

武汉大学2010-2011学年第一学期末
《高等数学C》试卷(A卷)

一. 计算下列各题(每题5分, 共30分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x(1-\cos x)}$; (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{3}{n})^{n+2}$; (3) $\int \frac{1}{x(3+x^3)} dx$;
(4) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+2}}$; (5) $\int_{-1}^1 (\frac{x^3}{1+\tan^2 x} + xe^x) dx$; (6) $\frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln t dt$.

二. 解答下列各题(每题7分, 共42分)

- (1) 求函数 $y = \frac{\sin 3x(x-1)}{x(x^2-1)}$ 的间断点, 并说明其类型;
(2) 设 $f(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos tx}{x^2}$, 求 $f'(t)$;
(3) 若 $y = x^{\sin x} + \arctan(1-x^2) + e^5$, 求 dy ;
(4) 设函数 $y(x)$ 由方程 $y = 2 + xe^y$ 确定, 求 y' ;
(5) 若 $f(x-1) = \sqrt{x} \ln x$, 求 $\int_0^3 f(x) dx$;
(6) 求由曲线 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{2-x^2}$ 所围成图形的面积.

三. 设 $f(x) = \begin{cases} a \sin x + b, & x \leq 0, \\ e^x + 1, & x > 0, \end{cases}$ 试问 a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并求 $f'(0)$. (10分)

四. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, $f(0) = f(1)$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = \frac{3f'(\xi)}{1-\xi}$. (8分)

五. 某商品的价格 P 与需求量 Q 的关系为 $P = 20 - \frac{Q}{10}$,

- (1) 试求需求量为90与110时的总收益 R , 平均收益 \bar{R} 及边际收益 R' ;
(2) Q 为多大时总收益最大? (10分)