

## 18

## Solid Geometry

## 立体几何

用 Matplotlib 绘制立体几何形状



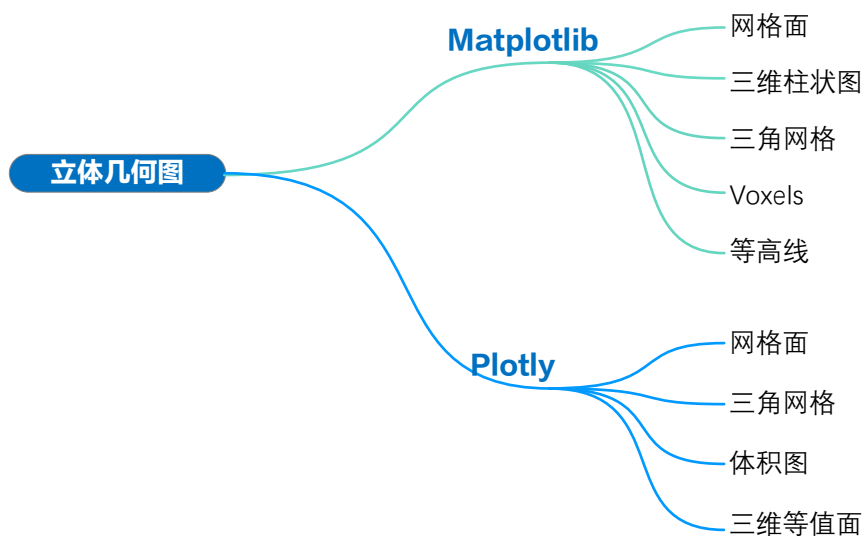
艺术家，胸怀宇宙，手握繁星。

*The painter has the Universe in his mind and hands.*

—— 列奥纳多·达·芬奇 (Leonardo da Vinci) | 文艺复兴三杰之一 | 1452 ~ 1519



- ◀ Axes3D.bar3d() 绘制三维柱状图
- ◀ Axes3D.plot\_surface() 绘制三维曲面
- ◀ Axes3D.voxels() 绘制三维 voxels 图
- ◀ matplotlib.pyplot.contour() 绘制等高线图
- ◀ matplotlib.pyplot.plot\_trisurf() 在三角形网格上绘制平滑的三维曲面图
- ◀ plotly.graph\_objects.Isosurface() 绘制三维等值面
- ◀ plotly.graph\_objects.Surface() 绘制三维几何体
- ◀ plotly.graph\_objects.Surface() 绘制三角网格几何体
- ◀ plotly.graph\_objects.Volume() 绘制三维体积图
- ◀ sympy.symbols() 定义符号变量



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 18.1 绘制几何体的几种方法

本书前文介绍过利用散点、线图、等高线、网格面等三维空间可视化方案，本章专门介绍如何可视化三维几何体。

### 用网格面

图 1 和图 12 所示为利用参数方程 (parametric equation) 绘制的四个几何体。参数方程是一种描述几何对象运动或位置的方式，使用参数表示对象随时间变化的轨迹。相比直角坐标系，参数方程更灵活，适用于复杂曲线或曲面的描述。通过引入参数，可以将对象的位置与时间或其他因素关联起来，使得描述更为简便直观。

绘制图 1 用到的是三维轴对象上的 `plot_surface()` 方法。请大家格外注意图 1 (a)，这幅图用到了球坐标 (spherical coordinate system)。

Bk\_2\_Ch18\_01.ipynb 绘制图 1 和图 12，请大家自行学习。



本书后续会专门介绍如何用参数方程绘制平面、立体几何图形。

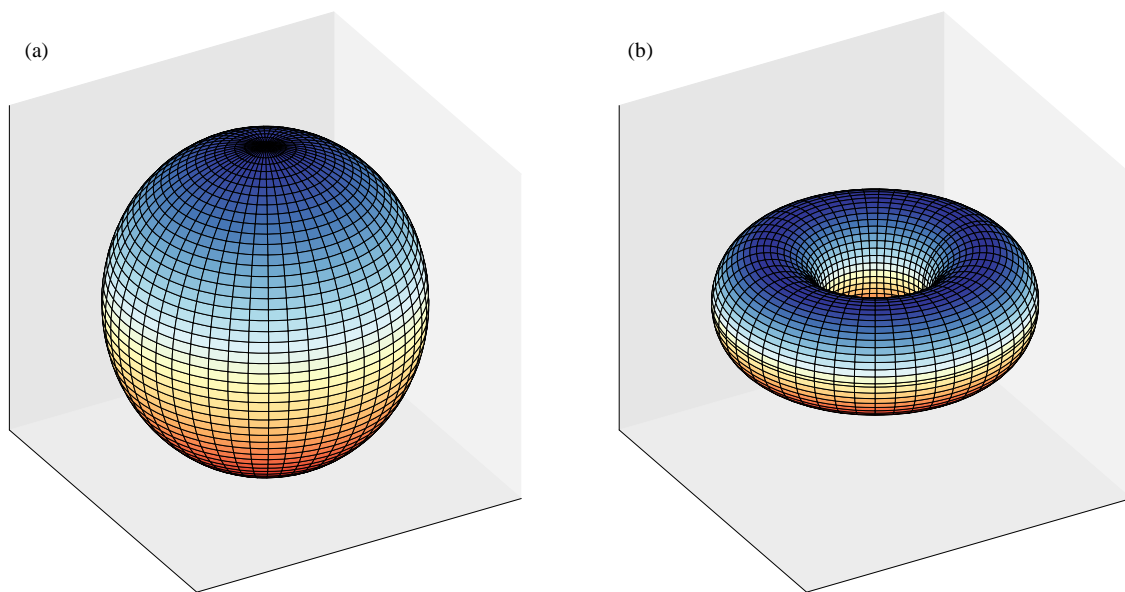



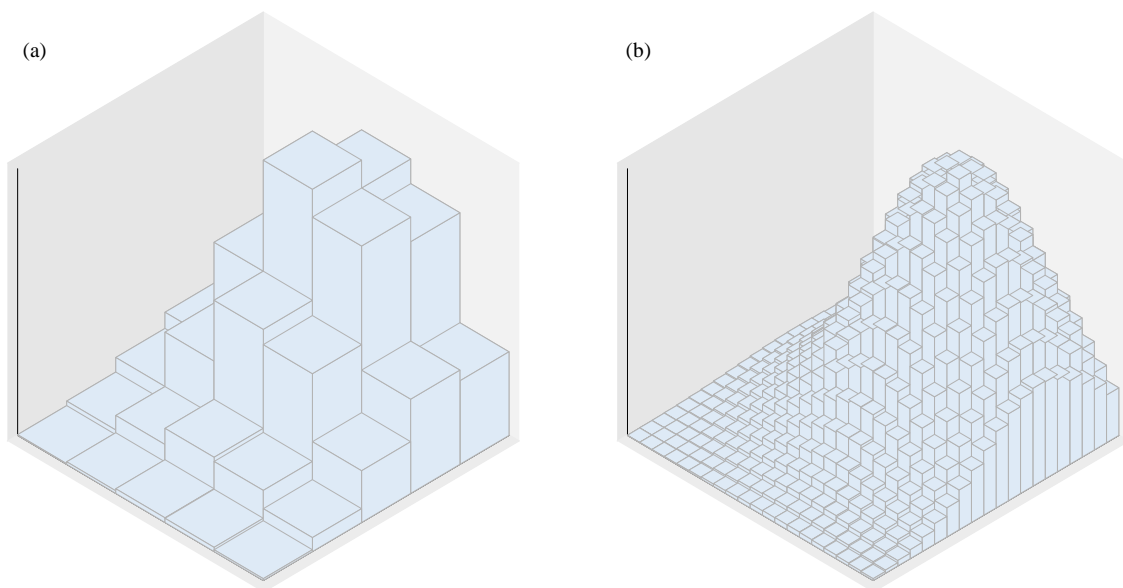
图 1. 用网格面绘制几何体，参数方程，第 1 组 |  Bk\_2\_Ch18\_01.ipynb

### 用三维柱状图

图 2 所示为利用三维柱状图绘制的几何体，请大家自行学习 Bk\_2\_Ch18\_02.ipynb。



图 2 实际上展示的二重积分估算，《数学要素》第 18 章将深入介绍这个数学工具。

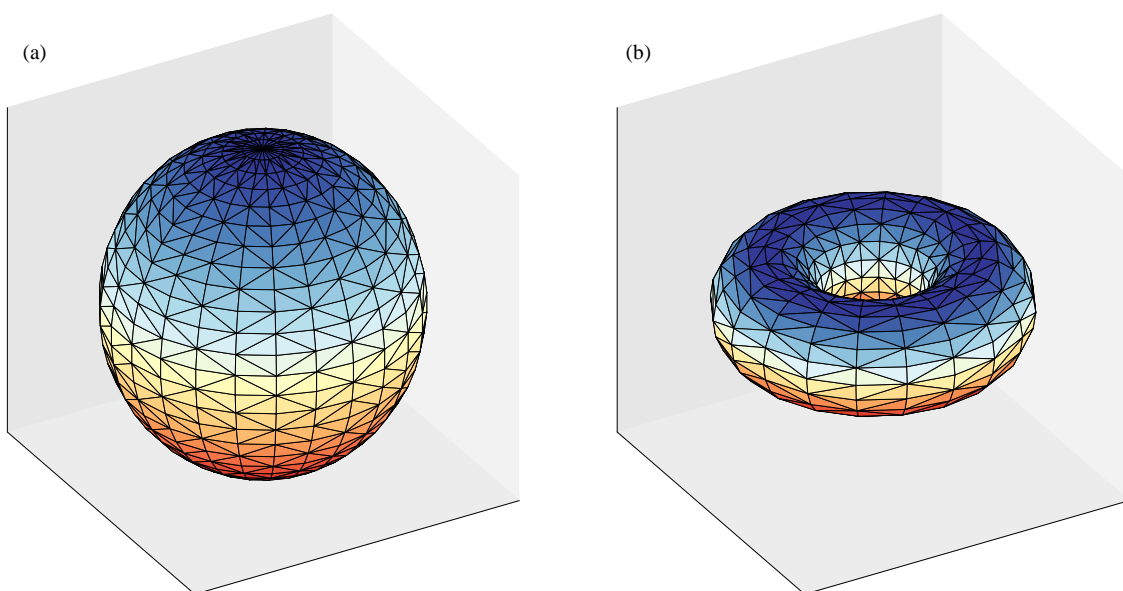
图 2. 用柱状图绘制几何体 | [Bk\\_2\\_Ch18\\_02.ipynb](#)

### 三角网格

图 3 所示为空间三角网格绘制的圆球体和游泳圈。图 13 (a) 所示为用规则三角网格可视化莫比乌斯带 (Möbius strip)。莫比乌斯带是一种特殊的拓扑结构，具有只有一个面和一个边的特点。它通过在带状物体上引入半圈扭曲而成，使得表面上的内外变得连续。莫比乌斯带展示了拓扑学中奇异而有趣的性质，即在没有割裂的情况下改变物体的性质。这独特的几何形状经常被用来展示拓扑学的概念，引起人们对空间和形状的非直观思考。

图 13 (b) 所示为用不规则三角网格展示正球体。

[Bk\\_2\\_Ch18\\_03.ipynb](#) 绘制图 3 和图 13，请大家自行学习。

图 3. 用规则三角网格绘制几何体 | [Bk\\_2\\_Ch18\\_03.ipynb](#)

## 用 voxels 绘制立体几何体

图 4 所示为利用 voxels 绘制立方体方块，请大家自行学习 Bk\_2\_Ch18\_04.ipynb。

Matplotlib 中的 voxels 是一种用于三维数据可视化的功能。它将三维数据集表示为一系列的小方块，其中每个方块的位置、大小和颜色都可以自定义。通过使用 voxels，可以直观地展示复杂的三维数据结构，如体积数据、分子模型等。voxels 支持不同的绘制样式，包括实心方块和透明方块，可以根据需要进行调整。此外，还可以添加轴标签、标题和图例等来增强可视化效果。

图 14 所示为利用 voxels 可视化 RGB 和 CMYK 色彩空间，请大家自行学习 Bk\_2\_Ch18\_05.ipynb。

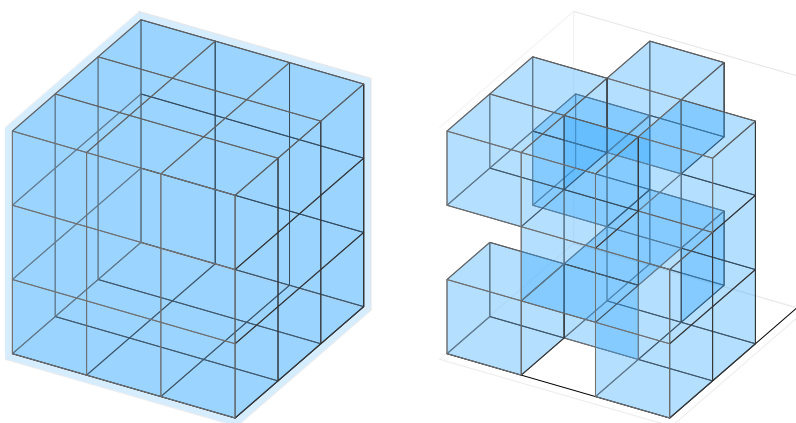


图 4. 用 voxels 绘制几何体 |  Bk\_2\_Ch18\_04.ipynb

## 18.2 用等高线绘制三维几何体

图 5 所示为一种有趣的方法绘制三维几何体。我们用三个方向空间等高线“织成”一个三维网面，这种可视化方法非常适合展示三元隐函数。隐函数 (implicit function) 是指在方程中未显式表示的函数，其变量间的关系通过方程隐含。通常，隐函数的表达形式不容易直接解出某个变量。解析求解难以实现时，可通过数值或近似方法找到满足方程的点。图 5 对应的隐函数为  $x + y + z = 1$ 。

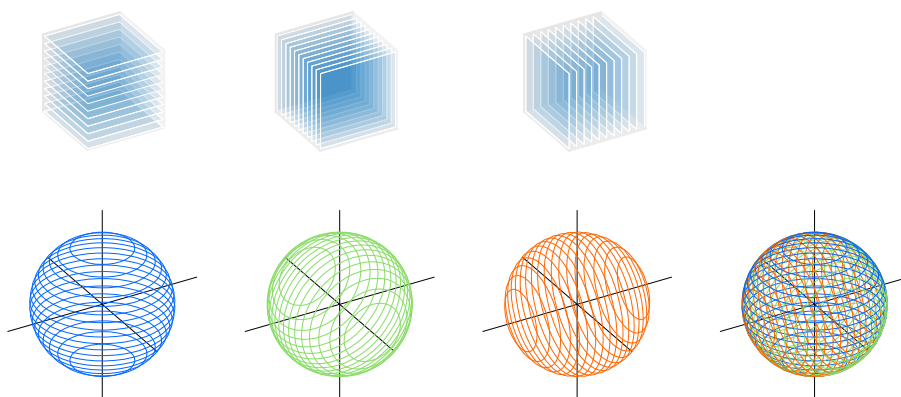


图 5. 用三维等高线绘制几何体 |  Bk\_2\_Ch18\_06.ipynb

图 15 所示为单位球体经过不同的几何变换。本书后续会专门介绍二维和三维几何变换。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 16 所示为一个**旋转椭球** (ellipsoid) 在三个不同平面的投影。注意，这个椭球不是一般的椭球，它代表了一个  $3 \times 3$  的协方差矩阵的马氏距离为 1 的“等距线”。

图 17 所示为图 16 旋转椭球“摆正”后的椭圆，及其在三个平面的投影。也就是说，图 16 和图 17 中两个椭球大小完全一致，空间旋转角度不同而已。



鸢尾花书《矩阵力量》《统计至简》将会详细介绍相关数学工具。

## 18.3 Plotly 的三维可视化方案

Plotly 提供很多三维可视化方案，本节简单总结一下。

图 6 所示为利用 `plotly.graph_objects.Surface()` 绘制的正球体和游泳圈。请大家格外注意图中颜色映射渲染依据。

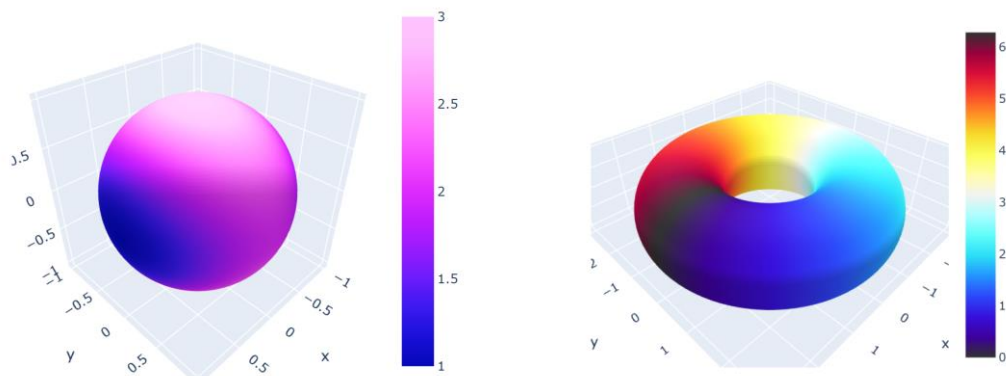


图 6. 使用 `plotly.graph_objects.Surface()` 绘制三维几何体 | [Bk\\_2\\_Ch18\\_08.ipynb](#)

图 7 所示为利用 `plotly.graph_objects.Surface()` 绘制三角网格几何体。

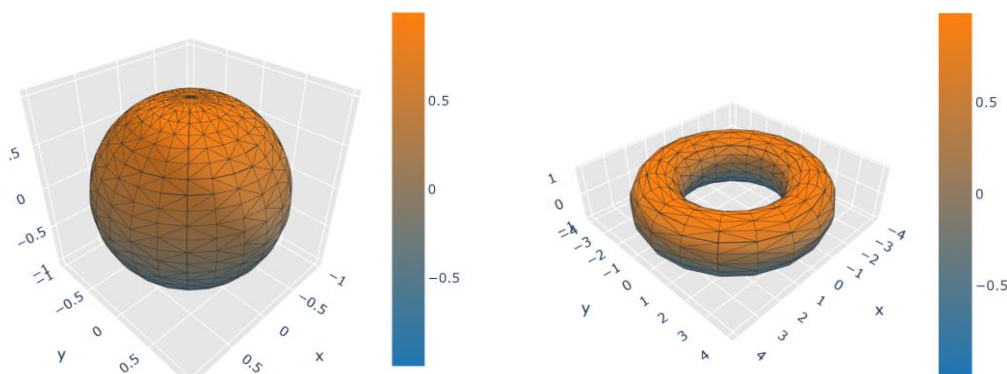


图 7. 使用 `plotly.graph_objects.Surface()` 绘制三角网格几何体 | [Bk\\_2\\_Ch18\\_09.ipynb](#)

图 8 所示为利用 `plotly.graph_objects.Volume()` 绘制三维体积图。图 9 所示为用 Streamlit 创建的展示 Plotly 体积图的 App。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

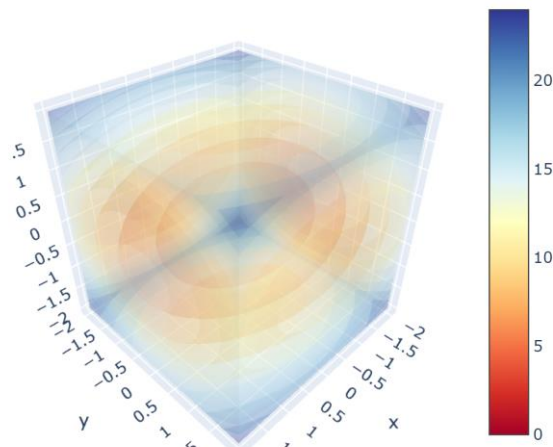
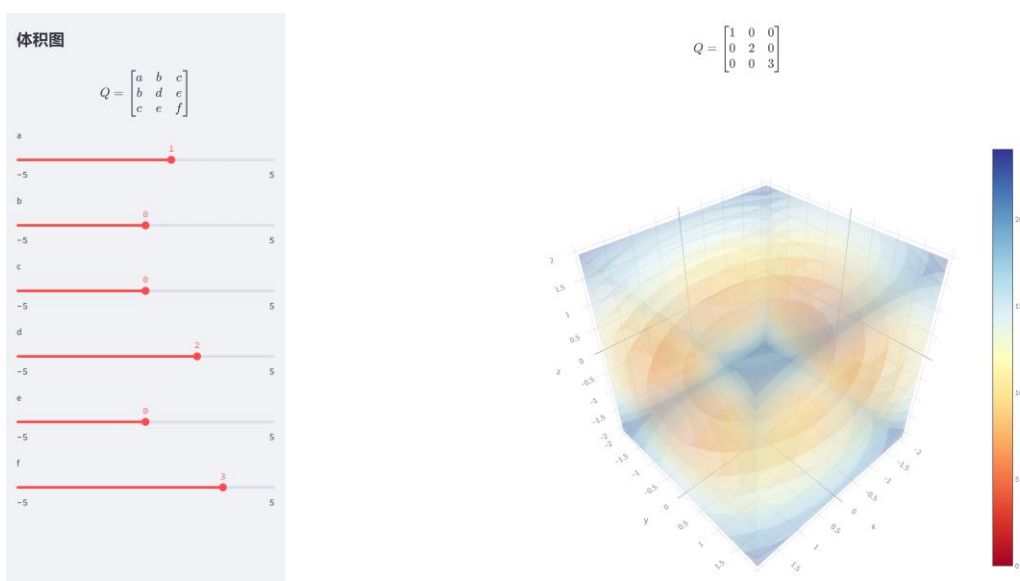
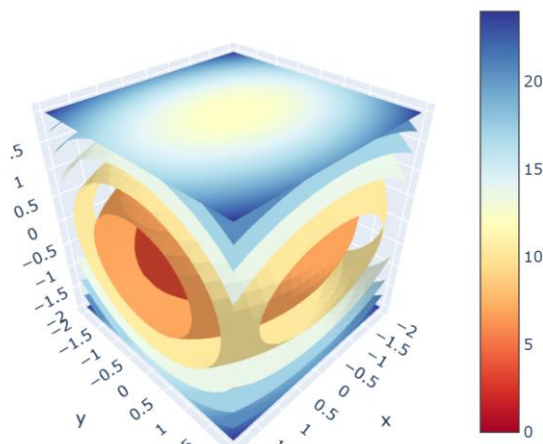
图 8. 使用 `plotly.graph_objects.Volume()` 绘制三维体积图 | [Bk\\_2\\_Ch18\\_10.ipynb](#)图 9. 展示 Plotly 体积图的 App, Streamlit 搭建 | [Streamlit\\_3D\\_Volume.py](#)

图 10 所示为使用 `plotly.graph_objects.Isosurface()` 绘制三维等值面。图 11 所示为用 Streamlit 创建的展示三维等值面的 App。

图 10. 使用 `plotly.graph_objects.Isosurface()` 绘制三维等值面 | [Bk\\_2\\_Ch18\\_11.ipynb](#)

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



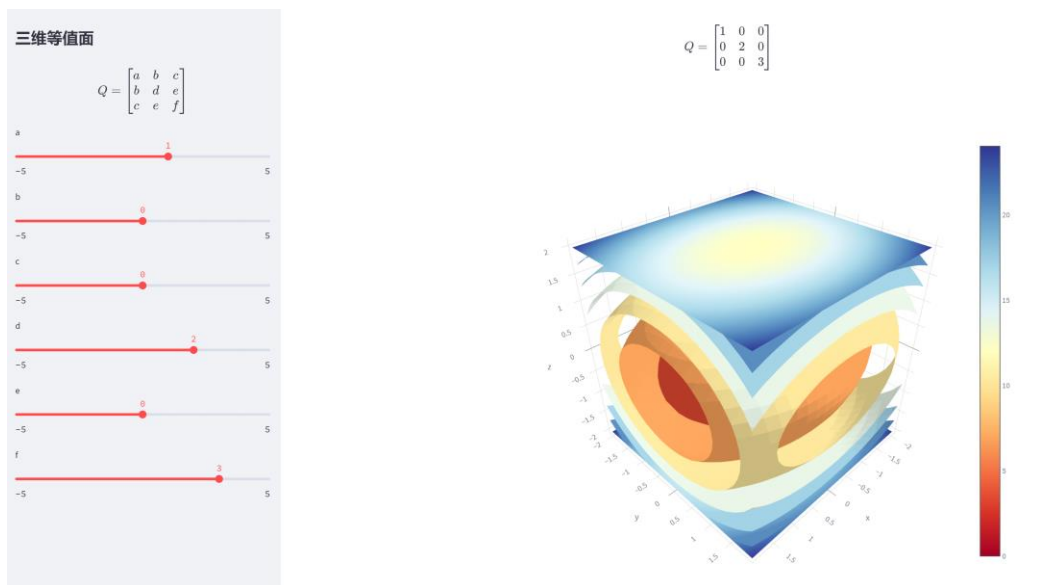



图 11. 展示 Plotly 三维等值面的 App, Streamlit 搭建 |  Streamlit\_3D\_Isosurface.py

本章总结了常用的立体几何可视化方案。请大家格外注意参数方程，还有 Plotly 中的几种方案，以及如何使用三维等高线“织成”三维几何体。本书后续还会专门介绍隐函数、参数方程、几何变换等数学概念。

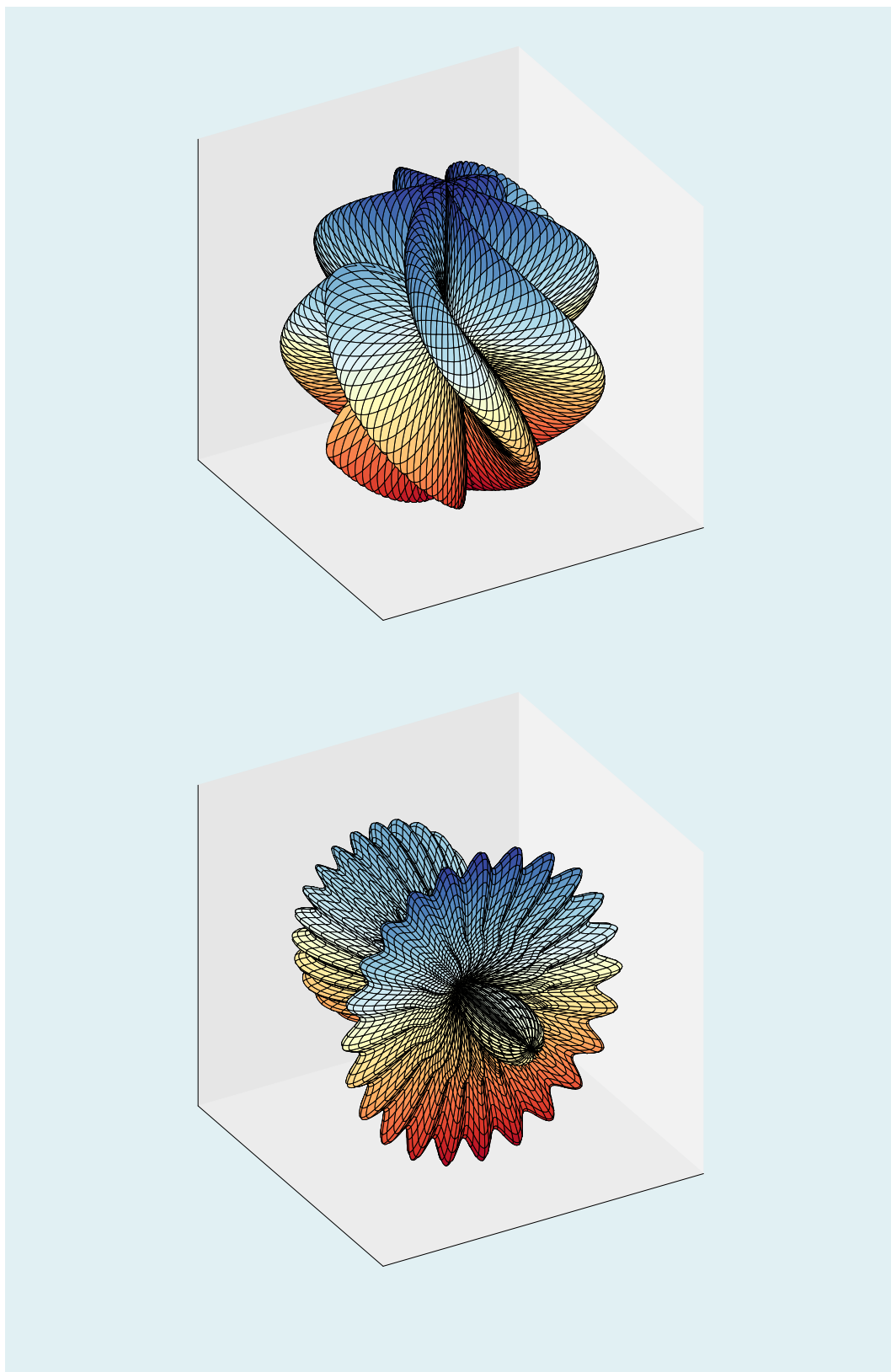



图 12. 用网格面绘制几何体，参数方程，第 2 组 |  Bk\_2\_Ch18\_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)



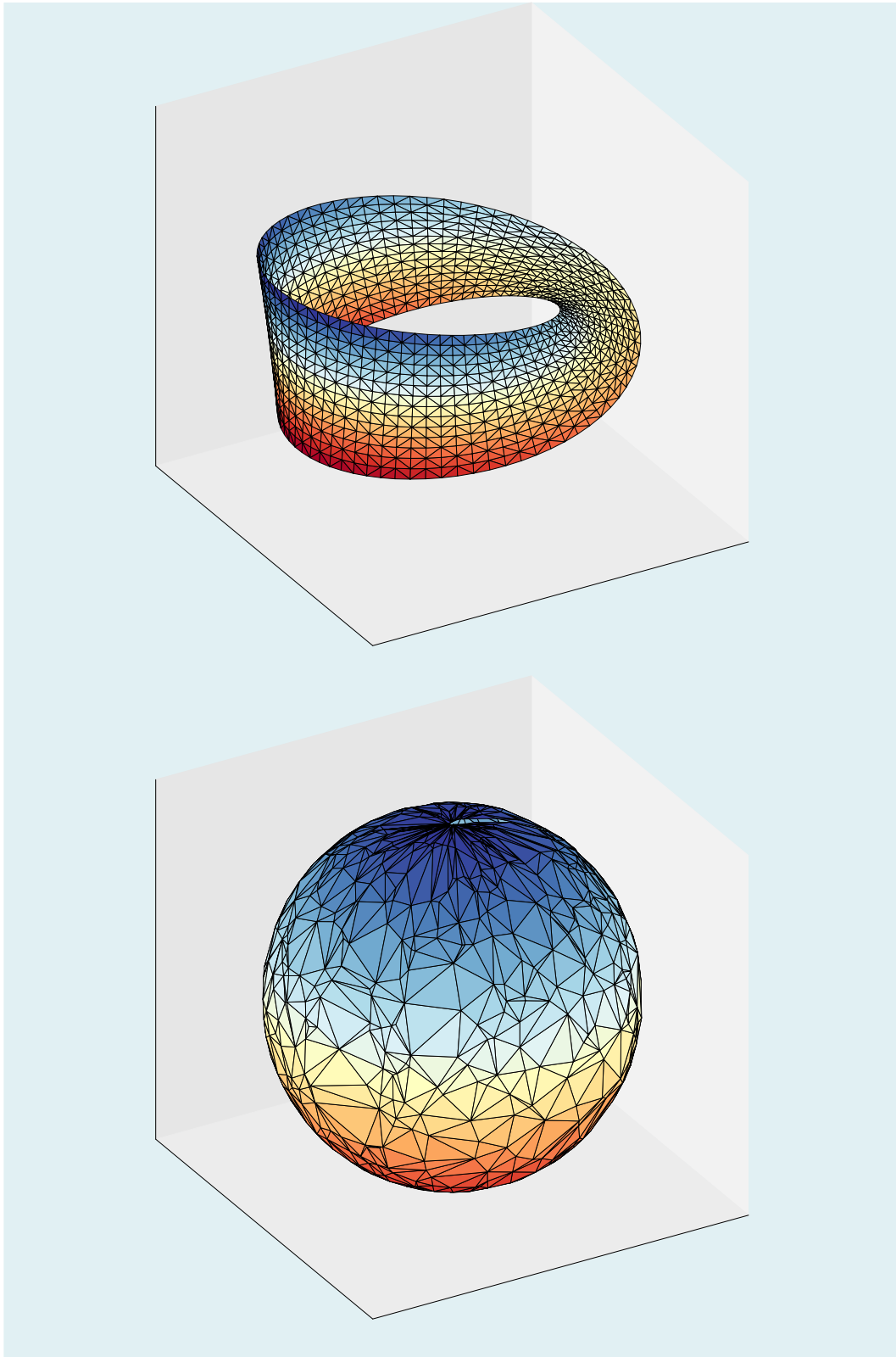



图 13. 用三角网格绘制几何体 |  Bk\_2\_Ch18\_03.ipynb

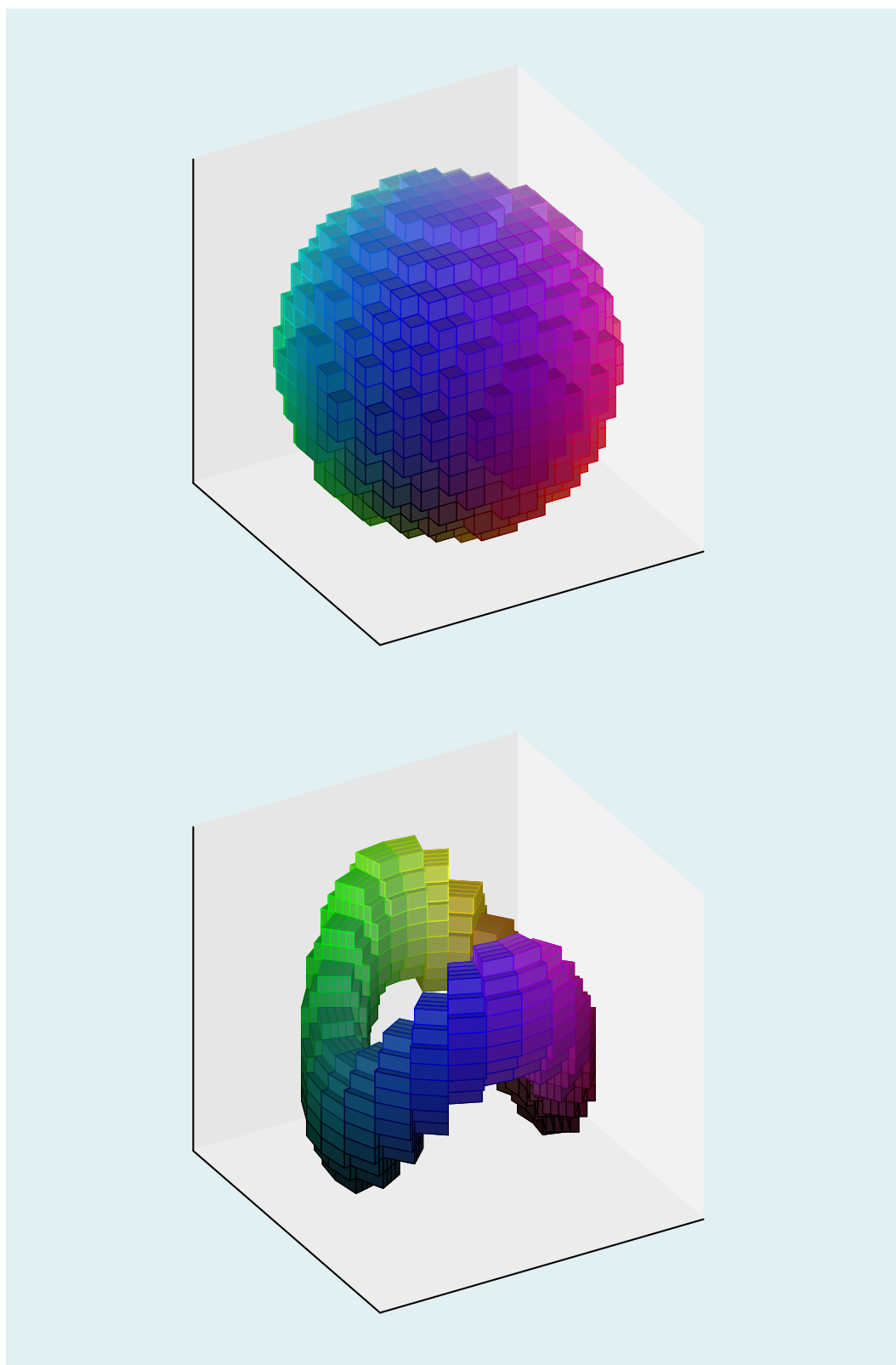


图 14. 用 voxels 绘制几何体, RGB、CMYK 色彩空间 |  Bk\_2\_Ch18\_05.ipynb

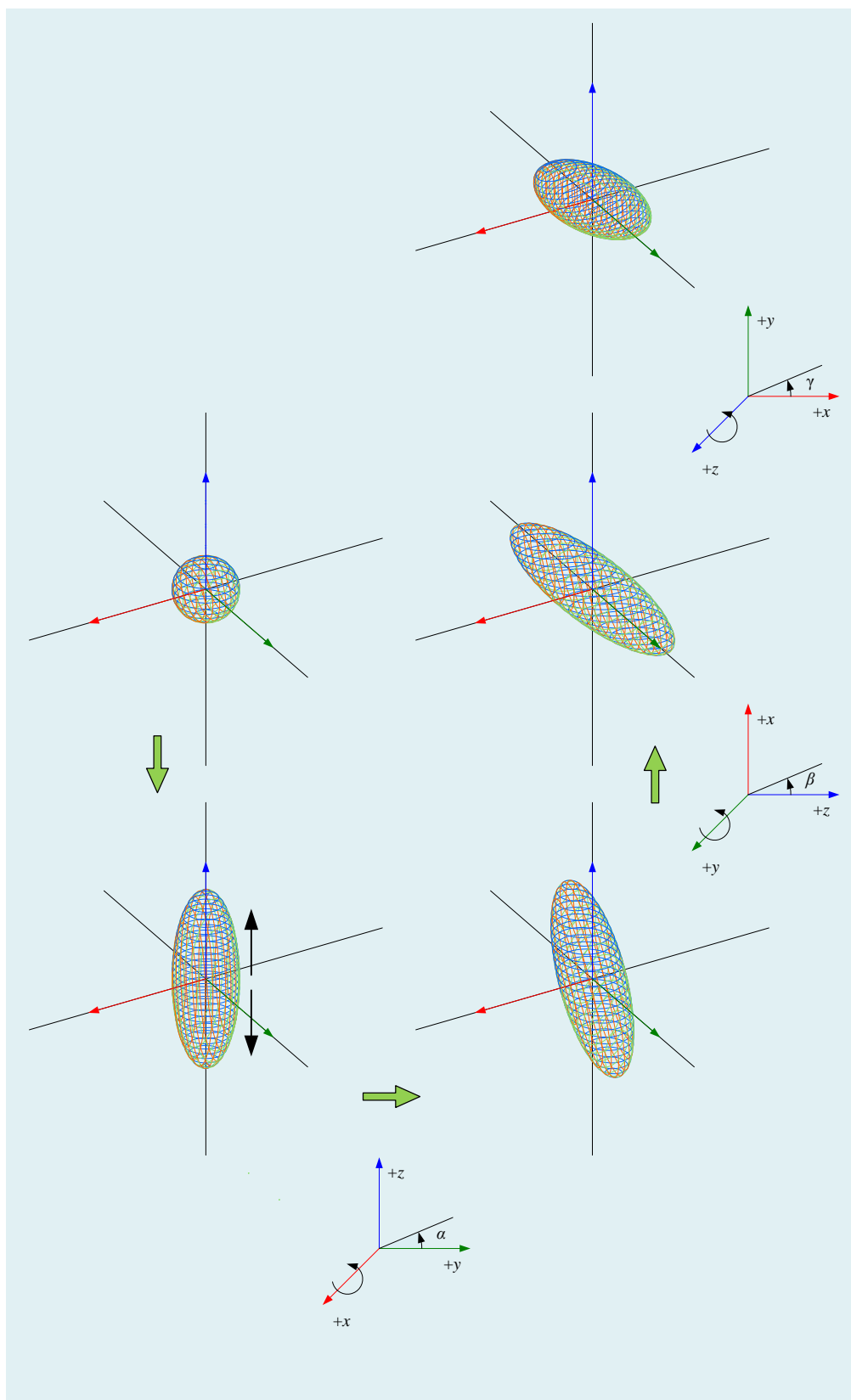


图 15. 从单位球到旋转椭球 |  Bk\_2\_Ch18\_06.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

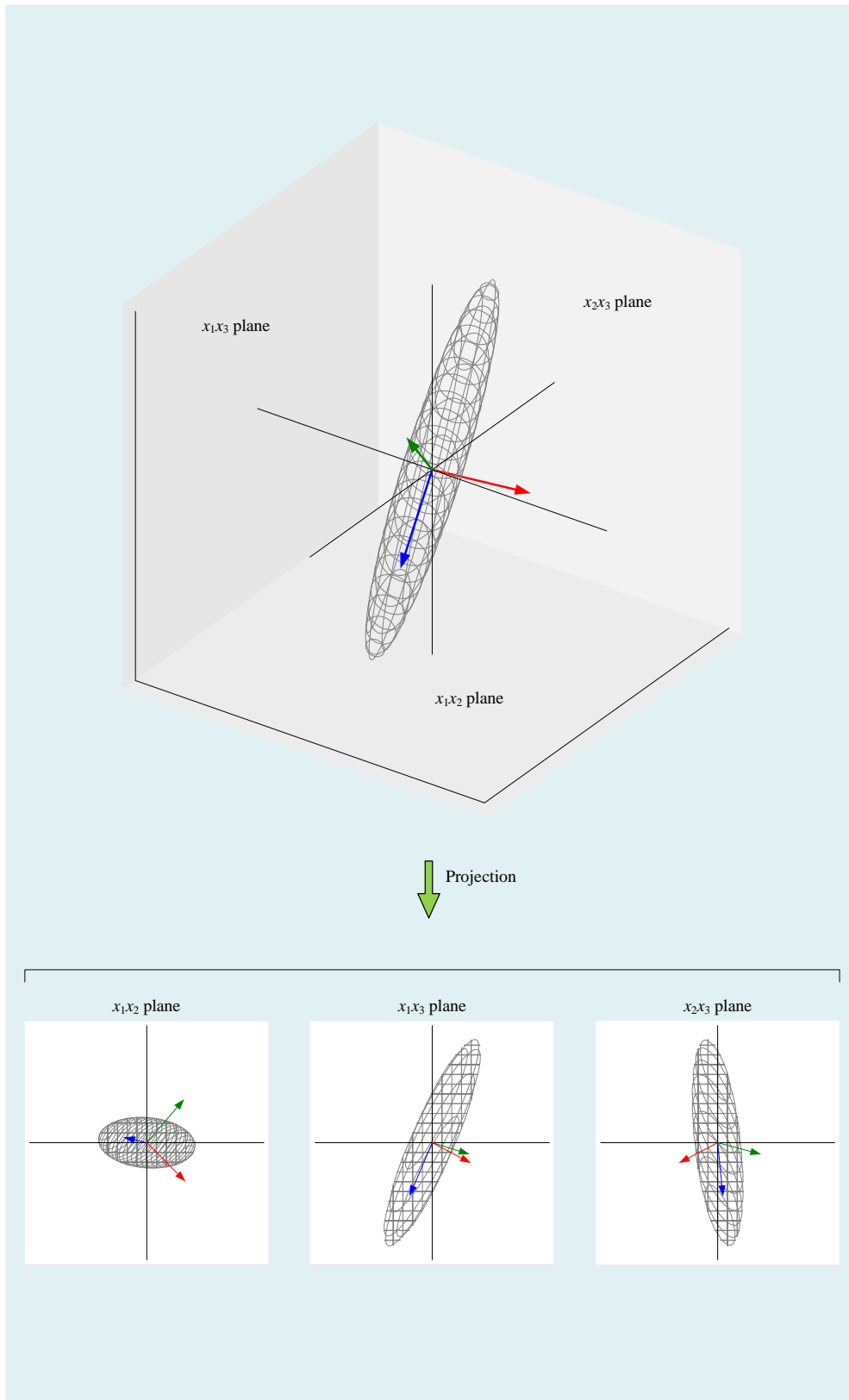



图 16. 旋转椭球在三个平面的投影 |  Bk\_2\_Ch18\_07.ipynb

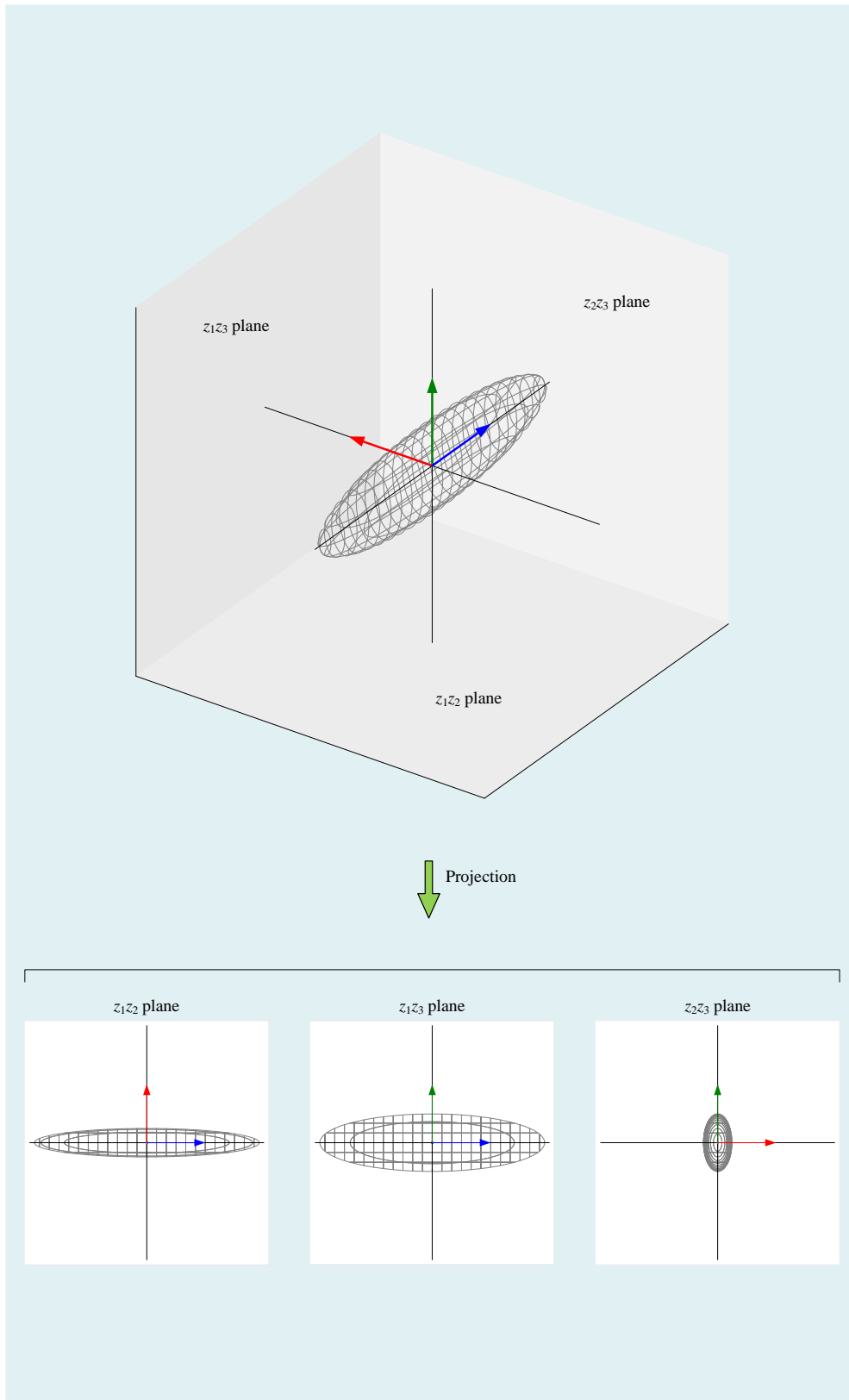
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

图 17. 正椭球在三个平面的投影 |  Bk\_2\_Ch18\_07.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)