武汉大学数学与统计学院 2009－2010 第二学期
《线性代数 D》 （A 卷，工科 36 学时）

学院__________ 专业 ______________ 学号________________ 姓名________

注：所有答题均须有详细过程，内容必须写在答题纸上，凡写在其它地方一律无效。

一、(10 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$，求行列式 $\left|AA^T\right|$ 及秩 $R(B)$。

二、(15 分) 设三阶方阵 A 满足

$$AX=A+2X\text{，且 }A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix},$$

求矩阵 X。

三、(15 分) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，问：

1）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性无关？并说明理由；

2）常数 l, m 满足何种条件时，向量组 $l\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$m\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关？并说明理由。

四、(15 分) 设线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+\ ax_2+x_3\ =3\\ x_1+2ax_2+x_3=4\\ x_1+\ x_2\ +bx_3\ =4\end{cases}$$

问 a、b 取何值时，该方程组有惟一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其解.

五、(15 分) 设 α 是实数 n 维非零列向量，E 为 n 阶单位矩阵，$A=E-[2/(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T$，试解答下列问题：

1）计算 A^T，并回答 $(kE-A)$ 能否相似于一个对角阵？并说明理由，其中 k 为常数；

2）计算 A^2，并回答 $(kE-A)$ 是否可逆？并说明理由，若 $k\neq\pm1$；

3）给出 $(E-2\alpha\alpha^T)$ 为正交矩阵的充分必要条件。

六、(18 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$,试解答下列问题：

1). 给出求出二次型 f 的矩阵 A；

2）求出矩阵 A 的全部特征值与特征向量；

3). 求正交变换 $x=Ty$，使 $T^{-1}AT$ 成为对角阵；

七、(12分) 设 n 阶实对称矩阵 A 正定, 试证明：

1). 矩阵 A^{-1}、A^* 和 $A^{-1}+A^*$ 均为 n 阶正定矩阵；

2）$C=\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&A^*\end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶正定矩阵。

四、 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 2a & 1 & 4 \\ 1 & 1 & b & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 4 \\ 1 & 2a & 1 & 4 \\ 1 & a & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 4 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 4 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-b & -1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_2 - r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 4 \\ 0 & 1 & b-1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1-b & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - (a-1) r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 4 \\ 0 & 1 & b-1 & 2 \\ 0 & 0 & a(1-b) & 1-2a \end{array}\right)$

武汉大学数学与统计学院 2009－2010 第二学期

《线性代数 D》（ 卷 工科 36 学时）

学院__________ 专业__________ 学号__________ 姓名__________

注：所有答题均须有详细过程，内容必须写在答题纸上，凡写在其它地方一律无效。

一、(10分) 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，求行列式 $|AA^T|$ 及秩 $R(B)$。→ P68，例6

一、① $R(A)=2$ 故 $R(AA^T) \le R(A)=2$ 而 AA^T 为 4×4 矩阵 故 $|AA^T|=0$

② $R(B)=5$

二、(15分) 设三阶方阵 A 满足 P65，例3.

$$AX = A+2X，且 A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}，$$

求矩阵 X。 二. $AX-2X=A$ $(A-2E)X=A$

法1. 求 $A-2E$ 的逆，再得 $X=(A-2E)^{-1}A$

法2: $(A-2E, A)$ 进行初等行变换，左边化为E时右边即为 $(A-2E)^{-1}A$

三、(15分) 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，问：

1) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性无关？并说明理由； ① 线性无关，P89 定理5.①

2) 常数 l, m 满足何种条件时，向量组 $l\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $m\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关？并说明理由。

$\beta_1=$ $\beta_2=$ $\beta_3=$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} l & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

β_1,β_2,β_3 线性无关 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} l & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0$

即可证

四、(15分) 设线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+ ax_2+x_3 =3 \\ x_1+2ax_2+x_3 =4 \\ x_1+ x_2 +bx_3 =4 \end{cases}$$

P75，例13.

问 a、b 取何值时，该方程组有惟一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其解。

五、(15分) 设 α 是实数 n 维非零列向量，E 为 n 阶单位矩阵，$A=E-[2/(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T$，试解答下列问题： P114. 定理7

1) 计算 A^T，并回答 $(kE-A)$ 能否相似于一个对角阵？并说明理由，其中 k 为常数；

2) 计算 A^2，并回答 $(kE-A)$ 是否可逆？并说明理由，若 $k\neq\pm1$； P120. 例8

3) 给出 $(E-2\alpha\alpha^T)$ 为正交矩阵的充分必要条件。 P115. 定义4

五. 1) $A^T=A$. $kE-A$ 为对称阵，P89

2) $A^2=E$ 特征值为 ±1

3) $(E-2\alpha\alpha^T)(E-2\alpha\alpha^T)^T=E-4\alpha\alpha^T+4(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T$

$=E-4(1-\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T$

$=E$

$\Rightarrow (1-\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T=0$

$\Rightarrow 1-\alpha^T\alpha=0 \Rightarrow \alpha^T\alpha=0$

六、(18分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$，试解答下列问题： P130. 例14

1)、给出求出二次型 f 的矩阵 A；

2) 求出矩阵 A 的全部特征值与特征向量；

3)、求正交变换 $x=Ty$，使 $T^{-1}AT$ 成为对角阵；

1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2)

3) $A-\lambda E=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

七、(12分) 设 n 阶实对称矩阵 A 正定，试证明：

1)、矩阵 A^{-1}，A^* 和 $A^{-1}+A^*$ 均为 n 阶正定矩阵； P133，定理10 的推论

2) $C=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶正定矩阵。 P133，定义10.

七. 1) A^{-1}，A^* 特征值为正，故为正定阵

$\forall x\neq0$，$x^T(A^{-1}+A^*)x = x^TA^{-1}x + x^TA^*x > 0$，故为正

2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1^T, x_2^T) \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= (x_1^TA^{-1}, x_2^TA^*) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^TA^{-1}x_1 + x_2^TA^*x_2$

>0