Курсовой проект по предмету
«Современные проблемы вычислительной математики»
на тему
«Стохастические системы»

Студент: Забарин Н.И. группа 208Б
Преподаватель: Ревизников Д.Л.

Оценка:

Введение

Дифференциальные уравнения сегодня находят применение в любых областях нашей жизни которые возможно описать математически. Тем не менее обычно реальные данные имеют расхождения с теоретическими прогнозами.

В большинстве случаев изучаемая системы подвержена случайным внешним факторам. Если перейти к мельчайшим объектам обнаруживается еще большая нерегулярность, броуновское движение. Изменение координат носит настолько ломаный характер что вычислить производную просто не представляется возможным.

Если взять модель экспоненциального роста, которую мы подробно рассматривали в лабораторных работах, и сравнить с реальными исследованиями, то выяснится что на популяцию кроликов влияют некие факторы, которые при первом приближении выглядят как случайные. Попробуем добавить случайную величину в логистичекое уравнение.

Логистическое блуждание

В общем виде можно выразить логистическое блуждание с помощью уравнения:

$$dx = \alpha x dt + \beta x \delta W$$

, где альфа и бета — параметры системы, δW - случайная составляющая. Если приравнять бету к нулю получим обычное уравнение экспоненциального роста. Подобная зависимость возникает во многих физических, биологических и социальных системах, от радиоактивного распада до роста экономики.

Решать такое уравнение традиционными способами нельзя из-за присутствия винеровского члена. Разрешил эту проблему японский математик Ито Киёси, сформулировав лемму Ито.

Лемма Ито

Путь дано стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = a(t,\ \omega)\,dt + b(t,\ \omega)\,dB_t$$

Предполагая, что F имеет первую производную по t и первые две производные по x, лемма говорит, для любого t > 0, имеет место формула:

$$F(t,\ X_t) = F(0,\ X_0) + \int\limits_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(s,\ \omega)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(s,\ \omega)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]\,ds + \int\limits_0^t \frac{\partial F}{\partial x} b(s,\ \omega)\,dB_s$$

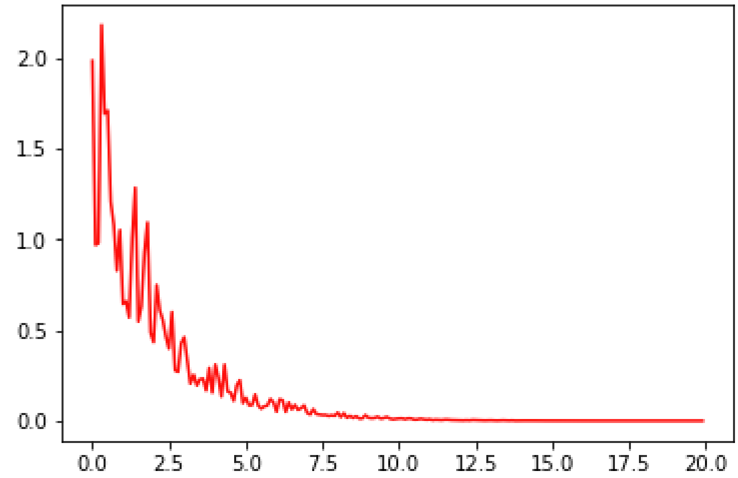
Таким образом согласно лемме уравнение примет следующий вид:

$$d(lnx) = (\alpha - \frac{\beta^2}{2})dt + \beta \delta W$$

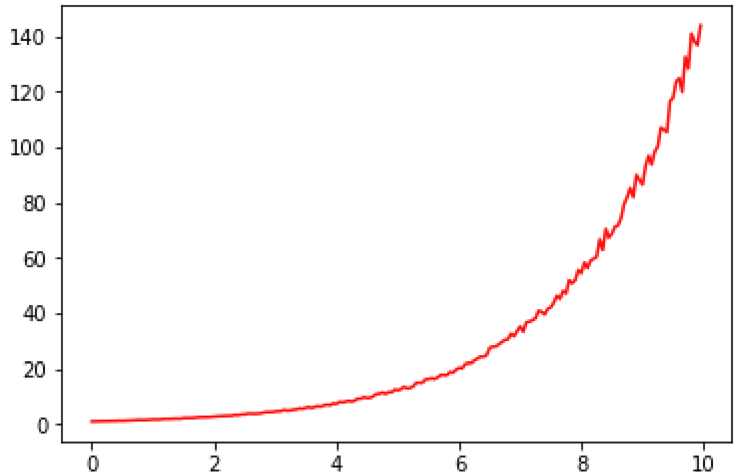
Решение такого уравнения:

$$x(t) = \exp^{(\alpha - \frac{\beta^2}{2})t + \beta \delta W}$$

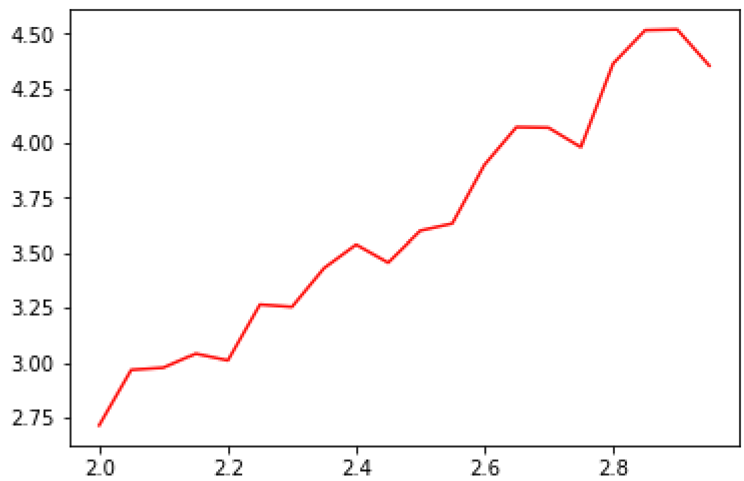
Реализовав эту систему, приведу несколько результатов работы. Если обнулить альфу, то получим сходящуюся к нулю зависимость.



При параметрах 0.5 и 0.1 система показывает стабильный экспоненциальный рост.



Но при увеличении того же графика видно, что популяция растет с изломами.



Стохастическая система

Рассмотрим более сложный двумерный случай:

$$\begin{cases} dx = (-xy + \omega^2 x - 2\lambda x^2)\, dt + x\, s_x\, \delta W_x \\ dy = (\ \ xy - y)\, dt + y\, s_y\, \delta W_y. \end{cases}$$

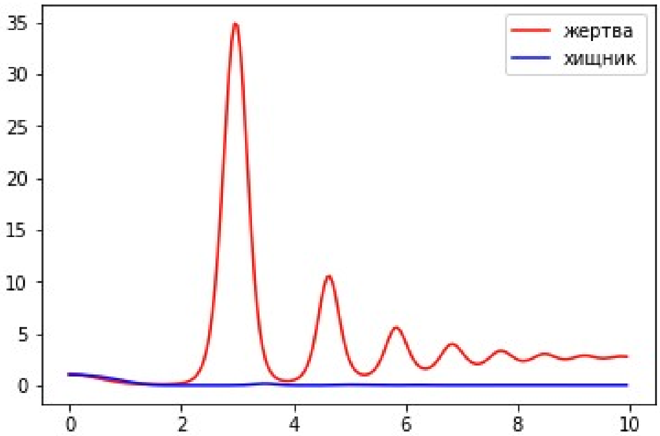
на примере модели охотник-жертва (хищник-жертва), где x — жертвы, y — хищники. Будем считать, что рождаемость подвержена случайным факторам и введем винеровский член в каждое из уравнений.

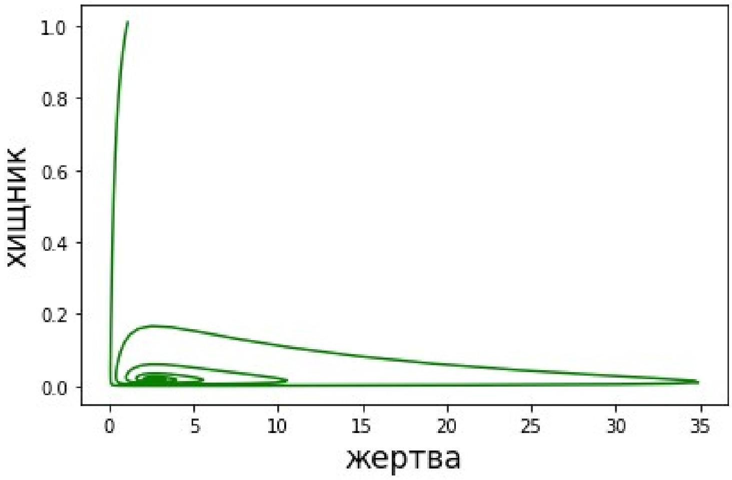
После применения леммы Ито получим:

$$d(lnx) = ((-y + \omega^2 - 4\lambda x) - 4)dt + s_x \delta W$$

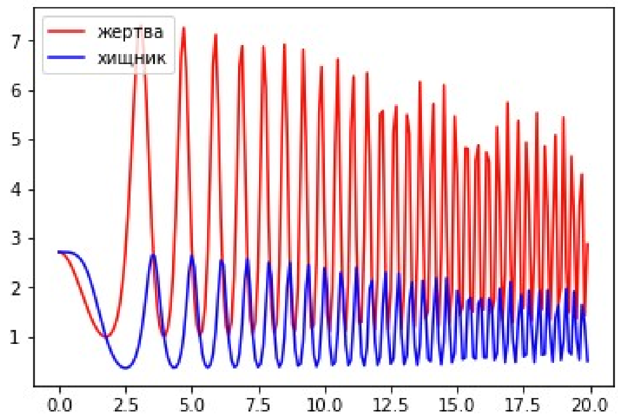
$$d(lny) = (x - 1)dt + s_y \delta W$$

Реализовав решение системы, посмотрим на зависимость от параметров, если избавиться от винеровсского члена система сходится к стабильному состоянию.





В ходе ряда экспериментов удалось подобрать коэффициенты для умеренного влияния винеровского члена на систему.



Исходный код

Реализация функции логарифмического блуждания:

```
def get_f(a=0, b=0, w=None):

    def f(t):

        return math.e**((a - b**2/2)*t + b*w(t))

    return f
```

Реализация стохастической системы хищник-жертва:

```
def get_f(omega=0, lambd=0, sx=0.007, sy=0, w=None):

    def f(xy, t):
        x, y = xy

        return [(-y+omega**2 - 4*lambd*x-4) * t + sx*w(t),
                (x-1) * t + sy*w(t)]

    return f
```

```
step = 0.1
omega = 2
lambd = 0.001
sx = 0.01
sy = 0

t = [step*i for i in range(200)]
w = get_w()
f = get_f(omega=omega, lambd=lambd, sx=sx, sy=sy, w=w)

xy0 = [1, 1]

dxy = odeint(f, xy0, t)

x = [math.exp(i[0]) for i in dxy]
y = [math.exp(i[1]) for i in dxy]

plt.plot(t, x, 'r')
plt.plot(t, y, 'b')
plt.legend(["жертва", "хищник"], loc=2)
plt.show()

plt.plot(x, y, 'g')
plt.xlabel('жертва', fontsize=17)
plt.ylabel('хищник', fontsize=17)
plt.tight_layout()
plt.show()
print('omega: {}, lambda: {}, sx: {}, sy: {}, step: {}'.format(omega, lambd, sx, sy, step))
```

Заключение

При выполнении данной работы я познакомился со стохастическими системами, которые гораздо лучше описывают реальные процессы происходящие вокруг нас. Уравнения описывающие такие системы нельзя решать обычными методами, из-за невозможности прямого интегрирования случайной составляющей, необходимо пользоваться уравнением и леммой Ито.