算法竞赛专题解析--

搜索进阶(2)--剪枝

罗勇军 2020.3.2

本系列是这本书的扩展资料：《算法竞赛入门到进阶》（京东，当当）.罗勇军、郭卫斌. 清华大学出版社
本文 web 地址：https://blog.csdn.net/weixin_43914593
PDF 下载地址：https://github.com/luoyongjun999/code 其中的补充资料
如有建议，请联系：（1）QQ 群，567554289；（2）作者 QQ，15512356

《算法竞赛入门到进阶》的第 4 章“搜索技术”，讲解了递归、BFS、DFS 的原理，以及双向广搜、A*算法、剪枝、迭代加深搜索、IDA*的经典例题，适合入门搜索算法。

本文将分几篇专题介绍搜索扩展内容、讲解更多习题，便于读者深入掌握搜索技术。

第 1 篇：搜索基础。

第 2 篇：剪枝。

第 3 篇～：双向广搜、迭代加深、A*搜索等。

本文是第 2 篇。

1 剪枝概述

剪枝是搜索常用的优化手段，常常能把指数级的复杂度，优化到近似多项式的复杂度。

剪枝是一个比喻：把不会产生答案的，或不必要的枝条“剪掉”。剪枝的关键在于剪枝的判断：什么枝该剪、在什么地方减。

BFS 的剪枝通常是判重，如果搜索到某一层时，出现重复的状态，就剪枝。例如经典的八数码问题，核心问题就是去重，把曾经搜过的八数码的组合剪去。

DFS 的剪枝技术较多，有可行性剪枝、最优性剪枝、搜索顺序剪枝、排除等效冗余、记忆化搜索等等。

可行性剪枝：对当前状态进行检查，如果当前条件不合法就不再继续，直接返回。

搜索顺序剪枝：搜索树有多个层次和分支，不同的搜索顺序会产生不同的搜索树形态，复杂度也相差很大。

最优性剪枝：在最优化问题的搜索过程中，如果当前花费的代价已超过前面搜索到的最优解，那么本次搜索已经没有继续进行下去的意义，此时停止对当前分支的搜索进行回溯。

排除等效冗余：搜索的不同分支，最后的结果是一样的，那么只搜一个分支就够了。

记忆化搜索：在递归的过程中，有许多分支被反复计算，会大大降低算法的执行效率。用记忆化搜索，将已经计算出来的结果保存起来，以后需要用到的时候直接取出结果，避免重复运算，从而提高了算法的效率。记忆化搜索一般在 DP 中讲解，参考《算法竞赛入门到进阶》“7.2 递推与记忆化搜索”的例题 poj 1163 "The triangle"、“7.5 数位 DP”的例题 hdu 2089 “不要 62”。

一个题目中可能用到多种剪枝技术，请通过下面的例题掌握剪枝。

2 例题

下面的例题，难度逐渐增加。

2.1 poj 3278

Catch That Cow http://poj.org/problem?id=3278
题目描述：在一根直线上，奶牛在 K 位置，农夫在 N 位置。农夫想抓到牛，他有 3 种移动方法，

例如他在 X 位置，他可以移动到 X-1、X+1、2X 的位置。问农夫最快要移动多少次，能从 N 到达 K。0 ≤ N, K ≤ 100,000。

题解：

从 N 到 K 的最短路径问题，显然用 BFS，每一步有 3 个分支。

可行性剪枝：如果农夫当前位置大于 k，那么农夫只能不断做 X-1 操作，而不能使用变大的 X+1、2X 这 2 种操作。

2.2 洛谷 P1118

数字三角形 https://www.luogu.com.cn/problem/P1118

题目描述：写出一个 1 至 N 的排列 a_i，然后每次将相邻两个数相加，构成新的序列，再对新序列进行这样的操作，显然每次构成的序列都比上一次的序列长度少 1，直到只剩下一个数字位置。下面是一个例子：

```
3  1  2  4
  4  3  6
    7  9
      16
```

最后得到 16 这样一个数字。

现在倒着玩这样一个游戏，如果知道 N，知道最后得到的数字的大小 sum，请你求出最初序列 a_i，为 1 至 N 的一个排列。若答案有多种可能，则输出字典序最小的那一个。

n≤12, sum≤12345。

题解：

（1）暴力法。对 1～N 这 N 个数做从小到大的全排列，对每个全排列进行三角形的计算，判断是否等于 N。

对每个排列进行三角形计算，需要 $O(N^2)$ 次。例如第 1 行有 5 个数{a,b,c,d,e}，那么第 2 行计算 4 次，第 3 行计算 3 次...等等，总次数是 $O(N^2)$ 的。

```
a      b      c      d      e
  a+b    b+c    c+d    d+e
    a+2b+c  b+2c+d  c+2d+e
      a+3b+3c+d  b+3c+3d+e
        a+4b+6c+4d+e
```

共有 N!=4 亿个排列，总复杂度是 $O(N!N^2)$ 的，显然会超时。

（2）三角计算优化+剪枝。

1）三角计算的优化。对排列进行三角形计算，并不需要按部就班地算，比如{a,b,c,d,e}这 5 个数，直接算最后一行的公式 a+4b+6c+4d+e 就好了，复杂度是 O(N) 的。不同的 N 有不同的系数，比如 5 个数的系数是{1,4,6,4,1}，提前算出所有 N 的系数备用。可以发现，这些系数正好是杨辉三角。

2）剪枝。即使有了杨辉三角的优化，总复杂度还是有 O(N!N)，所以必须进行**最优性剪枝**。对某个排列求三角形和时，如果前面几个元素和已经大于 sum，那么后面的元素就不用再算了。例如，N=9 时，计算到排列{2,1,3,4,5,6,7,8,9}，如果前 5 个元素{2,1,3,4,5}求和已经大于 sum，那么后面的{6,7,8,9}～{9,8,7,6}都可以跳过，下一个排序从{2,1,3,4,6,5,7,8,9}开始。本题 sum≤12345，和不大，用这个简单的剪枝方法可以通过。

3）可以用 DFS 求全排列，也可以直接用 STL 的 next_permutation()求全排列。

2.3 洛谷 P1433

吃奶酪 https://www.luogu.com.cn/problem/P1433

题目描述：房间里有 n 块奶酪。一只小老鼠要把它们都吃掉，问至少要跑多少距离？1≤n≤15。

题解：

（1）这是一个全排列问题，15 个奶酪有 15!=1.3 万亿种排列。

（2）暴力法：用 DFS 搜所有的排列，代码很容易写。

（3）在测试数据比较水的情况下，可以用**最优性剪枝**。在 DFS 中，用 sum 记录当前最短距离，每次计算新的路径时，如果超过了 sum，就退出。剪枝的效率和测试数据有关，如果碰巧有很恶劣的数据，会超时。

（4）本题的标准解法是状态压缩 DP，它不受测试数据的影响，复杂度是 $O(n2^n)$。

2.4 hdu 1010

Tempter of the Bone http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1010

题目描述：一个迷宫有 N*M 格，有一些格子是地板能走，有一些格子是障碍不能走。给一个起点 S 和一个终点 D。一只小狗从 S 出发，每步走一块地板，在每个地板不能停留，而且走过的地板都不能再走。给定一个 T，问小狗能正好走 T 步到达 D 吗？

输入输出：有很多测试样例，每个测试中，第 1 行是整数 N，M，T， $1 < N, M < 7, 0 < T < 50$。后面有 N 行，每行 M 个字符，有这些字符：'X': 墙；'S': 起点；'D': 终点；'.': 地板。最后一行是'0 0 0'，表示结束。如果狗能逃出，输出 YES，否则输出 NO。

输入输出样例：

输入

```
4 4 5
S.X.
..X.
..XD
....
3 4 5
S.X.
..X.
...D
0 0 0
```

输出

```
NO
YES
```

题解：

搜索用 BFS 还是 DFS？对于路径问题，应该用 DFS，因为 DFS“一路深入”，天然就产生了一条路径，而 BFS 逐层推进，把层与层之间连续的路径打断了，想表示一个路径很困难。

首先考虑暴力搜索的复杂度。在所有可能的路径中，看其中是否有长度为 T 的路径。

直接搜所有的路径，会超时。有多少可能的路径呢？这题图很小，但是路径数量很惊人。$1 < N, M < 7$，最多 36 个格子，设最长路径是 36，每个点有 3 个出口，那么就有 3^{36} 个路径，是天文数字。即使在 DFS 的时候加上一点限制条件，即格子不能重复走，那么也会搜到百万以上的的路径。

这一题最重要的技术，网上称为“**奇偶剪枝**”。不过，本文认为“奇偶剪枝”这个说法不准确，称为“**奇偶判断**”更合适，因为它并不需要在 DFS 内部剪枝，见本节后面的讨论。

首先看 2 个容易发现的**可行性剪枝**：

（1）当前走了 k 步，如果 k > T，已经走的超过了限制步数，还没有找到 D 点，则剪掉。在 k > T 的基础上，可以发现下面更好一点的剪枝。

（2）设从起点 S 走了 k 步到了当前位置(x,y)，而(x,y)到 D 点(c,d)的最短距离为 f，如果有 k+f >T，也就是 T-k-f < 0，这说明剩下还允许走的步数比最短距离还少，肯定走不到了，剪掉。记 tmp = T-k-f。f 很容易求，它就是曼哈顿距离：f = abs(c-x) + abs(d-y)。这是理论上的最短距离，中间可能有障碍，不过不影响逻辑。

由于剪枝（2）比剪枝（1）严格，所以保留（2）就行了，**（1）是多余的**。

以上 2 个优化很有限，真正有用的是“奇偶剪枝”：若 tmp 是偶数，则可能有解；若 tmp 是奇数，肯定无解。

下面描述“奇偶剪枝”的原理。令 tmp = T-k-f = T'-f，T'是当前位置(x,y)到 D 点要走的距离，那么 tmp 表示在最短路径之外，还必须要走的步数，那么只能绕路了。比较简单的绕路方法是：在最短路径上找 2 个相邻点 u,v，现在不直接走(u-v)，而是从 u 出发绕一圈再到 v，新路径是(u-...-v)；读者可以发现，在这种方格图上，原来(u-v)的步数是 1，绕路后，(u-...-v)的步数一定比 1 大偶数步，也就是 tmp 是个偶数。如果不用这个简单办法绕路，改用别的绕路方法，tmp 也是偶数。

其实，上述解释过于繁琐了，下面的图解更加透彻，而且还能得到更简洁的结果。

实际上在这个题目中，只需要对起点 S、终点 D 做一次奇偶判断就够了，DFS 内部不用再做。因为，从 S 走到方格中的任何一点 x，x 与 D 的奇偶性，与 S 和 D 的奇偶性相同。

所以，奇偶判断应该在 DFS 之前做，判断有解后再进行 DFS。DFS 内部的奇偶判断是多余的；奇偶判断并不能减少 DFS 内部搜索的数量，因为这是独立的两件事。

以上说法，用下面的图来解释方格图的奇偶性，就能明白。

0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1

图 1 方格图的奇偶性

对每个方格用 0、1 进行交错标记。从 0 格子走一步，只能到 1 格子，从 1 格子走一步只能到 0 格子。图中任取 2 个点为起点 S 和终点 D，如果它们都是 0 或 1，那么偶数步才能走到；如果一个是 0 一个是 1，那么奇数步才能走到。这就是奇偶判断的原理。

所以，给定起点 S、终点 D，以及限制的步数 T，可以立刻判断是否有解：（1）S 和 D 同 0 或同 1，T 是偶数，可能有解；T 是奇数，必定无解。（2）S 和 D 不同，T 是奇数，可能有解；T 是偶数，必定无解。

如果判断可能有解，有以下推论：从 S 出发到任何一个点 x，x 到 D 也可能有解，因为 x 和 D，与 S 和 D 的奇偶性相同。例如：S 和 D 都是 0，T 是偶数，可能有解；现在 S 走一步到 x，x 是 1，D 还是 0，T 也减少 1 变成了奇数，那么从 x 到 D 仍满足可能有解的判断。

但是，方格的 0、1 标记如何得到呢？或者换个说法：给定 S 和 D，如何判断它们的 0、1 是否相同呢？很简单，用曼哈顿距离，即上面的 f = abs(c-x) + abs(d-y)就可以。如果 S 和 D 的曼哈顿距离 f 是奇数，说明 S 和 D 一个是 0 一个是 1；如果 f 是偶数，说明 S 和 D 同 0 或同 1。

在本题中，如果 T-f 是奇数则肯定无解，因为：假设 T 是奇数，那么 f 只能是偶数，也就是说限制走奇数步 T，但是 S 和 D 之间的路径是偶数步的，互相矛盾。

最后，从以上分析可以知道，奇偶判断只能用在方格图上。方格里允许有不可走的障碍，这些障碍不影响逻辑正确性。

下面是代码[①]。

```
#include <bits/stdc++.h>
```

① 改写自：https://www.cnblogs.com/CSU3901130321/p/3993740.html

```
using namespace std;
char mat[8][8],visit[8][8];
int n, m, t;
int flag;           //flag=1，表示找到了答案
int a, b, c, d;     //起点 S(a,b)，终点 D(c,d)
int dir[4][2] = {{1,0}, {-1,0}, {0,1}, {0,-1}};        //上下左右 4 个方向
#define CHECK(xx,yy) (xx>=0 && xx<n && yy>=0 && yy<m)  //是否在迷宫中

void dfs(int x, int y, int time){
    if(flag)  return;                   //逐层退出 DFS，有多少层 DFS，就退多少次

    if(mat[x][y] == 'D'){
        if(time == t)    flag = 1;      //找到答案
        return;                         //D 只能走一次，所以不管对不对，都返回
    }
    //if(time > t)     return;          //剪枝(1)：因为有剪枝(2)，(1)就多余了

    int tmp = t - time - abs(c-x) - abs(d-y);
    if(tmp < 0)     return;             //剪枝（2）
    //if(tmp & 1)   return;             //奇偶剪枝：不应该在这里做

    for(int i=0; i<4; i++){             //上下左右
        int xx = x + dir[i][0], yy = y + dir[i][1];
        if(CHECK(xx,yy)  && mat[xx][yy]!='X' && !visit[xx][yy]){
            visit[xx][yy] = 1;          //地板标记为走过，不能再走
            dfs(xx, yy, time + 1);      //遍历所有的路径
            visit[xx][yy] = 0;          //递归返回，这块地板恢复为没走过
        }
    }
    return;
}
int main(){
    while(~scanf("%d%d%d",&n,&m,&t)){
        if(n==0 && m==0 && t==0)    break;
        for(int i=0;i<n;i++)
            for(int j=0;j<m;j++){
                cin>>mat[i][j];
                if(mat[i][j] == 'S') a=i,b=j;
                if(mat[i][j] == 'D') c=i,d=j;
            }
        memset(visit, 0, sizeof(visit));
        int tmp = t - abs(c-a) - abs(d-b);  //在 DFS 之前，做奇偶判断
        if(tmp & 1){                        //无解，不用 DFS 了
            puts("NO");
            continue;
        }
```

```
        flag = 0;
        visit[a][b] = 1;                    //标记起点已经走过
        dfs(a, b, 0);                       //搜索路径

        if(flag) puts("YES");
        else     puts("NO");
    }
    return 0;
}
```

2.5 洛谷 P1120

小木棍 https://www.luogu.com.cn/problem/P1120

题目描述：乔治有一些同样长的小木棍，他把这些木棍随意砍成几段，直到每段的长都不超过50。现在，他想把小木棍拼接成原来的样子，但是却忘记了自己开始时有多少根木棍和它们的长度。给出每段小木棍的长度，编程帮他找出原始木棍的最小可能长度。N 表示砍过以后的小木棍的总数，N≤65。

题解：

（1）暴力法。尝试原始木棍所有可能的长度，看是否能拼接好这 N 个小木棍。例如：设原始木棍长度为 D，搜索所有的木棍组合，如果能够把 N 个木棍都拼接成长度为 D 的木棍，则 D 就是一个合适的长度；在所有合适的长度中，取最小值输出。

用 DFS 搜索所有的组合。复杂度：对一个 D 的检查，小木棍的组合是 O(N!)的。

（2）剪枝[①]。

1）**优化搜索顺序**。把小木棍按长度从大到小排序，然后按从大到小的顺序做拼接的尝试。过程是：对于给定的可能长度 D，从最长的小木棍开始拼接，在拼接时，继续从下一个较长的小木棍开始；持续这个操作，直到所有木棍都拼接成功或某一个没有拼接成功为止。一旦不能拼接，这个 D 就不用再尝试。

2）**排除等效冗余**。上面优化搜索顺序中，是用贪心的策略进行搜索，为什么这里可以用贪心？因为是不同顺序的拼接是等效的，例如先拼长的 x，再拼短的 y，和先拼短 y，再拼长 x 是一样的。

3）对长度 D 的优化。其实并不用检查大范围的 D，因为 D 是小木棍总长度的一个约数，例如总长度是 10，那么 D 只可能是 1、2、5、10。计算小木棍的总长度，找到它的大于最长小木棍长度的所有约数，这就是原始木棍的可能长度 D。然后按从小到大排序，尝试拼接，如果成功，则输出结果，后面不再尝试。

2.6 hdu 2610

Sequence one　http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=2610

题目描述：给定一个序列，包含 n 个整数，每个整数不大于 2^{31}，输出它的前 P 个不递减序列，如果不够 P 个，就输出所有的。不递减序列见这个例子：3 个整数{1,3,2}，它的前 5 个序列是{1}、{3}、{2}、{1,3}、{1,2}；输出时，首先按子序列长度排序，相同长度的，按出现顺序排序，所以{3}在{2}前面，{1,3}在{1,2}前面。这个例子里没有长度为 3 的不递减序列。1<n≤1000，1<p≤10000。

题解：

（1）暴力法

分 3 部分：生成所有的子序列、去掉重复的序列、去掉递减序列。

① 《算法竞赛进阶指南》李煜东，河南音像出版社，0X23 这一节给出了这个例题的图示。

1）生成所有子序列。用 DFS 编码比较简单，题目求不同长度的序列，可以按长度分别 DFS。

```
void dfs(int len, int pos){
    ...
    for(int i=pos;i<n;i++)     // pos 表示当前位置，从 pos 位置开始找子序列
        dfs(len,i);
    ...
}
int main(){
    ...
    for(int len=1;len<=n;len++) //len 表示子序列的长度，每次搜一种长度的子序列
        dfs(len,0);
    ...
}
```

2）去重。简单的办法是用 STL 的 set 来做，理论上对一个子序列进行判重的复杂度是 O(logn)的。

3）去掉递减序列。在 DFS 的时候，如果子序列中的下一个元素比上一个元素大，就退出。

暴力法的复杂度：上述步骤看起来不错，但是会超时。虽然只需要输出前 P 个子序列，但是要搜索的范围远远超过 P。去重很花时间；去掉递减序列也很花时间，长度为 2 及以上的子序列有大量是递减的。

（2）去重的优化和**可行性剪枝**

本题的去重和去掉递减序列都可以优化。

1)去重的优化。思路是：用某元素 a 为首元素，在原始序列中生成不递减子序列后，后面如果再遇到相等的 a，就不用再生成子序列了，因为前面已经用 a 在整个范围内搜过了；这个思路可以推广到第二个元素、第三个元素等等。

下面以序列 A[]={1, 2, 1, 5, 1, 4, 1, 7}为例说明，它的不递减子序列有{1}、{2}、{5}、{4}、{7}、{1, 2}、{1, 1}、{1, 5}、{1, 4}、{1, 7}、{2, 5}、{2, 4}、{2, 7}、{5, 7}等等。

①以 A[0]=1 为首，生成了{1}、{1,2}、{1,1}、{1,5}、{1,4}等序列；下次准备以 A[2]=1 为首生成子序列时，发现前面有 A[0]=A[2]=1，那么就丢弃以 A[2]=1 为首的所有子序列，因为前面已经用 A[0]=1 为首，在整个序列中得到了{1}、{1,5}、{1,4}等序列。

②以 A[3]=5 为首的子序列，确定子序列的第二个元素时，在 A[3]后面的{1, 4, 1, 7}范围内，按①的方法操作，例如检查{1, 7}的 1 时，这个 1 已经在{1, 4, 1, 7}的第一个位置出现过，所以应该丢弃。

复杂度分析：上面的去重方法，对一个子序列做一次判重的复杂度是 O(n)的，似乎比 STL set 的 O(logn)差；不过，前者剪去了很多子序列，需要判重的子序列比后者少很多。

2)去掉递减序列的剪枝。如果短的子序列没有合法的，那么更长的也不合法。例如，搜索长度为 4 的子序列，发现没有非递减的，那么大于 4 的非递减子序列也不存在，剪去。

hdu 2611 是类似的题目，请读者自己了解。

hdu 2611 **Sequence two** http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=2611

题目描述：给定一个序列，包含 n 个整数，每个整数不大于 2^{31}，按字典序输出它的前 P 个不递减序列，如果不够 P 个，就输出所有的。不递减序列见这个例子：3 个整数{1, 3, 2}，它的所有 5 个序列是{1}、{2}、{3}、{1, 2}、{1, 3}，按字典序输出；注意{1, 2, 3}不是它的子序列，因为不能改变元素的顺序。1<n≤100，1<p≤100000。

2.7 poj 2676

Sudoku http://poj.org/problem?id=2676

题目描述：九宫格问题，又称数独问题。把一个 9 行 9 列的网格，再细分为 9 个 3*3 的子网格，要求每行、每列、每个子网格内都只能填 1 到 9 中的一个数字，每行、每列、每个子网格内都不允许出现相同的数字。

给出一个填写了部分格子的九宫格，要求填完九宫格并输出，如果有多种结果，则只需输出其中一种。

题解：

此题较难。

（1）用 DFS 搜索每个空格子。

（2）用位运算记录格子状态。每行、每列、每个九宫格，分别用一个 9 位的二进制数保存哪些数字还可以填。对于每个位置，把它在的行，列，九宫格对应的数取 & 运算就可以得到剩余哪些数可以填。并用 lowbit(x)取出能填的数。

（3）**优化搜索顺序剪枝**。从最容易确定数字的行（或列）开始填数，也就是 0 最少的行（或列）；在后续每个状态下，也选择 0 最少的行（或列）填数。

（4）**可行性剪枝**。每格填的数只能是对应行、列和宫中没出现过的。

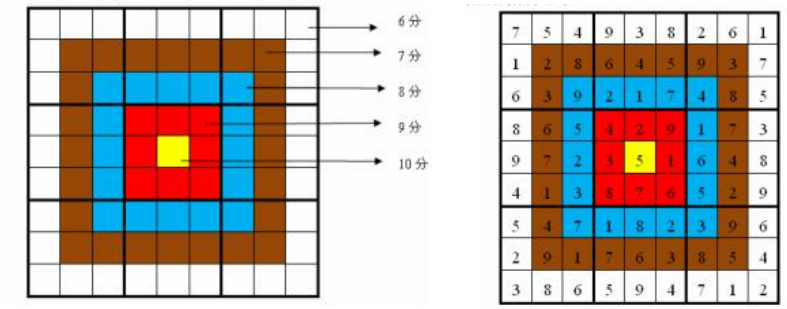
下面的洛谷 P1074 是本题的扩展。

2.8 洛谷 P1074

靶形数独 https://www.luogu.com.cn/problem/P1074

题目描述：靶形数独的方格同普通数独一样，在 9 格宽×9 格高的大九宫格中有 9 个 3 格宽×3 格高的小九宫格（用粗黑色线隔开的）。在这个大九宫格中，有一些数字是已知的，根据这些数字，利用逻辑推理，在其他的空格上填入 1 到 9 的数字。每个数字在每个小九宫格内不能重复出现，每个数字在每行、每列也不能重复出现。但靶形数独有一点和普通数独不同，即每一个方格都有一个分值，而且如同一个靶子一样，离中心越近则分值越高。

比赛的要求是：每个人必须完成一个给定的数独（每个给定数独可能有不同的填法），而且要争取更高的总分数。而这个总分数即每个方格上的分值和完成这个数独时填在相应格上的数字的乘积的总和。如右图，在这个已经填完数字的靶形数独游戏中，总分数为 2829。游戏规定，将以总分数的高低决出胜负。



题解：

此题较难，几个关键点是：

（1）九宫格的表示。把每个格子对应的分数、每个格子属于哪个小九宫格，用二维数组打表，方便搜索时使用。

（2）**优化搜索顺序剪枝**。从最容易确定数字的行（或列）开始填数，也就是 0 最少的行（或列）；在后续每个状态下，也选择 0 最少的行（或列）填数。

（3）**可行性剪枝**。每格填的数只能是对应行、列和宫中没出现过的。