

# ĆWICZENIE NR 8

## WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI CIECZY NA PODSTAWIE PRAWA STOKESA

**Cel ćwiczenia:** Badanie ruchu ciał spadających w ośrodku ciekłym, wyznaczenie współczynnika lepkości cieczy metodą Stokesa oraz za pomocą wiskozymetru Höpplera.

**Zagadnienia:** Zjawisko lepkości cieczy. Prawo Stokesa, ruch kulki w cieczy lepkiej.

### 1. Wprowadzenie

Lepkością lub tarcieniem wewnętrznym nazywamy zjawisko występowania sił stycznych przeciwstawiających się przemieszczeniu jednych części ciała względem innych jego części. Zjawisko to powstaje na skutek ruchów cieplnych cząsteczek oraz sił międzycząsteczkowych. W wyniku działania siły tarcia wewnętrznego występującego między warstwami cieczy, poruszająca się warstwa pociąga za sobą warstwy sąsiadujące z nią z prędkością tym bardziej zbliżoną do prędkości własnej, im ciecz jest bardziej lepka. Analogicznie - spoczywająca warstwa cieczy hamuje sąsiadujące z nią poruszające się warstwy.

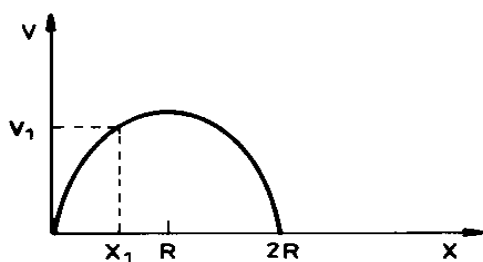
Ze względu na to, że wszystkie rzeczywiste ciecze są lepkie, zjawisko lepkości odgrywa istotną rolę podczas przepływu cieczy oraz podczas ruchu ciała stałego w ośrodku ciekłym.

Podstawową metodą opisu ruchu płynu w hydrodynamice jest metoda Eulera, polegająca na podaniu zależności wartości wektora  $\vec{v}$  prędkości przepływu płynu w różnych punktach przestrzeni, od współrzędnych tych punktów i czasu -  $\vec{v} = f(\vec{r}, t)$ .

Przepływ płynu nazywany ustalonym lub stacjonarnym jeżeli prędkość cieczy w każdym punkcie obszaru zajętego przez ciecz nie zmienia się w czasie, czyli  $\vec{v}$  nie zależy od czasu  $t$ .

Przepływ nazywamy laminarnym lub warstwowym w przypadku, gdy strumień stanowi zespół warstw przemieszczających się jedna względem drugiej bez mieszania. Przy małych prędkościach przepływ cieczy przez rurę gładką jest przepływem laminarnym - warstwowym (prędkość w każdym punkcie jest jednoznacznie określona) - rys.1.

Gdy prędkość przepływu cieczy przekroczy pewną wartość krytyczną, charakterystyczną dla danej cieczy - ruch przestaje być laminarny. Następuje mieszanie różnych warstw cieczy w wyniku tworzących się wirów. Prędkość przestaje być określoną funkcją współrzędnych położenia. Ruch taki nazywamy turbulentnym - wirowym.



**Rys. 1.** Rozkład prędkości cieczy w rurze o przekroju kołowym;  $2R$  - średnica rury

Płyn, w którym nie występuje tarcie wewnętrzne między warstwami cieczy lub można je zaniedbać, nazywamy płynem doskonałym.

Prawo empiryczne określające siłę oddziaływania występującą między dwiema warstwami cieczy (ruch laminarny) podał Newton. Można je wyrazić wzorem

$$|\vec{F}_t| = \eta S \left| \frac{dv}{dx} \right|. \quad (1)$$

Wartość siły  $\vec{F}_t$ , jaką wywierają na siebie nawzajem dwie sąsiadujące ze sobą warstwy płynu, jest proporcjonalna do iloczynu ich powierzchni styku  $S$  i gradientu prędkości  $dv/dx$ . Współczynnik proporcjonalności  $\eta$  nazywamy współczynnikiem lepkości. Jednostka współczynnika lepkości ma w układzie SI wymiar

$$[\eta] = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}.$$

Współczynnik lepkości ośrodka zależy od temperatury  $T$ . Dla cieczy słuszną jest w przybliżeniu zależność

$$\eta = C e^{b/T}, \quad (2)$$

gdzie:  $C$ ,  $b$  - stałe charakteryzujące ciecz,  $T$  - temperatura w skali Kelwina.

Zjawisko lepkości, podobnie jak dyfuzja i przewodnictwo cieplne, należy do grupy zjawisk obejmowanych wspólną nazwą zjawisk transportu. W zjawiskach lepkości, dzięki oddziaływaniom międzycząsteczkowym, mamy do czynienia z transportem pędu między warstwami poruszającymi się z różną prędkością. Ten właśnie transport sprzyja wyrównywaniu się prędkości w całym strumieniu przepływającej cieczy.

## Prawo Stokesa

Ciało stałe, poruszające się w ośrodku ciekłym, napotyka na opór. Mechanizm tego zjawiska jest następujący: warstwa cieczy przylegająca do powierzchni poruszającego się ciała, wprawia w ruch pozostałe warstwy cieczy. Tak więc istotną rolę odgrywa tu lepkość

cieczy. Wypadkowa siła oporu działa przeciwnie do kierunku ruchu ciała. Doświadczalnie stwierdzono, że dla małych prędkości wartość siły oporu  $F_t$  jest wprost proporcjonalna do wartości prędkości  $v$ , zależy od charakterystycznego wymiaru liniowego ciała  $l$  oraz od współczynnika lepkości cieczy  $\eta$ .

Równanie określające siłę oporu ma postać

$$\vec{F}_t = -\alpha l \eta \vec{v}, \quad (3)$$

gdzie:  $\alpha$  - stała zależna od kształtu ciała.

Dla kuli o promieniu  $r$  ( $l = r$ ) współczynnik  $\alpha = 6\pi$  i równanie (8.3) przechodzi w tzw. prawo Stokesa

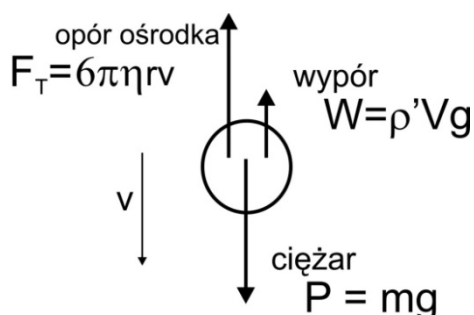
$$\vec{F}_t = -6\pi r \eta \vec{v}. \quad (4)$$

### Spadek swobodny kulki w cieczy z uwzględnieniem sił lepkości

Rozpatrzmy ruch małej kulki o promieniu  $r$ , spadającej swobodnie w cieczy lepkiej. Na kulkę działają siły (rys.2):

- siła ciężkości kulki  $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V \vec{g}$ ,
- siła wyporu Archimedesesa  $\vec{W} = -\rho' V \vec{g}$ ,
- siła oporu wynikająca z ruchu  $\vec{F}_t = -6\pi r \eta \vec{v}$ ,

przy czym:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  - objętość kulki,  $\rho$  - gęstość materiału kulki,  $\rho'$  - gęstość cieczy



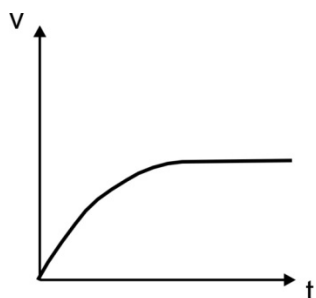
**Rys.2.** Siły działające na kulkę podczas opadania w cieczy lepkiej

Siła wypadkowa  $\vec{F}$ , działająca na ciało wynosi

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{W} + \vec{F}_t \quad (5)$$

Wartość wypadkowej siły  $\vec{F}$  maleje wraz z czasem spadania kulki w cieczy. Jeżeli gęstość materiału z którego wykonano kulkę jest większa od gęstości cieczy, to ruch kulki puszczonej swobodnie w tej cieczy jest ruchem przyspieszonym, lecz niejednostajnie.

Przyspieszenie to będzie malało w czasie. Przyczyną stanu malenia przyspieszenia jest zwiększanie się prędkości kulki (rys.3) i w konsekwencji wzrost wartości siły oporu



**Rys. 3.** Zależność prędkości od czasu dla kulki rozpoczynającej Ruch w cieczy lepkiej z prędkością początkową  $v_0 = 0$

związanej z lepkością cieczy,  $\vec{F}_t$ . Po dostatecznie długim czasie suma siły oporu i siły wyporu równoważy siłę ciężkości; wtedy wypadkowa siła  $\vec{F}$  osiąga wartość zero. Od tego momentu kulka porusza się ruchem jednostajnym ze stałą prędkością zwaną prędkością graniczną ( $v_g$ ).

$$0 = \rho V g - \rho' V g - 6\pi \eta v_g \quad (6)$$

Korzystając z tego wzoru można wyznaczyć współczynnik lepkości cieczy

$$\eta = \frac{2r^2 g (\rho - \rho')}{9v_g} \quad (7)$$

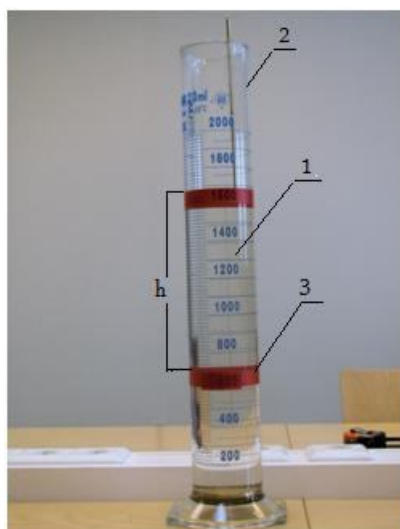
W przypadku ruchu w naczyniu cylindrycznym o promieniu  $R$  dużej kulki ( $r \cong R$ ), po uwzględnieniu poprawek wynikających z oddziaływania na ruch kulki ścianek bocznych wzór na współczynnik lepkości można zapisać w ogólnej postaci

$$\eta = k \cdot (\rho_k - \rho_c) \cdot t \quad (8)$$

gdzie:  $k$  – stała,  $t$  – czas przebycia zadanej drogi ruchem jednostajnym.

## 2. Zasada pomiaru i układ pomiarowy

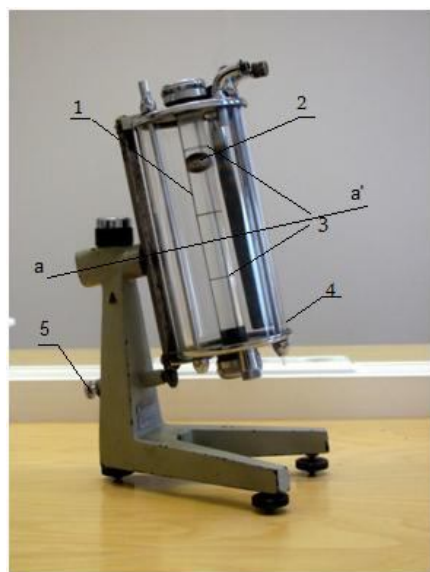
1. W pierwszej części ćwiczenia współczynnik lepkości wyznaczamy metodą Stokesa, posługując się szerokim szklanym naczyniem cylindrycznym wypełnionym badaną cieczą. Na zewnątrz powierzchni bocznej naczynia znajdują się dwa przesuwne pierścienie (rys.4). Za ich pomocą ustalamy drogę ( $h$ ), którą mała kulka ma przebyć w cieczy ruchem jednostajnym. Wybraną kulkę puszczaamy swobodnie tuż nad powierzchnią cieczy w ten



**Rys.4.** Urządzenie do pomiaru współczynnika lepkości cieczy metodą Stokesa: 1 - ciecz, 2 - cylinder szklany, 3-pierścienie, h - odległość między pierścieniami

sposób, aby jej tor w przybliżeniu pokrywał się z osią naczynia. Mierzmy czas ruchu kulki ( $t$ ) między pierścieniami. Współczynnik lepkości cieczy wyznaczamy na podstawie wzoru (7) uwzględniając, że  $v_g = h/t$ .

2. W drugiej części ćwiczenia wyznaczamy współczynnik lepkości cieczy wykorzystując metodę Stokesa w wiskozymetrze Höpplera (rys.5).



**Rys.5.** Wiskozymetr Höpplera: 1 - rurka, 2 - kulka, 3 - kreski, między którymi mierzy się czas spadania kulki, 4 - osłona termostatyczna, 5 - urządzenie aretujące

Stosunkowo duża kulka ( $r \cong R$ ) porusza się w cieczy zamkniętej w szklanej rurze. Całość znajduje się w osłonie termostatycznej. Rurka może się obracać wokół osi  $a - a'$ . Urządzenie aretujące pozwala ustawić stabilnie rurkę. Droga pomiarowa jest określona przez kreski znaczące na rurce. Gęstość cieczy jest podana. Mierząc czas ruchu kulki na odcinku między kreskami, wyznaczamy współczynnik lepkości cieczy w oparciu o wzór (8).

### 3. Zadania do wykonania

#### A) Pomiary:

##### a) w szerokim naczyniu cylindrycznym

1. Za pomocą linijki z podziałką milimetrową zmierzyć odległość między pierścieniami ( $h$ ). Określić dokładność pomiaru odległości ( $\delta h$ ).
2. Wybrać kilka kulek i zmierzyć ich średnice ( $d$ ) śrubą mikrometryczną. Pomiaru średnicy każdej kulki dokonać kilka razy w różnych kierunkach. Określić dokładność pomiaru średnicy ( $\delta d$ ).
3. Wyznaczyć areometrem gęstość badanej cieczy ( $\rho_c$ ). Określić dokładność pomiaru gęstości ( $\delta \rho_c$ ).
4. Zmierzyć stoperem czasy ruchu kulek ( $t$ ) na drodze między pierścieniami (górnym i dolnym). Dla każdej kulki dokonać kilka razy pomiaru czasu. Określić dokładność pomiaru czasu ( $\delta t$ ).

##### b) w wiskozymetrze Höpplera

1. Dla danej kulki zamkniętej w rurce z badaną cieczą zmierzyć kilkakrotnie stoperem czas opadania kulki na drodze między kreskami znaczącymi. Kulkę wprawiamy w ruch przez odaretowanie rurki wraz z osłoną termostatyczną i jej obrót wokół osi  $a - a'$  o kąt  $180^\circ$ . Określić dokładność pomiaru czasu ( $\delta t$ ).

#### B) Opracowanie wyników:

##### a) dla szerokiego naczynia cylindrycznego

1. Obliczyć wartości średnie promieni kulek ( $\bar{r}$ ) oraz ich niepewności pomiarowe ( $\Delta \bar{r}$ ) korzystając z zależności:

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^n d_i / n$$

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}$$

$$\Delta \bar{d} = \sqrt{(\sigma_{\bar{d}})^2 + \frac{(\delta d)^2}{3}}$$

$$r = \bar{d} / 2,$$

$$\Delta r = \Delta \bar{d} / 2$$

2. Obliczyć wartości średnie czasów opadania kulek  $\bar{t}$  między pierścieniami oraz ich niepewności pomiarowe ( $\Delta \bar{t}$ )

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i / n$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

$$\Delta \bar{t} = \sqrt{(\sigma_i)^2 + \frac{(\delta t)^2}{3}}$$

3. Obliczyć gęstość kulki ( $\rho_c$ ) oraz jej niepewność ( $\Delta \rho_c$ ) korzystając z poniższych wzorów.

$$\rho_k = \frac{m_1}{\frac{4}{3} \pi \cdot r^3}$$

$$\Delta \rho_k = \left[ \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| \frac{3 \Delta r}{r} \right| \right] \cdot \rho_k$$

4. Obliczyć współczynnik lepkości cieczy i jego niepewność pomiarową.

$$\eta = \frac{2r^2 \cdot g \cdot t \cdot (\rho_k - \rho_c)}{9h}$$

$$\Delta \eta = \left| \frac{4rgt(\rho_k - \rho_c) \cdot \Delta r}{9h} \right| + \left| \frac{2r^2 g(\rho_k - \rho_c) \cdot \Delta t}{9h} \right| + \left| \frac{2r^2 gt \cdot \Delta \rho_k}{9h} \right| + \left| \frac{2r^2 gt \cdot \Delta \rho_c}{9h} \right| + \left| \frac{2r^2 gt(\rho_k - \rho_c) \cdot \Delta h}{9h^2} \right|$$

5. Wyznaczyć wartość średnią  $\bar{\eta}$  ze wszystkich pomiarów.

6. Obliczyć bezwzględny i względny błąd pomiaru współczynnika lepkości.

$$\Delta \bar{\eta} = \sum_{i=1}^n \frac{|\eta_i - \bar{\eta}|}{n}$$

## b) dla wiskozymetru Höpplera

1. Obliczyć średni czas opadania kulki i jego niepewność (patrz punkt 2a).

2. Obliczyć współczynnik lepkości badanej cieczy, dla danej temperatury pomiaru, korzystając ze poniższego wzoru oraz jego niepewność bezwzględną i względną

$$\eta = k \cdot (\rho_k - \rho_c) \cdot t$$

$$\Delta \eta = |k \cdot t \cdot \Delta \rho_k| + |k \cdot t \cdot \Delta \rho_c| + |k \cdot (\rho_k - \rho_c) \cdot \Delta t|$$

Dane potrzebne do obliczeń:

- dla wiskozymetru z kulką **szklaną**

$$k = 0,7941 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\rho_k = (2,41 \pm 0,01) \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_c = (1,235 \pm 0,005) \text{ g/cm}^3$$

- dla wiskozymetru z kulką **metalową:**

$$k = 0,1216 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\rho_k = (8,12 \pm 0,01) \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_c = (1,235 \pm 0,005) \text{ g/cm}^3$$

#### **4. Pytania:**

1. Na czym polega zjawisko lepkości cieczy ?
2. Sformułować i wyrazić wzorem prawo Stokesa
3. Jakie siły działają na kulkę spadającą w lepkiej cieczy?
4. Dlaczego kulka po dostatecznie długim czasie porusza się ruchem jednostajnym?
5. W jaki sposób można wyznaczyć współczynnik lepkości.