2013 矩阵论答案

一. 填空

1. $\|A\|_\infty = 4+\sqrt{13}$ $\|Ax\|_1 = \cancel{\sqrt{2}+\sqrt{13}}\ 10+2\sqrt{13}+\sqrt{5}$

2. $(\lambda-\cos 1)^r(\lambda-1)^{n-r}$; $\begin{cases}(\lambda-\cos 1)(\lambda-1) & r<n \\ (\lambda-\cos 1) & r=n\end{cases}$

3. $A^5 = \begin{bmatrix} 32 & 80 & 80 \\ & 32 & 80 \\ & & 32 \end{bmatrix}$

(4) $L\{u\}$. $L\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

(5) 10 (6) $a \neq -1$

二.

(1) 选择自然基 $\{x^3, x^2, x, 1\}$，坐标 X_i，$i=1,2,3,4$ ……(2分)

$$(X_1\ X_2\ X_3\ X_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & 6 \\ 3 & 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ …… (5分)

$\Rightarrow \dim W = 3$.
$\{p_1\ p_2\ p_3\}$为基. …… (8分)

共8分

(2) $$[X_1\ X_2\ X_3 \mid Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ ……5分 $\begin{cases}\text{过程 3分} \\ \text{结果 2分}\end{cases}$

$\Rightarrow$ 坐标 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ ……(7分)

共7分

三. 解. ①. $T(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A$ 线性变换矩阵公式 —— 4分

设 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$ 过渡矩阵公式 —— 2分

由已知条件

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \cancel{= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C}$$

$$T(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)C$$
$$= (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A$$

即 $A = C$ —————— 4分

—————— 2分

自然基.

$$B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

7分

$A = C^{-1}BC$ $C = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$

② 求过渡矩阵 C，即

$$C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ —————— 2分

$$C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$ —————— 1分

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\qquad A=BC=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=(A^HA)^{-1}A^H$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

四、（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$

（1）求矩阵 A 的奇异值分解. (10分)

（2）求矩阵 A 的 M-P 广义逆 A^+. (5分)

$$A^+=V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}U^H \quad (13分)$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix} \quad (15分)$$

解：$A^HA=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ — (2分)

$$|\lambda I-A^HA|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2-1=(\lambda-3)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow \lambda_1=3,\quad \lambda_2=1$

从小到大排列 −1

故 A 的奇异值为 $\sigma_1=\sqrt3$，$\sigma_2=1$，故 $\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt3&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ — (4分)

由 $A=U\Sigma V^H$，$U\in C^{3\times3}$，$V\in C^{2\times2}$.

(1) $(\lambda_1I-A^HA)X=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}X=0\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，故 $V_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

(2) $(\lambda_2I-A^HA)X=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}X=0\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，故 $V_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

故 $V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$ — (6分)

对于 U，设 $U=[u_1,u_2,u_3]$，则 $u_i=\dfrac{AV_i}{\|AV_i\|}$，$i=1:2$ (8分)

则 $u_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}$，$u_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}$.

设 $u_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 则 $\left.\begin{array}{l}(u_3,u_1)=0\Rightarrow x+y+2z=0\\(u_3,u_2)=0\Rightarrow x-y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}y=x\\z=-x\end{array}$

单位化 (−2)

故 $u_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$，则 $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\sqrt{\frac{2}{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$ (10分)

五

(1) $|\lambda I - A| = (\lambda-2)^3$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ …(1分)

$$(A-2I) = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow x_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad x_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$[A-2I|x_2] \to \left[\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \Rightarrow y_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$ …(4分)

$$\Rightarrow J_A = \begin{bmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}$$

$$P=[x_1 \ x_2 \ y_2] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix} \quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$A = PJ_AP^{-1}$$ …(6分)

$$e^{At} = P\begin{bmatrix}e^{2t}&&\\&e^{2t}&te^{2t}\\&&e^{2t}\end{bmatrix}P^{-1}$$ …(8分)

$$= \begin{bmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^{2t}(1+t)&e^{2t}\overset{-t}{(2+t)}\\0&te^{2t}&e^{2t}(1-t)\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1+t&\overset{-t}{2+t}\\0&t&1-t\end{bmatrix}$$ …(10分)

(2) $X = e^{At}X_0 = \cancel{e^{At}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2t+3\\1\end{bmatrix}}$ …(12分)

$$= e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2t+3\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$ …(15分)

$\forall \alpha \in V_\lambda$, 证 $B\alpha \in V_\lambda$

六

(1) 设 A 的任一特征子空间为 $V_\lambda = \{\alpha \mid A\alpha = \lambda\alpha\}$ …(3分)

变换 $Y = BX$. $B\alpha$. $(\forall \alpha \in V_\lambda)$ …(4分)

$A(B\alpha) = BA\alpha = \lambda B\alpha \Rightarrow B\alpha \in V_\lambda$

$\Rightarrow$ V_λ 是 B 的不变子空间 …(7分)

要证 $\forall \alpha \in V_\lambda$

两者的 要证 $B\alpha \in V_\lambda$.

两者的

(2) 设 A 的奇异值分解为 $A = U\Sigma V^H$

$U \in C^{m\times m}$, $V \in C^{n\times n}$. $\Sigma = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$

$$AA^H = U\Sigma\Sigma^H U^H = U\begin{bmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H$$

$$AA^H + tI = U\left[\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{bmatrix}\right] U^H$$

$UU^H = U^HU = I$

$$= U\begin{bmatrix} t+\sigma_1^2 & & & & & \\ & t+\sigma_2^2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & t+\sigma_r^2 & & \\ & & & & t & \\ & & & & & \ddots \; t \end{bmatrix} U^H$$

$(U^H)^{-1} = U$ …(3分)

$(V^H)(\Sigma)^H \cdot U^H$.

$$(AA^H + tI)^{-1} = U\begin{bmatrix} \frac{1}{t+\sigma_1^2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{t+\sigma_r^2} & & \\ & & & \frac{1}{t} & \\ & & & & \ddots \; \frac{1}{t} \end{bmatrix} U^H$$

$V(\Sigma)^H U^H$

$$\therefore \lim_{t\to 0} A^H(AA^H+tI)^{-1} = \lim_{t\to 0} V\begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{t+\sigma_1^2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{\sigma_r}{t+\sigma_r^2} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix} U^H$$

$$= V\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix} U^H$$

$A\alpha = \lambda\alpha$

$$= V\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H = A^+$$ …(6分)

2013 矩阵论 答案

一、填空

1. $\|A\|_\infty = 4+\sqrt{13}$ $\quad \|A\|_1 = \cancel{\sqrt{2}+\sqrt{13}}\ 10+2\sqrt{13}+\sqrt{5}$

2. $(\lambda-\cos 1)^r(\lambda-1)^{n-r}$; $(\lambda-\cos 1)(\lambda-1)$ $r<n$

$(\lambda-\cos 1)$ $r=n$

3. $A^5=\begin{bmatrix}32 & 80 & 80\\ & 32 & 80\\ & & 32\end{bmatrix}$

(4) $L\{u\}$. $\quad L\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\}$

(5) 10 $\quad$ (6) $a\neq 1$

二、

(1) 选择自然基 $\{x^3, x^2, x, 1\}$. 坐标 ξ_i . $i=1,2,3,4$ …(2分)

$(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4)=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&1&1&-3\\2&2&-4&6\\3&3&-5&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&-1&3&-1\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ …(5分)

$\Rightarrow \dim W=3$.

$\{p_1\ p_2\ p_3\}$ 为基. …(8分)

共8分

(2) $[x_1\ x_2\ x_3\,|\,y]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&1&1&4\\2&2&-4&0\\3&3&-5&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$ …5分 $\begin{cases}过程\ 3分\\结果\ 2分\end{cases}$

$\Rightarrow$ 坐标 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ …(7分)

共7分

三. 解. ①. $T(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A$ 　　线性变换矩阵公式 —— 4分

设 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$ 　　过渡矩阵公式 —— 2分

由已知条件

$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ $\cancel{= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C}$

$T(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)C$
$= (\beta_1, \beta_2, \beta_3)A$

即 $A = C$ —————— 4分

—————— 2分

② 求过渡矩阵 C，即

$C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 　　7分

自然基.

$B = [\beta_1, \beta_2, \beta_3][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$A = C^{-1}BC$ 　　$C = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ —————— 2分

$$C = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$ —————— 1分

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $A=BC=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H=(A^HA)^{-1}A^H$

$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\end{bmatrix}$

四、（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$

（1）求矩阵 A 的奇异值分解. (10分)

（2）求矩阵 A 的 M-P 广义逆 A^+. (5分)

$A^+=V\begin{bmatrix}\Delta^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}U^H$ (13分)

$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ (15分)

解：$A^HA=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ —— (2分)

$|\lambda I-A^HA|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2-1=(\lambda-3)(\lambda-1)$

从小到大排列 −1

$\Rightarrow \lambda_1=3,\quad \lambda_2=1$

故 A 的奇异值为 $\sigma_1=\sqrt3$，$\sigma_2=1$，故 $\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt3&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ —— (4分)

由 $A=U\Sigma V^H$，$U\in C^{3\times3}$，$V\in C^{2\times2}$.

(1) $(\lambda_1 I-A^HA)X=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}X=0\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，故 $v_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

(2) $(\lambda_2 I-A^HA)X=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}X=0\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，故 $v_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

故 $V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$. —— (6分)

对于 U，设 $U=[u_1,u_2,u_3]$，则 $u_i=\frac{Av_i}{\|Av_i\|}$，$i=1:2$ (8分)

则 $u_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\sqrt{\frac{2}{3}}\end{bmatrix}$，$u_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}$.

设 $u_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 则 $\left.\begin{array}{l}(u_3,u_1)=0\Rightarrow x+y+2z=0\\(u_3,u_2)=0\Rightarrow x-y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}y=x\\z=-x\end{array}$

没单位化 (−2)

故 $u_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$，则 $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}\\\sqrt{\frac{2}{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$ (10分)

五

(1) $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^3$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ ···(1分)

$$(A-2I)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow X_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\quad X_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$[A-2I|X_2]\rightarrow\left[\begin{matrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right]\Rightarrow y_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$ ···(4分)

$$\Rightarrow J_A=\begin{bmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}$$

$$P=[X_1\ X_2\ y_2]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$A=PJ_AP^{-1}$$ ···(6分)

$$e^{At}=P\begin{bmatrix}e^{2t}&&\\&e^{2t}&te^{2t}\\&&e^{2t}\end{bmatrix}P^{-1}$$ ···(8分)

$$=\begin{bmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^{2t}(1+t)&e^{2t}(\overset{-t}{2+t})\\0&te^{2t}&e^{2t}(1-t)\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1+t&\overset{-t}{2+t}\\0&t&1-t\end{bmatrix}$$ ···(10分)

(2) $$X=e^{At}X_0=\cancel{e^{At}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2t+3\\1\end{bmatrix}}$$ ···(12分)

$$=e^{2t}\begin{bmatrix}1\\2t+3\\1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$ ···(15分)

$\forall \alpha \in V_\lambda$, 证 $B\alpha \in V_\lambda$

六

(1) 设A的任一特征子空间为 $V_\lambda = \{\alpha \mid A\alpha = \lambda\alpha\}$ …(3分)

变换 $Y = BX$. $B\alpha$. $(\forall \alpha \in V_\lambda)$ …(4分)

$A(B\alpha) = BA\alpha = \lambda B\alpha \Rightarrow B\alpha \in V_\lambda$

$\Rightarrow$ V_λ 是B的不变子空间 …(7分)

要先 $\forall \alpha \in V_\lambda$ 要证 $B\alpha \in V_\lambda$.

两者顺序

(2) 设A的奇异值分解为 $A = U\Sigma V^H$ 两者顺序

$U \in C^{m\times m}$. $V \in C^{n\times n}$. $\Sigma = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$

$$AA^H = U\Sigma\Sigma^H U^H = U\begin{bmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H$$

$$AA^H + tI = U\left[\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r^2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & & \\ & \ddots & \\ & & t \end{bmatrix}\right] U^H$$

$UU^H = U^H U = I$

$$= U\begin{bmatrix} t+\sigma_1^2 & & & & & \\ & t+\sigma_2^2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & t+\sigma_r^2 & & \\ & & & & t & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & t \end{bmatrix} U^H$$

$(U^H)^{-1} = U$ …(3分)

$(V^H)(\Sigma)^H \cdot U^H$.

$$(AA^H + tI)^{-1} = U\begin{bmatrix} \frac{1}{t+\sigma_1^2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{t+\sigma_r^2} & & \\ & & & \frac{1}{t} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{1}{t} \end{bmatrix} U^H$$

$V(\Sigma)^H U^H$

$$\therefore \lim_{t\to 0} A^H(AA^H + tI)^{-1} = \lim_{t\to 0} V\begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{t+\sigma_1^2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{\sigma_r}{t+\sigma_r^2} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} U^H$$

$$= V\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} U^H$$

$A\alpha = \lambda\alpha$

$$= V\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^H = A^+$$ …(6分)