武汉大学数学与统计学院重修试题

2006－2007 学年第二学期《线性代数》（D）

学院____________ 专业 _______________ 学号_______________ 姓名________

一、**(10 分)**设有三阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$，求 A^{-1} 和 $\left|A^{*}-3A^{-1}\right|$.

二、**(15 分)**设三阶方阵 A,B 满足 $AB+E=A^2+B$，且 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 B 及 B^{*}.

三、**(10 分)**设 A 为 n 阶非零矩阵，且 $|A|=\mathbf{O}$，证明存在 n 阶非零矩阵 B 使得 $BA=O$.

四、(20 分）就 λ 取值讨论非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2, \end{cases}$ 是否有惟一解、无解、有无穷多解? 并在有无穷多解时，求出其通解.

五、(15 分）已知向量组

$$A：\ \xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}，\ \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}，\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}，\ \xi_4=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}，$$

求向量组 A 的秩及一个最大无关组，并给出向量组中不能由其余向量线性表示的向量。

六、(20 分)设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3,$$

(1). 写出二次型 f 的矩阵 A；

(2). 求 A 的全部特征值与特征向量;

(3). 求一个正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$,把二次型 $\boldsymbol{f}$ 化为标准形;

(4). 在 $\|\boldsymbol{x}\|=\mathbf{1}$ 的条件下，求二次型 $\boldsymbol{f}$ 的最大值和最小值。

七、（10 分）选做题（其中政管院学生做第 1 小题，其他专业学生做第 2 小题）

(1). 设有三维向量

$$\alpha_1=(1,1,1)，\ \alpha_2=(1,2,3)，\ \alpha_3=(1,3,t)，\ \beta=(-3,8,2)$$

求 t 使得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，并在 $t=2$ 时将 β 表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 一个的线性组合.

(2). 设列向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ 为齐次线性方程组 $AX=O$ 的基础解系，如果列向量 β 不是方程组 $AX=O$ 的解，证明向量组 $\alpha_1+\beta,\ \alpha_2+\beta,\ \cdots,\ \alpha_k+\beta,\ \beta$ 线性无关。

武汉大学数学与统计学院重修试题答案

2006－2007 学年第二学期《线性代数 D》（工 36）

一、解：$|\mathbf{A}| = -1 \neq 0$, 因此矩阵 **A** 可逆，且有

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

故

$$\left|A^* - 3A^{-1}\right| = \left|\,|A|A^{-1} - 3A^{-1}\right| = (-4)^3\left|A^{-1}\right| = 64$$

二、解：由

$AB - B = A^2 - E,\ (A-E)B = (A-E)(A+E)$，又 $|A-E| \neq 0,\ A-E$ 可逆，则

$$B = A + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad B^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

三、证：由 $|A| = \mathbf{O}$ 知 $\left|A^T\right| = \mathbf{O}$，$A^T X = O$ 有非零解，故存在 B^T 使 $A^T B^T = O$，即证

$$BA = O。$$

四、解 （1）方程组的系数行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2),$$

所以当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时，$R(\overline{A}) = R(A) = 3$, 从而方程组有惟一解.

（2）当 $\lambda = -2$ 时，$R(A) = 2, R(\overline{A}) = 3$, 由于 $R(A) \neq R(\overline{A})$, 方程组无解.

（3）当 $\lambda - 1$ 时，有

$$\overline{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可见 $R(A) = R(\overline{A}) = 1 < 3$, 故方程组有无穷多组解：$x_1 = -2 - x_2 - x_3$.

令 $x_2 = x_3 = 0$, 得其特解 $u_0 = (-2, 0, 0)^T$.

与原方程组的导出组同解的方程组为：$x_1 = -x_2 - x_3$. 由此可得基础解系为

$$v_1 = (-1, 1, 0)^T, v_2 = (-1, 0, 1)^T .$$

于是，原方程组的全部解为

$$x = u_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$（其中 c_1, c_2 是任意常数）.

五、令 $A=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&2\\0&1&1&1\end{pmatrix}$，对 A 作初等行变换，则

$$A\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=B,$$

其中 B 的前三列显然线性无关。故向量组的秩为 3，且 $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ 构成一个极大无关组。

容易看出 $\xi_1+\xi_2=\xi_4$，而第一、二、四列不能表达第三列，故只有 ξ_3 不能由其余向量线性表达。

六、**解**：（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$；

（2）由 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&-1\\1&-1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda+2)=0,$ 得

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \ \lambda_3=-2,$$

对 $\lambda_1=\lambda_2=1,$ 解线性方程组 $\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=o\Rightarrow x_1-x_2-x_3=0,$ 基础解系为：

$$\xi_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\xi_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},$$

其全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2\quad(k_1,k_2$ 不全为零）；

对 $\lambda_3=-2$，解线性方程组 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=o\Rightarrow\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$，基础解系为：

$$\xi_3=(1,-1,-1)^{\mathrm{T}},$$

其全部特征向量为 $k_3\xi_3\quad(k_3\neq 0)$；

（3）正交规范化得：$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\ \ \beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)$；$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，则所

求正交变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \mathbf{0} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，变换之下的标准形为：$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2-2\boldsymbol{y}_3^2$；

（4）由正交变换保持向量的长度不变，则 $\|\boldsymbol{X}\|=\|\boldsymbol{Y}\|=\mathbf{1}$，并注意到 $\mathbf{0}\le \boldsymbol{y}_3^2\le \mathbf{1}$，则

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2-2\boldsymbol{y}_3^2=\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2+\boldsymbol{y}_3^2-3\boldsymbol{y}_3^2=\mathbf{1}-3\boldsymbol{y}_3^2,$$

且有 $-2\le 1-3y_3^2\le 1$，即 f 的最大值为 1，最小值为 -2。比如令 $\boldsymbol{Y}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，有

$\min f=-2$，令 $\boldsymbol{Y}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，有 $\max f=1$。

七、解 1、令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，得

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_1+2k_2+3k_3=0 \\ k_1+3k_2+tk_3=0 \end{cases}，且 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix}=t-5,$$

即 $t\ne 5$ t=5 时，方程组只有零解，相应地，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

再由 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 得方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-3 \\ x_1+2x_2+3x_3=8 \\ x_1+3x_2+2x_3=2 \end{cases},$$

解得 $\beta=-\dfrac{25}{3}\alpha_1-\dfrac{1}{3}\alpha_2+\dfrac{17}{3}\alpha_3$

解 2：令 $B=(\alpha_1+\beta,\ \alpha_2+\beta,\ \dots\ \alpha_k+\beta,\ \beta)$，则 $B:(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_k,\ \beta)$ 但 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_k,\ \beta$ 线性无关，否则由 $\lambda\beta+\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k=O$，必有

$$\beta=\mu_1\alpha_1+\cdots+\mu_k\alpha_k,$$

再注意到 $A\beta\ne O$ 而 $A(\mu_1\alpha_1+\cdots+\mu_k\alpha_k)=O$，得出矛盾。由于 $B:(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots\ \alpha_k,\ \beta)$，则由等价阵有相同的秩知 B 是列满秩，从而向量组

$$\alpha_1+\beta,\ \alpha_2+\beta,\ \dots\ \alpha_k+\beta,\ \beta$$

线性无关。