# 武汉大学数学与统计学院 2008－2009 第二学期

## 《线性代数 D》 （A 卷，工科 36 学时）

学院____________ 专业 ________________ 学号___________________ 姓名__________

**注：**所有答题均须有详细过程，内容必须写在答题纸上，凡写在其它地方一律无效。

一、**(10 分)** 计算$n$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}。$$

二、**(15 分)** 设三阶方阵$A,B$满足

$$AB+E=A^2+B，且\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}，$$

求$B$及$B^*$。

三、（15 分）已知向量组

$$A：\ \xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}，\ \xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}，\ \xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}，\ \xi_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}，$$

求向量组$A$的秩及一个最大无关组，并给出向量组中不能由其余向量线性表示的向量.

四、**(15 分**）设线性方程组为

$$A=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix},b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}$$

问$\lambda$为何值时，该方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其解.

五、**(15 分**）设$A$为三阶方阵，且$A^2\neq O$，$A^3=O$，

**1**）能否求得$A$的的特征值？若能，试求出该特征值，若不能，则说明理由。

2） $A$能否相似于一个对角阵？若能，试求出该对角阵，若不能则说明理由。

3）已知$B=A^3-5A^2+3E$，能否求得$|B|$？若能，试求出$|B|$，若不能，则说明理由。

六、**(15 分)** 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_1,$$

1).求出二次型$f$的矩阵$A$的全部特征值与特征向量**;**

2).求正交矩阵$P$，使$P^{-1}AP$成为对角阵;

3).计算$|A^m|$($m$是正整数).

七、**(15 分)** 证明：与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系。

# 武汉大学数学与统计学院 2008－2009 第二学期

## 《线性代数 D》 （工 36 学时，A 卷答案）

一、**(10 分)** 解：$D_n=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2-b & \cdots & a_n\\ & \cdots & & \cdots\\ 1 & a_2 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & -b & \cdots & 0\\ & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -b\end{vmatrix}$

$$=(-b)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-b\right)$$

二、**(15 分)** 解：由 $AB-B=A^2-E,\ (A-E)B=(A-E)(A+E)$，又 $|A-E|\neq 0$，知 $A-E$ 可逆。

可得 $B=A+E=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，并可求得 $B^*=\begin{pmatrix}6 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

三、（**15** 分）解： 令

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=B$$

其中 $B$ 的前三列显然线性无关。故向量组的秩为 3，且 $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ 构成一个极大无关组。注意到 $B$ 的第一、二列可以表达第四列，而第一、二列又不能表达第三列，因此，第一、二、四列不能表达第三列，也即 $\xi_3$ 不能由 $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_4$ 表达。容易看出 $\xi_1+\xi_2=\xi_4$，故只有 $\xi_3$ 不能由其余向量线性表达。

四、**(15** 分）解：经计算 $|A|=-(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，因此方程组有唯一解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow \lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 10$。

$\lambda=10$ 时，对增广矩阵作行变换化为阶梯形：

$$\widetilde{A}=(A,b)=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -5 & 2\\ -2 & -4 & -4 & -11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2 & 1\\ 0 & -18 & -18 & 9\\ 0 & 0 & 0 & -54\end{bmatrix}$$

因 $rank(A)=2,rank(\widetilde{A})=3,rank(A)\neq r(\widetilde{A})$，即 $\lambda=10$ 时无解。

$\lambda=1$ 时，同样对增广矩阵作行变换化为阶梯形：$\widetilde{A}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

因 $rank(A)=rank(\widetilde{A})=1<3$，所以 $\lambda=1$ 时有无穷多解。等价方程组为：$x_1+2x_2-2x_3=1$

令 $x_2=k_1,x_3=k_2$，得通解为：$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\quad (k_1,k_2\in R)$

五、(15 分）解：1) 能；设 $A$ 的特征值为 $\lambda_i\ (i=1,2,3)$，则 $A^3$ 的特征值为 $\lambda_i^3\ (i=1,2,3)$，

由 $A^3=O$ 知 $\lambda_i^3$=0 $(i=1,2,3)$，从而 $\lambda_i$=0 $(i=1,2,3)$。

2）不能；易知 $A$ 非零，但 $|A|=0$，于是由 $\left(A-0\cdot I\right)X$=$AX$=$O$ 可求得全部线性无关的特征向量的个数为 $3-r<3$（因为 $r>0$，其中 $r$ 为 $A$ 的秩），

故 $A$ 不存在 3 个线性无关的特征向量，从而不存在任何对角阵和 $A$ 相似。

3）能；易知 $B=A^3-5A^2+3E$ 的特征值为 $\lambda_i$=$\lambda_i^3-5\lambda_i^2$+3=3 $(i=1,2,3)$，从而 $|B|=9$。

六、**(15 分)** 解：**1)** 二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$；

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & 1\\ \lambda+1 & \lambda-1 & 1\\ \lambda+1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

所以 $A$ 的全部特征值为： $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$

对 $\lambda_1=-1$， 解 $(-E-A)X=0$ 得基础解系为 $\alpha_1=(1,1,1)^T$；

对 $\lambda_2=\lambda_3=2$， 解 $(2E-A)X=0$ 得基础解系为 $\alpha_2=(1,-1,0)^T$， $\alpha_3=(1,0,-1)^T$。

2). 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交单位化，可得正交矩阵

$$P=P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

即为所求正交阵，且

$$P^TAP=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}=\Lambda.$$

3) $$|A^m|=|P\Lambda^mP^{-1}|=\begin{vmatrix}(-1)^m & & \\ & 2^m & \\ & & 2^m\end{vmatrix}=(-1)^m4^m.$$

七、**(15 分)**证：由于两个等价的线性无关向量组所含向量个数是相等的。设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 是齐次线性方程组的一个基础解系，则可设等价的线性无关向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$。

另外，由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与基础解系等价，知 $\alpha_i(i=1,\cdots,r)$ 可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性表出，从而 $\alpha_i(i=1,\cdots,r)$ 也是原齐次线性方程组的解。

又由题设知 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出。从而知齐次线性方程组的所有解也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出。即证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 也是一个基础解系。