Tenseurs

Samuel Forest

Centre des Matériaux/UMR 7633
Ecole des Mines de Paris
PSL University / CNRS BP 87, 91003 Evry, France
Samuel.Forest@mines-paristech.fr

Plan

Plan

1. Pourquoi les tenseurs?
2. Introduction à l'algèbre tensorielle
   - Définitions, notations, exemples
   - Tenseurs euclidiens
3. Introduction à l'analyse tensorielle
4. Bilan

Objectifs

- historique de cette séance
  12 séances de mathématiques...
  prolégomènes à la MMC ("tenseur")
- rappel des éléments de votre bagage en algèbre et en analyse indispensables aux cours de mécanique
- pas vraiment une séance de maths, l'occasion de fixer les notations
  donner des noms nouveaux à des choses que vous connaissez déjà ou que vous connaissez potentiellement!
  pour une présentation mathématique plus rigoureuse, voir les références dans le poly
- la physique derrière ces notations arides ou élégantes (selon les goûts)
- documents http://mms2.ensmp.fr/

les tenseurs sont omniprésents dans toute la physique!

Cosmology and gravitation, S. Weinberg

3 Relation between $g_{\mu\nu}$ and $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

Our treatment of freely falling particles has shown that the field that determines the gravitational force is the "affine connection" $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, whereas the proper time interval between two events with a given infinitesimal coordinate separation is determined by the "metric tensor" $g_{\mu\nu}$. We now show that $g_{\mu\nu}$ is also the gravitational potential; that is, its derivatives determine the field $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$.

We first recall the formula for the metric tensor, Eq. (3.2.7):

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

Differentiation with respect to x^λ gives

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2\xi^\beta}{\partial x^\lambda\,\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}$$

and recalling (3.2.11), we have

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\rho}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\rho}\eta_{\alpha\beta}$$

Using (3.2.7) again, we find

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu}g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}g_{\rho\mu} \tag{3.3.1}$$

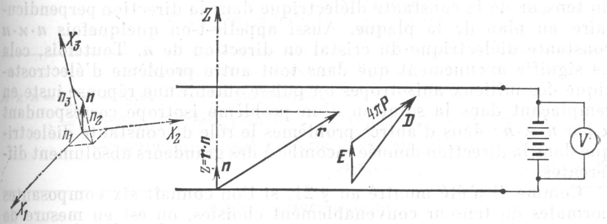


Fig. 28.1. Vecteurs intensité et déplacement d'un champ électrique et de polarisation électrique dans un condensateur à lames parallèles avec un diélectrique anisotrope.

Alors le déplacement

$$\boldsymbol{D} = -\frac{d\varphi}{dz}\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{n}, \quad D_i = -\frac{d\varphi}{dz}\varkappa_{ik}n_k \tag{28.2}$$

et l'équation div $\boldsymbol{D} = 0$ prend la forme

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = -\frac{d^2\varphi}{dz^2}n_i\varkappa_{ik}n_k = 0, \quad -\frac{d^2\varphi}{dz^2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \tag{28.3}$$

ou tout simplement $d^2\varphi/dz^2 = 0$. La solution générale de cette équation est $\varphi(z) = Az + B$. La différence de potentiel sur les armatures vaut $U = \varphi(0) - \varphi(d)$, de sorte que

$$\varphi(z) = -\frac{U}{d}z + \varphi(0), \tag{28.4}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{U}{d}\boldsymbol{n}, \quad E_k = \frac{U}{d}n_k, \tag{28.5}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{U}{d}\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{n}, \quad D_i = \frac{U}{d}\varkappa_{ik}n_k. \tag{28.6}$$

Plan

Plan

Définition

- E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, ses éléments, les **vecteurs** sont notés $\underline{\boldsymbol{u}} \in E$
  l'espace dual E^* : ensemble des formes linéaires sur E, ses éléments sont les **covecteurs** $\underline{\boldsymbol{u}}^*$

  $$< \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}} >= \underline{\boldsymbol{u}}^*(\underline{\boldsymbol{v}}) \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^* \in E^*, \forall \underline{\boldsymbol{v}} \in E$$

  crochets de dualité

Définition

- E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, ses éléments, les **vecteurs** sont notés $\underline{\boldsymbol{u}} \in E$
  l'espace dual E^* : ensemble des formes linéaires sur E, ses éléments sont les **covecteurs** $\underline{\boldsymbol{u}}^*$

$$< \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}} >= \underline{\boldsymbol{u}}^*(\underline{\boldsymbol{v}}) \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}}^* \in E^*, \forall \underline{\boldsymbol{v}} \in E$$

  crochets de dualité

- Les **tenseurs** sont les **formes multilinéaires** sur E, E^*
  tenseur p–contravariant et q–covariant :

$$T \quad : \quad (E^*)^p \times E^q \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\underline{\boldsymbol{u}}^{*1}, ..., \underline{\boldsymbol{u}}^{*p}, \underline{\boldsymbol{u}}^{1}, ...\underline{\boldsymbol{u}}^{q}) \longmapsto T(\underline{\boldsymbol{u}}^{*1}, ..., \underline{\boldsymbol{u}}^{*p}, \underline{\boldsymbol{u}}^{1}, ...\underline{\boldsymbol{u}}^{q})$$

- **variance** d'un tenseur : le couple (p, q)
- **ordre** d'un tenseur : la somme $p + q$

A quoi bon des formes linéaires en mécanique/physique???

A quoi bon des formes linéaires en mécanique/physique???

- **tenseurs d'ordre 0** : les scalaires

exemple: la **masse**

A quoi bon des formes linéaires en mécanique/physique???

- **tenseurs d'ordre 0** : les scalaires

  exemple: la **masse**

- **tenseurs d'ordre 1** :
  - les **vecteurs**: variance $(p, q) = (1, 0)$

    exemples : directions, vecteur position, vecteur vitesse

A quoi bon des formes linéaires en mécanique/physique???

- **tenseurs d'ordre 0** : les scalaires

  exemple: la **masse**

- **tenseurs d'ordre 1** :
  - les **vecteurs**: variance $(p, q) = (1, 0)$

    exemples : directions, vecteur position, vecteur vitesse
  - les **covecteurs**: variance $(p, q) = (0, 1)$

    exemples : forces, éléments de surface

  la **force** $\underline{\boldsymbol{f}}^*$ est la forme linéaire qui à une **vitesse** $\underline{\boldsymbol{v}}$ associe la **puissance**

  $$p = < \underline{\boldsymbol{f}}^*, \underline{\boldsymbol{v}} >$$

  l'**élément de surface** $\underline{\boldsymbol{ds}}$ est la forme linéaire qui à la **direction** de l'espace $\underline{\boldsymbol{u}}$ associe le **volume** du cylindre engendré

  $$< \underline{\boldsymbol{ds}}, \underline{\boldsymbol{u}} > = dv$$

Composantes des vecteurs et covecteurs

- Soit $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$ une **base** quelconque de E

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{n} u^i \, \underline{\boldsymbol{e}}_i$$

convention d'Einstein sur les indices répétés $\underline{\boldsymbol{u}} = u^i \, \underline{\boldsymbol{e}}_i$
les u^i sont les composantes du vecteurs $\underline{\boldsymbol{u}}$ dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$

Composantes des vecteurs et covecteurs

- Soit $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$ une **base** quelconque de E

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{n} u^i \, \underline{\boldsymbol{e}}_i$$

convention d'Einstein sur les indices répétés $\underline{\boldsymbol{u}} = u^i \, \underline{\boldsymbol{e}}_i$
les u^i sont les composantes du vecteurs $\underline{\boldsymbol{u}}$ dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$

- base **duale** de $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$: c'est l'unique base $(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i})_{i=1,n}$ de E^* telle que

$$< \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j >= \delta^i_j$$

où δ^i_j est le symbole de Kronecker

- composantes du covecteur $\underline{\boldsymbol{v}}^* \in E^*$:

$$\underline{\boldsymbol{v}}^* = v^*_i \, \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}$$

- projections

$$u^i =< \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{u}} >, \quad v^*_j =< \underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{e}}_j >$$

Tenseurs d'ordre 2

- tenseur d'ordre 2, notés $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$
  - 2-fois contravariant $(p, q) = (2, 0)$: $E^* \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$
  - 2-fois covariant $(p, q) = (0, 2)$: $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
  - 1-fois contravariant, 1-fois covariant $(p, q) = (1, 1)$:
    $E^* \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
    ou $E \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$
- tenseurs d'ordre 2 (formes bilinéaires) et **endomorphismes**

Tenseurs d'ordre 2

- tenseur d'ordre 2, notés $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$
  - 2-fois contravariant $(p, q) = (2, 0)$: $\quad E^* \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$
  - 2-fois covariant $(p, q) = (0, 2)$: $\quad E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
  - 1-fois contravariant, 1-fois covariant $(p, q) = (1, 1)$:
    $E^* \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
    ou $\quad E \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$
- tenseurs d'ordre 2 et **endomorphismes**
  à chaque endomorphisme t de E, on associe le tenseur d'ordre 2
  $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} : E^* \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{u}}) := < \underline{\boldsymbol{v}}^*, t(\underline{\boldsymbol{u}}) >$$

  c'est en fait un isomorphisme (voir plus loin)...
- exemples connus : conductivité thermique, électrique
- exemples nouveaux: tenseur des **déformations**, tenseur des **contraintes**

Produit tensoriel

combiner les tenseurs entre eux pour produire des tenseurs d'ordre plus élevé

- produit tensoriel $\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}$ de deux vecteurs $\underline{\boldsymbol{a}}\,, \underline{\boldsymbol{b}} \in E$
- **décomposition** d'un tenseur d'ordre 2, $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} : E^* \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

Produit tensoriel

combiner les tenseurs entre eux pour produire des tenseurs d'ordre plus élevé

- produit tensoriel $\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}$ de deux vecteurs $\underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}} \in E$
  pour fabriquer le tenseur d'ordre 2, 2–fois contravariant

$$(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}})(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}}^*) :=< \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{a}} >< \underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{b}} >\in \mathbb{R}$$

  on peut fabriquer des tenseurs d'ordre 2 de toute variance

$$(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}^*)(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}}) :=< \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{a}} >< \underline{\boldsymbol{b}}^*, \underline{\boldsymbol{v}} >\in \mathbb{R}$$

- **décomposition** d'un tenseur d'ordre 2, $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} : E^* \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}}) &= \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(u_i^* \, \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, v^j \, \underline{\boldsymbol{e}}_j) = u_i^* v^j \, \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j) \\
&= < \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{e}}_i >< \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \underline{\boldsymbol{v}} > \; \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j) \\
&= \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j) \, (\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j})(\underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{v}})
\end{aligned}$$

Produit tensoriel

- **composantes** d'un tenseur d'ordre 2

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j)\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j} = T^i{}_j\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \quad \text{avec} \quad T^i{}_j = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_j)$$

matrice des composantes du tenseur $[T^i{}_j]$
(premier indice : numéro de ligne, second indice : numéro de colonne)
intérêt de la notation indicielle : reconnaître du premier coup d'œil la variance des tenseurs
$\Longrightarrow$ l'espace des tenseurs d'ordre 2 1-fois contravariants et 1-fois covariants est de dimension n^2, les $(\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j})_{i,j=1,n}$ en constituent une base

Transposition et contraction

- **transposé** $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T$ de $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T(\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{v}}^*) = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{v}}^*, \underline{\boldsymbol{u}}), \quad \forall \underline{\boldsymbol{u}} \in E, \forall \underline{\boldsymbol{v}}^* \in E^*$$

  le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}^T$ admet comme matrice de composantes la transposée de la matrice des composantes de $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$ dans la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$

- la **contraction** d'un tenseur réduit de 2 son ordre. On ne contracte que les indices de variance différente.
  Pour un tenseur d'ordre 2, 1-fois contravariant, 1-fois covariant :

$$T_c = T(\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{e}}_i)$$

$$T_c = T^i{}_i =: \mathrm{trace}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$$

  il ne dépend pas de la base (à vérifier).

Transposition et contraction

- **produit contracté** : combiner les tenseurs entre eux pour produire des tenseurs d'ordre moins élevé

$$\underline{\boldsymbol{a}}^*.\underline{\boldsymbol{b}}$$

$$(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{u}}^*$$

plus généralement

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{u}}$$

Transposition et contraction

- **produit contracté** : combiner les tenseurs entre eux pour produire des tenseurs d'ordre moins élevé

$$\underline{\boldsymbol{a}}^*.\underline{\boldsymbol{b}} :=< \underline{\boldsymbol{a}}^*, \underline{\boldsymbol{b}} >$$
$$(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{u}}^* :=< \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{b}} > \underline{\boldsymbol{a}}$$

plus généralement

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{u}} &= (T^i{}_j \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}).\underline{\boldsymbol{u}} = T^i{}_j(\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}).\underline{\boldsymbol{u}} \\ &= T^i{}_j < \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \underline{\boldsymbol{u}} > \underline{\boldsymbol{e}}_i = T^i{}_j u^j \underline{\boldsymbol{e}}_i\end{aligned}$$

c'est le vecteur de composantes $T^i{}_j u^j$

Transposition et contraction

- **produit contracté** : combiner les tenseurs entre eux pour produire des tenseurs d'ordre moins élevé

$$\underline{\boldsymbol{a}}^*.\underline{\boldsymbol{b}} := < \underline{\boldsymbol{a}}^*, \underline{\boldsymbol{b}} >$$
$$(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{u}}^* := < \underline{\boldsymbol{u}}^*, \underline{\boldsymbol{b}} > \underline{\boldsymbol{a}}$$

plus généralement

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{u}} &= (T^i{}_j \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}).\underline{\boldsymbol{u}} = T^i{}_j (\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}).\underline{\boldsymbol{u}} \\ &= T^i{}_j < \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \underline{\boldsymbol{u}} > \underline{\boldsymbol{e}}_i = T^i{}_j u^j \underline{\boldsymbol{e}}_i \end{aligned}$$

c'est le vecteur de composantes $T^i{}_j u^j$

- endomorphisme sur E associé à un tenseur d'ordre 2

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} : \quad E \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t(\underline{\boldsymbol{u}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}.\underline{\boldsymbol{u}}$$

Changement de bases

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = P^j_i\,\underline{\boldsymbol{e}}_j, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_i = (P^{-1})^j_i\,\underline{\boldsymbol{e}}'_j$$
$$\underline{\boldsymbol{e}}'^{*i} = \quad , \quad \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} =$$

- matrice de passage:

$$[P^{j\longleftarrow \text{ligne}}_{i\longleftarrow \text{colonne}}], \quad \text{avec} \quad P^j_i = <\underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \underline{\boldsymbol{e}}'_i>$$
$$[x^i] = [P]\,[x'^i]$$

Changement de bases

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = P^j_i\,\underline{\boldsymbol{e}}_j, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_i = (P^{-1})^j_i\,\underline{\boldsymbol{e}}'_j$$
$$\underline{\boldsymbol{e}}^{\prime * i} = (P^{-1})^i_j\,\underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} = P^i_j\,\underline{\boldsymbol{e}}^{\prime * j}$$

- matrice de passage:

$$[P^{j \longleftarrow \text{ligne}}_{i \longleftarrow \text{colonne}}], \quad \text{avec} \quad P^j_i = < \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \underline{\boldsymbol{e}}'_i >$$
$$[x^i] = [P]\,[x'^i]$$

- formule de passage pour un tenseur d'ordre 2:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = T^i{}_j\,\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j} = T'^k{}_l\,\underline{\boldsymbol{e}}'_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{\prime * l}$$

Changement de bases

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = P^j_i \, \underline{\boldsymbol{e}}_j, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_i = (P^{-1})^j_i \, \underline{\boldsymbol{e}}'_j$$
$$\underline{\boldsymbol{e}}'^{*i} = (P^{-1})^i_j \, \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^{*i} = P^i_j \, \underline{\boldsymbol{e}}'^{*j}$$

- matrice de passage:

$$[P^{j \longleftarrow \text{ligne}}_{i \longleftarrow \text{colonne}}], \quad \text{avec} \quad P^j_i =< \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \underline{\boldsymbol{e}}'_i >$$
$$[x^i] = [P] \, [x'^i]$$

- formule de passage pour un tenseur d'ordre 2:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = T^i{}_j \, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j} = T'^k{}_l \, \underline{\boldsymbol{e}}'_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'^{*l}$$
$$T'^k{}_l = (P^{-1})^k_i \, P^j_l \, T^i{}_j$$

forme matricielle (chgt de base pour les endomorphismes)

$$[T'^k{}_l] = [P]^{-1} \, [T^i{}_j] \, [P]$$

Changement de bases pour les tenseurs d'ordre 2

- notation tensorielle

$$
\begin{aligned}
T'^{kl} &= (P^{-1})^k_i (P^{-1})^l_j T^{ij} \\
T'_{kl} &= P^i_k P^j_l T_{ij} \\
T'_k{}^l &= P^i_k (P^{-1})^l_j T_i{}^j \\
T'^k{}_l &= (P^{-1})^k_i P^j_l T^i{}_j
\end{aligned}
$$

- notation matricielle

$$
\begin{aligned}
[T'^{kl}] &= [P^{-1}]\,[T^{ij}]\,[P^{-1}]^T \\
[T'_{kl}] &= [P]^T\,[T_{ij}]\,[P] \\
[T'_k{}^l] &= [P]^T\,[T_i{}^j]\,[P^{-1}]^T \\
[T'^k{}_l] &= [P^{-1}]\,[T^i{}_j]\,[P]
\end{aligned}
$$

- supériorité de la notation tensorielle : presque rien à apprendre par cœur!!!

Plan

Le tenseur métrique

- L'espace physique E est euclidien. Il est muni d'un **produit scalaire**, i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive. Il s'agit donc d'un tenseur d'ordre 2 particulier noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, que l'on appelle aussi **tenseur métrique** :

$$\underline{\boldsymbol{u}} \,.\, \underline{\boldsymbol{v}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,, \underline{\boldsymbol{v}}\,) = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{v}}\,, \underline{\boldsymbol{u}}\,) \in \mathbb{R}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,, \underline{\boldsymbol{u}}\,) \geq 0$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,, \underline{\boldsymbol{u}}\,) = 0 \Longrightarrow \underline{\boldsymbol{u}} \,= 0$$

- on note g_{ij} les composantes du tenseur métrique

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}} = g_{ij}\, \underline{\boldsymbol{e}}^{\,*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{\,*j}, \quad g_{ij} = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{e}}_{\,i}, \underline{\boldsymbol{e}}_{\,j})$$

- contraction / produit scalaire

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,, \underline{\boldsymbol{v}}\,) =$$

Le tenseur métrique

- L'espace physique E est euclidien. Il est muni d'un **produit scalaire**, i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive. Il s'agit donc d'un tenseur d'ordre 2 particulier noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, que l'on appelle aussi **tenseur métrique** :

$$\underline{\boldsymbol{u}}\,.\underline{\boldsymbol{v}} := \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,,\underline{\boldsymbol{v}}\,) = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{v}}\,,\underline{\boldsymbol{u}}\,) \in \mathbb{R}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,,\underline{\boldsymbol{u}}\,) \geq 0$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,,\underline{\boldsymbol{u}}\,) = 0 \Longrightarrow \underline{\boldsymbol{u}} = 0$$

- on note g_{ij} les composantes du tenseur métrique

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}} = g_{ij}\,\underline{\boldsymbol{e}}^{*i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*j}, \quad g_{ij} = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{e}}_i, \underline{\boldsymbol{e}}_j)$$

- contraction / produit scalaire

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{u}}\,,\underline{\boldsymbol{v}}\,) = u^i v^j \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}(\underline{\boldsymbol{e}}_i, \underline{\boldsymbol{e}}_j) = u^i v^j g_{ij} = \underline{\boldsymbol{u}}\,.\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}.\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{u}}\,.\underline{\boldsymbol{v}}$$

point de contraction / point de produit scalaire!

Identification de E et de son dual

- le tenseur métrique permet d'identifier E et son dual E^* par l'intermédiaire de l'isomorphisme canonique

$$\gamma : \quad E \longrightarrow E^*$$

$$\gamma(\underline{\boldsymbol{v}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}.\underline{\boldsymbol{v}}$$

son inverse permet de définir un produit scalaire sur E^*

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}^* = g^{ij}\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j$$

dont la matrice des composantes $[g^{ij}]$ est l'inverse de la matrice $[g_{ij}]$.

$$\gamma^{-1}(\underline{\boldsymbol{u}}^*) = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}^*.\underline{\boldsymbol{u}}^*$$

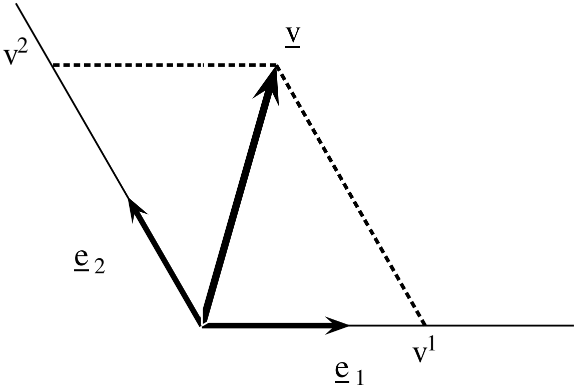
- base réciproque $(\underline{\boldsymbol{e}}^i)_{i=1,n}$ de $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$

$$\underline{\boldsymbol{e}}^i.\underline{\boldsymbol{e}}_j = \delta^i_j$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{*i} = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}.\underline{\boldsymbol{e}}^i, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^i = \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}^*.\underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^i = g^{ij}\underline{\boldsymbol{e}}_j$$

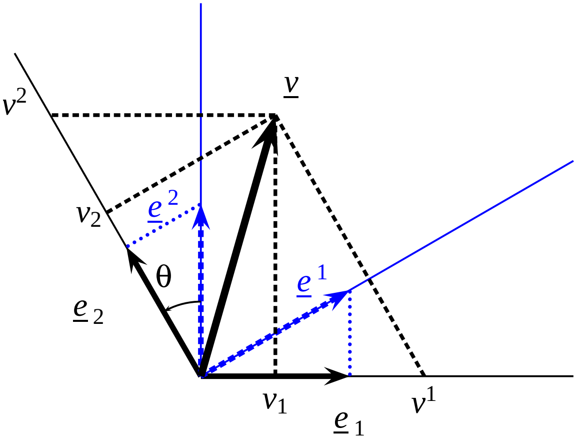
- composantes contra- et co-variantes d'un vecteur $\underline{\boldsymbol{v}} = v^i\underline{\boldsymbol{e}}_i = v_i\,\underline{\boldsymbol{e}}^i$

Base réciproque pour $n = 2$



cas d'une base normée mais non orthogonale

Base réciproque pour $n = 2$



cas d'une base normée mais non orthogonale

Tenseurs euclidiens

les tenseurs euclidiens sont les tenseurs sur $E, E \times E, E \times E \times E, \ldots$ où E est euclidien. On fait l'économie des tenseurs sur E^* en se servant du produit scalaire:

$$(\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j)(\underline{\boldsymbol{u}}, \underline{\boldsymbol{v}}) = (\underline{\boldsymbol{e}}_i . \underline{\boldsymbol{u}})\,(\underline{\boldsymbol{e}}_j . \underline{\boldsymbol{v}})$$

- tenseur euclidien d'ordre 1

$$\underline{\boldsymbol{v}} = v^i \underline{\boldsymbol{e}}_i = v_i \underline{\boldsymbol{e}}^i, \quad v_i = g_{ij} v^j$$

- tenseur euclidien d'ordre 2

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = T^{ij} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = T_i{}^j \underline{\boldsymbol{e}}^i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = T^i{}_j \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^j = T_{ij} \underline{\boldsymbol{e}}^i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^j$$

$$T_i{}^j = g_{ik} T^{kj}, \quad T^i{}_j = g_{kj} T^{ik}, \quad T_{ij} = g_{ik} g_{jl} T^{kl}$$

Les $T^{ij}, T_{ij}, T_i{}^j, T^i{}_j$ sont les **composantes du même tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$** dans des bases différentes.

Cas d'une base orthonormée

- Lorsque la base $(\underline{\boldsymbol{e}}_i)_{i=1,n}$ est orthonormée

$$\underline{\boldsymbol{e}}_i.\underline{\boldsymbol{e}}_j = \delta_i^j$$

- Les bases initiale et réciproque sont alors identiques

$$\underline{\boldsymbol{e}}^i = \underline{\boldsymbol{e}}_i$$

- Les composantes g_{ij} du produit scalaire dans une base orthonormée sont celles de l'identité :

$$g_{ij} = \delta_i^j = g^{ij}$$

- Une conséquence fondamentale est que les 4 types de composantes d'un tenseur euclidien d'ordre 2 coïncident :

$$T^{ij} = T^i{}_j = T_i{}^j = T_{ij}$$

En base orthonormée, on ne se préoccupe plus de la position des indices. On les met toujours en bas et on somme sur tous les indices répétés. Les règles de calcul tensoriel se simplifient considérablement...

Changement de bases orthonormées

- deux bases de E :

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = Q_{ki}\, \underline{\boldsymbol{e}}_k, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_i = Q_{ik}\, \underline{\boldsymbol{e}}'_k$$

- formules de passage

Changement de bases orthonormées

- deux bases de E :

$$\underline{\boldsymbol{e}}'_i = Q_{ki}\, \underline{\boldsymbol{e}}_k, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_i = Q_{ik}\, \underline{\boldsymbol{e}}'_k$$

- formules de passage

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = T_{ij}\, \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = T'_{kl}\, \underline{\boldsymbol{e}}'_k \otimes \underline{\boldsymbol{e}}'_l$$

$$T'_{kl} = Q_{ik} Q_{jl} T_{ij}$$

notation matricielle

$$[T'] = [Q]^T [T] [Q]$$

Plan

Champs de tenseurs

- **champ de scalaires**
  la masse volumique $\rho(M)$ notée aussi $\rho(\underline{\boldsymbol{x}})$
- **champ de vecteurs**
  Les champs de vecteurs–position $\underline{\boldsymbol{x}}\,(M)$, de déplacements $\underline{\boldsymbol{u}}\,(M)$, de vitesses $\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{x}})$
- **champ de tenseurs d'ordre 2** champs de conductivité électrique
  le champ des contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{x}}\,, t)$
- **champ de tenseurs d'ordre 3**
  champ des propriétés piézoélectriques
- **champ de tenseurs d'ordre 4**
  champ des propriétés élastiques

L'analyse tensorielle consiste à étudier les variations d'un champ de tenseurs d'un point à un autre

Opérateurs différentiels (1)

- repérage par une **base mobile** $(\underline{\boldsymbol{e}}_i(\underline{\boldsymbol{x}}))_{i=1,3}$ associée à un système de coordonnées $M(q^i)$
$$\underline{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial M}{\partial q^i}$$
ex: coordonnées cylindriques, sphériques...
coordonnées **cartésiennes**: les champs $\underline{\boldsymbol{e}}_i(M)$ sont uniformes, les coordonnées sont notées x^i

Opérateurs différentiels (1)

- repérage par une **base mobile** $(\underline{\boldsymbol{e}}_i(\underline{\boldsymbol{x}}))_{i=1,3}$ associée à un système de coordonnées $M(q^i)$
$$\underline{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial M}{\partial q^i}$$
ex: coordonnées cylindriques, sphériques...
coordonnées **cartésiennes**: les champs $\underline{\boldsymbol{e}}_i(M)$ sont uniformes, les coordonnées sont notées x^i
- **dérivée** de $T(\underline{\boldsymbol{x}})$ suivant un vecteur $\underline{\boldsymbol{v}} \in E$:
$$D_{\underline{\boldsymbol{v}}}\, T = \lim_{\lambda\to 0} \frac{T(\underline{\boldsymbol{x}} + \lambda\underline{\boldsymbol{v}}) - T(\underline{\boldsymbol{x}})}{\lambda}$$
$D_{\underline{\boldsymbol{v}}}\, T(\underline{\boldsymbol{x}})$ est un tenseur du même ordre que $T(\underline{\boldsymbol{x}})$
$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = D_{\underline{\boldsymbol{e}}_i} T$$

Opérateurs différentiels (2)

- **gradient** d'un champ de tenseurs : c'est l'opérateur linéaire

$$\boldsymbol{\nabla} T : \quad \underline{\boldsymbol{v}} \mapsto D_{\underline{\boldsymbol{v}}}\,, \quad \boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{v}} = D_{\underline{\boldsymbol{v}}}\, T$$

  c'est un champ de tenseurs d'un ordre plus élevé que $T(\underline{\boldsymbol{x}})$
- expression à l'aide des dérivées partielles dans une base mobile quelconque

$$\boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{v}} =$$

- lien avec la différentielle d'un champ de tenseurs

$$dT = \boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{dM}}$$

Opérateurs différentiels (2)

- **gradient** d'un champ de tenseurs : c'est l'opérateur linéaire

$$\boldsymbol{\nabla} T : \quad \underline{\boldsymbol{v}} \mapsto D_{\underline{\boldsymbol{v}}}\,, \quad \boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{v}} = D_{\underline{\boldsymbol{v}}}\, T$$

  c'est un champ de tenseurs d'un ordre plus élevé que $T(\underline{\boldsymbol{x}})$

- expression à l'aide des dérivées partielles dans une base mobile quelconque

$$\boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{v}} = v^k \frac{\partial T}{\partial q^k} = \frac{\partial T}{\partial q^k} < \underline{\boldsymbol{e}}^{*k}, \underline{\boldsymbol{v}} >$$

$$\boldsymbol{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial q^k} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^{*k}$$

- lien avec la différentielle d'un champ de tenseurs

$$dT = \boldsymbol{\nabla} T.\underline{\boldsymbol{dM}}\,, \quad \underline{\boldsymbol{dM}} = \frac{\partial M}{\partial q^i} dq^i = dq^i\, \underline{\boldsymbol{e}}_i$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial q^i} < \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}, \underline{\boldsymbol{dM}} >= \frac{\partial T}{\partial q^i} dq^i$$

  ce sont les formules usuelles du calcul différentiel

Opérateurs différentiels (3)

- l'opérateur différentiel **divergence** abaisse de 1 l'ordre du champ de tenseur

$$\mathrm{div}\ T$$

Opérateurs différentiels (3)

- l'opérateur différentiel **divergence** abaisse de 1 l'ordre du champ de tenseur

$$\mathrm{div}\ T := (\boldsymbol{\nabla} T)_c = \frac{\partial T}{\partial q^i} . \underline{\boldsymbol{e}}^{*i}$$

Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes dans une BON

Base cartésienne OrthoNormée

$$\boldsymbol{\nabla} f =$$

$$\boldsymbol{\nabla} \underline{\boldsymbol{u}} =$$

$$\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{u}} =$$

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} =$$

Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes dans une BON

Base OrthoNormée

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \underline{\boldsymbol{e}}_i = f_{,i} \underline{\boldsymbol{e}}_i$$

$$\boldsymbol{\nabla} \underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial x_j} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j = u_{i,j} \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j$$

$$\mathrm{div}\, \underline{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial x_j} . \underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underline{\boldsymbol{e}}_i . \underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i}$$

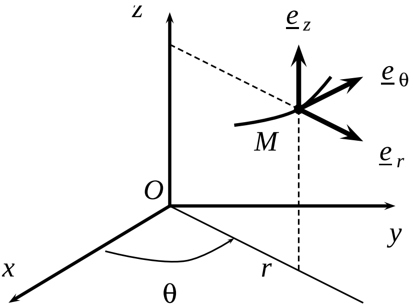
$$\mathrm{div}\, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial x_j} . \underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} (\underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_k) . \underline{\boldsymbol{e}}_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \underline{\boldsymbol{e}}_i = \sigma_{ij,j} \underline{\boldsymbol{e}}_i$$

où l'on a introduit la notation fréquente en physique,

$$_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

Base OrthoNormée: les indices restent en bas... mais base mobile...



$$\underline{\boldsymbol{OM}} = r\underline{\boldsymbol{e}}_r + z\underline{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\underline{\boldsymbol{dM}} = dr\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + rd\theta\,\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + dz\,\underline{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial r}$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial \theta}$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{OM}}}{\partial z}$$

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}_r, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_2 = r\underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}^1 = \underline{\boldsymbol{e}}_r, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^2 = \frac{1}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^3 = \underline{\boldsymbol{e}}_z$$

gradient d'un champ scalaire $f(r, \theta, z)$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial q^i}\underline{\boldsymbol{e}}^i$$

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \underline{\boldsymbol{e}}_r, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_2 = r\underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \underline{\boldsymbol{e}}_3 = \underline{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\underline{\boldsymbol{e}}^1 = \underline{\boldsymbol{e}}_r, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^2 = \frac{1}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \underline{\boldsymbol{e}}^3 = \underline{\boldsymbol{e}}_z$$

gradient d'un champ scalaire $f(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}^1 + \frac{\partial f}{\partial \theta}\underline{\boldsymbol{e}}^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}^3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_z \end{aligned}$$

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

gradient d'un champ de vecteurs $\qquad \underline{\boldsymbol{u}} = u_r \underline{\boldsymbol{e}}_r + u_\theta \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + u_z \underline{\boldsymbol{e}}_z$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \underline{\boldsymbol{u}} &= \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial q^i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^i \\ &= \end{aligned}$$

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

gradient d'un champ de vecteurs $\underline{\boldsymbol{u}} = u_r \underline{\boldsymbol{e}}_r + u_\theta \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + u_z \underline{\boldsymbol{e}}_z$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \underline{\boldsymbol{u}} &= \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial q^i} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^i \\
&= \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial r} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^1 + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial \theta} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^2 + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial z} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}^3 \\
&= \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial r} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial \theta} \otimes \frac{\underline{\boldsymbol{e}}_\theta}{r} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial z} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_r \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{u_r}{r} \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta - \frac{u_\theta}{r} \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \\
&+ \frac{\partial u_r}{\partial z} \underline{\boldsymbol{e}}_r \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \underline{\boldsymbol{e}}_\theta \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underline{\boldsymbol{e}}_z \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_z
\end{aligned}
$$

notation matricielle $[\boldsymbol{\nabla} \underline{\boldsymbol{u}}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta) & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(u_r + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}) & \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= (\boldsymbol{\nabla} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_c = \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial q^i} . \underline{\boldsymbol{e}}^{\,i} \\
&= \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} . \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} + \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \theta} . \frac{\underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta}}{r} + \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial z} . \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma_{rr}\, \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} + \sigma_{\theta\theta}\, \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} + \sigma_{zz}\, \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} + \sigma_{r\theta}\, (\underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} + \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r}) \\
&+ \sigma_{\theta z}\, (\underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} + \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta}) + \sigma_{zr}\, (\underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} + \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r})
\end{aligned}
$$

Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= (\nabla \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}})_c = \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial q^i} . \underline{\boldsymbol{e}}^{\,i} \\
&= \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial r} . \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} + \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \theta} . \frac{\underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta}}{r} + \frac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial z} . \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma_{rr}\, \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} + \sigma_{\theta\theta}\, \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} + \sigma_{zz}\, \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} + \sigma_{r\theta}\, (\underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} + \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r}) \\
&+ \sigma_{\theta z}\, (\underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} + \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta}) + \sigma_{zr}\, (\underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} + \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} &= \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \right) \underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} \\
&+ \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \right) \underline{\boldsymbol{e}}_{\,\theta} \\
&+ \left(\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) \underline{\boldsymbol{e}}_{\,z}
\end{aligned}
$$

vous pouvez préférer le formulaire...

Intégration des champs de tenseurs

théorème de la divergence

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} f \, dv = \int_{\partial\Omega} f \, \underline{\boldsymbol{n}} \, ds$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} \, dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{v}} \, . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} \, dv = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds$$

Théorème de la divergence

en composantes cartésiennes BON

$$\int_{\Omega} \bullet_{,i} \, dV = \int_{\partial\Omega} \bullet n_i \, ds$$

démonstration en 1D...

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} f \, dv = \int_{\partial\Omega} f \, \underline{\boldsymbol{n}} \, ds$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} \, dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{v}} \, . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} \, dv = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds$$

Théorème de la divergence

en composantes cartésiennes BON

$$\int_{\Omega} \bullet_{,i} \, dV = \int_{\partial\Omega} \bullet n_i \, ds$$

démonstration en 1D...

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} f \, dv = \int_{\partial\Omega} f \, \underline{\boldsymbol{n}} \, ds, \quad \int_{\Omega} f_{,i} \, dv = \int_{\partial\Omega} f n_i \, ds$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{v}} \, dv = \int_{\partial\Omega} \underline{\boldsymbol{v}} \, . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds, \quad \int_{\Omega} v_{i,i} \, dv = \int_{\partial\Omega} v_i n_i \, ds$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} \, dv = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} . \underline{\boldsymbol{n}} \, ds, \quad \int_{\Omega} T_{ij,j} \, dv = \int_{\partial\Omega} T_{ij} n_j \, ds$$

Plan

Bilan: calcul tensoriel dans une BON

notation intrinsèque/indicielle	calcul matriciel
$\underline{u}\,.\underline{v} =$	
$\underline{a} \otimes \underline{b} =$	
$(\underline{a} \otimes \underline{b}).\underline{v} =$	
$\underline{u}\,.(\underline{a} \otimes \underline{b}) =$	
$\underset{\sim}{T}.\underline{v} =$	
$\underline{v}\,.\underset{\sim}{T} =$	

Bilan: calcul tensoriel dans une BON

notation intrinsèque/indicielle	calcul matriciel
$\underline{\boldsymbol{u}} . \underline{\boldsymbol{v}} = u_i v_i$	$[\underline{\boldsymbol{u}}]^T [\underline{\boldsymbol{v}}]$
$\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}} = a_i b_j \underline{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_j$	$[\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}] = [\underline{\boldsymbol{a}}] [\underline{\boldsymbol{b}}]^T$
$(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}).\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{b}} . \underline{\boldsymbol{v}} \; \underline{\boldsymbol{a}}$	
$\underline{\boldsymbol{u}} .(\underline{\boldsymbol{a}} \otimes \underline{\boldsymbol{b}}) = \underline{\boldsymbol{u}} . \underline{\boldsymbol{a}} \; \underline{\boldsymbol{b}}$	
$\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} . \underline{\boldsymbol{v}} = T_{ij} v_j \underline{\boldsymbol{e}}_i$	$[\underset{\sim}{\boldsymbol{T}} . \underline{\boldsymbol{v}}] = [\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}] [\underline{\boldsymbol{v}}]$
$\underline{\boldsymbol{v}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{T}} = v_i T_{ij} \underline{\boldsymbol{e}}_j$	$[\underline{\boldsymbol{v}} . \underset{\sim}{\boldsymbol{T}}] = [\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}]^T [\underline{\boldsymbol{v}}]$