算法竞赛专题解析--

简单数据结构

罗勇军 2020.2.18

本系列是这本算法教材的扩展资料：《算法竞赛入门到进阶》（京东 当当）清华大学出版社
本文 web 地址（同步）：https://blog.csdn.net/weixin_43914593
https://www.cnblogs.com/luoyj/
PDF 下载地址：https://github.com/luoyongjun999/code 其中的补充资料
如有建议，请联系：（1）QQ 群，567554289；（2）作者 QQ，15512356

目录

本文写给刚学过编程语言，正在学数据结构的新队员。

在《数据结构》教材中，一般包含这些内容：线性表（数组、链表）、栈和队列、串、多维数组和广义表、哈希、树和二叉树、图（图的存储、遍历等）、排序等。

本文给出几个简单数据结构的详细代码和习题：链表、栈、队列、堆。

其他几种数据结构的代码和习题，例如串、二叉树、图，在《算法竞赛入门到进阶》一书中有详细说明，这里不再重复。

1 链表

链表的特点是：用一组任意的存储单元存储线性表的数据元素（这组存储单元可以是连续的，也可以不连续）。链表是容易理解和操作的基本数据结构，它的操作有：初始化、添加、遍历、插入、删除、查找、排序、释放等。

下面用例题洛谷 P1996，给出动态链表、静态链表、STL 链表等 5 种实现方案。其中有单向链表，也有双向链表。在竞赛中，为加快编码速度，一般用静态链表或者 STL list。

本文给出的 5 种代码，经过作者的详细整理，逻辑和流程完全一样，看懂一个，其他的完全类似，可以把注意力放在不同的实现方案上，方便学习。

洛谷 P1996 https://www.luogu.com.cn/problem/P1996

约瑟夫问题

题目描述：n 个人围成一圈，从第一个人开始报数，数到 m 的人出列，再由下一个人重新从 1 开始报数，数到 m 的人再出圈，依次类推，直到所有的人都出圈，请输出依次出圈人的编号。

输入输出：输入两个整数 n,m。输出一行 n 个整数，按顺序输出每个出圈人的编号。1≤m,n≤100。

输入输出样例：

输入

10 3

输出

3 6 9 2 7 1 8 5 10 4

1.1 动态链表

教科书都会讲动态链表，它需要临时分配链表节点、使用完毕后释放链表节点。这样做，优点是能及时释放空间，不使用多余内存。缺点是很容易出错。

下面的代码实现了动态单向链表。

```
#include <bits/stdc++.h>
struct node{                //链表结构
    int data;
    node *next;
};

int main(){
    int n,m;
    scanf("%d %d",&n,&m);
    node *head,*p,*now,*prev;     //定义变量
    head = new node; head->data = 1; head->next=NULL; //分配第一个节点，数据置为 1
    now = head;                   //当前指针是头
    for(int i=2;i<=n;i++){
        p = new node;  p->data = i; p->next = NULL;  //p 是新节点
        now->next = p;            //把申请的新节点连到前面的链表上
        now = p;                  //尾指针后移一个
    }
    now->next = head;             //尾指针指向头：循环链表建立完成

 //以上是建立链表，下面是本题的逻辑和流程。后面 4 种代码，逻辑流程完全一致。
```

```
    now = head, prev=head;          //从第 1 个开始数
    while((n--) >1 ){
        for(int i=1;i<m;i++){       //数到 m，停下
            prev = now;             //记录上一个位置，用于下面跳过第 m 个节点
            now = now->next;
        }
        printf("%d ", now->data);       //输出第 m 节点，带空格
        prev->next = now->next;         //跳过这个节点
        delete now;                     //释放节点
        now = prev->next;               //新的一轮
    }
    printf("%d", now->data);            //打印最后一个，后面不带空格
    delete now;                         //释放最后一个节点
    return 0;
}
```

1.2 用结构体实现单向静态链表

上面的动态链表，需要分配和释放空间，虽然对空间的使用很节省，但是容易出错。在竞赛中，对内存管理要求不严格，为加快编码速度，一般就静态分配，省去了动态分配和释放的麻烦。这种静态链表，使用预先分配的大数组来存储链表。

静态链表有两种做法，一是定义一个链表结构，和动态链表的结构差不多；一种是使用一维数组，直接在数组上进行链表操作。

本文给出 3 个例子：用结构体实现单向静态链表、用结构体实现双向静态链表、用一维数组实现单向静态链表。

下面是用结构体实现的单向静态链表。

```
#include <bits/stdc++.h>
const int maxn = 105;         //定义静态链表的空间大小
struct node{                  //单向链表
    int id;
    //int data;   //如有必要，定义一个有意义的数据
    int nextid;
}nodes[maxn];

int main(){
    int n, m;
    scanf("%d%d", &n, &m);
    nodes[0].nextid = 1;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        nodes[i].id = i;
        nodes[i].nextid = i + 1;
    }
    nodes[n].nextid = 1;              //循环链表：尾指向头

    int now = 1, prev = 1;            //从第 1 个开始
```

```
    while((n--) >1){
        for(int i = 1; i < m; i++){   //数到 m，停下
            prev = now;
now = nodes[now].nextid;
        }
        printf("%d ", nodes[now].id);        //带空格
        nodes[prev].nextid = nodes[now].nextid;  //跳过节点 now，即删除 now
        now = nodes[prev].nextid;            //新的 now
    }
    printf("%d", nodes[now].nextid);     //打印最后一个，后面不带空格
    return 0;
}
```

1.3 用结构体实现双向静态链表

```
#include <bits/stdc++.h>
const int maxn = 105;
struct node{      //双向链表
    int id;       //节点编号
    //int data;   //如有必要，定义一个有意义的数据
    int preid;    //前一个节点
    int nextid;   //后一个节点
}nodes[maxn];

int main(){
    int n, m;
    scanf("%d%d", &n, &m);
    nodes[0].nextid = 1;
    for(int i = 1; i <= n; i++){  //建立链表
        nodes[i].id = i;
        nodes[i].preid = i-1;   //前节点
        nodes[i].nextid = i+1;  //后节点
    }
    nodes[n].nextid = 1;   //循环链表：尾指向头
    nodes[1].preid = n;    //循环链表：头指向尾

    int now = 1;           //从第 1 个开始
    while((n--) >1){
        for(int i = 1; i < m; i++)     //数到 m，停下
            now = nodes[now].nextid;
        printf("%d ", nodes[now].id);  //打印，后面带空格

        int prev = nodes[now].preid;
        int next = nodes[now].nextid;
        nodes[prev].nextid = nodes[now].nextid;  //删除 now
        nodes[next].preid = nodes[now].preid;
```

```
        now = next;                    //新的开始
    }
    printf("%d", nodes[now].nextid);   //打印最后一个，后面不带空格
    return 0;
}
```

1.4 用一维数组实现单向静态链表

这是最简单的实现方法。定义一个一维数组 nodes[]，nodes[i]的 i 是节点的值，nodes[i]的值是下一个节点。

从上面描述可以看出，它的使用环境也很有限，因为它的节点只能存一个数据，就是 i。

```
#include<bits/stdc++.h>
int nodes[150];
int main(){
    int n, m;
    scanf("%d%d", &n, &m);
    for(int i=1;i<=n-1;i++)          //nodes[i]的值就是下一个节点
        nodes[i]=i+1;
    nodes[n]=1;                      //循环链表：尾指向头

    int now = 1, prev = 1;           //从第 1 个开始
    while((n--) >1){
        for(int i = 1; i < m; i++){   //数到 m，停下
            prev = now;
            now = nodes[now];         //下一个
        }
        printf("%d ", now);  //带空格
        nodes[prev] = nodes[now];     //跳过节点 now，即删除 now
        now = nodes[prev];            //新的 now
    }
    printf("%d", now);                 //打印最后一个，不带空格
    return 0;
}
```

1.5 STL list

竞赛或工程中，常常使用 C++ STL list。list 是双向链表，它的内存空间可以是不连续的，通过指针来进行数据的访问，它能高效率地在任意地方删除和插入，插入和删除操作是常数时间的。

请读者自己熟悉 list 的初始化、添加、遍历、插入、删除、查找、排序、释放[①]。

下面是洛谷 P1996 的 list 实现。

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main(){
    int n, m;
```

[①] https://blog.csdn.net/zhouzhenhe2008/article/details/77428743

```
    cin>>n>>m;
    list<int>node;
    for(int i=1;i<=n;i++)        //建立链表
        node.push_back(i);
    list<int>::iterator it = node.begin();
    while(node.size()>1){        //list 的大小由 STL 自己管理
        for(int i=1;i<m;i++){    //数到 m
            it++;
            if(it == node.end()) //循环链表，end()是 list 末端下一位置
               it = node.begin();
        }
        cout << *it <<"";
        list<int>::iterator next = ++it;
        if(next==node.end())  next=node.begin();  //循环链表
        node.erase(--it);          //删除这个节点，node.size()自动减 1
        it = next;
    }
    cout << *it;
    return 0;
}
```

1.6 链表习题

畅销书《剑指 offer》给出了练习链表的 OJ 地址：

https://leetcode-cn.com/problemset/lcof/

其中这些题是链表习题：

面试题 06-从尾到头打印链表

面试题 22-链表中倒数第 k 个节点

面试题 24-反转链表

面试题 25-合并两个有序链表

面试题 35-复杂链表的复制

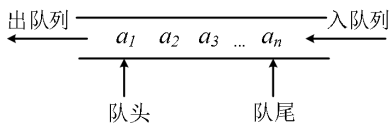
面试题 52-两个链表的第一个公共节点

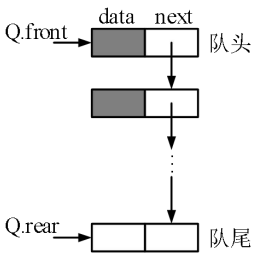
面试题 18-删除链表中的节点

2 队列

队列中的数据存取方式是“先进先出”。例如食堂打饭的队伍，先到先服务。

队列有两种实现方式：链队列和循环队列。





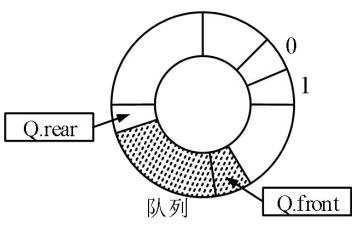


图 2.1（1）队列　　（2）链队列　　（3）循环队列

链队列，可以把它看成是单链表的一种特殊情况，用指针把各个节点连接起来。

循环队列，是一种顺序表，使用一组连续的存储单元依次存放队列元素，用两个指针 front 和 rear 分别指示队列头元素和队列尾元素。由于队列是先进先出的一个“队伍”，所以在存储单元中，front 和 rear 都是一直往前走，走到存储空间的最后面，可能会溢出。为了解决这一问题，把队列设计成环状的循环队列。

队列和栈的主要问题是查找较慢，需要从头到尾一个个查找。在某些应用情况下，可以用优先队列，让优先级最高（比如最大的数）先出队列。

由于队列很简单，而且往往是固定大小的，所以在竞赛中一般就用静态数组来实现队列，或者使用 STL queue。

下面是一个例题，在 2.1 和 2.2 节中分别给出了静态数组和 STL queue 这 2 种代码。

洛谷 P1540 https://www.luogu.com.cn/problem/P1540

机器翻译

题目描述：内存中有 M 个单元，每单元能存放一个单词和译义。每当软件将一个新单词存入内存前，如果当前内存中已存入的单词数不超过 M-1，软件会将新单词存入一个未使用的内存单元；若内存中已存入 M 个单词，软件会清空最早进入内存的那个单词，腾出单元来，存放新单词。

假设一篇英语文章的长度为 N 个单词。给定这篇待译文章，翻译软件需要去外存查找多少次词典？假设在翻译开始前，内存中没有任何单词。

输入：共 2 行。每行中两个数之间用一个空格隔开。

第一行为两个正整数 M,N，代表内存容量和文章的长度。

第二行为 N 个非负整数，按照文章的顺序，每个数（大小不超过 1000）代表一个英文单词。文章中两个单词是同一个单词，当且仅当它们对应的非负整数相同。。

输出：一个整数，为软件需要查词典的次数。

输入输出样例：

输入

```
3 7
1 2 1 5 4 4 1
```

输出

```
5
```

2.1 STL queue

STL queue 的有关操作：

```
queue<Type> q;     //定义栈，Type 为数据类型，如 int，float，char 等
q. push(item);     //把 item 放进队列
q.front();         //返回队首元素，但不会删除
q.pop();           //删除队首元素
q.back();          //返回队尾元素
q.size();          //返回元素个数
q.empty();         //检查队列是否为空
```

下面是洛谷 P1540 的代码，由于不用自己管理队列，代码很简洁。

注意代码中检查内存中有没有单词的方法。如果一个一个地搜索，太慢了；用 hash 不仅很快而且代码简单。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int hash[1003]={0};  //用 hash 检查内存中有没有单词，hash[i]=1 表示单词 i 在内存中
queue<int> mem;      //用队列模拟内存
```

```
int main(){
    int m,n;
    scanf("%d%d",&m,&n);
    int cnt = 0;                        //查词典的次数
    while(n--){
    int en;
    scanf("%d",&en);                    //输入一个英文单词
    if(!hash[en]){                      //如果内存中没有这个单词
        ++cnt;
        mem.push(en);                   //单词进队列，放到队列尾部
        hash[en]=1;                     //记录内存中有这个单词
        while(mem.size()>m){            //内存满了
            hash[mem.front()] = 0;      //从内存中去掉单词
            mem.pop();                  //从队头去掉
            }
        }
    }
    printf("%d\n",cnt);
    return 0;
}
```

2.2 手写循环队列

下面是循环队列的模板。代码中给出了静态分配空间和动态分配空间两种方式。竞赛中用静态分配更好。

```
#include<bits/stdc++.h>
#define MAXQSIZE 1003         //队列大小
int hash[MAXQSIZE]={0};       //用 hash 检查内存中有没有单词

struct myqueue{
    int data[MAXQSIZE];       //分配静态空间
    /* 如果动态分配，就这样写： int *data;    */
    int front;                //队头，指向队头的元素
    int rear;                 //队尾，指向下一个可以放元素的空位置

    bool init(){              //初始化
    /*如果动态分配，就这样写：
        Q.data = (int *)malloc(MAXQSIZE * sizeof(int)) ;
        if(!Q.data) return false; */
        front = rear = 0;
        return true;
    }
    int size(){               //返回队列长度
        return (rear - front + MAXQSIZE) % MAXQSIZE;
    }
    bool push(int e){         //队尾插入新元素。新的 rear 指向下一个空的位置
```

```
        if((rear + 1) % MAXQSIZE == front ) return false; //队列满
        data[rear] = e;
        rear = (rear + 1) % MAXQSIZE;
        return true;
    }
    bool pop(int &e){        //删除队头元素，并返回它
        if(front == rear) return false;   //队列空
        e = data[front];
        front = (front + 1) % MAXQSIZE;
        return true;
    }
}Q;

int main(){
    Q.init();                       //初始化队列
    int m,n;  scanf("%d%d",&m,&n);
    int cnt = 0;
    while(n--){
    int en;  scanf("%d",&en);     //输入一个英文单词
    if(!hash[en]){                //如果内存中没有这个单词
        ++cnt;
        Q.push(en);               //单词进队列，放到队列尾部
        hash[en]=1;
        while(Q.size()>m){        //内存满了
                int tmp;
                Q.pop(tmp);       //删除队头
            hash[tmp] = 0;        //从内存中去掉单词
            }
        }
    }
    printf("%d\n",cnt);
    return 0;
}
```

2.3 单调队列

前面讲的队列，是很“规矩”的，队列的元素都是“先进先出”，队头的只能弹出，队尾只能进入。有没有不那么“规矩”的队列呢？这就是单调队列，它有 2 个特征：

（1）队列中的元素是单调有序的，且元素在队列中的顺序和原来在序列中的顺序一致；

（2）单调队列的队头和队尾都能入队和出队。

其中（1）是我们期望的结果，它是通过（2）来实现的。

单调队列用起来非常灵活，在很多问题中应用它可以获得优化。简单地说是这样实现的：序列中的 n 个元素，用单调队列处理时，每个元素只需要进出队列一次，复杂度是 O(n)。

下面用两个模板题来讲解单调队列的应用，了解它们如何通过单调队列获得优化。注意队列中“**删头、去尾、窗口**”的操作。

2.3.1 滑动窗口

洛谷 P1886https://www.luogu.com.cn/problem/P1886

滑动窗口 /【模板】单调队列

题目描述：有一个长为 n 的序列 a，以及一个大小为 k 的窗口。现在这个从左边开始向右滑动，每次滑动一个单位，求出每次滑动后窗口中的最大值和最小值。

例如：

The array is [1,3,-1,-3,5,3,6,7], and k = 3。

Window position	Minimum value	Maximum value
[1 3 -1] -3 5 3 6 7	-1	3
1 [3 -1 -3] 5 3 6 7	-3	3
1 3 [-1 -3 5] 3 6 7	-3	5
1 3 -1 [-3 5 3] 6 7	-3	5
1 3 -1 -3 [5 3 6] 7	3	6
1 3 -1 -3 5 [3 6 7]	3	7

输入输出：输入一共有两行，第一行有两个正整数 n,k。 第二行 n 个整数，表示序列 a。输出共两行，第一行为每次窗口滑动的最小值，第二行为每次窗口滑动的最大值。

注意：$1 \le k \le n \le 10^6$， $a_i \in [-2^{31}, 2^{31}]$

输入输出样例：

输入

8 3

1 3 -1 -3 5 3 6 7

输出

-1 -3 -3 -3 3 3

3 3 5 5 6 7

这一题用暴力法很容易编程，从头到尾扫描，每次检查 k 个数，一共检查 O(nk)次。暴力法显然会超时，这一题需要用 O(n)的算法。

下面用单调队列来求解，它的复杂度是 O(n)的。

在这一题中，单调队列有以下**特征**：

（1）队头的元素始终是队列中最小的；根据题目需要输出队头，但是不一定弹出。

（2）元素只能从队尾进入队列，从队头队尾都可以弹出。

（3）序列中的每个元素都必须进入队列。例如 a 进队尾时，和原队尾 b 比较，如果 a≤b，就从队尾弹出 b；弹出队尾所有比 a 大的，最后 a 进入队尾。入队的这个操作，保证了队头元素是队列中最小的。

直接看上述题解可能有点晕，这里以食堂排队打饭为例子来说明它。

大家到食堂排队打饭时都有一个心理，在打饭之前，先看看里面有什么菜，如果不好吃就走了。不过，能不能看到和身高有关，站在队尾的人如果个子高，眼光能越过前面队伍的脑袋，看到里面的菜；如果个子矮，会被挡住看不见。

矮个子希望，要是前面的人都比他更矮就好了。如果他会魔法，他来排队的时候，队尾比他高的就自动从队尾离开，新的队尾如果仍比他高，也会离开。最后，新来的矮个子成了新的队尾，而且是最高的。他终于能看到菜了，让人兴奋的是，菜很好吃，所以他肯定不会走。

假设每一个新来的魔法都比队列里的人更厉害，这个队伍就会变成这样：每个新来的人都能排到队尾，但是都会被后面来的矮个子赶走。这样一来，这个队列就会始终满足单调性：从队头到队尾，由矮到高。

但是，让这个魔法队伍郁闷的是，打饭阿姨一直忙她的，顾不上打饭。所以排头的人等了一会儿，就走了，等待时间就是 k。这有一个附带的现象：队伍长度不会超过 k。

输出什么呢？每新来一个排队的人，排头如果还没走，就跟阿姨喊一声，这就是输出。

以上是本题的现实模型。

下面举例描述算法流程，队列是{1,3,-1,-3,5,3,6,7}，读者可以想象成身高。以输出最小值为例，下面表格中的“输出队首”就是本题的结果。

元素进入队尾	元素进队顺序	队列	窗口范围	队首在窗口内吗？	输出队首	弹出队尾	弹出队首
1	1	{1}	[1]	是			
3	2	{1,3}	[1 2]	是			
-1	3	{-1}	[1 2 3]	是	-1	3,1	
-3	4	{-3}	[2 3 4]	是	-3	-1	
5	5	{-3,5}	[3 4 5]	是	-3		
3	6	{-3,3}	[4 5 6]	是	-3	5	
6	7	{3,6}	[5 6 7]	-3 否，3 是	3		-3
7	8	{3,6,7}	[6 7 8]	是	3		

单调队列的时间**复杂度**：每个元素最多入队 1 次、出队 1 次，且出入队都是 O(1)的，因此总时间是 O(n)。题目需要逐一处理所有 n 个数，所以 O(n)已经是能达到的最优复杂度。

从以上过程可以看出，单调队列有两个重要操作：删头、去尾。

（1）删头。如果队头的元素脱离了窗口，这个元素就没用了，弹出它。

（2）去尾。如果新元素进队尾时，原队尾的存在破坏了队列的单调性，就弹出它。

读者可以自己写一个单调队列，不过，一般用 STL deque 就好了。deque 是双端队列，它的用法是：

q[i]：返回 q 中下标为 i 的元素；

q.front()：返回队头；

q.back()：返回队尾；

q.pop_back()：删除队尾。不返回值；

q.pop_front()：删除队头。不返回值；

q.push_back(e)：在队尾添加一个元素 e；

q.push_front(e)：在队头添加一个元素 e。

下面是 P1886 的代码[①]。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

int a[1000005];
deque<int>q;                    //队列中的数据，实际上是元素在原序列中的位置

int main(){
    int n,m;
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++) scanf("%d",&a[i]);
    for(int i=1;i<=n;i++){                      //输出最小值
        while(!q.empty() && a[q.back()]>a[i])  //去尾
            q.pop_back();
        q.push_back(i);
        if(i>=m){                               //每个窗口输出一次
            while(!q.empty() && q.front()<=i-m) //删头
```

[①]参考：https://www.luogu.com.cn/blog/ybwowen/dan-diao-dui-lie

```
                q.pop_front();
            printf("%d ", a[q.front()]);
        }
    }
    printf("\n");

    while(!q.empty())  q.pop_front();              //清空，下面再用一次
    for(int i=1;i<=n;i++){                         //输出最大值
        while(!q.empty() && a[q.back()]<a[i])      //去尾
            q.pop_back();
        q.push_back(i);
        if(i>=m){
            while(!q.empty() && q.front()<=i-m)    //删头
                q.pop_front();
            printf("%d ", a[q.front()]);
        }
    }
    printf("\n");
    return 0;
}
```

2.3.2 最大子序和

给定长度为 n 的整数序列 A，它的“子序列”定义是：A 中非空的一段连续的元素。子序列和，例如序列(6,-1,5,4,-7)，前 4 个元素的和是 6 + (-1) + 5 + 4 = 14。

最大子序和问题，按子序列有无长度限制，有两种：

（1）不限制子序列的长度。在所有可能的子序列中，找到一个子序列，该子序列和最大。

（2）限制子序列的长度。给一个限制 m，找出一段长度不超过 m 的连续子序列，使它的和最大。

问题（1）比较简单，用贪心或 DP，复杂度都是 O(n)的。

问题（2）用单调队列，复杂度也是 O(n)的。通过这个例子，读者可以理解**为什么单调队列能用于 DP 优化**。

问题（1）不是本节的内容，不过为了参照，下面也给出题解。

1. 问题（1）的求解

用贪心或 DP，在 O(n)时间内求解。例题是 hdu 1003。

hdu 1003 http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1003

Max Sum

题目描述：给一个序列，求最大子序和。

输入：第 1 行是整数 T，表示测试用例个数，1<=T<=20。后面跟着 T 行，每一行第 1 个数是 N，后面是 N 个数，1<=N<=100000，每个数在[-1000,1000]内。

输出：对每个测试，输出 2 行，第 1 行是"Case #:"，其中"#"是第几个测试，第 2 行输出 3 个数，第 1 个数是最大子序和，第 2 和第 3 个数是开始和终止位置。

输入输出样例：

输入

2

```
5 6 -1 5 4 -7
7 0 6 -1 1 -6 7 -5
```

输出

```
Case 1:
14 1 4

Case 2:
7 1 6
```

题解 1：贪心。逐个扫描序列中的元素，累加。加一个正数时，和会增加；加一个负数时，和会减少。如果当前得到的和变成了负数，这个负数和在接下来的累加中，会减少后面的求和。所以抛弃它，从下一位置开始重新求和。

hdu 1003 的贪心代码

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int INF = 0x7fffffff;
int main(){
    int t;  cin >> t;               //测试用例个数
    for(int i = 1; i <= t; i++){
        int n; cin >> n;
        int maxsum = -INF;          //最大子序和，初始化为一个极小负数
        int start=1, end=1, p=1;    //起点，终点，扫描位置
        for(int j = 1; j <= n; j++){
            int a; cin >> a;        //读入一个元素
            int sum = 0;            //子序和
            sum += a;
            if(sum > maxsum){
                maxsum = sum;
                start = p;
                end = j;
            }
            if(sum < 0){
                  //扫到 j 时，前面的最大子序和是负数，那么从下一个 j 重新开始求和。
                sum = 0;
                p = j+1;
            }
        }
        printf("Case %d:\n",i);
        printf("%d %d %d\n", maxsum,start,end);
        if(i != t) cout << endl;
    }
    return 0;
}
```

题解 2：DP。用 dp[i]表示到达第 i 个数时，a[1]～a[i]的最大子序和。状态转移方程为 dp[i] = max(dp[i-1]+a[i], a[i])。

hdu 1003 的 DP 代码

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

int dp[100005];    //dp[i]: 以第 i 个数为结尾的最大值
int main(){
    int t; cin>>t;
    for(int i=1;i<=t;i++){
        int n; cin >> n;
        for(int j=1;j<=n;j++)  cin >> dp[j];
        int start=1, end=1, p=1;   //起点，终点，扫描位置
        int maxsum = dp[1];
        for(int j=2; j<=n; j++){
            if(dp[j-1] >= 0)        //dp[i-1]大于 0，则对 dp[i]有贡献
                dp[j] = dp[j-1]+dp[j];   //转移方程
            else p = j;
            if(dp[j]> maxsum ) {
                maxsum = dp[j];
                start = p;
                end = j;
            }
        }
        printf("Case %d:\n",i);
        printf("%d %d %d\n", maxsum,start,end);
        if(i != t) cout << endl;
    }
}
```

2. 问题（2）的求解

和 2.3.1 节的滑动窗口类似，可以用单调队列的“**窗口、删头、去尾**”来解决问题（2）。

首先求前缀和 s[i]。s[i]是 a[1]～a[i]的和，算出所有的 s[i]～s[n]，时间是 O(n)的。

问题（2）转换为：找出两个位置 i, k，使得 s[i] - s[k]最大，i - k≤ M。对于某个特定的 s[i], 就是找到与它对应的最小 s[k]。如果简单地暴力检查，对每个 i，检查比它小的 m 个 s[k]，那么总复杂度是 O(nm)的。

用单调队列，可以使复杂度优化到 O(n)。其关键是，s[k]只进入和弹出队列一次。基本过程是这样的，从头到尾检查 s[]，当检查到某个 s[i]时，在窗口 m 内：

（1）找到最小的那个 s[k]，并检查 s[i]-s[k]是不是当前的最小子序和，如果是，就记录下来。

（2）比 s[i]大的所有 s[k]都可以抛弃，因为它们在处理 s[i]后面的 s[i']时也用不着了，s[i']-s[i]要优于 s[i']-s[k]，留着 s[i]就可以了。

这个过程用单调队列最合适：s[i]进队尾时；如果原队尾比 s[i]大就**去尾**；如果队头超过**窗口**范围 m 就**去头**；而最小的那个 s[k]就是队头。因为每个 s[i]只进出队列一次，所以复杂度为 O(n)。

下面是代码。

```
#include<bits/stdc++.h>
```

```
using namespace std;

deque<int> dq;
int s[100005];
int main(){
    int n,m;
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++) scanf("%lld",&s[i]);
    for(int i=1;i<=n;i++) s[i]=s[i]+s[i-1];          //计算前缀和
    int ans = -1e8;
    dq.push_back(0);
    for(int i=1;i<=n;i++) {
        while(!dq.empty() && dq.front()<i-m)         //队头超过 m 范围：删头
            dq.pop_front();
        if(dq.empty())
            ans = max(ans,s[i]);
        else
            ans = max(ans,s[i]-s[dq.front()]);       //队头就是最小的 s[k]
        while(!dq.empty() && s[dq.back()] >= s[i])   //队尾大于 s[i]，去尾
            dq.pop_back();
        dq.push_back(i);
    }
    printf("%d\n",ans);
    return 0;
}
```

在这个例子中，s[i]的操作实际上符合 DP 的特征。通过这个例子，读者能理解，为什么单调队列可以用于 DP 的优化。

2.4 队列习题

（1）单调队列简单题[①]：洛谷 P1440，P2032，P1714，P2629，P2422。

（2）单调队列可以用于优化 DP，例如多重背包的优化等。请参考：

https://blog.csdn.net/FSAHFGSADHSAKNDAS/article/details/52825227

优化 DP：洛谷 P3957、P1725。

（3）二维队列：洛谷 P2776

3 栈

栈的特点是“先进后出”。例如坐电梯，先进电梯的被挤在最里面，只能最后出来；一管泡腾片，最先放进管子的药片位于最底层，最后被拿出来。

编程中常用的递归，就是用栈来实现的。栈需要用空间存储，如果栈的深度太大，或者存进栈的数组太大，那么总数会超过系统为栈分配的空间，就会爆栈，即栈溢出。这是递归的主要问题。

本节的栈用到 STL stack，或者自己写栈。为避免爆栈，需要控制栈的大小。

3.1 STL stack

[①] https://blog.csdn.net/sinat_40471574/article/details/90577147

STL stack 的有关操作：

stack<Type> s; //定义栈，Type 为数据类型，如 int，float，char 等

s.push(item); //把 item 放到栈顶

s.top(); //返回栈顶的元素，但不会删除。

s.pop(); //删除栈顶的元素，但不会返回。在出栈时需要进行两步操作，先 top()获得栈顶元素，再 pop()删除栈顶元素

s.size(); //返回栈中元素的个数

s.empty(); //检查栈是否为空，如果为空返回 true，否则返回 false

下面用一个例题说明栈的应用。

hdu 1062 http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1062

Text Reverse

翻转字符串。例如，输入“olleh !dlrow”，输出“hello world!”。

下面是 hdu 1062 的代码。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int main(){
    int n;
    char ch;
    scanf("%d",&n);  getchar();
    while(n--){
        stack<char> s;
        while(true){
            ch = getchar();                    //一次读入一个字符
            if(ch==' '||ch=='\n'||ch==EOF){
                while(!s.empty()){
                    printf("%c",s.top());      //输出栈顶
                    s.pop();                   //清除栈顶
                }
                if(ch=='\n'||ch==EOF)  break;
                printf("");
            }
            else
                s.push(ch);                    //入栈
        }
        printf("\n");
    }
    return 0;
}
```

3.2 手写栈

自己写个栈，很节省空间。下面是 hdu 1062 的代码。

```
#include<bits/stdc++.h>
const int maxn = 100000 + 100;

struct mystack{
```

```
    char a[maxn];                          //存放栈元素，字符型
    int t = 0;                             //栈顶位置
    void push(char x){ a[++t] = x; }       //送入栈
    char top()       { return a[t]; }      //返回栈顶元素
    void pop()       { t--;         }      //弹出栈顶
    int empty()      { return t==0?1:0;}   //返回 1 表示空
}st;

int main(){
    int n;
    char ch;
    scanf("%d",&n);  getchar();
    while(n--){
        while(true){
            ch = getchar();                  //一次读入一个字符
            if(ch==' '||ch=='\n'||ch==EOF){
                while(!st.empty()){
                    printf("%c",st.top());   //输出栈顶
                    st.pop();                //清除栈顶
                }
                if(ch=='\n'||ch==EOF)  break;
                printf("");
            }
            else
                st.push(ch);                  //入栈
        }
        printf("\n");
    }
    return 0;
}
```

3.3 单调栈

单调栈可以处理比较问题。单调栈内的元素是单调递增或递减的的，有单调递增栈、单调递减栈。

单调栈比单调队列简单，因为栈只有一个出入口。

下面的例题是单调栈的简单应用。

洛谷 P2947 https://www.luogu.com.cn/problem/P2947

向右看齐

题目描述：N(1≤N≤10^5)头奶牛站成一排，奶牛 i 的身高是 Hi(1≤Hi≤1,000,000)。现在，每只奶牛都在向右看齐。对于奶牛 i，如果奶牛 j 满足 i<j 且 Hi<Hj，我们说奶牛 i 仰望奶牛 j。求出每只奶牛离她最近的仰望对象。

输入输出：第 1 行输入 N，之后每行输入一个身高 H_i。输出共 N 行，按顺序每行输出一只奶牛的最近仰望对象，如果没有仰望对象，输出 0。

输入输出样例：

输入

```
6
3
2
6
1
1
2
```

输出

```
3
3
0
6
6
0
```

题解：从后往前遍历奶牛，并用一个栈保存从低到高的奶牛，栈顶的奶牛最矮，栈底的最高。具体操作是：遍历到奶牛 i 时，与栈顶的奶牛比较，如果不比 i 高，就弹出栈顶，直到栈顶的奶牛比 i 高，这就是 i 的仰望对象；然后把 i 放进栈顶，栈里的奶牛仍然保持从低到高。
复杂度：每个奶牛只进出栈一次，所以是 O(n)的。

下面分别用 STL stack 和手写栈来实现。

（1）用 STL stack 实现

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

int h[100001], ans[100001];
int main(){
    int n;
    scanf("%d",&n);
    for (int i=1;i<=n;i++)  scanf("%d",&h[i]);
    stack<int>st;
    for (int i=n;i>=1;i--){
        while (!st.empty() && h[st.top()] <= h[i])
            st.pop();        //栈顶奶牛没我高，弹出它，直到栈顶奶牛更高
        if (st.empty())      //栈空，没有仰望对象
            ans[i]=0;
        else                 //栈顶奶牛更高，是仰望对象
            ans[i]=st.top();
        st.push(i);
    }
    for (int i=1;i<=n;i++)
        printf("%d\n",ans[i]);
    return 0;
}
```

（2）手写栈

和 3.2 节几乎一样，只是改了栈元素的类型。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

const int maxn = 100000 + 100;
struct mystack{
    int a[maxn];                        //存放栈元素，int 型
    int t = 0;                          //栈顶位置
    void push(int x){ a[++t] = x;  }    //送入栈
    int  top()      { return a[t]; }    //返回栈顶元素
    void pop()      { t--;         }    //弹出栈顶
    int empty()     { return t==0?1:0;} //返回 1 表示空
}st;

int h[maxn], ans[maxn];

int main(){
    int n;
    scanf("%d",&n);
    for (int i=1;i<=n;i++)  scanf("%d",&h[i]);
    for (int i=n;i>=1;i--){
        while (!st.empty() && h[st.top()] <= h[i])
            st.pop();               //栈顶奶牛没我高，弹出它，直到栈顶奶牛更高
        if (st.empty())             //栈空，没有仰望对象
            ans[i]=0;
        else                        //栈顶奶牛更高，是仰望对象
            ans[i]=st.top();
        st.push(i);
    }
    for (int i=1;i<=n;i++)
        printf("%d\n",ans[i]);
    return 0;
}
```

3.4 栈习题

洛谷 P5788

https://leetcode-cn.com/problemset/lcof/

面试题 09-用两个栈实现队列

面试题 30-包含 min 函数的栈

面试题 31-栈的压入、弹出序列

面试题 58-翻转单词顺序列(栈)

4 堆

4.1 二叉堆概念

堆的特征是：堆顶元素是所有元素的最优值。堆的应用有堆排序和优先队列。

堆有两种：最大堆、最小堆。最大堆的根结点元素有最大值，最小堆的根结点元素有最小值。下面都以最小堆为例进行讲解。

堆可以看成一棵完全二叉树。用数组实现的二叉树堆，树中的每个结点与数组中存放的元素对应。树的每一层，除了最后一层可能不满，其他每一层都是满的。

二叉堆中的每个结点，都是以它为父结点的子树的最小值。

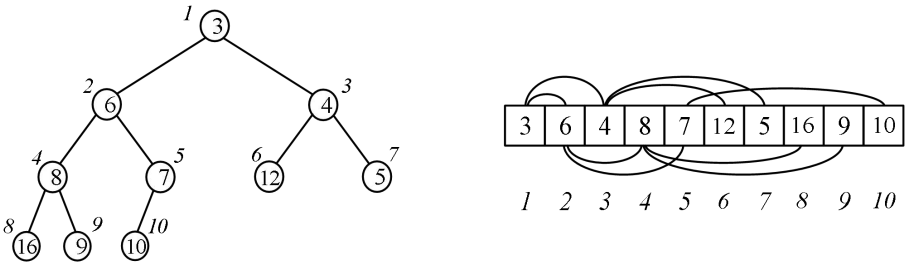


图 4.1 用数组实现的二叉树堆

用数组 A[]存储完全二叉树，结点数量为 n，A[0]不用，A[1]为根结点，有以下性质：

（1）i > 1 的结点，其父结点位于 i/2；

（2）如果 2*i > n，那么 i 没有孩子；如果 2*i+1 > n，那么 i 没有右孩子；

（3）如果结点 i 有孩子，那么它的左孩子是 2*i，右孩子是 2*i+1。

堆的操作有进堆和出堆。

（1）进堆：每次把元素放进堆，都调整堆的形状，使得根结点保持最小。

（2）出堆：每次取出的堆顶，就是整个堆的最小值；同时调整堆，使得新的堆顶最小。

复杂度：二叉树只有 0(logn)层，进堆和出堆逐层调整，都是 0(logn)的。

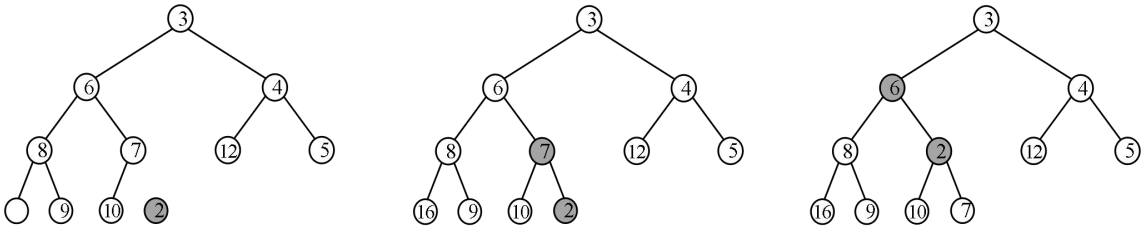
4.2 二叉堆的实现

堆的具体实现有两个方法[①]：上浮、下沉。

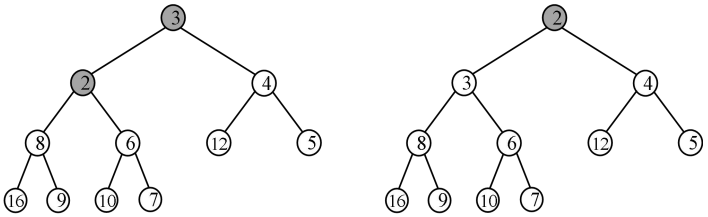
上浮：某个结点的优先级上升，或者在堆底加入一个新元素（建堆，把新元素加入堆），此时需要从下至上恢复堆的顺序。

下沉：某个结点的优先级下降，或者将根结点替换为一个较小的新元素（取出堆顶，用其他元素替换它），此时需要从上至下恢复堆的顺序。

（1）上浮



(1)插入新元素 2　　(2)第一次上浮，2 与父亲 7 交换　　(3)第二次上浮，2 与父亲 6 交换

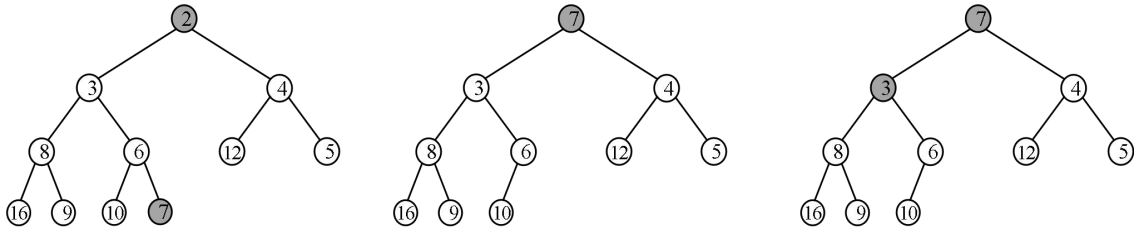


[①] 参考《算法》，Robert Sedgewick，人民邮电出版社

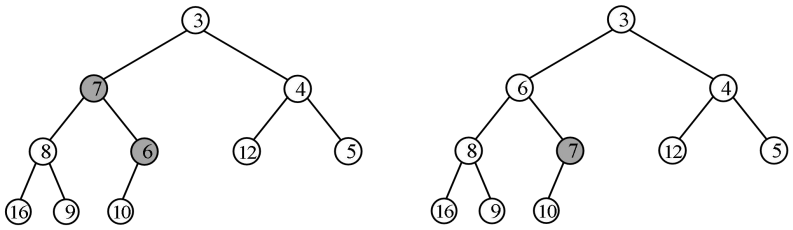
(4)第三次上浮，2 与父亲 3 交换　　(5)到达堆顶

图 4.2 新元素 2 的上浮

（2）下沉



(1)弹出堆顶 2　　(2)把最后的 7 换到堆顶　　(3)第一次下沉，7 与 3 交换



(4)第二次下沉，7 与 6 交换　　(5)到达位置

图 4.3 弹出堆顶后，元素 7 的下沉

上浮和下沉的代码实现，见下一节的例题。

堆经常用于实现优先队列，上浮对应优先队列的插入 push()，下沉对应优先队列的删除队头 pop()。

4.3 手写堆

用下面的例题给出手写堆实现。类似的题目见洛谷 P2278。

洛谷 P3378 堆 https://www.luogu.com.cn/problem/P3378

题目描述：

初始小根堆为空，我们需要支持以下 3 种操作：

操作 1： 1 x 表示将 x 插入到堆中

操作 2： 2 输出该小根堆内的最小数

操作 3： 3 删除该小根堆内的最小数

输入格式：

第一行包含一个整数 N，表示操作的个数，N<=1000000。

接下来 N 行，每行包含 1 个或 2 个正整数，表示三种操作，格式如下：

操作 1： 1 x

操作 2： 2

操作 3： 3

输出格式：

包含若干行正整数，每行依次对应一个操作 2 的结果。

输入输出样例：

输入

5

1 2

```
1 5
2
3
2
输出
2
5
```

题解：

下面给出代码。

上浮用 push()实现，完成插入新元素的功能，对应优先队列的入队。

下沉用 pop()实现，完成删除堆头的功能，对应优先队列的删除队头。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

const int maxn = 1e6 + 5;
int heap[maxn], len=0;              //len 记录当前二叉树的长度

void push(int x) {                  //上浮，插入新元素
    heap[++len] = x;
    int i = len;
    while (i > 1 && heap[i] < heap[i/2]){
        swap(heap[i], heap[i/2]);
        i = i/2;
    }
}

void pop() {                            //下沉，删除堆头，调整堆
    heap[1] = heap[len--];              //根结点替换为最后一个结点，然后结点数量减 1
    int i = 1;
    while ( 2*i <= len) {               //至少有左儿子
        int son = 2*i;                  //左儿子
        if (son < len && heap[son + 1] < heap[son])
                                        //son<len 表示有右儿子，选儿子中较小的
            son++;                      //右儿子更小
        if (heap[son] < heap[i]){       //与小的儿子交换
            swap(heap[son], heap[i]);
            i = son;                    //下沉到儿子处
        }
        else break;                     //如果不比儿子小，就停止下沉
    }
}

int main() {
    int n;   scanf("%d",&n);
    while(n--){
```

```
        int op; scanf("%d",&op);
        if (op == 1) {
            int x;  scanf("%d",&x);
            push(x);                    //加入堆
        }
        else if (op == 2)
            printf("%d\n", heap[1]);  //打印堆头
        else pop();                     //删除堆头
    }
    return 0;
}
```

4.4 STL priority_queue

STL 的优先队列 priority_queue，实际上是一个堆。

下面是洛谷 P3378 的 STL 代码。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;

priority_queue<int ,vector<int>,greater<int> >q;  //定义堆
int main(){
    int n;  scanf("%d",&n);
    while(n--) {
        int op;   scanf("%d",&op);
        if(op==1) {
            int x;   scanf("%d",&x);
            q.push(x);
        }
        else if(op==2)
            printf("%d\n",q.top());
        else  q.pop();
    }
    return 0;
}
```