FOI2022算法夏令营提高班day4讲评

清华大学 陆宏

FOI2022省赛提高班day4

球 (ball)

- 有n个球排成一排，每个球有颜色c_i和权值w_i，你有两种方式来交换这个球的序列。
  - 交换两个权值和不超过x的相同颜色的球。
  - 交换两个权值和不超过y的不同颜色的球。
- 求能交换出多少种颜色不同的序列。答案对10^9+7取模。
- $n \le 2 \times 10^5$

球 (ball)

- 如果x, y能直接交换，那么就在x, y之间连一条边，这样每个连通块之间的球可以随意交换，用组合数就可以计算出每个连通块对答案的贡献。
- 事实上，只需要考虑以下的边也能得到相同的连通块信息。
  - 每个球与自己相同颜色的权值最小的球连边。（如果可行）
  - 每个球与自己不同颜色的权值最小的球连边。（如果可行）
- 这样一来，若x, y在原图中有边相连，那么它们在新图中一定仍然连通。新图的边数降至$O(n)$。时间复杂度$O(n)$。

2022省夏提高班day

逆序对 (inversion)

- 有一个长度为n的排列a，你想要求这个排列的逆序对数，可是你觉得这个问题太简单了，于是你决定打乱这个排列。打乱过程如下：
  - 先等概率随机选取一个区间，再等概率随机打乱这个区间。
- 求这个排列经过打乱后逆序对数的期望，答案对10^9+7取模。
- $n \le 2 \times 10^5$

逆序对 (inversion)

- 考虑第一步选取的区间$[l,r]$，将整个序列分为$[1,l-1],[l,r],[r+1,n]$三个部分。本题需要对$\forall l<r$统计答案并求和。
- 先考虑$[l,r]$内的逆序对数，由于其被随机打乱，任何一对坐标$i,j(i<j)$都有1/2的概率贡献一对逆序对，那么长度为x的随机区间的期望逆序对数为$x(x-1)/4$。
- 同时，$[1,l-1],[r+1,n]$内部的逆序对数可以通过枚举l或r，用树状数组维护。

逆序对 (inversion)

- 区间与区间之间的逆序对可以由$[1, l-1]$对$[l, n]$的逆序对数加$[1, r]$对$[r+1, n]$的逆序对数减$[1, l-1]$对$[r+1, n]$的逆序对数求得。
- 前面两个部分枚举分界点，用树状数组维护。
- 关于最后一个部分，注意到一个逆序对$a_i > a_j (i < j)$会产生$\frac{1}{2}(j-i-1)(j-i) = \frac{1}{2}[j^2 - (2i+1)j + (i^2+i)]$的贡献，按权值从小到大加入，树状数组维护下标的二次方和$\sum j^2$、一次方和$\sum j$、零次方和$\sum 1$。每加入一个a_i时查询并更新。时间复杂度$O(n\log n)$。

2022省夏提高班day

树 (tree)

- 你有一个n个点的树，第i个点的父亲是p_i。每个点有一个权值t_i和一个颜色黑或者白。所有点一开始都是白色。
- 你要进行m次操作，每次给一个点换颜色（从白变成黑，从黑变成白），在每次操作结束时，问有多少个白点i的子树内黑点的个数大于t_i。
- $n, m \leq 10^5$

树 (tree)

- 将一个点从白色变成黑色相当于把它到根路径上的点权t_i减1，查询有多少个白色点点权< 0。
- 使用树链剖分，将问题转化为序列问题（dfs序）。即需要支持区间± 1并改变单点颜色，查询权值< 0的白色点个数。
- 考虑分块，每个块维护每种权值的白色点的出现次数。
- 区间修改时，整块打标记并更新答案，零散的块直接重构。
- 当一个点变色时，也要更新它所在块的信息与答案。

树 (tree)

- 重构时注意维护每种权值的白色点的出现次数的数组不能直接清空（如使用memset，这样会产生$O(n)$的复杂度），需要遍历该块中的每个元素，将其对出现次数的影响抹掉。
- 若将块大小设成$\sqrt{n}$，时间复杂度为$O(n\sqrt{n}\log n)$，可以通过本题。
- 但是注意每次链剖剖出来的$O(\log n)$个区间一定是不相交的，也就是说每次原题中的操作（即序列化后的$O(\log n)$个区间的操作）对整块修改的复杂度最多也就是块个数级别，于是将块大小设为$\sqrt{n/\log n}$即可达到$O(n\sqrt{n\log n})$的理论复杂度。