

2.2.速率方程组与粒子数反转

(!可实现粒子数反转的几种量子系统)

回顾——实现粒子数反转的两个必要条件：

- ①工作物质粒子有适当的能级结构
- ②有合适的激励能源

思路——分析方法：速率方程方法以及速率方程的求解步骤

速率方程方法：分析粒子系统能否实现反转的一种方法

速率方程：描述各能级粒子数（密度）变化速率的方程组

速率方程的求解步骤:

- (1) 列出速率方程: $\frac{dn_i}{dt} = \dots\dots$
($i=1,2,\dots n$)

n 是粒子参予光和物质相互作用的能级总数。若粒子有 n 个能级, 则可列出 n 个方程, 其中 $(n-1)$ 个独立。

- (2) 求出速率方程的稳定解(数学解): 求出稳态下

($\frac{dn_i}{dt} = 0$) 各能级的粒子数, 或比值 $\frac{n_j}{n_i}$

其中 n_j ----激光上能级粒子数

n_i ----激光下能级粒子数

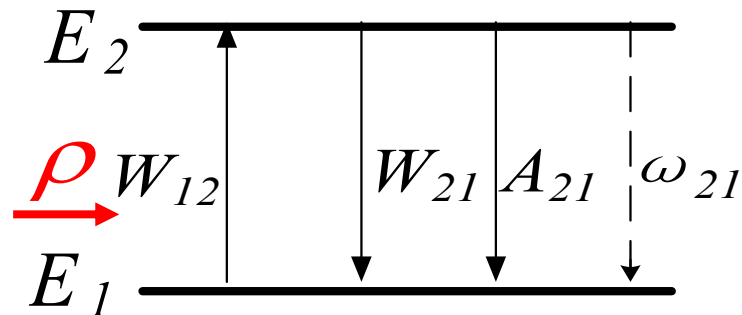
稳态----达到动态平衡时; 稳态下各能级粒子数密度不再变化 (即 $\frac{dn_i}{dt} = 0$)。

- (3) 确定粒子数反转(即 $\frac{n_j}{n_i} > 1$) 的物理条件(物理解)

2.2.1 三能级系统和四能级系统

一. 二能级系统 *(光与粒子相互作用过程只涉及二个能级)

1. 能级图



约定： 实线箭头代表辐射跃迁；
虚线箭头代表非辐射跃迁。

其中： W_{12} ——受激吸收几率(激励几率) $W_{12} = \frac{dn_2}{n_1 dt}$

W_{21} ——受激发射几率 $W_{21} = -\frac{dn_2}{n_2 dt}$

A_{21} ——自发发射几率 $A_{21} = \frac{dn_2}{n_2 dt}$

ω_{21} ——非辐射跃迁几率(热弛豫等, 热弛豫即热运动碰撞交换能量) (双下标代表过程的量)

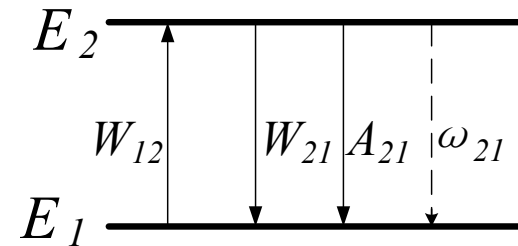
2. 速率方程：二能级系统只有1个独立的速率方程

方程中的每一项：

某一过程的**几率**与该过程始态能级上的粒子数之积 = 该过程导致的粒子数变化率(!)

能级 E_2 上粒子数密度的变化率为：

$$\frac{dn_2}{dt} = W_{12}n_1 - W_{21}n_2 - A_{21}n_2 - \omega_{21}n_2$$



第一项——受激吸收引起的 n_2 的增加率，取正号

(过程几率与过程始态上粒子数的乘积)；

第二项——受激发射引起的 n_2 的减少率，取负号；

第三项——自发发射引起的 n_2 的减少率，取负号；

第四项——非辐射跃迁引起的 n_2 的减少率，取负号。

若设 $g_1=g_2$, 则 $W_{12}=W_{21}=W$, 速率方程变为

$$\frac{dn_2}{dt} = W(n_1 - n_2) - A_{21}n_2 - \omega_{21}n_2$$

3. 稳定解(数学解): 稳态下 $\frac{dn_2}{dt} = 0$, 故

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{W}{W + A_{21} + \omega_{21}}$$

可见: 对二能级系统, 一般总有 $n_2 < n_1$;

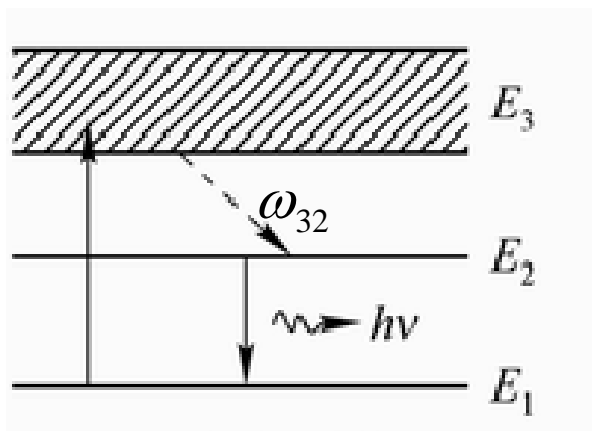
仅当激励速率很大时

$$(W_{12} \gg A_{21} + \omega_{21}), \quad n_2 \rightarrow n_1$$

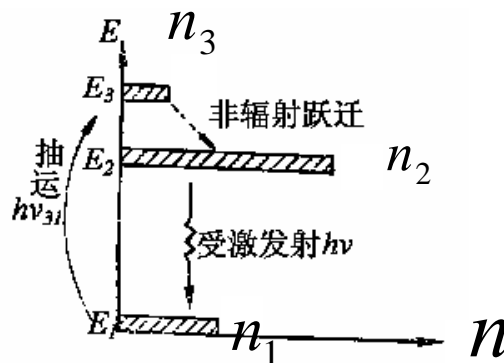
4. 结论(物理解): 在光频区, 二能级系统不可能实现粒子数
反转

二. 实现上下能级之间粒子数反转产生激光的物理过程:

1. 三能级系统图:



(a) 三能级系统



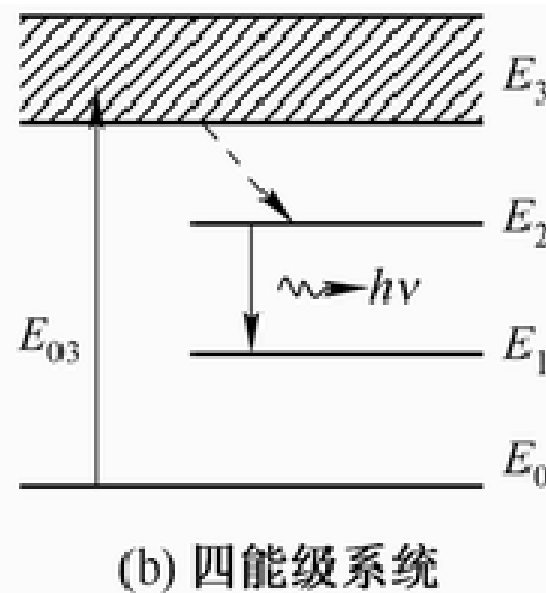
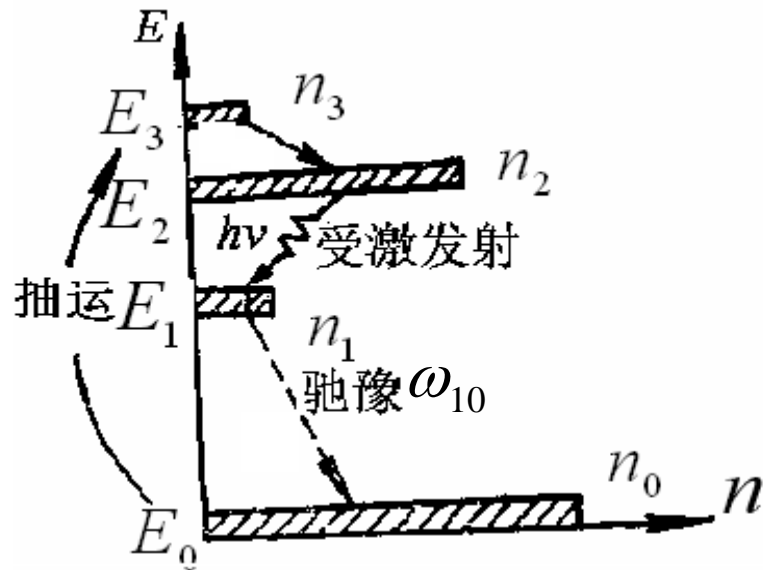
其中 E_1 ——基态能级，又是激光下能级，也是抽运能级。

E_2 ——激光上能级，是亚稳能级 (ω_{21} 小)。

E_3 ——抽运能级，非辐射跃迁几率大 (ω_{32} 大(!))

其主要特征是激光的下能级为基态，极易积累粒子(几乎聚集了所有粒子)，发光过程中下能级的粒子数一直保存有相当的数量，对抽运的要求很高。所以不易实现粒子数反转。

2. 四能级系统图：



E_0 :基能级/光抽运能级

E_1 :不是基态能级，而是一个激发态能，是激光下能级， τ_{10} 小

而 ω_{10} 大(迅速弛豫到 E_0 , 抽空 E_1 , 减少 n_1) 在常温下基本上是空的。

E_3 : 光抽运能级, τ_{32} 小而 ω_{32} 大(迅速弛豫到 E_2)

E_2 : 激光上能级/亚稳能级(易积累 n_2)

由图可见：四能级系统要实现粒子数反转，只要求 $n_2 > n_1$ 而不必令 $n_2 > n_0$, 而 n_0 则是极易积累的基态粒子数。

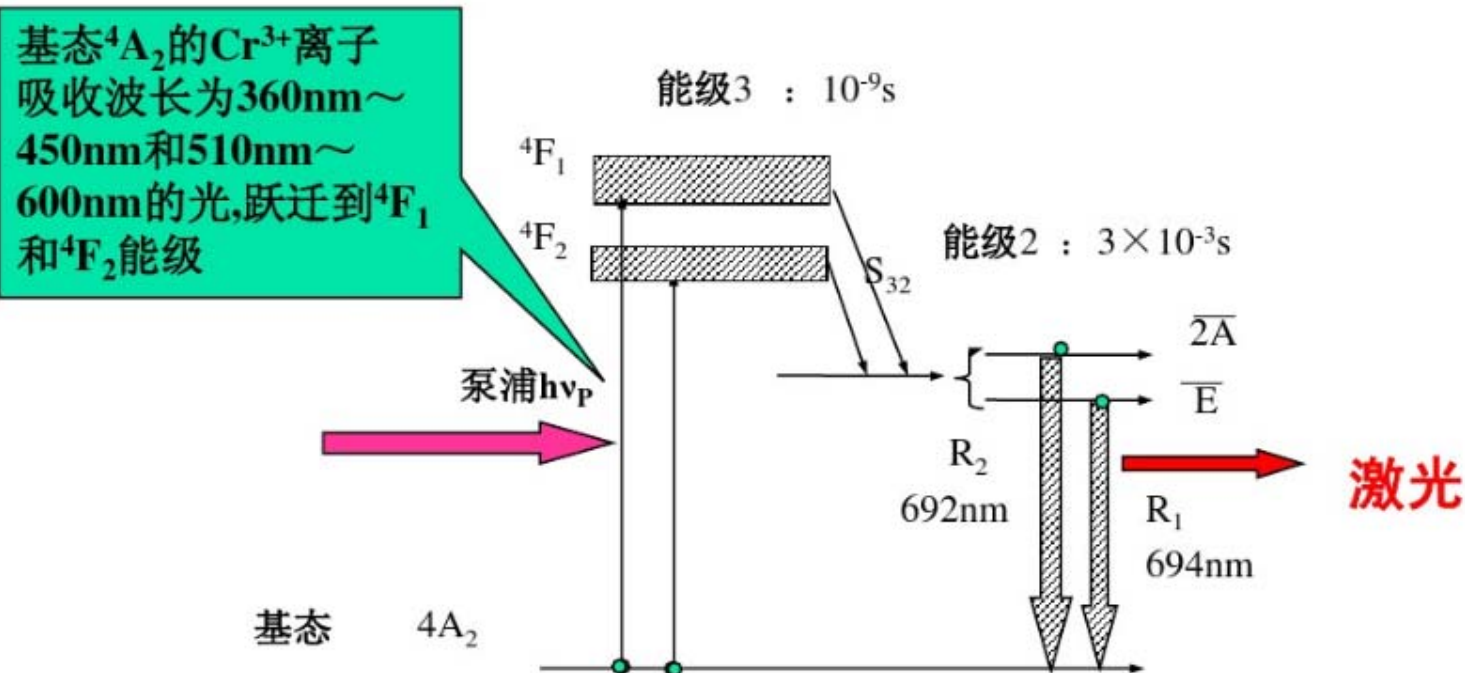
3. 激光下能级粒子数与基态粒子数的比较:

实例: N_d^{3+} (三价钕离子)

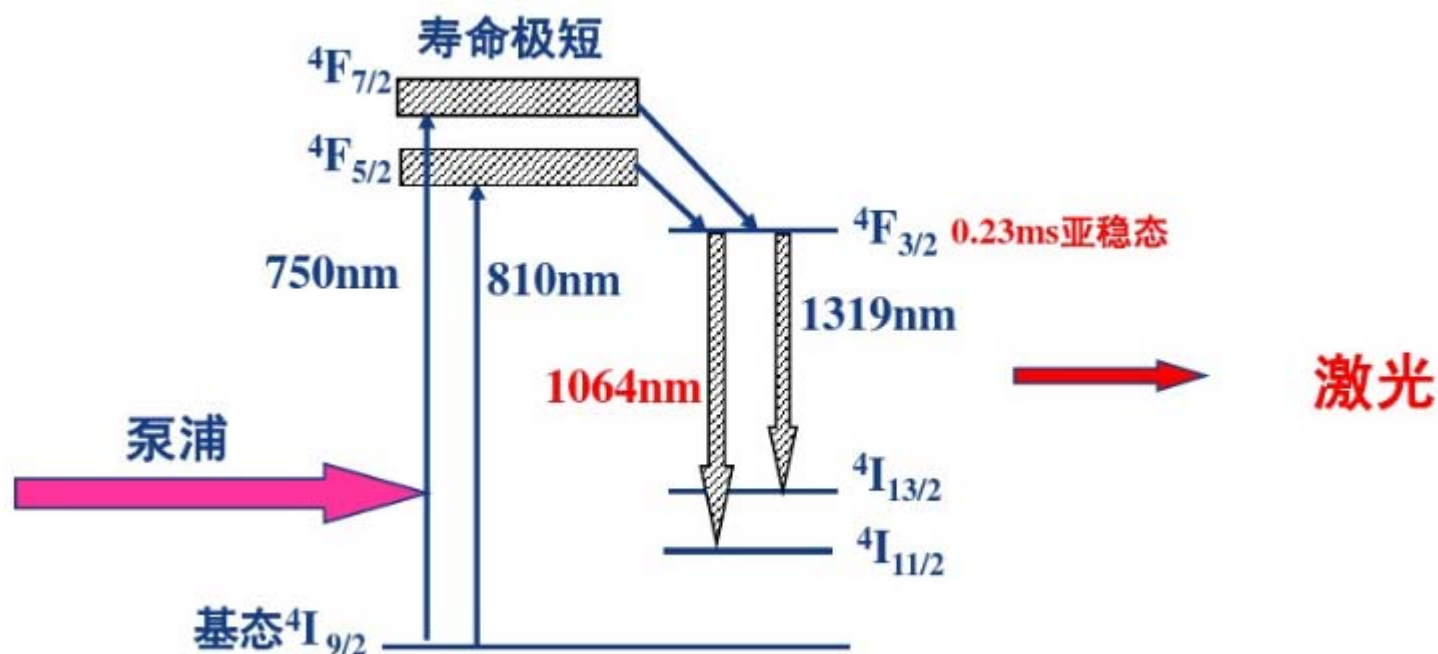
$$\because h\nu_{10}=0.25eV \quad , \text{而常温下}(T=300K) \quad kT=0.062eV$$

$$\therefore \frac{n_1}{n_0} = \exp(-h\nu_{21}/kT) \approx e^{-9.5} \approx 10^{-4}$$

即 $n_1 \ll n_0$



- ❖ **泵浦光照射**红宝石——基态 4A_2 能级上的 Cr^{3+} 离子吸收波长为360nm~450nm和510nm~600nm的光,跃迁到 4F_1 和 4F_2 能级。
- ❖ Cr^{3+} 在 4F_1 和 4F_2 能级上的**寿命很短** (约为 $10^{-9}s$) , 因而迅速**无辐射跃迁**到 2E 能级。
- ❖ 2E 能级是一个**寿命较长** (约 $3 \times 10^{-3}s$) 的**亚稳态**能级, 在这个能级上可以聚集较多的 Cr^{3+} 离子。
- ❖ 当光泵足够强时, 在 2E 和 4A_2 能级将可实现**集居数反转**。



- ❖ 泵浦光照射后，基态 $^4I_{9/2}$ 的钕离子Nd³⁺跃迁到 $^4F_{5/2}$ 和 $^4F_{7/2}$ 能级（吸收带的中心波长分别是810nm和750nm）。迅速无辐射跃迁到 $^4F_{3/2}$ 能级。
- ❖ $^4F_{3/2}$ 寿命0.23ms（较长）亚稳态能级。
- ❖ $^4F_{3/2}$ 能级的Nd³⁺离子向多个终端能级跃迁并产生辐射。
- ❖ 向 $^4I_{11/2}$ 跃迁几率最大（波长为1064nm），
- ❖ 其次是向 $^4I_{13/2}$ 的跃迁（波长为1319nm），
- ❖ 向 $^4I_{9/2}$ 跃迁几率最小。

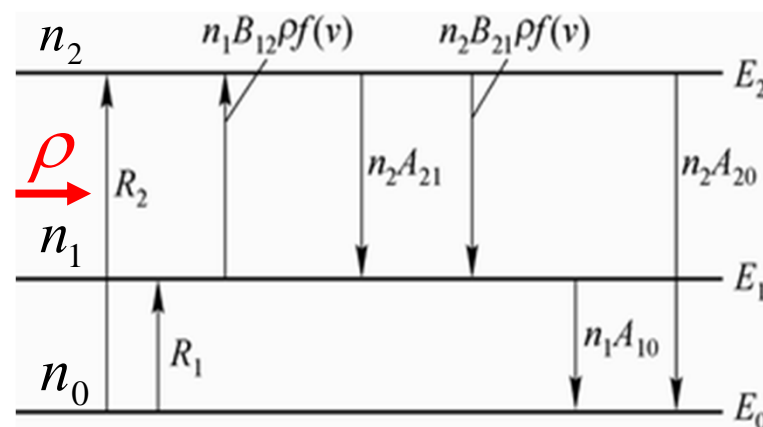
2.2.2 速率方程组

1. 图(2-5)为简化的四能级图, n_0 、 n_1 、 n_2 分别为基态、上能级、下能级的粒子数密度; n 为单位体积内增益介质的总粒子数, R_1 、 R_2 分别是激励能源将基态 E_0 上的粒子抽运到 E_1 、 E_2 能级上的速率;

2. 速率方程: 3个能级应有2个独立方程

(1) E_2 能级在单位时间内增加的粒子数密度为:

$$\begin{aligned}\frac{dn_2}{dt} &= R_2 - n_2 A_{21} - n_2 W_{21} + n_1 W_{12} \\ &= R_2 - n_2 A_{21} - n_2 B_{21} \rho f(\nu) + n_1 B_{12} \rho f(\nu)\end{aligned}$$



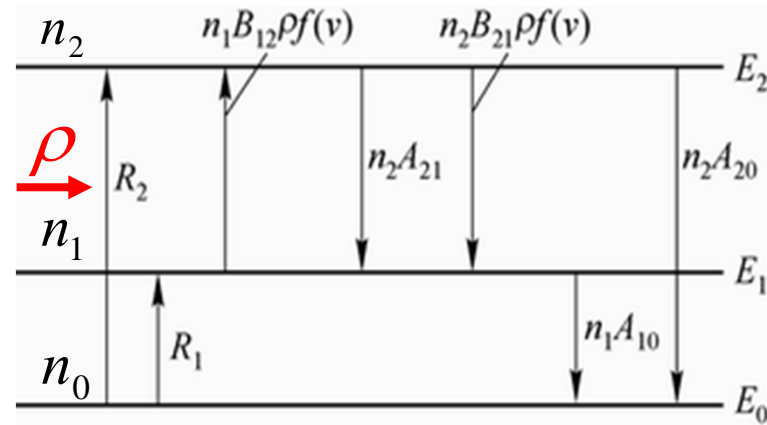
图(2-5) 简化的四能级图

因为 E_2 能级向 E_1 能级的自发跃迁几率 A_{21} 远大于 E_2 能级向基级能级 E_0 的自发跃迁几率 A_{20} ,所以这里没有考虑由 A_{20} 引起的跃迁。

此处因为考虑到介质的线型函数远比传播着的光能量密度为 ρ 的单色受激辐射光的线宽要宽得多,故应用 $W_{21} = B_{21} \rho f(\nu_0)$

和 $W_{12} = B_{12} \rho f(\nu_0)$

(2) E_1 能级在单位时间内增加的粒子数密度为:



图(2-5) 简化的四能级图

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= R_1 + n_2 A_{21} + n_2 W_{21} - n_1 W_{12} - n_1 A_{10} \\ &= R_1 + n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \rho f(v) - n_1 B_{12} \rho f(v) - n_1 A_{10}\end{aligned}$$

式中各项的物理过程及物理意义如同以上所述.

总的粒子数为各能级粒子数之和

$$n_0 + n_1 + n_2 = n$$

速率方程组

$$\begin{aligned}\frac{dn_2}{dt} &= R_2 - n_2 A_{21} - n_2 W_{21} + n_1 W_{12} \\ &= R_2 - n_2 A_{21} - n_2 B_{21} \rho f(\nu) + n_1 B_{12} \rho f(\nu)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= R_1 + n_2 A_{21} + n_2 W_{21} - n_1 W_{12} - n_1 A_{10} \\ &= R_1 + n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \rho f(\nu) - n_1 B_{12} \rho f(\nu) - n_1 A_{10}\end{aligned}$$

$$n = n_0 + n_1 + n_2$$

以上三式即为在增益介质中同时存在抽运、吸收、自发辐射和受激辐射时各能级上的粒子数密度随时间变化的速率方程组。

2.2.3 稳态工作时的粒子数密度反转分布

一. 当激光器工作达到稳定时, 抽运和跃迁达到动态平衡, 各能级上粒子数密度并不随时间而改变, 即:

$$\frac{dn_0}{dt} = \frac{dn_1}{dt} = \frac{dn_2}{dt} = 0$$

假设能级 E_2 、 E_1 的简并度相等, 即 $g_1=g_2$,

因此有 $B_{12}=B_{21}$,

则有:

$$\frac{dn_2}{dt} = R_2 - n_2 A_{21} - (n_2 B_{21} - n_1 B_{12}) \rho f(\nu) = 0$$

$$\frac{dn_1}{dt} = R_1 + n_2 A_{21} + (n_2 B_{21} - n_1 B_{12}) \rho f(\nu) - n_1 A_{10} = 0$$

将上两式相加可得: $(R_1 + R_2) = n_1 A_{10} = \frac{n_1}{\tau_1} \Rightarrow n_1 = (R_1 + R_2) \tau_1$

由上几式可得：

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{R_2 + (R_1 + R_2)\tau_1 B_{21}\rho f(\nu)}{A_2 + B_{21}\rho f(\nu)} \\ &= \frac{R_2\tau_2 + (R_1 + R_2)\tau_1\tau_2 B_{21}\rho f(\nu)}{1 + \tau_2 B_{21}\rho f(\nu)} \end{aligned}$$

则激光上下能级粒子数密度反转分布的表达式为：

$$\begin{aligned} \Delta n = n_2 - n_1 &= \frac{R_2\tau_2 + (R_1 + R_2)\tau_1\tau_2 B_{21}\rho f(\nu)}{1 + \tau_2 B_{21}\rho f(\nu)} - (R_1 + R_2)\tau_1 \\ &= \frac{R_2\tau_2 - (R_1 + R_2)\tau_1}{1 + \tau_2 B_{21}\rho f(\nu)} = \frac{\Delta n^0}{1 + \tau_2 B_{21}\rho f(\nu)} \end{aligned}$$

式中 τ_1 、 τ_2 分别为上、下能级的寿命。

2.2.4 小信号工作时的粒子数密度反转分布

一. 小信号粒子数密度反转分布 Δn^0

Δn^0 称作小信号反转粒子数密度,它正比于受激辐射上能级寿命 τ_2 及激发几率 R_2 .

由式
$$\Delta n = n_2 - n_1 = \frac{R_2 \tau_2 - (R_1 + R_2) \tau_1}{1 + \tau_2 B_{21} \rho f(\nu)} = \frac{\Delta n^0}{1 + \tau_2 B_{21} \rho f(\nu)}$$
 可得:

$$\Delta n^0 = R_2 \tau_2 - (R_1 + R_2) \tau_1$$

它是当分母中的第二项为零时的粒子数密度反转分布值。而分母中的第二项一定是个正值,因此它又是粒子数密度反转分布值可能达到的最大值。显然只有在谐振腔中传播的单色光能密度可能趋近于零($\rho \rightarrow 0$ 即 $I \rightarrow 0$),换句话说,参数 Δn^0 对应着谐振腔的单色光能密度为零或者近似为零时的粒子数密度反转分布的大小。

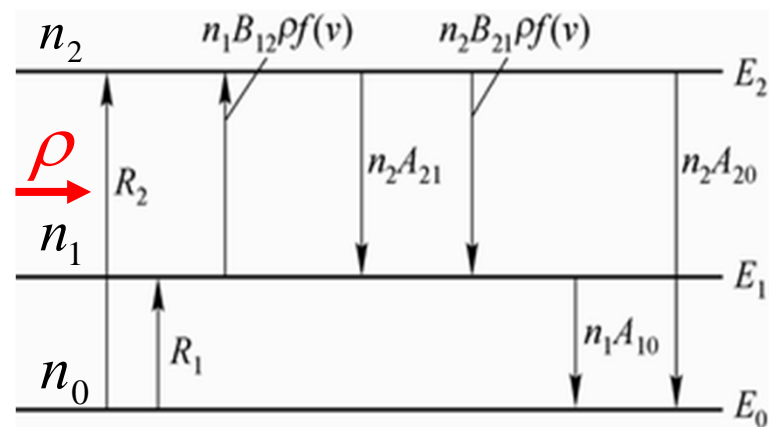
参数 Δn^0 对应着激光谐振腔尚未发出激光时的状态(入射光不

含 $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$),通常把这个状态叫作小信号工作状态,而参

数 Δn^0 就被称作是小信号工作时的粒子数密度反转分布。

$$\Delta n^0 = R_2 \tau_2 - (R_1 + R_2) \tau_1$$

二. 小信号粒子数反转的物理条件:



图(2-5) 简化的四能级图

1. 激光上能级 E_2 的寿命要长, 使该能级上的粒子不能轻易地通过非受激辐射而离开;
2. 激光下能级 E_1 的寿命要短, 使该能级上的粒子很快地衰减;
3. 选择合适的激励能源, 使它对介质的 E_2 能级的抽运速率 R_2 愈大愈好, 而 E_1 能级的抽运速率 R_1 愈小愈好.

即满足条件

$$\begin{cases} \tau_2 > \tau_1 \\ R_2 > R_1 \end{cases}$$

2.2.5 均匀增宽型介质的粒子数密度反转分布

由式
$$\Delta n = n_2 - n_1 = \frac{R_2 \tau_2 - (R_1 + R_2) \tau_1}{1 + \tau_2 B_{21} \rho f(\nu)} = \frac{\Delta n^0}{1 + \tau_2 B_{21} \rho f(\nu)}$$
 可知

激光工作物质的光谱线型函数对激光器的工作有很大的影响. 具有均匀加宽谱线和具有非均匀加宽谱线的工作物质的反转密度行为有很大差别, 由它们所构成的激光器的工作特性也有很大不同, 因此将分别予以讨论。

一. 对于均匀增宽的介质

$$f(\nu) = \frac{\Delta\nu/2\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2} \text{ 且 } f(\nu_0) = \frac{2}{\pi \cdot \Delta\nu}$$

如果介质中传播的光波频率为 ν_0 , 则有:

$$\rho f(\nu_0) = \frac{2\mu}{\pi \cdot c \cdot \Delta\nu} I \Rightarrow \tau_2 B_{21} \rho f(\nu) = \tau_2 B_{21} \frac{2\mu}{\pi c \Delta\nu} I = \frac{I}{I_s};$$

$$\text{其中 } I_s = \frac{\pi c \Delta\nu}{2\mu B_{21} \tau_2} \longrightarrow \text{饱和光强}$$

如果介质中传播的光波频率 $\nu \neq \nu_0$ ，则有：

$$\rho f(\nu) = \frac{\mu}{c} I f(\nu) = \frac{\mu}{c} I \frac{2}{\pi \Delta \nu} \cdot \frac{f(\nu)}{2/\pi \Delta \nu} = \frac{2\mu}{\pi c \Delta \nu} I \frac{f(\nu)}{f(\nu_0)}$$

则有：

$$\tau_2 B_{21} \rho f(\nu) = I \cdot \frac{f(\nu)}{f(\nu_0)} \frac{2\mu \tau_2 B_{21}}{\pi c \Delta \nu} = \frac{I}{I_s} \frac{f(\nu)}{f(\nu_0)}$$

一般情况下的粒子数密度反转分布可以表示为：

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \frac{I}{I_s} \frac{f(\nu)}{f(\nu_0)}} = \begin{cases} \frac{\Delta n^0}{1 + I/I_s} & \nu = \nu_0 \\ \frac{[(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta \nu/2)^2] \Delta n^0}{(\nu - \nu_0)^2 + (1 + I/I_s)(\Delta \nu/2)^2} & \nu \neq \nu_0 \end{cases}$$

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \frac{I}{I_s} \frac{f(\nu)}{f(\nu_0)}} = \begin{cases} \frac{\Delta n^0}{1 + I/I_s} & \nu = \nu_0 \\ \frac{[(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2] \Delta n^0}{(\nu - \nu_0)^2 + (1 + I/I_s)(\Delta\nu/2)^2} & \nu \neq \nu_0 \end{cases} \quad (2-10)$$

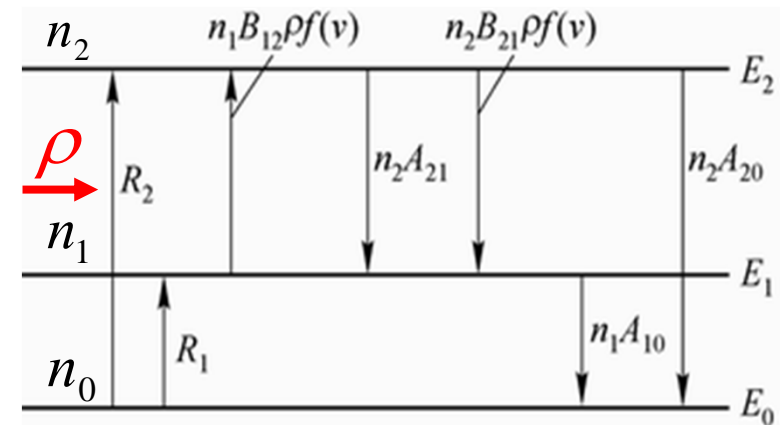
这就是均匀增宽型介质 E_2 、 E_1 能级之间粒子数反转分布的表达式。它给出能级间粒子数反转分布值与腔内光强、光波的中心频率、介质的饱和光强、激励能源的抽运速率以及介质能级的寿命等参量的关系。

均匀增宽情形：只要入射光频率在谱线线宽范围内，所有粒子都参加受激发射/吸收；

2.2.6 均匀增宽型介质粒子数密度反转分布的饱和效应

本节研究: 反转粒子数密度 Δn 的饱和效应 (讨论 Δn 与各种因素的关系, 引出 Δn 饱和效应的概念。)

$$\begin{aligned}\Delta n = n_2 - n_1 &= \frac{R_2 \tau_2 - (R_1 + R_2) \tau_1}{1 + \tau_2 B_{21} \rho f(\nu)} \\ &= \frac{\Delta n^0}{1 + \tau_2 B_{21} \rho f(\nu)} = \frac{\Delta n^0}{1 + \tau_2 B_{21} \frac{\mu}{c} I f(\nu)}\end{aligned}$$



图(2-5) 简化的四能级图

一. **粒子数反转分布 Δn 饱和效应**: 介质已实现粒子数反转并达到阈值。入射光中含频率 $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$ 时, 强烈的受激发射使激光上能级 E_2 的粒子数 n_2 迅速减少, Δn 随入射光强 I 增大反而下降的现象。

饱和原因: 入射光引起强烈的受激发射使激光上能级粒子数减少。

二. Δn 与入射光频率 ν 的关系:

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \frac{I}{I_s} \frac{f(\nu)}{f(\nu_0)}} = \begin{cases} \frac{\Delta n^0}{1 + I/I_s} & \nu = \nu_0 \\ \frac{[(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2] \Delta n^0}{(\nu - \nu_0)^2 + (1 + I/I_s)(\Delta\nu/2)^2} & \nu \neq \nu_0 \end{cases}$$

可见: I 一定时, 对不同入射光频率 ν , Δn 不同.

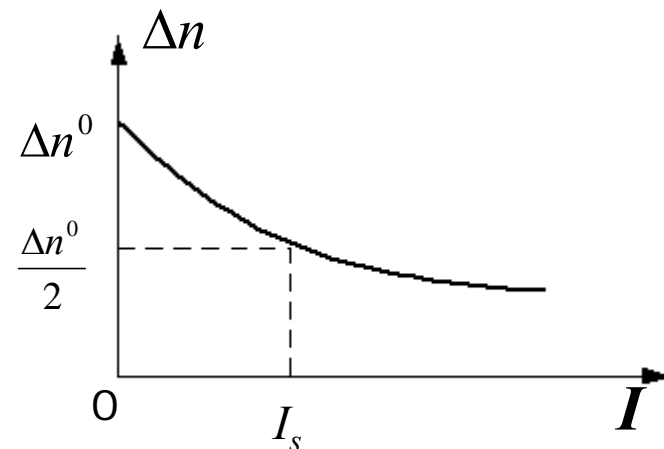
讨论

① $\nu = \nu_0$ 时: (入射光频率等于谱线中心频率)

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \frac{I}{I_s}}$$

只要 $I \neq 0$, 必有 $\Delta n < \Delta n^0$ 有饱和效应;

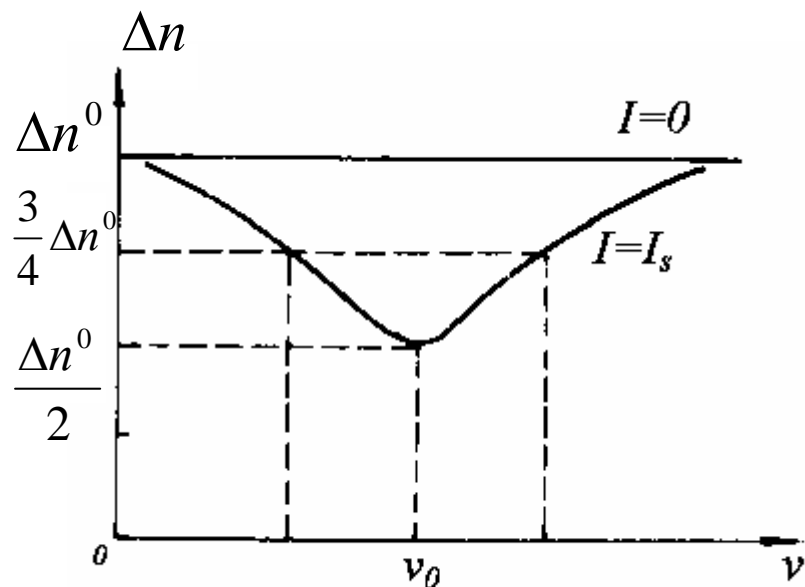
若 $I \sim I_s$, $\Delta n \sim \Delta n^0 / 2$, 饱和效应显著。



这是由于中心频率处受激辐射几率最大, 所以入射光造成的反转粒子数下降越严重。

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \frac{I}{I_s} \frac{f(\nu)}{f(\nu_0)}} = \begin{cases} \frac{\Delta n^0}{1 + I/I_s} & \nu = \nu_0 \\ \frac{[(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2] \Delta n^0}{(\nu - \nu_0)^2 + (1 + I/I_s)(\Delta\nu/2)^2} & \nu \neq \nu_0 \end{cases}$$

② $\nu \neq \nu_0$ 时：（入射光频率偏离谱线中心频率时）



可见：只要 $I \neq 0$ ，则 $\Delta n < \Delta n^0$ ，
仍有饱和效应。

在 $|\nu - \nu_0| = \sqrt{1 + \frac{I}{I_s}} \cdot \frac{\Delta\nu}{2}$ 处

$I \sim I_s$ 时

$$\Delta n = \frac{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu/2)^2 (1 + \frac{I}{I_s})} \cdot \Delta n^0 = \frac{2(\Delta\nu/2)^2 + (\Delta\nu/2)^2}{2(\Delta\nu/2)^2 + (\Delta\nu/2)^2 2} \Delta n^0 = \frac{3}{4} \Delta n^0$$

结论：不论 ν 是否偏离 ν_0 均有饱和效应；偏离 ν_0 越远，饱和作用越弱。

(3). 为了更具体地说明频率对 Δn 的影响，令腔中光强都等于 I_s ，根据上式算出几个频率下的 Δn 值。如下表所示。随着频率对中心频率的偏离，光波对粒子数密度反转分布值的影响逐渐减小。

频率 Δn	ν	ν_0	$\nu_0 \pm \frac{\Delta \nu}{2}$	$\nu_0 \pm (1 + \frac{I}{I_s})^{1/2} \frac{\Delta \nu}{2}$	$\nu_0 \pm \Delta \nu$
Δn		$\frac{\Delta n^0}{2}$	$\frac{2}{3} \Delta n^0$	$\frac{3}{4} \Delta n^0$	$\frac{5}{6} \Delta n^0$
$\Delta n^0 - \Delta n$		$\frac{\Delta n^0}{2}$	$\frac{1}{3} \Delta n^0$	$\frac{1}{4} \Delta n^0$	$\frac{1}{6} \Delta n^0$

确定对介质有影响的光波的频率范围，通常采用与线型函数的线宽同样的定义方法：频率为 ν_0 、强度为 I_s 的光波使 Δn^0 减少了 $\Delta n^0/2$ ，这里把使 Δn^0 减少 $(\Delta n^0/2)/2$ 的光波频率 ν 与 ν_0 之间的间隔，定义为能使介质产生饱和作用的频率范围，通常认为频率在此范围内的人射光才会引起显著的饱和作用。

$$\nu_0 - \nu = \pm \sqrt{1 + \frac{I}{I_s}} \frac{\Delta \nu}{2}$$

$$\Delta n = \frac{\Delta n^0}{1 + \frac{I}{I_s} \frac{f(\nu)}{f(\nu_0)}} = \begin{cases} \frac{\Delta n^0}{1 + I/I_s} & \nu = \nu_0 \\ \frac{[(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta \nu/2)^2] \Delta n^0}{(\nu - \nu_0)^2 + (1 + I/I_s)(\Delta \nu/2)^2} & \nu \neq \nu_0 \end{cases}$$

三. 饱和光强(饱和参量) I_s 的物理意义: 衡量饱和的程度

- 1、 $I \ll I_s$ 时, Δn 和 I 无关, 饱和可忽略; 其中 $I_s = \frac{\pi c \Delta \nu}{2 \mu B_{21} \tau_2}$
- 2、 $I \sim I_s$ 时, Δn 随 I 增大而下降, 显著饱和.
- 3、 I_s 由介质性质决定, 从手册查出.

I_s 的数值取决于增益介质的性质, 它可以由实验测定, 或由经验公式确定.

氦氖激光器: $I_s = 0.1 \text{ W/mm}^2 \sim 0.3 \text{ W/mm}^2$

二氧化碳激光器: $I_s = \frac{72}{d^2} \text{ W/mm}^2$

d ——放电管的直径, 单位为 mm

$$n_2 - \frac{g_2}{g_1} n_1 = \Delta n \text{ 以及 } (n_2 - \frac{g_2}{g_1} n_1) B_{21} f(\nu) h\nu \frac{\mu}{c} = G$$

$$I(z) = I(0)e^{Gz} \Rightarrow G = \frac{1}{I(z)} \cdot \frac{dI(z)}{dz}$$

下节导出激光工作物质的增益系数表示式, 分析影响增益系数的各种因素, 着重讨论光强增加时增益的饱和行为。

具有均匀加宽谱线和具有非均匀加宽谱线的工作物质的增益饱和行为有很大差别, 由它们所构成的激光器的工作特性也有很大不同, 因此将分别予以讨论。