Logique du premier ordre

Introduction

Considérons l'exemple de raisonnement qui suit :

TOUT être humain est mortel.
OR Socrate est un être humain.
DONC Socrate est mortel.

La logique des propositions ne permet pas de 'formuler' des raisonnements comme celui-ci, vu qu'il n'existe pas de notion d'énoncé singulier (exp. Socrate est mortel) et d'énoncé générique (Tout être humain est mortel).

En logique de prédicats(logique du premier ordre), nous avons cette notion d'énoncé singulier et d'énoncé générique qui se base sur d'autres notions, à savoir, les objets ou les individus et leurs désignateurs : les constantes et les variables, les propriétés d'objets (exp. *Mortalité*) et les relations entre les objets (exp. Ahmed *est le père* d'Ali) appelées prédicats.

- ☞ En logique de prédicats, nous pouvons écrire (ou formuler) ‘Socrate est un être humain’ sous la forme : être-humain(Socrate) où ‘Socrate’ est l‘individu ou l’objet, et ‘être-humain’ est la propriété.

- ☞ Pour formuler un énoncé générique comme ‘TOUT être humain est mortel’, la logique des prédicats emploie le quantificateur universel $\forall$.

☞Le raisonnement précédent peut être formulé comme suit :

$\forall x$ être-humain(x) $\Rightarrow$ mortel(x)
être-humain(Socrate)
DONC mortel(Socrate)

☞La logique de prédicats a pour but de généraliser la logique propositionnelle en introduisant les variables (exp. x), les quantificateurs (exp. $\forall$) et les prédicats (exp. mortel).

L'alphabet de la logique des prédicats

Symboles de connecteurs

$$C = \{\ \neg,\ \ \wedge,\ \ \vee,\ \ \rightarrow,\ \ \leftrightarrow\}$$

Symboles de quantificateurs

- $\forall$ (**universel**) : « pour tout », « quel que soit », ...
- $\exists$ (**existentiel**) : « il existe au moins un ... tel que ... »

Variables

$$\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$$

Symboles de relations

$\mathcal{R} = \{P, Q, R, \ldots\}$ ensemble de symboles de relations (**prédicats**)

Definition (Arite)

*À chaque symbole de relation R, on associe un entier $n \geq 0$; on dit alors que R est un symbole d'***arité** *n, c'est-à-dire une relation à n arguments ou n variables. On note $R_{/n}$.*

Symboles de fonctions

$\mathcal{F} = \{f, g, \ldots\}$ ensemble (disjoint de $\mathcal{R}$) de symboles de **fonction**

La notion de fonction correspond à la notion habituelle de fonction qui associe à un ou plusieurs objets (les paramètres) une valeur (le résultat de la fonction).

Par exemple :age(x) associe à une personne x un nombre entier (son âge) ou distance(x, y) qui fournit la distance entre deux villes x et y.

Les termes

les variables et les constantes sont des termes

f(t1, …, tn) est un terme si

- les ti sont des termes
- f est un symbole de fonction d'arité n

Les atomes

R(t1, …, tn) est un atome si

- les ti sont des termes
- R est un symbole de relation d'arité n

Formules

Formules:

Un atome est une **formule**

Si F et G sont des formules et x une variable, alors les expressions suivantes sont des formules

- $\neg(F)$
- $(F) \wedge (G)$ et $(F) \vee (G)$
- $(F) \rightarrow (G)$ et $(F) \leftrightarrow (G)$
- $\forall x\ (F)$ et $\exists x\ (G)$

Négations:

$\neg(\forall x\ P(x)) : \exists x\ \neg P(x)$

$\neg\ (\exists x\ P(x)) : \forall x\ \neg P(x)$

Définition : Occurrence d’une variable

Une occurrence d’une variable x dans une formule A est un endroit où x apparaît dans A sans être immédiatement précédée par $\forall$ ou $\exists$.

Définition : Portée d’un quantificateur

Dans une formule $A=Q\ x\ B$, avec Q quantificateur et x variable , B est appelée la portée du quantificateur Q

Variables libres et liées

Les variables qui apparaissent dans une formule sont dites libres ou liées, selon le principe suivant :

– toutes les variables d'une formule sans quantificateur sont libres

– si x est libre dans w, x est liée dans $\forall$xw et dans $\exists$xw

Exemple

Dans la formule $p(x) \vee q(y)$

x et y sont libres.

Dans $\forall x(p(x) \wedge r(y, x))$

x est liée, y est libre

Dans $\exists x(p(x) \vee q(x)) \wedge r(x)$

la variable x joue deux rôles différents, elle est liée dans la partie à gauche de $\wedge$ et libre dans la partie de droite

Définition:

- Une formule dont toutes les variables sont liées est dite formule fermée(close).
- Une formule avec une ou des variables libre est dite ouverte. On notera $w(x, y, z)$ pour indiquer que la formule w possède x, y et z comme variables libres.

Par exemple, $w(x, z) = p(x) \wedge \exists y q(x, y, z)$ est une formule ouverte où x et z sont libres.

Exercice

Donner les variables libres et liées des formules suivantes:

a) $(P(f(X, Y)) \vee \forall Z\, R(a, Z))$
b) $(\forall X\, P(X, Y, Z) \vee \forall Z\, (P(Z) \rightarrow R(Z)))$
c) $(\forall X\, A(X) \vee \exists X\, (B(X) \rightarrow \neg \exists T\, C(X, T)))$

Exercice

Modélisez les phrases suivantes en logique des prédicats.

Vous préciserez le vocabulaire utilisé

1. Tous les étudiants aiment la logique.
2. Chaque étudiant n'aime pas une matière.
3. Tous les étudiants n'aiment pas une matière.
4. Les étudiants qui ont une bonne note en logique sont les meilleurs.

Définition : clôture universelle d'une formule

La clôture (ou fermeture) universelle d'une formule $A(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n})$ est la formule **close**

$A' = \forall\, \mathbf{x_1} \dots \forall\, \mathbf{x_n}\, A(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n})$

Définition : clôture existentielle d'une formule

La clôture (ou fermeture) existentielle d'une formule $A(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n})$ est la formule close

$\exists\, \mathbf{x_1} \dots \exists\, \mathbf{x_n}\, A(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n})$.

Définition : formules propres

Une formule A est dite **propre** lorsque :

Il n’existe pas de variable dans A qui a, à la fois, des occurrences libres et des occurrences liées.

Deux occurrences liées d’une même variable dans A appartiennent à la portée d’un même quantificateur.

Définition : *Renommage* de *formules*

Un renommage d’une variable consiste à changer les noms de certaines de ces occurrences et ce, en donnant le même nom pour ces occurrences liées appartenant à la même portée d’un quantificateur et le même nom pour ces occurrences libres.

Définition : formules impropres et renommage

Une formule A est dite impropre si elle n’est pas propre.

On peut rendre une formule propre par un renommage qui consiste à :

-Changer les occurrences liées d’une variable libre par d’autres noms de variables, de telle sorte que toute variable libre ne puisse pas avoir d’occurrences liées.

-Pour chaque occurrence liée d’une variable qui appartient à la portée d’un quantificateur différent donner un nom différent.

Exemples :

A = $\forall$**x ($\exists$y p(x, y) $\vee$ $\exists$z r(y, z))** $\rightarrow$ impropre

A'= $\forall$**x ($\exists$y1 p(x, y1) $\vee$ $\exists$z r(y, z))** $\rightarrow$ propre.

Arbre de décomposition d'une formule

Soit la formule $\forall x\ (\ \forall y\ (\ P(t,y)\ \wedge \exists z\ Q(x,f(z))\ )\ )$