

FOI2022 算法夏令营基础班 DAY4 题解

王文铎

数列

求有多少长度为 n 的数列满足每个数字在0-9区间内且存在0和9。

对于30%的数据，满足 $n \leq 7$ 。

对于90%的数据，满足 $n \leq 10^6$ 。

对于100%的数据，满足 $1 \leq n \leq 10^{18}$ 。

30%

暴搜。

复杂度 $O(10^n)$ 。

90%

所有数列一共有 10^n 种。

没有出现0/9的数列有 9^n 种。

0和9都没有出现的数列有 8^n 种。

根据容斥原理，答案为 $10^n - 2 \cdot 9^n + 8^n$ 。

直接计算，复杂度 $O(n)$ 。

100%

用快速幂计算。

复杂度 $O(\log n)$ 。

回文列

有一个长度为 n 的数列，每一次可以将数列中一种数换位另一种数，求问将数列换为回文数列最少操作次数。

对于30%的数据，满足 $n \leq 1000$ ， $a_i \leq 1000$ 。

对于90%的数据，满足 $a_i \leq 2 \times 10^5$ 。

对于100%的数据，满足 $n \leq 2 \times 10^5$ ， $1 \leq a_i \leq 10^9$ 。

30%

每一次一定是将相对的位置种一种数换为另一种数，直接模拟。

复杂度 $O(n^2)$ 。

90%

对应位置上的数最终一致，所以我们可以将它们相连。

最终一个连通块内数都要一样，设连通块大小为 x ，则需要 $x-1$ 步。

使用并查集并维护每个集合大小即可。

复杂度 $O(n)$ 。

100%

ai具体大小无用，可以离散化。

复杂度 $O(n\log n)$ 。

列车

有 $m+1$ 个车站编号 $0-m$ 。有 n 种特产分别只能在一个区间买到。求问列车从 0 出发，只在 d 的倍数的车站停车最多能购买到的特产数量。对 $d=1-m$ 分别求出答案。

对于30%的数据，满足 $n, m \leq 1000$ 。

对于100%的数据，满足 $1 \leq n \leq 3e5$, $1 \leq m \leq 10^5$, $1 \leq l_i \leq r_i \leq m$ 。

30%

对于每个 d ，暴力统计每种特产能否购买。
复杂度 $O(nm)$ 。

100%

对于一个 d ，长度 $\geq d$ 的区间一定能够购买，长度 $< d$ 的区间最多只会有一个车站被经过。

首先对区间按长度排序。 d 从 $1-m$ 遍历，每次 d 增加，对长度 $=d-1$ 的区间在线段树上区间 $+1$ ，在对 d 的倍数的点求和。

由埃氏筛法的复杂度知有 $O(n \log \log n)$ 次单点查询。

复杂度 $O(n \log n \log \log n)$ 。