

# 题解

FOI2022 算法夏令营提高班 day6

# T1

- 捡到金币后必须拐弯，不能走直线。
- 但是并不是说必须要在遇到的第一个金币停下。
- 所以机器人的路线大体上是：从  $(x_1, y_0)$  出发  $\rightarrow$  在  $x_1$  行走  $\rightarrow$  捡到  $(x_1, y_1)$  的金币  $\rightarrow$  在  $y_1$  行走  $\rightarrow$  捡到  $(x_2, y_1)$  的金币  $\rightarrow$   $\dots \rightarrow$  止步于最后一个金币
- 对每行每列建立一个点，对于  $(x, y)$  处的金币，第  $x$  行向第  $y$  列连一条边，判断是否存在欧拉路径就行。

# T2

- 给定一个  $n$  个点  $m$  条边的带边权无向图，对于每条边，判断其一定/可能/一定不 在最小生成树中。
- Kruskal算法可以判断哪些边一定不在最小生成树中。
  - 如果边权更小的边能使得一条边两端的点连通，这条边就一定不在。
- 如何区分是否一定在最小生成树中。
  - 在每组边权中的割边。

# T3

- 假设一次滑雪的路径是  $(n, y_n), (n-1, y_{n-1}), \dots, (1, y_1)$ , 那么在  $(a, y_a)$  处改变方向后, 路径变为  $(n, y_n), (n-1, y_{n-1}), \dots, (a, y_a-1), (a-1, y_{a-1}-1), \dots, (1, y_1-1)$ 。
- 可以注意到, 每一个格子都将会走到, 并且所有路径的并是棵树。
- 那么答案就是树上两个点的最近公共祖先。
- 由于树的大小是  $\Theta(n^2)$  的, 高度是  $\Theta(n)$  的, 首先可以得到一个  $\Theta(n^2 + nq)$  的做法。

# T3

- 此外，大多数点只会会有一个儿子，只有涉及改变方向的那  $n$  个位置有两个。
- 当两个点不是祖孙关系的时候，最近公共祖先就只可能是分叉点。
- 如何判断两个点  $u, v$  的祖孙关系？
  - 计算出点  $u$  存在于  $[l_u, r_u]$  条路径上，点  $v$  存在于  $[l_v, r_v]$  条路径上；
  - 若两个区间呈包含关系，则为大区间对应的是祖先，小区间则为孙子；
  - 否则，假设  $l_u \leq r_u \leq l_v \leq r_v$ ，那么最近公共祖先就是  $[r_u, l_v]$  对应所有路径的并中最高的分叉点，对应  $a_{r_u+1}, \dots, a_{l_v}$  中最大的  $a$  改变的点。

# T3

- 如何求出  $[l, r]$ ?
  - 有一个序列，若干次后缀加，若干询问，每次询问第  $x$  个位置在什么时候超过  $y$ 。
- 离线查询，每个位置记录离最近的询问还有多远，后缀加变为后缀距离减，达到 0 的时候就把对应的位置找出来计算答案，再把第二近的询问放进去。
- 时间复杂度  $\Theta(n \log n + q \log n)$ 。