算法竞赛专题解析--

动态规划优化(1)--四边形不等式

罗勇军 2020.3.27

本系列是这本书的扩展资料：《算法竞赛入门到进阶》（京东，当当） 清华大学出版社
本文 web 地址（同步）：https://blog.csdn.net/weixin_43914593
https://www.cnblogs.com/luoyj/
PDF 下载地址：https://github.com/luoyongjun999/code 其中的补充资料
如有建议，请联系：（1）QQ 群，567554289；（2）作者 QQ，15512356

《算法竞赛入门到进阶》的第 7 章“动态规划”，讲解了 DP 的概念，以及线性 DP、区间 DP、树形 DP、数位 DP、状态压缩 DP 等应用场景。

本文以及后续几篇，将介绍 DP 的优化技术。

1.1 四边形不等式 DP 优化

四边形不等式 DP 优化涉及的证明比较复杂，如果先给出定义和证明会让人迷惑，所以本文的组织结构是：先给出应用场景，引导出四边形不等式的概念，再进行定义和证明，最后用例题巩固。

四边形不等式 DP 优化，虽然理论有点复杂，但是编码很简单。

1.1.1 理论背景

四边形不等式（quadrangle inequality）应用于 DP 优化，是一个古老的知识点。它起源于 Knuth（高纳德）1971 年的一篇论文[①]，用来解决最优二叉搜索树问题。1980 年，储枫（F. Frances Yao，姚期智的夫人）做了深入研究[②]，扩展为一般性的 DP 优化方法，把一些复杂度 $O(n^3)$的 DP 问题，优化为 $O(n^2)$。所以这个方法又被称为“Knuth-Yao DP Speedup Theorem”。

1.1.2 应用场合

有一些常见的 DP 问题，通常是区间 DP 问题，它的状态转移方程是：

dp[i][j] = min(dp[i][k] + dp[k + 1][j] + w[i][j])

其中 i <= k < j，初始值 dp[i][i]已知。min()也可以是 max()，见本文第 6 小节的说明。

方程的含义是：

（1）dp[i][j]表示从 i 状态到 j 状态的最小花费。题目一般是求 dp[1][n]，即从起始点 1 到终点 n 的最小花费。

（2）dp[i][k] + dp[k + 1][j]体现了递推关系。k 在 i 和 j 之间滑动，k 有一个最优值，使得 dp[i][j]最小。

（3）w[i][j]的性质非常重要。w[i][j]是和题目有关的费用，如果它满足四边形不等式和单调性，那么用 DP 计算 dp 的时候，就能进行四边形不等式优化。

这类问题的经典的例子是“石子合并”[③]，它的转移矩阵就是上面的 dp[i][j]，w[i][j]是从第 i

---

① Donald E. Knuth. Optimum binary search trees. Acta Informatica, 1:14–25, 1971.

② F. Frances Yao. Efficient dynamic programming using quadrangle inequalities. In Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pages 429–435, 1980.

论文下载：http://www.cs.ust.hk/mjg_lib/bibs/DPSu/DPSu.Files/p429-yao.pdf

③参考《算法竞赛入门到进阶》7.3 节 区间 DP，“石子合并”问题。

堆石子到第 j 堆石子的总数量。

石子合并

题目描述：有 n 堆石子排成一排，每堆石子有一定的数量。将 n 堆石子并成为一堆。每次只能合并相邻的两堆石子，合并的花费为这两堆石子的总数。经过 n-1 次合并后成为一堆，求总的最小花费。

输入：测试数据第一行是整数 n，表示有 n 堆石子。接下来的一行有 n 个数，分别表示这 n 堆石子的数目。

输出：总的最小花费。

输入样例：

3

2 4 5

输出样例：

17

提示：样例的计算过程是：第一次合并 2+4=6；第二次合并 6+5=11；总花费 6+11=17。

在阅读后面的讲解时，读者可以对照“石子合并”这个例子来理解。注意，石子合并有多种情况和解法，详情见本文的例题“洛谷 P1880 石子合并”。

dp[i][j]是一个转移矩阵，如何编码填写这个矩阵？复杂度是多少？如果直接写 i、j、k 的 3 层循环，复杂度 $O(n^3)$。

注意 3 层循环的写法。dp[i][j]是大区间，它从小区间 dp[i][k]和 dp[k+1][j]转移而来，所以应该先计算小区间，再逐步扩展到大区间。

```
for(int i=1; i<=n; i++)
    dp[i][i] = 0;                          //初始值
for(int len = 2; len <= n; len++)          //len：从小区间扩展到大区间
    for(int i = 1; i <= n-len+1; i++){  // 区间起点 i
        int j = i + len - 1;               // 区间终点 j
        for(int k = i; k < j; k++) //大区间[i,j]从小区间[i,k]和[k+1,j]转移而来
            dp[i][j] = min(dp[i][j], dp[i][k] + dp[k + 1][j] + w[i][j]);
    }
```

1.1.3 四边形不等式优化

只需一个简单的优化操作，就能把上面代码的复杂度变为 $O(n^2)$。这个操作就是把循环 $i \le k < j$ 改为：

$$s[i][j-1] \le k \le s[i+1][j]$$

其中 s[i][j]记录从 i 到 j 的最优分割点。在计算 dp[i][j]的最小值时得到区间[i, j]的分割点 k，记录在 s[i][j]中，用于下一次循环。

这个优化被称为**四边形不等式优化**。下面给出优化后的代码，优化见斜体部分。

```
for(i = 1;i <= n;i++){
    dp[i][i] = 0;
    s[i][i] = i;                           //s[][]的初始值
}
for(int len = 2; len <= n; len++)
    for(int i = 1; i <= n-len+1; i++){
        int j = i + len - 1;
        for(k = s[i][j - 1]; k <= s[i + 1][j]; k++){   //缩小循环范围
```

```
            if(dp[i][j] > dp[i][k] + dp[k + 1][j] + w[i][j]){  //是否更优
                dp[i][j] = dp[i][k] + dp[k + 1][j] + w[i][j];
                s[i][j] = k;                    //更新最佳分割点
            }
        }
    }
```

代码的**复杂度**是多少？

代码中 i 和 k 这 2 个循环，优化前是 $O(n^2)$的。优化后，每个 i 内部的 k 的循环次数是 s[i + 1][j] - s[i][j - 1]，其中 j = i + len - 1。那么：

i = 1 时，k 循环 s[2][len] - s[1][len-1]次。

i = 2 时，k 循环 s[3][len+1] - s[2][len]次。

…

i = n-len+1 时，k 循环 s[n-len+2][n] - s[n-len+1][n+1]次。

上述次数相加，总次数：

s[2][len] - s[1, len-1] + s[3][len+1] - s[2, len] + … + s[n+1,n] - s[n][n]

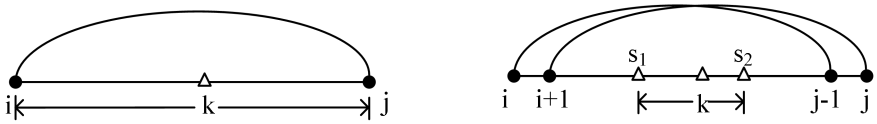
= s[n-len+2][n] - s[1][len-1]

< n

i 和 k 循环的时间复杂度优化到了 O(n)。总复杂度从 $O(n^3)$优化到了 $O(n^2)$。

在后面的四边形不等式定理证明中，将更严谨地证明复杂度。

下图给出了四边形不等式优化的效果，s_1 是区间[i, j-1]的最优分割点，s_2 是区间[i+1, j]的最优分割点。



(1)优化前 k 的滑动范围　　(2)优化后 k 的滑动范围

图 1 四边形不等式优化效果

读者对代码可能有 2 个疑问：

（1）为什么能够把 i <= k < j 缩小到 s[i][j-1] ≤ k ≤ s[i+1][j]？

（2）s[i][j-1] ≤ s[i+1][j]成立吗？

下面几节给出四边形不等式优化的正确性和复杂度的严谨证明，解答了这 2 个问题。

1.1.4 四边形不等式定义和单调性定义

在四边形不等式 DP 优化中，对于 w，有 2 个关键内容：四边形不等式定义、单调性。

（1）**四边形不等式定义 1**：设 w 是定义在整数集合上的二元函数，对于任意整数 i ≤ i' ≤ j ≤ j'，如果有 w(i, j) + w(i', j') ≤ w(i, j') + w(i', j)，则称 w 满足四边形不等式。

四边形不等式可以概况为：两个交错区间的 w 和，小于等于小区间与大区间的 w 和。

为什么被称为“四边形”？把它变成一个几何图，画成平行四边形，见下面图中的四边形 i'ijj'。图中对角线长度和 ij+i'j'大于平行线长度和 ij'+i'j，这与四边形的性质是相反的，所以可以理解成“反四边形不等式”。请读者注意，这个“四边形”只是一个帮助理解的示意图，并没有严谨的意义。也有其他的四边形画法，下面这种四边形是储枫论文中的画法。当中间两个点 i' = j 时，四边形变成了一个三角形。

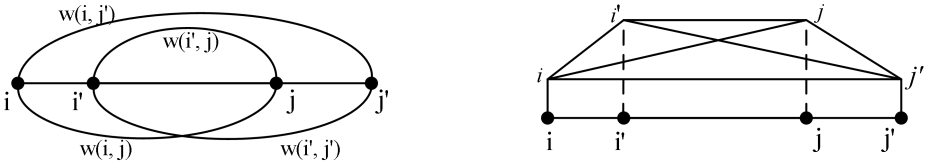


图 2 四边形不等式 w(i, j) + w(i', j') ≤ w(i, j') + w(i', j)

定义 1 的特例是定义 2。

（2）**四边形不等式定义 2：**对于整数 i < i+1 ≤ j < j+1，如果有 w(i, j) + w(i+1, j+1)≤ w(i, j+1) + w(i+1, j)，称 w 满足四边形不等式。

定义 1 和定义 2 实际上是等价的，它们可以互相推导[①]。

（3）**单调性：**设 w 是定义在整数集合上的二元函数，如果对任意整数 i ≤ i' ≤ j ≤ j'，有 w(i, j') ≥ w(i', j)，称 w 具有单调性。

单调性可以形象地理解为，如果大区间包含于小区间，那么大区间的 w 值超过小区间的 w 值。

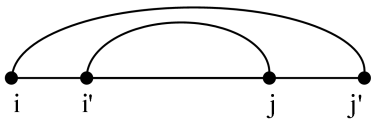


图 3 w 的单调性 w(i, j') ≥ w(i', j)

在石子合并问题中，令 w[i][j]等于从第 i 堆石子加到第 j 堆石子的石子总数。它满足四边形不等式的定义、单调性：

w[i][j'] ≥ w[i'][j]，满足单调性；

w[i][j] + w[i'][j'] = w[i][j'] + w[i'][j]，满足四边形不等式定义。

利用 w 的四边形不等式、单调性的性质，可以推导出四边形不等式定理，用于 DP 优化。

1.1.5 四边形不等式定理（Knuth-Yao DP Speedup Theorem）

在储枫的论文中，提出并证明了四边形不等式定理。

四边形不等式定理：如果 w(i, j)满足四边形不等式和单调性，则用 DP 计算 dp[][]的时间复杂度是 $O(n^2)$的。

这个定理是通过下面 2 个更详细的引理来证明的。

引理 1：状态转移方程 dp[i][j] = min(dp[i][k] + dp[k + 1][j] + w[i][j])，如果 w[i][j]满足四边形不等式和单调性，那么 dp[i][j]也满足四边形不等式。

引理 2：记 s[i][j] = k 是 dp[i][j]取得最优值时的 k，如果 dp 满足四边形不等式，那么有 s[i][j-1] ≤ s[i][j] ≤ s[i+1][j]，即 s[i][j-1] ≤ k ≤ s[i+1][j]。

定理 2 直接用于 DP 优化，复杂度 $O(n^2)$。

1.1.6 证明四边形不等式定理

这里翻译储枫论文中对引理 1 和引理 2 的证明，并加上了本作者的一些说明。

定义方程 c(i, j)：

c(i, i) = 0

c(i, j) = w(i, j) + min(c(i, k-1) + c(k, j))　　i < k ≤ j　　(6-1)

前面的例子 dp[i][j]和这里的 c(i, j)略有不同，dp[i][j] = min(dp[i][k] + dp[k + 1][j] + w[i][j])，其中 w[i][j]在 min()内部。证明过程是一样的。

---

① 读者可以自己证明。证明过程参考《算法竞赛进阶指南》李煜东，河南电子音像出版社，329 页，“0x5B 四边形不等式”。

公式(6-1)的 w 要求满足四边形不等式：

$$w(i, j) + w(i', j') \le w(i', j) + w(i, j') \qquad i \le i' \le j \le j' \qquad (6\text{-}2)$$

而且要求 w 是单调的：$w(i', j) \le w(i, j')$ $\qquad [i', j] \subseteq [i, j']$

（1）证明引理 1

引理 1：如果 w(i, j)满足四边形不等式和单调性，那么 c(i, j)也满足四边形不等式：

$$c(i, j) + c(i', j') \le c(i', j) + c(i, j') \qquad i \le i' \le j \le j' \qquad (6\text{-}3)$$

下面证明(6-3)。

当 i = i'或 j = j'时(6-3)显然成立，下面考虑另外 2 个情况：A). i < i' = j < j'和 B).i < i' < j < j'。

case A). i < i' = j < j'

代入公式(6-3)，得到一个“**反**”三角形不等式（图 4 的三角形 ijj'，两边的和小于第三边）：

$$c(i, j) + c(j, j') \le c(i, j') \qquad i < j < j' \qquad (6\text{-}4)$$

现在证明公式(6-4)。

假设 c(i, j')在 k = z 处有最小值，即 $c(i, j') = c_z(i, j')$。这里定义 $c_k(i, j)$等于 w(i, j) + c(i, k-1) + c(k, j)。

有 2 个对称情况 A1)和 A2)。

case A1). z ≤ j

z 是(i, j')区间的最优点，不是(i, j)区间的最优点，所以有：

$$c(i, j) \le c_z(i, j) = w(i, j) + c(i, z\text{-}1) + c(z, j)$$

在两边加上 c(j, j')：

$$\begin{aligned} c(i, j) + c(j, j') &\le w(i, j) + c(i, z\text{-}1) + c(z, j) + c(j, j') \\ &\le w(i, j') + c(i, z\text{-}1) + c(z, j') \\ &= c(i, j') \end{aligned}$$

上面的推导利用了下面 2 条：

1)w 的单调性，有 w(i, j)≤ w(i, j') ；

2)公式(6-4)的归纳假设：假设 z ≤ j ≤ j'时成立，递推出 i < j < j'时公式(6-4)也成立。观察下面的图，有 c(z, j) + c(j, j') ≤ c(z, j')，它满足**反**三角形不等式。

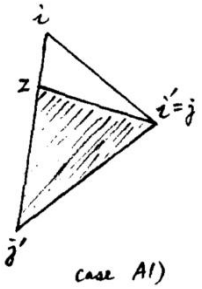


图 4 储枫论文图-引理 1 的 *case A1*

case A2). z ≥ j。是 *A1)*的对称情况。

case B). i < i' < j < j'

假设公式(6-3)右边的小区间 c(i', j)和大区间 c(i, j')分别在 k = y 和 k = z 处有最小值，记为：

$$c(i', j) = c_y(i', j)$$

$$c(i, j') = c_z(i, j')$$

同样有 2 个对称情况 B1)和 B2)。

case B1). z ≤ y

有 $c(i', j') \le c_y(i', j')$

和 $c(i, j) \le c_z(i, j)$

两式相加得：

$c(i, j) + c(i', j')$

$\le c_z(i, j) + c_y(i', j')$

$= w(i, j) + w(i', j') + c(i, z-1) + c(z, j) + c(i', y-1) + c(y, j')$ (6-5)

公式(6-5)的进一步推导利用了下面 2 条：

1)根据 w 的四边形不等式，有 $w(i, j) + w(i', j') \le w(i', j) + w(i, j')$；

2)根据公式(6-3)的归纳假设，即假设 $z \le y < j < j'$时成立。观察下图，有 $c(z, j) + c(y, j') \le c(y, j) + c(z, j')$，满足反四边形不等式。

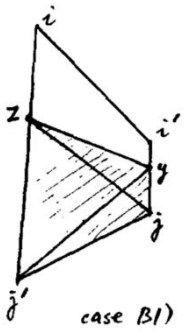


图 5 储枫论文图-引理 1 的 *case B1*

则公式(6-5)变为：

$c(i, j) + c(i', j')$

$\le w(i', j) + w(i, j') + c(i, z-1) + c(i', y-1) + c(y, j) + c(z, j')$

$\le c_y(i', j) + c_z(i, j')$

$= c(i', j) + c(i, j')$

***case B2*).** $z \ge y$。是 *B1*)的对称情况。

引理 1 证毕。

（2）证明引理 2

用 $K_c(i, j)$表示 $\max\{k|c_k(i, j) = c(i, j)\}$，也就是使 $c(i, j)$得到最小值的那些 k 中，最大的那个是 $K_c(i, j)$。定义 $K_c(i, i)=i$。$K_c(i, j)$就是前面例子中的 s[i][j]。

引理 2： $K_c(i, j) \le K_c(i, j+1) \le K_c(i+1, j+1)$ (6-6)

下面是证明。

$i = j$ 时显然成立，下面假设 $i < j$。

先证明公式(6-6)的第一部分 $K_c(i, j) \le K_c(i, j+1)$。这等价于证明：对于 $i < k \le k' \le j$，有

$c_{k'}(i, j) \le c_k(i, j) \Rightarrow c_{k'}(i, j+1) \le c_k(i, j+1)$ (6-7)

公式(6-7)的意思是：如果 $c_{k'}(i, j) \le c_k(i, j)$成立，那么 $c_{k'}(i, j+1) \le c_k(i, j+1)$也成立。$c_{k'}(i, j) \le c_k(i, j)$的含义是，在[i, j]区间，k'是比 k 更好的分割点，可以把 k'看成[i, j]的最优分割点。扩展到区间[i, j+1]时，有 $c_{k'}(i, j+1) \le c_k(i, j+1)$，即 k'仍然是比 k 更好的分割点。也就是说，区间[i, j+1]的最优分割点肯定大于等于 k'。

下面证明公式(6-7)。

根据四边形不等式，在 $k \le k' \le j < j+1$ 时，有

$c(k, j) + c(k', j+1) \le c(k', j) + c(k, j+1)$

在两边加上 $w(i, j) + w(i, j+1) + c(i, k-1) + c(i, k'-1)$，得：

$c_k(i, j) + c_{k'}(i, j+1) \le c_{k'}(i, j) + c_k(i, j+1)$

把 $c_k(i, j)$ 移到右边：$c_{k'}(i, j+1) \le c_{k'}(i, j) + c_k(i, j+1) - c_k(i, j)$ (6-8)

把(6-7)的 $c_{k'}(i, j) \le c_k(i, j)$的两边加上 $c_k(i, j+1)$：

$c_{k'}(i, j)+ c_k(i, j+1) \le c_k(i, j)+ c_k(i, j+1)$

$c_{k'}(i, j)+ c_k(i, j+1) - c_k(i, j) \le c_k(i, j+1)$

结合(6-8)，得 $c_{k'}(i, j+1) \le c_k(i, j+1)$，公式(6-7)成立。

同样可以证明，公式(6-6)的右半部分 $K_c(i, j+1) \le K_c(i+1, j+1)$，在 $i < i+1 \le k \le k'$时成立。

引理 2 说明当 i、j 增大时，**$K_c(i, j)$是非递减的**。

（3）证明四边形不等式定理

利用引理 2，可推论出四边形不等式定理，即用 DP 计算所有的 c(i, j)的时间复杂度是 $O(n^2)$的。下面对这一结论进行说明。

用 DP 计算 c(i, j)时，是按 $\delta = j - i = 0, 1, 2, ..., n-1$ 的间距逐步增加进行递推计算的。具体过程请**回顾前面第 2 节**求 dp[i][j]的代码。从 c(i, j)递推到 c(i, j+1)时，只需要 $K_c(i+1, j+1) - K_c(i, j)$次最少限度的操作就够了。总次数是多少呢？对一个固定的 δ，计算所有的 c(i, j)，$1 \le i \le n-\delta$，$j = i+\delta$，次数是：

$i = 1$ 时：$K_c(1+1, 1+\delta+1) - K_c(1, \delta+1) = K_c(2, \delta+2) - K_c(1, \delta+1)$

$i = 2$ 时：$K_c(2+1, 2+\delta+1) - K_c(2, \delta+2) = K_c(3, \delta+3) - K_c(2, \delta+2)$

$i = 3$ 时：$K_c(3+1, 3+\delta+1) - K_c(3, \delta+3) = K_c(4, \delta+4) - K_c(3, \delta+3)$

...

$i = n-\delta$ 时：$K_c(n-\delta+1, n-\delta+\delta+1) - K_c(n-\delta, \delta+n-\delta) = K_c(n-\delta+1, n+1) - K_c(n-\delta, n)$

以上式子相加，次数 $= K_c(n-\delta+1, n+1) - K_c(1, \delta+1)$，小于 n。

对一个 δ，计算次数是 O(n)的；有 n 个 δ，总计算复杂度是 $O(n^2)$的。

以上证明了四边形不等式定理。

（4）min 和 max

前面讨论的都是 min，如果是 max，也可以进行四边形不等式优化。此时四边形不等式是“反”的：

$$w(i, j) + w(i', j') \ge w(i', j) + w(i, j') \qquad i \le i' \le j \le j'$$

定义：

$$c(i, j) = w(i, j) + \max(a(i, k) + b(k, j)) \qquad i \le k \le j$$

引理 3：若 w、a、b 都满足反四边形不等式，那么 c 也满足反四边形不等式。

引理 4：如果 a 和 b 满足反四边形不等式，那么：

$$K_c(i, j) \le K_c(i, j+1) \le K_c(i+1, j+1) \qquad i \le j$$

证明与引理 1 和引理 2 的证明类似。

1.1.7 一维线性 DP 的四边形不等式优化

上述二维 DP 的四边形不等式优化，在一维 DP 的情况下也能优化。

李煜东《算法竞赛进阶指南》“0x5B 四边形不等式”指出：状态转移方程 $F[i] = \min_{0 \le j < i}\{F[j] + val(j, i)\}$，若 val 满足四边形不等式，则 F 具有决策单调性，可以把 DP 计算 F[i]的复杂度从 $O(N^2)$优化到 O(NlogN)。

1.1.8 例题

拿到题目后，先判断 w 是否单调、是否满足四边形不等式，再使用四边形不等式优化 DP。

1. 石子合并

洛谷 P1880 https://www.luogu.com.cn/problem/P1880

题目描述：在一个圆形操场的四周摆放 N 堆石子，现要将石子有次序地合并成一堆。规定每次只能选相邻的 2 堆合并成新的一堆，并将新的一堆的石子数，记为该次合并的得分。

试设计出一个算法，计算出将 N 堆石子合并成 1 堆的最小得分和最大得分。

输入：

数据的第 1 行是正整数 N，表示有 N 堆石子。

第 2 行有 N 个整数，第 i 个整数 a_i 表示第 i 堆石子的个数。

输出：
输出共 2 行，第 1 行为最小得分，第 2 行为最大得分。
样例输入：
4
4 5 9 4
样例输出：
43
54

题解：

（1）如果石子堆没有顺序，可以任意合并，用贪心法，每次选择最小的两堆合并。

（2）本题要求只能合并相邻的两堆，不能用贪心法。贪心操作是每次合并时找石子数相加最少的两堆相邻石子。例如环形石子堆开始是{2, 4, 7, 5, 4, 3}，下面用贪心得到最小值 64，但是另一种方法得到 63。

	方法 1：贪心		方法 2	
步骤	得分	剩余石子堆	得分	剩余石子堆
		2, 4, 7, 5, 4, 3		2, 4, 7, 5, 4, 3
1	5	5, 4, 7, 5, 4	6	6, 7, 5, 4, 3
2	9	9, 7, 5, 4	13	13, 5, 4, 3
3	9	9, 7, 9	7	13, 5, 7
4	16	16, 9	12	13, 12
5	25	25	25	25
	总分 64		总分 63	

（3）用四边形优化 DP 求解石子合并的最小值，复杂度是 $O(n^2)$。

状态转移矩阵 dp[i][j]前文已有说明，这里不再赘述。

最小值用四边形不等式优化 DP，w 在四边形不等式中取等号：w[i][j] + w[i'][j'] = w[i][j'] + w[i'][j]。

本题的石子堆是环状的，转换为线形的更方便处理。复制和原来一样的数据，头尾接起来，使 n 的数列转化为 2n 的数列，变成线形的。

（4）这一题除了求最小值，还求最大值。虽然最大值也用 DP 求解，但是它不满足**反**四边形不等式的单调性要求，不能优化。而且也没有必要优化，可以用简单的推理得到：区间[i, j]的最大值，等于区间[i, j-1]和[i+1, j]中的最大值加上 w(i, j)。

（5）石子合并问题的最优解法是 GarsiaWachs 算法，复杂度 O(nlogn)。读者可以参考“洛谷 P5569 石子合并”，这题 N ≤ 40000，用 DP 会超时。

2. 最优二叉搜索树

最优二叉搜索树是 Knuth（高纳德）解决的经典问题，是四边形不等式优化的起源。

Optimal Binary Search Tree
uva10304 https://vjudge.net/problem/UVA-10304
题目描述：给定 n 个不同元素的集合 $S = (e_1, e_2, ..., e_n)$，有 $e_1 < e_2 < ... < e_n$，把 S 的元素建一棵二叉搜索树，希望查询频率越高的元素离根越近。

访问树中元素 e_i 的成本 $cost(e_i)$等于从根到该元素结点的路径边数。给定元素的查询频率 $f(e_1)$，$f(e_2)$，...，$f(e_n)$，定义一棵树的总成本是：

$f(e_1) * cost(e_1) + f(e_2) * cost(e_2) + ... + f(e_n) * cost(e_n)$

总成本最低的树就是最优二叉搜索树。

输入格式：

输入包含多个实例，每行一个。每行以 1≤n≤250 开头，表示 S 的大小。在 n 之后，在同一行中，有 n 个非负整数，它们表示元素的查询频率，$0 \le f(e_i) \le 100$。

输出格式：

对于输入的每个实例，输出一行，打印最优二叉搜索树的总成本。

样例输入：

1 5
3 10 10 10
3 5 10 20

样例输出：

0
20
20

题解：

二叉搜索树（BST）的特点是每个结点的值，比它的左子树上所有结点的值大，比右子树上所有值小。二叉搜索树的中序遍历，是从小到大的排列。第 3 个样例的最优二叉搜索树的形状见下图，它的总成本是 5*2+10*1=20。

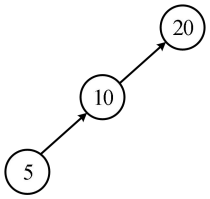


图 6 二叉搜索树

题目给的元素已经按照从小到大排列，可以方便地组成一棵 BST。

设 dp[i][j]是区间[i, j]的元素组成的 BST 的最小值。把区间[i, j]分成两部分[i, k-1]和[k+1, j]，k 在 i 和 j 之间滑动。用区间[i, j]建立的二叉树，k 是根结点。这是典型的区间 DP，状态转移方程：

$$dp[i][j] = \min\{dp[i][k-1] + dp[k+1][j] + w(i, j) - e[k]\}$$

$w(i, j)$是区间和，$w(i, j) = f_i + f_{i+1} + ... + f_j$。当把两棵左右子树连在根结点上时，本身的深度增加 1，所以每个元素都多计算一次，这样就解决了 $cost(e_i)$的计算。最后，因为根节点 k 的层数是 0，所以减去根节点的值 e[k]。

w(i, j)符合四边形不等式优化的条件，所以 dp[i][j]可以用四边形不等式优化。

3. 其他题目

很多区间 DP 问题都能用四边形不等式优化。

hdu 3516 Tree Construction http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3516

hdu 2829 Lawrence http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=2829

hdu 3506 Monkey Party http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3506

洛谷 P1912 诗人小 G https://www.luogu.com.cn/problem/P1912

洛谷 P4767 邮局 https://www.luogu.com.cn/problem/P4767

HDU 3480 Division http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3480