2004～2005 学年第一学期《高等数学》期末考试试题 B 卷（180 学时）

专业班级____________________学号_________________ 姓名__________

一、填空题（每小题 5 分，共 6 小题）：

1、 $f(x)=\arctan(\frac{\sin 2x}{3x})\ \ (x\neq 0)$, 为使$f(x)$在$x=0$处连续，须定义$f(0)$= ______.

2、 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ =________.

3、设 $y=\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}$，则 dy =______ .

4、若 $f(x)$ 在 x =0 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ =1，则 $f(0)=$________. $f'(0)=$_______ .

5、抛物线 $y=3-x^2$ 与直线 $y=2x$ 所围图形的面积 $S=$_____ .

6、函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$ ， 则 $f'(0)=$_______ .

二、计算题（每题 6 分，共 5 题）：

1、计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

2、计算定积分$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

3、计算不定积分$\int x^2\ln(x+1)dx$.

4、求函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 的图形的凸、凹区间与拐点.

5、设 $f(x)$在$[a,\ b]$上连续，且$F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt$，$x\in[a,\ b]$，求 $F''(x)$.

三、解答题和证明题（每题 8 分，共 5 题）：

1、当$0<x<y<\frac{\pi}{2}$时，证明:

$$(y-x)\cos^2 y<(\tan y-\tan x)\cos^2 x\cos^2 y<(y-x)\cos^2 x.$$

1、 试求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2nx^{2n-1}}{(2n-1)}$的收敛域及和函数.

3、当 $x \to 0^+$ 时，试比较无穷小量 α 、 β 和 γ 三者之间的阶。其中 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$ 、

$\beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\, dt$ 、 $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$.

4、 函数 $f(x)$ 在（ $-\infty, +\infty$ ）上有定义，在区间 $[0, 2]$ 上， $f(x) = x(x^2 - 4)$ ，若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$ ，其中 k 为常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的表达式;

(2) 问 k 为何值时， $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导？

5、设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$,

(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.