图论

FOI2022 算法夏令营提高班 day6

复习

最短路

- 因为是普及组算法，这里就不多介绍了。
- 常见的方法有：
  - Bellman-Ford算法
  - Dijskra算法
  - Floyd-Warshall算法

基础水平小测试

- 给定有向图 G，非负整数边权，起点 S，终点 T。
- 要求 $\Theta(m\log n)$，最短路存在：

1. 找出一条最短路径；
2. 计算最短路径上的边数最少是多少；
3. 对于每条边，判断其是否可能在最短路上；
4. 找出字典序（经过的点编号）最小的最短路径；
5. 计算最短路径的条数。

Solution

1. Dijskra记录更新来源;
2. 给路径加第二关键字（路径长度，路径上边数）；
    1. 小技巧：每条边加上 $\frac{1}{n+1}$;
3. 判断 $S-u$，$u-T$ 的最短路和是否与 $S-T$ 相等;
    1. 把所有边反向，以 T 为终点的最短路就变成以 T 为起点的最短路;
    2. 保留所有可能在最短路上的边，得到一个 DAG，所有最短路径都在该图上，该图所有 S 到 T 的路径对应原图的一个最短路，我们称之为最短路图。
4. 在最短路图上贪心，不断往编号最小的点走;
5. 在最短路图上 dp。

Problem 1

- n 个点 m 条边的有向图，计算点 1 到所有点的单源最短路。
- $n \le 10^6$，$m \le 10^7$，边权≤ 10。

Problem 2

- 有一个 n 个点 m 条边的有向图，第 i 条边连接点 u_i 和点 v_i，边权为 $w_i + x$，其中 x 在 $[L, R]$ 内均匀随机，所有边的 x 是同一个 x。
- 计算点 1 到所有点的最短路的期望。
- $1 \le n \le 2500$，$1 \le m \le 20000$。

Problem 3

- 对于一张有向图，定义 $d(u,v,w)$ 为从 u 号点出发，不经过 v 号点，最终到达 w 号点的最短路径长度。如果不存在这样的路径，$d(u,v,w)$ 的值为 -1。
- 你也可以认为 $d(u,v,w)$ 是删去 v 点和其相关的边后，图中 u 到 w 的最短路。
- 现在给定这张有向图每两个点之间的有向边的长度（如果不存在连边则为 -1），对于所有满足 $1 \le x,y,z \le n$，$x \ne y$，$y \ne z$ 的有序数对 (x,y,z)，求它们 $d(x,y,z)$ 的和。
- 点数不超过 300。

差分约束

- 有 n 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，有 m 个形如 $x_i - x_j \leq d_{i,j}$ 的约束。
- 求一组可行解。

- 若存在一个环 $i_1, i_2, \ldots, i_k$，满足 $d_{i_1,i_2} + d_{i_2,i_3} + \cdots + d_{i_{k-1},i_k} + d_{i_k,i_1} < 0$，则把这些点对的约束相加得到 $0 < 0$，矛盾，所以无解。
- 对于单源最短路，假定 f_u 为起点到 u 的最短路长度，则有 $f_u + w_{u,v} \leq f_v$，即 $f_u - f_v \leq w_{u,v}$。
- 另 $w_{u,v} = d_{u,v}$，不存在负环时单源最短路有意义，最终的 f 是一组解。

Problem 4

- 给定 7 个整数 $N, A_0, B_0, L_0, A_1, B_1, L_1$，要求设计一个 01 串 $S = s_1 s_2 \ldots s_i \ldots s_N$，满足：
  1. $s_i = 0$ 或 $s_i = 1$，$1 \le i \le N$；
  2. 对于 S 的任何连续的长度为 L_0 的子串 $s_j s_{j+1} \ldots s_{j+L_0-1}$（$1 \le j \le N - L_0 + 1$），0 的个数大于等于 A_0 且小于等于 B_0；
  3. 对于 S 的任何连续的长度为 L_1 的子串 $s_j s_{j+1} \ldots s_{j+L_1-1}$（$1 \le j \le M - L_1 + 1$），1 的个数大于等于 A_1 且小于等于 B_1；
- 例如，$N = 6, A_0 = 1, B_0 = 2, L_0 = 3, A_1 = 1, B_1 = 1, L_1 = 2$，则存在一个满足上述所有条件的 01 串 $S = 010101$。
- $1 \le N \le 1000$，$1 \le A_0 \le B_0 \le L_0 \le N$，$1 \le A_1 \le B_1 \le L_1 \le N$。

最小生成树

- 常见的方法是:
  - Boruvka 算法
  - Kruskal 算法
  - Prim 算法

Problem 5

- 给定一张无向图 G，对于每条边，判断它 一定/可能/一定不 在最小生成树内。

Problem 6

- 有 n 个篮子，每个篮子里有 0 或 1 个球。
- 你现在可以询问第 i 个篮子到第 j 个篮子总球数的奇偶性，费用为 $c_{i,j}$。
- 求弄清每个篮子中有没有球需要的最小费用。

Boruvka 算法

- 多源 Prim 算法：
  - 对于某个最小生成树的子连通块，其向外的边权最小的任意一条边均可以在最小生成树中。
- 一开始，每个点都算一个连通块。
- 每一轮，每个连通块找一个权值最小的出边，和别的连通块合并。
- 每一轮，连通块个数至少折半。
- 一共 $\Theta(\log n)$ 轮，每轮复杂度 $\Theta(m)$。
- 复杂度 $\Theta(m\log n)$。

Problem 7

- 一张 n 个点的图，每个点有权值 a_i，连接点 i 和 j 的边的边权为 a_i and a_j，求该图的最大生成树。
- $n \leq 100000$，$0 \leq a_i \leq 2^{18}$。

欧拉回路

- 好像是个很简单的 DFS。
- 很多人搞不清楚答案应该什么时候算。
- 更多人不知道怎么证。

Problem 8

- 给定一张无向图，计算其字典序（点的编号）最小的一条欧拉路径。

各种各样的题目

Problem 9

- 有一个 n 个点的有向图，三类连边方式，共连 m 次：
  - 给定 u, v, w，点 u 向点 v 连有向边，边权 w；
  - 给定 u, l, r, w，点 u 向点 $l, l+1, \ldots, r$ 分别连有向边，边权 w；
  - 给定 l, r, v, w，点 $l, l+1, \ldots, r$ 分别向点 v 连有向边，边权 w。
- 求某个点开始的单源最短路。
- $1 \le n \le 100000$，$1 \le m \le 500000$。

Problem 10

- 给定一棵 n 个点的树，有边权，树上有 m 条路径。
- 你需要删掉一条边以及所有包含这条边的路径，使得剩下所有路径中最长的路径尽可能短。
- $1 \leq n \leq 3 \cdot 10^5$。

Problem 11

- 给定一棵 n 个点 m 条边的无向图，有边权。
- 问有多少种给边黑白染色的方案，使得该图所有同时包含两种颜色边的生成树中，边权和最小为 k。
- $1 \leq n \leq 10^5$，$1 \leq m \leq 10^5$。

Problem 12

- 给定一个 n 个点的树。
- 有一个人在树上开车。
- 由于油箱容量有限，每开 k 条边就需要加一次油，一开始邮箱是满的。
- 记 $f(u,v)$ 表示从 u 号点开车到 v 号点，中途加油的次数。
- 显然，$f(u,v) = \left\lfloor\frac{dis(u,v)-1}{k}\right\rfloor$。
- 计算：

$$\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=u+1}^{n} f(u,v)$$

- $1 \le n,k \le 1000$。

Problem 13

- 给定 n 个点的树，每个点有两个属性 a_i, b_i，选出一个独立集，使得 a_i 的总和是 m，且 b_i 之和最大。
- $1 \leq n \leq 100$，$1 \leq m \leq 5000$。

Problem 14

- 有一个 n 个点 m 条边的有向图，边有边权。
- 假设 d 为 1 到 n 的最短路，求有多少条 1 到 n 的路径，长度不超过 $d+k$。
- 保证存在 1 到 n 的路径。
- $1 \le n \le 10^5$，$1 \le m \le 2 \times 10^5$，$k \le 50$。

Problem 15

- 给定一个 n 个点的树，在树上选出 m 条不相交的链，使得其中最短链最长。
- $1 \leq n \leq 5 \times 10^4$。

Problem 16

- 给定一张 n 个点的有向图，点 i 的权值是 val_i，若 $val_i \text{ and } val_j = val_j$，则 i 向 j 连单向边。
- 另外在给定 m 条有向边，求 1 到每个点最短经过的边数。
- $n \leq 200000$，$m \leq 300000$，$0 \leq val_i \leq 2^{20}$。

Problem 17

- 给定一张 n 个点的无权图，求两两点之间的最短路。
- $n \leq 5000$。

Problem 18

- 一个带边权无向连通图，第 i 条边边权为 2^i。
- 求该图的一条回路，每条边都经过至少一次，且边权和最小。
- 点边不超过 10^6。

Problem 19

- 有一个无向图，每个点有颜色，每条边有边权。
- 支持以下操作：
  - 修改某个点颜色；
  - 输出图中不同颜色点之间距离的最小值。
- 点数，边数，操作次数 10^6。

Problem 20

- 有多少 n 个点的无向图，点 1 到点 n 的最短路距离为 k?
- $n \leq 100$。

Problem 21

- 有一个长度为 $n \times m + 1$ 的序列，这个序列中包含整数 $1 \sim m$ 各 n 个，并且最后一个数为 0。
- 你可以将序列中任何一个数字和 0 交换位置。
- 构造一个交换次数最少的方案，让这个序列 $1 \sim m$ 项互不相同，$m + 1 \sim 2m$ 项互不相同，……，$(n-1)m + 1 \sim nm$ 项互不相同，且最后一个数字是 0。
- $1 \le n, m \le 1000$。

Problem 22

- 给定一个 n 个点 m 条边的无向连通图。
- 定义一条“合法的”路径为有 $m-2$ 条边经过 2 次，余下的两条边经过 1 次的路径。两条路径不同当且仅当这两条路径经过一次的边不同。问有多少条不同的路径。
- $1 \le n, m \le 10^6$，图中可能包含重边自环。

Problem 23

- 平面上有 n 个点，要求把每个点染成红、蓝两种颜色之一，使得每行每列的红色点数和蓝色点数的差不超过 1。
- $1 \le n \le 2 \cdot 10^5$。

Problem 24

- 给定一个 n 行 m 列的矩阵，每个格子上有一个数字，一个“房间”被定义为相同数字格子组成的极大四连通块。
- q 次询问，每次询问划定一个矩形区域，问多少个房间与该矩形区域有交（房间存在一个格子在矩形区域内）。
- $n, m \le 2500$，$q \le 5000$。

Problem 25

- 给定正整数 n，计算字典序最小的数字串，该数字串长度为 $10^n + n - 1$，每个长度为 n 的数字串均为该串的子串。
- $n \leq 6$。

Problem 26

- 给定一个整数 P，计算位数最少的一个十进制数，这个数只包含数码 0、1，且能被 P 整除。
- $1 \leq P \leq 10^5$。

Problem 27

- 有 n 个点，第 i 个点有一个参数 a_i，在点 i,j 之间连边的代价是 $d|i-j|+a_i+a_j$，其中 d 是一个正常数，计算将它们连成一棵树的最小代价。
- $1 \le n \le 10^5$。

Problem 28

- 有 n 个对讲机和 m 个频道，频道编号为 1 到 m ，相同频道的两个对讲机可以进行通讯。
- 初始第 i 个对讲机在频道 a_i，对第 i 个对讲机进行一次调频，可以将其频道调整至 $a_i - f_i$ 或 $a_i + f_i$，需要时刻保持频道始终在 1 到 m 内。
- 问第 1 个对讲机要发送信息给第 2 个对讲机，至少要进行几次调频。
- $1 \le m, n \le 20000$。

Problem 29

- 数轴上有 n 个两两不同的有限闭区间 $[l_i, r_i]$，给所有区间附上一个 1 到 n 且两两不同的整数编号 x_i，使得若区间 $[l_i, r_i] \subseteq [l_j, r_j]$，则 $x_i < x_j$（$i \neq j$）。
- 此外，存在 m 个形如 $x_a < x_b$ 的特殊限制。
- $1 \leq n, m \leq 10^5$。

Problem 30

- 有 n 座城市和 m 条高速公路，第 i 座城市有 $x_{i,j}$ 条通往第 j 条高速公路的入口，有 $y_{i,j}$ 条从第 j 条高速公路驶出的出口。这样从第 s 座城市到第 t 座城市，走第 k 条高速公路就有 $x_{s,k} \cdot y_{t,k}$ 种走法。
- q 次询问，每次询问从第 s 座城市走 p 次高速公路到第 t 座城市，一共有多少种走法，答案对 10^9+7 取模。
- $1 \le n \le 1000$，$1 \le m \le 20$，$1 \le q \le 50$，$1 \le p < 2^{31}$。

Problem 31

- 给定一个 n 个点的树，点的编号从 1 到 n。
- 定义树上一个连通块 S 的价值为最大的一个整数 k，满足存在一个整数 a，点 $a, a+1, \ldots, a+k-1$ 均在 S 中。
- 求树上所有大小为 m 的连通块中价值最大是多少。
- $1 \leq m \leq n \leq 10^5$。

Problem 32

- 给定一个 n 个点 m 条边的简单无向无权图，删去最多的边，使得 s_1 到 t_1 的最短路不超过 l_1，s_2 到 t_2 的最短路不超过 l_2。
- $1 \le m, n \le 3000$。

Problem 33

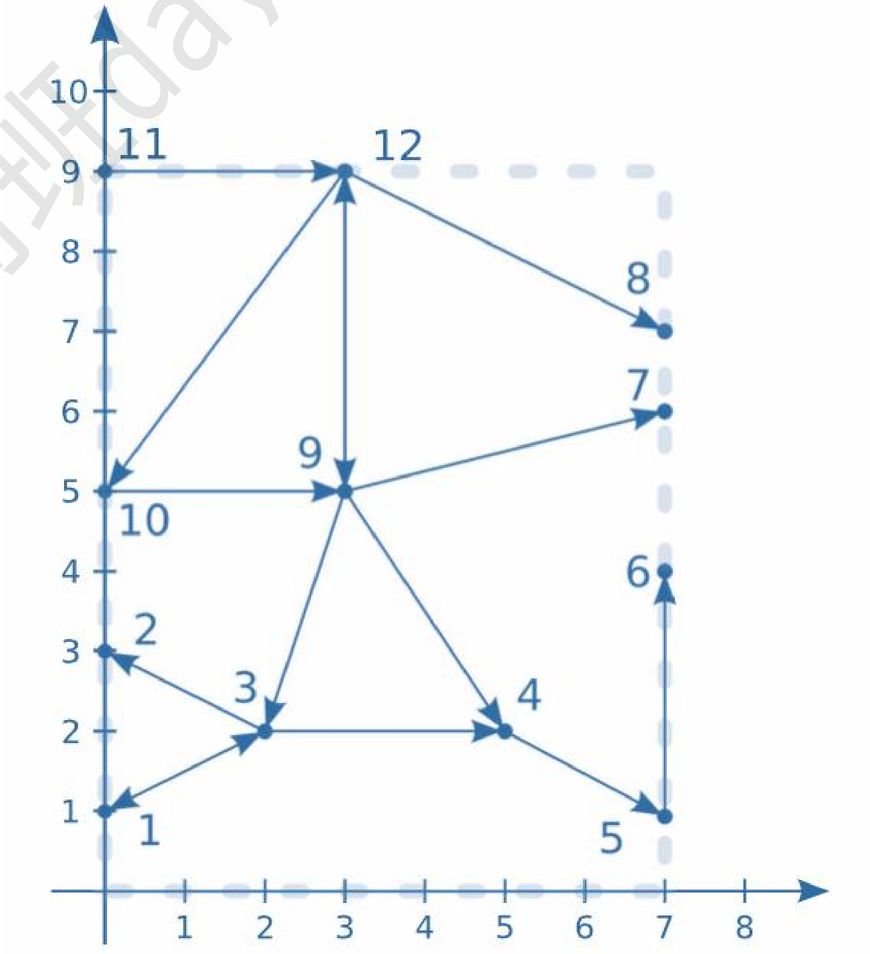
- 给定一个 n 个点的树，标记尽可能多的点，使得任意两个标记点之间最短距离不小于 k。
- $1 \leq n \leq 10^5$。

Problem 34

- 给定 n 个正整数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，求不能被表示为 $k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots + k_n p_n$（$k_i$ 为正整数）的最大正整数是多少，或判断不存在该数。
- $1 \le n \le 10$，$1 \le p_i \le 10^6$。

Problem 35

- 平面上有 n 个点，第 i 个点位置在 (x_i, y_i) 其中 $0 \le x_i \le A$，其中 A 为给定常数。
- 有 m 条边，可能有向也可能无向，但这些边不在 n 个点之外的地方相交。
- 对于 y 轴上的所有点，判断分别以它们为起点时能到达多少个 $x = A$ 上的点。
- $1 \le n \le 300000$，$1 \le m \le 900000$。



Problem 36

- 给定 n 个点的无向图，有点权边权。
- 定义一条路径的权值为经过的所有边的边权和加上经过的所有点的点权的最大值。
- 求任意两点间的最短路。
- $1 \le n \le 100$。

Problem 37

- n 个点的有根树，标记 m 个点，最小化每个点到其最近的被标记的祖先的最大距离。显然，根要被标记。
- 对 $m = 1,2,\dots,n$ 均计算答案。
- $1 \le n \le 10^5$。

Problem 38

- 给定一棵 n 个节点的树，每个节点为黑色或白色。
- 以任意点作为初始位置，要求进行若干次操作，使得所有节点变为黑色，每次操作可选则下面两项中的任意一项执行（记当前位置为 u）：
  - 移动到与 u 相邻的某个节点 v，并反转 v 的颜色；
  - 反转 u 的颜色。
- 求最小的操作次数。
- $0 \leq n \leq 10^5$。

Problem 39（Page 1）

- 有一个 n 个点 m 条边的带边权有向图，需要计算每对点之间的最短路。显然，这是 Floyd-Warshall 算法的经典运用。

Algorytm 1 Floyda-Warshalla 算法的常规实现

M – $n \times n$ 的矩阵，初值如下：

$$M_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{若 } i = j \\ w_{i,j}, & \text{若存在 } i \text{ 到 } j \text{ 的边权 } w_{i,j} \text{ 的边} \\ \infty, & \text{除此以外} \end{cases}$$

for $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ **do**
  for $y = 1, 2, 3, \ldots, n$ **do**
    for $z = 1, 2, 3, \ldots, n$ **do**
      $M_{y,z} \leftarrow \min(M_{y,z}, M_{y,x} + M_{x,z})$

Problem 39（Page 2）

- 但是，你不小心把循环的顺序写错了。

Algorytm 2 错误的实现

M – $n \times n$ 的矩阵，初值同上文定义。
for $y = 1, 2, 3, \ldots, n$ **do**
  for $z = 1, 2, 3, \ldots, n$ **do**
    for $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ **do**
      $M_{y,z} \leftarrow \min(M_{y,z}, M_{y,x} + M_{x,z})$

- 请问，有多少对点之间的最短路会被算错?
- $1 \le n \le 2000$，$1 \le m \le 3000$。

Problem 40

- 给定一个 n 点 m 边的无向图。
- 现在要求给每个点写上 0 或 1，一条边的权值定义为该边连接的两点权值之和。
- 有多少种方案，使得存在至少一条边的权值为 0，至少一条边权值为 1，至少一条边权值为 2。

连通性问题

强连通分量分解

- 常见算法：
  - Kosaraju 算法
  - Tarjan算法

Problem 41

- 在给定的一个有向图中找到一个最大的点集，点集中任意两个点 u, v，在原图中都存在 u 到 v 或 v 到 u 的路径。

2-SAT

- 有 n 个bool量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，其中 $x_i \in \{0,1\}$。
- 有 m 条限制，每条限制形如 $x_i = 0$ 或 $x_i = 1$ 或 $x_i \wedge x_j = 0$ 或 $x_i \vee x_j = 1$，$x_i \wedge \left(!\, x_j\right) = 0$，计算一组满足所有条件的 x 的取值。

- 前两个是小问题，主要是后面两类限制对吧。

2-SAT

- 虽然没办法直接确定值，但我们可以得到一些有价值的信息：
  - 对于 $x_i \wedge x_j = 0$：
    - 若 $x_i = 1$，则 $x_j = 0$；
    - 若 $x_j = 1$，则 $x_i = 0$。
  - 对于 $x_i \vee x_j = 1$：
    - 若 $x_i = 0$，则 $x_j = 1$；
    - 若 $x_j = 0$，则 $x_i = 1$。
  - 对于 $x_i \wedge (!\, x_j) = 0$：
    - 若 $x_i = 1$，则 $x_j = 1$；
    - 若 $x_j = 0$，则 $x_i = 0$。

2-SAT

- 对每个 x_i，建立两个点，分别代表 $x_i = 0$ 或 $x_i = 1$。
- 对于前面的“若 $x_i = a$，则 $x_j = b$”，那么将点 $x_i = a$ 连一条有向边向 $x_j = b$，表示前者可以推出后者。
- 这样，在你决定一个 x 的取值时，你可以顺带确定很多个 x 的取值，你只需要保证不让一个 x 同时取两个值就行了。
- 如果 $x_i = a$ 和 $x_j = b$ 能够相互推出，说明它们之间是当且仅当的关系。
- 无解情况：$x_i = 0$ 当且仅当 $x_i = 1$。

Problem 42

- 一个无向图，点集被分成了 k 个部分。请选择一些关键点，使得每个部分至多有一个关键点，且每条边至少有一个端点是关键点。
- $n, k \le 10^6$。

点 / 边双连通分量

- 这是定义在无向图上的知识。
- 一些定义：
  - **割边** / **割边**： 如果删掉某点 / 边后会破坏无向图的连通性，则该点 / 边称为割点 / 割边；
  - 割边有时候称为**桥**；
  - 不存在割点的连通图称为**点双联通图**。
  - 不存在割边（桥边）的连通图称为**边双连通图**。
  - 一个图的极大的满足以上两种性质的联通子图称为 **点 / 边双联通分量**。

概念小测验

- 判断题：对于一棵树，每个节点都是割点。
- 判断题：对于一棵树，每条边都是割边。
- 列举一个是点双联通，但不是边双联通的图。
- 列举一个是边双联通，但不是点双联通的图。
- 判断题：一张图每条边最多只属于一个边双联通分量。
- 判断题：一张图每个点最多只属于一个点双联通分量。

DFS树

- 对一个无向图进行深度优先搜索得到的搜索树（非连通图则是森林），树上不会有横叉边，非树边都是返祖边。

- 非树边都不是割边。
- 对每条树边检验是否有非树边连接两边点集。

- 根是割点当且仅当根在DFS树上有多个儿子。
- 对每个点检验是否有非树边连接每个子树和祖先。

Problem 43

- 给定无向连通图：
  - 最少添加多少条边后可以成为边双联通图？
  - 添加一条边后，原图至少有几条桥边？

Problem 44

- 给定无向图，问有多少个点不在任意奇数长度的简单 环内（即一条边不经过两次）。
- 保证图无自环。

Problem 45

- 给定无向图。标记最少数量的点，使得删除任意节点后，每个节点都和至少一个标记点连通。

一些比较高级的知识

虚树

- 给定一棵 n 个点的有根树，边有边权，树上有 m 个关键点，删掉一些边使得所有关键点不和根连通，最小化删去边的权值和。
- $1 \leq m \leq n \leq 10^5$。

- 给定一棵 n 个点的有根树，边有边权，多次询问，第 i 次询问钦定树上 m_i 个关键点，删掉一些边使得所有关键点不和根连通，最小化删去边的权值和。
- $1 \leq n \leq 10^5$，$1 \leq \sum m \leq 10^5$。

虚树

- 有一类树上题目，要求支持若干次询问，每次询问给出一个点集 S，询问点集中的某些信息。保证 $\sum|S|$ 与 n 同级
- 或许有一个可以通过遍历整棵树来得到答案的算法
- 若对于每次询问，我们都要遍历整棵树，那时间复杂度显然太大
- 如果能**<u>只保留点集，以及必要的点</u>**，就能大大降低复杂度
- 考虑构建一棵新的、且对点集来说等价于原树的树
- ———这就是虚树的思想

虚树

- 记点集中的点为关键点
- 我们只需要保留关键点，以及所有两个关键的点的 LCA 即可
- 这相当于只保留关键点到根的路径并
- 这样和原树是等价的

虚树的构建

- 求出原树 dfs 序，记作 dfn。把关键点按 dfs 序排序
- 一个性质：若 $dfn_u < dfn_v$，则 $dfn_{LCA(u,v)} \le dfn_u$
- 方便起见，我们把 1 号结点作为虚树的根
- 考虑增量构造，往虚树里一个个加点

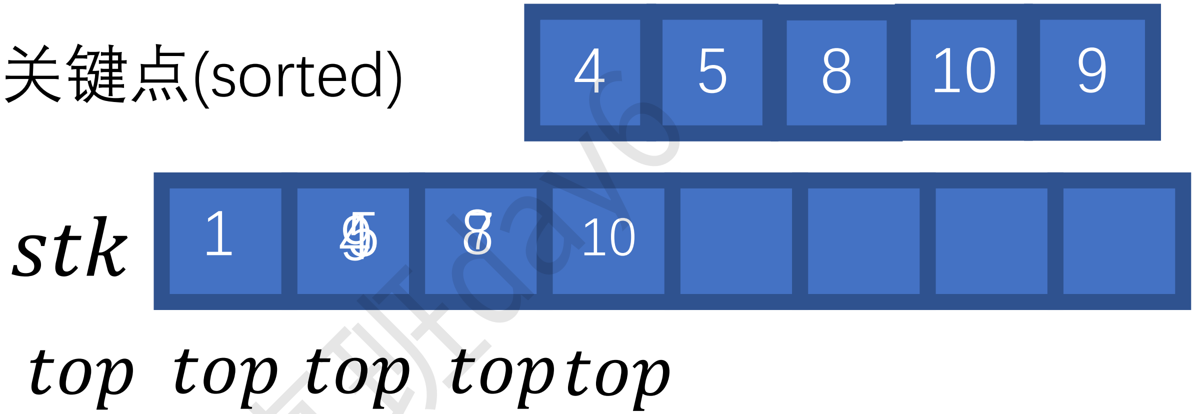
- 维护一个栈，栈内储存从虚树根节点到当前链底的一条路径
- 栈内相邻结点是父子关系，我们在退栈时连边

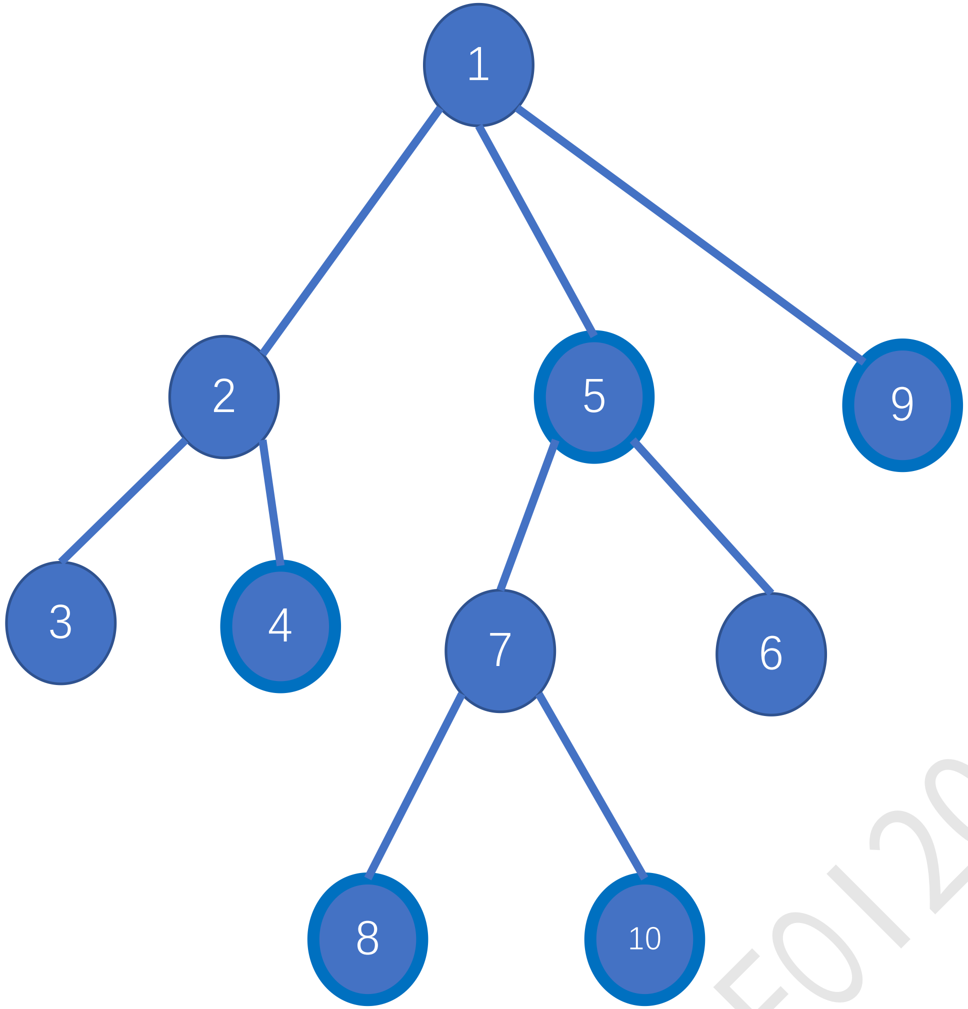
虚树的构建

- 设当前需入栈结点为 x 。
- 取 $y = LCA(x, stk_{top})$。由之前的性质得 $y \neq x$
- 分类讨论：
  - 若 $y = stk_{top}$，则 x 在 stk_{top} 的子树中。此时直接将 x 入栈。
  - 若 $y \neq stk_{top}$，则 x 与 stk_{top} 分别在 y 的两棵子树中。此时 stk_{top} 所在子树中已经没有需要加入虚树的点。
- 先把 stk_{top} 所在子树中的点全部退栈；若 y 没入栈，将 y 入栈；再将 x 入栈。
- 最后栈中还会剩下一条链，取出并连边即可。

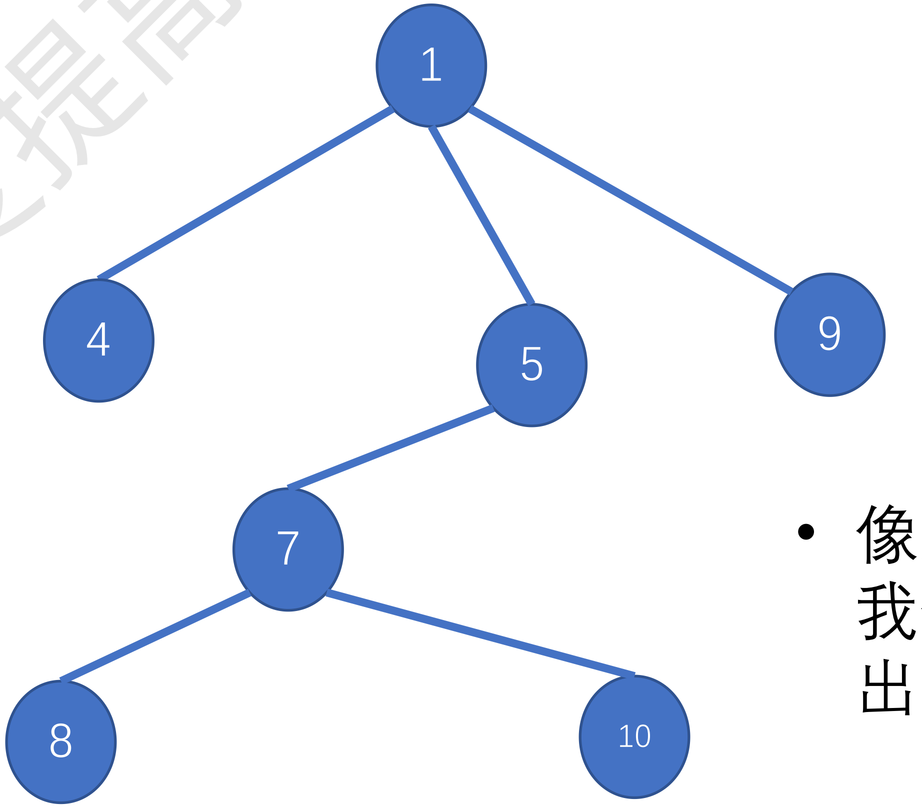
虚树的构建

待加入关键点(sorted)





原树，标蓝为关键点



- 像这样，我们构建出了虚树

Problem 46

- 一棵 n 个结点的树，m 次询问，每次询问给出一个点集 S，求：

1. $\min\limits_{u,v\in S} dis(u,v)$
2. $\max\limits_{u,v\in S} dis(u,v)$
3. $\sum_{u,v\in S} dis(u,v)$

- $dis(u,v)$ 表示 u 和 v 之间的最短路径长度。
- $n \le 10^6$，$\sum |S| \le 2n$

支配树

- 对于一张有向图，给定起点 s。
- 若 s 到 x 的所有简单路径都**必须**经过结点 y，则 y 为 x 的支配点
- 支配树是一棵有根树，满足：

1. 根节点为 s
2. 任意结点 x 的祖先链上的结点都是 x 的支配点
3. 任意结点 x 是其子树中结点的支配点

- 若能建出原图的支配树，就能解决一类关于有向图“必经点”的问题

支配树

- 如何构建支配树?
- 总体思路是，对每个点找出最近支配点，并将它作为该点父亲
- 为什么?
- 我的支配点的支配点还是我的支配点

支配树

- 若原图为树形图，则它本身即为它的支配树

- 若原图为 DAG，考虑所有能到达该点的路径在哪里交于一点
- 那么就是它的所有入点在支配树上的 LCA
- 按照拓扑序遍历，倍增维护即可

- 一般图比较困难，不讲了。

Problem 47

- 给出一张 n 个点 m 条边的 DAG，对于每个结点，求删去该点后，有多少结点不可到达**任一**原本出度为 0 的结点。

- $n \le 65534$，$m \le 10^6$

杂题

Problem 48

- 一棵 n 个结点的树，点有点权。
- 记 $g(x,y)$ 表示 x 到 y 的简单路径上，所有结点点权的 gcd。
- 对所有 $k \in [1,\ 2 \cdot 10^5] \cap \mathrm{Z}$，求 $x \le y$ 且 $g\,(x,y) = k$ 的路径数量
- $1 \le n \le 2 \times 10^5$。

Problem 49

- 数轴上有 n 对点 (x_i, y_i)，每对点选出其中一个，最大化选出的点之间的距离的最小值。
- $n \leq 10000$。

Problem 50

- 有 n 座城市，编号为 0 到 $n-1$，这些城市中有 m 对友好城市，现在需要将它们划分到若干个州中，要求如下：
  - 一个州里至少要有一座城市，且数量不超过 p 个。
  - 一个城市恰好在一个州中，且对于一个州，满足与本州的某个城市为友好城市且在其它州的城市数量不超过 q 个。
- 求出一组划分方案。
- $1 \le n \le 2500$，$0 \le p+q \le 15$，$m \le 30000$。