

Le tenseur des contraintes de Cauchy

Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

Lois d'Euler du mouvement

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{\mathbf{v}} \ dv = \underline{\mathbf{R}}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho \underline{\mathbf{v}} \ dv = \underline{\mathbf{M}}_0$$

Lois d'Euler du mouvement

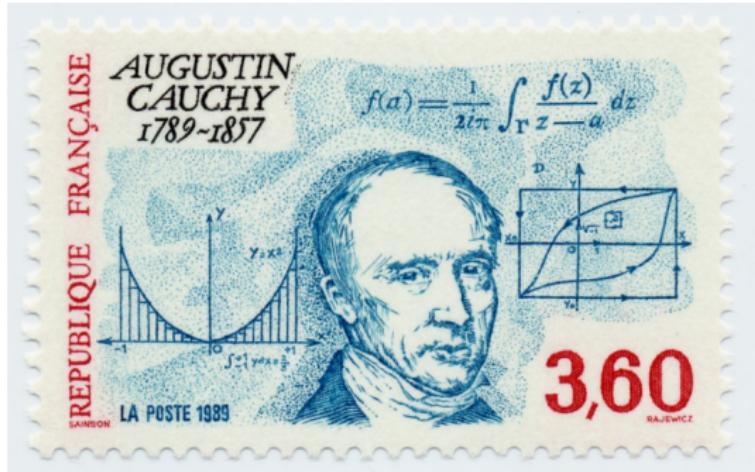
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{\mathbf{v}} \, dv &= \int_{\Omega_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \, dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \partial\Omega_t, t) \, ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho \underline{\mathbf{v}} \, dv &= \int_{\Omega_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \, dv \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\mathbf{OP}} \wedge \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \partial\Omega_t, t) \, ds\end{aligned}$$

- Elles s'appliquent à tout sous-domaine $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$.
- On a besoin des deux équations!
- Référentiel non galiléen : mettre les forces d'inertie dans $\underline{\mathbf{f}}$

Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

La controverse des “élasticiens” du XIX^{ème} siècle



Côté français : Navier, Cauchy, Saint-Venant

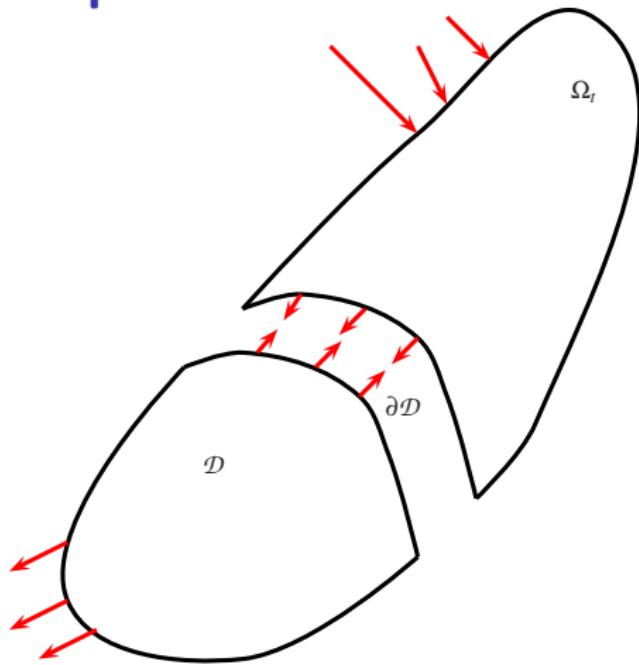
Côté anglais : Young, Green

l'hypothèse moléculaire
l'approche phénoménologique

Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

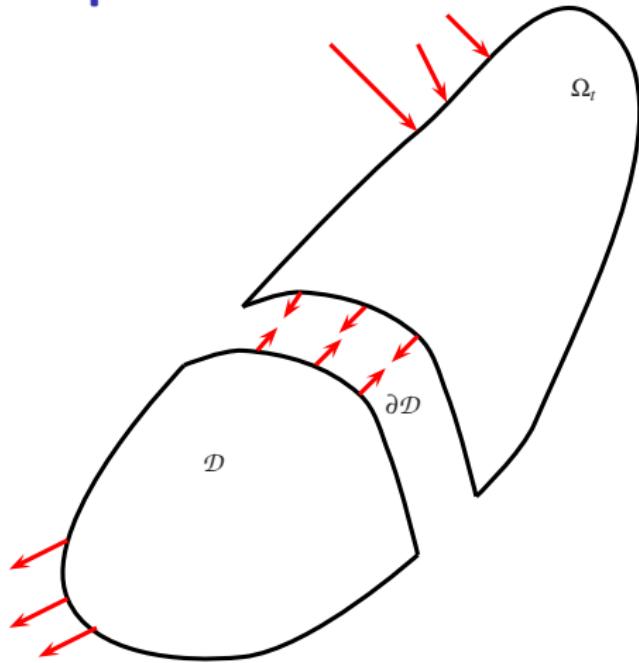
Description des efforts intérieurs



- le vecteur-contrainte

$$\underline{\mathbf{R}}^{surf} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}, t) ds$$

Description des efforts intérieurs

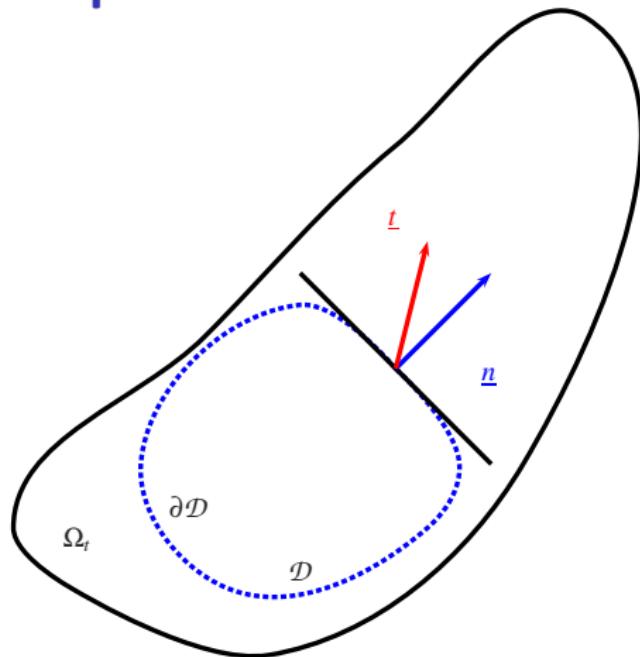


- le vecteur-contrainte

$$\underline{\mathbf{R}}^{surf} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \partial\mathcal{D}, t) ds$$

caractéristiques d'une surface?

Description des efforts intérieurs



- le vecteur-contrainte

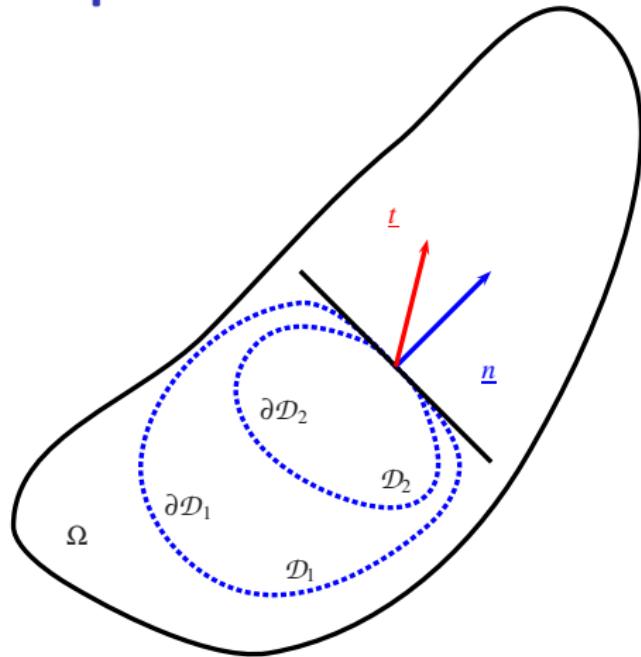
$$\underline{\mathbf{R}}^{surf} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}, t) ds$$

- le postulat de Cauchy :

$$\underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}, t) := \underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \underline{n}, t)$$

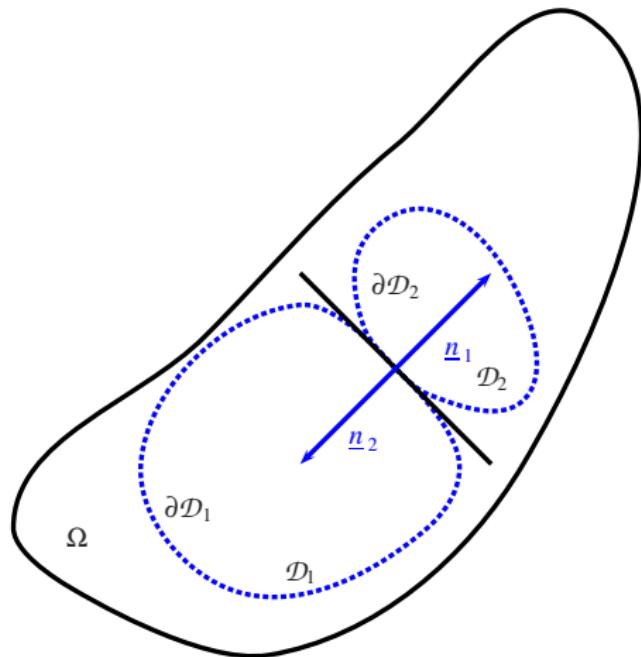
normale sortante

Description des efforts intérieurs



- le vecteur-contrainte
$$\underline{\mathbf{R}}^{surf} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \partial\mathcal{D}, t) ds$$
- le postulat de Cauchy :
$$\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \partial\mathcal{D}, t) = \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{n}}, t)$$

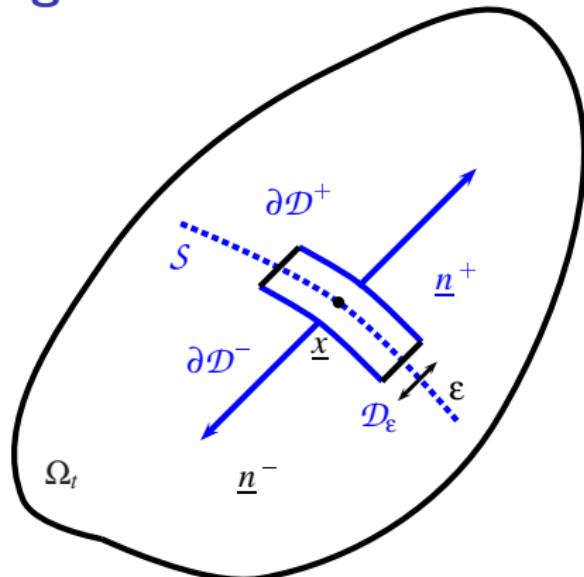
normale sortante
- une conséquence
$$\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \partial\mathcal{D}_1, t) = \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \partial\mathcal{D}_2, t)$$



Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

L'argument du cachet d'aspirine



- première loi d'Euler

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\epsilon} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) ds = \int_{\mathcal{D}_\epsilon} \rho(\underline{x}, t)(\underline{a} - \underline{f}) dv$$

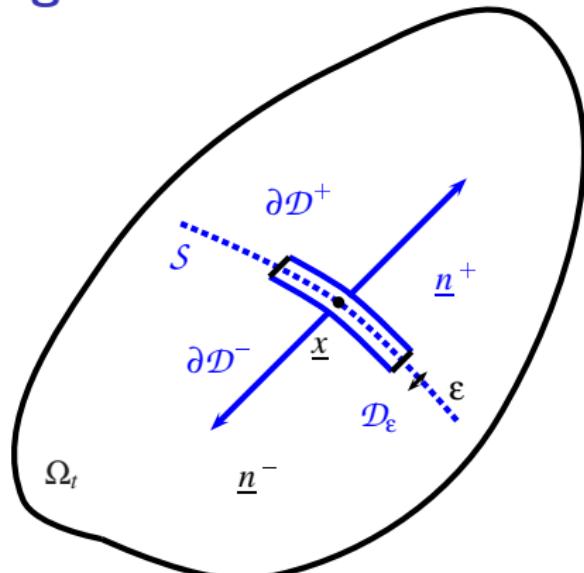
- $S = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_\epsilon$

$$\partial\mathcal{D}_\epsilon = \partial\mathcal{D}^+ \cup \partial\mathcal{D}^- \cup \mathcal{H}_\epsilon$$

- $\underline{f}, \underline{a}$ bornées

- \underline{t} continu (pas d'efforts surfaciques concentrés)

L'argument du cachet d'aspirine



- première loi d'Euler

$$\int_{\partial \mathcal{D}_\epsilon} \underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \underline{n}, t) ds = \int_{\mathcal{D}_\epsilon} \rho(\underline{x}, t)(\underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{f}}) dv$$

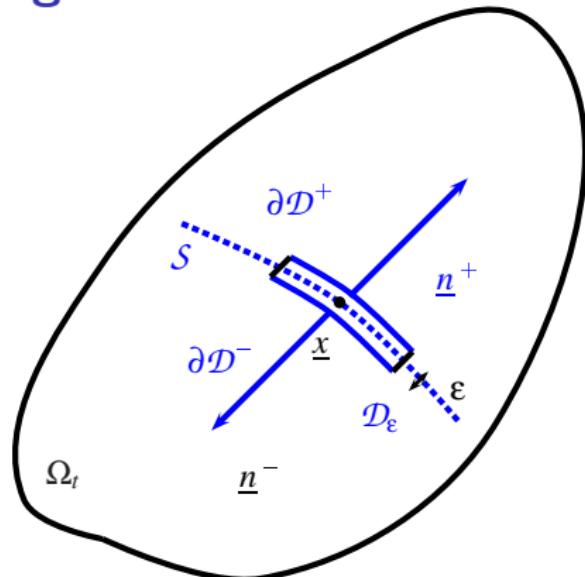
- $S = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_\varepsilon$

$$\partial \mathcal{D}_\varepsilon = \partial \mathcal{D}^+ \cup \partial \mathcal{D}^- \cup \mathcal{H}_\varepsilon$$

- $\underline{\mathbf{f}}, \underline{\mathbf{a}}$ bornées

- $\underline{\mathbf{t}}$ continu (pas d'efforts surfaciques concentrés)

L'argument du cachet d'aspirine



- Lemme d'imparité

$$\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, -\underline{\mathbf{n}}, t) = -\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{n}}, t)$$

actio = reactio

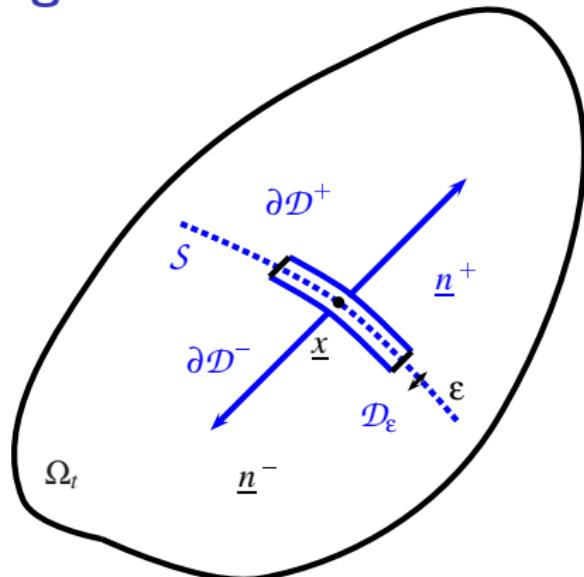
- $S = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_\varepsilon$

$$\partial \mathcal{D}_\varepsilon = \partial \mathcal{D}^+ \cup \partial \mathcal{D}^- \cup \mathcal{H}_\varepsilon$$

- $\underline{\mathbf{f}}, \underline{\mathbf{a}}$ bornées

- $\underline{\mathbf{t}}$ continu (pas d'efforts surfaciques concentrés)

L'argument du cachet d'aspirine



- Lemme d'imparité

$$\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, -\underline{\mathbf{n}}, t) = -\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{n}}, t)$$

actio = reactio

- Exemple de représentation de $\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{n}})$ remplissant cette condition?

- $S = \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_\varepsilon$

$$\partial \mathcal{D}_\varepsilon = \partial \mathcal{D}^+ \cup \partial \mathcal{D}^- \cup \mathcal{H}_\varepsilon$$

- $\underline{\mathbf{f}}, \underline{\mathbf{a}}$ bornées

- $\underline{\mathbf{t}}$ continu (pas d'efforts surfaciques concentrés)

Insuffisance de la représentation pression

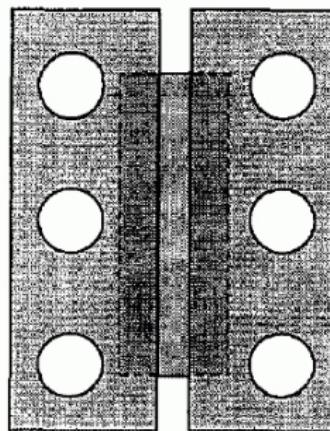
représentation des efforts surfaciques par un champ de pression :

$$\underline{\boldsymbol{t}} = -p \underline{\boldsymbol{n}}$$

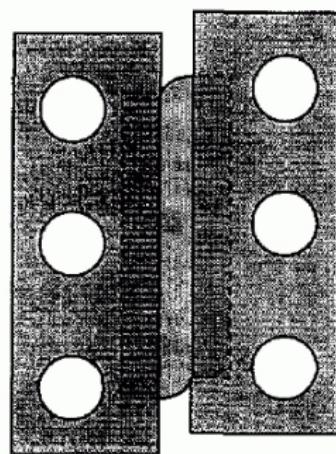
Insuffisance de la représentation pression

représentation des efforts surfaciques par un champ de pression :

$$\underline{t} = -p \underline{n}$$



a)



c)

De la surface au volume

- première loi d'Euler

$$\int_{\partial D} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) \, ds = \int_D \rho(\underline{x}, t)(\underline{a} - \underline{f}) \, dv$$

- Quelles sont les conditions sur \underline{t} pour qu'une intégrale de volume se réduise à une intégrale de surface?

Le théorème de la divergence et autres formes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} \ dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}} \ ds$$

Le théorème de la divergence et autres formes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}} \ dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \ ds$$

plus généralement,

$$\int_{\Omega} \bullet_{,i} dV = \int_{\partial\Omega} \bullet n_i ds$$

$$\int_{\Omega} \nabla f \ dv = \int_{\partial\Omega} f \underline{\mathbf{n}} \ ds$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}} \ dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \ ds$$

(coordonnées cartésiennes en BON pour l'expression en composantes)

De la surface au volume

- première loi d'Euler

$$\int_{\partial D} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) ds = \int_D \rho(\underline{x}, t)(\underline{a} - \underline{f}) dv$$

- Quelles sont les conditions sur \underline{t} pour que l'on puisse passer ainsi du volume à la surface?

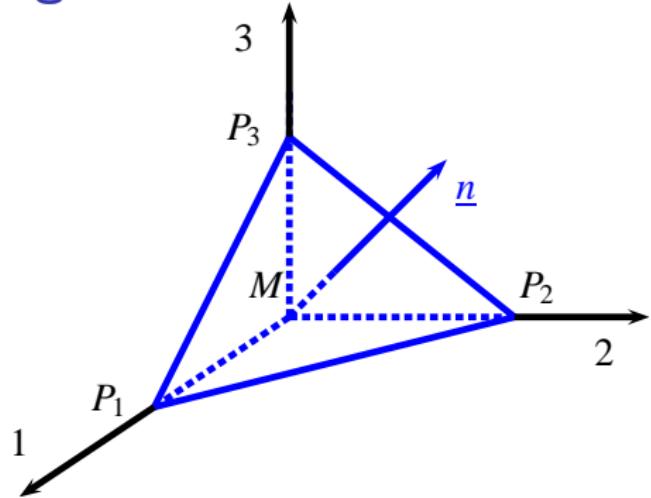
Si \underline{t} est un flux $\iff \underline{t}$ linéaire en \underline{n} $\iff \underline{t} = \bullet \cdot \underline{n}$, alors le passage surface-volume est possible.

La réciproque constitue le théorème de Cauchy.

Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

L'argument du tétraèdre de Cauchy

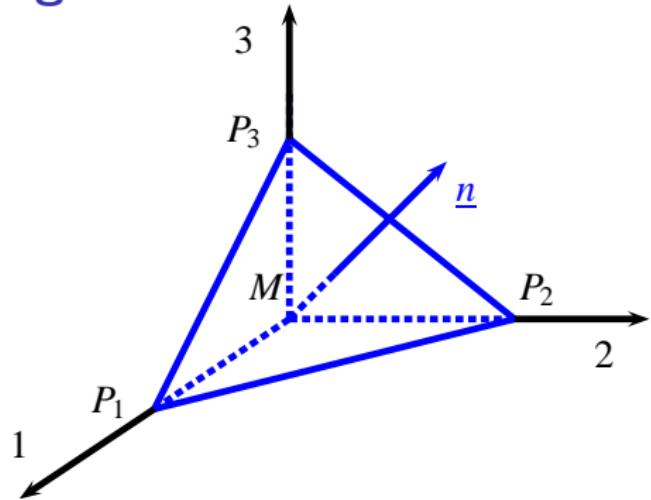


$$\underline{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

tétraèdre $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ passant
par le point $P(hn_1, hn_2, hn_3)$
hauteur h
surfaces S_1, S_2, S_3, S

$$\int_{\Delta_h} \rho(\underline{x}, t)(\underline{a} - \underline{f}) \, dv = \int_{\partial\Delta_h} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) \, ds$$

L'argument du tétraèdre de Cauchy

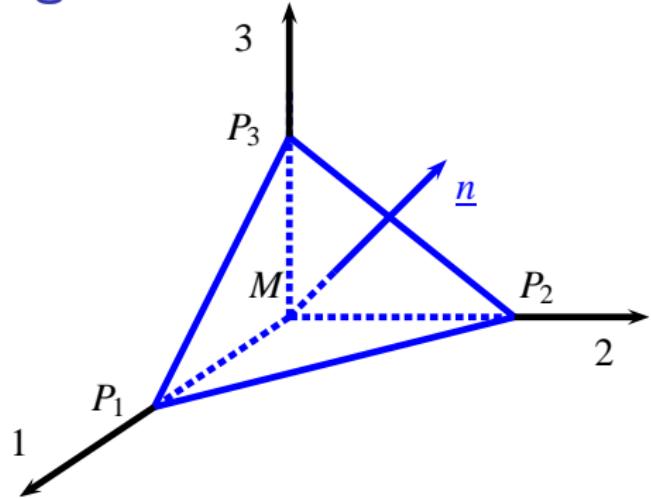


$$\underline{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

tétraèdre $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ passant
par le point $P(hn_1, hn_2, hn_3)$
hauteur h
surfaces S_1, S_2, S_3, S

$$t_1(M, \underline{n}) = t_1(M, \sum_{i=1}^3 n_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^3 n_i t_1(M, \underline{e}_i)$$

L'argument du tétraèdre de Cauchy



$$\underline{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

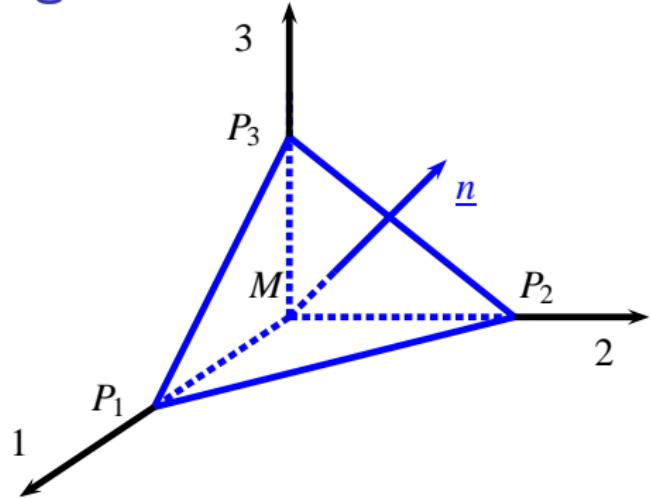
tétraèdre $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ passant
par le point $P(hn_1, hn_2, hn_3)$
hauteur h
surfaces S_1, S_2, S_3, S

$$t_1(M, \underline{n}) = t_1(M, \sum_{i=1}^3 n_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^3 n_i t_1(M, \underline{e}_i)$$

$$t_2(M, \underline{n}) = t_2(M, \sum_{i=1}^3 n_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^3 n_i t_2(M, \underline{e}_i)$$

$$t_3(M, \underline{n}) = t_3(M, \sum_{i=1}^3 n_i \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^3 n_i t_3(M, \underline{e}_i)$$

L'argument du tétraèdre de Cauchy



$$\underline{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$$

tétraèdre $\Delta_h = MP_1P_2P_3$ passant
par le point $P(hn_1, hn_2, hn_3)$
hauteur h
surfaces S_1, S_2, S_3, S

$$t_i(M, \underline{n}) = \sum_{j=1}^3 t_i(M, \underline{e}_j) n_j$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \quad \sigma_{ij}(M) := t_i(M, \underline{e}_j)$$

Le théorème de Cauchy

Il existe un champ de tenseurs du second ordre $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ tel que, en tout point régulier de Ω_t (\underline{t} continu, $\underline{f}, \underline{a}$ finis),

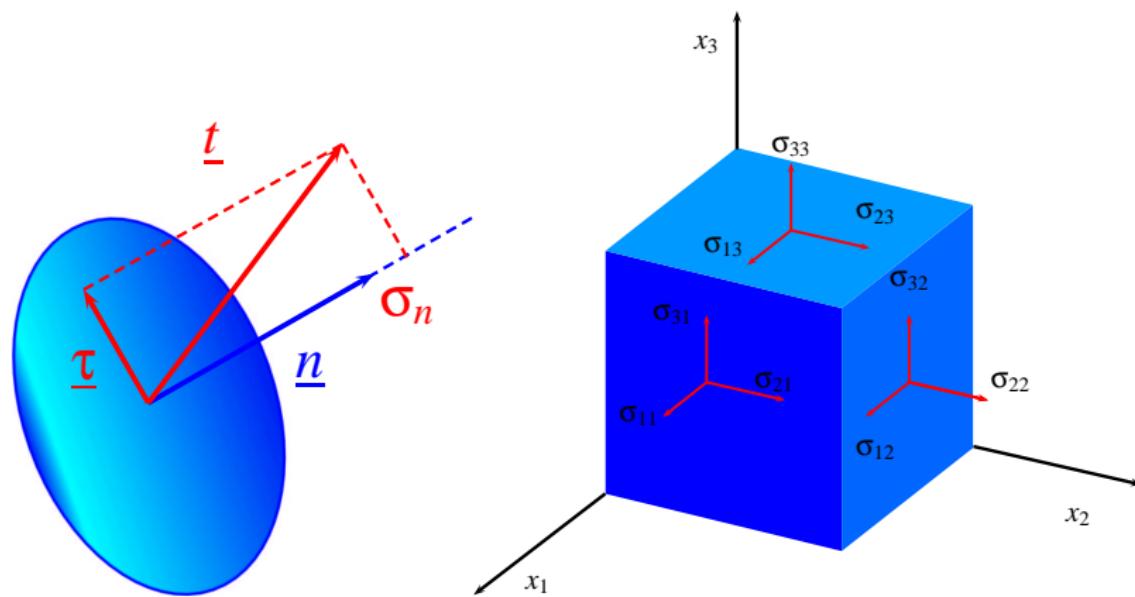
$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est la **machine** à produire les efforts s'exerçant sur les éléments de surface en M :

$$\underline{t} \ ds = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \ ds = \underline{\sigma} \cdot \underline{ds}$$



Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

Première loi de Cauchy

- Efforts surfaciques

$$\int_{\partial D} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) \, ds = \int_{\partial D} \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} \, ds$$

$$\int_{\partial D} t_i(\underline{x}, \underline{n}, t) \, ds = \int_{\partial D} \sigma_{ij}(\underline{x}, t) n_j \, ds$$

Première loi de Cauchy

- Efforts surfaciques

$$\int_{\partial D} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) \, ds = \int_{\partial D} \underline{\sigma}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} \, ds$$

$$\int_{\partial D} t_i(\underline{x}, \underline{n}, t) \, ds = \int_{\partial D} \sigma_{ij}(\underline{x}, t) n_j \, ds = \int_D \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, dv$$

(théorème de la divergence, coordonnées cartésiennes en BON)

Première loi de Cauchy

- Efforts surfaciques

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{n}}, t) \, ds = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \cdot \underline{\mathbf{n}} \, ds$$

$$\int_{\partial\mathcal{D}} t_i(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{n}}, t) \, ds = \int_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij}(\underline{\mathbf{x}}, t) n_j \, ds = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, dv$$

(théorème de la divergence)

- Application à la première loi d'Euler

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\rho(a_i - f_i) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \, dv = 0$$

- En tout point régulier

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho(f_i - a_i) = 0$$

$$\operatorname{div} \underline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho(\underline{\mathbf{f}} - \underline{\mathbf{a}}) = 0$$

Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

Seconde loi de Cauchy

- Seconde loi d'Euler

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_O) \wedge \rho(\underline{a} - \underline{f}) \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_O) \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \, ds$$

Dans une base cartésienne orthonormée directe d'origine \underline{x}_O , la première composante vaut

$$\int_{\mathcal{D}} (x_2 \rho(a_3 - f_3) - x_3 \rho(a_2 - f_2)) \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) n_j \, ds$$

Seconde loi de Cauchy

- Seconde loi d'Euler

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_O) \wedge \rho(\underline{a} - \underline{f}) \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_O) \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \, ds$$

Dans une base cartésienne orthonormée directe d'origine \underline{x}_O , la première composante vaut

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (x_2 \rho(a_3 - f_3) - x_3 \rho(a_2 - f_2)) \, dv &= \int_{\partial\mathcal{D}} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) n_j \, ds \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(x_2 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} + \delta_{2j} \sigma_{3j} - \delta_{3j} \sigma_{2j} \right) \, dv \end{aligned}$$

Seconde loi de Cauchy

- Seconde loi d'Euler

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_O) \wedge \rho(\underline{a} - \underline{f}) \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_O) \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \, ds$$

Dans une base cartésienne orthonormée directe d'origine \underline{x}_O , la première composante vaut

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (x_2 \rho(a_3 - f_3) - x_3 \rho(a_2 - f_2)) \, dv &= \int_{\partial\mathcal{D}} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) n_j \, ds \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(x_2 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} + \delta_{2j} \sigma_{3j} - \delta_{3j} \sigma_{2j} \right) \, dv \end{aligned}$$

- Seconde loi de Cauchy (milieux non polaires)

$$\int_{\mathcal{D}} (\sigma_{32} - \sigma_{23}) \, dv = 0$$

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0$$

$$\sigma_{31} - \sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$$

Seconde loi de Cauchy

Le tenseur des contraintes est un tenseur euclidien d'ordre 2
symétrique : c'est une forme bilinéaire symétrique...

$$\underline{n}_1 \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_2 = \underline{n}_2 \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_1$$

... ou un endomorphisme auto-adjoint

$$\underline{\sigma}^T = \underline{\sigma}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\underline{n} \cdot \underline{\sigma} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$

Conséquence?

Seconde loi de Cauchy

Le tenseur des contraintes est un tenseur euclidien d'ordre 2
symétrique : c'est une forme bilinéaire symétrique...

$$\underline{n}_1 \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_2 = \underline{n}_2 \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_1$$

... ou un endomorphisme auto-adjoint

$$\underline{\sigma}^T = \underline{\sigma}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\underline{n} \cdot \underline{\sigma} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$

Conséquence : le tenseur des contraintes est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont réelles

$$\underline{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \underline{n}_i \otimes \underline{n}_i, \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i = \sigma_i \underline{n}_i \quad (\text{no sum})$$

σ_i : contraintes principales

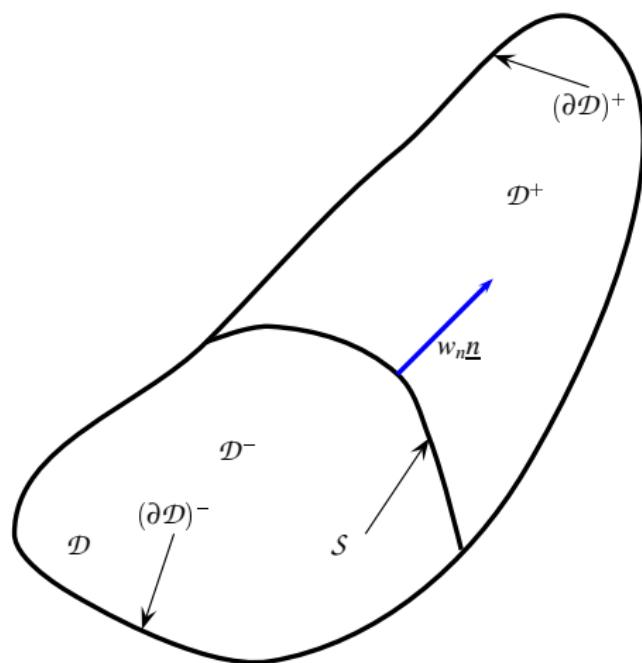
\underline{n}_i : directions principales des contraintes

Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

Surface de discontinuité mobile

cas de champs continus par morceaux



- vitesse de propagation

$$\underline{\mathbf{w}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}_t \mathbf{M}_{t+\Delta t}}{\Delta t} = w_n \underline{\mathbf{n}}$$

vitesse relative de la matière
/ \mathcal{S}

$$U = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} - w_n$$

- saut de f à travers \mathcal{S}

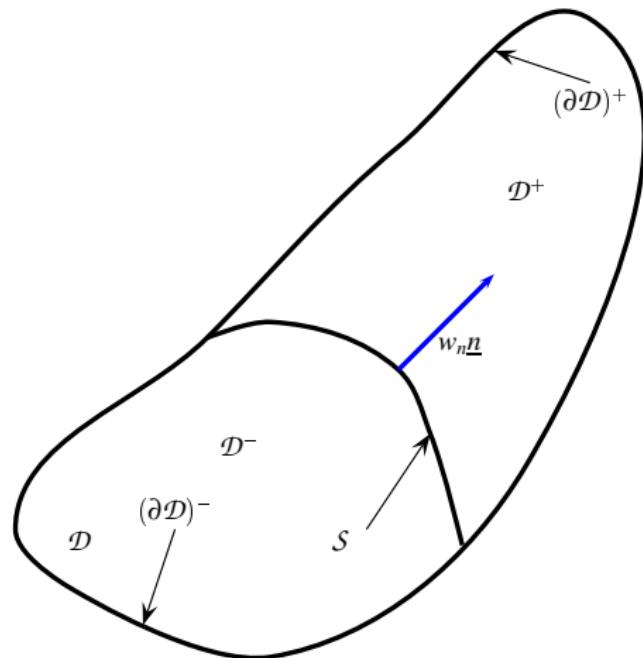
$$[f] := f^+ - f^-$$

- conservation de la masse

$$[\rho U] = 0$$

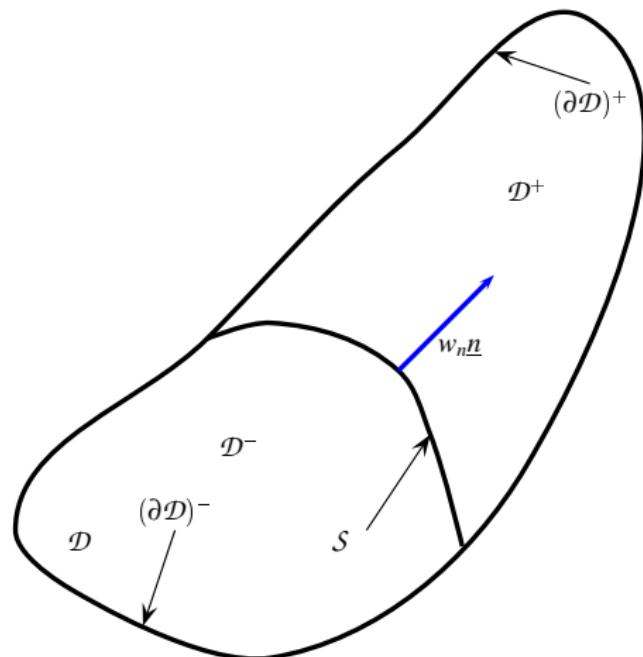
- cas \mathcal{S} matérielle

Première loi d'Euler avec discontinuités



$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{v}} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{x}, t) \underline{\mathbf{f}}(\underline{x}, t) \, dv + \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \underline{n}, t) \, ds$$

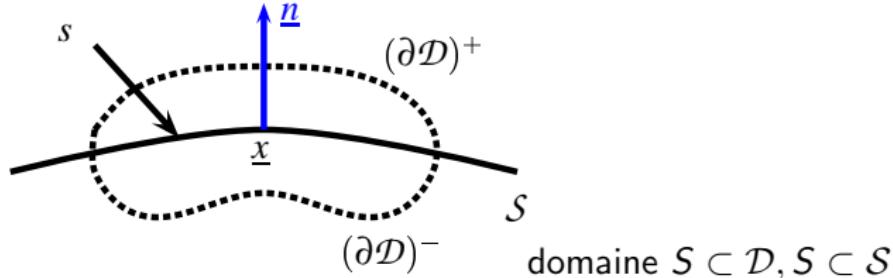
Première loi d'Euler avec discontinuités



un théorème de transport

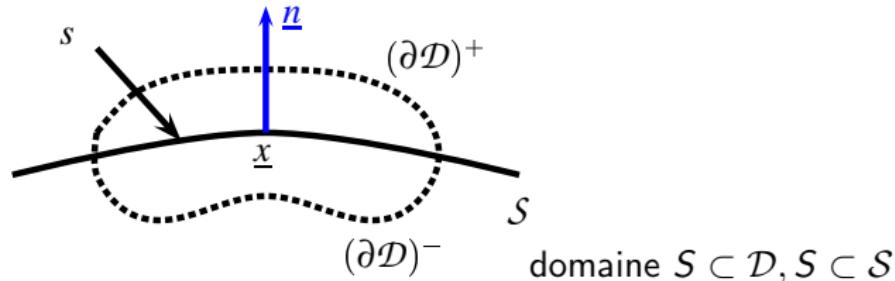
$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{v}} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{a}} \, dv + \int_S [\![\mathbf{v}]\!] \rho U \, ds$$

Équations aux discontinuités



$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{a}} \, dv + \int_S [\![\underline{\mathbf{v}}]\!] \rho U \, ds = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{x}, t) \underline{\mathbf{f}}(\underline{x}, t) \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \underline{n}, t) \, ds$$

Équations aux discontinuités



$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{a}} \, dv + \int_S [\![\underline{\mathbf{v}}]\!] \rho U \, ds = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{x}, t) \underline{\mathbf{f}}(\underline{x}, t) \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \underline{n}, t) \, ds$$

à la limite $\mathcal{D} \rightarrow S$,

$$\int_S [\![\underline{\mathbf{v}}]\!] \rho U \, ds = \int_S [\![\underline{\sigma}]\!] \cdot \underline{n} \, ds$$

Équations aux discontinuités

- cas général

$$[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} - \rho U [\underline{v}] = 0$$

ondes de choc

- cas d'une surface de discontinuité \mathcal{S} matérielle (ou cas statique)

$$[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = 0$$

le vecteur-contrainte est continu au travers de toute surface matérielle

le tenseur des contraintes n'est pas nécessairement continu!
(exemple : interfaces dans les composites)

Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

Bilan : cas général

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$

vecteur-constrainte

Équations de champ :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$$
 quantité de mouvement (Cauchy 1)

$$\underline{\sigma}^T = \underline{\sigma}$$
 moment cinétique (Cauchy 2)

Équations aux discontinuités :

$$[\![\rho U]\!] = 0$$

$$[\![\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} - \rho U [\![\underline{v}]\!]] = 0$$

Bilan : cas statique

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$
 vecteur-contrainte

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0$$
 quantité de mouvement

$$\underline{\sigma}^T = \underline{\sigma}$$
 moment cinétique

$$[\![\underline{\sigma}]\!].\underline{n} = 0$$
 continuité du vecteur-contrainte

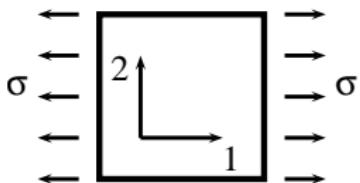
Plan

- ① Lois d'Euler du mouvement
- ② Représentation des efforts intérieurs
 - Le postulat de Cauchy
 - Le lemme d'imparité
 - Le théorème de Cauchy
- ③ Equations locales de la dynamique
 - Première loi de Cauchy du mouvement
 - Seconde loi de Cauchy du mouvement
- ④ Equations aux discontinuités
- ⑤ Bilan : équations locales de la dynamique et de la statique des milieux continus
- ⑥ Etats de contraintes remarquables

Traction simple

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}$$

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\underline{e}_1 = \underline{d}, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}$$



machine de traction hydraulique
(capacité 10t)

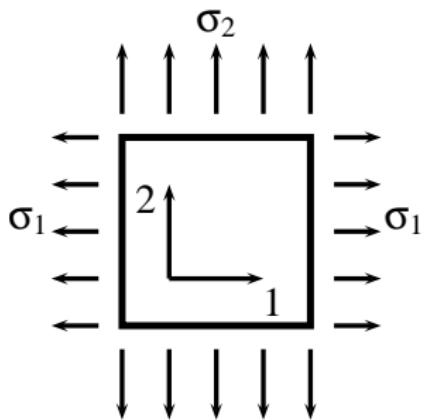
Etat de contraintes biaxial

$$\tilde{\sigma} = \sigma_1 \underline{d}_1 \otimes \underline{d}_1 + \sigma_2 \underline{d}_2 \otimes \underline{d}_2$$

avec $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2 = 0$

$$[\tilde{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{e}_1 = \underline{d}_1, \underline{e}_2 = \underline{d}_2, \underline{e}_3)$$

contraintes planes



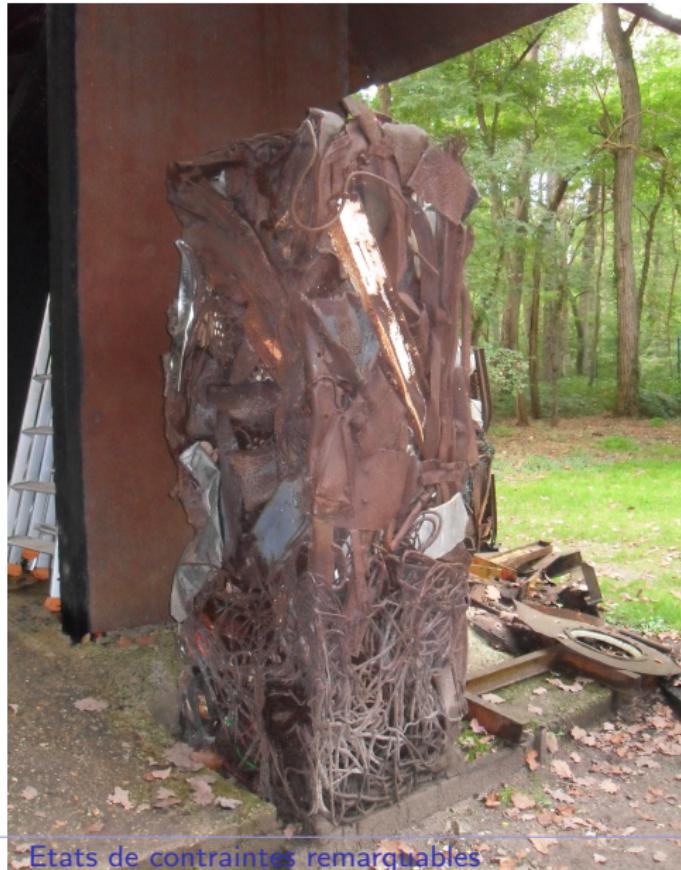
Etats de contraintes remarquables



machine de traction biaxiale
pour éprouvettes cruciformes
(laboratoire 3S-INPG)

Etat de contraintes triaxial

une “compression” de César



Etat de contraintes triaxial

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

mécanique des roches et des sols



machine de compression plane sous pression de confinement (bain d'huile, 2MPa, laboratoire 3S-INPG)

Etat de contraintes triaxial

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

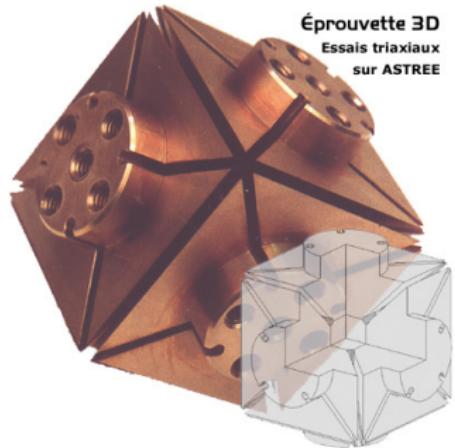
mécanique des roches et des sols

machine triaxiale, échantillon cubique ($150 \times 150 \times 150 \text{ mm}^3$) (bain d'huile, 2-60 MPa, vérins 10t, laboratoire 3S-INPG)

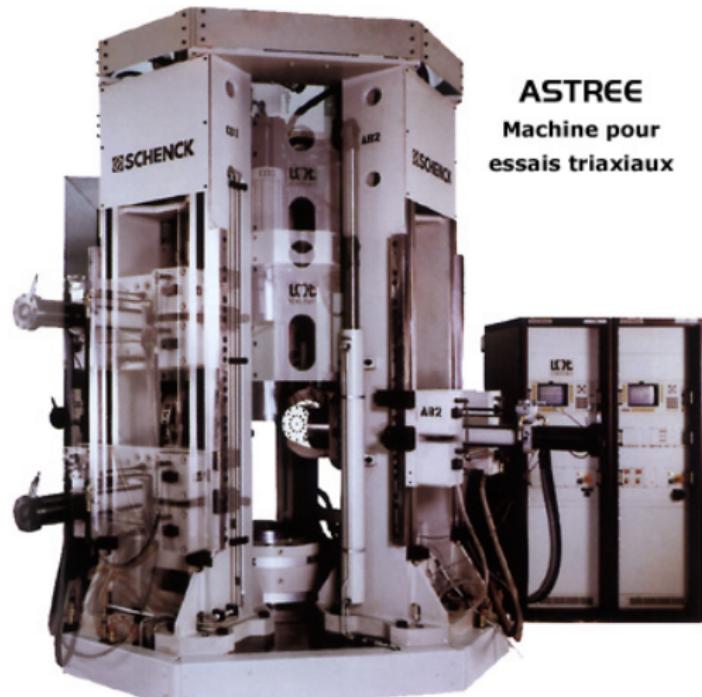


Etat de contraintes triaxial

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$



machine triaxiale, LMT-Cachan

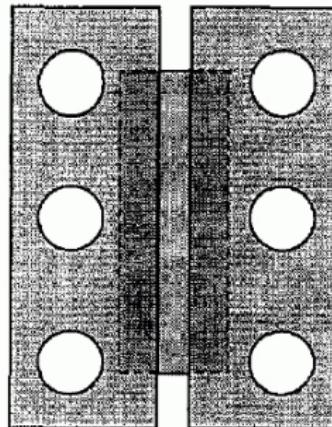


ASTREE
Machine pour
essais triaxiaux

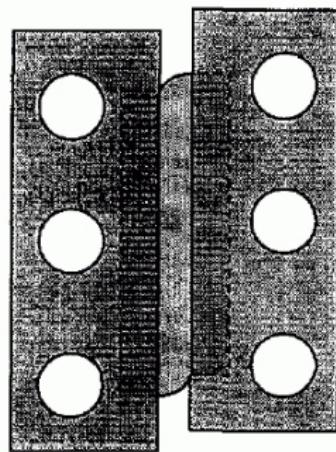
Essai de cisaillement



a)



b)

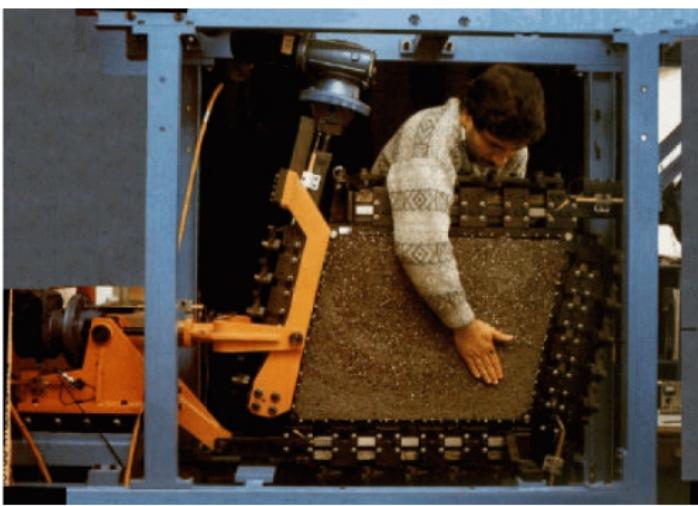
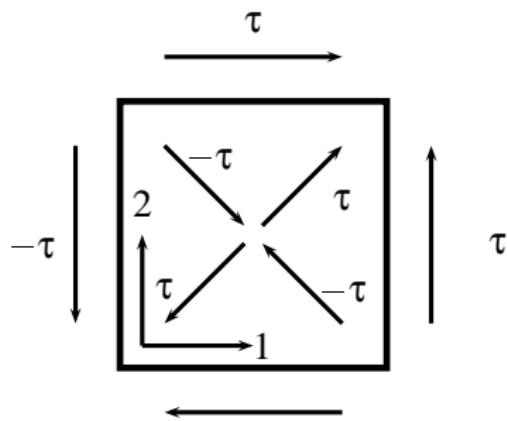


c)

Etat de cisaillement simple

$$\underline{\sigma} = \tau (\underline{d}_1 \otimes \underline{d}_2 + \underline{d}_2 \otimes \underline{d}_1) \quad \text{avec } \underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2 = 0$$

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\underline{e}_1 = \underline{d}_1, \underline{e}_2 = \underline{d}_2, \underline{e}_3)$$



Champ de contraintes non homogène

Essais sur structures : flexion 4 et 3 points

Essai de flexion
Poutre en béton armé

