

# 华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称: \_\_\_\_\_ 矩阵论 \_\_\_\_\_ 课程类别 ☒ 公共课 ☐ 专业课 考核形式 ☐ 开卷 ☒ 闭卷

学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 院系 \_\_\_\_\_

考试日期 \_\_\_\_\_

## 一、判断题: (2×6=12 分)

- (1) 线性空间  $\mathbb{R}^3$  中的正交投影是正交变换。
- (2) 如果  $g(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-5)^2$  是矩阵  $A$  的化零多项式, 即  $g(A)=0$ , 则 2 和 5 是矩阵  $A$  的特征值.
- (3) 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 矩阵函数  $f(A)$  有意义, 如果  $A$  相似于对角矩阵, 则  $f(A)$  也相似于对角矩阵.
- (4) 如果矩阵运算  $A \otimes B = 0$ , 则矩阵  $A=0$  或者  $B=0$
- (5) 如果矩阵  $A$  既有左逆又有右逆, 则矩阵  $A$  一定是方阵, 且为可逆矩阵.
- (6) 对于矩阵  $A$  和矩阵  $A^+$  的秩, 有  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^+)$

## 二、填空题: (每个空 3 分, 共 27 分) (答案请填在每题横线标定的位置上)

- (1) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 3 \\ 2 & 3-i & -2 \\ 1 & -2 & 2-3i \end{bmatrix}$ , 其中  $i = \sqrt{-1}$ , 则  $\|A\|_\infty =$  \_\_\_\_\_.
- (2) 线性空间  $W = \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid A^T = A\}$  的维数,  $\dim W =$  \_\_\_\_\_.
- (3) 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ , 矩阵  $B$  的特征值为 2, 3, 4, 则矩阵  $A \otimes B$  的特征值为 \_\_\_\_\_.
- (4) 设线性空间  $\mathbb{R}^3$  中的线性变换  $T$  被定义为绕向量  $e_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$ , 逆时针旋转一个  $\theta$  角的旋转变换, 则变换  $T$  的一个二维不变子空间是 \_\_\_\_\_.
- (5) 设矩阵  $A$  的 UV 分解为  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , 则矩阵  $A$  的 LDV 分解为 \_\_\_\_\_.
- (6) 设函数矩阵  $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t^3 & t \end{bmatrix}$ , 则  $\frac{d(A^{-1}(t))}{dt} =$  \_\_\_\_\_.

三、(12 分) 设  $P$  为  $\mathbb{R}^3$  中的正交投影,  $P$  将空间  $\mathbb{R}^3$  中的向量投影到平面  $\pi$  上,

$\pi = \{(x \ y \ z)^T \mid x + y - z = 0\}$ , 求  $P$  在线性空间  $\mathbb{R}^3$  的自然基  $\{e_1, e_2, e_3\}$  下的变换矩阵  $A$ .

四、(15 分)

设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

(1) 求可逆矩阵  $P$  和矩阵  $A$  的 Jordan 矩阵  $J_A$ , 使得  $P^{-1}AP = J_A$ ,

(2) 设参数  $t \neq 0$ , 求矩阵函数  $e^{At}$  和矩阵  $e^{At}$  的 Jordan 矩阵  $J_{e^{At}}$ .

五、(15 分) 设矩阵  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,

(1) 求矩阵  $A$  的奇异值分解

(2) 求  $A^+$

六、(15 分)

设矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ , 矩阵方程为  $AX + XB = D$ ,

(1) 讨论  $t$  为何值, 矩阵方程有唯一解.

(2) 在矩阵方程有唯一解时, 求解其中的未知矩阵  $X$ .

七、证明题 (6 分+7 分=13 分)

(1) 假设  $A \in C^{n \times n}$  并且  $A^2 = -A$ , 证明  $C^n = R(A) \oplus N(A)$ , 其中  $R(A)$  和  $N(A)$  分别是矩阵  $A$  的列空间和零空间 (6 分)

(2) 如果矩阵  $A$  是正规矩阵, 且矩阵函数  $f(A)$  有意义, 证明  $f(A)$  也是正规矩阵. (6 分)

(3)

(4) (7 分) 假设  $A \in C^{n \times n}$  是可逆的, 证明:

$$\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$

其中  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  分别为  $A$  的最大和最小的奇异值.



三、(15 分)

设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ , 求矩阵 A 的 Jordan 标准型  $J_A$  和可逆矩阵 P, 使得  $P^{-1}AP = J_A$ .

四、(15 分) 设线性方程组  $AX=b$  表示如下:

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

- (1) 求  $A$  的满秩分解;
- (2) 计算  $A^+$
- (3) 求该方程组的最佳最小二乘解。

五、(15 分) 设非零列向量  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $A = \alpha\beta^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\text{tr}(A)$  表示矩阵  $A$  的迹

(1) 求矩阵  $A$  的特征值.

(2) 证明  $A$  的最小多项式是  $m(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda$

(3) 写出矩阵  $A$  的 Jordan 标准型.

六、证明题：（共 13 分:第 1 题 5 分,第 2 题 8 分）

(1) 设  $A$  是  $n$  阶方阵,  $\rho(A)$  是矩阵  $A$  的谱半径, 证明: 如果  $\rho(A) < 1$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ .

(2) 设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $B$  为  $n \times k$  阶矩阵,  $R(A)$  和  $R(AB)$  分别表示矩阵  $A$  和矩阵  $AB$  的列空间, 证明  $R(A) = R(AB)$  的充分必要条件是存在  $k \times n$  阶矩阵  $C$ , 使得  $ABC = A$ 。

# 华中科技大学研究生课程考试草稿纸

课程名称: 矩阵论 课程类别 ☒公共课 ☐专业课 考核形式 ☐开卷 ☒闭卷

学生类别            考试日期 2014.12.18 学生所在院系           

学号                                  姓名



# 华中科技大学研究生课程考试答题纸

课程名称: 矩阵论      课程类别 ☒公共课      考核形式 ☐开卷  
☐专业课      ☒闭卷

学生类别 硕士 考试日期 2014.12.18 学生所在院系                     

学号\_\_\_\_\_姓名\_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

题号	答 题 部 分	得分

# 华中科技大学研究生课程考试答题纸

题号	答 题 部 分	得分

华中科技大学研究生课程考试答题纸

题号	答 题 部 分	得分
----	---------	----

--	--	--

华中科技大学研究生课程考试答题纸

题号	答    题    部    分	得分

--	--	--

华中科技大学研究生课程考试答题纸

题号	答    题    部    分	得分

--	--	--

华中科技大学研究生课程考试答题纸

题号	答 题 部 分	得分

--	--	--

**华中科技大学研究生课程考试草稿纸**