华中科技大学研究生课程考试试卷

课程名称：矩阵论 课程类别 ☑公 ☐专 ☐开卷 ☐闭卷

考核形式

学 号 ________ 姓 名 ________

院系 ________

考试日期：2017 年 12 月 21 日

一、判断题：（2×6=12 分）（答案请在答题卡上填涂）

(1) 若线性空间 $V_n(F)$的基$\{\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n\}$在线性变换 T 下的象线性无关,则 T 为可逆变换.

(2) 设 W 是线性变换 T 的不变子空间，且 $W\neq\{0\}$,则 W 中一定包含有 T 的特征子空间.

(3) 设矩阵 A 的 Jordan 矩阵为 J_A,如果矩阵函数 $f(A)$有意义,则 $f(J_A)$是 $f(A)$的 Jordan 矩阵.

(4) 如果矩阵 A 存在 LU 分解，则矩阵 A 一定有 LDV 分解.

(5) 设矩阵 A 的特征值都是实数，如果 A 为正规矩阵，则 A 一定是 Hermite 矩阵.

(6) 对于任何方阵 A 和 B，性质 $e^Ae^B=e^{A+B}$ 都成立.

二、填空题：（3×6=18 分）（答案请写在答题卡指定的位置上）

(1) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1+2i & 2i & 2\\ -1 & 4 & -i\\ 1-i & 2 & 1\end{bmatrix}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，则 $\|A\|_1=$______.

(2) 设线性空间 $V_3(F)$上线性变换 T 在基$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$下的变换矩阵为 A，且向量 $\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$是矩阵 A 关于特征值λ的一个特征向量,则变换 T 的关于λ的一个特征向量是________.

(3) 设内积空间 R^3 上的正交投影定义为 $P(\alpha)=\alpha-(\alpha,u)u$，其中 $u=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 则 $P(\alpha)$的象空间为____________.

(4) 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$，则矩阵 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)=$____________.

(5) 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，则 $\cos(A)$ ____________.

(6) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 0\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$，则矩阵 $2A^2\otimes B$ 的特

征值为________.

三、(12分) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵函数 e^{At}.

四、(15分) 设线性空间 $R^{2\times 2}$ 上线性变换 T 被定义为：$\forall A\in R^{2\times 2}$，$TA=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}A$.

(1) 求变换 T 在基 $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ 下的变换矩阵.

(2) 求变换 T 的特征值和特征子空间,并且求 $R^{2\times 2}$ 的一组基,使得变换 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

五、(15分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

(1) 求矩阵 A 的奇异值分解.

(2) 已知矩阵 B 的奇异值分解为 $B=U_2\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}V_2^H$，给出 $A\otimes B$ 的奇异值分解.

六、(15分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，

给定矩阵方程 $AXB=C$.

(1) 证明该方程无解.

(2) 求方程的最佳最小二乘解矩阵 X.

七、(6分)设 $P\in C^{n\times n}$ 为正交投影矩阵, $\|\cdot\|_2$ 为向量的二范数, 证明: 对于任何向量 $X\in C^n$,有 $\|PX\|_2 \le \|X\|_2$.

八、(7分)证明n阶方阵 A 关于特征值 λ 的 Jordan 链条 $\{x_1,y_2,y_3,y_4\}$ 是线性无关的向量组.链条中打头的 x_1 是矩阵 A 关于 λ 的特征向量.