算法竞赛专题解析--

搜索进阶(3)--广搜进阶

罗勇军 2020.3.9

本系列是这本书的扩展资料：《算法竞赛入门到进阶》（京东，当当） 清华大学出版社

本文 web 地址（同步）：https://blog.csdn.net/weixin_43914593

https://www.cnblogs.com/luoyj/

PDF 下载地址：https://github.com/luoyongjun999/code 其中的补充资料

如有建议，请联系：（1）QQ 群，567554289；（2）作者 QQ，15512356

《算法竞赛入门到进阶》的第 4 章“搜索技术”，讲解了递归、BFS、DFS 的原理，以及双向广搜、A*算法、剪枝、迭代加深搜索、IDA*的经典例题，适合入门搜索算法。

本文分几篇专题介绍搜索扩展内容、讲解更多习题，便于读者深入掌握搜索技术。

第 1 篇：搜索基础。

第 2 篇：剪枝。

第 3 篇：广搜进阶。

第 4 篇：迭代加深、A*、IDA*。

本文是第 3 篇。

目录

本篇深入地讲解了双向广搜、BFS+优先队列、BFS+双端队列的算法思想和应用，帮助读者对 BFS 的理解更上一层楼。

1.1 双向广搜

1.1.1 双向广搜的原理和复杂度分析

双向广搜的应用场合：有确定的起点和终点，并且能把从起点到终点的单个搜索，变换为分别从起点出发和从终点出发的“相遇”问题，可以用双向广搜。

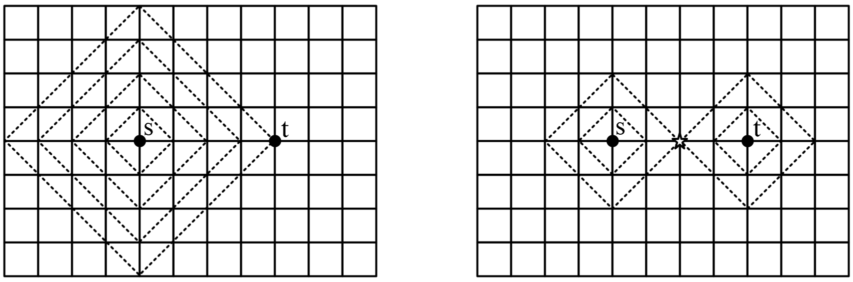
从起点 s（正向搜索）和终点 t（逆向搜索）同时开始搜索，当两个搜索产生相同的一个子状态 v 时就结束。得到的 s-v-t 是一条最佳路径，当然，最佳路径可能不止这一条。

注意，和普通 BFS 一样，双向广搜在搜索时并没有“方向感”，所谓“正向搜索”和“逆向搜索”其实是盲目的，它们从 s 和 t 逐层扩散出去，直到相遇为止。

与只做一次 BFS 相比，双向 BFS 能在多大程度上改善算法复杂度？下面以网格图和树形结构为例，推出一般性结论。

（1）网格图。

用 BFS 求下面图中两个黑点 s 和 t 间的最短路。左图是一个 BFS；右图是双向 BFS，在中间的五角星位置相遇。



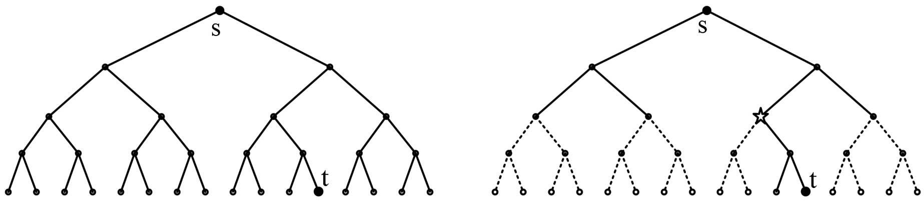
（1）单个 BFS （2）双向 BFS

图 1 网格图搜索

设两点的距离是 k。左边的 BFS，从起点 s 扩展到 t，一共访问了 $2k(k+1) \approx 2k^2$ 个结点；右边的双向 BFS，相遇时一共访问了约 k^2 个结点。两者差 2 倍，改善**并不明显**。

在这个网格图中，BFS 扩展的第 k 和第 k+1 层，结点数量相差(k+1)/k 倍，即结点数量是**线性增长**的。

（2）树形结构。



（1）单个 BFS （2）双向 BFS

图 2 二叉树搜索

以二叉树为例，求根结点 s 到最后一行的黑点 t 的最短路。

左图做一次 BFS，从第 1 层到第 k 层，共访问 $1 + 2 + ... + 2^{k-1} \approx 2^k$ 个结点。右图是双向 BFS，分别从上往下和从下往上 BFS，在五角星位置相遇，共访问约 $2 \times 2^{k/2}$ 个结点。双向广搜比做一次 BFS 改善了 $2^{k/2}$ 倍，优势巨大。

在二叉树的例子中，BFS 扩展的第 k 和第 k+1 层，结点数量相差 2 倍，即结点数量是**指数增长**的。

从上面 2 个例子可以得到**一般性结论**：

（1）做 BFS 扩展的时候，下一层结点（一个结点表示一个状态）数量增加越快，双向广搜越有效率。

（2）是否用双向广搜替代普通 BFS，除了（1）以外，还应根据总状态数量的规模来决定。双向 BFS 的优势，从根本上说，是它能减少需要搜索的状态数量。有时虽然下一层数量是指数增长的，但是由于**去重**或者限制条件，总状态数并不多，也就没有必要使用双向 BFS。例如后面的例题“hdu 1195 open the lock”，密码范围 1111～9999，共约 9000 种，用 BFS 搜索时，最多有 9000 个状态进入队列，就没有必要使用双向 BFS。而例题 HDU 1401 Solitaire，可能的棋局状态有 1500 万种，走 8 步棋会扩展出 16^8 种状态，大于 1500 万，相当于扩展到所有可能的棋局，此时应该使用双向 BFS。

很多教材和网文讲解双向广搜时，常用八数码问题做例子。下图引用自《算法竞赛入门到进阶》4.3.2 节，演示了从状态 A 移动到状态 F 的搜索过程。

八数码共有 9! = 362880 种状态，不太多，用普通 BFS 也行。不过，用双向广搜更好，因为八数码每次扩展，下一层的状态数量是上一层的 2～4 倍，比二叉树的增长还快，效率的提升也就更高。

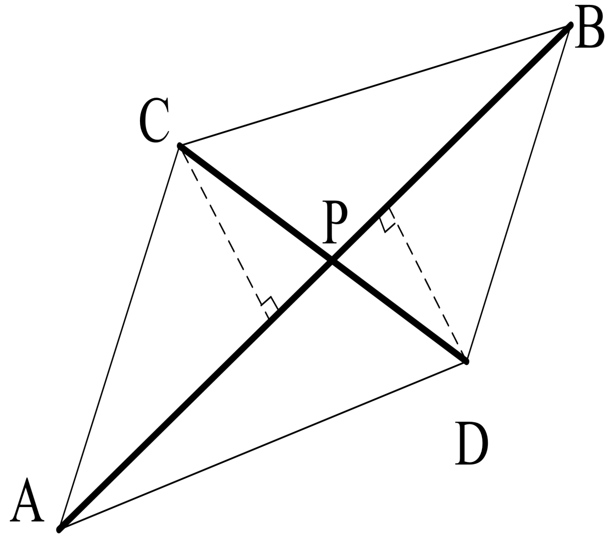


图 3 八数码问题的搜索树

1.1.2 双向广搜的实现

双向广搜的队列，有两种实现方法：

（1）合用一个队列。正向 BFS 和逆向 BFS 用同一个队列，适合正反 2 个 BFS 平衡的情况。正向搜索和逆向搜索交替进行，两个方向的搜索交替扩展子状态，先后入队。直到两个方向的搜索产生相同的子状态，即相遇了，结束。这种方法适合正反方向扩展的新结点数量差不多的情况，例如上面的八数码问题。

（2）分成两个队列。正向 BFS 和逆向 BFS 的队列分开，适合正反 2 个 BFS 不平衡的情况。让子状态少的 BFS 先扩展下一层，另一个子状态多的 BFS 后扩展，可以减少搜索的总状态数，尽快相遇。例题见后面的“洛谷 p1032 字串变换”。

和普通 BFS 一样，双向广搜在扩展队列时也需要处理去重问题。把状态入队列的时候，先判断这个状态是否曾经入队，如果重复了，就丢弃。

1.1.3 双向广搜例题

1. hdu 1195 open the lock

http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1195

题目描述：打开密码锁。密码由四位数字组成，数字从 1 到 9。可以在任何数字上加上 1 或减去 1，当’9’加 1 时，数字变为’1’，而’1’减 1 时，数字变为’9’。相邻的数字可以交换。每个动作是一步。任务是使用最少的步骤来打开锁。注意：最左边的数字不是最右边的数字的邻居。

输入：输入文件以整数 T 开头，表示测试用例的数量。

每个测试用例均以四位数 N 开头，指示密码锁定的初始状态。然后紧跟另一行带有四个下标 M 的行，指示可以打开锁的密码。每个测试用例后都有一个空白行。

输出：对于每个测试用例，一行中打印最少的步骤。

样例输入：

2

1234
2144

1111
9999
样例输出：
2
4

题解：

题目中的 4 位数字，走一步能扩展出 11 种情况；如果需要走 10 步，就可能有 11^{10} 种情况，数量非常多，看起来用双向广搜能大大提高搜索效率。不过，这一题用普通 BFS 也行，因为没有 11^{10} 种情况，密码范围 1111～9999，只有约 9000 种。用 BFS 搜索时，最多有 9000 个状态进入队列，没有必要使用双向广搜。

密码进入队列时，应去重，去掉重复的密码。去重用 hash 最方便。

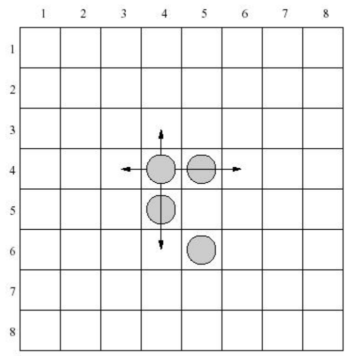
读者可以用这一题练习双向广搜。

2. HDU 1401 Solitaire

经典的双向广搜例题。

http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=1401

题目描述：8×8 的方格，放 4 颗棋子在初始位置，给定 4 个最终位置，问在 8 步内是否能从初始位置走到最终位置。规则：每个棋子能上下左右移动，若 4 个方向已经有一棋子则可以跳到下一个空白位置。例如，图中(4,4)位置的棋子有 4 种移动方法。



题解：

在 8×8 的方格上放 4 颗棋子，有 64×63×62×61≈1500 万种布局。走一步棋，4 颗棋子共有 16 种走法，连续走 8 步棋，会扩展出 16^8 种棋局，16^8 大于 1500 万，走 8 步可能会遍历到 1500 万棋局。

此题应该使用双向 BFS。从起点棋局走 4 步，从终点棋局走 4 步，如果能相遇就有一个解，共扩展出 2×16^4=131072 种棋局，远远小于 1500 万。

本题也需要处理去重问题，扩展下一个新棋局时，看它是否在队列中处理过。用 hash 的方法，定义 char vis[8][8][8][8][8][8][8][8]表示棋局，其中包含 4 个棋子的坐标。当 vis=1 时表示正向搜过这个棋局，vis=2 表示逆向搜过。例如 4 个棋子的坐标是(a.x, a.y)、(b.x, b.y)、(c.x, c.y)、(d.x, d.y)，那么：

vis[a.x][a.y][b.x][b.y][c.x][c.y][d.x][d.y] = 1

表示这个棋局被正向搜过。

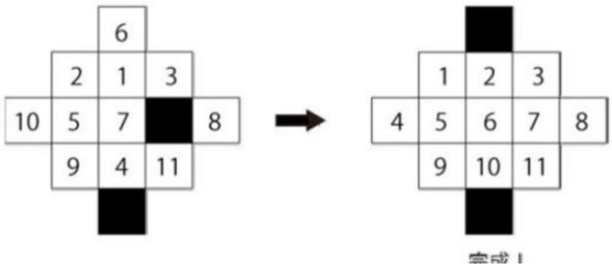
4 个棋子需要先排序，然后再用 vis 记录。如果不排序，一个棋局就会有很多种表示，不方便判重。

char vis[8][8][8][8][8][8][8][8]用了 $8^8 = 16M$ 空间。如果定义为 int，占用 64M 空间，超过题目的限制。

3．HDU 3095 Eleven puzzle

http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3095

题目描述： 如图是 13 个格子的拼图，数字格可以移动到黑色格子。左图是开始局面，右图是终点局面。一次移动一个数字格，问最少移动几次可以完成。



题解：

（1）可能的局面有 13!，极大。

（2）用一个 BFS，复杂度过高。每次移动 1 个黑格，移动方法最少 1 种，最多 8 种。如果移动 10 次，那么最多有 $8^{10} \approx 10$ 亿种。

（3）用双向广搜，能减少到 $2 \times 8^5 = 65536$ 种局面。

（4）判重：可以用 hash，或者用 STL 的 map。

4．洛谷 p1032 字串变换

https://www.luogu.com.cn/problem/P1032

题目描述： 已知有两个字串 A,B 及一组字串变换的规则（至多 6 个规则）：

A_1->B_1

A_2->B_2

规则的含义为：在 A 中的子串 A_1 可以变换为 B_1，A_2 可以变换为 B_2…。

例如：A=abcd，B=xyz，

变换规则为：

abc→xu，ud→y，y→yz

则此时，A 可以经过一系列的变换变为 B，其变换的过程为：

abcd→xud→xy→xyz。

共进行了 3 次变换，使得 A 变换为 B。

输入输出： 给定字串 A、B 和变换规则，问能否在 10 步内将 A 变换为 B，输出最少的变换步数。字符串长度的上限为 20。

题解：

（1）若用一个 BFS，每层扩展 6 个规则，经过 10 步，共 $6^{10} \approx 6$ 千万次变换。

（2）用双向 BFS，可以用 $2 \times 6^5 = 15552$ 次变换搜完 10 步。

（3）用两个队列分别处理正向 BFS 和逆向 BFS。由于起点和终点的串不同，它们扩展的下一层数量也不同，也就是进入 2 个队列的串的数量不同，先处理较小的队列，可以加快搜索速度。2 个队列见下面的代码示例①。

```
void bfs(string A, string B){          //起点是 A，终点是 B
```

① 完整代码参考：https://blog.csdn.net/qq_45772483/article/details/104504951

```
    queue <string> qa, qb;            //定义 2 个队列
    qa.push(A);                       //正向队列
    qb.push(B);                       //逆向队列
    while(qa.size() && qb.size()){
        if (qa.size() < qb.size())    //如果正向 BFS 队列小，先扩展它
            extend(qa, ...);          //扩展时，判断是否相遇
        else                          //否则扩展逆向 BFS
            extend(qb, ...);          //扩展时，判断是否相遇
    }
}
```

5. poj 3131 Cubic Eight-Puzzle

http://poj.org/problem?id=3131

立体八数码问题。状态多、代码长，是一道难题。

1.2 BFS +优先队列

1.2.1 优先队列

普通队列中的元素是按先后顺序进出队列的，先进先出。在优先队列中，元素被赋予了优先级，每次弹出队列的，是具有最高优先级的元素。优先级根据需求来定义，例如定义最小值为最高优先级。

优先队列有多种实现方法。最简单的是暴力法，在 n 个数中扫描最小值，复杂度是 O(n)。暴力法不能体现优先队列的优势，真正的优先队列一般用堆这种数据结构实现①，插入元素和弹出最高优先级元素，复杂度都是 O(logn)。

虽然基于堆的优先队列很容易手写，不过竞赛中一般不用自己写，而是直接用 STL 的 priority_queue。

1.2.2 最短路问题

BFS 结合优先队列，可解决最短路径问题。

1. 算法描述

下面描述“BFS+优先队列”求最短距离的算法步骤。以下图为例，起点是 A，求 A 到其它结点的最短路。图的结点总数是 V，边的总数是 E。

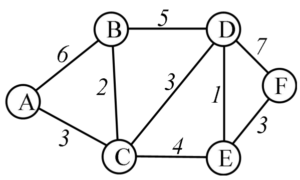


图 4 网络图

算法的过程，用到了贪心的思想。从起点 A 开始，逐层扩展它的邻居，放到优先队列里，并从优先队列中弹出距离 A 最近的点，就得到了这个点到 A 的最短距离；当新的点放进队列

①堆的概念和代码实现，见 https://www.cnblogs.com/luoyj/p/12409990.html

里时，如果经过它，使得队列里面的它的邻居到 A 更近，就更这些邻居点的距离。

以图 4 为例，步骤是：

（1）开始时，把起点 A 放到优先队列 Q 里：{A_0}。下标表示从 A 出发到这个点的路径长度，A 到自己的距离是 0。

（2）从队列中弹出最小值，即 A，扩展 A 的邻居结点，放到优先队列 Q 里：{B_6, C_3}。下标表示从 A 出发到这个点的路径长度。一条路径上包含了多个结点。Q 中记录的是各结点到起点 A 的路径长度，其中有一个最短，优先队列 Q 可以快速取出它。

（3）从优先队列 Q 中弹出最小值，即距离起点 A 最短的结点，这次是 C。在这一步，找到了 A 到 C 的最短路径长度，C 是第一个被确定最短路径的结点。考察 C 的邻居，其中的新邻居 D、E 直接放到 Q 里：{B_5, D_6, E_7}；队列里的旧邻居 B，看经过 C 到 B 是否距离更短，如果更短，就更新，所以 B_6 更新为 B_5，现在 A 经过 C 到 B，总距离是 5。

（4）继续从优先队列 Q 中取出距离最短的结点，这次是 B，在这一步，找到了 A 到 B 的最短路径长度，路径是 A-C-B。考察 B 的邻居，B 没有新邻居放进 Q；B 在 Q 中的旧邻居 D，通过 B 到它也并没有更近，所以不用更新。Q 现在是{D_6, E_7}。

继续以上过程，每个结点都会进入 Q 并弹出，最后 Q 为空时结束。

在优先队列 Q 里找最小值，也就是找距离最短的结点，复杂度是 O(logV)。“BFS+优先队列”求最短路径，算法的**总复杂度**是 O((V+E)logV)。共检查 V+E 次，每次优先队列是 O(logV)。

如果不用优先队列，直接在 V 个点中找最小值，是 O(V)的，总复杂度 O(V^2)。

O(V^2)是否一定比 O((V+E)logV)好？下面将讨论这个问题。

（1）稀疏图中，点和边的数量差不多，V ≈ E，用优先队列的复杂度 O((V+E)logV)可以写成 O(VlogV)，它比 O(V^2)好，是非常好的优化。

（2）稠密图中，点少于边，V < E 且 V^2 ≈ E，复杂度 O((V+E)logV)可以写成 O(V^2logV)，它比 O(V^2)差。这种情况下，用优先队列，反而不如直接用暴力搜。

2. BFS 与 Dijkstra

读者如果学过最短路径算法 Dijkstra[①]，就会发现，实际上这就是用优先队列实现的 Dijkstra，即：**“Dijkstra + 优先队列 = BFS + 优先队列”**。

根据前面的讨论，Dijkstra 算法也有下面的结论：

（1）稀疏图，用“Dijkstra + 优先队列”，复杂度 O((V+E)logV) = O(VlogV)；

（2）稠密图，如果 V^2 ≈ E，不用优先队列，直接在所有结点中找距离最短的那个点，总复杂度 O(V^2)。

稀疏图的存储用邻接表或链式前向星，稠密图用邻接矩阵。

1.2.3 例题

下面几个题目都是“BFS+优先队列”求最短路。

1. hdu 3152 Obstacle Course

http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=3152

题目描述：一个 N*N 的矩阵，每个结点上有一个费用。从起点[0][0]出发到终点[N-1][N-1]，求最短的路径，即经过的结点的费用和最小。每次移动，可以沿上下左右四个方向走一步。

输入：第一行是 N，后面跟着 N 行，每一行有 N 个数字。最后一行是 0，表示终止。2<=N<=125。

输出：最小费用。

输入样例：

① 参考《算法竞赛入门到进阶》10.9.4 Dijkstra，详细地解释了 Dijkstra 算法，给出了模板代码。

```
3
5 5 4
3 9 1
3 2 7
5
3 7 2 0 1
2 8 0 9 1
1 2 1 8 1
9 8 9 2 0
3 6 5 1 5
0
输出样例：
Problem 1: 20
Problem 2: 19
```

题解：

最短路径问题[①]。N 很小，用矩阵存图。

下面是代码。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int maxn=150, INF=1<<30;
int dir[4][2]={{0,1},{1,0},{0,-1},{-1,0}};
int n, graph[maxn][maxn], vis[maxn][maxn];   //vis记录到起点的最短距离
struct node{
    int x,y,sum;
    friend bool operator <(node a,node b) {
        return a.sum > b.sum;
    }
};
int bfs(){                                   //dijkstra
    fill(&vis[0][0], &vis[maxn][0], INF);
    vis[0][0] = graph[0][0];                 //起点到自己的距离

    priority_queue <node> q;
    node first = {0, 0, graph[0][0]};
    q.push(first);                           //起点进队
    while(q.size()) {
        node now = q.top(); q.pop();         //每次弹出已经找到最短距离的结点
        if(now.x==n-1 && now.y==n-1)         //终点：右下角
            return now.sum;                  //返回
        for(int i=0; i<4; i++){              //上下左右
            node t = now;                    //扩展now的邻居
            t.x += dir[i][0];
            t.y += dir[i][1];
```

① 题目一般不会要求打印路径，因为可能有多条最短路径，不方便系统测试。如果需要打印出最短路径，参考《算法竞赛入门到进阶》“10.9 最短路”，给出了路径打印的代码。

```
            if(0<=t.x && t.x<n && 0<=t.y && t.y<n) {  //在图内
                t.sum += graph[t.x][t.y];
                if(vis[t.x][t.y] <= t.sum) continue;
                                       //邻居已经被搜过，并且距离更短，不用更新
                if(vis[t.x][t.y] == INF)   q.push(t); //如果没进过队列，就进队
                vis[t.x][t.y] = t.sum;                //更新这个结点到起点的距离
            }
        }
    }
    return -1;
}
int main(){
    int k = 1;
    while(cin>>n, n){
        for(int i=0; i<n; i++)
            for(int j=0; j<n; j++)
                cin >> graph[i][j];
        cout<<"Problem "<< k++ <<": "<< bfs() << endl;
    }
    return 0;
}
```

2. 其他例题

类似的题目，练习：poj 1724、poj 1729、hdu 1026。

1.3 BFS +双端队列

在“简单数据结构”这一节中，讲解了“双端队列和单调队列”。双端队列是一种具有队列和栈性质的数据结构，它能而且只能在两端进行插入和删除。双端队列的经典应用是实现单调队列。下面讲解双端队列在 BFS 中的应用。

“BFS +双端队列”可以解决一种**特殊图**的最短路问题：图的结点和结点之间的边权是 0 或者 1。

一般求解最短路，高效的算法是 Dijkstra，或者“BFS+优先队列”，复杂度 O((V+E)logV)，V 是结点数，E 是边数。但是，在这类特殊图中，用“BFS+双端队列”可以在 O(V)时间内求得最短路。

双端队列的经典应用是单调队列，“BFS+双端队列”的队列也是一个单调队列。

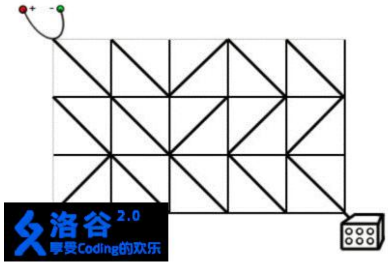
下面的例题，详细解释了算法。

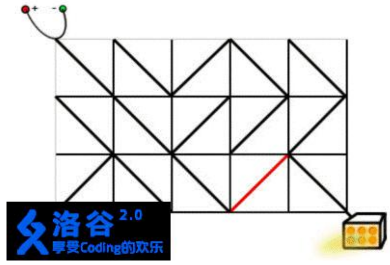
洛谷 P4667 https://www.luogu.com.cn/problem/P4667

Switch the Lamp On

时间限制 150ms；内存限制 125.00MB。

题目描述：Casper 正在设计电路。有一种正方形的电路元件，在它的两组相对顶点中，有一组会用导线连接起来，另一组则不会。有 N×M 个这样的元件，你想将其排列成 N 行，每行 M 个。电源连接到板的左上角。灯连接到板的右下角。只有在电源和灯之间有一条电线连接的情况下，灯才会亮着。为了打开灯，任何数量的电路元件都可以转动 90°（两个方向）。





在上面的左图中，灯是关着的。在右图中，右数第二列的任何一个电路元件被旋转 90°，电源和灯都会连接，灯被打开。现在请你编写一个程序，求出最小需要多少旋转多少电路元件。

输入格式：

输入的第一行包含两个整数 N 和 M，表示盘子的尺寸。 在以下 N 行中，每一行有 M 个符号\或/，表示连接对应电路元件对角线的导线的方向。 1≤N, M≤500。

输出格式：

如果可以打开灯，那么输出一个整数，表示最少转动电路元件的数量。

如果不可能打开灯，输出"NO SOLUTION"。

样例输入：

```
3 5
\\/\\
\\///
/\\\\
```

样例输出：

```
1
```

题解：

（1）建模为最短路径问题

题目可以转换为最短路径问题。把起点 s 到终点 t 的路径长度，记录为需要转的元件数量。从一个点到邻居点，如果元件不转，距离是 0，如果需要转元件，距离是 1。题目要求找 s 到 t 的最短路径。样例的网络图如下图，其中实线是 0，虚线是 1。

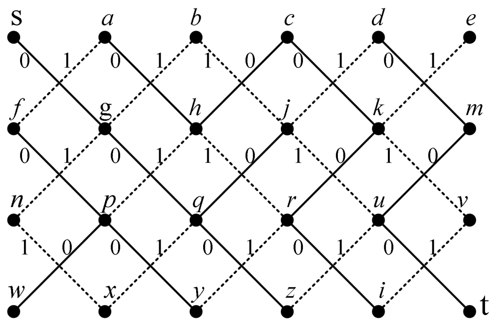


图 5 样例的网络图

（2）BFS +优先队列

用上一节的最短路径算法“BFS+优先队列”，复杂度是 O((V+E)logV)。题目中结点数 V = N×M = 250,000，边数 E = 2×N×M = 500,000，O((V+E)logV) ≈ 1.5 千万，题目给的时间限制是 150ms，超时。

（3）BFS +双端队列

如果读者透彻理解“BFS +优先队列”的思想，就能知道优先队列的作用，是在队列中找到距离起点最短的那个结点，并弹出它。使用优先队列的原因是，每个结点到起点的距离不同，需要用优先队列来排序，找最小值。

在特殊的情况下，有没有更快的办法找到最小值？

这种特殊情况就是本题，边权是 0 或者 1。简单地说，就是：“边权为 0，插到队头；边权为 1，插入队尾”，这样就**省去了排序操作**。

下面解释“BFS +双端队列”计算最短路径的过程。

1）把起点 s 放进队列。

2）弹出队头 s。扩展 s 的直连邻居 g，边权为 0 的距离最短，直接插到队头；边权为 1 的直接插入队尾。在样例中，当前队列是：$\{g_0\}$，下标记录结点到起点 s 的最短距离。

3）弹出队头 g_0，扩展它的邻居 b、n、q，现在队列是：$\{q_0, b_1, n_1\}$，其中的 q_0，因为边权为 0，直接放到了队头。g 被弹出，表示它到 s 的最短路已经找到，后面不再进队。

4）弹出 q_0，扩展它的邻居 g、j、x、z，现在队列是$\{j_0, z_0, b_1, n_1, x_1\}$，其中 j_0、z_0边权为 0，直接放到队头。

等等。

下面的表格给出了完整的过程。

步骤	出队	邻居	进队	当前队列	最短路	说明
1			s	$\{s\}$		
2	s	g	g	$\{g_0\}$	s-s：0	
3	g_0	s、b、n、q	b、n、q	$\{q_0, b_1, n_1\}$	s-g：0	s 已经进过队，不再进队
4	q_0	g、j、x、z	j、x、z	$\{j_0, z_0, b_1, n_1, x_1\}$	s-q：0	g 不再进队
5	j_0	b、d、q、u	d、u	$\{z_0, b_1, n_1, x_1, d_1, u_1\}$	s-j：0	q、b 已经进过队，不再进队
6	z_0	q、u		$\{b_1, n_1, x_1, d_1, u_1\}$	s-z：0	q、u 已经进过队，不再进队
7	b_1	g、j		$\{n_1, x_1, d_1, u_1\}$	s-b：1	g、j 不再进队
8	n_1	g、x		$\{x_1, d_1, u_1\}$	s-n：1	g、x 不再进队
9	x_1	n、q		$\{d_1, u_1\}$	s-x：1	n、q 不再进队
10	d_1	j、m	m	$\{m_1, u_1\}$	s-d：1	m 放队首，但距离是 1：$s-d_1-m_0$
11	m_1	d、u		$\{u_1\}$	s-m：1	d、u 不再进队
12	u_1	m、z、j、t	t	$\{t_1\}$	s-u：1	m、z、j 不再进队
13	t_1	u		$\{\}$	s-t：1	队列空，停止

注意几个关键：

1）如果允许结点多次进队，那么先进队时算出的最短距离，大于后进队时算出的最短距离。所以后进队的结点，出队时直接丢弃。当然，最好不允许结点再次进队，在代码中加个判断即可，代码中的 dis[nx][ny] > dis[u.x][u.y] + d 起到了这个作用。

2）结点出队时，已经得到了它到起点 s 的最短路。

3）结点进队时，应该计算它到 s 的路径长度再入队。例如 u 出队，它的邻居 v 进队，进队时，v 的距离是 s-u-v，也就是 u 到 s 的最短距离加上(u,v)的边权。

为什么“BFS+双端队列”的算法过程是正确的？仔细思考可以发现，出队的结点到起点的最短距离是按 0、1、2...的顺序输出的，也就是说，距离为 0 的结点先输出，然后是距离为 1 的结点.....这就是双端队列的作用，它保证距离更近的点总在队列前面，队列是单调的。

算法的复杂度，因为每个结点只入队和出队一次，所以复杂度是 O(V)，V 是结点数量。

下面是代码①，其中的双端队列用 STL 的 deque 实现。

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
```

① 改编自：https://www.luogu.com.cn/blog/hje/solution-p4667

```
const int dir[4][2] = {{-1,-1},{-1,1},{1,-1},{1,1}}; //4 个方向的位移
const int ab[4] = {2,1,1,2};                         //4 个元件期望的方向
const int cd[4][2] = {{-1,-1},{-1,0},{0,-1},{0,0}};  //4 个元件编号的位移

int graph[505][505],dis[505][505];            //dis 记录结点到起点 s 的最短路
struct P{
    int x,y,dis;
}u;

int Get(){
    char c;
    while((c=getchar())!='/' && c != '\\') ;     //字符不是'/'和'\'
    return c=='/'?1:2;
}

int main(){
    int n, m; cin >>n >>m;
    memset(dis,0x3f,sizeof(dis));

   for(int i=1;i<=n;++i)
        for(int j=1;j<=m;++j)
            graph[i][j] = Get();

    deque <P> dq;
    dq.push_back((P){1,1,0});
    dis[1][1]=0;
    while(!dq.empty()){
        u = dq.front(), dq.pop_front();  //front()读队头,pop_front()弹出队头
        int nx,ny;
        for(int i=0;i<=3;++i) {          //4 个方向
            nx = u.x+dir[i][0];
            ny = u.y+dir[i][1];
            int d = 0;                   //边权
            d = graph[u.x+cd[i][0]][u.y+cd[i][1]]!=ab[i]; //若方向不相等,则 d=1
            if(nx && ny && nx<n+2 && ny<m+2 && dis[nx][ny]>dis[u.x][u.y]+d){
                //如果一个结点再次进队，那么距离应该更小。实际上，
                //由于再次进队时，距离肯定更大，所以这里的作用是阻止再次入队。
                dis[nx][ny] = dis[u.x][u.y]+d;
                if(d==0)  dq.push_front((P){nx, ny, dis[nx][ny]});
                                         //边权为 0，插到队头
                else      dq.push_back ((P){nx, ny, dis[nx][ny]});
                                         //边权为 1，插到队尾

                if(nx==n+1 && ny==m+1)      //到终点退出。不退也行，队列空自动退出
                    break;
            }
```

```
        }
    }
    if(dis[n+1][m+1] != 0x3f3f3f3f)     //可能无解，即 s 到 t 不通
        cout << dis[n+1][m+1];
    else
        cout <<"NO SOLUTION";
    return 0;
}
```


致谢

谢勇，湘潭大学算法竞赛教练：讨论最短路径算法的复杂度。