Zbieżność całek postaci 1 rodzaju

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$$

Niech $a>0$. Wtedy

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} \; jest \begin{cases} zbiezna \; dla \; p>1 \\ rozbiezna \; dla \; p \le 1 \end{cases}$$

Kryterium porównawcze

Jeżeli

1. $0 \le f(x) \le g(x)$ dla każdego $x \in [a,\infty)$,
2. funkcje f i g są całkowalne na przedziałach $[a,T]$ dla $T>a$,
3. całka $\int_a^\infty g(x)dx$ jest zbieżna

to całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna.

Kryterium ilorazowe

Niech funkcje dodatnie f i g będą całkowalne na przedziałach $[a,T]$ dla każdego $T>a$ oraz niech $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, gdzie $0<k<\infty$.

Wówczas

całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna $\Leftrightarrow$ całka $\int_a^\infty g(x)dx$ jest zbieżna.

Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

Niech funkcja f będzie całkowalna na przedziałach $[a,T]$ dla każdego $T>a$. Całka $\int_a^\infty f(x)dx$ jest zbieżna bezwzględnie $\overset{def}{\Leftrightarrow} \int_a^\infty |f(x)|dx$ jest zbieżna.

O zbieżności całek 2 rodzaju $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$

Niech $b>0$. Wtedy całka niewłaściwa

$$\int_0^b \frac{dx}{x^p} \; jest \begin{cases} zbiezna \; dla \; p<1 \\ rozbiezna \; dla \; p \ge 1 \end{cases}$$

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Zbieżność szeregów postaci $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$

Szereg

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \; jest \begin{cases} zbiezny \; dla \; p>1 \\ rozbiezny \; dla \; p \le 1 \end{cases}$$

Kryterium d'Alemberta

1. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny.
2. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest rozbieżny.

Kryterium Cauchy'ego

1. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest zbieżny.
2. Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jest rozbieżny

Leibniza o zbieżności szeregu naprzemiennego

Jeżeli

1. ciąg (b_n) jest nierosnący od numeru $n_0 \in N$,
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} b_n$ jest zbieżny.

Promień zbieżności szeregu potęgowego
Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ nazywamy liczbę R określoną równością:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

Cauchy'ego – Hadamarda
Niech $0 < R < \infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$. Wtedy szereg ten jest:
a) zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie przedziału $(x_0 - R, x_0 + R)$,
b) rozbieżny w każdym punkcie zbioru $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$.

Def. 4.1.1 (pochodne cząstkowe pierwszego rzędu)
Niech funkcja f będzie określona na obszarze $D \subset R^2$ oraz niech $(x_0,y_0) \in D$. Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem x w punkcie (x_0,y_0) określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \overset{def}{=} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Dla y to samo.
Pochodne cząstkowe drugiego rzędu
Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ na obszarze $D \subset R^2$ oraz niech $(x_0,y_0) \in D$. Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f w punkcie (x_0,y_0) określamy wzorami:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji w punkcie (x_0,y_0,z_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$, ma postać:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Różniczka funkcji
Różniczką funkcji f w punkcie (x_0,y_0) nazywamy funkcję zmiennych Δx, Δy określoną wzorem:

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

Zastosowanie różniczki funkcji do obliczeń przybliżonych

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$

Zastosowanie różniczki funkcji do szacowania błędów pomiarów

$$\Delta_z \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta_y$$

O pochodnej funkcji złożonej

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Pochodna kierunkowa funkcji

niech $\vec{v} = (v_x, v_y)$ będzie wersorem na płaszczyźnie. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie (x_0,y_0) w kierunku wersora $\vec{v}$ określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Gradient funkcji

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Pochodna kierunkowa

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \circ \vec{v}$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Warunek wystarczający istnienia ekstremum

1. funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu punktu (x_0,y_0),
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$
3. $$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

a) minimum lokalne właściwe, gdy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$$

b) maksimum lokalne właściwe, gdy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$$

O istnieniu i różniczkowalności funkcji uwikłanej

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$

Wtedy na pewnym otoczeniu punktu x_0 istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana $y = y(x)$ spełniająca warunki:

a) $F(x, y(x)) = 0$ dla każdego x z tego otoczenia,

b) $y(x_0) = y_0$,

c) $y'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$ dla każdego x z tego otoczenia.

O ekstremach funkcji uwikłanej

niech

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

$$A = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Wtedy funkcja uwikłana $y = y(x)$ określona przez równanie $F(x,y) = 0$ ma w punkcie (x_0,y_0) ekstremum lokalne właściwe i jest to:

a) minimum, gdy $A > 0$

b) maksimum, gdy $A < 0$.

Równanie stycznej do krzywej określonej równaniem F(x,y)=0, w punkcie (x_o,y_o)

$$y - y_o = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0)$$