矩阵论 2012 年试题

一、填空题：（每个空 3 分，共 27 分）

1、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 3i & 1-2i\\ 2 & 1-i & -3i\\ 1 & 0 & 1+i\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，则 $\|AX\|=$ ~~[illegible]~~ $5+2\sqrt{5}$

$\|A\|_1=\sqrt{5+3+\sqrt{2}}$

2、设矩阵 $A=P\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}$，则 $\dim N(A)=$ __1__，$m_A(\lambda)=$ $\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$ rank $A=2$

3、矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & a & a\\ a & 0 & a\\ a & a & 0\end{bmatrix}$，则 a 满足条件 $|a|<\frac{1}{2}$ 时，矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛。 $-a, -a, 2a$

4、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 2 & \\ 2 & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ & -1 & 2\\ & & 2\end{bmatrix}$，则 A 的 LDV 分解为 = $\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & -2 & \\ & & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ & 1 & -2\\ & & 1\end{bmatrix}$

5、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{bmatrix}$，$\sin(A)$ 的 Jordan 矩阵 $J_{\sin(A)}=\begin{bmatrix}\sin 1 & & \\ & \sin\frac{1}{2} & \\ & & \sin\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$\lim_{n\to\infty}\sin(A^n)=\begin{bmatrix}\sin 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

6、设 $A=\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，则矩阵方程 $AX+XB=0$ 有非零解的条件是 [illegible]

$a, 2$　　$3, 1$

二、（15 分）设线性空间 R^3 上的线性变换 T 在基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 下的变换矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},$$

$(e_1, 3e_2, e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

令 $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　$C^{-1}=$ [illegible]

（1）求变换 T 在基 $\{e_1,3e_2,e_3\}$ 下的变换矩阵。

（2）求变换 T 在基 $\{e_1,e_1+e_2,e_3\}$ 下的变换矩阵。

三、（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

（1）求矩阵 A 的奇异值分解.

（2）求矩阵 A 的 $(M-P)^{-}$ 义逆 A^{+}.

四、（15 分）设 $W=L\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$ 是空间 R^3 的子空间.

（1）求空间 R^3 上的正交投影变换 P，使得 P 的象空间 $R(P)=W$.

（2）求空间 R^3 的向量 $\alpha=[1,2,3]^T$ 在投影变换 P 下的象.

五、（15 分）设 $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$，计算矩阵函数 e^{At}.

六、证明题.

（1）（7 分）设 A 是可逆矩阵，σ_n 是矩阵 A 的最小奇异值，证明

$$\|A^{-1}\|_2=\frac{1}{\sigma_n}$$

（2）（6 分）设矩阵 A 和 B 都是 n 阶方正，证明 $rank(A\otimes B)=rank(A)\cdot rank(B)$