Taller de problemas

José Pablo Sosa Saavedra

Jorge Andres Silva

10. Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficiento reales:

$$|p_n\rangle \Longleftrightarrow p(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

Tenemos

$$p(x)+q(x) \quad + \begin{array}{l} p(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ q(x) = b_0 + b_0 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \end{array} \Bigg\} \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

✓

Tenemos

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x^1 + \lambda a_2 x^2 + \ldots \lambda a_n x^n \left\{ \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i \right.$$

✓

b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿P_n será un espacio vectorial? ¿Porqué?

• Si los coeficientes a_i son enteros P_n no sería un espacio vectorial debido a que no sería cerrado frente a la multiplicación por escalares. Ej: $p(x) = 3 \in P_n^{\mathbb{Z}}$ entonces $p(x) \cdot \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \notin P_n^{\mathbb{Z}}$

c) ¿Cual de los siguientes subconjuntos de P_n es un sub-espacio vectorial?

i. El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n=1$.

Tomemos en cuenta:

i. El vector 0 de V está en W

ii. W es cerrado bajo la suma: si $u, v \in W$ entonces $u+v \in W$.

iii. W es cerrado bajo la multiplicación por escalares: si $u \in W$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $cu \in W$.

i. Sol:

i. El vector 0 se encuentra, $(P(x)=0) \rightarrow \sum_{i=0}^{n} 0x^i$ ✓

ii. $p(x) = x^2 + x$
$q(x) = -x^2 + 1$ } Polinomios de grado 2

entonces $p(x) + q(x) = (\cancel{x^2} + x) - \cancel{x^2} + 1$
$= \boxed{x^0 + 1} \rightarrow$ grado 1

- Me detendré ahí ya que el objetivo se resolvió con esto.

i. NO ES SUBESPACIO

ii. El polinomio 0 y todos los polinomios de grado par.

ii. Sol:

i. El $\vec{v}$ 0, o en el caso $p(x)=0$ está ✓

ii. Podemos saber por lógica que este no siempre será cerrado bajo la suma sin embargo hagamos algunos ejemplos:

$p(x) + q(x) \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} p(x) = x^2 \\ q(x) = x^6 + x^4 \end{array}\right\} x^2 + x^6 + x^4$ ✓

$\left.\begin{array}{l} p(x) = 2x^2 + 5x^4 \\ q(x) = 3x^2 + 3x^8 \end{array}\right\} 2x^2 + 3x^2 \Rightarrow 5x^2 + 5x^4 + 3x^8$ ✓

NO Cumple con ii ✓

iii. Pero ahora con un ejemplo muy sencillo se desmorona todo:

$p(x) + q(x) \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} p(x) = x^2 + x \\ q(x) = -x^2 + 1 \end{array}\right\} \cancel{x^2 - x^2}\ \boxed{x + 1}$

NO ES SUBESPACIO

Grado 1

iii. Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n \geq 1$)

Tenemos:

$p(x) = x\,q(x)$

i: Contiene el 0 (~~p(x) = 0 q(x) = 0~~) ($0 = x \cdot 0$)

ii. Sol:

$p(x) = x\,q(x) \ \wedge\ r(x) = x\,s(x)$

~~$0\,p(x) = x \cdot c\,q$~~

$p(x) + r(x) = x\,(q(x) + s(x))$ ✓

Se cumple.

iii. Sol: $p(x) = x\,q(x)$

$\alpha\,p(x) = x\,(\alpha\,q(x))$ ✓

Cumple los tres parametros. ES SUBESPACIO $\Rightarrow$ iii

iv. Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

i. Sol: $\boxed{Sí}$ $0 = (x-1)\cdot 0$ ✓

ii. $\left.\begin{array}{l} p(x) = (x-1)\,q(x) \\ r(x) = (x-1)\,s(x) \end{array}\right\}$ $p(x) + r(x) = (x-1)\,(q(x) + s(x))$ ✓

iii. $p(x) = (x-1)\,q(x) \Rightarrow \alpha\, p(x) = (x-1)\,(\alpha\, q(x))$

ES SUBESPACIO ✓

6. a). Compruebe si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, analogía a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

Tenemos:

$|q\rangle = a + bi + cj + dk \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Suma:

$(a,b,c,d) + (\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}) = (a+\bar{a},\, b+\bar{b},\, c+\bar{c},\, d+\bar{d})$

Multiplicación β:

$\beta\,(a,b,c,d) = (\beta a,\, \beta b,\, \beta c,\, \beta d)$

Tenemos: $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^4$

$\phi\,(a + bi + cj + dk) = (a,b,c,d). \Rightarrow \forall\, p, q \in \mathbb{H}$ y $\beta \in \mathbb{R}$

$\phi\,(p+q) = \phi(p) + \phi(q) \qquad \phi\,(\beta p) = \beta\,\phi(p)$

Tenemos

$p = (a, b, c, d)$, $q = (\acute{a}, \acute{b}, \bar{c}, \bar{d})$, $r = (\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}', \bar{d})$

y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

Suma:

① $p + q \in \mathbb{H}$

② $p + q = q + p$

③ $(p+q) + r = p + (q+r)$

④ $0 = (0,0,0,0)$ y $p + 0 = p$

⑤ $-p = (-a, -b, -c, -d)$ y $p + (-p) = 0$

Escalar: $\alpha p \in \mathbb{H}$

$\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$

$(\alpha+\beta)p = \alpha p + \beta p$

$(\alpha\beta)p = \alpha(\beta p)$

$1 \cdot p = p$

b). Dados (vale) dos cuaterniones $|b\rangle \equiv (b^0, b)$ y $|r\rangle \equiv (r^0, r)$, y su tabla de multiplicación muestre que el producto entre esos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, d) = (b^0 r^0 - b \cdot r, r^0 b + b^0 r + b \times r)$$

Tenemos entonces:

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b^0, b) \odot (r^0 + r)$$

$$= b^0 r^0 + b^0 r + b r^0 + r^0 b + b \odot r$$

$$b \odot r = (b^1 |q_1\rangle + b^2 |q_2\rangle + b^3 |q_3\rangle) \odot (r^1 |q_1\rangle + (r_2 |q_2\rangle$$

$$+ (r_3 |q_3\rangle)$$

Teniendo en cuenta: $|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = -\delta^i_j + \varepsilon_{ijk}|q_k\rangle$

$$b \odot r = \sum_{i=1}^{3} b^i r^i + \sum_{ij,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} b^i r^j |q_k\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = b^0 r^0 + b^0 r + r^0 b - b\cdot r + b\times r$$

$$\Downarrow$$

$$|d\rangle = (d^0, d) = (b^0 r^0 - b\cdot r,\ r^0 b + b^0 r + b\times r$$

c). Ahora con índices: dados $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$, compruebe que el producto $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser escrito de la forma:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$$

donde a representa el número, $S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha$ (recuerde que los índices latinos toman los valores ($j, k, l = 1,2,3$), mientras $\alpha = 0,1,2,3$) donde $S^{(ij)}$ indica $S^{ji} = S^{ij}$, que la cantidad S^{ij} es simétrica, y por lo tanto $(S^{\alpha j}\delta^0_\alpha + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha)|q_j\rangle$

Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de elementos antisimétricos en j y k:

$$A^{[jk]i} \to A^{jki} = -A^{kji} \to (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k)|q_i\rangle$$

Sol:

$$|q_0\rangle \odot |q_\beta\rangle = |q_\beta\rangle$$

$$|q_j\rangle \odot |q_k\rangle = -\delta^j_k |q_0\rangle + \varepsilon_{jkl}|q_l\rangle$$

Tenemos $(a|q_0\rangle)$: $\to$

$$b^0 r^0 (|q_0\rangle \odot |q_0\rangle) + b^j r^k (|q_j\rangle \odot |q_k\rangle) = b^0 r^0 |q_0\rangle - b^j r^k \delta_{jk} |q_0\rangle$$

$$a = b^0 r^0 - b \cdot r$$

Simetrico $\rightarrow$ $(S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle)$

$$b^0 r^j (|q_0\rangle \odot |q_j\rangle) + b^j r^0 (|q_j\rangle \odot |q_j\rangle) = b^0 r^j |q_j\rangle + b^j r^0 |q_j\rangle$$

$$S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha = b^0 r^j + b^j r^0 \qquad S^{(\alpha j)} = S^{(j \alpha)}$$

Antisimetrico $\rightarrow$ $(A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle)$

$$b^j r^k (|q_j\rangle \odot |q_k\rangle) = b^j r^k \varepsilon_{jki} |q_i\rangle$$

$$A^{[jk]i} = \varepsilon_{jki}$$

$$A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle = \varepsilon_{jki} b_j r_k |q_i\rangle = (b \times r) |q_i\rangle$$

d) Identifique las cantidades: a, $S^{(ij)}$ y $A^{[jk]i}$, en terminos de las componentes de los cuaterniones. ¿El producto de cuaterniones $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ será un vector, pseudovector o ninguno de las anteriores? Explique porqué.

Sea $|a\rangle = (a_0, a)$ y $|r\rangle = (r_0, r)$, donde $a_0, r_0 \in \mathbb{R} \rightarrow$ escalares

$a, r \in \mathbb{R}^3 \rightarrow$ vectores

$$a = a_0 r_0 - a \cdot r = a_0 r_0 - \sum_{i=1}^{3} a_i r_i$$

Simetrica $\rightarrow$ $S^{(ij)} = a_i r_j + a_j r_i$

Asimetrica $\rightarrow$ $A^{[k]} = \varepsilon^{kij} a_i r_j = (a \times r)^k$

$\downarrow$

$|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle = (a_0 r_0 - a \cdot r,\ a_0 r + r_0 a + a \times r)$

Según esto podemos concluir que $|d\rangle$ no es, en general, ni vector, ni pseudovector: mezcla ambos (salvo casos especiales como $a \times r = 0$ o alguna parte nula.

e). Comprueba si las matrices de Pauli y la identidad

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pueden representar la base de los cuaterniones $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$ Seguidamente muestre que matrices complejas 2x2 del tipo: $|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$

Pueden ser consideradas como cuaterniones, donde $z = x + yi$ y $w = a + bi$ son números complejos. Las matrices de Pauli aparecen en mecánica cuántica donde se tiene en cuenta la interacción del spin de una partícula con un campo electromagnético externo y en otras notas los consideramos en varios momentos (ver, por ejemplo A.3.7. y 9.6.6)

Tengamos en cuenta:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$$

$\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$i \leftrightarrow i\sigma_1, \; j \leftrightarrow i\sigma_2, \; k \leftrightarrow i\sigma_3$

$(i\sigma_1)^2 = i^2 \sigma_1^2 = (-1)(I) = -I$

$(i\sigma_2)^2 = i^2 \sigma_2^2 = (-1)(I) = -I$

$(i\sigma_3)^2 = i^2 \sigma_3^2 = (-1)(I) = -I$

$i = -i\sigma_1, j = -i\sigma_2, k = -i\sigma_3$

$\Downarrow$

$i^2 = (-i\sigma_1)^2 = (-i)^2 \sigma_1^2 = (-1)(I) = -I$

$j^2 = (-i\sigma_2)^2 = (-i)^2 \sigma_2^2 = (-1)(I) = -I$

$k^2 = (-i\sigma_3)^2 = (-i)^2 \sigma_3^2 = (-1)(I) = -I$

$ij = (-i\sigma_1)(-i\sigma_2) = (-i)(-i)\sigma_1\sigma_2 = i^2(i\sigma_3) = (-1)(i\sigma_3) = -i\sigma_3 = k$

Queremos tener; $ij = k$ $\quad -i\sigma_3 = k$ ✓

Así mismo con $jk = i$ $ki = j$ y los anti conmutativos.

$\Rightarrow$ las matrices $(I, -i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3)$ forman una base para los cuaterniones.

y

$(I, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3)$

2. $\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$

Sea $z = x + yi$, $w = a + bi$ $\forall\, a, b, x, y \in \mathbb{R}$

Reescribimos:

$$Q = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+yi & a+bi \\ -a+bi & x-yi \end{pmatrix}$$

$$Q = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$q = x + ai + bj + yk \leftrightarrow \begin{pmatrix} x+yi & a+bi \\ -a+bi & x-yi \end{pmatrix}$$

$$1 \leftrightarrow I$$

$$i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$$

$$j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2$$

$$k \leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3$$

$$Q = xI + a(i\sigma_1) + b(-i\sigma_2) + y(i\sigma_3)$$

$$q = x + ai + bj + yk$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$, $\forall\, z, w \in \mathbb{C}$

Problema (f)

Enunciado. Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es la matriz identidad y las matrices reales 4×4:

$$q_0 = I_4, \qquad q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique que satisfacen la tabla de multiplicación de $1, i, j, k$:

$$q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = -I_4, \qquad q_1 q_2 = q_3, \quad q_2 q_3 = q_1, \quad q_3 q_1 = q_2,$$

y que al invertir el orden aparecen los signos negativos.

Resolución

Trabajaremos por bloques 2×2. Introducimos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con lo cual

$$q_1 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \qquad q_2 = \begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix}, \qquad q_3 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Cuadrados

(a) $q_1^2 = -I_4$.

$$q_1^2 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos J^2 entrada por entrada:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

Por tanto $q_1^2 = \operatorname{diag}(-I_2, -I_2) = -I_4$.

(b) $q_2^2 = -I_4$.

$$q_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-S)S & 0 \\ 0 & S(-S) \end{pmatrix}.$$

Primero S^2:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Así, $(-S)S = -(S^2) = -I_2$ y $S(-S) = -(S^2) = -I_2$, luego $q_2^2 = -I_4$.

(c) $q_3^2 = -I_4$**.**

$$q_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(-D) & 0 \\ 0 & (-D)D \end{pmatrix}.$$

Calculamos D^2:

$$D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-1) + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

De aquí, $D(-D) = -(D^2) = -I_2$ y $(-D)D = -(D^2) = -I_2$, por lo que $q_3^2 = -I_4$.

2. Productos directos q_1q_2, q_2q_3, q_3q_1

(a) $q_1q_2 = q_3$**.**

$$q_1q_2 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & J(-S) \\ JS & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos JS:

$$JS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -D,$$

de modo que $JS = -D$ y entonces $J(-S) = -(JS) = D$. Sustituyendo:

$$q_1q_2 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} = q_3.$$

(b) $q_2q_3 = q_1$**.**

$$q_2q_3 = \begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SD & 0 \\ 0 & SD \end{pmatrix}.$$

Calculamos DS:

$$\begin{aligned} DS &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -J. \end{aligned}$$

Así,

$$q_3q_2 = \operatorname{diag}(-J, -J) = -\operatorname{diag}(J, J) = -q_1.$$

Calculamos DJ:

$$DJ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -S.$$

Así, $q_3q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix} = q_2$.

3. Orden invertido (anticomutatividad)

(a) $q_2q_1 = -q_3$**.**

$$q_2q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -SJ \\ SJ & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos SJ:

$$SJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

Luego

$$q_2q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} = -q_3.$$

(b) $q_3q_2 = -q_1$**.**

$$q_3q_2 = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DS & 0 \\ 0 & DS \end{pmatrix}.$$

Calculamos DS:

$$DS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 & (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -J.$$

Así,

$$q_3q_2 = \operatorname{diag}(-J,-J) = -\operatorname{diag}(J,J) = -q_1.$$

(c) $q_1q_3 = -q_2$**.**

$$q_1q_3 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & JD \\ -JD & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos JD:

$$JD = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S.$$

Entonces

$$q_1q_3 = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{pmatrix} = -q_2.$$

Problema (g)

Enunciado. Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\widetilde{\langle a \mid b\rangle} \;=\; |a\rangle^{*} \odot |b\rangle.$$

donde $a = a^0\, q_0 + a^i\, q_i$ y $b = b^0\, q_0 + b^i\, q_i$ son cuaterniones cartesianos, $\overline{a} = a^0\, q_0 - a^i\, q_i$ es el conjugado y $\odot$ denota la multiplicación de cuaterniones. Se usa la convención de Einstein $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ y la tabla

$$q_i\, q_j = -\delta_{ij}\, q_0 + \varepsilon_{ijk}\, q_k, \qquad q_0 \text{ es la unidad.}$$

Resolución

Expansión explícita de $\overline{a} \odot b$

Primero se expande por distributividad:

$$\overline{a}\, b = (a^0\, q_0 - a^i\, q_i)\,(b^0\, q_0 + b^j\, q_j) = a^0 b^0\, q_0 + a^0 b^j\, q_j - b^0 a^i\, q_i - a^i b^j\, q_i q_j.$$

Usando $q_i q_j = -\delta_{ij}\, q_0 + \varepsilon_{ijk}\, q_k$,

$$-a^i b^j\, q_i q_j = -a^i b^j \big(-\delta_{ij}\, q_0 + \varepsilon_{ijk}\, q_k \big) = a^i b^i\, q_0 \;-\; a^i b^j\, \varepsilon_{ijk}\, q_k.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\overline{a}\, b = \big(a^0 b^0 + a^i b^i\big)\, q_0 + \big(a^0 b^k - b^0 a^k - \varepsilon_{kij}\, a^i b^j\big)\, q_k}$$

es decir, su *parte escalar* es

$$\mathrm{Sc}(\overline{a}b) = a^0 b^0 + a^i b^i,$$

y su *parte vectorial* es

$$\mathrm{Vec}(\overline{a}b) = \big(a^0 b - b^0 a - a \times b\big),$$

donde $(a \times b)^k = \varepsilon_{kij} a^i b^j$.

Propiedades que sí cumple $\langle a \mid b \rangle = \overline{a}b$

Bilinealidad real. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\langle \alpha a + \beta c \mid b \rangle = \overline{\alpha a + \beta c}\, b = (\alpha \overline{a} + \beta \overline{c})\, b = \alpha\, \overline{a} b + \beta\, \overline{c} b = \alpha \langle a \mid b \rangle + \beta \langle c \mid b \rangle,$$

y análogamente en el segundo argumento (porque los reales conmutan).

Simetría hermítica. Como $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$, se tiene

$$\langle b \mid a \rangle = \overline{b}\, a = \overline{\overline{a} b} = \big(\langle a \mid b \rangle\big)^*.$$

Positividad. Para $a \neq 0$,

$$\langle a \mid a \rangle = \overline{a}\, a = (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \;\in\; \mathbb{R}_{>0},$$

porque en la expansión anterior la parte vectorial se anula (ya que $a \times a = 0$ y $a^0 a - a^0 a = 0$). Luego $\langle a \mid a \rangle = 0$ si y sólo si $a = 0$.

Por qué *no* es un producto interno real

En un espacio vectorial real un producto interno debe tomar valores en $\mathbb{R}$. Pero en general $\overline{a}b$ *no* es real, pues su parte vectorial no se anula.

Contraejemplo concreto. Tome $a = q_1$ (esto es, $a^0 = 0$, $a^1 = 1$, $a^2 = a^3 = 0$) y $b = q_2$. Entonces $\overline{a} = -q_1$ y

$$\langle a \mid b \rangle = \overline{a} b = (-q_1)\, q_2 = -(q_1 q_2) = -\, q_3,$$

que no es real. Por lo tanto, *la definición $\langle a \mid b \rangle = \overline{a}b$ <u>no</u> es un producto interno real.*

Problema (h)

Enunciado. Modifique la definición anterior de forma que

$$\langle a \mid b \rangle \;=\; \frac{1}{2}\left[\, \widetilde{\langle a \mid b \rangle} \;-\; |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a \mid b \rangle} \odot |q_1\rangle \,\right],$$

y compruebe si esta definición *compleja* del producto interno cumple todas las propiedades. Obsérvese que un cuaternión de la forma $|f\rangle = f^0 + f^1\,|q_1\rangle$ es un número complejo (con unidad imaginaria $|q_1\rangle$).

Resolución

Como en (g), se toma

$$\widetilde{\langle a \mid b \rangle} \;=\; |a\rangle^* \odot |b\rangle \;=\; \overline{a}\, b.$$

Se escribe cualquier cuaternión x como

$$x = x^0 + x^1 q_1 + x^2 q_2 + x^3 q_3, \qquad q_i q_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} q_k.$$

La proyección $P(x) := \dfrac{1}{2}\big[x - q_1 x q_1\big]$

Tomemos $x = x^0 + x^1 q_1 + x^2 q_2 + x^3 q_3$ y calculemos $q_1 x q_1$ explícitamente:

$$\begin{aligned} q_1 x q_1 &= q_1(x^0)q_1 + q_1(x^1 q_1)q_1 + q_1(x^2 q_2)q_1 + q_1(x^3 q_3)q_1 \\ &= x^0(q_1^2) + x^1(q_1 q_1)q_1 + x^2(q_1 q_2)q_1 + x^3(q_1 q_3)q_1 \\ &= -x^0 \;+\; (-x^1)q_1 \;+\; x^2\, q_3 q_1 \;+\; x^3\,(-q_2)q_1 \\ &= -x^0 \;-\; x^1 q_1 \;+\; x^2\, q_2 \;+\; x^3\, q_3, \end{aligned}$$

donde se usó $q_1^2 = -1$, $q_1 q_2 = q_3$, $q_3 q_1 = q_2$, $q_1 q_3 = -q_2$ y $q_2 q_1 = -q_3$.

Por tanto,

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{2}\big[x - q_1 x q_1\big] = \frac{1}{2}\Big[(x^0 + x^1 q_1 + x^2 q_2 + x^3 q_3) - (-x^0 - x^1 q_1 + x^2 q_2 + x^3 q_3)\Big] = x^0 + x^1 q_1}.$$

Luego $P(x)$ es exactamente la *parte compleja* de x en el subálgebra $\mathbb{C}_{q_1} := \{\, \alpha + \beta\, q_1 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,\}$. En particular, $P(x) \in \mathbb{C}_{q_1}$ y P es lineal sobre $\mathbb{R}$.

Además, si $\lambda \in \mathbb{C}_{q_1}$, entonces λ *conmuta* con q_1, y se obtiene

$$P(x\,\lambda) = \frac{1}{2}\big[x\lambda - q_1 x \lambda q_1\big] = \frac{1}{2}\big[x\lambda - (q_1 x q_1)\lambda\big] = P(x)\,\lambda,$$

$$P(\lambda\, x) = \frac{1}{2}\big[\lambda x - q_1 \lambda x q_1\big] = \frac{1}{2}\big[\lambda x - \lambda(q_1 x q_1)\big] = \lambda\, P(x),$$

es decir, P es lineal a derecha y a izquierda respecto a escalares en $\mathbb{C}_{q_1}$.

Finalmente, la conjugación cuaterniónica restringida a $\mathbb{C}_{q_1}$ coincide con la conjugación compleja: si $x \in \mathbb{H}$, entonces

$$P(x)^* = \frac{1}{2}\big[x^* - (q_1 x q_1)^*\big] = \frac{1}{2}\big[x^* - q_1 x^* q_1\big] = P(x^*),$$

pues $q_1^* = -q_1$ y $(-q_1)\, x^*\, (-q_1) = q_1 x^* q_1$.

Definición y rango del nuevo producto interno

Definimos

$$\boxed{\langle a \mid b\rangle := P\Big(\widetilde{\langle a \mid b\rangle}\Big) = \frac{1}{2}\Big[\,\overline{a}\,b \;-\; q_1\,(\overline{a}\,b)\,q_1\Big].}$$

Por el Paso 1, $\langle a \mid b\rangle \in \mathbb{C}_{q_1}$ (es "un número complejo" con unidad q_1).

Sesquilinealidad sobre $\mathbb{C}_{q_1}$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_{q_1}$ y c otro cuaternión.

Linealidad en el segundo argumento.

$$\langle a \mid b\,\alpha + \; c\,\beta\rangle = P\big(\overline{a}(b\alpha + c\beta)\big) = P\big((\overline{a}b)\alpha + (\overline{a}c)\beta\big) = P(\overline{a}b)\,\alpha + P(\overline{a}c)\,\beta = \langle a \mid b\rangle\,\alpha + \langle a \mid c\rangle\,\beta,$$

donde se usó la $\mathbb{C}_{q_1}$-linealidad a derecha de P.

Conjugado-linealidad en el primer argumento.

$$\langle a\,\alpha + \; c\,\beta \mid b\rangle = P\big(\overline{a\alpha + c\beta}\;b\big) = P\big(\overline{\alpha}\,\overline{a}\,b + \overline{\beta}\,\overline{c}\,b\big) = \overline{\alpha}\,P(\overline{a}b) + \overline{\beta}\,P(\overline{c}b) = \alpha^*\,\langle a \mid b\rangle + \beta^*\,\langle c \mid b\rangle,$$

donde se usó la $\mathbb{C}_{q_1}$-linealidad a izquierda de P y que $\overline{\alpha} = \alpha^*$ en $\mathbb{C}_{q_1}$.

Simetría hermítica

Usando $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ y la compatibilidad $P(x^*) = P(x)^*$,

$$\langle b \mid a\rangle = P(\overline{b}a) = P\big((\overline{a}b)^*\big) = P(\overline{a}b)^* = \big(\langle a \mid b\rangle\big)^*.$$

Positividad

Para $b = a$,

$$\langle a \mid a\rangle = P(\overline{a}a).$$

Pero $\overline{a}a = (a^0)^2 + a^{12} + a^{22} + a^{32} =: r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces

$$\langle a \mid a\rangle = \frac{1}{2}\big[r - q_1 r q_1\big] = \frac{1}{2}\big[r - r(q_1^2)\big] = \frac{1}{2}\big[r - r(-1)\big] = r \;\geq\; 0,$$

y $\langle a \mid a\rangle = 0$ si y sólo si $a = 0$.

La aplicación

$$\boxed{\langle a \mid b\rangle = \frac{1}{2}\Big[\;\widetilde{\langle a \mid b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a \mid b\rangle} \odot |q_1\rangle\;\Big] = P(\overline{a}b) \in \mathbb{C}_{q_1}}$$

es un **producto interno complejo** sobre el espacio vectorial de cuaterniones visto como espacio sobre $\mathbb{C}_{q_1}$: es sesquilineal (conjugado-lineal en el primer argumento, lineal en el segundo), hermítico $\langle b \mid a\rangle = \langle a \mid b\rangle^*$ y positivo definido $\langle a \mid a\rangle > 0$ para $a \neq 0$. Además, P extrae precisamente la componente "compleja" $x^0 + x^1 q_1$ de cualquier cuaternión x.

Problema (i)

Enunciado. Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones:

$$n(|a\rangle) \;=\; \big\||a\rangle\big\| \;=\; \sqrt{\langle a \mid a\rangle} \;=\; \sqrt{|a\rangle^{\curlywedge} \;\odot\; |a\rangle}\,.$$

Resolución

Sea un cuaternión

$$|a\rangle \;=\; a^0 + a^1 q_1 + a^2 q_2 + a^3 q_3, \qquad a^\alpha \in \mathbb{R},\; \alpha = 0,1,2,3,$$

con la tabla

$$q_i q_j \;=\; -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\, q_k, \qquad q_0 \equiv 1.$$

El conjugado cuaterniónico es

$$|a\rangle^{\curlywedge} \;=\; a^0 - a^1 q_1 - a^2 q_2 - a^3 q_3.$$

1) Cálculo de $|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle$. Desarrollamos por distributividad:

$$\begin{aligned}
|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle &= (a^0 - a^i q_i)(a^0 + a^j q_j) \\
&= (a^0)^2 + a^0 a^j q_j - a^0 a^i q_i - a^i a^j q_i q_j \\
&= (a^0)^2 - a^i a^j(-\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk} q_k) \\
&= (a^0)^2 + a^i a^i \;-\; a^i a^j \varepsilon_{ijk} q_k.
\end{aligned}$$

Como $a^i a^j$ es simétrico en (i,j) mientras que ε_{ijk} es antisimétrico, el término vectorial se anula:

$$a^i a^j \varepsilon_{ijk} q_k \;=\; 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle = (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \;\in\; \mathbb{R}_{\geq 0}}.$$

De aquí

$$\boxed{\big\||a\rangle\big\| = \sqrt{|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle} = \sqrt{(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}.$$

2) Propiedades de norma. Sea $|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{H}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Positividad y definitud. Del punto anterior, $\||a\rangle\| \geq 0$ y $\||a\rangle\| = 0 \iff a^0 = a^1 = a^2 = a^3 = 0 \iff |a\rangle = 0$.

(ii) Homogeneidad.

$$\big\|\lambda|a\rangle\big\|^2 = (\lambda|a\rangle)^{\curlywedge} \odot (\lambda|a\rangle) = \lambda^2\big(|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle\big) = \lambda^2 \||a\rangle\|^2,$$

luego $\|\lambda|a\rangle\| = |\lambda|\, \||a\rangle\|$.

3) Desigualdad de Cauchy–Schwarz (prueba explícita). Definimos el producto interno *real* por

$$\langle a \mid b\rangle_{\mathbb{R}} := \operatorname{Sc}\big(|a\rangle^{\curlywedge} \odot |b\rangle\big) = a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3,$$

que es el producto punto en $\mathbb{R}^4$. Consideremos, para $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) := \big\| |a\rangle + t\,|b\rangle \big\|^2 = \langle a + tb \mid a + tb\rangle_{\mathbb{R}} = \|a\|^2 + 2t\,\langle a \mid b\rangle_{\mathbb{R}} + t^2\|b\|^2.$$

Como $f(t) \geq 0$ para todo t, su discriminante no puede ser positivo:

$$\Delta = 4\,\langle a \mid b\rangle_{\mathbb{R}}^2 - 4\,\|a\|^2\|b\|^2 \;\leq\; 0.$$

De aquí

$$\boxed{\big(\operatorname{Sc}(|a\rangle^{\curlywedge} \odot |b\rangle)\big)^2 = \langle a \mid b\rangle_{\mathbb{R}}^2 \;\leq\; \|a\|^2\|b\|^2}.$$

En particular,

$$\operatorname{Sc}(|a\rangle^{\curlywedge} \odot |b\rangle) \;\leq\; \|a\|\,\|b\|.$$

4) Desigualdad triangular. Calculamos

$$\begin{aligned}
\big\| |a\rangle + |b\rangle \big\|^2 &= \operatorname{Sc}\big((a+b)^{\curlywedge} \odot (a+b)\big) \\
&= \operatorname{Sc}\big(a^{\curlywedge}a\big) + \operatorname{Sc}\big(b^{\curlywedge}b\big) + 2\operatorname{Sc}\big(a^{\curlywedge}b\big) \\
&= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\,\langle a \mid b\rangle_{\mathbb{R}} \\
&\leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\,\|a\|\,\|b\| = \big(\|a\| + \|b\|\big)^2,
\end{aligned}$$

donde en la desigualdad se aplicó Cauchy–Schwarz del punto 3. Tomando raíces (ambos lados no negativos),

$$\boxed{\big\| |a\rangle + |b\rangle \big\| \;\leq\; \||a\rangle\| + \||b\rangle\|}.$$

Problema (j)

Enunciado. Compruebe si un cuaternión definido por

$$\overline{|a\rangle} \;:=\; \frac{|a\rangle^{\curlywedge}}{\|\,|a\rangle\,\|^2}\,,$$

puede ser considerado como el inverso (o elemento simétrico) de $|a\rangle$ respecto a la multiplicación $\odot$.

Resolución

Sea

$$|a\rangle = a^0 + a^1q_1 + a^2q_2 + a^3q_3, \qquad |a\rangle^{\curlywedge} = a^0 - a^1q_1 - a^2q_2 - a^3q_3.$$

La norma definida en (i) es

$$\||a\rangle\|^2 = |a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle = (a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \;=:\; r \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Cálculo de $|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle$ y $|a\rangle \odot |a\rangle^{\curlywedge}$. Del desarrollo explícito (hecho en (i)) se tiene

$$|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle = r\, q_0 = r.$$

Además,

$$|a\rangle \odot |a\rangle^{\curlywedge} = \Big(|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle\Big)^{\curlywedge} = r^{\curlywedge} = r,$$

porque r es real y la conjugación deja invariantes los reales. Por tanto,

$$|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle = |a\rangle \odot |a\rangle^{\curlywedge} = \||a\rangle\|^2.$$

Verificación de la condición de inverso. Defínase

$$\overline{|a\rangle} := \frac{|a\rangle^{\curlywedge}}{\||a\rangle\|^2} \quad (\text{si } |a\rangle \neq 0).$$

Entonces

$$\overline{|a\rangle} \odot |a\rangle = \frac{1}{\|a\|^2}\big(|a\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle\big) = \frac{1}{\|a\|^2}\,\|a\|^2 = q_0 = 1,$$

y análogamente

$$|a\rangle \odot \overline{|a\rangle} = \frac{1}{\|a\|^2}\big(|a\rangle \odot |a\rangle^{\curlywedge}\big) = \frac{1}{\|a\|^2}\,\|a\|^2 = 1.$$

Luego $\overline{|a\rangle}$ es el *inverso* de $|a\rangle$ para $\odot$ cuando $|a\rangle \neq 0$.

Unicidad y caso degenerado. Si $|a\rangle = 0$ entonces $\||a\rangle\|^2 = 0$ y no existe inverso (no se puede dividir por 0). Si x verifica $x \odot |a\rangle = 1$, multiplicando a derecha por $|a\rangle^{\curlywedge}$ se obtiene

$$x = x \odot |a\rangle \odot \frac{|a\rangle^{\curlywedge}}{\|a\|^2} = 1 \odot \frac{|a\rangle^{\curlywedge}}{\|a\|^2} = \overline{|a\rangle},$$

y análogamente desde la izquierda; por tanto el inverso es único.

Propiedad multiplicativa del inverso. Para $|a\rangle, |b\rangle \neq 0$,

$$(|a\rangle \odot |b\rangle)^{\curlywedge} = |b\rangle^{\curlywedge} \odot |a\rangle^{\curlywedge}, \qquad \||a\rangle \odot |b\rangle\|^2 = \|a\|^2\,\|b\|^2,$$

y por tanto

$$\overline{|a\rangle \odot |b\rangle} = \frac{(|a\rangle \odot |b\rangle)^{\curlywedge}}{\|ab\|^2} = \frac{|b\rangle^{\curlywedge}}{\|b\|^2} \odot \frac{|a\rangle^{\curlywedge}}{\|a\|^2} = \overline{|b\rangle} \odot \overline{|a\rangle},$$

lo que concuerda con la regla usual de inversos en álgebras no conmutativas.

Para todo cuaternión no nulo $|a\rangle$,

$$\boxed{\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{\curlywedge}}{\||a\rangle\|^2}}$$

es el **inverso** (elemento simétrico) de $|a\rangle$ respecto a la multiplicación $\odot$, pues satisface simultáneamente $\overline{|a\rangle} \odot |a\rangle = |a\rangle \odot \overline{|a\rangle} = 1$. El inverso existe y es único si y sólo si $|a\rangle \neq 0$.

Problema (k)

Enunciado. Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a la operación multiplicación $\odot$. Construya la tabla de multiplicación para el grupo de cuaterniones.

Resolución

Notación. Escribimos

$$|a\rangle = a^0\, q_0 + a^i\, q_i, \qquad |b\rangle = b^0\, q_0 + b^j\, q_j,$$

con $q_0 \equiv 1$ y, para $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$,

$$q_i q_j = -\,\delta_{ij}\, q_0 + \varepsilon_{ijk}\, q_k, \qquad q_0 q_\alpha = q_\alpha q_0 = q_\alpha.$$

Cerradura

Calculamos explícitamente $|a\rangle \odot |b\rangle$:

$$\begin{aligned}
|a\rangle \odot |b\rangle &= (a^0 q_0 + a^i q_i)(b^0 q_0 + b^j q_j) \\
&= a^0 b^0\, q_0 + a^0 b^j\, q_j + b^0 a^i\, q_i + a^i b^j\, q_i q_j \\
&= a^0 b^0\, q_0 + a^0 b^k\, q_k + b^0 a^k\, q_k + a^i b^j (-\delta_{ij}\, q_0 + \varepsilon_{ijk}\, q_k) \\
&= \underbrace{\big(a^0 b^0 - a^i b^i\big)}_{\in\mathbb{R}}\, q_0 \;+\; \underbrace{\big(a^0 b^k + b^0 a^k + \varepsilon_{kij} a^i b^j\big)}_{\in\mathbb{R}}\, q_k.
\end{aligned}$$

El resultado vuelve a ser una combinación real de q_0, q_1, q_2, q_3, luego $\mathbb{H}$ es cerrada bajo $\odot$.

Asociatividad

Usamos la representación matricial real 4×4 del ítem (f):

$$\mathrm{Rep}(a) = a^0 I_4 + a^1 Q_1 + a^2 Q_2 + a^3 Q_3,$$

donde $Q_0 = I_4$ y Q_1, Q_2, Q_3 satisfacen exactamente la misma tabla de multiplicación que q_1, q_2, q_3. Por construcción,

$$\boxed{\mathrm{Rep}(a \odot b) = \mathrm{Rep}(a)\,\mathrm{Rep}(b)}$$

(primero en la base y luego por bilinealidad).

Mostramos que Rep es inyectiva: si $\mathrm{Rep}(x) = a^0 I_4 + a^1 Q_1 + a^2 Q_2 + a^3 Q_3 = 0_{4\times 4}$, mirando entradas específicas,

$$(1,2)\colon a^1 = 0, \qquad (1,3)\colon -a^3 = 0 \Rightarrow a^3 = 0, \qquad (1,4)\colon -a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 0,$$

y entonces la diagonal $(1,1)$ da $a^0 = 0$. Por tanto $x = 0$ y el núcleo es trivial.

Con esto,

$$\mathrm{Rep}\big((a\odot b)\odot c\big) = \mathrm{Rep}(a\odot b)\,\mathrm{Rep}(c) = \mathrm{Rep}(a)\,\mathrm{Rep}(b)\,\mathrm{Rep}(c) = \mathrm{Rep}(a)\,\mathrm{Rep}(b\odot c) = \mathrm{Rep}\big(a\odot(b\odot c)\big).$$

Como Rep es inyectiva, $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$. Luego $\odot$ es asociativa.

Elemento neutro

De $q_0 = 1$ y las reglas $q_0 q_\alpha = q_\alpha q_0 = q_\alpha$ se deduce

$$q_0 \odot a = a \odot q_0 = a, \qquad \forall\, a \in \mathbb{H}.$$

Así, q_0 es el neutro.

Inversos

Para $a \neq 0$, el ítem (j) probó que

$$a^{-1} = \frac{a^\curlywedge}{\|a\|^2}, \qquad a^\curlywedge a = a a^\curlywedge = \|a\|^2\, q_0,$$

y por tanto $a^{-1} \odot a = a \odot a^{-1} = q_0$. No existe inverso para $a = 0$.

Conclusión de grupo

El conjunto $\mathbb{H}^\times := \mathbb{H} \setminus \{0\}$ con $\odot$ cumple: cerradura, asociatividad, neutro q_0 e inversos. Por tanto,

$(\mathbb{H}^\times, \odot)$ es un **grupo no abeliano**.

La no conmutatividad se ve, por ejemplo, en $q_1 \odot q_2 = q_3$ mientras que $q_2 \odot q_1 = -q_3$.

Tabla de multiplicación básica $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$\odot$	q_0	q_1	q_2	q_3
q_0	q_0	q_1	q_2	q_3
q_1	q_1	$-q_0$	q_3	$-q_2$
q_2	q_2	$-q_3$	$-q_0$	q_1
q_3	q_3	q_2	$-q_1$	$-q_0$

El *grupo de cuaterniones* Q_8

El subgrupo finito generado por $\{\pm q_0, \pm q_1, \pm q_2, \pm q_3\}$ es el clásico

$$Q_8 = \{\pm q_0,\ \pm q_1,\ \pm q_2,\ \pm q_3\},$$

con las reglas anteriores y la propagación de signos $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta) = \alpha(-\beta)$. Su tabla ($8\times 8$) queda:

$\odot$	q_0	$-q_0$	q_1	$-q_1$	q_2	$-q_2$	q_3	$-q_3$
q_0	q_0	$-q_0$	q_1	$-q_1$	q_2	$-q_2$	q_3	$-q_3$
$-q_0$	$-q_0$	q_0	$-q_1$	q_1	$-q_2$	q_2	$-q_3$	q_3
q_1	q_1	$-q_1$	$-q_0$	q_0	q_3	$-q_3$	$-q_2$	q_2
$-q_1$	$-q_1$	q_1	q_0	$-q_0$	$-q_3$	q_3	q_2	$-q_2$
q_2	q_2	$-q_2$	$-q_3$	q_3	$-q_0$	q_0	q_1	$-q_1$
$-q_2$	$-q_2$	q_2	q_3	$-q_3$	q_0	$-q_0$	$-q_1$	q_1
q_3	q_3	$-q_3$	q_2	$-q_2$	$-q_1$	q_1	$-q_0$	q_0
$-q_3$	$-q_3$	q_3	$-q_2$	q_2	q_1	$-q_1$	q_0	$-q_0$

Problema (l) — Preservación de la norma bajo $|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

Enunciado. En $\mathbb{R}^3$, un vector $|v\rangle$ se representa como cuaternión *puro* (*parte escalar nula*) $|v\rangle = v^j\, q_j$. Sea

$$|v'\rangle \;=\; \overline{|a\rangle} \;\odot\; |v\rangle \;\odot\; |a\rangle \;=\; |a\rangle^{\curlywedge}\, |v\rangle\, |a\rangle.$$

Comprobar si este producto conserva la norma, esto es

$$\|\, |v'\rangle \,\|^2 = (v'^1)^2 + (v'^2)^2 + (v'^3)^2 \stackrel{?}{=} (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = \|\, |v\rangle \,\|^2.$$

Resolución

Dos hechos básicos que usaremos. (i) **La parte real (escalar) es cíclica:** para cualesquiera x, y,

$$\mathrm{Sc}(xy) = \mathrm{Sc}(yx).$$

En efecto, $\mathrm{Sc}(xy) = \frac{1}{2}(xy + (xy)^{\curlywedge}) = \frac{1}{2}(xy + y^{\curlywedge}x^{\curlywedge}) = \mathrm{Sc}(yx)$.

(ii) **La norma es multiplicativa:** para x, y,

$$\|xy\|^2 = (xy)^{\curlywedge}(xy) = y^{\curlywedge}x^{\curlywedge}xy = y^{\curlywedge}\left(x^{\curlywedge}x\right) y = \|x\|^2\, y^{\curlywedge}y = \|x\|^2\, \|y\|^2,$$

por ser $\|x\|^2 = x^{\curlywedge}x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, conmutar con todo.

$|v'\rangle$ es de nuevo un cuaternión puro. Tomamos parte escalar:

$$\mathrm{Sc}\big(|v'\rangle\big) = \mathrm{Sc}\big(|a\rangle^{\curlywedge}\, |v\rangle\, |a\rangle\big) = \mathrm{Sc}\big(|v\rangle\, |a\rangle\, |a\rangle^{\curlywedge}\big) = \mathrm{Sc}\big(|v\rangle\, \|a\|^2\big) = \|a\|^2\, \mathrm{Sc}\big(|v\rangle\big) = 0,$$

porque $|v\rangle$ es puro ($\mathrm{Sc}(|v\rangle) = 0$). Luego $|v'\rangle$ también es puro.

Norma de $|v'\rangle$. Aplicamos la multiplicatividad de la norma:

$$\|\, |v'\rangle \,\| = \|\, |a\rangle^{\curlywedge}\, |v\rangle\, |a\rangle \,\| = \|\, |a\rangle^{\curlywedge} \,\|\; \|\, |v\rangle \,\|\; \|\, |a\rangle \,\| = \|a\|\, \|v\|\, \|a\| = \|a\|^2\, \|v\|.$$

Elevando al cuadrado,

$$\boxed{\|\, |v'\rangle \,\|^2 = \|a\|^4\, \|v\|^2.}$$

¿Se preserva la norma euclídea? Para que $\|\, |v'\rangle \,\| = \|\, |v\rangle \,\|$ (o equivalentemente al cuadrado), debe cumplirse

$$\|a\|^2 = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \|a\| = 1.$$

Es decir, la **conjugación por un cuaternión *unidad*** (unitario) preserva la norma. Si $\|a\| \neq 1$, entonces $\|\, |v'\rangle \,\| = \|a\|^2\, \|v\|$ y la norma *no* se conserva (se escala por $\|a\|^2$).