学号________________ 姓名______________ 院系_____________

考试日期 2015 年 12 月 5 日

一、判断题：（2×6=12 分）

（1） 线性空间 R^3 中的正交投影是正交变换。

（2） 如果 $g(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)^2$ 是矩阵 A 的化零多项式，即 $g(A)=0$，则 2 和 5 是矩阵 A 的特征值

（3） 设 A 为 n 阶方阵，矩阵函数 f(A)有意义， 如果 A 相似于对角矩阵，则 f(A)也相似于对角矩

（4） 如果矩阵运算 $A\otimes B=0$，则矩阵 A=0 或者 B=0

（5） 如果矩阵 A 既有左逆又有右逆，则矩阵 A 一定是方阵，且为可逆矩阵。

（6） 对于矩阵 A 和矩阵 A^+的秩，有 $rank(A)=rank(A^+)$

二、填空题：（每个空 3 分，共 27 分）（答案请填在每题横线标定的位置上）

(1) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1+2i & 3\\ 2 & 3-i & -2\\ 1 & -2 & 2-3i\end{bmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，则 $\|A\|_\infty=$______。

（2） 线性空间 $W=\{A\in R^{4\times 4}\,|\,A^T=A\}$的维数，$dim W=$______________

(3) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$，矩阵 B 的特征值为 2,3,4，则矩阵 $A\otimes B$ 的特征值为__________

（4 ）设线性空间 R^3 中的线性变换 T 被定义为绕向量 $e_2=[0\ 1\ 0]^T$，逆时针旋转一个 θ 旋转变换，则变换 T 的一个二维不变子空间是____________________。

（5） 设矩阵 A 的 UV 分解为 $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$,则矩阵 A 的 LDV 分解为__________

（4）设线性空间 R^3 中的线性变换 T 被定义为绕向量 $e_2=[0\ 1\ 0]^T$，逆时针旋转一个 θ
旋转变换，则变换 T 的一个二维不变子空间是____________。

（5）设矩阵 A 的 UV 分解为 $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\3&3&0\\6&4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&7\\0&2&5\\0&0&2\end{bmatrix}$，则矩阵 A 的 LDV 分解为__________

（6）设函数矩阵 $A(t)=\begin{bmatrix}1&0\\t^3&t\end{bmatrix}$，则 $\frac{d(A^{-1}(t))}{dt}=$ __________

三、（12分）设 P 为 R^3 中的正交投影，P 将空间 R^3 中的向量投影到平面π上，

$\pi=\{(x\quad y\quad z)^T \mid x+y-z=0\}$，求 P 在线性空间 R^3 的自然基$\{e_1,e_2,e_3\}$下的变换矩阵 A。

四、（15分）

四、（ 15分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$，

（1）求可逆矩阵 P 和矩阵 A 的 Jordan 矩阵 J_A，使得 $P^{-1}AP=J_A$，

（2）设参数 $t\neq 0$，求矩阵函数 e^{At} 和矩阵 e^{At} 的 Jordan 矩阵 $J_{e^{At}}$.

五、（ 15分）设矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，

（1）求矩阵 A 的奇异值分解

（2）求 A^+

六、（ 15分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & t\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{bmatrix}$，矩阵方程为 AX+XB=D，

（1）讨论 t 为何值，矩阵方程有唯一解.

（2）在矩阵方程有唯一解时,求解其中的未知矩阵 X.

五、（15分）设矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，

（1）求矩阵 A 的奇异值分解

（2）求 A^{+}

六、（15分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & t\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -3\end{bmatrix}$，矩阵方程为 AX+XB=D，

（1）讨论 t 为何值，矩阵方程有唯一解。

（2）在矩阵方程有唯一解时,求解其中的未知矩阵 X。

七、证明题（6分+7分=13分）

（1） 如果矩阵 A 是正规矩阵,且矩阵函数 f(A) 有意义,证明 f(A)也是正规矩阵.(6分)

（2） (7分)假设 $A\in C^{n\times n}$ 是可逆的，证明：

$$\|A\|_2\|A^{-1}\|_2=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$$

其中 σ_{max}，σ_{min} 分别为A的最大和最小的奇异值。