大学物理学（下）

——多媒体教学课件

华东理工大学物理系

作者:葛自明

2021 年 9月5日

第八章 真空中静电场的场强

（Intensity of Electrostatic Field in Vacuum）

§8.1 电相互作用

一、电荷的基本性质

1. 电荷的个体属性

- 电荷有正负之分；
- 电荷量子化；电子电荷 $e = 1.602\times10^{-19}\mathrm{C}$
  $q = ne \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$ 电量是相对论不变量
- 电荷有相互作用：同性相斥，异性相吸.
- 强子的夸克模型具有分数电荷（$\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$ 电子电荷）

2. 电荷守恒定律

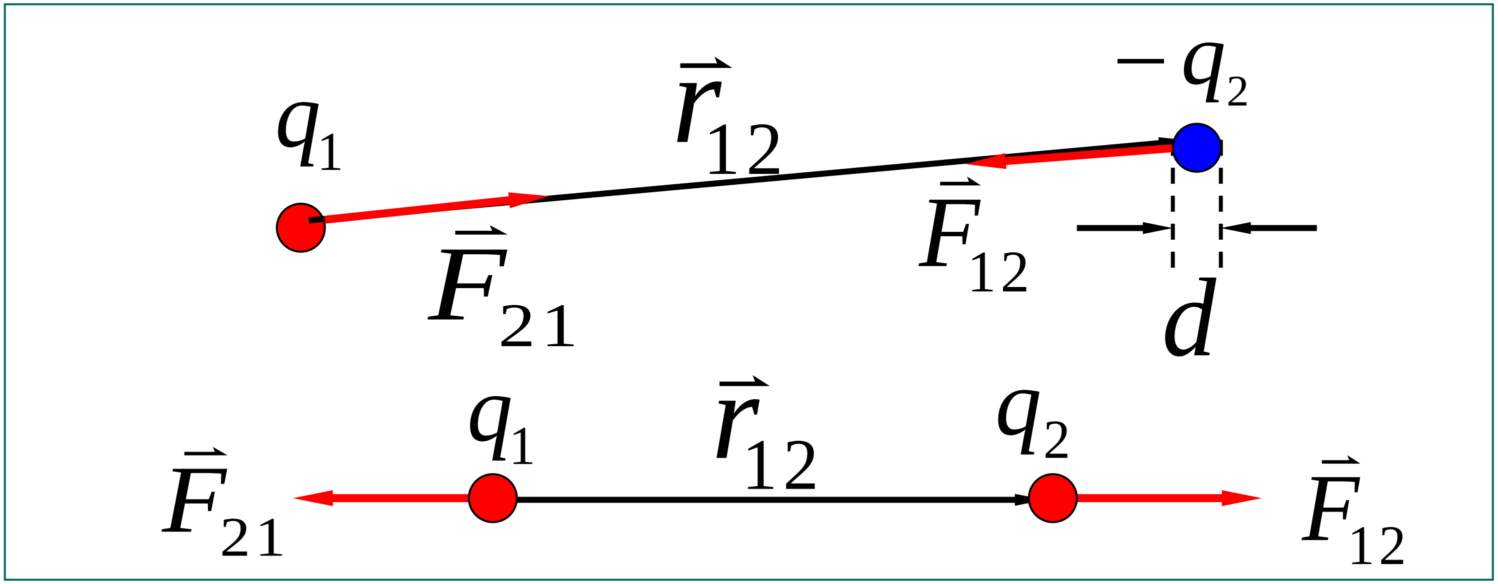
在孤立系统中,电荷的代数和保持不变. $\boxed{\sum Q_i = c}$

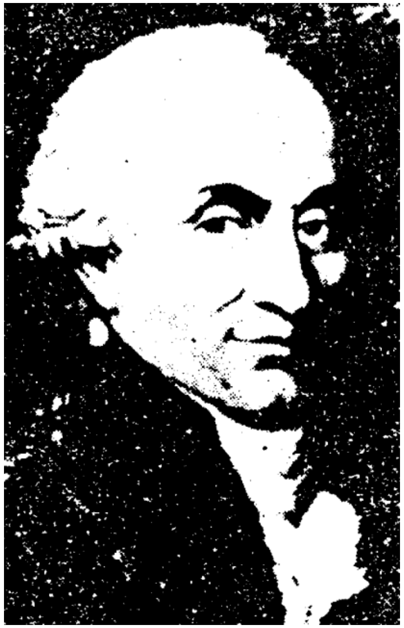
自然界的基本守恒定律之一，在研究静电场中的导体问题时，常常要用到电荷守恒定律来确定导体电荷的分布。

二、库仑定律

1. 点电荷模型 （$d << r_{12}$）

带电体的线度比起带电体之间的距离小得多的情况下,带电体可视为点电荷,点电荷是一个理想模型



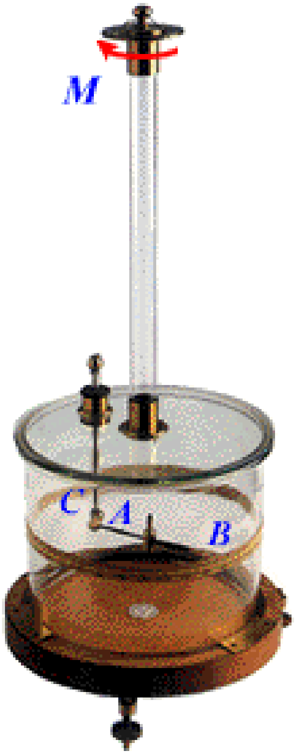


库仑（Charles Augustin de Coulomb,1736—1806）

法国物理学家，他使用自制的扭秤确定了电荷间作用力的库仑定律。他通过对滚动和滑动的实验研究，得出摩擦定律。

2. 实验定律

来源：库仑扭秤实验



库仑扭秤

数学表达式:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

SI制 $k = 8.98755\times10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^{2}\cdot C^{-2}}$

3. 库仑定律的说明

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{12}$$

- 库仑力遵守牛顿第三定律
- 库仑定律适用于真空中的点电荷
- 电荷相对观察者都处于静止状态。
- 有效范围 $r = 10^{-17} \sim 10^{7}\,(\mathrm{m})$
- 令 $k = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$（$\varepsilon_0$为真空介电常数）

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\,k} = 8.8542\times10^{-12}\,\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2} = 8.8542\times10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$$

【例 1】在氢原子内，电子和质子的间距为 5.3×10^{-11}m，求它们之间电相互作用和万有引力，并比较它们的大小。

解

$$m_\mathrm{e} = 9.1\times10^{-31}\,\mathrm{kg} \qquad e = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$m_\mathrm{p} = 1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg} \qquad G = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$$

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 8.1\times10^{-6}\,\mathrm{N}$$

$$F_\mathrm{g} = G\frac{m_\mathrm{e}m_\mathrm{p}}{r^2} = 3.7\times10^{-47}\,\mathrm{N}$$

$$\frac{F_\mathrm{e}}{F_\mathrm{g}} = 2.27\times10^{39}$$

（微观领域中,万有引力比库仑力小得多,可忽略不计.）

三、电场强度

1. 静电场

实验证实了两静止电荷间存在相互作用的静电力，

但其相互作用是怎样实现的？

电荷 $\xleftrightarrow{\text{电场}}$ 电荷

电场的基本性质是对处于场中的电荷有力的作用

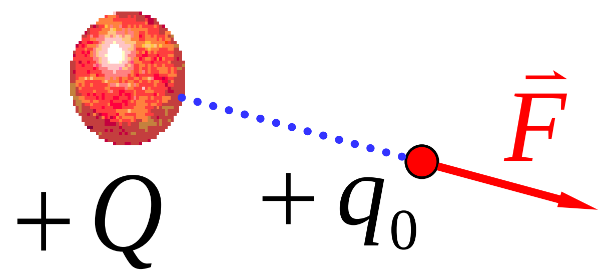
场是一种特殊形态的物质

场
实物
} 物质

2. 电场强度的定义

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

电场中某点处的电场强度 $\vec{E}$ 等于位于该点处的单位试验电荷所受的力，其方向为正电荷受力方向.



$\begin{cases} +Q：场源电荷 \\ +q_0：试验电荷 \end{cases}$

（试验电荷为点电荷、且足够小,故对原电场几乎无影响）

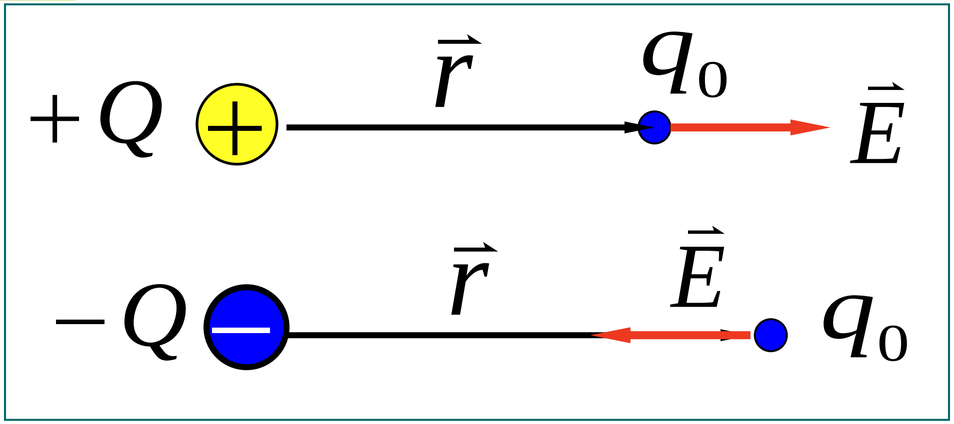
- 单位　$\mathrm{N\cdot C^{-1}}$　$\mathrm{V\cdot m^{-1}}$

- 电荷 q 在电场中受力

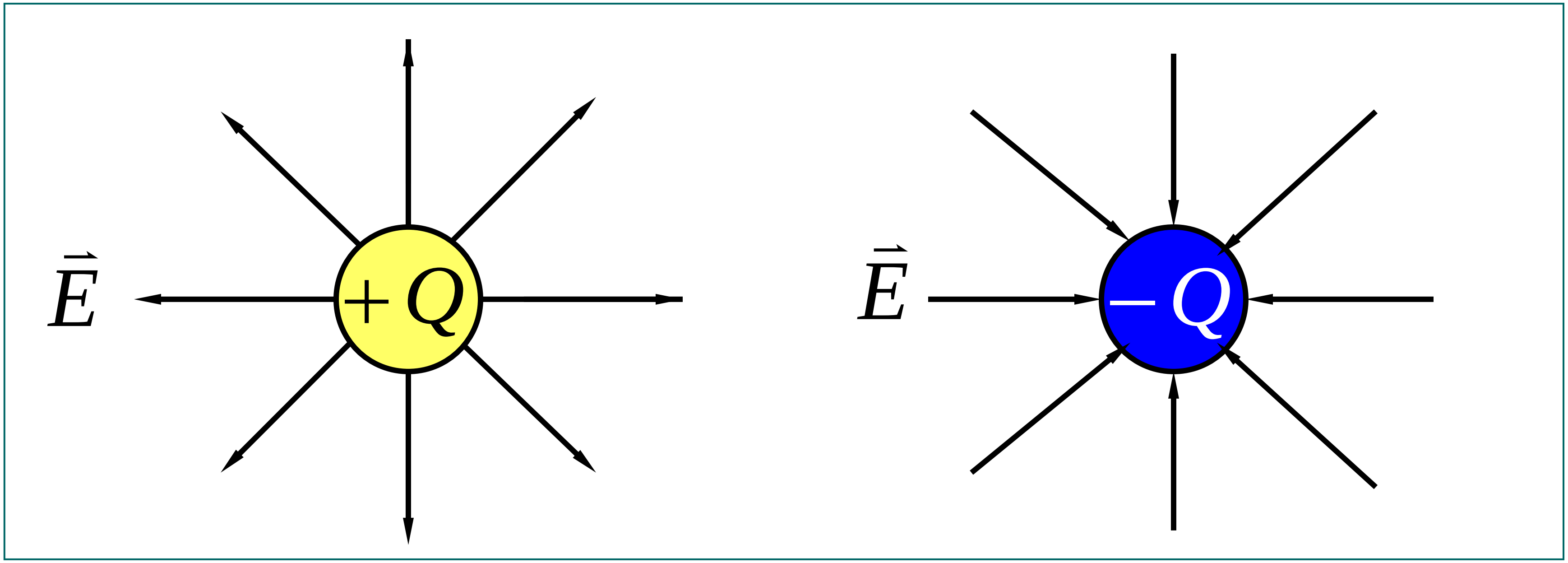
$$\vec{F}=q\vec{E}$$

3. 点电荷的电场强度

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r}$$

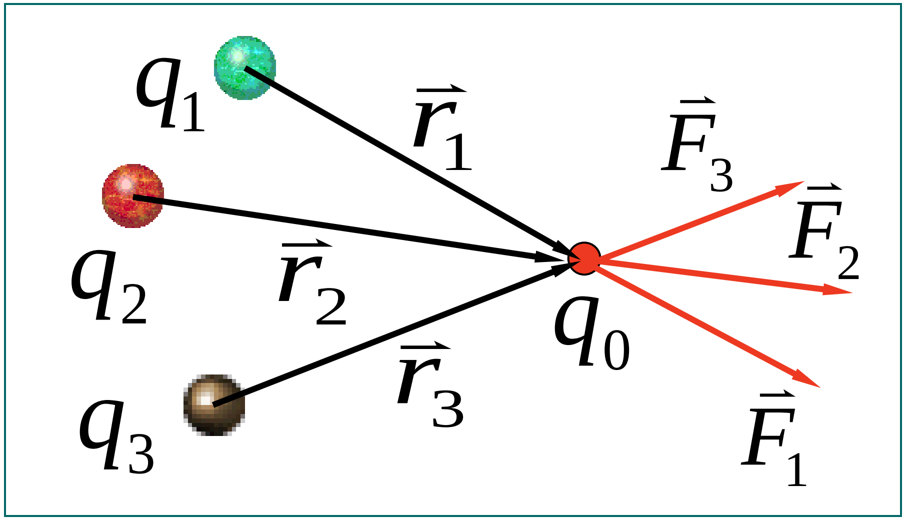


点电荷激发电场的总场强的与距离的平方成反比



$$r\to 0 \quad E\to\infty ?$$

4. 电场强度的叠加原理



点电荷 q_i 对 q_0 的作用力

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_0}{r_i^3}\vec{r}_i$$

由力的叠加原理得 q_0 所受合力： $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

故 q_0 处总电场强度：$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0} = \sum_i \dfrac{\vec{F}_i}{q_0}$

电场强度的叠加原理： $\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i}$

矢量和

5. 场强的计算

电荷非连续分布的带电体（点电荷系）

① 由 $\vec{E}_i = \dfrac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{e}_{ri}$ ， 求出第 i 个电荷在场点的场强

② 由 $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$， 求出点电荷系的总电场。

实际运算时应建立坐标 将 $\vec{E}_i \rightarrow \begin{cases} E_{ix} \rightarrow E_x = \sum E_{ix} \\ E_{iy} \rightarrow E_y = \sum E_{iy} \end{cases}$

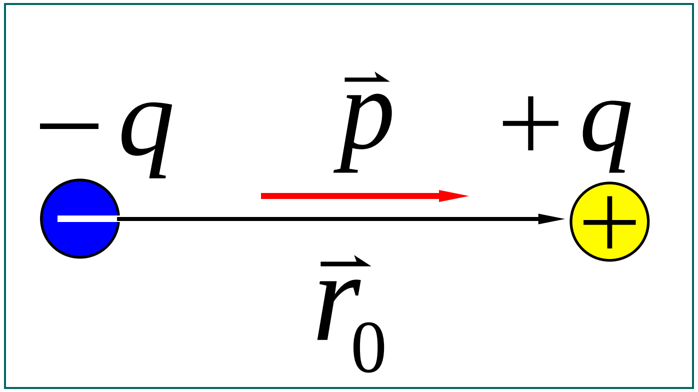
$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad tg\theta = \frac{E_y}{E_x}$$

【例 2】 电偶极子的电场强度

电偶极子：相距很近的等量异号电荷，满足 $x >> r_0$

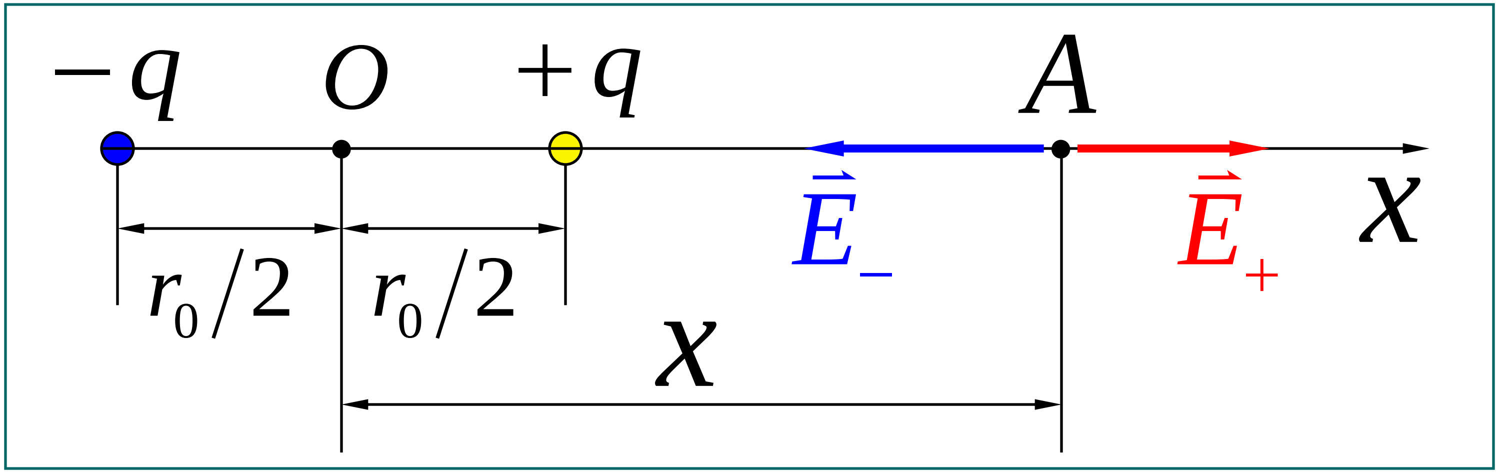
电偶极子的轴 $\vec{r}_0$

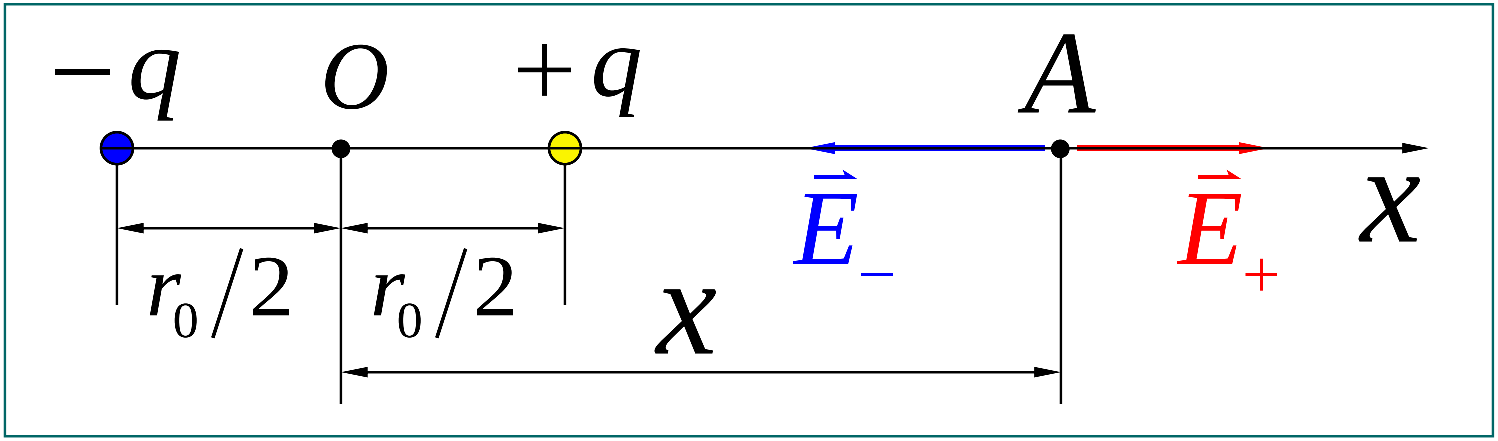
电偶极矩（电矩） $\vec{p} = q\vec{r}_0$



分析讨论

（1）电偶极子轴线延长线上一点的电场强度





确定两个点电荷的场强。

$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x-r_0/2)^2}\vec{i} \qquad \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x+r_0/2)^2}\vec{i}$$

电偶极子总场强。 $$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2xr_0}{(x^2-r_0^2/4)^2}\right]\vec{i}$$

$$x >> r_0 \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2r_0 q}{x^3}\vec{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{x^3}$$

电偶极子激发电场的总场强的与距离的立方成反比

（2）电偶极子轴线的中垂线上一点的电场强度

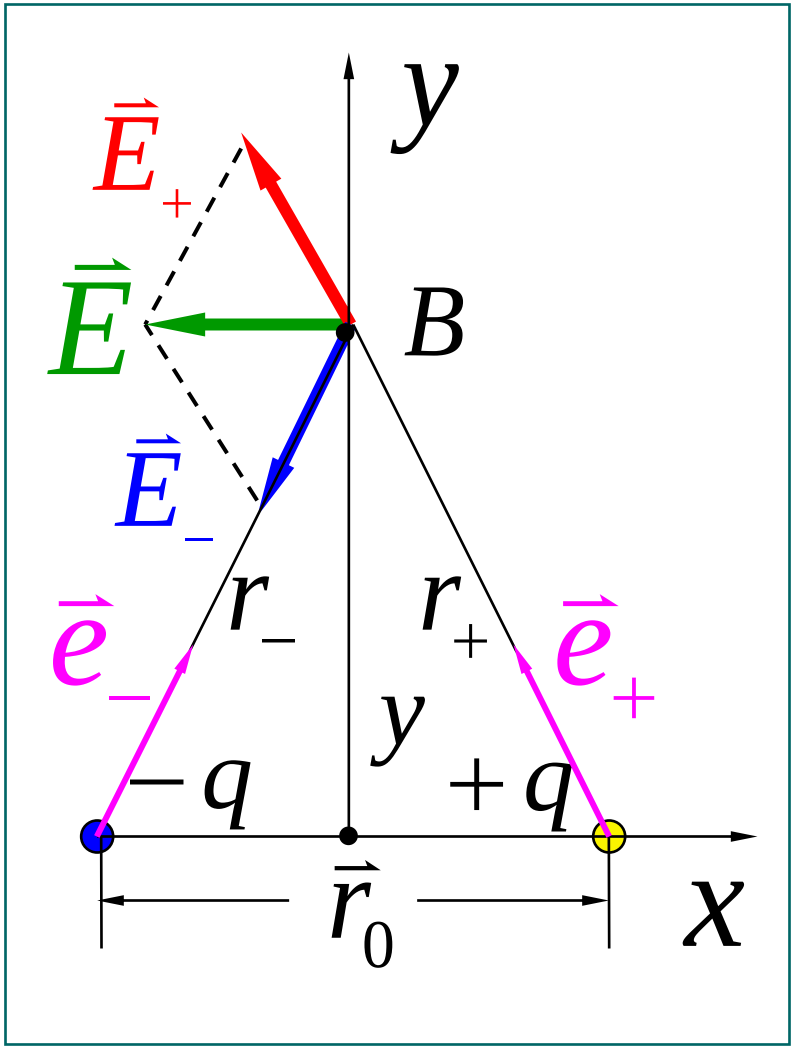
建立坐标系，确定矢量方向。

$$\begin{cases} \vec{e}_+ = (-r_0/2\vec{i} + y\vec{j})/r \\ \vec{e}_- = (r_0/2\vec{i} + y\vec{j})/r \end{cases}$$

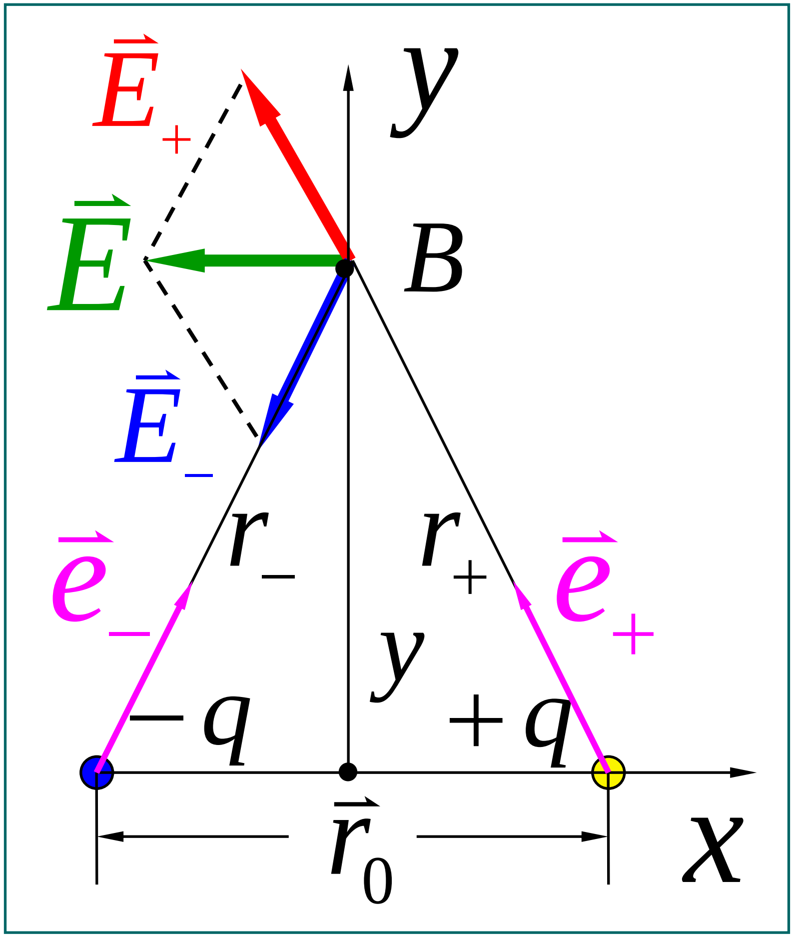
确定两个点电荷的场强。

$$\begin{cases} \vec{E}_+ = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_+^2}\vec{e}_+ \\ \vec{E}_- = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_-^2}\vec{e}_- \end{cases}$$

$$r_+ = r_- = r = \sqrt{y^2 + (\frac{r_0}{2})^2}$$



$$\begin{cases} \vec{E}_+ = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^3}(y\vec{j} - \dfrac{r_0}{2}\vec{i}) \\ \\ \vec{E}_- = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^3}(y\vec{j} + \dfrac{r_0}{2}\vec{i}) \end{cases}$$



电偶极子总场强。

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr_0\vec{i}}{r^3}$$

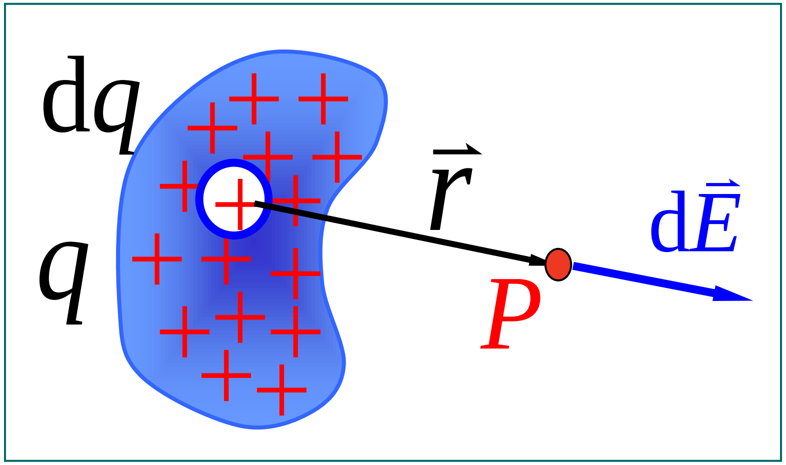
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr_0\vec{i}}{(y^2 + \frac{r_0^2}{4})^{3/2}}$$

$y >> r_0 \qquad \vec{E} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qr_0\vec{i}}{y^3} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}}{y^3}$

电偶极子激发电场的总场强的与距离的立方成反比

电荷连续分布的带电体

① 由 $\boxed{d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}\vec{e}_r}$



② 由 $\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2}\vec{e}_r$

一般来说 $\boxed{\int d\vec{E} \neq \int dE}$

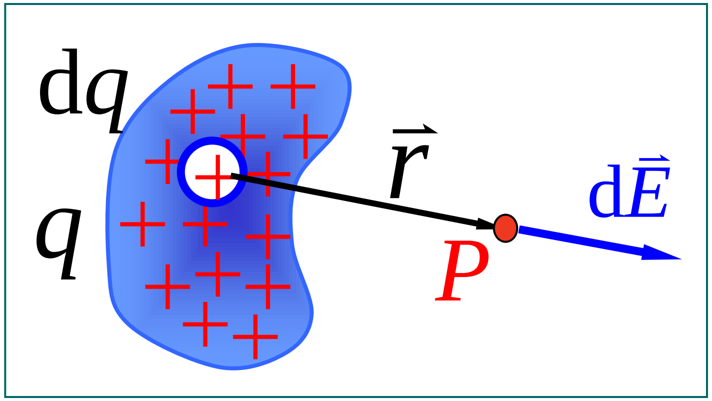
实际运算时应建立坐标

将 $d\vec{E} \to \begin{cases} dE_x \to \boxed{E_x = \int dE_x} \\ dE_y \to \boxed{E_y = \int dE_y} \end{cases}$

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad tg\theta = \frac{E_y}{E_x}$$

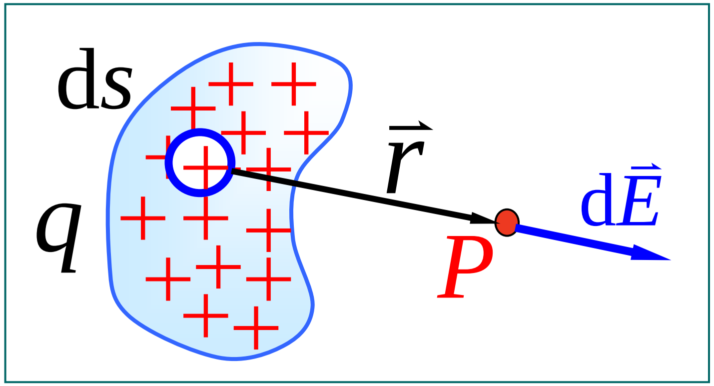
电荷体密度

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$$



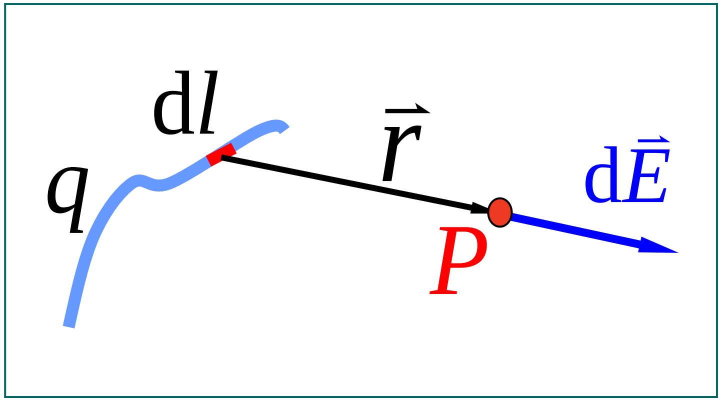
电荷面密度

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$$



电荷线密度

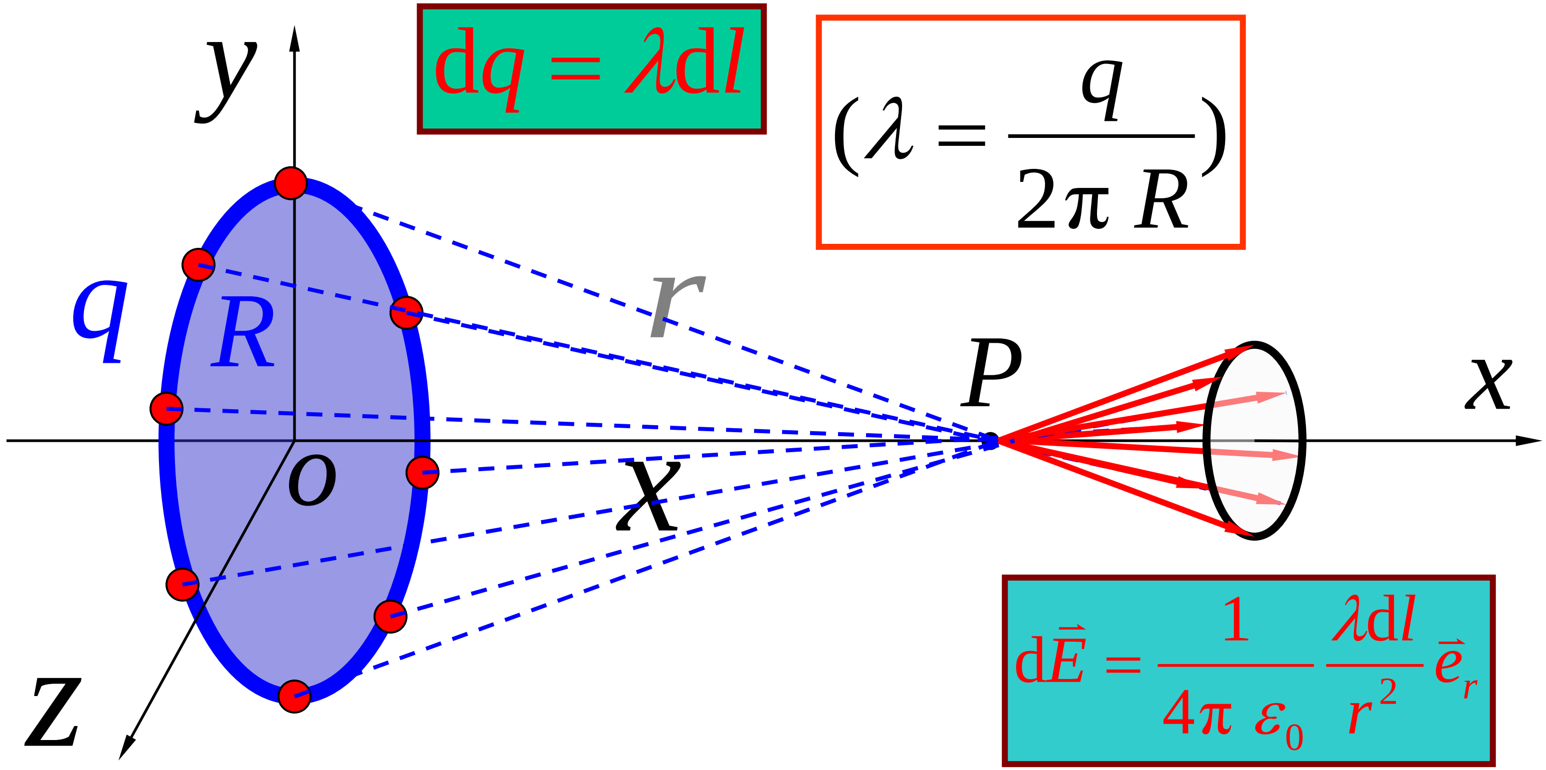
$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$$



先微分后积分，先分解后合成

【例 2】正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的圆环上.计算在环的轴线上任一点 P 的电场强度.

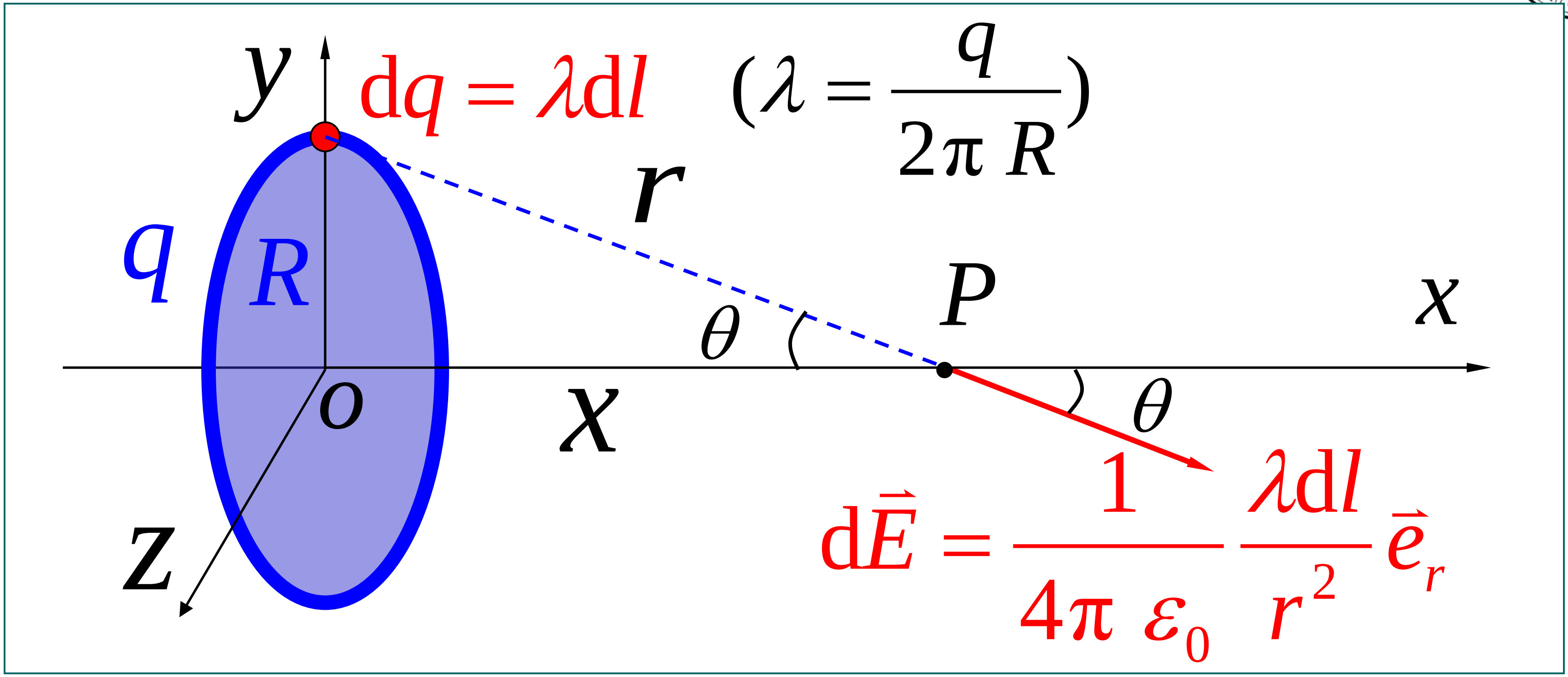
解 $\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}$ $\boxed{\int \mathrm{d}\vec{E} \neq \int \mathrm{d}E}$ 由对称性有 $\vec{E}=E_x \vec{i}$



$$\mathrm{d}q=\lambda \mathrm{d}l$$

$$\left(\lambda=\frac{q}{2\pi R}\right)$$

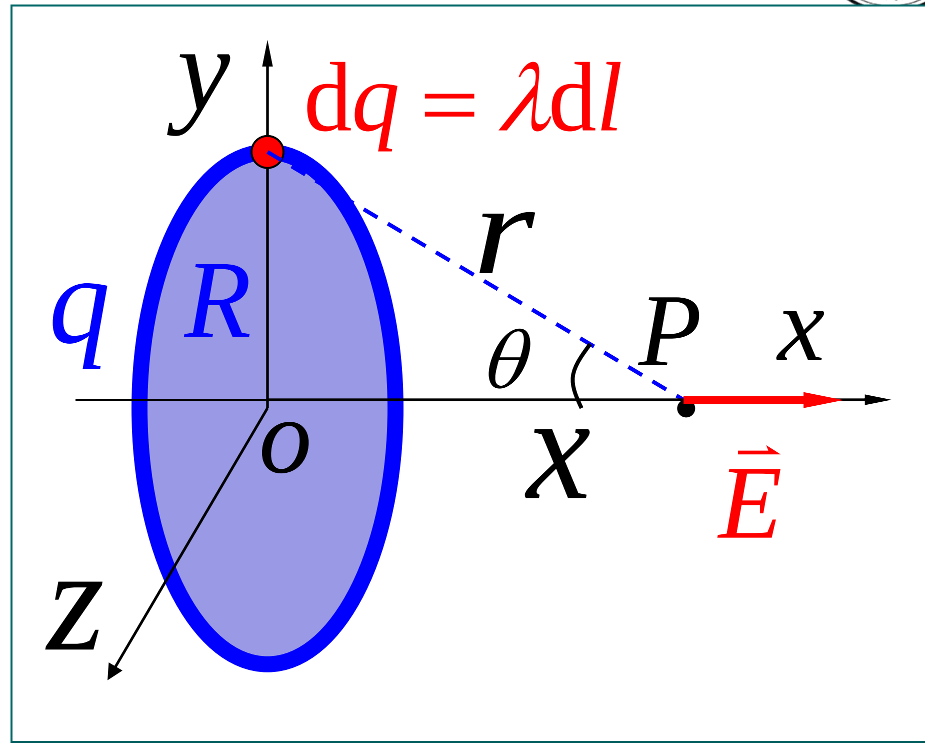
$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2}\vec{e}_r$$



$$\boxed{E = \int_l dE_x = \int_l dE\cos\theta} = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{x}{r}$$

$$= \int_0^{2\pi R}\frac{x\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$E=\frac{qx}{4\pi\,\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$



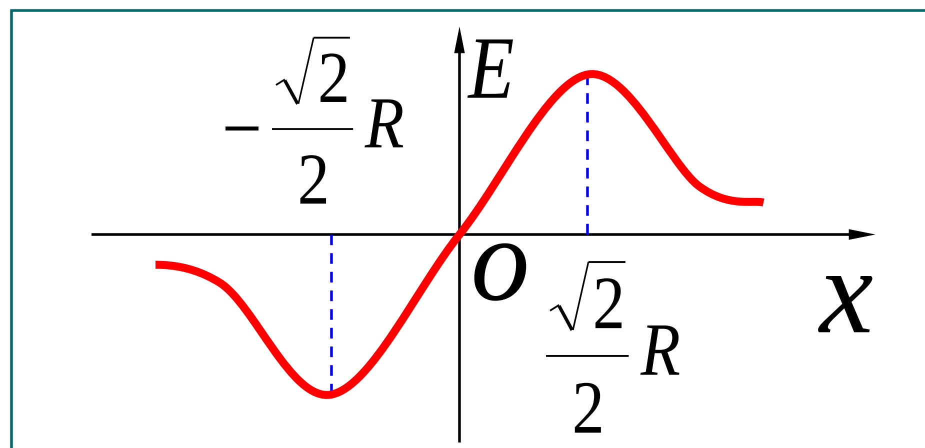
讨论

（1） $x>>R$ $\quad E\approx\dfrac{q}{4\pi\,\varepsilon_0x^2}$

（点电荷电场强度）

（2） $x\approx 0,\quad E_0\approx 0$

（3） $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=0,\quad x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$



【例 3】均匀带电薄圆盘轴线上的电场强度.

有一半径为 R_0，**电荷均匀分布**的薄圆盘，其电荷面密度为 σ． 求通过**盘心且垂直盘面的轴线上**任意一点处的电场强度.

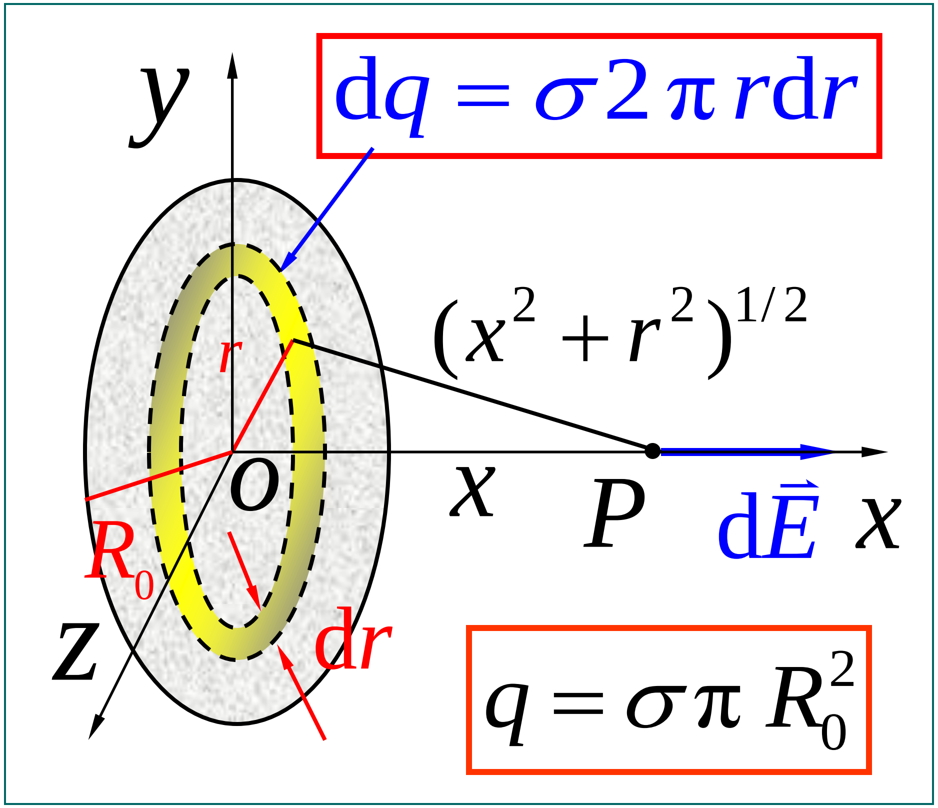
解：取"微环"

对称性

$$E=\frac{\boxed{q}\,x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}E_x=\frac{\boxed{\mathrm{d}q}\cdot x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x r\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

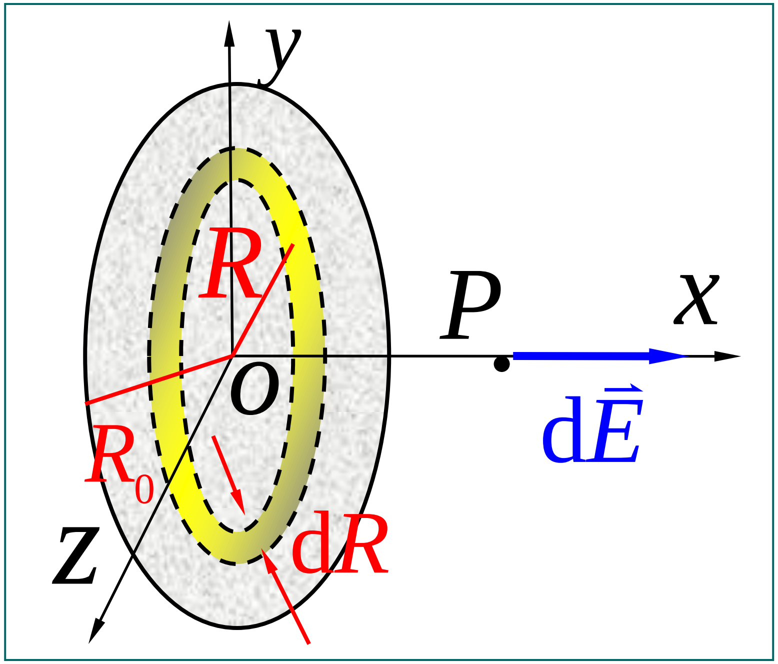


$$\mathrm{d}E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{xr\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E = \int \mathrm{d}E_x$$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^{R_0}\frac{r\mathrm{d}r}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R_0^2}}\right)}$$



讨 论

$$\begin{cases} x \ll R_0 & E \approx \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ x \gg R_0 & E \approx \dfrac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 x^2} \end{cases}$$

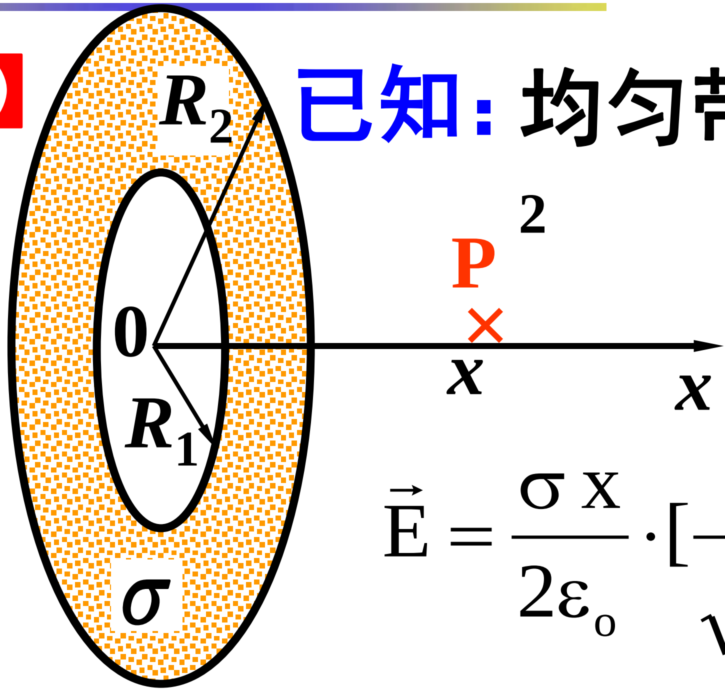
无限大均匀带电平面的电场强度

点电荷电场强度

$$\left[(1+\frac{R_0^2}{x^2})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{R_0^2}{x^2} + \cdots\right]$$

【例 4】 **已知：** 均匀带电环面，σ，R_1，R_2

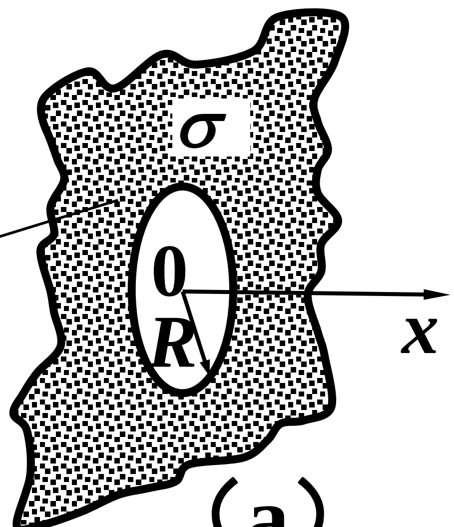
求： 轴线上的场强 $\vec{E}$



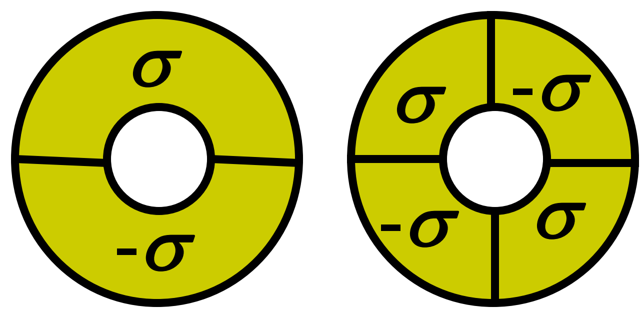
$$\vec{E}=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_o}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right]\cdot\vec{i}$$

（a）x轴上$E=?$　（b）$x>>$电荷线度处，E有何特点？

挖一圆孔的无限大均匀带电平面

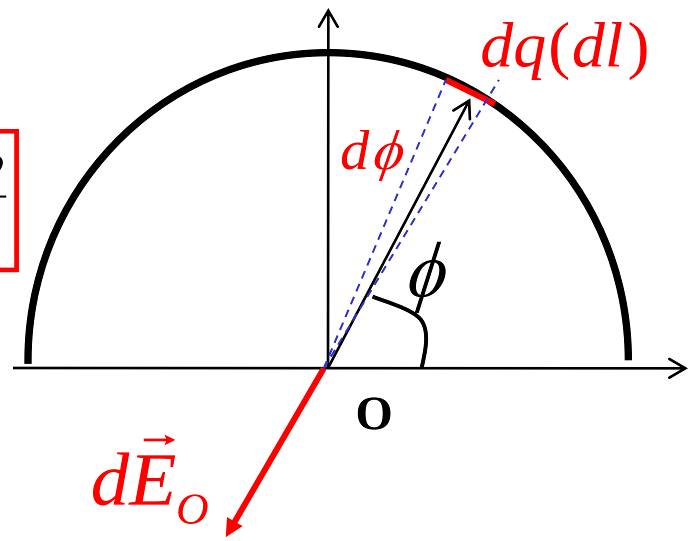


（a）



（b）

【例 5】有一半径为 R，电荷均匀分布的半圆，其电荷面密度为 $\boxed{\lambda=\lambda_0\sin\phi,\phi}$ 为半径为 R 与X轴之间的夹角，求半圆中心点处的电场强度.



解：dq：$\quad dE_O=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0R^2}$

$dq=\lambda dl=\lambda_0\sin\phi Rd\phi$

$$\boxed{dE_O=\frac{\lambda_0\sin\phi d\phi}{4\pi\varepsilon_0R}}$$

$$dE_{ox}=-dE_O\cos\phi,\qquad dE_{oy}=-dE_O\sin\phi$$

$$E_x=-\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0R}\int_0^\pi\sin\phi\cos\phi d\phi=0$$

$$E_y=-\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0R}\int_0^\pi\sin^2\phi d\phi=\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0R}$$

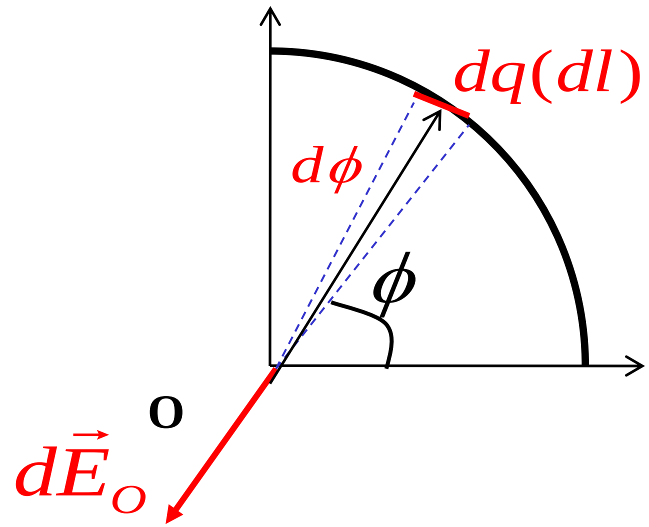
$$\boxed{\therefore\vec{E}_0=-\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0R}\vec{j}}$$

【例 6】有一半径为 R，电荷均匀分布的四分之一圆弧，其电荷面密度为 λ_0. 求圆弧中心点处的电场强度.

解：dq： $dE_O = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

$dq = \lambda dl = \lambda_0 R d\phi$

$$\boxed{dE_O = \frac{\lambda_0 d\phi}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$



$$dE_{ox} = -dE_O \cos\phi, \qquad dE_{oy} = -dE_O \sin\phi$$

$$E_{\pi/4} = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2} \cos\phi d\phi = -\frac{\sqrt{2}\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E_y = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2} \sin\phi d\phi = -\frac{\sqrt{2}\lambda_0}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

【例 7】有一均匀带电直线，单位长度上的电量为 λ，求离直线的距离为 a 的 P 点处的场强。

解：取微元

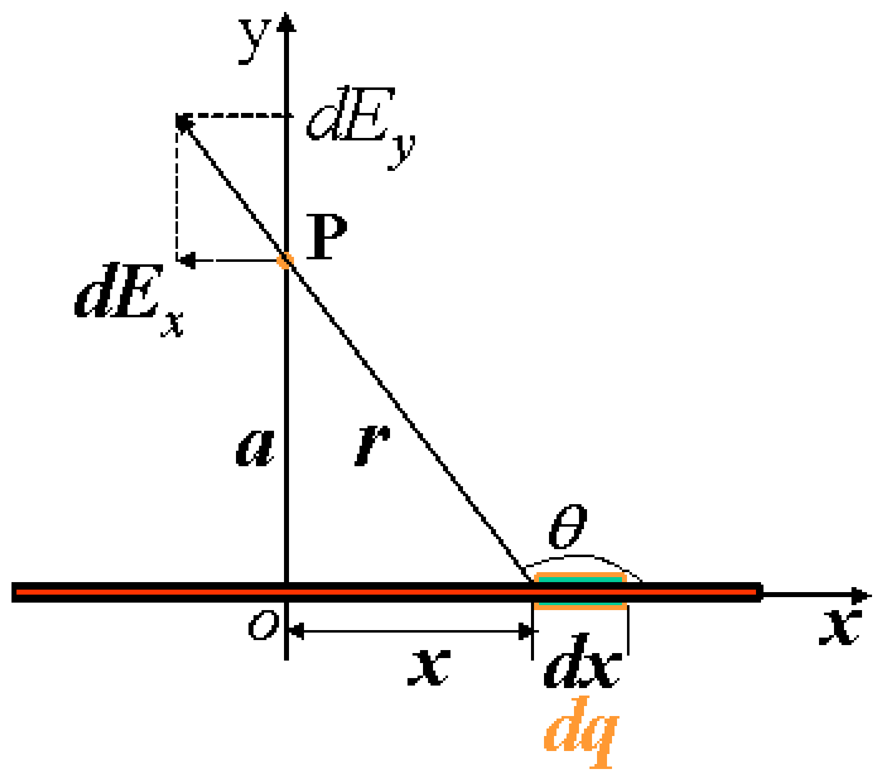
$$\boxed{dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o r^2}}$$

$$dE_x = dE\cos\theta$$

$$dE_y = dE\sin\theta$$

$$E_x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$E_y = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o r^2}\sin\theta$$



统一变量再积分

$$r = a/\sin\theta$$

$$E_x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

$$x = -actg\,\theta$$

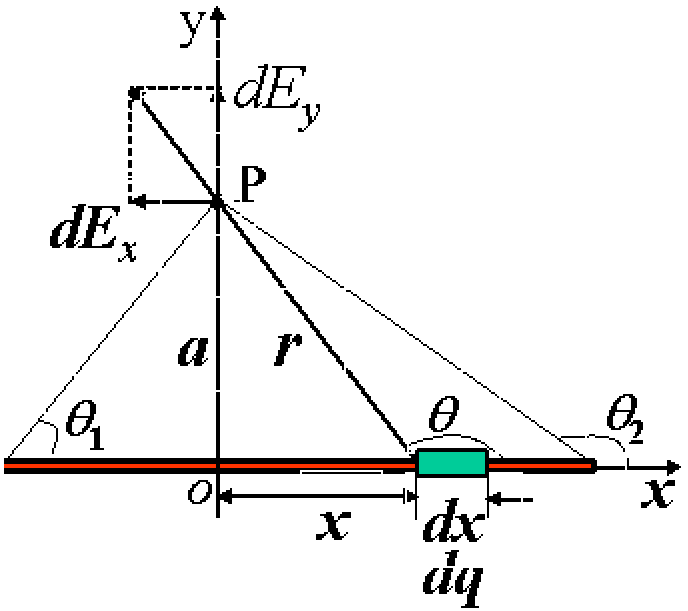
$$dx = a d\theta/\sin^2\theta$$

$$E_y = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o r^2}\sin\theta$$

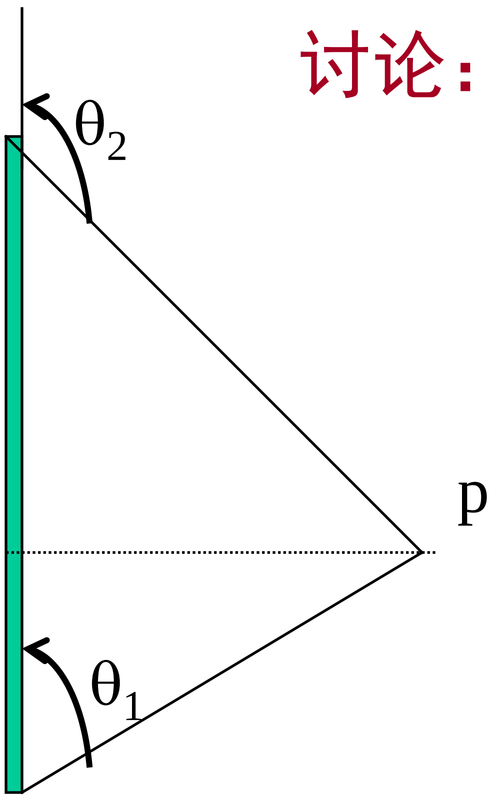
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



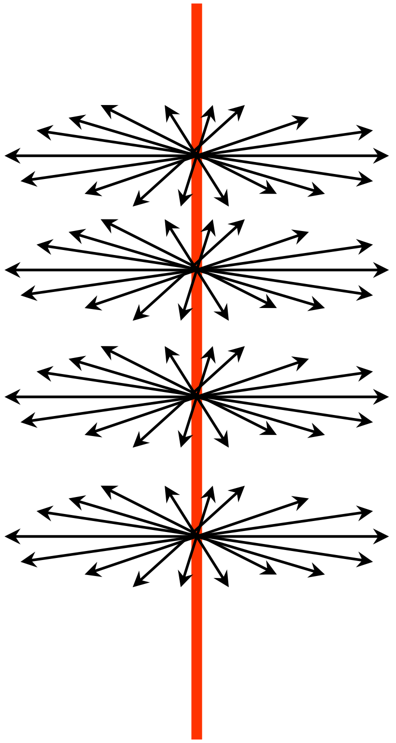
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



讨论：若为无限长带电直线，

则 $\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \pi$

$$E = E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$



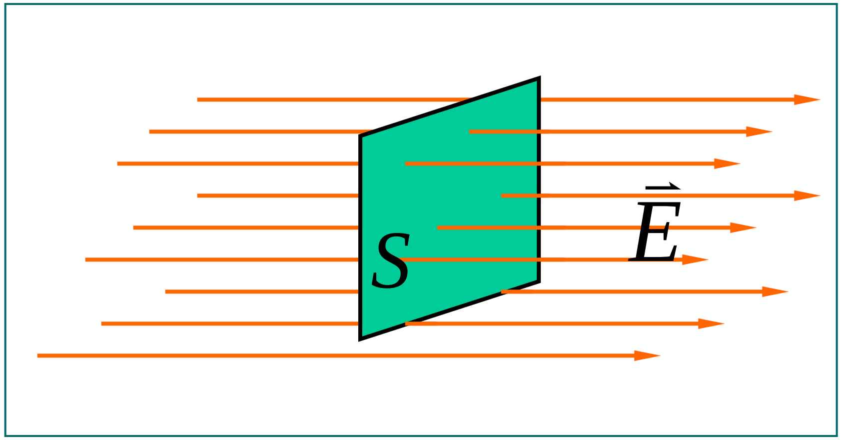
§8.2 静电场的高斯定理

一　电场线　（电场的图示法）

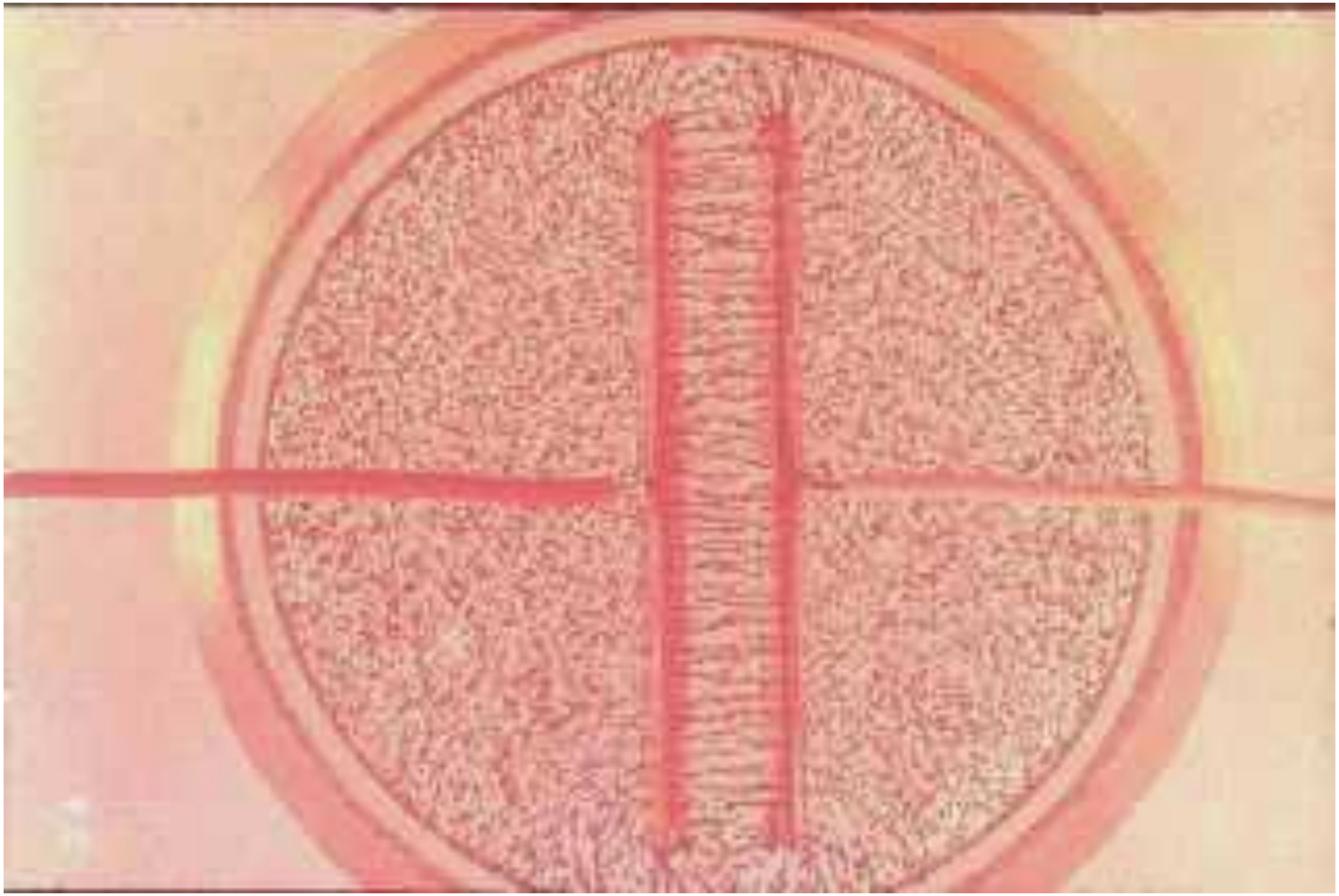
规　定

1） 曲线上每一点切线方向为该点电场方向,

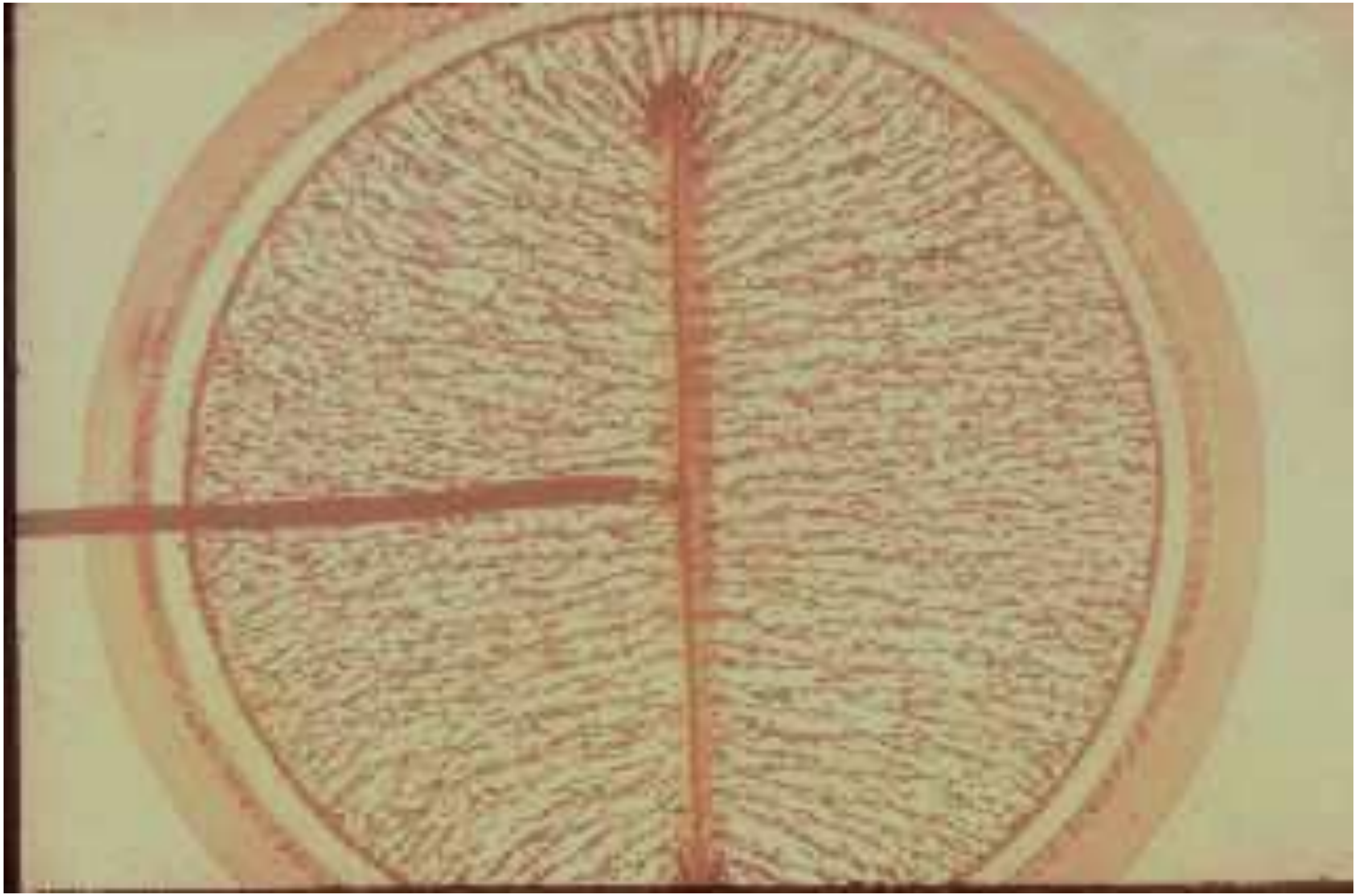
2） 通过垂直于电场方向单位面积电场线数为该点电场强度的大小. $\left|\vec{E}\right| = E = \mathrm{d}N / \mathrm{d}S$



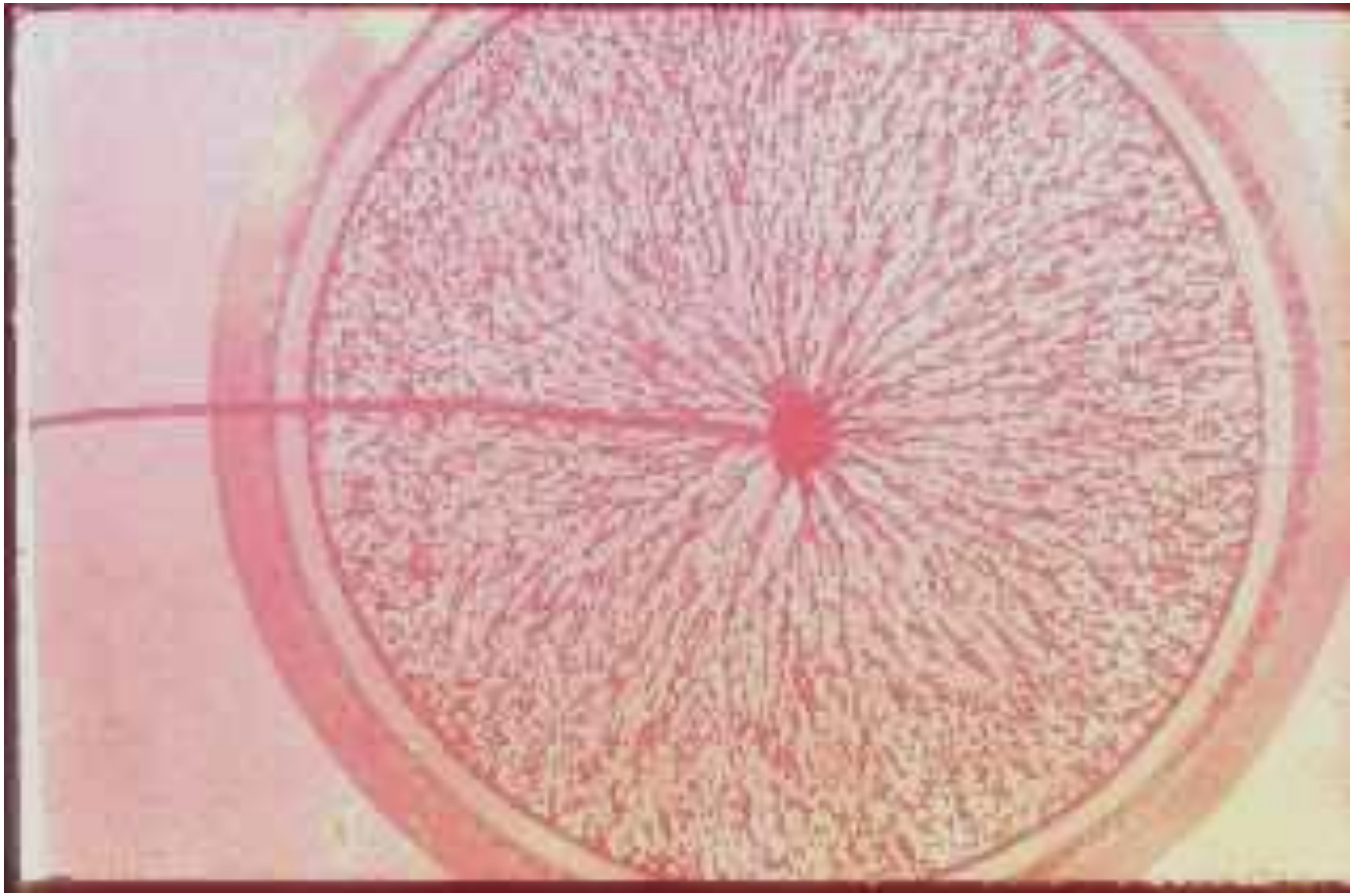
真空中静电场（Electrostatic Field in Vacuum）



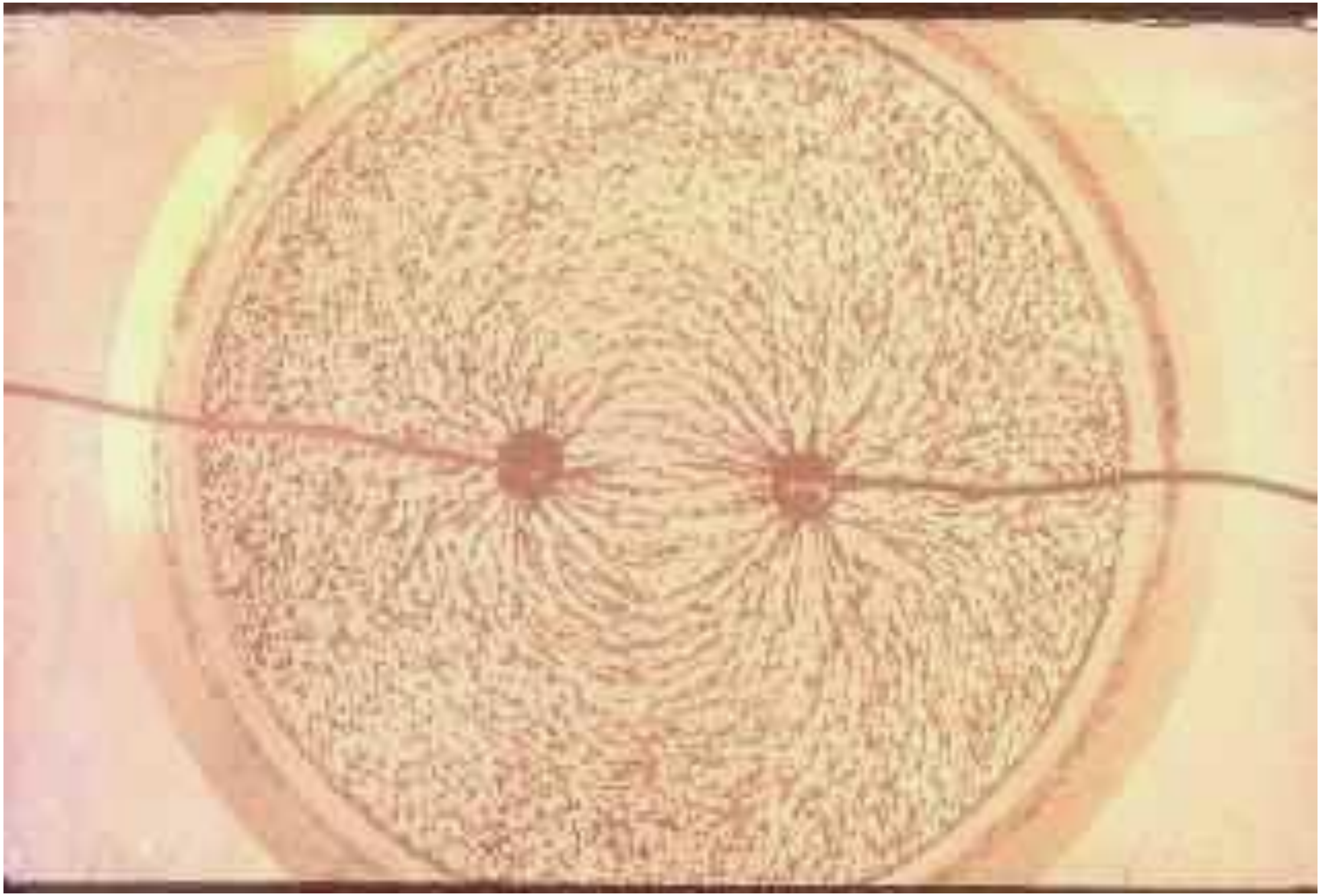
分 别 带 正 负 电 的 平 行 平 板 电 极



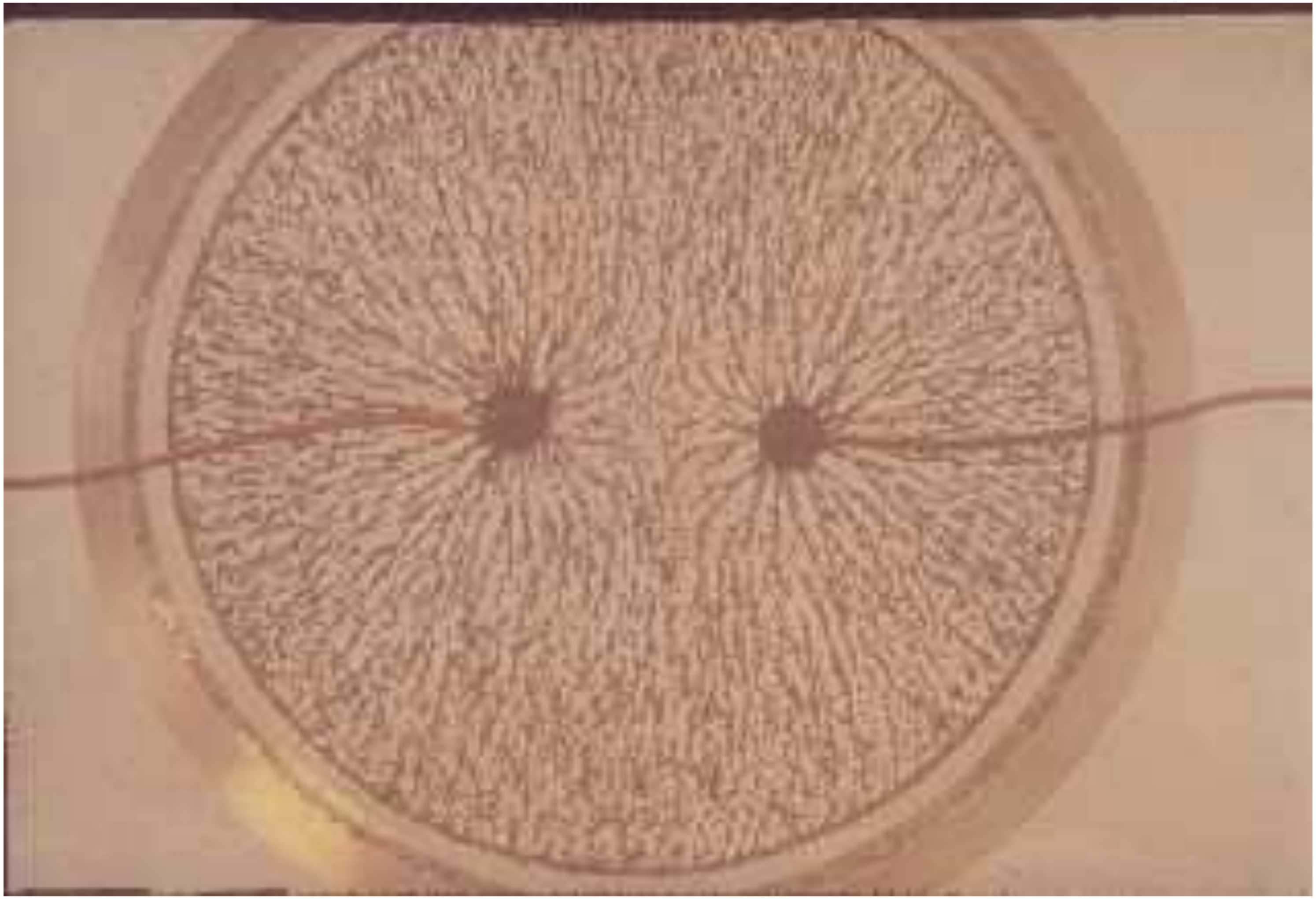
单 个 带 电 平 板 电 极



单个点 电 极

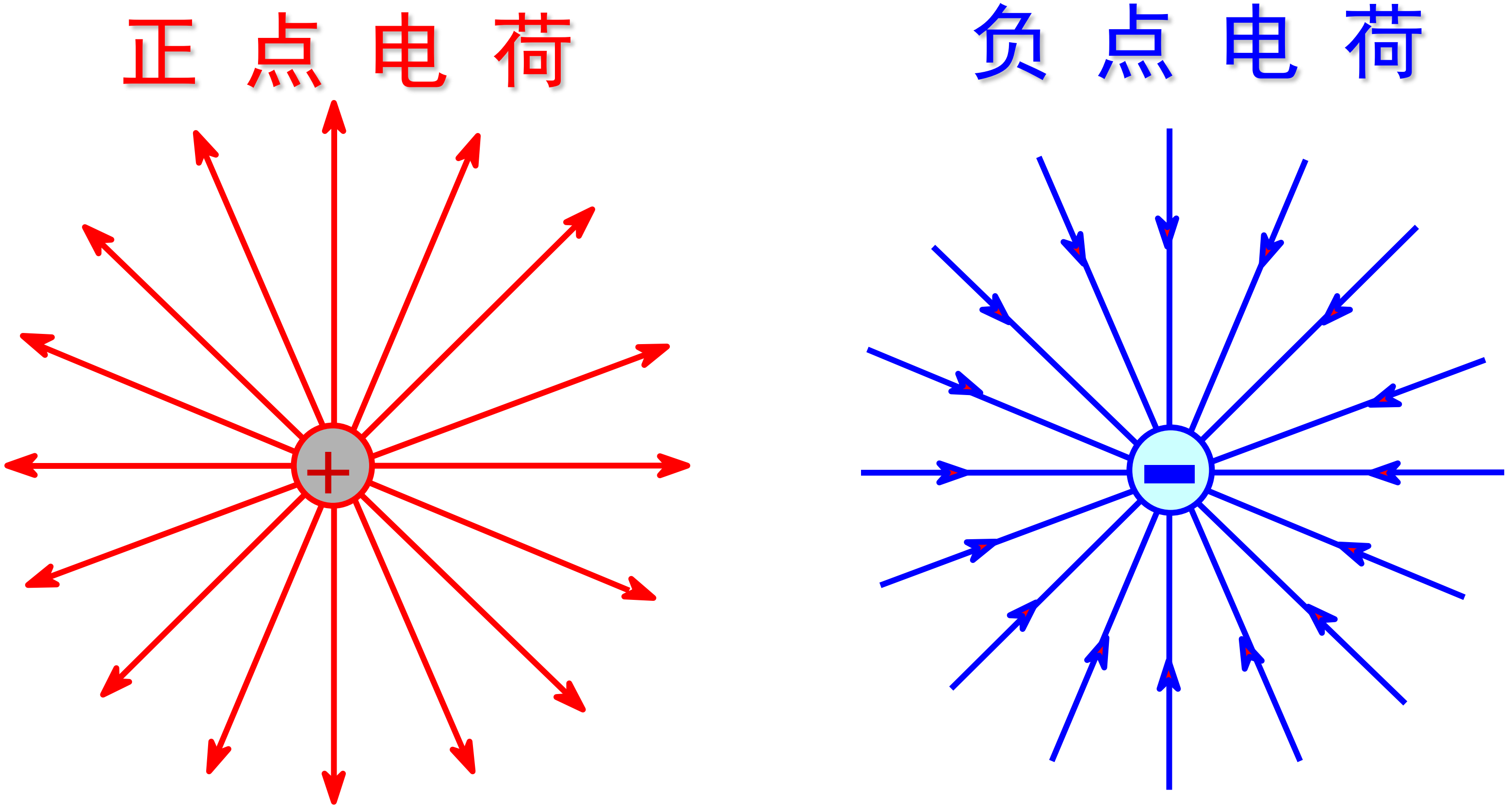


正 负 点 电 极

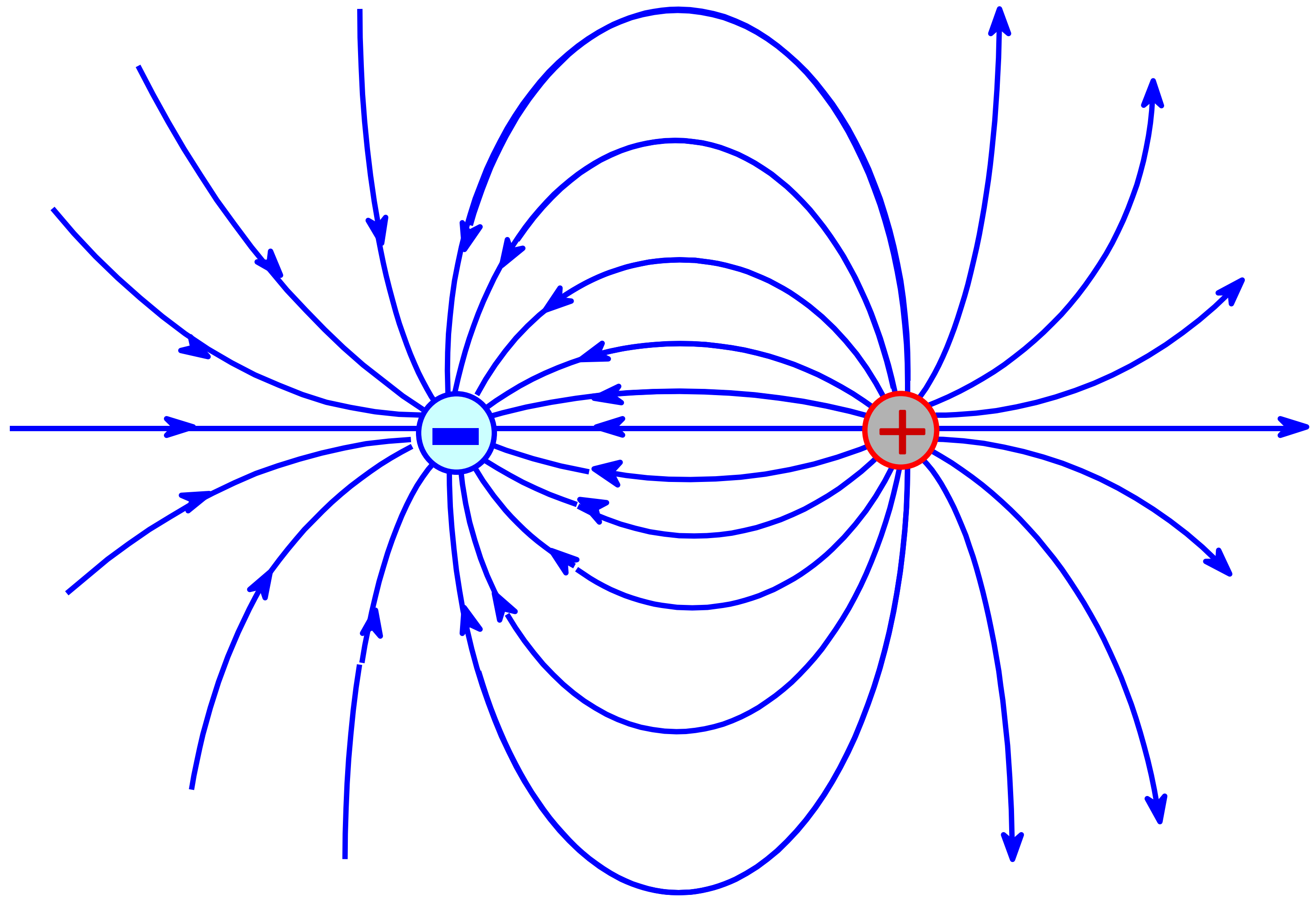


两 个 同 号 的 点 电 极

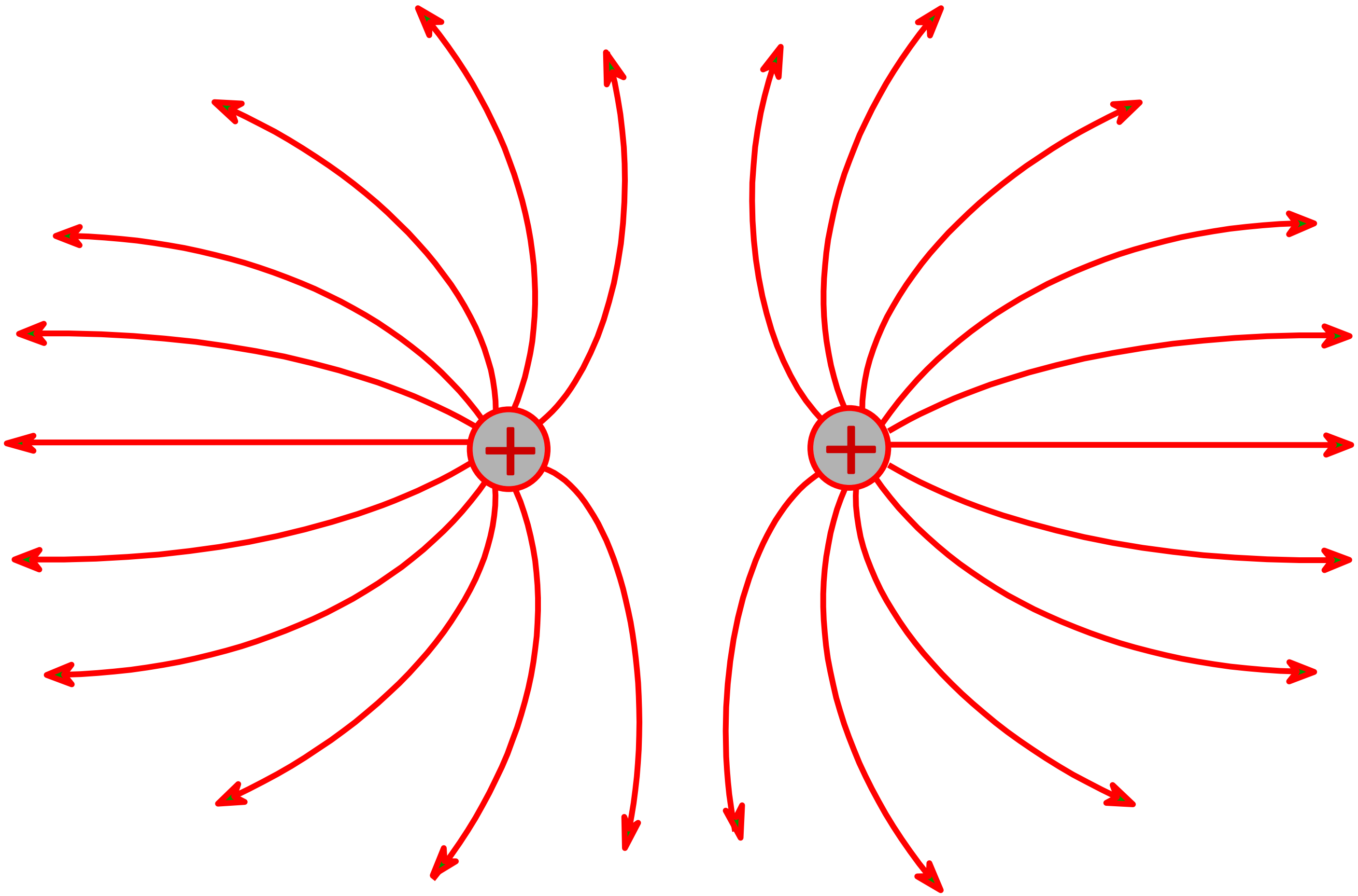
点电荷的电场线



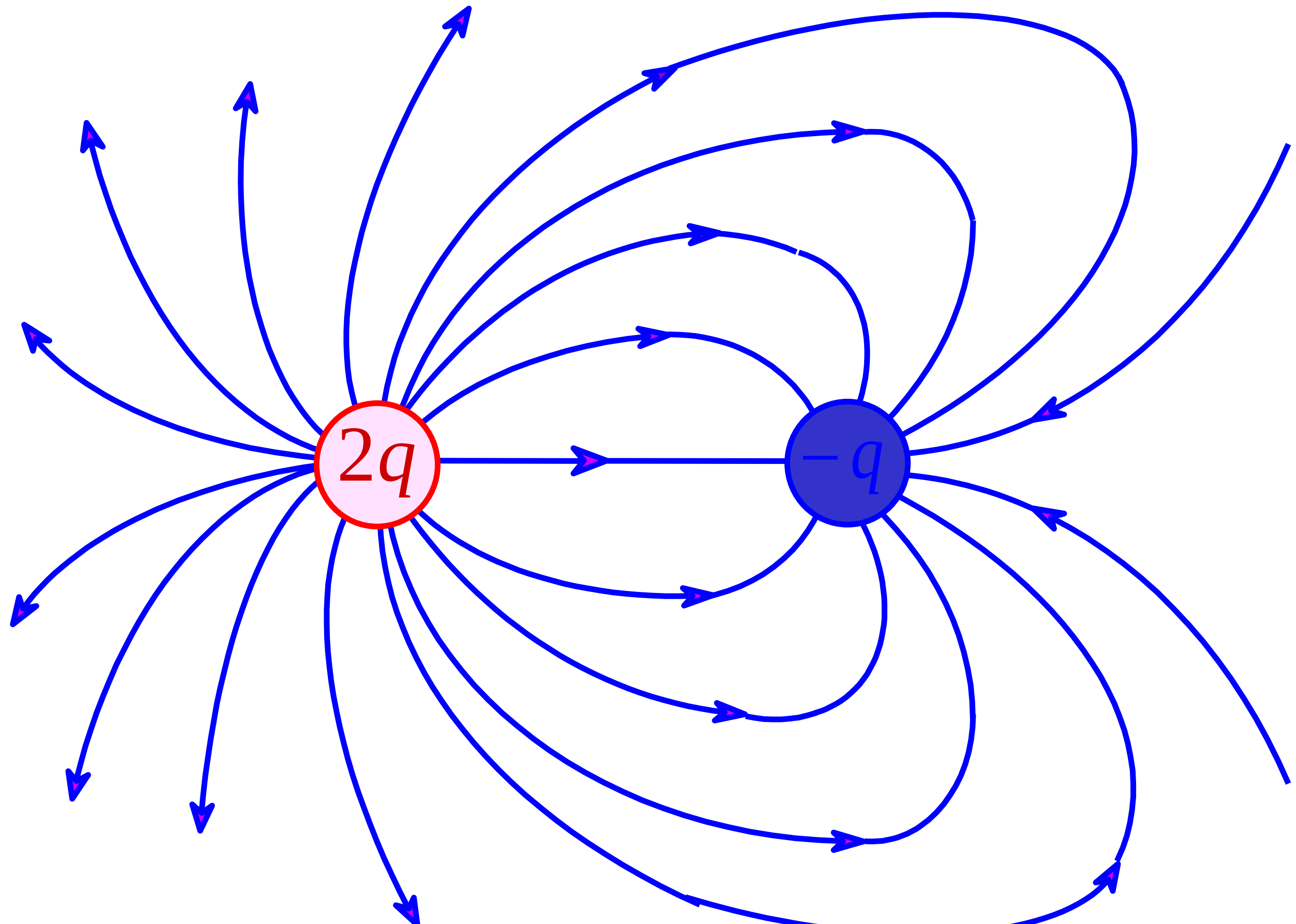
一对等量异号点电荷的电场线



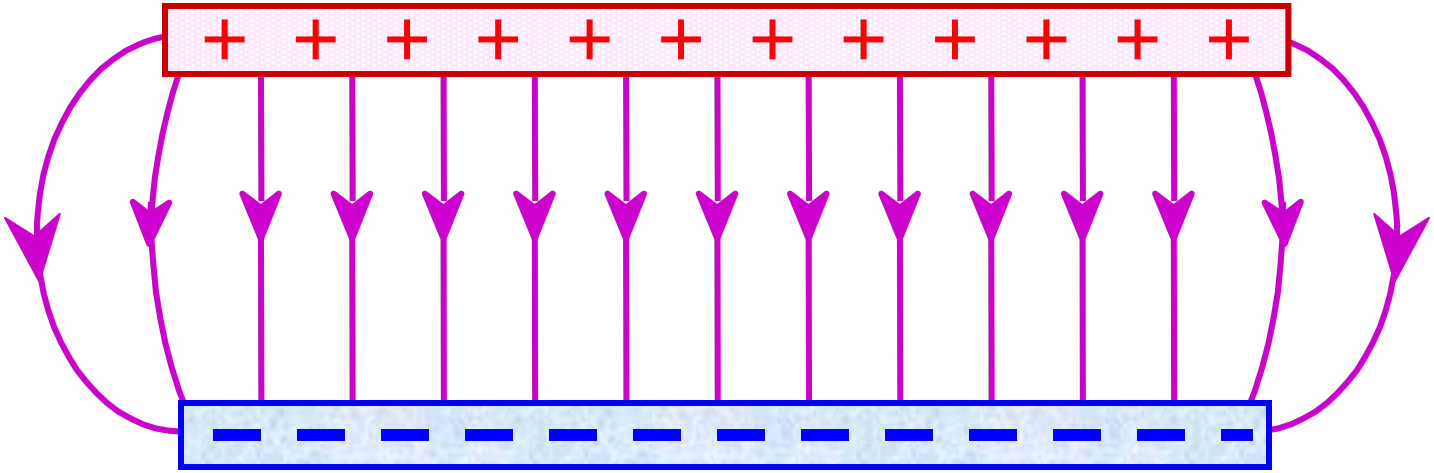
一对等量正点电荷的电场线



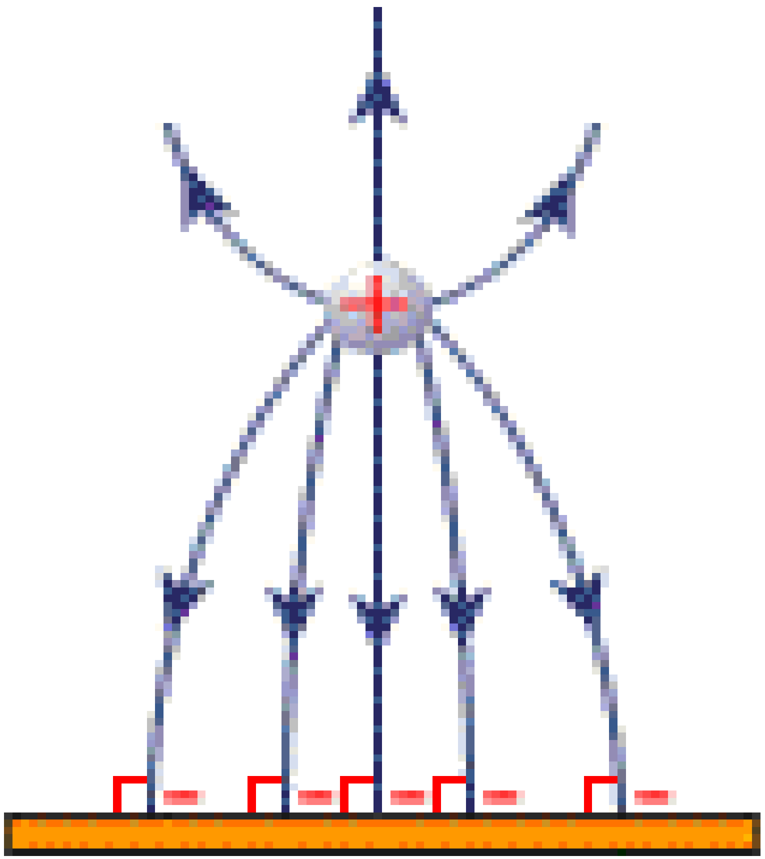
一对不等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



真空中静电场（Electrostatic Field in Vacuum）



点电荷与带电平板所形成的电场。

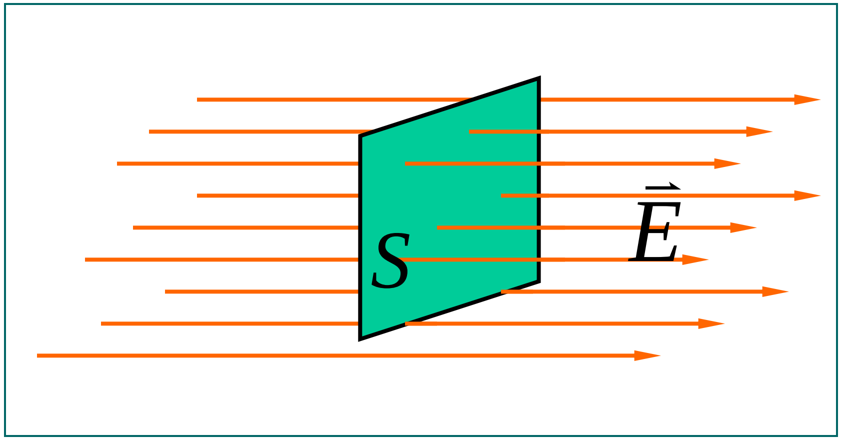
电场线特性

1） 始于正电荷, 止于负电荷(或来自无穷远, 去向无穷远), 电场线不闭合.

2） 空间中任意两条电场线不相交.

二　电场强度通量

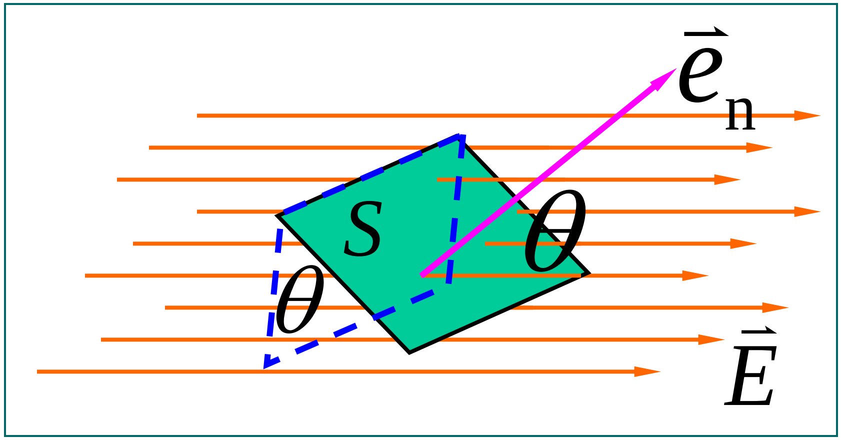
通过电场中某一个面的电场线数叫做通过这个面的电场强度通量



- 均匀电场，$\vec{E}$ 垂直平面

$$\Phi_{\mathrm{e}} = ES$$

- 均匀电场，$\vec{E}$ 与平面夹角 θ



$$\Phi_{\mathrm{e}} = ES\cos\theta$$

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E}\cdot\vec{S}} \qquad \vec{S} = S\vec{e}_n$$

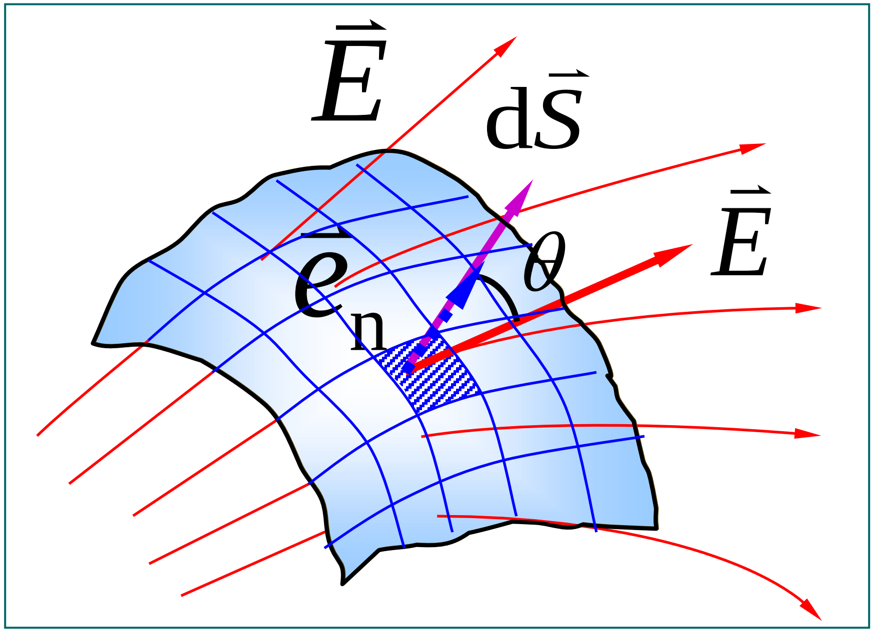
◆ 非均匀电场强度电通量

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \int \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S E\cos\theta \mathrm{d}S$$

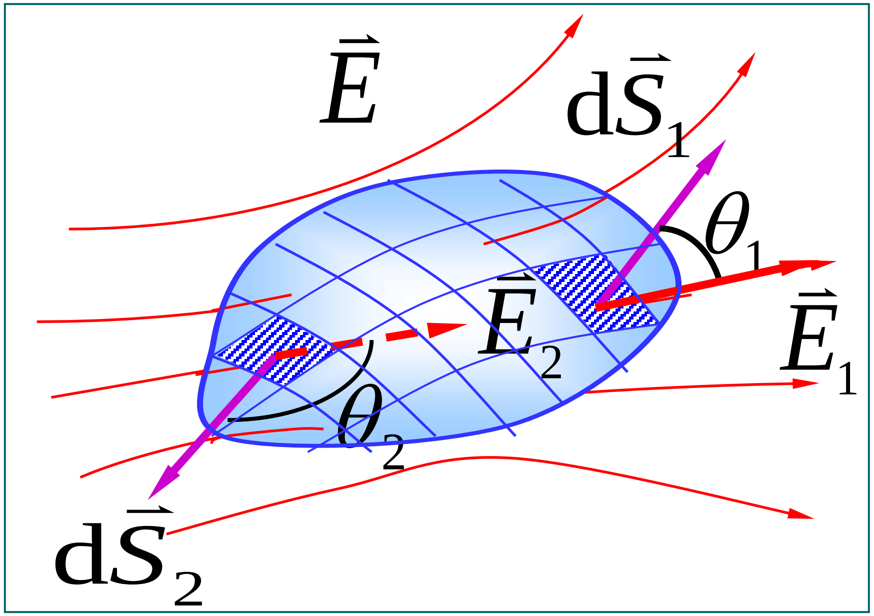
$$\boxed{\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$



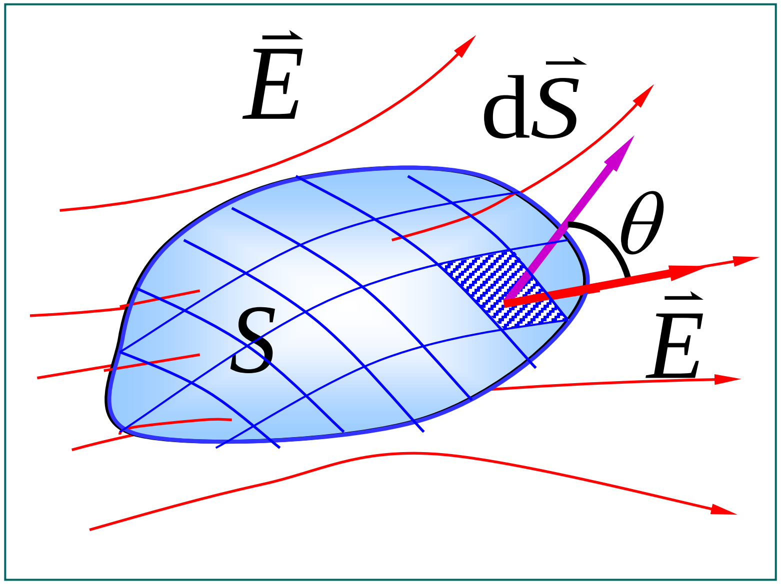
◆ S 为封闭曲面

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}1} > 0$$

$$\theta_2 > \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}2} < 0$$



◆ 闭合曲面的电场强度通量



$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\cos\theta\mathrm{d}S$$

对于一个**闭合曲 面**：

若 $\boxed{\phi_e > 0}$ 正通量表示穿出大于穿入（净穿出）

若 $\boxed{\phi_e < 0}$ 负通量表示穿入大于穿出（净穿入）

若 $\boxed{\phi_e = 0}$ 表示穿入等于穿出或无电场线穿过曲面

三 高斯定理

在真空中，通过任一闭合曲面的电场强度通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ε_0.

（与面外电荷无关，闭合曲面称为高斯面）

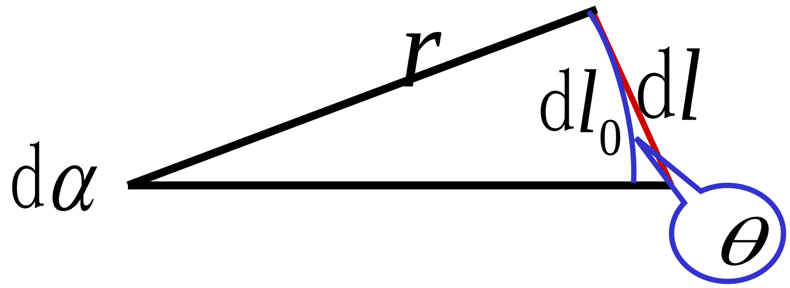
$$\Phi_{\mathrm{e}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \boxed{\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1(\text{面内})}^{n} q_i}$$

请思考：1）高斯面上的 $\vec{E}$ 与那些电荷有关 ？

2）哪些电荷对闭合曲面 S的 Φ_{e}有贡献 ？

1.立体角的概念

1) 平面角 由一点发出的两条射线之间的夹角，记做 $\mathrm{d}\alpha$



设射线长为 r，线段元 $\mathrm{d}l$ 对某点所张的平面角：

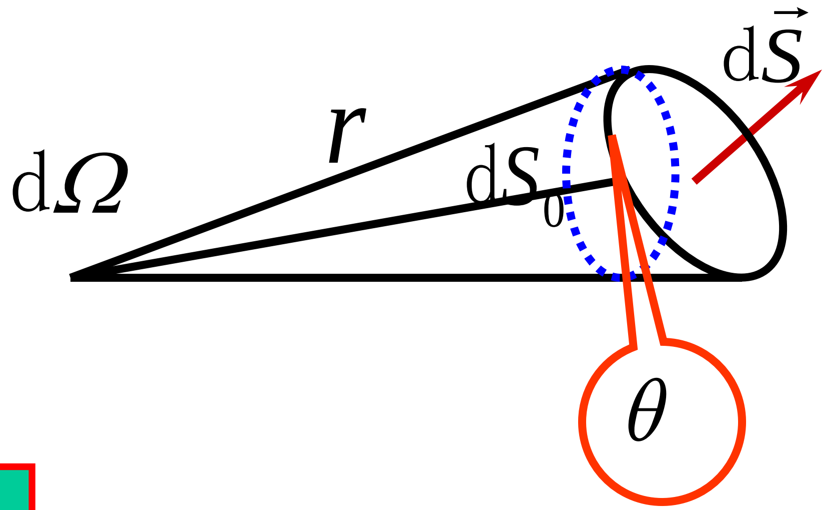
$$\boxed{\mathrm{d}\alpha=\frac{\mathrm{d}l_0}{r}=\frac{\mathrm{d}l}{r}\cos\theta}$$

单位：弧度

$\mathrm{d}l_0$ 是以 r 为半径的圆弧，θ 是线段元 $\mathrm{d}l$ 与 $\mathrm{d}l_0$ 之间的夹角

2) 立体角

面元 dS 对某点所张的角叫做立体角，即锥体的“顶角”



对比平面角有，定义式:

$$\boxed{\mathrm{d}\Omega=\frac{\mathrm{d}S_0}{r^2}}\boxed{=\frac{\mathrm{d}S}{r^2}\cos\theta}$$

单位：球面度

dS_0 是以 r 为半径的圆锥对应的球面元

θ 是面元 dS 与球面元 dS_0 间的夹角

闭合平面曲线对曲线内一点所张的平面角

$$\alpha = \oint_l \mathrm{d}\alpha = \oint_l \frac{\mathrm{d}l}{r}\cos\theta = \oint_{l_0} \frac{\mathrm{d}l_0}{r} = 2\pi \quad \boxed{\text{弧度}}$$

闭合曲面对面内一点所张的立体角

$$\Omega = \oint_S \mathrm{d}\Omega = \oint_S \frac{\mathrm{d}S_0}{r^2} = 4\pi \quad \boxed{\text{球面度}}$$

高斯定理的导出 { 库仑定律 / 电场强度叠加原理 } ⇒ 高斯定理

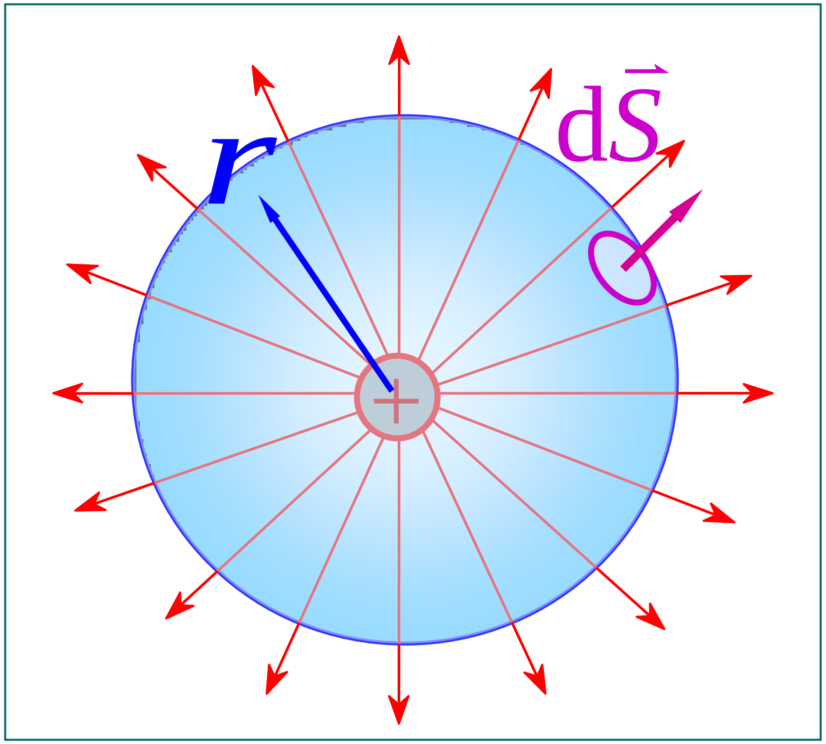
1. 点电荷位于球面中心

$$\boxed{E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS$$

点电荷激发场强的通量

$$\boxed{\Phi_e=\frac{q}{\varepsilon_0}}$$



2. 点电荷在任意封闭曲面内

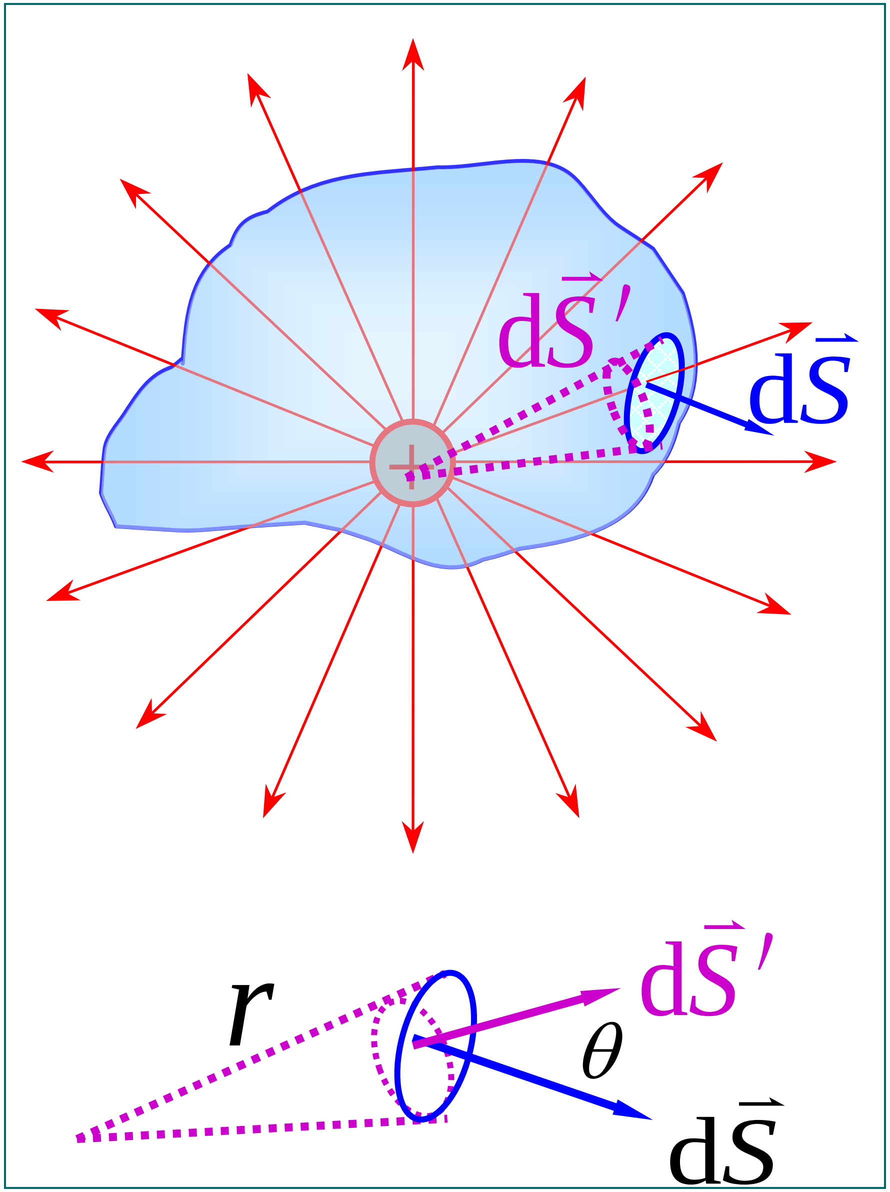
$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S'}{r^2}$$

其中立体角 $\dfrac{\mathrm{d}S'}{r^2} = \mathrm{d}\Omega$

点电荷激发场强的通量

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{e}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint \mathrm{d}\Omega} \boxed{= \frac{q}{\varepsilon_0}}$$



3. 点电荷在封闭曲面之外

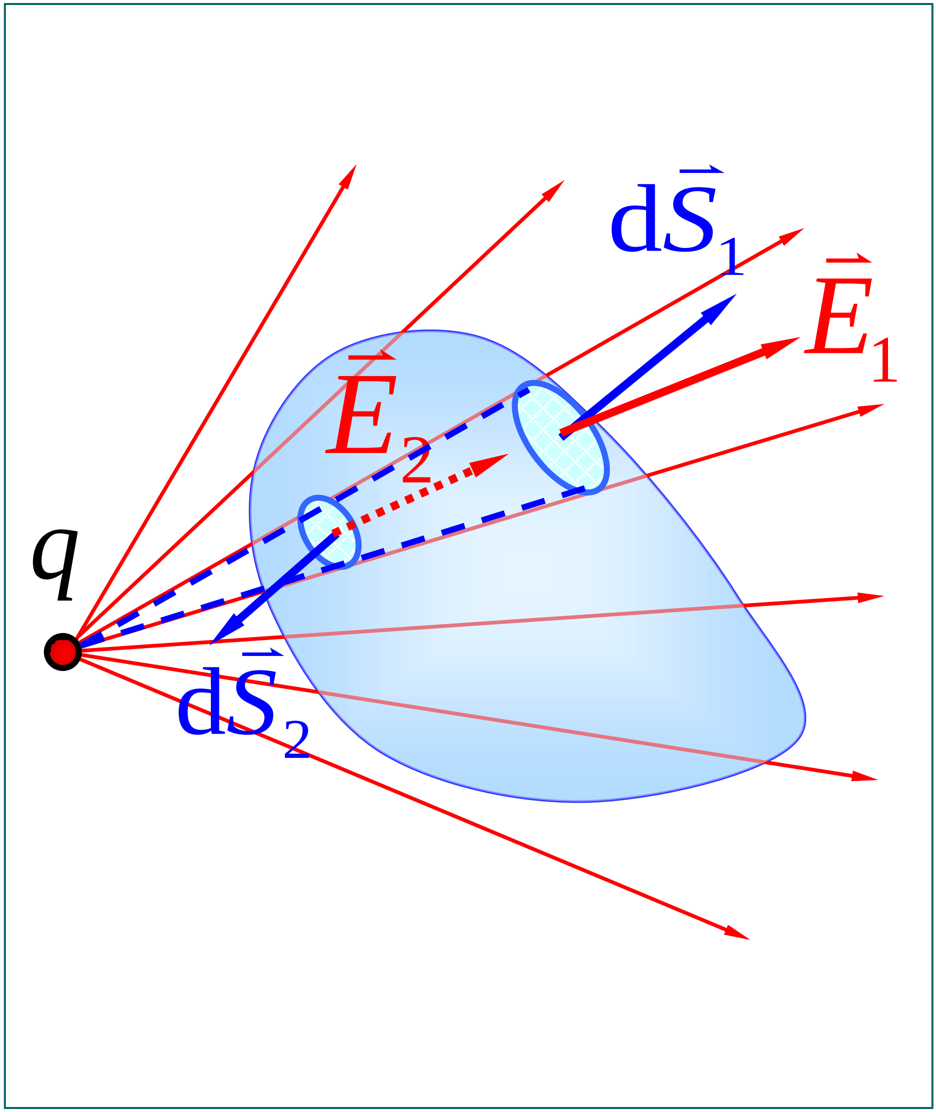
$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_1 + \mathrm{d}\Phi_2 = 0$$

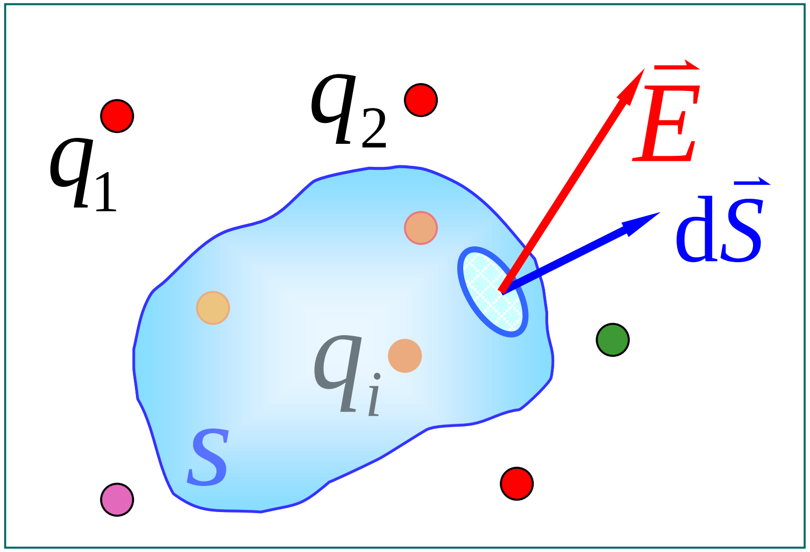
点电荷激发场强的通量

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



4. 由多个点电荷产生的电场

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots$$



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \sum_{i(内)} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \sum_{i（外）} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\because \sum_{i（外）} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\therefore \Phi_e = \sum_{i（内）} \oint_S \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i(内)} q_i$$

总 结

高斯定理 $\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$

1，定理表明的是闭合曲面的电场强度通量与面内电荷关系。

2，虽然电场强度通量只与面内电荷有关，但高斯面上的电场强度为所有内外电荷产生的总电场强度。

3，通过任一闭合曲面的电场强度通量, 只与该曲面所包围的电荷的代数和有关，而与闭合曲面的形状无关，也与面内电荷的分布无关。

4，静电场是有源场。

问题：判断对错

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1(\text{面内})}^{n} q_i$$

1. 如果高斯面上 E 处处为零，则该面内必无电荷。✗

   如果高斯面上 E 处处为零，则该面内必无净电荷。✓

2. 如果高斯面内无电荷，则高斯面上 E 处处为零。✗

   如果高斯面内无电荷，则高斯面上 E 不一定为零。✓

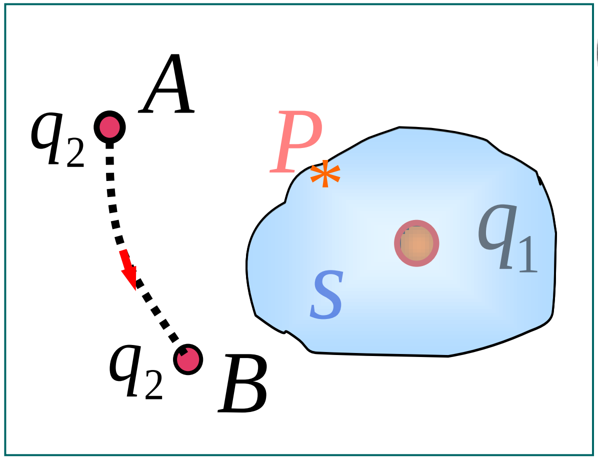
3. 如果高斯面上 E 处处不为零，则该面内必有电荷。✗

   如果高斯面上 E 处处不为零, 则该面内不一定有电荷。✓

4. 高斯面内电荷代数和为零，则高斯面上各点场强一定为零。✗

   高斯面内电荷代数和为零，则高斯面上的场强不一定处处为零。✓

【例 8】 ◈ 将 q_2 从 A 移到 B，P 点电场强度是否变化？穿过高斯面 S 的 Φ_{e} 有否变化？



解：场强变化，电荷与分布变化；S 闭合面的电通量不变

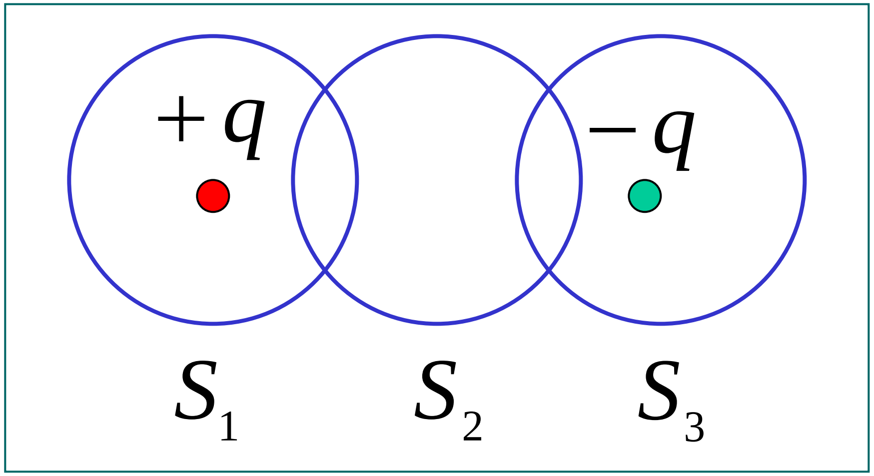
◈ 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，做如下的三个闭合面求通过各闭合面 $S_1, S_2, S_3,$ 的电通量 .

解：

$$\Phi_{\mathrm{e}1} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{\mathrm{e}2} = 0$$

$$\Phi_{\mathrm{e}3} = \frac{-q}{\varepsilon_0}$$



四　高斯定理的应用

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

用高斯定理求解的静电场必须具有一定的对称性

用高斯定理直接求场强的条件：

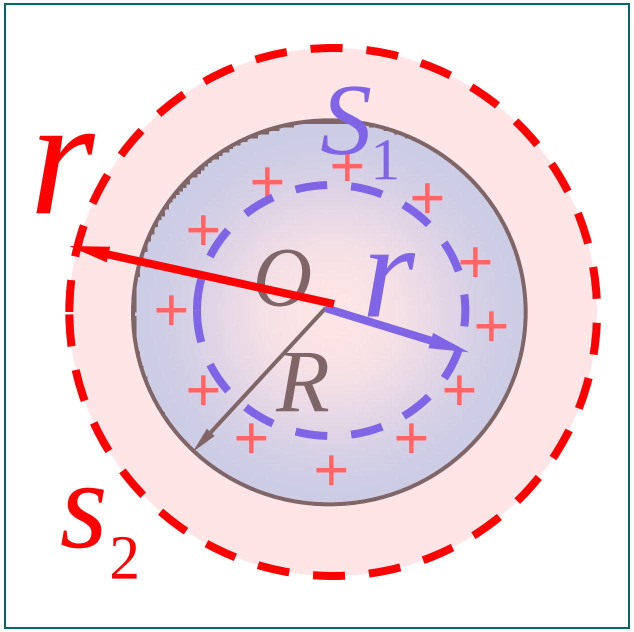
其步骤为：

1. 对称性分析；
2. 根据对称性选择合适的高斯面；
3. 应用高斯定理计算.

电场（电荷）的分布具有某种对称性（球、面、轴对称性），使得高斯面上的 $\vec{E}$ 为一常数，且 $\vec{E}$ 与 $d\vec{S}$ 夹角 θ 为一常数（为 0 、$\pi/2$、或 π ）这样 E 才能由积分号中提出，将积分运算化为代数运算。

【例 9】均匀带电球壳的电场强度

一半径为 R，均匀带电 Q 的薄球壳．求球壳内外任意点的电场强度.



解 $r > R$ $\oint_{S_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ $\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} \neq \vec{E}\cdot\oint \vec{ds}$

分析电场对称性，因为带电体球对称；

所以，电场球对称性，

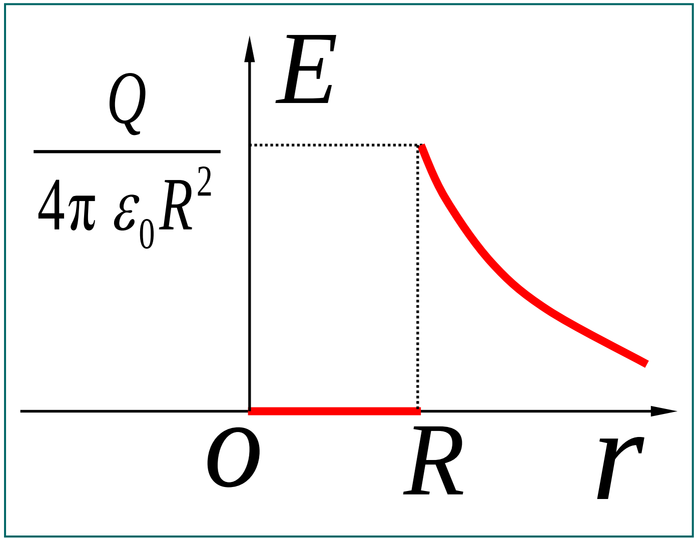
合适的高斯面；同心球面最合适。

应用定理，变矢量积分为标量积分再计算。

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{ds} = \oint Eds\cos\theta = \oint Eds\cos 0 = \oint Eds$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$0 < r < R$ $\oint_{S_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$ $\boxed{\vec{E} = 0}$



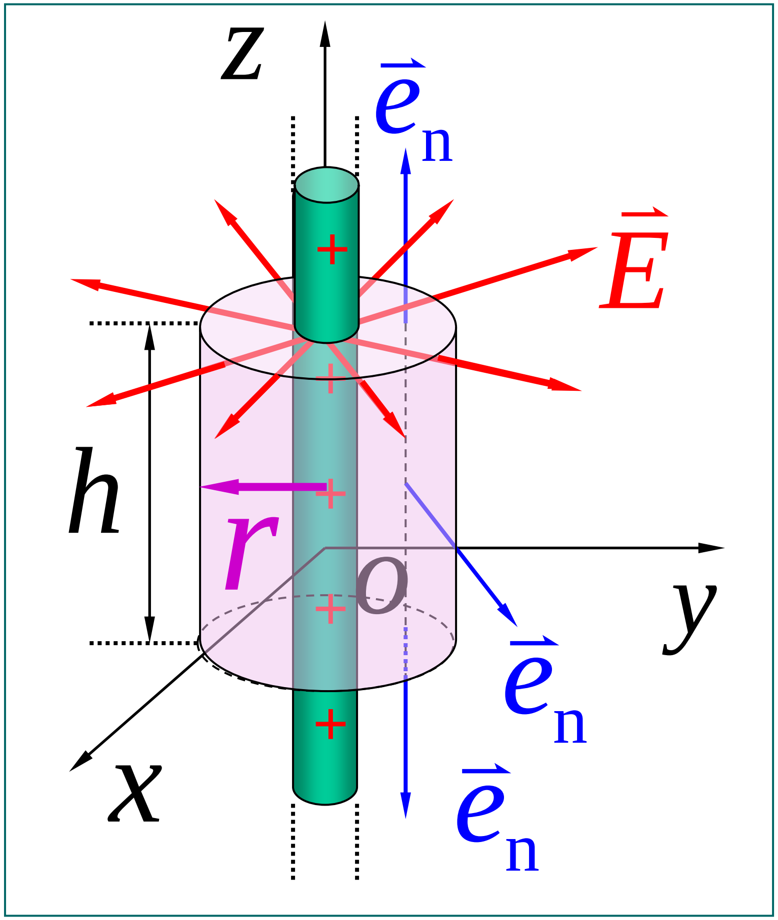
【例 10】无限长均匀带电直线的电场强度

无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷，即电荷线密度为 λ ，求距直线为 r 处的电场强度.

解　对称性分析：轴对称

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} \neq \vec{E}\cdot\oint\overrightarrow{ds}}$$

选取闭合的柱形高斯面



$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(上底)} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(下底)} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{s(柱面)} E\mathrm{d}S = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$2\pi\, rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0 r}}$$

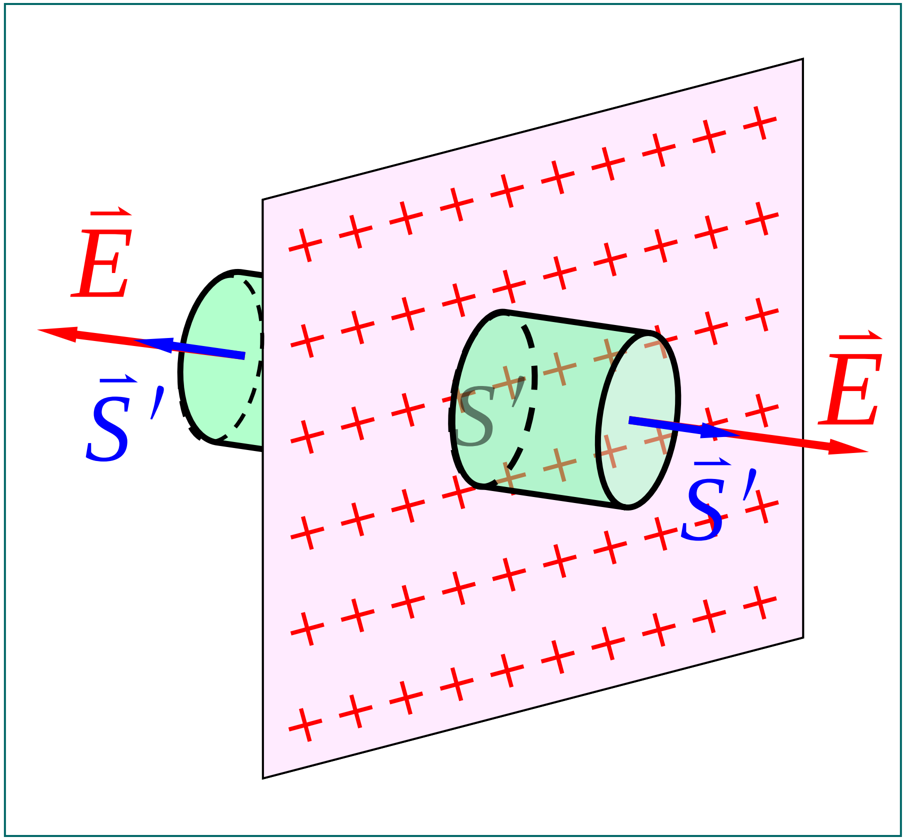
无限长均匀带电直线激发电场的总场强与距离成反比

【例 11】无限大均匀带电平面的电场强度

无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为 σ，求距平面为 r 处的电场强度.

解 对称性分析：$\vec{E}$ 垂直平面

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} \neq \vec{E}\cdot\oint\overrightarrow{ds}}$$



选取闭合的柱形高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{s(柱面)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(上底)} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{s(下底)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

积分0

$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

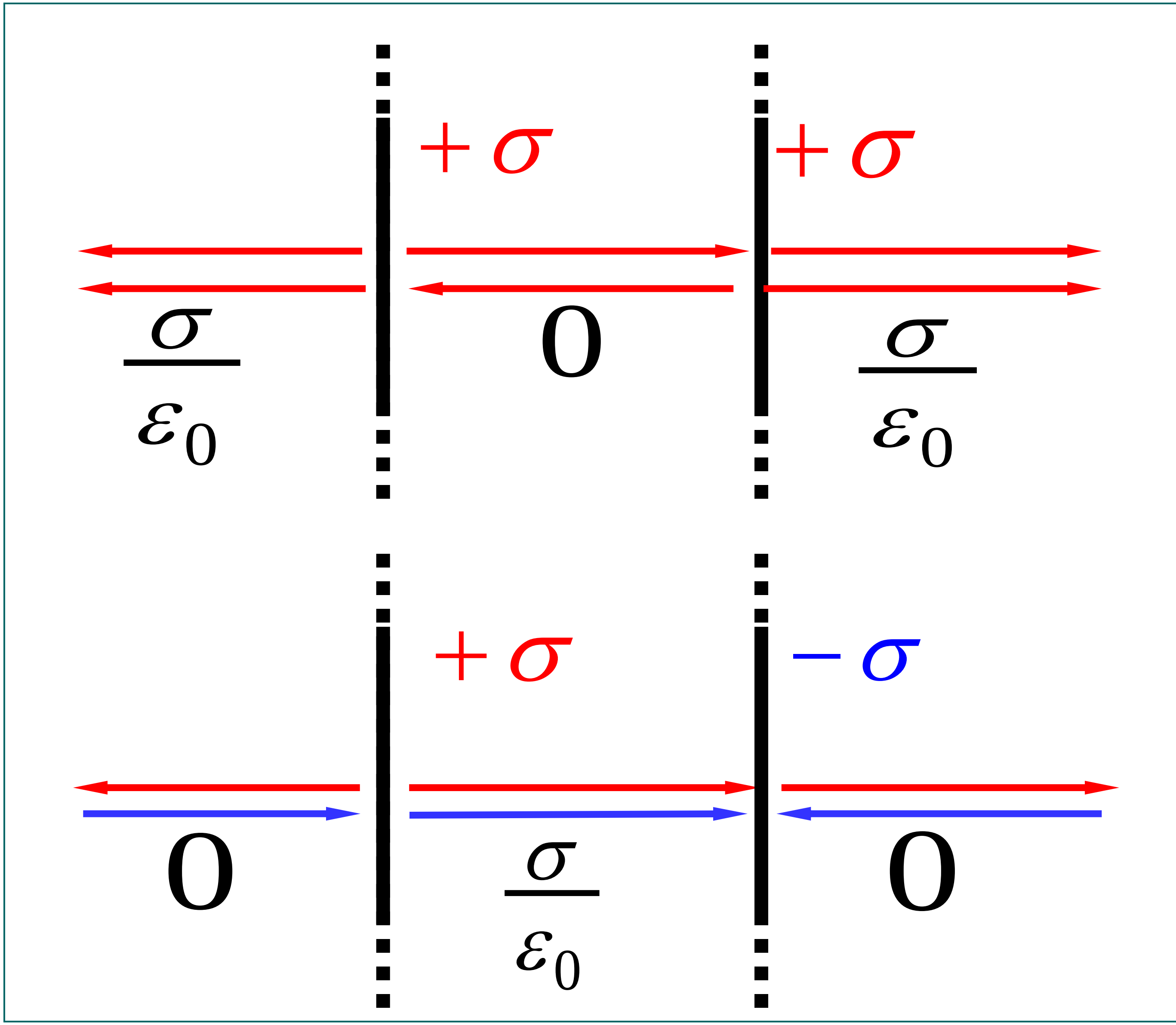
底面积

$$\boxed{E = \sigma/2\varepsilon_0}$$

无限大均匀带电平面激发电场的总场强与距离无关。

讨论

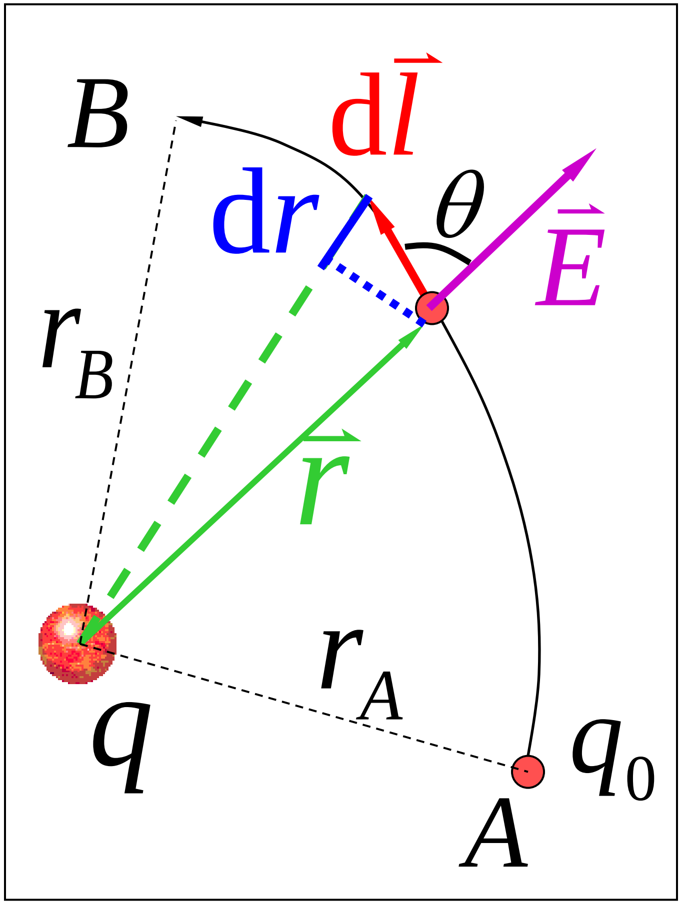
无限大带电平面的电场叠加问题



§8.3 静电场的环路定理和电势

一　静电场力所做的功

1　点电荷的电场



取微过程 $\mathrm{d}W = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

$$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}l\cos\theta = r\mathrm{d}r$$

微过程电场力做功 $\mathrm{d}W = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

结论: W 仅与q_0 的始末位置有关，与路径无关.

2. 任意带电体的电场力的功

总电场 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$

总电场的电场力微过程做的功 $dA=q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$

总电场的电场力某过程做的总功 $A=\int dA$

$$A=q_0\int_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i q_0\int_l \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_{\mathrm{i}} \mathrm{A}_{\mathrm{i}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ia}}-\frac{1}{r_{ib}}\right)$$

若$r_{ia}=r_{ib}$即从 a点出发再回到 a点则有：

$$\boxed{A=\oint q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}=0}$$

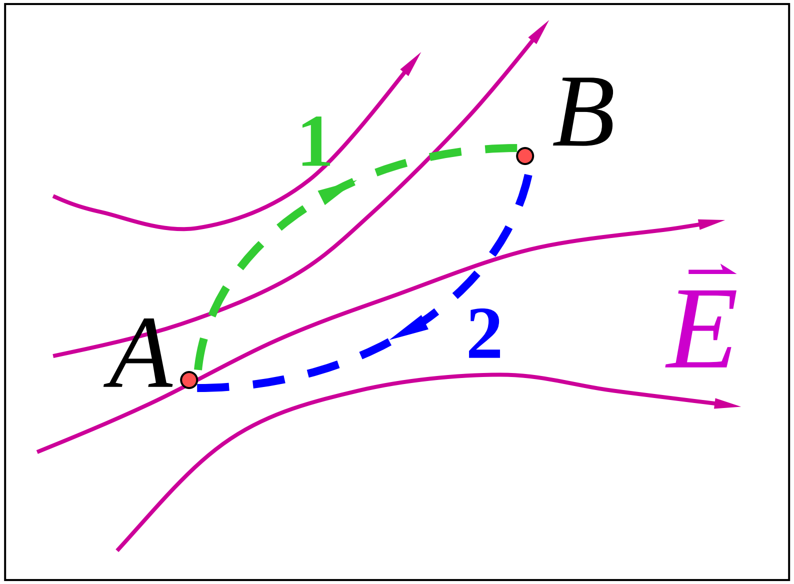
二　静电场的环路定理

$$q_0 \int_{A1B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \int_{A2B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$q_0 \int_{A1B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - q_0 \int_{A2B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$q_0 \left(\int_{A1B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{B2A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \right) = 0$$

$$\boxed{\oint_l \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$



场的性质：静电场是保守场

三 电势能

静电场是保守场，静电场力是保守力.静电场力所做的功就等于电荷电势能增量的负值.

$$W_{AB}=\int_{AB} q_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-(E_{\mathrm{p}B}-E_{\mathrm{p}A})=-\Delta E_{\mathrm{p}}$$

$$W_{AB}\begin{cases} >0, & E_{\mathrm{p}B}<E_{\mathrm{p}A} \\ <0, & E_{\mathrm{p}B}>E_{\mathrm{p}A} \end{cases}$$

令 $E_{\mathrm{p}B}=0 \quad E_{\mathrm{p}A}=\int_{AB} q_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

试验电荷q_0在电场中某点的电势能，在数值上就等于把它从该点移到零势能处静电场力所作的功.

电势能的大小是相对的，电势能的差是绝对的.

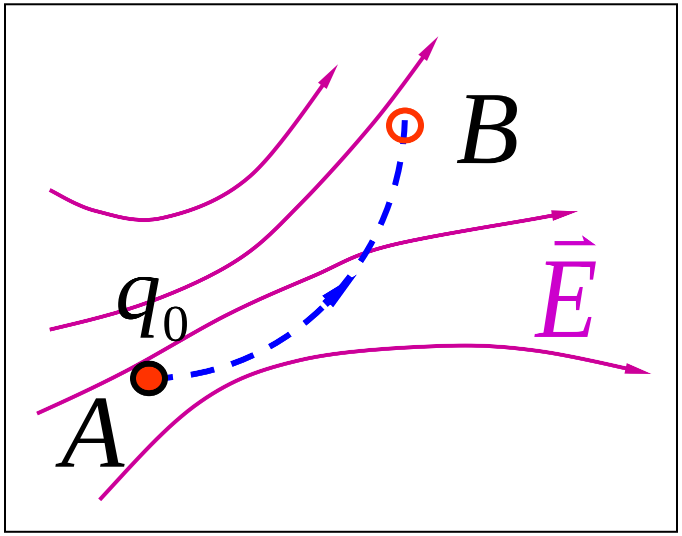
四 电势

$$\int_{AB} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -(E_{pB} - E_{pA})$$

$$E_{pA} = \int_{AB} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad (E_{pB} = 0)$$

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\left(\frac{E_{pB}}{q_0} - \frac{E_{pA}}{q_0}\right)$$

（积分大小与 q_0 无关，场的性质）



场的性质

B点电势 $V_B = \frac{E_{pB}}{q_0}$

$V_A = \frac{E_{pA}}{q_0}$ A点电势

$$V_A = \int_{AB} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + V_B$$ （V_B 为参考电势，值任选）

令 $V_B = 0$ $\quad V_A = \int_{AB} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$$V_A = \int_A^{V=0\text{点}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

◆ 电势零点选择方法：有限带电体以无穷远为电势零点，实际问题中常选择地球电势为零.

$$\boxed{V_A = \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

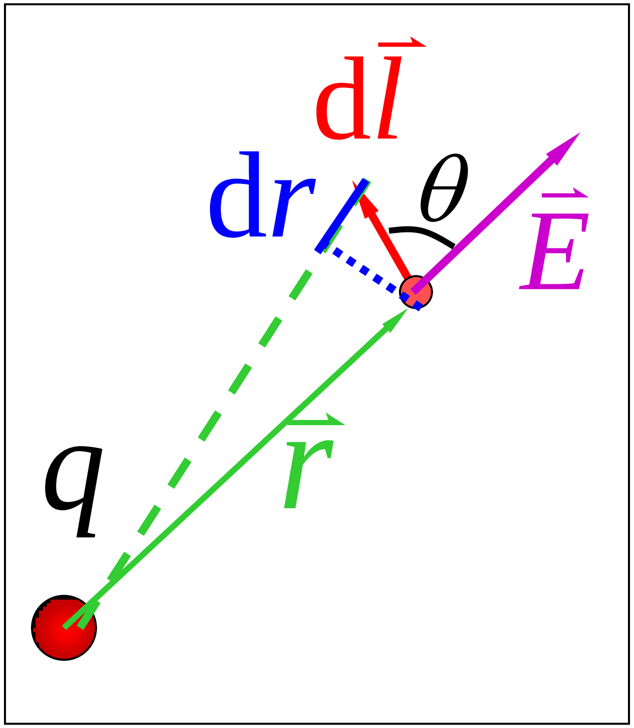
◆ 物理意义 把单位正试验电荷从点 A 移到无穷远时，静电场力所作的功.

五 点电荷的电势

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

令 $V_\infty = 0$

$$V=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_r^\infty \frac{q r \mathrm{d}r}{4\pi\,\varepsilon_0 r^3}$$



点电荷的电势

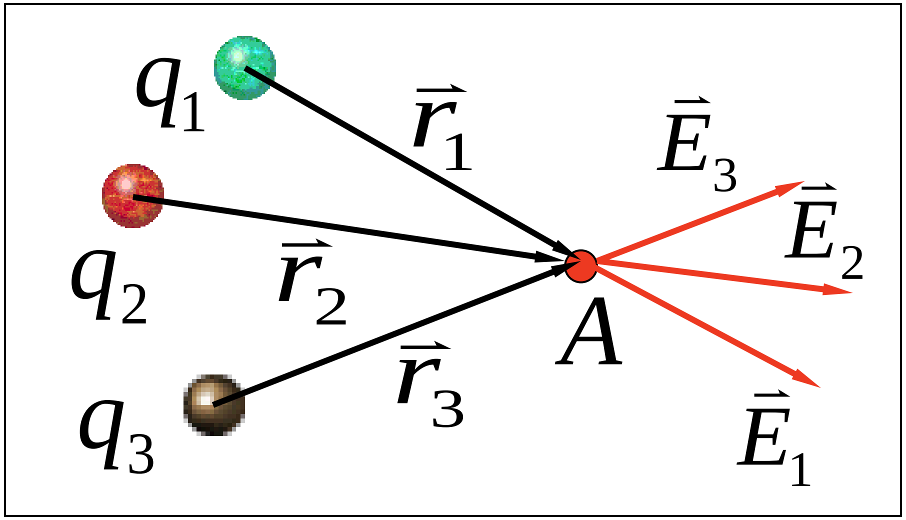
$$\boxed{V=\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 r}}$$

$$\begin{cases} q>0, & V>0 \\ q<0, & V<0 \end{cases}$$

点电荷电场的电势与距离成反比关系

六 电势的叠加原理

◈ 点电荷系 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$

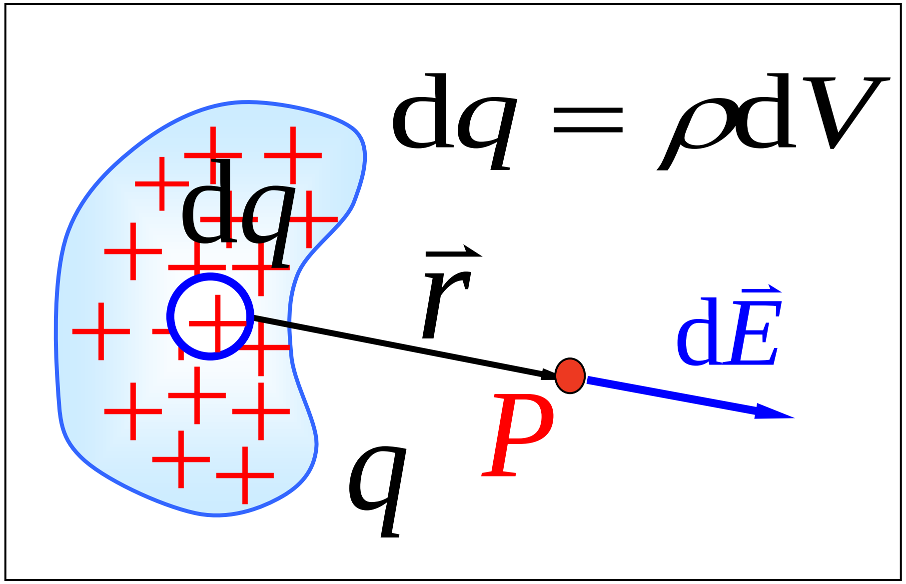


令 $V_\infty=0$

$$V_A=\int_A^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i \int_A^\infty \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$V_A=\sum_i V_{Ai}=\sum_i \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0 r_i}$$

◈ 电荷连续分布



令 $V_\infty=0$

$$V_P=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\,\varepsilon_0 r}$$

电势求和积分不需要分解。

【例 12】求电偶极子的电场中的电势分布。

解：+q、–q 两点电荷在 P 点的电势分别为：

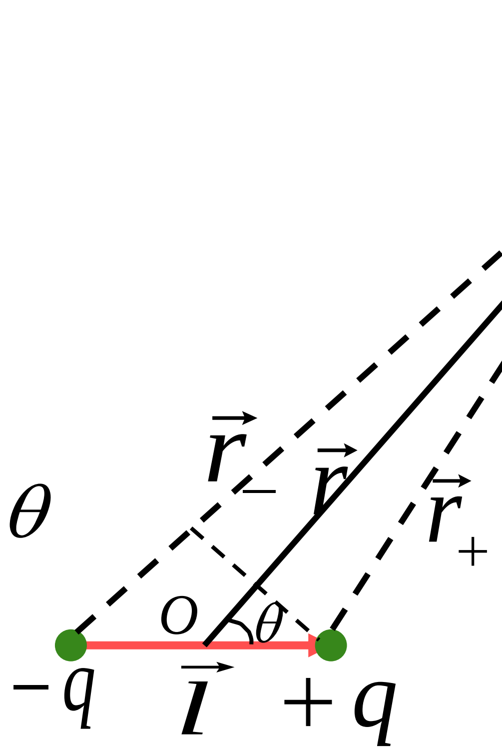
$$\varphi_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} \qquad \varphi_- = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

由电势叠加原理

考虑到 $\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \dfrac{q(r_- - r_+)}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-}$

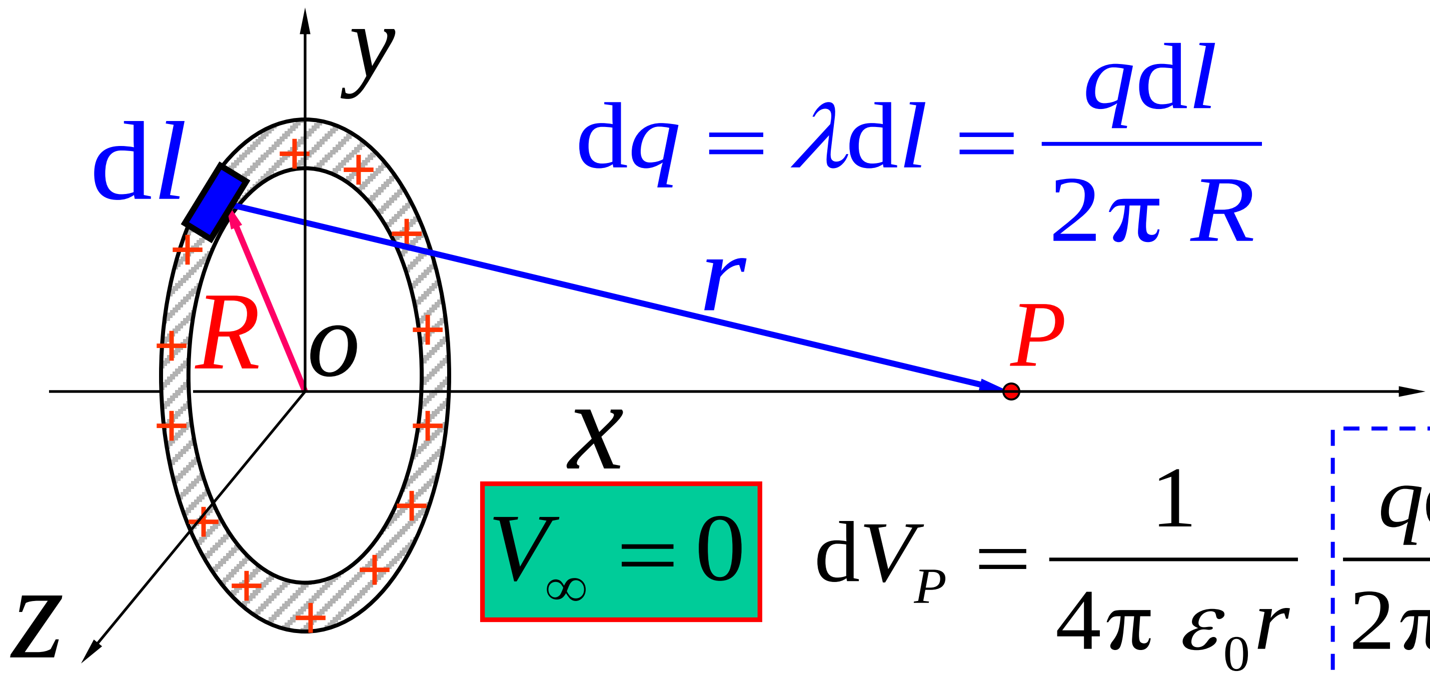
$$r >> l \quad r_+ r_- \approx r^2 \quad r_- - r_+ \approx l\cos\theta$$

$$\varphi = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$



电偶极子激发电场的电势距离平方反比关系

【例 13】正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上，求圆环轴线上距环心为 x 处点 P 的电势.



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}$$

$$\boxed{V_\infty = 0}$$

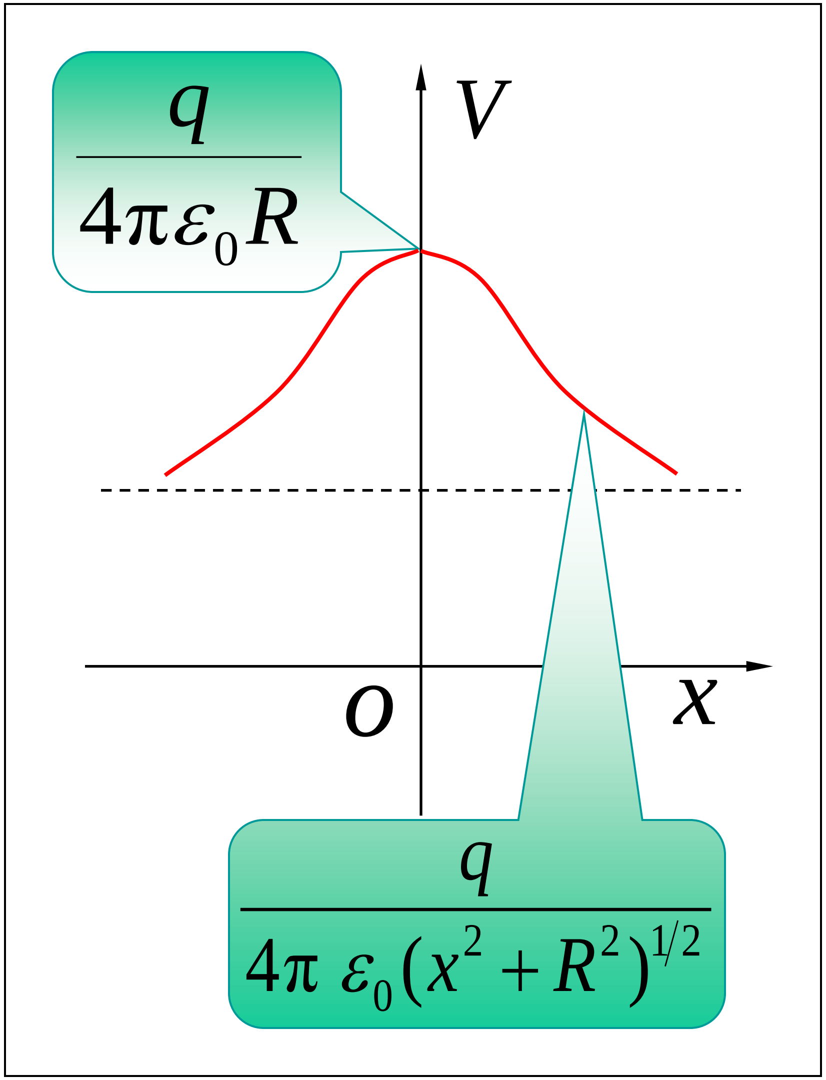
$$\mathrm{d}V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\boxed{\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}}$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

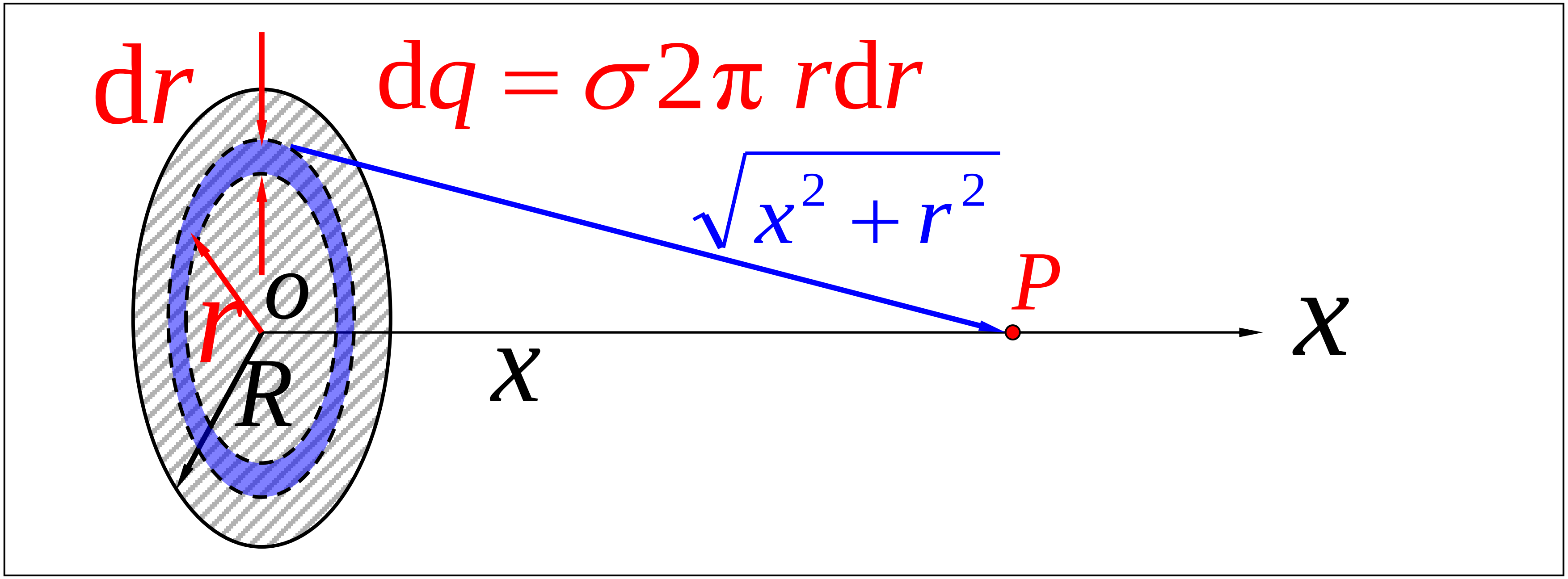
$$V_P = \frac{q}{4\pi\ \varepsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$$

讨 论

◆ $\begin{cases} x = 0, \quad V_0 = \dfrac{q}{4\pi\ \varepsilon_0 R} \\ x >> R, \quad V_P = \dfrac{q}{4\pi\ \varepsilon_0 x} \end{cases}$



【例 14】均匀带电薄圆盘轴线上的电势



$$\boxed{V_\infty = 0}$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma 2\pi\, r dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$$

电势的与距离不是简单成反比的关系

$$x >> R \quad \sqrt{x^2+R^2} \approx x + \frac{R^2}{2x}$$

$$V \approx Q/4\pi\,\varepsilon_0 x$$ （点电荷电势）

【例 15】“无限长”带电直导线的电势

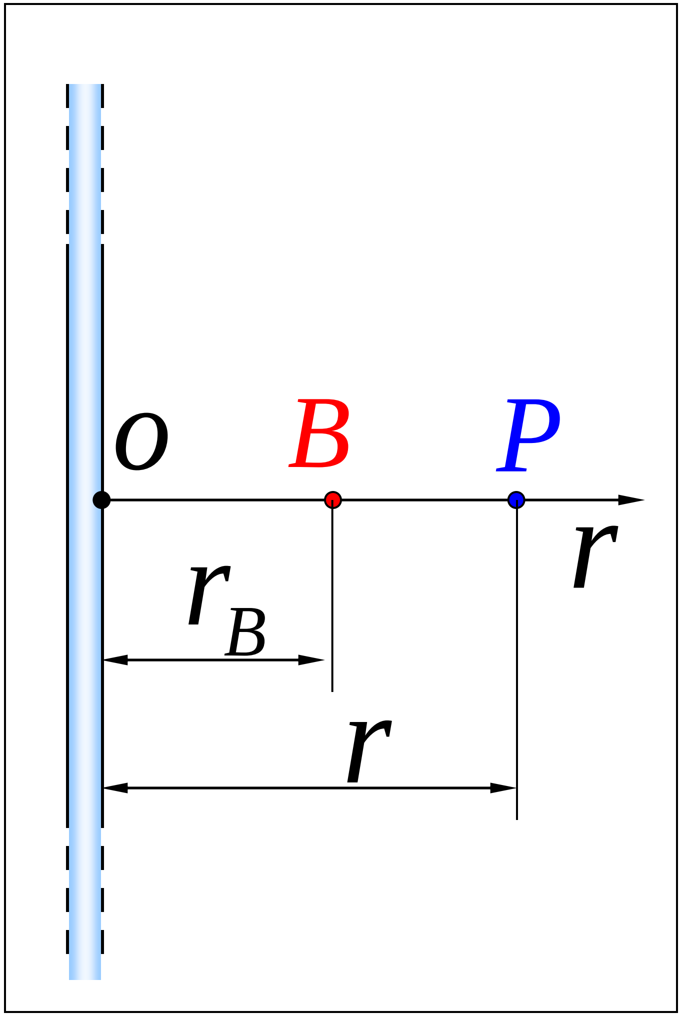
解 $$V_A = \int_{AB} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + V_B$$

令 $V_B = 0$

$$V_P = \int_r^{r_B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0 r}\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r}$$

能否选 $V_\infty = 0$ ？



当带电体无限大的时候，带电体激发电场的总场强的线积分到无穷大的结果还是无穷大，所以没有意义！但任意两点之间积分（电势差）有意义，故必须选有限空间某点为电势零点时，其他点的电势才有意义。

【例 16】一圆台的上下底面半径分别为 R_1 和 R_2，它的侧面上均匀带电，电荷面密度为 σ，取无穷远为电势零点，求顶点 o 的电势。

解 将圆台分为若干个圆环积分。

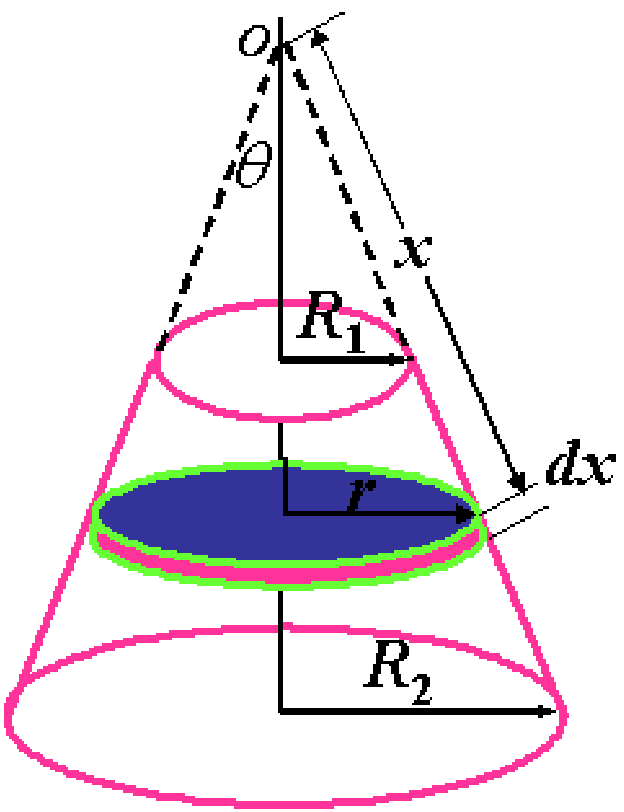
$$u_p = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma 2\pi r dx}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

统一变量再积分

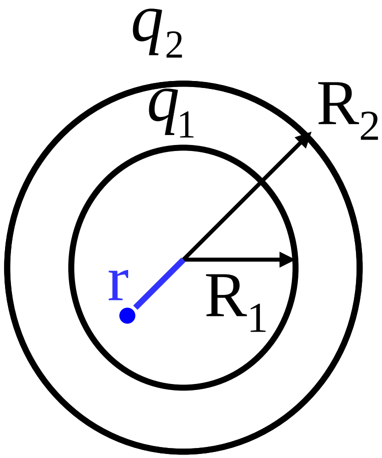
$$x = \frac{r}{\sin\theta}, \qquad dx = \frac{dr}{\sin\theta}$$

$$u_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int_{R_1}^{R_2} dr$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(R_2 - R_1)$$



【例 17】 设两球面同心放置，半径分别为R_1和R_2，带电量分别为q_1和q_2。求其电势分布。



解法1：由高斯定理可得电场强度的分布

$$E=\begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2 \\ \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_2 \end{cases}$$

$$r<R_1: \quad \mathrm{U}=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=0+\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_2}^{\infty}\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}\right)$$

电势为常数，球空间是等电势的！

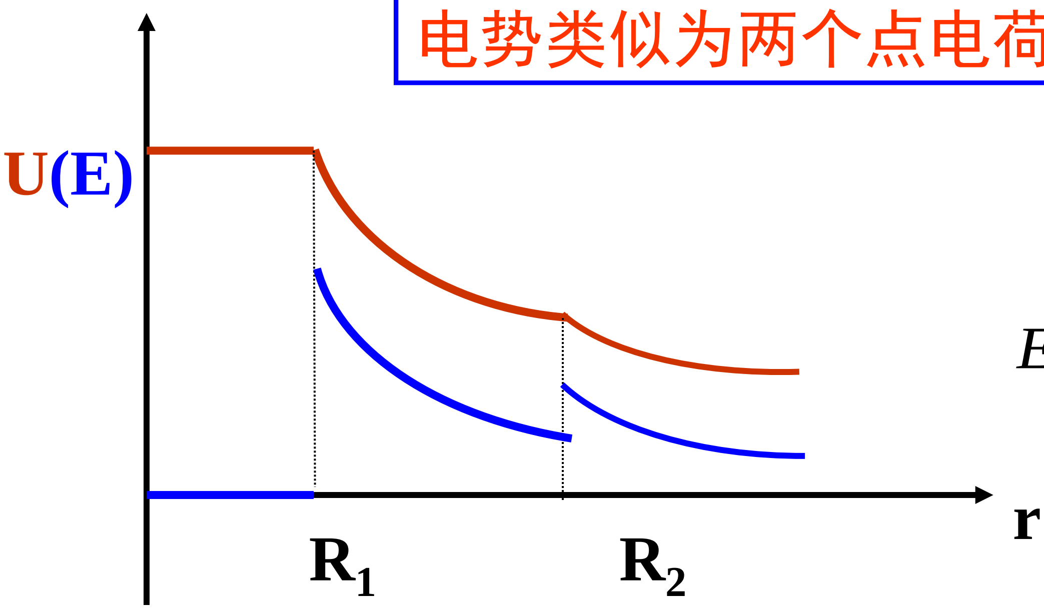
$$R_1 < r < R_2: \quad U = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{R_2} \right)$$

电势类似为一个点电荷的电势与一个常数电势叠加！

$$r > R_2: \quad U = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

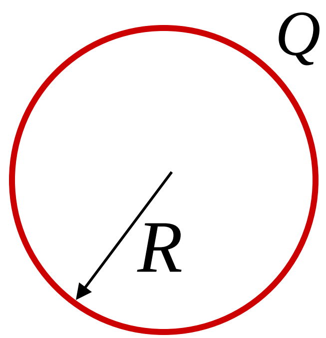
电势类似为两个点电荷的电势的叠加！



$$E = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

解法2：带电球壳的电势叠加

$$\because U=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r>R\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & r<R\end{cases}$$

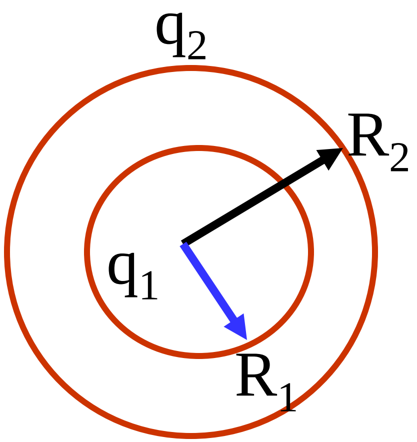


类似被屏蔽空间是等电势，不被屏蔽的空间的电势是变化！

$$\therefore U=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\qquad r<R_1$$

$$U=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\qquad R_1<r<R_2$$

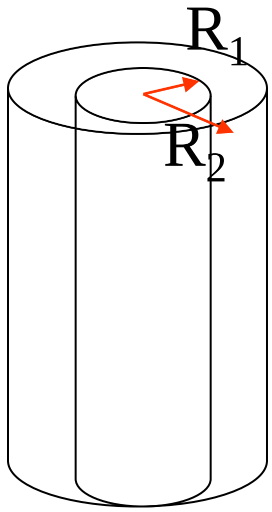
$$U=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\qquad r>R_2$$

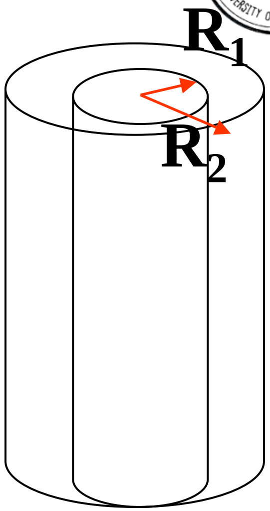


【例 18】、如图所示，一对无限长共轴圆筒，半径分别为R_1、R_2，筒面上均匀带正电，沿轴线上单位长度的电量分别为λ_1和λ_2，设外筒的电势为零。求各区域的电势分布，以及两筒面间的电势差。

解：

$$E=\begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} & R_1<r<R_2 \\ \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r} & r>R_2 \end{cases}$$





$$r < R_1$$

$$U_1 = \int_r^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{R_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$= 0 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$E = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r} & r > R_2 \end{cases}$$

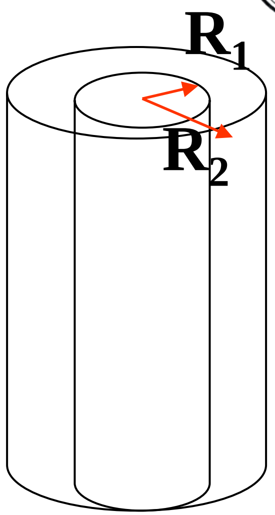
被屏蔽，空间是等电势的！

$$R_1 < r < R_2$$

$$U_2 = \int_r^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{R_2} \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{R_2}{r}$$

不完全屏蔽，空间电场的电势是变化的，与外壳无关！

$$r > R_2$$



$$U_3 = \int_r^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{R_2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{r} < 0$$

完全不屏蔽，电势与内外壳均有关，变化且为负！

$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$E = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r} & r > R_2 \end{cases}$$

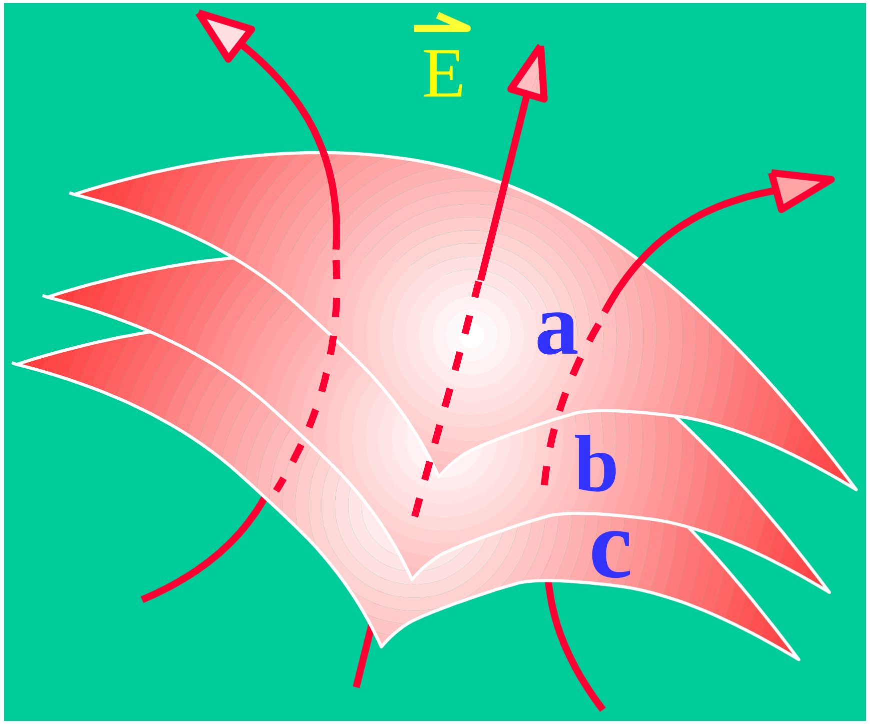
两点之间的电势差是具体的数值！

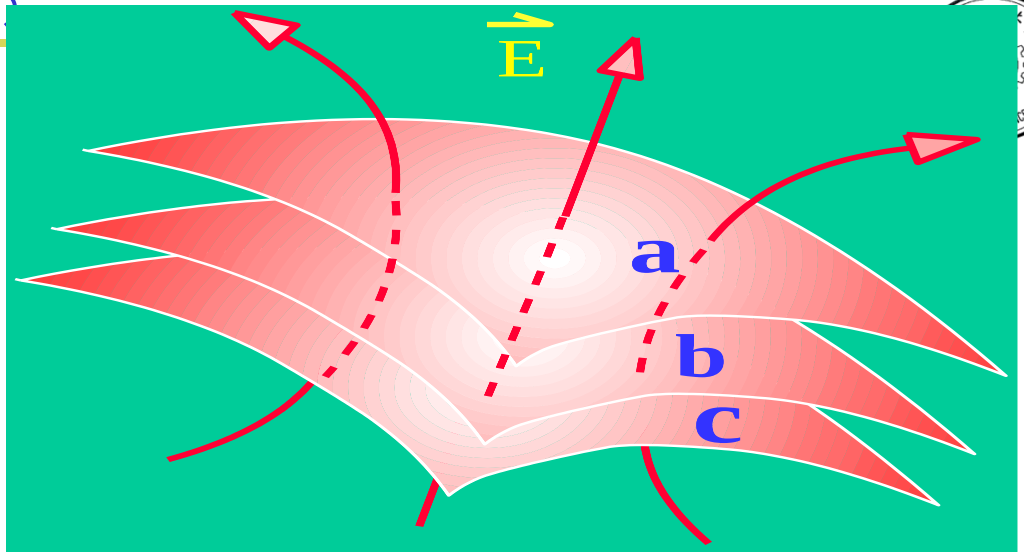
§8.4 电场强度与电势梯度

一 等势面（电势图示法）

空间电势相等的点连接起来所形成的面称为等势面.

为了描述空间电势的分布，规定任意两相邻等势面间的电势差相等.





等势面的性质:

◈ 在静电场中，电荷沿等势面移动时，电场力不做功

$$W_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0(V_a-V_b)=0$$

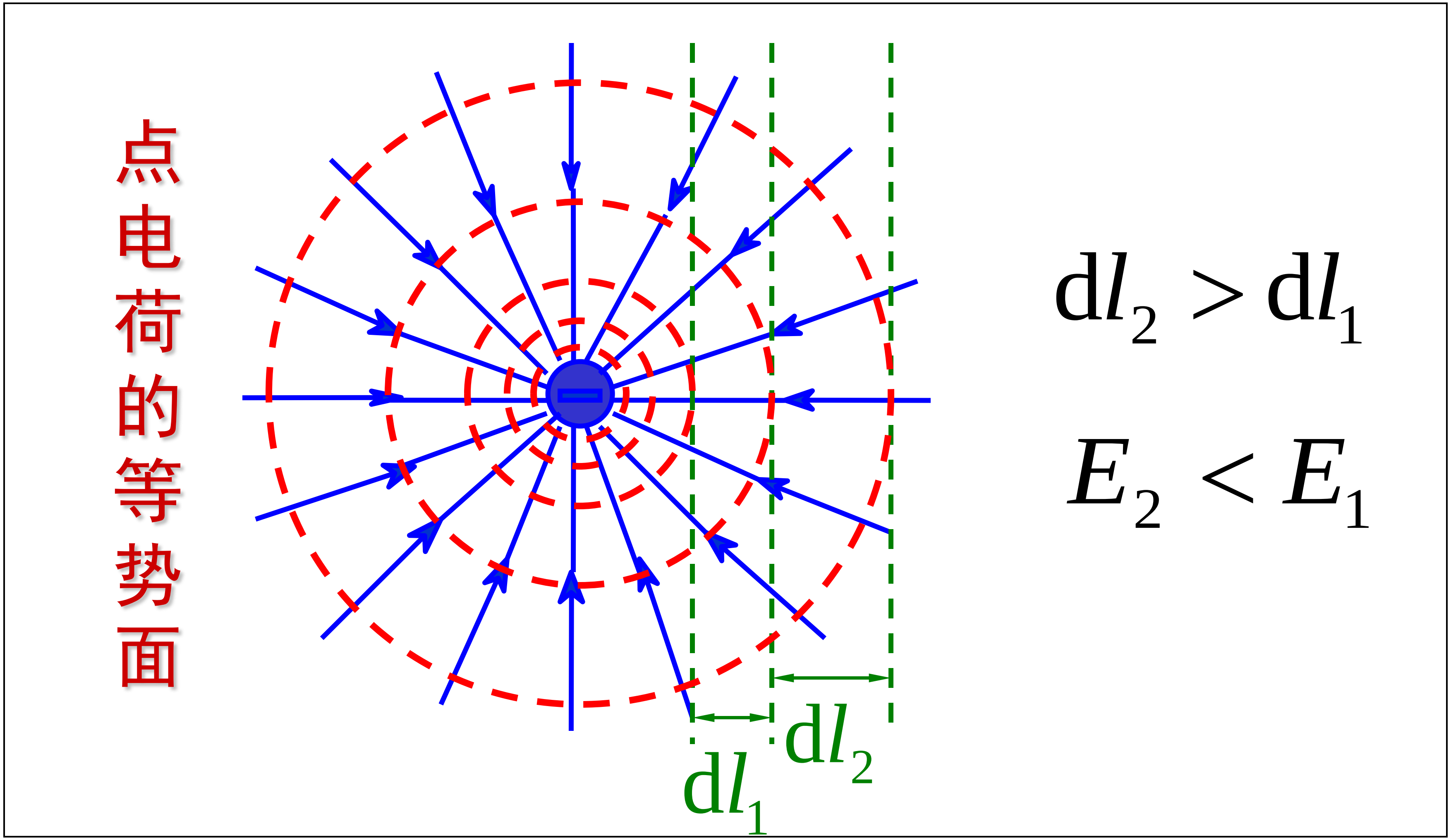
◈ 在静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 总是与等势面垂直的，即电场线是和等势面正交的曲线簇.

$$W_{ab}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

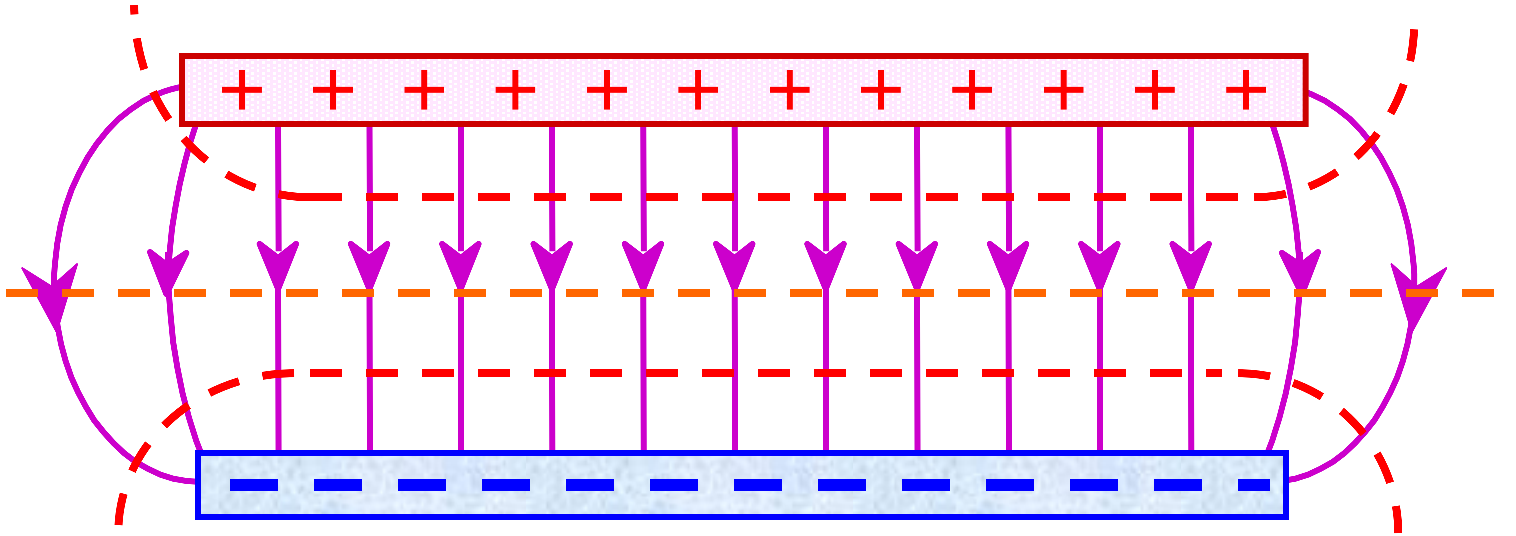
$$q_0\neq 0\quad \vec{E}\neq 0\quad \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$$

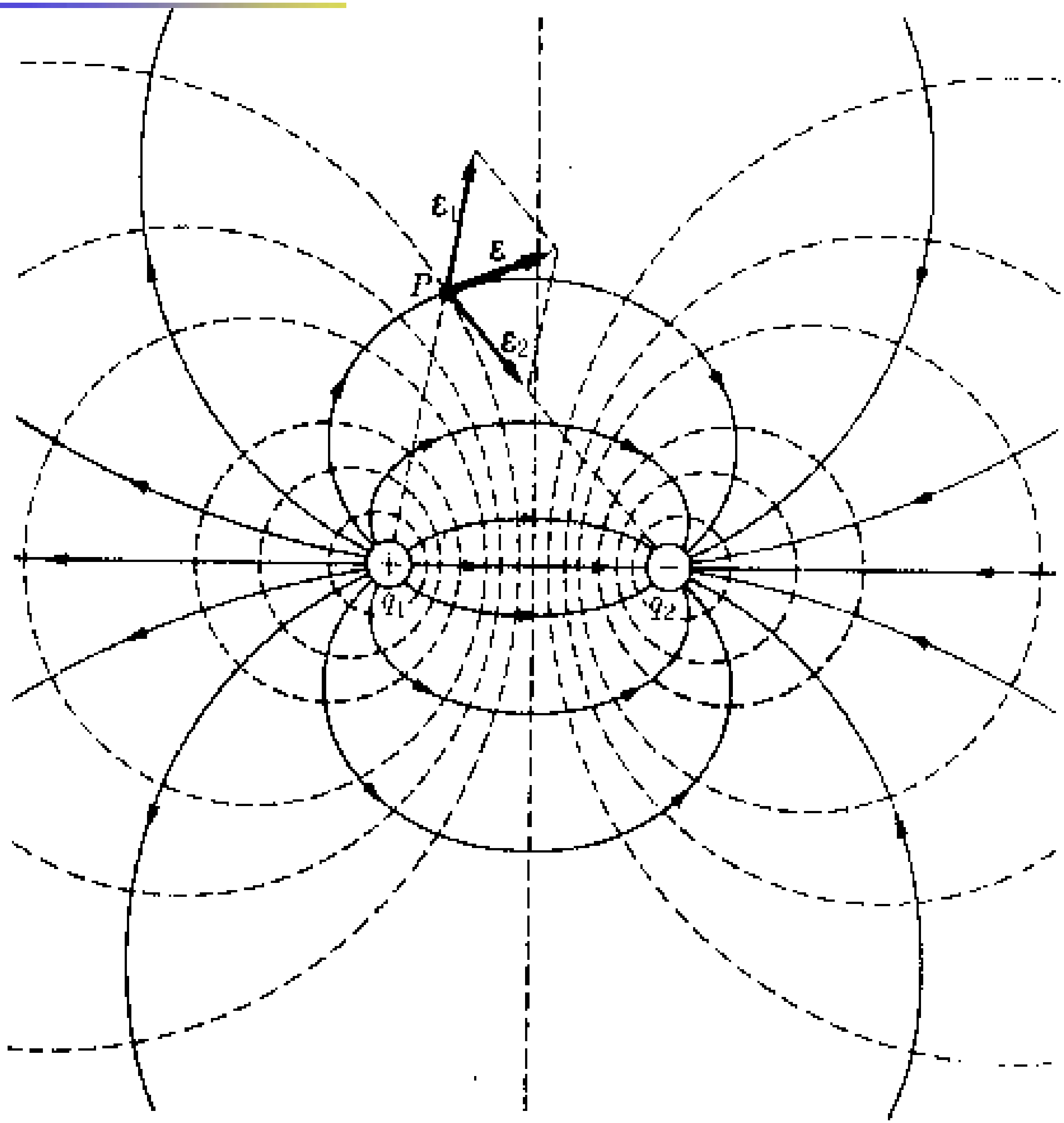
$$\boxed{\therefore\quad \vec{E}\perp\mathrm{d}\vec{l}}$$

◆ 按规定，电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等，即等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小.

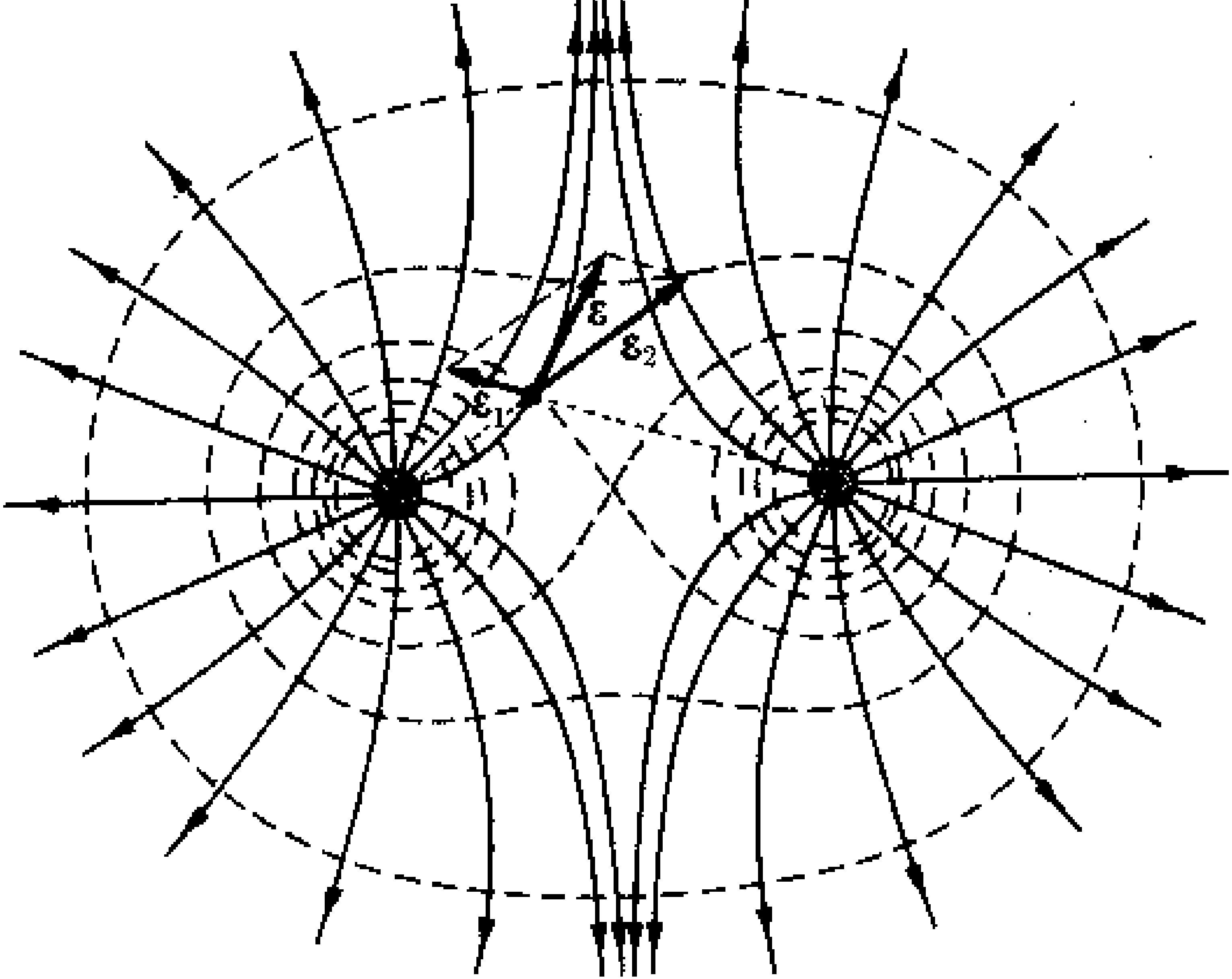


两平行带电平板的电场线和等势面

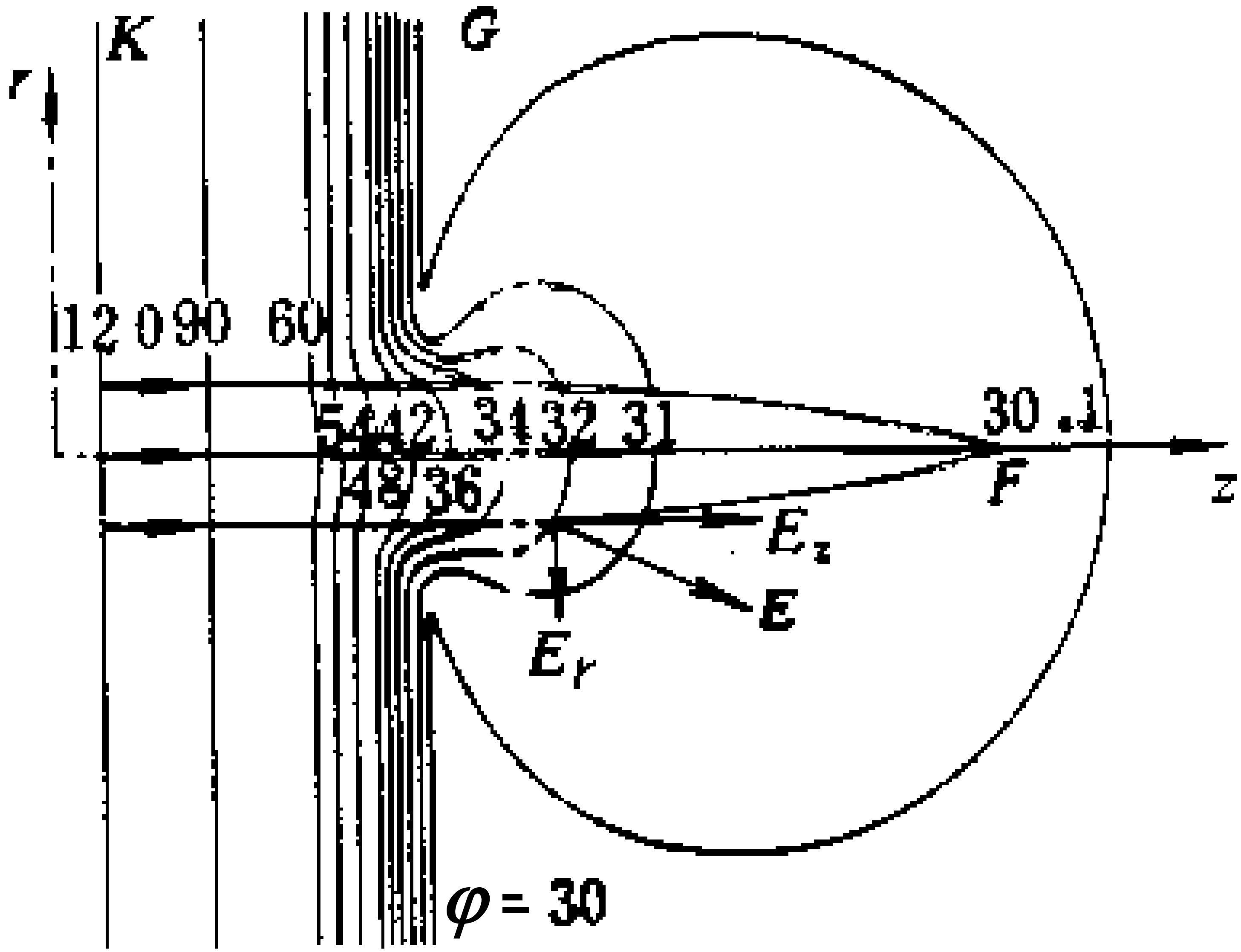




电偶极子的电场线和等势面



两个等量的正电荷的电场线和等势面



静电透镜的等势面

1.灯丝

2.阴极

3.控制极

4.第一阳极

5.第二阳极

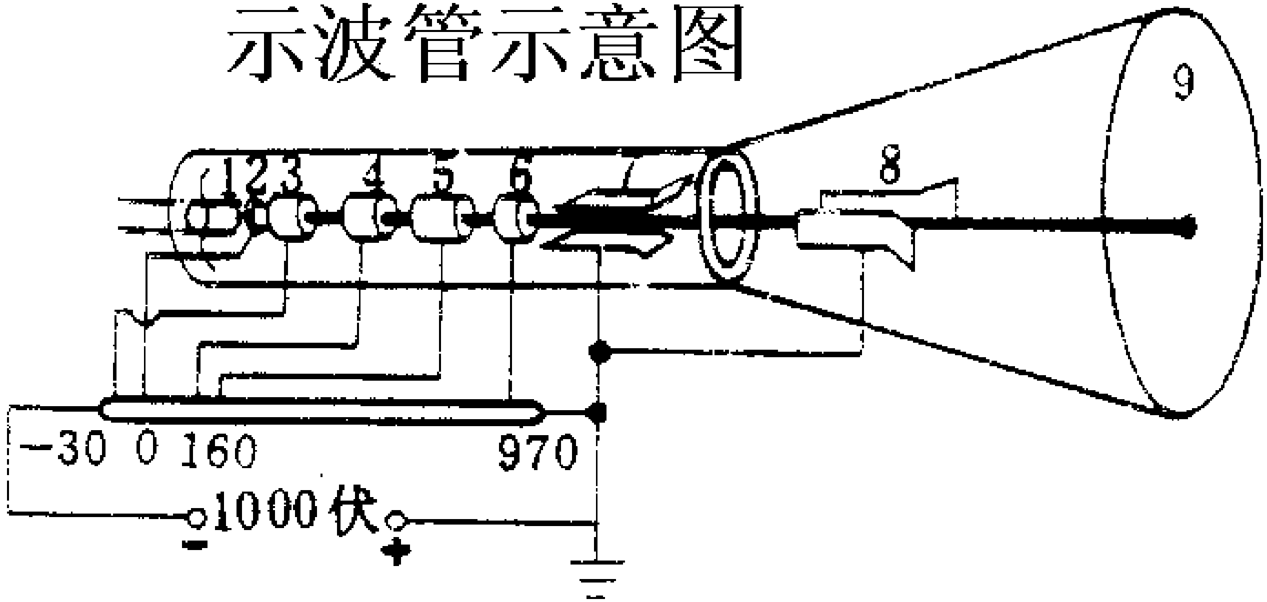
6.第三阳极

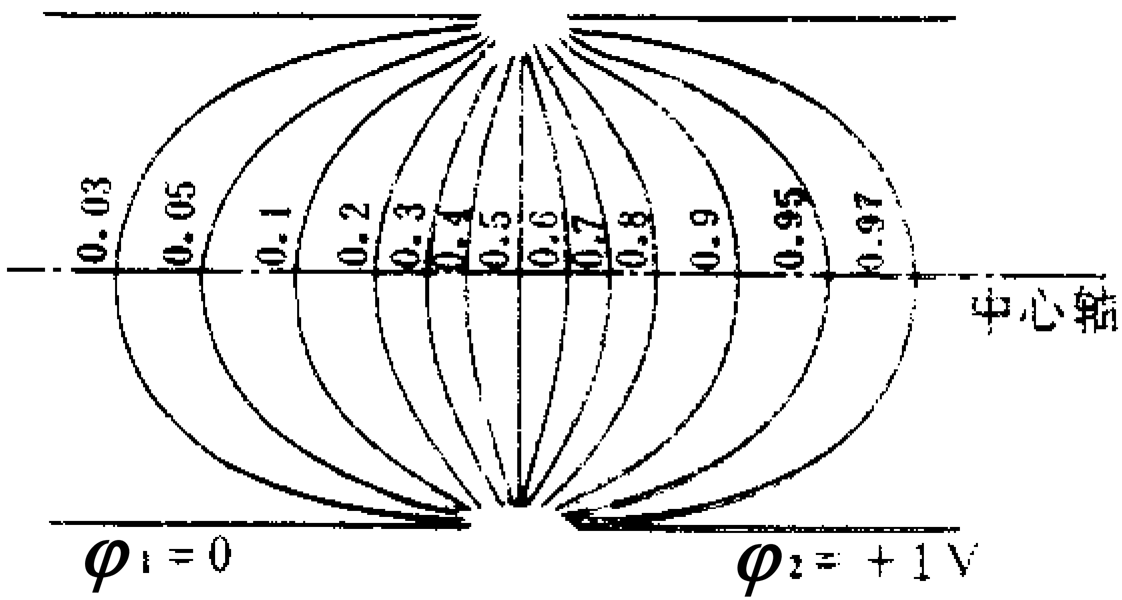
7.竖直偏转系统

8.水平偏转系统

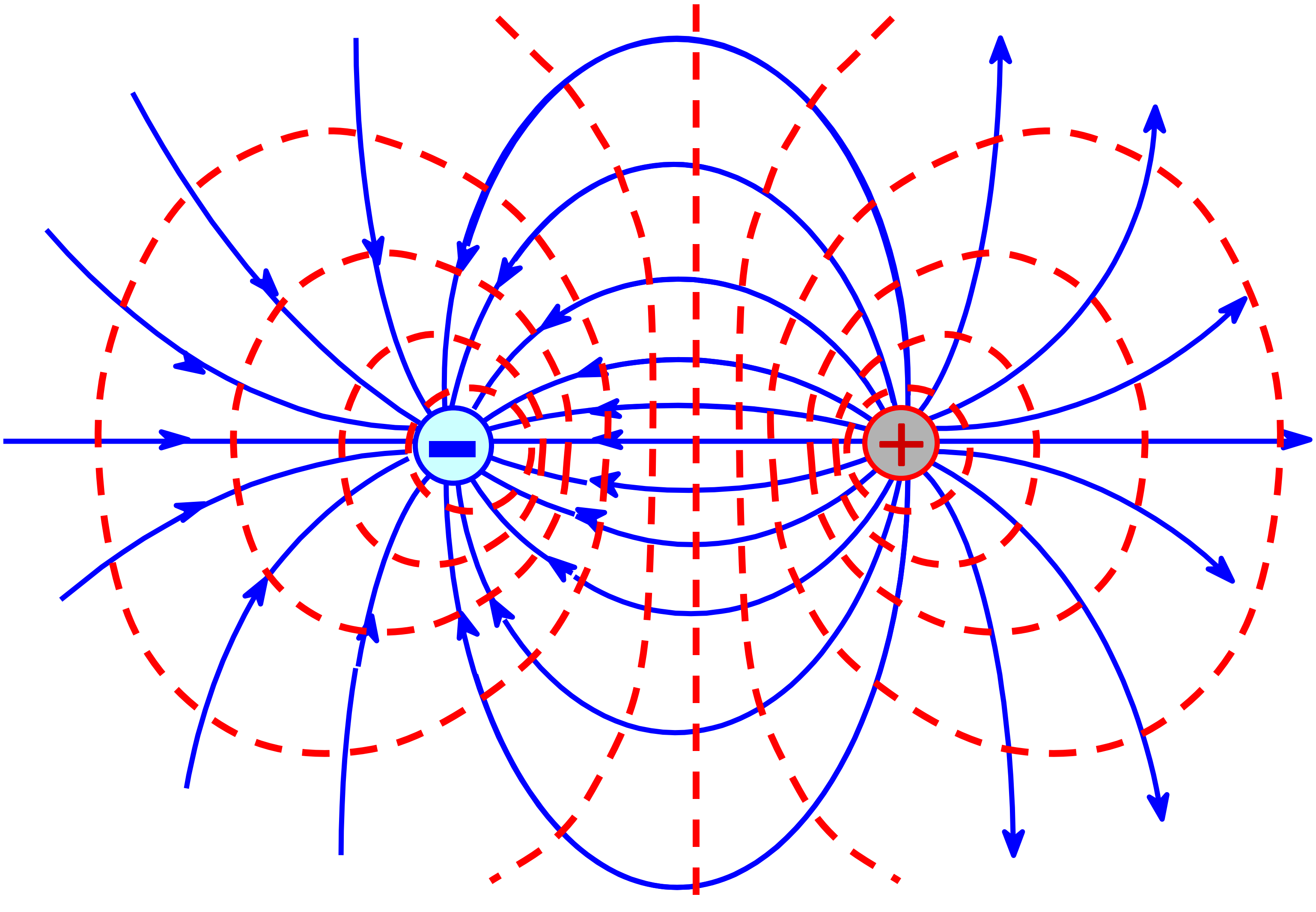
9.荧光屏

示波管示意图





一对等量异号点电荷的电场线和等势面



二 电场强度与电势梯度

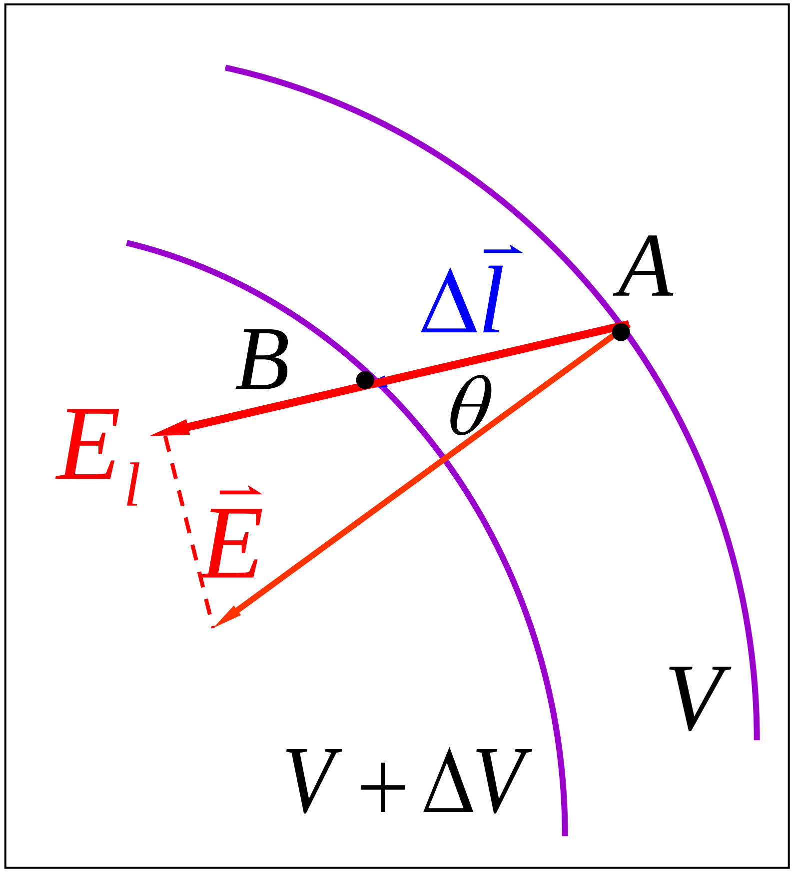
$$U_{AB}=-(V_B-V_A)=\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}$$

$$=E\Delta l\cos\theta$$

$$\boxed{E\cos\theta=E_l}$$

$$-\Delta V=E_l\Delta l\,,\quad E_l=-\frac{\Delta V}{\Delta l}$$

$$E_l=-\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta l}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$



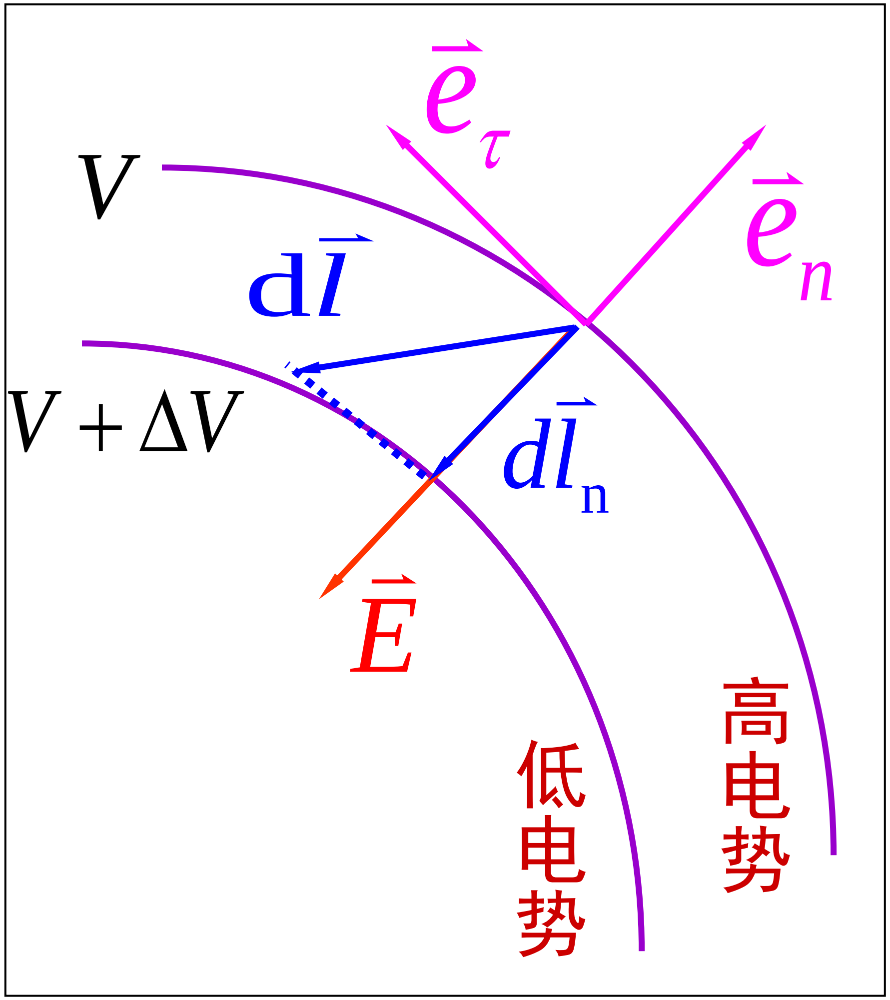
电场中某一点的电场强度沿某一方向的分量，等于这一点的电势沿该方向单位长度上电势变化率的负值.

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l}$$

$$E_\mathrm{n} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_\mathrm{n}}$$

$$\because \mathrm{d}l > \mathrm{d}l_\mathrm{n} \qquad \therefore E_\mathrm{n} > E_l$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_\mathrm{n}}\vec{e}_\mathrm{n}}$$



大小 $|\vec{E}| = \left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}l_\mathrm{n}}\right|$

方向 与 $\vec{e}_\mathrm{n}$ 相反，由高电势处指向低电势处

三　电场线和等势面的关系

1）电场线与等势面处处正交.

（等势面上移动电荷，电场力不做功.）

2）等势面密处电场强度大；等势面疏处电场强度小.

讨论

1）电场弱的地方电势低；电场强的地方电势高吗？

2）$V=0$ 的地方，$\vec{E}=0$ 吗？

3）$\vec{E}$ 相等的地方，V 一定相等吗？等势面上 $\vec{E}$ 一定相等吗？

【例 18】 求一均匀带电细圆环轴线上任一点的电场强度.

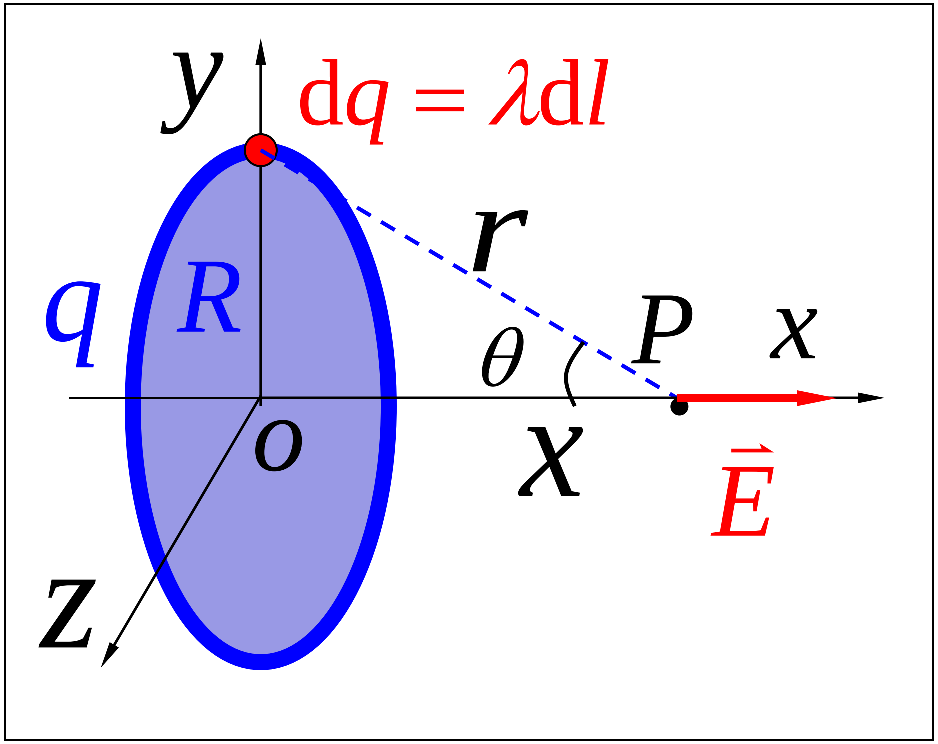
解 $\vec{E} = -\nabla V$

$$V = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$E = E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{qx}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$



§8.5 静电场中带电粒子的受力及运动

一　外电场对电偶极子的力矩和取向作用

单个带电粒子在均匀电场中 $\vec{F}=q\vec{E}=m\vec{a}=m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

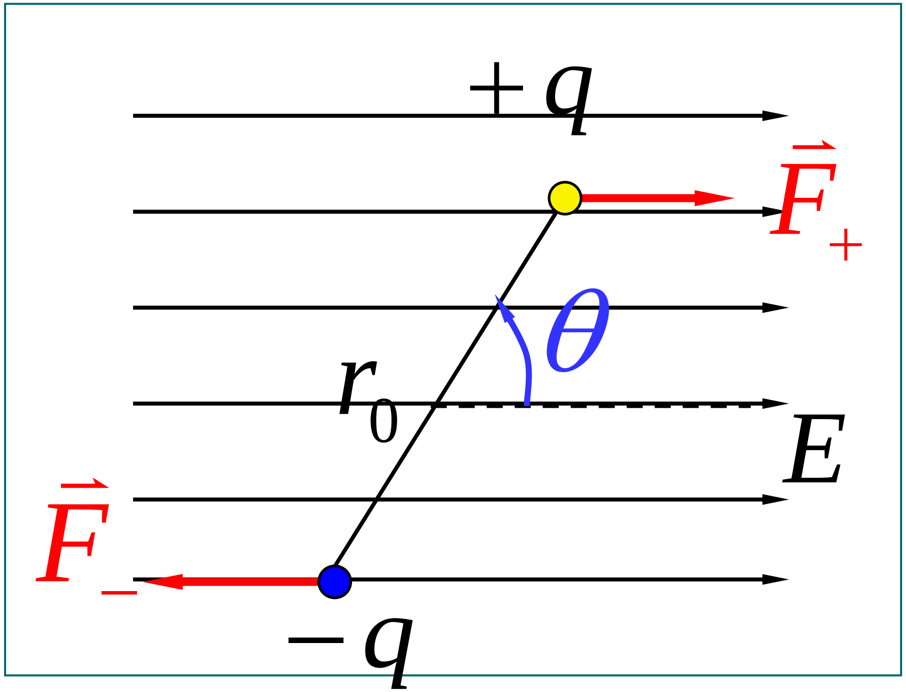
◆ 匀强电场中

$$\vec{F}=\vec{F}_{+}+\vec{F}_{-}$$

$$=q\vec{E}-q\vec{E}=0$$

$$M=qr_0E\sin\theta$$

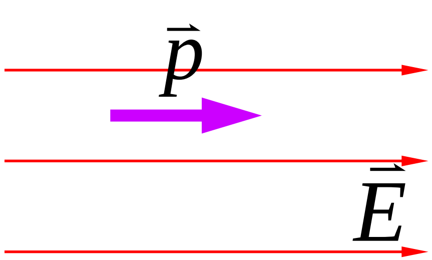
$$=pE\sin\theta$$

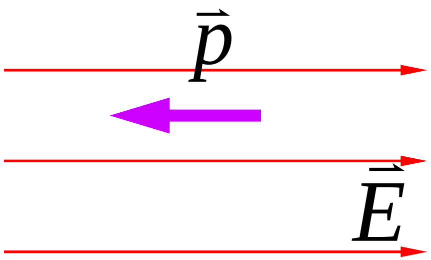


$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \qquad \vec{M} = 0$$

稳定平衡

非稳定平衡





◆ 非匀强电场中

$$\vec{F} = \vec{F}_{+} + \vec{F}_{-} = q\vec{E}_{+} - q\vec{E}_{-} \neq 0$$

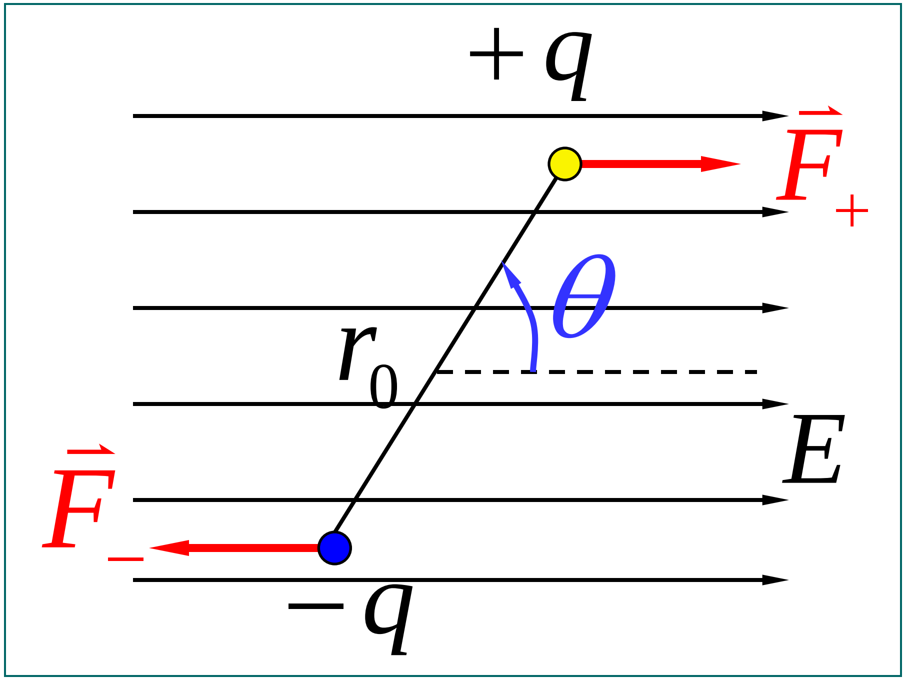
二 电偶极子在电场中的电势能和平衡位置

$$E_{\mathrm{p}} = qV_{+} - qV_{-}$$

$$= -q\left(-\frac{V_{+} - V_{-}}{r_0 \cos\theta}\right) r_0 \cos\theta$$

$$= -q r_0 E \cos\theta$$

$$\boxed{E_{\mathrm{p}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$



$$\begin{cases} \theta = 0 & E_{\mathrm{p}} = -p \cdot E \ \text{能量最低} \\ \theta = \pi/2 & E_{\mathrm{p}} = 0 \\ \theta = \pi & E_{\mathrm{p}} = p \cdot E \ \text{能量最高} \end{cases}$$

从能量观点看，系统的能量越低，状态越稳定。电偶极子电势能最低的位置，$\theta=0$即为**稳定平衡位置**。$\theta=\pi$，即为**非稳定平衡位置**。因此，在电场中的电偶极子，

一般情况下总是具有使自身的 **p** 转向与 **E** 的夹角 $\theta=0$ 的趋势。有极分子的极化，便是这种特性的体现。