Projektowanie efektywnych algorytmów

Autor:
Tymon Tobolski (181037)
Jacek Wieczorek (181043)

Prowadzący:
Prof. dr hab. inż Adam Janiak

Wydział Elektroniki
III rok
Cz TN 13.15 - 15.00

21 listopada 2011

1 Cel projektu

Celem projektu jest zaimplementowanie i przetestowanie metaheurystycznego algorytmu symulowanego wyżarzania dla problemu szeregowania zadań na jednym procesorze przy kryterium minimalizacji ważonej sumy opóźnień zadań.

2 Opis problemu

Jednoprocesorowy problem szeregowania zadań przy kryterium minimalizacji ważonej sumy opóźnień zadań.

Danych jest n zadań (o numerach od 1 do n), które mają być wykonane bez przerwań przez pojedynczy procesor, mogący wykonywać co najwyżej jedno zadanie jednocześnie. Każde zadanie j jest dostępne do wykonania w chwili zero, do wykonania wymaga $p_j > 0$ jednostek czasu oraz ma określoną wagę (priorytet) $w_j > 0$ i oczekiwany termin zakończenia wykonywania $d_j > 0$. Zadanie j jest spóźnione, jeżeli zakończy się wykonywać po swoim terminie d_j, a miarą tego opóźnienia jest wielkość $T_j = max(0, C_j - d_j)$, gdzie C_j jest terminem zakończenia wykonywania zadania j. Problem polega na znalezieniu takiej kolejności wykonywania zadań (permutacji) aby zminimalizować kryterium $TWT = \Sigma_{j=1}^{n} w_j T_j$.

3 Opis algorytmu

Symulowane wyżarzanie to algorytm heurystyczny przeszukujący przestrzeń alternatywnych rozwiązań problemu w celu wyszukania rozwiązań najlepszych. Sposób działania algorytmu jest analogią do zjawiska wyżarzania w metalurgii.

Przebieg algorytmu :

```
1  t = Tmax          // poczatkowa temperatura
   old = S_0         // poprzednie rozwiazanie
   best = old        // najlepsze znalezione rozwiazanie

   while t < Tmin
           new = S(old)
           if F(new) < F(old)
                   old = new
                   if F(new) < F(best)
                           best = new
11                 end
           else if rand() < P(old, new, t)
```

```
                old = new
            end

            t = T(t)
    end
```

gdzie :

- S - funkcja generujaca nowy losowy stan na postawie podanego
- F - funkcja celu/kosztu
- P - prawdopodobieństwo przejścia do stanu o wyższym koszcie
- T - funkcja czasu

4 Implementacja

Jezykiem implementacji algorytmu jest *Scala* w wersji 2.9.1 działająca na JVM.

Algorytm oparty został na funkcji rekurencyjnej (rekurencja ogonowa) implementującej symulowane wyżarzanie. W celu bezpiecznego zrównoleglenia uruchamiania programy na wiele wątków i tym samym przyśpieszenia wyliczania skorzystaliśmy z programowania funkcyjnego.

```
// Generyczna klasa algorytmu wyzarzania
abstract class SimulatedAnnealing[A, R : Ordering]{
    import scala.Ordering.Implicits._

    def Tmin: Double
    def Tmax: Double
    def Td: Double // [0..1]

    def T(t: Double) = t * Td

    def F(x: A): R  // cost function
    def S(x: A): A  // new state generator

    def P(a: A, b: A, t: Double): Double

    def apply(s0: A) = {
        def inner(bestState: A, oldState: A, t: Double): A = {
            if(t < Tmin) oldState
            else {
                val newState = S(oldState)
                val (a,b) = if(F(newState) < F(oldState)){
                    if(F(newState) < F(bestState)) (newState, newState)
                    else (bestState, newState)
                } else if (math.random < P(oldState, newState, t)){
                    (bestState, newState)
                } else {
```

```
                    (bestState, oldState)
                }
                inner(a, b, T(t))
            }
        }

        inner(s0, s0, Tmax)
    }
}

// Klasa reprezentujaca zadanie
case class Task(index: Int, p: Int, d: Int, w: Int){
    override def toString = index.toString
}

// Klasa reprezentujaca uporzadkowanie zadan
case class TaskList(list: List[Task]){
    lazy val cost = ((0,0) /: list){
        case ((time, cost), task) =>
            val newTime = time + task.p
            val newCost = cost + math.max(0, (newTime - task.d)) * task.w
            (newTime, newCost)
    }._2

    override def toString = "%s : %d" format (list.map(_.toString).mkString(
        "[", ",", "]"), cost)

    // funkcja generujaca permutacje uszeregowania
    // zamieniajaca miejscami 2 losowe elementy
    def randomPermutation = {
        val rand = new scala.util.Random
        val i1 = rand.nextInt(list.length)
        var i2 = rand.nextInt(list.length)
        while(i1 == i2){ i2 = rand.nextInt(list.length) }

        val arr = list.toArray
        val tmp = arr(i1)
        arr(i1) = arr(i2)
        arr(i2) = tmp

        TaskList(arr.toList)
    }
}

// implementacja wyzarzania dla klasy TaskList
val SA = (td: Double) => new SimulatedAnnealing[TaskList, Int] with Alg {
    def Tmin = 0.01
    def Tmax = 100.0
    def Td = td

    def F(list: TaskList) = list.cost
    def S(list: TaskList) = list.randomPermutation
    def P(a: TaskList, b: TaskList, t: Double) = math.pow(math.E, -( F(b) -
        F(a) ) / t)
}
```

5 Testy

Testy algorytmu symulowanego wyżarzania przeprowadzone zostały dla trzech zestawów testów o różnym rozmiarze porblemu n, każdy składający się ze 125 instancji. Parametry podstawowe jak T_{min} i T_{max} w przypadku każdego testu były takie same. Zmieniany natomiast był parametr T_d.

Jako wyniki testów przedstawiamy średni czas liczenia wszystkich instancji dla danego rozmiaru problemu - $\bar{t}$, a także średni błąd wzgledny rozwiązań dla każdej instancji - $\bar{x}$. Według wzoru :

$$\bar{t} = \frac{\Sigma_{j=1}^{n} \frac{\Sigma_{i=1}^{k} t_i}{k}}{n} \tag{1}$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma_{j=1}^{n} \frac{\Sigma_{i=1}^{k} x_i}{k}}{n} \tag{2}$$

gdzie :

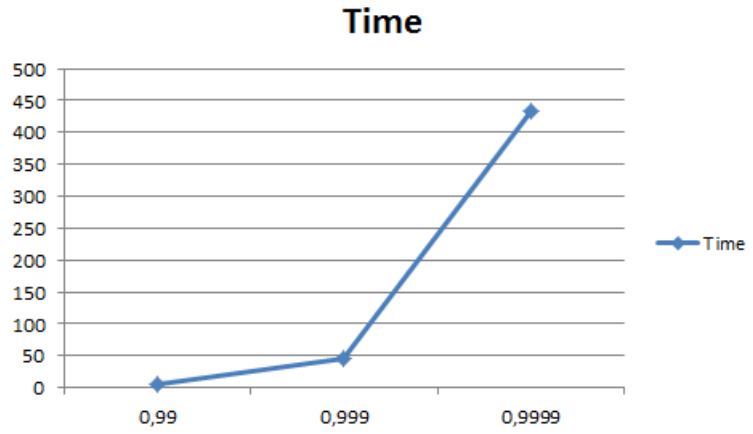
- k - ilość rozwiązań w instancji
- n - ilość instancji danego problemu

Parametry niezmienne :

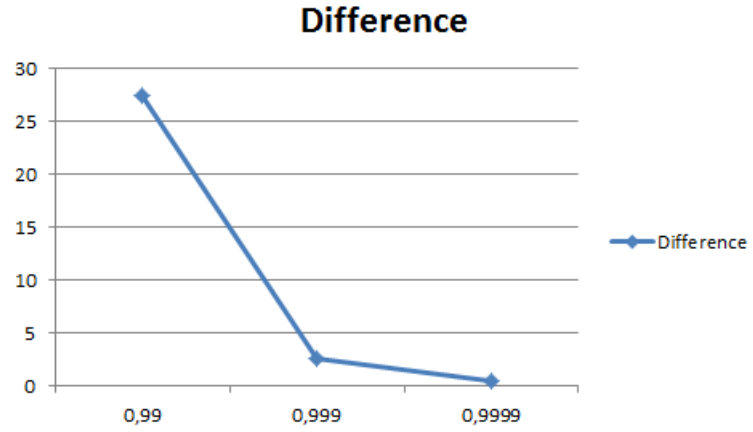
- $T_{min} = 0.01$
- $T_{max} = 100$

5.1 n = 40

T_d	Time	Difference
0,99	5,78	27,41
0,999	46,26	2,52
0,9999	434,52	0,43



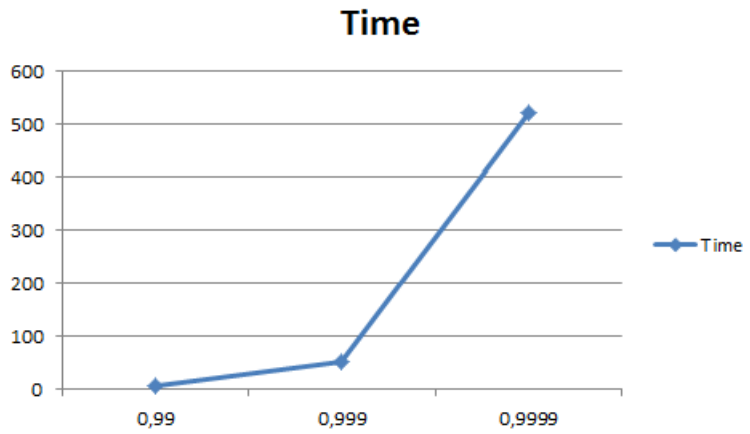
Rysunek 1: Czas rozwiązywania w zależności od parametru T_d



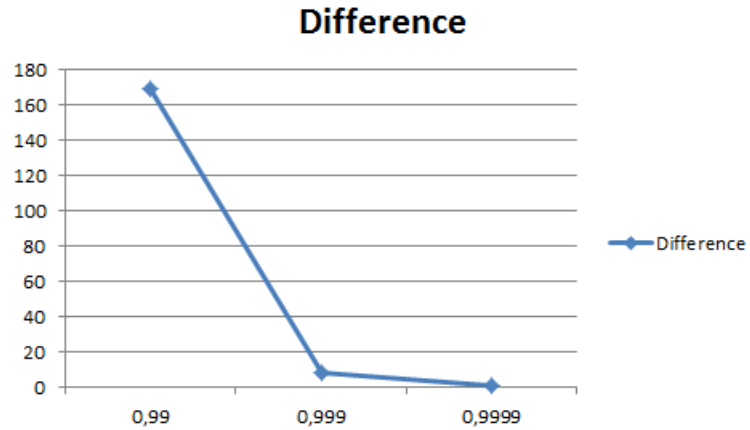
Rysunek 2: Błąd względny rozwiązywania w zależności od parametru T_d

5.2 n = 50

T_d	Time	Difference
0,99	6,63	169,02
0,999	53,09	8,47
0,9999	519,04	0,95



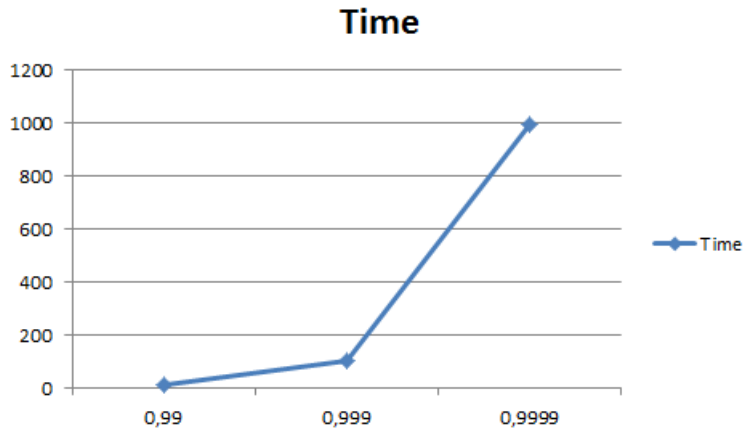
Rysunek 3: Czas rozwiązywania w zależności od parametru T_d



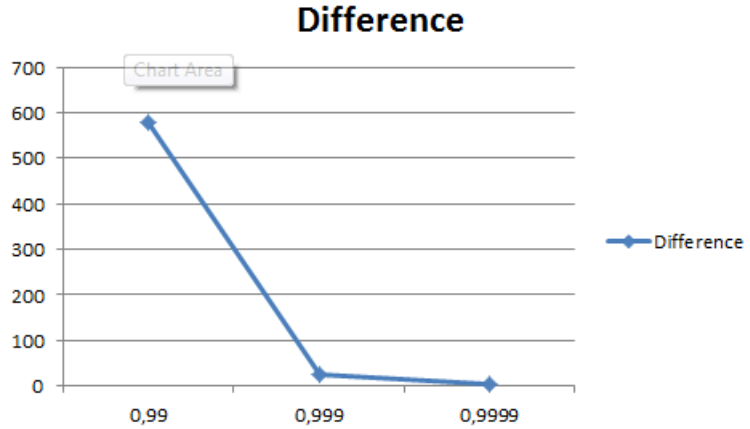
Rysunek 4: Błąd względny rozwiązywania w zależności od parametru T_d

5.3 n = 100

T_d	Time	Difference
0,99	12,4	579,97
0,999	104,18	23,43
0,9999	990	3,42

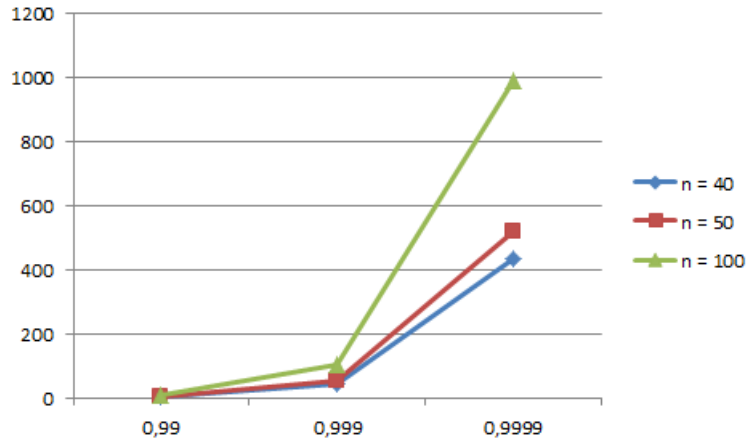


Rysunek 5: Czas rozwiązywania w zależności od parametru T_d

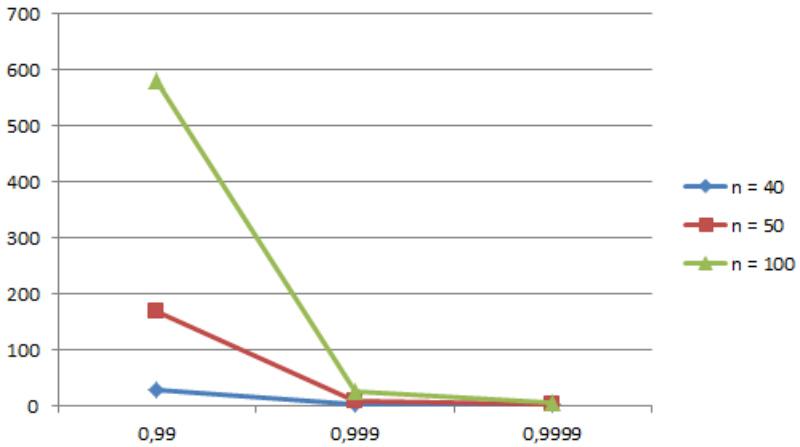


Rysunek 6: Błąd względny rozwiązywania w zależności od parametru T_d

5.4 Porównanie wszytskich zadań



Rysunek 7: Czas rozwiązywania w zależności od parametru T_d



Rysunek 8: Błąd względny rozwiązywania w zależności od parametru T_d

6 Wnioski

Analizując wyniki testów łatwo zauważyć, że rozmiar instancji ma znaczny wpływ na czas działania algorytmu. Pomimo tej samej liczby iteracji (dla ustalonego T_d i zmiennego n) samego algorymu dużo czasu zajmuje obliczanie funkcji celu, która jest liniowo zależna od rozmiaru instancji. Na czas algorytmu ma również wpływ parametr T_d określający jak szybko zmienia sie temperatura. Ilość iteracji algorytmu (zależna od parametru T_d, stałe n) ma również wpływ na jakość wyników. Im parametr T_d jest większy, tym wynik dokładniejszy. Niestety zwiększa to ilość samych iteracji dla danego problemu :

T_d	Ilość iteracji
0,99	917
0,999	9206
0,9999	92099

Jak widać na wykresie dla $T_d = 0.99$ i $n = 100$ algorytm uzyskał średnią względną róznicą od optymalnego wyniku na poziomie 500%. Analizując poszczególne instancje błąd względny wahal się od 10 do nawet 2500%.

Algorytm symulowanego wyżarznia pozwala na znacznie szybsze wyznaczenie dokładnego lub zbliżonego do dokładnego rozwiązania niz przegląd zupełny. Wiąże się to jednak z koniecznością dobrania odpowiednich parametrów, co nie jest zadaniem łatwym. W miarę poprawy wyników poprzez dobierane parametry, wzrasta czas wykonania algorytmu. W celu obliczenia problemu, musimy odpowiedzieć sobie na pytanie, jak dokładne rozwiązanie nas interesuje i ile czasu możemy na nie poświęcić.