2006–2007 学年第一学期
《高等数学》（上）期末试题
(文A1, 2007.1)

一、计算下列各题(每题 5 分, 共 30 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$; 4. 求 $y=2\sqrt{x}\sin x-\cos x\ln x$ 的导数; 5. $\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$; 6. $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\left|\frac{\ln x}{x}\right|\mathrm{d}x$.

解 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}=\mathrm{e}^2$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x\cos 2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos^2 2x+2\sin^2 2x}{12x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8\sin 4x}{24x}=\frac{4}{3}$;

4. $y'=(2\sqrt{x}\sin x-\cos x\ln x)'=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\cos x+\sin x\ln x-\frac{\cos x}{x}$;

5. $\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(x-1)+1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}(x-1)=\int\left(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+2(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$;

6. $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}\left|\frac{\ln x}{x}\right|\mathrm{d}x=-\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}=\frac{1}{2}(1+1)=1$.

二、解答下列各题(每题8分, 共40分)

1. 若 $f(x)$, $x\in(-2,2)$ 是奇函数, 当 $0<x<2$ 时 $f(x)=\frac{\sin\frac{x-1}{2}\pi}{x-1}$, $f(0)=0$, 求 $f(x)$ 的间断点及其类型.

解 当 $0<x<2$ 时, $x=1$为间断点. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\frac{x-1}{2}\pi}{x-1}=\frac{\pi}{2}$. 从而 $x=1$ 为可去间断点. 当 $-2<x<0$ 时, $f(x)=-\frac{\sin\frac{x+1}{2}\pi}{x+1}$. 由函数奇偶性, 可知 $x=-1$ 也是函数 $f(x)$ 的可去间断点. 再由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$ 知, $x=0$为跳跃间断点.

2. 求曲线 $\mathrm{e}^x+xy-\mathrm{e}^y=1$ 在点 $(1,1)$ 的切线与法线方程.

解 等式两边分别对 x 求导得

$$\mathrm{e}^x + y + xy' - \mathrm{e}^y y' = 0$$
$$y' = \frac{\mathrm{e}^x + y}{\mathrm{e}^y - x}.$$

由 $x = 1$ 时 $y = 1$得 $y'(1) = \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}$. 从而, 切线方程为 $y - 1 = \frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}(x-1)$ (或 $(\mathrm{e}+1)x - (\mathrm{e}-1)y - 2 = 0$), 法线方程为 $y - 1 = -\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}(x-1)$ (或 $(\mathrm{e}-1)x + (\mathrm{e}+1)y - 2\mathrm{e} = 0$).

3. 求 $y = \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \sin 1$ 的导数与微分.

解 导数为 $y' = \left[\sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \sin 1\right]' = \frac{x\arctan x + 1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$, 微分为 $\mathrm{d}y = \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

4. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan x^2$, 已知 $f(1) = 1$, 求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解 令$u = 2x - t, dt = -du, t = 2x - u$. 则 $\int_0^x tf(2x-t)dt = -\int_{2x}^x (2x-u)f(u)du = 2x\int_x^{2x} f(u)du - \int_x^{2x} uf(u)du$. 从而 $\left(\int_0^x tf(2x-t)dt\right)' = 2\int_x^{2x} f(u)du + 2x\cdot 2f(2x) - 2xf(x) - 4xf(2x) + xf(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^4}$. 即 $2\int_x^{2x} f(u)du - xf(x) = \frac{x}{1+x^4}$, 令$x = 1$, 有 $2\int_1^2 f(u)du - f(1) = \frac{1}{2}$. 所以, $\int_1^2 f(u)du = \frac{3}{4}$.

5. 求常数 a, b 及 c, 使其满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(bx+\sin x)}\int_c^x \frac{t^2}{a+t}\mathrm{d}t = 1$.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}[2(bx+\sin x)] = 0$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(bx+\sin x)}\int_c^x \frac{t^2}{a+t}\mathrm{d}t = 1$知, $\lim\limits_{x\to 0}\int_c^x \frac{t^2}{a+t}\mathrm{d}t = 0$. 于是 $c = 0$. 再由 $1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{a+t}\mathrm{d}t}{2(bx+\sin x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{a+x}}{2(b+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2(a+x)(b+\cos x)}$知, $\lim\limits_{x\to 0}2(a+x)(b+\cos x) = 0$. 若 $a = 0$, 则 $1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2(b+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{-2\sin x}$. 这显然不可能. 所以必有 $a \neq 0$. 从而, 有 $\lim\limits_{x\to 0}2a(b+\cos x) = 0$. 所以有 $1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2a(b+\cos x)} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{a\sin x} = -\frac{1}{a}$. 即 $a = -1$. 再由 $\lim\limits_{x\to 0}2a(b+\cos x) = 0$ 知, $b = -1$.

三、证明（8分）：设 $\mathrm{e} < a < b < \mathrm{e}^2$, 证明：$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

证 令 $f(x) = \ln^2 x$. 则 $f'(x) = 2\frac{\ln x}{x}$. 由 Lagrange 中值定理有, $\exists\xi \in (a,b)$ 使 $\ln^2 b - \ln^2 a = 2\frac{\ln\xi}{\xi}(b-a)$. 又 $f''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2}$. 再由 $\mathrm{e} < a < b < \mathrm{e}^2$知, $f''(x) < 0$. 从而 $f'(x)$ 在 (a,b) 内单调递减. 因此, $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

四、（10分）某商品的进价为 a（元/件），根据以往的经验，当销售价为

b (元/件)时，需求量为 c 件. 市场调查表明, 销售价(相对于 b)每下降 10%, 需求量(相对于 c)可增加 40%. 现决定一次性降价.

① 求需求弹性;

② 若 $a=100$, $b=400$, $c=1000$, 当销售价定为多少时, 可获取最大利润? 最大利润为多少?

解 设售价为 x 元 ($x \geq a$). 则此时的需求量 $Q(x)=\left[1+\frac{4(b-x)}{b}\right]c$.

① 需求弹性为 $\eta=-Q'\frac{x}{Q}=\frac{4x}{5b-4x}$.

② 利润为 $L(x)=(x-a)Q=c(x-a)\left[1+\frac{4(b-x)}{b}\right]$. $L'(x)=\frac{c}{b}(5b+4a-8x)$. 令 $L'(x)=0$ 得, $x=\frac{4a+5b}{8}$. 将 $a=100$, $b=400$, $c=1000$ 代入得 $x=300$ (元). 而此时的最大利润为 $L(300)=400000$ (元).

五、(12分) 若曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围封闭平面图形为 I: ① 求 I 的面积; ② 求 I 绕 x 轴旋转一周而成的立体的体积.

解 求解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases}$ 得交点为 $O(0,0)$, $P(1,1)$.

① 求 I 的面积为 $\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$.

② 旋转体的体积为 $\pi\int_0^1(x-x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{10}\pi$.