

30

Cardioid

心形线

从心形线说起，展示模数乘法表之美



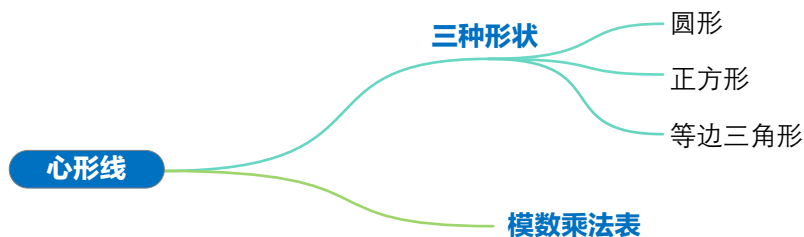
博爱是好事，因为真正的力量就蕴藏在其中。深爱之人会付出更多，做成更多事情，并且能够取得更大的成就。而在爱的驱使下所做的一切都会变得出色。

It is good to love many things, for therein lies the true strength, and whosoever loves much performs much, and can accomplish much, and what is done in love is well done.

——文森特·梵高 (Vincent van Gogh) | 荷兰后印象派画家 | 1853 ~ 1890



- ◀ % 求余数（取模）
- ◀ matplotlib.pyplot.cm 提供各种预定义色谱方案，比如 matplotlib.pyplot.cm.rainbow
- ◀ numpy.column_stack() 将两个数组列合并
- ◀ pandas.DataFrame() 创建数据帧
- ◀ seaborn.heatmap() 绘制热图



本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

30.1 心形线

本书前文介绍过如何用参数方程绘制心形线 (cardioid)。本章则要介绍一种全新的方法绘制心形线，并且以此为起点介绍更多类似可视化方案展示数学之美。

如图 1 所示，绘制一个正圆，将周长 36 等分，获得 36 个点，从 0 开始编号。

然后，开始绘制正圆的弦， $(1, 2)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(3, 6)$ 、 $(4, 8)$ 、 $(5, 10)$... 大家可能已经发现弦的两端编号有简单的规律。第一个点对应的编号分别为 1、2、3、4、5 ...；第二个点的编号“旋转速度”是第一个点编号的两倍，2、4、6、8、10 ... 这些弦的构成的包络就是心形线。

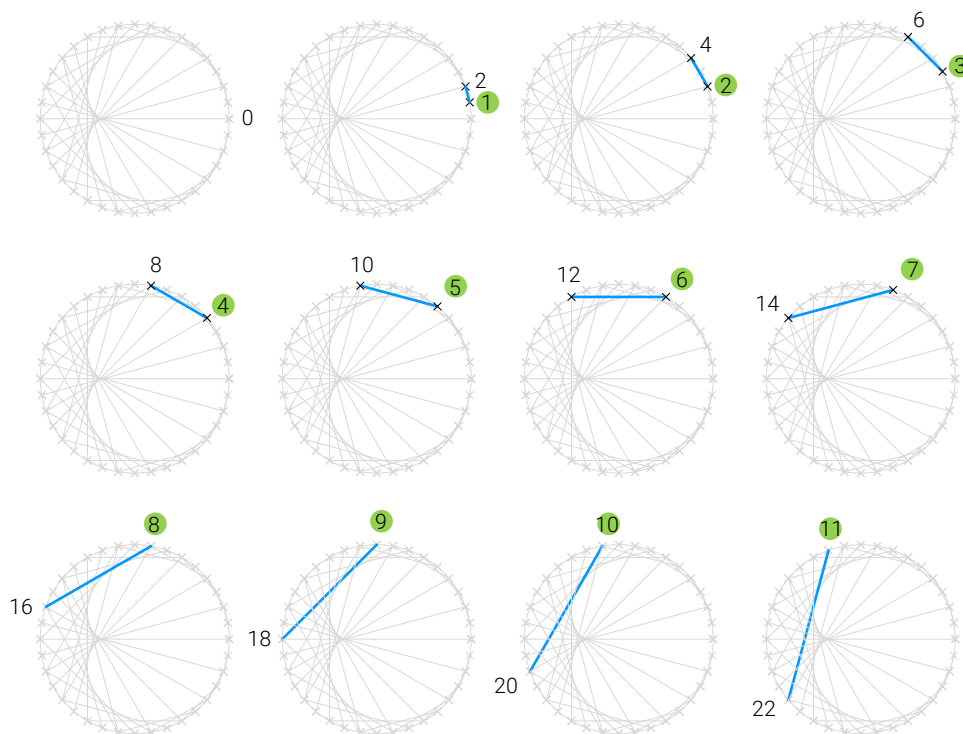


图 1. 用正圆一组弦呈现心形线

大家可能会问，如果弦的第二个点编号的旋转速度是第一个点的“三倍”，形成的图形又会怎样？四倍？五倍？

图 5 ~ 图 9 可以帮我们回答这个问题。Bk2_Ch30_01.ipynb 绘制这些子图，下面聊聊代码 1。

- a** 用 `hsv` 颜色映射产生一组渐变色渲染弦线段。选 `hsv` 颜色映射的原因一方面是因为这个颜色映射首尾闭合；此外，`hsv` 颜色非常鲜艳。
- b** 为弦线段的第一个端点序号，即 1、2、3、4、5 ...
- c** 计算弦线段第二个端点序号。这句代码用到了取模运算。举个例子，当 $k = 2$ 且 $N = 36$ 时，如果 i 分别取 1、2、3、4、5，计算结果为 2、4、6、8、10。这符合图 1 要求。

顺着这个视角展开，图 5 ~ 图 9 这几组图形本身展现的数学之美之外，它们还和模数乘法表 (modular multiplication table) 有关，这是下一节要介绍的内容。

- d** 绘制弦线段。

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

```

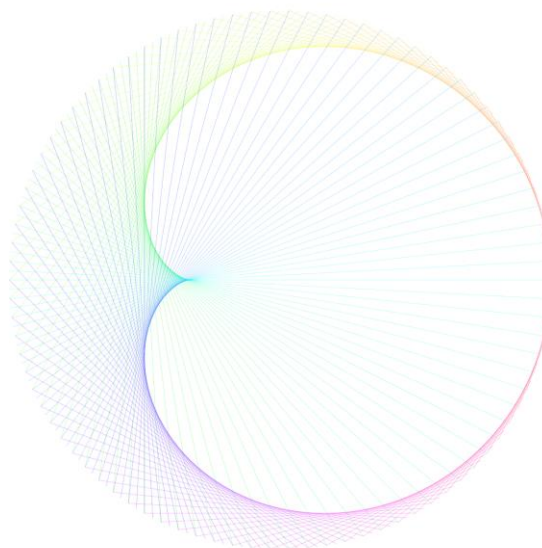
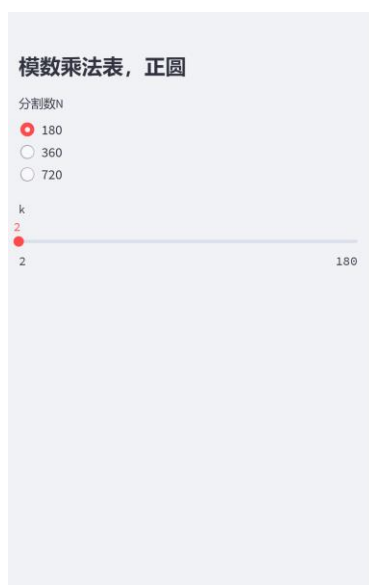
def visualize(k = 2):
    # 可视化
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(8,8))
    # 用hsv颜色映射渲染每一条弦线段
    colors = plt.cm.hsv(np.linspace(0, 1, N+1))

    # i 为弦第一个点的序号
    for i in range(N+1):
        # j 为弦第二个点的序号
        j = (i*k) % N

        # 绘制弦线段，两个点分别为
        # point[i], points[j]
        plt.plot([points[i,0], points[j,0]],
                 [points[i,1], points[j,1]],
                 lw = 0.1, c = colors[i])

    ax.axis('off')

```

代码 1. 可视化心形线 |  Bk2_Ch30_01.ipynb图 2. 用正圆展示模数乘法表的 App, Streamlit 搭建 |  Streamlit_modular_multiplication_circle.py

用类似的思路，我们还绘制了图 10 ~ 图 13（正方形）和图 14 ~ 图 17（等边三角形）这两组图像。请大家自行学习 Bk2_Ch30_02.ipynb 和 Bk2_Ch30_03.ipynb。

此外，请大家根据 Bk2_Ch30_02.ipynb 和 Bk2_Ch30_03.ipynb 尝试创建两个类似图 2 的 App。

30.2 模数乘法表

模数乘法表是一种数学工具，用于展示在模运算下的乘法结果。模运算通常是指取余数运算，图 3 所示为在模 5 下的乘法表将展示 0 到 4 的整数在乘法运算中的余数结果。

其实这个表很容易理解，以第 1 行第 1 列结果为例，对应的算式为 $0 \times 0 \bmod 5 = 0$ 。也就是说，0 对 5 取余（取模）结果为 0。大家应该还记得 Python 中取模的运算符为 %。请大家自己算一下图 3 中其余模数运算，以便加深理解。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

图 3. 模数乘法表, mod 5 |  Bk2_Ch30_04.ipynb

图 4 示为在模 36 下的乘法表将展示 0 到 35 的整数在乘法运算中的余数结果。请大家特别注意图 4 的第 3 行，它对应图 1。

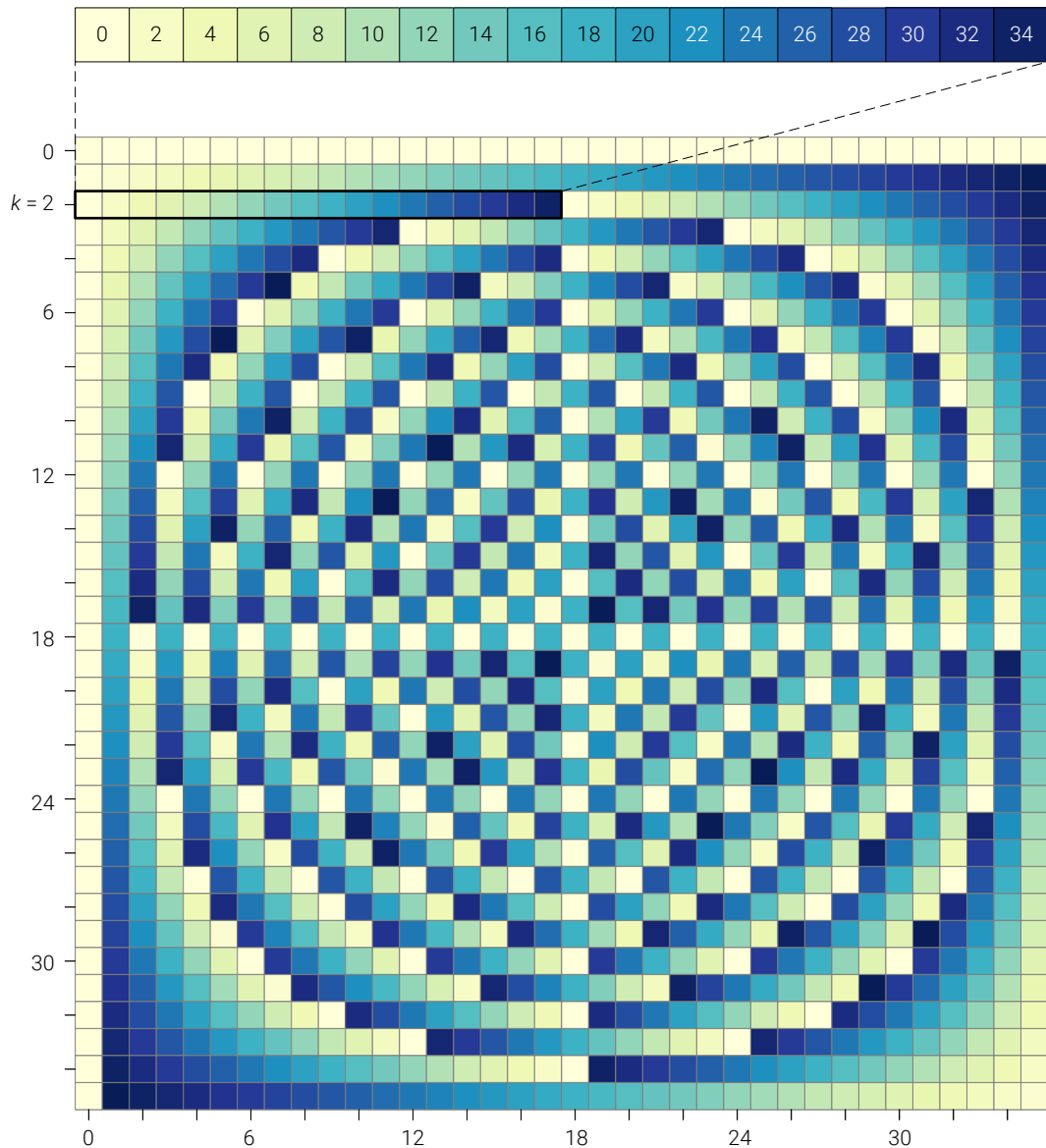
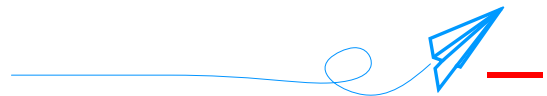
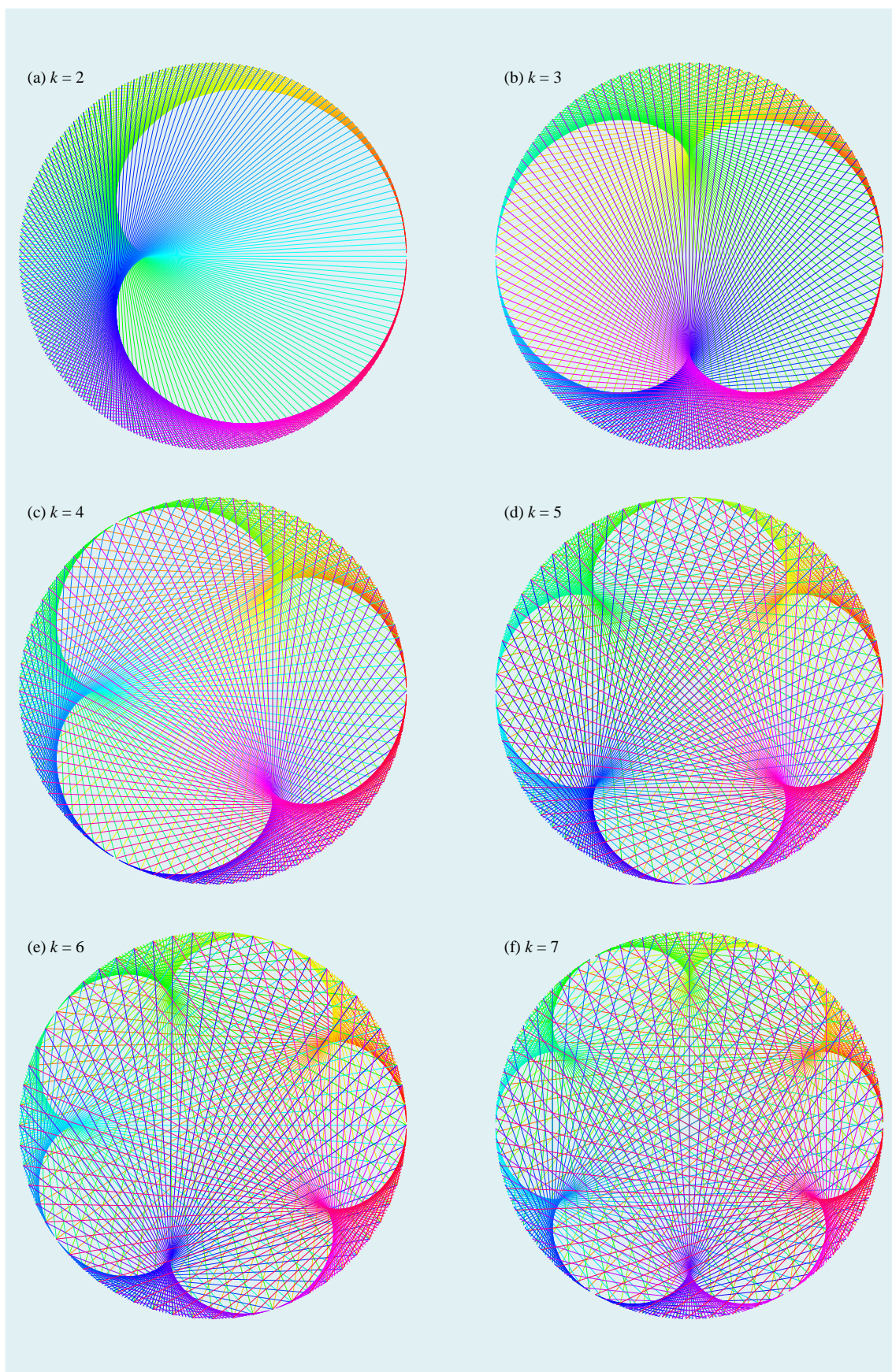



图 4. 模数乘法表, mod 36 | Bk2_Ch30_04.ipynb



此外，本章内容和图论中的循环图（circulant graph）也有关，请感兴趣的读者自行学习探究。

图 5. 心形线的扩展图形, 第 1 组 |  Bk2_Ch30_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

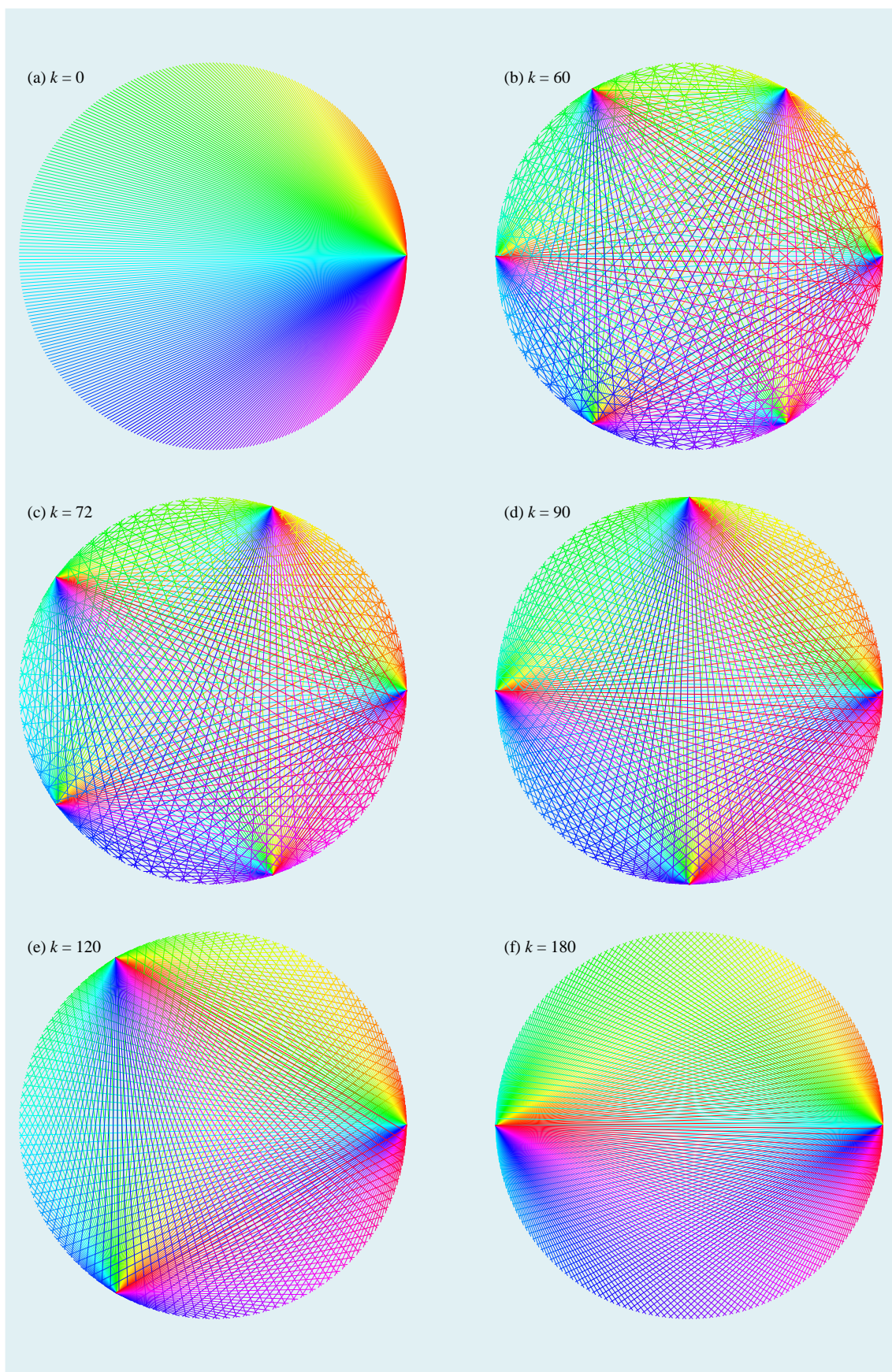



图 6. 心形线的扩展图形, 第 2 组 |  Bk2_Ch30_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

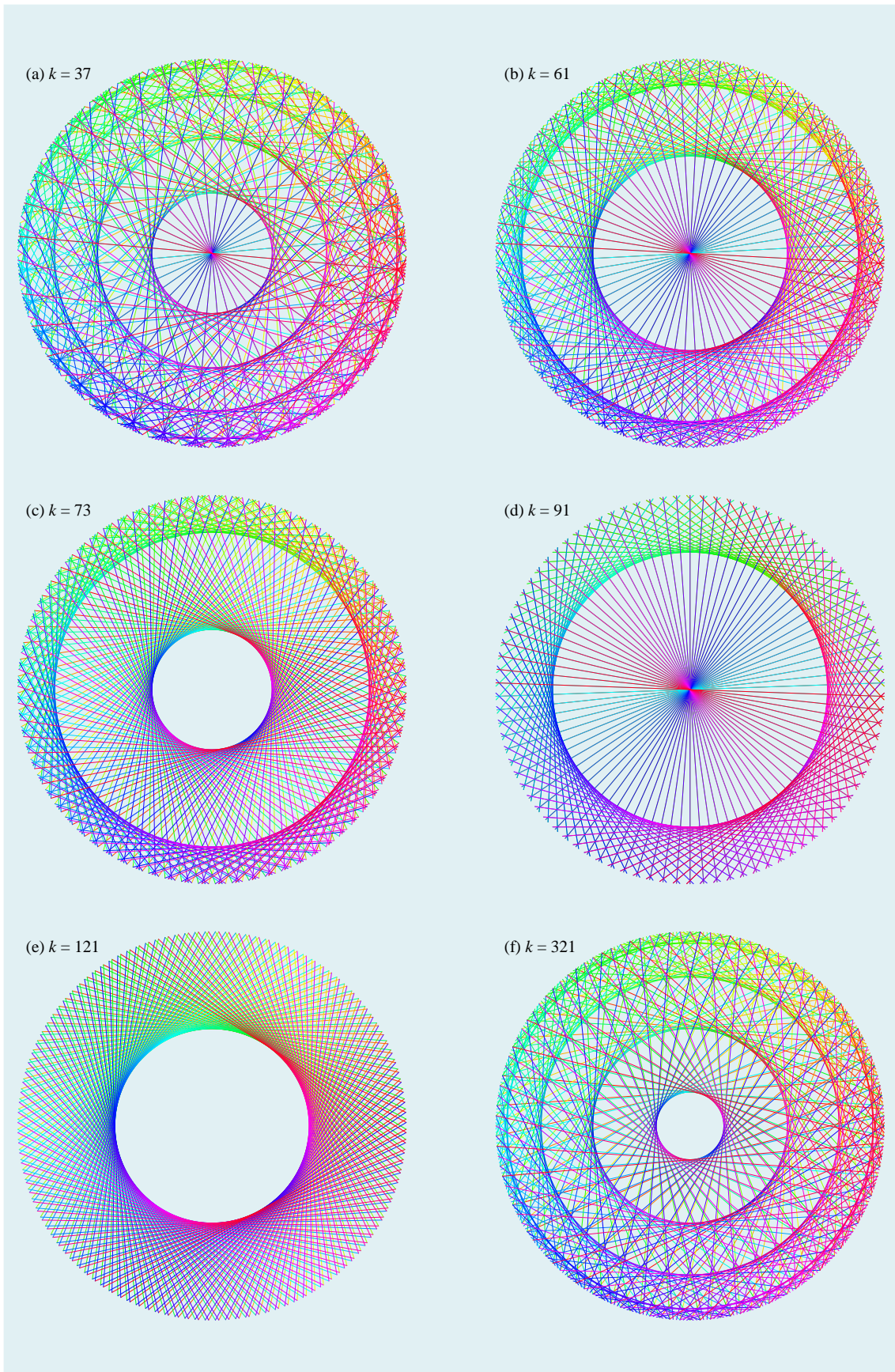



图 7. 心形线的扩展图形, 第 3 组 |  Bk2_Ch30_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

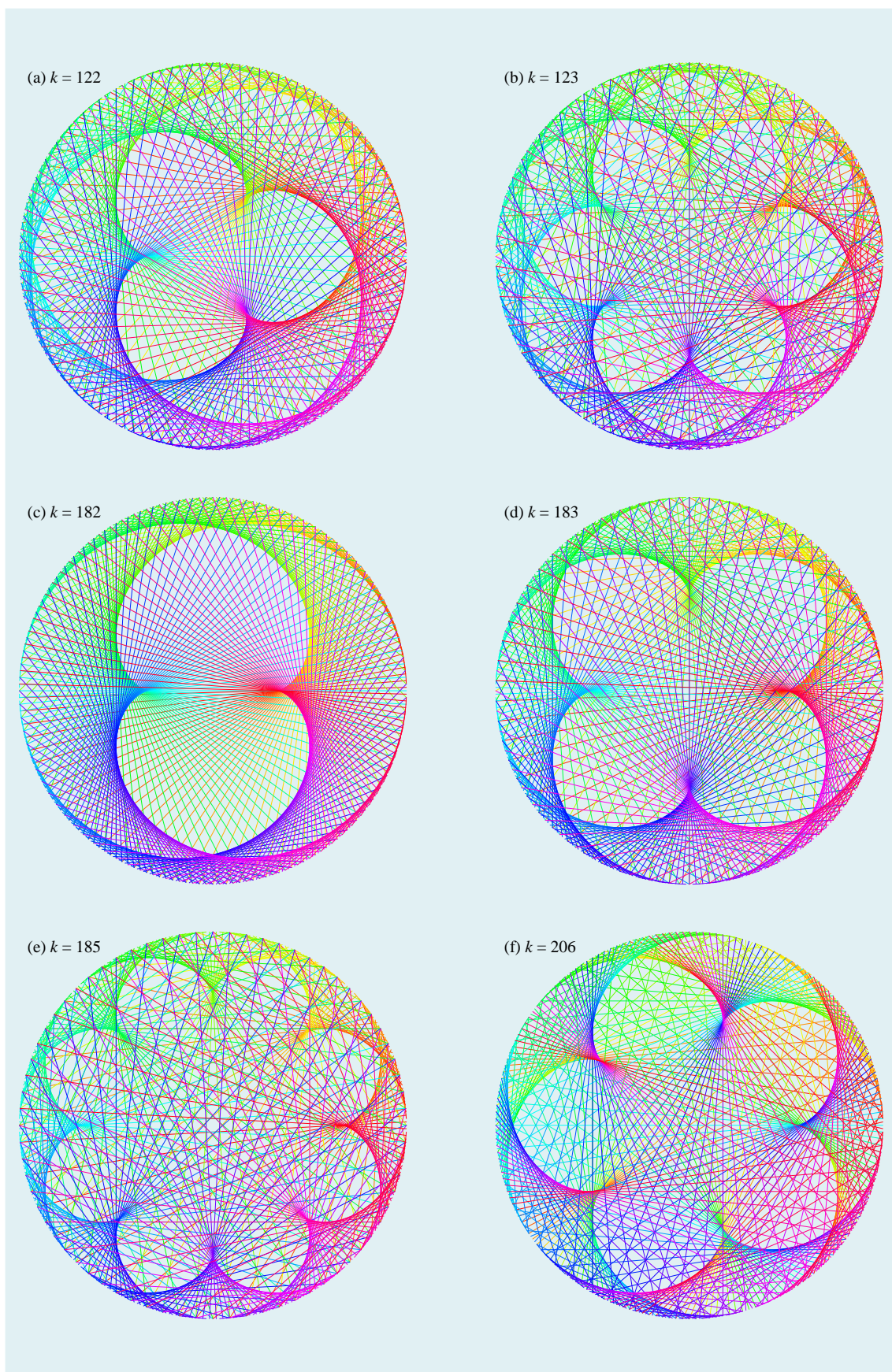



图 8. 心形线的扩展图形, 第 4 组 |  Bk2_Ch30_01.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

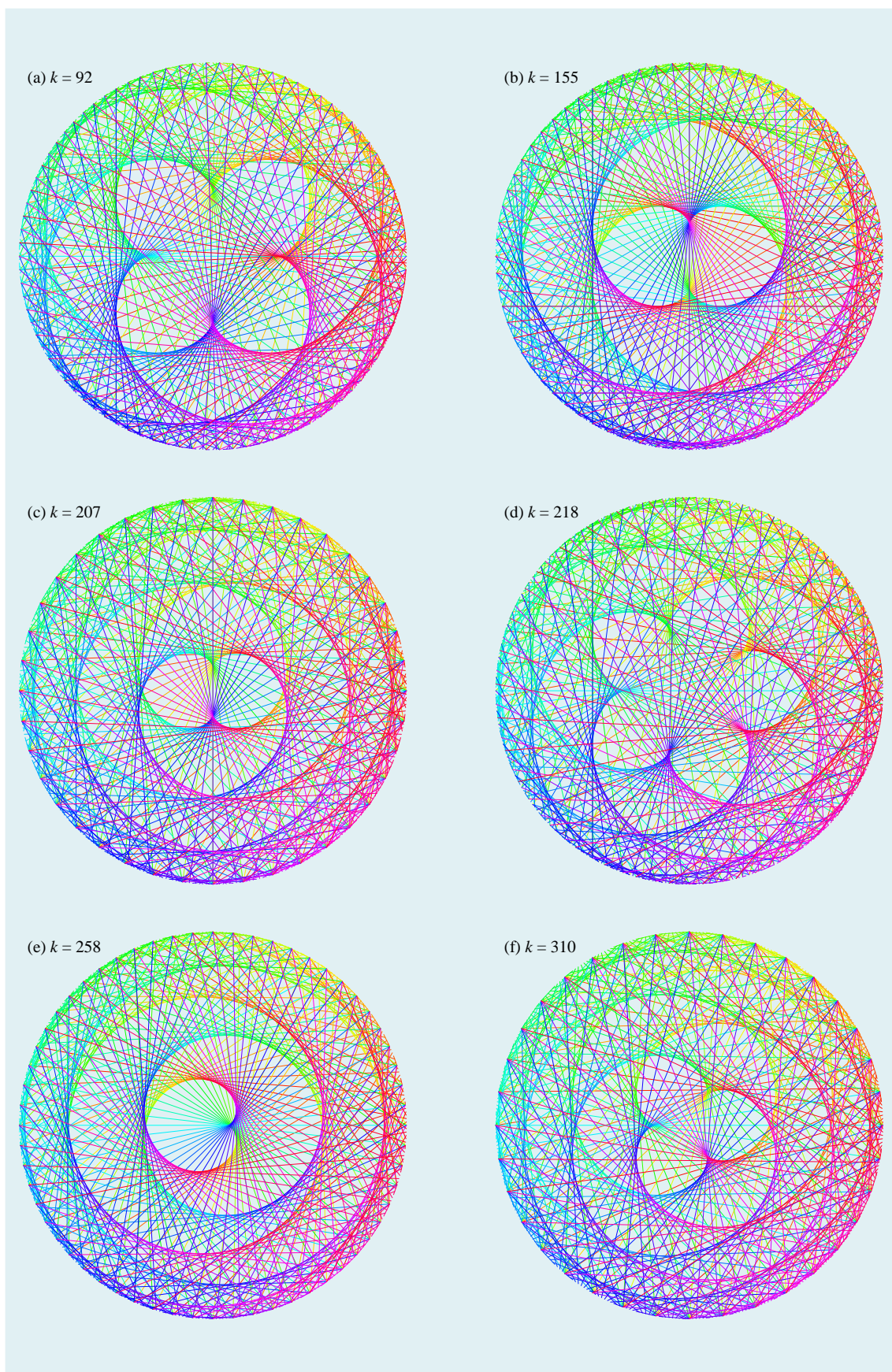



图 9. 心形线的扩展图形, 第 5 组 |  Bk2_Ch30_01.ipynb

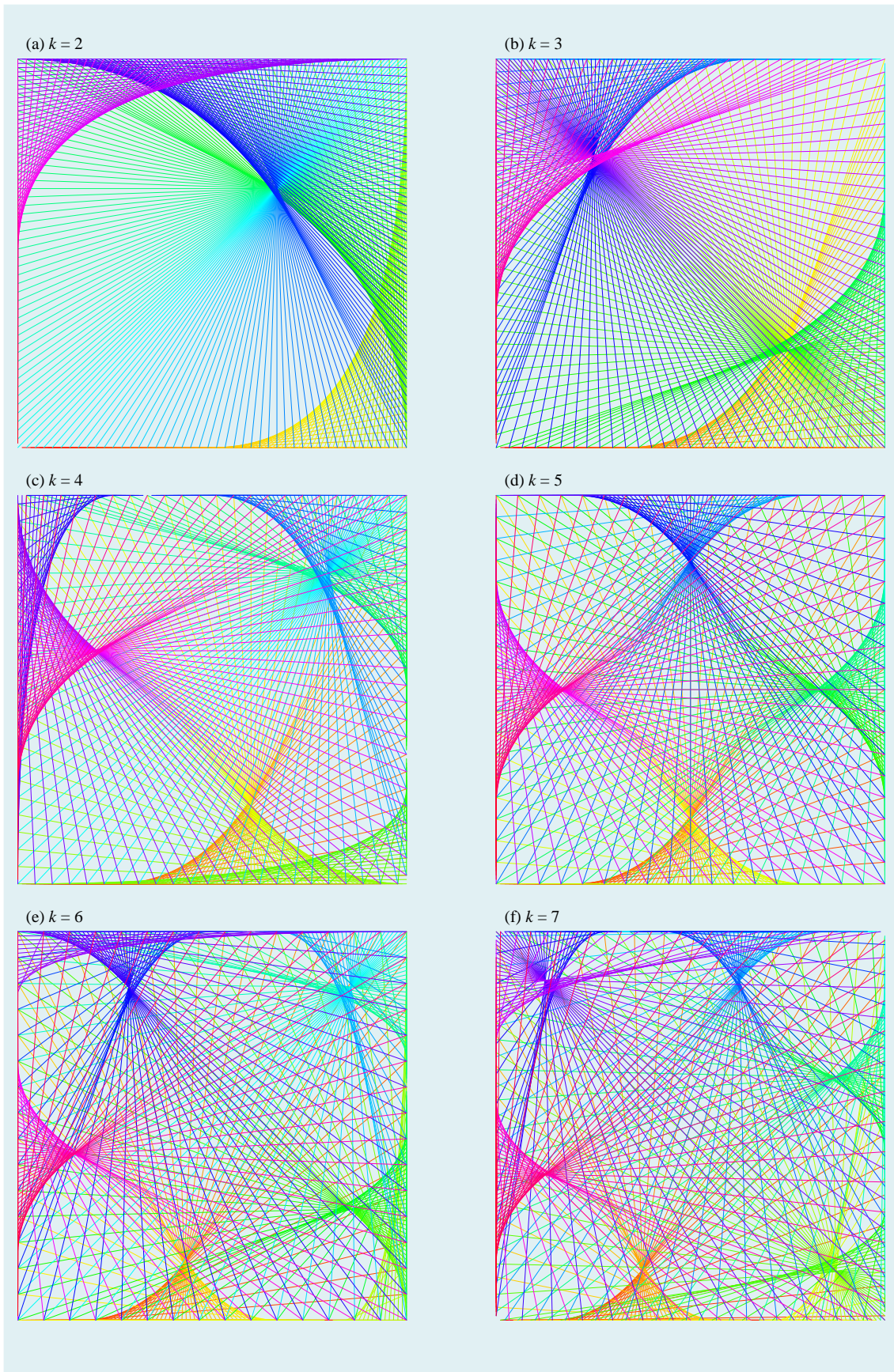

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

图 10. 可视化模数乘法，正方形，第 1 组 |  Bk2_Ch30_02.ipynb

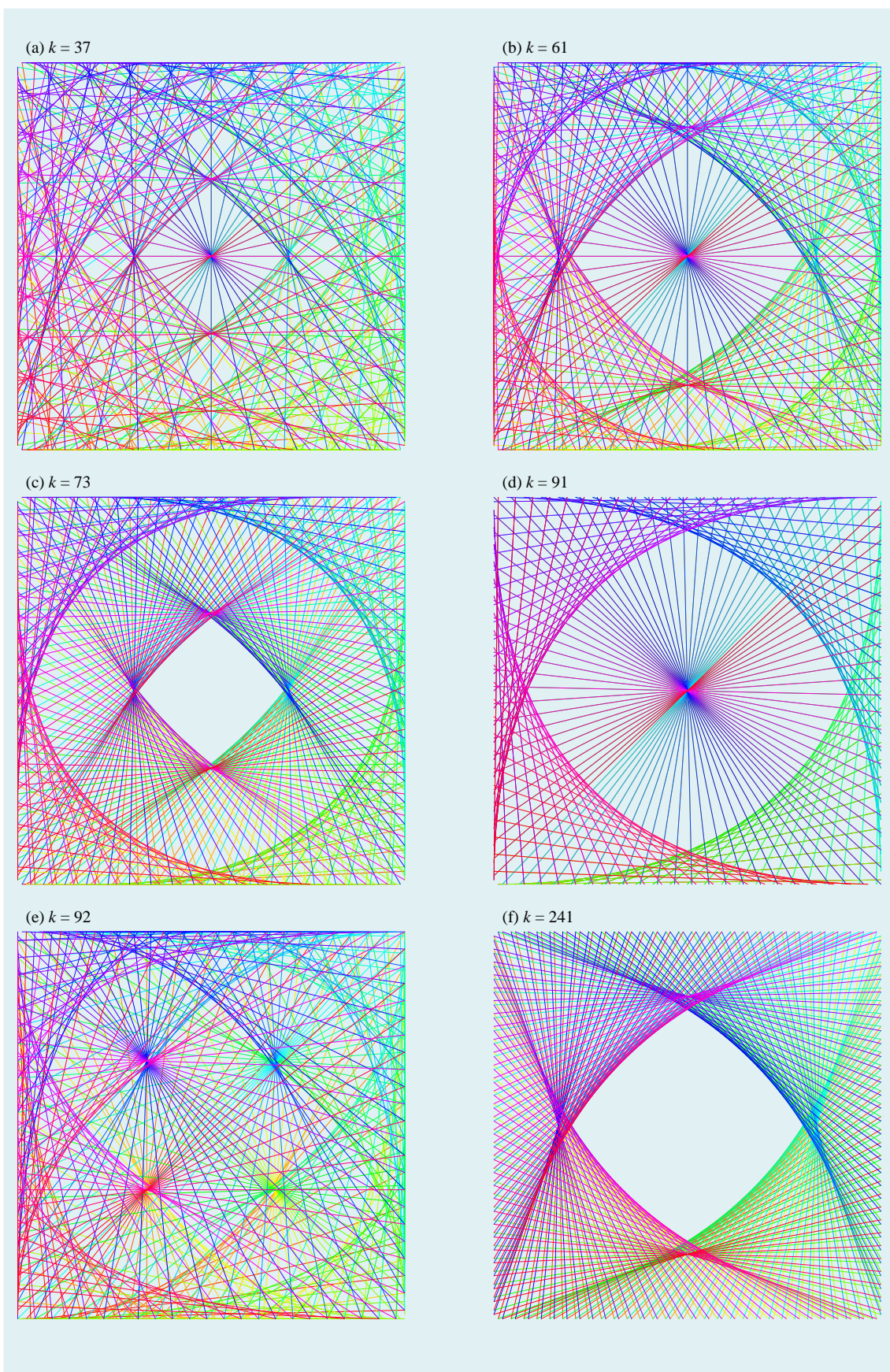

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

图 11. 可视化模数乘法，正方形，第 2 组 |  Bk2_Ch30_02.ipynb

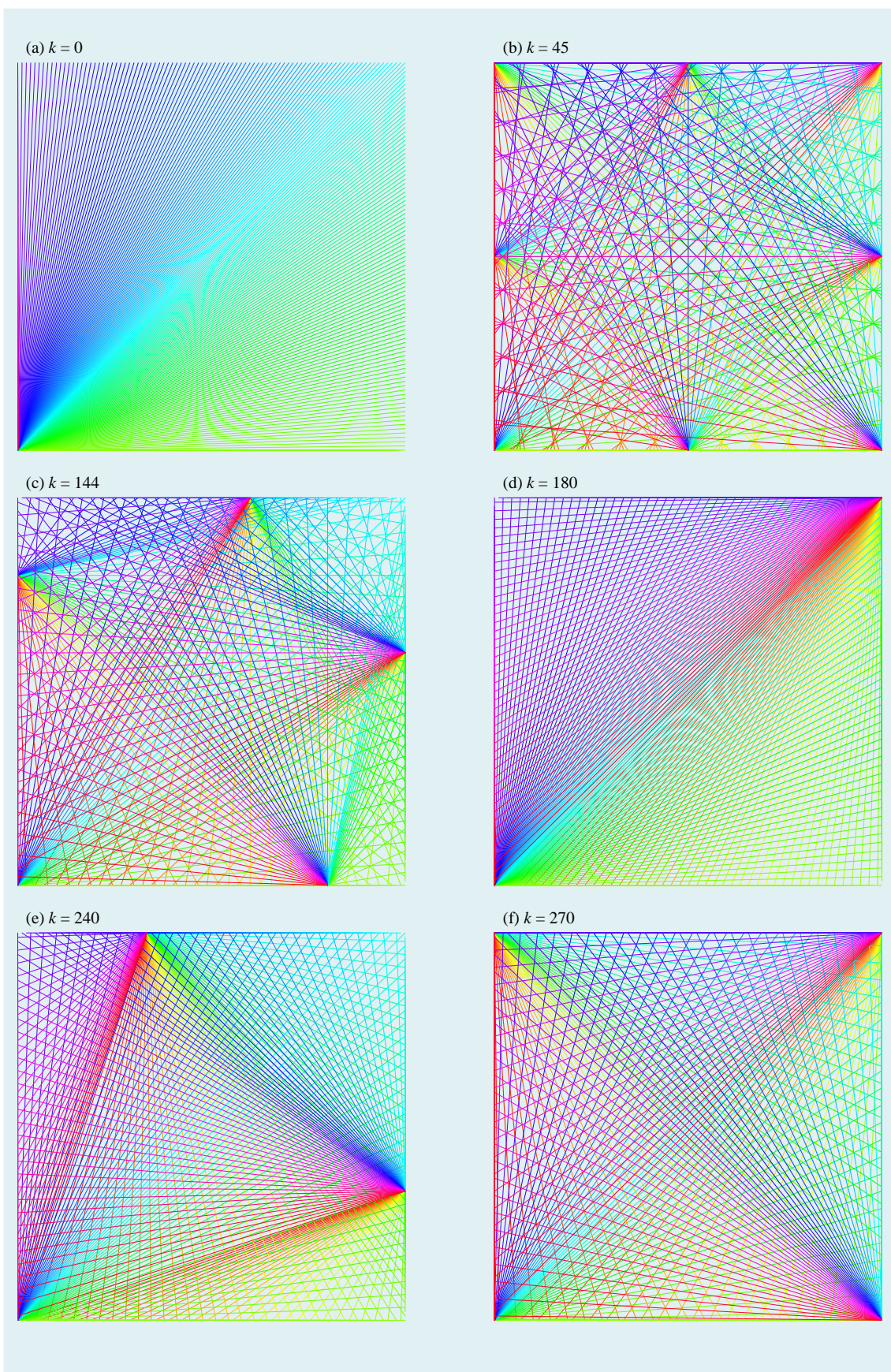

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

图 12. 可视化模数乘法，正方形，第 3 组 |  Bk2_Ch30_02.ipynb

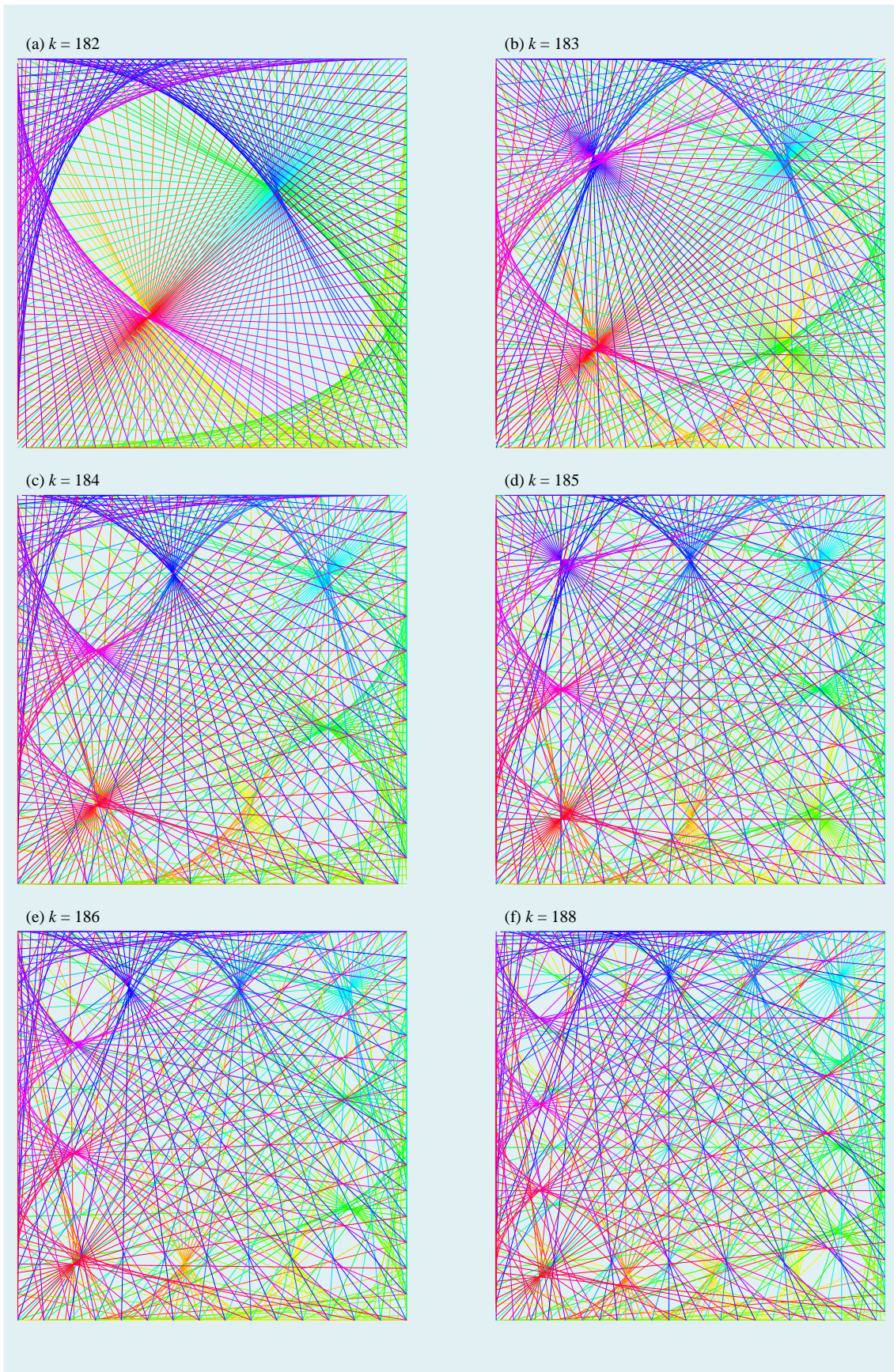
本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

图 13. 可视化模数乘法，正方形，第 4 组 |  Bk2_Ch30_02.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

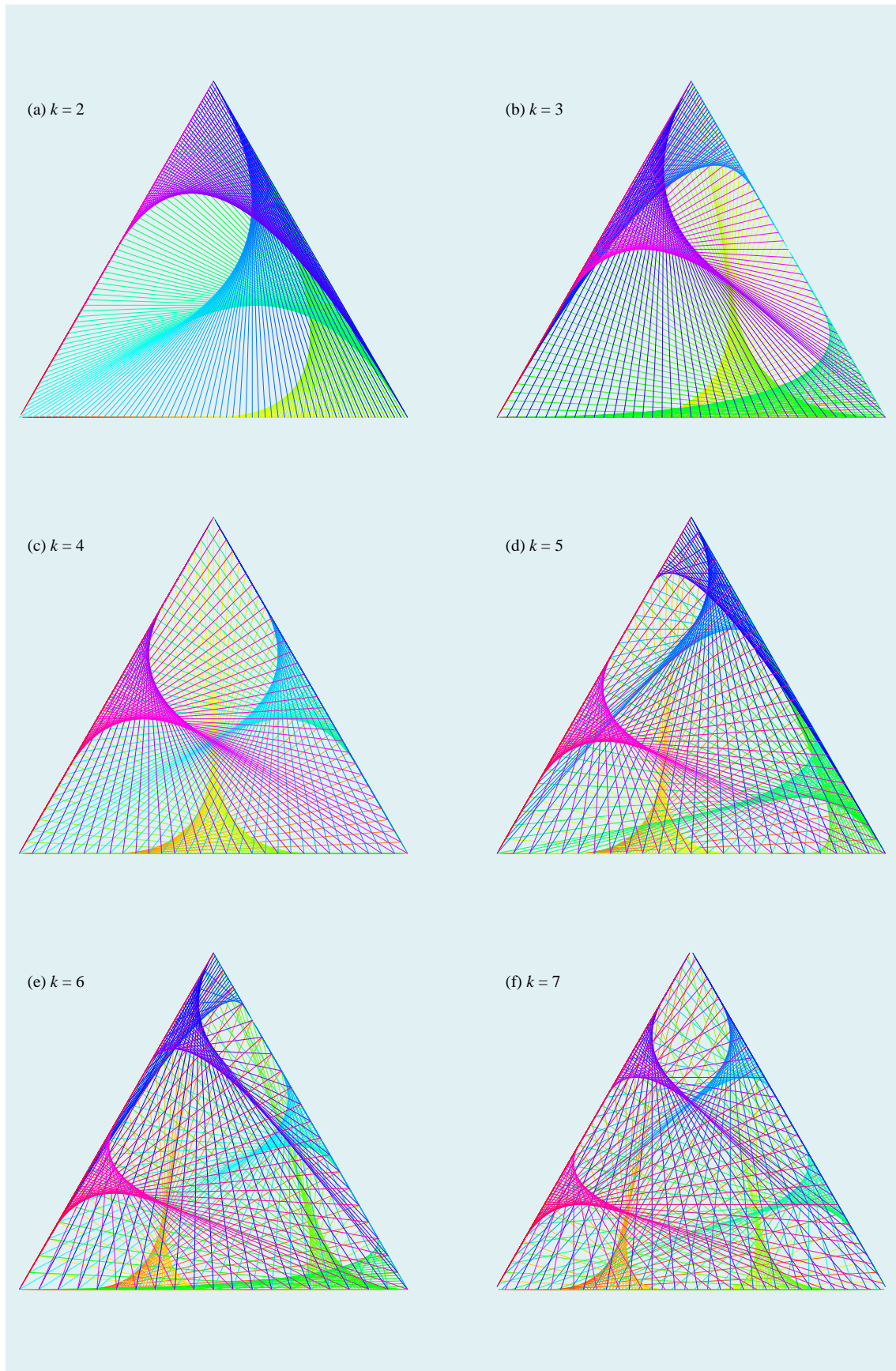



图 14. 可视化模数乘法，等边三角形，第 1 组 |  Bk2_Ch30_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

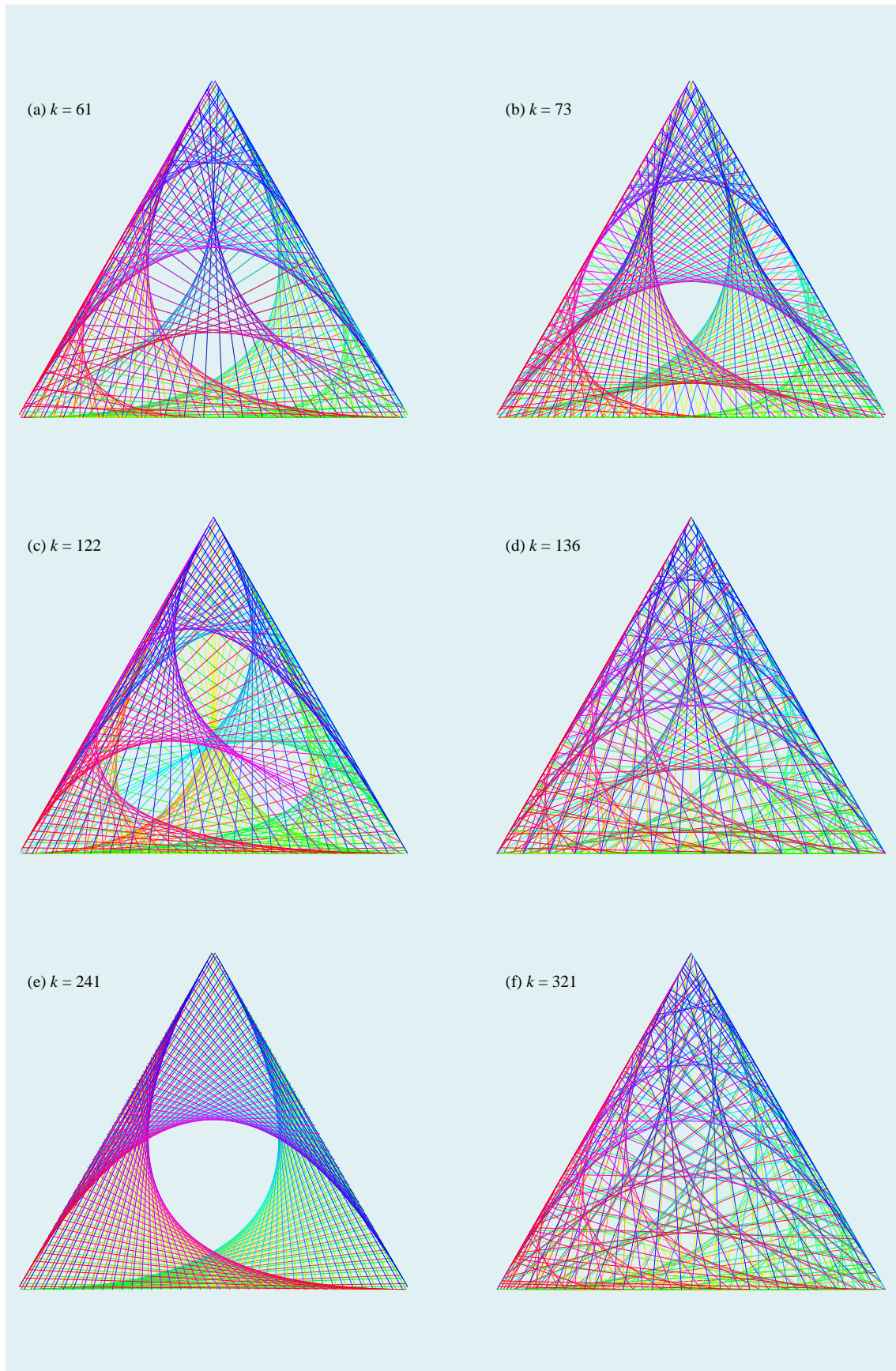



图 15. 可视化模数乘法，等边三角形，第 2 组 |  Bk2_Ch30_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

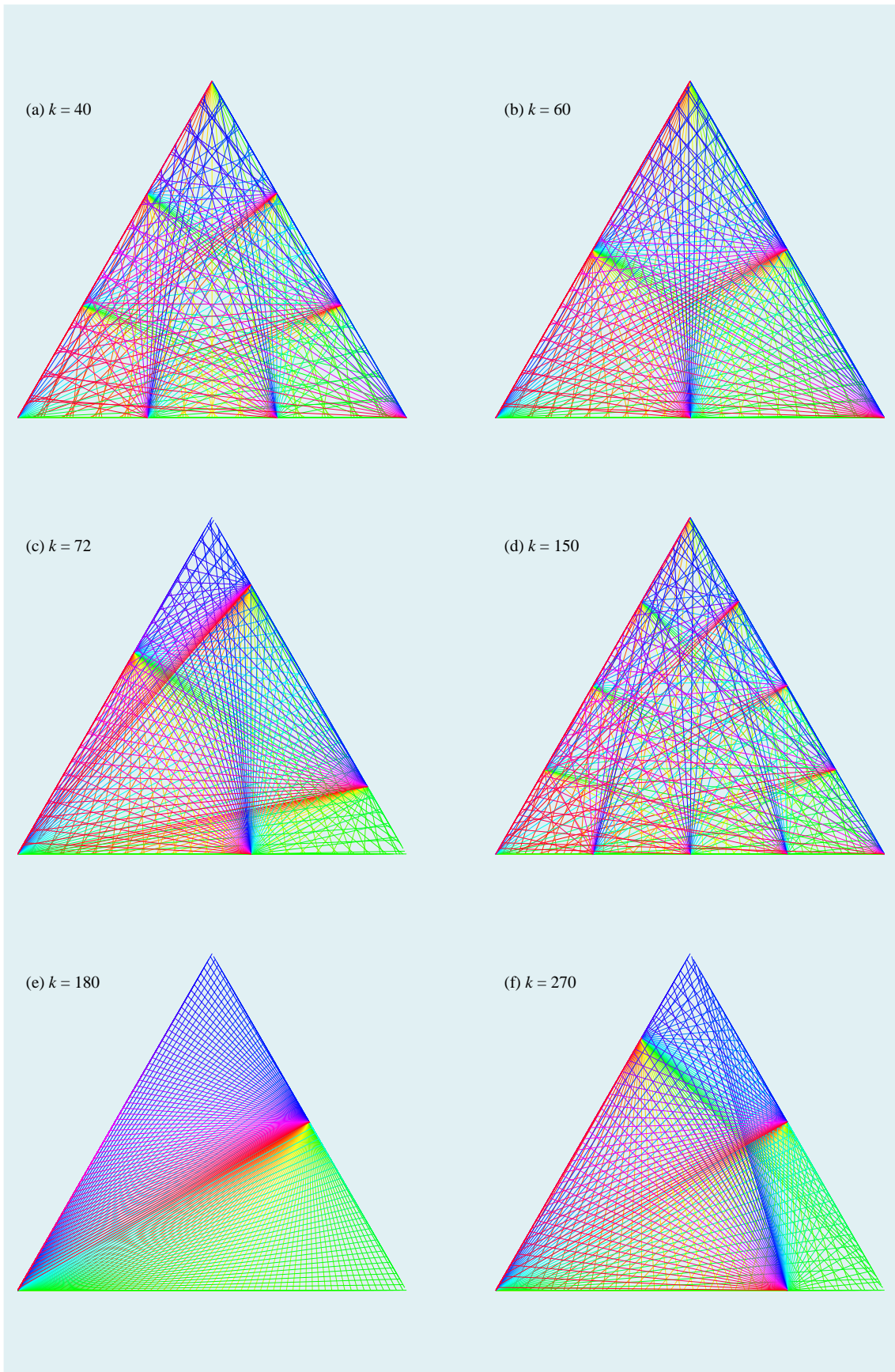



图 16. 可视化模数乘法，等边三角形，第 3 组 |  Bk2_Ch30_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com

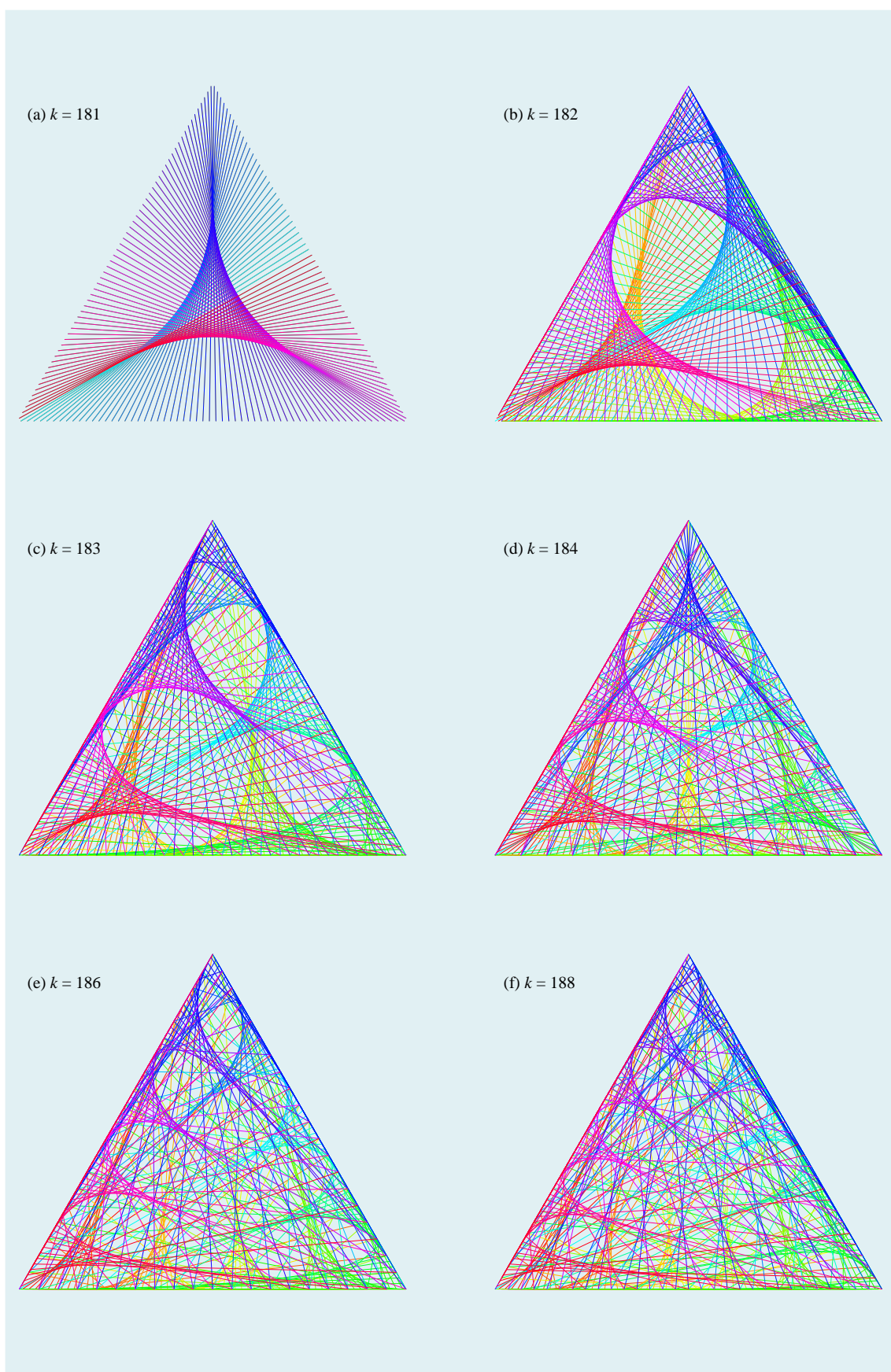



图 17. 可视化模数乘法，等边三角形，第 4 组 |  Bk2_Ch30_03.ipynb

本 PDF 文件为作者草稿，发布目的为方便读者在移动终端学习，终稿内容以清华大学出版社纸质出版物为准。

版权归清华大学出版社所有，请勿商用，引用请注明出处。

代码及 PDF 文件下载：<https://github.com/Visualize-ML>

本书配套微课视频均发布在 B 站——生姜 DrGinger: <https://space.bilibili.com/513194466>

欢迎大家批评指教，本书专属邮箱：jiang.visualize.ml@gmail.com