武汉大学数学与统计学院

2005－2006 学年第二学期《线性代数》　　（A 卷）

学院＿＿＿＿＿＿ 专业 ＿＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿

注：1.本试题供线性代数 D（即工科 36 学时）使用；

2.所有答题均须有详细过程，内容必须写在答题纸上，凡写在其它地方一律无效。

一、计算题（每小题 6 分，5 题共 30 分）：

1、设 $\alpha_1=(3,21,0,9,0)$， $\alpha_2=(1,7,-1,-2,-1)$， $\alpha_3=(2,14,0,6,1)$，求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组。

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&-1\\1&-2&1&1\\0&1&-1&2\\3&0&2&4\end{pmatrix}$，求行列式 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right|$ 的值。

3、设 $\alpha_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&-2&1\end{pmatrix}$，试求一个非零向量 α，使 α_1，α_2，α 两两正交。

4、判定二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 的正定性。

5、已知 $A=\begin{pmatrix}a&a&a\\b&b&b\\c&c&c\end{pmatrix}$，求 A^{2006}。

二、解答题（每小题 15 分， 2 题共 30 分）：

1、已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$，且 $A^2-AB=E$，其中 E 是 3 阶单位矩阵，

（1）求矩阵 B；

（2）令 $C=4A^2-B^2-2BA+2AB$，计算 C 的伴随阵 C^*。

2、已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

（1）求一个正交变换 $X=PY$，把二次型 f 化为标准形。

（2）在 $\|x\|=1$ 的条件下，求二次型 f 的最大值和最小值。

三、证明与讨论（3 题共 40 分）

1、设有线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=3\\x_1+x_2+\lambda x_3=-1\end{cases}$， 问 λ 取何值时，此方程组有惟一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。（15分）

2、设三阶阵 A 有三个实特征值 λ_1、λ_2、λ_3，且满足 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$，如果 λ_1 对应两个线性无关的特征向量 α_1 和 α_2，λ_3 对应一个特征向量 α_3，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。（10 分）

3、设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&-1\\x^2&0&0\end{pmatrix}$，$x$ 为实数，试讨论 x 为何值时，矩阵 A 可与对角阵相似？（15 分）

线性代数 D（即工科 36 学时）参考解答：

一、计算下列各题：

1、解：由$\begin{vmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=9\neq 0$，及$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\leq 3$，则知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$即为一极大无关组。

2、解：$\left|AA^{\mathrm{T}}\right|=\left|A\right|^2$，$\left|A\right|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=40$，所以：$\left|AA^{\mathrm{T}}\right|=1600$。

3、解：令$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，得$\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=0 \end{cases}$，取$\alpha=(-1,0,1)^T$即可。

4、解：f 的矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$，顺序主子式为$a_{11}=1>0$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1>0$，$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=1>0$，根据正定性的判定定理知 f 为正定二次型。

5、解：$A=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$A^{2006}=\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{2006\text{个}A}$

$=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{2005\text{个}(a+b+c)\text{相乘}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=(a+b+c)^{2005}\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$。

二、解答下列各题：

1、解：(1) 由$\mathbf{A}^2-\mathbf{AB}=E$，得$\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{B})=E$，而$\left|\mathbf{A}\right|=-1\neq 0$，因此矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆，且$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，所以由$\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{B})=E$，得$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$，故$\mathbf{B}=\mathbf{A}-\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

（2）注意$4A^2-B^2-2BA+2AB=2A(2A+B)-B(B+2A)=(2A+B)(2A-B)$，

且$(2A+B)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，$(2A-B)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，$(2A+B)(2A-B)=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，

即$C=4A^2-B^2-2BA+2AB=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$。再注意$C^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\left|C\right|=4^3$，

则 $C^* = |C|C^{-1} = 16\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

2、**解**：（1）$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$A$ 的特征多项式为 $f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+2),$

令 $f(\lambda)=0$，得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2,$

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$ 解线性方程组 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = o \Rightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0,$ 基础解系为：

$\xi_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$，正交规范化得：$\beta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\ \beta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)$

对 $\lambda_3 = -2,$ 解线性方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = o \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$，得基础解系为：

$\xi_3 = (1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，规范化得：$\beta_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，

则所求之一正交变换矩阵 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，变换之下的标准形为：$f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$。

（2）由于正交变换保持向量的长度不变，则 $\|X\| = \|Y\| = 1$，

$f = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_3^2 = 1 - 3y_3^2$，注意：$0 \le y_3^2 \le 1$，则 $-2 \le 1 - 3y_3^2 \le$，即 f 的最大值为 1，最小值为 -2。比如令 $Y = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$，有 $\min f = -2,$ 令 $Y = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$，有 $\max f = 1$。

三、证明题与讨论题：

1、**解：通过对增广阵的讨论可得如下结论：**

(1)当 $\lambda \ne 1$ 且 $\lambda \ne -2$ 时，$R(A) = R(B) = 3,$ 方程组有唯一解；

(2)当 $\lambda = 1$ 时，$R(A) = 1$，$R(B) = 2$，该情形方程组无解；

(3)当 $\lambda = -2$ 时，$R(A) = R(B) = 2,$，此时方程组有无限多个解。而，

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},,$$

由此得 $\begin{cases} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$，**即** $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$(c \in R)$。

2、证明：考虑 k_1、k_2、k_3 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=o \qquad (*),$$

则 $Ak_1\alpha_1+Ak_2\alpha_2+Ak_3\alpha_3=o$，即

$$k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2+k_3\lambda_3\alpha_3=o \qquad (**),$$

用 λ_1 乘以（$*$）式，然后与（$**$）式相减得

$$k_3(\lambda_3-\lambda_1)\alpha_3=o,$$

注意 $\lambda_3-\lambda_1\neq 0$，有 $k_3=0$。再由（$*$）式得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=o$，由于 α_1 和 α_2 线性无关，则 $k_1=k_2=0$，于是

$$k_1=k_2=k_3=0,$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

3、解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ x^2 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(x^2-\lambda^2)$，得 $\lambda_1=1,\ \lambda_{2、3}=\pm x$。

1）当 $x\neq 0$ 且 $x\neq\pm1$ 时，A 有 3 个相异特征值，则 A 有 3 个线性无关的特征向量，此时 A 一定可以对角化。

2）如果 $x=\pm1$，则 $\lambda_{1、2}=1,\lambda_3=-1$，

注意到 $\lambda_{1、2}=1$ 时，由 $(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$R(A-E)=1$，

则由 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$ 恰给出 A 的两个线性无关的特征向量。

而当 $\lambda_3=-1$ 时，由 $(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$R(A+E)=2$，

则由 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$ 恰给出 A 的一个特征向量。

再由上题知，此种情形下，A 的三个特征向量线性无关，即 A 也可以对角化。

3）如果 $x=0$，则 $\lambda_1=1,\lambda_{2、3}=0$，

注意到 $\lambda_{2、3}=0$ 时，由 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$ 及 $R(A)=2$ 知，即 A 恰有一个特征向量。

而当 $\lambda_1=1$ 时，由 $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 及 $R(A-E)=2$ 知，

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

恰给出 A 的一个特征向量，从而，此情形下 A 不具有 3 个线性无关的特征向量，则 A 不可以对角化。