华中科技大学 2020～2021 学年第一学期

“ 矩阵论 ”考试试卷

考试方式：闭卷　考试日期: 2020 年 11 月 30 日　考试时长: 150 分钟

专业班级：__________　学号：__________　姓名：__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八			总分
分数											

分 数	
评卷人	

一、 填空题（15 分）（每小题 3 分，共 5 小题）

1. 设方阵$A \in C^{4\times 4}$ 的最小多项式为$m_A(\lambda) = (\lambda-1)^k(\lambda-2)$。则当 $k =$ ________ 时, A 可相似对角化。

2. $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换 $\mathrm{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-(1-k)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$,其中是 k 常数，$\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ ，则线性变换 T 的 3 个特征值为________________________。

3. 矩阵$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$的奇异值为________________。

4. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3+i & 5 & 1+i \\ 2 & i & 2 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1 =$ ________。

5. $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 11 & 15 \\ 0 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $\mathrm{tr}(A\otimes B) =$ ______。

分　数	
评卷人	

二、　（15 分）设 T(A)=PA ，$\forall A\in \mathbf{R}^{2\times 2}$ ，这里 $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$。求线性变换 T 在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的自然基 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22}下的矩阵 B 及 N(T) 。

分　数	
评卷人	

三、　（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

(1)写出其 Jordan 标准型 J_A 以及相应的相似变换矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J_A$。

(2)求解微分方程组 $\boldsymbol{x}'(\mathrm{t}) = A\,\boldsymbol{x}(\mathrm{t})$，$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$。

分　数	
评卷人	

四、（15 分）计算矩阵 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 的奇异值(SVD)分解 $A=U\sum V^H$(请给出矩阵U，$\sum$，V 的具体形式)。

分　数	
评卷人	

五、　（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$。计算不相容方程组 $Ax=b$ 的最佳最小二乘解。

分　数	
评卷人	

六、　(7 分) 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$I$ 是单位矩阵，证明：对任意的常数$\alpha > 0$，下面的不等式成立

$$\|(\alpha I + A^H A)^{-1} A^H\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

分　数	
评卷人	

七、　（8 分）设$A \in R^{m\times n}$，$rank(A)=1$，证明

$$A^{+}=\frac{1}{a}A^{T}，其中\ a=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^{2}$$

分　数	
评卷人	

八、（10 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，求解下面的矩阵方程，其中 X 为未知矩阵

$$AXB-X=C.$$