05 年期末考试试题及参考答案

一、填空题（第小题 4 分，共 32 分）

1. 函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 __.[求最值]

$f'(x)=1-2\sin x=0 \ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{6}$ $f''(x)=-2\cos x$ $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$ $\therefore$ $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 取得极 (最) 大值 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

2. 若 $f(x)$ 为可导的偶函数且 $f'(-x)=-k$, 则 $f'(x)=$__.[原函数与导函数的奇偶性关系]

$f(x)$ 为偶函数,则其导函数为奇函数. 从而 $-f'(x)=f'(-x)=-k \ \Rightarrow\ f'(x)=k$.

3. 设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$, 则 $f^{(100)}(0)=$__.[高阶导数 Newton-Leibniz 公式]

$f^{(100)}(x)=C_{100}^0x^2(\ln x)^{(100)}+C_{100}^1(x^2)'(\ln x)^{(99)}+C_{100}^2(x^2)''(\ln x)^{(98)}$

$=(-1)99!x^2(1+x)^{-100}+100\cdot 2x\cdot 98!(1+x)^{-99}+\frac{100\times 99}{2}\cdot 2\cdot(-1)97!(1+x)^{-98}$

$f^{(100)}(0)=-\frac{100!}{98}$.

4. 在区间 $[a,b]$ 上对函数 $f(x)=px^2+qx+r$ 应用 Lagrange 中值定理所得的点 $\xi=$__.[Lagrange 中值定理]

$f(a)=pa^2+qa+r, f(b)=pb^2+qb+r, f'(x)=2px+q$. 由 Lagrange 中值定理，$2p\xi+q=\frac{p(a^2-b^2)+q(a-b)}{a-b}=p(a+b)+q$, $\xi=\frac{a+b}{2}$.

5. 设 $f'(0)=1,\alpha,\beta$ 为常数且不为零，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}=$__. [导函数的定义]

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\alpha x)-f(0)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\beta x)-f(0)}{x}=\alpha-\beta$.

6. 已知 e^{-x} 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int x^2f(\ln x)\mathrm{d}x=$__.[不定积分]

由 e^{-x} 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，知 $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{-x}+C$. $f(x)=-e^{-x}$.

$\int x^2f(\ln x)\mathrm{d}x=-\int x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2+C$.

7. 设函数 $f(x)=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)\right]=$ __.[数列极限]

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left(a^1\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^n\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a$.

8. 曲线 $y=3x+\frac{\ln x}{2x}+1$ 的斜渐近线方程为 __.[渐近线]

$\lim\limits_{x\to\infty}y/x=3, \lim\limits_{x\to\infty}(y-3x)=1$ $\therefore$ 斜渐近线为 $y=3x+1$.

二、计算题（每小题 6 分，共 36 分）

9. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.[洛必达法则]

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln\left(1+t\right)\right]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=$

$\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1^x+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}=3\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1^x+2^x}{3^x}\right]^{\frac{1}{x}}=3$[幂指函数的极限]

11. 设 $f(x)=e^{\sin\pi x}$, 求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}$.[导数的定义，复合函数求导或洛必达法则]

解法 1 $f'(x)=e^{\sin\pi x}\cos\pi x\cdot\pi,\ f'(1)=-\pi.$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=-\lim\limits_{x\to1}\frac{f(1)-f(2-x)}{x-1}=-f'(1)=\pi.$

解法 2 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{\sin\pi(2-x)}-e^{\sin\pi}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{\sin(-\pi x)}-1}{x-1}=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^{-\sin(t+1)\pi}-1}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^{\sin\pi t}-1}{t}=\lim\limits_{t\to0}e^{\sin\pi t}\cdot\cos\pi t\cdot\pi=\pi$

12. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x(1+2t)^{\frac{x}{t}}$, 求 $f'(1)$.[幂指函数的极限]

(1) $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x(1+2t)^{\frac{x}{t}}=xe^{x\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\ln(1+2t)}{t}}=xe^{x\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2}{1+2t}}=x.\ \therefore\ f'(1)=1$

(2) $f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1+2t)^{\frac{x}{t}}=xe^{2x},\ f'(x)=e^{2x}(1+2x).\ f'(1)=3e^2.$

13. 已知 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\ln x+C$, 求 $\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$.[求不定积分]

$xf(x)=\frac{1}{x},f(x)=\frac{1}{x^2}.\ \int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C.$

14. 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{1+2^x}\mathrm{d}x$.[对称区间上的积分]

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{1+2^x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2x}{1+2^x}+\frac{\cos^2x}{1+2^{-x}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$

三、综合题（ 12 分） [边际及弹性]

15. 设某商品需求函数为 $Q=Q(p)=75-p^2$, 求

(1) 当 $p=6$ 时的边际需求、弹性需求；

(2) 当 $p=6$ 时，若价格上涨 1%, 总收益将变化多少？是增加不是减少？

(1) $Q'=-2p\ Q'(6)=-12.$

$\frac{EQ}{EP}=-Q'\cdot\frac{P}{Q}=p\cdot\frac{p}{75-p^2}=\frac{2p^2}{75-p^2}.\ \left.\frac{EQ}{EP}\right|_{p=6}=\frac{24}{13}\approx1.85$

(2) $R=pQ=75p-p^3,\ \frac{ER}{EP}=(75-3p^2)\cdot\frac{p}{75p-p^3}=\frac{75-3p^2}{75-p^2}.\ \left.\frac{ER}{EP}\right|_{p=6}=-\frac{11}{13}\approx-0.85$

所以，若价格上涨 1%, 则总收益下降 0.85%.

四、应用题（ 12 分） [利润最大化问题]

16. 某商店以每条 100 元的进价购进一批牛仔裤. 设此种商品的需求函数为 $Q=400-2p$（其中 Q 为需求量，单位为条； p 为销售价格，单位为元）. 问应将售价定为多少，才可获得最大利润？最大利润是多少？

$R=pQ=400p-2p^2,L=R-C=400p-2p^2-100(400-2p)=-2p^2+600p-40000.\ L'=-4p+600=0\ \Rightarrow\ p=150.L''=-4<0.\therefore L(150)=5000$ 为最大利润，售价为 150.

五、证明题 (8 分)

17. 当 $0 < x < 2$ 时，证明不等式 $4x\ln x \geq x^2+2x-3$.[极 (最) 值点的判定及不等式的证明]

证 令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$. $f'(x)=4\ln x-2x+2=0 \Rightarrow x=1$
$f''(x)=-\frac{4}{x}-2$, $f''(1)>0$. 所以 $x=1$ 为 $x\in(0,2)$ 的极小 (最小) 值点. 从而， $f(x)\geq f(1)=0$. 得证.