第六章 集合代数

主要内容

- 集合的基本概念

  属于、包含

  幂集、空集

  文氏图等

- 集合的基本运算

  并、交、补、差等

- 集合恒等式

  集合运算的算律、恒等式的证明方法

6.1 集合的基本概念

1. 集合定义

集合没有精确的数学定义

理解：由离散个体构成的整体称为集合，称这些个体为集合的元素

常见的数集：N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合

谓词表示法----通过谓词概括集合元素的性质

实例：

枚举法 自然数集合 N={0,1,2,3,…}

谓词法 $S=\{ x \mid x$是实数，$x^2-1=0\}$

元素与集合

1. 集合的元素具有的性质

   无序性：元素列出的顺序无关

   相异性：集合的每个元素只计数一次

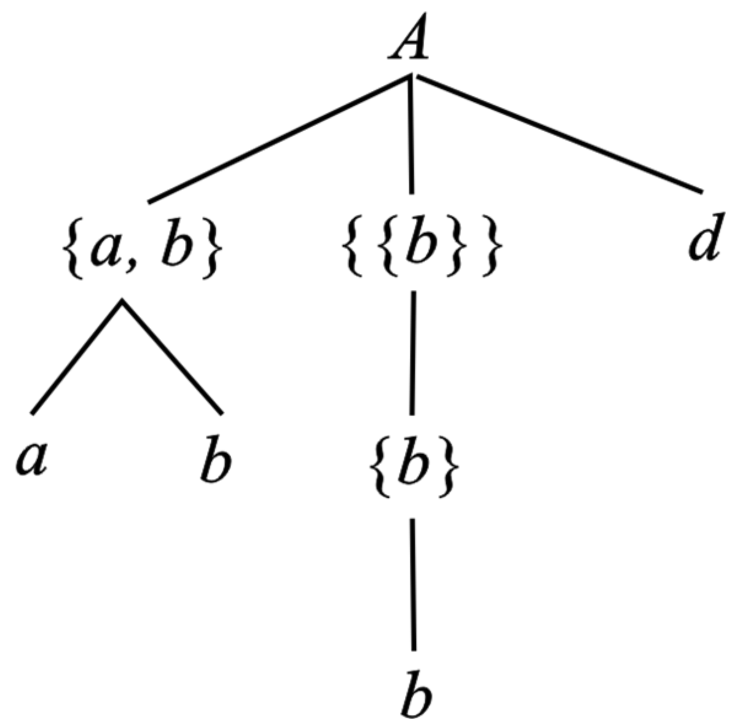
   确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素

   任意性：集合的元素也可以是集合

2. 元素与集合的关系

   隶属关系：$\in$或者$\notin$

3. 集合的树型层次结构



$d \in A$, $a \notin A$

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq, =, \nsubseteq, \neq, \subset, \not\subset$

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

思考：$\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

空集、全集和幂集

1. 定义6.4 空集 $\varnothing$：不含有任何元素的集合

   实例： $\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$

   定理6.1 空集是任何集合的子集。

   证 对于任意集合A，

   $$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T \text{ (恒真命题)}$$

   推论 $\varnothing$是惟一的

2. 定义6.5 幂集：$P(A)=\{ x \mid x \subseteq A \}$

   实例：$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$， $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

   计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

3. 定义6.6 全集 E：包含了所有集合的集合

   全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集

6.2 集合的运算

初级运算

集合的基本运算有

定义6.7 并 $A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$

交 $A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$

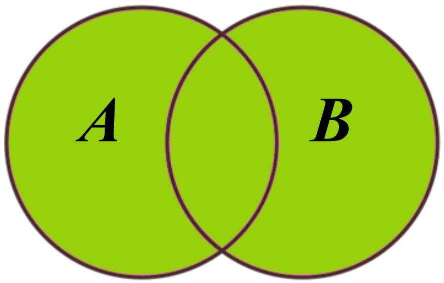
相对补 $A-B = \{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

定义6.8 对称差 $A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$

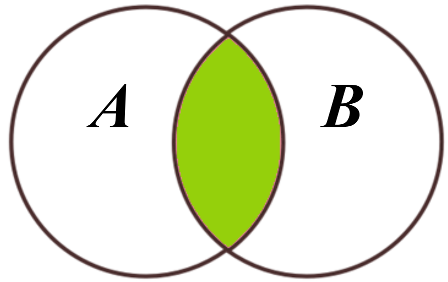
定义6.9 绝对补 $\sim A = E-A$

文氏图

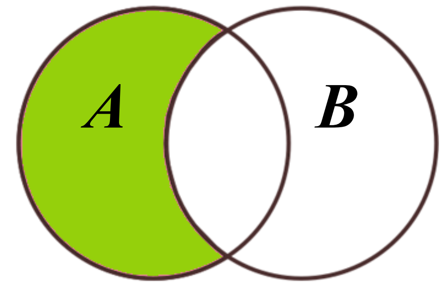
集合运算的表示



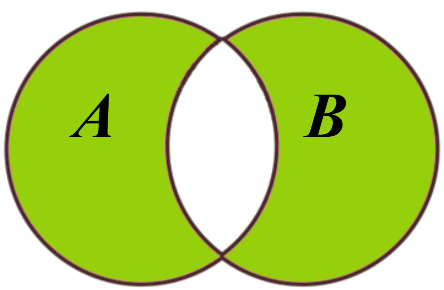
$A \cup B$



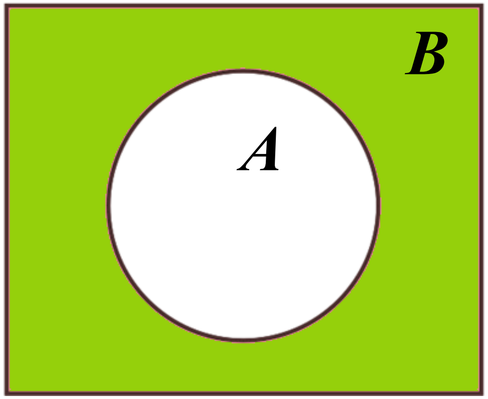
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

几点说明

- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$

  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \}$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$
- $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$

广义运算

1. 集合的广义并与广义交

定义6.10 广义并 $\cup A = \{ x \mid \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$

广义交 $\cap A = \{ x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

实例

$\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$

$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$

$\cup\{\{a\}\}=\{a\}$， $\cap\{\{a\}\}=\{a\}$

$\cup\{a\}=a$， $\cap\{a\}=a$

关于广义运算的说明

2. 广义运算的性质

(1) $\cup\varnothing=\varnothing$，$\cap\varnothing$无意义

(2) 单元集$\{x\}$的广义并和广义交都等于x

(3) 广义运算减少集合的层次（括弧减少一层）

(4) 广义运算的计算：一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$

$$\cap\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

3. 引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算，例如

$$\cup\{\{x\} \mid x\in \mathbf{R}\}=\mathbf{R}$$

这里的 R 代表实数集合.

运算的优先权规定

1 类运算：初级运算$\cup$, $\cap$, $-$, $\oplus$,
优先顺序由括号确定

2 类运算：广义运算和~运算,
运算由右向左进行

混合运算：2 类运算优先于1 类运算

例1 $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，计算$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$.

解：

$$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$$
$$=\cap\{a,b\}\cup(\cup\{a,b\}-\cup\{a\})$$
$$=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)$$
$$=(a\cap b)\cup(b-a)=b$$

有穷集合元素的计数

1. 文氏图法

2. 包含排斥原理

定理6.2 设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=|S|-\sum_{1\le i\le n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$
$$-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

推论 S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

实例

例2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

解 方法一：文氏图

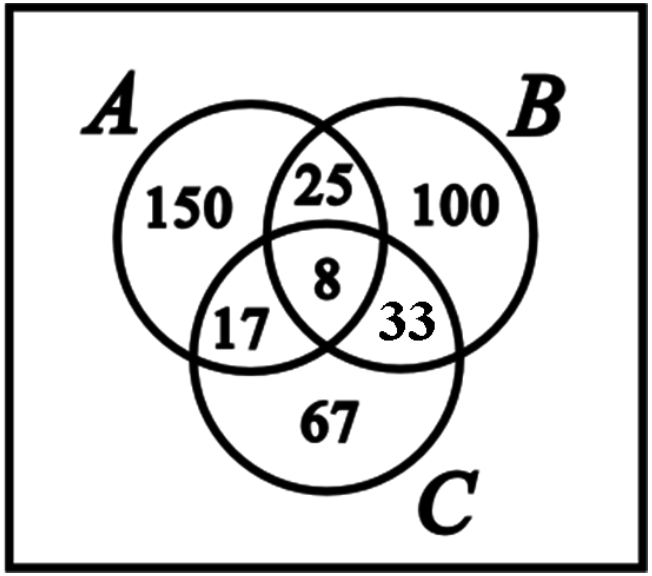
定义以下集合：

$S=\{x \mid x\in Z \wedge 1\le x\le 1000\}$

$A=\{x \mid x\in S \wedge x$可被5整除$\}$

$B=\{x \mid x\in S \wedge x$可被6整除$\}$

$C=\{x \mid x\in S \wedge x$可被8整除$\}$



画出文氏图，然后填入相应的数字，解得

$$N=1000-(200+100+33+67)$$
$$=600$$

实例

方法二

$|S| = 1000$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$, $|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$, $|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/33 \rfloor = 33$

$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$$

$$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$

6.3 集合恒等式

集合算律

1. 只涉及一个运算的算律：
   交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	∪与∩	∩与⊕
分配	$A\cup(B\cap C)=$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)$ $=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3．涉及补运算的算律：

DM律，双重否定律

	$-$	$\sim$
*D.M*律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

集合算律

4．涉及全集和空集的算律：
补元律、零律、同一律、否定律

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap{\sim}A=\varnothing$	$A\cup{\sim}A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	${\sim}\varnothing=E$	${\sim}E=\varnothing$

集合证明题

证明方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X\subseteq Y$

任取x， $x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一 分别证明 $X\subseteq Y$ 和 $Y\subseteq X$

方法二

任取x，$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

集合等式的证明

方法一：命题演算法

例3 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

例4 证明 $A-B = A\cap\sim B$

证 任取x,

$$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B \Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$

等式代入法

方法二：等式置换法

例5 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证 $A\cup(A\cap B)$

$= (A\cap E)\cup(A\cap B)$ （同一律）

$= A\cap(E\cup B)$ （分配律）

$= A\cap(B\cup E)$ （交换律）

$= A\cap E$ （零律）

$= A$ （同一律）

包含等价条件的证明

例6 证明 $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

① ② ③ ④

证明思路：

- 确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④
- 确定命题间的关系（哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论）：本题中每个命题都可以作为已知条件，每个命题都是要证明的结论
- 确定证明顺序：①⇒②，②⇒③，③⇒④，④⇒①
- 按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）

证明

证明$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

①　　②　　③　　④

证 ①⇒②

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x,

$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\lor x\in B \Rightarrow x\in B\lor x\in B \Leftrightarrow x\in B$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述②得证.

②⇒③

$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$ (由②知$A\cup B=B$，将$A\cup B$用B代入)

证明

③⇒④

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么知道$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

④⇒①

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x(x\in A\wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件④矛盾.

第六章 习题课

主要内容

- 集合的两种表示法
- 集合与元素之间的隶属关系、集合之间的包含关系的区别与联系
- 特殊集合：空集、全集、幂集
- 文氏图及有穷集合的计数
- 集合的$\cup$, $\cap$, $-$, $\sim$, $\oplus$等运算以及广义$\cup$, $\cap$运算
- 集合运算的算律及其应用

基本要求

- 熟练掌握集合的两种表示法
- 能够判别元素是否属于给定的集合
- 能够判别两个集合之间是否存在包含、相等、真包含等关系
- 熟练掌握集合的基本运算（普通运算和广义运算）
- 掌握证明集合等式或者包含关系的基本方法

练习1

1．判断下列命题是否为真

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$

(2) $\varnothing\in\varnothing$

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

(5) $\{a, b\}\subseteq\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{a, b\}\in\{a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{a, b\}\subseteq\{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{a, b\}\in\{a, b, \{\{a,b\}\}\}$

解 (1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真，其余为假.

方法分析

(1) 判断元素a与集合A的隶属关系是否成立基本方法：

把 a 作为整体检查它在A中是否出现，注意这里的 a 可能是集合表达式.

(2) 判断$A \subseteq B$的四种方法

- 若A,B是用枚举方式定义的，依次检查A的每个元素是否在B中出现.
- 若A,B是谓词法定义的，且A, B中元素性质分别为P和Q，那么"若P则Q"意味 $A \subseteq B$，"P当且仅当Q"意味 $A = B$.
- 通过集合运算判断$A \subseteq B$，即$A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A - B = \varnothing$三个等式中有一个为真.
- 通过文氏图判断集合的包含（注意这里是判断，而不是证明

练习2

2．设

$S_1=\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$，　　$S_2=\{2, 4, 6, 8\}$

$S_3=\{1, 3, 5, 7, 9\}$　　$S_4=\{3, 4, 5\}$

$S_5=\{3, 5\}$

确定在以下条件下X是否与$S_1,\ldots,S_5$中某个集合相等？如果是，又与哪个集合相等？

（1）若 $X\cap S_5=\varnothing$

（2）若 $X\subseteq S_4$但 $X\cap S_2=\varnothing$

（3）若 $X\subseteq S_1$且 $X\not\subseteq S_3$

（4）若 $X-S_3=\varnothing$

（5）若 $X\subseteq S_3$ 且 $X\not\subseteq S_1$

解答

解

(1) 和S_5不交的子集不含有3和5，因此 $X=S_2$.

(2) S_4的子集只能是S_4和S_5. 由于与S_2不交，不能含有偶数，因此 $X=S_5$.

(3) S_1, S_2, S_3, S_4和S_5都是S_1的子集，不包含在S_3的子集含有偶数，因此 $X=S_1, S_2$或S_4.

(4) $X-S_3=\varnothing$意味着 X是S_3的子集，因此 $X=S_3$或 S_5.

(5) 由于S_3是S_1的子集，因此这样的X不存在.

练习3

3. 判断以下命题的真假，并说明理由.

（1）$A-B=A \Leftrightarrow B=\varnothing$

（2）$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

（3）$A\oplus A=A$

（4）如果$A\cap B=B$，则$A=E$.

（5）$A=\{x\}\cup x$，则 $x\in A$且$x\subseteq A$.

解题思路

- 先将等式化简或恒等变形.
- 查找集合运算的相关的算律，如果与算律相符，结果为真.
- 注意以下两个重要的充要条件

$A-B=A \Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$

$A-B=\varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow \mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathrm{A}$

如果与条件相符，则命题为真.

- 如果不符合算律，也不符合上述条件，可以用文氏图表示集合，看看命题是否成立.如果成立，再给出证明.
- 试着举出反例，证明命题为假.

解答

解

(1) $B=\varnothing$是$A-B=A$的充分条件，但不是必要条件. 当B不空但是与A不交时也有$A-B=A$.

(2) 这是DM律，命题为真.

(3) 不符合算律，反例如下：

$A=\{1\}$，$A\oplus A=\varnothing$，但是$A\neq\varnothing$.

(4) 命题不为真. $A\cap B=B$的充分必要条件是 $B\subseteq A$，不是$A=E$.

(5) 命题为真，因为 x 既是 A 的元素，也是 A 的子集

练习4

4． 证明 $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

解题思路

- 分析命题：含有3个命题：

  $A \cup B = A \cup C$， $A \cap B = A \cap C$， $B = C$

  ① ② ③

- 证明要求

  前提：命题①和②

  结论：命题③

- 证明方法：

  恒等式代入

  反证法

  利用已知等式通过运算得到新的等式

解答

方法一：恒等变形法

$$\begin{aligned} B &= B\cap(B\cup A) = B\cap(A\cup B) \\ &= B\cap(A\cup C) = (B\cap A)\cup(B\cap C) \\ &= (A\cap C)\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap C \\ &= (A\cup C)\cap C = C \end{aligned}$$

方法二：反证法.

假设 $B \neq C$，则存在 x ($x\in B$且$x\notin C$), 或存在 x ($x\in C$且$x\notin B$).

不妨设为前者.

若x属于A，则x属于$A\cap B$ 但x不属于$A\cap C$，与已知矛盾；

若x不属于A，则x属于$A\cup B$但x不属于$A\cup C$，也与已知矛盾.

解答

方法三：利用已知等式通过运算得到新的等式.

由已知等式①和②可以得到

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup C)-(A\cap C)$$

即

$$A\oplus B=A\oplus C$$

从而有

$$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$$

根据结合律得

$$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$$

由于$A\oplus A=\varnothing$, 化简上式得$B=C$.

练习5

5．设A,B为集合，试确定下列各式成立的充分必要条件：

(1) $A-B=B$

(2) $A-B=B-A$

(3) $A\cap B=A\cup B$

(4) $A\oplus B=A$

分析

解题思路:

求解集合等式成立的充分必要条件可能用到集合的算律、不同集合之间的包含关系、以及文氏图等. 具体求解过程说明如下:

(1) 化简给定的集合等式

(2) 求解方法如下:

- 利用已知的算律或者充分必要条件进行判断
- 先求必要条件，然后验证充分性
- 利用文氏图的直观性找出相关的条件，再利用集合论的证明方法加以验证

解答

解

(1) $A-B=B \Leftrightarrow A=B=\varnothing$. 求解过程如下：

由$A-B=B$得

$$(A\cap\sim B)\cap B = B\cap B$$

化简得$B=\varnothing$. 再将这个结果代入原来的等式得$A= \varnothing$. 从而得到必要条件$A=B=\varnothing$.

再验证充分性. 如果$A=B=\varnothing$成立，则$A-B=\varnothing=B$也成立.

(2) $A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由$A-B=B-A$得

$$(A-B)\cup A=(B-A)\cup A$$

从而有$A=A\cup B$, 即$A\subseteq B$. 同理可证$B\subseteq A$.

解答

(3) $A\cap B=A\cup B \Leftrightarrow A=B$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由$A\cap B=A\cup B$得

$$A\cup(A\cap B) = A\cup(A\cup B)$$

化简得$A=A\cup B$，从而有$A\subseteq B$. 类似可以证明$B\subseteq A$.

(4) $A\oplus B=A \Leftrightarrow B=\varnothing$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由$A\oplus B = A$得

$$A\oplus(A\oplus B) = A\oplus A$$

根据结合律有

$$(A\oplus A)\oplus B = A\oplus A$$

即 $\varnothing\oplus B = \varnothing$, 就是$B = \varnothing$.