

矩阵论试卷2015.doc [兼容模式] - Microsoft Word

页面布局 引用 邮件 审阅 视图

开始 选择 编辑 突出显示 地址块 问题通告 插入 规则 匹配域 预览结果 查找收件人 自动检查错误 预览结果

邮件合并 · 收件人 · 收件人列表 合并域 合并域 · 更新标签 编写和插入域

开始邮件合并

学号 _____ 姓名 _____ 院系 _____

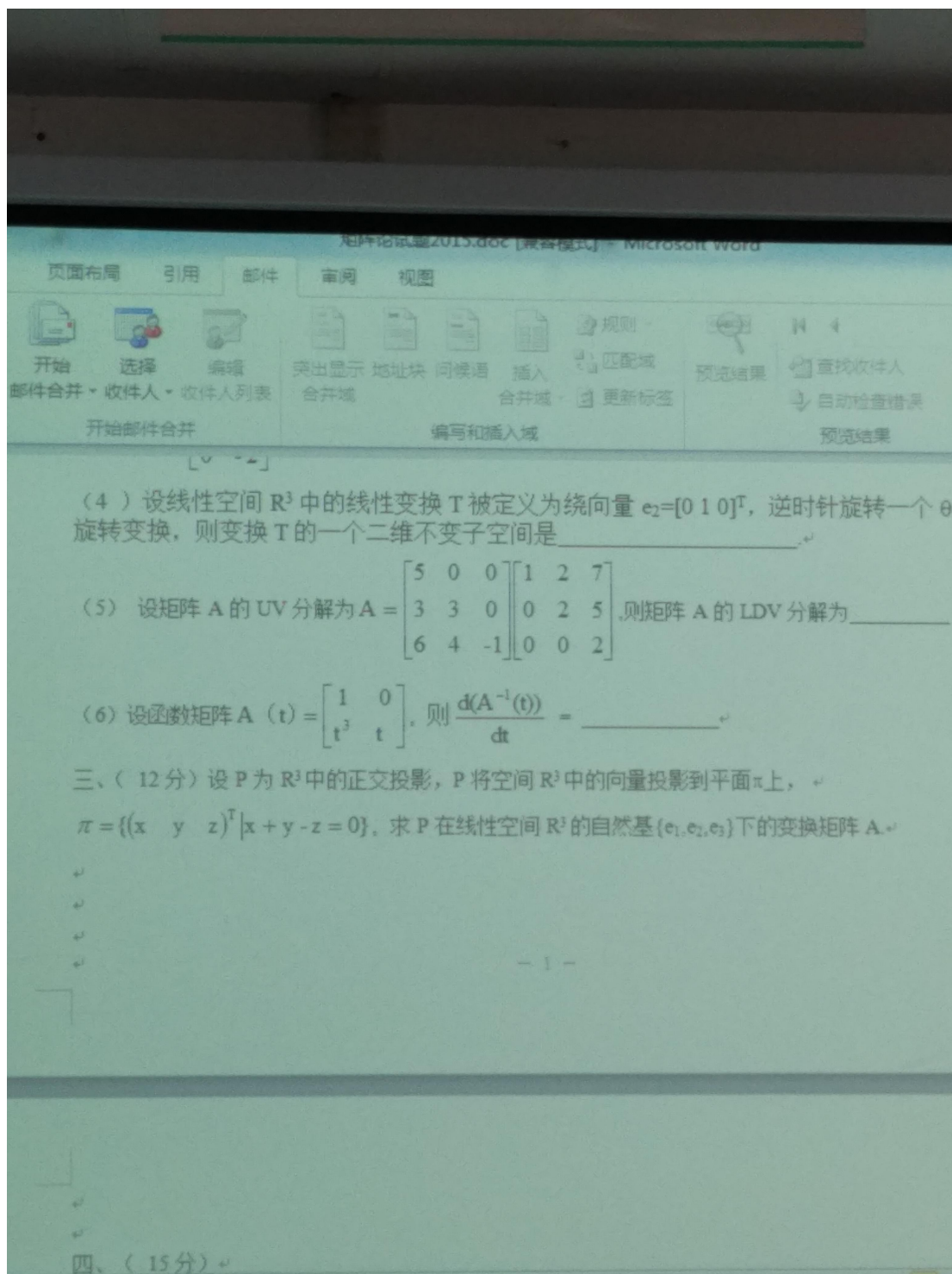
考试日期 2015 年 12 月 5 日

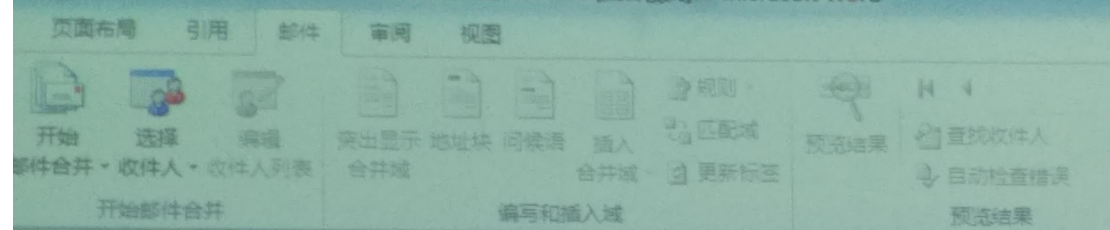
一、判断题：(2×6=12分)

- (1) 线性空间 R^3 中的正交投影是正交变换。
- (2) 如果 $g(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)^2$ 是矩阵 A 的化零多项式，即 $g(A)=0$ ，则 2 和 5 是矩阵 A 的特征值。
- (3) 设 A 为 n 阶方阵，矩阵函数 $f(A)$ 有意义，如果 A 相似于对角矩阵，则 $f(A)$ 也相似于对角矩阵。
- (4) 如果矩阵运算 $A \otimes B = 0$ ，则矩阵 $A=0$ 或者 $B=0$ 。
- (5) 如果矩阵 A 既有左逆又有右逆，则矩阵 A 一定是方阵，且为可逆矩阵。
- (6) 对于矩阵 A 和矩阵 A^* 的秩，有 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^*)$ 。

二、填空题：(每个空 3 分，共 27 分)(答案请填写在每题横线标定的位置上)

- (1) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 3 \\ 2 & 3-i & -2 \\ 1 & -2 & 2-3i \end{bmatrix}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，则 $\|A\|_\infty =$ _____。
- (2) 线性空间 $W = \{A \in R^{4 \times 4} | A^T = A\}$ 的维数， $\dim W =$ _____。
- (3) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ，矩阵 B 的特征值为 2, 3, 4，则矩阵 $A \otimes B$ 的特征值为 _____。
- (4) 设线性空间 R^3 中的线性变换 T 被定义为绕向量 $e_3 = [0 \ 1 \ 0]^T$ ，逆时针旋转一个 θ 的旋转变换，则变换 T 的一个二维不变子空间是 _____。
- (5) 设矩阵 A 的 UV 分解为 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ，则矩阵 A 的 LDV 分解为 _____。





四、(15分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

- (1) 求可逆矩阵 P 和矩阵 A 的 Jordan 矩阵 J_A , 使得 $P^{-1}AP = J_A$,
- (2) 设参数 $t \neq 0$, 求矩阵函数 e^{At} 和矩阵 e^{At} 的 Jordan 矩阵 $J_{e^{At}}$.

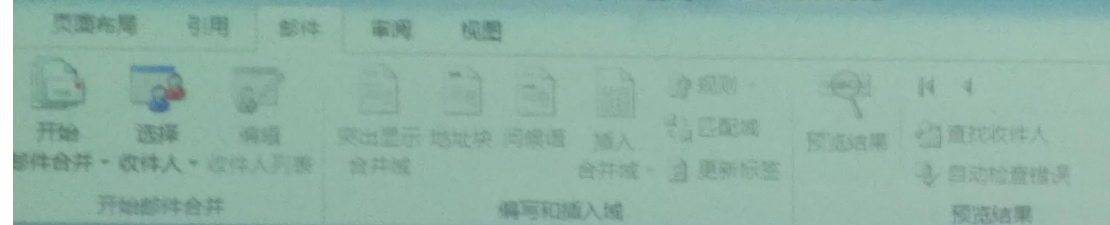
五、(15分) 设矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

- (1) 求矩阵 A 的奇异值分解,
- (2) 求 A^+ .

六、(15分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & t \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, 矩阵方程为 $AX + XB = D$,

- (1) 讨论 t 为何值, 矩阵方程有唯一解,
- (2) 在矩阵方程有唯一解时, 求解其中的未知矩阵 X .



五、(15分) 设矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

(1) 求矩阵 A 的奇异值分解。

(2) 求 A^{-1} 。

六、(15分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & t \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, 矩阵方程为 $AX + XB = D$,

(1) 讨论 t 为何值, 矩阵方程有唯一解。

(2) 在矩阵方程有唯一解时, 求解其中的未知矩阵 X 。

七、证明题 (6分+7分=13分)

(1) 如果矩阵 A 是正规矩阵, 且矩阵函数 $f(A)$ 有意义, 证明 $f(A)$ 也是正规矩阵. (6分)

(2) (7分) 假设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是可逆的, 证明:

$$\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$

其中 σ_{\max} , σ_{\min} 分别为 A 的最大和最小的奇异值。