2019秋矩阵论期末考试

一、填空题

1 $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$，最小多项式$m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$，其Jordan标准型为_____或____。

2 空间中一组基为$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，某线性变换$T$在该组基下的矩阵表示为：$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$，则在基$\{\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1\}$下该线性变换的矩阵为________

3 矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，则其**LDV**分解为：__

4 矩阵$A = \begin{pmatrix} i & 2i & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3+3i \end{pmatrix}$，则$\|A\|_1$ =___

5 矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 5 & \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & 10 & \end{pmatrix}$，求$rank(A \otimes A^T)$ =_____

二、已知$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ (n+1)P_{n+1}(x) = (n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \end{cases}$，
$T_0(x) = P_1(x) = 1, T_1(x) = P_1(x) = x$:

（1）求$\{T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x)\}$到$\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$的过度矩阵；

（2）$f(x) = 2T_2(x) + 3T_3(x)$,求$f(x)$在基$\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$下的坐标。

三、已知空间$M = L\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$，设$T$为$R^3$到$M$的正交投影变换：

（1）设基坐标为:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求变换T在这组基下的矩阵；

（2）求$(1,2,1)^T$经过该投影变换后的向量。

四、已知一组基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$和线性变换$T$:

$$T\alpha_1 = 2\alpha_1$$
$$T\alpha_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$$
$$T\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_3$$
$$T\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

求一组基，使得线性变换T在该组基下的矩阵为**Jordan**矩阵。

五、（1）$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$，求它的**SVD**分解以及加号逆$A^+$;

（2）$A\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&4&2\end{pmatrix}$，求**Moore-Penrose**逆。

六、

$$X^{'}(t)=\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-2&2\end{pmatrix},X(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

求$X(t)$。

七、已知方阵A是正规矩阵，证明：
（1）A和A^H具有相同的特征向量;
（2）对于任意向量x,Ax和A^Hx的长度一样。

八、已知方阵$A,X,C\in\mathbb{C}^{n\times n}$,且矩阵$A$的特征值$\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$均为实数，试证明：

$$X+AXA+A^2XA^2=C$$

有唯一解。