FOI2022算法夏令营提高班day9讲评

陈凌峰

球

- 你有两个盒子，一个盒子放着n个红球，另一个盒子放着m个蓝球
- 每次你等概率地选择一个盒子，然后取走这个盒子里的一个球
- 求红球先被取完的概率为多少，乘上2^{n+m-1}后对大质数取模
- $n, m \leq 10^6$

球

球

- 对于第一档部分分，直接爆搜即可

球

- 对于第二档部分分，我们考虑dp
- 设$f_{i,j}$表示一个盒子里有i个红球，另一个盒子里有j个蓝球的答案
- 由于每次等概率地选择一个盒子，所以$f_{i,j}=f_{i-1,j}+f_{i,j-1}$
- 暴力dp，复杂度为O(nm)

球

- 对于所有数据，我们可以先画出从(n, m)出发，到达每个坐标的概率
- 比如下图为从(3,4)开始到每个坐标的概率

1	1/2	1/4	1/8	1/16
1/2	1/2	3/8	1/4	1/8
1/4	3/8	3/8	5/16	5/32
1/8	3/16	3/16	5/32	0

球

- 从(n, m)到(i, j)的概率与到(i + 1, j)和(i, j + 1)有关
- 设$p_{i,j}$为从(n, m)到(i, j)的概率
- 对于i > 0且j > 0的(i, j)，有$p_{i,j}=\frac{1}{2}(p_{i+1,j}+p_{i,j+1})$
- 我们把p统一乘上$2^{n+m-i-j}$记为f，则有$f_{i,j}=f_{i+1,j}+f_{i,j+1}$
- 很容易发现它和杨辉三角有关系

1	1	1	1	1
1	2	3	4	4
1	3	6	10	10
1	3	6	10	0

球

- 我们只要统计(n,m)到$(0,\mathrm{k})$的答案
- 答案$\mathrm{Ans} = 2^{m-1}\binom{n-1}{0} + 2^{m-2}\binom{n}{1} + 2^{m-3}\binom{n+1}{2} + \ldots + 2^{0}\binom{n+m-2}{m-1}$
- 时间复杂度为$O(n+m)$

攻占

- 给定一个n个点，m条边的无向图，每个点都属于一个集合
- 你要选择一些点，使得每条边连接的两个点恰好有一个点被选，每个集合至多有一个点被选
- 选择每个点都需要一个代价w，选择一些点需要的代价为所选择的点中代价的最大值，最小化这个最大值
- $n, m \leq 5 \times 10^4$，$w \leq 10^9$

攻占

攻占

- 对于第一档部分分，直接暴搜即可

攻点

- 对于第二档部分分，所有的点都属于同一个集合
- 由于每个集合要选择至多一个点，且每条边连接的两个点恰好有一个点被选，且边数≥ 1，所以符合条件的图只能是一个菊花图或者仅有一条边，然后再加上散点（可能没有散点）
- 找菊花图中间的点，答案就是选择该点的代价（如果只有一条边就找代价小的点）

攻占

- 对于第三档部分分，保证图为一棵树
- 对于一棵树，我们要么将深度为奇数的点全选，要么将深度为偶数的点全选

攻占

- 对于所有数据，要最小化选择点代价的最大值，容易联想到二分
- 对于一条边上的点，选择了一个点，另一个点就不能选，如果有一个点确定不选，那么另一个点就必须选
- 对于一个集合里的点，选择了其中一个点，那么该集合里的其他点就不能选
- 容易联想到$2-\mathrm{sat}$，但是对于一个集合里的点，选择了其中一个点，那么该集合其他点就不能选，暴力连边的话边数是n^2级别的

攻占

- 考虑优化建图，比较常见的是线段树优化建图，边的复杂度是 $O(n\log n)$
- 还可以更进一步，使用前后缀优化建图，边的复杂度$O(n)$
- 时间复杂度为$\mathrm{O}(\mathrm{n}\log \mathrm{w})$，常数较大

跳

- 有n个格子，可以从格子i跳到它右边靠近它的a_i个格子中的任意一个
- q次询问，每次给定起点和终点，以及可以删除的格子个数，求最少跳跃次数
- $n, m \leq 2 \times 10^4$，一次询问中最多可删除格子数≤ 30

跳

跳

- 对于第一档部分分，直接爆搜即可

跳

- 对于第二档部分分，每次都能跳到右边任意一个格子，因此若起点和终点相同，则答案为0，否则答案为1

跳

- 对于第三档部分分，不能删去格子
- 对于一个询问，我们只需要解决从起点跳到终点的最少跳跃次数
- 对于一次跳跃，如果跳不到终点位置，那我们就是要跳到能跳到的$x + a_x$最大的格子x
- 可以设$f_{i,j}$为从格子i开始跳，跳2^j步，跳到的$x + a_x$最大的格子x，用倍增来解决

跳

- 对于所有数据，我们可以在第三档部分倍增的基础上，再加上一维表示删去的格子个数，依旧是通过倍增来解决，中间过程暴力枚举删去格子个数
- 记t为一次询问中最多可删去的格子个数
- 时间复杂度为$O((n+q)t^2\log n)$