计算步骤

计算卡尔曼增益，计算估算值，更新估计误差

$$1.\ 计算\ K_k=\frac{e_{EST\ k-1}}{e_{EST\ k-1}+e_{MEA\ k}}$$

$$2.\ 计算\ \hat{X_k}=\hat{X_{k-1}}+K_k(Z_k-\hat{X_{k-1}})$$

$$3.\ 更新\ e_{EST\ k}=(1-K_k)e_{EST\ k-1}$$

示例

测量一个物体的长度，其实际的长度为50mm。

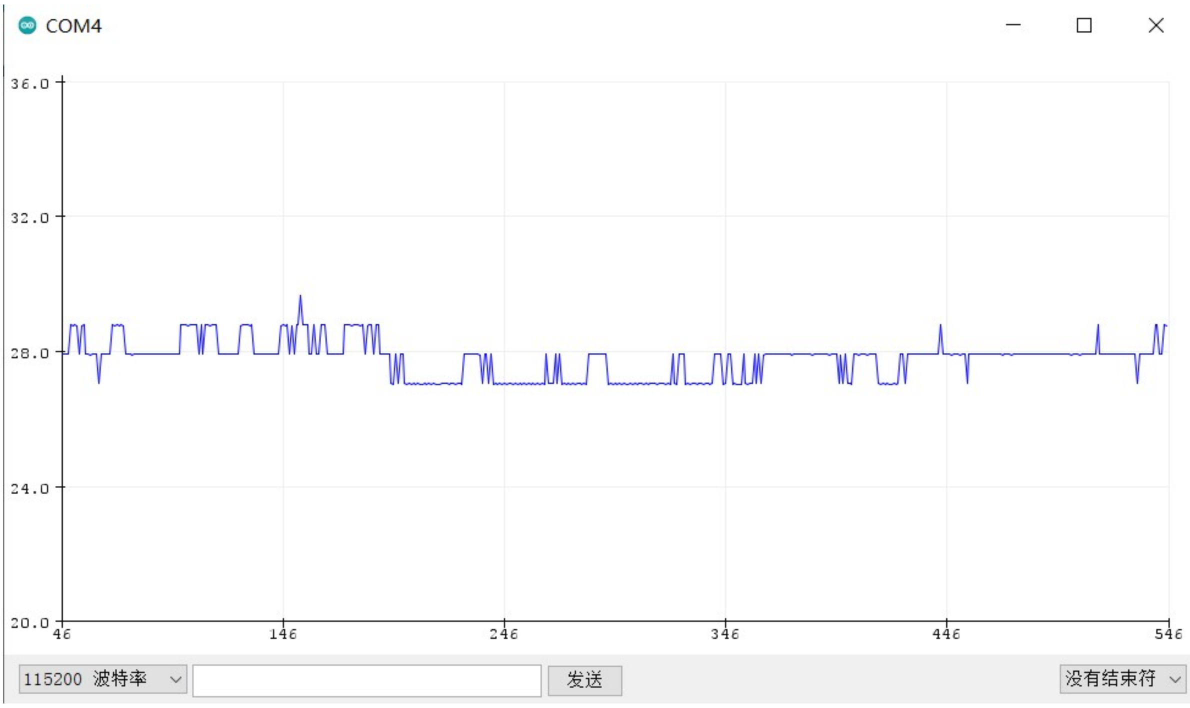
计算次数	测量长度	测量误差	估计长度	估计误差	卡尔曼增益
k	Z_k	e_{MEAk}	X_k	e_{ESTk}	K_k
0（初始化）			[40]	[5]	
1	[51]	[3]	46.875	1.875	0.625
2	[[48]]	[[3]]	47.308	1.154	0.3846
3	...	...			

> k=1:
>
> K_k = 5 / (5 + 3) = 0.625
>
> X_k = 40 + 0.625 (51 - 40) = 46.875
>
> e_{ESTk} =(1 - 0.625) * 5 = 1.875

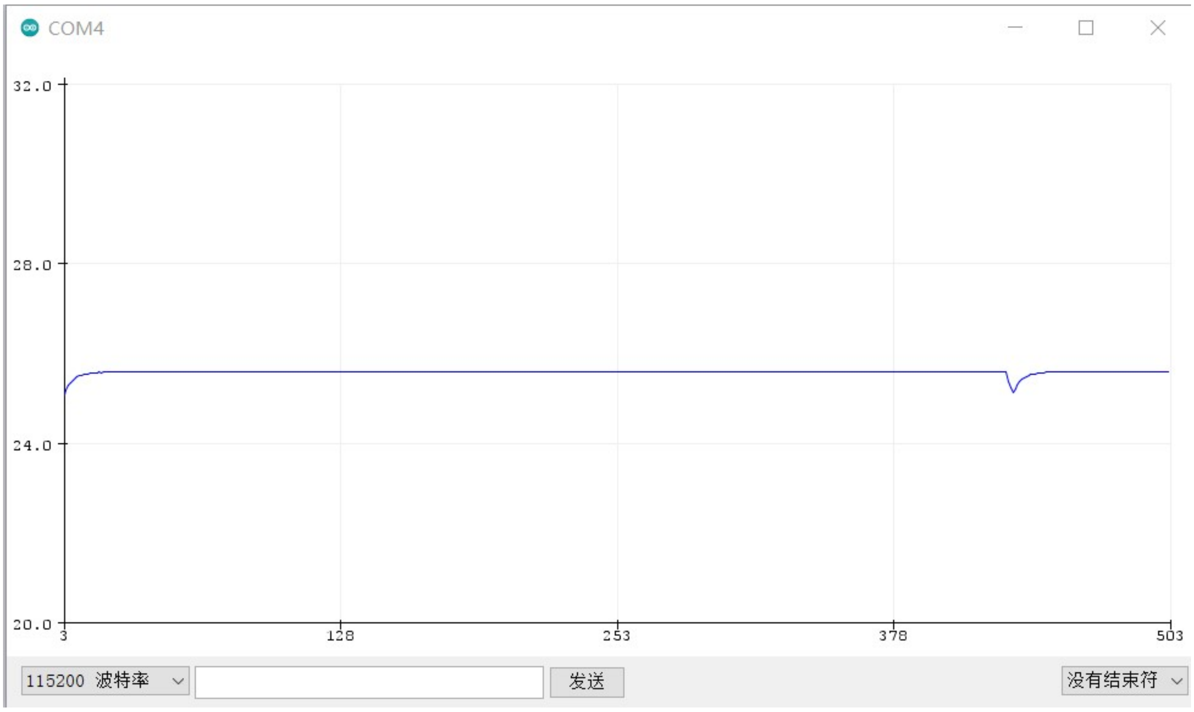
效果

基于STM32F103C8T6读取超声波模块的数据，并在ArduinoIDE上使用串口绘图区展示。

直接读取的裸机效果：



使用卡尔曼滤波器的效果：



公式推导过程

数学基础

取平均估计法

对于一个数据来说，我们可以通过多次测量取平均的方法来获得他较为准确的值。

> 以下公式中变量解释
>
> X_k：表示第k次的估计值
>
> Z_k：表示第k次的测量值

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_k &= \frac{1}{k}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_k) \\
&= \frac{k-1}{k}\frac{1}{k-1}(Z_1, Z_2, \cdots, Z_{k-1}) + \frac{1}{k}Z_k \\
&= \frac{k-1}{k}\hat{X}_{k-1} + \frac{1}{k}Z_k \\
&= \hat{X}_{k-1} - \frac{1}{k}\hat{X}_{k-1} + \frac{1}{k}Z_k \\
&= \hat{X}_{k-1} - \frac{1}{k}(Z_k - \hat{X}_{k-1})
\end{aligned}
$$

通过以上公式可推断推断出随着测量次数的增加（即k的增加）之前测量的数据就不重要了。

$$
\text{令 } K_k = \frac{1}{k} \text{ 可得 } \hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + K_k(Z_k - \hat{X}_{k-1})
$$

即可以得到结论：当前的估计值 = 上次的估计值 + 系数 * (当前测量值 - 上一次估计值)

注：这里的系数K_k就是`卡尔曼增益/因数(Kalman Gain)`

引入误差

而在现实中我们并不能准确的得到一个数据的值，总会存在各种误差。对应上述背景我们引入`估计误差`和`测量误差`。

> 以下公式中变量解释
>
> e_{EST}：表示估计误差
>
> e_{MEA}：表示测量误差

$$K_k = \frac{e_{EST\,k-1}}{e_{EST\,k-1} + e_{MEA\,k}}$$

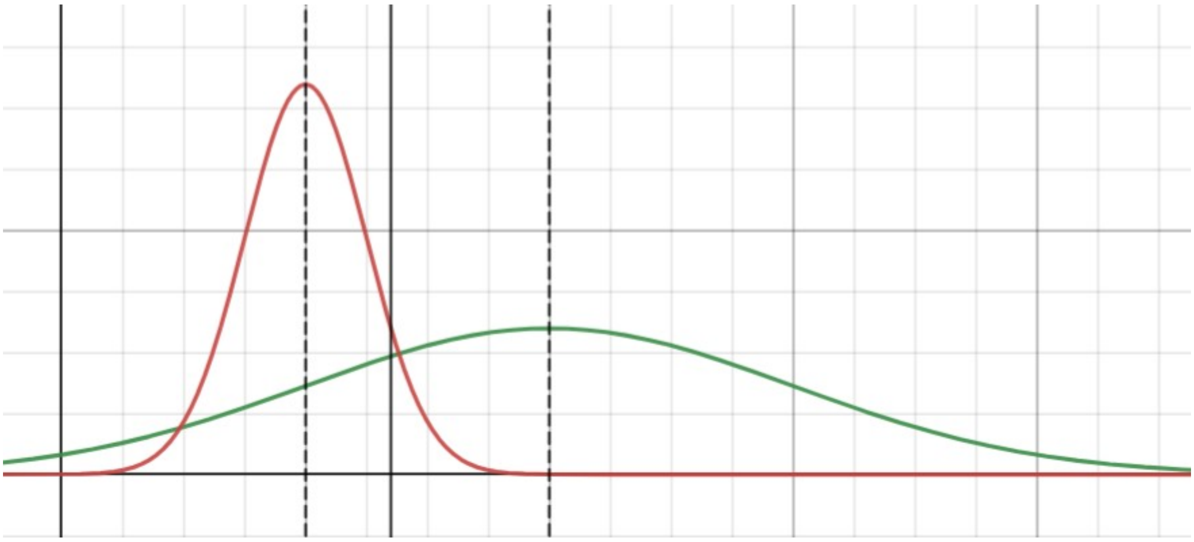
该公式是卡尔曼滤波器的核心公式之后会给出推导。

该公式分为两种情况：

1. 当 $e_{EST\,k-1} >> e_{MEA\,k}$ 时
   $K_k \to 1$
   $\hat{X_k} = \hat{X_{k-1}} + Z_k - \hat{X_{k-1}} = Z_k$
2. 当 $e_{EST\,k-1} << e_{MEA\,k}$ 时
   $K_k \to 0$
   $\hat{X_k} = \hat{X_{k-1}}$

数据融合

实际中我们可以通过两次测量得到的值以及测量时的标准差， 来计算更精准更贴合实际的值。



对于给出的两组数据：

$$Z_1 = 30g \quad \delta_1 = 2g$$
$$Z_2 = 32g \quad \delta_2 = 4g$$

通过公式 $\hat{Z} = Z_1 + K(Z_2 - Z_1)$ 可以得出更精准的数据

求 K 使得 $\delta_{\hat{Z}}$ 最小→方差 $Var(\hat{Z})$ 最小

$$\begin{aligned}
\delta_{\hat{Z}}^2 &= Var(Z_1 + K(Z_2 - Z_1)) \\
&= Var(Z_1 + KZ_2 - KZ_1) \\
&= Var((1-K)Z_1 + KZ_2) \qquad \text{相互独立} \\
&= Var((1-K)Z_1) + Var(KZ_2) \\
&= (1-K)^2 Var(Z_1) + K^2 Var(Z_2) \\
&= (1-K)^2 \delta_1^2 + K^2 \delta_2^2
\end{aligned}$$

求 $\delta_{\hat{Z}}$ 对 K 求导$=0$ 找最小极点得最小值

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\delta_{\hat{Z}}}{\mathrm{d}K} = -2(1-K)\delta_1^2 + 2K\delta_2^2 &= 0 \\
-\delta_1^2 + K\delta_1^2 + K\delta_2^2 &= 0 \\
K(\delta_1^2 + \delta_2^2) &= \delta_1^2 \\
K &= \frac{\delta_1^2}{\delta_1^2 + \delta_2^2}
\end{aligned}$$

求得 $K = 0.2$

带入可得 $\delta_{\hat{Z}} \approx 1.79, \quad \hat{Z} = 30.4g$

协方差矩阵

将方差和协方差在一个矩阵中表现出来。表示变量之间联动的关系。

球员	身高 x	体重 y	年龄 z
瓦尔迪	179	74	33
奥巴梅杨	187	80	31
萨拉赫	173	71	28
平均	180.3	75	30.7

方差:

$$\begin{aligned}\delta_x^2 &= \frac{1}{3}((179-180.3)^2+(187-180.3)^2+(175-180.3)^2)\\ &= 24.89\\ \delta_y^2 &= 14\\ \delta_x^2 &= 4.22\end{aligned}$$

协方差:

$$\begin{aligned}\delta_x\delta_y &= \frac{1}{3}((179-180.3)(74-75)+(187-180.3)(80-75)+(175-180.3)(71-75))\\ &= 18.7\\ \delta_x\delta_y &= 4.4\\ \delta_x\delta_y &= 3.3\end{aligned}$$

矩阵表示： $P=\begin{bmatrix}\delta_x^2 & \delta_x\delta_y & \delta_x\delta_z\\ \delta_y\delta_x & \delta_y^2 & \delta_y\delta_z\\ \delta_z\delta_x & \delta_z\delta_y & \delta_z^2\end{bmatrix}$

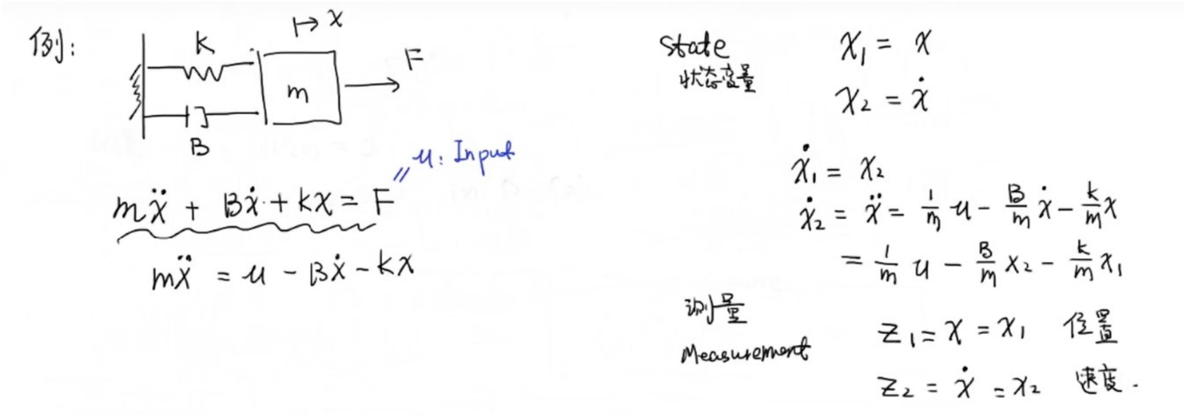
过渡矩阵: $a=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}$

用过渡矩阵表示： $P=\frac{1}{3}a^Ta$

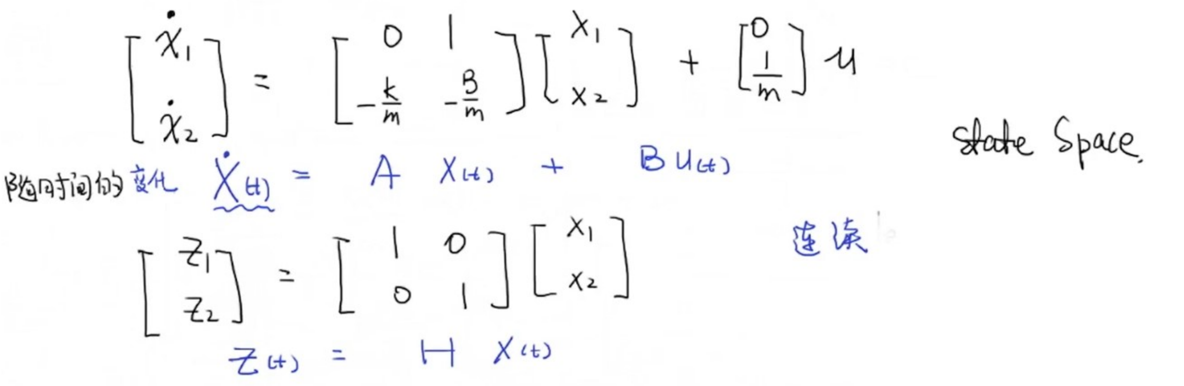
状态空间表达

以一个弹簧阻尼系统为例。

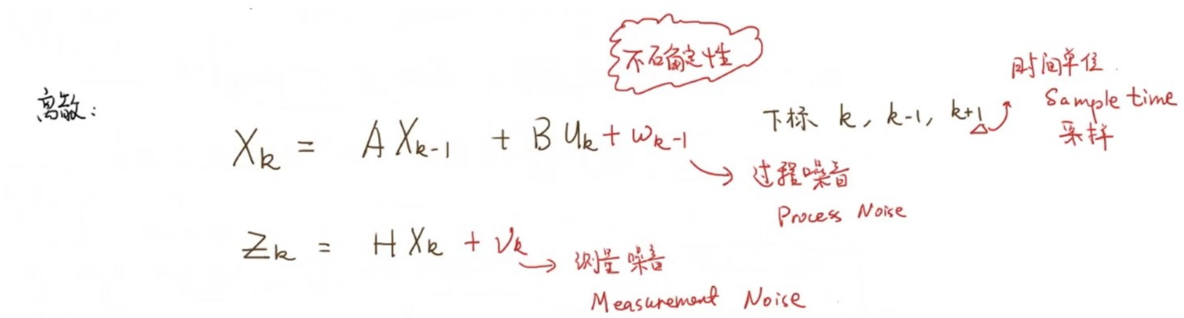
写出方程并转换成状态空间表示形式：



用矩阵的形式来表示：



用离散的形式表示，并加入不确定的噪音：



问题：如何通过`不准确定的估计值`**和**`不准确的测量值`**来计算出一个相对准确的值？**

数学推导

篇幅过长之后总结。

卡尔曼滤波器公式

预测	校正
先验：$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1}^- + Bu_{k-1}$	卡尔曼增益：$K_k = \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + R}$
先验误差写方差：$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$	后验估计：$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(Z_k - H\hat{x}_k^-)$
	更新误差协方差：$P_k = (I - K_kH)P_k^-$

P_0 和 $\hat{x}_0$ 为初始值

学习推荐

1. 【卡尔曼滤波器】1*递归算法*Recursive Processing*哔哩哔哩*bilibili
2. 学习心得|基于卡尔曼滤波的MPU6050姿态解算*哔哩哔哩*bilibili
3. 【软核】卡尔曼滤波，不废话*哔哩哔哩*bilibili
4. 手把手教你学-卡尔曼滤波（附代码）*卡尔曼滤波代码_Jason*^^的博客-CSDN博客