三、（12 分）设线性空间 R^4 上的线性变换 T 在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$下的变换矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} & & & k_1 \\ & & k_2 & \\ & k_3 & & \\ k_4 & & & \end{bmatrix},$$

$L(e_1,e_4)$
$L(e_2,e_3)$

（1）求变换 T 的不变子空间，

（2）将空间 R^4 表示为 T 的不变子空间的直和.

$V_4(R)=L(e_1,e_4)\oplus L(e_2,e_3)$

四、（15 分）多项式空间 $P_5(x)=\left\{\sum_{k=0}^{4}a_kx^k \middle| a_k\in R\right\}$的一组基 $\{f_0(x), f_1(x)\ldots, f_4(x)\}$ 定义如下:

$$f_0(x)=1,\quad f_1(x)=x,\quad f_{k+1}(x)=2x\,f_k(x)-f_{k-1}(x),\quad k=1,2,3.$$

（1）求空间的自然基$\{1, x, x^2,\ldots x^4\}$到基 $\{f_0(x), f_1(x)\ldots, f_4(x)\}$ 的过渡矩阵;

（2）求多项式 $g(x)=1+x^2+2x^3$ 在基$\{f_0(x), f_1(x)\ldots, f_4(x)\}$下的坐标.

五、（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,

$A=V\Sigma V^H$

（1）求矩阵 A 的奇异值分解，

（2）求矩阵 A 的 M-P 广义逆 A^+.

六、（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$x_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

（1）求矩阵函数 e^{At};

（2）求解常系数线性微分方程组: $\dfrac{dX(t)}{dt}=AX(t),\quad X(0)=x_0$.

七、证明题（6 分+7 分= 13 分）

（1）设矩阵 $A\in C^{m\times k}\ (m>k)$,证明如果矩阵 A 的列向量是标准正交的向量组,则矩阵(AA^H)是 C^m 中的正交投影矩阵.

（2）设矩阵 $A\in C^{n\times n}$，σ_i 是矩阵 A 的奇异值，$i=1,2,\ldots,r$，R_i是矩阵 A 的第 i 行β_i的二范数值，即 $R_i=\left\|\beta_i^T\right\|_2$，证明:

$$\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2=\sum_{i=1}^{n}R_i^2.$$

A^HA

华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵论　　　　课程类别 ☑公共课 □专业课　　考核形式 □开卷 ☑闭卷

学号 M201673533　　姓名 [illegible]　　院系 [illegible]

考试日期 2016年12月22日

一、判断题：（2×6=12分）

（1）在线性空间 $R^{n\times n}$ 中定义 $T(A)=A^T$，其中 A^T 为矩阵 A 的转置，则 T 为空间 $R^{n\times n}$ 中的线性变换. ✓

（2）设 u 是内积空间 $[V_n(F);(\alpha,\beta)]$ 中的向量，如果 u 与空间中的任何向量均正交，则 u 是零向量.

（3）如果对于任何的向量 $b\in R^m$，线性方程组 $A_{m\times n}X=b$ 都相容，则矩阵 A 有右逆. ✓

（4）矩阵 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\begin{bmatrix}-\lambda_1 & \\ & -\lambda_2\end{bmatrix}$ 是相似的. ×

（5）R^n 中任何投影变换的变换矩阵都是正规矩阵. ×

（6）设 A 为 n 阶方阵，则任何有意义的矩阵函数 $f(A)$ 都可以表示为一个次数不超过 $n-1$ 次的矩阵多项式. ✓

二、填空题：（每个空3分，共18分）

（1）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1+i & i & 2\\ -1 & 3 & -i\\ i & 2 & 3\end{bmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，则 $\|A\|_\infty=$ ______. 6

（2）设 $R^{2\times 3}$ 的子空间 $W=\left\{\begin{bmatrix}0 & y & z\\ x & 0 & 0\end{bmatrix} \middle|\ x+y=z\right\}$，则空间 W 的一组基为: ____________.

（3）设 n 阶方阵 $A\neq I$，且 $A^2+A=2I$，则矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)=$ 2 .

（4）设 $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & -2\end{bmatrix}$，3 阶方阵 B 的特征值为 1,2,4，则矩阵 $A\otimes B$ 的行列式为 ________.

（5）设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，则 $A^{20}=$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^{20} & -20\times 2^{19}\\ 0 & 0 & 2^{20}\end{pmatrix}$

（6）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1/5 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 2/3\end{bmatrix}$，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^K=$ $\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

$\rho<1$ 收敛