武汉大学数学与统计学院 2007－2008 第二学期

《线性代数 D》 （A 卷，工科 36 学时）

学院____________ 专业 ________________ 学号___________________ 姓名__________

一、**(10 分)**设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为三维向量 ，记三阶矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3).$$

已知$|A|=1$，求$|B|$.

二、**(10 分)** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\2&-1&4\\0&-1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 求矩阵$\boldsymbol{C}$.

三、（15 分）已知向量组

$$A:\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-8\\4\\8\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\xi_4=\begin{pmatrix}10\\5\\6\end{pmatrix}$$

求向量组A的秩及一个最大无关组，并把其它的向量用最大无关组表示出来.

四、**(15 分**）设线性方程组为

$$\begin{cases}(2+\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1\\2x_1+(5+\lambda)x_2-4x_3=2\\-2x_1-4x_2+(5+\lambda)x_3=3\lambda+1\end{cases}$$

问λ为何值时，该方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其解.

五、**(15 分**）已知 **1**，**1**，－**1** 是三阶实对称矩阵A的三个特征值，向量α_1=$(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，α_2=$(2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$是A的对应于λ_1=λ_2=1的特征向量，

1） 能否求得A的属于λ_3=－1的特征向量？若能，试求出该特征向量，若不能，则说明理由。

2）能否由此求得实对称阵A？若能，试求之，若不能则说明理由。

六、**(15 分)** 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，E是n阶单位矩阵$(n\times n)$. 已知$BA=E$, 试判断A的列向量组是否线性相关？为什么？

七、**(20 分)**设二次型的矩阵为$\begin{pmatrix}5&-a&2b-1\\a-b&c&2-c\\c-2&-3&3\end{pmatrix}$，$a,b,c$为常数，则

（**1**）. 写出二次型 f（x_1,x_2,x_3)的具体形式;

（2）. 求A的全部特征值与特征向量;

（3）. 求一个正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$,把二次型 $\boldsymbol{f}$ 化为标准形;

（4）. 在$\|\boldsymbol{x}\|=\mathbf{1}$的条件下，求二次型 $\boldsymbol{f}$ 的最大值和最小值。

武汉大学数学与统计学院 2007－2008 第二学期

《线性代数 D》 （工 36 学时，A 卷答案）

一、**(10 分)** 解：由行列式的性质，可得

$$|B|=\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\right|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2$$

二、**(10 分)** 解：由 $AC-E=B+C$，得$\left(A-E\right)C=B+E$，这里

$$A-E=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix},\quad B+E=\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&0&4\\0&-1&5\end{pmatrix},$$

而$|A-E|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=1$，并求得$\left(A-E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-3&2\end{pmatrix}$

故 $C=\left(A-E\right)^{-1}\left(B+E\right)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&0&4\\0&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3&0\\-3&-3&4\\-7&-4&1\end{pmatrix}$.

三、（**15** 分）解：令

$$A=\begin{pmatrix}1&-8&2&10\\2&4&-1&5\\3&8&-2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&1&-1/4&-3/4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故向量的秩为 **2**，最大无关组为ξ_1,ξ_2，这里$\xi_3=-1/4\,\xi_2$， $\xi_4=4\xi_1-3/4\,\xi_2$.

四、**(15** 分）解：因$|A|=(\lambda+1)^2(\lambda+10)$，故方程组有唯一解$\Leftrightarrow|A|\neq0$，$\Leftrightarrow\lambda\neq-1$，且$\lambda\neq-10$

$\lambda=-10$时，对增广矩阵作行变换化为阶梯形：

$$\tilde{A}=(A\vdots b)=\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-29\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&-5&-4&2\\0&-18&-18&9\\0&0&0&-63\end{pmatrix}$$

因 $rank(A)=2$，$rank(\tilde{A})=3$，$rank(A)\neq r(\tilde{A})$，即$\lambda=-10$时无解。

$\lambda=-1$时，同样对增广矩阵作行变换化为阶梯形：$\tilde{A}\to\begin{bmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

因 $rank(A)=rank(\tilde{A})=1<3$，所以$\lambda=1$时有无穷多解。等价方程组为：$x_1+2x_2-2x_3=1$

令 $x_2=k_1$，$x_3=k_2$，得通解为：$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\quad(k_1,k_2\in R)$

五、（15 分）解：(1)能；A的属于$\lambda_3=-1$的特征向量为：

$$\alpha_3=(1,-1,0)^T$$

(2) 能；实对称阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

六、**(15 分)** 解：由 $r\left(AB\right)\le\min\left(r\left(A\right),r\left(B\right)\right)$ 及 $BA=E_n$ 知 $n\le r\left(A\right)$. 另一方面， A 为 n 列矩阵，故又有 $r\left(A\right)\le n$. 于是 $r\left(A\right)=n$, 因而 A 的列向量线性无关.

七、**(20 分)**解：**(1)** 由于矩阵 $\begin{pmatrix}5&-a&2b-1\\a-b&c&2-c\\c-2&-3&3\end{pmatrix}$ 为对称阵，可求得 $a=1,b=2,c=5$，则二次型的矩阵为 $\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$，所以二次型 f（x_1,x_2,x_3）的具体形式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3；$$

(2) 首先由特征多项式 $\left|A-\lambda E\right|=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$ 可求得特征值

$$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9.$$

然后求得相应的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$

（**3**）再将其单位化，得单位正交向量组

$$e_1=\frac{p_1}{\left\|p_1\right\|}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix},e2=\frac{p_2}{\left\|p_2\right\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\ e_3=\frac{p_3}{\left\|p_3\right\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.,$$

故有正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

求得二次型的标准形为 $f=4y_2^2+9y_3^2$. .

（**4**）由正交变换保持向量的长度不变，则 $\boldsymbol{\left\|X\right\|=\left\|Y\right\|=1}$，并注意到 $\boldsymbol{0\le 4y_2^2+9y_3^2\le 9}$，则 $\boldsymbol{f}$ 的最大值为 **9**，最小值为 **0**。