

**武汉大学数学与统计学院 2007-2008 第二学期**  
**《线性代数 D》 (B 卷, 工科 36 学时)**

学院\_\_\_\_\_ 专业\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

注：所有答题均须有详细过程，内容必须写在答题纸上，凡写在其它地方一律无效。

一、(12 分) 已知三维向量：

$$\beta = (0, 1, 3), \alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 0, 1), \alpha_3 = (0, 1, 1),$$

1. 证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关；

2. 将  $\beta$  表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合。

二、(12 分) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ，求行列式  $|AA^T|$  的值。

三、(12 分) 已知向量组

$$A: \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

求向量组  $A$  的秩及一个最大无关组，并给出向量组中不能由其余向量线性表示的向量。

四、(16 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda - 1 \end{cases},$$

问  $\lambda$  取何值时，此方程组有惟一解、无解或有无穷多个解？并在有无穷多解时求出其通解。

五、(20 分) 已知  $E$  为 3 阶单位矩阵，且

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 且 } A^2 - AB = E,$$

(1) 求矩阵  $B$ ；

(2) 令  $C = 4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$ ，计算  $C$  的伴随阵  $C^*$ 。

六、(20 分) 已知

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3,$$

(1) 求一个正交变换  $X = PY$ ，把二次型  $f$  化为标准形。

(2) 在  $\|x\| = 1$  的条件下，求二次型  $f$  的最大值和最小值。

七、(8 分) 设三阶阵  $A$  有三个实特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，且满足  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ ，如果  $\lambda_1$  对应两个线性无关的特征向量  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$ ， $\lambda_3$  对应一个特征向量  $\alpha_3$ ，证明  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关。