Universidad Corporativa Coppel | Programas Académicos

Ingeniería en Desarrollo de Software

Actividad | 3 | Método de Newton Rahpson

Métodos Numéricos

Ingeniería en Desarrollo de Software

academiaglobal

TUTOR: Miguel Ángel Rodríguez Vega

ALUMNO: Adriana Esteban López

FECHA: 18 de noviembre de 2024

INDICE

INTRODUCCIÓN

En el transcurso de la siguiente actividad se estará ejemplificando el uso de los siguientes métodos:

1. **Método de Gauss-Seidel**, se podría considerar como versión acelerada del método de Jacobi, pero este método consiste en ir sustituyendo los nuevos valores y obtener una nueva aproximación.

   Este método recorta sustancialmente el número de iteraciones a realizar para obtener una cierta precisión en la solución.

$$x_i^{(k)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) / a_{ij}$$

2. **Método de Jacobi** es un método iterativo que se usa para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Ambos métodos son iterativos, en donde progresivamente se van calculando aproximaciones a la solución de un problema, pero como se indica solo calculan aproximaciones

3. **Método de Bisección** es el método más antiguo para determinar las raíces de una ecuación y se baza directamente en el Teorema de Bolsano, parte desde un intervalo determinado por lo que sabemos que existe al menos una raíz real.

DESCRIPCIÓN

En el desarrollo de esta actividad se estará realizando lo siguiente:

1. Programar el Método de Bisección en RStudio
2. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$3x - y - z = 1$$

$$-x + 3y + z = 3$$

$$2x + y + 4z = 7$$

   a) Método de Jacobi
   b) Método Gauss-Seidel

3. Responder las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es el método qué resulto más fácil de utilizar?
   b) ¿Cuál es el método más eficiente? ¿Por qué?

JUSTIFICACIÓN

Ambos métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son procesos de aproximaciones sucesivas para resolver problemas de ecuaciones lineales y ambos requieren de la comprobación conocida como **diagonal pesada** (diagonal principal del sistema de ecuaciones).

En esencia estos métodos consisten en obtener una ecuación de recurrencia y proponer un vector solución inicial para después realizar las iteraciones necesarias hasta que la diferencia entre dos vectores cumpla con la tolerancia determinada; sin embargo, uno de los principales problemas de los métodos iterativos es la garantía de que el método va a converger.

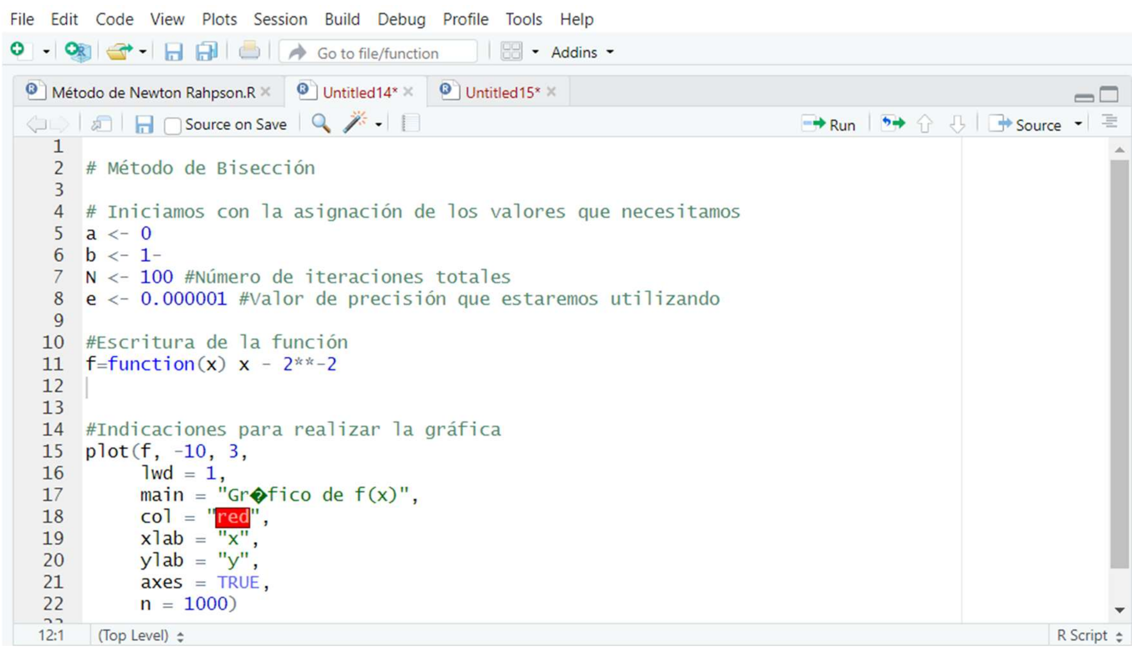
DESARROLLO

Programación del Método de Bisección en RStudio

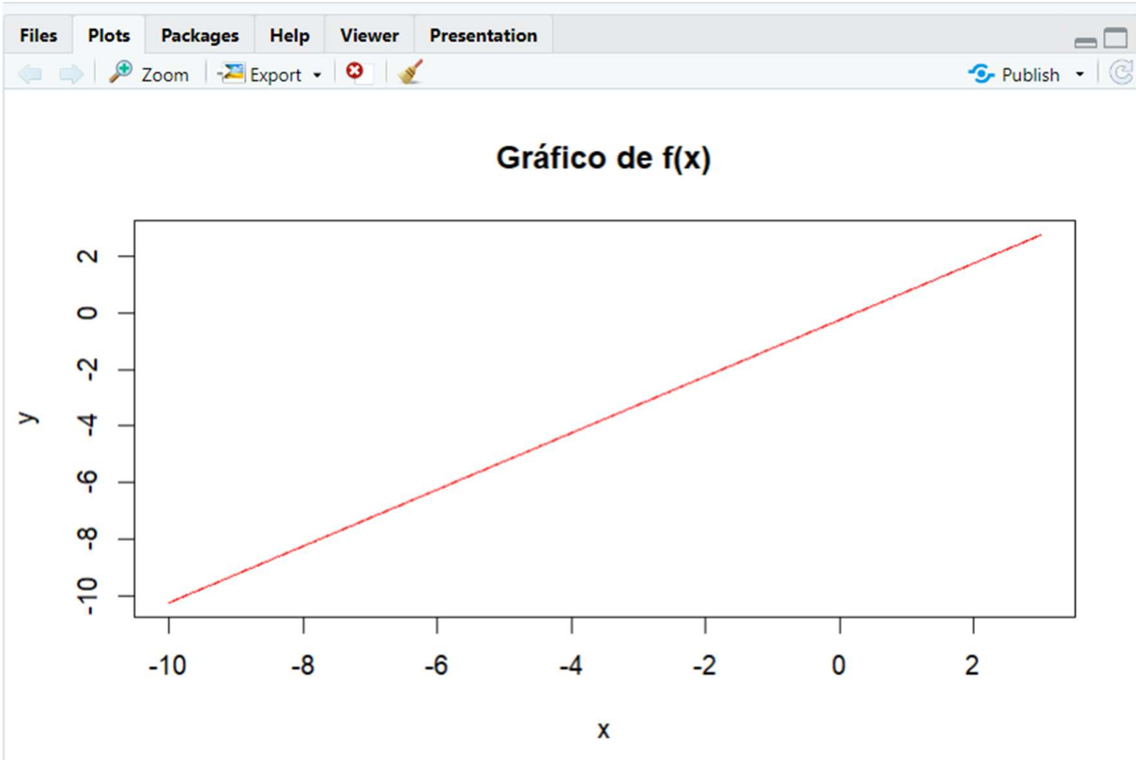
Para el desarrollo de esta actividad estaremos haciendo uso de la siguiente función:

$$f(x) = x - 2^{-x}$$

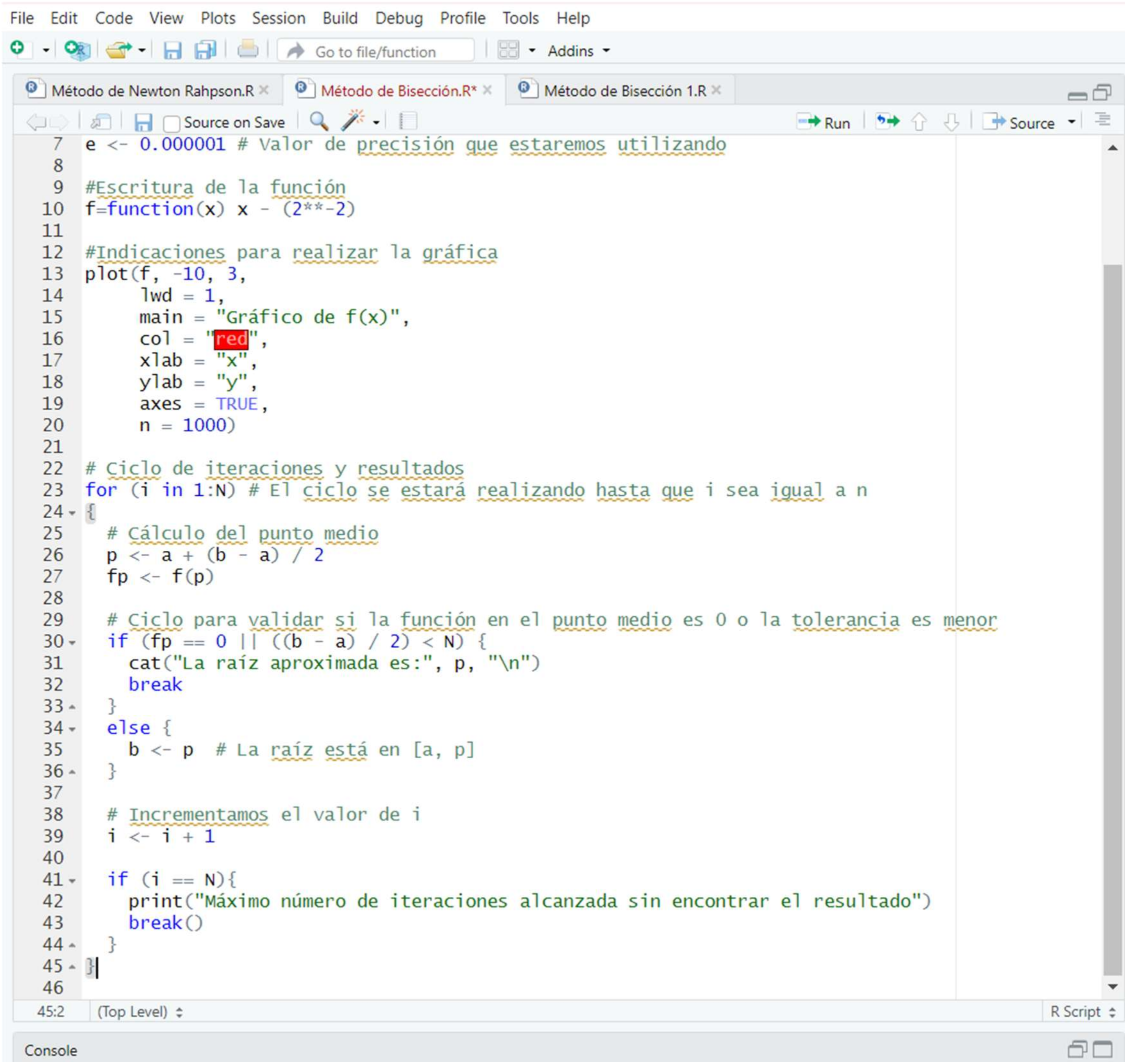
Al igual que en la programación de los métodos en la actividad, iniciamos con la asignación de valores y la gráfica de la función:



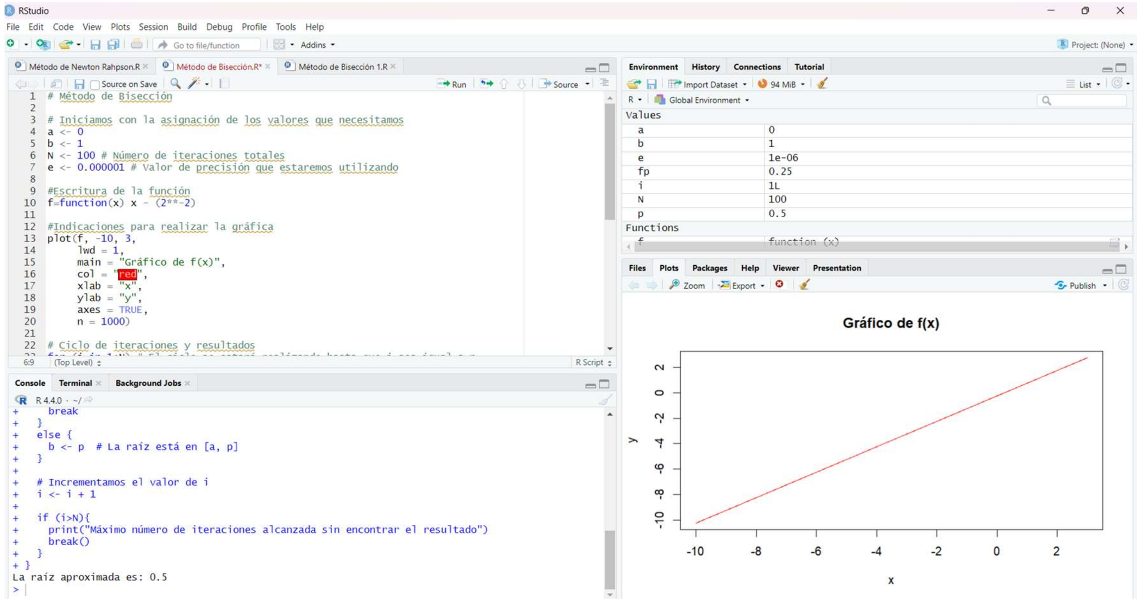
Realizando la ejecución del programa podemos observar que tenemos la siguiente gráfica:



Pasamos a la programación para el desarrollo del método de Bisección



Una vez ejecutado el programa, este es el resultado que obtenemos:

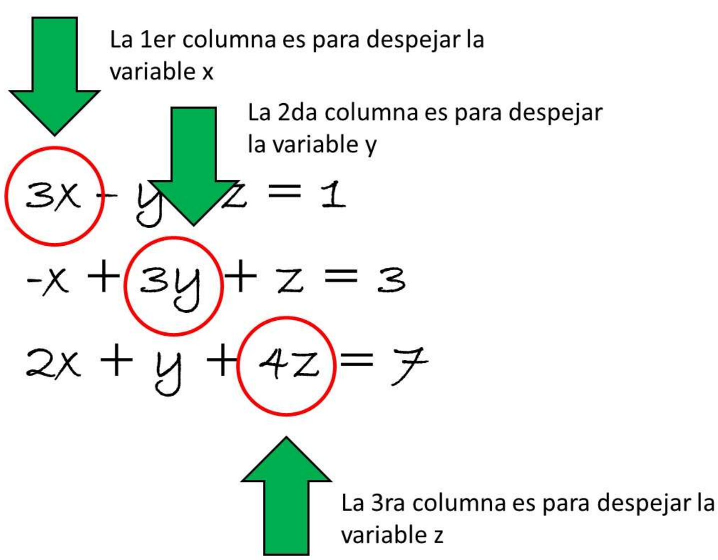


Utilizamos un límite de 100 iteraciones, por lo que podemos definir que la solución se dio dentro de este parámetro, sin embargo, vamos a ejecutarlo con un número menor de iteraciones, para ver el comportamiento, realicemos la prueba con 10 iteraciones.

Resolución del sistema de ecuaciones

En esta parte del desarrollo, se estará resolviendo el sistema de ecuaciones por medio de los Métodos de **Jacobi** y **Gauss-Seidel,** por lo que vamos a describir cada uno de los métodos para dar solución.

Para ambos métodos es necesario que se revise la **diagonal principal dominante** en donde cada una de las variables que se revisa debe de ser la mayor en su columna:



Como podemos observar cada una de las variables es la dominante en su columna, por lo que ahora despejamos cada una de las variables:

$$3x - y - z = 1$$ De la 1ra ecuación despejamos la variable x

$$-x + 3y + z = 3$$ De la 2da columna es para despejar la variable y

$$2x + y + 4z = 7$$ De la 3ra columna es para despejar la variable z

Con lo cual, las variables despejadas quedarían de la siguiente manera:

$$x = \frac{y + z + 1}{3}$$

$$y = \frac{x - z + 3}{3}$$

$$z = \frac{-2x - y + 7}{4}$$

Este sistema de ecuaciones que son el resultado de la derivada es el que utilizaremos para resolver cada uno de los métodos mediante la aplicación de Excel

Método de Gauss-Seidel

1. Inicializamos las variables en 0

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

   Estos valores de **0** corresponden a los valores que toman nuestras variables en la iteración **0**.

2. En la 1ra ecuación de **x** vamos a sustituir los valores de **y** y **z** para obtener un valor numérico de la variable **x**:

$$x = \frac{0 + 0 + 1}{3}$$

Una vez realizada esta operación tenemos que ahora el valor de **x** es igual a **0.3333333**

3. Ahora para la 2da ecuación de **y** vamos a sustituir el valor de **z** y el valor de **x**, pero vamos a utilizar el resultado que se obtuvo de **x**

$$y = \frac{0.3333333 - 0 + 3}{3}$$

Una vez realizada esta operación tenemos que ahora el valor de **y** es igual a **1.1111111**

4. Ahora para la 3ra ecuación de **z** vamos a sustituir el valor de **x** y el valor de **y**, pero vamos a utilizar los resultados anteriormente obtenidos

$$z = \frac{-(2*0.3333333) - 1.1111111 + 7}{4}$$

Una vez realizada esta operación tenemos que ahora el valor de **z** es igual a **1.3055556**

5. Con los datos obtenidos podemos ya empezar a realizar el cálculo del error absoluto con la siguiente formula**:**

$$error = \frac{x1 - x0}{x1}$$

6. Ahora pasemos a sustituir todos los valores involucrados en Excel para poder visualizar los resultados:

Iteraciones	x	y	z	Error x	Error y	Error z
0	0	0	0			
1	0.3333333	1.1111111	1.3055556	1	1	1
2	1.1388889	0.9444444	0.9444444	0.7073171	0.1764706	0.3823529
3	0.962963	1.0061728	1.0169753	0.1826923	0.0613497	0.0713202
4	1.007716	0.9969136	0.9969136	0.0444104	0.0092879	0.0201238
5	0.9979424	1.0003429	1.0009431	0.0097938	0.0034282	0.0040257
6	1.0004287	0.9998285	0.9998285	0.0024852	0.0005145	0.0011147
7	0.9998857	1.0000191	1.0000524	0.000543	0.0001905	0.0002238
8	1.0000238	0.9999905	0.9999905	0.0001381	2.858E-05	6.192E-05
9	0.9999936	1.0000011	1.0000029	3.017E-05	1.058E-05	1.244E-05
10	1.0000013	0.9999995	0.9999995	7.674E-06	1.588E-06	3.44E-06
11	0.9999996	1.0000001	1.0000002	1.676E-06	5.88E-07	6.909E-07
12	1.0000001	1	1	4.263E-07	8.82E-08	1.911E-07
13	1	1	1	9.31E-08	3.267E-08	3.838E-08
14	1	1	1	2.368E-08	4.9E-09	1.062E-08
15	1	1	1	5.172E-09	1.815E-09	2.132E-09
16	1	1	1	1.316E-09	2.722E-10	5.898E-10
17	1	1	1	2.874E-10	1.008E-10	1.185E-10
18	1	1	1	7.31E-11	1.512E-11	3.277E-11
19	1	1	1	1.596E-11	5.602E-12	6.582E-12
20	1	1	1	4.061E-12	8.403E-13	1.82E-12
21	1	1	1	8.867E-13	3.112E-13	3.655E-13
22	1	1	1	2.255E-13	4.663E-14	1.01E-13
23	1	1	1	4.918E-14	1.732E-14	2.021E-14
24	1	1	1	1.232E-14	2.665E-15	5.44E-15
25	1	1	1	2.554E-15	8.882E-16	9.992E-16
26	1	1	1	5.551E-16	0	2.22E-16
27	1	1	1	0	0	0

Sistema de ecuaciones

$$x = \frac{y + z + 1}{3}$$

$$y = \frac{x - z + 3}{3}$$

$$z = \frac{-2x - y + 7}{4}$$

Podemos ver que desde la iteración 10 el valor de nuestras variables tiende a ser 1, para la iteración 17 ya toman el valor de 1 de manera definitiva, y finalmente en la iteración 27 el error se vuelve 0 y siguen conservando el valor de 1 cada una de las variables.

Método de Jacobi

1. Inicializamos las variables en 0

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

   Estos valores de **0** corresponden a los valores que toman nuestras variables en la iteración **0**, para dar continuidad, es decir, obtener los valores de la iteración **1** vamos a sustituir estos valores en cada de una de las ecuaciones (derivadas).

2. En la 1ra ecuación de **x** vamos a sustituir los valores de **y** y **z** para obtener un valor numérico de la variable **x**:

$$x = \frac{0 + 0 + 1}{3}$$

Una vez realizada esta operación tenemos que ahora el valor de **x** es igual a **0.33333333**

3. Para la 2da ecuación de **y** vamos a sustituir el valor de **z** y el valor de **x**

$$y = \frac{0 - 0 + 3}{3}$$

Una vez realizada esta operación tenemos que ahora el valor de **y** es igual a **1**

4. Ahora para la 3ra ecuación de **z** vamos a sustituir el valor de **x** y el valor de **y**

$$z = \frac{-(2*0) - 0 + 7}{4}$$

Una vez realizada esta operación tenemos que ahora el valor de **z** es igual a **1.75**

5. Con los datos obtenidos podemos ya empezar a realizar el cálculo del error absoluto con la siguiente formula**:**

$$error = \frac{x1 - x0}{x1}$$

6. Ahora pasemos a sustituir todos los valores involucrados en Excel para poder visualizar los resultados:

Iteraciones	x	y	z	Error x	Error y	Error z
0	0	0	0			
1	0.33333333	1	1.75	1	1	1
2	1.25	0.77777778	1.33333333	0.73333333	0.28571429	0.3125
3	1.03703704	1.15740741	0.93055556	0.20535714	0.328	0.43283582
4	1.02932099	0.95987654	0.94212963	0.00749625	0.20578778	0.01228501
5	0.96733539	1.02314815	0.99537037	0.0640787	0.06184012	0.05348837
6	1.00617284	0.98139575	1.01054527	0.03859918	0.0425439	0.01501654
7	0.99731367	1.00825903	1.00156464	0.00888303	0.02664324	0.00896659
8	1.00327456	0.99635155	0.99927841	0.00594143	0.01195109	0.00228789
9	0.99854332	1.00230767	0.99927483	0.00473814	0.00594241	3.5748E-06
10	1.0005275	0.99874522	1.00015142	0.00198314	0.00356693	0.00087646
11	0.99963221	1.0005941	1.00004995	0.00089562	0.00184778	0.00010147
12	1.00021468	0.99967937	1.00003537	0.00058234	0.00091502	1.4575E-05
13	0.99990491	1.00017844	0.99997282	0.0003098	0.00049897	6.2555E-05
14	1.00005042	0.99990883	1.00000293	0.0001455	0.00026963	3.0117E-05
15	0.99997059	1.0000472	0.99999758	7.9833E-05	0.00013836	5.3493E-06
16	1.00001493	0.99997446	1.00000291	4.434E-05	7.2736E-05	5.3226E-06
17	0.99999246	1.00001349	0.99999892	2.2471E-05	3.9024E-05	3.9868E-06
18	1.00000414	0.99999299	1.0000004	1.1679E-05	2.0499E-05	1.479E-06
19	0.9999978	1.00000372	0.99999968	6.3398E-06	1.0726E-05	7.1507E-07
20	1.00000113	0.99999803	1.00000017	3.3369E-06	5.6886E-06	4.8842E-07
21	0.9999994	1.00000104	0.99999993	1.7334E-06	3.0085E-06	2.4633E-07
22	1.00000032	0.99999945	1.00000004	9.2073E-07	1.5806E-06	1.1457E-07
23	0.99999983	1.00000029	0.99999998	4.8869E-07	8.3379E-07	6.5205E-08
24	1.00000009	0.99999985	1.00000001	2.5619E-07	4.4083E-07	3.5898E-08
25	0.99999995	1.00000008	0.99999999	1.3498E-07	2.3234E-07	1.7891E-08
26	1.00000002	0.99999996	1	7.1483E-08	1.2244E-07	9.403E-09
27	0.99999999	1.00000002	1	3.7678E-08	6.464E-08	5.1319E-09

28	1.00000001	0.99999999	1	1.9836E-08	3.4106E-08	2.6791E-09
29	1	1.00000001	1	1.0476E-08	1.7981E-08	1.3915E-09
30	1	1	1	5.5298E-09	9.4855E-09	7.4266E-10
31	1	1	1	2.9143E-09	5.0051E-09	3.9351E-10
32	1	1	1	1.5372E-09	2.6398E-09	2.0587E-10
33	1	1	1	8.1131E-10	1.3923E-09	1.0865E-10
34	1	1	1	4.2789E-10	7.3455E-10	5.7572E-11
35	1	1	1	2.2566E-10	3.8748E-10	3.031E-11
36	1	1	1	1.1906E-10	2.0438E-10	1.5959E-11
37	1	1	1	6.2807E-11	1.0781E-10	8.4334E-12
38	1	1	1	3.3126E-11	5.6873E-11	4.4503E-12
39	1	1	1	1.7474E-11	3E-11	2.3449E-12
40	1	1	1	9.2183E-12	1.5825E-11	1.2371E-12
41	1	1	1	4.8626E-12	8.3477E-12	6.5292E-13
42	1	1	1	2.5648E-12	4.4034E-12	3.4428E-13
43	1	1	1	1.3529E-12	2.3226E-12	1.8152E-13
44	1	1	1	7.1365E-13	1.2251E-12	9.5812E-14
45	1	1	1	3.7648E-13	6.4626E-13	5.0515E-14
46	1	1	1	1.9862E-13	3.4084E-13	2.6756E-14
47	1	1	1	1.0469E-13	1.7986E-13	1.4211E-14
48	1	1	1	5.5178E-14	9.4924E-14	7.3275E-15
49	1	1	1	2.9199E-14	5.0071E-14	3.7748E-15
50	1	1	1	1.5432E-14	2.6534E-14	1.9984E-15
51	1	1	1	8.1046E-15	1.41E-14	9.992E-16
52	1	1	1	4.3299E-15	7.4385E-15	5.5511E-16
53	1	1	1	2.3315E-15	3.8858E-15	3.3307E-16
54	1	1	1	1.2212E-15	2.1094E-15	1.1102E-16
55	1	1	1	7.7716E-16	1.2212E-15	0
56	1	1	1	5.5511E-16	7.7716E-16	0
57	1	1	1	3.3307E-16	5.5511E-16	0
58	1	1	1	1.1102E-16	3.3307E-16	0
59	1	1	1	0	1.1102E-16	0
60	1	1	1	0	0	0

Podemos ver que desde la iteración 16 el valor de nuestras variables tiende a ser 1, para la iteración 30 ya toman el valor de 1 de manera definitiva, y finalmente en la iteración 60 el error se vuelve 0 y siguen conservando el valor de 1 cada una de las variables.

Analizando ambos resultados podemos definir lo siguiente:

Método de Gauss - Seidel

$x = 1.0000013$ $y = 0.9999995$ $z = 0.9999995$

Con un error de 10^{-6} que se obtiene en la iteración 10 y finalmente en la iteración 27 las variables toman el valor de 1 y el error en las 3 está en 0

Método de Jacobi

$x = 1.00001493$ $y = 0.99997446$ $z = 1.00000291$

Con un error que va entre 10^{-5} y 10^{-6} que se obtiene en la iteración 16 y finalmente en la iteración 60 las variables toman el valor de 1 y el error en las 3 está en 0

En general ambos métodos son fáciles y sencillos de desarrollar, sin embargo, **se considera que el método más fácil de utilizar es el Método de Jacobi**, ya que para el cálculo de la iteración 1 únicamente se sustituye el valor que se asigna a las variables en la iteración 0, que en este caso fue 0, mientras que en el Método de Gauss-Seidel solo una vez se toma el valor que se asigna en la iteración 0 a y posteriormente se van tomando los valores que las variables van tomando, lo cual si no se tiene cuidado puede ser causa de un error en el resto del cálculo.

Por otro lado una vez que se obtienen los resultados podemos observar que **el método más eficiente es el de Gauss-Seidel** ya que entre 10 y 27 iteraciones se puede obtener el resultado que se busca; mientras que con el método Jacobi tenemos que emplear de 16 a 60 iteraciones; lo cual implica bastante trabajo, ya que si tuviéramos que realizar estos cálculo a mano, sería un trabajo considerable, es el doble es las iteraciones que se requieren para el método de Gauss-Seidel.

CONCLUSIÓN

Podemos definir que el Método de Gauss-Seidel es la secuencia del Método de Jacobi, por lo que es de esperar que el método de Gauss-Seidel acelere de forma notable la convergencia, y es algo que pudimos ver en la solución del sistema de ecuaciones a través de estos métodos, pudimos observar que la diferencia de iteraciones necesarias para la solución es de prácticamente el doble.

Ambos métodos son de fácil aplicación, sin embargo, el método de Guss-Seidel puede llegar a fallar cuando dos ecuaciones son muy parecidos o en el peor de los casos idénticos; mientras que este método van reemplazando los nuevos valores que va obteniendo, Jacobi cambia los valores hasta que todas las ecuaciones hayan sido sustituidas con los valores iniciales; y esta es su principal diferencia.

En conclusión, ambos métodos son útiles cuando se tiene un sistema de ecuaciones con un ana diagonal estrictamente dominante y cuando no se conoce otro método para hacerlo.

Se agrega dicha actividad a la plataforma de GitHub a través del siguiente link:

https://github.com/22HADRIA/M-todos-Num-ricos

REFERENCIAS ELÉCTRONICAS

Métodos Jacobi y Gauss-Seidel

https://www.ingenieria.unam.mx/pinilla/PE105117/pdfs/tema3/3-3_metodos_jacobi_gauss-seidel.pdf

Método de Gauss-Seidel

https://esimecuanalisisnumerico.wordpress.com/2014/05/05/metodo-de-gauss-seidel/

Método de Jacobi y Método de Gauss-Seidel

https://metodosjl.wordpress.com/2017/03/16/metodo-de-jacobi-y-metodo-de-gauss-seidel/

Método de Jacobi

https://es.scribd.com/document/417307146/metodo-de-jacobi

Métodos Iterativos

http://venus.ceride.gov.ar/cursos/moodledata/31/moddata/assignment/195/4382/Ferrer_Juan_Ignacio_TP3_Metodos_Iterativos.pdf

Métodos Iterativos

https://www.studocu.com/es-mx/document/instituto-tecnologico-de-cerro-azul/ingenieria-en-sistemas-computacionales/31-metodos-iterativos/55054856