

<p style="text-align: center;">POLITECHNIKA WROCŁAWSKA WYDZIAŁ ELEKTRONIKI</p>		
Grupa:	Numer albumu:	Data:
Tobolski Tymon	181037	19.04.2010r
Temat: Statystyczna ocena wyników pomiarów		

1. Cel ćwiczenia

Pokazanie, że każdy pomiar obarczony jest błędem o nie zawsze znanej przyczynie i wartości, zapoznanie się ze statystyczną analizą wyników pomiarów, sposobami znajdowania i eliminacji wyników obarczonych błędami grubymi, oceną składowej przypadkowej błędy, wskazanie na konieczność analizy warunków i wyników pomiarów pod kątem obecności składowej systematycznej błędu.

2. Wykorzystane przyrządy miernicze:

1. Suwmiarka elektroniczna, błąd: 0,03mm
2. Metalowy trójkąt nr 11

3. Przebieg doświadczenia

Pomiar boków trójkąta a , b , c oraz jego wysokości h_a , h_b , h_c wykonane niezależnie przez 18 osób.

4. Przedstawienie i analiza wyników pomiaru długości

4.1 Błędy grube

Student	a [mm]	b [mm]	c [mm]	h _a [mm]	h _b [mm]	h _c [mm]
1	92,44	84,69	74,94	64,97	70,92	80,05
2	92,38	84,65	74,93	64,91	70,72	80,19
3	92,41	84,68	74,93	64,94	70,89	80,06
4	92,40	84,68	74,94	64,95	70,91	80,07
5	92,41	84,69	74,96	64,96	70,89	80,06
6	92,42	84,69	74,95	64,96	70,91	80,04
7	92,39	84,57	74,89	64,91	70,87	80,00
8	92,39	84,66	74,93	64,92	70,87	79,99
10	92,41	84,70	74,95	64,96	70,88	80,05
11	92,42	84,70	74,97	64,94	70,92	80,04
12	92,42	84,68	74,95	64,96	70,90	80,06
13	92,42	84,68	74,96	65,01	70,91	80,19
14	92,42	84,67	74,97	64,95	70,86	80,05
15	92,39	84,64	74,96	64,96	70,85	80,06
16	92,40	84,49	74,74	64,95	70,90	80,04
17	92,43	84,68	74,96	64,98	70,90	80,06
18	92,43	84,68	74,94	64,94	70,90	80,04
19	92,43	84,71	74,99	64,98	70,89	80,07
x	92,42	84,67	74,94	64,96	70,89	80,07
s	0,01	0,05	0,05	0,02	0,04	0,05

Wykorzystane wzory:

Średnia arytmetyczna:
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Odchylenie standardowe:
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{n - 1}}$$

Przykładowe obliczenia:

Dla boku a:

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = 92,40$$
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - 92,40)^2}{17}}$$

Wyszukiwanie błędów grubych za pomocą wzoru

$$\Delta x = |x - \bar{x}| \geq 2sm$$

W wypadku, gdy któraś z wartości nie będzie mieścić się w zadanym przedziale trzeba będzie ją wyeliminować, poprzez podstawienie na jej miejsce wartości

Tabela wyników. Błędy grube zaznaczono kolorem czerwonym.

Student	Δa [mm]	Δb [mm]	Δc [mm]	Δh_a [mm]	Δh_b [mm]	Δh_c [mm]
1	0,02	0,02	0,00	0,01	0,03	0,02
2	0,04	0,02	0,01	0,05	0,17	0,12
3	0,01	0,01	0,01	0,02	0,00	0,01
4	0,02	0,01	0,00	0,01	0,02	0,00
5	0,01	0,02	0,02	0,00	0,00	0,01
6	0,00	0,02	0,01	0,00	0,02	0,03
7	0,03	0,10	0,05	0,05	0,02	0,07
8	0,03	0,01	0,01	0,04	0,02	0,08
10	0,01	0,03	0,01	0,00	0,01	0,02
11	0,00	0,03	0,03	0,02	0,03	0,03
12	0,00	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01
13	0,00	0,01	0,02	0,05	0,02	0,12
14	0,00	0,00	0,03	0,01	0,03	0,02
15	0,03	0,03	0,02	0,00	0,04	0,01
16	0,02	0,18	0,20	0,01	0,01	0,03
17	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,01
18	0,01	0,01	0,00	0,02	0,01	0,03
19	0,01	0,04	0,05	0,02	0,00	0,00
2s	0,02	0,10	0,10	0,04	0,08	0,10

Tabela wyników pomiarów po usunięciu błędów grubych

Student	a [mm]	b [mm]	c [mm]	h_a [mm]	h_b [mm]	h_c [mm]
1	92,44	84,69	74,94	64,97	70,92	80,05
3	92,41	84,68	74,93	64,94	70,89	80,06
4	92,40	84,68	74,94	64,95	70,91	80,07
5	92,41	84,69	74,96	64,96	70,89	80,06
6	92,42	84,69	74,95	64,96	70,91	80,04
10	92,41	84,70	74,95	64,96	70,88	80,05
11	92,42	84,70	74,97	64,94	70,92	80,04
12	92,42	84,68	74,95	64,96	70,90	80,06
14	92,42	84,67	74,97	64,95	70,86	80,05
17	92,43	84,68	74,96	64,98	70,90	80,06
18	92,43	84,68	74,94	64,94	70,90	80,04
19	92,43	84,71	74,99	64,98	70,89	80,07
x	92,42	84,69	74,96	64,96	70,90	80,06
s	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

4.2 Błędy przypadkowe

Odchylenia standardowe zarówno boków, jak i wysokości po odrzuceniu skrajnych pomiarów mają zadowalającą wartość, nieprzekraczającą 0,1. Początkowe, większe wartości odchylenia mogą być spowodowane zaokrągleniem wierzchołków trójkąta, co uniemożliwia dokonanie dokładnego pomiaru.

4.3 Ostateczne wyniki pomiarów z uwzględnieniem niepewności

Posługujemy się rozkładem t-Studenta dla $p=0,95$ i $n=12$, wtedy $k=2,20$.

	a	b	c	h_a	h_b	h_c
k	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20	2,20
s	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
n	12	12	12	12	12	12
Δx [mm]	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007

Błąd przypadkowy wartości średniej: $\Delta_p \bar{x} = k \frac{s}{\sqrt{n}}$

Przykładowe obliczenia dla boku **a**: $\Delta_p \bar{a} = 2,20 \frac{0,01}{\sqrt{12}} \approx 0,007mm$

Ostatecznie:

$$a = 92,42 \pm 0,007mm$$

$$b = 84,69 \pm 0,007mm$$

$$c = 74,96 \pm 0,007mm$$

$$h_a = 64,96 \pm 0,007mm$$

$$h_b = 70,90 \pm 0,007mm$$

$$h_c = 80,06 \pm 0,007mm$$

Każdy z tych wyników obarczony jest również błędem suwmiarki wynoszącym 0,03 mm.

5. Przedstawienie i analiza wyników pomiaru pola

Student	P _a	P _b	P _c	P _H
1	3 002,91	3 003,11	2 999,47	2 990,77
2	2 998,19	2 993,22	3 004,32	2 988,48
3	3 000,55	3 001,48	2 999,45	2 989,72
4	3 000,69	3 002,33	3 000,22	2 989,87
5	3 001,48	3 001,84	3 000,65	2 990,91
6	3 001,80	3 002,68	2 999,50	2 990,76
7	2 998,52	2 996,74	2 995,60	2 985,40
8	2 998,98	2 999,93	2 996,83	2 988,90
10	3 001,48	3 001,77	2 999,87	2 990,85
11	3 000,88	3 003,46	3 000,30	2 991,64
12	3 001,80	3 001,91	3 000,25	2 990,52
13	3 004,11	3 002,33	3 005,52	2 990,83
14	3 001,34	2 999,86	3 000,67	2 990,90
15	3 000,83	2 998,37	3 000,65	2 989,35
16	3 000,69	2 995,17	2 991,09	2 978,84
17	3 003,05	3 001,91	3 000,65	2 991,00
18	3 001,20	3 001,91	2 999,10	2 990,36
19	3 003,05	3 002,55	3 002,22	2 992,69
x	3 001,20	3 000,59	2 999,80	2 989,55
s	41,52	142	165,67	161,44

Wykorzystane wzory:

Pole trójkąta: $P_x = \frac{x * h_x}{2}$

Wzór Herona: $P_H = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
 $p = \frac{a+b+c}{2}$

Przykładowe obliczenia:

$$P_a = \frac{a * h_a}{2} = \frac{92,44 * 64,97}{2} = \frac{6005,8268}{2} \approx 3002,92mm^2$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{92,44 + 84,69 + 74,94}{2} \approx 126,04$$

$$P_H = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{126,04 * (126,04 - 92,44) * (126,04 - 84,69) * (126,04 - 74,94)}$$

$$= \sqrt{126,04 * 33,60 * 41,35 * 51,10}$$

$$= \sqrt{8948373,14784} \approx 2991,39mm^2$$

Po obliczeniu wartości średniej i odchylenia standardowego (metodą identyczną jak dla długości boków) oraz odrzuceniu błędów grubych otrzymujemy:

Student	P_a	P_b	P_c	P_H
1	3 002,91	3 003,11	2 999,47	2 990,77
3	3 000,55	3 001,48	2 999,45	2 989,72
4	3 000,69	3 002,33	3 000,22	2 989,87
5	3 001,48	3 001,84	3 000,65	2 990,91
6	3 001,80	3 002,68	2 999,50	2 990,76
10	3 001,48	3 001,77	2 999,87	2 990,85
11	3 000,88	3 003,46	3 000,30	2 991,64
12	3 001,80	3 001,91	3 000,25	2 990,52
14	3 001,34	2 999,86	3 000,67	2 990,90
17	3 003,05	3 001,91	3 000,65	2 991,00
18	3 001,20	3 001,91	2 999,10	2 990,36
19	3 003,05	3 002,55	3 002,22	2 992,69
x	3 001,69	3 002,07	3 000,20	2 990,84
s	8,64	9	7,65	6,63

Posługujemy się rozkładem t-Studenta dla $p=0,95$ i $n=12$, wtedy $k=2,20$.

	P_a	P_b	P_c	P_H
k	2,20	2,20	2,20	2,20
s	8,64	9,15	7,65	6,83
n	12	12	12	12
ΔP	5,488	5,812	4,859	4,338

Ostatecznie:

$$P_a = 3001,69 \pm 5,488 mm^2$$

$$P_b = 3002,07 \pm 5,812 mm^2$$

$$P_c = 3000,20 \pm 4,859 mm^2$$

$$P_H = 2990,84 \pm 4,338 mm^2$$

Wyniki pomiarów są również obarczone błędem systematycznym suwmiarki.

6. Wnioski

Odrzucenie pomiarów najbardziej odchylonych od średniej tzw. błędów grubych powoduje znaczny spadek wartości odchylenia standardowego. Każde pomiar jest również podatny na błąd przypadkowy. Może on być spowodowany błędem suwmiarki lub niedokładnym jej użyciu przez osobę dokonującą pomiar. Nie jest możliwe zbadanie dokładności wykonanego pomiaru bez wykorzystania dodatkowych urządzeń sprawdzających np. czy bok trójkąta został przyłożony równolegle do suwmiarki. Na wynik pomiaru ma również wpływ zaokrąglenie wierzchołków trójkąta.

Wyniki pomiarów pola powierzchni trójkąta również nie są jednoznaczne. Wyeliminowanie błędów grubych znacznie zmniejsza wartość odchylenia standardowego, jednak nadal pozostaje ona dość duża. Wartość błędu jest porównywalna dla obu wykorzystanych wzorów, jednak wielkość pola jest zauważalnie mniejsza kiedy obliczana ze wzoru Herona. Prawdopodobną przyczyną takich wyników są zaokrąglone wierzchołki trójkąta, które powodują zmniejszenie wartości długości mierzonych boków (zaokrąglenia nie mają większego wpływu na pomiar wysokości).

Wszystkie wyniki obarczone są stosunkowo dużym błędem. Aby wyniki były bardziej dokładne należy przeprowadzić możliwie jak najwięcej pomiarów.