psi(\underline{\varepsilon}, \tilde{\mathfrak{T}})$ de la déformation infinitésimale et du tenseur de structure. L'invariance tensorielle de cette fonction exige qu'elle soit isotrope par rapport à ses arguments. En se limitant aux termes quadratiques par rapport à $\underline{\varepsilon}$ (état naturel), montrer que cette fonction dépend de trois invariants mettant en jeu les tenseurs $\underline{\varepsilon}$ et $\tilde{\mathfrak{T}}$.

En déduire qu'il existe trois modules d'élasticité cubique, κ, μ et γ tels que la loi de Hooke s'écrive :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \kappa(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \underline{\varepsilon}^{\text{dev}} + 2\gamma \tilde{\mathfrak{T}} : \underline{\varepsilon} \quad (4)$$

où $\underline{\varepsilon}^{\text{dev}}$ désigne la partie déviatorique ou déviateur de $\underline{\varepsilon}$. On rappelle la décomposition de tout tenseur d'ordre 2 :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{3}(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \mathbf{1} + \underline{\varepsilon}^{\text{dev}}$$

Donner l'expression du potentiel d'élasticité en fonction des 3 modules κ, μ et γ .

Les invariants à recenser comprennent les invariants de $\underline{\varepsilon}$, à savoir $\text{trace } \underline{\varepsilon}$, $\text{trace } \underline{\varepsilon}^2$, $\text{trace } \underline{\varepsilon}^3$ et les invariants combinés de $\underline{\varepsilon}$ et $\tilde{\mathfrak{T}}$. L'invariant joint d'ordre le plus bas est $\underline{\varepsilon} : \tilde{\mathfrak{T}} : \underline{\varepsilon}$. Finalement on a

$$\rho\psi(\underline{\varepsilon}, \tilde{\mathfrak{T}}) = \rho\psi(\text{trace } \underline{\varepsilon}, \text{trace } \underline{\varepsilon}^{\text{dev}2}, \underline{\varepsilon} : \tilde{\mathfrak{T}} : \underline{\varepsilon}) \quad (5)$$

où l'on a remplacé $\text{trace } \underline{\varepsilon}^2$ par $\text{trace } \underline{\varepsilon}^{\text{dev}2}$, sans perte de généralité puisque la trace de la déformation est présente par ailleurs. En ne conservant que les termes quadratiques, on obtient :

$$\rho\psi(\underline{\varepsilon}, \tilde{\mathfrak{T}}) = \frac{3\kappa}{2}(\text{trace } \underline{\varepsilon})^2 + \mu(\underline{\varepsilon}^{\text{dev}} : \underline{\varepsilon}^{\text{dev}}) + \gamma(\underline{\varepsilon} : \tilde{\mathfrak{T}} : \underline{\varepsilon}) \quad (6)$$

La loi d'élasticité cubique (4) s'en déduit.

L'expression du potentiel précédent est la partie quadratique du potentiel général en

1. cf. Zheng (1994).

hyperélasticité cubique. D'après les résultats théoriques de Zheng and Spencer (1993a,b), utilisés ensuite par Kambouchev et al. (2007); Schröder et al. (2010); Kim (2014), le groupe de symétrie \mathcal{O}_h est caractérisé par un seul tenseur de structure, à savoir $\tilde{\mathbf{T}}$ défini par (2). Le potentiel lagrangien d'un matériau hyperélastique cubique est une fonction de six invariants²

$$\rho_0\psi(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{T}}) = \rho_0\psi(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) \quad (7)$$

Il y a 3 invariants individuels et 3 invariants joints/croisés :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{trace } \tilde{\mathbf{C}}, & I_2 &= \frac{1}{2}\text{trace } \tilde{\mathbf{C}}^2, & I_3 &= \frac{1}{3}\text{trace } \tilde{\mathbf{C}}^3 \\ I_4 &= \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}}, & I_5 &= \tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}}^2, & I_6 &= \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{C}}^2 : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}}^2 \end{aligned}$$

Si l'on ne garde que les contributions quadratiques, il reste I_1, I_2 et I_4 qui ont été utilisés plus haut. La dérivation de ce potentiel par rapport à $\tilde{\mathbf{C}}$ fournit la loi lagrangienne :

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{1} + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \tilde{\mathbf{C}} + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \tilde{\mathbf{C}}^2 + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_4} \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}} \\ &+ \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_5} (\tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}}^2 + \tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}} + (\tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}})^T) + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_6} (\tilde{\mathbf{C}}^2 : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}} + (\tilde{\mathbf{C}}^2 : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}})^T) \end{aligned} \quad (8)$$

1.4. Le tenseur d'élasticité linéaire cubique

Vérifier que la loi d'élasticité linéaire (4) permet de définir le tenseur d'élasticité d'ordre 4 :

$$\tilde{\Lambda} = 3\kappa \tilde{\mathbf{K}} + 2\mu \tilde{\mathbf{J}} + 2\gamma \tilde{\mathbf{T}} \quad (9)$$

tel que $\sigma = \tilde{\Lambda} : \varepsilon$. Les opérateurs d'ordre 4, $\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\mathbf{J}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}$ sont définis par leur action sur les tenseurs symétriques d'ordre 2 :

$$\tilde{\mathbf{I}} : \varepsilon = \varepsilon, \quad \tilde{\mathbf{J}} : \varepsilon = \varepsilon^{\text{dev}}, \quad \tilde{\mathbf{K}} : \varepsilon = \frac{1}{3}(\text{trace } \varepsilon) \mathbf{1} \quad (10)$$

avec la relation $\tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{K}}$.

Des notations plus commodes pour manipuler les tenseurs d'élasticité d'ordre 4 dans le cas cubique ont été introduites par Walpole (1984) par l'intermédiaire des tenseurs d'ordre 4 suivants :

$$\tilde{\mathbf{L}} := \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{T}}, \quad \tilde{\mathbf{M}} := \tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\mathbf{K}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{I}} \quad (11)$$

où $\tilde{\mathbf{T}}$ est le tenseur de structure cubique (2). Montrer qu'une écriture alternative de (9) est alors :

$$\tilde{\Lambda} = 3k \tilde{\mathbf{K}} + 2\mu_1 \tilde{\mathbf{L}} + 2\mu_2 \tilde{\mathbf{M}} \quad (12)$$

et exprimer les nouveaux modules k, μ_1 et μ_2 en fonction des modules précédents κ, μ et γ .

2. Zheng (1994) en mentionne 8 mais les auteurs cités par la suite ne font appeler qu'à six invariants.

Quelle relation particulière doivent satisfaire k, μ_1, μ_2 pour que l'élasticité cubique devienne isotrope ?

Vérifier, sans longs calculs, ou admettez, que le tenseur des souplesses, défini comme l'inverse du tenseur des modules d'élasticité, se met sous la forme :

$$\underset{\approx}{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{3k} \underset{\approx}{\mathbf{K}} + \frac{1}{2\mu_1} \underset{\approx}{\mathbf{L}} + \frac{1}{2\mu_2} \underset{\approx}{\mathbf{M}} \quad (13)$$

tel que $\underset{\approx}{\varepsilon} = \underset{\approx}{\Lambda}^{-1} : \underset{\approx}{\sigma}$.

Les notations introduites permettent de calculer

$$\underset{\approx}{\Lambda} = 3\kappa \underset{\approx}{\mathbf{K}} + 2\mu(\underset{\approx}{\mathbf{L}} + \underset{\approx}{\mathbf{M}}) + 2\gamma(\underset{\approx}{\mathbf{K}} + \underset{\approx}{\mathbf{M}})$$

de sorte que

$$3k = 3\kappa + 2\gamma, \quad \mu_1 = \mu, \quad \mu_2 = \mu + \gamma \quad \text{ou} \quad 3\kappa = 3k + 2(\mu_1 - \mu_2), \quad \mu = \mu_1, \quad \gamma = \mu_2 - \mu_1$$

Le cas isotrope est obtenu lorsque le tenseur de structure ne joue pas de rôle, c'est-à-dire lorsque $\gamma = 0 \implies \mu_1 = \mu_2$.

Pour établir l'expression (13), il suffit de remarquer que, en vertu des définitions (10) et (11), les opérateurs $\underset{\approx}{\mathbf{K}}, \underset{\approx}{\mathbf{L}}, \underset{\approx}{\mathbf{M}}$ sont idempotents et deux à deux orthogonaux :

$$\underset{\approx}{\mathbf{K}}^2 = \underset{\approx}{\mathbf{K}}, \quad \underset{\approx}{\mathbf{L}}^2 = \underset{\approx}{\mathbf{L}}, \quad \underset{\approx}{\mathbf{M}}^2 = \underset{\approx}{\mathbf{M}}$$

$$\underset{\approx}{\mathbf{K}} : \underset{\approx}{\mathbf{L}} = \underset{\approx}{\mathbf{L}} : \underset{\approx}{\mathbf{K}} = \underset{\approx}{\mathbf{L}} : \underset{\approx}{\mathbf{M}} = \underset{\approx}{\mathbf{M}} : \underset{\approx}{\mathbf{L}} = \underset{\approx}{\mathbf{M}} : \underset{\approx}{\mathbf{K}} = \underset{\approx}{\mathbf{K}} : \underset{\approx}{\mathbf{M}} = 0$$

On vérifie alors (c'est le mérite de la notation de Walpole) que

$$\underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\approx}{\Lambda}^{-1} = \underset{\approx}{\Lambda}^{-1} : \underset{\approx}{\Lambda} = \underset{\approx}{\mathbf{I}}$$

1.5. Equivalence avec la notation matricielle usuelle

On considère la déformation d'extension simple dans la direction \underline{i} du cristal

$$\underset{\approx}{\varepsilon} = \varepsilon \underline{i} \otimes \underline{i} \quad (14)$$

Calculer la contrainte associée $\underset{\approx}{\sigma} = \underset{\approx}{\Lambda} : \underset{\approx}{\varepsilon}$ en fonction de $\varepsilon, k, \mu_1, \mu_2$, en utilisant le tenseur d'élasticité cubique (12).

On utilisera avec profit les règles de calcul tensoriel suivantes :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) \cdot \underline{u} = (\underline{d} \cdot \underline{u}) \underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c}, \quad (\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) : (\underline{u} \otimes \underline{v}) = (\underline{c} \cdot \underline{u})(\underline{d} \cdot \underline{v}) \underline{a} \otimes \underline{b}$$

où $\underline{d} \cdot \underline{u}$ est le produit scalaire des deux vecteurs \underline{d} et \underline{u} .

Pour vous entraîner à manipuler ces opérations, montrer que :

$$\underset{\approx}{\mathfrak{T}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) = \underline{i} \otimes \underline{i}, \quad \underset{\approx}{\mathfrak{T}} : (\underline{j} \otimes \underline{k}) = 0$$

Les ingénieurs travaillant sur les milieux anisotropes, tels que les composites, utilisent également la notation matricielle suivante en considérant les composantes des différents tenseurs

dans la base orthonormée privilégiée liée au cristal $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$. Il est en effet possible de ranger les composantes indépendantes de Λ_{pqrs} dans une matrice 6×6 C_{ij} de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (15)$$

où C_{11}, C_{12}, C_{44} sont les trois modules indépendants intervenant dans cette représentation. Ecrite par rapport à une autre base que la base privilégiée $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$, la matrice 6×6 comporterait moins de composantes nulles et le fait qu'elle ne dépende que de trois constantes indépendantes ne serait pas apparent.

Grâce au calcul des contraintes pour l'extension simple considérée ici, identifier C_{11} et C_{12} en fonction de k et μ_2 .

Comment identifier C_{44} ?

Quelle est la condition portant sur les modules C_{ij} pour que l'élasticité soit isotrope ?

On définit le coefficient ou facteur d'anisotropie A :

$$A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (16)$$

Que vaut A dans le cas particulier isotrope ?

Pour faire le calcul des contraintes associées à l'extension simple selon \underline{i} , on commence par évaluer successivement

$$\begin{aligned} \underset{\approx}{\underline{K}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) &= \frac{1}{3}(\underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}) \\ \underset{\approx}{\underline{L}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) &= 0 \\ \underset{\approx}{\underline{M}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) &= \frac{2}{3}\underline{i} \otimes \underline{i} - \frac{1}{3}(\underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boldsymbol{\sigma} = k\varepsilon(\underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}) + \frac{2\mu_2\varepsilon}{3}(2\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{j} \otimes \underline{j} - \underline{k} \otimes \underline{k})$$

et les composantes correspondantes dans la base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fournissent les relations cherchées en substituant $\varepsilon_{11} = \varepsilon$, dans la relation matricielle (15) :

$$\sigma_{11} = (k + \frac{4}{3}\mu_2)\varepsilon = C_{11}\varepsilon, \quad \sigma_{22} = (k - \frac{2}{3}\mu_2)\varepsilon = C_{12}\varepsilon$$

et finalement :

$$C_{11} = k + \frac{4}{3}\mu_2, \quad C_{12} = k - \frac{2}{3}\mu_2$$

On trouve $C_{44} = \mu_1$ en considérant une déformation de cisaillement $\boldsymbol{\xi} = \varepsilon_{12}(\underline{i} \otimes \underline{j} + \underline{j} \otimes \underline{i})$.

Inversement, $2\mu_2 = C_{11} - C_{12}$, $\mu_1 = C_{44}$, $3k = C_{11} + 2C_{12}$.

Le cas particulier isotrope est obtenu lorsque $\mu_1 = \mu_2$ et donc

$$A = \frac{C_{11} - C_{12}}{2C_{44}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$$

2. Traction simple d'une barre monocrystalline en élasticité cubique

On considère le champ de contrainte de traction simple dans la direction du vecteur \underline{d} (unitaire) :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \|\underline{d}\| = 1 \quad (17)$$

où σ est la contrainte de traction imposée.

2.1. Calcul de la déformation de traction

Le tenseur des déformations associé aux contraintes (17) se calcule par l'inverse de la loi de Hooke cubique (13) :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\Lambda}^{-1} : \underline{\sigma} \quad (18)$$

Exprimer $\underline{\varepsilon}$ en fonction des produits tensoriels $\underline{d} \otimes \underline{d}, \underline{i} \otimes \underline{i}, \underline{j} \otimes \underline{j}, \underline{k} \otimes \underline{k}$, de σ et des modules k, μ_1, μ_2 .

La forme (13) du tenseur des souplesses est utilisée pour calculer la déformation :

$$\underline{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{3k} \underline{K} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{L} + \frac{1}{2\mu_2} \underline{M} = \left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{2\mu_2}\right) \underline{\approx} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{\approx} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right) \underline{\mathfrak{T}}$$

de sorte que

$$\underline{\varepsilon} = \left(\frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2}\right) \sigma \underline{\mathbf{1}} + \frac{\sigma}{2\mu_1} \underline{d} \otimes \underline{d} + \sigma \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right) \underline{\mathfrak{T}} : (\underline{d} \otimes \underline{d})$$

Le dernier terme se calcule de la manière suivante :

$$\underline{\mathfrak{T}} : (\underline{d} \otimes \underline{d}) = (\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : (\underline{d} \otimes \underline{d}) = (\underline{d} \cdot \underline{i})^2 \underline{i} \otimes \underline{i} + (\underline{d} \cdot \underline{j})^2 \underline{j} \otimes \underline{j} + (\underline{d} \cdot \underline{k})^2 \underline{k} \otimes \underline{k}$$

2.2. Module de Young dans la direction \underline{d}

Contrairement au cas de l'élasticité isotrope, il n'y a pas de module de Young unique en élasticité cubique. On appelle module de Young E_d dans la direction \underline{d} le rapport entre la contrainte axiale et la déformation dans la direction de traction :

$$E_d = \frac{\sigma}{\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}} \quad (19)$$

En utilisant les résultats de la question précédente, évaluer d'abord la déformation dans la direction de traction, c'est-à-dire $\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}$, puis montrer que l'inverse du module de Young dans la direction \underline{d} s'écrit :

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) \quad (20)$$

où les composantes d_i du vecteur \underline{d} sont dans la base $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

En effet, l'utilisation de l'expression de $\underline{\varepsilon}$ trouvée dans la question précédente, permet de calculer

$$\frac{1}{\sigma} \underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)((\underline{d} \cdot \underline{i})^4 + (\underline{d} \cdot \underline{j})^4 + (\underline{d} \cdot \underline{k})^4)$$

A noter deux expressions alternatives en fonction des souplesses élastiques données par exemple par Cazzani and Rovati (2003, 2005) :

$$\frac{1}{E_d} = S_{12} + \frac{S_{44}}{2} + \frac{1}{2}(2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) \quad (21)$$

$$= S_{11} - (2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2) \quad (22)$$

2.3. Module de Young selon trois directions du cristal

Donner successivement les modules de Young lorsque $\underline{d} = \underline{i}$, puis $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j})/\sqrt{2}$ et enfin $\underline{d} = \underline{c} = (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})/\sqrt{3}$.

Commenter les résultats.

Faire l'application numérique dans le cas du monocrystal de nickel en utilisant les valeurs des modules d'élasticité de la table 1.

Commenter également les propriétés élastiques rassemblées dans ce tableau pour plusieurs métaux purs.

Si $\underline{d} = \underline{i}$, $\varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11}$ en introduisant les souplesses S_{ij} . D'après la relation (20), on trouve

$$\frac{1}{E_{100}} = S_{11} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{3\mu_2}$$

En utilisant les relations entre les modules k, μ_1, μ_2 et les modules C_{ij} , on obtient une expression alternative :

$$S_{11} = \frac{1}{3(C_{11} + 2C_{12})} + \frac{2}{3(C_{11} - C_{12})} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}$$

De plus, on s'intéresse à la déformation latérale :

$$\frac{\varepsilon_{22}}{\sigma} = \frac{\underline{j} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{j}}{\sigma} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})} = S_{12}$$

De plus, $S_{44} = 1/C_{44}$.

Si $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j})/\sqrt{2}$,

$$\frac{1}{E_{110}} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{4\mu_2} - \frac{1}{4\mu_1} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{4\mu_1} + \frac{1}{12\mu_2}$$

Si $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})/\sqrt{3}$,

$$\frac{1}{E_{111}} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{6\mu_2} - \frac{1}{6\mu_1} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{3\mu_1}$$

Remarquer que

$$\frac{1}{E_{111}} - \frac{1}{E_{100}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right), \quad \frac{1}{E_{110}} - \frac{1}{E_{100}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right)$$

Les positions relatives de ces modules dépendent du signe de la différence $\mu_1 - \mu_2$. Si cette différence est positive, i.e. $\mu_1 \geq \mu_2$ et $A \geq 1$, on a l'encadrement :

$$E_{100} \leq E_{110} \leq E_{111} \tag{23}$$

Noter que le module dans les directions \underline{j} et \underline{k} sont bien entendu identiques au module selon \underline{i} puisque ces trois directions sont équivalentes du point de vue du groupe de symétrie. Des remarques similaires s'appliquent aux modules selon $\underline{i} + \underline{j}, \underline{i} - \underline{j}, \underline{j} + \underline{k}$, etc. L'égalité est obtenue pour $\mu_1 = \mu_2$, comme attendu. Le sens des inégalités doit être inversé si $A \leq 1$. Dans le cas du nickel, on trouve

$$E_{001} = 136.3 \text{ GPa}, \quad E_{011} = 232.5 \text{ GPa}, \quad E_{111} = 304 \text{ GPa}$$

Elément	C_{11} (GPa)	C_{12} (GPa)	C_{44} (GPa)	k (GPa)	μ_1 (GPa)	μ_2 (GPa)	A
aluminium (CFC)	108.2	61.3	28.5	76.9	28.5	23.5	1.22
cuivre (CFC)	168.4	121.4	75.4	137.1	75.4	23.5	3.21
nickel (CFC)	246.5	147.3	124.7	180.4	124.7	49.6	2.51
fer (CC)	228	132	116.5	164	116.5	48	2.43
niobium (CC)	245.5	139	29.3	174.5	29.3	53.4	0.55

TABLE 1: Modules d'élasticité de plusieurs monocristaux à structure cubique (d'après [Shuvalov \(1988\)](#) p. 86). CFC et CC désignent respectivement les structures cubique à faces centrées et cubique centrée.

Ces valeurs sont bien rangées dans l'ordre prévu et il est à noter que le module selon la direction \underline{c} , notée [111] en cristallographie, est plus de deux fois supérieur au module de Young le long de l'arête du cube.

Le tableau 1 montre que 4 des 5 métaux présentés possèdent un coefficient d'anisotropie supérieur à 1. Seul le niobium, cubique centré, possède un facteur d'anisotropie plus petit que 1. Pour ce métal, le module de Young selon la direction [111] est donc plus petit que celui dans la direction \underline{i} , notée [100], au contraire des autres métaux considérés.

2.4. Modules de Young extrémaux

Déterminer les extrema du module de Young (20) en fonction de la direction de traction \underline{d} . Donner les valeurs de ces extrema et les directions pour lesquelles ces extrema sont atteints. Commenter.

On considère le lagrangien

$$\mathcal{L}(d_1, d_2, d_3) = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) - \lambda(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - 1)$$

où la contrainte $\|\underline{d}\| = 1$ a été introduite avec le multiplicateur de Lagrange λ . La dérivée du lagrangien par rapport à chaque composante d_l (l fixé) doit s'annuler :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_l} = 2\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)d_l^3 - 2\lambda d_l = 0$$

On obtient les trois équations suivantes

$$d_l\left(\lambda - \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)d_l^2\right) = 0, \quad l = 1, 2, 3$$

Il faut distinguer les cas suivants :

- (i) $d_1 = d_2 = 0$: on a alors $d_3 = 1$ et $E_d = E_{100} = S_{44}^{-1}$.
- (ii) $d_1 = 0$ et $d_2 \neq 0$: alors on exprime λ en fonction de d_2^2 et la dernière équation donne $d_2^2 = d_3^2 = 1/2$. Finalement $d_2 = \pm 1/\sqrt{2}$ et $E_d = E_{110}$, déterminé précédemment.
- (iii) Si aucune composante de \underline{d} n'est nulle, alors on doit avoir $d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = 1/3$. Il s'agit du module E_{111} déterminé précédemment.

On a vu que si $\mu_1 \geq \mu_2$, i.e. $A \geq 1$, alors les trois modules trouvés sont rangés dans l'ordre (23). Le module E_{111} correspond au maximum global tandis que le minimum global est atteint pour la direction [100]. L'orientation [110] correspond à un extremum local. C'est l'inverse dans le cas du niobium.

Tenseur de structure cubique

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k}$$

Tenseur des modules d'élasticité cubique

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = 3\kappa(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\varepsilon}^{\text{dev}} + 2\gamma \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\varepsilon}$$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = 3\kappa \underline{\underline{K}} + 2\mu \underline{\underline{J}} + 2\gamma \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} = 3k \underline{\underline{K}} + 2\mu_1 \underline{\underline{L}} + 2\mu_2 \underline{\underline{M}}$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{K}}, \quad \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Sigma}}, \quad \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{K}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}}$$

Tenseur des souplesses

$$\underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \frac{1}{3k} \underline{\underline{K}} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{\underline{L}} + \frac{1}{2\mu_2} \underline{\underline{M}}$$

Relations entre les modules

$$C_{11} = k + \frac{4}{3}\mu_2, \quad C_{12} = k - \frac{2}{3}\mu_2, \quad C_{44} = \mu_1$$

$$2\mu_2 = C_{11} - C_{12}, \quad \mu_1 = C_{44}, \quad 3k = C_{11} + 2C_{12}$$

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{12} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{44} = 1/C_{44}$$

Coefficient d'anisotropie

$$A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Module de Young dans une direction \underline{d}

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} \right) (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4)$$

$$\frac{1}{E_d} = S_{12} + \frac{S_{44}}{2} + \frac{1}{2}(2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4)$$

$$\frac{1}{E_d} = S_{11} - (2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2)$$

Critère de plasticité et limite d'élasticité en traction

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\underline{\Sigma}}) = \left(F \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} + L \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0$$

$$Y(\underline{d}) = \sigma_0 \left(F + \frac{3}{2} L (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-1/2}$$

TABLE 2: Récapitulatif : Elasticité linéaire cubique.

3. Torsion d'une barre monocristalline en élasticité cubique

On considère maintenant le problème de la torsion d'une barre de section circulaire constituée d'un superalliage à base de nickel monocristallin. La section du cylindre est un disque de rayon R , la longueur de la barre est ℓ et l'axe du cylindre est parallèle à la direction \underline{e}_3 de la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ représentée sur la figure 2. On applique le couple $\underline{M} = C\underline{e}_3$ à l'extrémité $x_3 = \ell$ et le couple opposé à sa base. Les surfaces latérales de la barre sont libres de tout effort. Le comportement du matériau constitutif de la barre obéit à la loi d'élasticité cubique linéaire décrite par les équations (12).

L'objectif de cette section est de montrer que la réponse du cylindre dépend de l'orientation du cristal, c'est-à-dire du trièdre directeur matériel $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ par rapport au repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ attaché à la barre.

On propose de mettre en œuvre la méthode des déplacements déjà utilisée dans le cas isotrope en partant d'un champ de la forme :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (24)$$

où le déplacement u_3 , faisant intervenir la fonction inconnue φ , correspond à un gauchissement de la surface $X_3 = Cste$ après déformation. Les coordonnées du point matériel dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sont X_1, X_2, X_3 . Le coefficient α désigne un angle par unité de longueur.

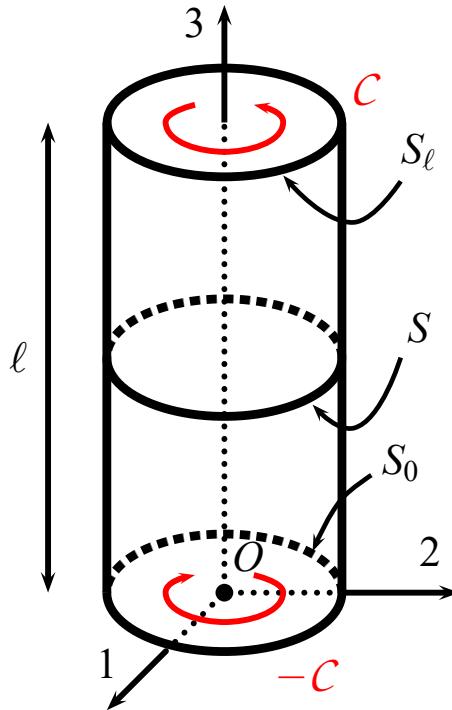


FIGURE 2: Torsion d'un barreau cylindrique : schéma de principe.

3.1. Torsion d'une barre parallèle à \underline{k}

On commence par le cas où le trièdre directeur est parallèle aux vecteurs de la base considérée :

$$\underline{e}_1 = \underline{i}, \quad \underline{e}_2 = \underline{j}, \quad \underline{e}_3 = \underline{k}$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à l'une des arêtes du cube de la maille cristalline de la figure 1.

Le champ des déformations qui se déduit de (24) se met sous la forme

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{13}(\underline{i} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{i}) + \varepsilon_{23}(\underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j}) \quad (25)$$

1. Exprimer ε_{13} et ε_{23} en fonction de α , X_1 , X_2 et de φ .
2. Calculer les contraintes en utilisant la loi d'élasticité cubique (12).
3. Donner alors les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement.
4. Conclure et donner l'expression finale des contraintes.
5. Etablir enfin la relation liant le couple et l'angle par unité de longueur pour la torsion par rapport à l'axe $\underline{e}_3 = \underline{k}$:

$$C = \mu_1 \frac{\pi R^4}{2} \alpha \quad (26)$$

Commenter le résultat.

Comme dans le chapitre ?? traitant du cas d'un matériau isotrope, les seules composantes non nulles de déformations sont

$$\varepsilon_{13} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right)$$

Pour calculer les contraintes, on évalue

$$\underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon} = 2\mu_1 \underline{\underline{L}} : \underline{\varepsilon} + 2\mu_2 \underline{\underline{M}} : \underline{\varepsilon} = 2\mu_1 \underline{\varepsilon} + (\mu_1 - \mu_2) \underline{\underline{\mathcal{T}}} : \underline{\varepsilon} \quad (27)$$

car $\underline{\underline{K}} : \underline{\varepsilon} = 0$ en raison de la nullité de la trace des déformations (25). Il s'avère que la forme (25) implique

$$(\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : \underline{\varepsilon} = 0$$

Par conséquent, la forme des contraintes obtenue est la même que dans le cas isotrope en remplaçant μ par μ_1 .

On montre alors que la fonction de gauchissement est harmonique et vérifie les mêmes conditions (??) que dans le cas isotrope. Cette condition devient (??) dans le cas de la section circulaire ce qui implique que $\varphi = 0$ comme dans le cas du matériau isotrope. Le calcul du moment de torsion résultant est alors identique au cas isotrope, au prix de remplacer μ par μ_1 . La relation (26) en découle.

Nous venons de montrer que l'analyse de la torsion d'une barre monocristalline cubique dont l'axe est parallèle à un des vecteurs du trièdre directeur conduit à des résultats formellement identiques au cas isotrope. Les contraintes ne font intervenir que le module μ_1

$$\sigma_{13} = -\mu_1 \alpha X_2, \quad \sigma_{23} = \mu_1 \alpha X_1 \quad (28)$$

et il n'y a pas de gauchissement lorsque la section est un disque.

Il en va tout autrement dans le cas de la

3.2. Torsion d'une barre d'axe parallèle à $\underline{i} + \underline{k}$

On considère cette fois-ci une barre de section circulaire dont les axes sont orientés de la façon suivante par rapport au trièdre directeur cristallographique :

$$\underline{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} - \underline{k}), \quad \underline{e}_2 = \underline{j}, \quad \underline{e}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} + \underline{k}) \quad (29)$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à la diagonale d'une des faces du cube de la maille cristalline de la figure 1.

On adopte ici aussi la proposition (24) pour le champ de déplacements. Le tenseur des déformations reste de la forme :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{13}(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \varepsilon_{23}(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) \quad (30)$$

1. Exprimer ce tenseur en fonction de produits tensoriels impliquant uniquement $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$.
2. Calculer ensuite le tenseur des contraintes en utilisant la loi (12).
3. Exprimer enfin ce tenseur des contraintes en fonction de produits tensoriels de $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$.
4. Donner l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire la fonction de gauchissement. Cette fonction est-elle harmonique ?
5. Donner les conditions de bord correspondantes.
6. Trouver la fonction de gauchissement associée. Vérifiez qualitativement que cette fonction conduit au gauchissement illustré sur la figure 3. Commenter.
7. Finalement, montrer que les seules composantes de contraintes non nulles s'expriment de la manière suivante :

$$\sigma_{13} = -2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_2, \quad \sigma_{23} = 2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_1 \quad (31)$$

8. Calculer alors la force et le moment de torsion résultant sur la surface supérieure S_ℓ .
9. Donner la relation entre le couple \mathcal{C} et l'angle par unité de longueur α .

D'après l'orientation (29), on trouve

$$\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 = \underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}$$

$$\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{i} \otimes \underline{j} + \underline{j} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j})$$

Les contraintes se calculent en utilisant à nouveau (27). En particulier, on utilise

$$\underline{\mathfrak{T}} : (\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}) = \underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}$$

$$\underline{\sigma} = 2\mu_1 \underline{\varepsilon} + 2\varepsilon_{13}(\mu_2 - \mu_1)(\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}) = 2\mu_1 \underline{\varepsilon} + 2\varepsilon_{13}(\mu_2 - \mu_1)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1)$$

et finalement

$$\underline{\sigma} = 2\varepsilon_{13}\mu_2(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + 2\varepsilon_{23}\mu_1(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$$

$$\sigma_{13} = \alpha\mu_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2\right), \quad \sigma_{23} = \alpha\mu_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1\right)$$

Les équations d'équilibre exigent que

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = \alpha\mu_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_1^2} + \alpha\mu_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2} = 0 \quad (32)$$

La fonction de gauchissement n'est harmonique que dans le cas très particulier $\mu_1 = \mu_2$, c'est-à-dire le cas isotrope, bien connu. La conditions de bord libre sur les surfaces latérales exigent que $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0$ avec $\underline{n} = n_1 \underline{e}_1 + n_2 \underline{e}_2$. La troisième composante du vecteur-contrainte fournit

$$\mu_2 \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} n_1 + \mu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} n_2 = \mu_2 X_2 n_1 - \mu_1 X_1 n_2 \quad (33)$$

Dans le cas de la section circulaire, la dernière condition devient

$$\mu_2 \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} X_1 + \mu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} X_2 = (\mu_2 - \mu_1) X_1 X_2$$

La fonction nulle n'est pas solution de cette équation de sorte qu'un gauchissement existe bel et bien pour la torsion d'une barre monocristalline possédant cette orientation particulière. En recherchant une fonction quadratique par rapport à X_1 et X_2 , on trouve

$$\varphi(X_1, X_2) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} X_1 X_2$$

Elle est nulle, comme il se doit, dans le cas isotrope $\mu_1 = \mu_2$.

Cette fonction de gauchissement conduit effectivement aux contraintes (31).

Calculons alors la résultante des efforts sur la section circulaire :

$$\underline{R} = \int_{S_\ell} \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 dS = \int_{S_\ell} \sigma_{13} dS \underline{e}_1 + \int_{S_\ell} \sigma_{23} dS \underline{e}_2 = 0$$

car l'origine du repère est le centre de gravité de la section. Le moment résultant se réduit à la composante de torsion autour de \underline{e}_3 :

$$\mathcal{C} = \int_{S_\ell} (X_1 \sigma_{23} - X_2 \sigma_{13}) dS = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\pi R^4}{2} \alpha$$

On retrouve le résultat du cas isotrope lorsque $\mu_1 = \mu_2$.

4. Critère de plasticité cubique

Le dimensionnement des aubes de turbine monocristallines nécessite de prendre en compte la limite d'élasticité du monocristal de superalliage à base de nickel pour tout type de chargement. Pour cela, il faut élaborer un critère de plasticité, à savoir une fonction des contraintes généralisant les critères de Tresca ou von Mises, valides pour les matériaux isotropes, au cas de la symétrie cubique. Tout comme le potentiel d'élasticité, le critère de plasticité doit être une fonction tensorielle des contraintes et du tenseur de structure, i.e. une fonction isotrope par rapport aux deux arguments. La dépendance est toutefois restreinte au déviateur des contraintes car on sait que le comportement plastique des métaux est généralement insensible à la pression

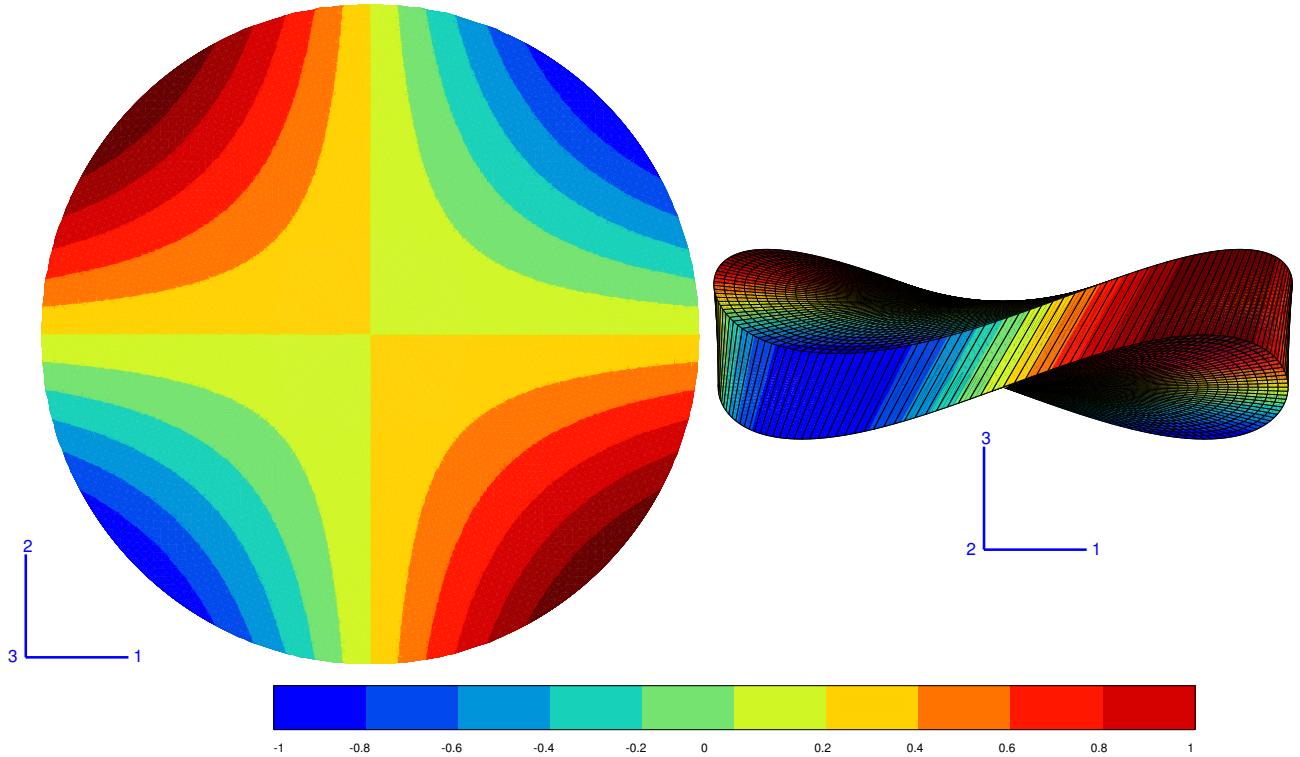


FIGURE 3: Champ de déplacement u_3 sur un tronçon de la barre en torsion dont l'axe est orienté parallèlement à $\underline{i} + \underline{k}$: lignes de niveau dans la section (valeurs normalisées par la valeur maximale, à gauche), vue latérale du tronçon déformé (déplacement exagérés d'un facteur 10), à droite.

hydrostatique. En se limitant à une forme quadratique³ comme pour le potentiel d'élasticité, on est alors en mesure de proposer le critère de plasticité suivant :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\Sigma}) = \left(F \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} + L \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\Sigma} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \quad (34)$$

où F, L et σ_0 sont les trois paramètres du modèle de plasticité. Tant que $f(\underline{\sigma}, \underline{\Sigma})$ est négative, le comportement du matériau reste élastique. Lorsque $f(\underline{\sigma}, \underline{\Sigma}) = 0$, la limite d'élasticité est atteinte. La présence commode du facteur $\sqrt{2/3}$ est purement conventionnelle. Dans le critère apparaît la contrainte équivalente définie par

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(F \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} + L \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\Sigma} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} \quad (35)$$

que l'on peut interpréter comme une norme anisotrope du tenseur des contraintes. Pour des raisons de stabilité de l'écoulement plastique, la convexité de la fonction f par rapport aux composantes des contraintes est exigée. Elle est garantie lorsque $F > 0, L \geq 0$.

3. On renvoie à [Boehler \(1978, 1987\)](#) pour la formulation des critères de plasticité anisotrope. Les noms des paramètres F, L sont empruntés à R. Hill, auteur d'un critère de plasticité anisotrope [Hill \(1950, 1978\)](#).

4.1. Limite d'élasticité en traction simple

On considère l'état de traction simple dans la direction \underline{d} du cristal :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \text{avec } \|\underline{d}\| = 1 \quad (36)$$

Calculer le déviateur $\underline{\sigma}^{\text{dev}}$ de ce tenseur de contraintes.

Evaluer $\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}}$.

Evaluer $\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}}$.

Donner la valeur critique de σ pour laquelle le critère (34) s'annule. C'est la limite d'élasticité du monocristal en traction dans la direction \underline{i} . Elle s'exprime en fonction de F, L, σ_0 et des composantes de \underline{d} dans la base du cristal ($\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$).

Donner les trois limites d'élasticité pour la traction selon les directions $\underline{i}, \underline{i} + \underline{j}, \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$.

Chercher les extrema de la limite d'élasticité par rapport à l'orientation de \underline{d} .

Pour quelles directions du cristal la limite d'élasticité est-elle la plus élevée ?

On calcule successivement :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^{\text{dev}} &= \sigma \underline{d} \otimes \underline{d} - \frac{\sigma}{3} \underline{1} \\ \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} &= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{3} - \frac{2}{3}\sigma^2 = \frac{2}{3}\sigma^2 \\ (\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : (\underline{d} \otimes \underline{d}) &= d_1^2 \underline{i} \otimes \underline{i} + d_2^2 \underline{j} \otimes \underline{j} + d_3^2 \underline{k} \otimes \underline{k} \\ (\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : \underline{1} &= \underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k} \\ (\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : \underline{\sigma}^{\text{dev}} &= \sigma(d_1^2 - \frac{1}{3})\underline{i} \otimes \underline{i} + \sigma(d_2^2 - \frac{1}{3})\underline{j} \otimes \underline{j} + \sigma(d_3^2 - \frac{1}{3})\underline{k} \otimes \underline{k} \\ \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} &= \sigma^2(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

Le critère de plasticité (34) s'annule lorsque

$$\sigma^2(F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3})) = \sigma_0^2$$

La limite d'élasticité en traction ($\sigma > 0$) est donc

$$Y(\underline{d}) = \sigma_0 \left(F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-1/2} \quad (37)$$

Une application directe de cette formule consiste à calculer les limites d'élasticité pour les trois directions de haute symétrie du cristal :

$$Y_{100} = Y(\underline{i}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F+L}}, \quad Y_{110} = Y(\underline{i} + \underline{k}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F+L/4}}, \quad Y_{111} = Y(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F}} \quad (38)$$

Comme F et L sont positifs, on a l'encadrement suivant :

$$Y_{100} \leq Y_{110} \leq Y_{111} \quad (39)$$

l'égalité ayant lieu dans le cas $L = 0$ pour lequel le critère (34) dégénère et devient identique au critère isotrope de von Mises.

Pour trouver les extrema de $Y(\underline{d})$, on introduit le lagrangien :

$$\mathcal{L}(\underline{d}) = \sigma_0 \left(F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-1/2} - \lambda(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - 1)$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. La dérivée du lagrangien par rapport à d_l (l fixé) vaut :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_l} = -3\sigma_0 L d_l^3 \left(F + \frac{3}{2} L (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-3/2} - 2\lambda d_l = 0$$

On obtient les 3 équations suivantes (si $d_l \neq 0$, les cas de nullité étant discutés ci-dessous) :

$$3\sigma_0 L d_i^2 \left(F + \frac{3}{2} L (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-3/2} = -2\lambda$$

La somme des 3 équations permet d'extraire la relation :

$$\left(F + \frac{3}{2} L (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-3/2} = -\frac{2\lambda}{\sigma_0 L}$$

On distingue alors les 3 cas suivants :

(i) $d_1 = d_2 = 0 \implies d_3 = \pm 1$. Dans ce cas la limite d'élasticité est donnée par Y_{100} calculé précédemment.

(ii) $d_1 = 0, d_2^2 = d_3^2 = 1/2$. Dans ce cas la limite d'élasticité est donnée par Y_{110} calculé précédemment.

(iii) Si les trois composantes sont non nulles, alors $d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = 1/3$ et la limite d'élasticité est donnée par Y_{111} calculé précédemment.

A la lumière de l'encadrement (39), la limite d'élasticité maximale est atteinte dans la direction $\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$, tandis que la valeur minimale est obtenue pour $\underline{d} = \underline{i}$. Un extremum local est atteint pour \underline{d} parallèle à $\underline{i} + \underline{j}$ (et toutes les orientations équivalentes qui s'en déduisent par les 48 symétries du cube). Le rapport entre le maximum et le minimum, à savoir $1/\sqrt{1+L/F}$ permet d'identifier le rapport L/F . La connaissance de la limite d'élasticité intermédiaire permet alors d'identifier F et L .

4.2. Limite d'élasticité en torsion

On applique maintenant le critère de plasticité au cas de la torsion d'une barre monocrystalline pour les deux orientations traitées au paragraphe 3.

Utiliser les champs de contraintes trouvés aux paragraphes 3.1 et 3.2 pour déterminer l'angle de torsion par unité de longueur critique α_0 pour lequel la plasticité commence. On traitera d'abord la torsion autour de \underline{k} puis on passera à la torsion autour de $\underline{i} + \underline{k}$.

On indiquera également à quel endroit la limite d'élasticité est atteinte pour la première fois.

Le champ de contrainte équivalente, σ_{eq} donnée par (35), est illustré sur la figure 4 pour deux valeurs du couple de paramètres F, L , dans le cas de la torsion autour de l'axe $\underline{i} + \underline{k}$. Commenter ces figures à la lumière des résultats tout juste acquis concernant la limite d'élasticité pour la barre en torsion selon l'axe $\underline{i} + \underline{k}$.

Dans le cas de la torsion selon l'axe \underline{k} , le champ de contraintes trouvé au paragraphe 3.1 est de la forme

$$\underline{\sigma} = \sigma_{13}(\underline{i} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{i}) + \sigma_{23}(\underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j}) = \underline{\sigma}^{dev} \quad (40)$$

Remarquer que $\underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma} = 0$ de sorte que la contrainte équivalente, calculée à partir des expressions (28) se réduit à

$$\underline{\sigma}^{dev} : \underline{\sigma}^{dev} = 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 = 2\alpha^2 \mu_1^2 r^2$$

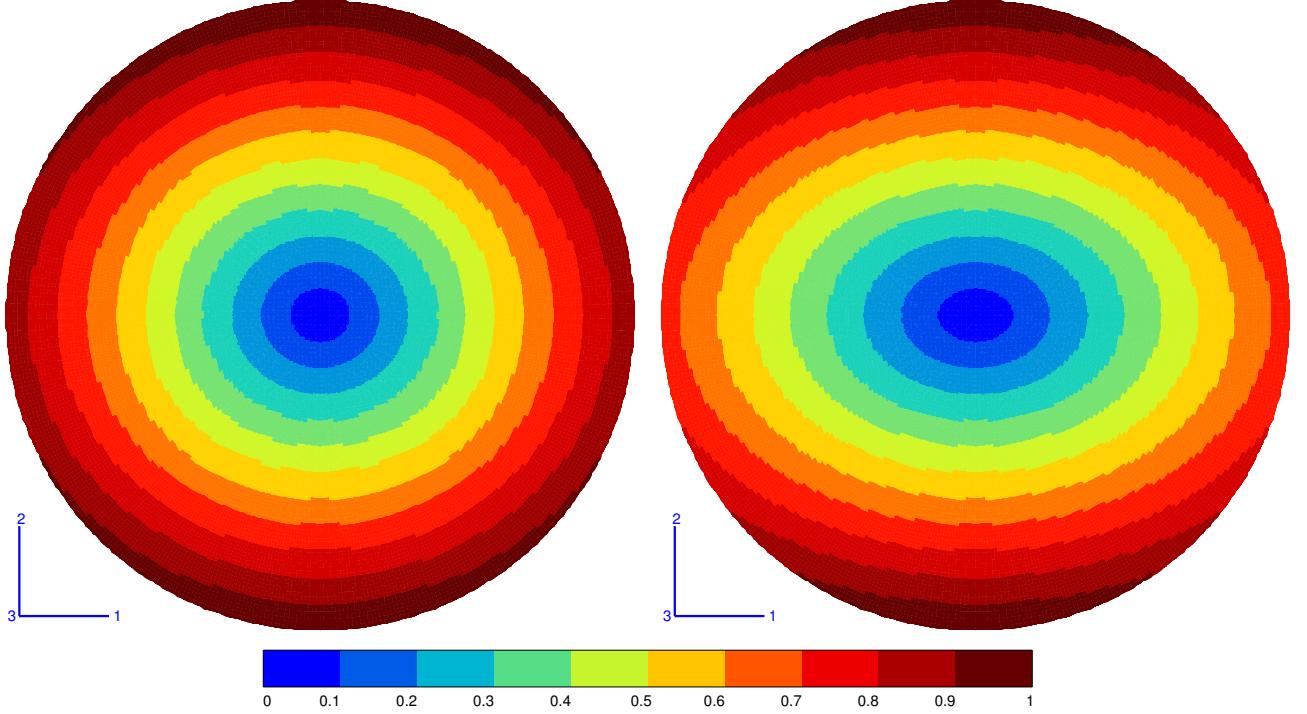


FIGURE 4: Champ de contrainte équivalente σ_{eq} (normée par la valeur maximale) pour deux valeurs des paramètres F et L : $F = 1 = 4L$ à gauche, $F = L = 1$ à droite, cf. équation (35) pour la définition de la contrainte équivalente. La section représentée est issue d'une barre monocristalline en torsion autour de l'axe $\underline{e}_3 = (\underline{i} + \underline{k})/\sqrt{2}$, avec $\underline{e}_2 = \underline{j}$.

Le critère de plasticité s'écrit donc

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{2F}\alpha\mu_1 r - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$$

Il est maximal en $r = R$ et s'annule pour la première fois lorsque

$$\alpha_0^{100} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3F}\mu_1 R}$$

La plasticité commence alors simultanément tout autour de la circonférence, comme dans le cas isotrope.

Dans le cas de la torsion selon l'axe $\underline{i} + \underline{k}$, le champ de contraintes trouvé au paragraphe 3.2 est de la forme

$$\underline{\sigma} = \sigma_{13}(\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}) + \sigma_{23}(\underline{i} \otimes \underline{j} + \underline{j} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j})/\sqrt{2} = \underline{\sigma}^{\text{dev}} \quad (41)$$

On calcule les deux contributions au critère :

$$\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} = 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 = 8\alpha^2 b^2 r^2$$

$$\underline{\tau} : \underline{\sigma} = \sigma_{13}(\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}), \quad \underline{\sigma} : \underline{\tau} : \underline{\sigma} = 2\sigma_{13}^2 = 8\alpha^2 b^2 X_2^2$$

avec la notation $b = \mu_1\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)$. Le critère de plasticité s'écrit donc

$$f(\underline{\sigma}) = 2\alpha b \sqrt{2(Fr^2 + LX_2^2)} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$$

Il est maximal aux deux points $X_2 = \pm R$ c'est-à-dire au bord du disque dans la direction \underline{j} . Il s'annule pour la première fois lorsque

$$\alpha_0^{110} = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}bR\sqrt{F+L}} \quad (42)$$

Les champs de la figure 4 confirment que la limite d'élasticité est atteinte en deux points opposés de la section. Lorsque L est petit on se rapproche d'une distribution axisymétrique de la contrainte équivalente conduisant à une limite d'élasticité atteinte simultanément tout le long de la circonférence extérieure. Au contraire, cette distribution est très anisotrope sur la figure 4 pour $L = 1$.

Deuxième partie

Tourbillons libres dans un écoulement.

Portance

L'objectif de cet exercice⁴ est de reprendre l'étude de l'écoulement plan irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre O et de rayon R fixe par rapport au référentiel d'observation, en considérant la présence d'un ou plusieurs tourbillons et les efforts qu'ils induisent sur le cylindre. La géométrie du cylindre et le système de coordonnées sont indiqués sur la figure 5(a).

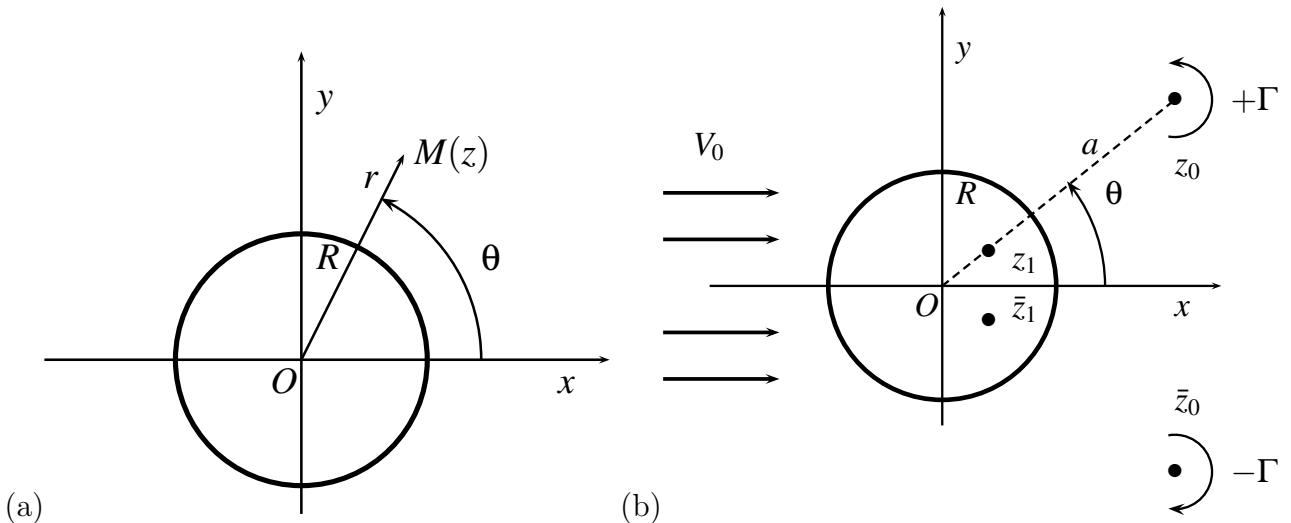


FIGURE 5: (a) Géométrie du cylindre et système de coordonnées : le point M d'affixe z est repéré par les coordonnées r, θ et les composantes cartésiennes des vecteurs considérés dans l'exercice sont exprimées en fonction de ces coordonnées. (b) Introduction dans l'écoulement de deux tourbillons aux points conjugués z_0 et \bar{z}_0 , ainsi que leurs images z_1 et \bar{z}_1 par rapport au cercle.

5. Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation

On considère l'écoulement plan défini par le potentiel complexe suivant :

$$f(z) = V_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z \quad (43)$$

On adoptera la détermination principale du logarithme complexe :

$$\log z = \log |z| + i \arg(z), \quad \text{avec } \arg(z) \in [0, 2\pi] \quad (44)$$

où V_0, Γ sont des réels donnés et i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Pour fixer les idées, on prendra $V_0 \geq 0, \Gamma \geq 0$. On rappelle que la variable complexe z désigne le point de coordonnées (x, y) dans le repère cartésien orthonormé d'origine O dans le plan considéré.

4. Cet exercice est basé sur la contribution de Mandel (1966–1994) (p. 186) et sur la première partie du problème de composition proposé par M. Amestoy à l'Ecole Polytechnique en 1987. Quelques éléments sont issus de Germain and Muller (1995) et Obala (1997) (exercice p. 195).

5.1. Nature de l'écoulement

En dérivant le potentiel complexe, donner le champ des vitesses. Donner également la fonction de courant associée à cet écoulement. On exprimera les vitesses dans le repère cartésien orthonormé d'origine O en fonction des coordonnées r, θ , comme sur la figure 5(a).

Justifier que, quel que soit Γ , ce champ de vitesses fournit une solution du problème de l'écoulement stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre O et de rayon R , le fluide étant animé de la vitesse horizontale V_0 à l'infini. Cela illustre que ce problème possède une infinité de solutions.

La fonction de courant est donnée par la partie imaginaire du potentiel $f(z)$:

$$\psi(x, y) = \Im(f(z)) = V_0 y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

La vitesse s'obtient en dérivant la fonction précédente mais il est plus commode de dériver directement le potentiel complexe

$$\begin{aligned} f'(z) &= V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \\ u &= \Re(f'(z)) = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta)\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \\ v &= -\Im(f'(z)) = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned}$$

où \Re désigne la partie réelle du nombre complexe et \Im sa partie imaginaire. Ce champ de vitesses vaut $V_0 \mathbf{e}_1$ à l'infini. Il est à divergence nulle et irrotationnel (sauf en $z = 0$) car la fonction $f(z)$ est holomorphe. On peut vérifier que $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ pour $r = R$, ce qui correspond à la condition de glissement le long du cylindre. Ce champ est donc une solution du problème de l'écoulement stationnaire étudié. On connaît la solution avec $\Gamma = 0$. La présence du tourbillon centré en O ne modifie pas la condition de bord sur le cylindre. La partie du champ de vitesses pour $|z| < R$ est exclue.

5.2. Réalisation de l'écoulement

Imaginer comment provoquer expérimentalement l'apparition de la contribution proportionnelle à Γ au champ de vitesse étudié.

Interpréter la quantité Γ .

On peut espérer provoquer une circulation Γ autour du cylindre en l'entraînant en rotation autour de son axe. La rotation du cylindre entraîne le fluide par un effet de viscosité (même infime puisque nous parlons ici d'un fluide parfait). La partie en $1/z$ correspond à un tourbillon caractérisé par la circulation Γ , cf. équation (??).

5.3. Etude des lignes de courant

Déterminer les points de l'écoulement où la vitesse est nulle. Discuter et interpréter physiquement ces résultats en fonction du paramètre

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi RV_0} \tag{45}$$

Donner l'équation caractérisant les lignes de courant.

Tracer qualitativement ces lignes. On ne cherchera pas à exploiter l'équation trouvée mais on

s'inspirera plutôt du nombre de points d'arrêt déterminés précédemment selon les différents cas apparus dans la discussion.

La vitesse est nulle lorsque

$$f'(z) = V_0\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = 0$$

ce qui conduit à résoudre l'équation du second degré :

$$\xi^2 + 2iA\xi - 1 = 0, \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{R}{z} \quad \text{et} \quad A = \frac{\Gamma}{4\pi RV_0}$$

dont les solutions sont

$$\xi = -iA \pm \sqrt{1 - A^2}$$

ce qui conduit à la discussion :

- Si $|A| < 1$, il y a deux points d'arrêt avec $|\xi| = 1$, ce qui signifie que ces points sont sur le bord du cylindre et symétriques par rapport à l'axe y :

$$z = \frac{R}{\xi} = R(iA \pm \sqrt{1 - A^2})$$

- Si $|A| = 1$, il y a un seul point d'arrêt situé au pôle nord du cylindre.
- Si $|A| > 1$, on trouve deux solutions situées sur l'axe y : $z = Ri/(A \pm \sqrt{A^2 - 1})$. Comme $A + \sqrt{A^2 - 1} > 1$ et $A - \sqrt{A^2 - 1} < 1$ (pour $A > 0$ pour fixer les idées), l'un des deux points est à l'intérieur du disque et on ne garde que la solution au-dessus du cylindre.

Les trajectoires, identiques aux lignes de courant dans le cas stationnaire, sont les équipotentielles de la fonction de courant :

$$\frac{\psi}{RV_0} = \frac{r \sin \theta}{R} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi RV_0} \log \frac{r}{R} = Cste$$

On peut obtenir des équations paramétriques pour les lignes de courant :

$$\frac{y}{R}(t) = (Cste + 2A \log(t)) \frac{t^2}{t^2 - 1}, \quad \frac{x}{R}(t) = \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{R^2}}$$

Les lignes de courant sont représentées sur la figure 6. Pour $|A| < 1$, on voit les deux points d'arrêt décalés vers le haut par rapport au cas sans tourbillon. Pour $|A| > 1$, ce qui correspond à un tourbillon suffisamment puissant, il existe des trajectoires fermées autour du cylindre.

5.4. Efforts sur le cylindre

Calculer la résultante des efforts agissant sur le cylindre fixe.

Ce résultat résout-il le paradoxe de D'Alembert ?

Quel effet remarquable émerge de ce résultat ?

En connaissez-vous des applications pratiques ?

Le premier théorème de Bernoulli indique que $p/\rho + \underline{v} \cdot \underline{v}/2 = Cste$ le long des lignes de courant. Cette constante est la même pour les trajectoires ouvertes mais est différente pour chaque trajectoire fermée autour du cylindre, comme il en existe dans le cas $A > 1$, car le milieu fluide considéré n'est pas simplement connexe. On calcule les composantes du vecteur vitesse sur le bord du cylindre $r = R$ et sa norme au carré :

$$u(r = R) = V_0(1 - \cos(2\theta) - 2A \sin \theta), \quad v(r = R) = V_0(-\sin(2\theta) + 2A \cos \theta)$$

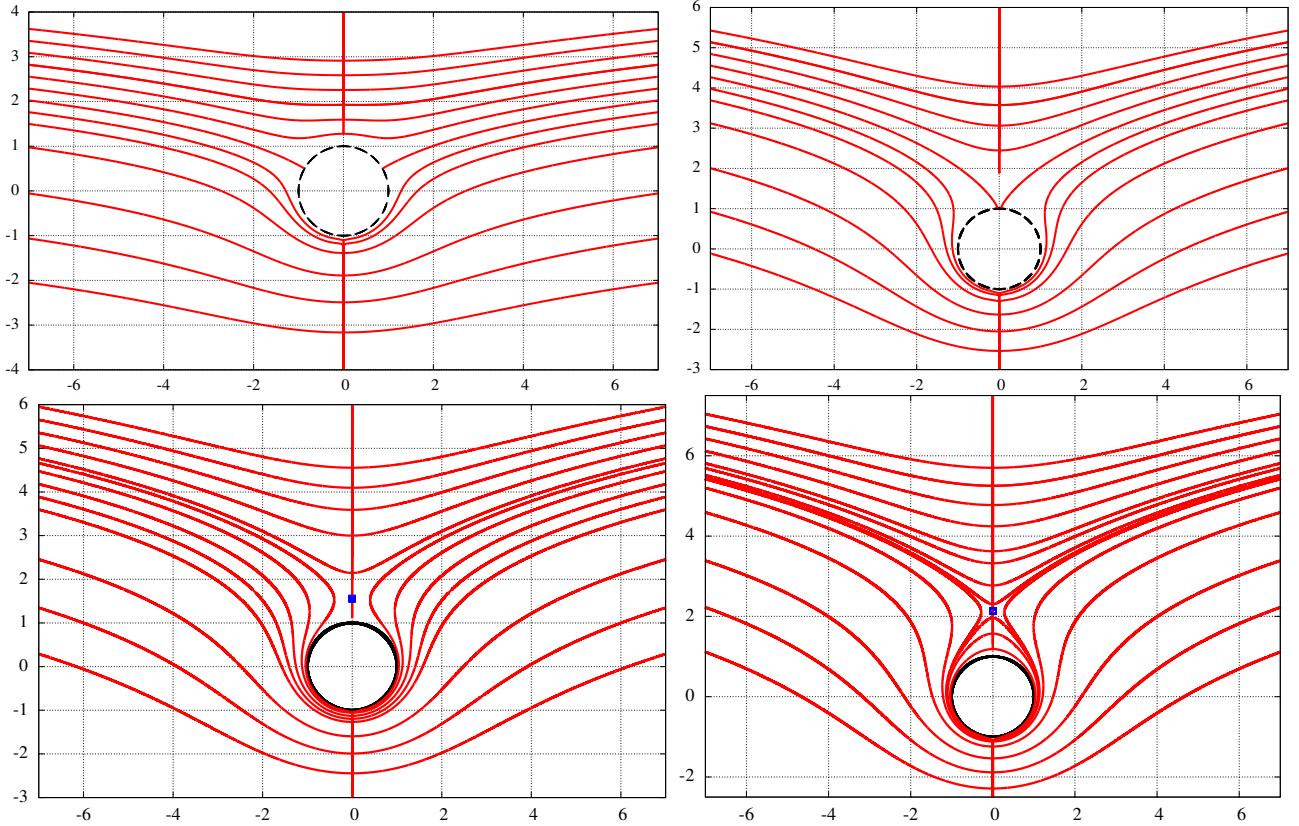


FIGURE 6: Lignes de courant d'un écoulement autour d'un cylindre avec circulation en fonction de la valeur du paramètre $A = \Gamma / 2\pi RV_0$. De gauche à droite et de haut en bas : $A = 0.5$, $A = 0.9$, $A = 1.1$, $A = 1.3$. Le cylindre central est en très épais noir. Les lignes verticales sur l'axe y sont un artefact de la simulation. Le point d'arrêt pour $A > 1$ est marqué par un carré.

$$\frac{u^2 + v^2}{V_0^2} = 4(A - \sin \theta)^2$$

La résultante des efforts sur le cylindre de hauteur h se calcule grâce au champ de pression issu du théorème de Bernoulli :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{R}} &= -h \int_{r=R} p R \underline{\mathbf{n}} \, d\theta = -Rh \int_{r=R} (Cste - \frac{\rho}{2} \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}}) \underline{\mathbf{n}} \, d\theta \\ &= -\rho 2RV_0^2 h \int_{r=R} (A - \sin \theta)^2 (\cos \theta \underline{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \underline{\mathbf{e}}_2) d\theta \end{aligned}$$

car la contribution constante a une résultante nulle. En développant l'expression précédente, on voit que seule la composante selon y subsiste :

$$\underline{\mathbf{R}} = -4\rho ARV_0^2 h \int_{r=R} \sin^2 \theta \, d\theta \underline{\mathbf{e}}_2$$

Finalement

$$\underline{\mathbf{R}} = -\rho V_0 \Gamma h \underline{\mathbf{e}}_2$$

La résultante est donc non nulle en présence d'une circulation Γ . Le paradoxe de D'Alembert subsiste car cette résultante n'a pas la composante horizontale attendue. Noter qu'un tourbillon

seul ($V_0 = 0$) ne suffit pas à engendrer cette force. La résultante est dirigée vers le bas lorsque $V_0\Gamma > 0$, car les vitesses sont plus grandes en-dessous qu'au-dessus du cylindre, la pression est donc plus forte au-dessus. C'est l'effet Magnus⁵. Il explique les effets des balles liftées au tennis ou au football. L'utilisation de l'effet Magnus a été proposée pour mettre au point des systèmes de propulsion composés de gros cylindres verticaux en rotation capables de produire une poussée longitudinale lorsque le vent est sur le côté. L'océanographe Jacques-Yves Cousteau fit construire l'Alcyone au début des années 1980. Les deux cylindres (non tournants, il s'agit plutôt d'une voile) de sa turbovoie, fournissaient environ 25 à 30% de l'énergie propulsive qui venait assister la propulsion par hélice. C'est également le principe élémentaire expliquant la **portance** agissant sur une aile d'avion même si l'étude de cette portance pour une géométrie réaliste d'aile est une autre sujet copieux à traiter.

6. Ecoulement autour d'un cylindre avec tourbillons libres

Dans cette partie, on peuple l'écoulement autour du cylindre de tourbillons pour essayer de gagner en réalisme par rapport à l'écoulement réel.

6.1. Préliminaire : méthode des images

Soit z_0 un point non nul du plan complexe, on lui associe le nombre complexe z_1 , défini comme son image par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, R)$ de centre O et de rayon R :

$$z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}_0} \quad (46)$$

Le point z_1 a le même argument que z_0 et son module est $R^2/|z_0|$. Son interprétation géométrique est la suivante : c'est l'unique point M_1 du plan tel que $MM_0/MM_1 = |z_0|/R$, $\forall M \in \mathcal{C}(O, R)$. C'est également l'unique point M_1 tel que $OM_0 \times OM_1 = R^2$.

Théorème 1 (Cercle de Milne-Thomson⁶). Soit $f(z)$ une fonction holomorphe, on définit son image par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, R)$ par la fonction

$$g(z) = f(z) + \overline{f(R^2/\bar{z})} \quad (47)$$

Le cercle $\mathcal{C}(O, R)$ est une ligne de courant de l'écoulement associé à $g(z)$.

Preuve. Si $z \in \mathcal{C}(O, R)$, $z\bar{z} = R^2$ et $g(z) = f(z) + \overline{f(z)}$ est réel. Par conséquent, sa partie imaginaire $\psi(z \in \mathcal{C}(O, R)) = 0$ est constante et décrit une ligne de courant. \square

Le théorème est utilisé pour construire un nouveau potentiel pour un fluide lorsqu'un cylindre est placé dans l'écoulement. C'est d'ailleurs comme cela que l'on procède pour proposer un potentiel pour l'écoulement autour d'un cylindre au repos. On part du champ uniforme $V_0 z$ et on calcule son image par rapport au cercle :

$$V_0 z + V_0 \frac{\overline{R^2}}{\bar{z}} = V_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right)$$

5. Heinrich Gustav Magnus (1802-1870)

6.2. Ajout d'un tourbillon non centré sur l'obstacle

Donner le potentiel complexe correspondant à un tourbillon seul centré en z_0 extérieur au disque de centre O et de rayon R . Tourbillon seul veut dire que dans cette question $V_0 = 0$. On appellera a le module de z_0 .

Donner le champ des vitesses correspondant.

Montrer que ce champ ne vérifie pas les conditions de glissement du fluide parfait incompressible sur le bord du cylindre $\mathcal{C}(O, R)$.

Un changement d'origine sur l'expression du potentiel du tourbillon centré en O permet de répondre à la question

$$f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0), \quad f'(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{|z - z_0|^2} \quad (48)$$

Le glissement le long du cylindre se traduit par $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$. Le produit scalaire se calcule avec les nombres complexes sous la forme

$$\Re(f'(z = R \exp(i\theta)) \exp(i\theta)) = \Re\left(-\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{|z - z_0|^2} \exp(i\theta)\right) = \Re\left(-\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{R - \bar{z}_0 \exp(i\theta)}{|z - z_0|^2}\right) \neq 0$$

6.3. Trois tourbillons autour d'un cylindre

Pour lever la difficulté précédente, on ajoute au tourbillon (Γ, z_0) son image par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, R)$. En vertu du théorème 1, l'écoulement associé à ce potentiel ainsi complété est compatible avec la présence du cylindre et la condition de bord associée.

Calculer le potentiel $g(z)$ correspondant à cet écoulement. A nouveau, on considère ici : $V_0 = 0$. En utilisant la formule de Blasius (49), calculer les efforts agissant sur le cylindre et sur le tourbillon (Γ, z_0) .

En conclure que les tourbillons ne sont pas stables et ne subsisteront pas.

Pour calculer les efforts, on utilisera le

Théorème 2 (Formule de Blasius). *Le torseur des efforts appliqués sur une ligne de courant fermée γ est caractérisé par les formules suivantes pour la force résultante et le moment résultant :*

$$R = i \frac{\rho}{2} \int_{\gamma} \left(\frac{df}{dz}(z) \right)^2 dz, \quad M = -i \frac{\rho}{2} \Re \left(\int_{\gamma} z \left(\frac{df}{dz}(z) \right)^2 dz \right) \quad (49)$$

où les forces et moment complexes $R = R_1 - iR_2, M = M_3$ s'expriment en fonction des composantes du torseur. Seule la composante M_3 est considérée dans le problème plan. Elle est reliée à la partie réelle de l'intégrale indiquée.

Pour une expression plus générale dans le cas de courbes non fermées et pour la preuve de ces résultats, on renvoie le lecteur aux ouvrages Germain (1986); Germain and Muller (1995); Batchelor (2000).

On fera également appel au

Théorème 3 (Théorème des résidus). *Soit un contour fermé γ et f_h une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe \mathcal{D} et non singulière, i.e. ne possédant pas de pôle dans le domaine circonscrit par $\gamma \subset \mathcal{D}$, on a alors les formules de Cauchy suivantes*

$$\oint_{\gamma} \frac{f_h(z)}{z - z_i} dz = 2i\pi f_h(z_i), \quad \oint_{\gamma} \frac{f_h(z)}{(z - z_i)^{n+1}} dz = 2i\pi f_h^{(n)}(z_i) \quad (50)$$

où les $z_i \in \mathcal{D}$ sont entourés par γ et $f_h^{(n)}$ est la dérivée n -ième de f_h ($n \in \mathbb{N} \geq 0$).

On applique la transformation (47) au potentiel du tourbillon (Γ, z_0) pour obtenir le potentiel :

$$\begin{aligned} g(z) &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\overline{\frac{R^2}{z}} - z_0) \\ &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\log(z - z_0) - \log(\overline{\frac{R^2}{z}} - z_0) \right) \\ &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\log(z - z_0) - \log(\bar{z}_0(\frac{R^2}{\bar{z}_0} - z)/z) \right) \\ &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} (\log(z - z_0) - \log(z - z_1) + \log z) + Cste \end{aligned}$$

où la constante est proportionnelle à $\log(\bar{z}_0)$ et $z_1 = R^2/\bar{z}_0$. Finalement on retient le potentiel

$$g(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{z(z - z_0)}{z - z_1}, \quad \text{avec } z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}_0} \quad (51)$$

On trouve donc trois tourbillons : (Γ, z_0) , $(-\Gamma, z_1)$ et (Γ, O) . On calcule la dérivée du potentiel :

$$g'(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z} \right) \quad (52)$$

Pour utiliser la formule de Blasius (49), il faut calculer le carré de la fonction précédente :

$$(g'(z))^2 = \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{1}{(z - z_1)^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{(z - z_0)(z - z_1)} + \frac{2}{z(z - z_0)} - \frac{2}{z(z - z_1)} \right)$$

Calculons la résultante de la force agissant sur le tourbillon (Γ, z_0) en considérant un contour fermé γ_0 entourant z_0 mais pas les pôles O et z_1 . L'application du théorème des résidus (50) montre que les termes au carré à numérateur constant ne contribuent pas à l'intégrale. Il subsiste :

$$\begin{aligned} R &= R_1 - iR_2 = -i \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \oint_{\gamma_0} \left(\frac{2}{z(z - z_0)} - \frac{2}{(z - z_0)(z - z_1)} \right) dz \\ &= -i \frac{\rho}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 2i\pi \left(\frac{2}{z_0} - \frac{2}{z_0 - z_1} \right) = -\rho \frac{\Gamma^2}{2\pi} \frac{z_1}{z_0(z_0 - z_1)} \end{aligned}$$

Il y donc un effort résultant qui empêchera le tourbillon de rester stationnaire. Le tourbillon z_0 n'est donc pas stable et entraînera les autres dans sa chute.

Pour stabiliser le tourbillon z_0 , on introduit

6.4. Quatre tourbillons dans l'écoulement autour du cylindre

On considère le potentiel

$$f(z) = V_0(z + \frac{R^2}{z}) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_1) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{z - \bar{z}_0}{z - \bar{z}_1} \quad (53)$$

Ce potentiel correspond à l'introduction dans l'écoulement induit par V_0 de deux tourbillons (Γ, z_0) et $(-\Gamma, \bar{z}_0)$ situés en deux points conjugués et de circulation opposée, cf. figure 5(b). Afin de garantir que le bord du cercle est une ligne de courant on ajoute les deux tourbillons

images en $z_1 = R^2/\bar{z}_0$ et \bar{z}_1 . A noter que les tourbillons en O issus du potentiel image (51) se neutralisent, ce qui explique l'absence de $\log z$ dans le potentiel précédent.

On cherche où positionner z_0 pour que ce tourbillon soit en équilibre. Il faut donc calculer l'effort exercé par le fluide sur un contour γ_0 entourant z_0 mais ne contenant pas z_1 . L'utilisation de la formule de Blasius (49) requiert le calcul de

$$f'(z) = V_0(1 - \frac{R^2}{z^2}) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} - \frac{1}{z - \bar{z}_1} \right) = h'(z) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$$

où la partie $h(z)$ du potentiel (53) ne contenant pas le pôle z_0 a été isolée pour une utilisation plus aisée du théorème des résidus. L'étape suivante consiste à calculer

$$(f'(z))^2 = (h'(z))^2 - \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{(z - z_0)^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{h'(z)}{z - z_0}$$

et à appliquer la formule de Blasius en utilisant le théorème des résidus :

$$\oint_{\gamma_0} (f'(z))^2 dz = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{h'(z)}{z - z_0} dz = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \times 2i\pi h'(z_0)$$

La condition nécessaire pour que le tourbillon (Γ, z_0) soit en équilibre est donc que

$$h'(z_0) = V_0(1 - \frac{R^2}{z_0^2}) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z_0 - z_1} + \frac{1}{z_0 - \bar{z}_0} - \frac{1}{z_0 - \bar{z}_1} \right) = 0 \quad (54)$$

Cette équation fournit le lieu des points d'équilibre du tourbillon en fonction de sa circulation Γ . On montre de manière similaire que le tourbillon situé en \bar{z}_0 est également en équilibre à la même condition.

On peut enfin établir que l'effort exercé par le fluide sur le cylindre est nul dès lors que les tourbillons introduits sont en équilibre. Le calcul n'est pas reproduit ici. Le potentiel (53) correspond donc à une solution du problème de l'écoulement autour d'un cylindre. L'introduction des tourbillons permet de dissymétriser la forme de l'écoulement par rapport à la solution sans tourbillon, ce qui est plus réaliste d'un point de vue physique. Cependant, cette solution ne permet toujours pas de lever le paradoxe de D'Alembert...

Déterminons plus précisément le lieu des tourbillons libres en exploitant la condition (54). En utilisant $z_0 = a \exp(i\theta)$ et $z_1 = R^2 \exp(i\theta)/a$, on peut mettre $h'(z_0)$ sous la forme

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= V_0(1 - \frac{R^2}{a^2} \exp(-2i\theta)) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{-2 \sin \theta R^2 a}{(a^2 - R^2)(z_0^2 - R^2)} + \frac{1}{2a \sin \theta} \right) \\ &= V_0(1 - \frac{R^2}{a^2} \exp(-2i\theta)) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{-2 \sin \theta R^2 a(a^2 \exp(-2i\theta) - R^2)}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} + \frac{1}{2a \sin \theta} \right) \end{aligned}$$

dont on extrait les parties réelle et imaginaire

$$\Re(h'(z_0)) = V_0(1 - \frac{R^2}{a^2} \cos 2\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{-2 \sin \theta R^2 a(a^2 \cos(2\theta) - R^2)}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} + \frac{1}{a \sin \theta} \right) = 0 \quad (55)$$

$$\Im(h'(z_0)) = V_0 \frac{R^2}{a^2} \sin 2\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2R^2 a^3 \sin \theta \sin(2\theta)}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} = 0 \quad (56)$$

La dernière équation (56) fournit les solutions suivantes :

$$\sin 2\theta = 0 \quad \text{ou} \quad V_0 \frac{R^2}{a^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2R^2a^3 \sin \theta}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} = 0$$

La première solution conduit à $\theta = 0, \pi$ mais alors $z_0 = \bar{z}_0$ et les deux tourbillons confondus et opposés s'annihilent. Le cas $\theta = \pi/2$ substitué dans (55) exige que

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = -2V_0 \frac{(a^2 - R^2)(a^2 + R^2)^2}{a(a^4 - R^4 + 4a^2R^2)}$$

Explorons alors la deuxième solution qui est telle que

$$-\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2R^2a^3 \sin \theta}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} = \frac{V_0R^2}{a^2} \quad (57)$$

Lorsqu'on substitue cette relation dans (55), on obtient finalement

$$\frac{\Gamma}{4\pi} = -V_0 \left(1 - \frac{R^4}{a^4}\right) \sin \theta$$

Noter que le signe de Γ doit être opposé à V_0 .

Pour trouver l'argument θ il faut revenir à (57) en notant que $|z_0^2 - R^2|^2 = a^4 + R^4 - 2a^2R^2 \cos 2\theta$:

$$2 \sin \theta = 1 - \frac{R^2}{a^2} \quad (58)$$

L'équation polaire du lieu des points z_0 est donc

$$a = \frac{R}{\sqrt{1 - 2 \sin \theta}}$$

Pour $\theta = 0, a = R$, les deux tourbillons s'annihilent sur le bord du cercle. La courbe possède une asymptote en $\pi/6$, comme l'illustre la figure 7.

Si nous privilégions les positions en aval de l'obstacle, ce modèle d'écoulement avec tourbillons libres est susceptible de représenter l'allure de l'écoulement plus fidèlement qu'un modèle sans tourbillons où l'écoulement, symétrique par rapport au disque, est peu réaliste. Pour que ce modèle soit satisfaisant il faudrait néanmoins étudier la stabilité des tourbillons en équilibre qui n'est pas garantie.

Références

- Batchelor, G.K., 2000. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press. doi :[10.1017/CBO9780511800955](https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955).
- Boehler, J.P., 1978. Lois de comportement anisotrope des milieux continus. Journal de Mécanique 17, 153–190.
- Boehler, J.P., 1987. Applications of tensor functions in solid mechanics. CISM Courses and Lectures No. 292, Udine, Springer Verlag, Wien. doi :<https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2810-7>.

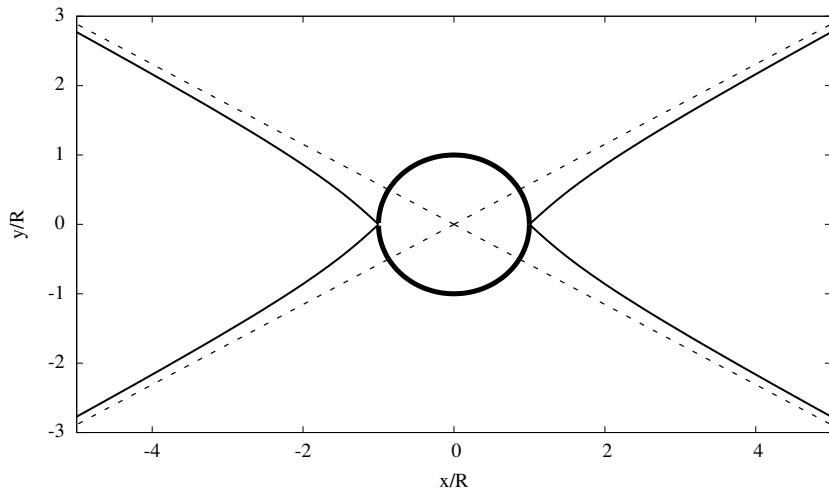


FIGURE 7: Lieu des centres des tourbillons libres en aval d'un écoulement autour d'un cylindre. Le contour du cylindre est en trait épais. Les asymptotes sont également représentées en pointillés.

Cazzani, A., Rovati, M., 2003. Extrema of Young's modulus for cubic and transversely isotropic solids. International Journal of Solids and Structures 40, 1713–1744. doi :[10.1016/S0020-7683\(02\)00668-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00668-6).

Cazzani, A., Rovati, M., 2005. Extrema of Young's modulus for elastic solids with tetragonal symmetry. International Journal of Solids and Structures 42, 5057–5096. doi :[10.1016/j.ijsolstr.2005.02.018](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.02.018).

Germain, P., 1986. Mécanique, tomes I et II. Ellipses, Paris.

Germain, P., Muller, P., 1995. Introduction à la mécanique des milieux continus. Masson, Paris.

Hill, R., 1950. The mathematical theory of plasticity. Oxford University Press.

Hill, R., 1978. Aspects of invariance in solid mechanics. Advances in Applied Mechanics 18, 1–75.

Kambouchev, N., Fernandez, J., Radovitzky, R., 2007. A polyconvex model for materials with cubic symmetry. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering , 451–467doi :[10.1088/0965-0393/15/5/006](https://doi.org/10.1088/0965-0393/15/5/006).

Kim, H.G., 2014. The effect of different forms of strain energy functions in hyperelasticity-based crystal plasticity models on texture evolution and mechanical response of face-centered cubic crystals. International Journal for Numerical Methods in Engineering 100, 300–320. doi :[10.1002/nme.4749](https://doi.org/10.1002/nme.4749).

Mandel, J., 1966–1994. Cours de mécanique des milieux continus. Editions Jacques Gabay, Paris.

Obala, J., 1997. Exercices et problèmes de mécanique des milieux continus. Masson, Paris.

Schröder, J., Neff, P., Ebbing, V., 2010. Polyconvex energies for trigonal, tetragonal and cubic symmetry groups, in : Hackl, K. (Ed.), IUTAM Symposium on Variational Concepts with Applications to the Mechanics of Materials, Springer Netherlands, Dordrecht. pp. 221–232.

Shuvalov, L.A., 1988. Modern Crystallography IV Physical properties of crystals. Springer Series in Solid-State Sciences, vol. 37, Springer. doi :[10.1007/978-3-642-81838-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-81838-7).

- Walpole, L.J., 1984. Fourth-rank tensors of the thirty-two crystal classes : Multiplication tables. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 391, 149–179.
- Zheng, Q., 1994. Theory of representations for tensor functions—A unified invariant approach to constitutive equations. Applied Mechanics Review 47, 545–587.
- Zheng, Q.S., Spencer, A., 1993a. On the canonical representations for kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems. International Journal of Engineering Science 31, 617 – 635. doi :[10.1016/0020-7225\(93\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90054-X).
- Zheng, Q.S., Spencer, A., 1993b. Tensors which characterize anisotropies. International Journal of Engineering Science 31, 679 – 693. doi :[10.1016/0020-7225\(93\)90118-E](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90118-E).

OPTIMISATION
EXAMEN. DURÉE 2H30
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS.

MINES ParisTech

Jeudi 23 avril 2020

Les trois exercices ci-dessous sont indépendants. Le barème comporte 45 points.

Exercice 1 Minimisation sous contraintes [9 points]

On considère (pour $a \in \mathbb{R}$) le problème

$$f(x, y) = 4 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + (y - a)^2$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ y + 2x &\leq 1 \end{aligned}$$

1. Justifier que ce problème admet un unique minimum (global).
2. Représenter graphiquement les contraintes du problème. En raisonnant graphiquement et en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, trouver ce minimum en fonction de la valeur de a .

Exercice 2 Méthode de faisceaux proximale [15 points]

On se propose dans cet exercice d'étudier des variantes de la méthode des faisceaux pour résoudre le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée continue et convexe.

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie 1 : Instabilité de la méthode des faisceaux

On rappelle le principe de base des méthodes de faisceaux : on suppose que l'on dispose d'un oracle qui, pour tout $x \in \mathbb{R}$, fournit $f(x)$ et $g \in \partial f(x)$. Etant donné un faisceau d'informations $\{(x_i, f(x_i), g_i) \mid g_i \in \partial f(x_i), i = 0, \dots, k\}$, on construit une approximation affine par morceaux de f et l'on résout le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_k(x) \quad \text{avec} \quad \varphi_k(x) = \max_{i=0, \dots, k} \{f(x_i) + g_i^T(x - x_i)\} \tag{2}$$

dont on note x_{k+1} la solution. On met alors à jour le faisceau d'informations en y ajoutant la nouvelle donnée $(x_{k+1}, f(x_{k+1}), g_{k+1})$ ($g_{k+1} \in \partial f(x_{k+1})$) et on itère.

1. **Application.** Soient $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 1$ et $x_1 = -\varepsilon$ avec $\varepsilon < 1/2$ un petit paramètre positif.

- (a) Construire la fonction φ_1 .
- (b) Déterminer $x_2 = \min \varphi_1$.
- (c) Comparer x_1 et x_2 au minimum de la fonction f . Quel inconvénient présente donc cette méthode ? Que se passe-t-il quand on fait tendre ε vers 0 ?

On considère maintenant une méthode alternative qui, au lieu de résoudre le problème (2), résout

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_k(x) + \frac{1}{2\mu} \|x - x_k\|^2 \quad (3)$$

où $\mu > 0$ et $\|\cdot\|$ est la distance euclidienne.

2. Justifier que cette méthode porte le nom de méthode de faisceaux proximale. Quel est a priori l'effet du terme $\frac{1}{2\mu} \|x - x_k\|^2$ selon vous ?
3. **Application.** On reprend l'exemple de la question 3 et on considère maintenant le problème (3) avec $\mu = 1/3$.
 - (a) Déterminer à présent la solution x_2 du nouveau problème (3).
 - (b) Comparer ce nouvel x_2 à x_1 et au minimum de f . Conclure.

Partie 2 : Analyse de convergence

Afin d'assurer que l'on ne réalise pas des itérations qui ne font pas assez décroître la fonction, on modifie légèrement la méthode ci-dessus. L'algorithme de méthode de faisceaux proximale prend alors la forme finale suivante.

Algorithme 1. Soient $m \in]0, 1[$ et une suite (μ_k) de réels strictement positifs.

A partir de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque, $f(x_0)$, $s_0 \in \partial f(x_0)$, de $\varphi_0 : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x_0) + s_0^T(x - x_0)$ et de $K = \emptyset$, itérer

1. Résoudre $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_k(x) + \frac{1}{2\mu_k} \|x - x_k\|^2$, de minimiseur y_{k+1} .
2. Calculer $f(y_{k+1})$, $s_{k+1} \in \partial f(y_{k+1})$ et

$$\delta_k = f(x_k) - \varphi_k(y_{k+1}) - \frac{1}{2\mu_k} \|y_{k+1} - x_k\|^2$$

3. Si $f(y_{k+1}) \leq f(x_k) - m\delta_k$, choisir $x_{k+1} = y_{k+1}$ et $K = K \cup \{k\}$. Sinon, $x_{k+1} = x_k$.

4. Définir

$$\varphi_{k+1}(x) = \max \{\varphi_k(x), f(y_{k+1}) + s_{k+1}^T(x - y_{k+1})\}$$

On cherche maintenant à étudier les propriétés de convergence de cet algorithme. Pour ce faire, on se restreint au cas où K est de cardinal infini et on suppose que la suite (μ_k) est telle que

$$\sum_{k \in K} \mu_k = +\infty \quad (4)$$

Enfin, on suppose que la fonction convexe f est bornée inférieurement.

4. Justifier que $f(x) \geq \varphi_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$.

5. Montrer que

$$\sum_{k \in K} \delta_k \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k) - f(x_{k+1})] \quad (5)$$

Prouver que $\delta_k \geq 0$ et conclure que $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \delta_k = 0$.

6. Montrer que $\frac{1}{\mu_k}(x_k - y_{k+1}) \in \partial \varphi_k(y_{k+1})$. En déduire

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \varphi_k(y) \geq \varphi_k(y_{k+1}) + \frac{1}{\mu_k}(x_k - y_{k+1})^T(y - x_k) + \frac{1}{\mu_k} \|x_k - y_{k+1}\|^2 \quad (6)$$

7. En conclure que, si $k \in K$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \|y - x_{k+1}\|^2 \leq \|y - x_k\|^2 + 2\mu_k(f(y) - f(x_k) + \delta_k) \quad (7)$$

8. On suppose qu'il existe $\eta > 0$ et $z \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(z) \leq f(x_k) - \eta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|z - x_{k+1}\|^2 \leq \|z - x_k\|^2 - \mu_k \eta, \quad k_0 \leq k \in K \quad (8)$$

et obtenir une contradiction à l'aide de (4). Conclure.

Exercice 3 Programmation sur un cône [21 points]

On considère le problème de programmation sur un cône

$$\begin{aligned} \min & \alpha^T x \\ \text{sous contraintes} & \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (9)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est la variable de décision et les paramètres du problème sont $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $A_i \in \mathcal{M}_{n_i, n}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $c_i \in \mathbb{R}^n$ et $d_i \in \mathbb{R}$. La norme $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{n_i}

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie 1 : Applications

On va dans un premier temps illustrer quelles familles de problème peuvent être traitées par un tel formalisme.

1. On s'intéresse au problème de programmation quadratique

$$\min_{Nz+p \leq 0} z^T Q z + 2r^T z \quad (10)$$

où Q matrice symétrique définie positive.

(a) Montrer que le problème (10) est équivalent à

$$\begin{aligned} \min & t + r^T Q^{-1} r \\ \left\{ \begin{array}{l} z^T Q z + 2r^T z \leq t \\ Nz + p \leq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (11)$$

(b) On rappelle qu'une matrice symétrique définie positive Q admet une unique racine carrée R (symétrique définie positive) telle que $Q = R^2$. Reformuler le problème ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned} \min & t + r^T Q^{-1} r \\ \left\{ \begin{array}{l} \|Rz + R^{-1}r\|^2 \leq t + r^T Q^{-1} r \\ Nz + p \leq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (12)$$

(c) En introduisant $x = (z, \sqrt{t + r^T Q^{-1} r})$, conclure que (10) peut être écrit sous la forme (9).

2. On s'intéresse maintenant au problème de programmation linéaire robuste

$$\begin{aligned} \min & c^T x \\ a_i^T x + b_i & \leq 0, \quad a_i \in \mathcal{E}_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (13)$$

où les paramètres a_i sont incertains et appartiennent à des ellipsoïdes donnés

$$a_i \in \mathcal{E}_i = \{\bar{a}_i + P_i u \mid \|u\| \leq 1\} \quad (14)$$

avec P_i symétrique positive.

(a) Illustrer graphiquement les contraintes du problème, dans le cas $n = 2$ et $m = 1$.

(b) Montrer que le problème (13) est équivalent à

$$\begin{aligned} \min & c^T x \\ \max \{a_i^T x \mid a_i \in \mathcal{E}_i\} + b_i & \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (15)$$

(c) Exprimer $\max \{a_i^T x \mid a_i \in \mathcal{E}_i\}$ en fonction de \bar{a}_i et P_i puis reformuler le problème sous la forme d'une programmation sur un cône (9).

Partie 2 : Résolution

On se propose maintenant d'étudier la résolution de ces problèmes par une méthode primale-duale de points intérieurs.

3. Montrer que le problème (9) est convexe.
4. Justifier que le gradient de $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|A_i x + b_i\|$ est $\nabla g(x) = \frac{A_i^T(A_i x + b_i)}{\|A_i x + b_i\|}$.
5. Montrer ainsi que le problème dual correspondant à (9) s'écrit

$$\begin{aligned} \max & - \sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i \lambda_i) \\ \text{sous contraintes} & \begin{cases} \sum_{i=1}^N (A_i^T z_i + c_i \lambda_i) = \alpha \\ \|z_i\| \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

6. On définit le saut de dualité associé à la différence entre le problème primal et le problème dual comme

$$\eta(x, z, \lambda) = \alpha^T x + \sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i \lambda_i) \quad (17)$$

où x solution de (9) et (z, λ) solution de (16).

- (a) Montrer que $\eta(x, z, \lambda) = \sum_{i=1}^N [(A_i x + b_i)^T z_i + (c_i^T x + d_i) \lambda_i]$.
- (b) En déduire $\eta(x, z, \lambda) \geq 0$.
- (c) Que peut-on conclure si $\eta(x, z, \lambda) = 0$?

7. On définit la barrière logarithmique

$$\gamma(u, t) = \begin{cases} -\ln(t - \|u\|^2) & \text{si } t > \|u\|^2 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (18)$$

Pour toutes solutions x et (z, λ) strictement faisables de (9) et (16), c'est à dire respectant strictement les contraintes inégalités des problèmes respectifs, on considère la fonction

$$\psi(x, z, \lambda) = (2N+1) \ln(\eta(x, z, \lambda)) + \sum_{i=1}^N [\gamma(u_i, t_i) + \gamma(z_i, \lambda_i)] - 2N \ln N \quad (19)$$

avec $u_i = A_i x + b_i$ et $t_i = c_i^T x + d_i$. On admet le résultat suivant :

$$\eta(x, z, \lambda) \leq \exp(\psi(x, z, \lambda)) \quad (20)$$

et on se propose de minimiser la fonction ψ à partir d'un point initial (x^0, z^0, λ^0) strictement faisable. Justifier que cette méthode permet de résoudre le problème (9) et porte le nom de "méthode primale-duale par points intérieurs".

OPTIMISATION
EXAMEN. DURÉE 2H30
TOUS DOCUMENTS AUTORISÉS.

MINES ParisTech

Jeudi 23 avril 2020

Les trois exercices ci-dessous sont indépendants. Le barème comporte 45 points.

Exercice 1 Minimisation sous contraintes [9 points]

On considère (pour $a \in \mathbb{R}$) le problème

$$f(x, y) = 4 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + (y - a)^2$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ y + 2x &\leq 1 \end{aligned}$$

- Justifier que ce problème admet un unique minimum (global).

On cherche à minimiser f une fonction fortement convexe sur un ensemble convexe. Ce problème admet donc une unique solution.

- Représenter graphiquement les contraintes du problème. En raisonnant graphiquement et en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, trouver ce minimum en fonction de la valeur de a .

On réalise un changement de variable $(\xi_1, \xi_2) = (2x, y)$ pour réécrire le problème sous la forme

$$f(\xi) = \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + (\xi_2 - a)^2$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} c_1(\xi) &= -\xi_1 \leq 0 \\ c_2(\xi) &= -\xi_2 \leq 0 \\ c_3(\xi) &= \xi_2 + \xi_1 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Une représentation graphique de ces contraintes est donnée en Figure 1. On a aussi tracé pour différentes valeurs de a des lignes de niveau de la fonction $f : \xi \rightarrow (\xi_1 - 1/2)^2 + (\xi_2 - a)^2$, qui sont des cercles centrés en $(1/2, a)$. Graphiquement, on observe que trois cas doivent être considérés : $a \leq 0$, $a \in]0, 1/2[$ et $a \geq 1/2$.

- si $a \leq 0$, on observe graphiquement que le point minimum candidat est le projeté de $(1/2, a)$ sur l'axe des abscisses, cad $\xi^* = (1/2, 0)$. Vérifions cela en calculant avec les conditions de KKT les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes actives en ξ^* , cad c_2 :

$$\begin{aligned} \nabla f(\xi^*) + \lambda_2 \nabla c_2(\xi^*) &= 0 = \begin{pmatrix} 2(\xi_1^* - 1/2) \\ 2(\xi_2^* - a) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \lambda_2 &= -2a \geq 0 \end{aligned}$$

Par conditions de KKT, f et c étant convexes, on conclut que ξ^* est bien le minimum recherché.

- si $a \in]0, 1/2[$, le point $\xi^* = (1/2, a)$ est dans l'intérieur de l'ensemble défini par les contraintes et on a $\nabla f(\xi^*) = 2(\xi_1^* - 1/2, \xi_2^* - a) = 0$. On en déduit que ξ^* est le minimum recherché car f convexe.

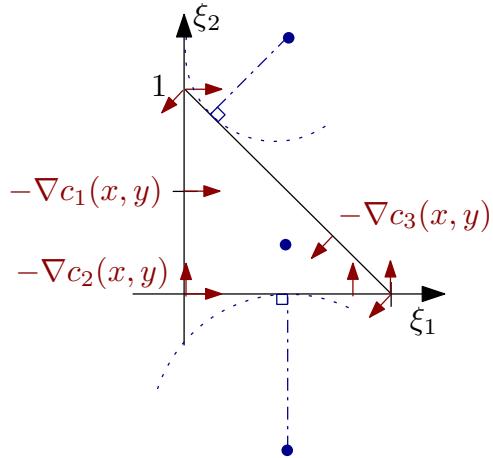


FIGURE 1 – Représentation graphique du problème.

— si $a \geq 1/2$, on observe graphiquement que le point minimum candidat est le projeté de $(1, a)$ sur l'arête supérieure du triangle ou bien le sommet $(0, 1)$ selon les valeurs de a . Plaçons-nous dans le premier cas où seul c_3 est active et déterminons le projeté avec les conditions de KKT :

$$\begin{cases} \nabla f(\xi^*) + \lambda_3 \nabla c_3(\xi^*) = 0 = \begin{pmatrix} 2(\xi_1^* - 1/2) \\ 2(\xi_2^* - a) \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ c_3(\xi^*) = 0 \Leftrightarrow \xi_1^* = -\xi_2^* + 1 \\ c_1(\xi^*) < 0 \Leftrightarrow \xi_1^* > 0 \\ c_2(\xi^*) < 0 \Leftrightarrow \xi_2^* > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-\xi_2^* + 1/2) + \lambda_3 = 0 \\ 2(\xi_2^* - a) + \lambda_3 = 0 \\ \xi_2^* \in]0, 1[\\ \xi_1^* = -\xi_2^* + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 2(a - \xi_2^*) = 2\xi_2^* - 1 \\ \xi_2^* \in]0, 1[\\ \xi_1^* = -\xi_2^* + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 2(a - \xi_2^*) = \frac{2a - 1}{2} \geq 0 \\ \xi_2^* = \frac{2a + 1}{4} \\ \xi_2^* \in]0, 1[\\ \xi_1^* = -\xi_2^* + 1 \end{cases}$$

où $\lambda_3 \geq 0$ car $a \geq 1/2$. Aussi, $\xi^* = (\frac{3-2a}{4}, \frac{2a+1}{4})$ est le minimum tant que $\xi_2^* < 1$ cad pour $a < 3/2$. Enfin, vérifions que $\xi^* = (0, 1)$ est le minimum recherché pour $a \geq 3/2$:

$$\begin{aligned} \nabla f(\xi^*) + \lambda_1 \nabla c_1(\xi^*) + \lambda_3 \nabla c_3(\xi^*) = 0 &= \begin{pmatrix} 2(\xi_1^* - 1/2) \\ 2(\xi_2^* - a) \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 2(a - 1) \geq 0 \\ \lambda_1 = \lambda_3 + 2(\xi_1^* - 1/2) = 2(a - 1) - 1 = 2a - 3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2 Méthode de faisceaux proximale [15 points]

On se propose dans cet exercice d'étudier des variantes de la méthode des faisceaux pour résoudre le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est supposée continue et convexe.

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie 1 : Instabilité de la méthode des faisceaux

On rappelle le principe de base des méthodes de faisceaux : on suppose que l'on dispose d'un oracle qui, pour tout $x \in \mathbb{R}$, fournit $f(x)$ et $g \in \partial f(x)$. Etant donné un faisceau d'informations $\{(x_i, f(x_i), g_i) \mid g_i \in \partial f(x_i), i = 0, \dots, k\}$, on construit une approximation affine par morceaux de f et l'on résout le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_k(x) \quad \text{avec} \quad \varphi_k(x) = \max_{i=0, \dots, k} \{f(x_i) + g_i^T(x - x_i)\} \quad (2)$$

dont on note x_{k+1} la solution. On met alors à jour le faisceau d'informations en y ajoutant la nouvelle donnée $(x_{k+1}, f(x_{k+1}), g_{k+1})$ ($g_{k+1} \in \partial f(x_{k+1})$) et on itère.

1. **Application.** Soient $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = 1$ et $x_1 = -\varepsilon$ avec $\varepsilon < 1/2$ un petit paramètre positif.

- (a) Construire la fonction φ_1 .

On a $f(x_0) = 1/2$, $g_0 = x_0 = 1$, $f(x_1) = \varepsilon^2/2$ et $g_1 = x_1 = -\varepsilon$ d'où
 $\varphi_1(x) = \max \left\{ \frac{1}{2} + x - 1, \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon(x + \varepsilon) \right\}$

- (b) Déterminer $x_2 = \min \varphi_1$.

x_2 est l'intersection des deux droites déterminées ci-dessus. Soit

$$\frac{1}{2} + x_2 - 1 = -\frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon x_2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1 - \varepsilon}{2}$$

- (c) Comparer x_1 et x_2 au minimum de la fonction f . Quel inconvénient présente donc cette méthode ? Que se passe-t-il quand on fait tendre ε vers 0 ?

Le minimum de f est zéro et atteint en l'origine. On observe que $f(x_1) = \varepsilon^2/2$ est plus proche de ce minimum que $f(x_2) = (1 - \varepsilon)^2/8$: la méthode des faisceaux n'est pas une méthode de descente. Le fait de faire tendre ε vers 0 empire ce phénomène : plus x_1 est proche de x^* et plus x_2 en sera éloigné. Algorithmiquement, on parle de méthode instable.

On considère maintenant une méthode alternative qui, au lieu de résoudre le problème (2), résout

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_k(x) + \frac{1}{2\mu} \|x - x_k\|^2 \quad (3)$$

où $\mu > 0$ et $\|\cdot\|$ est la distance euclidienne.

2. Justifier que cette méthode porte le nom de méthode de faisceaux proximale. Quel est a priori l'effet du terme $\frac{1}{2\mu} \|x - x_k\|^2$ selon vous ?

Le problème (3) n'est rien d'autre que l'enveloppe de Moreau de paramètre μ de la fonction φ_k . Le terme régularisant a pour effet de forcer à ce que les x_k restent relativement proches et donc à ce que φ_k soit une approximation raisonnable de f au point de travail. On espère ainsi obtenir une méthode de descente.

3. **Application.** On reprend l'exemple de la question 3 et on considère maintenant le problème (3) avec $\mu = 1/3$.

- (a) Déterminer à présent la solution x_2 du nouveau problème (3).

x_2 est tel que $0 \in \partial \varphi_1(x_2) + \frac{1}{\mu}(x_2 - x_1)$ avec

$$\partial \varphi_1(x_2) = \begin{cases} -\varepsilon & \text{si } x_2 < \frac{1 - \varepsilon}{2} \\ [-\varepsilon, 1] & \text{si } x_2 = \frac{1 - \varepsilon}{2} \\ 1 & \text{si } x_2 > \frac{1 - \varepsilon}{2} \end{cases}$$

Supposons $x_2 \geq \frac{1 - \varepsilon}{2}$, alors, il existe $g \in [-\varepsilon, 1]$ tel que

$$0 = g + 3(x_2 + \varepsilon) \Leftrightarrow x_2 = -\varepsilon - \frac{g}{3} \leq -\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{1 - \varepsilon}{2}$$

pour ε suffisamment faible, ce qui est absurde. Aussi, $x_2 < \frac{1-\varepsilon}{2}$ et est tel que

$$0 = -\varepsilon + 3(x_2 + \varepsilon) \Leftrightarrow x_2 = -\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = -\frac{2}{3}\varepsilon$$

- (b) Comparer ce nouvel x_2 à x_1 et au minimum de f . Conclure.

x_2 est maintenant plus proche de l'origine que x_1 et ce quelle que soit la valeur de ε . La méthode proximale a été stabilisée.

Partie 2 : Analyse de convergence

Afin d'assurer que l'on ne réalise pas des itérations qui ne font pas assez décroître la fonction, on modifie légèrement la méthode ci-dessus. L'algorithme de méthode de faisceaux proximale prend alors la forme finale suivante.

Algorithme 1. Soient $m \in]0, 1[$ et une suite (μ_k) de réels strictement positifs.

A partir de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque, $f(x_0)$, $s_0 \in \partial f(x_0)$, de $\varphi_0 : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x_0) + s_0^T(x - x_0)$ et de $K = \emptyset$, itérer

1. Résoudre $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi_k(x) + \frac{1}{2\mu_k} \|x - x_k\|^2$, de minimiseur y_{k+1} .
2. Calculer $f(y_{k+1})$, $s_{k+1} \in \partial f(y_{k+1})$ et

$$\delta_k = f(x_k) - \varphi_k(y_{k+1}) - \frac{1}{2\mu_k} \|y_{k+1} - x_k\|^2$$

3. Si $f(y_{k+1}) \leq f(x_k) - m\delta_k$, choisir $x_{k+1} = y_{k+1}$ et $K = K \cup \{k\}$. Sinon, $x_{k+1} = x_k$.

4. Définir

$$\varphi_{k+1}(x) = \max \{ \varphi_k(x), f(y_{k+1}) + s_{k+1}^T(x - y_{k+1}) \}$$

On cherche maintenant à étudier les propriétés de convergence de cet algorithme. Pour ce faire, on se restreint au cas où K est de cardinal infini et on suppose que la suite (μ_k) est telle que

$$\sum_{k \in K} \mu_k = +\infty \tag{4}$$

Enfin, on suppose que la fonction convexe f est bornée inférieurement.

4. Justifier que $f(x) \geq \varphi_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$.

On a $f(x) \geq f(x_i) + g_i^T(x - x_i)$ pour tout $i = 0, \dots, k$ par convexité de f et définition de g_i ce qui permet de conclure.

5. Montrer que

$$\sum_{k \in K} \delta_k \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} [f(x_k) - f(x_{k+1})] \tag{5}$$

Prouver que $\delta_k \geq 0$ et conclure que $\lim_{k \rightarrow \infty, k \in K} \delta_k = 0$.

L'inégalité provient directement de l'étape (b) de l'algorithme et du fait que $f(x_k) = f(x_{k+1})$ si $k \notin K$. f étant bornée inférieurement, on a donc $\sum_{k \in K} \delta_k < \infty$. Par ailleurs, par définition de y_{k+1} ,

$$\varphi_k(y_{k+1}) + \frac{1}{2\mu_k} \|y_{k+1} - x_k\|^2 \leq \varphi_k(x_k) + \frac{1}{2\mu_k} \|x_k - x_k\|^2 = \varphi_k(x_k) \leq f(x_k)$$

donc $\delta_k \geq 0$ et le résultat voulu s'ensuit.

6. Montrer que $\frac{1}{\mu_k}(x_k - y_{k+1}) \in \partial \varphi_k(y_{k+1})$. En déduire

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \varphi_k(y) \geq \varphi_k(y_{k+1}) + \frac{1}{\mu_k} (x_k - y_{k+1})^T (y - x_k) + \frac{1}{\mu_k} \|x_k - y_{k+1}\|^2 \tag{6}$$

Par définition de y_{k+1} , on a $0 \in \partial\varphi_k(y_{k+1}) + \frac{1}{\mu_k}(y_{k+1} - x_k)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\varphi_k(y) &\geq \varphi_k(y_{k+1}) + \frac{1}{\mu_k}(x_k - y_{k+1})^T(y - y_{k+1}) \\ &= \varphi_k(y_{k+1}) + \frac{1}{\mu_k}(x_k - y_{k+1})^T(y - x_k) + \frac{1}{\mu_k}\|x_k - y_{k+1}\|^2\end{aligned}$$

7. En conclure que, si $k \in K$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \|y - x_{k+1}\|^2 \leq \|y - x_k\|^2 + 2\mu_k(f(y) - f(x_k) + \delta_k) \quad (7)$$

On a

$$\|y - x_{k+1}\|^2 = \|y - y_{k+1}\|^2 \leq \|y - x_k\|^2 + 2(y - x_k)^T(x_k - y_{k+1}) + \|x_k - y_{k+1}\|^2$$

Et, en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned}\|y - x_{k+1}\|^2 &\leq \|y - x_k\|^2 + 2\mu_k \left(\varphi_k(y) - \varphi_k(y_{k+1}) - \frac{1}{2\mu_k}\|x_k - y_{k+1}\|^2 \right) \\ &\leq \|y - x_k\|^2 + 2\mu_k \left(f(y) - f(x_k) + \underbrace{f(x_k) - \varphi_k(y_{k+1}) - \frac{1}{2\mu_k}\|x_k - y_{k+1}\|^2}_{=\delta_k} \right)\end{aligned}$$

8. On suppose qu'il existe $\eta > 0$ et $z \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(z) \leq f(x_k) - \eta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|z - x_{k+1}\|^2 \leq \|z - x_k\|^2 - \mu_k\eta, \quad k_0 \leq k \in K \quad (8)$$

et obtenir une contradiction à l'aide de (4). Conclure.

En remplaçant dans l'inégalité précédente, on a

$$\|z - x_{k+1}\|^2 \leq \|z - x_k\|^2 + 2\mu_k(\delta_k - \eta)$$

On a $\lim \delta_k = 0$ pour $k \rightarrow \infty$ et $k \in K$. Ainsi, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $k \geq k_0$,

$$\|z - x_{k+1}\|^2 \leq \|z - x_k\|^2 - \mu_k\eta$$

En sommant, on obtient

$$\|z - x_N\|^2 \leq \|z - x_{k_0}\|^2 - \eta \sum_{k=k_0}^N \mu_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -\infty$$

D'où la contradiction. Ainsi, sous les hypothèses considérées, la suite x_k converge vers un minimum de f .

Exercice 3 Programmation sur un cône [21 points]

On considère le problème de programmation sur un cône

$$\begin{array}{ll}\min & \alpha^T x \\ \text{sous contraintes} & \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \dots, N\end{array} \quad (9)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est la variable de décision et les paramètres du problème sont $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $A_i \in \mathcal{M}_{n_i, n}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $c_i \in \mathbb{R}^n$ et $d_i \in \mathbb{R}$. La norme $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{n_i}

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie 1 : Applications

On va dans un premier temps illustrer quelles familles de problème peuvent être traitées par un tel formalisme.

1. On s'intéresse au problème de programmation quadratique

$$\min_{Nz+p \leq 0} z^T Q z + 2r^T z \quad (10)$$

où Q matrice symétrique définie positive.

- (a) Montrer que le problème (10) est équivalent à

$$\begin{aligned} & \min && t + r^T Q^{-1} r \\ & \left\{ \begin{array}{l} z^T Q z + 2r^T z \leq t \\ Nz + p \leq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (11)$$

Direct en introduisant $t \in \mathbb{R}$ et en notant que l'ajout de la constante $r^T Q^{-1} r$ ne modifie pas le problème.

- (b) On rappelle qu'une matrice symétrique définie positive Q admet une unique racine carrée R (symétrique définie positive) telle que $Q = R^2$. Reformuler le problème ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned} & \min && t + r^T Q^{-1} r \\ & \left\{ \begin{array}{l} \|Rz + R^{-1}r\|^2 \leq t + r^T Q^{-1} r \\ Nz + p \leq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (12)$$

On a

$$z^T Q z + 2r^T z = z^T R^T R z + 2r^T R^{-1} R z = \|Rz + R^{-1}r\|^2 - r^T Q^{-1} r \quad (13)$$

ce qui permet de conclure.

- (c) En introduisant $x = (z, \sqrt{t + r^T Q^{-1} r})$, conclure que (10) peut être écrit sous la forme (9). Direct avec $\alpha = e_{n+1}$, $A_1 = (R \ 0)$, $b_1 = R^{-1}r$, $c_1 = e_{n+1}$, $d_1 = 0$, $A_i = 0$, $b_i = 0$, $c_i^T = -n_{i-1}$ la $i-1$ ième ligne de N et $d_i = -p_{i-1}$ pour tout $i = 2, \dots, m$.

2. On s'intéresse maintenant au problème de programmation linéaire robuste

$$\begin{aligned} & \min && c^T x \\ & a_i^T x + b_i \leq 0, \quad a_i \in \mathcal{E}_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (14)$$

où les paramètres a_i sont incertains et appartiennent à des ellipsoïdes donnés

$$a_i \in \mathcal{E}_i = \{\bar{a}_i + P_i u \mid \|u\| \leq 1\} \quad (15)$$

avec P_i symétrique positive.

- (a) Illustrer graphiquement les contraintes du problème, dans le cas $n = 2$ et $m = 1$.
- (b) Montrer que le problème (14) est équivalent à

$$\begin{aligned} & \min && c^T x \\ & \max \{a_i^T x \mid a_i \in \mathcal{E}_i\} + b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (16)$$

Direct par définition de (14).

- (c) Exprimer $\max \{a_i^T x \mid a_i \in \mathcal{E}_i\}$ en fonction de \bar{a}_i et P_i puis reformuler le problème sous la forme d'une programmation sur un cône (9).
On a $\max \{a_i^T x \mid a_i \in \mathcal{E}_i\} = \max \{(\bar{a}_i + P_i u)^T x \mid \|u\| \leq 1\} = \bar{a}_i^T x + \|P_i u\|$ par Cauchy-Schwarz. Le problème est donc bien de la forme (9) avec $A_i = P_i$, $b_i = 0$, $c_i = \bar{a}_i$ et $d_i = -b_i$.

Partie 2 : Résolution

On se propose maintenant d'étudier la résolution de ces problèmes par une méthode primale-duale de points intérieurs.

3. Montrer que le problème (9) est convexe.
4. Justifier que le gradient de $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|A_i x + b_i\|$ est $\nabla g(x) = \frac{A_i^T(A_i x + b_i)}{\|A_i x + b_i\|}$.
5. Montrer ainsi que le problème dual correspondant à (9) s'écrit

$$\begin{array}{ll} \max & - \sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i \lambda_i) \\ \text{sous contraintes} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (A_i^T z_i + c_i \lambda_i) = \alpha \\ \|z_i\| \leq \lambda_i, \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right. \end{array} \quad (17)$$

Le problème dual est

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_x \alpha^T x + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\|A_i x + b_i\| - c_i^T x - d_i)$$

La solution du problème de minimisation se traduit par l'équation

$$0 = \alpha + \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\frac{A_i^T(A_i x + b_i)}{\|A_i x + b_i\|} - c_i \right)$$

Avec cette contrainte, la fonction coût se reformule alors comme

$$\begin{aligned} & \alpha^T x + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\|A_i x + b_i\| - c_i^T x - d_i) \\ &= - \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\frac{A_i^T(A_i x + b_i)}{\|A_i x + b_i\|} - c_i \right)^T x + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\|A_i x + b_i\| - c_i^T x - d_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{b_i^T(A_i x + b_i)}{\|A_i x + b_i\|} - \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \end{aligned}$$

En définissant $z_i = -\lambda_i \frac{A_i x + b_i}{\|A_i x + b_i\|}$, on obtient donc que la fonction objectif s'écrit

$$-\sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i \lambda_i) \quad (18)$$

sous les contraintes

$$0 = \alpha - \sum_{i=1}^N (A_i^T z_i + c_i \lambda_i) \quad (19)$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \|z_i\| \leq \lambda_i \quad (20)$$

6. On définit le saut de dualité associé à la différence entre le problème primal et le problème dual comme

$$\eta(x, z, \lambda) = \alpha^T x + \sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i \lambda_i) \quad (21)$$

où x solution de (9) et (z, λ) solution de (17).

- (a) Montrer que $\eta(x, z, \lambda) = \sum_{i=1}^N [(A_i x + b_i)^T z_i + (c_i^T x + d_i) \lambda_i]$.
(b) En déduire $\eta(x, z, \lambda) \geq 0$.

$$\begin{aligned}\eta(x, z, \lambda) &= x^T \sum_{i=1}^N (A_i^T z_i + c_i \lambda_i) + \sum_{i=1}^N (b_i^T z_i + d_i \lambda_i) \\ &= \sum_{i=1}^N [(A_i x + b_i)^T z_i + (c_i^T x + d_i) \lambda_i] \geq \sum_{i=1}^N [-\|A_i x + b_i\| \|z_i\| + (c_i^T x + d_i) \lambda_i] \geq 0\end{aligned}$$

- (c) Que peut-on conclure si $\eta(x, z, \lambda) = 0$?

Le problème est convexe. Sous réserve que les contraintes soient qualifiées en un minimum, il existe donc un point selle correspondant et il vérifie $\eta(x, z, \lambda) = 0$. On peut donc chercher un tel point pour résoudre le problème de minimisation.

7. On définit la barrière logarithmique

$$\gamma(u, t) = \begin{cases} -\ln(t - \|u\|^2) & \text{si } t > \|u\|^2 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (22)$$

Pour toutes solutions x et (z, λ) strictement faisables de (9) et (17), cad respectant strictement les contraintes inégalités des problèmes respectifs, on considère la fonction

$$\psi(x, z, \lambda) = (2N+1) \ln(\eta(x, z, \lambda)) + \sum_{i=1}^N [\gamma(u_i, t_i) + \gamma(z_i, \lambda_i)] - 2N \ln N \quad (23)$$

avec $u_i = A_i x + b_i$ et $t_i = c_i^T x + d_i$. On admet le résultat suivant :

$$\eta(x, z, \lambda) \leq \exp(\psi(x, z, \lambda)) \quad (24)$$

et on se propose de minimiser la fonction ψ à partir d'un point initial (x^0, z^0, λ^0) strictement faisable. Justifier que cette méthode permet de résoudre le problème (9) et porte le nom de "méthode primaire-duale par points intérieurs".

On a par (24) que η converge vers 0 si ψ converge vers $-\infty$. Ainsi, minimiser ψ revient à chercher les points selles du problème et donc un point minimum candidat selon la question précédente. Par ailleurs, par définition de la barrière logarithmique, en partant d'un point strictement faisable, on va itérer et obtenir un autre points strictement faisable. D'où le nom de points intérieurs donné à cette méthode. Le caractère primal-dual est lui lié au fait que cette méthode considère la différence entre les deux problèmes, le saut de dualité.

Cours « Questions Sociopolitiques et Environnementales »

Examen final 2020

Merci d'indiquer en haut de votre copie le groupe de PC auquel vous appartenez.

PARTIE A - « Info ou intox ? »

Voici une liste d'affirmations concernant des théories ou des approches de sciences sociales qui vous ont été présentées dans le cours d'amphi de QSE. Il vous est demandé, pour chacune de ces affirmations, de dire si elle est correcte ou non. A chaque fois, vous justifierez votre position : si l'affirmation vous semble vraie (ou plutôt vraie), vous donnerez des détails complémentaires ; si elle vous semble fausse (ou plutôt fausse), vous en donnerez les raisons et/ou vous proposerez une formulation corrigée plus adéquate.

Vous pouvez aborder les questions dans l'ordre qui vous convient.

1	L'hypothèse de base formulée par l'anthropologie culturaliste est celle d'une universalité des faits culturels.
2	L'histoire de la révolution de 1848 fournit une illustration emblématique de la lutte de classe bipolaire, opposant capitalistes et prolétariat dans le modèle marxiste.
3	En sociologie, la notion d'arène désigne un espace dans lequel se déroulent des luttes de pouvoir entre les acteurs sociaux.
4	La sociologie Durkheimienne met en évidence le paradoxe selon lequel des croyances religieuses infondées peuvent néanmoins exercer un pouvoir fort dans les rapports sociaux.
5	Dans l'approche de Bourdieu, seulement certains objets de la culture peuvent être utilisés pour repérer l'appartenance d'une personne à un groupe social.
6	Un des objectifs de la sociologie des sciences est d'opérer une démarcation entre les connaissances scientifiques et les croyances infondées.
7	L'analyse structuraliste permet de repérer l'ensemble des mythes qui émanent d'un mythe de départ et traduisent ainsi différentes variantes d'un même fait culturel.
8	L'analyse de la sociologie pragmatique est basée sur une grammaire des rapports de force dans la société
9	Les démarches de l'anthropologie fonctionnaliste n'apportent pas d'outil particulier pour étudier l'organisation des sociétés coloniales.
10	Le travail de Bourdieu montre que les gens se distinguent en société soit par leur capital économique soit par leur capital culturel.
11	La pensée structuraliste permet de rattacher des mythes abstraits à l'organisation concrète de la vie sociale dans les sociétés non occidentales.
12	D'après l'analyse sociologique, les controverses donnent généralement naissance à des problèmes publics.
13	Dans l'analyse de Marx, le conflit entre classes sociales est un phénomène qui

	n'apparaît pas au XIXème siècle et qui a des antécédents dans l'histoire.
14	Selon l'intellectuel américain Walter Lippman, le fonctionnement sain de la démocratie requiert que les citoyens puissent acquérir des compétences sur les sujets politiques d'intérêt général.
15	Selon la sociologie pragmatique, chaque situation sociale où s'exerce la critique relève principalement d'une grandeur spécifique.
16	Dans l'analyse Durkheimienne, la croyance religieuse relève d'un effet principalement psychologique.

PARTIE B – Commentaire de deux tribunes parues dans la presse

Tribune 1

L'intelligence artificielle est-elle porteuse de menaces pour les sociétés contemporaines ? Dans la tribune ci-dessous, Christophe Bourguignat propose une réflexion sur cette question marquée par la tradition d'analyse des problèmes publics.

Dans un premier temps, vous résumerez l'argumentation de cette tribune en quelques phrases. Dans un deuxième temps, vous formulerez une série de commentaires concernant cette analyse. Quelles sont les différentes arènes qu'envisage l'auteur au fil de son raisonnement ? Comment peut-on les caractériser et décrire leur rôle dans la structuration de ce problème ? Quels autres acteurs que ceux évoqués par l'auteur pourraient également être évoqués ici ?

Intelligence artificielle : « Remettre à leur juste place les thèses apocalyptiques »

Par Christophe Bourguignat

La controverse de Valladolid, en 1550 en Espagne, a opposé théologiens et juristes sur la légitimité morale de la conquête du Nouveau Monde. La capacité de l'IA à « transmuer » notre société doit faire l'objet de la même attention, plaide Christophe Bourguignat, dirigeant d'une société informatique, dans une tribune au « Monde ».

Publié dans Le Monde le 15 novembre 2019 à 10h13 -

La Chine a accueilli du 29 au 31 août la deuxième édition de la Conférence mondiale sur l'intelligence artificielle. Point d'orgue de l'événement : un débat entre Jack Ma, fondateur d'Alibaba, et Elon Musk, patron de Tesla. Pendant plus d'une heure, les deux entrepreneurs ont confronté leur vision de l'IA. Si le premier s'est montré enthousiaste, le second n'a pas hésité à qualifier cette technologie de « menace ».

Par sa nature et son objet, cet événement semblait offrir une version technologique et aseptisée de la controverse de Valladolid – la confrontation historique entre théologiens, juristes et administrateurs du royaume d'Espagne sur les modalités de la conquête du Nouveau Monde – avec Jack Ma et Elon Musk en avatars modernes de Bartolomé de Las Casas et Juan de Sepulveda, les deux protagonistes de l'époque. Evidemment, le développement de l'intelligence artificielle ne possède pas la même charge dramatique. Mais par sa capacité à bouleverser les équilibres internationaux, reconfigurer le droit

social, réévaluer le périmètre du salariat, catalyser l'innovation médicale – bref à transmuer le monde – l'IA s'impose comme un fait géopolitique, social et économique total.

Déborder du cadre de la raison et de la logique

Malheureusement les débats dont elle fait l'objet tendent à déborder du cadre de la raison et de la logique pour emprunter au fantasme et à la science-fiction. Par exemple, lors de sa confrontation avec Jack Ma, Elon Musk n'a pas hésité à faire dans l'outrance en évoquant un futur comparable au film Terminator où les machines considéreront les humains comme « lents et stupides ». D'ailleurs l'entrepreneur sud-africain n'est pas le seul à recourir à cette rhétorique irrationnelle. Celle-ci se retrouve notamment dans les prises de parole de Ray Kurzweil, directeur de l'ingénierie de Google. Il y a deux ans, en marge du festival SXSW, celui-ci fixait à 2029 le moment où l'intelligence artificielle dépassera l'intelligence humaine. La fameuse singularité.

Quand on prend en compte l'histoire de l'intelligence artificielle, cette dialectique technofantastique n'a rien de surprenant. Dès les années 1950, parallèlement au développement de l'intelligence artificielle, le mathématicien John Von Neumann théorisait le concept de singularité. Une décennie plus tard, le statisticien Irving John Good surenchérissait en envisageant l'émergence d'une machine ultra-intelligente laissant loin derrière elle l'intelligence de l'homme. Finalement, c'est l'écrivain et professeur d'informatique Vernor Vinge qui opérera la jonction entre technologie et science-fiction grâce à ses trois romans – True Names (1981), La Captive du temps perdu (1986) et Un feu sur l'abîme (1992) – mettant en scène des groupes d'individus face au spectre de la singularité. C'est dans cette filiation qu'Elon Musk, Ray Kurzweil, Laurent Alexandre et Huang Fengquan s'inscrivent.

Ensemble, ces vedettes de la tech produisent un brouhaha tel qu'elles parviennent à saturer une grande partie de l'espace médiatique ; rendant peu audibles des experts comme Yann Le Cun et Luc Julia, pourtant au cœur des avancées qui bouleversent notre vie quotidienne. Pour autant, faudrait-il les contraindre au silence ? Certainement pas.

Par la controverse

→ les vedettes de la tech.

Le débat est consubstantiel à l'histoire de la science. C'est grâce à cela, entre autres, que Copernic a conduit les intellectuels de son temps à troquer le géocentrisme pour l'héliocentrisme. C'est également par la controverse que Galilée, Pasteur ou Newton ont poussé leurs feux pour faire évoluer leur discipline. Aujourd'hui, à une époque où la discussion scientifique dépasse le périmètre des sachants pour intégrer le grand public, c'est la confrontation de faits, d'idées et d'expériences qui doit prévaloir.

Les citoyens sont soumis à un large éventail d'articles, de reportages et d'émissions consacrés à l'intelligence artificielle et à son impact dans leur quotidien. On y décrit l'optimisme – notamment dans le cas de la santé – mais aussi les craintes suscitées. Dans le domaine de l'emploi par exemple. Des préoccupations auxquelles, nous, spécialistes de l'intelligence artificielle, devons répondre. Pas seulement lors de colloques, de conférences ou de symposiums réservés à un cénacle, mais à l'occasion d'événements publics impliquant les citoyens.

Comme l'expliquait le philosophe américain John Dewey (1859-1952), « le changement arrive par l'intelligence collective des publics ». C'est précisément dans cette perspective inclusive et horizontale que nous devons nous inscrire si nous souhaitons que les citoyens s'emparent de l'intelligence artificielle en renvoyant à leur juste place les théories apocalyptiques émises par certains professionnels du buzz.

Christophe Bourguignat est PDG et fondateur de Zelros, société de conseil en intelligence artificielle appliquée au secteur de l'assurance

Tribune 2

Dans la tribune ci-dessous, les sociologues Gilles Laferté et Serge Paugam examinent la manière dont le mouvement des gilets jaunes peut nous amener à repenser le rôle des classes sociales dans la société française.

Vous formulerez quelques commentaires concernant ce texte, en mettant en évidence la manière dont ces propositions peuvent conduire à enrichir un ou des modèles d'analyses sociologiques présentés dans le cours d'amphi de QSE. (Un résumé du texte n'est pas demandé ici).

Après les gilets jaunes, repenser les classes sociales

Par Gilles Laferté et Serge Paugam.

La révolte contemporaine ravive les conflits de classes que certains croyaient éteints. Mais cette lutte ne reprend pas le chemin du passé, et pour l'analyser, il faut tenir compte de la nouvelle géographie des rapports sociaux, comme du processus de désintégration sociale dont on avait sous-estimé la gravité.

Si le mouvement des gilets jaunes est l'expression de l'affaiblissement des corps intermédiaires est-il pour autant le signe d'un déclin des classes sociales ? Ce mouvement, on l'a souvent souligné, semble, en effet, le réceptacle de revendications éparses et peu coordonnées, exprimées par des personnes au statut socioprofessionnel différent et qui ne partagent pas forcément les mêmes orientations politiques et les mêmes aspirations. Cet ensemble disparate peut donner l'impression d'une non-classe sociale et renforcer les arguments de celles et ceux qui défendent, depuis le milieu des années 90, la thèse de « la mort des classes ». Nous pensons au contraire que ce mouvement est avant tout le signe d'un renforcement des conflits de classe qu'il convient de saisir et d'interpréter à partir d'un cadre analytique renouvelé.

Les polarisations et la distance spatiale

La concentration des richesses se marque profondément dans le territoire. En France, historiquement, cette richesse est à Paris qui accélère son embourgeoisement malgré des décennies de crises économiques. Cette richesse réside aussi dans les grandes métropoles régionales, les zones du littoral et frontalières, dans les campagnes créatives et bourgeoises, géographie qui crée moins un centre et une périphérie que des espaces de circulation différenciés selon les groupes sociaux avec des zones de plus en plus étendues peu accessibles au plus grand nombre, avec un coût du logement et des

services prohibitifs, des écoles à double vitesse, coiffées d'une beauté paysagère, architecturale et culturelle qui signifie la supériorité sociale de ces mondes bourgeois, connectés aux distinctions sociales internationales. Manifester au cœur du Paris bourgeois pour le brûler, faire tomber la grille des Tuilleries témoigne de cette colère contre le cœur et sa beauté désormais inaccessible, symbole esthétique d'une domination sociale et spatiale. Si l'indicateur de 43 % de cadres à Paris pour seulement 7 % dans les zones rurales est frustré par rapport à la différenciation réelle des espaces, il indique déjà une partie du problème. Les ouvriers et les employés forment 29% et 28% de la population active des espaces ruraux, loin devant les agriculteurs à seulement 5%. Alors que les sociologues ont cru hier que la pénétration de l'Etat et des marchés allait homogénéiser socialement le territoire enfouissant la ruralité avec la fin des paysans, on se retrouve avec des polarisations sociales qui redoublent la question sociale par la distance spatiale. La bourgeoisie et les classes moyennes supérieures se battent pour se maintenir au cœur des espaces les plus distinctifs, surpasant leurs logements et les services, s'offrant le TGV et des mobilités ponctuelles pour encadrer une usine, occuper un poste de direction, profiter des espaces récréatifs des campagnes, mais ne s'y inscrivent plus dans la durée. Inversement, exclues des zones les plus valorisées, les classes moyennes et populaires ont accepté cet éloignement géographique à l'aune du rêve pavillonnaire, c'est-à-dire de l'éloignement de la pauvreté urbaine par l'accès à la propriété. Venir toucher à leur mobilité, prix renversé de la «ghettoisation des riches», après leur avoir fait subir la fermeture de nombreux services publics, c'est encore un peu plus couper le projet politique du vivre- ensemble, les enfermant dans un entre-soi automobile et pavillonnaire. Il faut comprendre ces mécanismes de la concentration des richesses qui excluent spatialement tous ceux qui hier encore pouvaient accéder au cœur des valeurs dominantes. Le travail de légitimation de la domination sociale en France est historiquement passé par la «démocratisation» scolaire, modèle méritocratique qui, sur le papier, par une école massivement gratuite, laissait théoriquement accessible à tous les diplômes et les institutions culturelles les plus distinctives. Or, aujourd'hui, ce modèle est remis en question, et le lieu de résidence devient une variable sociale décisive puisqu'elle dit les milieux sociaux fréquentés, se montre prédictive de l'accès à l'éducation, à la culture, à la santé, et renforce les mécanismes de la reproduction sociale des classes supérieures. Autant sur la scène du travail que de la résidence, les espaces ruraux contemporains sont explosifs parce qu'au cœur de conflits sociaux (Notre-Dame-des-Landes, Sivens, bonnets rouges, gilets jaunes...) où se mêlent des visions et des projets éclatés selon des usages productifs ou récréatifs des campagnes mais socialement bien situés. Les groupes sociaux et les rapports de domination sont spatialisés, la sociologie ne peut plus être aveugle de cette nouvelle géographie.

Une intégration sociale inégale

Cette nouvelle spatialisation de la question sociale oblige de même à (re)placer la question de l'intégration au cœur de l'analyse sociologique. La notion d'intégration désigne un processus général que l'on peut appréhender à partir des liens qui attachent les personnes entre elles et à la société. Or, ce processus s'avère désormais très inégal. Dans la société salariale des Trente Glorieuses, les classes sociales étaient en lutte pour le partage des bénéfices de la croissance, mais elles étaient globalement intégrées au système social, et les conflits sociaux participaient de ce processus d'intégration. Aujourd'hui, non seulement les capitaux économiques et culturels sont répartis de façon

inéquitable, mais les liens sociaux sont de force et d'intensité disparate. Au cours des dernières décennies, ceux-ci se sont fragilisés pour beaucoup. Le lien au monde du travail s'est affaibli sous l'effet de la précarisation professionnelle et du risque du chômage, plus fort en bas de la société qu'en haut. Se fragilisant ce dernier contribue à en déstabiliser d'autres : le lien entre générations, le lien conjugal et familial, le lien aux structures associatives, le lien aux institutions locales et nationales notamment. Le mouvement des gilets jaunes est l'expression de ce délitement cumulatif des liens sociaux dont les effets sont forts dans tous les lieux marqués par une perception vive d'abandon social, institutionnel et politique. Ce mouvement exprime une colère qui provient d'un ensemble apparemment hétérogène composé de salariés du privé intégrés mais au revenu modeste et astreints à de longs déplacements pour conserver leur emploi, d'agents peu valorisés des services publics alors qu'ils exercent des missions fondamentales dans le domaine de l'éducation, de la santé, du soin aux personnes âgées dépendantes, d'artisans, commerçants ou petits entrepreneurs à la peine, de retraités ayant le sentiment d'avoir beaucoup travaillé et qui restent pourtant proches du seuil de pauvreté. Cette colère gagne aussi une partie de la jeunesse dont l'avenir reste incertain. Elle est le signe d'une revanche des invisibles, ceux qui n'en peuvent plus de ne pouvoir joindre les deux bouts, qui se sentent méprisés, notamment par les élites si indifférentes à leur sort, et dont les revenus n'ont cessé d'augmenter. Il s'agit d'un rapport de classes que l'on peut désormais appréhender, certes, à partir de la catégorie socioprofessionnelle et des modes de vie, mais aussi à partir des différents paliers de l'intégration. En deçà de l'intégration assurée caractérisée par le cumul des avantages et la force des liens qui attachent au système social dominant, se situe, un palier en dessous, l'intégration fragilisée qui condamne celles et ceux qui en font l'expérience, non pas à la marginalité absolue, mais au risque permanent de la perte des protections élémentaires et au déni de reconnaissance. Ce palier ne signifie pas la rupture des liens, mais cette perspective peut faire plonger dans une angoisse existentielle, correspondant sans doute à l'expérience quotidienne des gilets jaunes. Au palier encore en dessous, se trouvent celles et ceux pour qui l'un ou l'autre des liens sociaux est bien rompu et qui sont contraints de trouver des compensations grâce à des ressources locales, comme l'économie informelle, ou de survivre au jour le jour dans la grande précarité. Ces différents paliers existent dans ces mondes ruraux éclatés dans lesquels l'isolement social et la détresse psychologique expliquent, du moins partiellement, l'augmentation des taux de suicide. Les gilets jaunes sont pris en tension entre cette intégration assurée à laquelle ils aspirent sans y parvenir et cette intégration marginalisée qui les guette, autrement dit entre les classes supérieures ou moyennes supérieures et les très pauvres.

La révolte sociale contemporaine ravive ainsi les conflits entre classes sociales. Mais cette lutte ne reprend pas le chemin du passé. Désormais, les classes sociales sont plutôt des homologies de positions et en cela, elles peuvent toujours se mobiliser quand les dominations ressenties se révèlent trop brutales provoquant cette colère non organisée. Pour les analyser, il faut tenir compte de la nouvelle géographie des rapports sociaux, mais aussi du processus de désintégration sociale dont on avait probablement sous-estimé la gravité, notamment dans les mondes ruraux, ce qui constitue désormais un défi à relever pour les chercheurs, mais aussi pour la société dans son ensemble.

Par Gilles Laferté est directeur de recherches à l'Inra et Serge Paugam est directeur de recherches au CNRS, directeur d'études à l'EHESS

Nom et Prénom : ...CAPÉRAA...Damien
 Date : 22 janvier 2020... Promotion : P19
 Examen de : ...QSE : Questions Sociales politiques et...
 ...Environnementales.

Feuille n° 1/ 2

Group de PC:4, Marie Alauzen

PARTIE A : « Info ou intox ? »

- 1) FAUX: les faits culturels, tels que l'anthropologie culturelle les conçoit, sont spécifiques à chaque société, entre lesquelles il existe une multitude de petites différences. Ce qui est universel, en revanche, c'est le déterminisme culturel, i.e le fait qu'une culture rejaillit sur tous les membres de la société qui l'a caractérisée.
- 2) PLUTÔT VRAI: la révolution de 1848 est effectivement un exemple emblématique d'une lutte de classe bipolaire, mais elle oppose l'aristocratie financière à une alliance fragile entre les blutriers, la petite bourgeoisie et la grande bourgeoisie industrielle, et non pas les "capitalistes" contre le prolétariat.
- 3) FAUX: les arènes sont des espaces publics où les problèmes sociaux se diffusent, se transforment // via des formes d'argumentation et de vérification. Il n'y a pas de lutte de pouvoir entre les acteurs d'une arène clairement définie.
- 4) PLUTÔT FAUX: Durkheim met effectivement en évidence les forces (physiques et morales) qui exercent les pressions sur les pratiquants, mais il ne s'agit d'un paradoxe que pour les Occidentaux qui dénient les croyances irrationnelles. Durkheim explique ce effet par la force du "social" et les phénomènes de groupe.

- 5) FAUX: Pour Bourdieu, tous les objets peuvent mettre en évidence l'appartenance à un groupe social. Cette idée fait cependant partie des critiques faites à Bourdieu car elle ne prend pas en compte les pratiques de consommation.
- 6) FAUX: Il s'agit d'un des objectifs de la "sociologie des scientifiques", ou plus généralement de la philosophie des sciences, qui se sont développées avant les années 1970 et l'émergence du champ STS dont fait partie la sociologie des sciences
- 7) PLUTÔT FAUX: L'analyse structuraliste peut effectivement rendre compte de différentes variantes d'un fait culturel mais pas en tant qu'elles proviennent d'un même fait original, ce qui serait une perspective évolutionniste. Il s'agit plutôt d'exhiber la structure de l'ensemble des mythes (pour Levi-Strauss), lesquels sont largement intriqués entre eux.
- 8) PLUTÔT FAUX: La sociologie pragmatique cherche une grammaire, non pas des rapports de force, mais des formes d'argumentation et de justification qui la génèrent.
- 9) FAUX: L'anthropologie fonctionnaliste appartient à l'étude des sociétés coloniales. L'observation ethnographique, qui consiste à se rendre sur place pour observer directement ces sociétés (opposition à "l'anthropology").
- 10) PLUTÔT FAUX: C'est la donnée conjointe du capital économique et du capital culturel (entre autres) qui permet à un acteur de se distinguer en société.
- 11) FAUX: La pensée structuraliste ne cherche pas à rattacher les productions intellectuelles (comme les mythes) à l'organisation des sociétés ^{coloniales}, ce qui serait une perspective fonctionnaliste. Elle vise plutôt à exhiber la structure de l'ensemble des mythes (jeux de renvoi, d'opposition, de similitudes, etc...), et les codes structuels qui régissent une culture de façon générale.

- 12) VRAI : les controverses peuvent donner naissance à des problèmes publics, mais pas nécessairement. Par exemple, une controverse qui naît dans le milieu scientifique peut ne pas sortir de la sphère privée scientifique, et donc ne pas devenir un problème public.
- 13) PLUTÔT VRAI : Marx conçoit la notion de classe sociale comme un ensembles ayant une ambition de validité générale. La lutte des classes, qui est l'opposition entre plusieurs classes sociales pour l'appropriation des moyens de production, est donc aussi un phénomène général a priori. Cependant, Marx s'intéresse beaucoup aux événements du XIX^e siècle et mentionne peu les antécédents de la lutte des classes.
- 14) FAUX : Pour Lippman, l'objet de la démocratie est de mettre en place des procédures permettant d'identifier des acteurs compétents sur les problèmes publics, qui sont des questions complexes qui dépassent le citoyen. Le citoyen lui-même n'a pas vocation à acquérir des compétences sur les sujets d'intérêt général, mais plutôt à apprendre à identifier le parti de ceux qui ont ces compétences.
- 15) PLUTÔT FAUX : Dans le cas général, une situation sociale où s'exerce le critique ne fait pas intervenir qu'une seule grandeur (elle peut arriver), mais plusieurs : les acteurs sociaux peuvent agir dans des rôles différents (comme la cité marchande et la cité domestique) et donc basculer d'une grandeur à l'autre.
- 16) PLUTÔT FAUX : La voyance religieuse s'exerce sur l'individu non seulement par des forces morales, psychologiques, mais aussi physiques, comme par exemple lors des cérémonies religieuses des tribus australiennes étudiées par Durkheim, qui sont le siège d'une effervescence collective et portées d'une grande violence (combats entre individus et groupes, pratiques sexuelles normalement prohibées, etc..)

PARTIE B - Commentaire de deux tribunes

Tribune 1

RÉSUMÉ

L'auteur de l'article, un dirigeant de société informatique, constate que le débat sur l'intelligence artificielle tend à ne plus suivre l'exposition rigoureuse des faits et l'argumentaire rationnel propre à la sphère scientifique. Il laisse place à des convocations régulières de l'imaginaire fantastique de la science-fiction, y compris lors des grands débats médiatisés entre les dirigeants de l'industrie technologique. Cet univers fantasmé introduit des images apocalyptiques, souvent élaborées des réalités scientifiques, et contribue à saturer la sphère médiatique d'informations éparses qui font perdre leur visibilité aux experts et brouille les citoyens. Dans ce contexte, et parce que l'intelligence artificielle est un domaine qui affecte tous les pans de la société, l'auteur estime que nous devons favoriser un dialogue intelligent entre tous les publics pour que les citoyens s'emparent de ce sujet.

COMMENTAIRE

L'auteur mentionne dans son raisonnement plusieurs arènes et détaille les interactions entre celles-ci. Premièrement, l'arène scientifique, dont font partie les experts de l'intelligence artificielle : elle produit des raisonnements logiques et rationnels, fondés sur une étude sérieuse du sujet. Les médias constituent l'arène à travers laquelle ces idées peuvent se diffuser et atteindre le grand public, qui constitue une autre arène et désigne l'ensemble des citoyens. Cependant, ces idées sont en concurrence, dans les canaux des médias, avec les récits produits par une arène que l'on pourrait qualifier d'artistique ou littéraire, ie celle qui rassemble les écrivains et les auteurs qui exposent une vision parfois différente de celle proposée par les scientifiques. L'auteur montre que cette arène artistique a tendance à gagner du terrain sur l'arène scientifique.

Nom et Prénom : ... CAPÉRAA... Damien
Date : 22 janvier 2020... Promotion : ... P19
Examen de : ... QSE

Feuille n° 2 / 2

(en termes de visibilité publique), et ce notamment à cause des membres de l'arène économique et industrielle (dont font partie les dirigeants de la technologie de l'intelligence artificielle) qui, en caricaturant les récits produits par l'arène artistique, rend l'arène scientifique peu visible. Par là-même, l'auteur montre que les grands dirigeants de cette industrie sont très écoutés et médiatisés.

Par ailleurs, l'auteur n'évoque pas l'arène des institutions publiques (ou de l'État), bien qu'il semble avoir un rôle à jouer dans ce débat. Les arènes judiciaires, par exemple, pourraient apporter leur point de vue sur la légitimité juridique de certains projets portant sur l'intelligence artificielle.

Tribune 2

Cette tribune permet d'enrichir plusieurs modèles évoqués dans le cours de QSE.

Premièrement, l'auteur détaille le processus de spatialisation des groupes sociaux et des rapports de domination. Il différencie les classes sociales en décrivant leurs habitudes et leurs modes de vie, qui font penser à la notion d'habitus développée par Pierre Bourdieu dans la distinction. Par exemple, l'habitude prise par les classes les plus aisées de se rendre en campagne sans s'y inscrire durablement s'apparente à une forme de comportement spécifique, de goût, d'un certain groupe. D'ailleurs, la notion du goût, qui est centrale chez Bourdieu dans l'établissement des classements hiérarchiques nettement dans cet article : le goût des classes supérieures est d'aller vivre à Paris, dans des logements chics et situés au centre de la ville.

Deuxièmement, les idées relatives à la lutte des classes, développées par Marx, sont explicitement mentionnées dans l'article. Si, chez Marx, cette lutte avait pour but l'appropriation des moyens de production et était donc tournée vers l'économie, celle que présente l'auteur inclut aussi une forte dimension sociale avec la notion de "désintégration sociale". Malgré tout, l'article détaille clairement les divisions profondes au cœur de la société française, entre d'une part les gagnants de la modernité, ic les classes qui s'enrichissent malgré les crises et se déplacent vers le centre des grandes villes, et d'autre part les classes populaires, qui vivent dans les campagnes mais aussi dans les zones urbaines. Cette division est également au cœur de la vision marxiste de la société du XIX^e siècle, qui oppose plusieurs groupes sociaux clairement identifiés.

Finalement, les notions vues en cours relatives à la démocratie interviennent également dans l'article, avec par exemple le sentiment d'abandon social et institutionnel perçu par les classes les moins favorisées qui renvoie à l'idée développée par Dewey, selon laquelle la démocratie devrait favoriser une intégration de tous les publics dans la résolution des problèmes publics.

Fiche de correction individuelle

QSE 2019-2020

Nom	CAPERAA
Prénom	Damien
PC	4
Exposé	
Groupe exposé	31
Ouvrage exposé	Gabrielle Hecht(2004) Le rayonnement de la France: énergie nucléaire et identité nationale après la Seconde guerre mondiale, Paris, La Découverte.
Note exposé (sur 10)	9
Examen écrit	
Info/intox (sur 32)	27
Note partie A (sur 10)	8,4
Trib. 1 résumé (sur 5)	5
Trib. 1 commentaire (sur 5)	4
Trib. 2 commentaire (sur 5)	5
Note partie B (sur 10)	9,3
Note totale écrit (sur 20) (=A + B)	17,8

Appréciation

Dans le premier exercice, vous montrez que vous avez bien travaillé le cours en répondant avec justesse aux questions. Il vous manque quelques éléments de précision (comme la notion de délitre fondé, ou la mention que ces anthropologues n'ont pas tenu compte du fait colonial dans leurs écrits). Paradoxalement pour un étudiant qui s'est intéressé de près à Bourdieu, votre seule erreur est à la question sur La Distinction : ce que Bourdieu montre dans les analyses de la distribution des préférences c'est que certains objets culturels sont moins classants que d'autres. Dans le second exercice, vous faites un excellent résumé de la première tribune et relevez avec raison le statut de l'auteur, statut que vous mentionnez ensuite parmi les acteurs de l'arène économique et industrielle dans le commentaire. Le commentaire est très juste et fait une proposition audacieuse en identifiant une arène artistique et littéraire dont les récits sont convoqués par l'arène industrielle. Je parlerai davantage de références culturelles et artistiques, mais c'est un détail. Enfin, bravo pour le dernier commentaire qui témoigne d'une très bonne compréhension des notions d'habitus, de goût, de classe sociale et parvient à lier ces enjeux avec un point sur la démocratie.

Note finale

Participation	1
Note finale (sur 20)	19

Détail des notes à la partie A du devoir sur table

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	Q12	Q13	Q14	Q15	Q16
2	2	2	1	0	2	2	2	1	2	1,5	2	1,5	2	2	2

QSE 2019-2020 – Évaluation de l'exercice d'exposé d'ouvrage

Groupe n°	41
Ouvrage	<i>Le Rayonnement de la France</i>
Tuteur ouvrage	Marie Alauzen
Élèves du groupe	
Nom, Prénom	Présente à la réunion de préparation (oui/non)
BOUTROUELLE, Mathis	oui
CAPERAA, Damien	oui
THEALLER, Alexandre	oui
1. Lecture et compréhension de l'ouvrage au stade du rendez-vous de préparation	
Note (1 à 5)	4/5
Commentaires :	
<p>Nous avions fixé le rendez-vous très en amont de la séance et vous êtes venus en ayant tous trois lu l'ouvrage <i>in extenso</i> et avez proposé un plan et un contenu d'exposé très détaillé. À tous égards, c'est très bien, je vous félicite de votre sérieux. Vos réponses aux questions témoignaient d'une compréhension globale, mais pas suffisamment précise : vous manquiez de rigueur dans la définition des notions clefs (régimes technologiques, rayonnement, grandeur, francité) et avez résumé à grand trait les chapitres sans tenir compte de leur place dans l'argumentation de l'ouvrage ni de leur statut (p. ex. en reprenant à votre compte les chiffres des sondages).</p>	
<p>L'exposé que vous avez préparé était un bon résumé des chapitres, mais il vous reste du travail pour mettre en lumière l'argumentation historique (p. ex. le régime technopolitique du CEA n'est pas le même sous la IV^e république et dans les années 60), mobiliser le répertoire descriptif de l'autrice (p. ex. flexibilité technologique ou dramaturgie) et choisir bon niveau de granularité pour que la classe comprennent le propos, sans être noyée dans le détail des développements. L'exposé que vous m'envoyez quelque chose plus tard témoigne d'un retravail sérieux.</p>	
2. Déroulement de l'exposé	
Note (1 à 5)	5/5
Commentaires :	
<p>Vous avez réalisé un très bon exposé : vous connaissez tous trois bien l'ouvrage, vous y rapportez précisément et mettez en avant les principaux fils argumentatifs de G. Hecht sur les modes d'existence du nucléaire, entre les régimes technopolitiques portés par EDF et le CEA, des réacteurs, des acteurs (travailleurs, syndicats, habitants, scientifiques, personnels politiques, etc.), tout en tenant bien compte des différents espaces où se joue le rayonnement et de la temporalité propre à la guerre froide et la vie politique française. Vos répondez de manière nuancée et rigoureuse aux questions de la classe, c'est très bien.</p>	
<p>Sur la forme, l'exposé est bien construit, le support est clair et illustré et vous vous répartissez équitablement la parole. Bravo !</p>	
Note globale (sur 10)	9/10

Examen de Physique I

Relativité et Mécanique Quantique

Vendredi 8 novembre 2019

Durée : 2h30.

Documents autorisés : livre de Physique quantique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice.**

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs en justifiant vos réponses. Les applications numériques sont demandées en ordre de grandeur, à un facteur 2 près. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 24/10/6 pour une note sur 40.

Constantes :

constante de Planck : $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.

charge absolue de l'électron : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, masse de l'électron : $m_e = 9,08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c², masse du nucléon $M_n \approx 1$ GeV/c²

$$\text{On donne également l'intégrale sans dimension : } \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1 États résonants

On considère une particule quantique de masse m dans une double barrière dont le potentiel $V(x)$ est défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{si } x < -a - b \\ V(x) = V_0 & \text{si } -a - b \leq x \leq -a \\ V(x) = 0 & \text{si } |x| < a \\ V(x) = V_0 & \text{si } a \leq x \leq a + b \\ V(x) = 0 & \text{si } x > a + b \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{région 1} & \\ \text{région 2} & \\ \text{région 3} & \\ \text{région 4} & \\ \text{région 5} & \end{array}$$

V_0 étant une valeur de potentiel positive (la « hauteur de barrière »), et a et b étant deux longueurs (respectivement la taille du puits entre les deux barrières et l'épaisseur des barrières de potentiel qui délimitent le puits). L'objectif est de chercher des états propres du système. On introduit en outre la quantité k_0 telle que :

$$k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

- Quelle est la dimension de la quantité k_0 ? Comment peut-on l'interpréter physiquement? Que vaut l'inverse de k_0 pour un électron avec une hauteur de barrière $V_0 = 4$ eV? (On demande une application numérique en ordre de grandeur, à un facteur deux près).

2. On s'intéresse aux états stationnaires $|\psi\rangle$ du système (pas forcément normalisables). Écrire l'équation satisfaite par ces états, puis traduire cette équation en une équation par région de l'espace portant sur la fonction d'onde $\psi(x)$ correspondante.
3. On commence par chercher des états stationnaires dont l'énergie E est inférieure à V_0 . On pose $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ et $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$. Pourquoi peut-on chercher une fonction d'onde $\psi(x)$ paire ou impaire ? Montrer que l'on peut chercher un état stationnaire en posant :

$$\begin{cases} \psi(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} & \text{si } |x| \leq a \\ \psi(x) = A_4 e^{\alpha x} + B_4 e^{-\alpha x} & \text{si } a \leq x \leq a+b \\ \psi(x) = A_5 e^{ikx} + B_5 e^{-ikx} & \text{si } x \geq a+b \end{cases}$$

Comment se traduit la condition que la fonction d'onde est paire ? Impaire ? Comment s'écrit alors la fonction dans la région 3 dans chacun de ces deux cas ?

4. On suppose la fonction d'onde **paire** dans les questions suivantes. Écrire les diverses conditions aux limites que doit satisfaire la fonction d'onde en fonction des coefficients A_3 , A_4 , B_4 , A_5 et B_5 .
5. Exprimer A_4 et B_4 en fonction de A_3 uniquement. Montrer qu'il existe θ tel que l'on peut écrire $k = k_0 \sin \theta$ et $\alpha = k_0 \cos \theta$. En déduire que l'on peut écrire :

$$A_4 = \lambda e^{-\alpha a} A_3 \quad \text{et} \quad B_4 = \mu e^{\alpha a} A_3$$

où l'on exprimera λ et μ en fonction de a , k et θ .

6. Réécrire alors les équations de continuité portant sur A_5 et B_5 en fonction de A_3 , λ et μ uniquement et en déduire les expressions de A_5 et B_5 en fonction de B_3 .
7. On définit la quantité T positive telle que $T^2 = \frac{|A_5|^2 + |B_5|^2}{|A_3|^2}$. Exprimer T en fonction de λ , μ , θ et du produit (αb) . Comment peut-on interpréter la quantité α ? On se place dans la limite où $\alpha b \gg 1$. Quel est le sens physique de cette limite ? Montrer qu'alors la quantité T satisfait :

$$T \approx \left| \frac{\cos((k_0 a) \sin \theta + \theta)}{\sin(2\theta)} \right| e^{\alpha b}$$

8. Quelle équation vérifie θ lorsque T s'annule ? On se place dans la limite $k_0 a \gg 1$. Montrer alors qu'au premier ordre, pour les faibles valeurs de θ , le vecteur d'onde k vérifie :

$$k_n \approx (2n+1) \frac{\pi}{2a} \quad , \quad n \text{ étant un entier positif ou nul}$$

Pourquoi peut-on parler pour ces valeurs de k pour lesquelles T s'annule d'**états résonants** ? (À titre d'exemple, on fournit en Figure 1 ci-dessous la courbe $T_1(\theta) = \left| \frac{\cos(X \sin \theta + \theta)}{\sin(2\theta)} \right|$ pour $X = 20$). Comment peut-on interpréter la divergence près de $\theta = 0$?

9. On reprend le même calcul pour les fonctions ψ **impaires**. Montrer qu'il n'est pas nécessaire de refaire tout le calcul et qu'une simple transformation permet d'obtenir rapidement la formule de $T = \sqrt{\frac{|A_5|^2 + |B_5|^2}{|A_3|^2}}$ dans ce cas, toujours pour $\alpha b \gg 1$. Pour quelles valeurs de θ la quantité T s'annule-t-elle ? Que peut-on en conclure ?

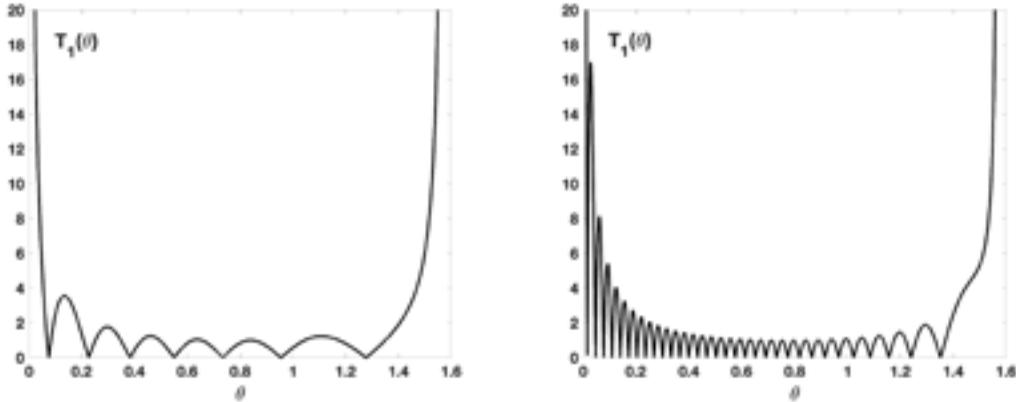


FIGURE 1 – Graphe de la fonction $T_1(\theta) = \left| \frac{\cos(X \sin \theta + \theta)}{\sin(2\theta)} \right|$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ pour les valeurs $X = 20$ (gauche) et $X = 100$ (droite).

2 Emails spatiaux

On se place dans un Univers à une seule dimension d'espace (et une de temps). Un vaisseau spatial décolle de la Terre et part vers les étoiles à la vitesse constante $v = \beta c$. Les horloges terrestre et du vaisseau sont synchronisées au moment du décollage (pris comme instant 0). Au bout d'un temps τ_1 mesuré par l'horloge de bord, l'équipage du vaisseau envoie par ondes radio un court email vers la Terre (émission supposée de longueur négligeable). La base terrestre reçoit cet email à l'instant t_1 pour l'horloge terrestre, et renvoie instantanément une réponse qui arrive sur le vaisseau à l'instant τ_2 (pour l'horloge du vaisseau), dont l'équipage renvoie instantanément une réponse qui arrive sur Terre à l'instant t_2 pour l'horloge terrestre, et ainsi de suite...

On appelle τ_n le moment de l'émission du n -ième message par le vaisseau, mesurée par l'horloge de bord (qui correspond également au moment de réception de la $(n-1)$ -ième réponse venue de la Terre), et t_n le moment de réception par la Terre du n -ième message émis par le vaisseau (et donc également le moment d'émission de la n -ième réponse par la Terre).

1. Faites un graphique spatio-temporel (à deux dimensions) de l'ensemble des échanges, en incluant le cône de lumière en $t = 0$. Quel est la valeur de t_1 en fonction de τ_1 et β ?
2. Donner l'expression générale de τ_n et de t_n , en fonction de τ_1 , β et n .
3. Les quantités $\tau_{n+1} - \tau_n$ et $t_{n+1} - t_n$ restent-elles constantes ou augmentent-elles ? Que vaut le rapport de ces deux quantités ? Que peut-on en conclure ?
4. La Terre étant supposée au bord de la Voie Lactée (notre galaxie), le vaisseau a pour mission de traverser la Voie Lactée en suivant un diamètre qui mesure environ 50000 années-lumière. Si le premier email est envoyé au bout d'une heure, combien de paires (message-réponse) seront échangées lors de la traversée totale ? (On prendra $\beta = 0,9$). Que faut-il en conclure pour les échanges d'information spatiaux ?

3 Exercice court

On considère une particule de masse m dans un puits de potentiel harmonique de potentiel $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Les deux états de plus basse énergie ont pour fonctions d'onde et énergies respectives :

$$\begin{cases} \psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{et} \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \\ \psi_1(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{et} \quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \end{cases} \quad \text{avec} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

1. On place la particule dans l'état :

$$|\psi\rangle = C (|\psi_1\rangle + |\psi_0\rangle) \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}_+$$

Quelle est la valeur de la constante C ? Si l'on mesure la position un très grand nombre de fois sur des particules toutes initialement dans l'état $|\psi\rangle$, quelle valeur moyenne de la position obtient-on?

2. On place toujours une particule dans l'état $|\psi\rangle$ initialement, mais maintenant on mesure l'énergie. Quelles valeurs peut-on obtenir à chaque mesure individuelle? Quelle est la valeur moyenne des mesures? Quel en est l'écart-type?

Corrigé de l'examen de Physique I

Relativité et Mécanique Quantique

Vendredi 8 novembre 2019

Durée : 2h30.

Documents autorisés : livre de Physique quantique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. Pas de calculatrice.

Les 3 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs en justifiant vos réponses. Les applications numériques sont demandées en ordre de grandeur, à un facteur 2 près. Les poids respectifs de chaque partie pourront être 24/10/6 pour une note sur 40.

Constantes :

constante de Planck : $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$ J.s, vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.

charge absolue de l'électron : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, masse de l'électron : $m_e = 9,08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c², masse du nucléon $M_n \approx 1$ GeV/c²

$$\text{On donne également l'intégrale sans dimension : } \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1 États résonants

On considère une particule quantique de masse m dans une double barrière dont le potentiel $V(x)$ est défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{si } x < -a - b \\ V(x) = V_0 & \text{si } -a - b \leq x \leq -a \\ V(x) = 0 & \text{si } |x| < a \\ V(x) = V_0 & \text{si } a \leq x \leq a + b \\ V(x) = 0 & \text{si } x > a + b \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{région 1} & \\ \text{région 2} & \\ \text{région 3} & \\ \text{région 4} & \\ \text{région 5} & \end{array}$$

V_0 étant une valeur de potentiel positive (la « hauteur de barrière »), et a et b étant deux longueurs (respectivement la taille du puits entre les deux barrières et l'épaisseur des barrières de potentiel qui délimitent le puits). L'objectif est de chercher des états propres du système. On introduit en outre la quantité k_0 telle que :

$$k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

- Quelle est la dimension de la quantité k_0 ? Comment peut-on l'interpréter physiquement? Que vaut l'inverse de k_0 pour un électron avec une hauteur de barrière $V_0 = 4$ eV? (On demande une application numérique en ordre de grandeur, à un facteur deux près).

Réponse :

k_0 a la dimension d'un vecteur d'onde, donc de l'inverse d'une distance (on s'en aperçoit par exemple en exprimant V_0 en fonction de k_0). C'est l'inverse de la longueur d'onde de de Broglie d'une particule qui aurait V_0 comme énergie cinétique. Pour un électron de masse environ 0,5 MeV/c², k_0 vaut :

$$k_0 \approx \sqrt{\frac{2 \times 0,5 \text{ MeV} \times 4 \text{ eV} \times (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-34})^2 \times (3 \cdot 10^8)^2}} = \frac{2 \cdot 10^3 \times 1.6 \cdot 10^{-19}}{10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} \approx 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

L'inverse de k_0 est donc environ 1 Angström. En physique du solide ou en chimie où les énergies sont de l'ordre de l'eV, on voit donc apparaître le caractère quantique des électrons à l'échelle nanométrique ou sub-nanométrique.

2. On s'intéresse aux états stationnaires $|\psi\rangle$ du système (pas forcément normalisables). Écrire l'équation satisfait par ces états, puis traduire cette équation en une équation par région de l'espace portant sur la fonction d'onde $\psi(x)$ correspondante.

Réponse :

L'équation satisfait par $|\psi\rangle$ est l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\hat{H} |\psi\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \right) |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

Traduite dans chacune des régions de l'espace, en représentation x , cette équation devient :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi & \text{si } x < -a - b \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V_0\psi = E\psi & \text{si } -a - b \leq x \leq -a \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi & \text{si } |x| < a \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V_0\psi = E\psi & \text{si } a \leq x \leq a + b \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi & \text{si } x > a + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{région 1} \\ \text{région 2} \\ \text{région 3} \\ \text{région 4} \\ \text{région 5} \end{array}$$

3. On commence par chercher des états stationnaires dont l'énergie E est inférieure à V_0 . On pose $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ et $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$. Pourquoi peut-on chercher une fonction d'onde $\psi(x)$ paire ou impaire ? Montrer que l'on peut chercher un état stationnaire en posant :

$$\begin{cases} \psi(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} & \text{si } |x| \leq a \\ \psi(x) = A_4 e^{\alpha x} + B_4 e^{-\alpha x} & \text{si } a \leq x \leq a + b \\ \psi(x) = A_5 e^{ikx} + B_5 e^{-ikx} & \text{si } x \geq a + b \end{cases}$$

Comment se traduit la condition que la fonction d'onde est paire ? Impaire ? Comment s'écrit alors la fonction dans la région 3 dans chacun de ces deux cas ?

Réponse :

La fonction potentiel $V(x)$ est paire. Par ailleurs, l'opérateur $\hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$ est invariant dans la transformation $x \rightarrow -x$. L'opérateur hamiltonien \hat{H} l'est donc aussi, ce qui signifie qu'il commute avec l'opérateur \mathcal{R} : $\psi(x) \mapsto \psi(-x)$. Ses vecteurs propres sont donc aussi vecteurs propres de \mathcal{R} : ce sont les fonctions paires ou impaires.

En utilisant les nouvelles notations introduites, on peut réécrire les équations sous la forme

$$\begin{cases} \psi'' + k^2\psi = 0 & \text{dans les régions 1, 3 et 5} \\ \psi'' - \alpha^2\psi = 0 & \text{dans les régions 2 et 4} \end{cases}$$

Les solutions sont donc des sommes d'exponentielles réelles (régions 2 et 4) ou imaginaires (régions 1, 3, 5). La parité de la fonction impose que sa dérivée en $x = 0$ doit s'annuler. On en déduit donc : $A_3 = B_3$. La fonction dans la région 3 s'écrit donc :

$$\psi(x) = 2A_3 \cos(kx)$$

L'imparité de la fonction impose que sa valeur en $x = 0$ s'annule. On en déduit donc : $B_3 = -A_3$. La fonction dans la région 3 s'écrit donc :

$$\psi(x) = 2iA_3 \sin(kx)$$

4. On suppose la fonction d'onde **paire** dans les questions suivantes. Écrire les diverses conditions aux limites que doit satisfaire la fonction d'onde en fonction des coefficients A_3 , A_4 , B_4 , A_5 et B_5 .

Réponse :

La continuité de la fonction d'onde en $x = a$ s'écrit alors :

$$A_4 e^{\alpha a} + B_4 e^{-\alpha a} = 2A_3 \cos(ka)$$

La continuité de la dérivée de la fonction d'onde en $x = a$ s'écrit :

$$\alpha(A_4 e^{\alpha a} - B_4 e^{-\alpha a}) = -2A_3 k \sin(ka)$$

La continuité de la fonction d'onde en $x = a/2 + b$ s'écrit :

$$A_5 e^{ik(a+b)} + B_5 e^{-ik(a+b)} = A_4 e^{\alpha(a+b)} + B_4 e^{-\alpha(a+b)}$$

La continuité de sa dérivée en $x = a$ s'écrit :

$$ik(A_5 e^{ik(a+b)} - B_5 e^{-ik(a+b)}) = \alpha(A_4 e^{\alpha(a+b)} - B_4 e^{-\alpha(a+b)})$$

5. Exprimer A_4 et B_4 en fonction de A_3 uniquement. Montrer qu'il existe θ tel que l'on peut écrire $k = k_0 \sin \theta$ et $\alpha = k_0 \cos \theta$. En déduire que l'on peut écrire :

$$A_4 = \lambda e^{-\alpha a} A_3 \quad \text{et} \quad B_4 = \mu e^{\alpha a} A_3$$

où l'on exprimera λ et μ en fonction de a , k et θ .

Réponse :

On additionne et soustrait les deux équations de continuité en $x = a$ pour obtenir A_4 et B_4 :

$$A_4 = e^{-\alpha a} A_3 \left[\cos(ka) - \frac{k}{\alpha} \sin(ka) \right] \quad \text{et} \quad B_4 = e^{\alpha a} A_3 \left[\cos(ka) + \frac{k}{\alpha} \sin(ka) \right]$$

On remarque par ailleurs que $k^2 + \alpha^2 = k_0^2$. Il existe donc un nombre θ tel que $k = k_0 \sin \theta$ et $\alpha = k_0 \cos \theta$. On peut donc réécrire les expressions de A_4 et B_4 en fonction de θ :

$$A_4 = A_3 e^{-\alpha a} \frac{k_0}{\alpha} [\cos(ka) \cos \theta - \sin(ka) \sin \theta] = \frac{\cos(ka + \theta)}{\cos \theta} e^{-\alpha a} A_3$$

De même

$$B_4 = A_3 e^{\alpha a} \frac{k_0}{\alpha} [\cos(ka) \cos \theta + \sin(ka) \sin \theta] = \frac{\cos(ka - \theta)}{\cos \theta} e^{\alpha a} A_3$$

D'où finalement

$$\lambda = \frac{\cos(ka + \theta)}{\cos \theta} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{\cos(ka - \theta)}{\cos \theta} \quad (1)$$

6. Réécrire alors les équations de continuité portant sur A_5 et B_5 en fonction de A_3 , λ et μ uniquement et en déduire les expressions de A_5 et B_5 en fonction de B_3 .

Réponse :

On reporte les valeurs de A_4 et B_4 obtenues précédemment dans les deux dernières équations de continuité, qui deviennent alors :

$$\begin{cases} A_5 e^{ik(a+b)} + B_5 e^{-ik(a+b)} = A_3 [\lambda e^{\alpha b} + \mu e^{-\alpha b}] \\ A_5 e^{ik(a+b)} - B_5 e^{-ik(a+b)} = \frac{\alpha}{ik} A_3 [\lambda e^{\alpha b} - \mu e^{-\alpha b}] \end{cases}$$

On en déduit par addition et soustraction de ces deux équations les valeurs de A_5 et B_5 en fonction de A_3 :

$$A_5 = \frac{e^{-ik(a+b)}}{2} \left[\lambda e^{\alpha b} + \mu e^{-\alpha b} - \frac{i}{\tan \theta} (\lambda e^{\alpha b} - \mu e^{-\alpha b}) \right] A_3$$

et

$$B_5 = \frac{e^{ik(a+b)}}{2} \left[\lambda e^{\alpha b} + \mu e^{-\alpha b} + \frac{i}{\tan \theta} (\lambda e^{\alpha b} - \mu e^{-\alpha b}) \right] A_3$$

7. On définit la quantité T positive telle que $T^2 = \frac{|A_5|^2 + |B_5|^2}{|A_3|^2}$. Exprimer T en fonction de λ , μ , θ et du produit (αb). Comment peut-on interpréter la quantité α ? On se place dans la limite où $\alpha b \gg 1$. Quel est le sens physique de cette limite? Montrer qu'alors la quantité T satisfait :

$$T \approx \left| \frac{\cos((k_0 a) \sin \theta + \theta)}{\sin(2\theta)} \right| e^{\alpha b}$$

Réponse :

En utilisant les résultats de la question précédente, la quantité T s'écrit :

$$T^2 = \frac{1}{4} \left[(\lambda e^{\alpha b} + \mu e^{-\alpha b})^2 + \frac{1}{\tan^2 \theta} (\lambda e^{\alpha b} - \mu e^{-\alpha b})^2 \right]$$

En développant le crochet, on aboutit finalement à

$$T^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{\lambda^2 e^{2\alpha b}}{\sin^2 \theta} + \frac{\mu^2 e^{-2\alpha b}}{\sin^2 \theta} + 2\lambda\mu \left(1 - \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \right]$$

La quantité α correspondant l'inverse de la longueur de pénétration de l'onde à l'intérieur de la barrière de potentiel de hauteur V_0 . La condition $\alpha b \gg 1$ signifie que la barrière est bien plus épaisse que la longueur de pénétration de l'onde, et donc que l'onde peut être confinée par la barrière. Dans ce cas, T devient :

$$T \approx \left| \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \right| e^{\alpha b} = \left| \frac{\cos(ka + \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta} \right| e^{\alpha b} = \left| \frac{\cos((k_0 a) \sin \theta + \theta)}{\sin(2\theta)} \right| e^{\alpha b}$$

8. Quelle équation vérifie θ lorsque T s'annule ? On se place dans la limite $k_0a \gg 1$. Montrer alors qu'au premier ordre, pour les faibles valeurs de θ , le vecteur d'onde k vérifie :

$$k_n \approx (2n + 1) \frac{\pi}{2a} , \quad n \text{ étant un entier positif ou nul}$$

Pourquoi peut-on parler pour ces valeurs de k pour lesquelles T s'annule d'**états résonants** ? (À titre d'exemple, on fournit en Figure 1 ci-dessous la courbe $T_1(\theta) = \left| \frac{\cos(X \sin \theta + \theta)}{\sin(2\theta)} \right|$ pour $X = 20$). Comment peut-on interpréter la divergence près de $\theta = 0$?

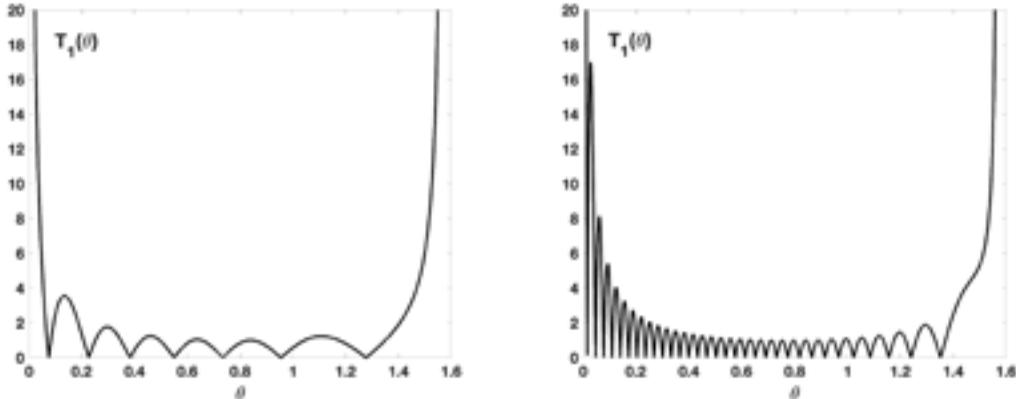


FIGURE 1 – Graphe de la fonction $T_1(\theta) = \left| \frac{\cos(X \sin \theta + \theta)}{\sin(2\theta)} \right|$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ pour les valeurs $X = 20$ (gauche) et $X = 100$ (droite).

Réponse :

T s'annule lorsque le cosinus au numérateur s'annule, soit lorsque :

$$(k_0a) \sin \theta + \theta = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

Lorsque k_0a est bien plus grand que 1 (ce qui correspond à un puits central qui serait capable de contenir de nombreux états quantiques si les barrières de chaque côté s'étendaient indéfiniment), alors le premier terme du membre de l'équation est dominant, et il reste en définitive :

$$\sin \theta_n \approx (2n + 1) \frac{\pi}{2k_0a} \quad \text{soit} \quad k_n \approx (2n + 1) \frac{\pi}{2a} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

On retrouve les vecteurs d'onde **des fonctions d'onde propres paires** du puits quantique infini de largeur $2a$ qui est bien la largeur de la région 3. T peut s'interpréter comme un coefficient de transmission en amplitude de la région centrale (le « puits ») vers l'extérieur. On se retrouve ici dans un exercice identique à la PC2 de physique quantique, mais où le puits est cette fois entouré de barrières qui ne s'étendent pas indéfiniment. Par conséquent, les états quantiques peuvent « fuir » à travers les barrières, à la manière de la PC3 sur l'effet tunnel. La condition d'annulation de T dit que, pour des barrières épaisses, il existe cependant certaines énergies précises pour lesquelles les états restent essentiellement confinés à l'intérieur de la région 3 : ces énergies correspondent, au moins au fond du puits, aux énergies du puits quantique infini de largeur $2a$. Si on imagine une onde se propageant à une de ces énergies (ou de ces vecteurs d'onde) en provenance de la région 1, il y a « résonance » de l'onde à l'intérieur de région 3, et formation de ces états **résonants**. On observe les annulations multiples de T dans la Figure 1 correspondant à ces états résonants.

La divergence près de 0 correspond au contraire au fait que l'on ne peut conserver un état à l'intérieur de la région 3 à des énergies trop basses, et donc l'amplitude à l'extérieur des barrières (régions 1 et 5) est bien supérieure à celle à l'intérieur (région 3, ou puits). Une fonction d'onde d'énergie trop basse est en quelque sorte « expulsée » de la région 3.

9. On reprend le même calcul pour les fonctions ψ **impaires**. Montrer qu'il n'est pas nécessaire de refaire tout le calcul et qu'une simple transformation permet d'obtenir rapidement la formule de $T = \sqrt{\frac{|A_5|^2 + |B_5|^2}{|A_3|^2}}$ dans ce cas, toujours pour $ab \gg 1$. Pour quelles valeurs de θ la quantité T s'annule-t-elle ? Que peut-on en conclure ?

Réponse :

Les fonctions impaires s'annulent en $x = 0$. On a vu que la condition d'annulation de la fonction se traduit par $\psi(x) = 2iA_3 \sin(kx)$ dans la région 3. On se retrouve avec une expression de la fonction d'onde identique à celle de la question 3 en remplaçant A_3 par iA_3 et kx par $(kx - \frac{\pi}{2})$, et donc ka par $(ka - \frac{\pi}{2})$ dans les expressions ultérieures. On en déduit directement le résultatat de la question 7, à savoir :

$$T \approx \left| \frac{\lambda'}{2 \sin \theta} \right| e^{\alpha b} = \left| \frac{\cos(ka - \frac{\pi}{2} + \theta)}{2 \sin \theta \cos \theta} \right| e^{\alpha b} = \left| \frac{\sin((k_0 a) \sin \theta + \theta)}{\sin(2\theta)} \right| e^{\alpha b}$$

L'annulation de T se traduit ici par :

$$(k_0 a) \sin \theta + \theta = n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{N} \quad \text{soit} \quad k_n \approx (2n) \frac{\pi}{2a} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

On retrouve bien ici les énergies des fonctions propres **impaires** du puits quantique infini de largeur $2a$. Au total, les états résonants, au moins à basse énergie et lorsque les barrières sont épaisses ou hautes, ont des énergies qui correspondent au puits infini. Ces états ne « voient » pas la fin de la barrière en $x = a + b$ ou $x = -a - b$ et restent confinés comme si le puits était entouré de barrières s'étendant à l'infini.

2 Emails spatiaux

On se place dans un Univers à une seule dimension d'espace (et une de temps). Un vaisseau spatial décolle de la Terre et part vers les étoiles à la vitesse constante $v = \beta c$. Les horloges terrestre et du vaisseau sont synchronisées au moment du décollage (pris comme instant 0). Au bout d'un temps τ_1 mesuré par l'horloge de bord, l'équipage du vaisseau envoie par ondes radio un court email vers la Terre (émission supposée de longueur négligeable). La base terrestre reçoit cet email à l'instant t_1 pour l'horloge terrestre, et renvoie instantanément une réponse qui arrive sur le vaisseau à l'instant τ_2 (pour l'horloge du vaisseau), dont l'équipage renvoie instantanément une réponse qui arrive sur Terre à l'instant t_2 pour l'horloge terrestre, et ainsi de suite...

On appelle τ_n le moment de l'émission du n -ième message par le vaisseau, mesurée par l'horloge de bord (qui correspond également au moment de réception de la $(n-1)$ -ième réponse venue de la Terre), et t_n le moment de réception par la Terre du n -ième message émis par le vaisseau (et donc également le moment d'émission de la n -ième réponse par la Terre).

- Faites un graphique spatio-temporel (à deux dimensions) de l'ensemble des échanges, en incluant le cône de lumière en $t = 0$. Quel est la valeur de t_1 en fonction de τ_1 et β ?

Réponse :

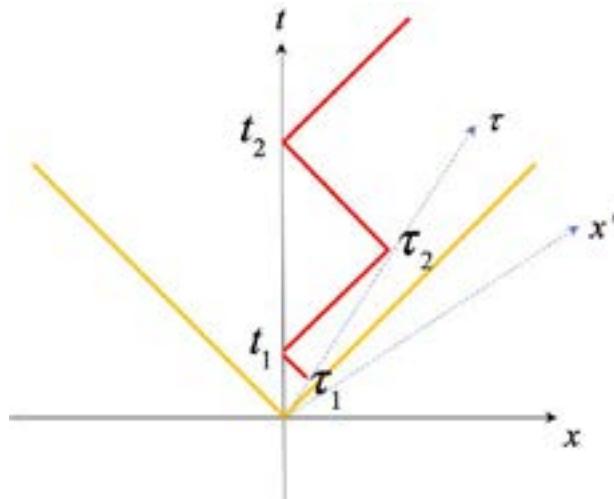


FIGURE 2 – Graphe des échanges dans le repère lié à la Terre. Les lignes pointillées représentent les axes du repère lié au vaisseau, les lignes jaunes sont le cône de lumière et les lignes rouges représentent les propagations de messages et de réponses.

On se place dans un système d'unités où $c = 1$. On considère le repère lié à la Terre dont l'origine est l'événement de décollage du vaisseau, ainsi que le repère lié au vaisseau ayant le même événement comme origine. Dans le repère lié à la Terre, le premier événement d'envoi d'email par le vaisseau correspond au temps t'_1 tel que :

$$\begin{pmatrix} \beta t'_1 \\ t'_1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad t'_1 = \gamma \tau_1$$

Les ondes radio étant des ondes électromagnétiques, l'email envoyé par le vaisseau voyage à la vitesse $-c$ ($-c$) vers la Terre depuis la position $\beta t'_1$. Il met donc un temps $\beta t'_1$ à revenir. Par conséquent :

$$t_1 = t'_1 + \beta t'_1 = (1 + \beta)t'_1 = \gamma(1 + \beta)\tau_1 = \sqrt{\frac{(1 + \beta)^2}{1 - \beta^2}} \tau_1 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tau_1$$

2. Donner l'expression générale de τ_n et de t_n , en fonction de τ_1 , β et n .

Réponse :

De la même manière, l'instant τ_n d'émission du n -ième message depuis le vaisseau, mesuré dans le repère lié au vaisseau spatial, est relié au temps t_n de son arrivée sur Terre, dans le repère lié à la Terre, par :

$$t_n = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tau_n$$

Pour obtenir la relation entre t_n et τ_{n+1} , on commence par convertir l'événement d'arrivée du n -ième message sur Terre (et donc de départ de la n -ième réponse), dans le repère lié au vaisseau :

$$\begin{pmatrix} X_n \\ \tau'_n \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t_n \end{pmatrix}$$

On a donc $X_n = -\gamma\beta t_n$ et $\tau'_n = \gamma t_n$. X_n étant la position de la Terre dans le repère lié au vaisseau au moment de l'émission de la n -ième réponse, et cette dernière voyageant à la vitesse de la lumière ($c = 1$) depuis la Terre jusqu'au vaisseau dont la position est $X = 0$, la réponse va mettre un temps $\gamma\beta t_n$ pour aller de la Terre au vaisseau, mesuré dans le repère lié au vaisseau. On a donc :

$$\tau_{n+1} = \tau'_n + \gamma\beta t_n = \gamma t_n + \gamma\beta t_n = \gamma(1 + \beta)t_n = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} t_n$$

On voit donc la parfaite symétrie des formules entre les deux repères, aucun des deux n'allant « plus vite » que l'autre.

3. Les quantités $\tau_{n+1} - \tau_n$ et $t_{n+1} - t_n$ restent-elles constantes ou augmentent-elles ? Que vaut le rapport de ces deux quantités ? Que peut-on en conclure ?

Réponse :

On utilise les résultats des questions précédentes pour en déduire immédiatement :

$$\tau_{n+1} = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) \tau_n \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) t_n$$

On en déduit immédiatement :

$$\tau_n = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^{n-1} \tau_1 \quad \text{et} \quad t_n = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^{n-1} t_1$$

Le facteur $(1 + \beta)/(1 - \beta)$ est strictement supérieur à 1, ce qui correspond à un éspacement des envois de messages de la part des deux interlocuteurs (le vaisseau et la Terre) croissant de façon géométrique. Par ailleurs :

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1\right) \tau_n = \left(\frac{2\beta}{1 - \beta}\right) \tau_n$$

La même relation vaut pour les (t_n) , d'où l'on en conclut :

$$\frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\tau_n}{t_n} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Le rapport est constant (l'écart entre les envois de messages étant inférieur à l'écart entre les réponses correspondantes), ce qui traduit une fois de plus la relativité (et donc l'interchangeabilité) des positions des deux interlocuteurs. Chacun des deux a l'impression que l'autre « tarde de plus en plus à répondre ».

4. La Terre étant supposée au bord de la Voie Lactée (notre galaxie), le vaisseau a pour mission de traverser la Voie Lactée en suivant un diamètre qui mesure environ 50000 années-lumière. Si le premier email est envoyé au bout d'une heure, combien de paires (message-réponse) seront échangées lors de la traversée totale ? (On prendra $\beta = 0,9$). Que faut-il en conclure pour les échanges d'information spatiaux ?

Réponse :

La première paire 'message – réponse' est échangée complètement au bout d'un temps τ_2 pour le vaisseau, et au bout d'un temps t'_2 par la Terre. Au bout d'un temps t'_n , $(n - 1)$ paires 'message – réponse' auront donc été échangées. Or le vaisseau va à β et doit franchir une distance L dans le

repère lié à la Terre (ou la Voie Lactée). Il sort donc de la Voie Lactée au bout d'un temps L/β . Par conséquent, le nombre de paires 'message – réponse' échangées est le plus grand nombre n tel que :

$$t'_n \leq \frac{L}{\beta} \quad \text{soit} \quad \gamma\tau_n \leq \frac{L}{\beta}$$

On en déduit immédiatement :

$$\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{n-1} \leq \frac{L}{\gamma\beta\tau_1} \quad \text{ou encore} \quad n-1 \leq \frac{\ln\left(\frac{L}{\gamma\beta\tau_1}\right)}{\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}$$

A. N. : $L = 50000$ années-lumière $= 5.10^4 \times 365 \times 24$ heures-lumière et $\beta = 0,9$ donc $\gamma = 1/\sqrt{1-0,9^2} = 1/\sqrt{0,19} = 10/\sqrt{19} \lesssim 10/\sqrt{16} = 2,5$. On peut donc prendre $\gamma \approx 2$. On fait également l'approximation suivante : $365 \times 24 \approx 10^4$.

D'où : $\frac{L}{\gamma\beta\tau_1} \approx (5.10^4 \times 10^4)/2 = 2,5.10^8$. Par ailleurs, $\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{1,9}{0,1} = 19$

Et donc : $\frac{\ln\left(\frac{L}{\gamma\beta\tau_1}\right)}{\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)} \approx \frac{\ln(2,5.10^8)}{\ln(19)} \approx \frac{\ln(2.2^{10 \times 8/3})}{\ln(16)}$ (on utilise $10^3 \approx 2^{10}$)

En définitive $n-1 \leq \frac{\frac{80}{3}+1}{4} = \frac{83}{12} \approx 7$. Le vaisseau et la Terre n'échangent donc que **8 paires 'message – réponse'** pendant toute la traversée de la Voie Lactée si l'on se contente de ce mode « ping-pong » ! On ne peut donc utiliser ce mode classique d'échange où l'on attend la réponse de l'interlocuteur avant de lui ré-envoyer un message. Il faut au contraire envoyer des messages à des rythmes réguliers, indépendamment des arrivées de messages en provenance du vaisseau (ou de la Terre).

3 Exercice court

On considère une particule de masse m dans un puits de potentiel harmonique de potentiel $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Les deux états de plus basse énergie ont pour fonctions d'onde et énergies respectives :

$$\begin{cases} \psi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{et} \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \\ \psi_1(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{et} \quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \end{cases} \quad \text{avec} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

1. On place la particule dans l'état :

$$|\psi\rangle = C (|\psi_1\rangle + |\psi_0\rangle) \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}_+$$

Quelle est la valeur de la constante C ? Si l'on mesure la position un très grand nombre de fois sur des particules toutes initialement dans l'état $|\psi\rangle$, quelle valeur moyenne de la position obtient-on ?

Réponse :

La normalisation de la fonction d'onde ψ s'écrit :

$$\|\psi\|^2 = C^2 (\|\psi_0\|^2 + \|\psi_1\|^2 + \langle\psi_0|\psi_1\rangle + \langle\psi_1|\psi_0\rangle) = 2C^2 = 1$$

en utilisant la normalisation des états $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$ et l'orthogonalité de ces deux états. On en déduit $C = 1/\sqrt{2}$. Par définition, un très grand nombre de mesure de la position va donner comme moyenne la quantité

$$\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = C^2 (\langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle + \langle\psi_1|\hat{x}|\psi_1\rangle + 2\langle\psi_1|\hat{x}|\psi_0\rangle)$$

(on peut écrire directement le double produit car les fonctions d'onde étant réelles, le caractère hermitien n'intervient pas dans les produits). Les fonctions d'onde des états propres étant paires ou impaires, la position moyenne est toujours nulle dans n'importe quel état propre de l'oscillateur harmonique. Il ne reste donc que :

$$\langle x \rangle = 2C^2 \langle \psi_1 | \hat{x} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{x} | \psi_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2} du = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$$

2. On place toujours une particule dans l'état $|\psi\rangle$ initialement, mais maintenant on mesure l'énergie. Quelles valeurs peut-on obtenir à chaque mesure individuelle ? Quelle est la valeur moyenne des mesures ? Quel en est l'écart-type ?

Réponse :

L'état étant une combinaison linéaire des deux premiers états propres seulement, la mesure de l'énergie (qui est une projection sur les sous-espaces propres de \hat{H} , opérateur associé à l'énergie) ne peut envoyer que sur les sous-espaces propres associés à E_0 et à E_1 . On ne peut donc mesurer que E_0 ou E_1 . Les coefficients de la décomposition sont tous les deux égaux à $C = 1/\sqrt{2}$. Les probabilités respectives associées à chaque énergie sont donc $1/2$ et $1/2$. On peut alors facilement calculer la moyenne et l'écart-type :

$$\langle E \rangle = \frac{E_0 + E_1}{2} = \hbar\omega \quad \text{et} \quad \Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sqrt{\frac{E_0^2 + E_1^2}{2} - \hbar^2\omega^2} = \hbar\omega\sqrt{\frac{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}}{2} - 1} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

1 juillet 2020.

Consignes

- Vous avez jusqu'à **13h00 le mercredi 1er juillet 2020** pour déposer votre copie :
 - sous la forme d'un **unique fichier pdf**,
 - composé des **scans ou photos** de votre copie **manuscrite**,
 - sur Campus : <https://campus.mines-paristech.fr/course/view.php?id=404> dans l'activité « Évaluation finale ».
- **ÉCRIVEZ VOTRE NOM SUR VOTRE COPIE** (c'est-à-dire sur la première page scannée).
- Ce sujet comporte **6 pages** et **20 questions**, pour un total de **26 points**.
- Prenez le temps de **lire l'intégralité du document** et de commencer par les questions qui vous semblent les plus faciles.
- Numérotez bien les questions sur votre copie !
- Si une question ne vous semble pas claire ou que vous rencontrez des difficultés techniques, merci d'utiliser prioritairement **slack** (canal **#examen** ou messagerie privée).
- **Vous vous engagez à rendre un travail personnel, mené avec l'aide de vos documents de cours mais pas celle de vos camarades ou toute autre personne compétente.**

1 Classification de tubes

Vous travaillez pour une entreprise qui fabrique des tubes de transport d'hydrocarbures. Ces équipements subissent un contrôle qualité rigoureux. Lors du contrôle, le tube est soumis à des tests physiques lors desquels de nombreuses mesures sont prises. Ces mesures sont ensuite analysées attentivement par des spécialistes. L'entreprise souhaite partiellement automatiser cette dernière étape.

Pour cela, on vous donne un jeu de données dans lequel 5 272 tubes sont décrits par 1 991 variables : 1 990 mesures prises lors des tests, et une variable binaire valant 1 si le tube passe le contrôle qualité et 0 sinon.

Votre tâche est d'utiliser ces données pour construire un modèle qui permettra de réduire le nombre de tubes qui devront être examinés par les spécialistes.

1. (1 point) De quel type de problème d'apprentissage statistique s'agit-il ?
2. (2 points) Quel(s) critère(s) de performance allez-vous utiliser
 - pour choisir votre modèle ?
 - pour illustrer dans votre rapport final la performance que l'on peut attendre de votre modèle une fois en production?

Justifiez vos réponses.

3. (2 points) Vous avez dressé avec vos collègues une liste des algorithmes d'apprentissage à essayer. Décrivez comment vous allez utiliser les données pour construire votre modèle et évaluer la performance que vous pouvez en attendre une fois déployé. Précisez le nombre d'éléments du jeu de données utilisé à chacune des étapes que vous décrivez.
4. (1 point) Le premier algorithme que vous testez est une régression logistique. Vous observez une bonne performance sur les observations que vous utilisez pour l'entraînement, mais quand vous appliquez votre modèle sur d'autres observations, cette performance chute de 15%. Est-ce surprenant ? Que se passe-t-il, et comment remédiez-vous à ce problème ?
5. (1 point) Vous essayez ensuite une forêt aléatoire. Sa performance est bien plus modeste que celle de la régression logistique. Que se passe-t-il, et comment remédiez-vous à ce problème ?
6. (3 points) Votre collègue, qui travaille aussi sur le problème, vous envoie ses résultats sous la forme de la figure 1. Suggérez trois façons d'améliorer cette représentation, en expliquant pourquoi vous faites ces suggestions.

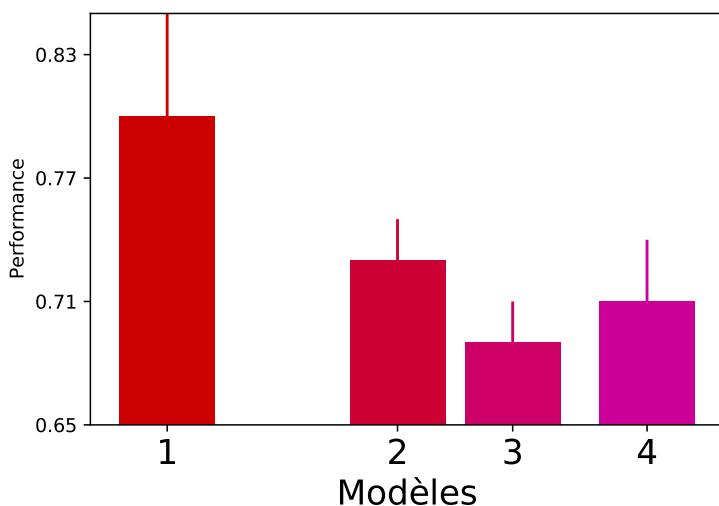


Figure 1: Résultats envoyés par votre collègue (Problème 1).

2 Reconnaissance faciale

Un des problèmes les plus étudiés dans la classification automatique des images de visages est celui de la reconnaissance du genre, généralement présenté comme un problème de classification binaire avec les étiquettes « homme » et « femme ». Une publication récente¹ présente les performances de 3 modèles commercialisés pour effectuer cette tâche.

La table 1, qui en est extraite, présente les performances de ces 3 modèles selon le genre et la couleur de peau des individus, décrite comme « claire » ou « foncée » en fonction de leur phototype². Les modèles 1 et 3 sont commercialisés par des entreprises américaines et le modèle 2 par une entreprise chinoise.

Le jeu de données utilisé pour l'évaluation, appelé *Pilot Parliament Benchmark* (ou PPB) et construit à partir de photos de membres de parlements à travers le monde, contient 1 270 images. Sa composition est décrite dans la table 2. La composition du jeu de donnée *Adience*, utilisé depuis 2014 pour le benchmarking d'outils de classification automatique des images de visage par genre, est elle donnée dans la table 3.

Modèle	Total	DF	DM	LF	LM
1	78	55	18	5	0
2	123	89	2	29	3
3	154	94	38	21	1

Table 1: Nombre d'images mal classifiées pour 3 modèles de classification d'images de visage par genre, évalués sur le jeu de données PPB. Les performances sont données au global (« Total ») puis parmi les femmes à la peau foncée (« DF »), les hommes à la peau foncée (« DM »), les femmes à la peau claire (« LF »), les hommes à la peau claire (« LM »).

Total	DF	DM	LF	LM
1270	271	318	296	385

Table 2: Composition du jeu de données PPB : nombre de femmes à la peau foncée (« DF »), nombre d'hommes à la peau foncée (« DM »), nombre de femmes à la peau claire (« LF »), nombre d'hommes à la peau claire (« LM »).

Total	DF	DM	LF	LM
2194	162	140	979	913

Table 3: Composition du jeu de données Adience : nombre de femmes à la peau foncée (« DF »), nombre d'hommes à la peau foncée (« DM »), nombre de femmes à la peau claire (« LF »), nombre d'hommes à la peau claire (« LM »).

7. (1 point) Pourquoi chercher à construire un outil de classification automatique d'images de visages par genre ? Quelles applications pratiques y voyez-vous ?

8. (1 point) Comparez la performance globale des modèles sur le jeu de données PPB à leur performance sur chacun des sous-groupes DF, DM, LF et LM. Qu'observez-vous ? À quoi cela peut-il être dû ?
9. (1 point) En supposant que les taux d'erreurs sur chacun des sous-groupes DF, DM, LF et LM soient conservés, à quelle proportion d'erreurs globale vous attendez-vous sur Adience pour chacun des 3 modèles ? Comparez ces résultats à ceux obtenus sur PPB.
10. (2 points) Le 8 juin 2020, IBM a annoncé se retirer du marché de la reconnaissance faciale avec ces mots : « IBM s'oppose fermement et ne tolérera pas l'utilisation de toute technologie, y compris la technologie de reconnaissance faciale proposée par d'autres fournisseurs, pour la surveillance de masse, le contrôle au faciès, les violations des droits de l'Homme et des libertés fondamentales ou tout autre objectif qui ne serait pas conforme à nos valeurs et à nos principes de confiance et de transparence. » Commentez cette décision au regard des informations données.

3 Réseau de neurones artificiel

Soit $\mathcal{D} = \{(\vec{x}^i, y^i)\}_{i=1,\dots,n}$ un jeu d'apprentissage de n observations en p dimensions, et leurs étiquettes réelles. Nous souhaitons entraîner un perceptron multi-couche à une couche cachée, contenant h neurones, sur ces données.

11. (1 point) Quelle fonction d'activation choisir pour l'unité de sortie et pourquoi ?
12. (1 point) Dessinez l'architecture d'un tel réseau de neurones. Vous pouvez choisir d'ajouter une ou des unités de biais.
13. (1 point) Quelle est l'espace des hypothèses \mathcal{F} du réseau de neurones que vous venez de dessiner ? Vous vous fixerez (pour clarifier l'écriture, il n'y a pas de bon ou mauvais choix) une fonction d'activation pour les couches cachées parmi
 - la fonction logistique ;
 - la fonction tangente hyperbolique ;
 - la fonction dite ReLU (*Rectified Linear Unit*), à savoir $u \mapsto \max(u, 0)$.
14. (1 point) Peut-on parler ici de modèle paramétrique ? Si oui, à combien de paramètres et quels sont-ils ?
15. (1 point) En choisissant une fonction de coût raisonnable, formulez le choix d'un modèle dans \mathcal{F} sous la forme d'un problème de minimisation du risque empirique.
16. (2 points) Comment résoudre ce problème d'optimisation ? Quelles conséquences cela a-t-il sur le choix du modèle ? Pourquoi choisir néanmoins d'utiliser ce réseau de neurones ?

4 Émission de composés organiques par des plantes

Lorsqu'elles sont endommagées, les plantes vertes émettent des composés organiques, appelés substances volatiles des feuilles (ou GLV pour *green leaf volatiles* en anglais). Ces molécules, qui sont responsables, entre autres, de l'odeur de l'herbe coupée, sont considérées comme un mode de communication entre plantes.

La figure 2 est tirée d'une publication récente³. Dans cette étude, les scientifiques ont cherché à observer l'effet des sécrétions orales de certaines chenilles sur les émissions de GLV. L'étude s'intéresse à 4 cas particuliers de GLV : les molécules (Z)-3-hexenal, (E)-2-hexenal, (Z)-3-hexenol, et (Z)-hexenyl acetate.

La figure 2 présente les quantités de ces 4 GLV émises par plante de maïs (*maize*) endommagée. L'expérience est conduite sur 4 plantes (les valeurs affichées sont donc moyennées) et sous 3 traitements :

- la plante a été exposée à une solution contrôle (PBS), supposée n'avoir aucun effet ;
- la plante a été exposée à des sécrétions orales de chenille (*Fresh Regurgitant*) ;
- la plante a été exposée à des sécrétions orales de chenille bouillies (*Boiled Regurgitant*).

Pour chacune des 4 molécules GLV et pour chacun des deux traitements par des sécrétions orales, un test t de comparaison de moyennes a été réalisé pour comparer les quantités de cette molécule émises sous ce traitement à celles émises sous le traitement contrôle (PBS). Les astérisques indiquent une différence statistiquement significative entre les deux valeurs.

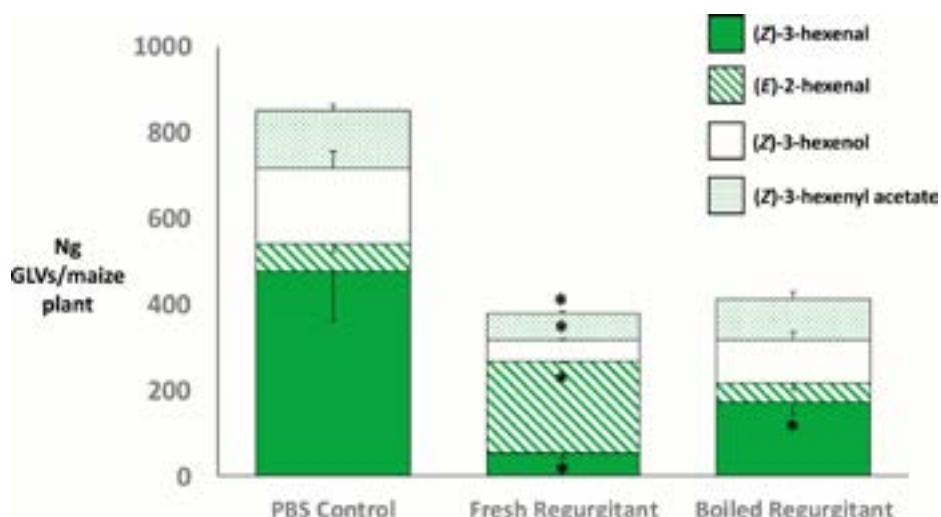


Figure 2: Émissions moyennes de (Z)-3-hexenal, (E)-2-hexenal, (Z)-3-hexenol, et (Z)-hexenyl acetate par des feuilles de maïs endommagées puis traitées avec une solution contrôle (PBS) et des sécrétions orales de chenille fraîches et bouillies.

17. (1 point) Considérons la comparaison des émissions de (E)-2-hexenal entre le contrôle (PBS) et l'exposition aux sécrétions orales de chenille non bouillies (Fresh Regurgitant). Quelle est l'hypothèse nulle du test t ?
18. (1 point) Quelle est l'hypothèse alternative de ce test ? S'agit-il d'un test unilatéral ou bilatéral et pourquoi ?
19. (1 point) Pourquoi avoir utilisé un test t plutôt qu'un test Z ?
Considérons maintenant toujours uniquement le (E)-2-hexenal, mais dans les 3 conditions expérimentales.
20. (1 point) Quelle conclusion peut-on tirer de cette figure ?

Notes

¹J. Buolamwini et T. Gebru. (2018) *Gender Shades: Intersectional accuracy disparities in commercial gender classification*, Conference on Fairness, Accuracy and Transparency.

²https://fr.wikipedia.org/wiki/Classification_de_Fitzpatrick

³Anne C Jones et al. (2019), *Herbivorous Caterpillars Can Utilize Three Mechanisms to Alter Green Leaf Volatile Emission*, Environmental Entomology 42(2).

1 Classification de tubes

- 1 point) De quel type de problème d'apprentissage statistique s'agit-il ?

Solution: Apprentissage supervisé, classification binaire.

- 2 points) Quel(s) critère(s) de performance allez-vous utiliser

- pour choisir votre modèle ?
- pour illustrer dans votre rapport final la performance que l'on peut attendre de votre modèle une fois en production?

Justifiez vos réponses.

Solution: Il est primordial d'avoir un minimum de faux positifs, les tubes étiquetés comme positifs ne passant pas de contrôle par un humain. Il serait donc raisonnable d'utiliser la *précision* (ou PPV) comme critère de sélection. Vous risquez cependant de choisir un modèle inutile qui prédit que tous les tubes sont positifs. Un score plus équilibré, par exemple le f1, est donc aussi une bonne idée.

Remarque Il est important de noter qu'on ne peut utiliser qu'un seul critère de sélection (on choisit le modèle qui maximise ce critère, et on n'a aucune garantie de pouvoir maximiser simultanément deux critères).

Pour votre rapport, la PPV sera encore une fois importante, mais vous pouvez vous permettre de rapporter plusieurs critères : vous pouvez mettre toute la table de confusion.

Remarque La RMSE est complètement hors sujet pour un problème de classification.

3. (2 points) Vous avez dressé avec vos collègues une liste des algorithmes d'apprentissage à essayer. Décrivez comment vous allez utiliser les données pour construire votre modèle et évaluer la performance que vous pouvez en attendre une fois déployé. Précisez le nombre d'éléments du jeu de données utilisé à chacune des étapes que vous décrivez.

Solution: TODO expliciter ce qu'on fait de chaque fold

Remarque On peut aussi parler du prétraitement. Train/test split + validation croisée ou train/test de nouveau sur le train.

Par exemple 70/30 pour le train/test et 10-fold CV : 3690 observations dans le train, 1582 dans le test. Chaque étape de la validation croisée consiste à entraîner sur 3321 observations et évaluer sur 369.

4. (1 point) Le premier algorithme que vous testez est une régression logistique. Vous observez une bonne performance sur les observations que vous utilisez pour l'entraînement, mais quand vous appliquez votre modèle sur d'autres observations, cette performance chute de 15%. Est-ce surprenant ? Que se passe-t-il, et comment remédiez-vous à ce problème ?

Solution: Surapprentissage. Peu surprenant car beaucoup de variables, même si plus d'observations. Il faut régulariser.

La suggestion de réduire la dimension du problème en amont est bonne aussi.

5. (1 point) Vous essayez ensuite une forêt aléatoire. Sa performance est bien plus modeste que celle de la régression logistique. Que se passe-t-il, et comment remédiez-vous à ce problème ?

Solution: Sous-apprentissage. Augmenter le nombre d'arbres !

La suggestion d'augmenter la profondeur des arbres est bonne aussi.

C'était une question un peu hors programme.

6. (3 points) Votre collègue, qui travaille aussi sur le problème, vous envoie ses résultats sous la forme de la figure **??**. Suggérez trois façons d'améliorer cette représentation, en expliquant pourquoi vous faites ces suggestions.

Solution: Quelques suggestions...

- Légendes parlantes – quels sont les modèles ?
- Performance : quelle métrique ?
- Faire commencer les barres à 0 – proportional ink.
- Toutes les barres de la même couleur.

- Toutes les barres avec le même espacement.
- Axe des ordonnées suffisamment grand pour que l'on voie la barre d'erreur en entier.
- Barres d'erreurs d'une couleur qui contraste avec les barres.

2 Reconnaissance faciale

7. (1 point) Pourquoi chercher à construire un outil de classification automatique d'images de visages par genre ? Quelles applications pratiques y voyez-vous ?

Solution: Quelques idées :

- Personalisation d'interactions/contenus. Une intelligence humaine perçoit le genre, pourquoi pas une IA ?
- Première étape d'un algorithme de reconnaissance faciale.
- Marketing : tel rayon est-il plus fréquenté par les hommes ou les femmes ?
- Analyse automatique de données (cinéma, débats politiques, par exemple) pour détecter un déséquilibre entre hommes et femmes.
- Attention à ne pas parler de reconnaissance faciale en général, ni de classification par couleur de peau (il s'agit ici d'un contrense : ce n'est pas ce que ces modèles font. On les évalue sur des sous-catégories par couleur de peau, mais on ne leur demande pas de prédire la couleur de peau de la personne).
- Il est néanmoins tout à fait légitime de se poser la question de la pertinence d'une telle classification, surtout considérée comme un problème binaire sans aucune place pour les personnes qui ne s'identifieraient à aucune des deux catégories « homme » ou « femme », dans un contexte où l'on s'interroge de plus en plus sur les stéréotypes de genre.

8. (1 point) Comparez la performance globale des modèles sur le jeu de données PPB à leur performance sur chacun des sous-groupes DF, DM, LF et LM. Qu'observez-vous ? À quoi cela peut-il être dû ?

Solution: Taux d'erreurs :

1	6.3%	20.3%	5.7%	1.6%	0.0%
2	9.7%	32.8%	0.6%	9.8%	0.8%
3	12.1%	34.7%	11.9%	7.1%	0.3%

Le taux d'erreur est largement plus élevé chez les femmes noires que dans les autres catégories.

Cela est vraisemblablement dû à la composition des jeux d'entraînement/validation de ces modèles. (Attention : on ne les connaît pas, il est donc faux de dire que cela est dû à la composition de PPB qui n'a pas servi à l'entraînement mais au test.)

9. (1 point) En supposant que les taux d'erreurs sur chacun des sous-groupes DF, DM, LF et LM soient conservés, à quelle proportion d'erreurs globale vous attendez-vous sur Adience pour chacun des 3 modèles ? Comparez ces résultats à ceux obtenus sur PPB.

Solution:

- Modèle 1 : $(0.203 \times 162 + 0.057 \times 140 + 0.016 \times 979) / 2194 = 2.6\%$
- Modèle 2 : $(0.328 \times 162 + 0.006 \times 140 + 0.098 \times 979 + 0.008 \times 913) / 2194 = 7.1\%$
- Modèle 3 : $(0.347 \times 162 + 0.119 \times 140 + 0.071 \times 979 + 0.003 \times 913) / 2194 = 6.6\%$

Les modèles semblent bien plus performants sur Adience que sur PPB, ce qui est lié à la composition de ces jeux de données : Adience contient moins de femmes et moins de personnes à la peau foncée.

10. (2 points) Le 8 juin 2020, IBM a annoncé se retirer du marché de la reconnaissance faciale avec ces mots : « IBM s'oppose fermement et ne tolérera pas l'utilisation de toute technologie, y compris la technologie de reconnaissance faciale proposée par d'autres fournisseurs, pour la surveillance de masse, le contrôle au faciès, les violations des droits de l'Homme et des libertés fondamentales ou tout autre objectif qui ne serait pas conforme à nos valeurs et à nos principes de confiance et de transparence. » Commentez cette décision au regard des informations données.

Solution:

- Remarquer qu'on parle d'applications plus diverses et variées que celle de l'exercice.
- L'exercice indique que sur cette application relativement simple, on fait plus d'erreurs sur les personnes qui ne sont pas des hommes blancs.

- Cela conduit à des biais néfastes : les femmes noires sont alors plus susceptibles de ne pas pouvoir utiliser un système de reconnaissance faciale pour débloquer leur téléphone / ordinateur ou l'accès à un bâtiment ; d'être identifiées à tort par une analyse de films de vidéosurveillance ; de ne pas pouvoir utiliser les portiques automatiques dans les aéroports ; etc.
- On peut aussi se poser des questions sur l'utilisation d'algorithmes de reconnaissance faciale indépendamment de biais et performances : de nombreuses possibilités sont inquiétantes (société de surveillance, etc.)
- Mise en contexte dans le cadre du mouvement Black Lives Matter et des violences policières bienvenue :-)

3 Réseau de neurones artificiel

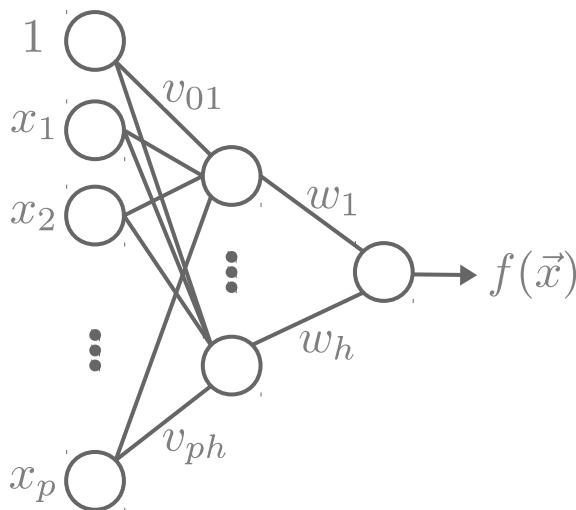
Soit $\mathcal{D} = \{(\vec{x}^i, y^i)\}_{i=1,\dots,n}$ un jeu d'apprentissage de n observations en p dimensions, et leurs étiquettes réelles. Nous souhaitons entraîner un perceptron multi-couche à une couche cachée, contenant h neurones, sur ces données.

11. (1 point) Quelle fonction d'activation choisir pour l'unité de sortie et pourquoi ?

Solution: Il s'agit d'un problème de régression, donc l'identité.

12. (1 point) Dessinez l'architecture d'un tel réseau de neurones. Vous pouvez choisir d'ajouter une ou des unités de biais.

Solution: Exemple avec une unité de biais en entrée mais pas sur la couche intermédiaire.



13. (1 point) Quelle est l'espace des hypothèses \mathcal{F} du réseau de neurones que vous venez de dessiner ? Vous vous fixerez (pour clarifier l'écriture, il n'y a pas de bon ou mauvais choix) une fonction d'activation pour les couches cachées parmi

- la fonction logistique ;
- la fonction tangente hyperbolique ;
- la fonction dite ReLU (*Rectified Linear Unit*), à savoir $u \mapsto \max(u, 0)$.

Solution:

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} \mapsto \sum_{q=1}^h w_q a \left(\sum_{j=1}^p v_{jq} x_j + v_{0q} \right); w_1, \dots, w_h, v_{01}, \dots, v_{0h}, v_{11}, \dots, v_{ph} \in \mathbb{R} \right\},$$

en remplaçant a par la fonction d'activation choisie. (Ici pour une architecture avec unité de biais en entrée mais pas sur la couche intermédiaire.)

14. (1 point) Peut-on parler ici de modèle paramétrique ? Si oui, à combien de paramètres et quels sont-ils ?

Solution: Oui. Les paramètres sont $w_1, \dots, w_h, v_{01}, \dots, v_{0h}, v_{11}, \dots, v_{ph}$ et sont donc au nombre de $h + (p+1)h = (p+2)h$.

15. (1 point) En choisissant une fonction de coût raisonnable, formulez le choix d'un modèle dans \mathcal{F} sous la forme d'un problème de minimisation du risque empirique.

Solution:

$$\arg \min_{\vec{w} \in \mathbb{R}^h, \vec{v} \in \mathbb{R}^{h(p+1)}} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{q=1}^h w_q a \left(\sum_{j=1}^p v_{jq} x_j^i + v_{oq} \right) - y^i \right)^2.$$

16. (2 points) Comment résoudre ce problème d'optimisation ? Quelles conséquences cela a-t-il sur le choix du modèle ? Pourquoi choisir néanmoins d'utiliser ce réseau de neurones ?

Solution: Le pb n'est pas convexe : pas de solution exacte et encore moins unique. On utilise des descentes de gradient mais aucune de garantie de converger vers le minimum global. Différentes initialisations, pas de descente etc donneront des solutions différentes. Mais plus grande puissance de modélisation.

4 Émission de composés organiques par des plantes

17. (1 point) Considérons la comparaison des émissions de (E)-2-hexenal entre le contrôle (PBS) et l'exposition aux sécrétions orales de chenille non bouillies (Fresh Regurgitant). Quelle est l'hypothèse nulle du test t ?

Solution: Il n'y a pas de différence de moyenne entre la quantité de GLV émise dans l'expérience témoin et celle émise sous traitement.

18. (1 point) Quelle est l'hypothèse alternative de ce test ? S'agit-il d'un test unilatéral ou bilatéral et pourquoi ?

Solution: Il y a une différence de moyenne entre la quantité de GLV émise dans l'expérience témoin et celle émise sous traitement. Test bilatéral car on ne sait pas si on s'attend à une augmentation ou une diminution des émissions.

19. (1 point) Pourquoi avoir utilisé un test t plutôt qu'un test Z ?

Solution: Pas assez d'échantillons pour appliquer le théorème central limite.

Considérons maintenant toujours uniquement le (E)-2-hexenal, mais dans les 3 conditions expérimentales.

20. (1 point) Quelle conclusion peut-on tirer de cette figure ?

Solution:

- La salive de chenille a un effet sur ce GLV uniquement quand elle n'est pas bouillie.
- Remarquer néanmoins que l'on tire des conclusions d'expériences conduites sur 4 plantes.

Scamén DATA

Classification de tubes

- 1) Il s'agit d'un problème d'apprentissage supervisé. Plus précisément, c'est un problème de classification binaire.
- 2) * Pour choisir un modèle, je vais utiliser le f1-score qui combine la précision et le rappel. En effet, on veut à la fois que les tubes qui soient déclarés bons le soient vraiment (ce que mesure le rappel) et que le plus possible de tubes qui sont bons soient déclarés bons par mon modèle (ce que mesure la précision).
* Pour faire mon rapport, je vais pas utiliser le F1-score qui n'est pas bien parlant mais plutôt écrire des matrices de confusion dans laquelle toutes les informations sont présentes. Et partir de cette matrice, je pourrai rajouter le taux d'erreur (en %), le rappel et la précision (ces deux dernières sont importants car c'est grâce à eux que j'ai choisi mon modèle). L'élément principal sera donc la matrice de confusion et je pourrai la lier avec les 3 autres critères que j'ai cité et qui se lisent directement dans la matrice. J'ai choisi ces 3 critères car le rappel et la précision sont utilisés pour mon choix de modèle et le taux d'erreur est un critère un peu différent mais qui est facile à interpréter et compact.
- 3) Dans un premier temps je vais séparer mes données en un jeu de test et un jeu d'entraînement. Il y aura 20% des données en jeu de test (soit 1054 tubes) et 80% des données en jeu d'entraînement (soit 4218 tubes). Je voudrais à classifier les données pour avoir la même proportion de tubes bons et mauvais dans mon jeu de test et dans mon jeu d'entraînement pour

avoir des jeux représentatifs des données.

Pour chaque modèle, je vais faire une validation croisée du modèle en séparant les données d'entraînement sur 5 folds. Dans chaque fold il y aura un jeu d'entraînement (avec 3374 tubes) et un jeu de validation (avec 844 tubes). J'entraînerai mon modèle sur les jeux d'entraînement et calculerai le F1-score sur les jeux de validation.

J'aurai alors pour chaque modèle un score moyen et la variance du score. Je pourrai ensuite calculer le F1-score sur le jeu de test pour chaque modèle pour estimer si le modèle généralise bien (pour faire ça j'aurai entraîné le modèle sur tout le jeu d'entraînement).

Pour chaque modèle, j'ai donc :

- * un F1-score moyen et la variance de ce F1-score sur le jeu d'entraînement par validation croisée

- * un F1-score de généralisation sur le jeu de test

Cela me permettra de choisir le meilleur modèle.

- 4) La performance chute à cause du surapprentissage. Cela n'est pas très surprenant avec une régression logistique qui facilement surapprend avec des coefficients de β très grands (avec les notations de la PG β). De plus il y a presque 2000 mesures pour chaque tube ce qui augmente le risque d'apprentissage. On peut résoudre ce problème en régularisant le modèle. On peut utiliser une régularisation L_1 car avec 2000 variables, il est peu probable que toutes soient utiles et la régularisation L_1 permettra de mettre à 0 les coefficients correspondants à des variables inutiles. On peut aussi faire une réduction de dimension avant l'entraînement du modèle pour réduire le nombre de variables et donc le risque de surapprentissage.

6) Il faudrait changer les couleurs qui sont trop indiscernables.
Il faudrait ensuite afficher plus de valeurs sur l'axe des Y car on n'a aucune idée des performances minimales des différents modèles et de leur variance et des performances moyennes des modèles. En l'état, on a juste une idée des performances maximales des modèles donc l'information est incomplète.

De plus, il faudrait changer l'échelle de l'axe des abscisses qui a l'air d'être une échelle logarithmique ce qui n'est pas du tout pertinent au vu du fait que 1, 2, 3, 4 sont juste des numéros de modèles. Il faudrait un espacement régulier entre le modèles.

Reconnaissance faciale

7) Cela peut être utile pour remplir des formulaires où il y a une photo à mettre et le reste à remplir. Cela pourrait être fait automatiquement. Cela est aussi la première étape pour la reconnaissance faciale. On peut aussi l'utiliser à des fins commerciales pour mieux cibler des produits en fonction du sexe de la personne (vêtements par exemple)

8) Les différentes performances des modèles peuvent être en partie expliquées par les jeux de données utilisés par l'entraînement. On peut voir que les modèles 1 et 3 font beaucoup d'erreurs sur les femmes à peau foncée ce qui peut s'expliquer par le fait qu'il y avait peu de femmes à peau foncée dans le jeu de données utilisé à l'entraînement. Le modèle 2 fait beaucoup d'erreurs sur les femmes ce qui laisse penser qu'il a été entraîné sur un jeu de données contenant peu de femmes.*

9) On calcule les taux d'erreurs pour chaque modèle et chaque catégorie de personnes :

modèle	DF	Dt	LF	Ln
1	0,203	0,057	0,017	0
2	0,388	0,006	0,098	0,008
3	0,347	0,119	0,071	0,003

Résultat sur Adience :

Modèle	DF	DN	LF	LH	TOTAL Adience	Erreur PPB
1	33	8	17	0	58 (2,6%)	6,1%
2	53	1	96	7	157 (7,2%)	9,7%
3	56	17	70	3	146 (6,7%)	12,1%

On voit qu'avec ce jeu de données les résultats sont assez différents. De manière générale les taux d'erreurs sont plus faibles donc les différents modèles ont été entraînés sur un jeu de données plus proche de celui de Adience que de PPB. On voit que le modèle 2 fait ^{beaucoup} trop ^{peu} d'erreurs sur les hommes. En contre, les erreurs des modèles 1 et 3 sont plus réparties sur l'ensemble des catégories ce qui confirme qu'ils ont été entraînés sur un jeu de données contenant peu de personnes à peau foncée (ce qui est le cas de Adience). Cette comparaison montre l'importance des proportions d'individus d'une catégorie donnée que l'on utilise pour entraîner un modèle.

1) Cette décision d'IBM laisse penser que les algorithmes de reconnaissance faciale peuvent être utilisés pour la surveillance de masse (notamment en Chine avec un algorithme qui est chinois).

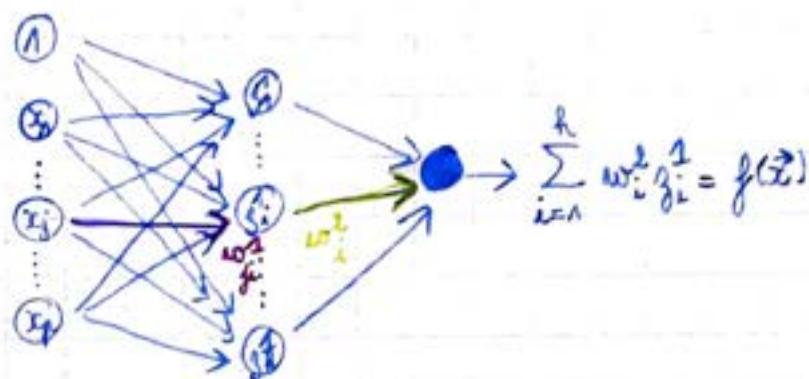
La reconnaissance faciale pose aussi le problème de confidentialité des données puisque pour reconnaître quelqu'un il faut stocker dans une base de données son identité et une photo de lui.

Cela montre les problèmes éthiques liés au machine learning comme l'utilisation des algorithmes développés et les données utilisées.

Réseau de neurones artificiel

M) Les étiquettes du jeu de données sont réelles et la sortie du réseau de neurone sera aussi un réel donc on peut choisir comme fonction d'activation l'identité.

12)



13) On choisit comme fonction d'activation des couches cachées la fonction tangente hyperbolique.

$$\text{On a } f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n w_i^2 z_i^2.$$

$$\text{On a } \forall i \in \{1, \dots, n\}, z_i = \operatorname{th}\left(\sum_{j=1}^p w_{ji}^2 x_j + w_{0,i}^2\right)$$

$$\text{donc } f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \operatorname{th}\left(\sum_{j=1}^p w_{ji}^2 x_j + w_{0,i}^2\right)$$

Ainsi l'espace des hypothèses est

$$\mathcal{H} = \left\{ \vec{x} \mapsto \sum_{i=1}^n w_i^2 \operatorname{th}\left(\sum_{j=1}^p w_{ji}^2 x_j + w_{0,i}^2\right); (w_i^2)_{i \in \{1, \dots, n\}}, (w_{ji}^2)_{j \in \{1, \dots, p\}} \right\}$$

14) On peut parler ici de modèle paramétrique dont les paramètres sont $(w_i^2)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ et $(w_{ji}^2)_{j \in \{1, \dots, p\}}$. Il y a donc $n + p(p+1)$ paramètres.

15) On choisit comme fonction de coût la fonction de coût quadratique.

Le risque empirique s'écrit alors :

$$R_m((w_i^1)_{ij}, (w_{ji}^2)_{ij}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (f_{10}(x_i^j) - y_i)^2$$

On cherche donc $(w_i^1)_{ij}, (w_{ji}^2)_{ij} \in \underset{\begin{array}{l} (w_i^1)_{ij} \in \mathbb{R} \\ (w_{ji}^2)_{ij} \in \partial_{\theta, \mu, \nu}(\mathbb{R}) \end{array}}{\text{argmin}} R_m((w_i^1)_{ij}, (w_{ji}^2)_{ij})$

On peut réécrire $f(x) = \sum_{i=1}^n w_i^i \text{th}(Wx)$

$$\text{avec } x = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, W_{ij} = w_{ji}^2, \bar{w}_i = w_i^1 \text{ et } \text{th}(\bar{w})_i = \text{th}(u_i)$$
$$= \langle \bar{w}, \text{th}(Wx) \rangle$$

$$\text{On a alors } R_m(\bar{w}, W) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\langle \bar{w}, \text{th}(Wx_i) \rangle - y_i)^2$$

- 16) Le problème est connu en \bar{w} mais pas nécessairement en W donc on n'a pas forcément une solution au problème. Le modèle ne sera donc pas forcément optimal. Cependant l'actualisation du réseau de neurones via la rétro-propagation permet de trouver un minimum local au problème de minimisation du risque empirique. Le réseau de neurone a l'avantage de pouvoir modéliser un phénomène non linéaire.

Émission de composés organiques par des plantes

- 17) L'hypothèse nulle du test t est que l'émission moyenne de molécules (E)-2-homylène pour le contrôle et pour l'exposition aux rétrécissements oraux de chenilles non bousillées.

- 18) L'hypothèse alternative est que l'émission moyenne de molécules (E)-2-homylène est différente pour le contrôle et pour l'exposition aux rétrécissements oraux de

chenilles non boulillées. Autrement dit, l'exposition à des sécutions orales de chenille non boulillée a un impact sur l'émission de (E)-2-Renanol. Il s'agit d'un test bilatéral car à aucun moment, on ne sait s'assez que cette émission pouvait être plus ou moins élevée.

- 19) On utilise un test t car l'échantillon est très petit (4 plantes) et donc on ne peut pas utiliser un test Z qui repose sur la loi des grands nombres et qui requiert donc un grand nombre d'observations.
- 20) On peut conclure à partir de cette figure qu'avec une certaine marge d'erreur qui n'est pas précise que les sécutions orales de chenille fraîches ont un impact sur les sécotions de QWR ^(qui les impliquent étudier) et que les sécutions bouillies ont un impact sur la séction de (Z)-3-Renanol. Avec le test qui est bilatéral, on ne peut pas dire si cet impact est l'augmentation ou la diminution des émissions.
- 21) La régression logistique s'oppose avec un trop grand nombre de variables tandis qu'avoir une forêt aléatoire a moins de risque de comprendre. Les forêts aléatoires reposent sur des arbres binaires qui sont général moins performants que les autres modèles. Si on avoir une meilleure forêt aléatoire, on peut aussi faire une réduction de dimension pour avoir des variables plus pertinentes et on peut augmenter le nombre d'arbres pour avoir un meilleur score.

Date de rendu : 1er juillet 2020

Il s'agit dans ce projet de construire un modèle prédictif du risque de défaut de paiement sur un crédit, en fonction de variables décrivant la personne bénéficiant de ce prêt ainsi que l'historique des remboursements sur les 6 derniers mois.

Les données sont traitées dans le notebook `Sujet_mini_projet.ipynb`.

Quels documents rendre ? Si vous souhaitez que votre projet soit noté à la place ou en plus de l'examen écrit, vous devrez rendre :

- un rapport de projet, au format `.pdf` ou `.ipynb`;
- un fichier de prédictions au format `.csv`.

Si vous choisissez le format `.pdf` n'incluez que le code demandé (section 5 de ce document).

Quand rendre ces documents ? Le mercredi 1er juillet 2020 à midi.

Comment rendre ces documents ? À préciser.

Travail de groupe Le travail à plusieurs est autorisé. Néanmoins vous devrez rendre **un rapport et un fichier de prédictions par personne**. Le fichier de prédictions ainsi que le code et les figures inclus dans votre rapport pourront bien sûr être identiques à ceux de vos collaborateurs et collaboratrices; les interprétations et réponses aux questions doivent être individuelles.

Contenu du rapport et grille de notation

Indiquez en haut du rapport **les noms des personnes avec lesquelles vous avez travaillé sur le projet, le cas échéant**.

1. Contexte [4 pts]

Les données sont proches de données réelles. Vous semblerait-il intéressant, pour une banque, de déployer un tel modèle, entraîné sur ses données ? Quelle performance vous semblerait acceptable pour votre cas d'usage ? Quels risques pourrait-on encourir à déployer un tel modèle ? Voyez-vous des sources de biais possibles, qui pourraient conduire à de mauvaises performances et/ou à des discriminations ? Quel(s) autre(s) usage(s) pourrait-on faire de ces données ? Quels sont des usages actuels de modèles prédictifs dans l'industrie bancaire ?

Longueur de la réponse attendue : environ une demi-page.

2. Prétraitement [2 pts]

Décrivez brièvement comment vous avez prétraité vos données. Incluez une représentation visuelle de vos données prétraitées (par exemple histogrammes ou diagrammes en barres pour chacune des variables).

3. Plus proche voisin [2 pts]

L'algorithme du plus proche voisin (k NN avec $k=1$) prédit l'étiquette d'une observation comme celle de son point le plus proche dans le jeu d'entraînement.

- Quelle est la classe des hypothèses ?
- S'agit-il d'un modèle paramétrique ou non ?
- Peut-on écrire cet algorithme sous la forme de la minimisation d'un risque empirique ? Si oui, précisez la classe des hypothèses, la fonction de coût et la technique d'optimisation utilisée.
Remarque : le point le plus proche d'un point du jeu d'entraînement est lui-même.

4. Sélection de modèle [8 pts]

1. Utilisez une validation croisée sur votre jeu d'entraînement (X_{train} , y_{train}) pour sélectionner les meilleurs hyperparamètres :

- d'une approche des k plus proches voisins (hyperparamètre = valeur de k);
- d'une régression logistique régularisée. Vous pouvez justifier le choix du type de régularisation soit par des arguments a priori, soit en considérant le type de régularisation comme un hyperparamètre.
Dans les deux cas, la valeur du coefficient de régularisation est à choisir par validation croisée;
- [facultatif] d'une ou plusieurs autres approches de classification de votre choix (forêts aléatoires, SVM, etc.).

2. Ré-entraînez ces méthodes (k NN avec k optimal; régression logistique avec votre choix de régularisation et votre choix de coefficient de régularisation; etc.) sur votre jeu d'entraînement (X_{train} , y_{train}) et appliquez les modèles ainsi appris à votre jeu de test (X_{test} , y_{test}).

Dans le rapport, incluez

- Votre code;
- Une ou plusieurs figures permettant de comparer les performances (selon la ou les mesures de performance de votre choix) des différentes approches, d'une part, en validation croisée, et d'autre part, sur votre jeu de test;
- Une analyse statistique : les prédictions (valeurs de la fonction de décision) que vous obtenez sur le jeu de test sont-elles significativement différentes entre les différents modèles ? Une des façons de répondre à cette question consiste à utiliser un test de comparaison de deux distributions continues non-indépendantes tels que le test des rangs signés de Wilcoxon, ou *Wilcoxon signed-rank test*, implémenté dans `scipy.stats.wilcoxon`. Si vous comparez plus de deux modèles, n'oubliez pas d'utiliser une correction de tests d'hypothèses multiples.
- Quelques phrases pour analyser ces résultats et en conclure quel modèle final choisir.

Détail des points

Implémentation de la procédure de validation croisée	1 pt
Choix des grilles d'hyperparamètres	1 pt
Figures	2 pts
Test statistique	2 pts
Choix du modèle	2 pts

5. Prédictions finales [2 pts]

Entraînez votre modèle final sur l'ensemble des données publiques (`X_public`, `y_public`) et faites vos prédictions sur les données non-étiquetées disponibles dans `data/credit_private.csv`.

Votre fichier de prédictions doit comporter autant de lignes que `data/credit_private.csv` et deux colonnes : une pour des prédictions binaires (0 ou 1) et une pour des scores retournés par une fonction de décision (plus ce score est élevé, plus le risque de défaut est élevé). Chaque ligne de ce fichier correspondra à la même ligne de `data/credit_private.csv`.

La première ligne de ce fichier sera un en-tête : `Prediction_binaire Prediction_score`

Si vos prédictions binaires sont dans l'array numpy de dimension 1 `y_pred_binary` et vos scores de décision dans l'array numpy de dimension 1 `y_pred_scores`, vous pouvez créer votre fichier de prédition en utilisant :

```
# Reshape 1-dimensional arrays to 2-dimensional and stack them in the same array
y_array_final = np.hstack((y_pred_binary.reshape((y_pred_binary.shape[0], 1)),
                           y_pred_scores.reshape((y_pred_scores.shape[0], 1)))

# Save array to file
np.savetxt("mon_fichier.csv",
           y_array_final,
           fmt=('%d', '%.3f'),
           header='Prediction_binaire\tPrediction_score',
           delimiter='\t', comments="")
```

6. Apprentissage profond [2 pts]

Pensez-vous qu'un réseau de neurones profond puisse être adapté à ce problème ? Expliquez pourquoi en quelques phrases.

Examen de Thermo-Mécanique des Fluides – 2h30 heures

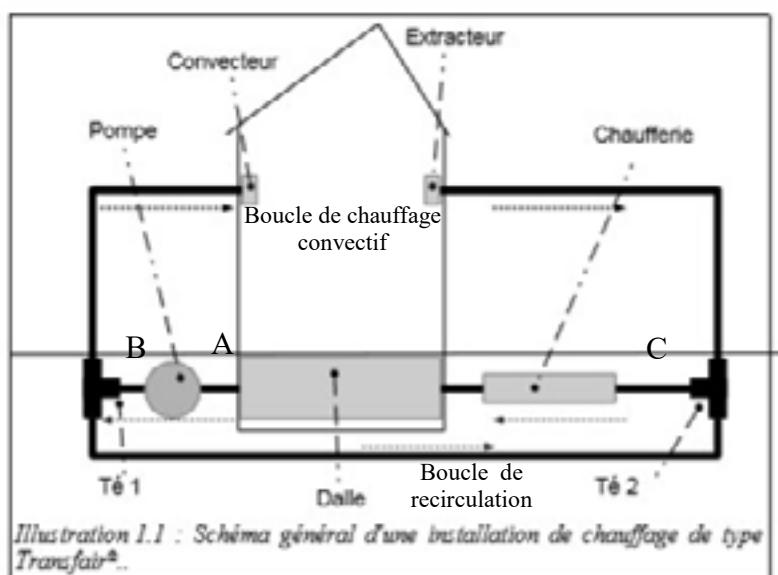
31 janvier 2019

Etude d'un chauffage industriel à air- Transfair

—O—

Support de cours et calculatrice autorisés – Téléphone et ordinateur interdits
Les Parties I et II sont indépendantes – la partie III est partiellement indépendante

On vous demande d'expertiser un nouveau système de chauffage appelé Transfair®. Il s'agit d'un dispositif de chauffage de grands locaux industriels (hangars, garages...) basé sur le principe d'une dalle rayonnante. L'avantage du chauffage par dalles rayonnantes sur les convecteurs thermiques est qu'elles permettent un confort d'utilisation très supérieur à dépense énergétique équivalente. Dans de très grands volumes en effet, l'être humain placé à distance d'une paroi rayonnante en ressentira la chaleur de manière efficace, même si l'air environnant est à une température plus basse. Le dispositif de chauffage industriel Transfair® allie dalle rayonnante et convecteur thermique (cf. figure 1.1). L'air passe d'abord par une chaufferie, puis est amené dans les tuyaux installés dans une dalle. L'air réchauffe la dalle, et donc le local. La circulation de l'air est assurée par une pompe située en aval de la dalle. Une partie du flux est ensuite injectée directement dans le local (boucle de chauffage convectif), puis aspiré vers la chaufferie via un extracteur, le reste est remis en circulation (boucle de recirculation). La répartition des débits entre deux boucles est effectuée par deux tés.



Partie I : Etude Fluides

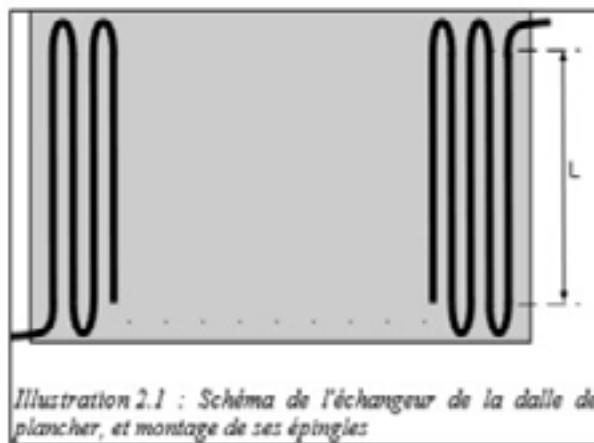
1. Dimensionnement du réseau

On désire chauffer un local de 1000 m^2 , avec une hauteur sous plafond de 6,5m. Pour des raisons d'encombrement, on utilise pour la construction du réseau des tuyaux cylindriques de diamètre $D=10 \text{ cm}$. Pour la suite du problème on va considérer que la vitesse de l'air dans la branche de la chaufferie au régime nominal est $V=20 \text{ m.s}^{-1}$.

Question 1 : Calculer le nombre de Reynolds et le débit volume Q_v ?

2 Étude de l'échangeur de la dalle

L'échangeur de la dalle de plancher est constitué de 161 tubes de longueur $L = 20 \text{ m}$ reliés en série par des coudes. L'ensemble est relié en amont à la chaufferie, et en aval à la pompe. Les tuyaux constituant l'échangeur sont de diamètre D (cf. question 1), sont en PVC lisse de rugosité ϵ , et on considère que l'air y circule avec la vitesse V donnée en question 1.



Les tubes rectilignes sont reliés entre eux par des coudes à 180° de coefficient de perte de charge k_{180} , et l'ensemble est raccordé au réseau par deux coudes à 90° de coefficient de perte de charge k_{90} .

Question 2 : Quelle est la perte de charge de l'échangeur ?

3 Étude des pertes dans les boucles

Le circuit de chauffage peut-être considéré comme une pompe mettant en circulation l'air dans un réseau constitué de trois branches (figure 3.1). La pompe est placée entre les points A et B, tandis qu'entre les points B et C se placent en parallèle les deux boucles (chauffage convectif et de recirculation), et enfin la chaufferie et la dalle sont entre les points C et A. On appelle respectivement R₁, R₂ et R₃ les résistances hydrauliques de la branche dalle + chaufferie (R₁), de la boucle de chauffage convectif (R₂) et de la boucle recirculation (R₃).

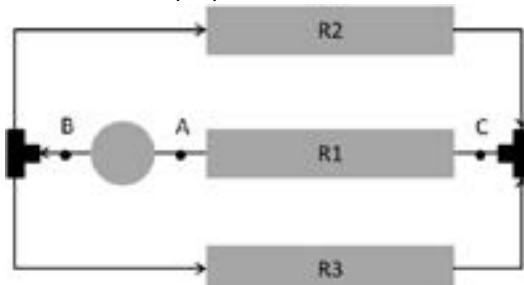


Illustration 3.1 : Schéma équivalent du réseau

Question 3 : Montrer que la résistance hydraulique totale du réseau peut s'écrire :

$$R_T = R_1 + R_{eq}$$

On définit ici la résistance hydraulique comme :

$$R = \frac{\Delta P}{\left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \dot{Q}^2 / S^2\right)}$$

R_{eq} est la résistance de l'ensemble des deux boucles parallèles (chauffage convectif et de recirculation) y compris les 2 tés. Rappelons que les tuyaux de l'échangeur et des 2 boucles parallèles ont le même diamètre D.

Question 4 : Calculer R₁.

Question 5 : Montrer qu'entre les points B et C la résistance R_{eq} des deux boucles parallèles peut s'écrire:

$$\frac{1}{\sqrt{R_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}}$$

Les 2 tés T_1 et T_2 créent des pertes de charges sur les 2 boucles parallèles avec des coefficients k_{T1} et k_{T2} par boucle. On considérera que la résistivité λ dans les boucles de recirculation et de chauffage convectif est la même que celle calculée à la question 2.

Question 6 : Calculer R_2 , R_3 et R_{eq} pour le régime nominal, et calculer la perte de charge entre B et C.

4 Bilan des pertes de charge

On considère l'ensemble des pertes de charge entre les points B et A du réseau (cf. figure 3.1). La chaufferie est pourvue d'une pompe autonome qui assure la compensation des pertes internes, il n'y a donc pas de perte de charge à prendre en compte pour cet élément.

Question 7:

Calculer R_T pour le régime nominal, ainsi que la perte de charge totale du réseau.

5 Dimensionnement de la pompe

On prendra pour les pertes de charges entre B et A, $\Delta\Pi_{AB} = 172\,938 \text{ Pa}$ et $Q_v = 0,157 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$

Pour ces calculs, on prendra une valeur de rendement η_p pour la pompe.

Question 8: Quelle sera la puissance requise pour cette machine ?

Données numériques :

Constantes physiques

ρ	$1,23 \text{ kg.m}^{-3}$	Masse volumique de l'air à 20 °C
μ	$1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$	Viscosité de l'air à 20 °C
g	$9,81 \text{ m.s}^{-2}$	Accélération moyenne de la pesanteur à la surface de la terre

Paramètres techniques

V	20 m.s^{-1}	Vitesse de l'air dans la branche principale
-----	-----------------------	---

Caractéristiques communes aux tubes du réseau :

D	$0,1 \text{ m}$	Diamètre
ϵ	$0,05 \text{ mm}$	Rugosité des tubes (PVC)

Caractéristiques pour la dalle :

L	20 m	Longueur des tubes des épingle de la dalle
k_{180}	$0,35$	Coefficient de perte de charge coude à 180 °
k_{90}	$0,15$	Coefficient de perte de charge coude à 90 °

Caractéristiques pour les deux boucles parallèles :

k_{T1}	1	Coefficient de perte de charge par branche pour le Té 1
k_{T2}	3	Coefficient de perte de charge par branche pour le Té 2
L_R	15 m	Longueur totale de tubes pour la boucle de recirculation
L_C	30 m	Longueur totale de tubes pour la boucle de chauffage convectif
k_C	1	Coefficient de perte de charge pour la bouche de soufflage du convecteur
k_E	$0,3$	Coefficient de perte de charge pour la bouche d'extraction du convecteur

Caractéristiques de la pompe :

η_p	$0,65$	Rendement
----------	--------	-----------

Partie II : Etude thermique

1. Déperditions du local

Le local de surface au sol 1000 m^2 ($20\text{m} \times 50\text{m}$) et de hauteur sous plafond $H=6,5 \text{ m}$.

Les parois verticales et la toiture sont constituées d'une épaisseur de béton de 20 cm et d'une épaisseur d'isolant de 20 cm .

Pour le dimensionnement de l'installation, on considérera une température extérieure de -7°C et une température de l'air intérieur de 18°C .

Question 1 : Calculer les pertes thermiques pour les parois verticales et pour la paroi horizontale (toiture). En déduire les pertes totales aux parois (en W). A cette étape, les échanges radiatifs sont négligés. Par ailleurs, les pertes thermiques par le sol sont négligées.

Question 2 : Calculer les pertes liées au renouvellement d'air. En déduire les pertes thermiques totales du bâtiment.

Le débit d'air neuf pour la ventilation du local est de $0,5$ volume/heure. En d'autres termes, en deux heures, le volume total du local est renouvelé.

2. Températures des parois internes

Question 3 : Calculer la température de paroi interne pour les parois verticales et pour la paroi horizontale.

3. Puissance thermique à fournir par le système

Question 4 : sachant que les apports internes du local sont de 10 kW (occupants et machines), quelle est la puissance thermique à fournir au local pour le maintenir à une température intérieure de 18°C .

Question 5 : Quelle est la température (que l'on supposera homogène) de la surface du sol (chauffé par le système Transfair) requise pour apporter la puissance nécessaire. On fera un bilan thermique entre la surface supérieure de la dalle et le local. Le sol est considéré comme un corps gris isotrope d'émissivité $0,8$. On considérera que la surface du sol chauffée correspond à 80% de la surface totale au sol.

Question 6 : Quel est l'écart de température nécessaire entre l'entrée et la sortie de l'air passant dans la dalle pour transmettre la puissance ?

On prendra comme débit volume d'air $0,157 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Données :

h_{ext}	$25 \text{ W/m}^2/\text{K}$	coefficent d'échange convectif externe (paroi verticale ou horizontale)
$h_{\text{int,vert}}$	$7,7 \text{ W/m}^2/\text{K}$	coefficent d'échange convectif interne (paroi verticale)
$h_{\text{int,hor}}$	$5,9 \text{ W/m}^2/\text{K}$	coefficent d'échange convectif interne (paroi horizontale, c-a-d sol et plafond)
$\lambda_{\text{béton}}$	$0,92 \text{ W/m/K}$	conductivité thermique du béton
λ_{isolant}	$0,035 \text{ W/m/K}$	conductivité thermique de la laine de verre
T_{ext}	-7°C	température extérieure
T_{int}	18°C	température intérieure
$c_{\text{p,air}}$	1007 J/kg/K	chaleur massique de l'air
ε_{sol}	$0,8$	émissivité du sol
$\varepsilon_{\text{parois}}$	$0,8$	émissivité des parois
ρ_{air}	$1,2 \text{ kg/m}^3$	mase volumique de l'air
σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$	constante de Stefan Boltzmann

Partie III : Bilan sur le système

Question 1 :

A partir des résultats de l'étude fluides et de l'étude thermique, peut-on dire que l'installation est adaptée et performante ?

Proposer un design de l'échangeur de la dalle chauffante qui permettrait de diffuser la chaleur de façon plus homogène dans le local et limiterait les pertes de charges.

Par rapport à l'eau, pourquoi l'utilisation de l'air comme vecteur d'énergie dans la dalle n'est pas idéale ?

CORRECTION

Partie I : Etude Fluides

1 Dimensionnement du réseau

Question 1: Calculer le nombre de Reynolds et le débit Q_v ? Nous examinons maintenant la solution d'un chauffage par rayonnement du plancher. L'énoncé indique que la vitesse débitante retenue est de 20 m.s^{-1} . Le nombre de Reynolds et le débit de volume correspondants à ces conditions sont :

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \rho V D \mu = 1,23 \cdot 20 \cdot 0,1 / 1,8105 = 137\,000 \quad (1) \\ Q_v &= V \cdot S = 0,157 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Ce qui correspond à un régime turbulent transitoire.

2 Étude de l'échangeur de la dalle

Question 2 : Quelle la perte de charge de l'échangeur ? L'échangeur est constitué d'un ensemble de tubes rectilignes, reliés par des coudes. Le calcul des pertes de charges fait donc intervenir deux termes, l'un pour les pertes linéaires, et l'autre pour les pertes singulières :

$$\Delta \Pi_{\text{lec}} = 1/2 \cdot \rho \cdot Qv^2 / S^2 * (k_{\text{lin}} + k_{\text{sing}}) \quad (2)$$

Avec :

$$\begin{aligned}k_{\text{lin}} &= n_1 \cdot (L/D) \cdot \lambda(\mathfrak{R}; \epsilon/D) \\ k_{\text{sing}} &= n_2 \cdot k_{90} + n_3 \cdot k_{180}\end{aligned} \quad (3)$$

Où n_1 , n_2 et n_3 sont respectivement le nombre de tubes de longueur L , le nombre de coudes à 90° et le nombre de coudes à 180° dans l'échangeur, et λ est la résistivité hydraulique du tube utilisé. Un examen de la figure 2.1 nous permet d'effectuer ces décomptes : $n_1 = 2N+1 = 161$, $n_2 = 2$, et $n_3 = N$. Soient respectivement : $n_1 = 161 = 2 \cdot 80 + 1$, $n_2 = 2$, et $n_3 = 160$.

Le calcul des pertes linéaires sera à reprendre pour d'autres branches du réseau : calculons la résistance hydraulique pour un mètre de tube, nous noterons R_{1m} ce terme. La lecture de l'abaque de Moody dans le cours (chapitre V, page 79) pour $Re = 137\,000$ et $\epsilon/D = 0,0005$ nous donne une résistivité $\lambda = 0,02$. On peut noter que ce facteur ne varie pas notablement dans les branches parallèles pour un réseau équilibré : le débit, et donc le nombre de Reynolds, y sont réduits de moitié, et le résultat ne change pas.

Calculons d'abord la résistance hydraulique pour un mètre de tube :

$$R_{1m} = (1/0,1) \cdot \lambda(137\,000; 5 \cdot 10^{-3}) = 0,02 / 0,1 = 0,2 \text{ m}^{-1} \quad (4)$$

Appelons ΔP_{dyn} la pression dynamique, et calculons ce terme qui servira à d'autres occasions :

$$\Delta P_{\text{dyn}} = 1/2 \cdot \rho \cdot Qv^2 / S^2 = 1/2 \cdot \rho \cdot V^2 = 0,5 \cdot 1,23 \cdot 400 = 246 \text{ Pa} \quad (5)$$

Au final nous avons :

$$\Delta \Pi_{\text{lec}} = 246 \cdot (161 \cdot 20 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,15 + 160 \cdot 0,35) = 172\,274 \text{ Pa} \quad (6)$$

3 Étude des pertes dans les boucles

Question 3: Montrer que la perte de charge totale du réseau peut s'écrire : $R_T = R_1 + R_{\text{eq}}$

On considère le réseau redessiné conformément à la figure 3.1. Appelons ΔP_{pompe} la pression délivrée par la pompe entre les points A et B. Le théorème de Bernoulli généralisé appliqué sur cette boucle fermée au point B permet d'écrire le bilan des pertes de charge dans le réseau :

$$\begin{aligned}\Delta \Pi_{BB} &= \Delta \Pi_{BC} + \Delta \Pi_{CA} - \Delta P_{\text{pompe}} = 0 \\ \Delta P_{\text{pompe}} &= \Delta \Pi_{BC} + \Delta \Pi_{CA} \quad (7)\end{aligned}$$

Introduisons maintenant les résistances hydrauliques dans chacune des branches du réseau, R_{eq} est la résistance hydraulique équivalente à la partie BC, et R_1 est la résistance hydraulique dans la branche CA :

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_{BC} &= 1/2.\rho.Qv^2/S^2.R_{eq} \\ \Delta\Pi_{CA} &= 1/2.\rho.Qv^2/S^2.R_1\end{aligned}\quad (8)$$

Ce qui se réécrit :

$$\Delta P_{pompe} = \Delta\Pi_{BC} + \Delta\Pi_{CA} = 1/2.\rho.Qv^2/S^2 \cdot R_T = 1/2.\rho.Qv^2/S^2 (R_{eq} + R_1) \quad (9)$$

L'équation 9 donne immédiatement le résultat cherché

Question 4: Calculer R_1

Le calcul de R_1 est immédiat, puisque l'énoncé indique que l'on peut assimiler la résistance hydraulique dans cette branche aux pertes dans l'échangeur. On a donc $R_1 = 172\ 274 / 246 = 700,3$.

Sachant que $\Delta P_{dyn} = 1/2.\rho.Qv^2/S^2 = 246 \text{ Pa}$

Question 5 : Montrer qu'entre les points B et C la résistance R_{eq} des deux boucles parallèles peut s'écrire:

Entre les points B et C le fluide prend deux chemins différents (circuit en montage parallèle), mais on note qu'aux points B et C la chute de pression ne dépend pas du chemin emprunté par le fluide. Reprenons l'équation 8 en BC, en observant qu'elle peut maintenant se réécrire en considérant séparément les branches 2 et 3 du réseau :

$$\Delta\Pi_{BC} = 1/2.\rho.Qv^2/S^2.R_{eq} = 1/2.\rho.Q_{v2}^2/S^2.R_2 = 1/2.\rho.Q_{v3}^2/S^2.R_3 \quad (10)$$

Expressions dans lesquelles R_2 et R_3 sont respectivement les résistances hydrauliques du réseau dans les branches 2 et 3. Q_v , Q_{v2} et Q_{v3} sont reliés par la conservation du débit en B :

$$Q_v = Q_{v2} + Q_{v3} \quad (11)$$

Pour établir la relation entre les résistances hydrauliques, on part de l'équation 10 :

$$\begin{aligned}Q_v &= K \cdot 1/\sqrt{R_{eq}} \\ Q_{v2} &= K \cdot 1/\sqrt{R_2} \\ Q_{v3} &= K \cdot 1/\sqrt{R_3} \\ \text{avec: } K &= (2.S^2.\Delta\Pi_{BC}/\rho)\end{aligned}\quad (12)$$

Les équations 12 reprises dans l'équation 11 donnent finalement la relation recherchée :

$$\frac{1}{\sqrt{R_{eq}}} = \frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}} \quad (13)$$

Question 6 : Calculer R_2 , R_3 et R_{eq} pour le régime nominal, et calculer la perte de charge correspondante.

La branche R_2 fait intervenir des pertes singulières aux Tés et aux bouches de convection, plus des pertes linéaires. Pour ces dernières on peut admettre que la résistance hydraulique par unité de longueur ne varie pas de manière significative lorsque l'on passe du débit dans la branche principale au débit moitié dans l'une des deux branches. Avec les éléments donnés dans l'énoncé, il vient :

$$\begin{aligned}R_2 &= k_{T1} + k_{T2} + k_c + k_e + L_c \cdot R_{1m} = 1+3+1+0,3+30 \cdot 0,2 = 11,3 \\ R_3 &= k_{T1} + k_{T2} + L_r \cdot R_{1m} = 1+3+15 \cdot 0,2 = 7\end{aligned}\quad (14)$$

D'où le calcul approché pour la résistance équivalente et la perte de charge entre B et C :

$$R_{eq} = 2,2 \\ \Delta \Pi_{BC} = \Delta P_{dyn} R_{eq} = 246 \cdot 2,2 = 539 \text{ Pa} \quad (15)$$

4 Bilan des pertes en régime nominal

Question 7: Calculer RT pour le régime nominal, ainsi que la perte de charge totale du réseau. Le calcul de R1 est immédiat, puisque l'énoncé indique que l'on peut assimiler la résistance hydraulique dans cette branche aux pertes dans l'échangeur. On a donc $R_1 = 172\ 274 / 246 = 700.3$. Ce qui donne pour RT :

$$R_T = R_1 + R_{eq} = 700.3 + 2,2 = 703 \\ \Delta \Pi_{AB} = \Delta P_{dyn} R_T = 246 \cdot 703 \approx 172\ 938 \text{ Pa} \quad (16)$$

On observe que l'essentiel des pertes est occasionné par l'échangeur de la dalle, le reste du réseau contribue à hauteur de 0,4%, ce qui justifie a posteriori des approximations faites dans la partie 3.
NB : Le calcul exact imposerait de considérer que dans les équations 12 et 13 les résistances R_2 et R_3 sont inconnues, il faut alors procéder de manière itérative en estimant les résistivités dans chaque branche en fonction des débits Q_{v2} et Q_{v3} .

5 Dimensionnement de la pompe

Question 8: Quelle sera la puissance requise pour cette machine ?

La réponse est immédiate :

$$W_{mec} = Q_v \cdot \Delta \Pi_{AB} = 0,157 \cdot 172\ 938 = 27\ 151 \text{ W} \\ W_{requis} = W_{mec} / \eta = 27\ 151 / 0,65 = 41\ 771 \text{ W} \quad (17)$$

Partie II : Etude thermique

1. Déperditions du local

Question 1: Calculer les pertes thermiques pour les parois verticales et pour la paroi horizontale (toiture). En déduire les déperditions totales aux parois (en W).

La résistance thermique pour les parois verticales s'écrit :

$$R_{pv} = \frac{1}{h_{ext} \cdot S} + \frac{e_{isolant}}{\lambda_{isolant} \cdot S} + \frac{e_{béton}}{\lambda_{béton} \cdot S} + \frac{1}{h_{int,vert} \cdot S}$$

$$R_{ph} = \frac{1}{h_{ext} \cdot S} + \frac{e_{isolant}}{\lambda_{isolant} \cdot S} + \frac{e_{béton}}{\lambda_{béton} \cdot S} + \frac{1}{h_{int,hor} \cdot S}$$

$$\Delta T = R \cdot \phi$$

$$\phi_{pv} = \frac{\Delta T}{R_{pv}} = (18 - (-7)) \left(\frac{2}{0.0188} + \frac{2}{0.0469} \right) = 3728 \text{ W}$$

$$\phi_{ph} = \frac{\Delta T}{R_{ph}} = \frac{(18 - (-7))}{(0.0061)} = 4071 \text{ W}$$

Déperdition totale $\phi_{parois} = \phi_{ph} + \phi_{pv} = 7799 \text{ W}$

Question 2 : Calculer les pertes liées au renouvellement d'air.

$$\phi_{ventilation} = \rho \cdot \dot{V} \cdot cp \cdot \Delta T = 1,2 \cdot \frac{0,5 \cdot (1000 \cdot 6,5)}{3600} \cdot 1007 \cdot (18 - (-7)) = 27\,273 \text{ W}$$

En déduire les pertes thermiques totales du bâtiment.

$$\phi_{totales} = \phi_{ventilation} + \phi_{parois} = 35\,072 \text{ W}$$

2. Températures des parois internes

Question 3 : Calculer la température de paroi interne pour les parois verticales et pour la paroi horizontale.

Prenons une paroi verticale ($50 \cdot 6,5 \text{ m}^2$)

$$\phi_{pv1} = \frac{\Delta T}{R_{pv}} = (18 - (-7)) \left(\frac{1}{0,0188} \right) = 1331,6 \text{ W}$$

On peut écrire aussi

$$\phi_{pv} = h_{int,vert} \cdot S_{p1} \cdot (T_{int} - T_{p1,int})$$

D'où

$$T_{p1,int} = T_{int} - \frac{\phi_{pv1}}{h_{int,vert} \cdot S_{p1}} = 17,5^\circ C$$

Prenons une paroi horizontale (1000 m^2)

$$\phi_{ph} = \frac{\Delta T}{R_{pv}} = 4070 \text{ W}$$

On peut écrire aussi

$$\phi_{ph} = h_{int,ho} \cdot S_{ph} \cdot (T_{int} - T_{p1,int})$$

D'où

$$T_{p1,int} = T_{int} - \frac{\phi_{ph}}{h_{int,hor} \cdot S_{ph}} = 17,3^\circ C$$

On trouve pratiquement la même valeur dans les deux cas.

3 Puissance thermique à fournir par le système

Question 4 : sachant que les apports internes du local sont de 10 kW (occupants et machines), quelle est la puissance thermique à fournir au local pour le maintenir à une température intérieure de 18°C.

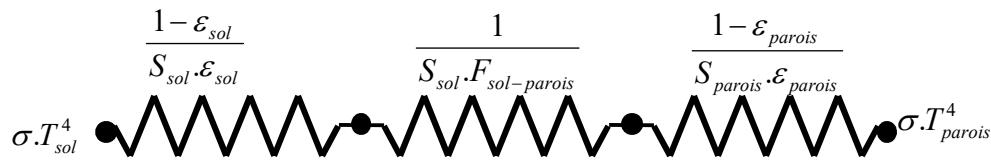
$$\text{Puissance} = \text{déperditions} - \text{apports} = 25\,072 \text{ W}$$

Question 5 : Quelle est la température de surface du sol (chauffé par le système Transfair) requise pour apporter la puissance nécessaire. Le sol est considéré comme un corps gris isotrope d'émissivité 0,8. On considérera que la surface du sol chauffée correspond à 80% de la surface total au sol.

On acceptera la solution simplifiée en considérant l'expression d'une petite surface dans un environnement de grandes dimensions. On a montré que les parois étaient à peu près à la même température (question 3)).

$$\phi_{àfournir} = h_{int} \cdot (\% \text{ chauffée}) S_{sol} \cdot (T_{sol} - T_{int}) + \varepsilon \cdot \sigma \cdot (\% \text{ chauffée}) S_{sol} \cdot (T_{sol}^4 - T_{parois}^4)$$

On peut faire un calcul sans simplification, à partir d'une analogie électrique pour le calcul du rayonnement entre deux surfaces grises.



$$\Phi_{net}^{12} = (M_1^0 - M_2^0) \cdot \left[\frac{1 - \varepsilon_{sol}}{\varepsilon_{sol} S_{sol}} + \frac{1}{S_{sol} \cdot F_{sol-parois}} + \frac{1 - \varepsilon_{parois}}{\varepsilon_{parois} S_{parois}} \right]^{-1}$$

Le facteur de forme $F_{sol-parois}=1$.

$$\Phi_{net}^{12} = (M_1^0 - M_2^0) \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon_{sol} S_{sol}} + \frac{1 - \varepsilon_{parois}}{\varepsilon_{parois} S_{parois}} \right]^{-1}$$

$$S_{sol} = 1000 \text{ m}^2$$

$$S_{parois} = 1000 + 6.5 * 50 * 2 + 6.5 * 20 * 2 = 1910 \text{ m}^2$$

$$\Phi_{net}^{12} = (M_1^0 - M_2^0) \cdot r \cdot S_{sol} \quad \text{avec } r = \left[\frac{1}{\varepsilon_{sol}} + \frac{(1 - \varepsilon_{parois}) S_{sol}}{\varepsilon_{parois} S_{parois}} \right]^{-1} = 0,724 \sim 0,8 \quad \text{l'hypothèse précédente}$$

est acceptable.

En partant de l'équation avec l'hypothèse de simplification, on résout l'équation.

Soit on linéarise, soit on utilise un solveur.

Avec solveur, on obtient $T_{sol} = 20,7^\circ\text{C}$

En linéarisant

$$\phi_{à fournir} = (h_{int} + h_{rad}) \cdot (\%chauffée) S_{sol} \cdot (T_{sol} - T_{int})$$

$$\text{Avec } h_{rad} = 4\varepsilon \cdot \sigma \cdot T_{moyenne}^3$$

On en déduit en prenant $T_{moyenne} = T_{parois}$

$$T_{sol} = T_{int} + \frac{\phi_{à fournir}}{(h_{int} + h_{rad}) \cdot (\%chauffée) S_{sol}}$$

On obtient $T_{sol} = 21,03^\circ\text{C}$

On réinjecte avec $T_{sol} = 21,03^\circ\text{C}$

$$h_{rad} = 4\varepsilon \cdot \sigma \cdot T_{moyenne}^3$$

On obtient $T_{sol} = 21,0^\circ\text{C}$ (on a convergé).

On obtient $21,1^\circ\text{C}$ en utilisant la formule du rayonnement détaillé.

Question 6 : Quel est l'écart de température nécessaire entre l'entrée et la sortie de l'air passant dans la dalle pour transmettre la puissance ?

$$\phi_{air} = \rho \cdot \dot{V} \cdot cp \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\phi_{air}}{\rho \cdot \dot{V} \cdot cp} = \frac{25072}{1.2 \cdot 0.157 \cdot 1007} = 132,2^{\circ}C$$

Partie III : Bilan sur le système

Question 1 :

A partir des résultats de l'étude fluides et de l'étude thermique, peut-on dire que l'installation est adaptée et performante ?

Proposer un design qui permettrait de diffuser la chaleur de façon homogène dans le local et limiterait les pertes de charges.

Par rapport à l'eau, pourquoi l'utilisation de l'air comme vecteur d'énergie dans la dalle n'est pas idéale ?

Les consommations de pompes sont très importantes.

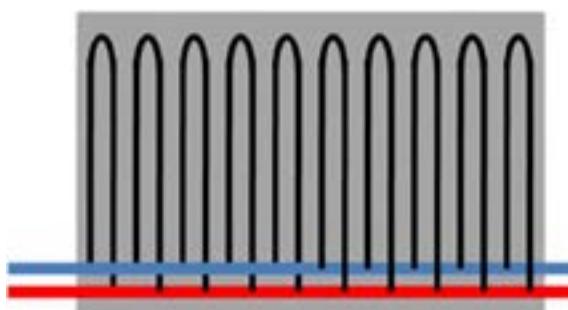
Les écarts de températures dans la dalle ne sont pas acceptables. Une partie de la dalle sera trop chaude.

Il faut mettre les tubes en parallèle avec une épingle (voir schéma ci-dessous) pour limiter les pertes de charges (il faudra toutefois ajouter les pertes de charges liées aux collecteurs, le débit d'air dans chaque tube pourra être réduit. On réduit les pertes de charges linéaires par 80 qui représentent l'essentiel des pertes de charges. Les consommations de pompes seront fortement réduites.

$$\phi_{air} = n_{tubes} \rho \cdot \dot{V} \cdot cp \cdot \Delta T$$

Si on se donne un DT max de 5 K. le débit total d'air serait de $3,52 \text{ m.s}^{-1}$ à répartir dans 80 tubes. Le débit par tube descendrait à $0,044 \text{ m.s}^{-1}$. La vitesse dans les tubes serait réduite d'un facteur 3,5 et en conséquence les pertes de charge seraient elles aussi réduites.

Le vecteur d'air n'est cependant pas très intéressant. Comparé à l'eau **sa chaleur massique est plus faible et sa masse volumique aussi**. Il faut donc un débit volumique beaucoup plus important pour transporter la même puissance. Les **consommations de pompes sont proportionnelles à $\Delta P/\rho$** et donc d'autant plus fortes que la masse volumique est faible. Par ailleurs, le **coefficients d'échange convectif** de l'air est beaucoup plus faible que celui de l'eau (facteur 20 environ).



Examen de Physique II

Physique Statistique

20 juin 2019

Durée : 2h30.

Documents autorisés : Cours de physique statistique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice.**

Constantes :

Constante de Planck : $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$ J.s , vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹

Charge de l'électron : $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9,08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c²

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K⁻¹ = $8,62 \times 10^{-5}$ eV.K⁻¹

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}$

Les 2 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; Rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs, et en particulier de justifier vos raisonnements dans les questions du type « Montrer que » ; les poids respectifs de chaque exercice pourraient être 30/10 pour une note sur 40.

1 Un modèle d'alliage magnétique

On considère un double réseau bidimensionnel carré formé de deux types de sites, A et B, organisés en deux sous-réseaux comme indiqué dans la figure ci-dessous. Les sites A (resp. B) sont situés aux intersections du sous-réseau A (resp. B). On suppose que chacun de ces sites porte un spin $S_i = \pm 1$ qui interagit avec ses voisins de la manière suivante :

- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites A (qui sont donc seconds voisins sur le réseau complet) est $-J_1 S_i^A S_j^A$, avec J_1 une constante strictement positive,
- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites B (qui sont donc seconds voisins sur le réseau complet) est $-J_1 S_i^B S_j^B$, avec J_1 la même constante strictement positive que pour le réseau A,
- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites A et B (qui sont donc premiers voisins sur le réseau complet) est $+J_2 S_i^A S_j^B$, avec J_2 une constante strictement positive.

On suppose par ailleurs que $J_2 < J_1$. En outre, lorsqu'un champ magnétique externe B_e est appliqué au système, l'énergie ajoutée au système par le site S_i^A (resp. S_j^B) est :

$$E = -M_i^A B_e = -\mu S_i^A B_e \quad (\text{resp. } E = -\mu S_j^B B_e)$$

μ étant le moment magnétique associé à chaque site.

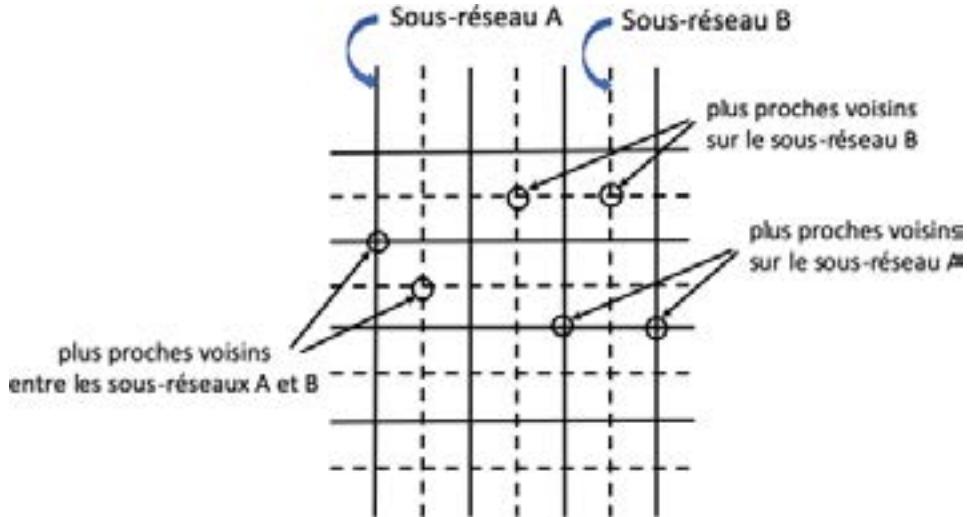


FIGURE 1 – Deux sous-réseaux A et B. Chaque intersection à l’intérieur d’un sous-réseau est un site de ce sous-réseau et porte un spin.

- Justifier très clairement que le hamiltonien complet du système en présence d’un champ magnétique externe B_e s’écrit en fonction des variables S_i^A et S_j^B et des paramètres μ , J_1 et J_2 de la façon suivante :

$$H = -\mu B_e \left(\sum_{i \in A} S_i^A + \sum_{j \in B} S_j^B \right) - J_1 \left(\sum_{\langle i, j \rangle \in A} S_i^A S_j^A + \sum_{\langle i, j \rangle \in B} S_i^B S_j^B \right) + J_2 \sum_{\langle i \in A, j \in B \rangle} S_i^A S_j^B$$

où la notation $\langle i, j \rangle \in A$ désigne des sites voisins appartenant au sous-réseau A (et de même pour les autres types de voisins).

- Dans l’approximation de champ moyen, on considère que l’influence de tous les autres spins sur l’un seul d’entre eux est équivalent à l’effet d’un champ magnétique interne qui vient s’ajouter au vrai champ magnétique externe. Justifier que, dans cette approximation, le champ interne vu par les spins du sous-réseau A (resp. celui vu par les spins du sous-réseau B) s’écrit :

$$\begin{aligned} B_{\text{int}}^A(i) &= \frac{1}{\mu} \left(J_1 \sum_{j \in A, \langle i, j \rangle} S_j^A - J_2 \sum_{k \in B, \langle i, k \rangle} S_k^B \right) \\ B_{\text{int}}^B(i) &= \frac{1}{\mu} \left(J_1 \sum_{j \in B, \langle i, j \rangle} S_j^B - J_2 \sum_{k \in A, \langle i, k \rangle} S_k^A \right) \end{aligned}$$

où les sommes s’effectuent respectivement sur les voisins de i dans le sous-réseau A et les voisins de i dans le sous-réseau B. En supposant que les deux champs internes induits par les sites A et B ne dépendent pas du site i , en déduire que l’on peut réécrire le hamiltonien en ne conservant que des champs effectifs B_{eff}^A et B_{eff}^B ainsi que la somme des spins sur les sites A et la somme des spins sur les sites B, les champs effectifs étant définis par :

$$B_{\text{eff}}^A = B_e + \frac{1}{2} B_{\text{int}}^A \quad \text{et} \quad B_{\text{eff}}^B = B_e + \frac{1}{2} B_{\text{int}}^B$$

(On justifiera en particulier avec soin le facteur 1/2.)

3. En déduire les expressions des champs effectifs en fonction des valeurs moyennes $\sigma_A = \langle S^A \rangle$ et $\sigma_B = \langle S^B \rangle$ (qui sont indépendantes des sites de sous-réseaux sur lesquels les spins vivent).
4. Donner l'expression générale de la fonction de partition $Z_N(\beta, B_e)$ du système, puis factoriser la en montrant qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$Z_N(\beta, B_e) = z_A(\beta, B_e)^N z_B(\beta, B_e)^N$$

où z_A et z_B sont des fonctions que l'on explicitera. En déduire l'énergie libre **par spin** du système dans la limite thermodynamique (on pourra introduire les paramètres réduits $b = \beta\mu B_e$, $K_1 = 2\beta J_1$ et $K_2 = 2\beta J_2$).

5. Justifier que les valeurs moyennes des spins peuvent s'écrire sous la forme

$$\sigma_A = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_i\}} S_i^A e^{-\beta H_{CM}} \quad \text{et} \quad \sigma_B = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_j\}} S_j^B e^{-\beta H_{CM}}$$

et exprimer les membres de droite de ces égalités en fonction de b , K_1 , K_2 , σ_A et σ_B (on obtient donc ainsi des équations en σ_A et σ_B).

6. Pour $B_e = 0$ (soit $b = 0$), quelle solution est toujours possible ? Déterminer la température T_f sous laquelle un état ferromagnétique (caractérisé par $\langle S^A \rangle = \langle S^B \rangle \neq 0$) est possible, et la température T_a sous laquelle un état antiferromagnétique (caractérisé par $\langle S^A \rangle = -\langle S^B \rangle \neq 0$) est possible.
7. Dans les gammes de températures où plusieurs états sont possibles, l'un de ces états est-il thermodynamiquement stable et si oui, lequel ? (on utilisera des considérations fondées sur l'énergie libre du système dans les divers états possibles).
8. Montrer que la susceptibilité magnétique à champ nul

$$\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T \right]$$

(où M est l'aimantation totale du système) suit la loi de Curie-Weiss, $\chi \sim (T - T_f)^{-1}$, à haute température, mais qu'elle suit une loi différente pour $T < T_a$. On montrera en particulier que cette susceptibilité atteint une valeur finie pour $T = T_f$ et reste continue au voisinage de $T = T_a$. Donner la valeur de la susceptibilité magnétique en $T = T_f$.

2 Le potentiel chimique d'un système fermionique à trois états

On considère un système quantique composé de N fermions sans interactions pouvant occuper chacun trois états quantiques possibles, un d'énergie ε_0 et deux d'énergie identique ε_1 (il y a donc $3N$ états disponibles dans le système).

1. Dans quel ensemble se place-t-on pour étudier le système ? Quels sont les paramètres utilisés pour décrire l'état du système ? Écrire l'expression formelle de la fonction de partition correspondante, puis calculer la pour le système décrit plus haut.

2. En déduire la valeur du potentiel thermodynamique associé (entropie, énergie libre, grand potentiel, ...) selon l'ensemble retenu pour décrire le système). Quel est la valeur du potentiel chimique en fonction de la température (on pourra introduire la variable $X = e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)}$ et le paramètre $\alpha = e^{\beta(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}$). Donner les limites (ou des équivalents) de ce potentiel chimique pour $T \rightarrow 0+$ et $T \rightarrow +\infty$.

Corrigé de l'examen de Physique II

Physique Statistique

20 juin 2019

Durée : 2h30.

Documents autorisés : Cours de physique statistique ; notes de cours ou de petites classes ; corrigés d'anciens examens de l'École. **Pas de calculatrice.**

Constantes :

Constante de Planck : $\hbar = 1,06 \cdot 10^{-34}$ J.s , vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹

Charge de l'électron : $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C , masse de l'électron : $m_e = 9,08 \times 10^{-31}$ kg = 511 KeV/c²

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K⁻¹ = $8,62 \times 10^{-5}$ eV.K⁻¹

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}$

Les 2 parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre qui vous convient ; Rédigez-les sur des feuilles différentes. Il est recommandé de donner des explications claires et complètes à vos calculs, et en particulier de justifier vos raisonnements dans les questions du type « Montrer que » ; les poids respectifs de chaque exercice pourraient être 30/10 pour une note sur 40.

1 Un modèle d'alliage magnétique

On considère un double réseau bidimensionnel carré formé de deux types de sites, A et B, organisés en deux sous-réseaux comme indiqué dans la figure ci-dessous. Les sites A (resp. B) sont situés aux intersections du sous-réseau A (resp. B). On suppose que chacun de ces sites porte un spin $S_i = \pm 1$ qui interagit avec ses voisins de la manière suivante :

- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites A (qui sont donc seconds voisins sur le réseau complet) est $-J_1 S_i^A S_j^A$, avec J_1 une constante strictement positive,
- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites B (qui sont donc seconds voisins sur le réseau complet) est $-J_1 S_i^B S_j^B$, avec J_1 la même constante strictement positive que pour le réseau A,
- l'énergie d'interaction entre deux spins voisins sur des sites A et B (qui sont donc premiers voisins sur le réseau complet) est $+J_2 S_i^A S_j^B$, avec J_2 une constante strictement positive.

On suppose par ailleurs que $J_2 < J_1$. En outre, lorsqu'un champ magnétique externe B_e est appliqué au système, l'énergie ajoutée au système par le site S_i^A (resp. S_j^B) est :

$$E = -M_i^A B_e = -\mu S_i^A B_e \quad (\text{resp. } E = -\mu S_j^B B_e)$$

μ étant le moment magnétique associé à chaque site.

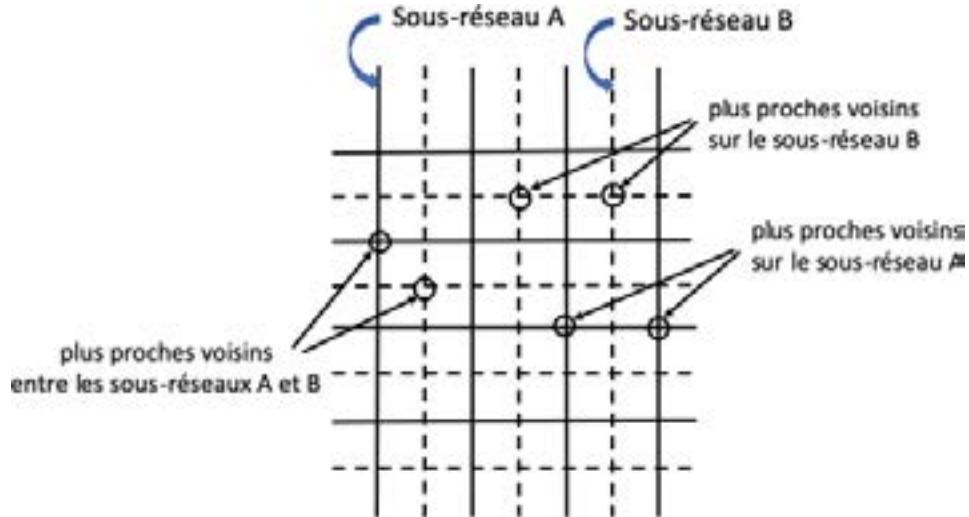


FIGURE 1 – Deux sous-réseaux A et B. Chaque intersection à l'intérieur d'un sous-réseau est un site de ce sous-réseau et porte un spin.

- Justifier très clairement que le hamiltonien complet du système en présence d'un champ magnétique externe B_e s'écrit en fonction des variables S_i^A et S_j^B et des paramètres μ , J_1 et J_2 de la façon suivante :

$$H = -\mu B_e \left(\sum_{i \in A} S_i^A + \sum_{j \in B} S_j^B \right) - J_1 \left(\sum_{\langle i,j \rangle \in A} S_i^A S_j^A + \sum_{\langle i,j \rangle \in B} S_i^B S_j^B \right) + J_2 \sum_{\langle i \in A, j \in B \rangle} S_i^A S_j^B$$

où la notation $\langle i, j \rangle \in A$ désigne des sites voisins appartenant au sous-réseau A (et de même pour les autres types de voisins).

Réponse :

Le hamiltonien complet du système s'écrit :

$$H = -\mu B_e \left(\sum_{i \in A} S_i^A + \sum_{j \in B} S_j^B \right) - J_1 \left(\sum_{\langle i,j \rangle \in A} S_i^A S_j^A + \sum_{\langle i,j \rangle \in B} S_i^B S_j^B \right) + J_2 \sum_{\langle i \in A, j \in B \rangle} S_i^A S_j^B$$

Les deux premiers termes correspondent à l'interaction entre les spins des sous-réseaux A et B et le champ magnétique externe, les deux suivants donnent l'interaction (ferromagnétique) entre deux sites plus proches voisins sur chacun des deux sous-réseaux, tandis que le dernier terme correspond à l'interaction (antiferromagnétique) entre plus proches voisins de sous-réseaux différents. On remarque que les plus proches voisins du sous-réseau A appartiennent au sous-réseau B et vice versa.

- Dans l'approximation de champ moyen, on considère que l'influence de tous les autres spins sur l'un seul d'entre eux est équivalent à l'effet d'un champ magnétique interne qui vient s'ajouter au vrai champ magnétique externe. Justifier que, dans cette approximation, le champ interne

vu par les spins du sous-réseau A (resp. celui vu par les spins du sous-réseau B) s'écrit :

$$B_{\text{int}}^A(i) = \frac{1}{\mu} \left(J_1 \sum_{j \in A, <i,j>} S_j^A - J_2 \sum_{k \in B, <i,k>} S_k^B \right)$$

$$B_{\text{int}}^B(i) = \frac{1}{\mu} \left(J_1 \sum_{j \in B, <i,j>} S_j^B - J_2 \sum_{k \in A, <i,k>} S_k^A \right)$$

où les sommes s'effectuent respectivement sur les voisins de i dans le sous-réseau A et les voisins de i dans le sous-réseau B. En supposant que les deux champs internes induits par les sites A et B ne dépendent pas du site i , en déduire que l'on peut réécrire le hamiltonien en ne conservant que des champs effectifs B_{eff}^A et B_{eff}^B ainsi que la somme des spins sur les sites A et la somme des spins sur les sites B, les champs effectifs étant définis par :

$$B_{\text{eff}}^A = B_e + \frac{1}{2} B_{\text{int}}^A \quad \text{et} \quad B_{\text{eff}}^B = B_e + \frac{1}{2} B_{\text{int}}^B$$

(On justifiera en particulier avec soin le facteur 1/2.)

Réponse :

Par définition, dans une approximation de champ moyen, l'énergie d'interaction du spin S_i^A avec ses voisins s'écrit :

$$E_i^A = - \left(J_1 \sum_{j \in A, <i,j>} S_j^A - J_2 \sum_{k \in B, <i,k>} S_k^B \right) S_i^A$$

où la somme sur j parcourt tous les sites plus proches voisins de i sur le sous-réseau A tandis que la somme sur k parcourt tous les sites plus proches voisins de i sur le sous-réseau B. En assimilant cette énergie à une énergie magnétique du spin S_i^A dans un champ extérieur $B_{\text{eff}}^A(i)$, on a donc :

$$-\mu B_{\text{int}}^A(i) S_i^A = - \left(J_1 \sum_{j \in A} S_j^A - J_2 \sum_{k \in B} S_k^B \right) S_i^A$$

d'où l'expression demandée (et la même chose pour B). On peut donc alors réécrire le hamiltonien en utilisant des champs internes moyens :

$$H_{CM} = -\mu \left(B_{\text{eff}}^A \sum_{i \in A} S_i^A + B_{\text{eff}}^B \sum_{j \in B} S_j^B \right)$$

avec $B_{\text{eff}}^A = B_e + \frac{1}{2} B_{\text{int}}^A$ et $B_{\text{eff}}^B = B_e + \frac{1}{2} B_{\text{int}}^B$

Les facteurs 1/2 dans les champs magnétiques internes apparaissent pour éviter de compter deux fois les paires d'indices de spins dans les interactions magnétiques.

3. En déduire les expressions des champs effectifs en fonction des valeurs moyennes $\sigma_A = \langle S^A \rangle$ et $\sigma_B = \langle S^B \rangle$ (qui sont indépendantes des sites de sous-réseaux sur lesquels les spins vivent).

Réponse :

En écrivant $\sigma_A = \langle S_i^A \rangle$ et $\sigma_B = \langle S_j^B \rangle$, les champs effectifs deviennent :

$$B_{\text{eff}}^A = B_e + \frac{J_1}{2\mu} z_{AA} \sigma_A - \frac{J_2}{2\mu} z_{AB} \sigma_B$$

$$B_{\text{eff}}^B = B_e + \frac{J_1}{2\mu} z_{BB} \sigma_B - \frac{J_2}{2\mu} z_{BA} \sigma_A$$

où les z_{ab} sont les nombres de coordination (à savoir le nombre de voisins d'un sous-réseau vers lui-même ou d'un sous-réseau vers l'autre). Ils sont tous égaux à 4 dans le cas qui nous intéresse ici.

4. Donner l'expression générale de la fonction de partition $Z_N(\beta, B_e)$ du système, puis factoriser la en montrant qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$Z_N(\beta, B_e) = z_A(\beta, B_e)^N z_B(\beta, B_e)^N$$

où z_A et z_B sont des fonctions que l'on explicitera. En déduire l'énergie libre **par spin** du système dans la limite thermodynamique (on pourra introduire les paramètres réduits $b = \beta\mu B_e$, $K_1 = 2\beta J_1$ et $K_2 = 2\beta J_2$).

Réponse :

Avec cette approximation, on peut facilement calculer la fonction de partition puisque H_{CM} est une somme de termes, chaque terme étant linéaire en fonction de chacun des spins. Les spins deviennent donc indépendants en supposant un champ effectif indépendant du site. Supposons qu'il y a N sites de chaque type (et l'on considérera la limite $N \rightarrow +\infty$ dans laquelle l'invariance de translation est vérifiée). La fonction de partition s'obtient alors en sommant sur toutes les configurations possibles de spins :

$$Z_N(\beta, B_e) = \sum_{\{S_i=\pm 1\}} e^{-\beta H_{CM}} = [2 \cosh(\beta\mu B_{\text{eff}}^A)]^N [2 \cosh(\beta\mu B_{\text{eff}}^B)]^N$$

car

$$z_A(\beta, B_e) = \sum_{\{S\}} e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^A S} = e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^A} + e^{-\beta\mu B_{\text{eff}}^A} = 2 \cosh(\beta\mu B_{\text{eff}}^A) = 2 \cosh(b + K_1\sigma_A - K_2\sigma_B)$$

$$z_B(\beta, B_e) = \sum_{\{S\}} e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^B S} = e^{\beta\mu B_{\text{eff}}^B} + e^{-\beta\mu B_{\text{eff}}^B} = 2 \cosh(\beta\mu B_{\text{eff}}^B) = 2 \cosh(b + K_1\sigma_B - K_2\sigma_A)$$

avec $b = \beta\mu B_e$, $K_1 = 2\beta J_1$ et $K_2 = 2\beta J_2$. L'énergie libre par spin dans la limite thermodynamique est alors :

$$\begin{aligned} F(T, B_e) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{k_B T \ln Z_N}{2N} \\ &= -\frac{k_B T}{2} \left[\ln \cosh(b + K_1\sigma_A - K_2\sigma_B) + \ln \cosh(b + K_1\sigma_B - K_2\sigma_A) + 2 \ln 2 \right] \end{aligned}$$

5. Justifier que les valeurs moyennes des spins peuvent s'écrire sous la forme

$$\sigma_A = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_i\}} S_i^A e^{-\beta H_{CM}} \quad \text{et} \quad \sigma_B = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_j\}} S_j^B e^{-\beta H_{CM}}$$

et exprimer les membres de droite de ces égalités en fonction de b , K_1 , K_2 , σ_A et σ_B (on obtient donc ainsi des équations en σ_A et σ_B).

Réponse :

Les valeurs moyennes des spins s'obtiennent en utilisant les probabilités déduites des poids de Boltzmann-Gibbs et de la fonction de partition :

$$\sigma_A = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_i\}} S_i^A e^{-\beta H_{CM}} \quad \text{et} \quad \sigma_B = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_j\}} S_j^B e^{-\beta H_{CM}}$$

On peut considérer ces équations de deux manières : (i) soit Z est la fonction de partition du système complet, et alors la somme s'effectue sur toutes les configurations possibles, configurations que l'on va pouvoir regrouper en configurations où $S_i^A = +1$ et en configurations où $S_i^A = -1$; (ii) soit Z est la fonction de partition z_A et la partie dans l'exponentielle ne concerne alors que l'énergie du site A numéro i . Dans les deux cas, le résultat est finalement :

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \text{prob}(S^A = 1) - \text{prob}(S^A = -1) = \frac{e^{\beta \mu B_{\text{eff}}^A}}{z_A} - \frac{e^{\beta \mu B_{\text{eff}}^A}}{z_A} = \tanh(b + K_1 \sigma_A - K_2 \sigma_B) \\ \sigma_B &= \text{prob}(S^B = 1) - \text{prob}(S^B = -1) = \frac{e^{\beta \mu B_{\text{eff}}^B}}{z_B} - \frac{e^{\beta \mu B_{\text{eff}}^B}}{z_B} = \tanh(b + K_1 \sigma_B - K_2 \sigma_A) \end{aligned}$$

Il s'agit d'un jeu de deux équations couplées en σ_A et σ_B qui permet d'obtenir les valeurs de ces deux moyennes.

6. Pour $B_e = 0$ (soit $b = 0$), quelle solution est toujours possible ? Déterminer la température T_f sous laquelle un état ferromagnétique (caractérisé par $\langle S^A \rangle = \langle S^B \rangle \neq 0$) est possible, et la température T_a sous laquelle un état antiferromagnétique (caractérisé par $\langle S^A \rangle = -\langle S^B \rangle \neq 0$) est possible.

Réponse :

Lorsque $B_e = 0$, le système possède deux symétries : l'énergie du système est inchangée par un retournement de tous les spins, ou bien si l'on intervertit les sous-réseaux A et B. Ces symétries impliquent de façon assez immédiate que les équations pour σ_A et σ_B doivent avoir trois types de solutions : (i) un état paramagnétique (p) caractérisé par $\sigma_A = \sigma_B = 0$; (ii) un état ferromagnétique (f) caractérisé par $\sigma_A = \sigma_B \neq 0$; (iii) un état antiferromagnétique (a) caractérisé par $\sigma_A = -\sigma_B \neq 0$.

- Si l'on applique $b = 0$ dans les équations précédentes, alors il est évident que $\sigma_A = \sigma_B = 0$ est une solution.
- Si l'on suppose $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_f$, alors les deux équations sont satisfaites si :

$$\sigma_f = \tanh[(K_1 - K_2)\sigma_f]$$

ce qui est possible si $T < T_f = 2(J_1 - J_2)/k_B$.

- Enfin, si l'on suppose $\sigma_A = -\sigma_B = \sigma_a$, on trouve que les deux équation sont à nouveau satisfaites si :

$$\sigma_a = \tanh[(K_1 + K_2)\sigma_a]$$

ce qui est possible si $T < T_a = 2(J_1 + J_2)/k_B$. Puisque $J_2 > 0$, on a $T_f < T_a$.

On arrive donc à un tableau avec trois gammes de température :

- Au dessus de T_a , seul l'état paramagnétique est autorisé et le système possède une aimantation nulle en champ nul,
- Si $T_f < T < T_a$, les états paramagnétique et antiferromagnétique sont possibles.
- Si $T < T_f$, les trois états para-, antiferro- et ferromagnétique sont possibles.

7. Dans les gammes de températures où plusieurs états sont possibles, l'un de ces états est-il thermodynamiquement stable et si oui, lequel ? (on utilisera des considérations fondées sur l'énergie libre du système dans les divers états possibles).

Réponse :

Il est intuitivement clair que l'état antiferromagnétique a l'énergie la plus faible. On peut donc s'attendre à ce que ce soit l'état le plus stable lorsqu'il peut exister. En termes thermodynamique, l'état stable est celui qui possède la plus petite énergie libre. On calcule donc $F(T, B=0)$ pour ces trois états :

$$\begin{aligned} F_p &= -k_B T \ln 2 \\ F_f &= -k_B T \left\{ \ln \cosh[(K_1 - K_2)\sigma_f] + \ln 2 \right\} \\ F_a &= -k_B T \left\{ \ln \cosh[(K_1 + K_2)\sigma_a] + \ln 2 \right\} \end{aligned}$$

Les équations ne permettent pas d'obtenir des solutions exactes pour σ_f et σ_a , mais ces équations sont de la forme $\sigma = \tanh(K\sigma)$. On peut voir sur un graphique que σ est alors une fonction croissante de K . Pour σ_f , $K = K_1 - K_2$ tandis que pour σ_a , $K = K_1 + K_2$ ce qui implique que $\sigma_a > \sigma_f$. Par conséquent, quand il existe, l'état antiferromagnétique est le plus stable. On observera donc l'état paramagnétique pour toutes les températures $T > T_a$ et l'état antiferromagnétique pour toutes les températures $T < T_a$, même pour celles inférieures à T_f . L'état ferromagnétique n'est jamais stable.

8. Montrer que la susceptibilité magnétique à champ nul

$$\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T \right]$$

(où M est l'aimantation totale du système) suit la loi de Curie-Weiss, $\chi \sim (T - T_f)^{-1}$, à haute température, mais qu'elle suit une loi différente pour $T < T_a$. On montrera en particulier que cette susceptibilité atteint une valeur finie pour $T = T_f$ et reste continue au voisinage de $T = T_a$. Donner la valeur de la susceptibilité magnétique en $T = T_f$.

Réponse :

L'aimantation par spin de notre système est :

$$M = \frac{1}{2}\mu [\langle S_i^A \rangle + \langle S_j^B \rangle] = \frac{\mu}{2} (\sigma_A + \sigma_B)$$

La susceptibilité magnétique à champ nul s'exprime donc :

$$\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T \right] = \frac{1}{2} \beta \mu^2 (\chi_A + \chi_B)$$

avec

$$\chi_A = \lim_{b \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial \sigma_A}{\partial b} \right)_T \right] \quad \text{et} \quad \chi_B = \lim_{b \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\partial \sigma_B}{\partial b} \right)_T \right]$$

À des températures supérieures à T_a , on a vu que $\sigma_A = \sigma_B = 0$ lorsque $b = B = 0$. On peut donc supposer qu'en champ faible, $\sigma_A \simeq \chi_A b$ et $\sigma_B \simeq \chi_B b$. Si l'on remplace ces valeurs dans les équations pour σ_A et σ_B et en utilisant le développement en série $\tanh = x + O(x^3)$, on aboutit aux deux équations suivantes :

$$\chi_A = 1 + K_1 \chi_A - K_2 \chi_B \quad \text{et} \quad \chi_B = 1 + K_1 \chi_B - K_2 \chi_A$$

qui se résout en :

$$\chi_A = \chi_B = \frac{1}{1 - K_1 + K_2} = \frac{T}{T - T_f}$$

La susceptibilité totale est donc :

$$\chi = \frac{1}{2} \beta \mu^2 (\chi_A + \chi_B) = \frac{\mu^2}{k_B (T - T_f)}$$

C'est la loi de Curie-Weiss qui s'applique à un ferromagnétique simple avec une température de Curie T_f . À première vue, ceci peut sembler étonnant puisque nous avons trouvé plus haut que l'état ferromagnétique est instable, même sous T_f . La divergence de χ en $T = T_f$ ne doit cependant pas exister dans la réalité car il n'y a pas de transition vers un état ferromagnétique à T_f . Pour comprendre ceci dans le détail, on doit d'abord remarquer que notre résultat pour χ est valable seulement pour $T > T_a > T_f$. Évaluons donc la susceptibilité de l'état antiferromagnétique, qui est stable pour $T < T_a$. En champ nul, on a $\sigma_A = -\sigma_B = \sigma_a$. Dans un champ faible, on aura donc :

$$\sigma_A = \sigma_a + \chi_A b + O(b^2) \quad \text{et} \quad \sigma_B = -\sigma_a + \chi_B b + O(b^2)$$

Si l'on revient à nos équations initiales en σ_A et σ_B , on s'aperçoit alors que l'on doit développer \tanh autour de $(K_1 + K_2)\sigma_a$, ce qui donne en définitive :

$$\sigma_a + \chi_A b = \tanh [(K_1 + K_2)\sigma_a] + \frac{1}{\cosh^2 [(K_1 + K_2)\sigma_a]} (1 + K_1 \chi_A - K_2 \chi_B) b$$

On sait par ailleurs que $\tanh[(K_1 + K_2)\sigma_a] = \sigma_a$, d'où :

$$\frac{1}{\cosh^2[(K_1 + K_2)\sigma_a]} = 1 - \tanh^2[(K_1 + K_2)\sigma_a] = 1 - \sigma_a^2$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}\chi_A &= (1 - \sigma_a^2)(1 + K_1\chi_A - K_2\chi_B) \\ \chi_B &= (1 - \sigma_a^2)(1 + K_1\chi_B - K_2\chi_A)\end{aligned}$$

Ces deux équations se résolvent en :

$$\chi_A = \chi_B = \frac{1 - \sigma^2}{1 - (1 - \sigma_a^2)(K_1 - K_2)} = \frac{T(1 - \sigma^2)}{T - (1 - \sigma_a^2)T_f}$$

Finalement, la susceptibilité magnétique totale du système s'écrit :

$$\chi(T) = \begin{cases} \frac{\mu^2(1 - \sigma_a^2)}{k_B[T - (1 - \sigma_a^2)T_f]} & \text{pour } T < T_a \\ \frac{\mu^2}{k_B(T - T_f)} & \text{pour } T > T_a \end{cases}$$

À la température $T = T_a$, les deux expressions ci-dessus prennent la même valeur :

$$\chi(T_a) = \frac{\mu^2}{k_B(T_a - T_f)}$$

A la température $T = T_f < T_a$ en revanche, seule la première expression s'applique et elle prend une valeur finie :

$$\chi(T_f) = \frac{\mu^2}{k_B T_f} \frac{1 - \sigma_a^2}{\sigma_a^2}$$

Dans cette approximation de champ moyen, la susceptibilité est finie et continue à la transition antiferromagnétique. Cette situation est très différente d'un ferromagnétique pour lequel la susceptibilité magnétique diverge à la transition (selon la loi de Curie-Weiss). La différence tient au fait que le champ magnétique tend à aligner tous les spins, renforçant les interactions ferromagnétiques. En revanche, les interactions antiferromagnétiques favorisent les états dans lesquels des spins voisins sont alignés dans des directions opposées, en s'opposant au champ magnétique.

2 Le potentiel chimique d'un système fermionique à trois états

On considère un système quantique composé de N fermions sans interactions pouvant occuper chacun trois états quantiques possibles, un d'énergie ε_0 et deux d'énergie identique ε_1 (il y a donc $3N$ états disponibles dans le système).

1. Dans quel ensemble se place-t-on pour étudier le système ? Quels sont les paramètres utilisés pour décrire l'état du système ? Écrire l'expression formelle de la fonction de partition correspondante, puis calculer la pour le système décrit plus haut.

Réponse :

Même si le nombre de particules est a priori donné, il s'agit d'un système quantique et on se place donc de façon privilégiée dans l'ensemble grand canonique. Non seulement la comptabilité exacte est quasi impossible en canonique (l'approximation de Maxwell-Boltzmann ne fonctionnant qu'à haute température), mais encore le nombre d'états disponibles ($3 \times N$) n'est pas très grand devant le nombre de particules. On ne peut donc jamais se placer dans l'approximation de Maxwell-Boltzmann.

Les paramètres retenus pour décrire le système sont donc la température (β ou T) et le potentiel chimique μ (et le volume V , non considéré ici). La grande fonction de partition $\Xi(\beta, \mu)$ pour des fermions s'écrit alors formellement :

$$\ln \Xi(\beta, \mu) = \int_E \ln(1 + e^{-\beta(E-\mu)}) g(E) dE$$

où $g(E)$ est la densité d'états individuels de particules du système considéré. Dans notre cas, la densité d'états est la somme de deux Diracs en deux énergies différentes, chaque particule ayant trois états disponibles à occuper. On a donc

$$g(E) = N \left\{ \delta(\varepsilon_0) + 2\delta(\varepsilon_1) \right\}$$

d'où

$$\ln \Xi(\beta, \mu) = N \left[\ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_0-\mu)}) + 2 \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_1-\mu)}) \right]$$

2. En déduire la valeur du potentiel thermodynamique associé (entropie, énergie libre, grand potentiel, ...) selon l'ensemble retenu pour décrire le système). Quel est la valeur du potentiel chimique en fonction de la température (on pourra introduire la variable $X = e^{\beta(\varepsilon_0-\mu)}$ et le paramètre $\alpha = e^{\beta(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}$). Donner les limites (ou des équivalents) de ce potentiel chimique pour $T \rightarrow 0+$ et $T \rightarrow +\infty$.

Réponse :

Le grand potentiel vaut donc :

$$J(\beta, \mu) = -k_B T \ln \Xi(\beta, \mu) = -N k_B T \left(\ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_0-\mu)}) + 2 \ln(1 + e^{-\beta(\varepsilon_1-\mu)}) \right)$$

Évaluons le potentiel chimique μ à température T . Pour cela, on écrit la valeur du nombre de particules :

$$N = \int_E \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)}} g(E) dE = N \left(\frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_0-\mu)}} + \frac{2}{1 + e^{\beta(\varepsilon_1-\mu)}} \right)$$

La quantité $X = e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)}$ vérifie donc :

$$1 = \frac{1}{1+X} + \frac{2}{1+\alpha X} \quad \text{avec} \quad \alpha = e^{\beta(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}$$

On en déduit l'équation satisfaite par X :

$$(1+X)(1+\alpha X) = (1+\alpha X) + 2(1+X) \quad \text{soit} \quad \alpha X^2 - X - 2 = 0$$

dont la solution positive est : $X = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\alpha}}{2\alpha}$

— Pour $T \rightarrow 0+$, $\beta \rightarrow +\infty$, $\alpha \rightarrow +\infty$ (car $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$), et donc $X \approx \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$, ce qui correspond à :

$$\beta(\varepsilon_0 - \mu) \approx \beta \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{2} \right) + \frac{\ln 2}{2} \quad \text{et donc} \quad \mu \approx \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2}$$

— Pour $T \rightarrow +\infty$, $\beta \rightarrow 0+$, $\alpha \rightarrow 1$, et donc $X \approx 2$, ce qui correspond à :

$$\beta(\varepsilon_0 - \mu) \approx \ln 2 \quad \text{et donc} \quad \mu \approx \varepsilon_0 - k_B T \ln 2$$

Examen du 6 juin 2019

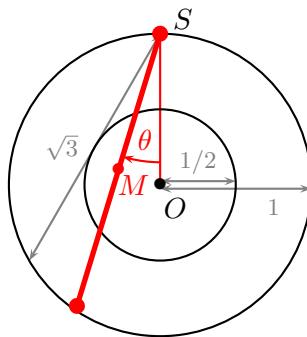
Document autorisés : le poly de cours ainsi que les résumés.

Exercice 1 : autour du paradoxe de Bertrand

Le *paradoxe de Bertrand* concerne la question suivante :

Quelle est la probabilité qu'une corde du cercle unité *tirée au hasard* ait une longueur supérieure à $\sqrt{3}$?

Bien sûr, la réponse dépend de ce que l'on entend par *au hasard* ici. La figure ci-dessous montre qu'une corde est de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si son milieu, noté M , est contenu dans le cercle de rayon $1/2$. Le centre des deux cercles est noté O .



1. Dans cette question, on suppose par symétrie que la corde (tracée en rouge) est issue du point S , situé au sommet du cercle. On note $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ l'angle formé par cette corde avec l'axe vertical (SO), et on suppose que θ est une variable aléatoire, uniformément distribuée sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
 - (a) Quelle est la probabilité que la corde ait une longueur supérieure à $\sqrt{3}$?
 - (b) Justifier que le triangle SMO est rectangle, et en déduire la valeur de OM en fonction de θ .
 - (c) Calculer la densité de la variable aléatoire $OM \in [0, 1]$.
2. On propose une seconde modélisation dans laquelle le point M est tiré au hasard, uniformément dans le disque de rayon 1. Autrement dit, ses coordonnées $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ sont vues comme un couple aléatoire de densité

$$p(x, y) = \frac{1}{C} \mathbf{1}_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}},$$

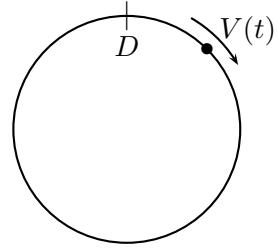
où $C > 0$ est une constante.

- (a) Quelle doit être la valeur de la constante C pour que p soit une densité de probabilité sur \mathbb{R}^2 ?
- (b) Quelle est la probabilité que la corde de centre M soit de longueur supérieure à $\sqrt{3}$?
- (c) Calculer la densité de la variable aléatoire $OM \in [0, 1]$.
3. À la lumière de ces calculs, que pensez-vous de l'affirmation selon laquelle " la probabilité que la corde soit de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ est la probabilité que la variable OM soit dans l'intervalle $[0, 1/2]$, donc $1/2$ " ?

Exercice 2 : particule dans un accélérateur

Une particule tourne dans un accélérateur, que l'on modélise par un cercle de *périmètre* 1 en un point D duquel se trouve un dispositif qui fonctionne de la manière suivante :

- au temps $t = 0$, la particule est en D , reçoit une vitesse $V_0 > 0$ et effectue un tour du cercle à vitesse constante ;
- au n -ème passage au point D , la particule reçoit une nouvelle vitesse V_n et effectue un nouveau tour de cercle avec cette vitesse.



On note T_n l'instant du n -ème passage au point D (avec $T_0 = 0$), et l'on suppose que les variables aléatoires V_0, V_1, \dots sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de probabilité de densité $p(v)$ sur $]0, \infty[$ qui vérifie l'hypothèse suivante :

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty vp(v)dv < \infty, \quad \langle \tau \rangle = \int_0^\infty \frac{p(v)}{v}dv < \infty. \quad (*)$$

1. Pour tout $n \geq 0$, exprimer T_n en fonction de V_0, \dots, V_{n-1} .
2. Pour tout $t \geq 0$, on note $V(t)$ la vitesse de la particule au temps $t \geq 0$. Exprimer $V(t)$ en fonction des suites $(V_n)_{n \geq 0}$ et $(T_n)_{n \geq 0}$.
3. On se demande quelle est la “ vitesse moyenne ” de la particule. Un premier observateur propose de se poster au point D et de relever la vitesse de la particule à chaque passage. Après le n -ème passage, la vitesse moyenne qu'il a estimée s'écrit donc $\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n V_i$. Quelle est la limite (presque sûre) de cette quantité, lorsque $n \rightarrow \infty$?
4. Un second observateur propose de relever la vitesse de la particule en temps continu, et donc de calculer la limite, lorsque $t \rightarrow +\infty$, de la quantité

$$I_t = \frac{1}{t} \int_0^t V(u)du.$$

Pour tout $t \geq 0$, on note N_t l'unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n \leq t < T_{n+1}$.

- (a) Exprimer I_t en fonction de t, N_t, T_{N_t} et V_0, \dots, V_{N_t} .
- (b) Justifier que $N_t \rightarrow \infty$ presque sûrement lorsque $t \rightarrow \infty$.
- (c) Montrer que I_t converge presque sûrement, lorsque $t \rightarrow \infty$, vers une limite qui s'exprime en fonction de la quantité $\langle \tau \rangle$ introduite dans l'hypothèse (*).
- (d) En utilisant une inégalité vue en petite classe, comparer les vitesses moyennes calculées par chacun des deux observateurs. Comment expliquez-vous ce résultat ?

Correction

Exercice 1 : autour du paradoxe de Bertrand

1. (a) D'après le dessin, la corde est de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si $\theta \in [-\pi/6, \pi/6]$. Puisque θ est uniformément distribué sur $[-\pi/2, \pi/2]$, cet événement est donc de probabilité

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{du}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

- (b) En notant S' la seconde extrémité de la corde, on constate que le triangle SOS' est isocèle en O . Ainsi, $[OM]$ est une hauteur de ce triangle, donc SMO est un triangle rectangle. On en déduit que $|\sin \theta| = OM/OS = OM$, puisque le cercle est de rayon 1.

- (c) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(OM)] &= \mathbb{E}[f(|\sin \theta|)] \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(|\sin u|) \frac{du}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\sin u) du \quad (\text{parité de } u \mapsto |\sin u|) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \quad (\text{on a posé } z = \sin u).\end{aligned}$$

Ainsi, la variable aléatoire OM possède la densité $\frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}}$ sur $[0, 1]$.

On peut également raisonner par changement de variable. Cependant, $z = |\sin \theta|$ n'est pas une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $]0, 1[$. Il faut se restreindre à $\theta \in]0, \pi/2[$.

2. (a) Pour que p soit une densité de probabilité, on doit avoir

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dx dy = 1,$$

c'est-à-dire

$$C = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} dx dy.$$

Le membre de droite est l'aire du disque de rayon 1, soit π .

- (b) La corde est de longueur supérieure à $\sqrt{3}$ si et seulement si M est dans le disque de rayon $1/2$, c'est-à-dire $X^2 + Y^2 \leq (1/2)^2 = 1/4$. La probabilité de cet événement vaut

$$\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq 1/4) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2 \leq 1/4\}} dx dy.$$

Cette intégrale est égale à la surface du disque de rayon $1/2$, c'est-à-dire $\pi/4$. La probabilité cherchée vaut donc $1/4$.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\mathbb{E}[f(OM)] = \mathbb{E}\left[f(\sqrt{X^2 + Y^2})\right] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\sqrt{x^2 + y^2}) \mathbf{1}_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} dx dy.$$

Effectuons un changement de variables permettant de passer en coordonnées polaires, et posons

$$x = z \cos \theta, \quad y = z \sin \theta, \quad dx dy = zdz d\theta.$$

Alors

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\sqrt{x^2 + y^2}) \mathbf{1}_{\{x^2 + y^2 \leq 1\}} dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{z=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} f(z) z dz d\theta = \int_0^1 f(z) 2z dz,$$

de sorte que la variable aléatoire OM possède la densité $p(z) = 2z$ sur $[0, 1]$.

Ici encore, on peut raisonner directement par un changement de variables en coordonnées polaires, obtenir la densité $p(z, \theta)$, puis intégrer par rapport à θ pour obtenir la densité marginale $p(z)$.

3. Cette hypothèse repose sur l'hypothèse implicite que la variable aléatoire OM est uniformément distribuée sur $[0, 1]$, ce qui n'est le cas dans aucun des deux modèles étudiés. Il n'est donc pas étonnant que les probabilités trouvées pour l'événement $\{OM \leq 1/2\}$ ne soient pas égales à $1/2$.

Exercice 2 : particule dans un accélérateur

1. On a $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} 1/V_i$.
2. Sur l'intervalle $[T_n, T_{n+1}[$, la particule voyage à vitesse V_n donc $V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}$.
3. Après le n -ème passage, l'observateur a relevé les vitesses V_0, \dots, V_n dont la moyenne empirique vaut $\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n V_i$ et converge, d'après l'hypothèse (*) et la loi forte des grands nombres, vers $\langle v \rangle$.
4. (a) Écrivons d'abord

$$I_t = \frac{\sum_{i=0}^{N_t-1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} V(t) dt + \int_{T_{N_t}}^T V(t) dt}{\sum_{i=0}^{N_t-1} (T_{i+1} - T_i) + (T - T_{N_t})}.$$

Sur chaque intervalle $[T_i, T_{i+1}[$, $V(t)$ vaut V_i ; de plus, $T_{i+1} - T_i = 1/V_i$. Ainsi,

$$I_t = \frac{N_t + (T - T_{N_t})V_{N_t}}{\sum_{i=0}^{N_t-1} \frac{1}{V_i} + (T - T_{N_t})}.$$

- (b) Commençons par écrire que, pour tout $M \geq 0$, $N_t \geq M$ dès que $T \geq T_M$. Or, par construction, l'événement $\{\forall M \in \mathbb{N}, T_M < \infty\}$ est presque sûr. Sur cet événement, on a donc : pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe $T_M < \infty$ tel que pour tout $T \geq T_M$, $N_t \geq M$; ce qui signifie précisément que $N_t \rightarrow \infty$.

(c) En utilisant l'inégalité

$$0 \leq T - T_{N_t} \leq T_{N_t+1} - T_{N_t} = \frac{1}{V_{N_t}},$$

dans le résultat de la question 4.(a), on obtient l'encadrement

$$\frac{N_t}{\sum_{i=0}^{N_t} \frac{1}{V_i}} \leq I_t \leq \frac{N_t + 1}{\sum_{i=0}^{N_t-1} \frac{1}{V_i}}.$$

Puisque $N_t \rightarrow +\infty$, la loi forte des grands nombres associée à l'hypothèse (*) montrent que les deux bornes de cet encadrement convergent vers

$$\frac{1}{\mathbb{E}[1/V_0]} = \frac{1}{\langle \tau \rangle}.$$

(d) L'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe $v \mapsto 1/v$ sur $]0, \infty[$ donne

$$\frac{1}{\mathbb{E}[V_0]} \leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{V_0}\right],$$

ce qui se réécrit

$$\frac{1}{\langle \tau \rangle} \leq \langle v \rangle.$$

Ainsi, le second observateur observe, en moyenne, des vitesses plus faibles que le premier. Cela s'explique par le fait que, dans la moyenne faite par le premier observateur, chaque vitesse a le même poids ; tandis que le second observateur donne un poids beaucoup plus grand aux vitesses faibles, puisqu'il les observe pendant plus longtemps.

TEST DE MATHÉMATIQUES

1 heure, sans document ni calculette

Veuillez indiquer ici vos :

NOM : _____

PRÉNOM : _____

N° DE GROUPE : _____

(groupe 1 : B. FIGLIUZZI ; groupe 2 : T. ROMARY ; groupe 3 : S. PIETRASZ ;
groupe 4 : P. MARTIN ; groupe 5 : S. NICULESCU.

L'énoncé est en page 2. Indiquez vos **réponses** sur les **deux pages suivantes**.

QUESTION DE COURS.

Énoncer le théorème de convergence monotone de Beppo Levi.

EXERCICE 1.

Soit $h : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ une application borélienne telle que $0 < \int_0^1 h(x) dx < +\infty$, et soit $\alpha \in]0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = n \cdot \ln \left(1 + \left(\frac{h(x)}{n} \right)^\alpha \right)$$

et

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est bien définie.
2. On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^1 h(x) dx$.
3. On suppose que $\alpha \in]1, +\infty[$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. (Indication : on pourra montrer que $1 + t^\alpha \leq (1+t)^\alpha \leq e^{\alpha t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.)
- 4.* On suppose que $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

EXERCICE 2.

Soit $F : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t/x^2} e^{-x^2} dx, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée. Montrer que

$$F'(t) = -\frac{1}{\sqrt{t}} F(t) \quad \forall t \in]0, +\infty[.$$

3. En déduire l'expression de $F(t)$ pour $t \in [0, +\infty[$.

CORRIGÉ DU TEST INTERMÉDIAIRE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1. 1. La fonction f_n est borélienne, comme composée de la fonction borélienne h et de la fonction continue (donc borélienne) $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto n \ln(1 + (t/n)^\alpha) \in \mathbb{R}_+$. Puisque f_n est à valeurs positives, l'intégrale I_n est bien définie, avec $I_n \in [0, +\infty]$.

2. On suppose $\alpha = 1$, de sorte que $f_n(x) = n \ln(1 + \frac{h(x)}{n})$. Clairement, $f_n(x) = 0$ si $h(x) = 0$. Puisque $\ln(1 + y) \sim y$ lorsque $y \rightarrow 0$, on a que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = h(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Par ailleurs, on a $\ln(1 + y) \leq y$ pour tout $y \in]-1, +\infty[$, par concavité de la fonction \ln . Il s'en suit que

$$0 \leq f_n(x) \leq h(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Par le théorème de convergence dominée, utilisant le fait que $h \in \mathcal{L}^1([0, 1])$, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^1 h(x) dx$.

3. On suppose que $\alpha \in]1, +\infty[$. Soit $g(t) = (1+t)^\alpha - (1+t^\alpha)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Alors $g'(t) = \alpha(1+t)^{\alpha-1} - \alpha t^{\alpha-1} \geq 0$ pour tout $t > 0$, g est continue sur \mathbb{R}_+ et $g(0) = 0$, donc $g(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs, $1+t \leq e^t$ donne $(1+t)^\alpha \leq e^{\alpha t}$ pour tout $t \geq 0$. On a donc bien montré que

$$1+t^\alpha \leq (1+t)^\alpha \leq e^{\alpha t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

On en déduit que $0 \leq f_n(x) \leq n \ln(\exp(\alpha h(x)/n)) = \alpha h(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Par ailleurs, $f_n(x) = 0$ si $h(x) = 0$ et $f_n(x) \sim n^{1-\alpha} h(x)^\alpha$ si $h(x) \neq 0$, de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

4. On suppose que $\alpha \in]0, 1[$. Si $h(x) = 0$, $f_n(x) = 0$, tandis que $f_n(x) \sim n^{1-\alpha} h(x)^\alpha$ si $h(x) > 0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = +\infty \mathbb{1}_{\{h>0\}}$. Il résulte du lemme de Fatou que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = +\infty \int_0^1 \mathbb{1}_{\{h>0\}} dx = +\infty \cdot \lambda(\{h > 0\}),$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue. Mais la fonction h étant positive et $\int_0^1 h(x) dx > 0$, on a $\lambda(\{h > 0\}) > 0$. Ainsi $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

EXERCICE 2. On note $f(x, t) = e^{-t/x^2} e^{-x^2}$.

1. On constate que (i) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue donc borélienne sur $]0, +\infty[$; (ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ ; (iii) pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq f(x, t) \leq e^{-x^2}$, et la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Il résulte du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que F est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

2. Il est clair que la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{x^2} e^{-t/x^2} e^{-x^2} \quad \forall (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[.$$

Pour obtenir une fonction dominante intégrable, on se limite à $t \in]a, +\infty[$, où $a > 0$ est un nombre arbitraire. Alors (i) pour tout $t \in]a, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (question 1.) ; (ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable sur $]a, +\infty[$ de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{x^2} e^{-t/x^2} e^{-x^2}$; (iii) pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times]a, +\infty[$, on a

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| = \frac{1}{x^2} e^{-t/x^2} e^{-x^2} \leq \frac{e^{-a/x^2}}{x^2} e^{-x^2} \leq \frac{M}{a} e^{-x^2}$$

où $M = \sup_{s>0} se^{-s} < +\infty$. Il résulte du théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre que F est bien dérivable sur $]a, +\infty[$ de dérivée

$$F'(t) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x^2} e^{-x^2}}{x^2} dx. \quad (1)$$

Le nombre $a > 0$ étant arbitraire, la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $F'(t)$ donné par (1) pour tout $t \in]0, +\infty[$. Faisant le changement de variables $y = \sqrt{t}/x$, d'où $dy = -(\sqrt{t}/x^2)dx$, on obtient

$$F'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{+\infty}^0 e^{-y^2} e^{-t/y^2} dy = -\frac{1}{\sqrt{t}} F(t), \quad t > 0.$$

Notons que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3. La fonction F vérifie sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle linéaire $y' = -t^{-1/2}y$, qui s'intègre en $y(t) = Ce^{-2\sqrt{t}}$. Comme F est continue sur \mathbb{R}_+ , la constante C n'est autre que $F(0) = \sqrt{\pi}/2$. Ainsi

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\sqrt{t}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

EXAMEN ÉCRIT DE MATHÉMATIQUES**2 heures 35**

Résumé du cours autorisé.
Calculatrices et portables interdits.

Indiquez vos NOM, PRÉNOM et NUMÉRO DE GROUPE sur votre copie.

(groupe 1 : B. FIGLIUZZI ; groupe 2 : T. ROMARY ; groupe 3 : S. PIETRASZ ;
groupe 4 : P. MARTIN ; groupe 5 : S. NICULESCU)

L'exercice et les deux problèmes sont indépendants. On pourra admettre les résultats des questions non traitées.

EXERCICE (Mesure de Lebesgue de la boule unité de \mathbb{R}^n)

On note λ_n la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n et $B_n(0, r)$ la boule ouverte de \mathbb{R}^n de centre 0 et de rayon r , où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $r > 0$, $\lambda_n(B_n(0, r)) = r^n v_n$, où $v_n := \lambda_n(B_n(0, 1))$. (Indication : on pourra faire un changement de variables.)
2. Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a

$$v_n = \frac{2\pi}{n} v_{n-2}.$$

(Indication : on pourra appliquer le théorème de Fubini-Tonelli en notant que

$$B_n(0, 1) = \{x = (x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_{n-1}^2 + x_n^2 < 1, x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 < 1 - (x_{n-1}^2 + x_n^2)\} \quad .$$

3. Calculer v_n pour $1 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (Indication : distinguer les cas n pair et n impair). Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$?
4. On note $\sigma_n(r)$ la mesure naturelle (surfacique) de $\partial B_n(0, r)$, qui est une fonction continue de r . On admet le résultat suivant, obtenu par intégration par tranche :

$$\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n; r_1 < \|x\| < r_2\}) = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_n(r) dr, \quad \text{pour } 0 < r_1 < r_2.$$

Montrer que $\sigma_n(r) = nr^{n-1}v_n$. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(1)$?

PROBLÈME 1 (Théorème d'Ingham)

On note $l^2(\mathbb{Z})$ l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, i.e.

$$l^2(\mathbb{Z}) = \{(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}; \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty\}.$$

Soit $(\omega_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels vérifiant la condition de séparation spectrale uniforme :

$$\gamma := \inf_{k \neq n} |\omega_k - \omega_n| > 0. \quad (1)$$

On veut montrer que pour tout $T > 2\pi/\gamma$, il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que pour toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{C}} \in l^2(\mathbb{Z})$, on ait

$$C_1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2. \quad (2)$$

I. Dans cette partie on suppose que

$$\gamma = \pi. \quad (3)$$

1. Soit

$$h(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, +\infty[. \end{cases}$$

1.1 Montrer que h est continue sur \mathbb{R} et que $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

1.2 Montrer que $\widehat{h} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et que $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

1.3 Montrer que $\widehat{h}(-\xi) = \widehat{h}(\xi) \in \mathbb{R}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, et que $\widehat{h}(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in [-1, 1]$.

1.4 Soit $g := h * h$. Montrer que la fonction g est bien définie, continue, paire, et que $g(x) = 0$ pour $|x| \geq \pi$. Montrer qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\beta \leq \widehat{g}(\xi), \quad \forall \xi \in [-1, 1]. \quad (4)$$

2. Soit $K \subset \mathbb{Z}$ une partie **finie** et soit $(a_k)_{k \in K}$ une suite de nombres complexes. On pose $f(t) = \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

2.1 Montrer en justifiant bien que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t) |f(t)|^2 dt = \sum_{k, n \in K} a_k \overline{a_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t) e^{-i(\omega_n - \omega_k)t} dt \quad (5)$$

$$= 2\pi \sum_{k, n \in K} a_k \overline{a_n} g(\omega_k - \omega_n) \quad (6)$$

$$= 2\pi g(0) \sum_{k \in K} |a_k|^2 \quad (7)$$

2.2 Montrer que $g(0) = \pi/2$ et que

$$\int_{-1}^1 \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq \frac{\pi^2}{\beta} \sum_{k \in K} |a_k|^2 \quad (8)$$

En déduire pour tout nombre $T > 2$ l'existence d'une constante $C_2 = C_2(T) > 0$ telle que

$$\int_0^T \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k \in K} |a_k|^2 \quad (9)$$

3. On veut montrer la seconde inégalité dans (2) pour la fonction $f(t) = \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t}$.

3.1 Montrer que $h \in H^1(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée généralisée $h'(x)$. Montrer que $h' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

3.2 Soit $R > 1$ arbitraire et soit

$$k := R^2 h * h + h' * h'.$$

Montrer que k est une fonction continue, paire et nulle en dehors de l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Exprimer $\widehat{k}(\xi)$ en fonction de $\widehat{h}(\xi)$, R et ξ . Montrer que $\widehat{k}(\xi) \leq 0$ pour $|\xi| \geq R$, et montrer l'existence d'une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\widehat{k}(\xi) \leq \alpha, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

3.3 Après avoir établi que $\widehat{h}(\xi) = 2 \cos(\xi\pi/2)/(1 - \xi^2)$ pour $\xi \neq \pm 1$, montrer que $\widehat{k} \in L^1(\mathbb{R})$.

Justifier rapidement que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{k}(t) |f(t)|^2 dt = 2\pi k(0) \sum_{k \in K} |a_k|^2. \quad (11)$$

Montrer que $k(0) > 0$ et que

$$\sum_{k \in K} |a_k|^2 \leq \frac{\alpha}{2\pi k(0)} \int_{-R}^R \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt.$$

En déduire que si $T > 2$, il existe une constante $C_1 = C_1(T) > 0$ telle que

$$C_1 \sum_{k \in K} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt. \quad (12)$$

II. (Cas général) On suppose dans cette partie que $\gamma = \inf_{k \neq n} |\omega_k - \omega_n| > 0$.

1. En utilisant la partie I et un changement de variables linéaire, montrer que pour tout $T > 2\pi/\gamma$, il existe des constantes $C_1 = C_1(T, \gamma) > 0$, $C_2 = C_2(T, \gamma) > 0$ telles que pour toute partie finie $K \subset Z$ et toute suite $(a_k)_{k \in K}$ de nombres complexes, on ait

$$C_1 \sum_{k \in K} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k \in K} |a_k|^2. \quad (13)$$

2. Montrer que pour toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in L^2(\mathbb{Z})$, les deux séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i\omega_k t}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{i\omega_{-k} t}$ sont convergentes dans $L^2(0, T)$. (Indication : appliquer le critère de Cauchy et (13)). Montrer que (2) est valide avec les mêmes constantes C_1 et C_2 qu'à la question II. 1.

N.B. Le théorème d'Ingham est un résultat classique d'analyse *non harmonique* qui est d'usage courant dans l'étude du contrôle des EDP.

PROBLÈME 2 (Équation de Schrödinger sur le tore)

On s'intéresse aux solutions du système

$$iu_t + u_{xx} = 0, \quad x \in]0, 2\pi[, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

$$u(t, 0) = u(t, 2\pi), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, 2\pi), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in]0, 2\pi[. \quad (17)$$

Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p = L^p([0, 2\pi[, \mathcal{B}_{[0, 2\pi[}, \frac{dx}{2\pi})$. On note $c_n(\varphi) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx$ pour $\varphi \in L^2$ et $n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer, par un calcul formel, que si $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx}$ est solution de (14), (15), (16) et (17), alors $a_n(t) = c_n(\varphi) e^{-in^2 t}$.

2. On suppose dans cette question que φ est une fonction 2π -périodique de classe C^3 sur \mathbb{R} .

2.1 Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(\varphi)| < +\infty$.

2.2 Montrer que la fonction $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}$ est bien définie pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, que les dérivées partielles $u_t(t, x)$ et $u_{xx}(t, x)$ sont bien définies pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ et que la fonction u satisfait (14), (15), (16) et (17).

3. On suppose dans cette question que $\varphi \in L^2$. On note encore $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}$.

3.1 Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(t, \cdot) \in L^2$. Montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto u(t, \cdot) \in L^2$ est continue.

3.2 Soit $D = \{(n, n); n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que l'application $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus D \mapsto (n - m, -n^2 + m^2) \in \mathbb{Z}^2$ est injective.

3.3 Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et toute suite $(a_{n,m})_{-N \leq n, m \leq N}$, on a

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{-N \leq n, m \leq N} a_{n,m} e^{inx} e^{imt} \right|^2 dx dt = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N |a_{n,m}|^2.$$

3.4* Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{-N \leq n, m \leq N} c_n(\varphi) \overline{c_m(\varphi)} e^{i(n-m)x} e^{i(-n^2+m^2)t} \right|^2 dx dt \leq C^4 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 \right)^2$$

pour une constante $C > 0$.

3.5 En déduire le résultat suivant (inégalité de Strichartz due à A. Zygmund, 1974):

$$\left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, x)|^4 dx dt \right)^{\frac{1}{4}} \leq C \|\varphi\|_{L^2}.$$

A-t-on $u(t, \cdot) \in L^4$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$? pour tout $t \in \mathbb{R}$?

CORRIGÉ DE L'EXAMEN ÉCRIT DE MATHÉMATIQUES**EXERCICE (Mesure de Lebesgue de la boule unité de \mathbb{R}^n)**

1. Posant $y = rx$, d'où $dy = r^n dx$, on obtient

$$\lambda_n(B_n(0, r)) = \int_{B_n(0, r)} 1 dy = \int_{B_n(0, 1)} r^n dx = r^n v_n.$$

2. Par le théorème de Fubini-Tonelli appliqué sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ à la fonction borélienne positive $1_{B_n(0, 1)}$, on obtient que

$$\begin{aligned} v_n &= \lambda_n(B_n(0, 1)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{B_n(0, 1)} dx \\ &= \int_{B_2(0, 1)} dx_{n-1} dx_n \int_{\{x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 < 1 - x_{n-1}^2 - x_n^2\}} dx_1 \dots dx_{n-2} \\ &= \int_{B_2(0, 1)} (1 - x_{n-1}^2 - x_n^2)^{\frac{n-2}{2}} v_{n-2} dx_{n-1} dx_n \end{aligned}$$

où on a utilisé la question 1. dans la dernière égalité (avec $r = \sqrt{1 - x_{n-1}^2 - x_n^2}$). Passant en coordonnées polaires, on obtient que

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{\{(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]\}} (1 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} v_{n-2} r dr d\theta \\ &= v_{n-2} \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= 2\pi v_{n-2} \left[-\frac{1}{n} (1 - r^2)^{\frac{n}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{n} v_{n-2}. \end{aligned}$$

3. On a immédiatement que $v_1 = \int_{-1}^1 1 dx_1 = 2$, $v_2 = \int_{\{x_1^2 + x_2^2 < 1\}} 1 dx_1 dx_2 = \int_{\{(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]\}} r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \pi$, puis par application de la question 2.

$$v_3 = \frac{2\pi}{3} v_1 = \frac{4\pi}{3}, \quad v_4 = \frac{2\pi}{4} v_2 = \frac{\pi^2}{2}, \quad v_5 = \frac{2\pi}{5} v_3 = \frac{8\pi^2}{15}, \quad \text{et} \quad v_6 = \frac{2\pi}{6} v_4 = \frac{\pi^3}{6}.$$

Calculons v_n , en commençant par n pair. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que

$$v_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

C'est vrai pour $p = 1$ puisque $v_2 = \pi$, et si c'est vrai à l'ordre p , alors

$$v_{2p+2} = \frac{2\pi}{2p+2} \frac{\pi^p}{p!} = \frac{\pi^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$v_{2p+1} = \frac{2^{2p+1}\pi^p p!}{(2p+1)!}, \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

C'est vrai pour $p = 0$ puisque $v_1 = 2$. Si c'est vrai au rang p , alors

$$v_{2p+3} = \frac{2\pi}{2p+3} v_{2p+1} = \frac{2^2\pi(p+1)}{(2p+3)(2p+2)} \frac{2^{2p+1}\pi^p p!}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p+3}\pi^{p+1}(p+1)!}{(2p+3)!}.$$

On a que $v_{2p+2}/v_{2p} = \pi/(p+1) \rightarrow 0$, donc $v_{2p} \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ (la série des v_{2p} étant convergente). De même $v_{2p+3}/v_{2p+1} = \frac{2\pi}{2p+3} \rightarrow 0$ d'où $v_{2p+1} \rightarrow 0$. Finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

4. Notons que $\lambda_n(\partial B_n(0, r)) = 0$ pour tout $r > 0$. De

$$\frac{1}{h} \int_r^{r+h} \sigma_n(t) dt = \frac{1}{h} (\lambda_n(B_n(0, r+h)) - \lambda_n(B_n(0, r))) = \frac{v_n}{h} ((r+h)^n - r^n),$$

on tire en faisant $h \rightarrow 0^+$

$$\sigma_n(r) = nr^{n-1} v_n.$$

Ainsi $\sigma_n(1) = nv_n$. Les calculs de la question 3. montrent que $\sigma_{n+2}(1)/\sigma_n(1) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, de sorte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(1) = 0$.

PROBLÈME 1 (Théorème d'Ingham)

PARTIE I.

1.1 La fonction h est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$, sur $]-\infty, -\pi/2[$, sur $]\pi/2, +\infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\pi/2} h(x) = 0 = h(\pm\pi/2)$.

Donc h est continue sur \mathbb{R} , et borélienne. Étant de plus nulle pour $|x| > \pi/2$, on en déduit que $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

1.2 Puisque $h \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{h} \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $h \in L^2(\mathbb{R})$, donc $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

1.3 On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos(x\xi) dx \in \mathbb{R},$$

vu que la fonction $x \mapsto \cos x \sin(x\xi)$ est impaire. La parité de la fonction \cos entraîne celle de la fonction \widehat{h} . Pour $\xi \in [-1, 1]$, on a $\cos x \cos(x\xi) > 0$ si $|x| < \pi/2$, d'où $\widehat{h}(\xi) > 0$.

1.4 Puisque $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on sait que $g = h * h$ est bien définie et dans $L^1 \cap L^\infty$ (convolution $L^1 * L^1$ et

$L^1 * L^\infty$). De plus, g est continue sur \mathbb{R} avec $g(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x-y)h(y)dy$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Utilisant la parité de h , on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(x-y)h(y)dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(x+z)h(-z)dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h(-x-z)h(z)dz = g(-x),$$

ce qui montre que g est paire. Si $|x| \geq \pi$, alors pour $|y| < \pi/2$ on a $|x-y| > \pi/2$ et $h(x-y) = 0$. Ainsi $g(x) = 0$ si $|x| \geq \pi$. Enfin $g \in L^1(\mathbb{R})$ donc \widehat{g} est une fonction continue sur \mathbb{R} et $\widehat{g}(\xi) = \widehat{h}(\xi)^2 > 0$ pour $\xi \in [-1, 1]$. Par compacité de $[-1, 1]$, on déduit l'existence d'une constante $\beta > 0$ telle que $\beta \leq \widehat{g}(\xi)$ pour tout $\xi \in [-1, 1]$.

2.1 Notons que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, puisque $\widehat{g} = \widehat{h} \cdot \widehat{h}$ et $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t)|f(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t) \sum_{k,n \in K} a_k \overline{a_n} e^{i(\omega_k - \omega_n)t} dt = \sum_{k,n \in K} a_k \overline{a_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t) e^{-i(\omega_n - \omega_k)t} dt = \sum_{k,n \in K} a_k \overline{a_n} \widehat{g}(\omega_n - \omega_k)$$

Mais, par le théorème d'inversion dans L^1 (vu que $g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$), on a $\widehat{\widehat{g}} = 2\pi \check{g}$, d'où $\widehat{\widehat{g}}(\omega_n - \omega_k) = 2\pi g(\omega_k - \omega_n)$. Par ailleurs, on sait que $|\omega_k - \omega_n| \geq \gamma = \pi$ si $k \neq n$, et donc $g(\omega_k - \omega_n) = 0$. On arrive à la conclusion que

$$\sum_{k,n \in K} a_k \overline{a_n} 2\pi g(\omega_k - \omega_n) = 2\pi g(0) \sum_{n \in K} |a_n|^2.$$

2.2. On a $g(0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2y)+1}{2} = \pi/2$. Par la question 1.4 et le fait que $\widehat{g}(\xi) = \widehat{h}(\xi)^2 \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\int_{-1}^1 \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq \beta^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(t) |f(t)|^2 dt \leq \frac{\pi^2}{\beta} \sum_{k \in K} |a_k|^2.$$

Mais pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a (posant $t = s + 2p$)

$$\int_{-1+2p}^{1+2p} \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt = \int_{-1}^1 \left| \sum_{k \in K} (a_k e^{i\omega_k 2p}) e^{i\omega_k s} \right|^2 ds \leq \frac{\pi^2}{\beta} \sum_{k \in K} |a_k|^2.$$

Soit $T > 2$. Écrivant $[0, T] \subset [-1, 1] \cup [1, 3] \cup \dots \cup [2p-1, 2p+1]$ où $p = [(T+1)/2]$, on obtient que

$$\int_0^T \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq ([(T+1)/2] + 1) \frac{\pi^2}{\beta} \sum_{k \in K} |a_k|^2.$$

3.1 Soit $v(x) = -1_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x) \sin x$. Il est clair que $v \in L^2(\mathbb{R})$. Montrons que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx$. On a par intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi'(x) \cos x dx = [\varphi(x) \cos x]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(x)(-\sin x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx.$$

Donc $h \in H^1(\mathbb{R})$ et $h' = v$. Puisque $h' = v$ est bornée et nulle pour $|x| > \pi/2$, on voit que $h' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

3.2 On sait que $g = h * h$ (et donc aussi $R^2 g$) est continue, paire et nulle en dehors de l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Il reste à vérifier que c'est aussi vrai pour $h' * h'$. Comme $h' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ est nulle en dehors de $]-\pi/2, \pi/2[$ on a que $h' * h'$ est continue et nulle en dehors de $]-\pi, \pi[$. De plus $h' * h'$ est paire car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h' * h'(-x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(-x-y) \sin(y) dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x+y) \sin(-y) dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x-z) \sin(z) dz = h' * h'(x).$$

On a que $\widehat{k}(\xi) = R^2\widehat{h}(\xi)^2 + \widehat{h}'(\xi)^2 = (r^2 + (i\xi)^2)\widehat{h}(\xi)^2 = (R^2 - \xi^2)\widehat{h}(\xi)^2$. Comme $\widehat{h}(\xi) \in \mathbb{R}$, on a que $\widehat{k}(\xi) \leq 0$ pour $R^2 - \xi^2 \leq 0$, soit pour $|\xi| \geq R$. Enfin la fonction continue \widehat{k} atteint sa valeur maximale α sur le compact $[-R, R]$, qui est strictement positive puisque $\widehat{k}(0) = R^2\widehat{h}(0)^2 > 0$ par la question 1.3. On a bien montré l'existence d'un nombre $\alpha > 0$ tel que $\widehat{k}(x) \leq \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.3. On reprend le calcul de $\widehat{h}(\xi)$. On a pour $\xi \neq \pm 1$

$$\widehat{h}(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(1+\xi)x + \cos(1-\xi)x]dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(1+\xi)x}{1+\xi} + \frac{\sin(1-\xi)x}{1-\xi} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 \frac{\cos(\xi\pi/2)}{1-\xi^2}.$$

On en déduit que $|\widehat{k}(\xi)| = |(R^2 - \xi^2)\widehat{h}(\xi)^2| \leq 4(\xi^2 - R^2)/(\xi^2 - 1)^2$ pour $|\xi| > R > 1$. Comme par ailleurs $\widehat{k} \in L^\infty(\mathbb{R})$ (vu que $k \in L^1(\mathbb{R})$), on en déduit que $\widehat{k} \in L^1(\mathbb{R})$.

Pour prouver (11), on procède comme à la question 2.1 en utilisant le fait que $k, \widehat{k} \in L^1(\mathbb{R})$ et que $k(\omega_k - \omega_n) = 0$ si $k \neq n$ (vu que k est nulle en dehors de $]-\pi, \pi[$). On trouve par un calcul direct que

$$k(0) = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(-y) \sin y dy = (R^2 - 1) \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2y) dy > 0,$$

vu que $R > 1$, que la première intégrale est strictement positive et que la seconde est nulle. On en déduit que

$$\sum_{k \in K} |a_k|^2 = \frac{1}{2\pi k(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{k}(t) |f(t)|^2 dt \leq \frac{\alpha}{2\pi k(0)} \int_{-R}^R \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt.$$

Si $T > 2$ est donné, on choisit $R = T/2 > 1$ et on obtient (12) en appliquant l'inégalité précédente avec les coefficients $e^{i\omega_k T/2} a_k$ substitués aux a_k et on prenant $C_1 = 2\pi k(0)/\alpha$. Notons que $k(0)$ et α dépendent de R donc de T .

PARTIE II.

1. On pose $\omega'_k = (\pi/\gamma)\omega_k$ et $T' = (\gamma/\pi)T > 2$. Alors $\inf_{k \neq n} |\omega_k - \omega_n| = \pi$. Par la partie I, il existe des constantes $C'_1(T') > 0$, $C'_2(T') > 0$ telles que pour toute partie finie $K \subset \mathbb{Z}$ et toute suite $(a_k)_{k \in K}$ de nombres complexes, on ait

$$C'_1 \sum_{k \in K} |a_k|^2 \leq \int_0^{T'} \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega'_k s} \right|^2 ds \leq C'_2 \sum_{k \in K} |a_k|^2.$$

Faisant le changement de variables $t = (\pi/\gamma)s$, on arrive à

$$\frac{\pi C'_1}{\gamma} \sum_{k \in K} |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k \in K} a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq \frac{\pi C'_2}{\gamma} \sum_{k \in K} |a_k|^2.$$

2. Par (13), on a

$$\int_0^T \left| \sum_{k=p}^q a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k=p}^q |a_k|^2 \rightarrow 0$$

lorsque $q \geq p \rightarrow +\infty$. La suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^p a_k e^{i\omega_k t})_{p \geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(0, T)$, espace complet, donc elle converge dans $L^2(0, T)$ vers une fonction notée $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i\omega_k t}$. On montre de même la convergence dans $L^2(0, T)$ de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} e^{i\omega_{-k} t}$. Faisant $N \rightarrow +\infty$ dans

$$C_1 \sum_{k=-N}^N |a_k|^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{k=-N}^N a_k e^{i\omega_k t} \right|^2 dt \leq C_2 \sum_{k=-N}^N |a_k|^2,$$

on arrive à (2), avec les mêmes constantes positives C_1, C_2 .

PROBLÈME 2 (Équation de Schrödinger sur le tore)

1. Supposons que $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) e^{inx}$ soit solution de (14)-(17). Alors, si l'on peut dériver terme à terme,

$$u_t(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a'_n(t) e^{inx}, \quad u_x(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) i n e^{inx}, \quad u_{xx}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(t) (in)^2 e^{inx}$$

et donc $0 = (iu_t + u_{xx})(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (ia'_n - n^2 a_n) e^{inx}$. Cela donne pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a'_n = -in^2 a_n$, puis après intégration, $a_n(t) = e^{-in^2 t} a_n(0) = c_n(\varphi) e^{-in^2 t}$, vu que $u(0, x) = \varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{inx}$.

2.1 Puisque φ, φ' et φ'' sont 2π -périodiques de classe C^1 sur \mathbb{R} , on a $c_n(\varphi''') = (in)^3 c_n(\varphi)$. On a donc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 |c_n(\varphi)| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^6 |c_n(\varphi)|^2 \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(\varphi''')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n|^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|\varphi'''\|_{L^2} < +\infty$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'identité de Parseval. On en déduit que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n(\varphi)| < +\infty.$$

2.2 Introduisons l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \text{mesure de comptage})$ et la fonction dominante $h(n) = n^2 |c_n(\varphi)|$ qui est *intégrable* pour cette mesure de comptage, par la question 2.1. Rappelons que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}$ est l'intégrale sur \mathbb{Z} pour la mesure μ de la fonction $n \mapsto c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}$. Alors le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre montre que u est bien définie et continue sur \mathbb{R}^2 . De plus, puisque

$$\frac{\partial}{\partial t} [c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}] = -in^2 c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} [c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}] = -n^2 c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx},$$

utilisant h comme fonction dominante, on déduit du théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre que u_t, u_x et u_{xx} existent et que

$$u_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -in^2 c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}, \quad u_x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} i n c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}, \quad u_{xx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}.$$

Il est clair que (14) est satisfait. Les conditions au bord (15) et (16) sont satisfaites par chaque fonction dans la somme, donc par u (les convergences étant uniformes sur \mathbb{R}^2). Enfin (17) résulte du fait que $u(0, .) = \varphi$ et du théorème de Dirichlet.

3.1 On rappelle que l'application $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \in L^2$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert. Puisque $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi) e^{-in^2 t}|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2 < +\infty$, on obtient que $u(t, .) \in L^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, pour $t, s \in \mathbb{R}$ on a

$$\|u(t, .) - u(s, .)\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 |e^{-in^2 t} - e^{-in^2 s}|^2$$

qui tend vers 0 lorsque $s \rightarrow t$, par convergence dominée (vu que $|c_n(\varphi)|^2 |e^{-in^2 t} - e^{-in^2 s}|^2 \leq 4 |c_n(\varphi)|^2$). On a bien montré que $u \in C(\mathbb{R}, L^2)$.

3.2 Notons $f(n, m) = (n - m, -n^2 + m^2)$ pour $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus D$. Supposons que $f(n, m) = f(n', m') = (p, q)$. Alors

$q = -n^2 + m^2 = -(n-m)(n+m) = -p(n+m)$ et de même $q = -p(n'+m')$. Puisque $p = n-m \neq 0$, on en déduit que $n+m = n'+m'$, ce qui donne, avec $n-m = n'-m'$, $(n,m) = (n',m')$. On a bien prouvé que f était injective.

3.3 Par une double application du théorème de Parseval, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{-N \leq n, m \leq N} a_{n,m} e^{inx} e^{imt} \right|^2 dx dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^N \left| \sum_{m=-N}^N a_{n,m} e^{imt} \right|^2 dt \\ &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=-N}^N a_{n,m} e^{imt} \right|^2 dt \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N |a_{n,m}|^2. \end{aligned}$$

3.4 Soit pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(t, x) = \sum_{-N \leq n \leq N} c_n(\varphi) e^{-in^2 t} e^{inx}$. Alors

$$0 \leq |S(t, x)|^2 = S(t, x) \overline{S(t, x)} = \sum_{-N \leq n, m \leq N} c_n(\varphi) \overline{c_m(\varphi)} e^{i(n-m)x} e^{i(-n^2+m^2)t}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(t, x)|^4 dx dt &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{-N \leq n, m \leq N} c_n(\varphi) \overline{c_m(\varphi)} e^{i(n-m)x} e^{i(-n^2+m^2)t} \right)^2 dx dt \\ &\leq 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-N}^N |c_n(\varphi)|^2 \right)^2 dx dt \\ &\quad + 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{-N \leq n, m \leq N, n \neq m} c_n(\varphi) \overline{c_m(\varphi)} e^{i(n-m)x} e^{i(-n^2+m^2)t} \right)^2 dx dt = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

D'une part $I_1 \leq 8\pi^2 (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2)^2$. D'autre part, appliquant les questions 3.2 et 3.3 avec $N' = \sup(2N, N^2)$, on a que

$$I_2 \leq 8\pi^2 \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N |c_n(\varphi) \overline{c_m(\varphi)}|^2 = 8\pi^2 \left(\sum_{n=-N}^N |c_n(\varphi)|^2 \right)^2 \leq 8\pi^2 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 \right)^2.$$

Soit $C = (16\pi^2)^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\pi}$. On a $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(t, x)|^4 dx dt \leq C^4 (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2)^2$.

3.5 On remarque que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_n - u|^2 dx dt = \int_0^{2\pi} 2\pi [\sum_{|n|>N} |c_n(\varphi)|^2] dt = (2\pi)^2 \sum_{|n|>N} |c_n(\varphi)|^2 \rightarrow 0$$

lorsque $N \rightarrow +\infty$. Il existe donc une suite d'indices $N_k \nearrow \infty$ telle que $S_{N_k}(t, x) \rightarrow u(t, x)$ pour presque tout $(t, x) \in [0, 2\pi]^2$. On déduit du lemme de Fatou que $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, x)|^4 dx dt \leq C^4 (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2)^2 = C^4 \|\varphi\|_{L^2}^4$. Ainsi, pour presque tout $t \in [0, 2\pi[$, on a que $\int_0^{2\pi} |u(t, x)|^4 dx < +\infty$, et $u(t, \cdot) \in L^4$. Puisque la solution u est 2π -périodique en temps, c'est aussi vrai pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Ce n'est pas vrai à $t = 0$ si $\varphi \in L^2 \setminus L^4$.



1ère année
1er semestre

EXAMEN DE COMPTABILITE GENERALE
du 1^{er} Février 2019

Durée : 2h15
Total sur 200 points

Les machines à calculer de poche sont recommandées. L'ordinateur est interdit.
Documents autorisés : le manuel de compta, à l'exclusion de tout autre document.

Rq : les chiffres entre parenthèses signifient qu'ils sont négatifs.

EXERCICE 1 : (30 points)

Commenter l'article de presse suivant : « Publicis : l'AMF saisie à propos d'une opération non déclaré », publié dans LE MONDE ECONOMIE, le 18.05.2017.

- 1) Quel est l'objet du conflit entre Publicis et la société des petits porteurs ?**
- 2) Quels sont les principes comptables que Publicis n'aurait pas respecté ?**
- 3) Quel est le point de vue du commissaire aux comptes ? Comment l'expliquer ?**

Publicis : l'AMF saisie à propos d'une opération non déclarée
Une société de défense de petits porteurs demande au gendarme de la Bourse d'examiner une transaction conclue avec SAP.

Publicis a-t-il artificiellement gonflé ses résultats ? C'est le sérieux doute émis par l'un des actionnaires de la société Gouvernance en action, une société de défense des petits porteurs. Son fondateur, Fabrice Rémon, a adressé le 17 mai un courrier au président du directoire du groupe de publicité, s'étonnant de l'absence dans les comptes de l'entreprise d'une opération financière réalisée avec l'éditeur allemand de logiciels pour entreprises SAP.

Selon l'accord à l'amiable, SAP a versé à Publicis 150 millions d'euros à titre de dédommagement.

On apprend par cette lettre, d'abord dévoilée par L'Obs, que Publicis a connu des déboires avec SAP à l'occasion d'un projet prévoyant la mise en place d'un progiciel de gestion, un système d'information qui permet de suivre au jour le jour l'activité des différentes entités opérationnelles de l'entreprise.

Las, le projet a connu du retard sur plusieurs années, des surcoûts et empêché Publicis de réaliser les économies engendrées par ce genre d'outil. Au point que les deux sociétés ont finalement conclu sous l'égide d'un tribunal arbitral un accord à l'amiable actant un dédommagement au bénéfice de Publicis pour un montant de 150 M€. La somme, révélée par le courrier de Fabrice Rémon, n'est pas confirmée par Publicis, engagé par une clause de confidentialité.

L'essentiel du versement – 85 millions d'euros, selon nos informations – a eu lieu au dernier trimestre 2014, le reste ayant été affecté aux exercices 2015 et 2016. Ainsi, la somme encaissée fin 2014 a permis de donner un coup de fouet aux marges, après les surcoûts subis entre 2008 et 2014 en raison des défaillances du projet informatique, reconnaît un proche du dossier. De fait, l'année 2014 s'est bien terminée, une amélioration que le directeur financier avait attribuée en février 2015 à « une amélioration des coûts de management », sans évoquer l'indemnité transactionnelle perçue de la part de SAP.

Pourquoi un tel mystère ? Aucune entreprise n'aime étaler sur la place publique les problèmes qu'elle peut connaître, d'autant que les règlements à l'amiable sont la plupart du temps assortis d'une obligation de discréption. Ce genre d'affaires est, de fait, particulièrement pénalisante pour SAP, en tant que fournisseur de services. Le document de référence de Publicis de 2014 ne mentionne aucune « procédure judiciaire ou d'arbitrage », dans la mesure où ces sommes n'ont eu aucun effet « significatif sur les résultats ».

Ce manque d'information a pu induire en erreur des actionnaires ayant acheté des titres en février 2015.

C'est pourtant cette discréption que Fabrice Rémon remet en cause. Invisible dans les comptes, l'opération a été comptabilisée dans le résultat d'exploitation classique et non dans la case « Éléments exceptionnels » comme cela aurait dû être le cas, selon lui. Dans un communiqué, Publicis assure que « ce traitement comptable a été validé par les commissaires aux comptes qui ont aussi jugé qu'il n'était pas nécessaire de faire mention de cette information, ni dans les notes annexes aux comptes de l'année 2014 ni dans le rapport de gestion ».

EXERCICE 2 : (50 points + 20 pts bonus pour question 4) :

Jeune diplômé, vous venez d'être embauché chez Satim SA, une filiale d'un grand groupe coté de services parapétroliers qui produit des tubes utilisés à partir de plates-formes de forage offshore à grande profondeur (FPSO).

Satim SA est une filiale portant une des usines du groupe, située dans le grand Est de la France. Le Directeur Général de Satim SA a de bonnes raisons de penser que son entreprise va être vendue par la maison-mère. Dans ce contexte et pour préserver les intérêts des actionnaires minoritaires (essentiellement la famille du fondateur, qui a cédé le contrôle en 1987), il souhaite dans un premier temps analyser la santé financière de son entreprise.

Pour cet exercice, il fait confiance à vos connaissances comptables et financières ainsi qu'à votre bon sens.

- 1. Compléter les tableaux de l'annexe A3 concernant les immobilisations**
- 2. Remplir les cases avec un « ? » dans les bilans et comptes de résultat (Annexes A1 et A2)**
- 3. Identification des charges et produits se traduisant par un flux de trésorerie**

Lister sur l'annexe A2 les éléments du compte de résultat qui se traduisent par un flux de trésorerie au moment de - ou peu après- leur enregistrement en comptabilité.

4. Question Bonus (20 pts) : Audit des comptes de Satim SA

Les prédictions du Directeur Général se sont avérées exactes : la maison-mère a émis un communiqué de presse ce matin à 7h30 mentionnant que Satim SA est à vendre. Une major pétrolière néerlandaise a fait savoir vers 11h qu'elle était intéressée, a obtenu de la maison-mère le droit de procéder à une due diligence de Satim SA pendant une semaine à partir du lundi suivant, et a mandaté un cabinet d'audit renommé pour cette intervention.

Au vu des états financiers, du secteur d'activité de Satim SA et de votre expérience, quels seraient les éléments que vous jugeriez les plus significatifs, risqués, ou que vous souhaiteriez analyser de manière approfondie la semaine suivante si vous étiez membre de cette équipe d'audit ?

ANNEXES :

A-1. Bilans 2017 et 2018

A-2. Comptes de résultat 2017 et 2018

A-3. Tableau de passage des immobilisations corporelles et financières

A-1. Bilans 2017 et 2018

	ACTIF					
	2018			2017		
	Brut	Amo. et dép.	Net	Brut	Amo. et dép.	Net
Immobilisations incorporelles						
Frais d'établissement						
Frais de R&D						
Concessions, brevets, licences						
Immobilisations corporelles						
Terrains	3 214 930		?	3 214 930		?
Constructions	4 000 000	1 898 550	2 101 450	4 450 000	2 570 550	1 879 450
Installations tech., matériel et outillage	737 200	537 200	200 000	737 200	717 200	20 000
Autres immos corps.	361 250	?	300 000	661 250	39 250	622 000
Immobilisations financières						
Participations	?	?	?	?	?	?
Stock et en-cours						
Matières premières et autres approvisionnements	200 000		200 000	?		?
Produits intermédiaires et finis	232 500	50 000	182 500	?	50 000	?
Marchandises						
Créances						
Créances clients et comptes rattachés	1 286 960	130 460	1 156 500	981 220	85 000	896 220
Créances diverses	420 000		420 000	270 000		270 000
Capital souscrit-appelé, non versé	20 000		20 000			
Disponibilités	20 590		20 590	250 000		250 000
TOTAL	10 593 430	2 702 460	7 890 970	11 080 380	3 477 000	7 603 380

PASSIF (avt. répartition)	
2018	2017

Situation nette		
Capital social	2 200 000	1 800 000
Primes	136 200	126 200
Réserve légale	131 590	98 490
Réserves statutaires	626 310	397 410
Résultat net de l'exercice	?	?
Subvention d'investissement		
Provisions		
Provisions réglementées	350 500	350 000
Provisions pour risques	?	120 000
Dettes financières		
Emprunts et dettes auprès des établissements de crédit	2 856 000	3 456 000
Dettes d'exploitation		
Dettes fournisseurs et comptes rattachés	213 200	190 000
Dettes fiscales et sociales	10 080	8 280
Dettes sur immobilisations	233 200	170 000
Dettes fiscales (IS)	250 000	225 000
TOTAL	7 890 970	7 603 380

A-2. Comptes de résultat 2017 et 2018

	Charges		Produits	
	2018	2017	2018	2017
Exploitation			Exploitation	
Achats de mat. 1ères	650 000	585 000	Production vendue	4 362 000
Variation de stocks	21 520	(36 240)	Production stockée	38 240
Services extérieurs	742 000	667 800	Rep. dép et prov.	540
Impôts et taxes	141 400	127 260		600
Charges de personnel	638 300	574 470		
Dotations aux amortissements s/ immos	70 000	86 700	Produits exploitation	4 400 780
Dotations aux dépréciations s/ actif circulant	46 000	105 000		
Dotations aux provisions pour risques	10 000	9 000		
Charges exploitation	2 319 220	2 118 990		
Financières			Financiers	
Dotations aux provisions	30 000	20 000	Intérêts et assimilés	488 780
Intérêts et ch. assimilées	1 230 000	824 700	Rep. s/ prov	25 000
Charges financières	1 260 000	844 700	Produits financiers	513 780
Exceptionnelles			Exceptionnels	

S/ opé. de gestion	12 000	10 800	S/ opé. de gestion	8 000	7 200
S/ opé. en capital	600 000	540 000	S/ opé. en capital	400 000	388 320
Dot. aux prov réglementées	3 000	2 700	Reprise s/ prov et dépréciations	2 500	2 250
Charges exceptionnelles	615 000	553 500	Produits exceptionnels	410 500	397 770
Impôt s/ les sociétés	376 950	331 000			
Résultat net	?	?			
TOTAL	5 325 060	4 510 190	TOTAL	5 325 060	4 510 190

A-3. Tableau de passage des immobilisations

A-3-a. Immobilisations corporelles

	31/12/2017	+	-	31/12/2018
Valeur brute		750.000	1.500.000	
Amortissements et dépréciations		70.000	900.000	
Valeur nette				

A-3-b. Immobilisations financières

	31/12/2017	+	-	31/12/2018
Valeur brute	100.000	/	/	100.000
Amortissements et dépréciations	15.000	30.000	20.000	25.000
Valeur nette				

EXERCICE 3 – (70 points) : Bilan et compte de résultat:

1 - Une augmentation du poste correspondant à l'un des comptes ci-après se traduit-elle par un débit ou par un crédit ? - mettre une croix

	Débit	Crédit
Clients - factures à établir		
Dotations aux provisions pour risques et charges d'exploitation		
Valeurs comptables des éléments d'actif cédés		
Amortissements des immobilisations incorporelles		
Variation des stocks de produits		
Fournisseurs - effets à payer		

Reprises sur provisions pour dépréciation des actifs circulants		
Variation des stocks de matières premières (et fournitures)		
Valeurs mobilières de placement		
Sécurité sociale		
Charges constatées d'avance		
Actionnaires : capital souscrit - non appelé		
Subventions d'équipement		
Provisions pour dépréciation des titres de participation		
Emprunt obligataire		

2 - Par quelles écritures se traduisent au journal général

- a) l'émission d'un emprunt obligataire de 10 000 obligations de prix d'émission 150 € ;
- b) une émission de 20 000 actions en numéraire, de valeur nominale 100 €, et de prix d'émission 120 € ? Le capital social correspondant n'est appelé et libéré qu'à 25 %. Selon la loi, la prime est quant à elle entièrement libérée à la souscription ;
- c) Le 31/10, l'entreprise se voit exiger le paiement d'une amende pour litige d'un montant 45 000 €, payable sous trois mois. Elle avait été antérieurement provisionnée à 35 000 €.
- d) Au 31/12, l'inventaire révèle que les stocks de matières premières ont diminué de 15 000 €. Au début de l'exercice, ils étaient de 90 000 €. On constate des détériorations sur certaines références, et on estime la perte de valeur probable à 5 000 €.
- e) en fin d'année, l'immobilisation de frais de recherche et développement, estimés globalement à 800 000 € (les dépenses de personnel, fournitures et services extérieurs correspondantes ont été constatées et comptabilisées en charges tout au long de l'année) ;
- f) en fin d'année, la constatation qu'on n'a pas reçu l'avis de la banque sur le montant des frais financiers qu'on devra lui payer au titre de l'exercice ; on évalue ces derniers à 150 000 € ;
- g) Achat de fournitures informatiques pour 500 € et d'un ordinateur pour 5 000 €, le fournisseur acceptant de faire crédit de 3 000 € payables à 90 jours fin de mois

EXERCICE 4. (50 points) : Evénements de Janvier 2017 de la société Paul19 :

On donne ci-après, en milliers d'Euros, les bilans simplifiés après répartition de 2018 et de 2017 et le compte de résultat de 2018 de la société Paul19.

BILANS 2017 et 2018 en k€

ACTIF	2017	2018	PASSIF	2017	2018
Immobilisations nettes	6 900	11 000	Capital	5 000	7 300
Stocks	1 570	1 230	Primes	0	300
Titres de participation	530	200	Réserves	900	1000
Clients et comptes rattachés	1 620	1 950	Report à nouveau	30	70

Disponibilités	350	390	Prov. pour risques et charges	360	150
			Emprunts	2 500	4 000
			Fournisseurs et cptes rattachés	2 070	1 770
			Dettes fiscales et sociales	110	180
Total	10 970	14 770		10 970	14 770

COMPTE DE RESULTAT 2018 en k€

CHARGES		PRODUITS	
Charges d'exploitation		Produits d'exploitation	
. Achats de matières premières	2 760	. Production vendue	7 610
. Variation des stocks de matières premières	200	. Production stockée	-140
. Autres charges externes	610	. Production immobilisée	560
. Impôts, taxes et versements assimilés	430		
. Charges de personnel	3 780		
. Dotations aux amortissements	590		
Charges financières		Produits financiers	
Charges d'intérêt	390	Dividendes	50
Charges exceptionnelles		Produits exceptionnels	
sur opérations de gestion	410	. sur opérations en capital	1960
. sur opérations en capital	700	. reprises de provisions	330
. dotations aux provisions	120		
Impôts sur les bénéfices	220		
Bénéfice	160		
Total	10 370	Total	10 370

Questions :

- 1) Calculer l'investissement en immobilisations en 2018
- 2) QCM :

	VRAI	FAUX
D1) Le bénéfice de 160 est net		
D2) Paul19 a consommé pour 2760 k€ de matières premières en 2018		
D3) Elle a versé 50 k€ à ses actionnaires		
D4) L'entreprise a remboursé 390 d'emprunt à son banquier en 2018		
D5) Les stocks ont diminué en 2018		
D6) Paul19 a procédé à une augmentation de capital en 2018		
D7) Paul19 a payé 430 k€ d'impôts et taxes en 2018		

EXERCICE 5. (5 points BONUS) :

Que signifie le sigle : « VNCEAC » ?

NB : il sera accordé une grande importance à la capacité à dire l'essentiel sans se perdre dans les détails. Les affirmations grossièrement farfelues donneront lieu à minoration de la note. Un excès de fautes d'orthographe aussi.

Chaque question est notée sur 2 points

1 – Pourquoi est-il normal que, dans le monde, la production économique, mesurée par le PIB, soit au premier ordre une fonction linéaire de la quantité d'énergie consommée ?

2 – Pourquoi est-il normal que, pour les combustibles fossiles, il y ait un jour – ou déjà eu – un maximum à l'approvisionnement mondial, appelé pic ?

3 – Comment évolue un surplus de CO₂ atmosphérique créé aujourd'hui en cas d'arrêt des émissions ? Tirez-en deux conclusions essentielles.

4 – Citez deux processus d'amplification du réchauffement en cours liés à la dynamique interne du système terre, en précisant le mécanisme à l'œuvre

5 – Pourquoi est-il normal que l'inventaire des risques liés au changement climatique soit à jamais impossible à établir précisément ?

6 - Quelles sont les diverses manières d'économiser de l'énergie ?

7 – Pourquoi est-il normal, au regard de la physique, que l'énergie nucléaire soit une énergie à faible teneur en CO₂ ?

8 – Pourquoi est-il utile de rajouter une comptabilité carbone, c'est-à-dire une comptabilité physique, en plus de la comptabilité monétaire ?

9 - Selon vous, quels sont les postes significatifs de l'usage d'Internet et des télécommunications en général ? A quelles conditions peut-on considérer que cela « dématérialise » de passer du papier à l'informatique ?

10 – Pourquoi sommes nous historiquement passés des ENR aux combustibles fossiles ?