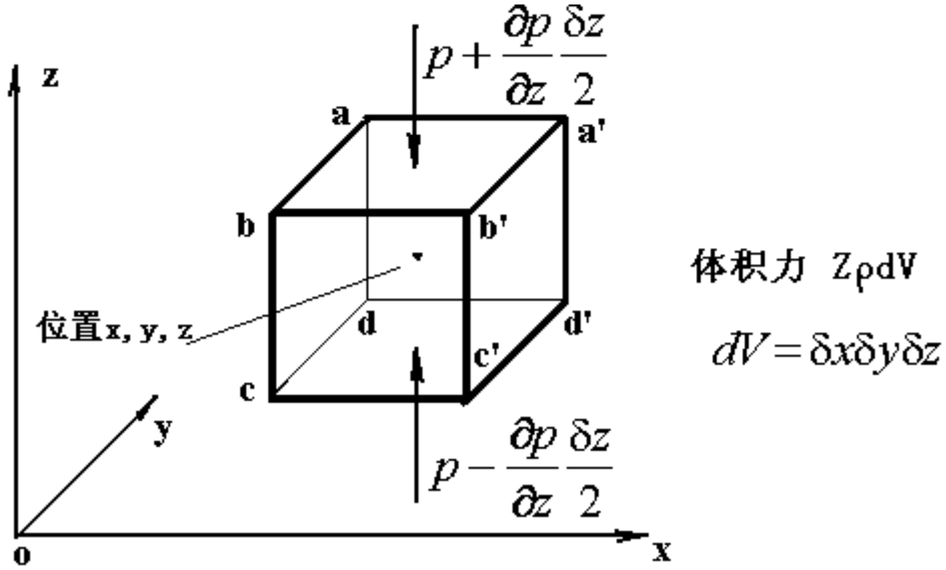
习题：12，14，15，16

1.3.2 机械能守恒

1.伯努利方程（定态下沿流线推导）

基本出发点：牛顿第二定律：$\Sigma F = ma$

∴单位质量流体（体积力＋表面力）＝加速度



等式左边在静力学中已有推导

因而 x 方向 $X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du_x}{dt}$（理想流体，$\mu$=0）

同理：
$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{du_y}{dt}$$

$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{du_z}{dt}$$

由上三式，经简化：

重力场，不可压缩流体，定态，可得伯努利方程：

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = 常数$$

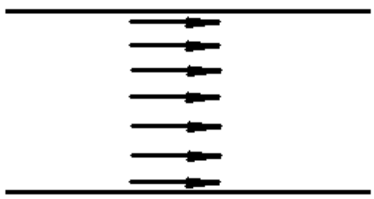
或 $$\frac{\mathscr{P}}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\text{常数}$$

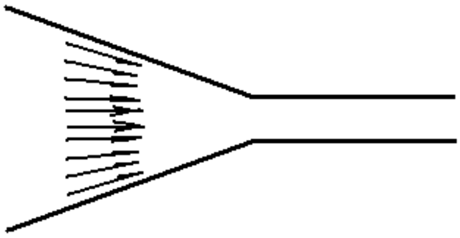
流线 $\xrightarrow{\text{均匀流段}}$ 理想流体管线 $\xrightarrow{\text{两点修正}}$ 实际流体管线

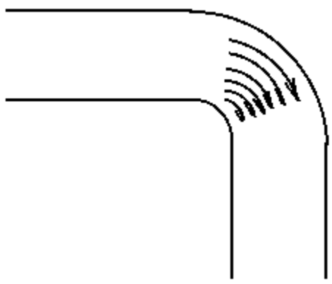
两点修正：a. 平均动能　b.能量消耗

均匀流段：各流线都平行，并与截面垂直，因而在定态下该截面上的流体没有加速度，可作为静力学，因而截面上各点的总势能相等。

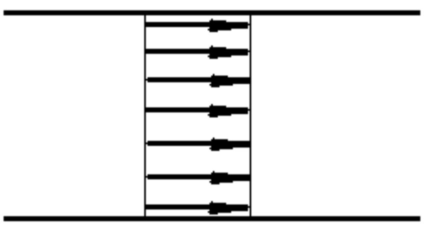
均匀流段

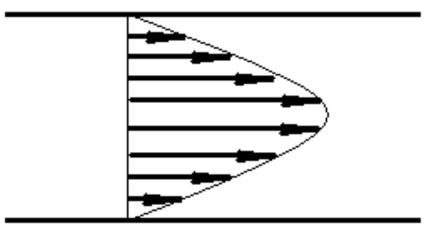






理想流体：各点速度相等（均匀分布）。





2.实际流体机械能守恒方程

修正之一：$\mu>0$，存在速度分布。因而从流线到管线，在均匀流段上各点的势能相等，但各点的

动能不等。

为了应用伯努利方程必须用该截面上的平均动能来代替原伯努利方程中的动能项。

即：$\frac{\mathscr{P}}{\rho}+\frac{\overline{u^2}}{2}=$常数

平均动能：$\frac{\overline{u^2}}{2}=\frac{1}{\rho q_v}\int_A \frac{u^2}{2}\rho u dA=\frac{1}{\rho \bar{u} A}\int_A \rho u^3 dA$

$\because \frac{\overline{u^2}}{2}\neq\frac{\bar{u}^2}{2}$

但在工程计算中希望使用平均速度来表达平均动能。因而引入校正系数 α：

$$\frac{\overline{u^2}}{2}=\alpha\left(\frac{\bar{u}^2}{2}\right)$$

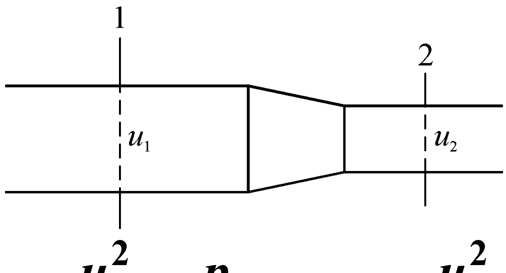
校正系数 α 与速度分布形状有关。

但在一般管流中，层流 $\alpha=2$，湍流 α 略大于 1。

而工程中更多的是湍流，因而 α 校正常可忽略。

修正之二： $\mu>0$，有内摩擦，产生热量，因而导致机械能耗损，常称阻力损失。

从 1—1 截面至 2—2 截面伯努利方程便成为：



$$\frac{p_1}{\rho}+gz_1+\frac{u_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+gz_2+\frac{u_2^2}{2}+h_f$$

可写成 $\frac{p_1}{\rho g}+z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{u_2^2}{2g}+H_f$

位能 gz 位压头 z

静压能 $\frac{p}{\rho}$ 静压头 $\frac{p}{\rho g}$

动能 $\frac{u^2}{2}$ 动压头 $\frac{u^2}{2g}$(速度头)

单位质量流体具有的能量 单位重量流体所具有的能量

压头物理意义： J/N

单位重量流体所具有的能量

注意：实际流体并不因耗能而减慢速度

某水平放的均匀管道，流过实际流体

列 1—1 到 2—2 截面伯努利方程

$$\frac{p_1}{\rho g}+z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{u_2^2}{2g}+H_f$$

水平放置： $z_1=z_2$ 均匀管道：$A_1=A_2$

对不可压缩流体由质量衡算方程：

$u_1=u_2$ 即 $\frac{u_1^2}{2g}=\frac{u_2^2}{2g}$

因而 $\frac{p_1}{\rho g}=\frac{p_2}{\rho g}+H_f$

即做功能力的损失是由静压头 p 下降为代价的。

3．应用机械能守恒（伯努利方程）须注意问题：

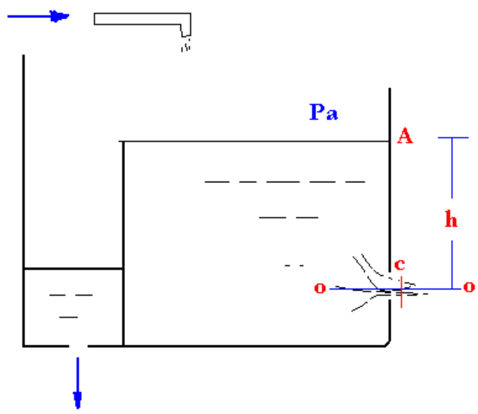
(1) 基准面选取－任意，方便为宜;

(2) 截面选取－在均匀流段取，要连续，要巧取;

(3) 所用单位必须一致。

示例 1 重力射流

流体自小孔流出时，由于流体的惯性造成液流的收缩现象，液流的最小截面位于 c，c 满足均匀流段。求 c 处的速度。



解 1：取 A-c 截面列伯努利方程，o-o 为基准面，绝对压力为基准，因而伯努利方程为：

$$\frac{p_A}{\rho g}+h+\frac{u_A^2}{2g}=\frac{p_c}{\rho g}+0+\frac{u_c^2}{2g}+H_{fA-c}$$

$p_A=p_c=p_a$　　$u_A\approx0$　　$H_{fA-c}\approx0$

∴有 $u_c=\sqrt{2gh}$

解 2：取 A-c 截面，A-A 为基准面，表压为基准

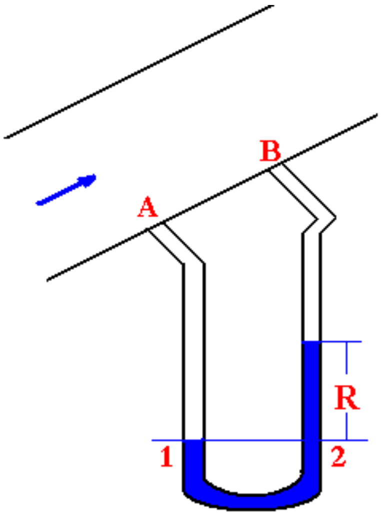
$$0+0+\frac{u_A^2}{2g}=0+(-h)+\frac{u_c^2}{2g}+H_{fA-c}$$

同样：$u_c=\sqrt{2gh}$

示例 2：图示为水在等径倾斜管中流动。试问：

(1) 如何从U形压差计读数 R 值判断该流体是理想流体？实际流体？

(2) 若管道水平放，R 值有何变化？



解：(1)若 $\mu=0$ 理想流体，列伯努利方程：$\frac{\mathscr{P}_A}{\rho}+\frac{u_A^2}{2}=\frac{\mathscr{P}_B}{\rho}+\frac{u_B^2}{2}$

∵ $u_A=u_B$　　∴ $\mathscr{P}_A=\mathscr{P}_B$　　∴ $R=0$

若 $\mu>0$ 实际流体

$$\frac{\mathscr{P}_A}{\rho}+\frac{u_A^2}{2}=\frac{\mathscr{P}_B}{\rho}+\frac{u_B^2}{2}+h_{fA-B}$$

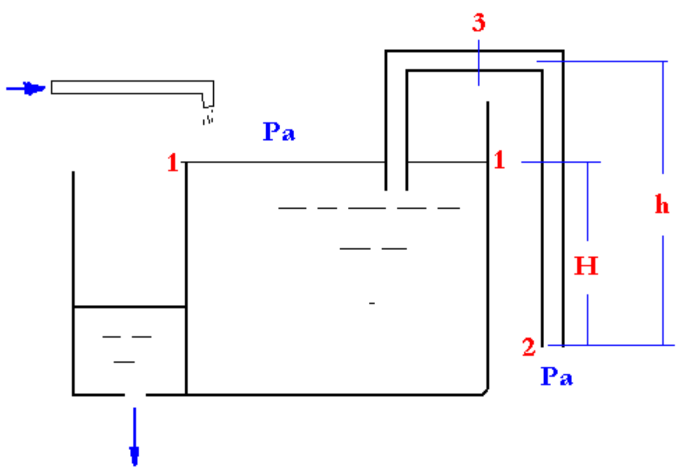
$$h_{fA-B}=\frac{\mathscr{P}_A-\mathscr{P}_B}{\rho}=\frac{Rg(\rho_i-\rho)}{\rho}$$

∴ $R>0$

(3) 水平放　∵ $\Delta\mathscr{P}_{AB}=\mathscr{P}_A-\mathscr{P}_B$ 不变

∴ R 不变

示例 3：水从高位槽通过虹吸管流出，其中 h=8m，H=6m, 设槽中水面保持不变，不计流动阻力损失，试求:管出口处水的流速及虹吸管最高处水的压强。



解：(1) 取水槽液面

1-1 及管出口截面 2-2 列伯努利方程，2－2 为基准面，绝对压为基准

$$\frac{p_1}{\rho g}+z_1+\frac{u_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{u_2^2}{2g}$$

$p_1=p_2=p_a$　　$z_1=H=6\text{m}$　　$z_2=0$　　$u_1\approx 0$

$\therefore\ u_2=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\times 9.81\times 6}=10.8m/s$

(2)取截面 3－3 与截面 2－2 列伯努利方程

2－2 为基准，绝对压为基准

$$\therefore \frac{p_3}{\rho g}+z_3+\frac{u_3^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+z_2+\frac{u_2^2}{2g}$$

$z_3=h=8\text{m}$　　$u_3=u_2$　　$z_2=0$　$p_2=p_a$

$\therefore p_3=p_a-\rho gh=1.013\times 10^5-1000\times 9.81\times 8$

$=2.28\times 10^4\text{N/m}^2$

思考;(1)由 $u_2=\sqrt{2gH}$ 是否 $H\uparrow$, u_2 可以无限增加，有否极限值

(2)若 $H\uparrow\rightarrow H=10\text{m}$　　$u_2=\sqrt{2gH}=13m/s$ 这个答案对否？为什么？

这两个问题可以从一个角度来回答：

$p_3=p_a-\rho gh$　　显然当 $H\uparrow$，$h\uparrow$，$p_3\downarrow$

当 $p_3=p_s$ 时，液体汽化，不连续，伯努利方程不再适用

因而当水的温度为 20℃时 $p_s=2.34\times 10^3\text{Pa}$

$\therefore 2.34\times10^3=1.013\times10^5-1000\times9.81\times h_{max}$

$h_{max}=10.1\text{m}$

$H_{max}=8\text{m}$

$\therefore u_{2\,max}=\sqrt{2gH}=\sqrt{2\times9.81\times8}=12.5m/s$

若 $\mu>0$

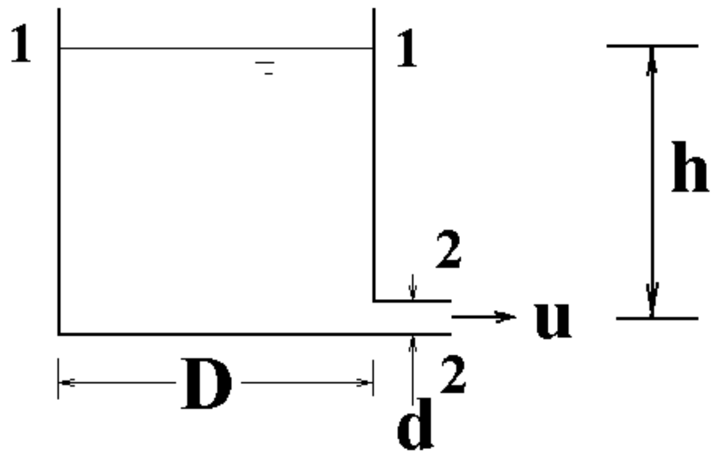
$$h=\frac{p_a-p_3}{\rho g}+H_{f\,3-2}$$

$H_{f2-3}\uparrow$，$h\uparrow$

示例 4：拟定态处理 → 微元定态

已知：D=1m, d=40mm, h=0.5m

求：放完水所需时间 τ



解：从 1 至 2 截面排柏努利方程

任一瞬时 $h\cdot g=\frac{u^2}{2}$ $\therefore u=\sqrt{2gh}$

对桶内液体作质量衡算

输入+生成=输出+积累

$$0+0=\frac{\pi}{4}d^2u+\frac{\pi}{4}D^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{D^2}{d^2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=u=\sqrt{2gh}\qquad \mathrm{d}t=-\frac{D^2}{d^2\sqrt{2g}}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}}$$

$$\tau = \int_0^{\tau} \mathrm{d}t = -\frac{D^2}{d^2\sqrt{2g}} \int_{0.5}^{0} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = 200\mathrm{s}$$