2007–2008 学年第一学期
《高等数学》期终试题

一、计算下列各题(每题 5 分, 共 35 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+x}}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;
4. $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; 5. $\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$; 6. $\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x$; 7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

解 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n+\sqrt{n}}}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n+\sqrt{n}}}=2$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+x}}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x\cos x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x+x\sin x}{2x}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+2\sin x+x\cos x)=\frac{1}{2}$.

4. $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^t\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int t\mathrm{d}\mathrm{e}^t=2\left(t\mathrm{e}^t-\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)=2\mathrm{e}^t(t-1)+C=$
$2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.

5. $\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int_0^3\frac{(x+1)-1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}(x+1)=\int_0^3\left[\sqrt{x+1}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}(x+1)=$
$\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^3=\frac{8}{3}$.

6. $\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=$
$\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\left(\frac{\mathrm{e}^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+1}=\arctan\mathrm{e}^x+C$ (或 $-\arctan\mathrm{e}^{-x}+C$)

二、解答下列各题（每题 7 分, 共 35 分）

1. 求 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解法一

$$I=\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}}=\mathrm{e}.$$

解法二

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} = \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

解法三

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right]^{\frac{x}{2}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{2}{x}} = \mathrm{e}
\end{aligned}
$$

2. 求 a, b 的值，使得 $f(x)=\begin{cases} ax+b\cos x, & x\le 0 \\ \frac{\sin x}{x}-x, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 可导.

解 因 $f(0)=b$, $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}-x\right)=1$, 再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导必连续知 $f(0)=f(0^+)$. 即 $b=1$. 从而函数形式为

$$
f(x)=\begin{cases} ax+\cos x, & x\le 0 \\ \frac{\sin x}{x}-x, & x>0 \end{cases}
$$

因 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(ax+\cos x)-1}{x}=a+\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1}{x}=a$, $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x-x}{x^2}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^2}-1=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{2x}-1=-1$, 再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导知 $f'_-(0)=f'_+(0)$. 即 $a=-1$. 所以, $a=-1, b=1$.

3. 求由方程 $\mathrm{e}^{xy}=x+y$ 确定的函数 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 的一、二阶导数.

解 由题意知, 当 $x=0$ 时, $y=1$. 对方程 $\mathrm{e}^{xy}=x+y$ 两边同时求导得

$$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')=1+y'.$$

令 $x=0$ 有 $1=1+y'(0)$. 即 $y'(0)=0$. 继续对 x 求导得

$$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')^2+\mathrm{e}^{xy}(2y'+xy'')=y''.$$

令 $x=0$ 则有 $1+2y'(0)=y''(0)$. 即 $y''(0)=1$.

4. 求 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$ 的微分，其中 $f(x)$ 可微.

解

$$\begin{aligned}y'&=f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{f(x)}+f(\ln x)\cdot\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)\\&=\mathrm{e}^{f(x)}\left[\frac{f'(\ln x)}{x}+f(\ln x)\cdot f'(x)\right].\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{f(x)}\left[\frac{f'(\ln x)}{x}+f(\ln x)\cdot f'(x)\right]\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A,\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 再由 $f(x)$ 连续知 $f(0)=0$. 令 $u=xt,t=\frac{u}{x},\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}u$. $t:0\to 1,u:0\to x$.

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$

$\varphi(0)=\int_0^1 f(0\cdot t)\mathrm{d}t=0$. 而

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

当 $x \neq 0$ 时

$$\varphi'(x) = \left[\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]' = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + \frac{f(x)}{x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\varphi'(x) &= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + \frac{f(x)}{x}\right] = -\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2} + A \\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} + A = \frac{A}{2}.\end{aligned}$$

所以，$\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x \neq 0 \\ \frac{A}{2}, & x = 0 \end{cases}$.

三、证明（6分）：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，而且满足

$$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x} f(x)\mathrm{d}x \quad (k > 1)$$

证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

证 令 $F(x) = x\mathrm{e}^{1-x}f(x)$, 则 $F(1) = f(1)$. 由积分中值定理得

$$F(1) = f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x} f(x)\mathrm{d}x = k\cdot\frac{1}{k}\cdot F(c) = F(c)$$

$$c \in (0, \frac{1}{k}) \subset (0,1), k > 1.$$

再由 Rolle 定理, $\exists\, \xi \in (c,1) \subset (0,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. 即

$$f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi).$$

四、（12分）某产品的成本函数为 $C = aq^2 + bq + c_0$, 需求量 $q = \frac{1}{e}(d-p)$, p 为单价, a, b, c_0, d, e 都是正的常数，而且 $d > b$. 求

（1）利润最大时的产量（即需求量）及最大利润；

（2）需求对价格的弹性及此弹性的绝对值为 1 时的产量.

解 (1) 由 $q = \frac{1}{e}(d-p)$ 得 $p = d - eq$. 从而

$$L = R - C = dq - eq^2 - aq^2 - bq - c_0 = -(e+a)q^2 + (d-b)q - c_0.$$

令 $L' = -2(e+a)q + (d-b) = 0$ 得 $q = \frac{d-b}{2(e+a)}$. 此时有

$$L = -(e+a)\cdot\frac{(d-b)^2}{4(e+a)^2} + (d-b)\frac{d-b}{2(e+a)} - c_0 = \frac{(d-b)^2}{4(e+a)} - c_0.$$

又由 $L'' = -2(e+a) < 0$ 知此即为最大利润.

(2)

$$\eta = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{q} = \frac{d-eq}{eq}\ \left(\text{或}\ \frac{p}{d-p}\right)$$

令 $\eta = 1$, 则 $d - eq = eq$. 即 $q = \frac{d}{2e}$.

五、(12分)若曲线 $y = a\sqrt{x}\ (a>0)$ 与 $y = \ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公共切线. 求

(1) 常数 a 及点 (x_0, y_0).

(2) 两曲线与 x 轴在第一象限所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体的体积 V_x.

解 (1) 对曲线 $y = a\sqrt{x}$ 有 $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$. 对曲线 $y = \ln\sqrt{x}$ 有 $y' = \frac{1}{2x}$. 由两曲线有公共切线得 $\frac{a}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$. 即 $x = \frac{1}{a^2}$. 将此代入方程 $y = a\sqrt{x}$ 得 $y = 1$. 再由方程 $y = \ln\sqrt{x}$ 解得 $x = \mathrm{e}^2$. 从而，切点为 $(\mathrm{e}^2, 1)$, 且 $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) 由 $y = \frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}$ 得 $x = \mathrm{e}^2 = y^2$, 从而为一抛物线. 由 $y = \ln\sqrt{x}$ 得 $x = \mathrm{e}^{2y}$, 从而为一指数函数. 由作图观察可得

$$\begin{aligned} V_x &= \pi\left[\int_0^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}}\right)^2\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2}(\ln\sqrt{x})^2\mathrm{d}x\right] \\ &= \pi\left[\frac{\mathrm{e}^2}{2} - \int_1^{\mathrm{e}^2}(\ln\sqrt{x})^2\mathrm{d}x\right] \end{aligned}$$

令 $t=\sqrt{x}, x=t^2, \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t.\ x:1\to \mathrm{e}^2, t:1\to \mathrm{e}.$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}^2}(\ln\sqrt{x})^2\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}}(\ln t)^2\cdot 2t\mathrm{d}t=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln t)^2\mathrm{d}(t^2)\\
&= (t\ln t)^2\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}t^2\cdot 2\ln t\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{e}^2-\int_1^{\mathrm{e}}2t\ln t\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{e}^2-\int_1^{\mathrm{e}}\ln t\mathrm{d}(t^2)\\
&= \mathrm{e}^2-t^2\ln t\Big|_1^{\mathrm{e}}+\int_1^{\mathrm{e}}t^2\mathrm{d}\ln t\\
&= \int_1^{\mathrm{e}}t^2\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\left.\frac{t^2}{2}\right|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}.
\end{aligned}$$

所以, $V_x=\pi\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$