Solutions aux Exercices

Exercice 1 :

1. Le développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 3 en $x = 0$ est :

   $\sin(x) = x - x^3 / 6 + o(x^3)$.

2. En déduire le développement limité de $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$:

   $f(x) = \ln(1 + \sin(x)) = x - (1/2)x^2 - x^3 / 6 + o(x^3)$.

3. Le calcul de la limite donne :

   $\lim_{x\to 0} [(\ln(1 + \sin(x)) - x) / x^2] = -1/2$.

Exercice 2 :

1. Montrons que (u_n) est bien définie et que $u_n > 0$:

   Par récurrence : $u_0 = 1 > 0$, et $u_{n+1} = u_n / (1 + u_n)$, donc $u_{n+1} > 0$ si $u_n > 0$.

2. La suite est décroissante :

   $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 / (1 + u_n) < 0$, donc elle est décroissante.

3. La limite est 0 :

   En résolvant l'équation limite $L = L / (1 + L)$, on trouve $L = 0$.

Exercice 3 :

1. L'équation différentielle a une solution générale :

   $y(x) = (C1 + C2 * x)e^{(2x)} + x * e^{(3x)}$.

2. En appliquant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$:

   On trouve $y(x) = -x * e^{(2x)} + x * e^{(3x)}$.

Exercice 4 :

1. La transformée de Laplace donne :

   $F(p) = p / [(p - 1)(p + 2)]$.

2. En décomposant $F(p)$ en éléments simples et utilisant la transformée inverse :

$y(t) = (2/3)e^t + (1/3)e^{-2t}$.