Taller 1 Metodos matematicos para fisicos

3. Considere lo expuesto en la sección 1.4.3 y demuestre que:

① $$\boxed{A^{i'}_{k}\,\tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k}}$$

y además como un caso especial, establecer la relación con los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$$

Tenemos en cuenta $x^{i} \rightarrow$ como coordenadas originales y $x^{i'}$ como las transformadas, la matriz A_k se define de la siguiente forma:

$$A^{i'}_{k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}}$$

su inversa: $$\tilde{A}^{j}_{i'} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{k}} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k}}$$

Teniendo en cuenta esto; delta Kronecker δ^{j}_{k} y ya tenemos el producto de $\tilde{A}_{i'} A^{i'}_{k}$, por ello

② $$\boxed{A^{i'}_{k}\,\tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k}}$$

Cosenos directores:

Tenemos $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\cos(\alpha) = v_1 \quad , \quad \cos(\beta) = v_2$$

$$\cos(\gamma) = v_3$$

$$\rightarrow |\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$$

4. Considere el radio vector posición $r = x^i \hat{i}_i \equiv x\hat{i} + y\hat{j}$ en $\mathbb{R}^2$, Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demuestre en cuales casos las componentes de r transforman como verdaderas componentes de vectores.

$(x,y) \to (-y,x)$, $(x,y) \to (x,-y)$, $(x,y) \to (x-y, x+y)$,
$(x,y) \to (x+y, x-y)$

$$r = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$x = ax + by, \quad y = cx + dy$$

a, b, c, d = constantes $\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^T A = I}$$

1. $(x,y) \to (-y,x)$

$$x = -y, \quad y = x$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Preserva el carácter vectorial.

2. $(x,y) \to (x,-y)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$$x = x, \quad y = -y$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Preserva el carácter vectorial.

3. $(x,y)\to(x-y,\ x+y)$

$x = x-y$

$y = x+y$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I \neq$ Identidad

$\boxed{\text{No preserva el carácter vectorial.}}$

4. $(x,y)\to(x+y,\ x-y)$

$x = x+y,$

$y = x-y$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$ Identidad $\neq I$

Se puede observar que el punto 4 es igual al punto 3, respecto a respuesta.

$\boxed{\text{No preserva el carácter vectorial.}}$

- DE LA SECCIÓN 1.5.7. RESUELVA LOS EJERCICIOS 2a, 2b y 2f:

2. Considere que:

$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x^i \hat{i}_i$

$a = a(r) = a(x,y,z) = a^i(x,y,z)\,\hat{i}_i$ y $b = b(r) = b(x,y,z) = b^i(x,y,z)$

$\phi = \phi(r) = \phi(x,y,z)$ y $\psi = \psi(r) = \psi(x,y,z)$

Utilizando la notación de índices e inspirándose en el ejemplo 1.14 demuestre las siguientes identidades vectoriales:

(c). $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

$(\nabla(\phi\psi))_i = \partial_i(\phi\psi)$

$\hookrightarrow \partial_i(\phi\psi) = \phi\partial_i\psi + \psi\partial_i\phi$ $\Rightarrow$ Ahora vectorialmente:

$$\boxed{\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi}$$

d) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})$ ¿Qué puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot\vec{a})$?

Usamos: $\partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j a_k = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k$

$\partial_i\partial_j$ es simétrico en i,j

ε_{ijk} es antisimétrico

$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k = 0$

Para

$\nabla\times(\nabla\cdot\vec{a})$

Nosotros tenemos en cuenta que $\nabla\cdot\vec{a}$ forma un escalar. también sabemos que el producto vectorial no está definido para un escalar. Por ello $\nabla\times(\nabla\cdot\vec{a})$ no es válido.

f) $\nabla\times(\nabla\times a) = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\nabla\times a)_k$

$= \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{kmn}\partial_m a_n$

$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j\partial_m a_n = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\partial_j\partial_m a_n$

$= (\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m)\partial_j\partial_m a_n$

$= \delta^i_m\delta^j_n\partial_j\partial_m a_n - \delta^i_n\delta^j_m\partial_j\partial_m a_n$

$= \partial_m\partial_m\delta^j_n\partial_j a_n - \delta^i_n a_n\delta^j_m\partial_j\partial_m$

$= \partial_i(\partial_j a_n) - a_i(\partial_j\partial_m) \Rightarrow \nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a$

Scanned with CamScanner

DE LA SECCIÓN 1,6,5 RESUELVA LOS EJERCICIOS 2, 5 y 6.

2. Demuestre:

a). $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$

b). $\sin(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)$

$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

$\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = [\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]^3$

$= \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha) + i[3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)]$

$\Downarrow$

a) $\Rightarrow \cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$

b) $\Rightarrow \sin(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)$

5. Encuentre todas las raíces de la siguiente expresión

a) $\sqrt{2i}$

b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

c) $(-1)^{1/3}$

d) $8^{1/6}$

e) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$

$z^{1/n} = [|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))]^{1/n}$

$= |z|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

$\forall k = 0, 1, 2, 3 \ldots n-1.$

a) $z^2 = 2i \Rightarrow z = \sqrt{2i}$

$|z| = 2$

$\theta = \pi/2$

$n = 2$

$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$z_0 = -1-i$

b) $z = 1 - i\sqrt{3} \to |z| = 2 \quad \theta = -\pi/3$

$z_0 = \sqrt{2}\,[\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)]$

$z_0 = \sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2$

$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]$

$z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$

c) $z = -1 \to |z| = 1 \quad \theta = \pi \implies z_0 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) =$

$z_0 = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2$

$z_1 = \cos(1\pi) + i\sin(\;\pi)$ $\qquad z_2 = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)$

$z_1 = -1$ $\qquad z_2 = \frac{1}{2} - i\sqrt{3}/2$

d) $z = 8 \to |z| = 8 \quad \theta = 0$

$z_0 = \sqrt{2}\,[\cos(0) + i\sin(0)]$ $\qquad z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$z_0 = \sqrt{2}$ $\qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$ $\qquad z_3 = \sqrt{2}\,[\cos(\pi) + i\sin(\pi)]$

$z_2 = \sqrt{2}\left(-0{,}5 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\qquad z_3 = -\sqrt{2}$

$z_4 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$z_4 = \sqrt{2}\left(-0{,}5 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $z = -8 - 8\sqrt{3}i \to |z| = 16 \quad \theta = \frac{4}{3}\pi$

$z_0 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ $\qquad z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]$

$z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ $\qquad z_1 = -\sqrt{3} + i$

$z_2 =$