Projektowanie efektywnych algorytmów

Autor:
Tymon Tobolski (181037)
Jacek Wieczorek (181043)

Prowadzący:
Prof. dr hab. inż Adam Janiak

Wydział Elektroniki
III rok
Cz TN 13.15 - 15.00

17 stycznia 2012

1 Cel projektu

Celem projektu jest zaimplementowanie i przetestowanie metaheurystycznego algorytmu genetycznego dla problemu szeregowania zadań na jednym procesorze przy kryterium minimalizacji ważonej sumy opóźnień zadań.

2 Opis problemu

Jednoprocesorowy problem szeregowania zadań przy kryterium minimalizacji ważonej sumy opóźnień zadań.

Danych jest n zadań (o numerach od 1 do n), które mają być wykonane bez przerwań przez pojedynczy procesor, mogący wykonywać co najwyżej jedno zadanie jednocześnie. Każde zadanie j jest dostępne do wykonania w chwili zero, do wykonania wymaga $p_j > 0$ jednostek czasu oraz ma określoną wagę (priorytet) $w_j > 0$ i oczekiwany termin zakończenia wykonywania $d_j > 0$. Zadanie j jest spóźnione, jeżeli zakończy się wykonywać po swoim terminie d_j, a miarą tego opóźnienia jest wielkość $T_j = max(0, C_j - d_j)$, gdzie C_j jest terminem zakończenia wykonywania zadania j. Problem polega na znalezieniu takiej kolejności wykonywania zadań (permutacji) aby zminimalizować kryterium $TWT = \Sigma_{j=1}^{n} w_j T_j$.

3 Opis algorytmu

Przebieg algorytmu :

```
1  best = S_0                                          // stan poczatkowy
   population = generateRandomPopulation(S_0, 2*k)     // losowa populacja
       poczatkowa

   while n > 0 // n - ilosc iteracji
       nextGen = ... TODO

       foreach i in nextGen
               if rand() < M
                   nextGen[i] = mutate(nextGen[i])
               end
11     end

       all = population + nextGen
       sort(all)

       population = []
       for i in (0..2k)
           popuation[i] = all[i]
       end

21     best = population[0]
```

```
end
```

gdzie :

- F - funkcja kosztu/celu
- M - prawdopodobieństwo mutacji

4 Implementacja

Jezykiem implementacji algorytmu jest *Scala* w wersji 2.9.1 działająca na *JVM*.

```
// generyczna klasa algorytmu genetycznego
abstract class Genetic[A, R : Ordering] extends Function1[A, A] {
    import scala.Ordering.Implicits._

    def K: Int // population size (will be doubled!)
    def F(x: A): R  // cost function
    def N: Int // number of iterations
    def M: Double // mutation probability
    def crossover(a: A, b: A): (A, A) // crossover function
    def mutation(a: A): A
    def newRandom(a: A): A

    def bestOf(as: List[A]): A = as.minBy(F)
    def mutate(a: A) = if(math.random < M) mutation(a) else a

    def apply(s0: A) = {

        def inner(n: Int, population: List[A], best: A): A = {
            val nextGen = population.grouped(2).flatMap {
                case a :: b :: Nil =>
                    val (x,y) = crossover(a,b)
                    mutate(x) :: mutate(y) :: Nil
                case _ => Nil
            }

            val newPopulation = (population ++ nextGen).sortBy(F).take(2*K)
            val newBest = bestOf(newPopulation)

            if(n > 0) inner(n-1, newPopulation, newBest)
            else newBest
        }

        val initial = (1 to (2*K)).map(i => newRandom(s0)).toList

        inner(N, initial, initial.head)
    }
}

// Klasa reprezentujaca zadanie
case class Task(index: Int, p: Int, d: Int, w: Int){
    override def toString = index.toString
```

```
}

// Klasa reprezentujaca uporzadkowanie zadan
case class TaskList(list: Array[Task]){
    lazy val cost = ((0,0) /: list){
        case ((time, cost), task) =>
            val newTime = time + task.p
            val newCost = cost + math.max(0, (newTime - task.d)) * task.w
            (newTime, newCost)
    }._2

    override def toString = "%s : %d" format (list.map(_.toString).mkString(
        "[", ",", "]"), cost)
}

trait Common {
    def selections[A](list: List[A]): List[(A, List[A])] = list match {
        case Nil => Nil
        case x :: xs => (x, xs) :: (for((y, ys) <- selections(xs)) yield (y,
             x :: ys))
    }

    implicit def taskListOrdering = new Ordering[TaskList]{
        def compare(x: TaskList, y: TaskList): Int = x.cost compare y.cost
    }

    implicit def arraySwap[T](arr: Array[T]) = new {
        def swapped(i: Int, j: Int) = {
            val cpy = arr.clone
            val tmp = cpy(i)
            cpy(i) = cpy(j)
            cpy(j) = tmp
            cpy
        }
    }

}

// Implementacja algorytmu genetycznego
val GA = (n: Int, k: Int) => new Genetic[TaskList, Int] with Common {
    def N = n
    def M = 0.01
    def K = k
    def F(tasks: TaskList) = tasks.cost

    def crossover(a: TaskList, b: TaskList) = pmx(b,a)
    def mutation(tasks: TaskList) = TaskList(randomPermutation(tasks.list))
    def newRandom(tasks: TaskList) = TaskList(randomPermutation(tasks.list))

    def pmx(ta: TaskList, tb: TaskList): (TaskList, TaskList) = {
        def zeros(n: Int) = new Array[Task](n)

        val (a, b, n) = (ta.list, tb.list, ta.list.length)

        val rand = new Random
        var ti = rand.nextInt(n)
        var tj = rand.nextInt(n)
        while(ti == tj){ tj = rand.nextInt(n) }
        val (i,j) = if(ti < tj) (ti, tj) else (tj, ti)

        val (af, ar) = a.splitAt(i)
        val (am, ab) = ar.splitAt(j-i)
```

```
            val (bf, br) = b.splitAt(i)
            val (bm, bb) = br.splitAt(j-i)

            val ax = zeros(i) ++ bm ++ zeros(n - j)
            val bx = zeros(i) ++ am ++ zeros(n - j)
108
            a.zipWithIndex.foreach { case (e,i) => if(ax(i) == null && !ax.
                contains(e)) ax(i) = e }
            b.zipWithIndex.foreach { case (e,i) => if(bx(i) == null && !bx.
                contains(e)) bx(i) = e }

            ax.zipWithIndex.foreach { case (e,i) => if(e == null) ax(i) = a.
                dropWhile(ax.contains).head }
            bx.zipWithIndex.foreach { case (e,i) => if(e == null) bx(i) = b.
                dropWhile(bx.contains).head }

            (TaskList(ax), TaskList(bx))
        }
118 }
```

5 Testy

Test algorytmu genetycznego przeprowadzony został dla trzech zestawów testów o różnej ilośći zadań, każdy składający się ze 125 instancji.

Jako wyniki testów przedstawiamy średni czas liczenia wszystkich instancji dla danego rozmiaru problemu - $\bar{t}$, a także średni błąd wzgledny rozwiązań dla każdej instancji - $\bar{x}$. Według wzoru :

$$\bar{t} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{\sum_{i=1}^{z} t_i}{z}}{m} \tag{1}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{\sum_{i=1}^{z} x_i}{z}}{m} \tag{2}$$

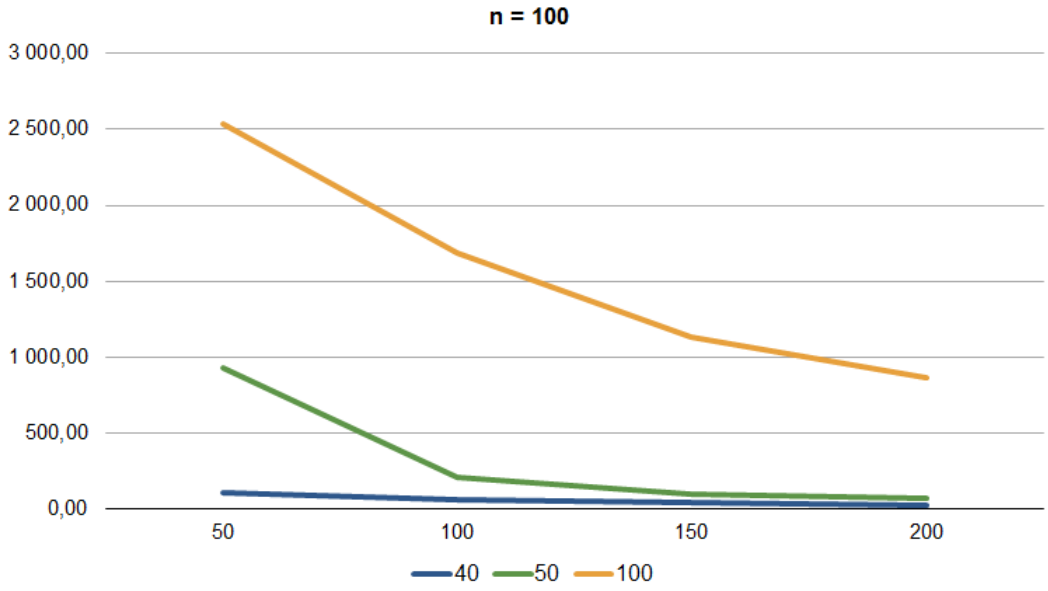
gdzie :

- z - ilość rozwiązań w instancji
- m - ilość instancji danego problemu

5.1 Średnia różnica dla zmiennego k i stałego $n = 100$

k \ m	40	50	100
50	108,04	928,76	2 535,24
100	57,86	212,16	1 682,69
150	38,76	92,89	1 133,71
200	26,19	69,96	859,94

Tabela 1: Diff, $n = 100$

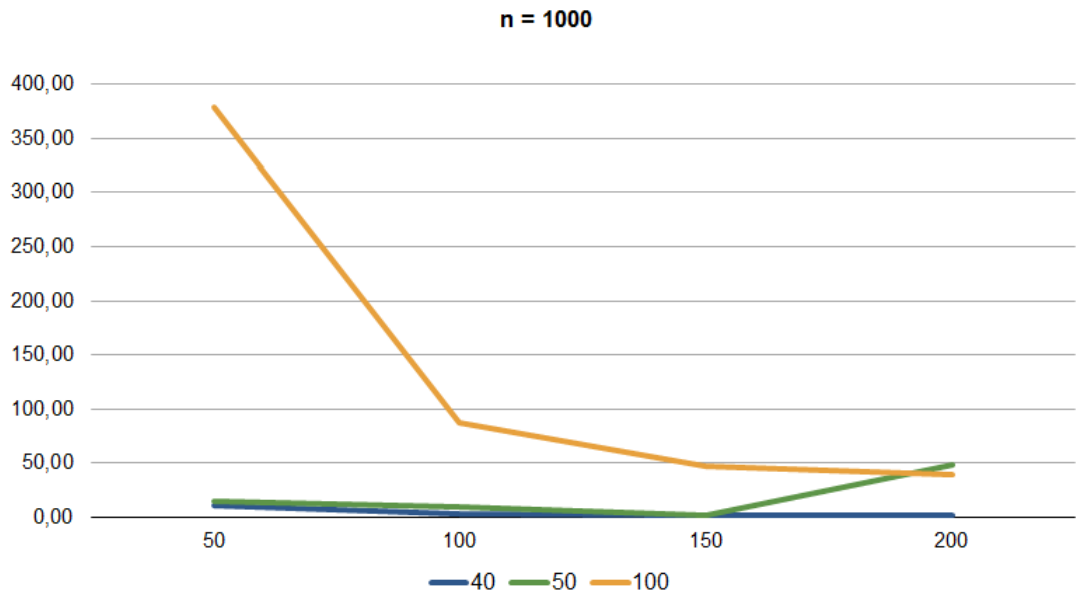


Rysunek 1: Diff, $n = 100$

5.2 Średnia różnica dla zmiennego k i stałego $n = 1000$

k \ m	40	50	100
50	10,99	14,33	378,84
100	2,59	9,17	87,50
150	2,53	2,14	46,63
200	1,44	48,89	39,68

Tabela 2: Diff, $n = 1000$

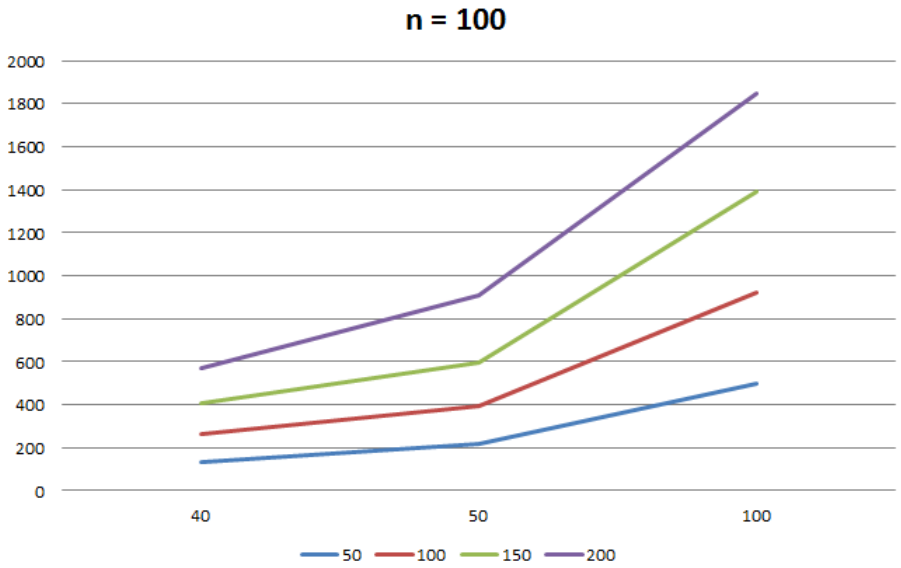


Rysunek 2: Diff, $n = 1000$

5.3 Średnia czas rozwiązywania dla zmiennego k i stałego $n = 100$

k \ m	40	50	100
50	136,45	219,75	497,38
100	261,98	391,01	918,89
150	409,40	598,76	1 394,21
200	572,62	908,32	1 847,48

Tabela 3: Time, $n = 100$

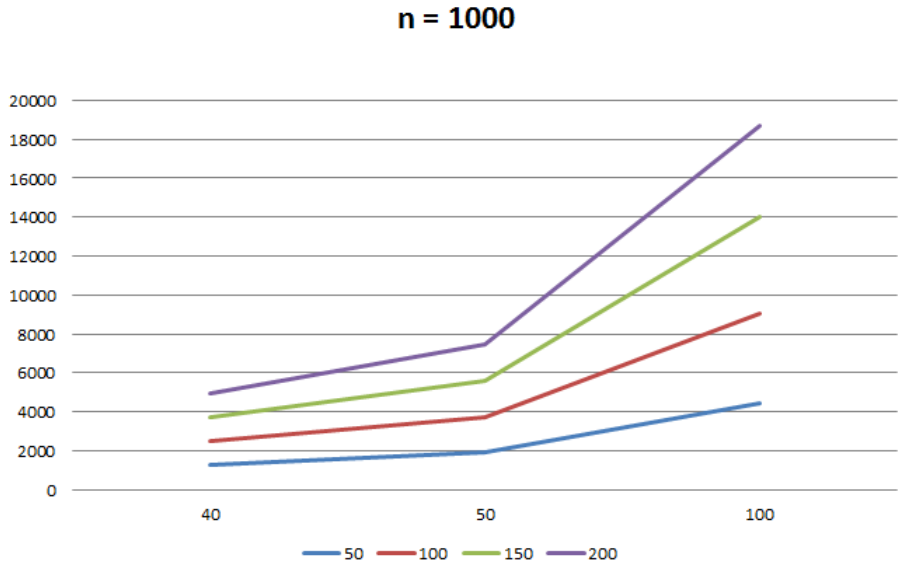


Rysunek 3: Time, $n = 100$

5.4 Średnia czas rozwiązywania dla zmiennego k i stałego $n = 1000$

k \ m	40	50	100
50	1 285,72	1 904,94	4 428,43
100	2 492,99	3 706,92	9 026,62
150	3 713,95	5 595,20	13 981,76
200	4 954,24	7 452,48	18 717,00

Tabela 4: Time, $n = 1000$



Rysunek 4: Time, $n = 1000$

6 Wnioski

Po przeprowadzeniu analizy wyników testów, jednoznacznie widać, że rozmiar instancji ma znaczący wpływ na czas działania algorytmu. Znaczną część czasu wykonywania algorytmu zajmuje obliczanie funkcji kosztu, której czas jest zależny od rozmiaru instancji. Głównym parametrem, od którego zależna jest dokładność wyniku, a co za tym idzie czas dochodzenia do rozwiązania jest parametr n, określający ilość iteracji. Ważnym parametrem jest również k - wielkość populacji. Odpowiednio dobrane parametry wraz z czynnikiem losowym (mutacja) pozwalają uzyskać zadowalające wyniki.

Algorytm genetyczny pozwala na znalezienie przybliżonego rozwiązania problemu $sNPh$. Wiąże się to jednak z koniecznością dobrania odpowiednich parametrów, co nie jest zadaniem łatwym, a także z wybraniem odpowiedniego sposobu krzyżowania populacji. W miarę poprawy wyników poprzez dobierane parametry, wzrasta czas wykonania algorytmu. W celu obliczenia problemu, musimy odpowiedzieć sobie na pytanie, jak dokładne rozwiązanie nas interesuje i ile czasu możemy na nie poświęcić.

7 Porównanie

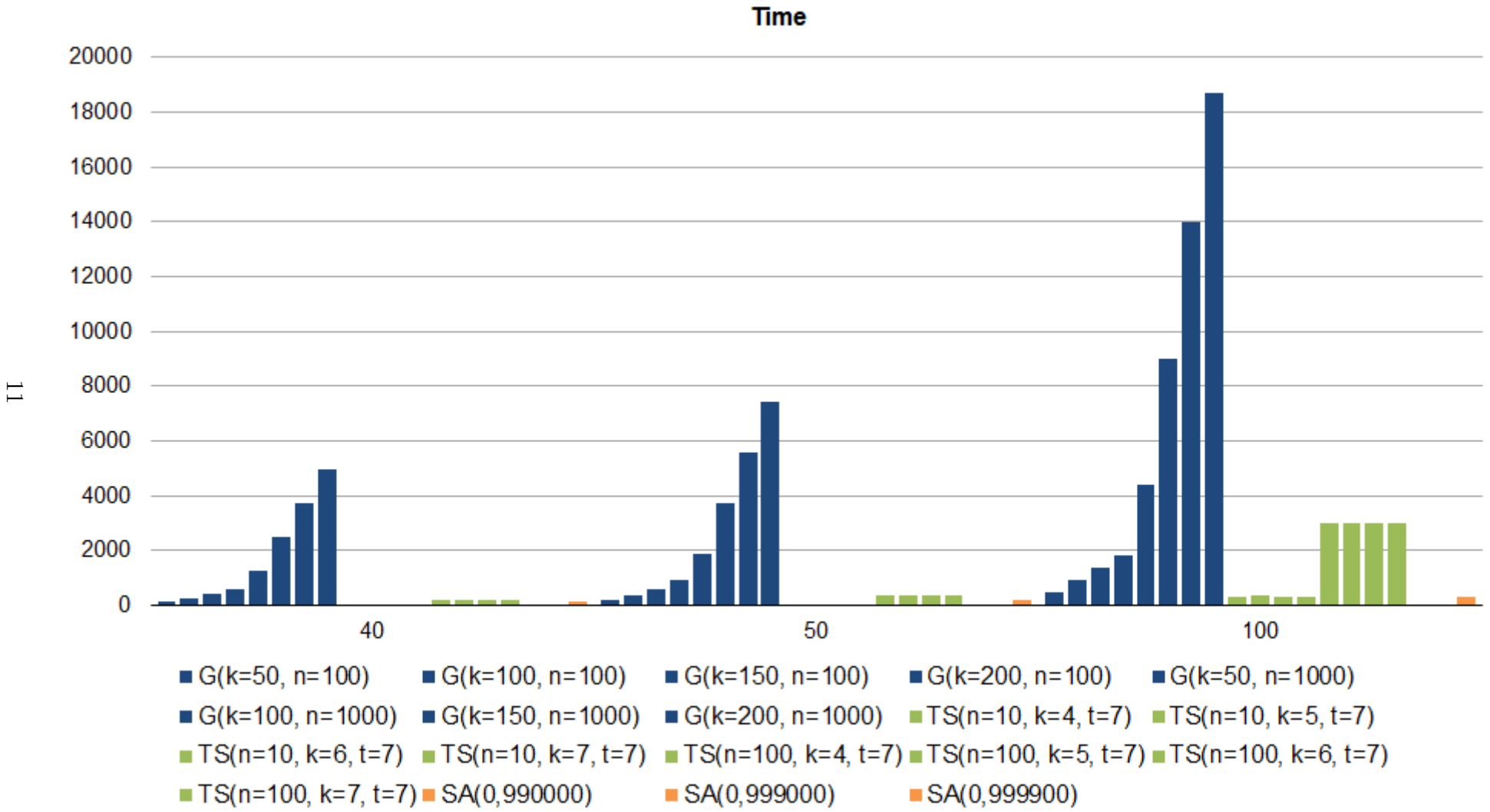
Ostatnim etapem projektu jest porównanie algorytmów symulowanego wyżarzania, tabu search oraz algorytmu genetycznego pod względem dokładności otrzymanych wyników oraz czasu wynonywania.

W punkcie 7.1 przedstawione zostały średnie czasy wykonywania algorytmów w zależności od rozmiaru instancji oraz zadanych parametrów, natomiast w pkt. 7.2 badana jest średnia wartość najlepszych rozwiązań dla każdego rozmiaru instancji, przy takim samym kryterium doboru parametrów.

7.1 Porównanie średniego czasu wykonywania algorytmów

Alg	40	50	100
G(k=50, n=100)	136,45	219,75	497,38
G(k=100, n=100)	261,98	391,01	918,89
G(k=150, n=100)	409,40	598,76	1 394,21
G(k=200, n=100)	572,62	908,32	1 847,48
G(k=50, n=1000)	1 285,72	1 904,94	4 428,43
G(k=100, n=1000)	2 492,99	3 706,92	9 026,62
G(k=150, n=1000)	3 713,95	5 595,2	13 981,76
G(k=200, n=1000)	4 954,24	7 452,48	18 717,00
TS(n=10, k=4, t=7)	23,11	46,81	333,83
TS(n=10, k=5, t=7)	25,96	50,96	368,84
TS(n=10, k=6, t=7)	26,23	39,14	327,85
TS(n=10, k=7, t=7)	19,42	38,48	314,94
TS(n=100, k=4, t=7)	188,06	378,68	3 028,87
TS(n=100, k=5, t=7)	208,98	375,12	3 009,74
TS(n=100, k=6, t=7)	206,57	382,79	3 004,64
TS(n=100, k=7, t=7)	185,13	387,76	3 003,10
SA(0,990000)	1,89	2,01	3,09
SA(0,999000)	15,88	18,74	30,36
SA(0,999900)	167,36	189,63	305,09

Tabela 5: Średni czas wykonywania algorytmów

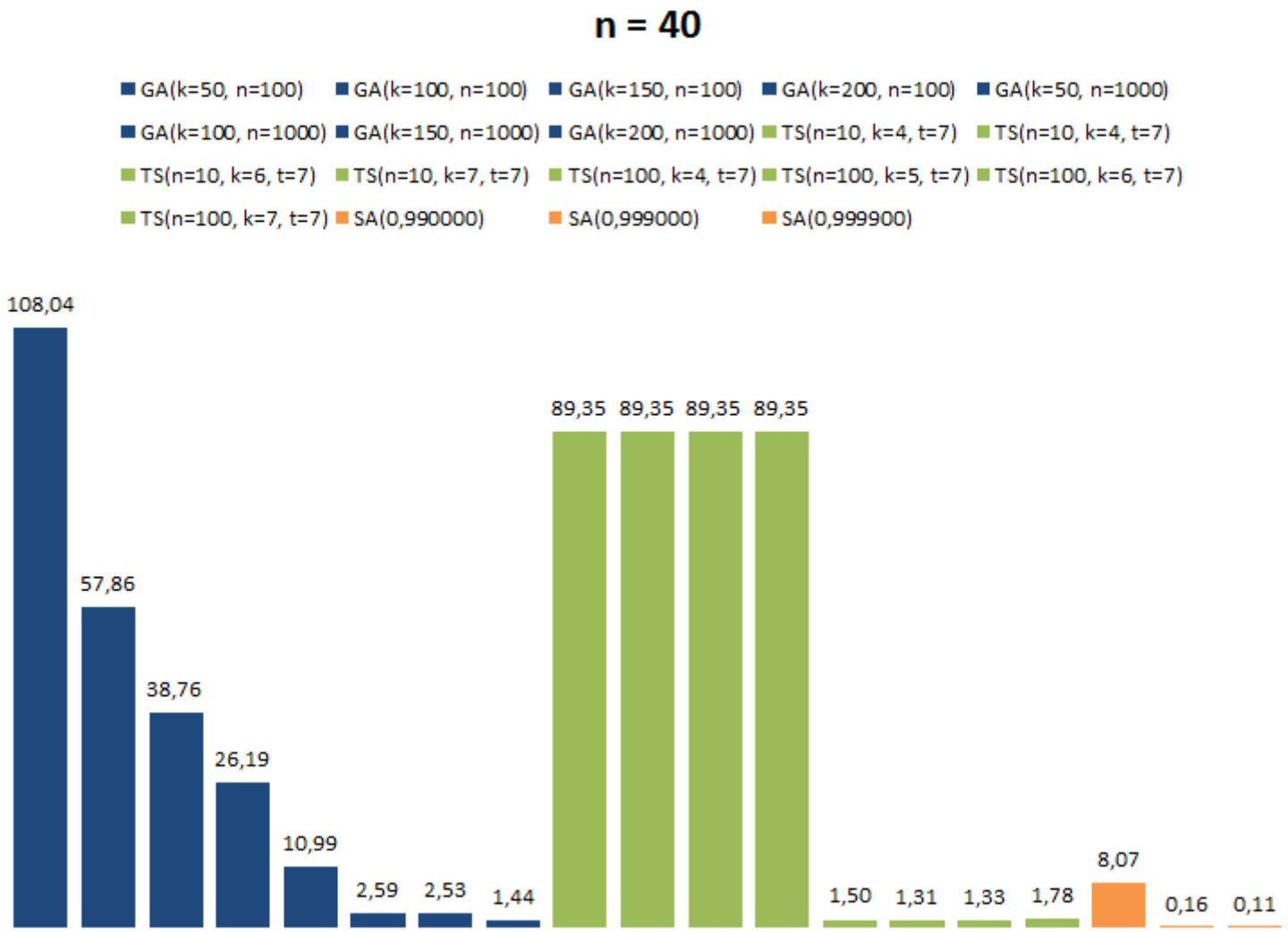


Rysunek 5: Średni czas

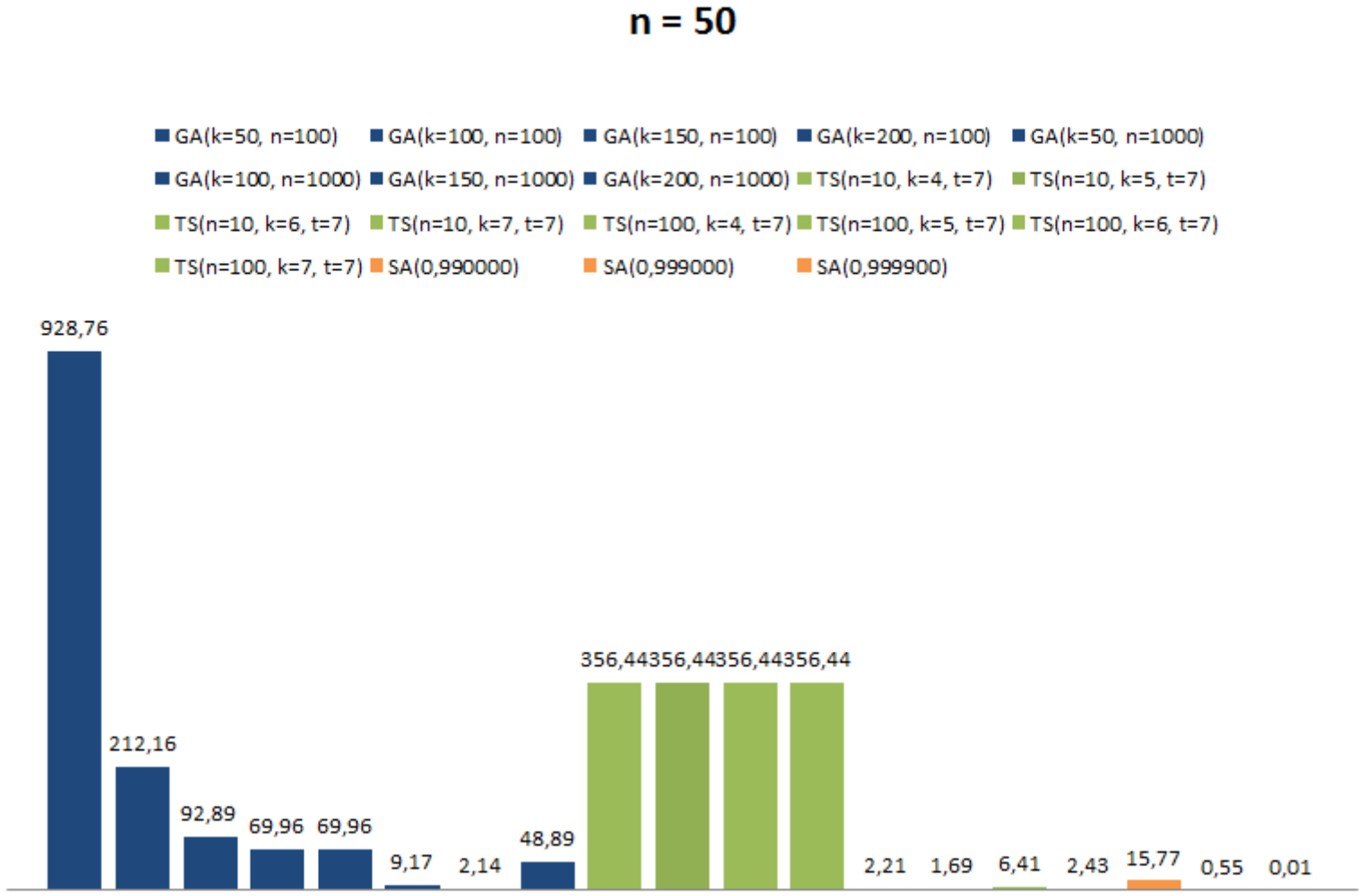
7.2 Porównanie dokładności otrzymanych wyników

Alg	40	50	100
GA(k=50, n=100)	108,04	928,76	2 535,24
GA(k=100, n=100)	57,86	212,16	1 682,69
GA(k=150, n=100)	38,76	92,89	1 133,71
GA(k=200, n=100)	26,19	69,96	859,94
GA(k=50, n=1000)	10,99	14,33	378,84
GA(k=100, n=1000)	2,59	9,17	87,50
GA(k=150, n=1000)	2,53	2,14	46,63
GA(k=200, n=1000)	1,44	48,89	39,68
TS(n=10, k=4, t=7)	89,35	356,44	1 170,06
TS(n=10, k=5, t=7)	89,35	356,44	1 170,06
TS(n=10, k=6, t=7)	89,35	356,44	1 170,06
TS(n=10, k=7, t=7)	89,35	356,44	1 170,06
TS(n=100, k=4, t=7)	1,50	2,21	28,78
TS(n=100, k=5, t=7)	1,31	1,69	30,62
TS(n=100, k=6, t=7)	1,33	6,41	33,63
TS(n=100, k=7, t=7)	1,78	2,43	33,78
SA(0,990000)	8,07	15,77	337,97
SA(0,999000)	0,16	0,55	9,93
SA(0,999900)	0,11	0,01	0,57

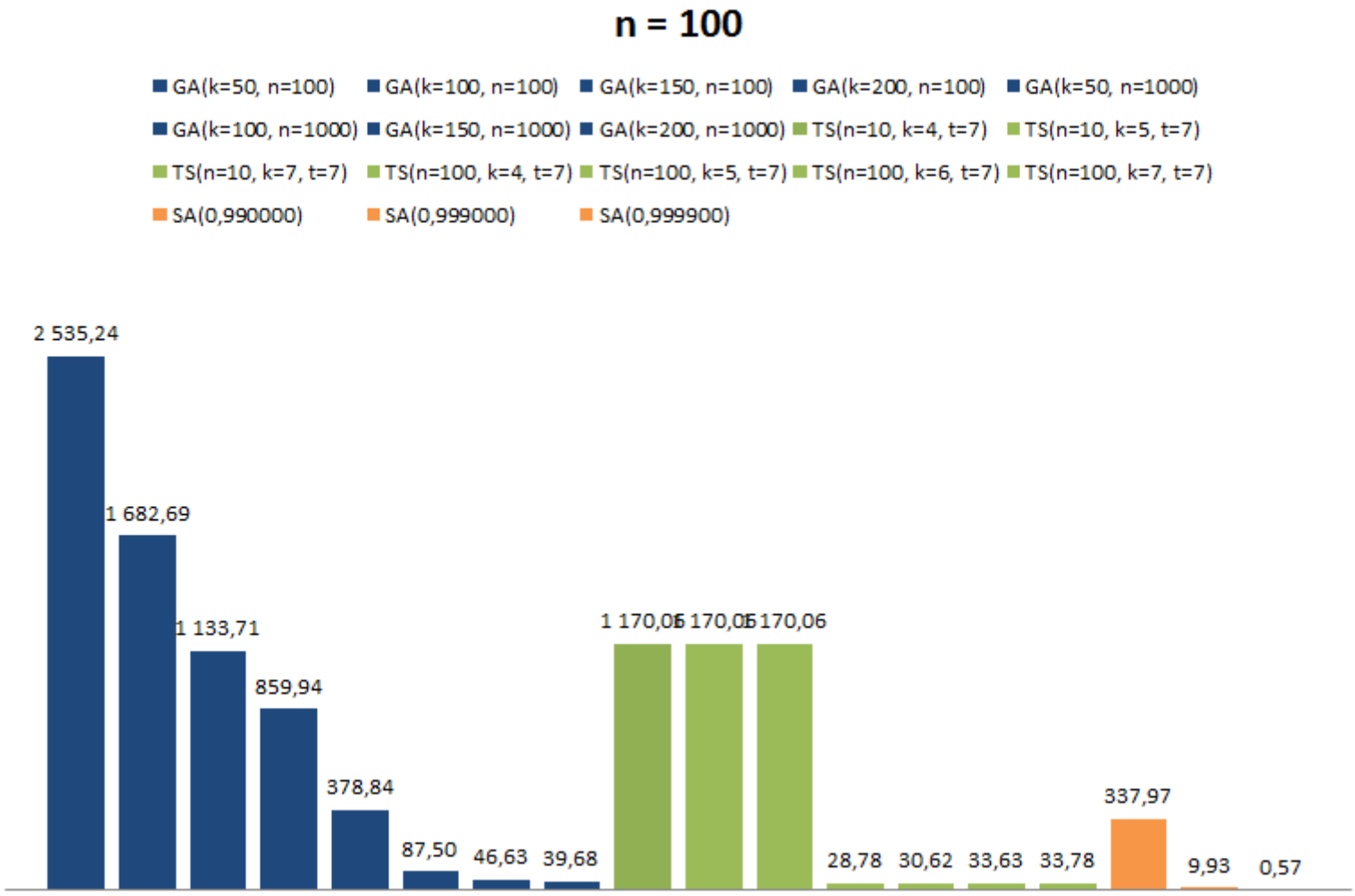
Tabela 6: Dokładnośc wyników wyrażona w prcentach



Rysunek 6: 40 zadań



Rysunek 7: 50 zadań



Rysunek 8: 100 zadań

Po przprowadzeniu analizy testów zarówno czasu wykonywania algorytmów jak i różnicy od wartości optymalnej najlepszym algorytmem okazują się algorytm symulowanego wyżarzania. Nie tylko uzyskał on wyniki najbardziej zbliżone do optymalnych w najkrótszym czasie, ale jest także najprostszym algorytmem w implementacji spośród omawianych.

Algorytmy tabu search i genetyczne, mimo iż cieszą się większym uznaniem, wiążą się z dobraniem szeregu parametrów, od których zależy jakość rozwiązania. Nie jest to zadanie trywialne i wymaga od programisty przeprowadzenia szeregu testów na optymalność wyniku. Są również podatne na "utknięcie" w lokalnym minimum, dlatego należy zadbać o odpowiednią metodę dywersyfikacji rozwiązań.

Spośród przedstawionych algorytmów, algorytm symulowanego wyżarzania najlepiej sprawdzi się w sytuacji kiedy rozwiązanie danego problemu jest potrzebne w krótkim czasie, a duża dokładność wyników nie jest wymagana. W przeciwnym wypadku należy przeprowadzić bardziej dogłębne badania nad doborem parametrów i metody wyznaczania sąsiedztwa lub krzyżowania osobników dla algorytmów genetycznych oraz tabu search.