

武汉大学2011-2012学年第一学期末
《高等数学C1》试卷(A卷)

一. 计算下列各题(每题6分, 共36分)

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1})$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\ln(1+3x)}$; (3) $\int \frac{1}{x(1-x^4)} dx$;
(4) $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$; (5) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\frac{x^5}{1+x^2} + x \sin x) dx$; (6) $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{e^x} \sqrt{t+2} dt$.

二. 解答下列各题(每题7分, 共42分)

- (1) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(x-2)}{nx^2+nx-6n+5}$, 求函数 $f(x)$ 的间断点, 并说明其类型;
(2) 设 $f(x) = x^{\cos x} + \arccos \frac{2}{x}$, 求 $f'(x)$;
(3) 若 $y = \sec x^2 + 5^x + \ln 10$, 求 dy ;
(4) 求由方程 $xy = \ln(x+y)$ 确定的函数在点 $(0, 1)$ 处的二阶导数;
(5) 设 $F(x) = \sqrt{(1-x)^5} e^x$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int_0^1 x f'(x) dx$;
(6) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 Oy 轴旋转一周所成旋转体的体积。

三. 设 $f(x) = \begin{cases} a \ln(x+1) + 1, & -1 < x \leq 0, \\ e^x + b, & x > 0, \end{cases}$ 试问 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$. (7分)

四. 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上可微, 且 $f'(0) = 0$, $f''(0)$ 存在。证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\sin x)}{x^3} = 0$. (8分)

五. 设计一个底为正方形, 容积为 $1000m^3$ 的水箱, 已知箱底的造价是周围的造价的两倍。试问应如何设计, 可以使总造价最低? (7分)