华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵论　　课程类别　☑公共课　□专业课　　考核形式　□开卷　☑闭卷

学生类别　研究生　考试日期　**2018.12.28**　学生所在院系＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿任课教师＿＿＿＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、填空题（15 分）（每小题 3 分，共 5 小题）

1. 已知 4 阶方阵 A 的 Jordan 标准型 $J_A=\begin{bmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&2&\\&&&1\end{bmatrix}$ 则 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)=$ ＿＿＿＿＿＿.

2. 已知 3 阶方阵 A 的 LU 分解为 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&3&0\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&2\\0&4&3\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 A 的 LDV 分解为

   A＝＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

3. 已知 3 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&a\\4&-1&b\\5&1&3\end{bmatrix}$ 则行列式 $\left|e^A\right|=$ ＿＿＿＿＿＿.

4. 已知 3 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}i&2&3+4i\\-1&3&1\\3&2i&0\end{bmatrix}$ 其中 $i=\sqrt{-1}$，则 $\|A\|_1=$ ＿＿＿＿＿＿.

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&1\\2&2\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}$ 则行列式 $|A\otimes B|=$＿＿＿＿＿＿.

二、计算题（15 分）（每小题 5 分，共 3 小题）

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 求矩阵 A 的 Jordan 标准形 J_A 及相似变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP=J_A$.

2. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，求线性方程组 $Ax=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$ 的最佳最小二乘解.

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}$求解关于 X 的矩阵方程 AX+XB=D.

三、(15 分) $R^{2\times2}$ 表示 2 阶实方阵构成的线性空间，T 是 $R^{2\times2}$ 到 $R^{2\times2}$ 上的变换且满足：

对 $\forall X\in R^{2\times2}$，有 $TX=AX+A\circ X$.其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$ ，$\circ$ 表示 Hadamard 乘积.

（1）验证 T 是 $R^{2\times2}$ 上的线性变换；

（2）求 T 在基 $E_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $E_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$, $E_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$, $E_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$下的矩阵 B.

四、（15 分）已知复矩阵 $A=\begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$. 求 A 的奇异值分解.

五、（15 分）已知一阶线性常系数齐次微分方程组：

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t) \\ x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad 其中 A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

（1）求矩阵函数 e^{At} ；

（2）求该常微分方程组的解.

六、（15 分）在线性空间 R^3 中，定义子空间

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3 \text{ 且 } x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

（1）求从 R^3 到子空间 W 的正交投影变换 P；

（2）分别求 P 的零空间 N(P)及像空间 R(P)的标准正交基.且把 R^3 分解成不变子空间的直和；

（3）求正交投影变换 P 在自然基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的矩阵.

七、（10 分）若秩为 γ 的 n 阶方阵 A 为幂等矩阵（$1 \leqslant \gamma < n$），且 A 为正规矩阵. 证明 A 为半正定的 Hermite 阵.