

1. アナログとデジタル

1.1 アナログ信号

信号は、ある媒体の移動や変化によって伝達する情報である。

媒体の移動や変化が時間に応じて生じる様子は、波としてとらえることができる。媒質の変化の方向と時間の関係から、横波と縦波がある。

(1) 横波

波の進行方向に対して、横方向に媒質が変化する波を横波という。水面に漂う波はこのタイプである。水平を基準として、各場所にある水が上や下に移動する

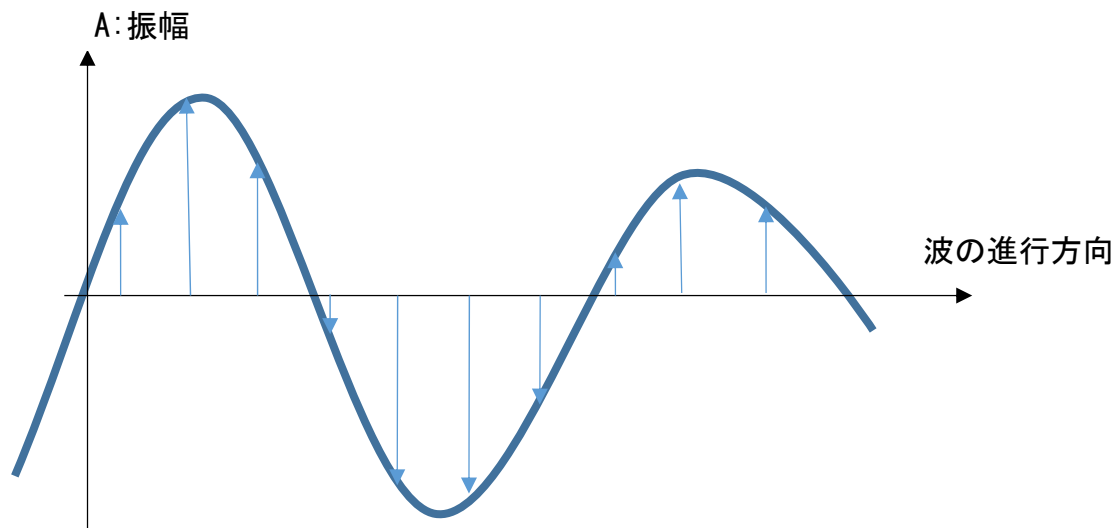


図1.1 横波の様子

(2) 縦波

波の進行方向に対して、同じ方向すなわち縦方向に変化する波を縦波という。

波を形成する媒体の多くの場合は、互いに密接しているが、均質に存在している時のイメージから考える。図1.2は「移動前」を均質に媒質が存在している状態とし、実践が媒質のはじめの位置とする。そこから、各媒質が、矢印の方向と、その逆方向に移動するとする。図1.2の「移動中」の実線が媒質の元の位置を意味し、破線が媒質の移動先の位置にあることを意味している。媒質が移動した後の状態を「移動後」に表す。破線が移動後の媒質の位置を表しているので、波の方向と同じ方向に動くので、媒質同士が離れたり近づいたりする。それは疎または密という状態になる。そのため、縦波は「疎密波」とも呼ばれる。媒質が近接するところは「密」の状態になり、媒質が離れるところは「疎」の状態になる。

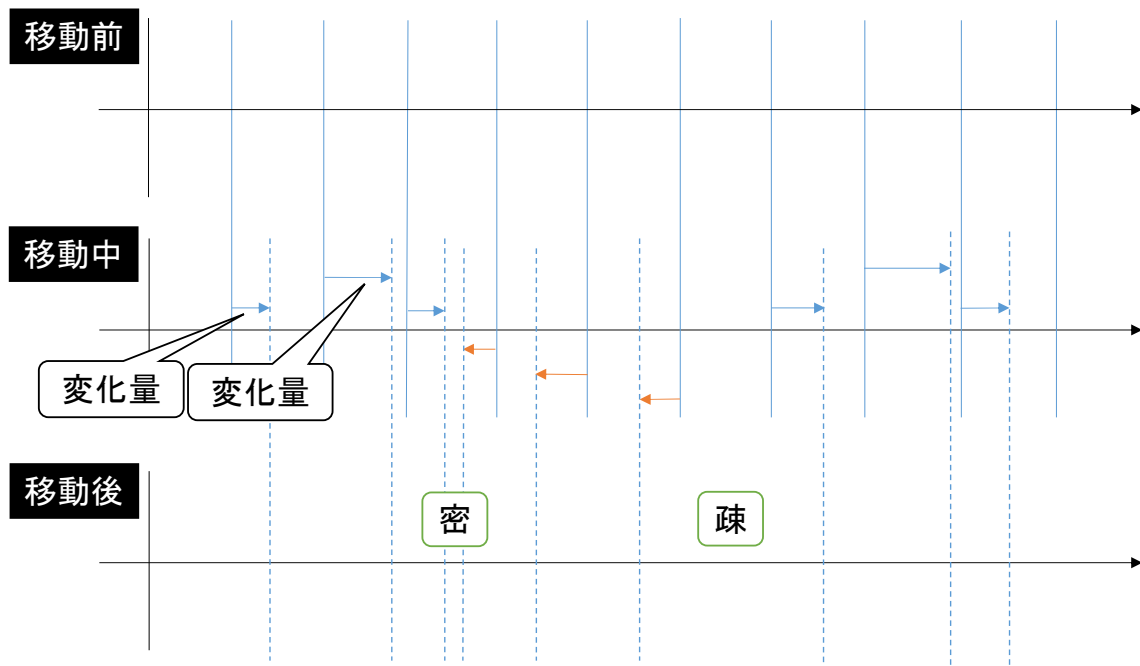


図1.2 縦波の様子

媒質の動きを、波の進行方向と同じ方向を上側すなわち正方向、進行方向と逆の方向を下側すなわち負方向に置き換えて表現すると横波と同じ方式で表すことができる。図1.3 は、媒質の移動を横波の表現に変換する様子を示している。

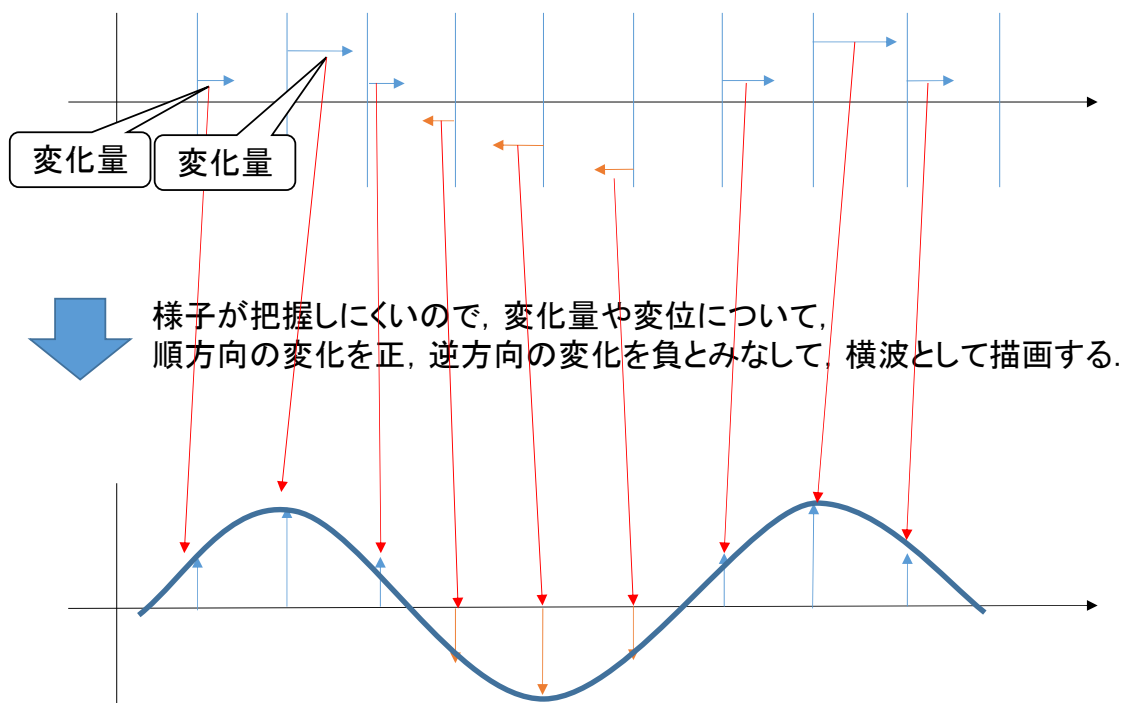


図1.3 縦波から横波への表現変換

1.2 デジタル信号

デジタルコンピュータで信号を処理するとき、アナログ信号を取り扱うことはできず、デジタル信号の形で扱うことができる。デジタル信号は、独立したスイッチの ON/OFF、すなわちそれを 1/0 で表したビットという単位の集合体で表される。時間的な信号であるときは、飛び飛びの時間において値を持ち、その値が一定の精度の表現で表されるデータの連続や集まりである。そのため、表す桁数によって、精度や大きさに制限がある。

例えば、表1.1のように、一定の間隔のある時間において、整数のみの値を持つデータがあるとする。ここでは 10 秒ごとに観測した、-10[V]から 10[V]の間の整数値のデータとする。

表1.1 離散的なデータ

時間[s]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
値[V]	2	8	4	-2	-10	5	1	2	7	-4

このデータをグラフで表すと図1.4のようになる。このグラフ表示は、各時間ごとに観測された値を●の位置にプロットしているが、散布図のプロットと勘違いしないように、時間の軸から観測値の場所まで線を引いている。実際にその線が存在しているというわけではない。

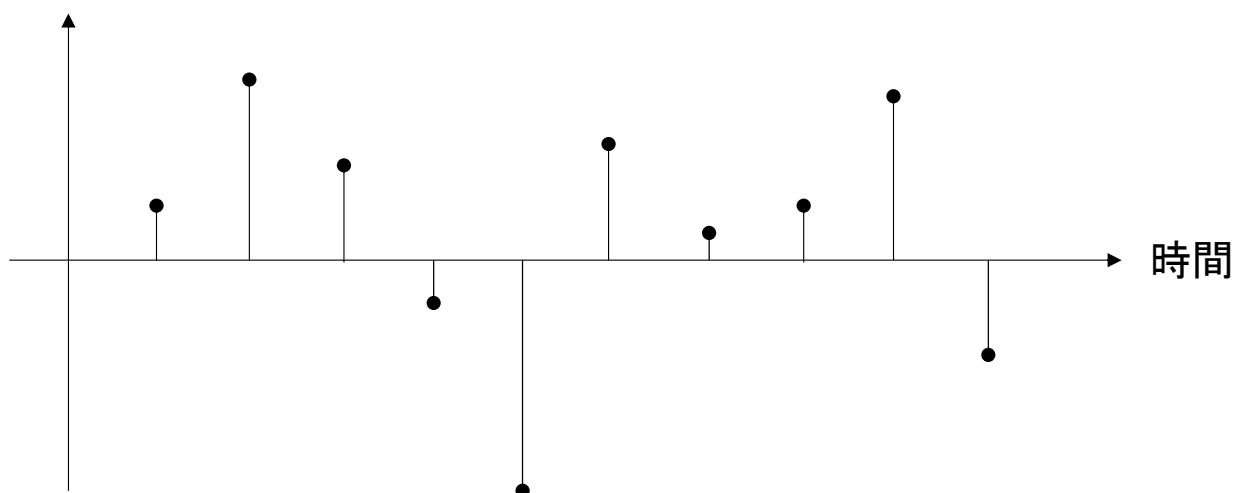


図1.4 離散的なデータのグラフ

1.3 A/D 変換

自然界にある媒質や現象による信号はアナログである．これをコンピュータで処理できるようにするには，デジタル値に変換しなくてはならない．それがアナログ／デジタル変換（A/D 変換）である．

A/D 変換は，3 段階からなる．

(1) サンプリング

原波形から時間的にとびとびの値をとる．

(2) 量子化

値的にとびとびの値にまるめる．

(3) 二進表現

0,1 の二進数で表現する．

以下に概要を示す．

(1) サンプリング

原波形から時間的にとびとびの値をとる例を図1.5 に示す．「サンプリング前」の連続した線が基の連続波形であるとする．その波形から，一定間隔の時間で原波形から値を取得してくる．「サンプリング後」は，一定の時間間隔で値を取得した様子を示している．

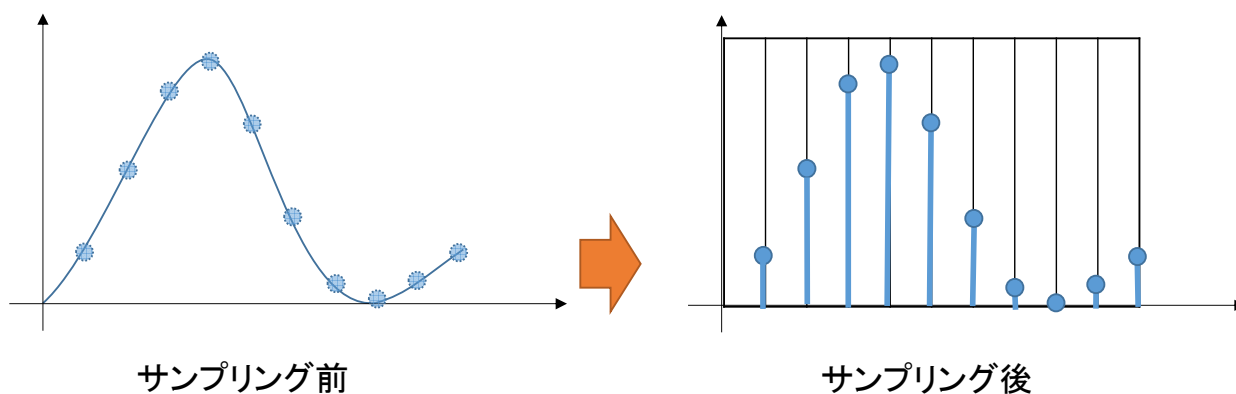


図1.5 サンプリングした様子

サンプリングで得た値の例を表1.2 に示す．各時間で得られた値を小数点以下 2 桁で示しているが，これは，A/D 変換としてのデジタル化した値ではなく，アナログ値として観測しうる最大の詳細な値もしくは，デジタル化する細かさ以上の細かさをもつアナログ値である．

表1.2 サンプリングしたときに取得した値の例

時間	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
サンプリング後	1.21	3.95	5.91	6.35	4.85	2.36	0.53	0.05	0.45	1.02

(2) 量子化

量子化では、値的にとびとびの値に丸める。サンプリングで取得した値を、決められた刻みの中で最も近い刻みの値に丸める。すなわち、ここで、アナログ値からデジタル値に変換される。図1.6 は、横の破線が量子化で取り得る値であるとしたとき、そこに丁度該当しないのが通常であることから、近い方の破線に移動させて量子化している様子を表している。

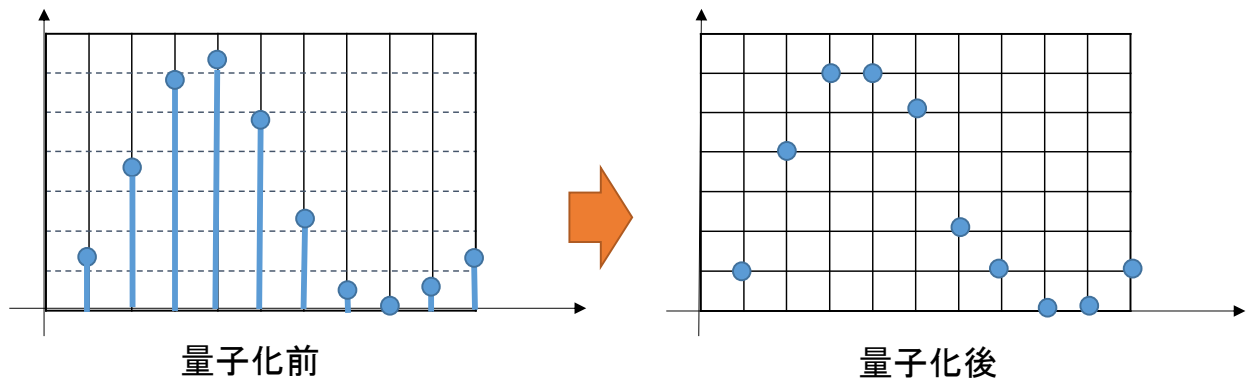


図1.6 量子化を行った様子

表1.3 は、サンプリングした値と量子化した様子を表している。

時間	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
サンプリング後	1.21	3.95	5.91	6.35	4.85	2.36	0.53	0.05	0.45	1.02
量子化後	1	4	6	6	5	2	1	0	0	1

表1.3 量子化表現を行った様子

(3) 二進数表現

0,1 の二進数で表現する。デジタル値に量子化された値をコンピュータ上で扱うことができる二進数で表現する。図1.7 は、取り得る量子化の値を二進数表現と対応させた様子である。表1.4 は、量子化した値と

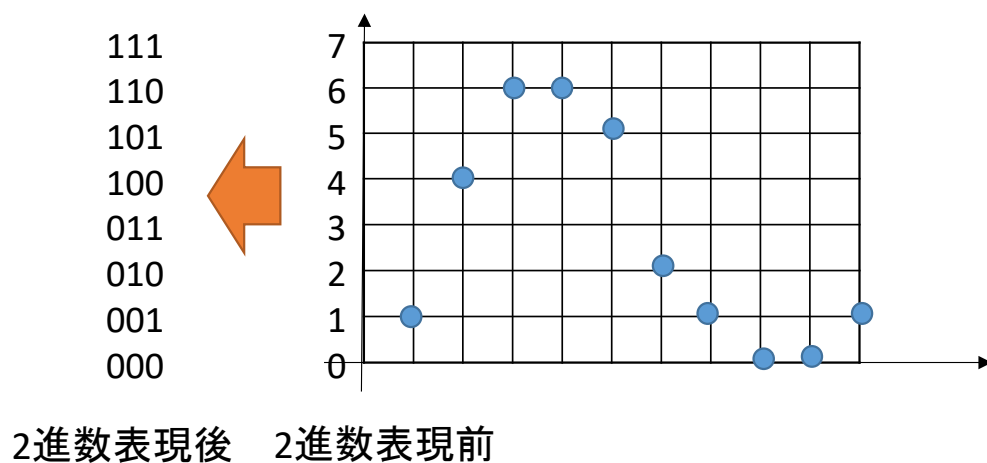


図1.7 二進数表現との対応の様子

時間	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
サンプリング後	1.21	3.95	5.91	6.35	4.85	2.36	0.53	0.05	0.45	1.02
量子化後	1	4	6	6	5	2	1	0	0	1
二進数表現	001	100	110	110	101	010	001	000	000	001

表1.4 二進数表現を行った様子

それぞれの段階で行うことを確認し、そこで生じる問題や条件などをおさえる。

(1) サンプリング

サンプリングは、一定の時間間隔で、その時々値をとる。短い時間間隔で値をとると、元の信号に近い状態になり、長い時間間隔で値をとると、元の信号が持っている変化を持たない状態になる。すなわち、短い時間間隔でサンプリングする方がよい。

しかし、短い時間間隔で値をとると、長い時間間隔で値をとるときよりも、データ量が多くなることは分かるだろう。例えば、60秒の信号を10秒に1回サンプリングすると6件のデータとなり、1秒に1回サンプリングすると60件になる。同じ信号を表すためのデータ件数が多いほど、元のデータに忠実である。

コンピュータでサンプリングで値をとるときは、コンピュータとしてとり得る値に制限があるためデジタルの値ではあるが、値は丸められていない、すなわちアナログ値そのものである。

(a) サンプリング周波数

サンプリング周波数は、信号1秒間の間に値を取得する回数のことである。単位は[Hz]である。値を取得する間隔を τ [s]とすると、その逆数で与えられる。

$$\tau = 0.1[\text{sec}] \text{ のとき, } f_s = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.1} = 10[\text{Hz}]$$

$$\tau = 0.2[\text{sec}] \text{ のとき, } f_s = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.2} = 5[\text{kHz}]$$

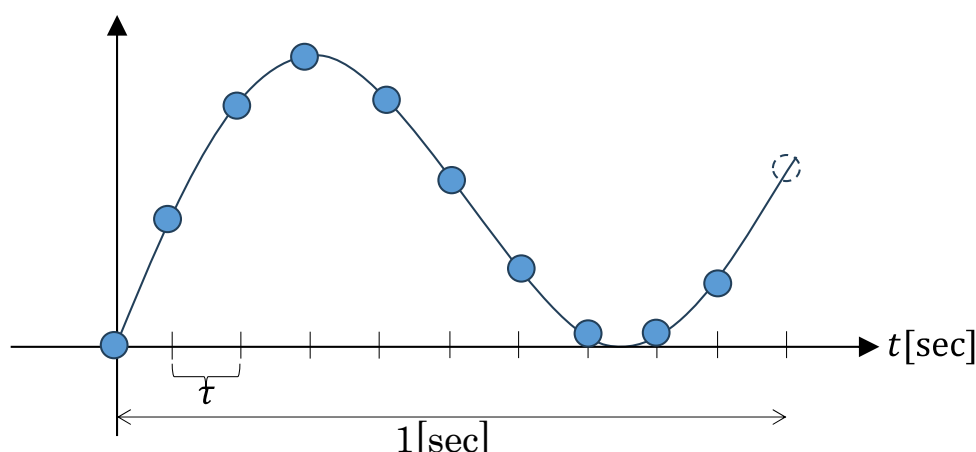


図1.8 1秒間に10回サンプリングする様子

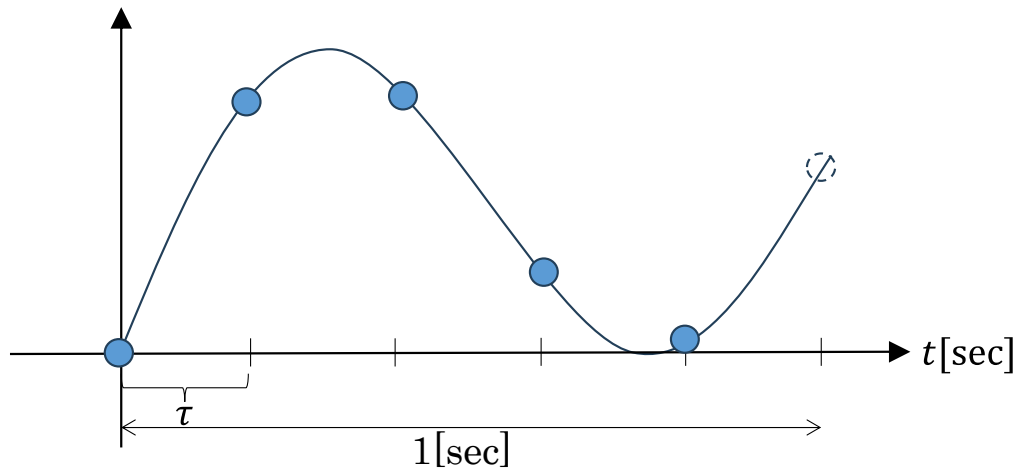


図1.9 1秒間に5回サンプリングする様子

(b) ナイキスト周波数

ナイキスト周波数は、アナログ信号をサンプリングしてデジタル化した信号をサンプリング前に戻したとき、元のアナログ信号に含まれる周波数成分を再現するための条件を満たす、サンプリング周波数のことである。

f_{max} ：取り扱っている信号の最大周波数、 f_n ：ナイキスト周波数 とすると、ナイキスト周波数は以下で表すことができる。

$$f_n = 2f_{max}$$

この式はどのような意味を持つだろうか。A/D 変換する対象としているアナログ信号というのは、通常、多様な周波数成分から構成されているので、単一の周波数からなることはまれである。そこで、対象とする信号をデジタル化するには、どのような頻度でサンプリングすればよいか決めなければならないとき、記録したい最大の周波数を決めて、その周波数以下の信号を記録できるようにする。

最大の周波数を決めると、それ未満の周波数の信号をデジタル信号に含めることができる。ここで「デジタル信号に含めることができる」というのは、アナログ信号に戻した時に、元の信号の成分が含まれているということである。つまり、その周波数の範囲で元の信号を復元できることを意味している。その限界を示しているのが、このナイキスト周波数である。

例えば、10[kHz]以下の周波数成分からなる音声信号デジタル化したいときには、20[kHz]がナイキスト周波数である。

$$f_{max} = 10[\text{kHz}] \rightarrow f_n = 2 \times 10\text{k} = 20[\text{kHz}]$$

実際に、信号をサンプリングした信号をアナログに戻したときにどのようなになるかシミュレーションしてみる。

図1.10 は、周期： $T=40$ ，サンプリング間隔： $\tau=4$ とした時であり，ほぼ，原信号の形を保っている．

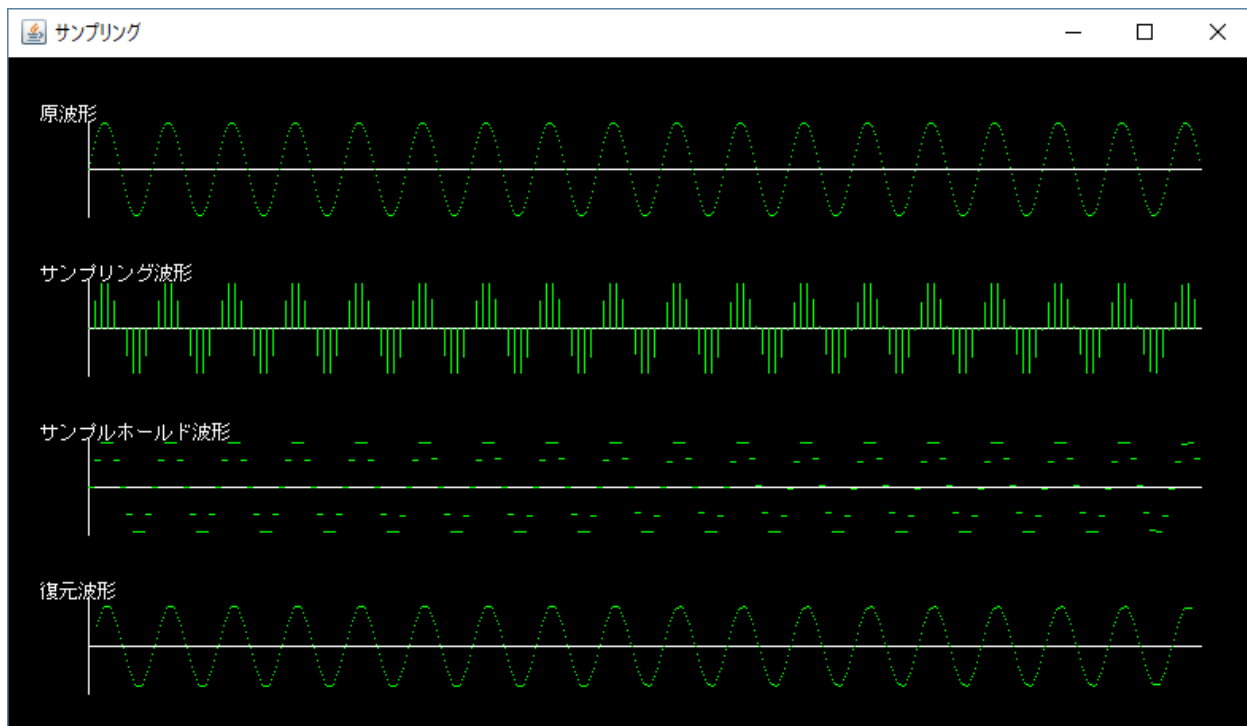


図1.10 周期： $T=40$ ，サンプリング間隔： $\tau=4$

図1.11 は周期： $T=40$ ，サンプリング間隔： $\tau=16$ としたときであり，上下のタイミングは合致しているが，形は崩れている．

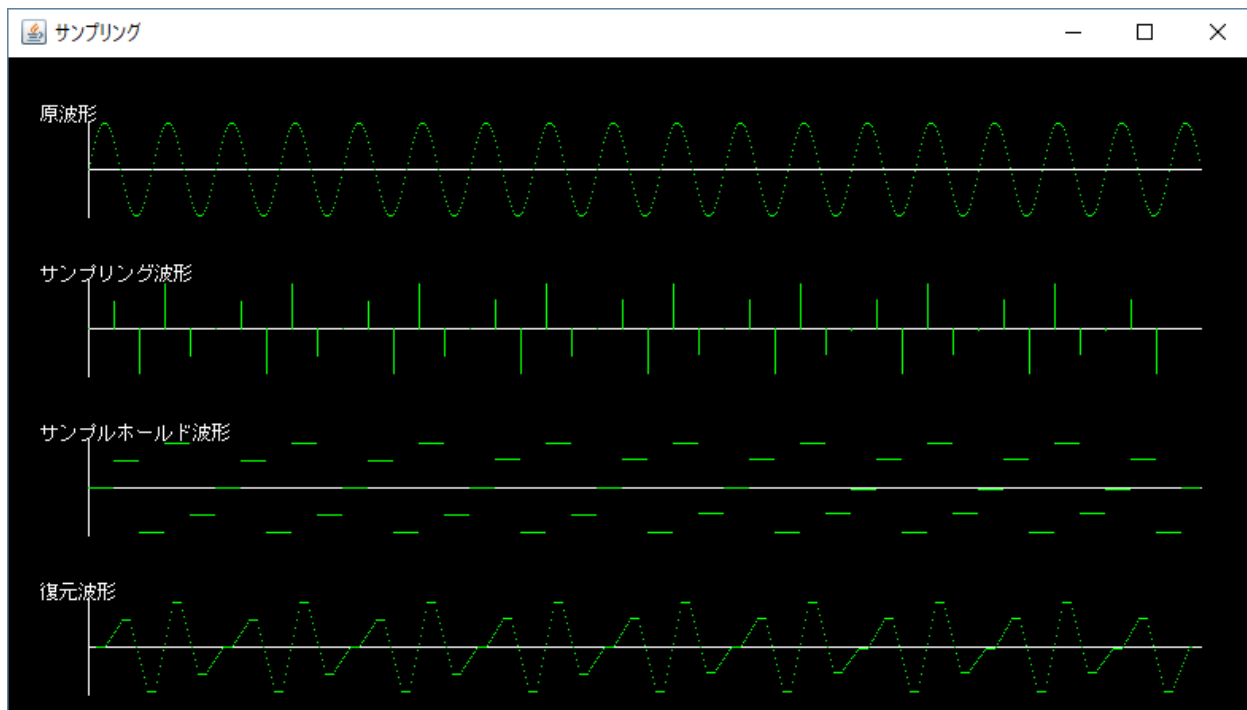


図1.11 周期： $T=40$ ，サンプリング間隔： $\tau=16$

図1.12 は，周期： $T=40$ ，サンプリング間隔： $\tau=20$ ，サンプリング開始タイミング： $t=0$ とした時であり，ちょうど横軸と重なるタイミングと一致することから，変化が観測されない。



図1.12 周期： $T=40$ ，サンプリング間隔： $\tau=20$ ，サンプリング開始タイミング： $t=0$

図1.13 は，図1.12 と同じサンプリング間隔であるが，観測開始タイミングをずらすことで，上下のタイミングが観測されるようになっている。

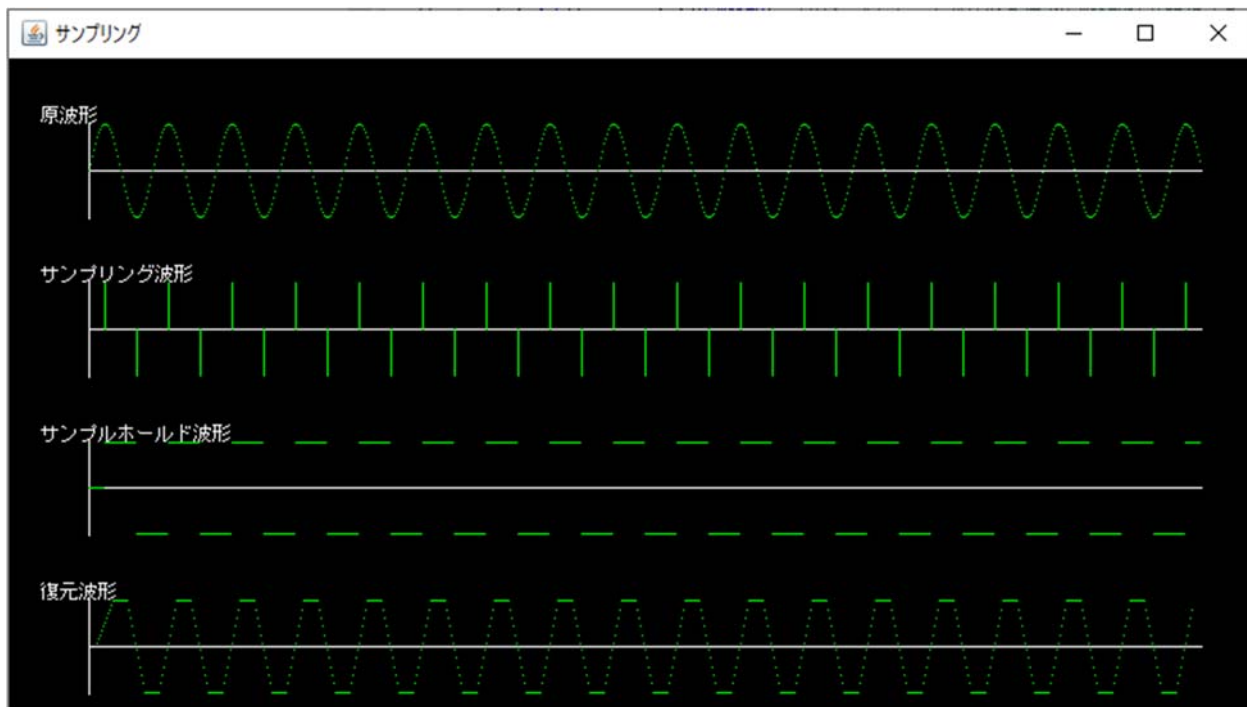


図1.13 周期： $T=40$ ，サンプリング間隔： $\tau=20$ ，サンプリング開始タイミング： $t=10$

(2) 量子化

量子化は、原波形から得られる無限精度の値を、決められたビット数で表現できる値に近似することである。

(a) 分解能

実際に量子化するとき、アナログ値をデジタル値に変換する方法を示す。

例として、0～10[V]の電圧値を 8bit の値で表す、A/D コンバータで量子化することを考える。このとき、0[V]が 8bit の最小値 00000000 で表され、10[V]が 8bit の最大値 11111111 で表されることになる。

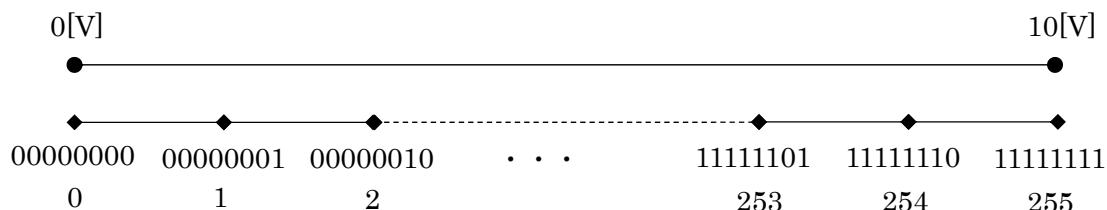


図1.14 アナログの値とデジタルの値のすり合わせ

このとき、10[V]の幅を 255 刻みで表すことになるので、一番小さい刻み、すなわち 1[bit]で表すことができる細かさは何[V]だろうか？

$$\Delta = \frac{10}{255} = 0.0392 \text{ [V/bit]}$$

すなわち、一つの刻みは 0.0392[V]である。この値のことを、分解能、量子化幅という。一般化すると、 n ビットで、幅 W を持つ値を量子化するときには、分解能は以下である。

$$\Delta = \frac{1}{2^n - 1} \times W$$

では、A/D 変換で、アナログ値からデジタル値を導出する方法はどのようになるだろうか。8bit で表される数値のいずれに近いかを求めるので、最大値 255 までの値のどれだけに相当するかを計算すればよい。例として、3.84[V]を量子化するときには以下の計算で求める。

$$\frac{255}{10} \times 3.84 = 97.41 = (97)_{10} = [01100001]_2$$

1 刻み分である分解能で、アナログ値を割ることで、何刻み分で分けるか計算できる。例えば、整数の範囲で1刻みとする分解能の場合、小数点以下の値は含めることができないので丸める。丸める方針としては四捨五入でよいだろう。10 進数で求められるので、それを二進数に変換すれば、二進数への変換も含めて、A/D 変換された値が導出できる。

分解能を高くするほど、すなわち細かくするほど、原信号に近くなるが、多くのデータ量を必要とする。また、どんなに分解能を上げて、四捨五入や小数点以下を切り捨てるような処理が必要である。すなわち、分解能よりも細かい値の差や違いは、丸められるため表現できない、これは誤差となる。これを量子化誤差という。

(b) 量子化誤差

量子化では、必ず量子化に伴う誤差、すなわち量子化誤差が生じる。

連続波形を量子化して、限られたビットの値に近似する様子を図1.15 に示す。

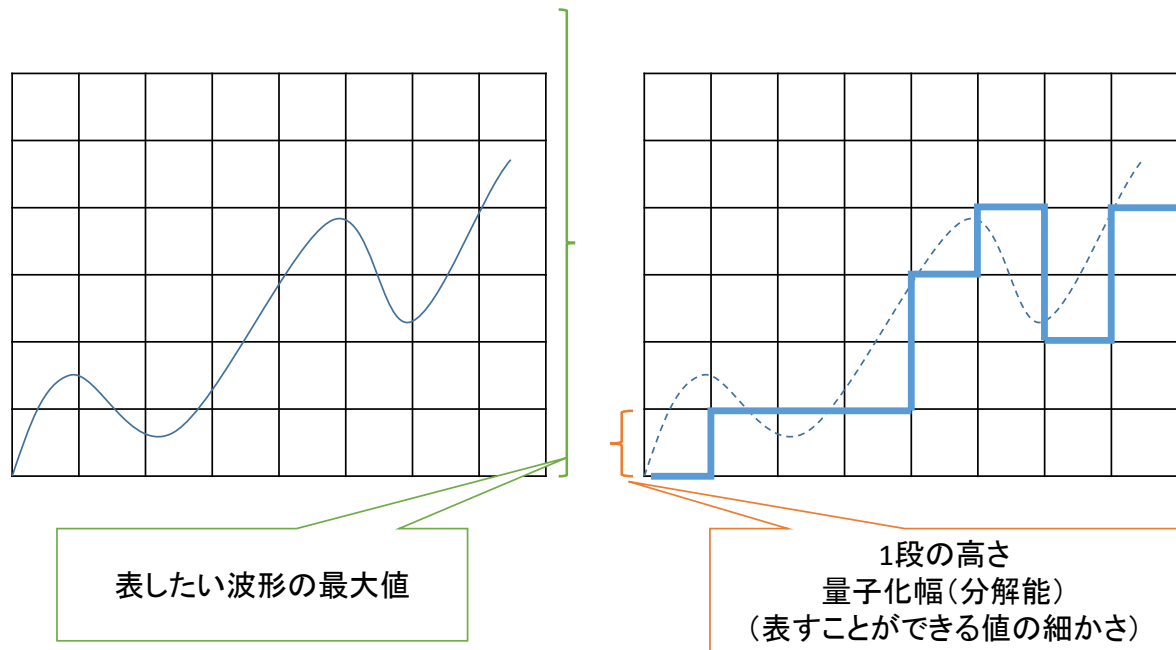


図1.15 連続波形を量子化したときに近似した様子

図1.15 の左下の一部分を拡大した様子を図1.16 に示す．この高さの 1 マスが 1 ビットの違いで表すことができる差である．これが分解能 Δ である．量子化誤差は，1 マスの間にある値を 1 ビットごとの横線の値に近似するときのずれである．横線に近い位置にあると量子化誤差は少なくて済むが，ちょうど真ん中に信号の値があるとき，最も近似するときの誤差が大きくなることが分かる．

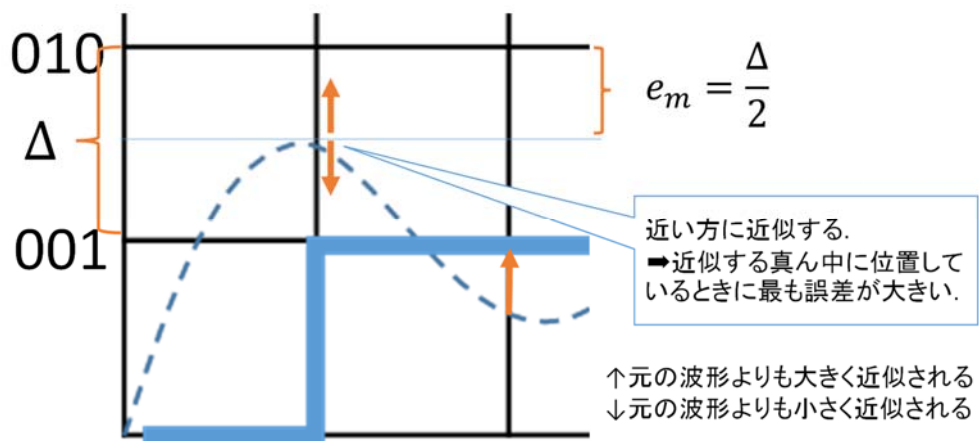


図1.16 量子化誤差が生じる部分の拡大

したがって，幅 W の値を n ビットで A/D 変換するときの量子化誤差 e_m は以下で表すことができる．ただし，近似は n が十分大きいときである．

$$e_m = \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{W}{2^n - 1} \cong \frac{W}{2^{n+1}}$$

量子化を行うことでデジタル信号に近似された波形は，原波形とは異なる値となり，歪を含むことになる．この量子化誤差が原因で生じる歪，雑音のことを，量子化雑音と呼ぶ．

(c) エイリアス

ある信号をサンプリングするとき，対象としたい周波数の上限を考えてサンプリング周波数を決めサンプリングすることで，サンプリング周波数の半分以下の信号のみがデジタル信号に反映されると考えて大丈夫だろうか．

図1.17 と図1.18 にて，サンプリングしたあと，デジタル信号を復元したアナログ波形を見てみる．

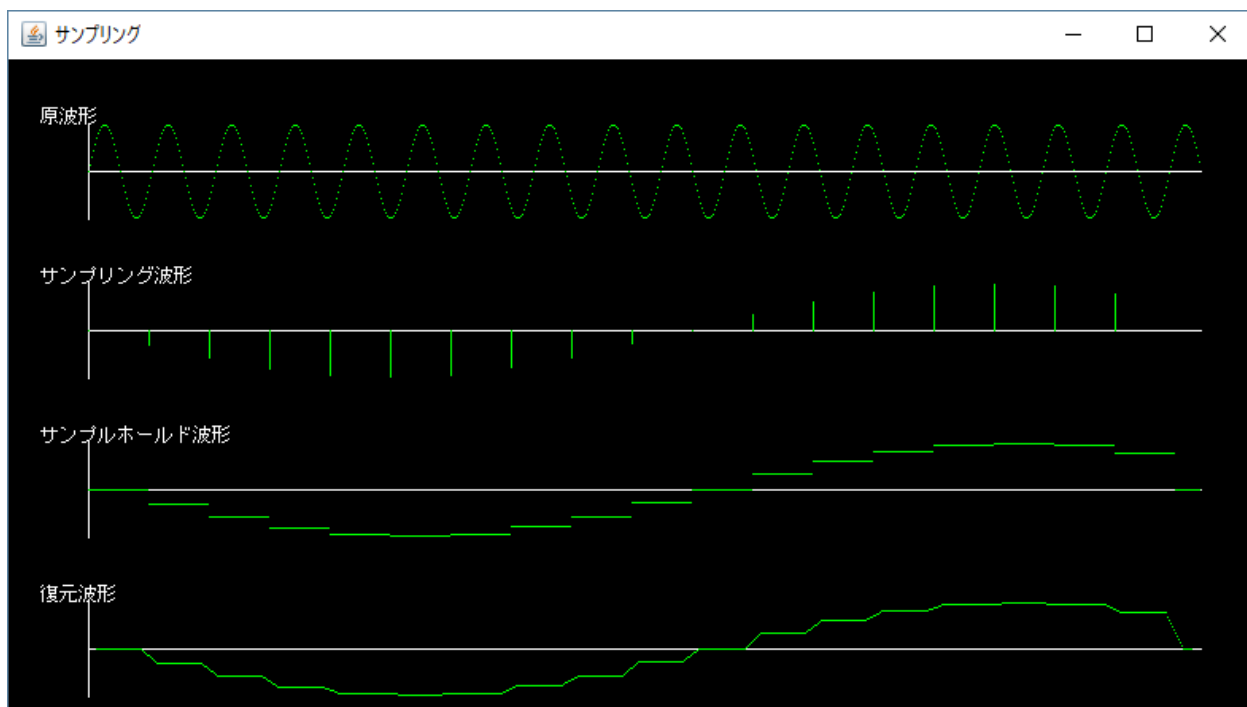


図1.17 周期： $T=40$ ，サンプリング： $\tau=38$ ，サンプリング開始タイミング： $t=0$

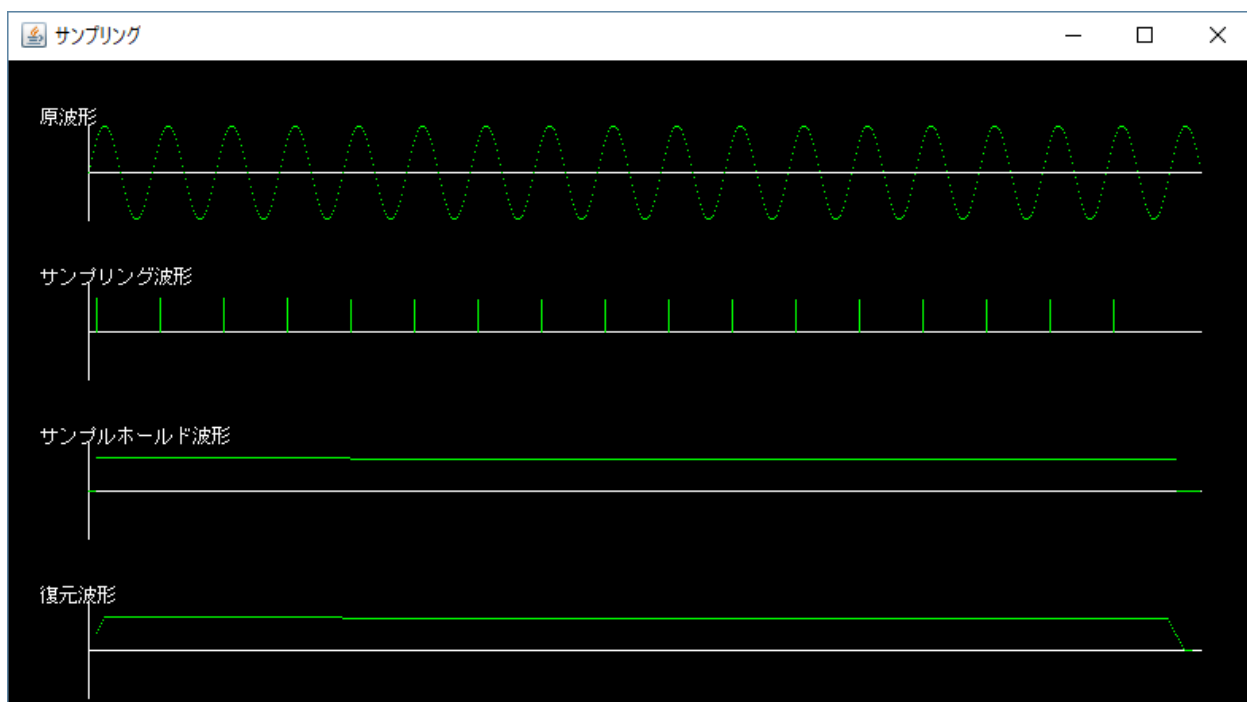


図1.18 周期： $T=40$ ，サンプリング： $\tau=40$ ，サンプリング開始タイミング： $t=5$

サンプリング周波数からは、外れた値でサンプリングしているわけではないが、原波形に含まれていない周波数の信号が復元されている様子が分かる。このように、本来含まれていない信号が現れる現象をエイリアスと呼ぶ。

例では、サンプリング間隔を極端に大きくとって、サンプリング周波数としては極端に小さい値である。つまり、サンプリング周波数からみて、原信号は高い周波数の成分である。そうになると、ナイキスト周波数の考え方からすると、デジタル化するデータに含まれていないはずである。それなのに信号として表れている。すなわち、偽物の信号であるので、本来の信号に含まれているものではない。これは、サンプリングで捉えられない信号がサンプリングのタイミングに不意に合致することで生じる。

これは、ワゴンホイール現象やストロボ効果などと呼ばれることもある。

このエイリアシングが生じることを避けるための方策はあるだろうか。サンプリングする対象としている周波数成分が悪影響を与えているので、その成分を除去してからサンプリングすればよい。したがって、サンプリング周波数 f_s の半分 $\frac{f_s}{2}$ よりも高い周波数成分をカットしてからサンプリングする。すなわち、 $f_c = \frac{f_s}{2}$ を遮断周波数としたローパスフィルタを通してからサンプリングすることでエイリアスを防ぐことができる。

1.4 演習

サンプリングの様子、サンプリング周波数との関連、エイリアスの様子をシミュレーションで実施する。

- (1) サンプリングの時、サンプリング周波数を決める際にナイキスト周波数を考慮して決める必要がある。サンプリング周波数を変えるとどのように復元されるか試せ。少ないサンプリングで復元できる限界を試せ。その時のスクリーンショットを提出せよ。
- (2) サンプリングのシミュレーションプログラムのパラメータを変えて、エイリアスにて、本来含まれない周波数の信号が発生することを確認せよ。その時のスクリーンショットを提出せよ。