武汉大学 2008—2009 学年第一学期

《高等数学 C1》试题（A 卷）

一、计算下列各题（5 分/小题，共 30 分）

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+\cdots+2n}{n^2+2n+3}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$; (3) $\int\frac{1+2x^2}{x(1+x^2)}dx$; (4) $\int\frac{\ln x-1}{x^2}dx$; (5) $\int_0^4\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$; (6) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^x}dx$.

二、解答下列各题（7 分/小题，共 42 分）：

1、若 $y=x^2\tan x+e^x+\sin 1$, 求 dy.

2、如果可导函数 $f(x)$ 满足：$f(1+\ln(1+x))-2f(\cos x)=x+\sin^3 x+1$, 求曲线 $C:\ y=f(x)$ 在点 $x=1$ 的切线和法线方程.

3、求 $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ 在 $x\in(-\pi,2\pi)$ 的间断点及其类型.

4、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t^2\arctan(1+t^2)dt}{x(1-\cos x)\int_0^x\sin t^2dt}$.

5、若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+(1-x^3)\int_0^1 f(x)dx$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$.

6、求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和直线 $y=x, x=2$ 所围图形的面积.

三（10 分）讨论 $f(x)=\begin{cases}x^\lambda\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(\lambda>0)$ 在 $x=0$ 的连续性和可导性.

四、(6 分）若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导；过 $A(0,f(0))$、$B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $C(c,f(c))$, 其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

五、(12 分）若某商品的价格 p 为销量 x 的函数：$p(x)=1000e^{-\frac{x}{100}}$（单位：万元）.

（1）求边际收益和收益关于销量的弹性；

（2）求最大收益时的销量，最大收益和相应的价格.

参考答案

一、计算下列各题（5 分/小题，共 30 分）

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+\cdots+2n}{n^2+2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+2n+3}=1\ (\frac{\infty}{\infty})$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$ (等价无穷小代换); (3) $\int\frac{1+2x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C=\ln|x|\sqrt{1+x^2}+C$ (有理多项式积分); (4) $\int\frac{\ln x-1}{x^2}dx=\int(\ln x-1)d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}(\ln x-1)+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}(\ln x-1)-\frac{1}{x}+C=-\frac{1}{x}\ln x+C$（分部积分）; (5) $\int_0^4\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_1^3\frac{u^2-1}{2u}udu=\left(\frac{u^3}{6}-\frac{u}{2}\right)\Big|_1^3=\frac{10}{3}$ $(u=\sqrt{2x+1})$ (换元法); (6) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\mathrm{e}^x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x\sin x}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{(-x)\sin(-x)}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=1$ (对称区间上的积分).

二、解答下列各题（7 分/小题，共 42 分）：

1、若 $y=x^2\tan x+\mathrm{e}^x+\sin 1$, 求 dy.

$dy=(2x\tan x+x^2\sec^2 x+\mathrm{e}^x)\,dx=\left(\frac{x\sin 2x+x^2}{\cos^2 x}+\mathrm{e}^x\right)dx.$

2、如果可导函数 $f(x)$ 满足：$f(1+\ln(1+x))-2f(\cos x)=x+\sin^3 x+1$, 求曲线 $C:\ y=f(x)$ 在点 $x=1$ 的切线和法线方程.

$\frac{1}{1+x}f'(1+\ln(1+x))+2f'(\cos x)\sin x=1+3\sin^2 x\cos x$. 令 $x=0$ 得 $f(1)=-1, f'(1)=1$. 切线方程：$y+1=x-1\iff x-y-2=0$; 法线方程：$y+1=-(x-1)\iff x+y=0$.

3、求 $f(x)=\frac{x}{\sin x}$ 在 $x\in(-\pi,2\pi)$ 的间断点及其类型.

(1) $x=0$. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, 可去间断点. (2) $x=\pi$. $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=\infty$, 无穷间断点.

4、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t^2\arctan(1+t^2)dt}{x(1-\cos x)\int_0^x\sin t^2dt}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t^2\arctan(1+t^2)dt}{x(1-\cos x)\int_0^x\sin t^2dt}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}t^2\arctan(1+t^2)dt}{\frac{x^3}{2}\int_0^x\sin t^2dt}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot x^4\arctan(1+x^4)}{\frac{3}{2}x^2\int_0^x\sin t^2dt+\frac{x^3}{2}\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\pi x^3}{3\int_0^x\sin t^2dt+x\sin x^2}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\pi x^2}{4\sin x^2+2x^2\cos x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\pi}{6\cos x^2-2x^2\sin x^2}=\frac{\pi}{2}.$

5、若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+(1-x^3)\int_0^1 f(x)dx$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1(1-x^3)dx\int_0^1 f(x)dx$$
$$\int_0^1 f(x)dx=\arctan x|_0^1+\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1\cdot\int_0^1 f(x)dx$$
$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\int_0^1 f(x)dx$$
$$\int_0^1 f(x)dx=\pi.$$

6、求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和直线 $y=x, x=2$ 所围图形的面积.

$S=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\ln x\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$

三（10 分）讨论 $f(x)=\begin{cases}x^\lambda\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(\lambda>0)$ 在 $x=0$ 的连续性和可导性.

实际上，要使得函数 $x^\lambda\sin\frac{1}{x}$ 对所有实数 $\lambda>0$ 有意义，我们必须限制 $x>0$.
(1) 连续性. $\lim\limits_{x\to 0}x^\lambda\sin\frac{1}{x}=0\ (\lambda>0)$, 在 $x=0$ 处连续.

(2) 可导性. $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^\lambda\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\lambda-1}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0, & \lambda>1,\\ \text{不存在}, & 0<\lambda\leq 1.\end{cases}$

四、(6 分) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导；过 $A(0,f(0))$、$B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $C(c,f(c))$, 其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.

令 $k=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$. $f(x)\in C[0,1]$ 及在 $(0,1)$ 内二阶可导. 由 Lagrange 中值定理，$\exists\, x_1\in(0,c)$ s.t. $f'(x_1)=k$ 及 $\exists\, x_2\in(c,1)$ s.t. $f'(x_2)=k$. 进一步地，由 Rolle 中值定理，$\exists\,\xi\in(x_1,x_2)$ s.t. $f''(\xi)=0$.

五、（12 分）若某商品的价格 p 为销量 x 的函数：$p(x)=1000\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}$（单位：万元）.

（1）求边际收益和收益关于销量的弹性；

（2）求最大收益时的销量，最大收益和相应的价格.

(1) 总收益 $R(x)=xp(x)=1000x\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}$. 边际收益 $R'(x)=1000\left(1-\frac{x}{100}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}$. 收益关于销量的弹性 $\frac{ER}{Ex}=R'(x)\cdot\frac{x}{R(x)}=1-\frac{x}{100}$.

(2) 令 $R'(x)=0$ 得 $x=100$. 最大收益为 $R(100)=10^5\mathrm{e}^{-1}$, 此时价格 $p(100)=1000\mathrm{e}^{-1}$.