

## 33

## Clustering Methods in Scikit-Learn

## Scikit-Learn 聚类

 $K$  均聚类、四种高斯混合 GMM 聚类

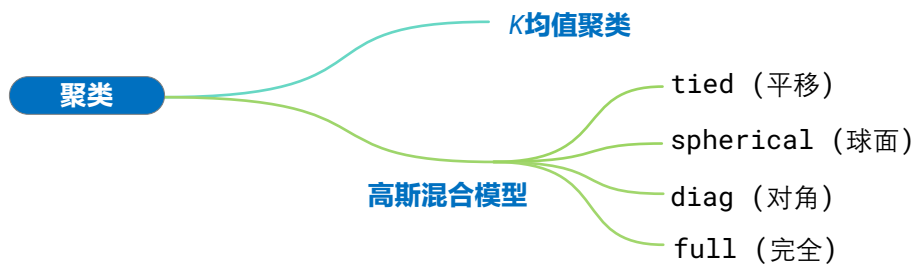
只有想象力无界的人，方能开创不可能的事。

*Those who can imagine anything, can create the impossible.*

—— 艾伦·图灵 (Alan Turing) | 英国计算机科学家、数学家，人工智能之父 | 1912 ~ 1954



- ◀ matplotlib.patches.Ellipse() 创建并绘制椭圆形状的图形对象
- ◀ matplotlib.pyplot.quiver() 绘制向量箭头
- ◀ numpy.arctan2() 计算反正切，返回弧度值
- ◀ numpy.linalg.svd() 完成奇异值分解
- ◀ numpy.sqrt() 计算平方根
- ◀ sklearn.cluster.KMeans() 执行  $K$  均值聚类算法，将数据点划分成预定数量的簇
- ◀ sklearn.mixture.GaussianMixture() 用于拟合高斯混合模型，以对数据进行聚类和概率密度估计



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger：<https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

## 33.1 聚类

本书前文介绍过，**聚类** (clustering) 是**无监督学习** (unsupervised learning) 中的一类问题。

聚类是指将数据集中的样本按照某种相似性指标进行分组的过程。常用的聚类算法包括。

如图 1 所示，删除鸢尾花数据集的标签，即 `target`，仅仅根据鸢尾花**花萼长度** (sepal length)、**花萼宽度** (sepal width) 这两个特征上样本数据分布情况，我们可以将数据分成两**簇** (clusters)。

在机器学习中，决定将数据分成多少个簇是一个重要而且有挑战性的问题，通常称为聚类数目的选择或者簇数选择。不同的聚类算法可能需要不同的方法来确定合适的聚类数目。本章后文在介绍具体算法时，会介绍如何选择合适的簇数。

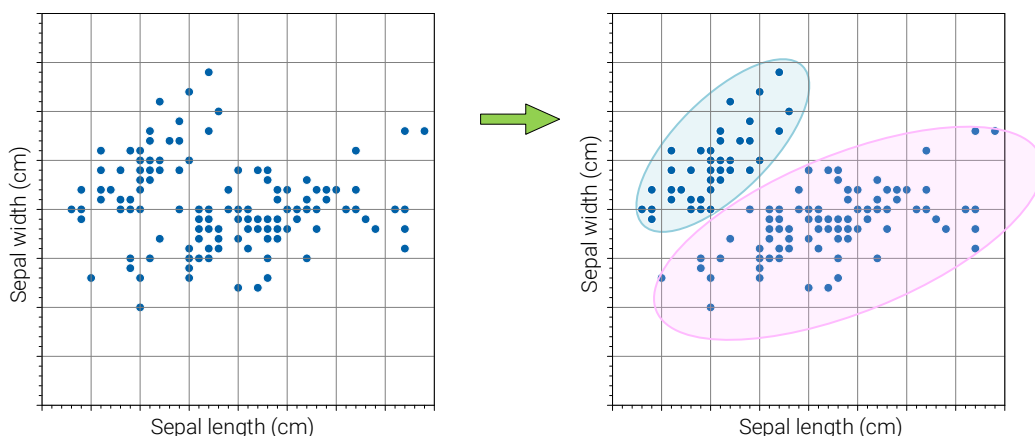


图 1. 用删除标签的鸢尾花数据介绍聚类算法

大家在使用 Scikit-Learn 聚类算法时，会发现有些算法有 `predict()` 方法。

也就是说，如图 2 所示，已经训练好的模型，有可能你将全新的数据点分配到确定的簇中。有这种功能的聚类算法叫做**归纳聚类** (inductive clustering)。

本章后文要介绍的  $k$  均值聚类、高斯混合模型都属于归纳聚类。如图 2 所示，归纳聚类算法也有决策边界。这就意味着归纳聚类模型具有一定的泛化能力，可以推广到新的、之前未见过的数据。

不具备这种能力的聚类算法叫做**非归纳聚类** (non-inductive clustering)。

非归纳聚类只能对训练数据进行聚类，而不能将新数据点添加到已有的模型中进行预测。这意味着模型在训练时只能学习训练数据的模式，无法用于对新数据点进行簇分配。比如，层次聚类、DBSCAN 聚类都是非归纳聚类。

归纳聚类强调模型的泛化能力，可以适应新数据，而非归纳聚类则更侧重于建模训练数据内部的结构。

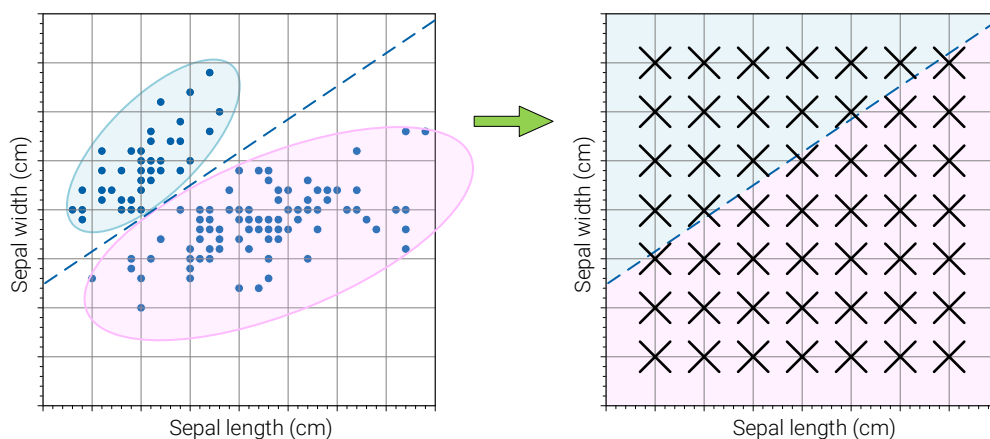


图 2. 归纳聚类算法

下面我们就用最通俗的语言，也是以几乎没有数学公式的方式，介绍几种常用聚类算法。

## 33.2 $K$ 均值聚类

**$K$  均值算法** ( $K$ -Means) 将样本分为  $K$  个簇，使得每个数据点与其所属簇的中心，也叫**质心** (centroid)，之间的距离最小化。一般情况，每个簇的中心点是该簇中所有样本点的平均值。

图 3 以二聚类为例，展示  $K$  均值聚类的操作流程。从样本数据开始，首先从样本中随机选取 2 个数据作为均值向量  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的初始值，然后进入如下迭代循环。

- 计算每一个样本点分别到均值向量  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的距离；
- 比较每个样本到  $\mu_1$  和  $\mu_2$  距离，确定簇的划分；
- 根据当前簇，重新计算并更新均值向量  $\mu_1$  和  $\mu_2$ 。

直到均值向量  $\mu_1$  和  $\mu_2$  满足迭代停止条件，得到最终的簇划分。

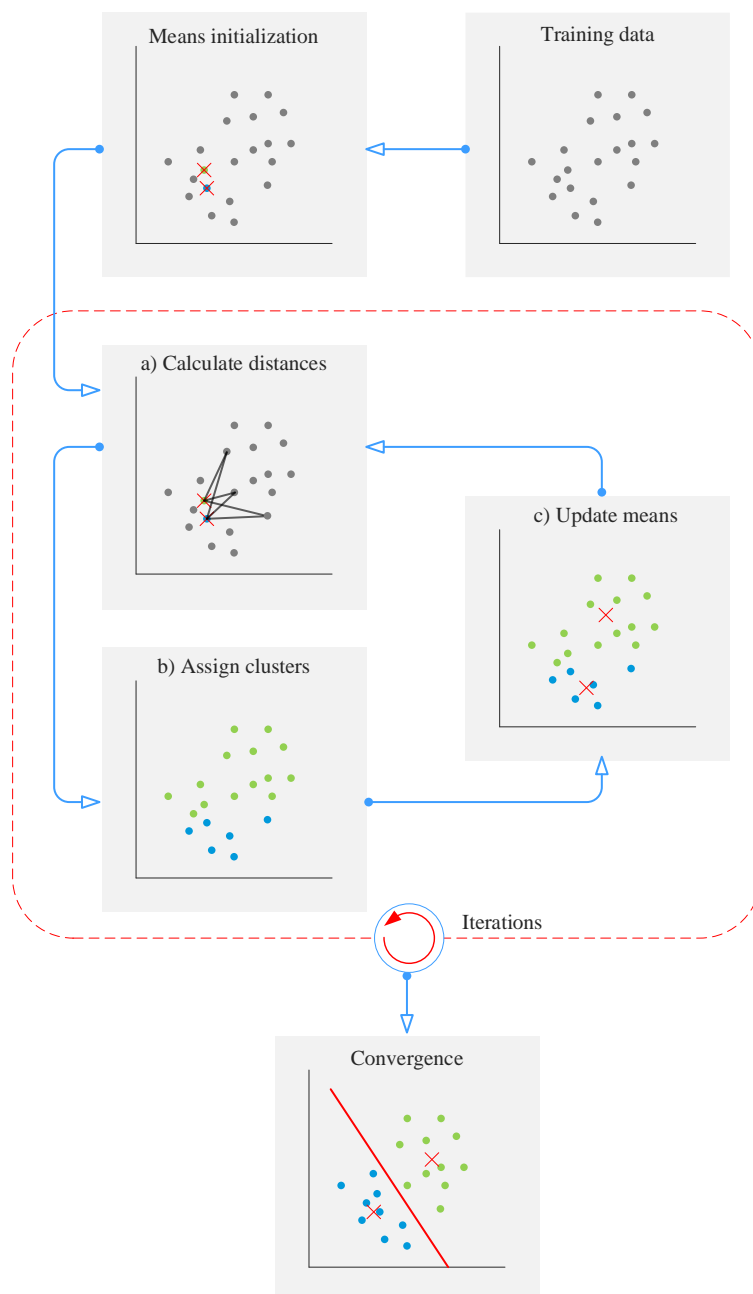
图 3.  $K$  均值算法流程图

图 4 所示为利用  $K$  均值算法根据鸢尾花花萼长度、花萼宽度特征划分为 2 和 3 簇两种情况。

根据前文介绍的内容，我们知道  $K$  均值算法为归纳聚类算法；因此，如图 4 所示， $K$  均值算法可以用训练好的模型预测其他新样本数据的聚类，从而获得聚类决策边界。

容易发现  $K$  均值聚类算法决策边界为直线段。图 4 中的  $\times$  为  $K$  均值算法的簇质心。

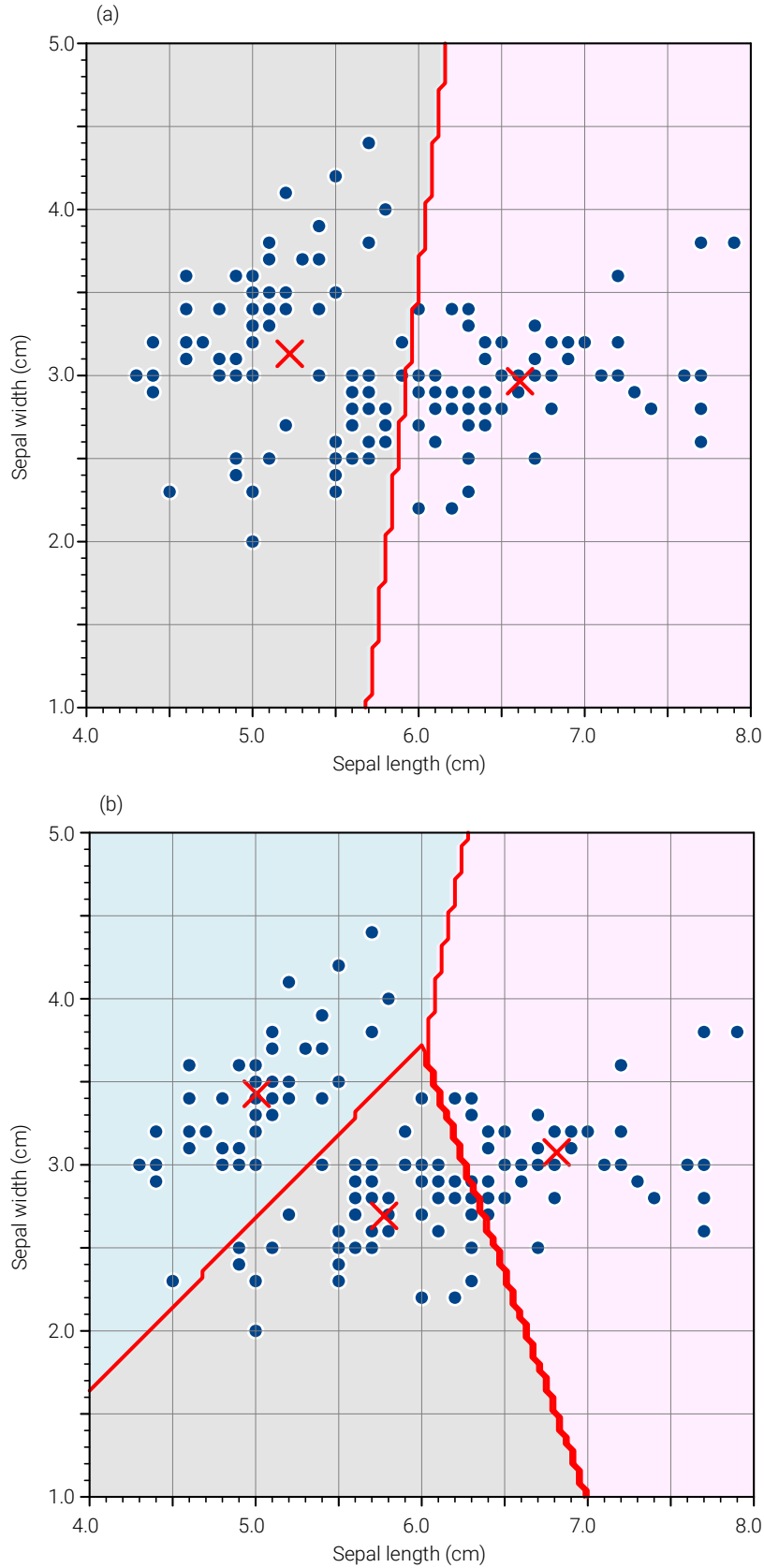


图 4.  $K$  均值聚类确定决策边界，簇数分别为 2、3

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

代码 1 绘制图 4 两幅子图，下面聊聊其中关键语句。

- a 从 `sklearn.cluster` 模块导入  $K$  均值算法对象 `KMeans`。请大家注意变量大小写。
- b 加载经典鸢尾花数据集。在聚类算法中，我们仅仅用到鸢尾花的特征数据（feature data），不会用到**标签**（target data）。
- c 提取鸢尾花数据中的前两个特征（花萼长度、花萼宽度）数据。
- d 利用 `matplotlib.colors.ListedColormap` 创建离散颜色映射，以在图表中对不同的离散值进行颜色编码。颜色映射在本例中可视化鸢尾花聚类区域。
- e 实例化了一个 `KMeans` 对象，并指定了要进行的聚类数目。参数 `n_clusters` 参数就是用来指定  $K$  均值聚类算法  $K$  的值，即希望将数据划分成多少个簇。
- f 执行了 `KMeans` 聚类算法，拟合模型并预测数据点所属的簇标签。`fit_predict(X)` 同时**拟合**（fit）数据并**预测**（predict）数据点所属的簇标签。大家也可以用 `fit(X).predict(X)` 来分两步执行。其中， $X$  是一个二维数组，表示输入的数据，每行代表一个数据样本，每列代表一个特征。请大家自行查看返回结果。
- g 利用训练好的 `KMeans` 模型对全新的数据进行聚类预测。
- h 调整数组形状，用于后续可视化。
- i 用填充等高线可视化聚类区域。
- j 用等高线可视化聚类决策边界。
- k 获取 `KMeans` 聚类算法拟合后得到的聚类质心的坐标。
- l 用散点可视化聚类质心。

```

from sklearn import datasets
a from sklearn.cluster import KMeans
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib.colors import ListedColormap

# 导入并整理数据
b iris = datasets.load_iris()
c X = iris.data[:, :2]

# 生成网格化数据
x1_array = np.linspace(4, 8, 101)
x2_array = np.linspace(1, 5, 101)
xx1, xx2 = np.meshgrid(x1_array, x2_array)
# 创建色谱
rgb = [[255, 238, 255],
        [219, 238, 244],
        [228, 228, 228]]
rgb = np.array(rgb)/255.
d cmap_light = ListedColormap(rgb)

# 采用KMeans聚类
e kmeans = KMeans(n_clusters=2)
f cluster_labels = kmeans.fit_predict(X)

# 预测聚类
g Z = kmeans.predict(np.c_[xx1.ravel(), xx2.ravel()])
h Z = Z.reshape(xx1.shape)

fig, ax = plt.subplots()

i ax.contourf(xx1, xx2, Z, cmap=cmap_light)
ax.scatter(x=X[:, 0], y=X[:, 1],
           color=np.array([0, 68, 138])/255.,
           alpha=1.0,
           linewidth = 1, edgecolor=[1,1,1])

# 绘制决策边界
levels = np.unique(Z).tolist();
j ax.contour(xx1, xx2, Z, levels=levels, colors='r')
k centroids = kmeans.cluster_centers_
l ax.scatter(centroids[:, 0], centroids[:, 1],
            marker="x", s=100, linewidths=1.5,
            color="r")

ax.set_xlim(4, 8); ax.set_ylim(1, 5)
ax.set_xlabel(iris.feature_names[0])
ax.set_ylabel(iris.feature_names[1])
ax.grid(linestyle='--', linewidth=0.25,
        color=[0.5, 0.5, 0.5])
ax.set_aspect('equal', adjustable='box')

```

代码 1. 根据花萼长度、花萼宽度，用 K 均值聚类算法确定聚类决策边界；  Bk1\_Ch33\_01.ipynb

## 33.3 高斯混合模型

**高斯混合模型** (Gaussian Mixture Model, GMM) 将样本分为多个高斯分布，每个高斯分布对应一个簇。与  $K$  均值聚类不同，GMM 不仅能够将数据点分配到不同的簇，还可以为每个簇分配一个概率值，表明数据点属于该簇的可能性。

如图 5 所示，多元高斯分布中，协方差矩阵决定高斯分布的形状。

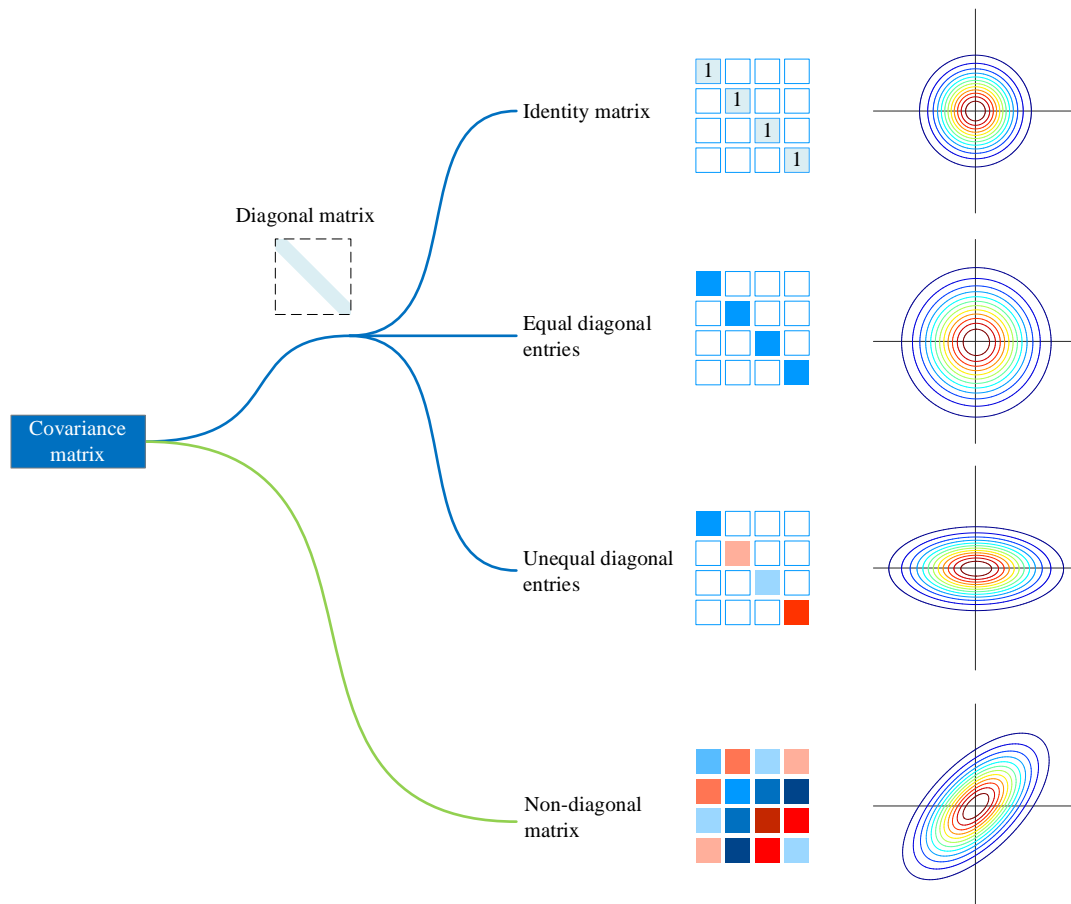


图 5. 协方差矩阵的形态影响高斯密度函数形状

如表 1 总结，`scikit-learn` 工具包中 `sklearn.mixture` 高斯混合模型支持四种协方差矩阵——`tied` (平移)、`spherical` (球面)、`diag` (对角)、`full` (完全)。

`tied` 指的是，所有分量共享一个非对角协方差矩阵  $\Sigma$ 。每个簇对应的多元高斯分布等高线为大小相等旋转椭圆。`tied` 对应的决策边界为直线。

`spherical` 指的是，每个分量协方差矩阵  $\Sigma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, K$ ) 不同，但是每个分量  $\Sigma_j$  均为对角阵；且  $\Sigma_j$  对角元素相同，即特征方差相同。每个簇对应的多元高斯分布等高线为正圆。`spherical` 对应的决策边界为圆形弧线。



**diag** 指每个分量有各自独立的对角协方差矩阵，也就是  $\Sigma_i$  为对角阵，特征条件独立；但是对  $\Sigma_i$  对角线元素大小不做限制。每个簇对应的多元高斯分布等高线正椭圆，**diag** 对应的决策边界为正圆锥曲线。

**full** 指每个分量有各自独立协方差矩阵，即对  $\Sigma_i$  不做任何限制。**full** 对应的决策边界为任意圆锥曲线。

表 1. 根据方差-协方差矩阵特点将高斯混合模型分为 4 类

参数设置	$\Sigma_i$	$\Sigma_i$ 特点	多元高斯分布 PDF 等高线	决策边界
<b>tied</b>	相同	非对角阵	任意椭圆	直线
<b>spherical</b>	不相同	对角阵，对角线元素等值	正圆	正圆
<b>diag</b>		对角阵	正椭圆	正圆锥曲线
<b>full</b>		非对角阵	任意椭圆	圆锥曲线

和  $K$  均值聚类算法一样，高斯混合模型 **GMM** 也需要指定  $K$  值；高斯混合模型也是利用迭代求解优化问题。不同的是，**GMM** 利用协方差矩阵，可以估算后验概率/成员值。前文提过，**GMM** 的协方差矩阵有四种类型，每种类型对应不同假设，获得不同决策边界类型。

$K$  均值聚类可以看作是高斯混合模型一个特例。如图 6 所示， $K$  均值聚类对应的 **GMM** 特点是，各簇协方差矩阵  $\Sigma_i$  相同， $\Sigma_i$  为对角阵，并且  $\Sigma_i$  主对角线元素相等。

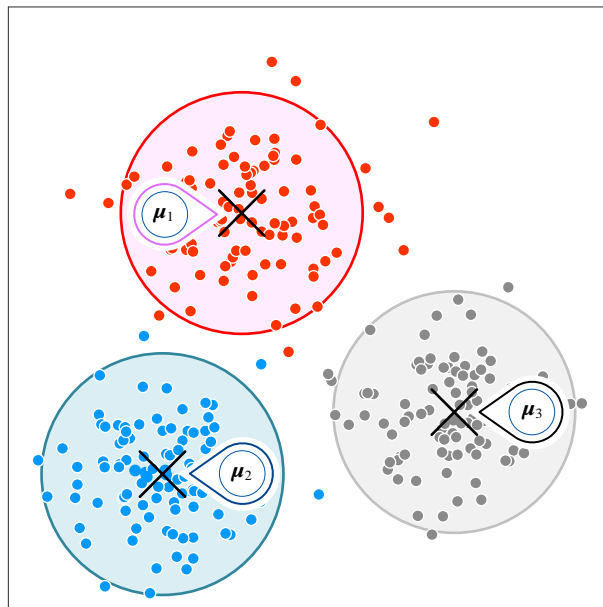


图 6.  $K$  均值聚类可以看作是高斯混合模型一个特例

图 7 ~ 图 10 所示为利用 **GMM** 聚类鸢尾花数据。这四幅图采用四种不同的协方差矩阵完成 **GMM** 聚类。大家可以通过比较这四幅图的椭圆形状很容易理解表 1。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：[jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

代码 2 定义的可视化函数绘制了这四幅图中的椭圆和向量。代码 3 完成高斯混合模型聚类，这段代码调用了代码 2 的可视化函数。下面让我们聊聊这两段代码。

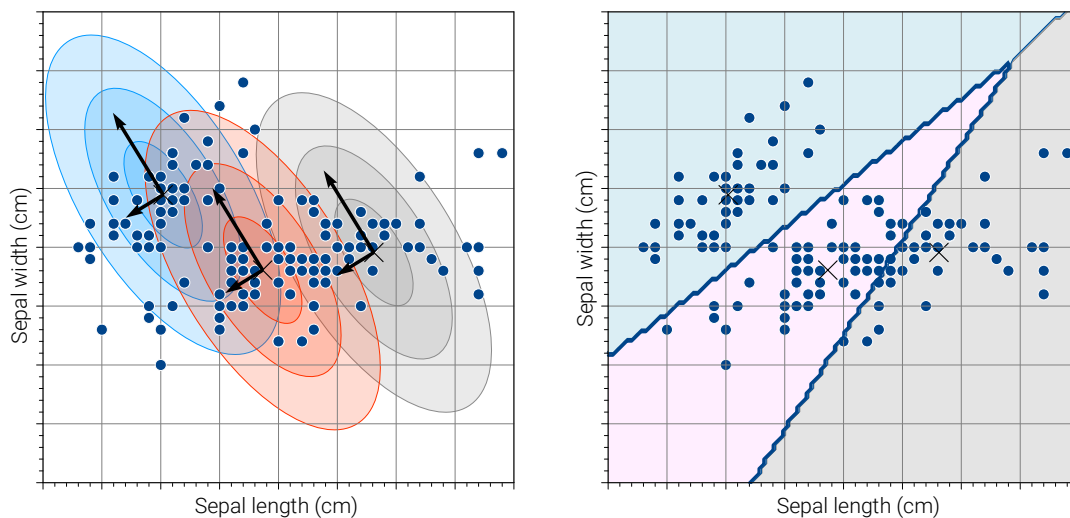


图 7.  $K$  均值聚类，协方差矩阵为 'tied'

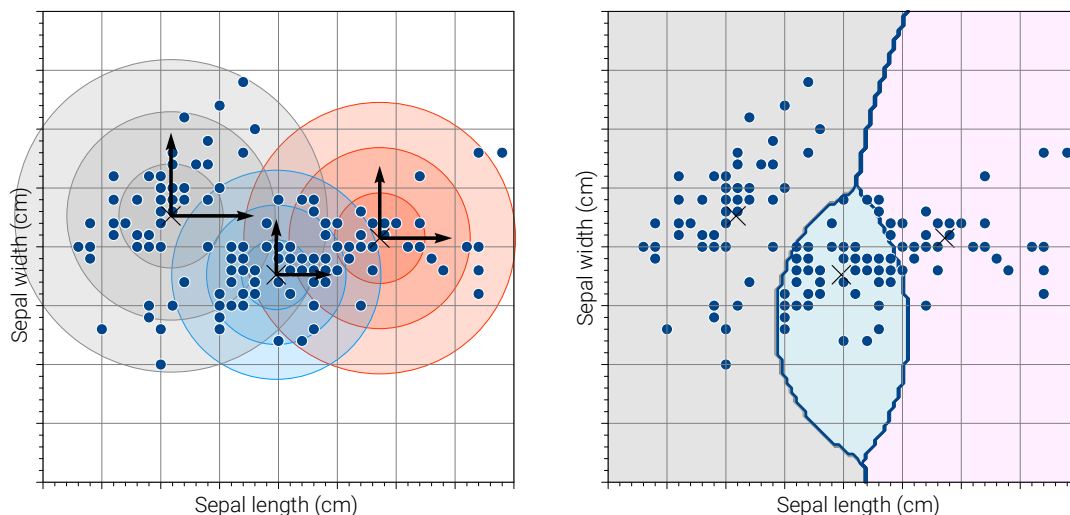
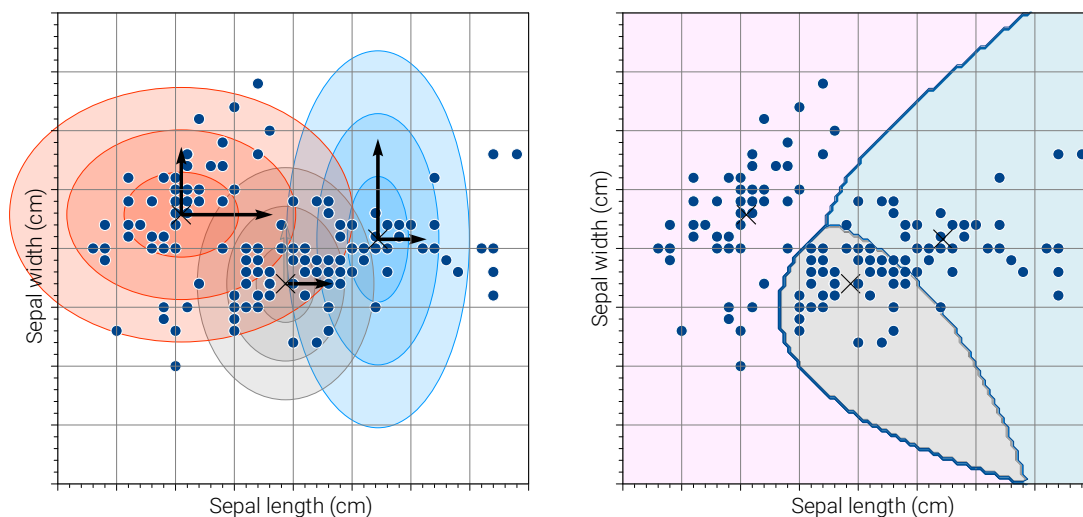
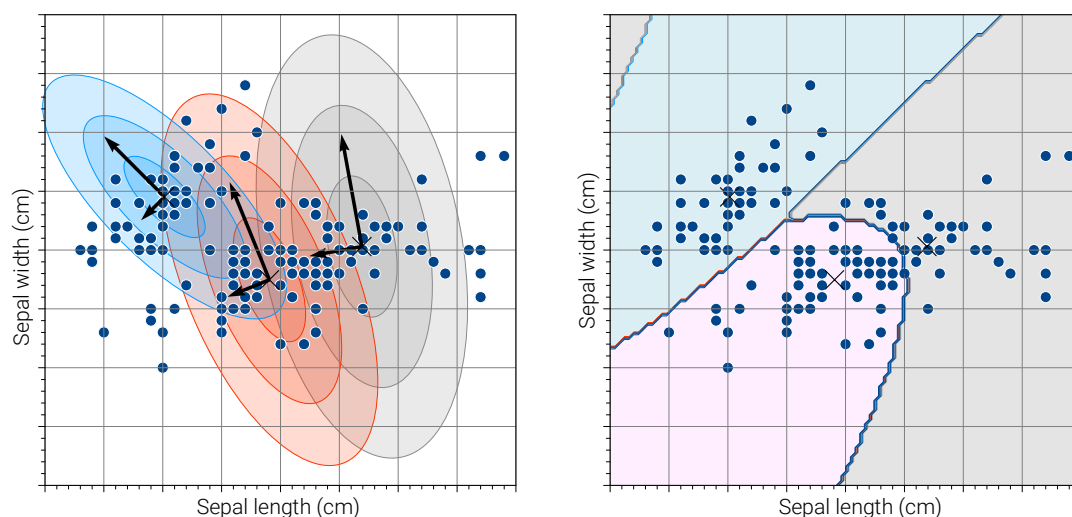


图 8.  $K$  均值聚类，协方差矩阵为 'spherical'

图 9.  $K$  均值聚类, 协方差矩阵为 'diag'图 10.  $K$  均值聚类, 协方差矩阵为 'full'

让我们首先看看代码 2 中自定义可视化函数。

**a** 从 `matplotlib.patches` 导入 `Ellipse` 类, `Ellipse` 用来绘制椭圆形状。

前文提过, GMM 可以有不同协方差类型, 包括 'full'、'tied'、'diag' 和 'spherical', 它们分别表示完整协方差矩阵、共享协方差矩阵、对角协方差矩阵和球状协方差矩阵。

**b** 这个条件判断语句检查 GMM 对象的协方差类型是否为 'full'。根据技术文档, 这种情况下, 协方差矩阵形状为  $(n\_components, n\_features, n\_features)$ , 三维 NumPy 数组。

其中, `axis = 0` 对应的是不同簇。也就是说, 如图 10 所示, 不同簇协方差矩阵不同, `gmm.covariances_[j]` 提取的是不同簇的协方差矩阵, 结果为二维 NumPy 数组。

**c** 判断 GMM 对象的协方差类型是否为 'tied'。根据技术文档, 这种情况下, 协方差矩阵形状为  $(n\_features, n\_features)$ , 二维 NumPy 数组。这意味着不同簇的协方差矩阵完全相同, 如图 7 所示。

本 PDF 文件为作者草稿, 发布目的为方便读者在移动终端学习, 终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有, 请勿商用, 引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载: <https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教, 本书专属邮箱: [jiang.visualize.ml@gmail.com](mailto:jiang.visualize.ml@gmail.com)

**d** 判断 GMM 对象的协方差类型是否为 'diag'。根据技术文档，这种情况下，协方差矩阵形状为 (n\_components, n\_features)，二维 NumPy 数组。其中，axis = 0 对应的是不同簇，axis = 1 对应的是不同特征的方差。

也就是说，如图 9 所示，从 GMM 对象的 gmm.covariances\_[j] 属性中获取第 j 个分量的协方差矩阵，结果为一维数组；然后，使用 np.diag() 函数将其转换为对角矩阵形式，结果为二维数组。

**e** 判断 GMM 对象的协方差类型是否为 'spherical'。根据技术文档，这种情况下，协方差矩阵形状为 (n\_components, )，一维 NumPy 数组。

其中，axis = 0 对应不同簇。也就是说，如图 8 所示，将单位矩阵的每个维度上的方差都乘以相应的协方差值，从而形成一个球状的协方差矩阵。

**f** 实际上用奇异值函数 numpy.linalg.svd() 完成的是协方差矩阵的特征值分解。这个矩阵分解，可以帮我们了解一个旋转椭圆的半长轴、半短轴的长度，以及椭圆的旋转角度。《矩阵力量》将具体讲解数学工具背后的原理。

**g** 计算椭圆长轴、短轴的长度。

**h** 计算椭圆旋转角度弧度。

**i** 绘制 GMM 每个簇的质心。

**j** 使用 Matplotlib 的 quiver 函数来在二维图中绘制箭头，用来表示椭圆长轴方向（矩阵  $U$  的第 1 列）。

**k** 绘制椭圆短轴方向（矩阵  $U$  的第 2 列）。

**l** 建了一个椭圆对象，指定了椭圆的中心坐标、长轴宽度、短轴宽度、旋转角度、边缘颜色和填充颜色。然后，我们使用 ax.add\_patch() 将椭圆添加到图中。

```

a from matplotlib.patches import Ellipse
# 定义可视化函数
def make_ellipses(gmm, ax):

    # 可视化不同簇
    for j in range(0,K):
        # 四种不同的协方差矩阵
        b if gmm.covariance_type == 'full':
            covariances = gmm.covariances_[j]
        c elif gmm.covariance_type == 'tied':
            covariances = gmm.covariances_
        d elif gmm.covariance_type == 'diag':
            covariances = np.diag(gmm.covariances_[j])
        e elif gmm.covariance_type == 'spherical':
            covariances = np.eye(gmm.means_.shape[1])
            covariances = covariances*gmm.covariances_[j]

        # 用奇异值分解完成特征值分解
        f U, S, V_T = np.linalg.svd(covariances)
        # 计算长轴、短轴长度
        g major, minor = 2 * np.sqrt(S)

        # 计算椭圆长轴旋转角度
        h angle = np.arctan2(U[1,0], U[0,0])
        angle = 180 * angle / np.pi


        # 多元高斯分布中心
        i ax.plot(gmm.means_[j, 0], gmm.means_[j, 1],
                  color = 'k', marker = 'x', markersize = 10)

        # 绘制半长轴向量
        j ax.quiver(gmm.means_[j,0], gmm.means_[j,1],
                    U[0,0], U[1,0], scale = 5/minor)

        # 绘制半短轴向量
        k ax.quiver(gmm.means_[j,0], gmm.means_[j,1],
                    U[0,1], U[1,1], scale = 5/major)

        # 绘制椭圆
        for scale in np.array([3, 2, 1]):
            l ell = Ellipse(gmm.means_[j, :2],
                            scale*minor,
                            scale*major,
                            angle,
                            color=rgb[j, :],
                            alpha = 0.18)
            ax.add_artist(ell)

```

代码 2. 定义可视化函数;  Bk1\_Ch33\_02.ipynb

代码 3 和代码 1 比较类似。这部分代码请大家自行学习。

此外，表 2 总结了 `sklearn.mixture.GaussianMixture()` 函数协方差数据样式，请大家参考。

```

import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.colors import ListedColormap
import numpy as np
from sklearn import datasets
from sklearn.mixture import GaussianMixture

# 创建色谱
rgb = [[255, 51, 0],
        [0, 153, 255],
        [138, 138, 138]]
rgb = np.array(rgb)/255.
cmap_bold = ListedColormap(rgb)

# 生成网格化数据
x1_array = np.linspace(4, 8, 101)
x2_array = np.linspace(1, 5, 101)
xx1, xx2 = np.meshgrid(x1_array, x2_array)

# 鸢尾花数据
iris = datasets.load_iris(); X = iris.data[:, :2]

K = 3 # 簇数
# 协方差类型
covariance_types = ['tied', 'spherical', 'diag', 'full']

for covariance_type in covariance_types:
    # 采用GMM聚类
    gmm = GaussianMixture(n_components=K,
                           covariance_type=covariance_type)
    gmm.fit(X)
    Z = gmm.predict(np.c_[xx1.ravel(), xx2.ravel()])
    Z = Z.reshape(xx1.shape)

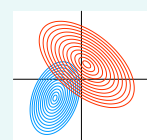
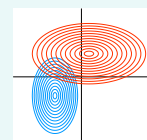
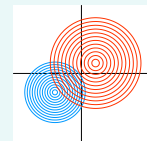
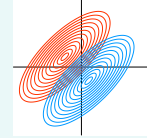
    # 可视化
    fig = plt.figure(figsize = (10,5))
    ax = fig.add_subplot(1,2,1)
    ax.scatter(x=X[:, 0], y=X[:, 1],
               color=np.array([0, 68, 138])/255.,
               alpha=1.0,
               linewidth = 1, edgecolor=[1,1,1])

    # 绘制椭圆和向量
    make_ellipses(gmm, ax)
    ax.set_xlim(4, 8); ax.set_ylim(1, 5)
    ax.set_xlabel(iris.feature_names[0])
    ax.set_ylabel(iris.feature_names[1])
    ax.grid(linestyle='--', linewidth=0.25,
            color=[0.5,0.5,0.5])
    ax.set_aspect('equal', adjustable='box')

    ax = fig.add_subplot(1,2,2)
    ax.contourf(xx1, xx2, Z, cmap=cmap_bold, alpha = 0.18)
    ax.contour(xx1, xx2, Z, levels=[0,1,2],
               colors=np.array([0, 68, 138])/255.)
    ax.scatter(x=X[:, 0], y=X[:, 1],
               color=np.array([0, 68, 138])/255.,
               alpha=1.0,
               linewidth = 1, edgecolor=[1,1,1])

    centroids = gmm.means_
    ax.scatter(centroids[:, 0], centroids[:, 1],
               marker="x", s=100, linewidths=1.5,
               color="k")
    ax.set_xlim(4, 8); ax.set_ylim(1, 5)
    ax.set_xlabel(iris.feature_names[0])
    ax.set_ylabel(iris.feature_names[1])
    ax.grid(linestyle='--', linewidth=0.25,
            color=[0.5,0.5,0.5])
    ax.set_aspect('equal', adjustable='box')

```



代码 3. GMM 聚类代码，使用时配合前文代码；  Bk1\_Ch33\_02.ipynb

表 2. sklearn.mixture.GaussianMixture() 函数协方差数据样式

协方差类型	数据形状	可视化协方差矩阵
'spherical'	(n_components, ) 一维数组，簇协方差矩阵为对角阵，且每个簇本身的对角元素相同  n_components 代表簇维度	
'tied'	(n_features, n_features) 二维数组，完整协方差矩阵 不同簇共享一个协方差矩阵  n_features 代表特征维度	
'diag'	(n_components, n_features) 二维数组，簇协方差矩阵为对角阵	
'full'	(n_components, n_features, n_features) 三维数组，协方差矩阵没有限制	



请大家完成如下题目。

Q1. 修改代码 1，用鸢尾花花瓣长度、花瓣宽度作为 K 均值聚类算法的输入特征，重新完成可视化。

Q2. 修改代码 2 和代码 3，用鸢尾花花瓣长度、花瓣宽度作为 GMM 聚类算法的输入特征，重新完成可视化。

\* 题目很基础，本书不给答案。



本章是这一板块的最后一章。学完这个板块，大家可能已经发现——几何无处不在。比如，本章介绍的 K 均值聚类实际上和几何中的中垂线密切相关。而 GMM 算法中不同协方差矩阵设置又和椭圆密切相关。

在鸢尾花书中，几何视角是帮助我们理解各种数学工具、逻辑算法的重要工具，请大家额外重视。

下一章进入本书的收官板块，我们将用 Streamlit 制作应用 App，来总结加强本书所学内容。