

Actividad | 2 | Método de Gauss-Jordan y Regla de Cramer

Matemáticas Matriciales

Ingeniería en Desarrollo de Software



TUTOR: Eduardo Israel Castillo García

ALUMNO: Adriana Esteban López

FECHA: 22 de mayo de 2024

INDICE

Introducción	03
--------------	----

.....

Descripción	04
-------------	----

.....

Justificación	05
---------------	----

.....

Desarrollo	06
------------	----

.....

Conclusión	15
------------	----

.....

INTRODUCCIÓN

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen dos o más incógnitas, dichas ecuaciones tienen relación entre si ya que los valores de las incógnitas satisfacen todas las ecuaciones al mismo tiempo, y esto también es aplicable a las matrices.

El objetivo es determinar los valores de las incógnitas, utilizando varios métodos, entre ellos el Método de Gauss – Jordan o Método de Regla de Cramer

El **Método de Gauss – Jordan**, es una técnica que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales, el cual ofrece un enfoque eficiente y sistemático que garantiza una solución precisa y no repetible mediante la transformación de la matriz; en este método utiliza operaciones de matriz para resolver sistemas de ecuaciones con n variables.

Regla de Cramer es un método que permite calcular la solución de un sistema con n ecuaciones y n incógnitas, siempre cuando el determinante de la matriz asociada “A” sea diferente de 0.

Durante el desarrollo de esta actividad, se estará dando solución a un sistema de ecuaciones lineales a través de la aplicación de Regla de Cramer

DESCRIPCIÓN

Contextualización (Descripción del problema)

Como administrador de proyectos del área de programación en una compañía de desarrollo de software se solicita apoyo para establecer los recursos necesarios para un proyecto importante.

Este constará de 3, 589 líneas de código, las cuales deberán ser programadas bajo un tiempo límite de 20 días hábiles. Para poder llevar a cabo el proyecto se tiene dos tipos de desarrolladores: el desarrollador experto y el desarrollador novato.

El primero es capaz de realizar 230 líneas de código al día; por su parte, el segundo solamente 100 líneas de código.

Debido a que el equipo de desarrolladores está compartido con las demás áreas, el desarrollador experto cuenta con 3 horas disponibles por día; mientras que el desarrollador novato cuenta con 5 horas disponibles por día.

El desarrollador experto cobra un salario de \$900 pesos por hora laborada, y el desarrollador novato cobra \$400 pesos.

Con los datos proporcionados en este contexto debemos de obtener el **costo total** de la mano de obra del proyecto; por lo que estaremos dando solución mediante la aplicación de Regla de Cramer.

JUSTIFICACIÓN

Hoy en día, existen muchas situaciones en las cuales se requiere calcular valores para diferentes incógnitas que conforman los sistemas de ecuaciones lineales para satisfacer al sistema.

Para la obtención de estos valores existen diversas metodologías, como el método de Regla de Cramer, el cual tiene como ventaja principal el poder encontrar fácilmente las variables de nuestro sistema de ecuaciones; únicamente se tiene que validar primero que el sistema de ecuaciones tenga una única solución.

En el caso de la aplicación de Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones, se deben de cumplir las siguientes condicionantes:

1. El número de ecuaciones debe de ser igual al número de incógnitas
2. El determinante de la matriz de coeficientes debe de ser distinto de 0

Este método se fundamenta en el uso de determinantes, lo cual es un cálculo sencillo cuando se presentan matrices cuadradas, es por ello que en el desarrollo de esta actividad se estará explicando el proceso para obtener el costo de la mano de obra de acuerdo a la problemática que se plantea en la descripción del problema con el Método de Regla de Cramer, en el cual como principal acción se debe determinar el valor de la determinante (veremos a que matriz se aplica este procedimiento) y el seguimiento a la resolución del problema.

DESARROLLO

El problema a resolver es el siguiente:

Como administrador de proyectos del área de programación en una compañía de desarrollo de software se solicita apoyo para establecer los recursos necesarios para un proyecto importante.

Este constará de 3, 589 líneas de código, las cuales deberán ser programadas bajo un tiempo límite de 20 días hábiles. Para poder llevar a cabo el proyecto se tiene dos tipos de desarrolladores: el desarrollador experto y el desarrollador novato.

El primero es capaz de realizar 230 líneas de código al día; por su parte, el segundo solamente 100 líneas de código.

Debido a que el equipo de desarrolladores está compartido con las demás áreas, el desarrollador experto cuenta con 3 horas disponibles por día; mientras que el desarrollador novato cuenta con 5 horas disponibles por día.

El desarrollador experto cobra un salario de \$900 pesos por hora laborada, y el desarrollador novato cobra \$400 pesos.

Para poder saber cuánto será el costo de la mano de obra tenemos que saber cuántos programadores expertos y novatos tendremos que contratar para hacer la programación de las líneas de código, entonces nuestros datos son los siguientes:

Líneas de Código del Proyecto
3589

Tiempo límite de entrega
20 días hábiles

Programador Experto:
230 líneas de código por día
Programa 3 horas por día
Cobra \$900 por hora trabajada

Programador Novato:
100 líneas de código por día
Programa 5 horas por día
Cobra \$400 por hora trabajada

Tenemos que tomar en cuenta que se indica que el proyecto debe de estar listo en 20 días hábiles, por lo tendremos que convertir esos días a horas laborales: **20 días X 8 horas hábiles = 160 horas**

Ahora pasamos a formular el sistema de ecuaciones, que en este caso serán 2:

En base a los datos de las líneas de código que se nos indican podemos definir la siguiente ecuación:

$$\textbf{1ra ecuación: } 230x + 100y = 3589$$

230 = Líneas de código que programa un programador experto

x = Número de programadores expertos

100 = Líneas de código que programa un programador novato

y = Número de programadores novatos

3589 = Número de líneas de código que se deben de realizar en el proyecto

$$\textbf{2da ecuación: } 3x + 5y = 160$$

3 = horas por día que programa un programador experto

x = Número de programadores expertos

5 = horas por día que programa un programador novato

y = Número de programadores novatos

160 = Número de horas en las que se estará realizando el proyecto

Sistema de Ecuaciones

$$230x + 100y = 3589$$

$$3x + 5y = 160$$

De este sistema de ecuaciones vamos a obtener lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 230 & 100 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3589 \\ 160 \end{bmatrix}$$

Matriz de Coeficientes **Variables o incógnitas** **Términos Constantes**

Antes de iniciar con la Regla de Cramer, tenemos que obtener la determinante, para poder confirmar si el sistema de ecuaciones tiene o no una solución, ya que en caso de que el valor sea 0, quiere decir que el sistema de ecuaciones no tiene solución.

Para obtener la determinante, vamos a utilizar la **matriz de coeficientes**, la cual queda como una matriz cuadrada de 2 X 2, en la cual se estarán multiplicando los valores de la matriz en diagonal, como se muestra a continuación:

Matriz de Coeficientes

$$\begin{bmatrix} 230 & 100 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

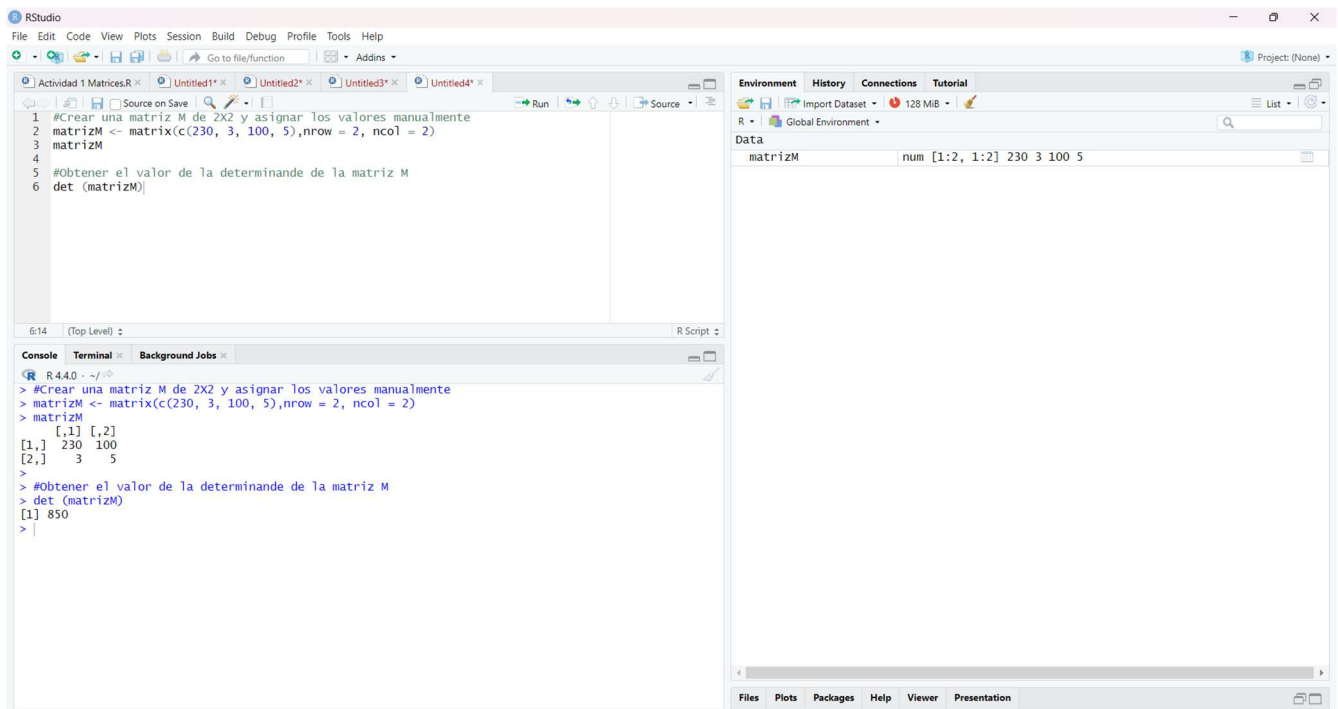
$$|M| = (230 * 5) - (100 * 3)$$

$$|M| = 1150 - 300$$

$$|M| = 850$$

Podemos observar que el determinante es diferente de 0, por lo tanto, el sistema de ecuaciones si tiene una solución y procedemos aplicar el Método de Gauss – Jordan.

Otra opción que podemos utilizar es RStudio, herramienta en la cual podemos apoyar a través de la cual mediante la programación podemos confirmar que el resultado de la determinante es 850.



The screenshot shows the RStudio interface with the following content:

```
#Crear una matriz M de 2x2 y asignar los valores manualmente
matrizM <- matrix(c(230, 3, 100, 5), nrow = 2, ncol = 2)
matrizM
#Obtener el valor de la determinante de la matriz M
det(matrizM)
```

The console output shows the matrix and its determinant:

```
[1,] [2,]
[1,] 230 100
[2,] 3 5
> #Obtener el valor de la determinante de la matriz M
> det(matrizM)
[1] 850
>
```

The Environment pane shows the variable `matrizM` as a numeric matrix with dimensions `[1:2, 1:2]` and values `230 3 100 5`.

Una vez que sabemos que la determinante de la matriz de coeficientes es diferente de 0, vamos a trabajar sobre esa misma matriz de coeficientes, en general lo que se estará realizando es tomar cada una de las filas y se estará reemplazando con la matriz de términos constantes y se obtiene la matriz de determinantes:

1. Iniciamos con la fila 1, para obtener el valor de x

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{M} \begin{bmatrix} 230 & 100 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{M} \begin{bmatrix} 3589 & 100 \\ 160 & 5 \end{bmatrix} \\
 \text{Matriz de} & & \text{Eliminamos la fila 1 y se} \\
 \text{coeficientes} & & \text{sustituye con la matriz de} \\
 & & \text{términos constantes}
 \end{array}$$

Ahora con la matriz resultante, vamos a obtener el valor de la determinante para posteriormente dividirlo entre el valor de la determinante de la matriz de coeficientes ($IMC = 850$), con lo cual vamos a obtener el valor de la variable x

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{M} \begin{bmatrix} 3589 & 100 \\ 160 & 5 \end{bmatrix} \\
 IMC = (3589 \times 5) - (100 \times 160) \\
 IMC = 17\,945 - 16\,000 \\
 IMC = 1\,945 \\
 x = 1945 / 850 \\
 x = 2.28
 \end{array}$$

Comprobemos el resultado de la determinante en RStudio:

The screenshot shows the RStudio interface. The script editor contains the following code:

```

1 #Crear una matriz M de 2x2 y asignar los valores manualmente
2 matrizM <- matrix(c(230, 3, 100, 5),nrow = 2, ncol = 2)
3 matrizM
4
5 #Obtener el valor de la determinante de la matriz M
6 det (matrizM)
7
8 #Crear una matriz M1 de 2x2 y asignar los valores manualmente para obtener el valor de la variable
9 matrizM1 <- matrix(c(3589, 160, 100, 5),nrow = 2, ncol = 2)
10 matrizM1
11
12 #Obtener el valor de la determinante de la matriz M1
13 det (matrizM1)

```

The console shows the execution of the code:

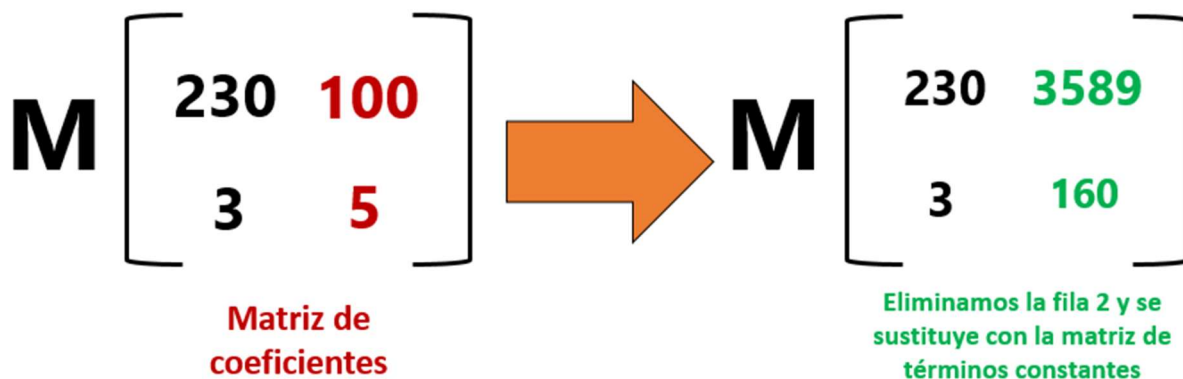
```

> #Crear una matriz M1 de 2x2 y asignar los valores manualmente para obtener el valor de la variable
> matrizM1 <- matrix(c(3589, 160, 100, 5),nrow = 2, ncol = 2)
> matrizM1
      [,1] [,2]
[1,] 3589  100
[2,]  160    5
>
> #Obtener el valor de la determinante de la matriz M
> det (matrizM1)
[1] 1945
>

```

The Environment pane on the right shows the variable `matrizM1` as a numeric matrix of size 2x2 with values 3589, 160, 100, and 5.

2. Repetimos el mismo procedimiento, pero ahora con la fila 2, que nos estará dando el valor de y



Ahora con la matriz resultante, vamos a obtener el valor de la determinante para posteriormente dividirlo entre el valor de la determinante de la matriz de coeficientes ($|M| = 850$), con lo cual vamos a obtener el valor de la variable y.

$$M \begin{bmatrix} 230 & 3589 \\ 3 & 160 \end{bmatrix}$$

$$IMI = (230 \times 160) - (3589 \times 3)$$

$$IMI = 36\,800 - 10\,767$$

$$IMI = 26\,033$$

$$y = 26\,033 / 850$$

$$y = 30.62$$

Comprobando el resultado de la determinante en RStudio, tenemos que:

The screenshot shows the RStudio interface with the following content:

- Source Editor:** Contains R code for creating two 2x2 matrices and calculating their determinants.


```

7
8 #Crear una matriz M1 de 2X2 y asignar los valores manualmente para obtener el valor de la variable
9 matrizM1 <- matrix(c(3589, 160, 100, 5), nrow = 2, ncol = 2)
10 matrizM1
11
12 #Obtener el valor de la determinante de la matriz M1
13 det (matrizM1)
14
15 #Crear una matriz M2 de 2X2 y asignar los valores manualmente para obtener el valor de la variable
16 matrizM2 <- matrix(c(230, 3, 3589, 160), nrow = 2, ncol = 2)
17 matrizM2
18
19 #Obtener el valor de la determinante de la matriz M1
20 det (matrizM1)
      
```
- Environment:** Shows the variable 'matrizM1' as a numeric matrix of size 2x2 with values 230, 3, 3589, and 160.
- Console:** Shows the execution of the code, displaying the matrices and the determinant of 'matrizM1' as 26033.


```

> #Crear una matriz M2 de 2X2 y asignar los valores manualmente para obtener el valor de la variable
> matrizM1 <- matrix(c(230, 3, 3589, 160), nrow = 2, ncol = 2)
> matrizM1
      [,1] [,2]
[1,] 230 3589
[2,]   3  160
>
> #Obtener el valor de la determinante de la matriz M1
> det (matrizM1)
[1] 26033
      
```

Ya tenemos ahora el resultado de las variables que tenemos en el sistema de ecuaciones:

$$x = 2.28$$

$$y = 30.62$$

Estos valores nos van a permitir saber cuántos programadores expertos y novatos debemos de tener de cada uno para poder cubrir el proyecto en 20 días hábiles y con 3589 líneas de código, para que con esto a su vez podamos saber cuánto se estará gastando en mano de obra; sin embargo, estamos hablando de personas, es decir, entes completos, por tanto, no podemos expresar los valores de estas variables es decimales, y es por ello que solo estaremos tomando los valores enteros de cada una de ellas:

$$x = 2$$

$$y = 30$$

Vamos ahora a sustituir los valores de las variables en el sistema de ecuaciones para determinar:

A) ¿Cuál es el costo de Programador Experto?

Valor de la variable x

Número de horas que un programador experto puede programar por hora

Programador Experto: 2 x 900 x 3 = 5 400

Costo por programador experto por hora

B) ¿Cuál es el costo de Programador Novato?

Valor de la variable y

Número de horas que un programador novato puede programar por hora

Programador Novato: $30 \times 400 \times 5 = 60\,000$

Costo por programador novato por hora

Con esta información ya podemos realizar el cálculo total de la mano de obra para el proyecto:

Costo por Programador experto

Días que dura el proyecto

Costo Total: $(5\,400 + 60\,000) \times 20 = \$1\,308\,000$

Costo por programador novato

Con esto podemos concluir que el costo total del proyecto será de \$1 308 000, y el cual ya incluye los costos de tener programadores expertos y programadores novatos considerando los costos de cada uno de ellos y las horas que pueden estar programando por día cada uno.

CONCLUSIÓN

Antes de utilizar la Regla de Cramer, es importante que se tenga claro cuál será la matriz principal (matriz de determinantes) a la cual le estaremos obteniendo la determinante, ya que será un valor de vital importancia para definir si nuestro sistema de ecuaciones tiene solución y por tanto si se puede aplicar regla de Cramer, ya que como se veía en la Justificación, hay ciertas condicionantes que cumplir.

La Regla de Cramer es un método ideal para sistemas de ecuaciones lineales pequeños (de no más de 3 ecuaciones) ya que es rápido y eficaz; sin embargo, cada problema es diferente y es de suma importancia poder hacer la distinción del método más apropiado para resolver dicho problema, y en esta ocasión al contar con un sistema de dos ecuaciones, resulta de demasiado práctico el uso de Regla de Cramer.

La Regla de Cramer encuentra aplicaciones en diversas áreas, como la Ingeniería, la Física, la Economía y la Estadística, estas son áreas en donde la resolución de sistemas de ecuaciones es esencial para modelar fenómenos y poder tomar decisiones como ajustar modelos matemáticos a datos empíricos, determinar el comportamiento de circuitos electrónicos, etc.

Se agrega dicha actividad a la plataforma de GitHub a través del siguiente link:

<https://github.com/22HADRIA/Matem-ticas-Matriciales.git>