

## 二分法、三分法

罗勇军 2019.11.25

本系列是这本算法教材的扩展资料：《算法竞赛入门到进阶》. 罗勇军、郭卫斌. 清华大学出版社

本文 web 地址：[https://blog.csdn.net/weixin\\_43914593/article/details/103250854](https://blog.csdn.net/weixin_43914593/article/details/103250854)

PDF 下载地址：<https://github.com/luoyongjun999/code> 其中的补充资料

如有建议，请联系：（1）QQ 群，567554289；（2）作者 QQ，15512356

### 目录

1 二分法的理论背景.....	1
2 整数二分模板.....	2
2.1 基本形式.....	2
查找大于等于 $x$ 的最小的一个的位置 ( $x$ 或者 $x$ 的后继) .....	3
1) 生成随机数组 $a[]$ ; .....	3
2) 用 <code>sort()</code> 排序; .....	3
3) 生成一个随机的 $x$ ; .....	3
4) 分别用 <code>bin_search()</code> 和 <code>lower_bound()</code> 在 $a[]$ 中找 $x$ ; .....	3
5) 比较它们的返回值是否相同。.....	3
<code>bin_search()</code> 和 <code>lower_bound()</code> 对比测试.....	3
2.2 STL 的 <code>lower_bound()</code> 和 <code>upper_bound()</code> .....	4
2.3 简单例题.....	4
3 整数二分典型题目.....	5
3.1 最大值最小化（最大值尽量小）.....	5
3.1.1 序列划分问题.....	5
3.1.2 通往奥格瑞玛的道路.....	6
3.2 最小值最大化（最小值尽量大）.....	6
4 实数二分.....	7
4.1 基本形式.....	7
4.2 实数二分例题.....	8
5 二分法习题.....	9
6 三分法求极值.....	9
6.1 原理.....	9
6.2 实数三分.....	10
6.2.1 实数三分习题.....	12
6.3 整数三分.....	12

二分法和三分法是算法竞赛中常见的算法思路，本文介绍了它们的理论背景、模板代码、典型题目。

### 1 二分法的理论背景

在《计算方法》教材中，关于非线性方程的求根问题，有一种是二分法。

方程求根是常见的数学问题，满足方程：

$$f(x) = 0 \quad (1-1)$$

的数  $x'$  称为方程(1-1)的根。

所谓非线性方程，是指  $f(x)$  中含有三角函数、指数函数或其他超越函数。这种方程，很难或者无法求得精确解。不够，在实际应用中，只要得到满足一定精度要求的近似解就可以了，此时，需要考虑 2 个问题：

(1) 根的存在性。用这个定理判定：设函数在闭区间  $[a, b]$  上连续，且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则  $f(x) = 0$  存在根。

(2) 求根。一般有两种方法：搜索法、二分法。

**搜索法：**把区间  $[a, b]$  分成  $n$  等份，每个子区间长度是  $\Delta x$ ，计算点  $x_k = a + k\Delta x$  ( $k=0, 1, 2, 3, 4, \dots, n$ ) 的函数值  $f(x_k)$ ，若  $f(x_k) = 0$ ，则是一个实根，若相邻两点满足  $f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0$ ，则在  $(x_k, x_{k+1})$  内至少有一个实根，可以取  $(x_k + x_{k+1})/2$  为近似根。

**二分法：**如果确定  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  内连续，且  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则至少有一个实根。二分法的操作，就是把  $[a, b]$  逐次分半，检查每次分半后区间两端点函数值符号的变化，确定有根的区间。

什么情况下用二分？两个条件：**上下界  $[a, b]$  确定、函数在  $[a, b]$  内单调。**

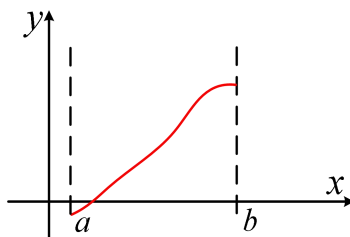


图 1.1 单调函数

**复杂度：**经过  $n$  次二分后，区间会缩小到  $(b-a)/2^n$ 。给定  $a, b$  和精度要求  $\varepsilon$ ，可以算出二分次数  $n$ ，即满足  $(b-a)/2^n < \varepsilon$ 。所以，二分法的复杂度是  $O(\log n)$  的。例如，如果函数在区间  $[0, 100000]$  内单调变化，要求根的精度是  $10^{-8}$ ，那么二分次数是 44 次。

二分非常**高效**。所以，如果问题是单调性的，且求解精确解的难度很高，可以考虑用二分法。

在算法竞赛题目中，有两种题型：整数二分、实数二分。整数域上的二分，注意终止边界、左右区间的开闭情况，避免漏掉答案或者死循环。实数域上的二分，需要注意精度问题。

## 2 整数二分模板

### 2.1 基本形式

先看一个简单问题：在有序数列  $a[]$  中查找某个数  $x$ ；如果数列中没有  $x$ ，找它的后继。通过这个问题，给出二分法的基本代码。

如果有  $x$ ，找第一个  $x$  的位置；如果没有  $x$ ，找比  $x$  大的第一个数的位置。



图 2.1 (a) 数组中有  $x$

(b) 数组中没有  $x$

示例： $a[] = \{-12, -6, -4, 3, 5, 5, 8, 9\}$ ，其中有  $n = 8$  个数，存储在  $a[0] \sim a[7]$ 。

1) 查找  $x = -5$ ，返回位置 2，指向  $a[2] = -4$ ；

2) 查找  $x = 7$ ，返回位置 6，指向  $a[6] = 8$ ；

3) 特别地，如果  $x$  大于最大的  $a[7] = 9$ ，例如  $x = 12$ ，返回位置 8。由于不存在  $a[8]$ ，所以此时是越界的。

下面是模板代码。

查找大于等于  $x$  的最小的一个的位置 ( $x$  或者  $x$  的后继)

```
int bin_search(int *a, int n, int x){    //a[0]~a[n-1]是单调递增的
    int left = 0, right = n;           //注意: 不是 n-1
    while (left < right) {
        int mid = left + (right-left)/2; //int mid = (left + right) >> 1;
        if (a[mid] >= x) right = mid;
        else left = mid + 1;
    }
    //终止于 left = right
    return left;                       //特殊情况: a[n-1] < x 时, 返回 n
}
```

下面对上述代码进行补充说明:

(1) 代码执行完毕后,  $\text{left}=\text{right}$ , 两者相等, 即答案所处的位置。

(2) 复杂度: 每次把搜索的范围缩小一半, 总次数是  $\log(n)$ 。

(3) 中间值  $\text{mid}$

中间值写成  $\text{mid} = \text{left} + (\text{right}-\text{left})/2$  或者  $\text{mid} = (\text{left} + \text{right}) \gg 1$  都行<sup>1</sup>。不过, 如果  $\text{left} + \text{right}$  很大, 可能溢出, 用前一种更好。

不能写成  $\text{mid} = (\text{left} + \text{right})/2$ ; 在有负数的情况下, 会出错。

(4) 对比测试

`bin_search()` 和 STL 的 `lower_bound()` 的功能是一样的。下面的测试代码, 比较了 `bin_search()` 和 `lower_bound()` 的输出, 以此证明 `bin_search()` 的正确性。注意, 当  $a[n-1] < \text{key}$  时, `lower_bound()` 返回的也是  $n$ 。

代码执行以下步骤:

- 1) 生成随机数组  $a[]$ ;
- 2) 用 `sort()` 排序;
- 3) 生成一个随机的  $x$ ;
- 4) 分别用 `bin_search()` 和 `lower_bound()` 在  $a[]$  中找  $x$ ;
- 5) 比较它们的返回值是否相同。

`bin_search()` 和 `lower_bound()` 对比测试

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define MAX 100    //试试 10000000
#define MIN -100
int a[MAX];        //如果 MAX 超过 100 万, 大数组 a[MAX] 最好定义为全局2

unsigned long ulrand() {    //生成一个大随机数
    return (
        (((unsigned long)rand() << 24) & 0xFF000000ul)
        | (((unsigned long)rand() << 12) & 0x00FF0000ul)
        | (((unsigned long)rand()) & 0x00000FFFul));
}
```

<sup>1</sup> 参考李煜东《算法竞赛进阶指南》26 页, 有  $\text{mid} = (\text{left} + \text{right}) \gg 1$  的细节解释。

<sup>2</sup> 大数组定义在全局的原因是: 有的评测环境, 栈空间很小, 大数组定义在局部占用了栈空间导致爆栈。现在各大 OJ 和比赛都会设置编译命令使栈空间等于内存大小, 不会出现爆栈。

```

int bin_search(int *a, int n, int x){    //a[0]~a[n-1]是有序的
    int left = 0, right = n;           //不是 n-1
    while (left < right) {
        int mid = left+(right-left)/2; //int mid = (left+ right)>>1;
        if (a[mid] >= x) right = mid;
        else left = mid + 1;
    }
    return left;           //特殊情况：如果最后的 a[n-1] < key, left = n
}

int main(){
    int n = MAX;
    srand(time(0));
    while(1){
        for(int i=0; i< n; i++)    //产生[MIN, MAX]内的随机数，有正有负
            a[i] = ulrand() % (MAX-MIN + 1) + MIN;
        sort(a, a + n );           //排序, a[0]~a[n-1]

        int test = ulrand() % (MAX-MIN + 1) + MIN; //产生一个随机的 x
        int ans = bin_search(a,n,test);
        int pos = lower_bound(a,a+n,test)-a;

        //比较 bin_search() 和 lower_bound() 的输出是否一致：
        if(ans == pos) cout << "!";           //正确
        else { cout << "wrong"; break;} //有错，退出
    }
}

```

## 2.2 STL 的 lower\_bound() 和 upper\_bound()

如果只是简单地找  $x$  或  $x$  附近的数，就用 STL 的 lower\_bound() 和 upper\_bound() 函数。有以下情况：

- (1) 查找第一个大于  $x$  的元素的位置：upper\_bound()。代码例如：  
pos = upper\_bound(a, a+n, test) - a;
- (2) 查找第一个等于或者大于  $x$  的元素：lower\_bound()。
- (3) 查找第一个与  $x$  相等的元素：lower\_bound() 且  $= x$ 。
- (4) 查找最后一个与  $x$  相等的元素：upper\_bound() 的前一个且  $= x$ 。
- (5) 查找最后一个等于或者小于  $x$  的元素：upper\_bound() 的前一个。
- (6) 查找最后一个小于  $x$  的元素：lower\_bound() 的前一个。
- (7) 单调序列中数  $x$  的个数：upper\_bound() - lower\_bound()。

## 2.3 简单例题

寻找指定和的整数对。这是一个非常直接的二分法问题。

### ■ 问题描述

输入  $n$  ( $n \leq 100,000$ ) 个整数，找出其中的两个数，它们之和等于整数  $m$  (假定肯定有解)。

题中所有整数都能用 int 表示。

### ■ 题解

下面给出三种方法：

(1) 暴力搜，用两重循环，枚举所有的取数方法，复杂度  $O(n^2)$ 。超时。

(2) 二分法。首先对数组从小到大排序，复杂度  $O(n\log n)$ ；然后，从头到尾处理数组中的每个元素  $a[i]$ ，在  $a[i]$  后面的数中二分查找是否存在一个等于  $m - a[i]$  的数，复杂度是  $O(n\log n)$ 。两部分相加，总复杂度仍然是  $O(n\log n)$ 。

(3) **尺取法**/双指针/two pointers。对于这个特定问题，最好的算法是：首先对数组从小到大排序；然后，设置两个变量  $i$  和  $j$ ，分别指向头和尾， $i$  初值是 0， $j$  初值是  $n-1$ ，检查  $a[i]+a[j]$ ，如果大于  $m$ ，就让  $j$  减 1，如果小于  $m$ ，就让  $i$  加 1，直至  $a[i]+a[j] = m$ 。排序复杂度  $O(n\log n)$ ，检查的复杂度  $O(n)$ ，总复杂度  $O(n\log n)$ 。检查的代码这样写：

```
void find_sum(int a[], int n, int m){
    sort(a, a + n - 1);
    int L = 0, R = n - 1;    //左右下标指向头和尾
    while (L < R){
        int sum = a[L] + a[R];
        if (sum > m)    R--;
        if (sum < m)    L++;
        if (sum == m){    //打印出一种情况。可能有多种情况，读者练习
            cout << a[L] << "    " << a[R] << endl;
            return;
        }
    }
}
```

### 3 整数二分典型题目

上面给出的二分法代码 `bin_search()`，处理的是简单的数组查找问题。从这个例子，我们能学习到二分法的思想。

在用二分法的典型题目中，主要是用二分法思想来进行判定。它的基本形式是：

```
while (left < right) {
    int ans;        //记录答案
    int mid = left+(right-left)/2;    //二分
    if (check(mid)){ //检查条件，如果成立
        ans = mid;    //记录答案
        ...           //移动 left (或 right)
    }
    else ...         //移动 right (或 left)
}
```

所以，二分法的难点在于如何建模和 `check()` 条件，其中可能会套用其他算法或者数据结构。

二分法的典型应用有：**最小化最大值、最大化最小值**。

#### 3.1 最大值最小化（最大值尽量小）

##### 3.1.1 序列划分问题

这是典型的最大值最小化问题。

##### ■ 题目描述

例如，有一个序列  $\{2, 2, 3, 4, 5, 1\}$ ，将其划分成 3 个连续的子序列  $S(1)$ 、 $S(2)$ 、 $S(3)$ ，每

个子序列最少有一个元素，要求使得每个子序列的和的最大值最小。

下面举例 2 个分法：

分法 1:  $S(1)$ 、 $S(2)$ 、 $S(3)$  分别是 (2, 2, 3)、(4, 5)、(1)，子序列和分别是 7、9、1，最大值是 9；

分法 2: (2, 2, 3)、(4)、(5, 1)，子序列和是 7、4、6，最大值是 7。

分法 2 更好。

#### ■ 题解

在一次划分中，考虑一个  $x$ ，使  $x$  满足：对任意的  $S(i)$ ，都有  $S(i) \leq x$ ，也就是说， $x$  是所有  $S(i)$  中的最大值。题目要求的就是找到这个最小的  $x$ 。这就是**最大值最小化**。

如何找到这个  $x$ ？从小到大一个个地试，就能找到那个最小的  $x$ 。

简单的办法是：枚举每一个  $x$ ，用贪心法每次从左向右尽量多划分元素， $S(i)$  不能超过  $x$ ，划分的子序列个数不超过  $m$  个。这个方法虽然可行，但是枚举所有的  $x$  太浪费时间了。

改进的办法是：用二分法在  $[\max, \text{sum}]$  中间查找满足条件的  $x$ ，其中  $\max$  是序列中最大元素， $\text{sum}$  是所有元素的和。

### 3.1.2 通往奥格瑞玛的道路

“通往奥格瑞玛的道路”，来源：<https://www.luogu.org/problem/P1462>

#### ■ 题目描述

给定无向图， $n$  个点， $m$  条双向边，每个点有点权  $f_i$ （这个点的过路费），有边权  $c_i$ （这条路的血量）。求起点 1 到终点  $N$  的所有可能路径中，在总边权（总血量）不超过给定的  $b$  的前提下，所经过的路径中最大点权（这条路径上过路费最大的那个点）的最小值是多少。

题目数据： $n \leq 10000$ ， $m \leq 50000$ ， $f_i, c_i, B \leq 1e9$ 。

#### ■ 题解

对点权  $f_i$  进行二分，用  $\text{dijkstra}$  求最短路，检验总边权是否小于  $b$ 。二分法是最小化最大值问题。

这一题是二分法和最短路算法的简单结合。

(1) 对点权（过路费）二分。题目的要求是：从 1 到  $N$  有很多路径，其中的一个可行路径  $P_i$ ，它有一个点的过路费最大，记为  $F_i$ ；在所有可行路径中，找到那个有最小  $F$  的路径，输出  $F$ 。解题方案是：先对所有点的  $f_i$  排序，然后用二分法，找符合要求的最小的  $f_i$ 。二分次数  $\log(f_i) = \log(1e9) < 30$ 。

(2) 在检查某个  $f_i$  时，删除所有大于  $f_i$  的点，在剩下的点中，求 1 到  $N$  的最短路，看总边权是否小于  $b$ ，如果满足，这个  $f_i$  是合适的（如果最短路边权都大于  $b$ ，那么其他路径的总边权就更大，肯定不符合要求）。一次  $\text{Dijkstra}$  求最短路，复杂度是  $O(m \log n)$ 。

总复杂度满足要求。

### 3.2 最小值最大化（最小值尽量大）

#### ■ 题目描述

“进击的奶牛”，来源：<https://www.luogu.org/problem/P1824>

在一条很长的直线上，指定  $n$  个坐标点  $(x_1, \dots, x_n)$ 。有  $c$  头牛，安排每头牛站在其中一个点（牛棚）上。这些牛喜欢打架，所以尽量距离远一些。问最近的两头牛之间距离的最大值可以是多少。

这个题目里，所有的牛棚两两之间的距离有个最小值，题目要求使得这个**最小值最大化**。

#### ■ 题解

(1) 暴力法。从小到大枚举最小距离的值  $\text{dis}$ ，然后检查，如果发现有一次不行，那么上次枚举的就是最大值。如何检查呢？用贪心法：第一头牛放在  $x_1$ ，第二头牛放在  $x_j \geq x_1 + \text{dis}$  的

点  $x_i$ , 第三头牛放在  $x_k \geq x_j + \text{dis}$  的点  $x_k$ , 等等, 如果在当前最小距离下, 不能放  $c$  条牛, 那么这个  $\text{dis}$  就不可取。复杂度  $O(nc)$ 。

(2) 二分。分析从小到大检查  $\text{dis}$  的过程, 发现可以用二分的方法找这个  $\text{dis}$ 。这个  $\text{dis}$  符合二分法: 它有上下边界、它是单调递增的。复杂度  $O(n \log n)$ 。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int n, c, x[100005]; //牛棚数量, 牛数量, 牛棚坐标

bool check(int dis) { //当牛之间距离最小为 dis 时, 检查牛棚够不够
    int cnt=1, place=0; //第 1 头牛, 放在第 1 个牛棚
    for (int i = 1; i < n; ++i) //检查后面每个牛棚
        if (x[i] - x[place] >= dis) { //如果距离 dis 的位置有牛棚
            cnt++; //又放了一头牛
            place = i; //更新上一头牛的位置
        }
    if (cnt >= c) return true; //牛棚够
    else return false; //牛棚不够
}

int main() {
    scanf("%d%d", &n, &c);
    for(int i=0; i<n; i++) scanf("%d", &x[i]);
    sort(x, x+n); //对牛棚的坐标排序
    int left=0, right=x[n-1]-x[0]; //R=1000000 也行, 因为是 log(n) 的, 很快
    //优化: 把二分上限设置为 1e9/c

    int ans = 0;
    while(left < right) {
        int mid = left + (right - left)/2; //二分
        if(check(mid)) { //当牛之间距离最小为 mid 时, 牛棚够不够?
            ans = mid; //牛棚够, 先记录 mid
            left = mid + 1; //扩大距离
        }
        else
            right = mid; //牛棚不够, 缩小距离
    }

    cout << ans; //打印答案
    return 0;
}
```

## 4 实数二分

### 4.1 基本形式

实数域上的二分, 比整数二分简单。

实数二分的基本形式

```

const double eps = 1e-7;           //精度。如果下面用 for, 可以不要 eps
while(right - left > eps){         //for(int i = 0; i<100; i++){
    double mid = left+(right-left)/2;
    if (check(mid)) right = mid;    //判定, 然后继续二分
    else left = mid;
}

```

其中, 循环用 2 种方法都可以:

```

while(right - left > eps) { ... }
for(int i = 0; i<100; i++) { ... }

```

如果用 for 循环, 由于循环内用了二分, 执行 100 次, 相当于实现了  $1/2^{100}$  的精度, 一般比 eps 更精确。

for 循环的 100 次, 比 while 的循环次数要多。如果时间要求不是太苛刻, 用 for 循环更简便<sup>1</sup>。

## 4.2 实数二分例题

### ■ 题目描述

“Pie”, 题目来源: <http://poj.org/problem?id=3122>

主人过生日,  $m$  个人来庆生, 有  $n$  块半径不同的圆形蛋糕, 由  $m+1$  个人 (加上主人) 分, 每人的蛋糕必须一样重, 而且是一整块 (不能是几个蛋糕碎块, 也就是说, 每个人的蛋糕都是从一块圆蛋糕中切下来的完整一块)。问每个人能分到的最大蛋糕是多大。

### ■ 题解

**最小值最大化问题**。设每人能分到的蛋糕大小是  $x$ , 用二分法枚举  $x$ 。

“Pie” 题的代码

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
double PI = acos(-1.0);    //3.141592653589793;
#define eps 1e-5
double area[10010];
int n,m;
bool check(double mid){
    int sum = 0;
    for(int i=0;i<n;i++)      //把每个圆蛋糕都按大小 mid 分开。统计总数
        sum += (int)(area[i] / mid);
    if(sum >= m) return true;  //最后看总数够不够 m 个
    else return false;
}
int main(){
    int T; scanf("%d",&T);
    while(T--){
        scanf("%d%d",&n,&m); m++;
        double maxx = 0;
        for(int i=0;i<n;i++){
            int r; scanf("%d",&r);
            area[i] = PI*r*r;

```

<sup>1</sup> 参考李煜东《算法竞赛进阶指南》27 页。



```

        if(maxx < area[i]) maxx = area[i]; //最大的一块蛋糕
    }
    double left = 0, right = maxx;
    for(int i = 0; i<100; i++){
//while((right-left) > eps)    {        //for 或者 while 都行
        double mid = left+(right-left)/2;
        if(check(mid))    left  = mid;    //每人能分到 mid 大小的蛋糕
        else                right = mid;    //不够分到 mid 大小的蛋糕
    }
    printf("%.4f\n", left);    // 打印 right 也对
}
return 0;
}

```

## 5 二分法习题

饥饿的奶牛 <https://www.luogu.org/problem/P1868>  
 寻找段落 <https://www.luogu.org/problem/P1419>  
 小车问题 <https://www.luogu.org/problem/P1258>  
 借教室 <https://www.luogu.org/problem/P1083>  
 跳石头 <https://www.luogu.org/problem/P2678>  
 聪明的质监员 <https://www.luogu.org/problem/P1314>  
 分梨子 <https://www.luogu.org/problem/P1493>  
 第 k 大 <http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6231>

## 6 三分法求极值

### 6.1 原理

三分法求单峰（或者单谷）的极值，是二分法的一个简单扩展。

单峰函数和单谷函数如下图，函数  $f(x)$  在区间  $[l, r]$  内，只有一个极值  $v$ ，在极值点两边，函数是单调变化的。以单峰函数为例，在  $v$  的左边，函数是严格单调递增的，在  $v$  右边是严格单调递减的。

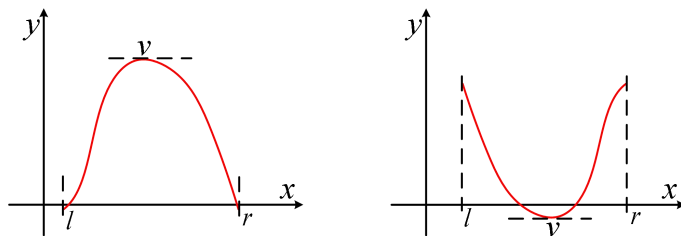


图 6.1 (1)单峰函数

(2)单谷函数

下面的讲解都以求单峰极值为例。

如何求单峰函数最大值的近似值？虽然不能直接用二分法，不过，只要稍微变形一下，就能用了。

在  $[l, r]$  上任取 2 个点， $mid1$  和  $mid2$ ，把函数分成三段。有以下情况：

(1) 若  $f(mid1) < f(mid2)$ ，极值点  $v$  一定在  $mid1$  的右侧。此时， $mid1$  和  $mid2$  要么都在  $v$

的左侧，要么分别在  $v$  的两侧。如下图所示。

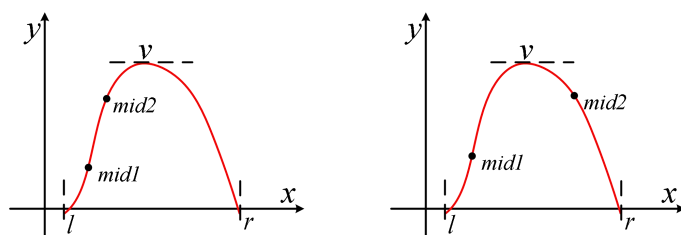


图 6.2 情况 (1)：极值点  $v$  在  $mid1$  右侧

下一步，令  $l = mid1$ ，区间从  $[l, r]$  缩小为  $[mid1, r]$ ，然后再继续把它分成三段。

(2) 同理，若  $f(mid1) > f(mid2)$ ，极值点  $v$  一定在  $mid2$  的左侧。如下图所示。下一步，令  $r = mid2$ ，区间从  $[l, r]$  缩小为  $[l, mid2]$ 。

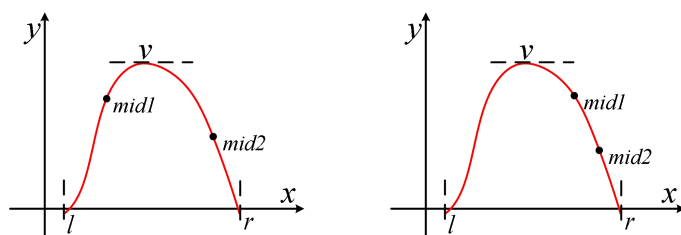


图 6.3 情况 (2)：极值点  $v$  在  $mid1$  右侧

不断缩小区间，就能使得区间  $[l, r]$  不断逼近  $v$ ，从而得到近似值。

如何取  $mid1$  和  $mid2$ ？有 2 种基本方法：

(1) 三等分：  $mid1$  和  $mid2$  为  $[l, r]$  的三等分点。那么区间每次可以减少三分之一。

(2) 近似三等分：计算  $[l, r]$  中间点  $mid = (l + r) / 2$ ，然让  $mid1$  和  $mid2$  非常接近  $mid$ ，例如  $mid1 = mid - eps$ ， $mid2 = mid + eps$ ，其中  $eps$  是一个很小的值。那么区间每次可以减少接近一半。

方法 (2) 比方法 (1) 要稍微快一点。不过，在有些情况下  $eps$  过小可能导致这两个算出来的相等，导致判断错方向，所以不建议这么写， $\log_3$  和  $\log_2$  本质上是一样的。

注意：单峰函数的左右两边要严格单调，否则，可能在一边有  $f(mid1) == f(mid2)$ ，导致无法判断如何缩小区间。

## 6.2 实数三分

下面用一个模板题给出实数三分的两种实现方法。

### ■ 题目描述

“模板三分法”，来源：<https://www.luogu.com.cn/problem/P3382>

给出一个  $N$  次函数，保证在范围  $[l, r]$  内存在一点  $x$ ，使得  $[l, x]$  上单调增， $[x, r]$  上单调减。试求出  $x$  的值。

### ■ 题解

下面分别用前面提到的 2 种方法实现：(1) 三等分；(2) 近似三等分。

(1) 三等分

$mid1$  和  $mid2$  为  $[l, r]$  的三等分点

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const double eps = 1e-6;
int n;
double a[15];
```

```

double f(double x){          //计算函数值
    double s=0;
    for(int i=n;i>=0;i--) //注意函数求值的写法
        s = s*x + a[i];
    return s;
}

int main() {
    double L,R;
    scanf("%d%lf%lf",&n,&L,&R);
    for(int i=n;i>=0;i--) scanf("%lf",&a[i]);
    while(R-L > eps){ // for(int i = 0; i<100; i++){ //用 for 也行
        double k =(R-L)/3.0;
        double mid1 = L+k, mid2 = R-k;
        if(f(mid1) > f(mid2))
            R = mid2;
        else L = mid1;
    }
    printf("%.5f\n",L);
    return 0;
}

```

## (2) 近似三等分

mid1 和 mid2 在  $[l, r]$  的中间点附近

```

#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const double eps = 1e-6;
int n; double a[15];
double f(double x){
    double s=0;
    for(int i=n;i>=0;i--) s=s*x+a[i];
    return s;
}

int main() {
    double L,R;
    scanf("%d%lf%lf",&n,&L,&R);
    for(int i=n;i>=0;i--) scanf("%lf",&a[i]);
    while(R-L > eps){ // for(int i = 0; i<100; i++){ //用 for 也行
        double mid = L+(R-L)/2;
        if(f(mid - eps) > f(mid))
            R = mid;
        else L = mid;
    }
    printf("%.5f\n",L);
    return 0;
}

```

### 6.2.1 实数三分习题

(1) “三分求极值”，题目来源：<http://hihocoder.com/problemset/problem/1142>

题目描述：在直角坐标系中有一条抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  和一个点  $P(x, y)$ ，求点  $P$  到抛物线的最短距离  $d$ 。

题解：直接求距离很麻烦。观察这一题的距离  $D$ ，发现它满足单谷函数的特征，用三分法很合适。

(2) **三分套三分**，是计算几何的常见题型。

“Line belt”，题目来源：<http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3400>

题目描述：给定两条线段  $AB$ 、 $CD$ ，一个人在  $AB$  上跑的时候速度是  $p$ ，在  $CD$  上速度是  $q$ ，在其他地方跑速度是  $r$ 。问从  $A$  点到  $D$  点最少的时间。

题解：从  $A$  出发，先走到  $AB$  上一点  $X$ ，然后走到  $CD$  上一点  $Y$ ，最后到  $D$ 。时间是：

$$\text{time} = |AX|/p + |XY|/r + |YD|/q$$

假设已经确定了  $X$ ，那么目标就是在  $CD$  上找一点  $Y$ ，使  $|XY|/r + |YD|/q$  最小，这是个单峰函数。三分套三分就可以了。

### 6.3 整数三分

整数三分的形式是：

```
while (left < right) {
    int mid1 = left + (right - left)/3;
    int mid2 = right - (right - left)/3;
    if(check(mid1) > check(mid2))
        ...           //移动 right
    else
        ...           //移动 left
}
```

下面是一个例题。

#### ■ 题目描述

“期末考试”，题目来源：<https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=4868>

有  $n$  位同学，每位同学都参加了全部的  $m$  门课程的期末考试，都在焦急的等待成绩的公布。第  $i$  位同学希望在第  $t_i$  天或之前得知所有课程的成绩。如果在第  $t_i$  天，有至少一门课程的成绩没有公布，他就会等待最后公布成绩的课程公布成绩，每等待一天就会产生  $C$  不愉快度。对于第  $i$  门课程，按照原本的计划，会在第  $b_i$  天公布成绩。有如下两种操作可以调整公布成绩的时间：1. 将负责课程  $X$  的部分老师调整到课程  $Y$ ，调整之后公布课程  $X$  成绩的时间推迟一天，公布课程  $Y$  成绩的时间提前一天；每次操作产生  $A$  不愉快度。2. 增加一部分老师负责学科  $Z$ ，这将导致学科  $Z$  的出成绩时间提前一天；每次操作产生  $B$  不愉快度。上面两种操作中的参数  $X, Y, Z$  均可任意指定，每种操作均可以执行多次，每次执行时都可以重新指定参数。现在希望你通过合理的操作，使得最后总的不愉快度之和最小，输出最小的不愉快度之和即可。

#### ■ 题解

不愉快度是一个下凹的函数，用三分法。代码略。