

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
“过程装备与控制工程”专业核心课程教材

工 程 流 体 力 学

(第二版)

习 题 与 解 答

黄 卫 星 编

四川大学化工学院过程装备与安全工程系

2008 年 10 月 30 日

第 1 章 流体的力学性质

1-1 用压缩机压缩初始温度为 20°C 的空气，绝对压力从 1 个标准大气压升高到 6 个标准大气压。试计算等温压缩、绝热压缩、以及压缩终温为 78°C 这三种情况下，空气的体积减小率 $\Delta_v = (V_1 - V_2)/V_1$ 各为多少？

解：根据气体压缩过程方程： $pV^k = \text{const}$ ，有 $(V_2/V_1) = (p_1/p_2)^{1/k}$ ，所以

$$\Delta_v = \frac{(V_1 - V_2)}{V_1} = 1 - \frac{V_2}{V_1} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/k}$$

等温过程 $k=1$ ，所以 $\Delta_v = 1 - p_1/p_2 = 1 - 1/6 = 83.33\%$

绝热过程 $k=1.4$ ，所以 $\Delta_v = 1 - (p_1/p_2)^{1/1.4} = 1 - (1/6)^{1/1.4} = 72.19\%$

压缩终温为 78°C 时，利用理想气体状态方程可得

$$\Delta_v = 1 - \frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} = 1 - \frac{1 \times 78}{6 \times 20} = 80.03\%$$

1-2 图 1-12 所示为压力表校验器，器内充满体积压缩系数 $\beta_p = 4.75 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$ 的油，用手轮旋进活塞达到设定压力。已知活塞直径 $D=10\text{mm}$ ，活塞杆螺距 $t=2\text{mm}$ ，在 1 标准大气压时的充油体积为 $V_0=200\text{cm}^3$ 。设活塞周边密封良好，问手轮转动多少转，才能达到 200 标准大气压的油压（1 标准大气压=101330Pa）。

解：根据体积压缩系数定义积分可得：

$$\beta_p = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \rightarrow V = V_0 \exp[-\beta_p (p - p_0)]$$

因为
$$nt \frac{\pi D^2}{4} = V_0 - V = V_0 [1 - \exp^{-\beta_p (p - p_0)}]$$

所以
$$n = \frac{4}{\pi D^2 t} V_0 [1 - e^{-\beta_p (p_2 - p_1)}] = 12.14 \text{ rpm}$$

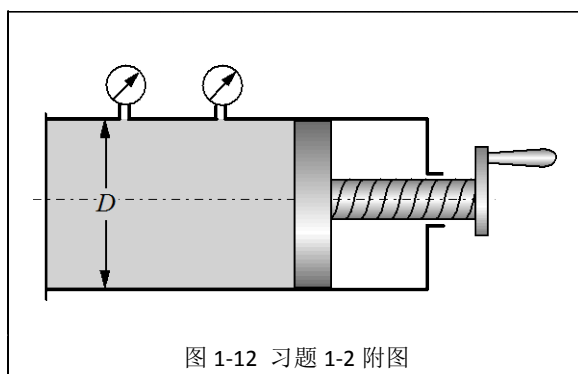


图 1-12 习题 1-2 附图

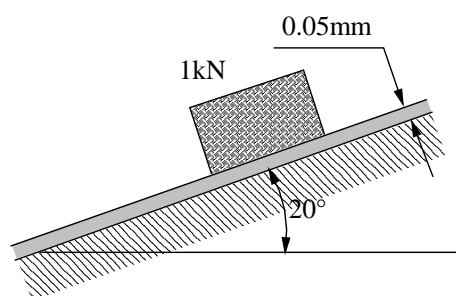


图 1-13 习题 1-3 附图

1-3 如图 1-13 所示，一个底边为 $200\text{mm} \times 200\text{mm}$ 、重量为 1kN 的滑块在 20° 斜面的油膜上滑动，油膜厚度 0.05mm ，油的粘度 $\mu = 7 \times 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。设油膜内速度为线性分布，试求滑块的平衡速度 u_r 。

解：设油膜内速度呈线性分布，平衡时油膜内的速度梯度可计算为

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_T - 0}{0.05 \times 10^{-3}} = 20000u_T \text{ 1/s}$$

由牛顿剪切定理可得滑块表面处流体受到的切应力 τ 为

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = 7 \times 10^{-2} \times 20000u_T = 1400u_T \text{ Pa}$$

滑块受到的切应力与 τ 的大小相等方向相反，且滑块受到的摩擦力与滑块重力沿斜面分量平衡，所以

$$A\tau = mg \sin \theta \rightarrow 0.2 \times 0.2 \times 1400u_T = 1000 \sin 20^\circ \rightarrow u_T \approx 6.11 \text{ m/s}$$

1-4 有一直径 $d=150\text{mm}$ 的轴在轴承中转动，转速 $n=400 \text{ r/min}$ ，轴承宽度 $L=300\text{mm}$ ，轴与轴承间隙 $\delta=0.25\text{mm}$ ，其间充满润滑油膜，油的粘度为 $\mu=0.049 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。假定润滑油膜内速度为线性分布，试求转动轴的功率 N （注： N =转轴表面积 A ×表面切应力 τ ×表面线速度 v_θ ）。

解：根据牛顿剪切定律有

$$\tau = \mu \frac{dv_\theta}{dr} = \mu \frac{\omega d/2 - 0}{\delta} = \frac{\mu \omega d}{2\delta}, \quad M = A\tau R = \pi dL \frac{\mu \omega d}{2\delta} \frac{d}{2} = \frac{\pi \mu d^3 L \omega}{4\delta}$$

由此得轴功率为：

$$N = M\omega = \frac{\pi \mu d^3 L \omega^2}{4\delta} = \frac{\pi \mu d^3 L}{4\delta} \left(\frac{n\pi}{30} \right)^2 = 273.47 \text{ W}$$

1-5 如图 1-14 所示，已知圆形管道中流体层流流动时的速度分布为：

$$u = 2u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

其中 u_m 为管内流体的平均速度。（1）设流体粘度为 μ ，求管中流体的剪切应力 τ 的分布公式；

（2）如长度为 L 的水平管道两端的压力降为 Δp （进口压力-出口压力），求压力降 Δp 的表达式。

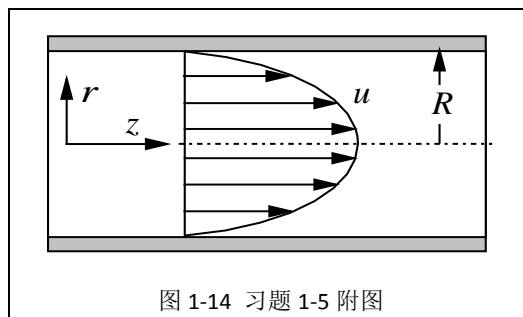


图 1-14 习题 1-5 附图

解：（1）根据牛顿剪切定律有

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = -4\mu u_m \frac{r}{R^2}$$

由上式可知，壁面切应力为 $\tau_0 = -4\mu u_m / R$ ，负号表示 τ_0 方向与 z 相反；

（2）由流体水平方向力平衡有： $\pi R^2 \Delta p + \tau_0 \pi D L = 0$ ，将 τ_0 表达式代入得

$$\Delta p = \frac{8\mu u_m L}{R^2}$$

1-6 图 1-15 所示为两平行圆盘，直径为 D ，间隙中液膜厚度为 δ ，液体动力粘性系数为 μ ，若下盘固定，上盘以角速度 ω 旋转，求所需力矩 M 的表达式。

解：固定圆盘表面液体速度为零，转动圆盘表面半径 r 处液体周向线速度 $v_{\theta s} = r\omega$ ；
 设液膜速度沿厚度方向线性分布，则切应力分布为

$$\tau = \mu \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \delta} = \mu \frac{v_{\theta s} - 0}{\delta} = \frac{\mu r \omega}{\delta}$$

所需力矩 M 为：

$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau r (r dr d\theta) = \frac{\pi \mu \omega D^4}{32 \delta} = A \tau|_{r=R/2} R$$

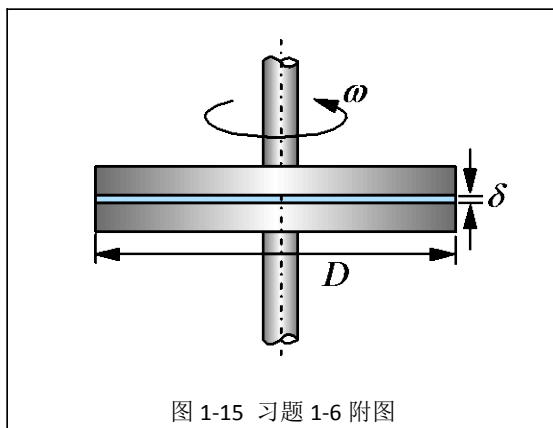


图 1-15 习题 1-6 附图

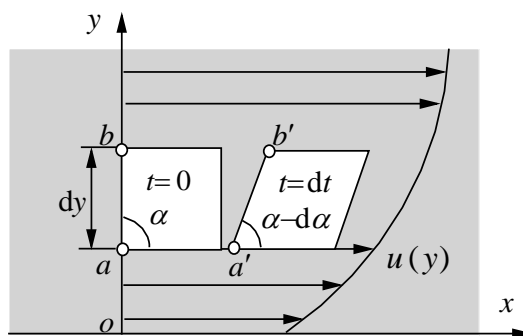


图 1-16 习题 1-7 附图

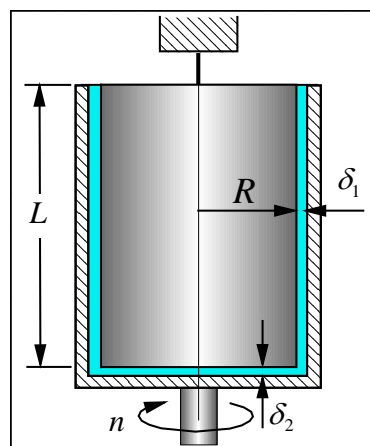
1-7 如图 1-16 所示，流体沿 x 轴方向作层状流动，在 y 轴方向有速度梯度。在 $t=0$ 时，任取高度为 dy 的矩形流体面考察，该矩形流体面底边坐标为 y ，对应的流体速度为 $u(y)$ ；经过 dt 时间段后，矩形流体面变成如图所示的平行四边形，原来的 α 角变为 $\alpha - d\alpha$ ，其剪切变形速率定义为 $d\alpha/dt$ （单位时间内因剪切变形产生的角度变化）。试推导表明：流体的剪切变形速率就等于流体的速度梯度，即

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}$$

解：因为 a 点速度为 u ，所以 b 点速度为 $u + \frac{du}{dy} dy$ ；由此得 $a-a'$ 、 $b-b'$ 的距离为：

$$\overline{aa'} = u dt, \quad \overline{bb'} = \left(u + \frac{du}{dy} dy\right) dt$$

所以
$$d\alpha \approx \tan d\alpha = \frac{\overline{bb'} - \overline{aa'}}{dy} = \frac{du}{dy} dt \quad \text{即} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{du}{dy}$$



1-8 图 1-17 所示为旋转粘度测定仪。该测定仪由内外两圆筒组成，外筒以转速 n (r/min) 旋转，通过内外筒之间的油液，将力矩传递至内筒；内筒上下两端用平板封闭，上端固定悬挂于一金属丝下，通过测定金属丝扭转角度确定金属丝所受扭矩为 M 。若内外筒之间的间隙为 δ_1 ，底面间隙为 δ_2 ，筒高为 L ，求油液动力粘性系数的计算式。

图 1-17 习题 1-8 附图

解： 半径 R 的筒体表面摩擦扭矩为

$$M_1 = A\tau R = 2\pi RL \frac{\mu R \omega}{\delta_1} R = \mu \frac{2\pi R^3 L}{\delta_1} \left(\frac{n\pi}{30} \right)$$

筒体端部表面摩擦扭矩（相当于圆盘摩擦）为

$$M_2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau r (r dr d\theta) = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr = 2\pi \int_0^R \mu \frac{r \omega}{\delta_2} r^2 dr = \frac{\pi \mu \omega R^4}{2\delta_2}$$

由总扭矩 $M = M_1 + M_2$ 解出油液动力粘性系数为

$$\mu = \frac{2\delta_1 \delta_2 M}{\pi R^3 (4L\delta_2 + R\delta_1)} \left(\frac{30}{n\pi} \right)$$

1-9 空气中水滴直径为 0.3mm 时，其内部压力比外部大多少？

解： 查附录表 C-1，水在常温空气中的表面张力系数 $\sigma = 0.073 \text{ N/m}$ ，所以

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2 \times 0.073}{0.15 \times 10^{-3}} = 973 \text{ Pa}$$

1-10 图 1-18 所示为插入水银中的两平行玻璃板，板间距 $\delta = 1 \text{ mm}$ ，水银在空气中的表面张力 $\sigma = 0.514 \text{ N/m}$ ，与玻璃的接触角 $\theta = 140^\circ$ ，水银密度 $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$ 。试求玻璃板内外水银液面的高度差 h 。

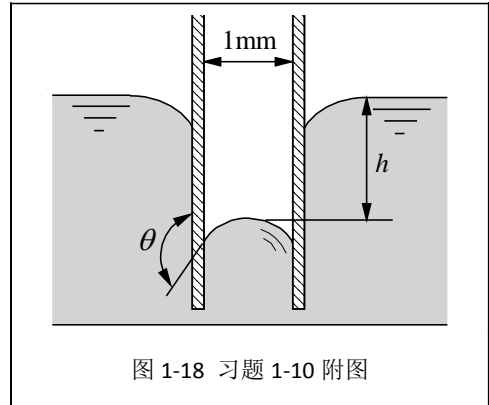


图 1-18 习题 1-10 附图

解： 对于两平板间的液膜，如图所示，液面下侧压力 $p_0 + \rho gh$ ，液面上侧压力为 p_0 ，取垂直书面方向为单位厚度，写出液膜竖直方向力平衡方程有

$$p_0 \delta + 2\sigma \cos(\pi - \theta) = (p_0 + \rho gh) \delta$$

由此得两平壁间的液膜爬升高度为

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\delta \rho g} = -5.9 \times 10^{-3} \text{ m} = -5.9 \text{ mm}$$

1-11 如图 1-19 所示，一平壁浸入体积很大的水中。由于存在表面张力，在靠近壁面的地方水的表面成为弯曲面，弯曲液面垂直于 $x-y$ 平面。假定弯曲面曲率半径 r 可以表示成 $1/r = d^2 y / dx^2$ ，接触角 θ 和表面张力系数 σ 已知。试确定平壁附近水面的形状和最大高度 h 。

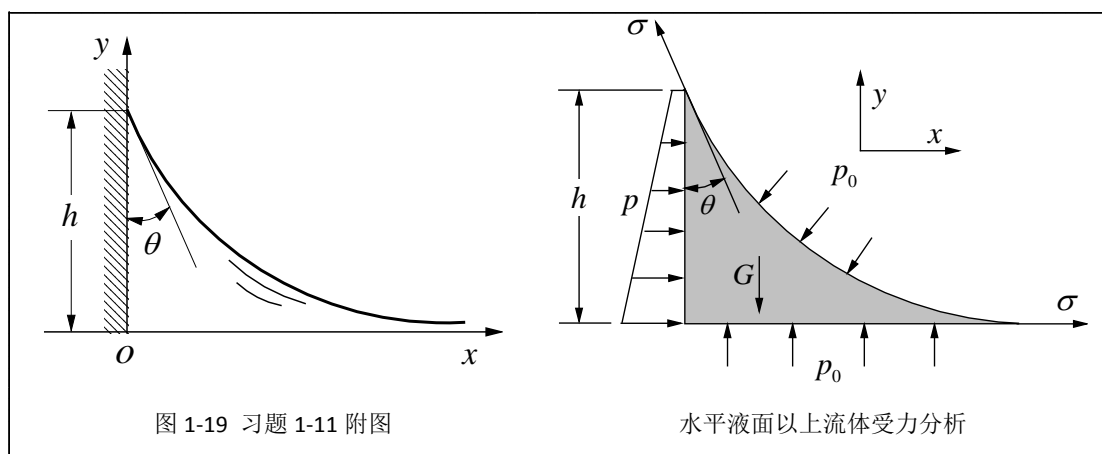


图 1-19 习题 1-11 附图

水平液面以上流体受力分析

解：根据弯曲表面张力压差公式，任意 x 处自由表面内外压力差为

$$\Delta p = p_0 - p_i = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

其中 p_i 是 x 处自由表面内的压力， R_1 、 R_2 是 x 处自由表面两个正交法截线的半径。

因为 x 轴为水平液面，所以根据静力学原理， x 轴对应的水平面上压力为 p_0 ；设任意 x 处弯曲液面与水平液面的距离为 y ，根据静力学关系有

$$p_0 = p_i + \rho g y \quad \text{即} \quad \Delta p = p_0 - p_i = \rho g y$$

所以

$$\rho g y = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

根据本题附图可知，如果取弯曲面曲线（ x - y 平面内）曲率半径： $1/R_1 = dy^2/dx^2$ ，则与其正交的曲率半径 $R_2 \rightarrow \infty$ （因为自由液面 \perp x - y 平面），于是有

$$\sigma \frac{dy^2}{dx^2} - \rho g y = 0 \quad \rightarrow \quad y = C_1 e^{\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} x}$$

由边界条件： $x \rightarrow \infty$ ： $y = 0$ ， $x=0$ ： $y=h$ ，可得 $C_1 = 0$ ， $C_2 = h$ ，所以

$$y = h \exp\left(-\sqrt{\rho g / \sigma} x\right)$$

其中的 h 可根据边界条件： $x=0$ ， $y' = -1/\tan \theta$ ，表示为

$$h = (1/\tan \theta) / \sqrt{\rho g / \sigma}$$

或，取 z 方向为单位厚度，由 y 方向力平衡可得

$$\sigma \cos \theta = G \quad \rightarrow \quad \sigma \cos \theta = \int_0^\infty \rho g y dx \quad \rightarrow \quad h = \cos \theta / \sqrt{\rho g / \sigma}$$

或，取 z 方向为单位厚度，由 x 方向力平衡可得

$$\sigma \sin \theta + h p_0 = \int_0^h p dy + \sigma \quad \rightarrow \quad \sigma \sin \theta + h p_0 = \int_0^h (p_0 - \rho g y) dy + \sigma$$

即

$$\sigma \sin \theta = - \int_0^h \rho g y dy + \sigma \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{2(1 - \sin \theta)} / \sqrt{\rho g / \sigma}$$

1-12 如图 1-20 所示, 一圆形管内装有理想塑性流体, 其剪切应力与变形速率的关系由式 (1-18) 所描述。已知该流体屈服应力为 τ_0 , 现从管的左端加压力 p , 问该压力至少为多大才能将该塑性流体挤出管外? 已知管子直径为 D , 塑性流体充满长度为 l 的管段, 管外为大气。

解: 由压力 p 与壁面切应力 τ_w 的平衡关系可得

$$p \frac{\pi D^2}{4} = \tau_w \pi D l$$

要实现流动, 壁面切应力必须大于屈服应力, 即 $\tau_w > \tau_0$, 所以

$$\pi D^2 p / 4 > \tau_0 \pi D l \quad \text{即} \quad p > 4l\tau_0 / D$$

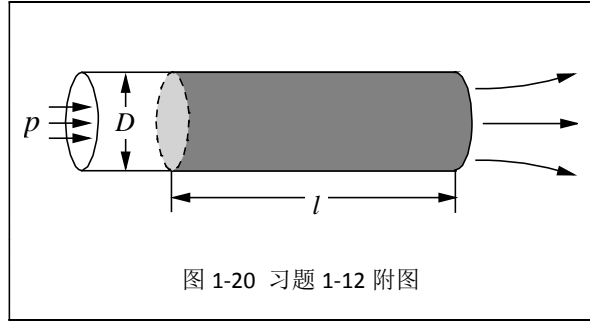


图 1-20 习题 1-12 附图

第 2 章 流体流动的基本概念

2-1 已知直角坐标系中的速度场 $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = (x+t)\mathbf{i} + (y+t)\mathbf{j}$ 。(1) 试求 $t=0$ 时通过点 $x=a$ 、 $y=b$ 的迹线方程和流线方程; (2) 试求以拉格朗日变量表示的流体速度与加速度。

提示: 方程组 $dx/dt = x+t$, $dy/dt = y+t$ 的解为: $x = c_1 e^t - t - 1$, $y = c_2 e^t - t - 1$ 。

解:

(1) 由 $v_x = x+t$, $v_y = y+t$ 得迹线微分方程为: :

$$\frac{dx}{dt} = x+t, \quad \frac{dy}{dt} = y+t$$

一阶线性微分方程 $y' + p(t)y = q(t)$ 的通解形式为

$$y = e^{-\int p dt} \left(\int q e^{\int p dt} dt + c \right)$$

此处迹线微分方程中 $p = -1$, $q = t$; 代入后得:

$$y = e^t \left(\int t e^{-t} dt + c \right) = e^t [-e^{-t}(t+1) + c] = c e^t - t - 1$$

即

$$x = c_1 e^t - t - 1, \quad y = c_2 e^t - t - 1$$

因此, $t=0$ 时: 过 (a, b) 的迹线方程为:

$$x = (a+1)e^t - t - 1, \quad y = (b+1)e^t - t - 1$$

又, 将速度代入流线微分方程得: $\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{y+t}$

t 被看成常数, 积分上式得:

$$\ln(x+t) = \ln(y+t) + \ln c \quad \text{或} \quad (x+t) = c(y+t)$$

因此, $t=0$ 时: 过 (a, b) 的流线方程为:

$$(x+t) = \frac{a}{b}(y+t) \quad \text{或} \quad y = \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{a} - 1\right)t$$

(2) 由迹线方程直接求导, 或直接将迹线方程代入欧拉速度式, 可得拉氏变量表示的速

度为:

$$v_x = (a+1)e^t - 1, \quad v_y = (b+1)e^t - 1$$

直接对拉氏变量速度式求导, 或对欧拉速度求质点导数再代入迹线方程, 可得以拉氏变量表示的加速度为:

$$a_x = (a+1)e^t, \quad a_y = (b+1)e^t$$

2-2 给定速度场: $\mathbf{v} = (6 + 2xy + t^2)\mathbf{i} - (xy^2 + 10t)\mathbf{j} + 25\mathbf{k}$ 。试求流体质点在位置 (3, 0, 2) 处的加速度。

解: 根据质点导数定义, 流体质点加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

根据速度分布式有:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 2t\mathbf{i} - 10\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 2y\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 2x\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$$

所以加速度矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (2t\mathbf{i} - 10\mathbf{j}) + (6 + 2xy + t^2)(2y\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}) - (xy^2 + 10t)(2x\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}) \\ &= [2t + (6 + 2xy + t^2)2y - (xy^2 + 10t)2x]\mathbf{i} + [-10 - (6 + 2xy + t^2)y^2 + (xy^2 + 10t)2xy]\mathbf{j} \\ &= -58t\mathbf{i} - 10\mathbf{j} \end{aligned}$$

2-3 已知速度场为 $\mathbf{v} = xt\mathbf{i} + yt\mathbf{j} + zt\mathbf{k}$, 温度场为 $T = At^2/(x^2 + y^2 + z^2)$, 其中 A 为常数。试求: (1) 流场 (x, y, z) 点处的温度变化率和流体加速度; (2) $t=0$ 时通过 $(x=a, y=b, z=c)$ 处的流体质点的温度变化率和加速度。

解:

(1) 流场 (x, y, z) 点处的时间变化率是局部变化率, 所以温度变化率和流体加速度分别为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2At}{(x^2 + y^2 + z^2)}; \quad a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = x, \quad a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = y, \quad a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} = z$$

(2) 流体质点的温度变化率和加速度是温度和速度的质点导数, 即

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + xt \frac{\partial T}{\partial x} + yt \frac{\partial T}{\partial y} + zt \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{2At(1-t^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \\ &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + xt^2\mathbf{i} + yt^2\mathbf{j} + zt^2\mathbf{k} = (1+t^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \end{aligned}$$

而 $t=0$ 时通过 $(x=a, y=b, z=c)$ 处的流体质点的迹线方程为

$$\frac{dx}{dt} = xt, \quad \frac{dy}{dt} = yt, \quad \frac{dz}{dt} = zt \quad \rightarrow \quad x = ae^{t^2/2}, \quad y = be^{t^2/2}, \quad z = ce^{t^2/2}$$

所以该质点的温度变化率和加速度为

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{2At(1-t^2)e^{t^2}}{(a^2+b^2+c^2)}; \quad \mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = (1+t^2)e^{t^2/2}(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k})$$

2-4 给定速度场: $\mathbf{v} = 6x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} - 7t\mathbf{k}$ 。试求: (1) 在 $t=0$ 时通过点 (a, b, c) 的迹线方程; (2) $t=0$ 时的流线方程; (3) 在 $t=0$ 时通过点 (a, b, c) 的流线方程。

解: 在直角坐标系下速度场可表示为: $v_x = 6x, v_y = 6y, v_z = -7t$;

(1) 迹线微分方程为:
$$\frac{dx}{dt} = 6x, \quad \frac{dy}{dt} = 6y, \quad \frac{dz}{dt} = -7t$$

积分得迹线方程:
$$x = c_1 e^{6t}, \quad y = c_2 e^{6t}, \quad z = -\frac{7}{2}t^2 + c_3,$$

$t=0$ 过 (a, b, c) 的迹线方程:
$$x = a e^{6t}, \quad y = b e^{6t}, \quad z = -\frac{7}{2}t^2 + c$$

(2) 将速度代入流线方程得:
$$\frac{dx}{6x} = \frac{dy}{6y} = \frac{dz}{-7t}$$

积分得:
$$x/y = c_1, \quad z = -\frac{7}{6}t \ln y + c_2$$

$t=0$ 时的流线方程:
$$x/y = c_1, \quad z = c_2$$

(3) $t=0$ 时通过点 (a, b, c) 的流线方程:

$$x/y = a/b, \quad z = -\frac{7}{6}t \ln y + c$$

2-5 给定二维流动: $\mathbf{v} = U_0\mathbf{i} + V_0 \cos(kx - \alpha t)\mathbf{j}$, 其中 U_0, V_0, k, α 均为常数。(1) 试求在 $t=0$ 时刻通过点 $(0, 0)$ 的流线和迹线方程; (2) 若 $k \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$, 试比较这两条曲线。

解: 在直角坐标系下速度场可表示为:

$$v_x = U_0, \quad v_y = V_0 \cos(kx - \alpha t)$$

将其代入流线方程得:
$$\frac{dx}{U_0} = \frac{dy}{V_0 \cos(kx - \alpha t)} \quad \text{或} \quad dy = \frac{V_0}{U_0} \cos(kx - \alpha t) dx$$

将 t 视为积分常数, 对上式进行积分得流线方程为

$$y = \frac{V_0}{kU_0} \sin(kx - \alpha t) + c_1$$

又, 迹线微分方程为:
$$\frac{dx}{dt} = U_0, \quad \frac{dy}{dt} = V_0 \cos(kx - \alpha t)$$

对上两式进行积分得迹线方程

$$x = U_0 t + c_2, \quad y = \frac{V_0}{kU_0 - \alpha} \sin[kc_2 + (kU_0 - \alpha)t] + c_3$$

(1) $t=0$ 时刻通过点 $(0, 0)$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, 所以

流线方程:
$$y = \frac{V_0}{kU_0} \sin(kx - \alpha t)$$

迹线方程:
$$x = U_0 t, \quad y = \frac{V_0}{kU_0 - \alpha} \sin[(kU_0 - \alpha)t]$$

(2) $k \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ 时, 流线方程: $y = \frac{V_0}{U_0} x$; 迹线方程: $x = U_0 t, \quad y = V_0 t = \frac{V_0}{U_0} x$,

所以流线与迹线重合, 为稳态流动。

2-6 给定拉格朗日流场: $x = ae^{-(2t/k)}, \quad y = be^{t/k}, \quad z = ce^{t/k}$, 其中 k 为常数。试判断: (1) 是否是稳态流动; (2) 是否是不可压缩流场; (3) 是否有旋流动。

解:

(1) 流体运动速度为:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{2a}{k} e^{-(2t/k)} = -\frac{2}{k} x; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{b}{k} e^{t/k} = \frac{1}{k} y; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{c}{k} e^{t/k} = \frac{1}{k} z$$

由于流体速度仅为空间位置的函数 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$, 所以为稳态流动 (稳态或非稳态由欧拉法速度场判断)。

(2) 因为: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -2/k + 1/k + 1/k = 0$, 所以该流场为不可压缩流场。

(3) 因为: $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} = (\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z})\mathbf{i} + (\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x})\mathbf{j} + (\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y})\mathbf{k} = 0$, 所以该流动无旋。

2-7 给定速度场: $\mathbf{v} = C\sqrt{y^2 + z^2}\mathbf{i}$, C 是常数。求涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 和涡线方程。

解: 因为 $v_y = v_z = 0$, 所以, 根据涡量展开式有

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathbf{j} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathbf{k} = \frac{Cz}{\sqrt{y^2 + z^2}}\mathbf{j} - \frac{Cy}{\sqrt{y^2 + z^2}}\mathbf{k}$$

根据涡线微分方程有:

$$\Omega_y dz = \Omega_z dy \rightarrow \frac{Cz}{\sqrt{y^2 + z^2}} dz = -\frac{Cy}{\sqrt{y^2 + z^2}} dy \rightarrow \frac{Cd(y^2 + z^2)}{2\sqrt{y^2 + z^2}} = 0$$

即涡线方程为: $y^2 + z^2 = c$ 。

2-8 图 2-16 所示为圆形管道中牛顿流体的层流流动, 其速度分布为:

$$v_z = 2v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

其中 v_m 为管内平均流速, $R = D/2$ 。(1) 判断流动是否是不可压缩流动; (2) 判断管道中的流动是有旋流动还是无旋流动; (3) 求流线、迹线、涡线方程。已知, 柱坐标下的涡量分量表达式为:

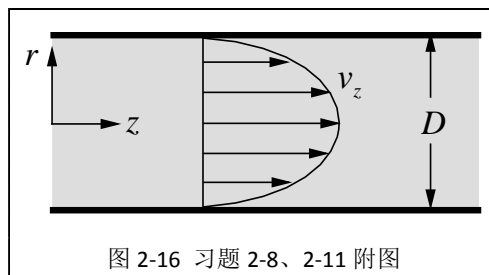


图 2-16 习题 2-8、2-11 附图

$$\Omega_r = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right), \quad \Omega_\theta = \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad \Omega_z = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

解:

(1) 因为, $v_r = v_\theta = 0$, $\partial v_z / \partial z = 0$, 所以 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, 流动不可压缩;

(2) $\Omega_r = 0$, $\Omega_\theta = \frac{4v_m r}{R^2}$, $\Omega_z = 0$, 所以是有旋流动;

(3) 由迹线微分方程: $dr/dt = 0$, $r d\theta/dt = 0$, $dz/dt = 2v_m(1 - r^2/R^2)$, 可得迹线方程为 $r = c_1$, $\theta = c_2$, $z = 2v_m(1 - (r/R)^2)t$, 表明质点在随时间 t 沿 z 方向运动过程中 r 、 θ 不变, 即质点运动轨迹是沿 z 方向的直线;

由流线微分方程: $v_z dr = v_r dz$, $v_z r d\theta = v_\theta dz$, 因为 $v_z \neq 0$, 可得流线方程为: $r = c_1$, $\theta = c_2$, 即每条流线上的点都具有相同的 r 、 θ , 即流线为平行于 z 的直线;

由涡线微分方程: $\Omega_\theta dr = \Omega_r r d\theta$, $\Omega_\theta dz = \Omega_z r d\theta$, 因为 $\Omega_\theta \neq 0$, 可得涡线方程为: $r = c_1$, $z = c_2$, 即每条涡线都在管道截面上 ($z = c_2$), 且是半径一定 ($r = c_1$) 的圆周线。

2-9 试证明: 无旋流场中 ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), 如果流体速度 \mathbf{v} 的势函数为 ϕ , 即 $\mathbf{v} = \nabla \phi$, 则加速度 \mathbf{a} 也必然有势, 且势函数为 $(\partial \phi / \partial t + v^2/2)$, 即

$$\mathbf{a} = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right)$$

提示: 利用速度的质点导数矢量式 (2-28) 和附录 A 第 A.3 节第 (4) 式, 并注意 $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \nabla v^2$ 。

解: 根据速度的质点导数矢量式 (2-28), 加速度为

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

由附录 A 第 A.3 节第 (4) 式, 可知

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

由于是无旋流动, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, 且有 $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \nabla v^2$, 因此可得到关系式:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2, \quad \text{即} \quad \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2$$

将 $\mathbf{v} = \nabla \phi$ 代入 (2-41) 得:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{2} \nabla v^2, \quad \text{即} \quad \mathbf{a} = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right)$$

2-10 对于不可压缩流体 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), 在无旋流动条件下流体速度 \mathbf{v} 存在势函数为 ϕ , 即 $\mathbf{v} = \nabla \phi$ 。试证明: ϕ 满足拉普拉斯方程, 即

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

提示: 参考附录 A 中关于算子 ∇ 自身点积的定义和运算规则。

解：对于不可压缩流体速度散度为零，且作无旋流动时有速度势函数 ϕ 存在，即

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla \phi$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0$$

即

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

2-11 对于习题 2-8 中圆管内充分发展的层流流动问题，设流体粘度为 μ ，密度为 ρ 。试证明：管壁流动阻力摩擦系数 λ 为

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{其中，雷诺数 } \text{Re} = \frac{\rho v_m D}{\mu}$$

提示：利用速度分布式、牛顿剪切定律和 λ 定义式（2-66）。

解：根据速度分布和牛顿剪切定律，管道壁面的切应力为

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=R} = \mu \frac{d}{dr} \left[2v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \bigg|_{r=R} = -\frac{4\mu v_m}{R}$$

根据摩擦阻力系数 λ 的定义有

$$\lambda = \tau_0 \frac{8}{\rho v_m^2} = \frac{4\mu v_m}{R} \frac{8}{\rho v_m^2} = \frac{64}{\rho v_m D / \mu} = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{其中 } \text{Re} = \frac{\rho v_m D}{\mu}$$

2-12 对于图 2-17 所示的非圆形管道内充分发展的流动（层流或湍流），如果用 A 表示管道横截面积（流体流通面积）， P 表示截面上管道壁面的周长（管道浸润周边长度），且定义水力当量直径 $D_h = 4A/P$ ，试证明：非圆形管道内流体的压力降 Δp 和阻力损失 h_f 仍然可分别仿照式（2-67）和式（2-68）表示为

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{\rho u_m^2}{2}, \quad h_f = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{u_m^2}{2g}$$

解：应用式定义式（2-66）： $\tau_0 = \frac{\lambda}{4} \frac{\rho u_m^2}{2}$ ，以及流体轴向力平衡： $\Delta p A = \tau_0 L P$ ，可得

$$\Delta p = \frac{\tau_0 L}{A/P} = \lambda \frac{L}{4A/P} \frac{\rho u_m^2}{2}$$

将 $D_h = 4A/P$ 代入得

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{\rho u_m^2}{2}$$

又因为 $\rho g h_f = \Delta p$ ，所以

$$h_f = \lambda \frac{L}{D_h} \frac{u_m^2}{2g}$$

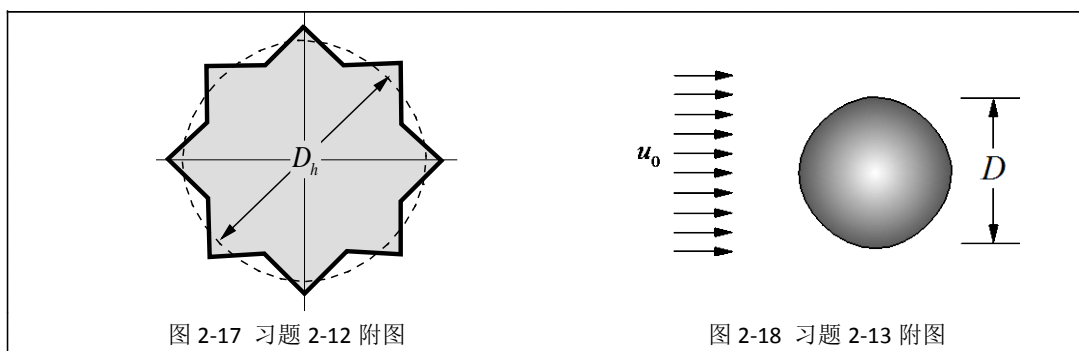


图 2-17 习题 2-12 附图

图 2-18 习题 2-13 附图

2-13 流体以均匀来流速度 u_0 流过直径为 D 球体，如图 2-18 所示。流体粘度为 μ ，密度为 ρ 。在速度极低的情况下（ $\text{Re} = \rho u_0 D / \mu < 2$ ），理论解析得到流体沿流动方向作用于球体的总曳力 $F_D = 3\pi\mu u_0 D$ ，其中 $1/3$ 的总曳力是球体表面上流体压力的不均匀性产生的， $2/3$ 的总曳力是球体表面上流体的摩擦力产生的。试确定该条件下球体的形状阻力系数 C_p 、摩擦阻力系数 C_f 和总阻力系数 C_D 。

解：应用阻力系数定义式（2-63）有

$$\begin{aligned}
 F_D &= C_D \frac{\rho u_0^2}{2} A_D \rightarrow 3\pi\mu u_0 D = C_D \frac{\rho u_0^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow C_D = \frac{24\mu}{\rho u_0 D} = \frac{24}{\text{Re}} \\
 F_p &= C_p \frac{\rho u_0^2}{2} A_D \rightarrow \frac{3\pi\mu u_0 D}{3} = C_p \frac{\rho u_0^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow C_p = \frac{8\mu}{\rho u_0 D} = \frac{8}{\text{Re}} \\
 F_f &= C_f \frac{\rho u_0^2}{2} A_f \rightarrow 2\pi\mu u_0 D = C_f \frac{\rho u_0^2}{2} \pi D^2 \rightarrow C_f = \frac{4\mu}{\rho u_0 D} = \frac{4}{\text{Re}}
 \end{aligned}$$

其中 $\text{Re} = \rho u_0 D / \mu$ 为球体绕流雷诺数。

2-14 颗粒在流体中自由沉降时要受到重力、浮力和流体曳力作用，在力平衡条件下，颗粒下降速度恒定，该速度称为颗粒在该流体中的沉降速度，用 u_t 表示。设颗粒直径和密度分别为 d 、 ρ_p ，流体粘度和密度分别为 μ 、 ρ_f ，总阻力系数为 C_D ，求颗粒的沉降速度 u_t 。

解：由重力与浮力和流体曳力相平衡可得：

$$\rho_p g \frac{\pi d^3}{6} = \rho_f g \frac{\pi d^3}{6} + C_D \frac{\rho_f u_t^2}{2} \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow u_t = \sqrt{\frac{4d(\rho_p - \rho_f)g}{3\rho_f C_D}}$$

第 3 章 流体静力学

3-1 流体静止的第二个条件为合力矩为零，即 $\Sigma \mathbf{M} = 0$ 。因为 $\Sigma \mathbf{M} = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ ，所以根据 \mathbf{F} 的表达式 (3-15)，对于体积为 V ，封闭表面积为 A 的流体团，其合力矩 $\Sigma \mathbf{M} = 0$ 可表示为

$$\iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} \rho dV - \oint_A \mathbf{r} \times \mathbf{n} p dA = 0$$

试证明：流体静力学基本方程 $\rho \mathbf{f} = \nabla p$ 满足上式（参考附录 A 中 (A-18) 式）。

解：根据高斯公式 (A-18) 有

$$\oint_A \mathbf{r} \times \mathbf{n} p dA = \iiint_V \mathbf{r} \times \nabla p dV$$

所以 $\Sigma \mathbf{M} = 0$ 可表示为

$$\iiint_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} \rho dV - \iiint_V \mathbf{r} \times \nabla p dV = \iiint_V \mathbf{r} \times (\mathbf{f} \rho - \nabla p) dV = 0$$

即

$$\mathbf{f} \rho - \nabla p = 0 \quad \text{或} \quad \rho \mathbf{f} = \nabla p$$

3-2 已知不可压缩流场中的质量力表达式如下：

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = yz \mathbf{i} + 2\lambda zx \mathbf{j} + 3\mu xy \mathbf{k}$$

问常数 λ, μ 取何值时该流场是静止的？

解：不可压缩流场质量力必须满足的条件是 $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ ，该式在直角坐标系中可展开为：

$$\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0$$

对给定质量力求偏导数并由 $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ 得：

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = (3\mu - 2\lambda)x = 0, \quad \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = (1 - 3\mu)y = 0, \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = (2\lambda - 1)z = 0$$

要使上式恒成立，只能是各项的系数为零，即： $\mu = 1/3, \lambda = 1/2$ 。

3-3 在很多实际问题中，气体流场满足正压流场条件，即气体压力 p 与密度 ρ 有确切关系。最有代表性的关系是： $p/\rho^n = c$ ，其中 n, c 为常数。若已知 $z = 0$ 处气体压力为 p_0 、密度为 ρ_0 、温度为 T_0 ，并假设气体为理想气体，试证明：气体压力 p 、密度 ρ 和温度 T 随高度变化的关系为：

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g z}{p_0} \right)^{n/(n-1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g z}{p_0} \right)^{1/(n-1)}, \quad \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g z}{p_0}$$

提示：注意 $c = p_0 / \rho_0^n$ 。

解：根据重力场静止流体压力微分方程 (3-31) 可得

$$dp = -\rho g dz \rightarrow dp = -\rho_0 g \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/n} dz \rightarrow \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/n} dp = -\rho_0 g dz$$

积分整理得

$$\frac{n}{n-1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/n} p - p_0 \right] = -\rho_0 g z \rightarrow \frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{\rho_0 g z}{p_0} \right]^{\frac{n}{n-1}}$$

因为 $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^n$ 且根据理想气体关系 $(p/p_0)/(\rho/\rho_0) = T/T_0$ ，可得

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{(n-1)\rho_0 g z}{n p_0} \right]^{1/(n-1)}, \quad \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g z}{p_0}$$

3-4 已知海平面上空气的条件为： $p_0 = 1.0133 \times 10^5 \text{ Pa}$ ， $\rho_0 = 1.285 \text{ kg/m}^3$ ， $T_0 = 288.15 \text{ K}$ ，并已知海平面上空气温度随高度的下降率为 0.007 K/m ；试计算 $z = 5000 \text{ m}$ 高空处的压力 p 和密度 ρ 。

解： 应用题 3-3 中大气温度随高度变化的关系式有

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g}{p_0} T_0 = -0.007 \text{ K/m} \rightarrow n = 1.243$$

将 n 、 ρ_0 、 p_0 、 z 已知数据代入气体压力 p 、密度为 ρ 随高度变化的关系式可得

$$p = p_0 \left[1 - \frac{(n-1)\rho_0 g z}{n p_0} \right]^{\frac{n}{n-1}} = 0.5224 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{(n-1)\rho_0 g z}{n p_0} \right]^{1/(n-1)} = 0.754 \text{ kg/m}^3。$$

3-5 试排列图 3-20 所示复式测压计中 1、2、3、4、点压力 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 的大小顺序（复式测压计可减小测压管高度）。

解： 根据静止重力场中连通流体两点压力之关系： $p_A = p_B \pm \rho g h$ ，以及两种液体分界面为等压面且等压面为水平面的概念，有

$$\begin{aligned} p_4 &= -\rho g h_2 + p_c \\ &= -\rho g h_2 + p_d \\ &= (\rho_m - \rho) g h_2 + p_3 \rightarrow p_4 > p_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= p_2 = -\rho g h_1 + p_a \\ &= -\rho g h_1 + p_b \\ &= (\rho_m - \rho) g h_1 + p_1 \rightarrow p_2 > p_1 \end{aligned}$$

所以

$$p_4 > p_3 = p_2 > p_1$$

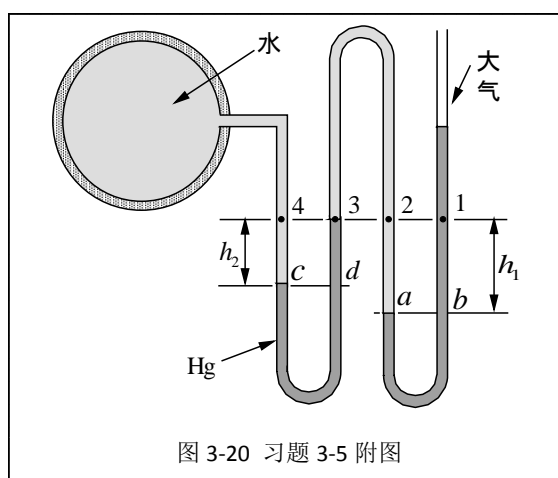


图 3-20 习题 3-5 附图

3-6 一敞口圆柱形容器，如图 3-21 所示，其直径 $D = 0.4 \text{ m}$ ，上部为油，下部为水。

(1) 若测压管中读数为 $a = 0.2 \text{ m}$ ， $b = 1.2 \text{ m}$ ， $c = 1.4 \text{ m}$ ，求油的比重。

(2) 若油的比重为 0.84 ， $a = 0.5 \text{ m}$ ， $b = 1.6 \text{ m}$ ，求容器中水和油的体积。

解：

(1) 根据静止流场中同种流体两点压力之关系和两种液体分界面为等压面的概念，分别由两竖管液柱计算容器底部压力有

$$\rho_A g(c-a) + \rho_B g a = \rho_B g b$$

所以 $\frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{b-a}{c-a} = 0.833$

(2) 根据上述结果有

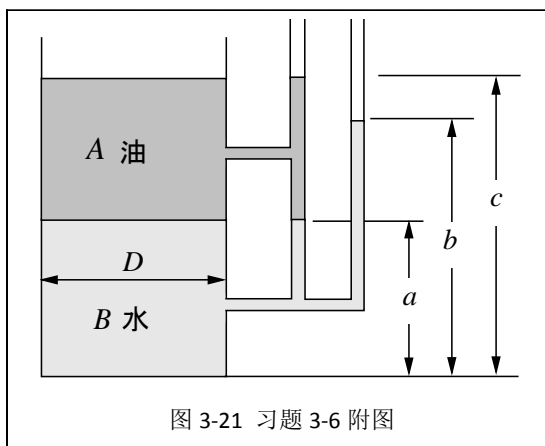
$$\rho_A g(c-a) + \rho_B g a = \rho_B g b$$

所以 $c = \frac{\rho_B}{\rho_A}(b-a) + a = 1.810\text{m}$

由此可计算容器内油和水的体积为

$$V_A = \frac{\pi}{4} D^2 (c-a) = \frac{\pi}{4} \times 0.4^2 \times (1.81-0.5) = 16.46 \times 10^{-2} \text{m}^3$$

$$V_B = \frac{\pi}{4} D^2 a = \frac{\pi}{4} \times 0.4^2 \times 0.5 = 6.28 \times 10^{-2} \text{m}^3$$



3-7 杯式汞真空计，如图 3-22 所示，杯上接大气时，测压管上的读数为零。已知杯的直径 $D = 60 \text{ mm}$ ，管的直径 $d = 6 \text{ mm}$ 。(1) 求测压管中读数 $h = 300 \text{ mm}$ 时，杯上的真空度 (mmHg)；(2) 说明这种测压计有什么优点。

解：(1) 当测压管的读数为 $h = 300 \text{ mm}$ 时，杯中液面与测压管中零刻度线的高度差 Δh 为

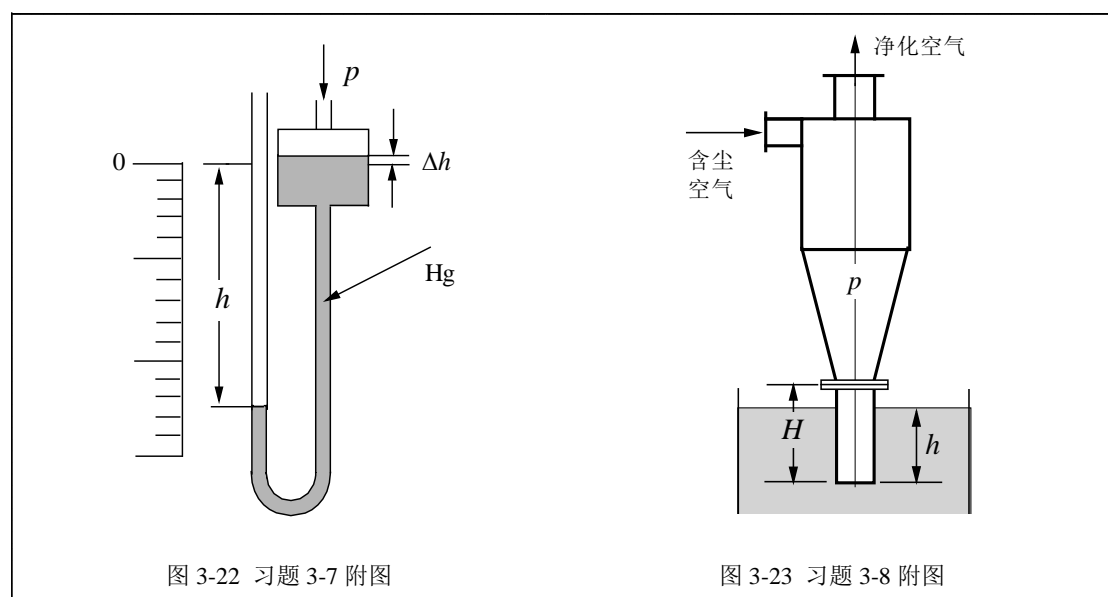
$$\Delta h \frac{\pi}{4} D^2 = h \frac{\pi}{4} d^2 \rightarrow \Delta h = h d^2 / D^2 = 3 \text{ mm}$$

杯中液面处真空度为： $p_0 - p = p_0 - [p_0 - \rho_m g(h + \Delta h)] = \rho_m g(h + \Delta h)$

或

$$\frac{p_0 - p}{\rho_m g} = (h + \Delta h) = 303 \text{ mmHg}$$

(2) 由计算结果可见，可减小测压管高度，且可防止指示剂溢出。



3-8 旋风除尘器如图 3-23 所示，其下端出灰口管段长 H ，部分插入水中，使旋风除尘器内部与外界大气隔开，称为水封；同时要求出灰管内液面不得高于出灰管上部法兰位置。设除尘器内操作压力（表压） $p = -1.2 \text{ kPa} \sim 1.2 \text{ kPa}$ ，（1）试问管段长 H 至少为多少 mm？（2）若 $H=300\text{mm}$ ，问其中插入水中的部分 h 应在什么范围？（取水的密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ ）

解：

（1）正压操作时，出灰管内液面低于管外液面，高差为 $h' = p/\rho g$ ，为实现水封，出灰管插入深度 h 必须大于此高差，即

$$h \geq h' = p/\rho g = 0.122\text{m} = 122\text{mm}$$

负压操作时，出灰管内液面高于管外液面，高差为 $h' = |p|/\rho g$ ，要使出灰管内液面低于法兰位置，未插入水中的管段 $H-h$ 必须大于高差，即

$$H-h \geq h' = |p|/\rho g = 0.122\text{m} = 122\text{mm}$$

由此得

$$H \geq 122\text{mm} + h \geq 244\text{mm}$$

（2）结合以上正负压操作时结果有：

$$p/\rho g \leq h \leq H - |p|/\rho g \rightarrow 122\text{mm} \leq h \leq 178\text{mm}$$

3-9 为了精确测定 A、B 两管道内流体的微小压差，设计如图 3-24 所示的微压计；A、B 两管道内和 U 形管内为同一种流体，密度为 ρ ；微压计上方的流体略轻一些，密度为 ρ_m 。试用读数 H 、 h_1 、 h_2 和 ρg 表示 A 和 B 的压差。设 A、B 位于同一水平面。

解：设 c 点与 A、B 的高差为 x ，c 点与 d 点的高差为 y ，气体密度为 ρ_g 。

根据静止流场中同种流体两点压力之关系和两种液体分界面为等压面的概念，有

$$p_A = p_m + \rho g(H+x), \quad p_B = p_m + \rho_m g(H+x)$$

所以
$$p_A - p_B = (\rho - \rho_m)gH$$

又因为

$$p_c = \rho g h_1 + p_n = \rho_m g h_1 + p_a - \rho g(h_1 - h_2 - y)$$

$$p_c = \rho g y + p_d = \rho g y + \rho_g g h_2 + p_a$$

所以
$$(\rho - \rho_m) = \frac{(\rho - \rho_g)h_2}{h_1} \approx \frac{\rho h_2}{h_1}$$

结合上述结果有

$$p_A - p_B = (\rho - \rho_m)gH = \frac{h_2}{h_1} \rho g H$$

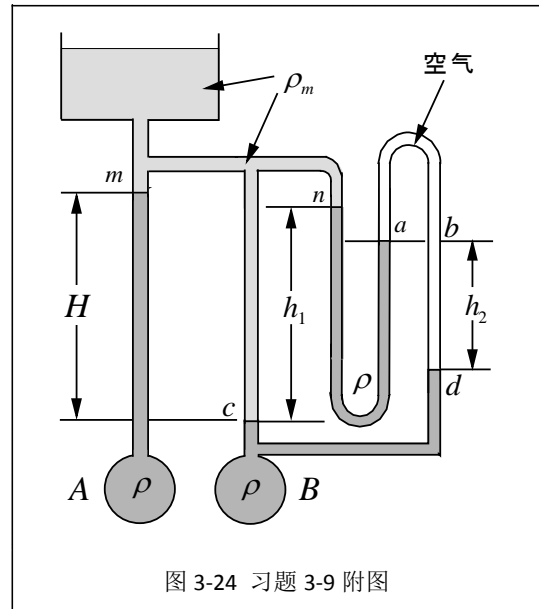


图 3-24 习题 3-9 附图

3-10 一个底部为正方形的容器被分成两部分，两部分在容器的底部连通。在容器中装入水以后，再在左边部分加入密度为 ρ_o $=820\text{kg/m}^3$ 的油，形成如图 3-25 所示的形态。

(1) 试计算右边油的高度 h ;

(2) 如果在油面上浮着一个 $G=1000\text{N}$ 重的木块，则右边的水面要上升多少？

解:

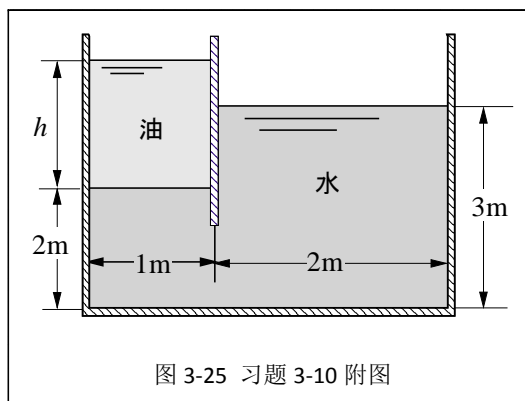
(1) 从水侧和油侧计算的油-水交界面压力相等:

$$\rho_o g h = \rho_w g (3 - 2) \rightarrow h = \rho_w / \rho_o = 1.219\text{m}$$

(2) 设加上木块后右边水面上升 Δ (m)，因水的体积不变，故油-水交界面下降 $\Delta/2$ ，右边水面与油-水交界面高差 $h_1 = 1 + 1.5\Delta$ ，交界面表压力 $p = \rho_w g h_1$ ，于是由油与木块受力平衡有:

$$G + \rho_o g h A = \rho_w g h_1 A \rightarrow h_1 = (G + \rho_o g h A) / \rho_w g A = 1.034\text{m}$$

由此得水面上升距离为 $\Delta = (h_1 - 1) / 1.5 = 0.023\text{m} = 23\text{mm}$



3-11 一圆筒形闸门如图 3-26 所示，直径 $D=4\text{m}$ ，长度 $L=10\text{m}$ ，上游水深 $H_1=4\text{m}$ ，下游水深 $H_2=2\text{m}$ ，求作用于闸门上的静压总力 F_x 、 F_y 。

解: 筒形闸门 x 方向受力，等于其 x 方向投影面积乘平均压力，所以

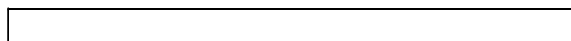
$$F_{x1} = \frac{1}{2} \rho g H_1 \times (DL) = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.8 \times 4 \times (4 \times 10) = 784000 \text{ N} = 784\text{kN}$$

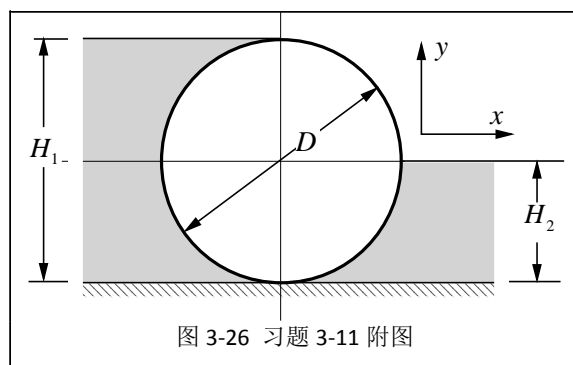
$$F_{x2} = \frac{1}{2} \rho g H_2 \times \left(\frac{D}{2} L\right) = \frac{1}{2} \times 1000 \times 9.8 \times 2 \times \frac{4}{2} \times 10 = 196000 \text{ N} = 196\text{kN}$$

$$F_x = F_{x1} - F_{x2} = 784 - 196 = 588 \text{ kN}$$

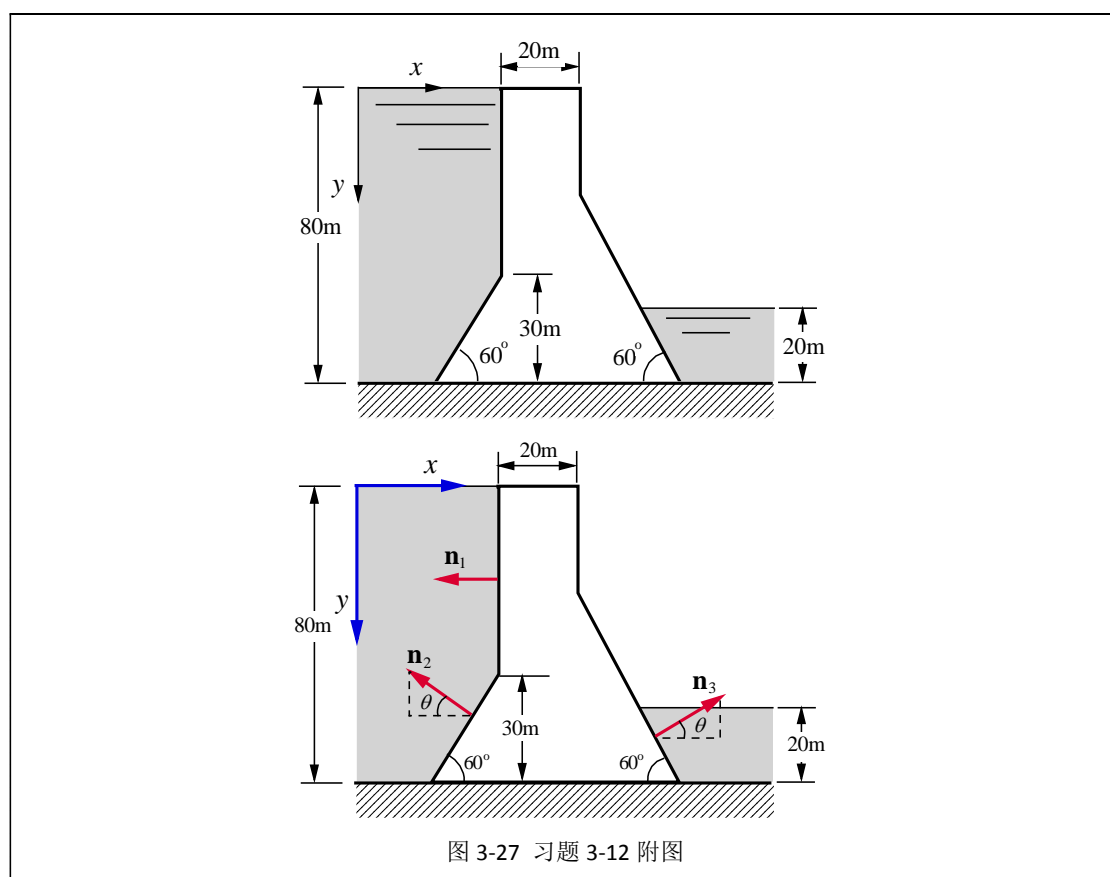
筒形门 y 方向受力，等于其表面上方液体的重量（或浮力=排开的液体的重量），所以

$$F_y = \rho g \frac{3}{4} \pi R^2 L = 1000 \times 9.8 \times \frac{3}{4} \times \pi \times 2^2 \times 10 = 923628 \text{ N} = 924\text{kN}$$





3-12 一拦河大坝，坝内水深 80m，坝外水深 20m，坝的结构尺寸如图 3-27 所示。试计算在水的静压作用下，大坝所受合力的大小及其与 x 轴的交角。（取单位宽度大坝计算，水的密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ ）



解法一：积分法。设坐标如图所示，坝体表面所受液体压力合力：

$$\mathbf{F} = - \iint_A p \mathbf{n} dA$$

(1) 坝体内表面所受液体压力

\therefore

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = -\mathbf{i} & \rightarrow \mathbf{n}_1 dA = -\mathbf{i} dy & (0 \leq y \leq 50\text{m}) \\ \mathbf{n}_2 = -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} & \rightarrow \mathbf{n}_2 dA = -\mathbf{i} dy - \mathbf{j} dx = -\mathbf{i} dy - \mathbf{j} \tan \theta dy & (50 \leq y \leq 80\text{m}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbf{F}' &= -\iint_{A_1} p \mathbf{n}_1 dA - \iint_{A_2} p \mathbf{n}_2 dA = \int_0^{50} \rho g y \mathbf{i} dy + \left(\int_{50}^{80} (\rho g y \mathbf{i} dy + \int_{50}^{80} \rho g y \tan \theta \mathbf{j} dy) \right) \\ &= \int_0^{80} \rho g y \mathbf{i} dy + \int_{50}^{80} \rho g y \tan \theta \mathbf{j} dy = (3200 \rho g \mathbf{i} + 1126 \rho g \mathbf{j}) = F'_x \mathbf{i} + F'_y \mathbf{j}\end{aligned}$$

(2) 坝体外表面所受液体压力

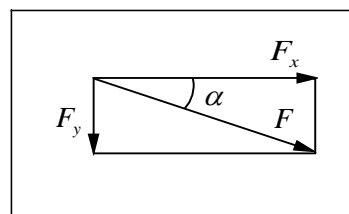
$$\because \mathbf{n}_3 = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \rightarrow \mathbf{n}_3 dA = \mathbf{i} dy - \mathbf{j} dx = \mathbf{i} dy - \mathbf{j} \tan \theta dy \quad (60 \leq y \leq 80 \text{m})$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbf{F}'' &= -\iint_{A_3} p \mathbf{n}_3 dA = \int_{60}^{80} -\rho g (y - 60) \mathbf{i} dy + \rho g (y - 60) \mathbf{j} \tan \theta dy \\ &= (-200 \rho g \mathbf{i} + 115 \rho g \mathbf{j}) = F''_x \mathbf{i} + F''_y \mathbf{j}\end{aligned}$$

(3) 合力及作用方向 $\mathbf{F} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}'' = (F'_x + F''_x) \mathbf{i} + (F'_y + F''_y) \mathbf{j} = (3000 \mathbf{i} + 1241 \mathbf{j}) \rho g$

$$\left. \begin{aligned}F_x &= 29400 \text{ kN} \\ F_y &= 12161.8 \text{ kN}\end{aligned} \right\} \rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 31816 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = 0.414 \rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$



(4) 合力作用位置

$$\text{由} \quad F_x y_0 = \int_0^{80} y \rho g y dy - \int_{60}^{80} y \rho g (y - 60) dy$$

$$\text{可得} \quad y_0 = \left(\frac{80^3}{3} - \left(\frac{80^3}{3} - \frac{80^2}{2} 60 - \frac{60^3}{3} + \frac{60^2}{2} 60 \right) \right) \frac{1}{3000} = 52 \text{m}$$

解法二：根据 x 方向的投影面积求 F_x ，根据液体重量求 F_y 。

$$\left. \begin{aligned}F_x &= \frac{1}{2} \rho g H_1 (H_1 \times 1) - \frac{1}{2} \rho g H_2 (H_2 \times 1) = 29400 \text{ kN} \\ F_y &= \rho g \left(H_1 \frac{30}{\tan 60^\circ} - \frac{1}{2} 30 \frac{30}{\tan 60^\circ} + \frac{1}{2} H_2 \frac{H_2}{\tan 60^\circ} \right) = 12165 \text{ kN}\end{aligned} \right\}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 31817 \text{ kN}, \quad \tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = 0.414 \rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$

3-13 如图 3-28 是运送液体的槽车简化模型：槽车以等加速度 \mathbf{a} 做水平运动。槽车静止时，车内液体的高度为 H 。(1) 试求槽车在等加速运动过程中的自由液面方程和压力分布；(2) 证明压力分布和惯性坐标系一致，即距离自由液面下垂直距离 h 处的压力可表示为 $p = p_0 + \rho g h$ 。设自由液面的压力为 p_0

解：将固定在槽车上的运动坐标系的原点置于静止时自由液面的中点， z 轴垂直向上， x 轴与加速度的方向一致，这样运动过程中只要液体不溢出，坐标原点不变。

槽车运动时单位质量液体受到的重力和液体的加速度分量分别为：

$$g_x = 0, \quad g_y = 0, \quad g_z = -g;$$

$$a_x = a, \quad a_y = 0, \quad a_z = 0$$

代入压力全微分方程得：

$$dp = -\rho(adx + gdz)$$

因为自由液面是等压面，即 $dp = 0$ ，所以等压面的微分式为：

$$adx = -gdz \rightarrow z = -\frac{a}{g}x + c$$

(1) 上式给出了一簇斜率为 $-a/g$ 的倾斜平面，即槽车运动时液体的等压面。自由液面通过原点，可确定积分常数 $c = 0$ 。因此自由液面方程为：

$$z_0 = -\frac{a}{g}x$$

积分压力全微分方程，可得槽车内液体中的压力分布：

$$p = -\rho(ax + gz) + c$$

自由液面上 $z=0$, $x=0$, $p=p_0$ ，可确定积分常数 $c = p_0$ ，上式成为：

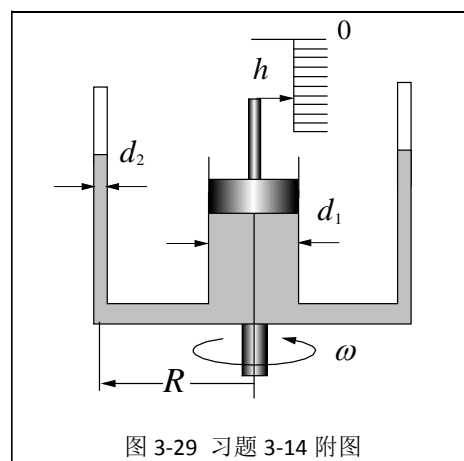
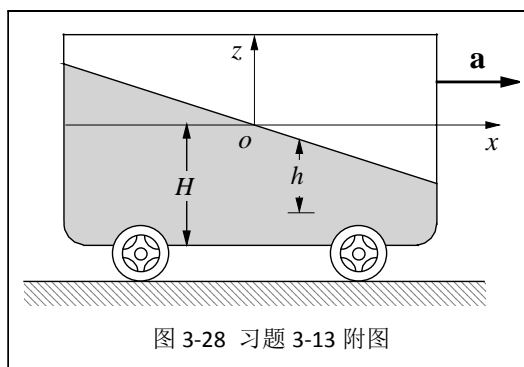
$$p = p_0 - \rho(ax + gz)$$

(2) 将压力分布公式改写成下面形式：

$$p = p_0 - \rho g \left(\frac{a}{g}x + z \right) = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

上式中 $(z_0 - z)$ 正好等于液体自由液面以下的垂直深度 h ，因此压力分布公式可以写成：

$$p = p_0 + \rho gh$$



3-14 图 3-29 所示是一液体转速计，由直径为 d_1 的中心圆筒和重量为 W 的活塞、以及两个直径为 d_2 的有机玻璃管组成，玻璃管与转轴轴线的半径距离为 R ，系统中盛有汞液。试求转动角速度 ω 与指针下降距离 h 的关系。设 $\omega=0$ 时， $h=0$ 。

解：如示意图 1，取 $x-y$ 坐标位于旋转平面， z 坐标垂直向上，则旋转流体单位质量重力分量为：

$$g_x = 0, \quad g_y = 0, \quad g_z = -g$$

流体绕 z 轴以匀角速度 ω 旋转时，半径 r 处流体的加速度 \mathbf{a} 大小为 $r\omega^2$ ，方向指向转动中心。按达朗贝尔原理，单位质量流体受到的惯性力（离心力）则为 $-\mathbf{a}$ ，大小为 $r\omega^2$ ，方向沿径向朝外，其 x 、 y 、 z 方向的分量为：

$$-a_x = r\omega^2 \cos \theta = x\omega^2$$

$$-a_y = r\omega^2 \sin \theta = y\omega^2$$

$$-a_z = 0$$

于是根据非惯性坐标系的静力学微分方程得：

$$\begin{aligned} dp &= \rho[(g_x - a_x)dx + (g_y - a_y)dy + (g_z - a_z)dz] \\ &= \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) \end{aligned}$$

(1) 压力分布方程

$$p = \rho \frac{\omega^2 x^2}{2} + \rho \frac{\omega^2 y^2}{2} - \rho g z + c = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + c$$

(2) 确定转速计液位关系：

如示意图 2，设转速计静止时中心管与有机玻璃管液面高差为 Δ ，由静压平衡得

$$\frac{W}{\pi d_1^2 / 4} = \rho g \Delta \rightarrow \Delta = \frac{W}{\rho g \pi d_1^2 / 4}$$

转速计旋转时，活塞下降 h ，导致玻璃管液面上升 H ，两者关系由体积相等确定

$$h \frac{\pi d_1^2}{4} = 2H \frac{\pi d_2^2}{4} \rightarrow H = h \frac{1}{2} \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

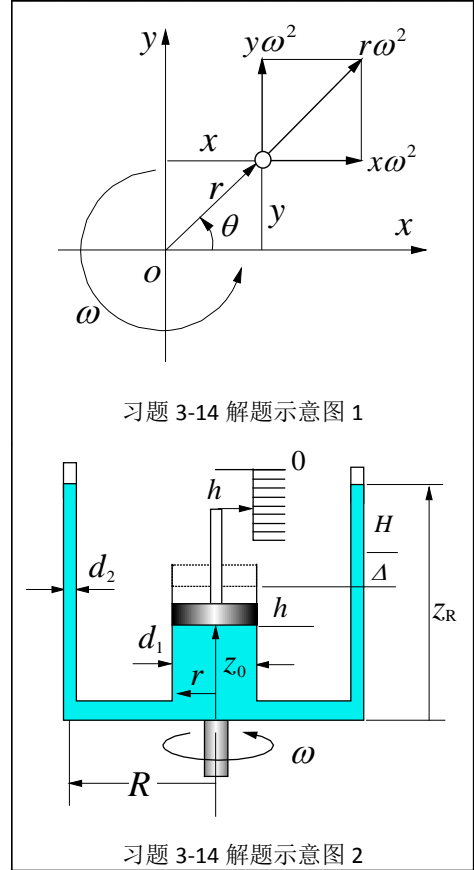
此时，中心管与有机玻璃管液面高差为

$$z_R - z_0 = h + \Delta + H = \frac{W}{\rho g \pi d_1^2 / 4} + h \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_1^2}{d_2^2} \right) \quad (\text{A})$$

(3) 确定积分常数——近似解：认为活塞面上压力均匀分布。

在 $r=0$ 、 $z=z_0$ 点， $p = \frac{W}{\pi d_1^2 / 4} + p_0$ ，代入压力方程得 $c = \frac{W}{\pi d_1^2 / 4} + p_0 + \rho g z_0$ ，由此得

压力分布方程：



习题 3-14 解题示意图 1

习题 3-14 解题示意图 2

$$p - p_0 = \frac{W}{\pi d_1^2/4} + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g(z - z_0)$$

进一步, 在 $r = R$ 、 $z = z_R$ 点, $p = p_0$, 代入上述压力分布方程有

$$0 = \frac{W}{\pi d_1^2/4} + \rho \frac{\omega^2 R^2}{2} + \rho g(z_R - z_0)$$

将式(A) 代入有

$$\frac{W}{\pi d_1^2/4} + \rho \frac{\omega^2 R^2}{2} + \rho g \left[\frac{W}{\rho g \pi d_1^2/4} + h \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d_1^2}{d_2^2} \right) \right] = 0$$

由此解出

$$h = \frac{\omega^2 R^2}{g(2 + d_1^2/d_2^2)}$$

此外有压力分布方程取 $z = z_0$, 可得活塞面上的压力分布为:

$$p - p_0 = \frac{W}{\pi d_1^2/4} + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

(4) 确定积分常数——精确解: 实际上, 在液体旋转的情况下, 活塞面上的压力不是均匀, 而是如示意图 3 所示。

设在 $r = 0$ 、 $z = z_0$ 点, $p = p_c + p_0$, 代入压力分布方程
积分常数 $c = p_c + p_0 + \rho g z_0$, 由此得压力分布方程

$$p - p_0 = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + p_c - \rho g(z - z_0)$$

取 $z = z_0$, 可得活塞面上的压力分布为:

$$p - p_0 = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + p_c$$

由于活塞面上压力的合力必须等于活塞重量, 即

$$W = \int_0^{d_1/2} (p - p_0) 2\pi r dr = \int_0^{d_1/2} \left(\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + p_c \right) 2\pi r dr = \rho \omega^2 \frac{\pi d_1^4}{64} + p_c \frac{\pi d_1^2}{4}$$

由此可确定:

$$p_c = \frac{W}{\pi d_1^2/4} - \rho \frac{\omega^2 d_1^2}{16}$$

将上述 p_c 表达式代入后得压力分布方程为

$$p - p_0 = \frac{W}{\pi d_1^2/4} + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} \left(1 - \frac{d_1^2}{8r^2} \right) - \rho g(z - z_0)$$

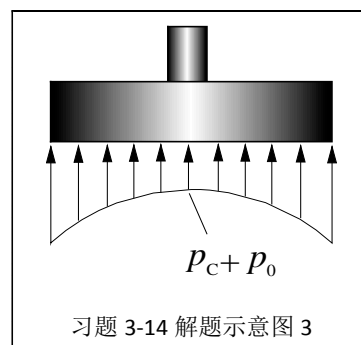
活塞面上的压力分布 $p - p_0 = \frac{W}{\pi d_1^2/4} + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} \left(1 - \frac{d_1^2}{8r^2} \right)$

在 $r = R$ 、 $z = z_R$ 点, $p = p_0$, 代入压力方程得

$$0 = \frac{W}{\pi d_1^2/4} + \rho \frac{\omega^2 R^2}{2} \left(1 - \frac{d_1^2}{8R^2} \right) - \rho g(z_R - z_0)$$

将方程 (A) 代入上式后可解出

$$h = \frac{\omega^2 R^2}{g(2 + d_1^2/d_2^2)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d_1^2}{(2R)^2} \right)$$



3-15 一敞口圆筒容器绕其立轴等速旋转，如图 3-30 所示。已知容器半径 $R=150\text{mm}$ ，高度 $H=500\text{mm}$ ，静止时液面高度 $h=300\text{mm}$ ，问当转速 n 为多少转时，水面恰好达到容器的上缘？

解：根据旋转容器等压面方程

$$\frac{\omega^2}{2}r^2 - gz = C$$

取自由液面， $r=R$ ， $z=H$ ，得

$$\frac{\omega^2}{2}R^2 - gH = C \rightarrow z_0 = H - \frac{\omega^2}{2g}(R^2 - r^2)$$

由体积相等原则有

$$\pi R^2 h = \int_0^R 2\pi r dr \left(H - \frac{\omega^2}{2g}(R^2 - r^2) \right) = \pi R^2 \left(H - \frac{\omega^2}{4g}R^2 \right)$$

即

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{(H-h)g} \rightarrow n = \frac{30}{\pi} \frac{2}{R}\sqrt{(H-h)g} = 178\text{rpm}$$

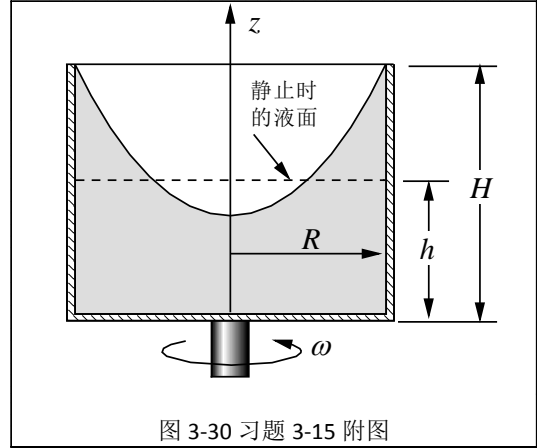


图 3-30 习题 3-15 附图

3-16 一个充满水的密闭圆筒容器，横向放置，以等角速度 ω 绕自身中心轴线旋转，如图 3-31 所示。试考虑重力的影响，证明其等压面是圆柱面，且等压面的中心轴线比容器中心轴高 $y_0 = g/\omega^2$ 。

解：重力质量力：

$$g_x = 0, \quad g_y = -g, \quad g_z = 0$$

单位质量流体受到的惯性力（离心力）分量为：

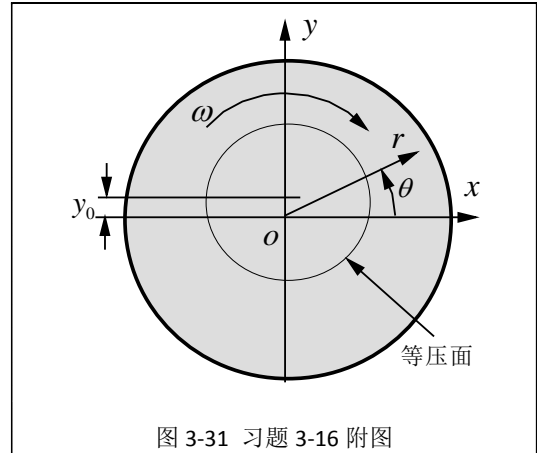


图 3-31 习题 3-16 附图

$$\begin{cases} -a_x = r\omega^2 \cos \theta = x\omega^2 \\ -a_y = r\omega^2 \sin \theta = y\omega^2 \\ -a_z = 0 \end{cases}$$

于是容器中液体所受的单位质量力为：

$$f_x = g_x - a_x = \omega^2 x, \quad f_y = g_y - a_y = -g + \omega^2 y, \quad f_z = g_z - a_z = 0$$

压力全微分方程为：

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + (-g + \omega^2 y) dy)$$

令 $dp = 0$ 然后积分式得等压面方程为：

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gy = c \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{\omega^2} gy + \frac{g^2}{\omega^4} = \frac{2c}{\omega^2} + \frac{g^2}{\omega^4}$$

最后得：

$$x^2 + (y - \frac{g}{\omega^2})^2 = \frac{2c}{\omega^2} + \frac{g^2}{\omega^4} = C$$

即：等压面为圆柱面，轴心线过 y 轴且高出 x 轴的距离为 $y_0 = g / \omega^2$

3-17 一圆柱形容器如图 3-32 所示，其半径 $R=0.6\text{m}$ ，完全充满水，在顶盖上 $r_0=0.43\text{m}$ 处开一小孔，敞口测压管中的水位 $h=0.5\text{m}$ ，问此容器绕其立轴旋转的转速 n 为多大时，顶盖所受水的静压总力为零？

解：由旋转容器内相对静止液体的压力分布表达式有

$$p = \rho(\frac{\omega^2}{2}r^2 - gz) + C$$

代入 $r=r_0$ ， $z=H+h$ ， $p=p_0$ ，可确定

$$C = p_0 + \rho g(H+h) - \frac{\rho\omega^2 r_0^2}{2}$$

代入压力分布方程得

$$p - p_0 = \rho[\frac{\omega^2}{2}(r^2 - r_0^2) + g(H+h-z)]$$

故顶盖所用总压力

$$F = \int_0^R (p - p_0)|_{z=H} 2\pi r dr = \int_0^R \rho[\frac{\omega^2}{2}(r^2 - r_0^2) + gh] 2\pi r dr = 0$$

由此得：

$$\omega = 2\sqrt{\frac{gh}{2r_0^2 - R^2}} \rightarrow n = \frac{60}{\pi}\sqrt{\frac{gh}{2r_0^2 - R^2}} = 427\text{rpm}$$

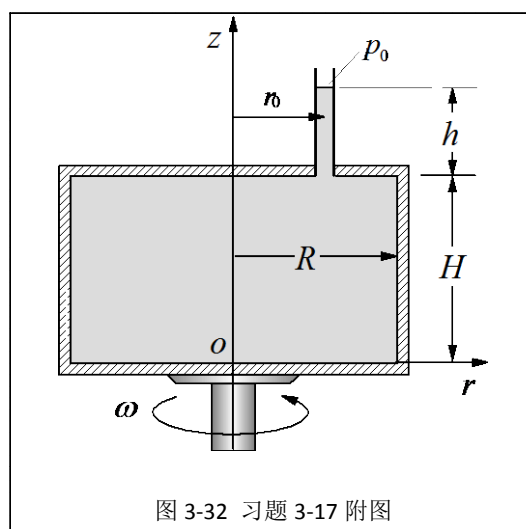
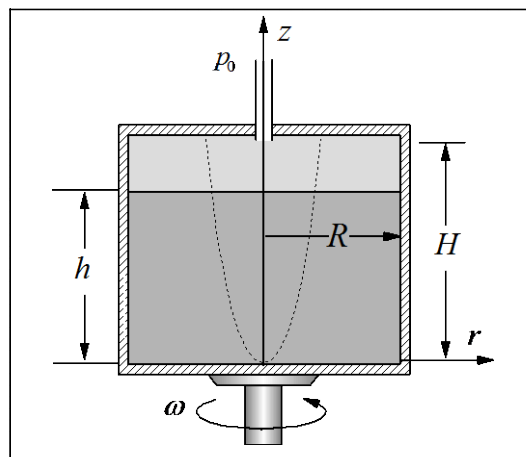


图 3-32 习题 3-17 附图



3-18 圆柱形容器如图 3-33 所示，其半径

图 3-33 习题 3-18 附图

$R=300\text{mm}$ ，高 $H=500\text{mm}$ ，盛水至 $h=400\text{mm}$ ，

水的密度 $\rho_w=1000\text{kg/m}^3$ ，余下的容积盛满密度 $\rho_o=800\text{kg/m}^3$ 的油。容器绕其立轴旋转，并在顶盖中心有一小孔和大气相通。（1）问转速 n 为多大时，油-水界面开始接触底板？（2）求此时容器顶盖和底板上的最大压力和最小压力值。（提示：油水分界面为等压面；油-水界面刚接触底板状态下，底板中心压力 $p_1 = p_0 + \rho_o gH$ ）

解：旋转后，油水界面接触到容器底部中心点时，接触点的压力为

$$p_1 = p_0 + \rho_o gH$$

根据旋转容器内流体的压力分布公式：

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2}{2} r^2 - gz \right) + C$$

由 $r=0$ ， $z=0$ ， $p=p_1$ ，确定 $C=p_1$ ，得到油-水界面刚接触底板状态时流场的压力分布为

$$p - p_1 = \rho \left(\frac{\omega^2}{2} r^2 - gz \right)$$

因为分界面为等压面，所以分界面接触到底面时中心点压力 p_1 必然与分界面各点压力相同。于是由 $p=p_1$ 可得油水分界面方程，而取 $z=H$ 时， $p=p_1$ ，则可得顶盖处油水分界面半径。因此

分界面方程：
$$z_1 = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

顶盖处分界面半径 r_1 ：
$$\frac{\omega^2}{2} r_1^2 = gH \rightarrow r_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{2gH}$$

由质量守恒原理，容器在静止和旋转状态下油的体积相等，即

$$\pi R^2 (H-h) = \pi r_1^2 H - \int_0^{r_1} z_1 2\pi r dr \rightarrow \pi R^2 (H-h) = \pi r_1^2 H - \frac{\pi \omega^2}{4g} r_1^4$$

由此得
$$\omega^2 = \frac{gH^2}{R^2(H-h)} \rightarrow n = \frac{30}{\pi} \frac{H}{R} \sqrt{\frac{g}{(H-h)}} = 157.5 \text{rpm}$$

$$r_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{2gH} = 0.190\text{m} = 190\text{mm}$$

此时油和水的压力分布分别为：

$$p - p_1 = \rho_o \left(\frac{\omega^2}{2} r^2 - gz \right) \rightarrow p = p_0 + \rho_o \frac{r^2 \omega^2}{2} + \rho_o g(H-z)$$

$$p - p_1 = \rho_w \left(\frac{\omega^2}{2} r^2 - gz \right) \rightarrow p = p_0 + \rho_w \frac{r^2 \omega^2}{2} + g(\rho_o H - \rho_w z)$$

顶盖上压力分布： $z=H$

$$\text{油: } p = p_0 + \rho_o \frac{r^2 \omega^2}{2} \quad (r \leq r_1), \quad \text{水: } p = p_0 + \rho_w \frac{r^2 \omega^2}{2} - (\rho_w - \rho_o)gH \quad (r \geq r_1)$$

$r=0$ 处有最小压力（油）： $p_{\min} - p_0 = 0$ ；

$$r=R \text{ 处有最大压力 (水): } p_{\max} - p_0 = \rho_w \frac{r^2 \omega^2}{2} - (\rho_w - \rho_o) g H = 11271.25 \text{ Pa} = 1.15 \text{ mH}_2\text{O}$$

底板上压力分布: $z=0$

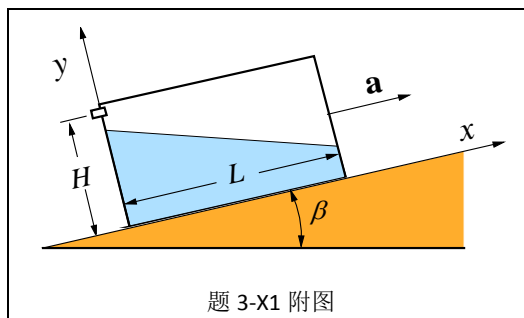
$$\text{油: } p = p_0 + \rho_o \frac{r^2 \omega^2}{2} + \rho_o g H, \quad \text{水: } p = p_0 + \rho_w \frac{r^2 \omega^2}{2} + g \rho_o H$$

$$r=0 \text{ 处有最小压力 (油或水): } p_{\min} - p_0 = \rho_o g H = 3920 \text{ Pa} = 0.4 \text{ mH}_2\text{O}$$

$$r=R \text{ 处有最大压力 (水): } p_{\max} - p_0 = \rho_w \frac{\omega^2}{2} R^2 + \rho_o g H = 16171.25 \text{ Pa} = 1.65 \text{ mH}_2\text{O}$$

3-X1 如图所示, 运送液体的槽车以等加速度 a 沿坡度为 β 的斜面行进。已知液体密度为 ρ , 槽车在平地静止时, 液面高度为 $H/2$ 。

- (1) 建立本问题的静力学微分方程;
- (2) 写出等压面方程; 并令 $x=0$ 、 $y=H_0$ 写出自由液面方程;
- (3) 写出液体压力分布方程;
- (4) 为保证液体不从槽车孔口流出, 加速度 a 最大为多少 (用公式表达)?



解:

- (1) 按图示坐标流体单位质量力分量为

$$f_x = g_x - a_x = -g \sin \beta - a, \quad f_y = g_y - a_y = -g \cos \beta$$

因此, 静力学微分方程为

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) = -\rho(g \sin \beta + a)dx - \rho g \cos \beta dy$$

- (2) 沿等压面, $dp=0$, 积分上述方程得等压面方程为:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g \sin \beta + a}{g \cos \beta} \Rightarrow y = -\frac{g \sin \beta + a}{g \cos \beta} x + C_1$$

令 $x=0$, $y=H_0$, 并用 y_0 表示自由液面 y 坐标, 得自由液面方程为

$$y_0 = -\frac{g \sin \beta + a}{g \cos \beta} x + H_0$$

- (3) 直接积分静力学微分方程得

$$p = -\rho(g \sin \beta + a)x - \rho g y \cos \beta + C_2$$

因为: $x=0$, $y=H_0$, $p=p_0 \Rightarrow C_2 = p_0 + \rho g H_0 \cos \beta$, 所以得压力分布方程如下

$$\begin{aligned} p &= -\rho(g \sin \beta + a)x - \rho g y \cos \beta + p_0 + \rho g H_0 \cos \beta \\ &= \rho g \cos \beta \left(-\frac{g \sin \beta + a}{g \cos \beta} x + H_0 - y \right) + p_0 \\ &= \rho g \cos \beta (y_0 - y) + p_0 = \rho g h + p_0 \end{aligned}$$

其中: $h = \cos \beta (y_0 - y)$, 表示自由液面以下的垂直深度。

- (4) 根据自由液面方程, 自由液面与 x 轴的交点 L_0 、以及 $x=L$ 时自由液面高度 h_0 分别为

$$L_0 = x|_{y_0=0} = H_0 \frac{g \cos \beta}{g \sin \beta + a}, \quad h_0 = y_0|_{x=L} \Rightarrow H_0 - \frac{g \cos \beta}{g \sin \beta + a} L$$

根据题意, z 方向单位宽度液体体积为 $HL/2$, 所以:

$$\text{A. 若 } L_0 > L, \text{ 则: } \frac{(H_0 + h_0)}{2} L = \frac{H}{2} L \Rightarrow H_0 = \frac{1}{2} \left(H + \frac{g \sin \beta + a}{g \cos \beta} L \right)$$

$$\text{由 } H_0 \leq H, \text{ 得 } a \leq \frac{H}{L} g \cos \beta - g \sin \beta$$

$$\text{B. 若 } L_0 \leq L, \text{ 则: } \frac{1}{2} H_0 L_0 = \frac{H}{2} L \Rightarrow H_0 = \left(HL \frac{g \sin \beta + a}{g \cos \beta} \right)^{1/2}$$

$$\text{由 } H_0 \leq H, \text{ 得 } a \leq \frac{H}{L} g \cos \beta - g \sin \beta$$

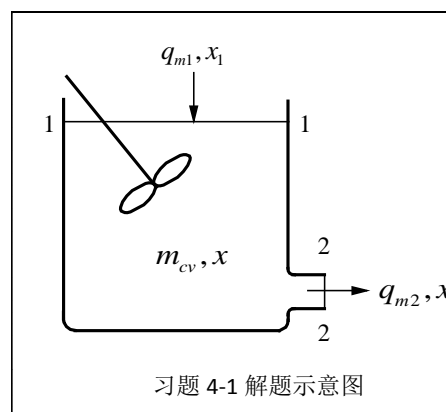
第 4 章 流体流动的守恒原理

4-1 质量浓度为 $x_1=20\%$ 的盐溶液以 $q_{m1}=20\text{kg/min}$ 的流量加入搅拌槽，搅拌后的溶液以 $q_{m2}=10\text{kg/min}$ 的流量流出。开始时，搅拌槽内有质量 $m_0=1000\text{kg}$ 、质量浓度 $x_0=10\%$ 的盐溶液。设搅拌充分，槽内各处溶液浓度均匀，试确定：

(1) 任意时刻 t (min) 搅拌槽中盐溶液的质量分率 x ；

(2) 搅拌槽中溶液的盐含量达到 200kg 时所需的时间 t 。

解：由题设条件，溶液在搅拌槽中不断累积，属于非稳态问题。如图所示，取截面 1-1 与 2-2 之间的流场空间为控制体，并设 m_{cv} 、 x 分别为控制体内流体瞬时质量和盐的质量分率，且 $t=0$ ： $m_{cv}=m_0$ ， $x=x_0$ 。因充分混合，故出口处质量分率等于 x 。



(1) t 时刻搅拌槽溶液中盐的质量分率 x

根据溶液质量守恒方程：

$$q_{m2} - q_{m1} + \frac{dm_{cv}}{dt} = 0$$

考虑 $t=0$ ， $m_{cv}=m_0$ ，积分上述方程得搅拌槽内的瞬时质量为：

$$m_{cv} = (q_{m1} - q_{m2})t + m_0, \text{ 或代入数据 } m_{cv} = 10t + 1000 \quad (\text{a})$$

因充分混合，出口处质量分率为 x ，故盐分的质量守恒方程为

$$q_{m2}x - q_{m1}x_1 + \frac{dm_{cv}x}{dt} = 0$$

将式 (a) 代入得

$$\frac{dx}{q_{m1}(x_1 - x)} = \frac{dt}{(q_{m1} - q_{m2})t + m_0}$$

积分上式并应用初始条件 $t=0$ 时 $x=x_0$ 得盐分质量分率与时间关系为

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \left[1 + \frac{(q_{m1} - q_{m2})}{m_0} t \right]^{-\frac{q_{m1}}{q_{m1} - q_{m2}}}, \text{ 或代人数据得 } x = 0.2 - \frac{1000}{(t + 100)^2} \quad (\text{b})$$

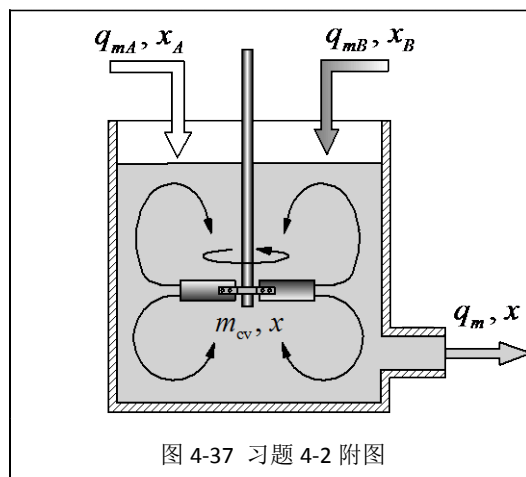
(2) 搅拌槽中溶液的盐含量 $m_{cv}x$ 与时间的关系

$$m_{cv}x = [(q_{m1} - q_{m2})t + m_0] \left\{ x_1 + (x_0 - x_1) \left[1 + \frac{(q_{m1} - q_{m2})}{m_0} t \right]^{-\frac{q_{m1}}{q_{m1} - q_{m2}}} \right\}$$

$$m_{cv}x = (10t + 1000) \left[0.2 - \frac{1000}{(t + 100)^2} \right] \text{ 或 } m_{cv}x = 2(t + 100) - \frac{10000}{(t + 100)}$$

由此可计算出当 $m_{cv}x = 200\text{kg}$ 时, 所需时间 $t = 36.6\text{min}$ 。

4-2 相同溶质不同浓度的两股溶液 A、B 进入搅拌槽中混合后放出, 如图 4-37 所示。其中 q_{mA} 、 x_A , q_{mB} 、 x_B , q_m 、 x 分别为 A 股溶液、B 股溶液、出口溶液的质量流量和溶质质量分率。由于充分搅拌, 容器内溶液浓度分布均匀, 且 $t=0$ 时刻, 容器内原有溶液质量为 m_0 , 溶质质量分率为 x_0 。试推导表明:



(1) 出口溶液溶质质量分率 x 与时间的关系为:

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \left(1 + \frac{\Delta q_m}{m_0} t \right)^{-\frac{q_{m1}}{\Delta q_m}}$$

其中, $x_1 = (q_{mA}x_A + q_{mB}x_B) / q_{m1}$ (进口平均质量分率), $q_{m1} = q_{mA} + q_{mB}$ (进口总流量), $\Delta q_m = q_{m1} - q_m$ (进出口流量差)。

(2) 对于进出口总质量流量相等的情况, 即 $\Delta q_m = q_{m1} - q_m = 0$, 有:

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \exp\left(-\frac{q_{m1}}{m_0} t\right)$$

解:

(1) 与题 4-1 类似, 溶液的质量守恒方程和盐分的质量守恒方程分别为:

$$q_m - (q_{mA} + q_{mB}) + \frac{dm_{cv}}{dt} = 0, \quad q_mx - (q_{mA}x_A + q_{mB}x_B) + \frac{dm_{cv}x}{dt} = 0$$

令 $q_{m1} = q_{mA} + q_{mB}$, $q_{m1}x_1 = (q_{mA}x_A + q_{mB}x_B)$, 则上述方程的形式和初始条件与题 4-1 完全一致, 即

$$q_m - q_{m1} + \frac{dm_{cv}}{dt} = 0 \quad \text{且 } t=0, m_{cv}=m_0$$

$$q_mx - q_{m1}x_1 + \frac{dm_{cv}x}{dt} = 0 \quad \text{且 } t=0, x=x_0$$

因此，仿照题 4-1 可写出方程的解为：

$$m_{cv} = (q_{m1} - q_m)t + m_0 = \Delta q_m t + m_0$$

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \left(1 + \frac{(q_{m1} - q_m)}{m_0}t\right)^{-\frac{q_{m1}}{(q_{m1} - q_m)}} = \left(1 + \frac{\Delta q_m}{m_0}t\right)^{-\frac{q_{m1}}{\Delta q_m}}$$

其中， $q_{m1} = q_{mA} + q_{mB}$ ， $q_{m1}x_1 = (q_{mA}x_A + q_{mB}x_B)$ ， $\Delta q_m = q_{m1} - q_m$ 。

(2) 对于 $\Delta q_m = q_{m1} - q_m = 0$ ，则有 $dm_{cv}/dt = 0$ ，即 $m_{cv} = m_0$ ，总质量流是稳态的，但盐分的流动非稳态，所以

$$q_mx - q_{m1}x_1 + \frac{dm_{cv}x}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dx}{(x - x_1)} = -\frac{q_{m1}}{m_0}dt$$

考虑 $t=0$ ， $x=x_0$ ，积分上式可得 $\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \exp\left(-\frac{q_{m1}}{m_0}t\right)$

4-3 某工业废水以流量 q_m 排入搅拌槽中进行自分解反应，以降低有害组分 A 的排放浓度，如图 4-38 所示。已知，进口废水流量 q_m ，A 组分质量分率 x_{A0} ；A 组分分解速率 $\dot{r}_A = -k\rho_A$ [kg/(m³s)]，其中 ρ_A 为 A 组分质量浓度[kg(A)/m³(溶液)]， k 为反应常数[1/s]；部分气相分解产物质量忽略不计，废水混合物密度 ρ 不变。设搅拌槽有效容积为 V 且搅拌槽中废水组分分布均匀，试求：

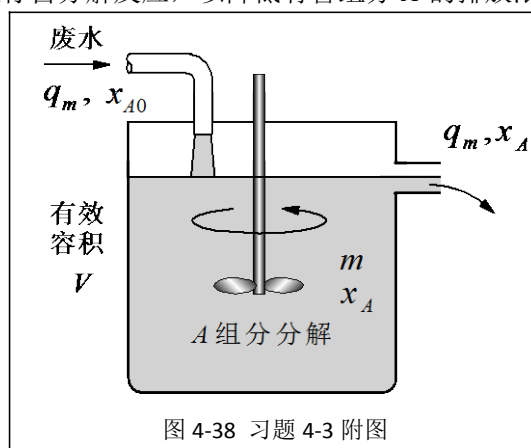


图 4-38 习题 4-3 附图

(1) 搅拌槽由空置状态到充满废水的过程中组分 A 质量分率 x_A 的表达式；

(2) 搅拌槽充满废水形成稳态流动后 A 组分质量分率 x_A 的表达式；

(3) 无限长时间后搅拌槽排出废水的质量分率 x_A 与进口废水质量分率 x_{A0} 之比。

解：

(1) 废水未流出搅拌槽之前组分 A 的质量守恒方程为：

$$-q_mx_{A0} - \dot{R}_A + \frac{dm_A}{dt} = 0$$

因为 $\rho_A = m_A/V'$ ，其中 $V' = q_mt/\rho$ 为槽中废水瞬时体积，所以 $\dot{R}_A = -k\rho_AV' = -km_A$ ，代入守恒方程积分得

$$m_A = \frac{q_mx_{A0}}{k}(1 - e^{-kt}) \quad \text{或} \quad x_A = \frac{m_A}{q_mt} = \frac{x_{A0}}{kt}(1 - e^{-kt}), \quad \text{其中 } t \leq \rho V/q_m$$

(2) 废水充满搅拌槽后组分 A 的质量守恒方程为：

$$q_mx_A - q_mx_{A0} - \dot{R}_A + dm_A/dt = 0$$

此时 $m_A = \rho Vx_A$ ， $\dot{R}_A = -km_A = -k\rho Vx_A$ ；令废水充满搅拌槽的时间 $\rho V/q_m = \tau$ ，则有

$$x_A - x_{A0} + k\tau x_A + \frac{d\tau x_A}{dt} = 0$$

时间 t 从 τ 开始, x_A 从 $x_{A,\tau} = x_{A0}(1 - e^{-k\tau})/k\tau$ 开始, 积分守恒方程得

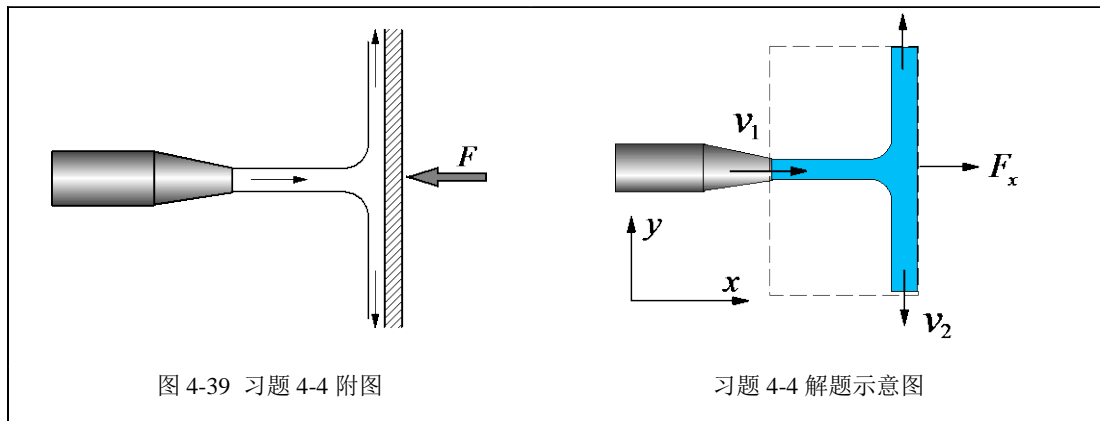
$$\frac{x_A - x_{A0}/(1+k\tau)}{x_{A,\tau} - x_{A0}/(1+k\tau)} = \exp\left[-(1+k\tau)\frac{(t-\tau)}{\tau}\right], \quad \text{其中 } t \geq \tau$$

(3) 无限长时间后
$$\frac{x_A}{x_{A0}} = \frac{1}{1+k\tau} = \frac{q_m}{q_m + k\rho V}$$

可见只要搅拌槽足够大, 有害组分 A 的排放浓度可降到相当低的程度。

4-4 在图 4-39 所示的动量实验装置中, 喷嘴将水流喷射到垂直壁面。已知喷嘴出口直径为 $d = 10\text{mm}$, 水的密度为 $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, 并测得平板受力为 $F = 100\text{N}$ 。试确定射流的体积流量。

解: 如图所示, 取图中虚线框为控制体进行分析。设喷嘴射流速度为 v_1 , 由稳态流动过程的质量守恒方程得:



$$q_{m1} = q_{m2} = q_m = \rho v_1 \pi d^2 / 4$$

其次, 根据稳态条件下 x 方向的动量方程 $F_x = (v_{2x} - v_{1x})q_m$, 因为 $v_{2x} = 0$, $v_{1x} = v_1$, 所以有

$$F_x = (0 - v_1)\rho v_1 \frac{\pi}{4} d^2 = -\rho v_1^2 \frac{\pi}{4} d^2$$

因为流体对平板的冲击力 $F = -F_x$, 所以有

$$F = -F_x = \rho v_1^2 \frac{\pi}{4} d^2 = \rho \frac{1}{\pi d^2 / 4} \left(\frac{\pi}{4} d^2 v_1 \right)^2$$

由此得喷嘴出口的流体体积流量为

$$q_v = (\pi d^2 / 4) v_1 = \sqrt{F(\pi d^2 / 4) / \rho} = \sqrt{100(\pi 0.01^2 / 4) / 1000} = 2.8 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

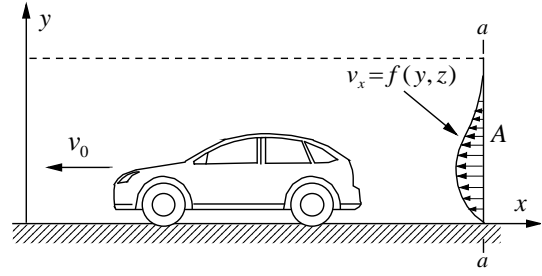
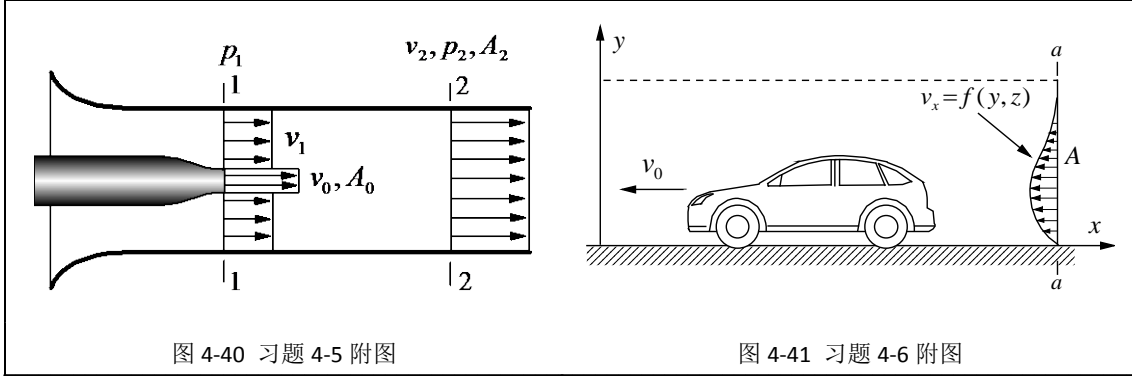
4-5 如图 4-40 所示, 高速流体在管道中心以速度 v_0 喷出, 带动喷管周围同种流体以速

度 v_1 流动, 两股流体混合均匀到达截面 2-2 后的速度为 v_2 ; 已知喷口面积 A_0 , 管道面积 A_2 。设 1-1 截面压力均匀, 气体密度 ρ 为定值且不计摩擦, 试确定流速 v_2 以及压差 $(p_2 - p_1)$ 。

解:

在 1-1 与 2-2 截面之间应用质量守恒方程得: $v_2 = [A_0 v_0 + (A_2 - A_0) v_1] / A_2$;

在 1-1 与 2-2 截面之间应用动量守恒方程得: $p_2 - p_1 = \rho [A_0 v_0^2 + (A_2 - A_0) v_1^2 - A_2 v_2^2] / A_2$



4-6 如图 4-41 所示, 汽车以速度 v_0 匀速前进, 现场测得远离汽车后方的 $a-a$ 断面上空气的绝对速度分布为 $v_x = f(y, z)$, 速度有效分布面积 A (即速度 $v_x \neq 0$ 的面积范围)。若空气按不可压缩流体处理, 其密度为 ρ , 并设汽车前方未受干扰的空气静止, 试利用动量法确定汽车的气动阻力 F_x (汽车对空气的作用力)。

解: 取汽车前方未受干扰的空气断面 (y 轴所在断面)、 $a-a$ 断面、速度有效分布面积 A 对应的柱状表面 (虚线) 和地表面包围的空间为控制体, 然后令坐标系和控制体与汽车同步前进, 考察空气反方向以速度 v_0 通过控制体。所有控制面上压力均为 p_0 , 除 $a-a$ 断面外, 其它控制面上 x 方向速度均为 v_0 。

进口截面质量流量: $q_{m1} = \rho v_0 A$

$a-a$ 截面质量流量: $q_{m2} = \iint_A \rho (v_0 - v_x) dA$

其它截面质量流量, 由质量守恒可得

$$q_{m3} = q_{m1} - q_{m2} = \iint_A \rho v_x dA$$

由动量守恒方程可得汽车对空气的作用力为:

$$F_x = \iint_A \rho (v_0 - v_x)^2 dA + v_0 \iint_A \rho v_x dA - \rho v_0^2 A = - \iint_A \rho (v_0 - v_x) v_x dA$$

4-7 固定喷嘴以速度 v_0 将水流喷射到对称弯曲的叶片上, 如图 4-42 所示。已知喷嘴出口直径为 d , 叶片出口角为 θ , 水的密度为 ρ 。忽略阻力损失和重力影响, 并取图中虚线框为控制体, 试证明:

(1) 当叶片固定时, 在 x 方向水对叶片的冲击力 F_x 为:

$$F_x = \rho(\pi d^2 / 4) v_0^2 (1 + \cos \theta)$$

(2) 当叶片以速度 v 沿 x 方向匀速移动时, 在 x 方向水对叶片的冲击力 F_x 为:

$$F_x = \rho(\pi d^2 / 4) (v_0 - v)^2 (1 + \cos \theta)$$

提示: 对于大气环境中的射流冲击问题, 忽略摩擦和重力影响, 由沿流线的伯努利方程可得射流和折转流各断面处流速相等, 即图 4-42 中 $v_2 = v_0$; 其次, 控制体移动时, 进入控制体的流量减小, 叶片出口的相对速度也减小)

解: (1) 水对固定叶片的水平冲击力 F_x

叶片固定时, 水对叶片的冲击为一稳态过程, 取控制体如示意图 1 所示, 设水流水方向受力为 F'_x , 列出动量守恒方程为

$$F'_x = (v_{2x} - v_{1x}) q_m$$

因

为

$$q_m = \rho v_0 A = \rho v_0 \pi d^2 / 4, \text{ 且 } v_{1x} = v_1 = v_0$$

$$v_2 = v_1, \text{ 且 } v_{2x} = -v_2 \cos \theta = -v_0 \cos \theta$$

所以

$$F'_x = (-v_0 \cos \theta - v_0) v_0 \rho A = -\rho A v_0^2 (1 + \cos \theta)$$

水对叶片的冲力 $F_x = -F'_x$, 所以

$$F_x = \rho A v_0^2 (1 + \cos \theta) = \rho \left(\frac{\pi}{4} d^2 \right) v_0^2 (1 + \cos \theta)$$

(2) 水对运动叶片的水平冲击力 F_x

方法一: 将坐标固定在控制体上, 如示意图 2, 控制体与坐标相对静止, 且为稳态过程。

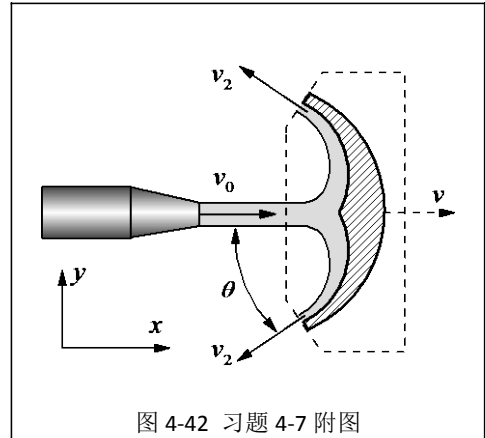
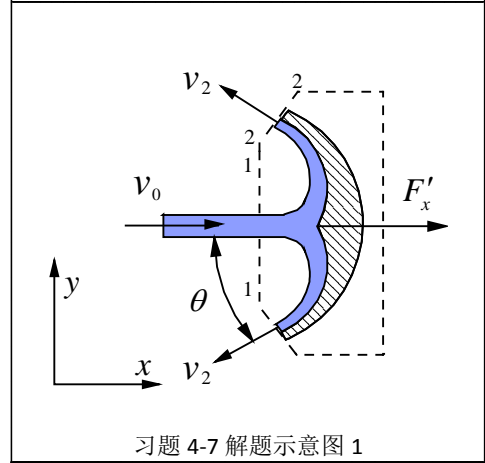
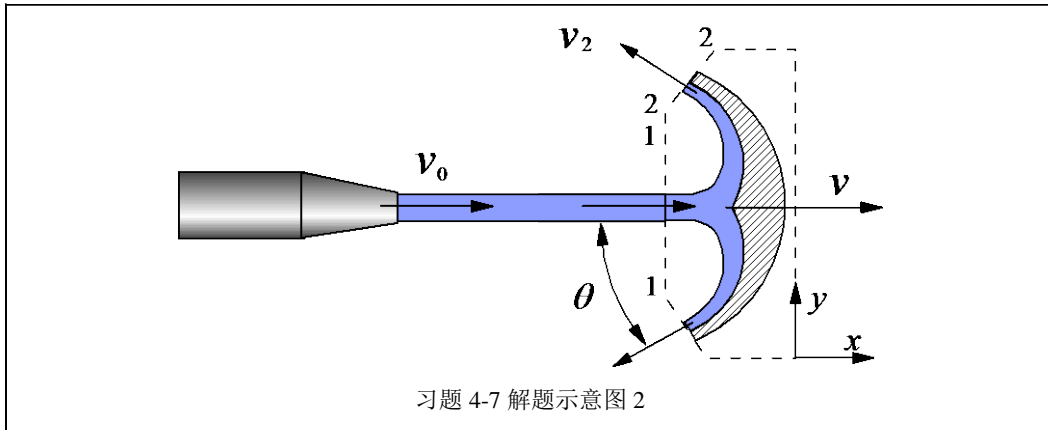


图 4-42 习题 4-7 附图



习题 4-7 解题示意图 1



因控制体匀速运动，所以从控制体上观察有

进口面 1: $v_1 = v_0 - v$ ，且平行于 x 轴，其分量 $v_{1x} = v_0 - v$

出口面 2: $v_2 = v_1 = v_0 - v$ ，其分量 $v_{2x} = -(v_0 - v) \cos \theta$

对于稳态流动过程: $q_{m1} = \rho v_1 A = \rho (v_0 - v) A = q_{m2} = q_m$

将上述各项代入 x 方向动量守恒方程 $F'_x = (v_{2x} - v_{1x}) q_m$ 有

$$F'_x = [-(v_0 - v) \cos \theta - (v_0 - v)] (v_0 - v) A \rho = -A \rho (v_0 - v)^2 (1 + \cos \theta)$$

由此可得水对叶片的冲击力

$$F_x = -F'_x = A \rho (v_0 - v)^2 (1 + \cos \theta)$$

方法二：将坐标固定在喷嘴，如示意图 3。取 1-1 截面固定，2-2 截面随叶片移动，并取 1-1 和 2-2 截面之间的空间（虚线所示）为控制体，由于控制体内有流体不断积累，故属于非稳态问题。

由示意图可知， t 时刻 1-1 与 1'-1' 之间的流体质量为: $m = \rho v_0 A t$ ，其 x 方向的动量为:

$$m v_0 = (\rho v_0 A t) v_0$$

由于 1'-1' 截面以后的流体质量恒定， x 方向动量(用 H_0 表示)不变，所以 t 时刻控制体内流体的瞬时动量为

$$m_{cv} v_x = (\rho v A t) v_0 + H_0$$

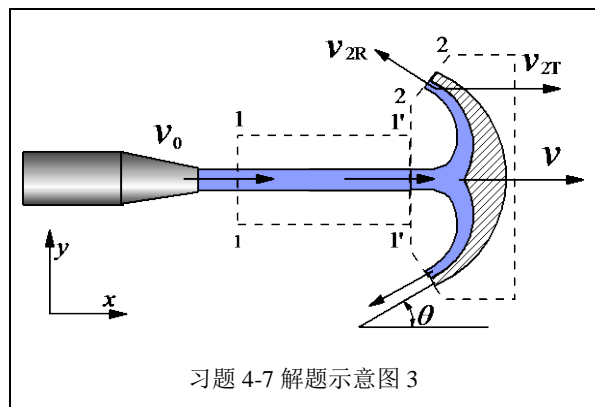
此外，因 1-1 截面固定，所以有:

$$v_1 = v_0, \quad v_{1x} = v_1 = v_0, \quad q_{m1} = \rho v_0 A$$

另一方面，相对于固定在喷嘴坐标系，2-2 截面上的绝对速度为:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2R} + \mathbf{V}_{2T}$$

其中，牵连速度 \mathbf{V}_{2T} 的大小及其 x 分量分别为



$$v_{2T} = v, \quad v_{2Tx} = v_{2T} = v$$

又由于流体进入 1-1 截面的相对速度为 $(v_0 - v)$ ，所以由提示条件，2-2 截面上相对速度 v_{2R} 的大小及其 x 分量以及质量流量 q_{m2} 分别为

$$v_{2R} = (v_0 - v), \quad v_{2Rx} = -v_{2R} \cos \theta = -(v_0 - v) \cos \theta, \quad q_{m2} = \rho(v_0 - v)A$$

由此可得
$$v_{2x} = v_{2Rx} + v_{2Tx} = -(v_0 - v) \cos \theta + v$$

将上述有关项代入非稳态过程的动量守恒方程有

$$\begin{aligned} F'_x &= (v_{2x} q_{m1} - v_{1x} q_{m2}) + \frac{dm_{cv} v_x}{dt} \\ &= [-(v_0 - v) \cos \theta + v] [\rho(v_0 - v)A] - v_0(\rho v_0 A) + (\rho v A)v_0 \\ &= -\rho A(v_0 - v)^2 (\cos \theta + 1) \end{aligned}$$

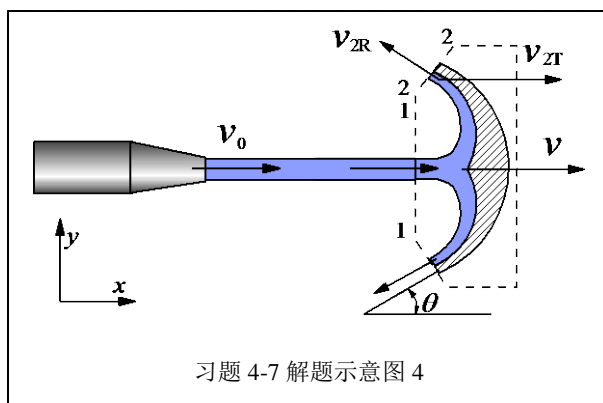
由此可得水对叶片的冲击力：

$$F_x = -F'_x = A\rho(v_0 - v)^2(1 + \cos \theta)$$

方法三：将坐标固定于喷管，控制体选取如示意图 4。此时，控制体与坐标有相对运动，但经过控制体的流动为稳态过程。

从固定于喷管的坐标系观察，1-1 截面和 2-2 截面均有牵连速度且大小和方向均与叶片运动速度 v 相同；流体进入 1-1 截面和流出 2-2 截面的相对速度均为 $(v_0 - v)$ ，但方向不同，前者沿 x 轴正方向，后者与 x 轴负方向夹角为 θ ；又因为是稳态流动，所以

$$q_{m1} = \rho(v_0 - v)A = q_{m2} = q_m$$



$$v_{1x} = (v_0 - v) + v = v_0$$

$$v_{2x} = -(v_0 - v) \cos \theta + v$$

将上述三项代入 x 方向动量守恒方程： $F'_x = (v_{2x} - v_{1x})q_m$ 有

$$F'_x = \{[-(v_0 - v) \cos \theta + v] - v_0\} \rho(v_0 - v)A = -A\rho(v_0 - v)^2(1 + \cos \theta)$$

由此可得水对叶片的冲击力为

$$F_x = -F'_x = A\rho(v_0 - v)^2(1 + \cos \theta)$$

4-8 固定喷嘴以速度 v_0 将水流喷射到叶轮的叶片上，使叶轮以角速度 ω 匀速转动，如图 4-43 所示。该叶轮的叶片与习题 4-7 的叶片完全相同，参见图 4-42。已知喷嘴出口面积为 A_0 ，叶片出口角为 θ ，水的密度为 ρ 。取图中虚线与叶轮圆周之间对应于叶片的包络空间为控制体，证明：

(1) 水流对叶片的冲击力 F_x 为

$$F_x = \rho A_0 v_0 (v_0 - R\omega)(1 + \cos \theta)$$

(2) 水流作用于叶轮的力矩为:

$$M_z = R \rho A_0 v_0 (v_0 - R\omega)(1 + \cos \theta)$$

提示: 与习题 4-7 不同, 本题中叶轮转动不影响进入控制体的流量, 仅影响水流冲击叶片的速度, 因此也同时影响到叶片出口处水流的相对速度)

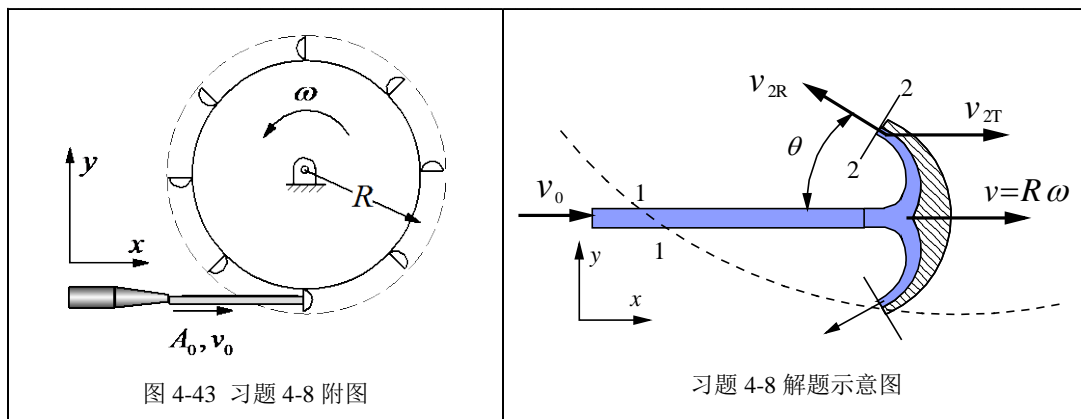


图 4-43 习题 4-8 附图

习题 4-8 解题示意图

解: 取图中虚线与叶轮圆周之间对应于叶片的包络空间为控制体。

根据质量守恒: $q_{m1} = q_{m2} = q_m = \rho A_0 v_0$

根据动量守恒: $F'_x = (v_{2x} - v_{1x})q_m$

进口截面速度分量: $v_{1x} = v_0$

出口相对速度分量: $v_{2R} = v_0 - R\omega$ (等于水冲击叶片的速度)

出口牵连速度: $v_{2T} = R\omega$

所以出口速度 x 方向分量: $v_{2x} = v_{2Rx} + v_{2Tx} = -(v_0 - R\omega)\cos \theta + R\omega$

代入动量守恒方程得

$$F'_x = [-(v_0 - R\omega)\cos \theta + R\omega - v_0]q_m = -q_m(v_0 - R\omega)(1 + \cos \theta)$$

故水对叶轮的冲击力 $F_x = -F'_x = \rho A_0 v_0 (v_0 - R\omega)(1 + \cos \theta)$

针对叶轮转动中心列动量矩守恒方程有:

$$\begin{aligned} M'_z &= [r_2 \sum v_{2i} \sin \alpha_{2i} - r_1 v_1 \sin \alpha_1] q_m = [R(-v_{2R} \cos \theta + v_{2T} \sin 90^\circ) - Rv_0 \sin 90^\circ] q_m \\ &= -q_m R(v_0 - R\omega)(1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

水流作用于叶轮的力矩为: $M_z = R \rho A_0 v_0 (v_0 - R\omega)(1 + \cos \theta)$

4-9 不可压缩流体平面射流冲击在一倾斜角为 θ 的平板上, 如图 4-44 附所示。射流速度为 v_0 , z 方向单位宽度对应的射流面积为 A_0 , 射流流体均处于环境压力。在不考虑摩擦 (即视为理想流体) 和重力的情况下, 转折流速度 $v_1=v_2=v_0$ 。

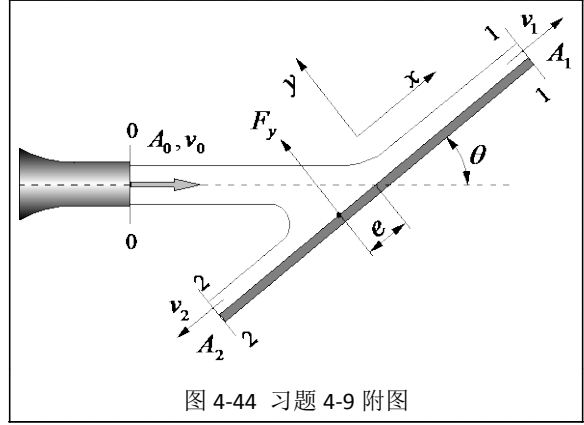


图 4-44 习题 4-9 附图

(1) 利用质量守恒方程和动量守恒方程证明, z 方向单位宽度对应的转折流面积 A_1 、 A_2 和斜平板对射流的反作用力 F_y 分别为:

$$A_1 = \frac{A_0}{2}(1 + \cos \theta), \quad A_2 = \frac{A_0}{2}(1 - \cos \theta), \quad F_y = \rho v_0^2 A_0 \sin \theta$$

提示: 由于无摩擦, 故平板对射流的反作用力沿板的法线向, 即在图示坐标下 $F_x=0$ 。

(2) 设斜平板对射流的反作用力 F_y 的作用点与平板上的射流中心线交点的距离为 e 。试利用动量矩方程证明:

$$e = \frac{1}{2} \frac{A_0}{\tan \theta}$$

解:

(1) 取 0-0、1-1、2-2 截面之间的流体空间为控制体, 忽略摩擦力和重力, $p_0=p_1=p_2=p_a$ (大气压力), 且 $F_x=0$; 所以根据动量守恒方程有:

$$y \text{ 方向: } F_y = -(-v_0 \sin \theta) q_{m0} = v_0 q_{m0} \sin \theta$$

$$x \text{ 方向: } 0 = q_{m1} v_1 - q_{m2} v_2 - q_{m0} v_0 \cos \theta$$

$$\text{由质量守恒定律有: } q_{m1} + q_{m2} - q_{m0} = 0$$

因为 $q_{m1} = \rho A_1 v_1$, $q_{m2} = \rho A_2 v_2$, $q_{m0} = \rho A_0 v_0$, 且 $v_1 = v_2 = v_0$, 所以有:

$$\begin{aligned} F_y &= v_0 \sin \theta q_{m0} \rightarrow F_y = \rho v_0^2 A_0 \sin \theta \\ \left. \begin{aligned} A_1 - A_2 - A_0 \cos \theta &= 0 \\ A_1 + A_2 - A_0 &= 0 \end{aligned} \right\} &\rightarrow A_1 = \frac{A_0}{2}(1 + \cos \theta), \quad A_2 = \frac{A_0}{2}(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

(2) 对射流轴心线与斜板的交点取矩, 0-0、1-1、2-2 截面流体速度对交点的矩半径分别为 $r_0=0$, $r_1 \sin \alpha_1 = A_1/2$, $r_2 \sin \alpha_2 = A_2/2$, (A 为单位宽度面积), 于是根据稳定流动的动量矩方程: $M_z = \sum r_2 v_2 \sin \alpha_2 q_{m2} - \sum r_1 v_1 \sin \alpha_1 q_{m1}$ 有:

$$\begin{aligned}
 -F_y e &= -q_{m1} v_1 \frac{A_1}{2} + q_{m2} v_2 \frac{A_2}{2} \rightarrow -e \rho v_0^2 A_0 \sin \theta = -q_{m1} v_1 \frac{A_1}{2} + q_{m2} v_2 \frac{A_2}{2} \\
 \rightarrow -e A_0 \sin \theta &= -\frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} \rightarrow e A_0 \sin \theta = \frac{A_0^2}{8} 4 \cos \theta \rightarrow e = \frac{A_0}{2 \tan \theta}
 \end{aligned}$$

4-10 温度为 T_1 的溶液以质量流量 q_{m1} 进入搅拌槽加热，加热后的溶液以质量流量 q_{m2} 流出，如图 4-45 所示。搅拌槽中安装有加热面积为 A 的螺旋管，放热速率 $\dot{Q} = hA(T_s - T)$ ，其中 h 、 T_s 分别为换热系数和螺旋管内饱和蒸汽温度，且两者均为定值， T 是搅拌槽中溶液温度。在 $t=0$ 时刻，搅拌槽中溶液温度为 T_0 、质量为 m_0 。设：搅拌槽保温良好热损失不计，由于充分搅拌搅拌槽中溶液温度场均匀，与传热量相比流体的动能、位能、压力能及搅拌功率均可忽略，且对于不可压缩流体其单位质量的总能（贮存能） $e \approx u = c_p T \approx c_p T$ ，其中 c_p 为溶液的定压比热。试确定：

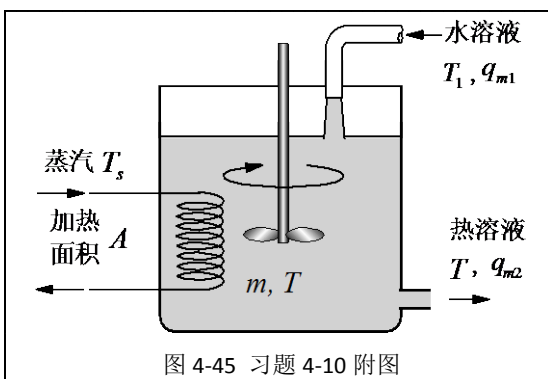


图 4-45 习题 4-10 附图

在 $t=0$ 时刻，搅拌槽中溶液温度为 T_0 、质量为 m_0 。设：搅拌槽保温良好热损失不计，由于充分搅拌搅拌槽中溶液温度场均匀，与传热量相比流体的动能、位能、压力能及搅拌功率均可忽略，且对于不可压缩流体其单位质量的总能（贮存能） $e \approx u = c_p T \approx c_p T$ ，其中 c_p 为溶液的定压比热。试确定：

- (1) 任意时刻 t 时搅拌槽中溶液质量 m 的表达式；
- (2) 任意时刻 t 时搅拌槽中溶液温度 T 的表达式；
- (3) 代入下列数据，计算 $t=1\text{h}$ 时搅拌槽出口的溶液温度。

$$\begin{aligned}
 q_{m1} &= 81.6 \text{ kg/h}, \quad T_1 = 294 \text{ K}, \quad q_{m2} = 54.4 \text{ kg/h}, \quad m_0 = 227 \text{ kg}, \quad T_0 = 311 \text{ K} \\
 A &= 0.929 \text{ m}^2, \quad h = 14 \times 10^5 \text{ J/(m}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{K)}, \quad T_s = 422 \text{ K}, \quad c_p = 4187 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}
 \end{aligned}$$

解：

- (1) 溶液的质量守恒方程为

$$q_{m2} - q_{m1} + \frac{dm}{dt} = 0$$

由 $t=0$ ， $m=m_0$ ，积分上式得搅拌槽内溶液的瞬时质量为

$$m = (q_{m1} - q_{m2})t + m_0$$

- (2) 溶液的能量守恒方程为

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \left(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + u_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) q_{m2} - \left(\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + u_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) q_{m1} + \frac{dE_{cv}}{dt}$$

简化后有

$$hA(T_s - T) = c_p T q_{m2} - c_p T_1 q_{m1} + \frac{d(mc_p T)}{dt}$$

将 $m = (q_{m1} - q_{m2})t + m_0$ 代入上式并整理得

$$\frac{dT}{[hAT_s + c_p q_{m1} T_1 - (hA + c_p q_{m1})T]} = \frac{dt}{[c_p m_0 + c_p (q_{m1} - q_{m2})t]}$$

由 $t=0, T=T_0$ 积分上式得:

$$\frac{T-B}{T_0-B} = \left[1 + \frac{(q_{m1}-q_{m2})}{m_0} t \right]^{-C}$$

其中

$$B = \frac{AhT_s + c_p q_{m1} T_1}{Ah + c_p q_{m1}}, \quad C = \frac{Ah + c_p q_{m1}}{c_p (q_{m1} - q_{m2})}$$

(3) 代入已知数据计算得, 当 $t=1\text{h}$ 时, $T=379\text{K}$ 。

4-11 图 4-46 所示为位于水平面 (x - y 平面) 的输水管路三通。其中 $\alpha_1=30^\circ$ 、 $\alpha_2=45^\circ$, 管道截面 A 、 A_1 、 A_2 对应的直径分别为 $d=400\text{mm}$ 、 $d_1=200\text{mm}$ 、 $d_2=300\text{mm}$, 对应的流量分别为 $q_m=500\text{kg/s}$ 、 $q_{m1}=200\text{kg/s}$ 、 $q_{m2}=300\text{kg/s}$; 三通管进口处压力表读数 70kPa , 水的密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ 。忽略流体粘性摩擦, 试确定 x 、 y 方向上水对三通管的推力 R_x 、 R_y 。(注: 因管道外部处于大气压力环境, 故管道受内部流体的作用力中, 流体压力的作用仅需考虑表压力)

解: 在 A 到 A_1 之间和 A 到 A_2 之间分别应用伯努利方程, 可得两出口压力 (表压) 分别为:

$$p_1 = \rho \frac{(v^2 - v_1^2)}{2} + p = 57653 \text{ Pa}, \quad p_2 = \rho \frac{(v^2 - v_2^2)}{2} + p = 68910 \text{ Pa}$$

设三通对流体的作用力分别为 R'_x 、 R'_y , 应用动量守恒方程可得

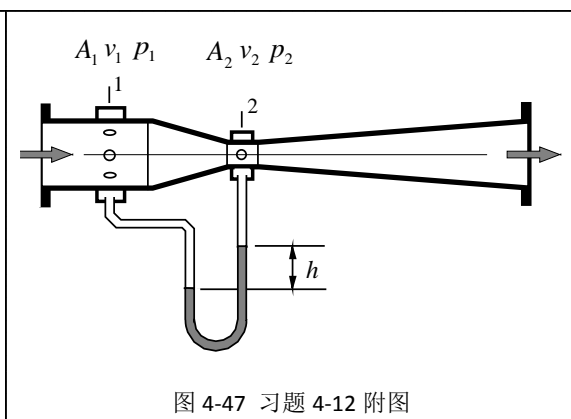
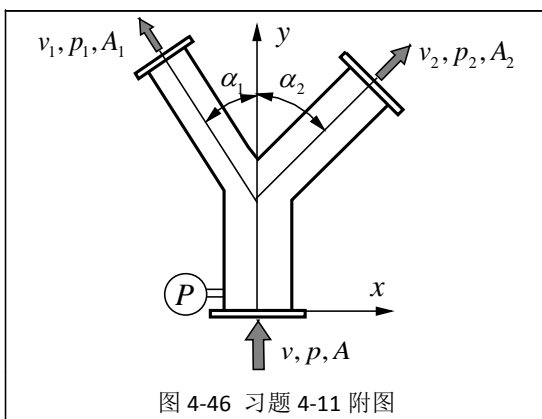
$$R'_x + A_1 p_1 \sin \alpha_1 - A_2 p_2 \sin \alpha_2 = -v_1 \sin \alpha_1 q_{m1} + v_2 \sin \alpha_2 q_{m2}$$

$$R'_y + Ap - A_1 p_1 \cos \alpha_1 - A_2 p_2 \cos \alpha_2 = v_1 \cos \alpha_1 q_{m1} + v_2 \cos \alpha_2 q_{m2} - v q_m$$

由此可得水对三通管的推力 R_x 、 R_y 分别为

$$R_x = -R'_x = (A_1 p_1 + v_1 q_{m1}) \sin \alpha_1 - (A_2 p_2 + v_2 q_{m2}) \sin \alpha_2 = -2802.3 \text{ N}$$

$$R_y = -R'_y = (Ap + v q_m) - (A_1 p_1 + v_1 q_{m1}) \cos \alpha_1 - (A_2 p_2 + v_2 q_{m2}) \cos \alpha_2 = 3770.5 \text{ N}$$



4-12 为测量管道中的流体流量, 可将称为文丘里流量计的缩放管连接到管道上, 如图 4-47 所示。其原理是通过测试来流段与颈缩段截面的压差确定流体平均流速, 从而确定流体流量, 其中流体密度 $\rho < \rho_m$ 指示剂密度。试利用伯努利方程 (4-53) 证明: 颈缩段截面流速 v_2 与 U 形管指示剂液面高差 h 的关系为

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2gh \frac{(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$

解：在 A_1 和 A_2 之间分别应用伯努利方程（5-53）可得：

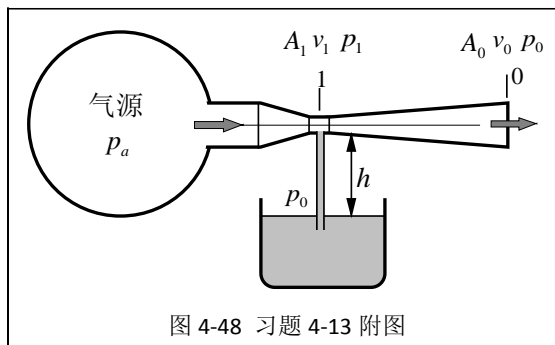
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2 \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

根据连续性方程以及 U 形压差计指示剂高差可知

$$v_1^2 = v_2^2 (A_2/A_1)^2, \quad p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho)gh$$

所以有
$$v_2^2 [1 - (A_2/A_1)^2] = 2gh \frac{(\rho_m - \rho)}{\rho} \rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (A_2/A_1)^2}} \sqrt{2gh \frac{(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$

4-13 压缩空气通过一引射器将水池中的水抽吸喷出，如图 4-48 所示。已知：引射器喉口面积 A_1 、出口面积 A_0 ，空气与水的密度分别为 ρ_g 、 ρ_L ，气源压力 p_a ，引射器出口和水池液面压力均为大气压力 p_0 。设气体为理想不可压缩流体，为了将水吸入引射器喉口，试求



- (1) 气源最小压力 $p_{a,\min}$ ；
- (2) 面积比 $A_1/A_0 = m$ 的最大值 m_{\max} 。

解：气源容积较大，气速 $v_a \approx 0$ ，在气源与截面 1、截面 0 之间应用伯努利方程有

$$p_a - p_1 = \rho_g \frac{v_1^2}{2}, \quad p_a - p_0 = \rho_g \frac{v_0^2}{2}$$

因为 $v_1 A_1 = v_0 A_0$ ， $A_1/A_0 = m$ ，故以上两式相除有：

$$\frac{(p_a - p_0)}{(p_a - p_1)} = m^2 \quad \text{或} \quad p_a = \frac{(p_0 - m^2 p_1)}{(1 - m^2)}$$

(1) 为将水吸入引射器喉口： $p_1 < p_{1,\max} = p_0 - \rho_L gh$ ，所以

$$p_a = \frac{(p_0 - m^2 p_1)}{(1 - m^2)} \geq \frac{(p_0 - m^2 p_{1,\max})}{(1 - m^2)} = p_0 + \frac{m^2 \rho_L gh}{(1 - m^2)} \quad (\text{a})$$

即气源最小压力为

$$p_{a,\min} = p_0 + \frac{m^2 \rho_L gh}{(1 - m^2)}$$

(2) 由式 (a) 又可得到

$$m \leq \sqrt{\frac{p_a - p_0}{(p_a - p_0 + \rho_L gh)}}$$

即

$$m_{\max} = \sqrt{\frac{p_a - p_0}{(p_a - p_0 + \rho_L gh)}}$$

4-14 图 4-49 所示为明渠中水流经过闸门的情况。设流体按理想不可压缩流体考虑，即流动无摩擦和阻力损失，流体密度为 ρ 。在 1-1 和 2-2 截面上，水流速度 v_1 、 v_2 分布均匀，压力沿高度的分布为

$$p_1 = p_0 + \rho g(H - y)$$

$$p_2 = p_0 + \rho g(h - y)$$

其中 p_0 为大气压力。试证明：在垂直于 x - y 平面方向单位宽度上，闸门所受总力为：

$$F_x = \rho g(H - h) \left(\frac{H + h}{2} - \frac{2Hh}{H + h} \right)$$

注：闸门受到的总力为闸门左侧水的绝对压力的总作用力减去右侧大气压力作用力；

提示：首先质量守恒得 $v_2 = v_1 H / h$ ，然后应用 x 方向的动量守恒方程，再建立 1-1 截面与 2-2 截面之间的伯努利方程。

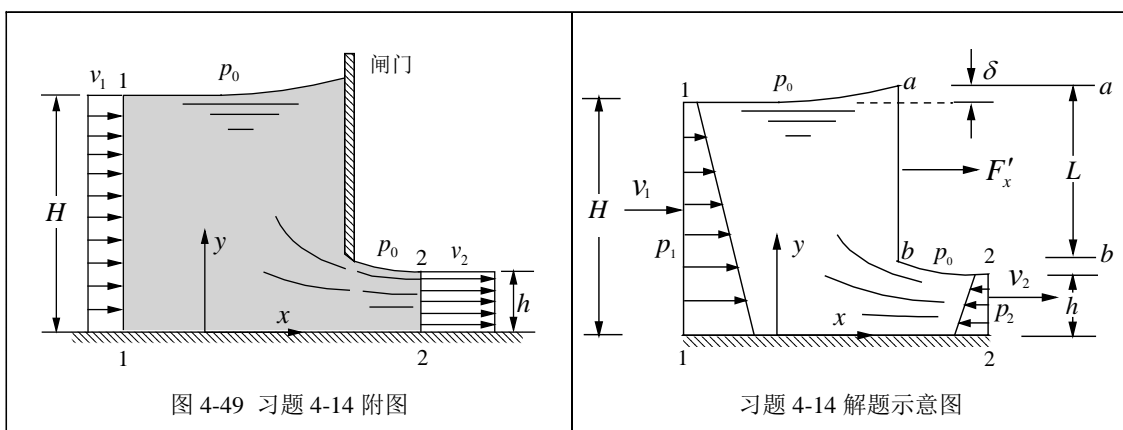


图 4-49 习题 4-14 附图

习题 4-14 解题示意图

解： 本题为理想不可压缩流体的稳态流动问题。如图所示，取 1-1 和 2-2 截面之间的流体空间为控制体，且在垂直于 x - y 平面方向为单位厚度。设单位宽度闸门对流体（a-b 面）的作用力为 F'_x ，点 a 与点 1 的高度差为 δ ，与水接触的闸门板高为 L 。

在本题条件下，由质量守恒方程 $q_{m1} = q_{m2}$ 有

$$\rho v_1 H = \rho v_2 h \quad \text{或} \quad v_2 = v_1 H / h \quad (\text{a})$$

其次，因为流体所受 x 方向的总力为

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \int_0^H p_1 dy + p_0 \delta + F'_x - p_0 (\delta + H - h - L) - \int_0^h p_2 dy \\ &= p_0 H + \rho g \frac{H^2}{2} + F'_x - p_0 (H - h - L) - p_0 h - \rho g \frac{h^2}{2} = \rho g \frac{(H^2 - h^2)}{2} + F'_x + p_0 L \end{aligned}$$

控制体进出口 x 方向动量流率之差为

$$(v_{2x} - v_{1x}) q_m = (v_2 - v_1) \rho v_1 H = \left(\frac{H}{h} - 1 \right) \rho v_1^2 H$$

于是根据 x 方向动量守恒方程 $\Sigma F_x = (v_{2x} - v_{1x}) q_m$ 可得

$$F'_x + p_0 L = -\rho g \frac{(H^2 - h^2)}{2} + \frac{(H - h)H}{h} \rho v_1^2 \quad (\text{b})$$

再根据 1-1 截面与 2-2 截面之间的伯努利方程，因为

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + g y + \frac{[p_0 + \rho g(H - y)]}{\rho} = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gH$$

$$\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + g y + \frac{[p_0 + \rho g(h-y)]}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gh$$

所以有
$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = g(H-h), \quad \because v_2 = v_1 H/h \quad \therefore v_1^2 = \frac{2gh^2}{(H+h)}$$

于是，将式 v_1^2 代入式 (b) 并整理后可得单位宽度闸门对流体的作用力为

$$F'_x = -\rho g(H-h) \left(\frac{H+h}{2} - \frac{2Hh}{H+h} \right) - p_0 L$$

而水对单位宽度闸门的作用总力为

$$F''_x = -F'_x = \rho g(H-h) \left(\frac{H+h}{2} - \frac{2Hh}{H+h} \right) + p_0 L$$

单位宽度闸门受到的总力为左侧水的作用力减去右侧大气作用力，故

$$F_x = F''_x - p_0 L = \rho g(H-h) \left(\frac{H+h}{2} - \frac{2Hh}{H+h} \right)$$

讨论：在本题应用伯努利方程的过程中可看出，尽管进口截面或出口截面上各点的位能 gy 不同，各点的压力能 p/ρ 也不同，但两者之和 ($gy + p/\rho$) 即总位能在同一截面各点处都是相同的。例如在本题中，进口截面各点的总位能都为 $(p_0/\rho + gH)$ ，出口截面的总位能都为 $(p_0/\rho + gh)$ 。

总位能通常用 p^*/ρ 表示，即 $p^*/\rho = (\rho gy + p)/\rho$ 。只要进出口截面处于均匀流段（各流线相互平行且垂直于进出口截面），就有截面各点总位能相等的结论。

4-15 如图 4-50 所示，一水枪在距离地面 $h=0.8\text{m}$ 的高度以 $\alpha=40^\circ$ 的仰角将水喷射到 $L=5\text{m}$ 远的地点。喷枪口直径 $d=0.0125\text{m}$ ，水的密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ 。试确定喷口处的质量流量。

解：参考例 4-14 结果，喷射水流的轨迹方程为

$$y = x \tan \alpha - x^2 \frac{g}{2v_1^2 \cos^2 \alpha}$$

由此可得喷嘴处的质量流量为

$$q_{m1} = \rho \frac{\pi}{4} d^2 v_1 = \rho \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{gx^2}{2\cos^2 \alpha (x \tan \alpha - y)}}$$

此处， $y = -h = -0.8\text{m}$ ， $x=L=5\text{m}$ ，所以

$$q_{m1} = 1000 \frac{\pi}{4} 0.0125^2 \sqrt{\frac{9.8 \times 5^2}{2\cos^2 40^\circ (5 \tan 40^\circ + 0.8)}} = 0.793 \text{ kg/s}$$

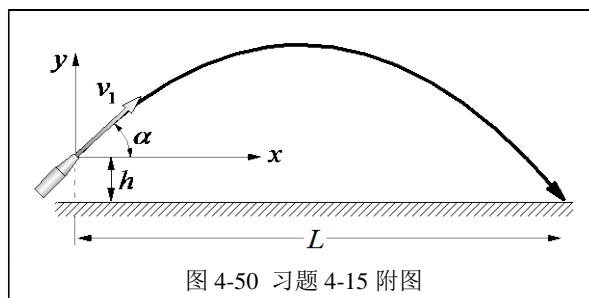


图 4-50 习题 4-15 附图

4-16 某抽风除尘系统，如图 4-51 所示，其风机输入轴功率 $N=12\text{kW}$ ，管道直径 $d=500\text{mm}$ ，气体密度 $\rho=1.2\text{kg/m}^3$ ，实验测得管路相关截面上的压力数据如表所示。设气体不可压缩，各截面之间的位差可忽略不计，试求：(1) 除尘器的压力损失 Δp_{1-2} 和阻力损失 $h_{f,1-2}$ ；(2) 管路的平均风速 v_m ；(3) 风机有效轴功率 N_e ；(4) 除尘系统的总阻力损失 $h_{f,\text{in-out}}$ 和风机内的阻力损失 $h_{f,3-4}$ （认为风机内的能量损失全为阻力损失）。

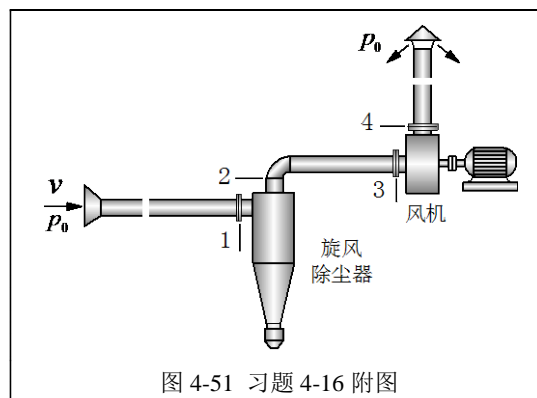


图 4-51 习题 4-16 附图

截面	1	2	3	4
全压 (mmH ₂ O)	-150	-240	-286	+33
静压 (mmH ₂ O)	-160			

解：

(1) 因流体不可压缩且管道直径相同，故各截面风速相同，所以静压差=全压差，因此

$$\Delta p_{1-2} = p_1 - p_2 = -150 - (-240) = 90 \text{ mmH}_2\text{O}$$

由伯努利方程得

$$h_{f,1-2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{90 \times 9.798}{1.2 \times 9.8} = 75.0 \text{ m(Air)} = 0.090 \text{ mH}_2\text{O}$$

(2) 因为全压 $\frac{p_{10}}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2}$ ，所以 $v_m = v_1 = \sqrt{2 \frac{p_{10} - p_1}{\rho}} = \sqrt{2 \times \frac{10 \times 9.798}{1.2}} = 12.78 \text{ m/s}$

(3) 由速度可得 $q_m = 3.01 \text{ kg/s}$ ；因为进出口风速相同且不计位能的情况下，气体通过风机的能量增量仅为压力能增量，所以

$$\frac{N_e}{gq_m} = \frac{(p_4 - p_3)}{\rho g}, \text{ 即 } N_e = \frac{319 \times 9.798}{1.2} \times 3.01 = 7840 \text{ W}$$

(4) 在系统进出口之间和 3-4 截面之间应用引申的伯努利方程 (4-55) 得：

$$h_{f,\text{in-out}} = N / gq_m = 12000 / (9.8 \times 3.01) = 407 \text{ m(Air)} = 0.488 \text{ mH}_2\text{O}$$

$$h_{f,3-4} = \frac{N}{gq_m} - \frac{(p_4 - p_3)}{\rho g} = 407 - 266 = 141 \text{ m(Air)} = 0.169 \text{ mH}_2\text{O}$$

4-17 流体通过水槽壁面上的矩形孔向外排放，如图 4-52 所示，其中矩形孔宽度为 B ，液面至孔上下边缘距离分别为 h_1 、 h_2 。设流动稳定，(1) 试求通过孔的理论流量 q_{v0} 的表达式；(2) 若 $B=1.0\text{m}$ ， $h_1=0.8\text{m}$ ， $h_2=2.0\text{m}$ ，试比较由推导表达式和小孔理论流量公式 (4-58) 计算的理论流量的相对偏差。

解：在液面与深度位置为 z 的孔口微元面（速度为 v ）之间应用伯努利方程有

$$\frac{p_0}{\rho} + gz = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2gz}$$

(1) 通过孔的理论流量 q_{v0} 为

$$q_{v0} = \int_{h_1}^{h_2} vBdz = \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2gz}Bdz = \frac{2}{3}B\sqrt{2g}(h_2^{3/2} - h_1^{3/2})$$

(2) 根据推导式和小孔理论流量公式计算流量分别为

$$q_{v0} = \frac{2}{3}B\sqrt{2g}(h_2^{3/2} - h_1^{3/2}) = \frac{2}{3} \times 1 \times \sqrt{2g}(2^{1.5} - 0.8^{1.5}) = 6.236 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$q'_{v0} = A\sqrt{2gh} = (h_2 - h_1)B\sqrt{2gh_m} = (2 - 0.8) \times 1 \times \sqrt{2g \times 1.4} = 6.286 \text{ m}^3/\text{s}$$

两者相对偏差 < 1%。

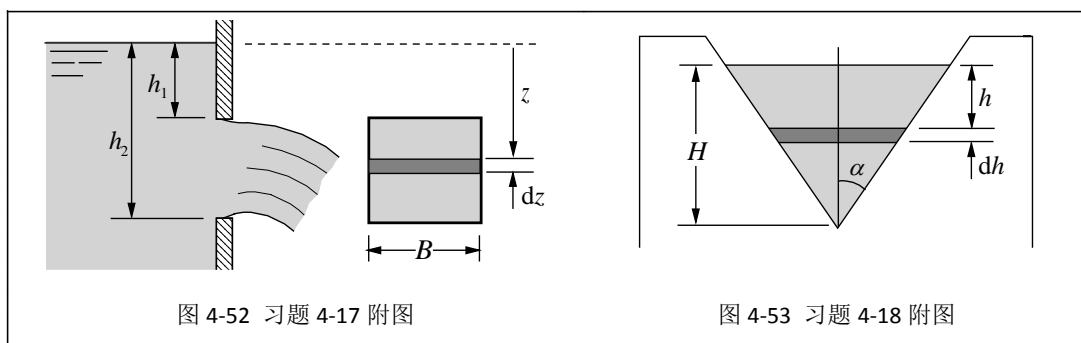


图 4-52 习题 4-17 附图

图 4-53 习题 4-18 附图

4-18 如图 4-53 所示，流体通过一薄板 V 型槽口流出，V 型口半锥角 $\alpha = 35^\circ$ ，自由液面与 V 型口底部高差 $H = 0.3\text{m}$ 并保持恒定，设槽口流量系数 $C_d = 0.62$ ，试确定流体通过 V 型槽口的体积流量。

解：在液面与深度位置为 h 的槽口微元面（速度为 v ）之间应用伯努利方程可得

$$\frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2gz}$$

由此可得流体通过 V 型槽口的体积流量为

$$q_v = \int_0^H C_d v b dh = \int_0^H C_d \sqrt{2gh} 2(H-h) \tan \alpha dh = C_d 2\sqrt{2g} \tan \alpha \int_0^H \sqrt{h}(H-h) dh$$

即

$$q_v = C_d \frac{8}{15} \tan \alpha \sqrt{2g} H^{5/2}$$

代入数据可得

$$q_v = 0.0505 \text{ m}^3/\text{s} = 181.9 \text{ m}^3/\text{h}$$

4-19 如图 4-54 所示，容器内液面高度恒定 $h = 2.0\text{m}$ ，液面上方空间表压 $p = 50\text{kN/m}^2$ ；容器底部有一直径 $d = 50\text{mm}$ 的小孔，其流量系数 $C_d = 0.61$ 。设液体密度 $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ ，并取 $g = 9.81\text{m/s}^2$ ，试求通过小孔的液体流量。

解：在液面与小孔之间应用 Bernoulli 方程（压力用表压）有

$$\frac{p}{\rho} + gh = \frac{v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2 \frac{(\rho gh + p)}{\rho}}$$

所以通过小孔的液体流量为

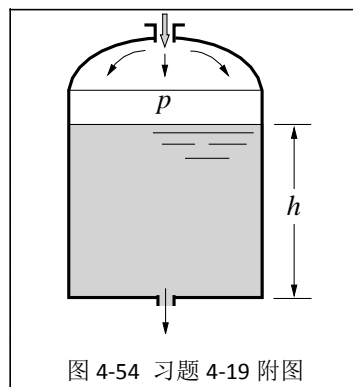


图 4-54 习题 4-19 附图

$$q_v = C_d \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 \frac{(\rho g h + p)}{\rho}} = 0.61 \frac{\pi 0.050^2}{4} \sqrt{2 \frac{(1000 \times 9.81 \times 2 + 50 \times 10^3)}{1000}} = 0.0141 \text{ m}^3/\text{s}$$

4-20 一矩形水槽，中间有一隔板，尺寸如图 4-55，其中 $a=3.5\text{m}$, $b=7.0\text{m}$, $h_0=4.0\text{m}$ ，垂直于纸面方向上水槽宽度 $l=2.0\text{m}$ ；隔板下部有一面积 $A=0.065\text{m}^2$ 的小孔沉浸于水中，其流量系数 $C_d=0.65$ 。取 $g=9.81\text{m/s}^2$ ，试求两液面相等时所需时间。

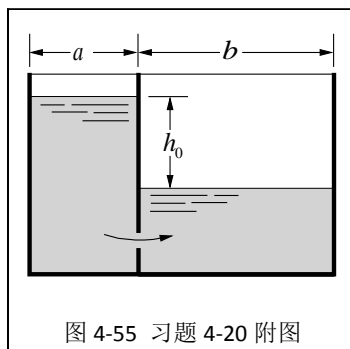


图 4-55 习题 4-20 附图

解：两液面高差为 Δh 时小孔的流量： $q_v = C_d A \sqrt{2g\Delta h}$

隔板左侧液面下降 h 时： $\Delta h = h_0 - h(1 + \frac{a}{b})$

取隔板左侧水槽为控制体，由质量守恒方程得：

$$-q_v + A_a \frac{dh}{dt} = 0 \rightarrow C_d A \sqrt{2g[h_0 - h(1 + \frac{a}{b})]} = A_a \frac{dh}{dt}$$

其中 A_a 为隔板左侧水槽横截面积。上式从 $t=0 \rightarrow t$, $h=0 \rightarrow h$ ，积分得

$$t = \frac{2A_a}{(1+a/b)C_d A \sqrt{2g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{\Delta h})$$

当两液面相等时， $\Delta h=0$ ，所需时间为

$$t = \frac{2A_a \sqrt{h_0}}{(1+a/b)C_d A \sqrt{2g}} = \frac{2 \times (2 \times 3.5) \times \sqrt{4}}{(1+3.5/7) \times 0.65 \times 0.065 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 99.7\text{s}。$$

4-21 直径 $d=1.2\text{m}$ 的管道靠虹吸作用由水库 A 向水库 B 输水，如图 4-56 所示。两水库液面高差 $H=6\text{m}$ ，管道最高点与 A 水库液面 $h=3\text{m}$ 。管道总长度 $L=720\text{m}$ ，其中从 A 水库到最高点 C 之间的管道长度 $l=240\text{m}$ 。设管道沿程阻力系数 $\lambda=0.04$ ，不计局部阻力，试求管道内的体积流量 q_v 及 C 点处的流体表压力 p 。取水的密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ ， $g=9.8\text{m/s}^2$ 。

解：对 A、B 两液面应用引申的 Bernoulli 方程有：

$$H = h_{f,A-B} = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \rightarrow v^2 = H \frac{2g}{\lambda} \frac{d}{L}$$

所以 $q_v = \frac{\pi}{4} d^2 v = \frac{\pi}{4} d^2 (H \frac{2g}{\lambda} \frac{d}{L})^{0.5} = \frac{\pi}{4} 1.2^2 (6 \frac{2 \times 9.8}{0.04} \frac{1.2}{720})^{0.5} = 2.50 \text{ m}^3/\text{s}$

在液面 A 与 C 点之间应用引申的 Bernoulli 方程有：

$$\frac{p_c}{\rho g} + h + \frac{v^2}{2g} + h_{f,A-C} = 0 \rightarrow p_c = -\rho g (h + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}) = -51.45\text{kPa}$$

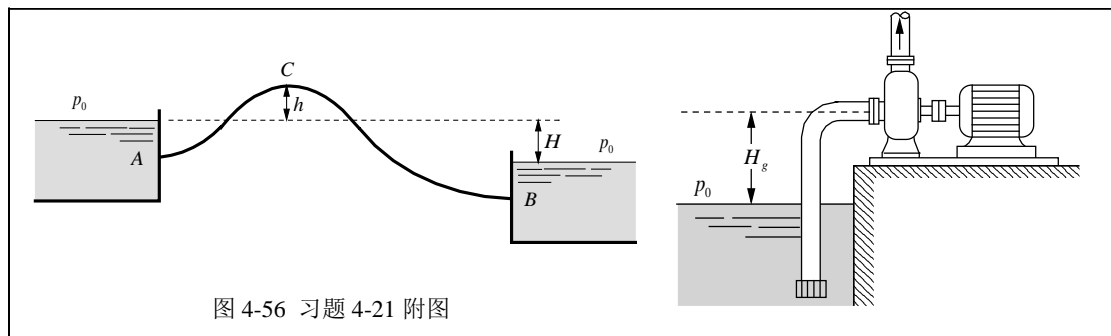


图 4-56 习题 4-21 附图

4-22 一离心泵铭牌标注：流量 $q_v=30\text{m}^3/\text{h}$ ，扬程 $H=24\text{m}$ 水柱，转速 $n=2900\text{rpm}$ ，允许吸上真空高度 $H_s=5.7\text{m}$ 。现假设该泵符合现场流量与扬程要求，且已知吸入管路全部阻力损失 $h_f=1.5\text{m}$ 水柱，当地大气压为 10m 水柱，泵的进口直径 80mm 。试确定：(1) 输送 20°C 的水时泵的理论安装高度；(2) 水温提高到 80°C 时泵的安装高度。

解：(1) 因为离心泵铭牌标注允许吸上真空高度 H_s 是在大气压力为 10m 水柱、吸送 20°C 的清水条件下得到的，与第 (1) 问条件一致，所以根据式 (4-69)，输送 20°C 的清水时的理论安装高度为

$$H_{g\max} = H_s - \frac{v^2}{2g} - h_{f,0-a} = 5.7 - \frac{1}{2g} \left(\frac{30}{3600} \frac{4}{\pi 0.08^2} \right)^2 - 1.5 = 4.06\text{m}$$

(2) 水温提高到 80°C 时，其饱和蒸汽压 $p_v=47341.93\text{Pa}=4.832\text{mH}_2\text{O}$ ，根据式 (4-70)，泵的允许吸上真空高度 H'_s 和理论安装高度 $H_{g\max}$ 分别为

$$H'_s = H_s + (H_0 - 10) - H_v = 5.7 - (10 - 10) - 4.832 = 0.868\text{m}$$

$$H_{g\max} = H'_s - \frac{v^2}{2g} - h_{f,0-a} = 0.868 - \frac{1}{2g} \left(\frac{30}{3600} \frac{4}{\pi 0.08^2} \right)^2 - 1.5 = -0.77\text{m}$$

4-23 温度 20°C 的空气在管道中流动，如图 4-58 所示。管道上安装有压力表 A、B，其中压力表 A 与管壁接通，读数 70.2kPa (表压)，压力 B 与皮托管接通，读数 71.3kPa (表压)。已知当地大气压力 684 mmHg ，当地声速 $a=345\text{m/s}$ ，取 $g=9.81\text{m/s}^2$ ，(1) 按不可压缩流体考虑，求测点处的空气速度；(2) 按不可压缩流体考虑是否符合要求？

解：

(1) 气体绝对压力 $p=70.2+684/7.5=161.4\text{kPa}$ ，空气气体常数 $R=287\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ ，由状态方程得空气密度 $\rho=p/RT=1.919\text{kg/m}^3$ ，重度 $\rho g=18.83\text{kN/m}^3$ ；因此按皮托管测速原理式 (4-73) 可得流体速度为

$$v = \sqrt{2 \frac{(p_B - p_A)}{\rho}} = \sqrt{2 \frac{(71.3 - 70.2) \times 10^3}{1.919}} = 33.86\text{ m/s}$$

(2) 因为马赫数 $\text{Ma}=v/a=0.098<0.1$ ，故按不可压缩流体考虑符合测试要求。

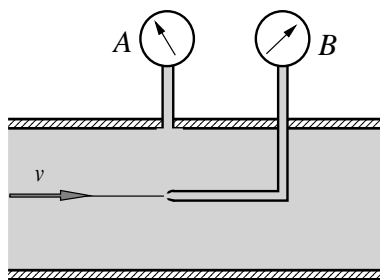


图 4-58 习题 4-23 附图

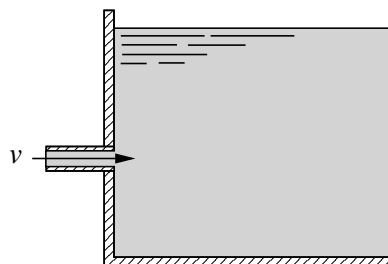


图 4-59 习题 4-24 附图

4-24 水通过管道进入一大水池，如图 4-59 所示。若管道直径为 50cm ，水的流量为 $0.8\text{m}^3/\text{s}$ ，

试求水管出口的局部阻力损失。

解：流体速度为： $v = 0.8 / (\pi \cdot 0.5^2 / 4) = 4.07 \text{ m/s}$ ；因为管道进入大容池的局部阻力系数 $\xi = 1$ ，所以水管出口处的局部阻力损失为

$$h_f = \xi \frac{v^2}{2g} = 1 \times \frac{4.07^2}{2 \times 9.8} = 0.846 \text{ m H}_2\text{O}$$

4-X1 圆形喷嘴在圆管中引射同种流体，流速分布如图所示，已知 $d_1 = 50 \text{ mm}$ ， $d_2 = 150 \text{ mm}$ ， $v_1 = 20 \text{ m/s}$ ， $v_2 = 10 \text{ m/s}$ ，求该断面的动能修正系数。

解：按质量流量相等原则，该截面处的平均速度为：

$$\rho v_m \frac{\pi}{4} = \rho v_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 + \rho v_2 \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2)$$

即

$$v_m = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 + v_2 \left(1 - \frac{d_1^2}{d_2^2} \right)$$

代入数据， $v_m = 11.11 \text{ m/s}$ 。

喷嘴出口管道截面处的动能修正系数按定义可表示为

$$\alpha = \frac{1}{v_m^3 A} \iint_A v^3 dA = \frac{1}{v_m^3 A} \left(\int_0^{d_1/2} v_1^3 dA + \int_{d_1/2}^{d_2/2} v_2^3 dA \right) = \frac{v_1^3 A_1 + v_2^3 (A - A_1)}{v_m^3 A}$$

即

$$\alpha = \frac{1}{v_m^3} \left[v_1^3 \frac{d_1^2}{d_2^2} + v_2^3 \left(1 - \frac{d_1^2}{d_2^2} \right) \right] = 1.296$$

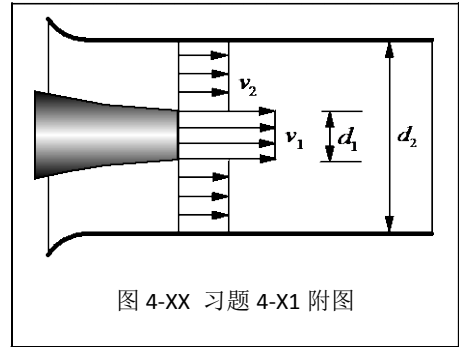


图 4-XX 习题 4-X1 附图

4-X2 考虑一个特殊的流动系统，其（1）与外界无热交换；（2）无轴功输入/出；（3）流体不可压；（4）稳态流动；（5）理想流体。这个体系的能量守恒方程积分式可写成

$$\iint_{cs} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

试根据上述流动条件和能量守恒积分方程推出沿流线的机械能守恒方程—伯努利方程。

解：用高斯定理把曲面积分化成体积分

$$\iint_{cs} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \iiint_{cv} \nabla \cdot \left[\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{v} \right] dV = 0$$

因为体分为零，只能是被积函数为零，所以

$$\nabla \cdot \left[\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{v} \right] = 0$$

运用 Hamilton 算子运算：

$$\nabla \cdot \left[\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho \mathbf{v} \right] = \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \left[\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho \right] = 0$$

因为不可压缩流体的速度散度 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ，所以

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left[\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho \right] = 0$$

令： $\phi = \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho$ ，由 $\mathbf{v} \cdot \nabla \left[\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \rho \right] = 0$ 得到

$$v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \rightarrow v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0$$

由流线方程： $dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z$ ，或 $v_y dx = v_x dy$ ， $v_z dx = v_x dz$ ，可得

$$v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + v_x \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + v_x \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0 \rightarrow v_x d\phi = 0$$

由于 $v_x \neq 0$ ，所以必然有 $d\phi = 0$ ，或 $\phi = \text{const}$ ，即沿流线

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const}$$

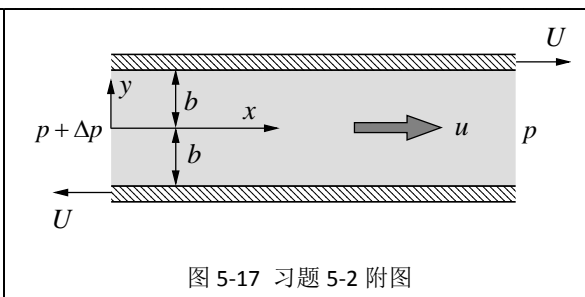
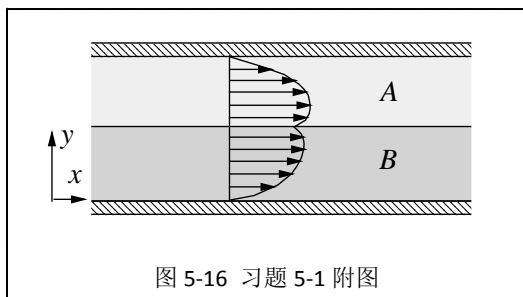
又因为流动无热、功交换，且为理想流体，故流动是等温过程，内能 u 为定值，所以沿流线机械能守恒，即

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{const}$$

第 5 章 不可压缩流体的一维层流流动

5-1 有两种完全不相溶的液体 A 和 B 在平行平板间作层流流动。试问是否可能出现如图 5-16 所示的速度分布，为什么？

解：因为液液界面上要求：速度连续即 $u_A = u_B$ ，切应力连续即 $\mu_A (du_A/dy) = \mu_B (du_B/dy)$ ，而图 5-16 所示的速度分布中，液-液界面上只满足速度连续，不满足切应力连续；因为按图中速度分布，液-液界面上 $du_A/dy > 0$ ，而 $du_B/dy < 0$ ，即 $\mu_A (du_A/dy) \neq \mu_B (du_B/dy)$ ，所以不可能出现图 5-16 所示的速度分布。



5-2 如图 5-17 所示，两块水平放置的平行平板，各自以速度 U 向相反方向运动，板间距 $2b$ ，两板间充满不可压缩流体，在压差和上下板的拖动下做一维层流流动，其中板长 L 上对应的压力降为 Δp 。试求流体的速度和切应力分布关系式。（取 x 轴位于两板之间的中面）

解：根据狭缝流动切应力和速度分布方程（5-9）、（5-11），因为水平流动条件下 $\Delta p^*/L = \Delta p/L$ ，所以

$$\tau_{yx} = -\frac{\Delta p}{L}y + C_1, \quad u = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{\mu}y + C_2$$

如图所示，取 x 轴位于两板之间的中面， y 轴垂直于流动方向，故边界条件为：

$$u|_{y=b} = U, \quad u|_{y=-b} = -U$$

将边界条件代入速度方程得

$$U = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \frac{b^2}{2} + \frac{C_1}{\mu}b + C_2$$

$$-U = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \frac{b^2}{2} - \frac{C_1}{\mu}b + C_2$$

解出积分常数为

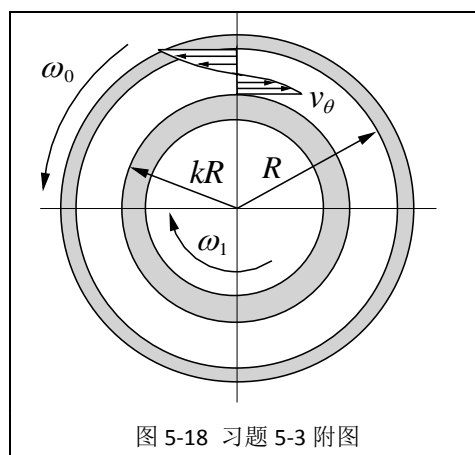
$$C_2 = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \frac{b^2}{2}, \quad C_1 = \mu \frac{U}{b}$$

所以速度和切应力分布关系式为

$$u = \frac{\Delta p}{2\mu L}(b^2 - y^2) + U \frac{y}{b}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\Delta p}{L}y + \mu \frac{U}{b}$$

可见速度分布和切应力分布都是相应剪切流和压差流结果的叠加。

5-3 两同心圆筒，外筒内半径为 R ，以角速度 ω_0 逆时针转动；内筒外半径为 kR ， $k < 1$ ，以角速度 ω_1 顺时针转动；两筒之间的不可压缩流体因内外圆筒反向转动而流动，因间隙很小，其流动可视为层流流动。忽略重力和端部效应影响。试将其简化为相互滑动的两水平平板之间的流动问题，并确定流体的切应力分布和速度分布。（取 y 轴原点在板壁面，上壁面 $y=b=R(1-k)$ ， x 轴指向右方，沿 x 方向的速度用 u 表示）



解：取 y 轴原点在板壁面，上壁面 $y=b=R(1-k)$ ， x 轴指向右方，简化模型特征为：

板间距 $b = R(1-k)$ ，下板移动速度 $U_1 = kR\omega_1$ ，上平板移动速度 $U_0 = -R\omega_0$ ；

边界条件： $u|_{y=0} = kR\omega_1$ ， $u|_{y=b} = -R\omega_0$

因为是纯剪切流，流动方向压力不变，又忽略重力，故 $\Delta p^*/L = 0$ ；所以根据教材式（5-9）和（5-11）有

$$\begin{cases} \tau_{yx} = -\frac{\Delta p^*}{L}y + C_1 \\ u = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p^*}{L} \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{\mu}y + C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau_{yx} = C_1 \\ u = \frac{C_1}{\mu}y + C_2 \end{cases}$$

根据边界条件: $u|_{y=0} = kR\omega_1$, $u|_{y=b} = -R\omega_0$, 积分常数为

$$C_2 = kR\omega_1, \quad C_1 = -\mu \frac{R}{b}(\omega_0 + k\omega_1) = -\frac{\mu}{1-k}(\omega_0 + k\omega_1)$$

由此得速度分布为:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{R}{b}(\omega_0 + k\omega_1)y + kR\omega_1 = -\frac{1}{1-k}(\omega_0 + k\omega_1)y + kR\omega_1 \\ &= -\frac{1}{1-k}\omega_0 y + k\omega_1 \left(R - \frac{1}{1-k}y \right) \quad [0 \leq y \leq R(1-k)] \end{aligned}$$

或

$$u = \frac{kR}{1-k} \left[\omega_1 \left(1 - \frac{r}{R} \right) - \omega_0 \left(\frac{r}{kR} - 1 \right) \right] \quad (kR \leq r \leq R)$$

切应力分布为:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{R}{b}(\omega_0 + k\omega_1) = -\frac{\mu}{1-k}(\omega_0 + k\omega_1)$$

* 令 $v_\theta = -u$, 应用本构方程求得

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] = \frac{\mu k}{1-k}(\omega_0 + \omega_1) \frac{R}{r}$$

* 精确解为:

$$u = -v_\theta = \frac{kR}{1-k} \left[\omega_1 \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(1 + \frac{R}{r} \right) \frac{k}{1+k} - \omega_0 \left(\frac{r}{kR} - 1 \right) \left(\frac{kR}{r} + 1 \right) \frac{1}{1+k} \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu k}{1-k}(\omega_0 + \omega_1) \frac{R}{r} \frac{2k}{1+k} \frac{R}{r}$$

5-4 根据哈根-泊谟叶 (Hagen-Poiseuille) 公式即 $q_v = (\Delta p^*/L)(\pi R^4/8\mu)$ 进行实验测量流体粘度时, 如果各测量值的相对偏差均为 2%, 试分析对粘度的计算结果有多大影响。

解: 粘度表达式为

$$\mu = \frac{\Delta p^* \pi R^4}{L 8q_v}$$

其全微分为

$$d\mu = \frac{1}{L} \frac{\pi R^4}{8q_v} d\Delta p^* + 4 \frac{\Delta p^* \pi R^3}{L 8q_v} dR - \frac{\Delta p^* \pi R^3}{L^2 8q_v} dL - \frac{\Delta p^* \pi R^3}{L 8q_v^2} dq_v$$

相对偏差

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{d\Delta p^*}{\Delta p^*} + 4 \frac{dR}{R} - \frac{dL}{L} - \frac{dq_v}{q_v}$$

若 q_v 、 Δp^* 、 L 、 R 的测量值相对偏差均为 2%, 则粘度 μ 的计算结果相对偏差可达

$$\left(\frac{d\mu}{\mu} \right)_{\max} = \left| \frac{d\Delta p^*}{\Delta p^*} \right| + \left| 4 \frac{dR}{R} \right| + \left| \frac{dL}{L} \right| + \left| \frac{dq_v}{q_v} \right| = 14\%$$

5-5 有一长度 $L=8.23\text{m}$ 的圆环形截面水平管, 内管外半径 $kR=0.0126\text{m}$, 外管内半径 $R=0.028\text{m}$ 。现有质量浓度为 60% 的蔗糖水溶液在 $T=293\text{K}$ 的温度下用泵输送通过该环隙。该温度下溶液的密度 $\rho=1286\text{ kg/m}^3$, 粘度 $\mu=0.0565\text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。测得管子两端压降为 $\Delta p=3.716 \times 10^4\text{ Pa}$, 试问: (1) 体积流量 q_v 为多少? (2) 沿流动方向流体对套管的作用力 F 为多少?

解：视流动为充分发展，因为水平流动，所以 $\Delta p^* = \Delta p$ 。

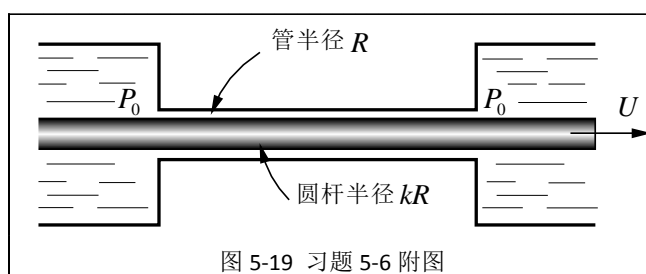
(1) 根据式 (5-37) 有

$$\begin{aligned} q_v &= \frac{\Delta p}{L} \frac{\pi R^4}{8\mu} \left((1-k^4) - \frac{(1-k^2)^2}{\ln(1/k)} \right) \\ &= \frac{3.716 \times 10^4}{8.23} \frac{\pi \times 0.028^4}{8 \times 0.0565} \left((1-0.45^4) - \frac{(1-0.45^2)^2}{\ln(1/0.45)} \right) \\ &= 3.134 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 12.84 \text{ m}^3/\text{h} \end{aligned}$$

(2) 沿流动方向流体对套管的作用力 F 为

$$\begin{aligned} F &= \pi R^2 (1-k^2) \Delta p \\ &= \pi \times 0.028^2 \times (1-0.45^2) \times 3.716 \times 10^4 = 73.0 \text{ N} \end{aligned}$$

5-6 如图 5-19 所示，一半径为 kR 的无限长圆杆以速度 U 匀速通过两涂料槽之间的圆管，圆管半径为 R 。试求稳定操作条件下圆管内流体的速度 u 、体积流量 q_v 、单位长度圆杆受到的流体阻力 F_1 、单位长度环隙内流体沿流动方向受到的总作用力 F_2 。



解：采用由管状微元体导出的切应力和速度分布一般方程 (5-21) 和 (5-23)，并取 $\Delta p^* = \Delta p = 0$ 有

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= -\frac{\Delta p^*}{L} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \quad \rightarrow \quad \tau_{rz} = \frac{C_1}{r} \\ u &= -\frac{\Delta p^*}{L} \frac{r^2}{4\mu} + \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2 \quad \rightarrow \quad u = \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2 \end{aligned}$$

其相应边界条件为 $u|_{r=kR} = U$, $u|_{r=R} = 0$

由边界条件确定积分常数后可得速度分布与切应力分布为

$$u = \frac{U}{\ln k} \ln \frac{r}{R}, \quad \tau_{rz} = \mu \frac{U}{\ln k} \frac{1}{r}$$

积分可得体积流量为

$$q_v = 2\pi \int_{kR}^R u r dr = 2\pi \frac{UR^2}{\ln k} \int_{kR}^R \frac{r}{R} \ln \left(\frac{r}{R} \right) d \frac{r}{R} = 2\pi \frac{UR^2}{\ln k} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \ln \left(\frac{r}{R} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]_{kR}^R$$

即

$$q_v = \frac{\pi R^2 U}{2} \left(\frac{(1-k^2)}{\ln(1/k)} - 2k^2 \right)$$

单位长度圆杆受到的流体阻力 F_1 为

$$F_1 = 2\pi kR \tau_w = 2\pi kR \tau_{rz} \Big|_{r=kR} = -\frac{2\pi \mu U}{\ln(1/k)}$$

单位长度环隙内流体沿流动方向受到的总作用力 F_2 为

$$F_2 = -F_1 + 2\pi R \tau_{rz}|_{r=R} = \frac{2\pi\mu U}{\ln(1/k)} + 2\pi R \frac{\mu U}{\ln k} \frac{1}{R} = \frac{2\pi\mu U}{\ln(1/k)} - \frac{2\pi\mu U}{\ln(1/k)} = 0$$

这表明了上述结果的正确性，因为对于发展的流动，流体受到的总合力等于零。

5-7 一圆管内充满非牛顿流体（Bingham 流体），如图 5-20 所示。该流体切应力与速度梯度符合下述模型

$$\tau_{rz} = -\tau_0 + \mu_0 \frac{du}{dr}$$

其中，常数 τ_0 、 μ_0 均大于零， u 为轴向速度， r 为圆管径向坐标。圆管下端放置在一平板上。其当移去平板时，管内流体可能流出，也可能不流出，试解释原因，并建立流出的条件。设流体密度为 ρ ，圆管半径为 R 。

解：根据例 5-4，Bingham 流体在圆管内的流动条件是：

$$\Delta p^* > 2\tau_0 L / R$$

其中

$$\Delta p^* = p_1 - p_2 + \rho g L \cos \beta$$

本题条件下， $\beta = 0^\circ$ ， $p_1 = p_2 = p_0$ ，所以 $\Delta p^* = p_1 - p_2 + \rho g L \cos \beta = \rho g L$ ，故流出条件为

$$\Delta p^* = \rho g L \geq \frac{2\tau_0 L}{R} \rightarrow R \geq \frac{2\tau_0}{\rho g}$$

上述表明，只要管子半径较大，流体重力产生的壁面静摩擦力达到初始屈服应力 τ_0 ，则流体将产生流动。（重力 $G = \rho g \pi R^2 L$ ，静摩擦力 $F_f = \tau_0 2\pi RL$ ，所以只有增加 R 才有可能使重力超过静摩擦力）

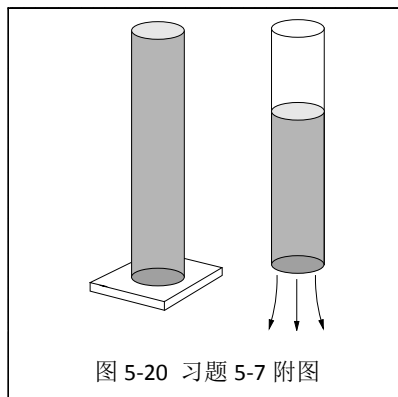


图 5-20 习题 5-7 附图

5-8 一毛细管流量计如图 5-21 所示。温度为 293K 的水流过直径 $D=0.254\text{mm}$ 倾斜毛细管，压差计中指示剂为 CCl_4 ，其密度 $\rho_m=1594\text{ kg/m}^3$ 。已知 293K 时水的粘度 $\mu=100.42 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ ，密度 $\rho=998.2\text{ kg/m}^3$ ，测压点 A、B 之间的距离 $L=3.048\text{m}$ ，指示剂界面高差 $H=25.4\text{mm}$ 。试求通过毛细管的质量流量 q_m 。（注意：只需测出 H 和 L 就可确定流量，即不必测量毛细管倾斜角。为什么？）

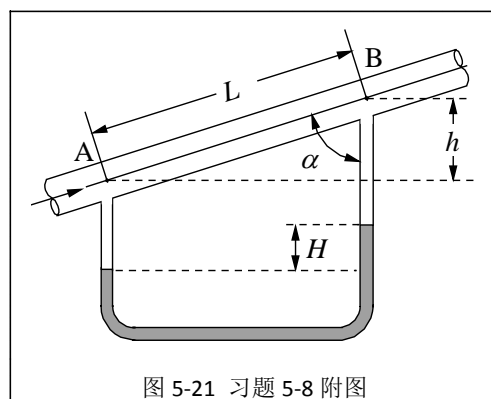


图 5-21 习题 5-8 附图

解：根据方程（5-29）即 Hagen-Poiseuille 公式有：

$$q_m = \rho \frac{\Delta p^*}{L} \frac{\pi R^4}{8\mu}$$

本题中 $p_0 - p_L = p_A - p_B$ ， $\cos \beta = \cos (180 - \alpha) = -\cos \alpha$ ，所以

$$\Delta p^* = (p_0 - p_L + \rho g L \cos \beta) = p_A - p_B - \rho g L \cos \alpha$$

图示测量系统中 $h=L\cos\alpha$ ，根据静力学关系从 A、B 两点向下计算 U 型管指示剂低位液面处的压力可得

$$p_A + \rho g x + \rho g H = p_B + \rho g h + \rho g x + \rho_m g H \rightarrow p_A - p_B - \rho g L \cos \alpha = (\rho_m - \rho) g H$$

即

$$\Delta p^* = (\rho_m - \rho) g H$$

将 Δp^* 代入 Hagen-Poiseuille 方程得到

$$q_m = \rho \frac{Hg(\rho_m - \rho)}{L} \frac{\pi(D/2)^4}{8\mu} = 4.946 \times 10^{-9} \text{ kg/s}。$$

5-9 图 5-22 所示为流体在倾斜平板上的降膜流动。液膜厚度为 δ ，表面与大气接触。液膜沿 x 轴方向作一维层流流动，速度 $u=u(y)$ ，在 y 、 z 方向的速度均为零。主流方向（ x 轴正向）与重力加速度 g 方向之间的夹角为 β 。设流动视为充分发展的层流流动。试针对图中的微元体列出 y 方向动量方程并求解。

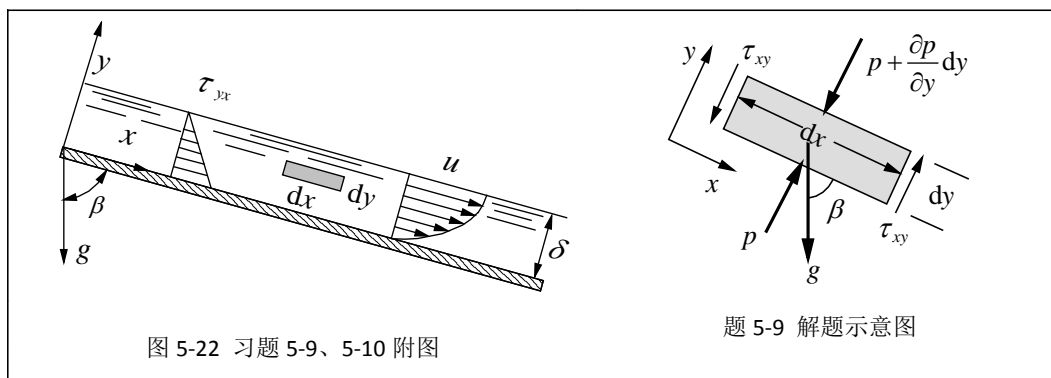


图 5-22 习题 5-9、5-10 附图

题 5-9 解题示意图

解：因为沿 x 方向层流流动， y 方向速度为零，故无 y 方向动量，所以 $\Sigma F_y = 0$ ； y 方向受力如图；其中两端面上 τ_{xy} 大小相等方向相反。取 z 方向为单位宽度，列 y 方向力平衡方程有

$$p dx - (p + \frac{\partial p}{\partial y} dy) dx - \rho g \sin \beta dx dy = 0$$

简化后得

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \sin \beta$$

因为 $\partial p / \partial x = 0$ 且 $p|_{y=\delta} = p_0$ ，所以有

$$p = p_0 + \rho g (\delta - y) \sin \beta$$

因为 $(\delta - y) \sin \beta$ 表示 y 点与对应 $y = \delta$ 点的垂直距离（ g 方向），所以上式表明，流动断面上压力分布服从重力场静止流体压力分布规律。

此外，截面上任意两点的压力为

$$p_A = p_0 + \rho g (\delta - y_A) \sin \beta, \quad p_B = p_0 + \rho g (\delta - y_B) \sin \beta$$

两式相减可得 $p_A + \rho g y_A \sin \beta = p_B + \rho g y_B \sin \beta$ 或 $p_A + \rho g z_A = p_B + \rho g z_B$

可见截面上总位能恒定，与 y 无关。

5-10 对于图 5-22 所示的倾斜平板上的降膜流动，其特点是速度为抛物线分布。设流体

速度分布为 $u = ay^2 + by + c$ ，其中 a 、 b 、 c 为待定常数，流体平均速度为 u_m ，液膜厚度为 δ 。

(1) 试根据边界条件和质量守恒证明：

$$u = \frac{3}{2}u_m \left[2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right]$$

(2) 利用 x 方向的总力平衡关系（不取微元体）证明：

$$u_m = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu}$$

提示：（1）注意应用平均速度定义式；（2）利用壁面切应力与流体重力之间的总力平衡关系。

解：

(1) 由边界条件和质量守恒条件（平均速度定义）：

$$u|_{y=0} = 0; \quad \tau_{yx}|_{y=\delta} = \mu \frac{du}{dy}|_{y=\delta} = 0; \quad u_m \delta = \int_0^{\delta} u dx$$

可得：

$$a = -\frac{3}{2} \frac{u_m}{\delta^2}, \quad b = 3 \frac{u_m}{\delta}, \quad c = 0$$

故速度分布为

$$u = \frac{3}{2}u_m \left[2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right]$$

壁面切应力

$$\tau_w = \tau_{yx}|_{y=0} = \mu \frac{du}{dy}|_{y=0} = \mu \frac{3u_m}{\delta}$$

(2) 利用壁面切应力与流体重力之间的总力平衡关系有：

$$L\tau_w = L\delta\rho g \cos \beta \rightarrow u_m = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu}$$

5-11 平壁容器内装有粘度为 μ 、密度为 ρ 的液体。为了确定液体从容器中排放时在容器壁面上的粘附量，必须知道液膜厚度 δ 的变化。如图 5-23 所示，液膜厚度 δ 显然是坐标 x 和时间 t 的函数。设液膜内 x 方向的速度用 u 表示，试按下列步骤完成所需工作：

(1) 对图中所示 dx 段的液膜单元 (在 z 方向取单位宽度) 作质量衡算导出下式:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_m \delta) = -\frac{\partial \delta}{\partial t} \quad (a)$$

其中, u_m 是任意 x 处液膜截面上的平均速度。

(2) 设任意 x 处, u 沿液膜厚度的分布服从式 (5-45), 试由方程 (a) 导出下式:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\rho g}{\mu} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0 \quad (b)$$

(3) 试证明方程 (b) 的解——液膜厚度 δ 随 x 和 t 变化的关系为:

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g} \frac{x}{t}}$$

(4) 求任意时刻 z 方向单位宽度器壁粘附的液体总质量 m 。

解:

(1) 设任意 x 处液膜截面上的平均速度为 u_m , 对图中所示 dx 段的液膜单元 (在 z 方向取单位宽度) 有

$$q_{m1} = \rho u_m \delta, \quad q_{m2} = \rho(u_m \delta + \frac{\partial u_m \delta}{\partial x} dx), \quad \frac{\partial m_{cv}}{\partial t} = \frac{\partial \rho \delta}{\partial t} dx$$

将上述各项代入质量守恒方程 $q_{m2} - q_{m1} + \partial m_{cv} / \partial t = 0$ 可得

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_m \delta) = -\frac{\partial \delta}{\partial t} \quad (a)$$

(2) 任意 x 处速度 u 沿液膜厚度的分布服从式 (5-45) (抛物线分布), 意味着该处液膜平均速度满足式 (5-47), 即

$$u_m = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu}$$

其中对于本题 $\cos \beta = 1$, 将上式代入式 (a) 可得

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\rho g}{\mu} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0 \quad (b)$$

(3) 可以验证, $\delta = \sqrt{\mu / \rho g} \sqrt{x / t}$ 满足方程 (b), 所以液膜厚度 δ 随 x 和 t 变化的关系为:

$$\delta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho g} \frac{x}{t}} \quad (x/t \leq v_L)$$

(4) 任意时刻 z 方向单位宽度器壁粘附的液体总质量 m 为

$$m = \int_0^{tv_L} \rho \delta dx = \int_0^{tv_L} \rho \sqrt{\frac{\mu}{\rho g} \frac{x}{t}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\mu \rho}{gt}} (tv_L)^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\mu \rho}{g}} v_L^{3/2} t$$

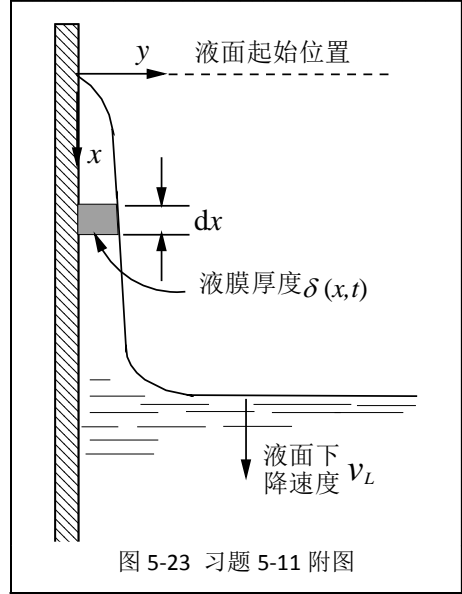


图 5-23 习题 5-11 附图

5-12 图 5-24 所示为流体沿半球壁面的对称稳态降膜流动。液膜沿球面向下流动的过程中厚度 δ 不断减小, 但平均速度 u_m 也减小, 两者在在球面任意 θ 位置都近似满足式 (5-47) 所描述的关系, 即

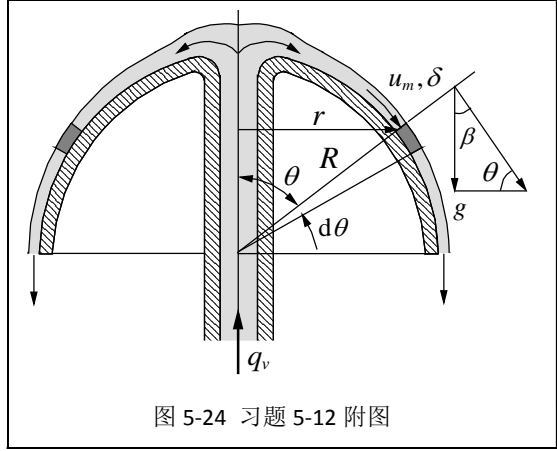
$$u_m = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu}$$

如图 5-24 所示, 因为此时 $\cos \beta = \sin \theta$, 故

$$u_m = \frac{\rho g \delta^2 \sin \theta}{3\mu} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

设流体粘度为 μ , 密度为 ρ , 球面半径为 R , 体积流量为 q_v , 且为稳态流动过程。

(1) 试利用质量守恒方程 $q_{v1}=q_{v2}$ 或针对图中所示微元 (环带) 作质量衡算证明:



$$\delta^3 \sin^2 \theta = C$$

其中 C 为常数。

(2) 进一步证明: 液膜厚度 δ 随 θ 的变化关系为

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu q_v}{2\pi\rho g R \sin^2 \theta}}$$

解:

(1) 由任意两截面上体积流量相等得:

$$2\pi R \sin \theta_1 \delta_1 u_{m1} = 2\pi R \sin \theta_2 \delta_2 u_{m2} \rightarrow \delta u_m \sin \theta = C'$$

或针对图中所示微元 (环带) 作质量衡算

$$2\pi R [\delta u_m \sin \theta + \frac{d\delta u_m \sin \theta}{d\theta} d\theta] - 2\pi R \delta u_m \sin \theta = 0$$

同样有

$$d(\delta u_m \sin \theta) = 0 \text{ 或 } \delta u_m \sin \theta = C'$$

因此, 将 $u_m = \delta^2 \sin \theta (\rho g / 3\mu)$ 代入后得到

$$\delta^3 \sin^2 \theta = C$$

(2) 令 $\theta = \pi/2$ 时, $\delta = \delta_0$, $u_m = u_{m0}$, 因此有

$$(\delta^3 \sin^2 \theta) \Big|_{\theta=\pi/2} = \delta_0^3 = C \rightarrow \delta^3 = \frac{\delta_0^3}{\sin^2 \theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}: q_v = 2\pi R \delta_0 u_{m0}, u_{m0} = \frac{\rho g \delta_0^2}{3\mu} \rightarrow \delta_0^3 = \frac{3\mu q_v}{2\pi R \rho g}$$

故有:

$$\delta^3 = \frac{3\mu q_v}{2\pi R \rho g \sin^2 \theta} \rightarrow \delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu q_v}{2\pi R \rho g \sin^2 \theta}}$$

第 6 章 流体流动微分方程

6-1 第 4 章中由控制体质量守恒得到一般形式的质量守恒方程 (4-10) 为

$$\oint_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{cv} \rho dV = 0$$

试由该积分方程导出微分形式的连续性方程 (6-4), 即

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

提示: 应用附录 A 中式 (A-16) 将封闭曲面积分转化为体积分, 并应用参数积分求导公式

$$\frac{d}{dt} \int_{\beta}^{\alpha} f(x, t) dx = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$$

其中积分上下限 α 、 β 为常数, 且该式对多重积分仍然适用。

解: 根据高斯公式 (A-16) 有

$$\oint_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \iiint_{cv} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV$$

再根据参数积分求导公式

$$\frac{d}{dt} \int_{\beta(t)}^{\alpha(t)} f(x, t) dx = f(\alpha(t), t) \frac{d\alpha}{dt} - f(\beta(t), t) \frac{d\beta}{dt} + \int_{\beta(t)}^{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx$$

因为 $\rho = (x, y, z, t)$, 而 $dV = dx dy dz$, 即 $\iiint_{cv} \rho dV$ 是含时间参数的积分, 所以

$$\frac{d}{dt} \iiint_{cv} \rho dV = \iiint_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

于是有

$$\begin{aligned} \oint_{cs} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{d}{dt} \iiint_{cv} \rho dV &= 0 \rightarrow \iiint_{cv} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV + \iiint_{cv} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \\ &\rightarrow \iiint_{cv} \left(\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \rightarrow \nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

6-2 某不可压缩流体绕扁平物体流动时, 其速度分布为

$$v_x = -\left(A + \frac{Cx}{x^2 + y^2}\right), \quad v_y = -\frac{Cy}{x^2 + y^2}, \quad v_z = 0$$

其中, A 、 C 为常数。试证明该流体的流动满足连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 。

解: 因为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{C(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{C(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

所以有

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

6-3 试在柱坐标系 r - θ - z 下取微元体 dr - $rd\theta$ - dz , 利用质量守恒方程 (6-1) 直接推导出柱坐标下的连续性方程: 即

$$\frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{\partial \rho v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

解：柱坐标下，微元体体积 $dV = r dr d\theta dz$ ，微元体的瞬时质量及其时间变化率分别为

$$m_{cv} = \rho dV = \rho r dr d\theta dz, \quad \frac{\partial m_{cv}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} r dr d\theta dz$$

输入微元体的质量流量 q_{m1} 和输出微元体的质量流量 q_{m2} 分别为

$$q_{m1} = \rho v_r r d\theta dz + \rho v_\theta dr dz + \rho v_z r d\theta dr$$

$$q_{m2} = (\rho v_r r + \frac{\partial \rho v_r r}{\partial r} dr) d\theta dz + (\rho v_\theta + \frac{\partial \rho v_\theta}{r \partial \theta} r d\theta) dr dz + (\rho v_z r + \frac{\partial \rho v_z r}{\partial z} dz) d\theta dr$$

由质量守恒方程 (6-1) 有

$$q_{m2} - q_{m1} + \frac{\partial m_{cv}}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho v_r r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho v_z r}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} r = 0$$

所以

$$\frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{\partial \rho v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

6-4 某流体在圆管内沿轴向 z 作非稳态流动，其速度分布为

$$v_r = 0; \quad v_\theta = 0; \quad v_z = z(1 - \frac{r^2}{R^2}) \cos(\omega t)$$

其中 R 、 r 、 z 分别为圆管半径、径向坐标和轴向坐标， ω 为圆频率， t 为时间。由于受到管壁加热（沿管壁圆周均匀加热），管中流体的密度 ρ 沿径向 r 和随时间 t 发生变化，但与 z 无关，即 $\rho = \rho(r, t)$ 。已知时刻 $t = \pi/\omega$ 时， $\rho = \rho_0$ 。试利用连续性方程求密度 ρ 随时间 t 和位置 r 变化的表达式。

解：根据连续性方程 (6-7) 及对称性条件有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = \rho(1 - \frac{r^2}{R^2}) \cos(\omega t)$$

所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(1 - \frac{r^2}{R^2}) \cos(\omega t) = 0$$

其解为

$$\ln \rho = -(1 - \frac{r^2}{R^2}) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + C(r)$$

由初始条件 $t = \pi/\omega$ 时， $\rho = \rho_0$ ，可得 $\ln \rho_0 = C(r)$ ，代入后得

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)$$

6-5 在三维流场中有一微元面 dA ，其外法线单位矢量为 $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k})/6$ ，已知有密度为 ρ 的流体以速度 $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$ 通过该微元面。

- (1) 试求该微元面上的质量通量；
- (2) 求该微元面上 x 、 y 、 z 方向动量的输入或输出通量；
- (3) 如果取微元面 dA 的外法线单位矢量为 $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ，则质量通量和动量通量又为何？(由此

明确取微元体时为什么要使其表面垂直于坐标轴)

解:

(1) 质量通量等于密度乘以法向速度 ρv_n ，即

$$\rho v_n = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \rho[v_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) + v_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) + v_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})] = \rho(v_x + \sqrt{2}v_y + \sqrt{3}v_z)/6$$

(2) x 、 y 、 z 方向动量的输入输出通量等于质量通量 ρv_n 乘以相应方向的速度，即

$$x: \rho v_n v_x = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})v_x = \rho(v_x^2 + \sqrt{2}v_y v_x + \sqrt{3}v_z v_x)/6$$

$$y: \rho v_n v_y = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})v_y = \rho(v_x v_y + \sqrt{2}v_y^2 + \sqrt{3}v_z v_y)/6$$

$$z: \rho v_n v_z = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})v_z = \rho(v_x v_z + \sqrt{2}v_y v_z + \sqrt{3}v_z^2)/6$$

(3) 如果取微元面 dA 的外法线单位矢量为 $\mathbf{n}=\mathbf{i}$ ，则质量通量和动量通量分别为

$$\rho v_n = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \rho v_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) = \rho v_x$$

$$x: \rho v_n v_x = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})v_x = \rho v_x^2$$

$$y: \rho v_n v_y = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})v_y = \rho v_x v_y$$

$$z: \rho v_n v_z = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})v_z = \rho v_x v_z$$

由此可见，取微元体时其表面垂直于坐标轴其结果表达更为简洁。

6-6 图 6-9 所示为两水平平壁间不可压缩流体一维稳态层流流动，流动沿 x 方向，所有参数沿 z 方向不变，即该问题为 x - y 平面问题。(1) 对直角坐标系一般形式的连续性方程和 N-S 方程进行简化，写出本问题的连续性方程和运动方程；(2) 证明 $\partial p / \partial x = \text{const}$ ；(3) 求速度分布（含积分常数）

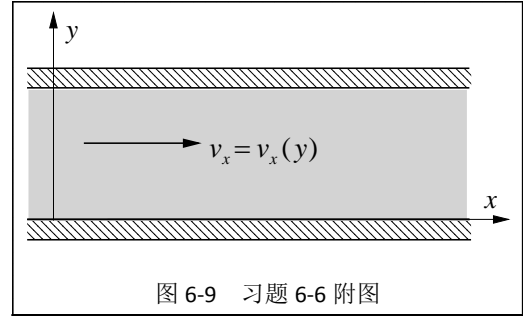


图 6-9 习题 6-6 附图

解: 根据题意，不考虑 z 方向参数且已知条件有

$$\rho = \text{const}, \mu = \text{const}, v_y = 0, f_x = 0, f_y = -g, \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

(1) 根据不可压缩流体连续性方程 (6-6)， x - y 平面问题的连续性方程可写为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v_y}{\partial y}}_0 = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \text{所以 } v_x = v_x(y)$$

又，根据 N-S 方程 (6-29)， x - y 平面问题的 N-S 方程可写为

$$x: \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}}_0 = \underbrace{f_x}_0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}_0 + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}_0$$

$$y: \underbrace{\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}}_0 = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}}_0 + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}}_0$$

根据上述条件（包括 $\partial v_x / \partial x = 0$ ），去除其中为 0 的项，得 x 、 y 方向运动方程分别为：

$$x: \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad y: \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$$

(2) 积分 y 方向的运动方程得 $p = -\rho gy + C(x)$ ，所以 $\partial p / \partial x = C'(x)$ 仅是 x 的函数，而 $v_x = v_x(y)$ 仅是 y 的函数，所以 x 方向的运动方程两边必为同一常数，即 $\partial p / \partial x = \text{const}$ 。

(3) 因为： $v_x = v_x(y)$ ， $\partial p / \partial x = \text{const}$ ， 所以

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} \rightarrow v_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

6-7 两同心圆筒如图 6-10 所示，外筒内半径为 R ，以角速度 ω_0 逆时针转动；内筒外半径为 kR ， $k < 1$ ，以角速度 ω_1 顺时针转动；两筒之间充满不可压缩流体，因间隙很小，其流动可视为层流流动。忽略重力和端部效应影响，并取切向速度沿逆时针为正，试确定两筒之间流体的速度分布和切应力分布。

解： 参照图示柱坐标系，根据不可压缩流体一维稳态层流的条件及流动对称性条件有

$$\rho = \text{const}, \quad v_r = v_z = 0, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

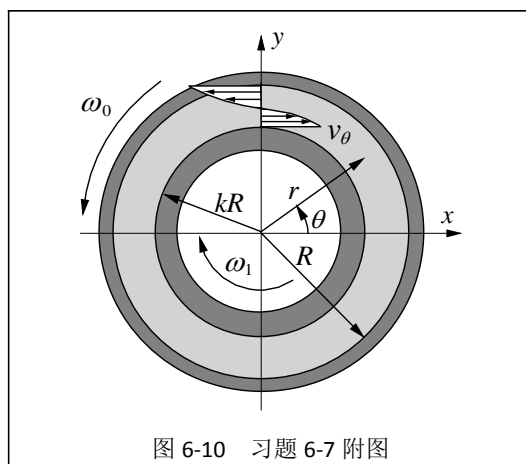


图 6-10 习题 6-7 附图

其次，因忽略重力影响，故质量力为零，即 $f_r = f_\theta = f_z = 0$ ；又因忽略重力影响后流动为纯剪切流，故压力沿流动方向不变，即 $\partial p / \partial \theta = 0$ 。

再有，因为整个流动与 z 无关（沿 z 方向所有参数均匀分布），故不需考虑 z 方向运动方程。

于是，将上述条件代入柱坐标系的连续性方程（6-8）和运动微分方程（6-33）可得

$$\text{连续性方程:} \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{与对称性条件一致})$$

$$r \text{ 方向运动方程:} \quad -\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\theta \text{ 方向运动方程:} \quad 0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right)$$

由简化后的连续性方程可知，速度 v_θ 仅是 r 的函数。于是 θ 方向的运动方程为常微分方程，积分得

$$v_\theta = C_1 \frac{r}{2} + C_2 \frac{1}{r}$$

由边界条件： $v_\theta|_{r=kR} = -kR\omega_1$ ， $v_\theta|_{r=R} = R\omega_0$ ， 确定积分常数为：

$$C_1 = \frac{2(k^2\omega_1 + \omega_0)}{1 - k^2}, \quad C_2 = -\frac{k^2 R^2 (\omega_1 + \omega_0)}{1 - k^2}$$

因此速度分布为：

$$v_\theta = \frac{k^2}{1-k^2} \left[\omega_0 \left(\frac{r}{k^2} - \frac{R^2}{r} \right) + \omega_1 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \right]$$

根据柱坐标下的牛顿本构方程（6-34），切应力分布为：

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] = 2\mu(\omega_0 + \omega_1) \frac{k^2}{1-k^2} \frac{R^2}{r^2}$$

再根据 r 方向运动方程，可得压力微分方程为

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r} \rightarrow \frac{dp}{dr} = \rho \frac{k^4}{(1-k^2)^2} \left[\omega_0 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{R^2}{r^2} \right) + \omega_1 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right]^2 r$$

对上式积分得

$$p = p_R - \rho \frac{k^4 R^2}{(1-k^2)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{k^2} - \omega_1 \right)^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{(\omega_0 + \omega_1)^2}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) + 2 \left[\omega_0 \omega_1 \left(\frac{1}{k} - 1 \right) - \left(\frac{\omega_0}{k} + \omega_1 \right)^2 \right] \ln \frac{R}{r} \right\}$$

其中， p_R 为 R 处压力。

6-8 一摩擦轴承，如图 6-11 所示。轴的直径 $D=50.8\text{mm}$ ，以 200rpm ($\omega=20.944\text{rad/s}$) 的转速顺时针旋转；润滑油油膜厚度 $\delta=0.0508\text{mm}$ ，粘度为 $0.2\text{Pa}\cdot\text{s}$ ；与轴配合的轴承表面的长度（沿轴向） $L=50.8\text{mm}$ ；设重力影响和端部效应可忽略，且由于散热良好，油膜流动是等温层流流动。试求转动轴所需要的扭矩 M 和消耗的功率 \dot{W}_μ 。（提示：求切应力 $\tau_{r\theta}$ 时注意引用柱坐标下的牛顿本构方程）

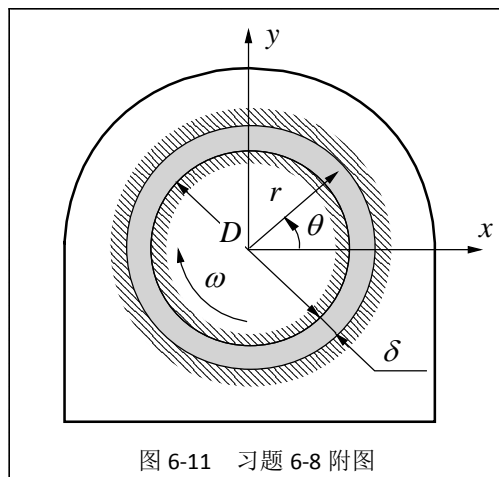


图 6-11 习题 6-8 附图

解： 本题与例 6-2 流动情况一样，只是边界条件不同，故直接引用例 6-2 所得 θ 方向的运动方程

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right)$$

因速度 v_θ 仅是 r 的函数，所以该方程为常微分方程，积分得

$$v_\theta = C_1 \frac{r}{2} + C_2 \frac{1}{r}$$

令 $2R=D$ ， $k = R/(R+\delta)$ ，由边界条件 $v_\theta|_{r=R+\delta} = 0$ 和 $v_\theta|_{r=R} = -R\omega$ 得积分常数为

$$C_1 = \frac{2R^2\omega}{(R+\delta)^2 - R^2} = \frac{2\omega k^2}{1-k^2}, \quad C_2 = -C_1 \frac{(R+\delta)^2}{2} = -\frac{2\omega k^2 (R+\delta)^2}{1-k^2} \frac{1}{2}$$

根据速度分布及柱坐标下的牛顿本构方程（6-34）得切应力分布为

$$v_\theta = -\frac{\omega k^2}{1-k^2} \left(\frac{(R+\delta)^2}{r} - r \right)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] = 2\mu\omega \frac{k^2}{1-k^2} \frac{(R+\delta)^2}{r^2}, \quad \text{且 } \tau_{r\theta}|_{r=R} = \frac{2\mu\omega}{1-k^2}$$

于是得流体受到的力矩即转动外筒所需的力矩和功率为

$$M = \tau_{r\theta}|_{r=R} \cdot A \cdot R = \frac{2\mu\omega}{1-k^2} (2\pi RL) R = 0.432 \text{ N}\cdot\text{m}, \quad \dot{W}_\mu = M\omega = 9.06 \text{ W}$$

6-9 如图 6-12 所示, 不可压缩流体在两同心多孔陶瓷膜管之间作径向流动, 即小管中的流体通过多孔壁径向扩散进入环隙, 再沿径向流动至外管多孔壁向外扩散。陶瓷膜管水平放置, 轴向单位长度对应的体积流量为 q_v 。设流动是稳态层流流动且流动对称, 忽略端部效应, 将问题视为 $r-\theta$ 平面问题 (与 z 无关)。试针对环隙内的径向流动:

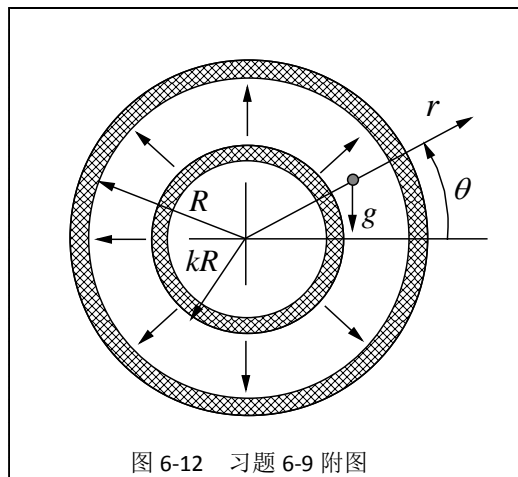


图 6-12 习题 6-9 附图

(1) 由连续性方程证明

$$rv_r = \text{const}$$

(2) 试对一般形式的运动方程进行简化, 证明环隙内 r 、 θ 方向的运动方程分别为

$$r: \frac{\partial p^*}{\partial r} = -\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \theta: \frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0$$

其中 $p^* = p + \rho g r \sin \theta$ 。

(3) 若用 p_R^* 表示半径 R 处 (外管内壁) 的 p^* , 试积分 r 方向的运动方程得压力分布为

$$p^* - p_R^* = \frac{1}{2} \rho v_r^2 \Big|_{r=R} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{q_v}{2\pi R} \right)^2 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

解: 参照图示柱坐标系, 根据不可压缩流体一维稳态层流的条件及流动对称性条件有

$$\rho = \text{const}, \quad v_\theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0, \quad v_r = v_r(r), \quad f_r = -g \sin \theta, \quad f_\theta = -g \cos \theta$$

(1) 根据柱坐标系的连续性方程 (6-8), $r-\theta$ 平面问题的连续性方程, 及其由上述条件简化的结果为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0 \rightarrow \frac{d(r v_r)}{dr} = 0 \rightarrow r v_r = \text{const}$$

(2) 根据柱坐标系运动方程 (6-33), $r-\theta$ 平面问题的运动方程及其为 0 项为

$$\begin{aligned} r: & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \theta: & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

简化后得：

$$r: \frac{\partial p}{\partial r} + g\rho \sin \theta = -\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial r} = -\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\theta: \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g r \cos \theta = 0 \rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0$$

其中 $p^* = p + \rho g r \sin \theta$ 。

(3) 因为 $rv_r = C$, $2\pi rv_r = q_v$, 所以

$$C = \frac{q_v}{2\pi} \rightarrow -\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \rho \frac{(rv_r)^2}{r^3} = \rho \left(\frac{q_v}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{r^3}$$

又因为

$$\frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial r} = \frac{dp^*}{dr}$$

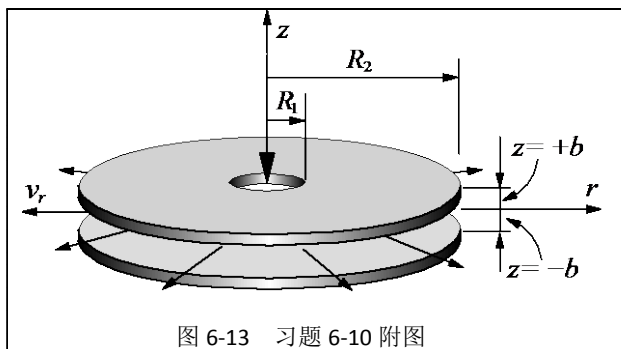
因此

$$\frac{dp^*}{dr} = \rho \left(\frac{q_v}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{r^3} \rightarrow \int_{p^*_R}^{p^*} dp^* = \rho \left(\frac{q_v}{2\pi}\right)^2 \int_r^R \frac{1}{r^3} dr$$

积分结果为

$$p^* - p^*_R = \frac{\rho}{2} \left(\frac{q_v}{2\pi R}\right)^2 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

6-10 某润滑系统部件由两平行圆盘组成，如附图所示。润滑油在两圆盘之间沿径向 r 作稳态一维层流流动。流体进入圆盘处的孔半径为 R_1 ，圆盘外半径 R_2 。流动靠压差 $\Delta p = p_1 - p_2$ 推动，其中 p_1 、 p_2 分别为 R_1 、 R_2 处的压力。仅考虑间 $R_1 < r < R_2$ 的区域的流动，且认为 $v_\theta = v_z = 0$ 。



(1) 试利用连续性方程和对称性条件简化 N-S 方程，导出本系统 r 、 z 方向的运动方程：

$$r \text{ 方向: } -\rho \frac{\phi^2}{r^3} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{d^2 \phi}{dz^2}; \quad z \text{ 方向: } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

其中， $\phi = rv_r$ ，且 ϕ 仅是 z 的函数，与 r 无关，为什么？

(2) 针对蠕变流 (creep flow) 条件 (即认为 v_r 非常小，故 $v_r^2 \approx 0$) 证明存在一常数 λ 使得：

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{d^2 \phi}{dz^2} = \lambda$$

(3) 在上述基础上对方程积分证明：

$$\Delta p = p_1 - p_2 = -\mu \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \frac{d^2 \phi}{dz^2}; \quad v_r = \frac{b^2 \Delta p}{2\mu r \ln(R_2 / R_1)} \left[1 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right]$$

提示：根据题中条件，本问题可视为 r - z 平面问题。

解： 参照图示柱坐标系，根据题中条件，本问题可视为 r - z 平面问题。根据不可压缩流体一维稳态层流的条件及流动对称性条件有

$$\rho = \text{const}, \quad v_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad f_r = 0, \quad f_z = -g$$

(1) 根据柱坐标系的连续性方程 (6-8), r - z 平面问题的连续性方程, 及其由上述条件简化的结果为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0 \rightarrow rv_r = f(z) \text{ 或 } \phi = rv_r \text{ 仅为 } z \text{ 的函数}$$

再根据柱坐标系运动方程 (6-33), r - z 平面问题的运动方程及其为 0 项为

$$\begin{aligned} r: & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \\ z: & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{简化后得:} \quad r: \quad v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}; \quad z: \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \rightarrow p = -\rho g z + f(r)$$

因为, $v_r = \phi/r$ 且 $\phi = f(z)$, 所以

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{\phi^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2 \phi}{dz^2}$$

$$\text{故 } r \text{ 方向动量方程为} \quad -\rho \frac{\phi^2}{r^3} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{d^2 \phi}{dz^2}$$

(2) 对蠕变流 (creep flow) 条件, v_r 非常小 $v_r^2 \approx 0$, 故 $-\rho \phi^2/r^3 = -\rho v_r^2/r \approx 0$, r 方向动量方程简化为

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{d^2 \phi}{dz^2}$$

因为 $p = -\rho g z + f(r)$, $\partial p / \partial r = f'(r)$, 而 $\phi = f(z)$, 故方程左边仅为 r 的函数, 右边为 z 的函数, 所以根据微分方程理论, 上式两边必为同一常数 λ , 即

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{d^2 \phi}{dz^2} = \lambda$$

(3) 对上式进行积分有

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \lambda \rightarrow p = \lambda \ln r + C(z) \rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = -\lambda \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = -\mu \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \frac{d^2 \phi}{dz^2}$$

上述结果表明, $p = \lambda \ln r - \rho g z$, 但沿径向的压力差与 z 无关; 在确定的 r 处, 两点压力之差符合重力场静力分布。

$$\text{又} \quad \mu \frac{d^2 \phi}{dz^2} = \lambda \rightarrow \phi = \frac{\lambda}{\mu} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

由边界条件: $z = \pm b$, $v_r = 0$ 或 $\phi = 0$, 可得 $C_1 = 0$, $C_2 = -\lambda b^2 / (2\mu)$; 将 C_1 、 C_2 代入上式, 并考虑到常数 $\lambda = -\Delta p / \ln(R_2/R_1)$, 可得

$$\phi = rv_r = \frac{\lambda b^2}{2\mu} \left[1 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right] \quad \text{或} \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{b^2 \Delta p}{2\mu \ln(R_2/R_1)} \left[1 - \left(\frac{z}{b} \right)^2 \right]$$

第7章 不可压缩理想流体的平面运动

7-1 已知下列速度势函数，求流函数，并画出流线。

(1) $\phi = xy$

(2) $\phi = x^3 - 3xy^2$

(3) $\phi = x/(x^2 + y^2)$

(4) $\phi = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$

解：根据速度势和流函数的定义有

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(1) 因为
$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -y, \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -x$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy = xdx - ydy = d\left(\frac{x^2 - y^2}{2} + C\right)$$

取坐标原点 $\psi = 0$ ，所以

$$\psi = (x^2 - y^2)/2$$

(2) 因为
$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -3x^2 + 3y^2, \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 6xy$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y = -6xy \rightarrow \psi = -3x^2 y + f(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x \rightarrow -3x^2 + f'(y) = -3x^2 + 3y^2 \rightarrow f'(y) = 3y^2 \rightarrow f(y) = y^3 + C$$

取坐标原点 $\psi = 0$ ，所以

$$\psi = y^3 - 3x^2 y$$

(3) 因为
$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = d\left(\frac{y}{(x^2 + y^2)} + C\right)$$

取 x 轴线 $\psi = 0$ ，所以

$$\psi = y/(x^2 + y^2)$$

(4) 因为
$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2y^3 - 6yx^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

所

以

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y = \frac{2y^3 - 6yx^2}{(x^2 + y^2)^3} &\rightarrow \psi = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + f(y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} + f'(y) &= \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \rightarrow f(y) = C \end{aligned} \right\} \rightarrow \psi = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + C$$

取 x 、 y 轴线 $\psi = 0$ 有
$$\psi = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

7-2 不可压均匀来流流场 $v_x = 3 \text{ m/s}$, $v_y = 5 \text{ m/s}$, 试写出速度势函数和流函数。

解: 根据速度势和流函数的定义有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -v_x = -3 \rightarrow \phi = -3x + f(y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -v_y \rightarrow f'(y) = -5, \rightarrow f(y) = -5y + C_1 \end{aligned} \right\} \therefore \phi = -3x - 5y + C_1$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -v_y = -5 \rightarrow \psi = -5x + f(y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= v_x \rightarrow f'(y) = 3 \rightarrow f(y) = 3y + C_2 \end{aligned} \right\} \therefore \psi = -5x + 3y + C_2$$

7-3 已知不可压平面流场中, x 方向的速度分量为 $v_x = xy/(x^2 + y^2)^{3/2}$, 试利用连续性方程确定 y 方向的速度分量 v_y , 试问此流场是否有旋? 已知 x 轴上速度为零。

解: 根据不可压缩流体平面流动连续性方程有

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3x^2 y}{(x^2 + y^2)^{5/2}} = \frac{2x^2 y - y^3}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

由上式积分可得
$$v_y = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + f(x)$$

因为 $y=0$, $v_y=0$, 所以 $f(x)=0$, 因此

$$v_y = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

又因为

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-3xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} - \frac{x^3 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \neq 0$$

所以流动是有旋的。

7-4 速度场: $v_x = kx^2$, $v_y = -2kxy$, 其中 k 为常数, 可能是不可压缩流场。

- (1) 此速度场是否满足连续方程;
- (2) 此流场是否有旋;
- (3) 试写出流函数;
- (4) 试写出速度势函数;
- (5) 试写出流线方程。

解:

- (1) 因为: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2kx - 2kx = 0$, 所以该流场满足连续性方程, 为不可压缩流场;

(2) 因为： $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (-2ky - 0) = -ky \neq 0$ ，所以该流场有旋；

(3) 因为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y = 2kxy &\rightarrow \psi = kx^2 y + f(y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x &\rightarrow kx^2 + f'(y) = kx^2 \rightarrow f(y) = C_1 \end{aligned} \right\}, \text{ 故流函数为}$$

$$\psi = kx^2 y + C_1;$$

(4) 因为流动有旋，所以不存在速度势函数；

(5) 流函数等值线为流线，所以流线方程可写为： $x^2 y = C$ 。

7-5 不可压平面流动，其流函数 $\psi = x^2 - y^2$ ，问流动是否有势？如果有，给出 ϕ 的表达式。

解：根据速度势和流函数的定义，因为

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2y \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

$$v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2x \rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial x} = -2, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

即
$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

所以流动有势，且势函数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -v_x = 2y &\rightarrow \phi = 2yx + f(y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -v_y &\rightarrow 2x + f'(y) = 2x, \rightarrow f(y) = C \end{aligned} \right\} \rightarrow \phi = 2xy + C$$

7-6 一西南风的风速为 12 m/s，试求其流函数和速度势函数。提示：以 x 轴指向东方， y 轴指向北方。

解：因为 $v_0 = 12 \text{ m/s}$ ， $\theta = \pi/4$ ，速度分量为

$$v_x = v_0 \cos \theta = 6\sqrt{2} \text{ m/s}, \quad v_y = v_0 \sin \theta = 6\sqrt{2} \text{ m/s}$$

于是根据平行直线等速流势函数与流函数的表达式（7-22）有

$$\phi = -v_x x - v_y y + C_1 = -6\sqrt{2}(x + y) + C_1$$

$$\psi = v_x y - v_y x + C_2 = -6\sqrt{2}(x - y) + C_2$$

或根据势函数和流函数的定义有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -v_x = -6\sqrt{2} &\rightarrow \phi = -6\sqrt{2}x + f(y) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -v_y &\rightarrow f'(y) = -6\sqrt{2}, \rightarrow f(y) = -6\sqrt{2}y + C_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \phi = -6\sqrt{2}(x + y) + C_1$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y = -6\sqrt{2} &\rightarrow \psi = -6\sqrt{2}x + f(y) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x &\rightarrow f'(y) = 6\sqrt{2} \rightarrow f(y) = 6\sqrt{2}y + C_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \psi = -6\sqrt{2}(x - y) + C_2$$

7-7 流体流动的势函数为 $\phi = A(x^2 - y^2)$ 。证明其是调和函数，并求出流函数 ψ 。将流函数表达成极坐标的形式，画出流网。流场中有驻点吗？如果有，应在何处？

解：对于势函数 $\phi = A(x^2 - y^2)$ ，因为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2A, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2A \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

即 ϕ 满足拉普拉斯方程，所以速度势 ϕ 是调和函数。

由速度势函数可得速度分布和流函数分别为

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2Ax \quad v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2Ay$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = -2Ax &\rightarrow \psi = -2Axy + f(x) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y &\rightarrow -2Ay + f'(x) = -2Ay \rightarrow f(x) = C \end{aligned} \right\} \psi = -2Axy + C$$

极坐标下 $\psi = -2Axy + C = -Ar^2 \sin 2\theta + C$

由 $v_x = 0$, $v_y = 0$ ，可得 $x = 0$, $y = 0$ ；即存在驻点，且驻点位于坐标原点。

7-8 强度为 $20 \text{ m}^2/\text{s}$ 的点汇和点源置于如图 7-21 所示的直角坐标系中，试求 $x = 15 \text{ m}$ ， $y = 15 \text{ m}$ 点处的速度和该点相对于来流的压力差。

解：根据式 (7-25)，强度 $A = 20 \text{ m}^2/\text{s}$ 时，图中所示点源和点汇的势函数分别为：

点源： $\phi = -\frac{A}{4\pi} \ln((x+a)^2 + y^2)$

点汇： $\phi = \frac{A}{4\pi} \ln((x-a)^2 + y^2)$

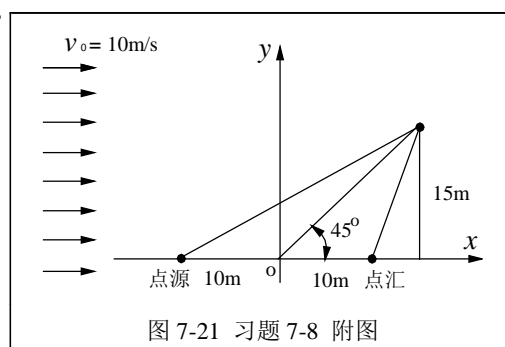
平行直线流的势函数： $\phi = -v_0 x$

根据叠加原理，图中所示流动的势函数为

$$\phi = -\frac{A}{4\pi} \ln((x+a)^2 + y^2) + \frac{A}{4\pi} \ln((x-a)^2 + y^2) - v_0 x$$

或

$$\phi = \frac{A}{4\pi} \ln \left(\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} \right) - v_0 x$$



其速度为

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{A}{2\pi} \left[\frac{(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \right] + v_0$$

$$v_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{Ay}{2\pi} \left[\frac{1}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} \right]$$

根据通过任意点至无穷远的流线的 Bernoulli 方程可得

$$p - p_0 = \rho(v_0^2 - v^2)/2 = \rho[v_0^2 - (v_x^2 + v_y^2)]/2$$

代入数据得 $x=15\text{m}$ 、 $y=15\text{m}$ 点处的速度和压力为

$$v_x=10.03 \text{ m/s}, v_y=-0.135 \text{ m/s}, v=10.03 \text{ m/s}, \theta=\tan(v_y/v_x)=-0.77^\circ$$

$$p - p_0 = \rho(v_0^2 - v^2)/2 = 1000 \times (10^2 - 10.03^2)/2 = -300.45 \text{ Pa}$$

7-9 已知桥墩宽度 $2r_0=2\text{m}$, 水深 $H=3\text{m}$, 桥墩头部(迎水面)为半圆形, 河水流速 $v_\infty=2\text{m/s}$ 。(1) 试按平面势流问题考虑, 计算桥墩头部所受到的水流冲击力;(2) 若计入水深静压的影响, 桥墩头部受到的沿水流方向的总力又为多少? 取水的密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ 。

解: 平面势流条件下, 绕桥墩半圆形头部流动与绕圆柱体迎水面半圆柱面的情况相同, 所以其表面压力可采用绕圆柱体平面势流圆柱面上的压力分布公式(7-40), 即

$$p = p_0 + \frac{\rho v_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right)$$

(1) 桥墩所受水流冲击力为

$$F = - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (p - p_0) H r_0 \cos \theta d\theta = -H r_0 \frac{\rho v_\infty^2}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 - 4 \sin^2 \theta) d\sin \theta = -H r_0 \frac{\rho v_\infty^2}{3}$$

代入数据得
$$F = -H r_0 \frac{\rho v_\infty^2}{3} = -3 \times 1 \times \frac{1000 \times 2^2}{3} = -4000 \text{ N}$$

(2) 计入水深静压的影响, 深度 h 处的桥墩头部表面压力分布为

$$p = p_0 + \frac{\rho v_\infty^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) + \rho g h \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right)$$

因此, 桥墩头部受到的沿水流方向的总力为

$$F = -4000 + \int_0^H \rho g h 2r_0 dh = -4000 + \rho g H^2 r_0 = -4000 + 88200 = 84200 \text{ N}$$

可见由于流动在桥墩两侧形成的负压, 水流流动时桥墩头部沿水流方向受到的总力小于水流静止时的总力。

7-10 针对图 7-20 所示的绕圆柱体的有环量流动, 试求 (1) 两个驻点聚集在圆柱面同一点上时, 圆柱受到的升力; (2) 流函数 $\psi = r_0^2 \omega \ln r_0$ 对应的流线方程, 证明该流线通过圆柱面上的驻点并绕过圆柱面; (3) 当 $r_0 \omega = 2.5v_\infty$ 时驻点的位置。

解: 已知环量 $\Gamma = -2\pi r_0^2 \omega$, 来流速度 v_∞ , 圆柱半径 r_0 , 圆柱转动角速度 ω 。

(1) 因为两个驻点聚集在圆柱面同一点上时, $r_0 \omega = 2v_\infty$ 即 $\Gamma = -4\rho r_0 v_\infty$, 所以根据式

(7-44) 得升力为:

$$\mathbf{Y} = -\rho v_{\infty} \Gamma \mathbf{j} = 4\pi\rho r_0 v_{\infty}^2 \mathbf{j}$$

(2) 将 $\psi = r_0^2 \omega \ln r_0$ 代入流函数表达式 (7-41b) 并注意 $m = 2\pi v_{\infty} r_0^2$ 有

$$r_0^2 \omega \ln r_0 = v_{\infty} \sin \theta \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

将 $\Gamma = -2\pi r_0^2 \omega$ 代入上式并整理得流线方程为

$$\frac{1}{2} \frac{2v_{\infty}}{r_0 \omega} \left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{r} \right) \sin \theta + \ln \frac{r}{r_0} = 0$$

因为圆柱面上的驻点在 $r=r_0$, $\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 v_{\infty}} = -\frac{r_0 \omega}{2v_{\infty}}$ 的点上, 圆柱面方程为 $r=r_0$, 都满足上述流线方程, 所以, 该流线通过圆柱面上的驻点并绕过圆柱面。

(3) 将 $r_0 \omega = 2.5v_{\infty}$ 即 $\Gamma = -5\pi r_0 v_{\infty}$ 代入式 (7-42), 并令 $v_r = 0$ 、 $v_{\theta} = 0$ 得

$$v_{\infty} \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) = 0, \quad -v_{\infty} \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{5}{2} \frac{r_0 v_{\infty}}{r} = 0$$

由第一个方程得 $\theta = \pi/2$ 或 $\theta = -\pi/2$, 代入第二个方程得

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{5}{2} \frac{r_0}{r} = 0 \rightarrow \begin{cases} r = -2r_0, \\ r = -0.5r_0 \end{cases}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow 1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{5}{2} \frac{r_0}{r} = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 2r_0 \\ r = 0.5r_0 \end{cases}$$

因为, $r \geq r_0$, 所以由上述解可知, 驻点的位置为 $\theta = -\pi/2$, $r = 2r_0$ 。

7-11 位于水平面的矩形截面圆弧弯曲管道, 如图所示, 其内侧曲率半径 R_1 , 外侧曲率半径 R_2 , 截面高度 h ; 现有不可压缩理想流体以均匀来速度 v_0 进入管道内作稳态流动, 并假定通过流动截面各点的流线均与管道弯曲壁面平行, 即 $v_z = 0$, $v_r = 0$ 。

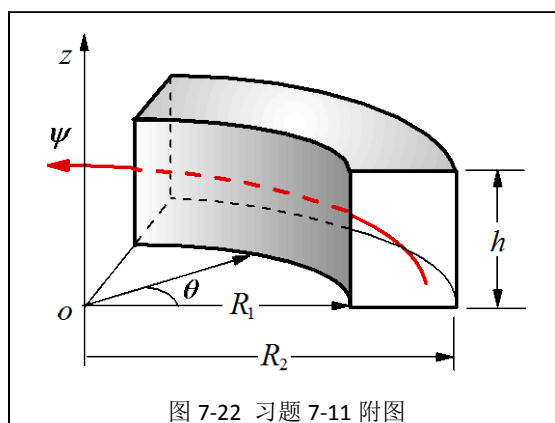
(1) 试证明流动属于自由涡运动, 因此是无旋流动 (提示: 应用理想流体连续性方程、运动方程和能量守恒方程);

(2) 求用 v_0 表达的速度 v_{θ} 和势函数 ϕ , 并对照点涡运动确定速度环量 Γ ;

(3) 求圆弧弯曲管道内任意两点的压力差表达式。

解:

(1) 根据柱坐标系的不可压缩流体的连续性方程和稳态条件下的欧拉方程 (由柱坐标系 N-S 方程简化), 并考虑 $f_z = -g$, $f_r = f_{\theta} = 0$, $v_z = 0$, $v_r = 0$, 有



连续性方程: $\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$

由 θ 方向运动方程得: $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \rightarrow p = p(r, z)$ (其中引用 $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$)

由 z 方向运动方程得: $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \rightarrow p = -\rho g z + f_1(r)$ (其中引用 $\partial p / \partial \theta = 0$)

由 r 方向运动方程得: $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r} \rightarrow \frac{df_1}{dr} = \rho \frac{v_\theta^2}{r} \rightarrow v_\theta = f(r)$ (其中引用 $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$)

因为理想流体任何流线上机械能守恒 (Bernoulli 方程), 且考虑到 $v_\theta = f(r)$, 所以有

$$p + \rho g z + \frac{\rho v_\theta^2}{2} = C \rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho v_\theta \frac{dv_\theta}{dr}$$

将上式代入 r 方向运动方程得

$$-v_\theta \frac{dv_\theta}{dr} = \frac{v_\theta^2}{r} \rightarrow -\frac{dv_\theta}{dr} = \frac{v_\theta}{r} \rightarrow -\ln v_\theta = \ln r + C \rightarrow rv_\theta = C'$$

由于 $rv_\theta = C'$, 所以流动是自由涡运动, 因此是无旋流动, 存在速度势函数。显然

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial rv_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) = 0$$

(2) 因为管道进口的体积流量 $q_v = v_0(R_2 - R_1)h$, 故根据质量守恒关系有

$$q_v = \int_{R_1}^{R_2} v_\theta h dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{C'}{r} h dr = C' h \ln \frac{R_2}{R_1} \rightarrow C' = \frac{q_v}{h \ln(R_2 / R_1)} = v_0 R_m$$

其中 R_m 是圆弧弯曲管道对数平均弯曲半径, 即

$$R_m = (R_2 - R_1) / \ln(R_2 / R_1)$$

所以速度分布为

$$v_\theta = \frac{C'}{r} = \frac{q_v}{h \ln(R_2 / R_1)} \frac{1}{r} = v_0 \frac{R_m}{r}$$

根据势函数定义有: $\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -v_\theta \rightarrow \phi = -C' \theta + f(r)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -v_r \rightarrow f'(r) = 0 \rightarrow f(r) = C \rightarrow \phi = -C' \theta + C$$

取积分常数 C 为零可得 $\phi = -C' \theta = -\frac{q_v}{h \ln(R_2 / R_1)} \theta = -R_m v_0 \theta$

对比逆时针点涡势函数: $\phi = -(\Gamma / 2\pi) \theta$, 可见速度环量为

$$\Gamma = 2\pi C = \frac{2\pi q_v}{h \ln(R_2 / R_1)} = 2\pi v_0 R_m$$

(3) 设高度为 z 的流动平面上, 来流压力为 p_{0z} , 则该平面任一流线的 Bernoulli 方程为

$$p + \rho g z + \frac{\rho v_\theta^2}{2} = (p_{0z} + \rho g z) + \frac{\rho v_0^2}{2}$$

由于来流流动截面上各点流速均为 v_0 , 各点的 $(p_{0z} + \rho g z)$ 都相同 (符合重力场静压分

布), 所以上式右边与 r, z 无关, 而上式左边为流动截面上任意点的机械能, 因此得出结论, 不可压缩理想流体在圆弧弯曲管道内的稳态流动, 流体质点的机械能不仅沿流线守恒, 而且在流场各点都守恒, 这正是自由涡运动的特点。

于是由任意 (r_1, z_1) 和 (r_2, z_2) 两点机械能守恒可得

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

将速度表达式代入上式可得圆弧弯曲管道内任意两点的压力差为

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) + \frac{\rho}{2} \left(\frac{q_v/h}{\ln(R_2/R_1)} \right)^2 \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_1^2 r_2^2}$$

或

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) + \frac{\rho}{2} \left(\frac{v_0(R_2 - R_1)}{\ln(R_2/R_1)} \right)^2 \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_1^2 r_2^2}$$

7-12 位于水平面的矩形截面弯曲管道, 内侧曲率半径 R_1 , 外侧曲率半径 R_2 , 截面高度 h ; 现有理想流体在管道内作稳态流动, 体积流量 q_v , 假定流动为平面流动问题(与 z 无关), 流体流线均与管道弯曲壁面平行, 即 $v_r = 0$ 。

(1) 试证明流动属于自由涡运动, 是无旋流动(提示: 应用质量、动量和能量守恒方程);

(2) 求用 q_v 表达的速度 v_θ 和势函数 ϕ , 并对照点涡运动确定速度环量 Γ ;

(3) 求径向任意两点的压力差表达式。

7-12 离心泵叶轮内、外直径分别为 $D_1=0.6\text{m}$ 、 $D_2=1.2\text{m}$ 。按平面势流考虑流体在叶轮流道内的流动, 为了使得叶轮出口(外径)处有 9m 水柱的压力升高, 叶轮转速理论上应为多少? 取水的密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ 。

解: 按平面势流考虑, 离心泵叶轮流道内的流动可视为源环流动(点源与点涡的叠加), 其速度势函数可根据式(7-33)表示为

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} (A \ln r + \Gamma \theta)$$

此处, 源强 $A=q_v/b$ (体积流量/叶片高度), 涡强 $\Gamma=$

绕桥墩半圆形头部流动与绕圆柱体迎流面半圆柱面的情况相同, 所以其表面压力可采用绕圆柱体平面势流圆柱面上的压力分布公式(7-40), 即

第8章 流体力学的实验研究方法

8-1 光滑圆管内不可压缩流动的压力降 Δp 与圆管长 L , 圆管直径 D , 流速 v , 流体密度

ρ 和流体粘度 μ 有关。试用瑞利法分析确定压力降 Δp 与 ρv^2 及相关无量纲数的关系。

解：根据瑞利法，设

$$\Delta p = KL^a D^b v^c \rho^d \mu^e \quad (\text{a})$$

式中 K 为常数。以质量 M 、长度 L 、时间 T 作为基本量纲，则上式的量纲方程为：

$$[M^1 L^{-1} T^{-2}] = [L^a][L^b][L^c T^{-c}][M^d L^{-3d}][M^e L^{-e} T^{-e}]$$

根据量纲和谐原理：方程两边量纲 M 、 L 、 T 的方次应该相等，于是有：

$$\begin{cases} 1 = d + e \\ -1 = a + b + c - 3d - e \\ -2 = -c - e \end{cases}$$

解方程组，可得： $e = 1 - d$, $c = 1 + d$, $a = d - b - 1$

将上述结果代入 (a) 式得：

$$\Delta p = KL^{d-b-1} D^b v^{1+d} \rho^d \mu^{1-d}$$

对上式进行如下变换处理

$$\begin{aligned} \Delta p &= KL^{-b+d-1} D^{d-1} D^{b-d+1} v^{d-1} v^2 \rho^{d-1} \rho^1 \mu^{1-d} \\ &= 2K \frac{\rho^{d-1} v^{d-1} D^{d-1}}{\mu^{d-1}} \frac{L^{d-b-1}}{D^{d-b-1}} \frac{\rho^1 v^2}{2} = 2K \left(\frac{\rho v D}{\mu} \right)^{d-1} \left(\frac{L}{D} \right)^{d-b-1} \frac{\rho v^2}{2} \end{aligned}$$

并令 $K' = 2K$, $m = d - 1$, $n = d - b - 1$ 可得

$$\Delta p = K' \text{Re}^m \left(\frac{L}{D} \right)^n \frac{\rho v^2}{2} = \lambda \left(\frac{L}{D} \right)^n \frac{\rho v^2}{2} \quad (\text{b})$$

其中 $\lambda = K' \text{Re}^m$ 即摩擦阻力系数。按上式设计实验，将测得的实验数据整理，可求出 K' 、 m 和 n ，从而确定阻力系数 $\lambda = K' \text{Re}^m$ 以及压力降 Δp 的定量关联式。

理论分析和实验数据关联表明 $n=1$ ，对于层流流动 $\lambda = 64/\text{Re}$ ，对于湍流流动 ($\text{Re} < 10^5$)， $\lambda = 0.3164/\text{Re}^{0.25}$ (Blasius 关联式)。

8-2 河流中的桥墩受到水流的作用力 F 与桥墩直径 d 、水流速度 v 、水的密度 ρ 和粘度 μ 以及重力有关。使用 π 定律推导水流对桥墩作用力的表达式。

8-3 经验表明过涡轮机的压头增量 ΔH 取决于转子直径 D 、转速 n 、通过机器的体积流量 Q 、气体的运动粘度 ν 以及重力等参数。试证明：

$$\frac{\Delta H}{D} = f \left(\frac{Q}{nD^3}, \frac{g}{n^2 D}, \frac{nD^2}{\nu} \right)$$

8-4 一艘舰船在海面上航行，受到的阻力 D 与航行速度 v 、船的长度 L 、海水的密度 ρ 和粘度 μ 、船的宽度 b 以及重力 g 有关。试用 π 定理确定有关的无量纲的数。

8-5 圆管内的一维可压缩流动的压力降 Δp 是气体密度 ρ 与粘度 μ 、音速 c 、气流速度 v 、管道直径 D 以及管道长度 L 的函数。请确定有关的无量纲准数。

8-6 在一反应堆的冷却系统中，用离心泵来驱动冷却介质液态钠的循环流动。液态钠的

温度为 $400\text{ }^{\circ}\text{C}$ ，密度为 0.85 g/cm^3 ，动力粘度为 0.269 cP ，泵的流量是 30 L/s ，扬程是 2 m ，转速是 1760 rpm 。现制作一台四倍大的模型水泵。试问这个模型泵在与原型工况相似的流量（即 $Q_m = Q_p n_m D_m^3 / n_p D_p^3$ ）时，测量到的扬程 H_m 应为多大才能使原型泵在流量 Q_p 之下工作时达到预期所需的压头 H_p 。（原型泵按与模型泵几何相似的原则制造）

8-7 用一个长度为原型十二分之一的模型潜艇在贴近水面的水下作实验，以测量其所受的阻力。实验在水洞中进行。要确定原型潜艇所受的阻力，需知道模型所受阻力与原型之比。已知原型潜艇的速度为 9.26 km/h ，海水的运动粘度为 $1.30 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ，在原型潜艇深度处海水的密度为 1010 kg/m^3 。水洞中的水温为 $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ ，试求原型潜艇所受的阻力。

8-8 驱动轴流泵所需的功率 P 取决于流体的密度 ρ 、叶轮的转速 n 、叶轮直径 D 、压头 H ，以及体积流量 q_v 等参数，用一个直径为原型直径三分之一的模型实验，得到：

$$P_m = 1510\text{ W}, \quad q_{vm} = 0.085\text{ m}^3/\text{s}, \quad H_m = 3.05\text{ m}, \quad n_m = 900\text{ rpm}, \quad D_m = 0.127\text{ m}$$

如果原型泵的转速为 300 rpm ，试求其驱动功率、出口的压头，以及体积流量。

8-9 图 8-11 所示为一文丘里流量计，起作用的是渐缩管段。假定模型的尺寸只有原型的十分之一，如果模型管道直径为 60 mm ，来流速度为 5 m/s ，其运动粘度是原型的 0.9 倍，试确定在动力相似条件下原型流量计的流量（以 L/s 计）。

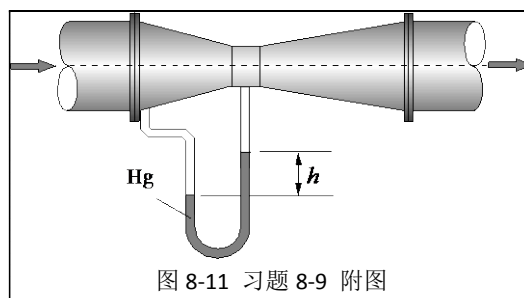


图 8-11 习题 8-9 附图

8-10 用尺度只有原型十分之一的飞机模型作实验。原型飞机在降落过程中速度为 $V_p = 150\text{ km/h}$ ，空气温度 $T = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。由于粘性效应起显著作用，模型实验在水洞中进行。如果水温为 $T_m = 50\text{ }^{\circ}\text{C}$ ，来流的压力 p_m 为一个大气压，试确定水洞水流的速度 V_m ，以及原型飞机所受升力 F_p 与模型飞机升力 F_m 的比值。如果飞机机头的抬升角度较大，实验中必须考虑什么因素？

第 9 章 管内流体流动

9-1 运动粘度为 $4.5 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ 的原油流过内径为 25 mm 的管道输送。试求

- (1) 流动为层流时的最大平均速度；
- (2) 在该流量下 50 m 管长的压头损失；
- (3) 在该流量下的壁面切应力（密度为 ρ ）。

解：

(1) 层流最大流速时 $\text{Re} = 2300$ ，所以： $u_m = \nu \text{Re} / D = 4.5 \times 10^{-6} \times 2300 / 0.025 = 0.414\text{ m/s}$

(2) 压头损失： $h_f = \lambda \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2g} = \frac{64}{2300} \frac{50}{0.025} \frac{0.414^2}{2g} = 0.487\text{ m}$

$$(3) \text{ 壁面切应力: } \tau_0 = \frac{D\Delta p}{4L} = \frac{D\rho gh_f}{4L} = \frac{0.025 \times 9.8 \times 0.487}{4 \times 50} \rho = 5.966 \rho \text{ N/m}^2$$

9-2 油从大的开口容器沿内径 $D=1\text{mm}$ 、长度 $L=45\text{cm}$ 的光滑圆管流下，流量为 $14.8\text{cm}^3/\text{min}$ ，如图 9-18 所示。油的表面距管道末端 $h=60\text{cm}$ 。(1) 假定在整根管道内的流动是充分发展层流，并忽略管道进口局部阻力损失，试求油的运动粘度，并验证以上假定有效；(2) 若管道进口局部阻力系数 $\zeta=0.5$ ，则油的运动粘度又为多少？

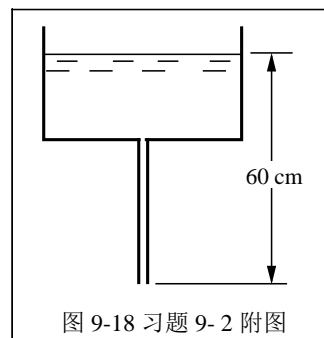


图 9-18 习题 9-2 附图

解：平均速度 $u_m = q_v / (\pi D^2 / 4) = 0.314 \text{ m/s}$ 。

(1) 层流平均速度公式 (9-3): $u_m = \Delta p^* D^2 / (32\mu L)$ ，其中

$$\Delta p^* = p_{in} - p_{out} + \rho g L = [p_0 + \rho g(h-L)] - p_0 + \rho g L = \rho g h$$

所

以

$$u_m = \frac{\Delta p^* D^2}{32\mu L} = \frac{\rho g h D^2}{32\mu L} \rightarrow \nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{g h D^2}{32 u_m L} = \frac{9.8 \times 0.6 \times 0.001^2}{32 \times 0.314 \times 0.45} = 1.30 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

因为 $\text{Re} = u_m D / \nu = 0.314 \times 0.001 / 1.30 \times 10^{-6} = 241.5$ ，所以层流假设有效。

(2) 如果计入进口局部阻力，则进口处静压力

$$p_{in} = [p_0 + \rho g(h-L)] - \zeta \frac{\rho u_m^2}{2} = [p_0 + \rho g(h-L)] - 0.02465 \rho$$

所以：

$$\Delta p^* = \rho g h - 0.02465 \rho$$

$$\text{由此得 } \nu = \frac{(g h - 0.02465) D^2}{32 u_m L} = \frac{(9.8 \times 0.6 - 0.02465) \times 0.001^2}{32 \times 0.314 \times 0.45} = 1.295 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

可见进口阻力损失影响很小。

9-3 流体流过光滑圆管的流量为 4 L/s 时，阻力系数为 0.06 。当流量增加到 24 L/s 时，阻力系数是多少？

解：假设流动是层流，则 $\text{Re} = 64 / \lambda = 64 / 0.06 = 1066.67$ ，假设正确；当流量增加到原来的 6 倍后， $\text{Re}=6400$ ，为湍流，所以采用 Blasius 公式有 $\lambda = 0.3164 / \text{Re}^{0.25} = 0.0354$ 。

9-4 流体在一条直径为 150mm 的光滑玻璃管内以 $0.006 \text{ m}^3/\text{s}$ 的流量流动。管中的流体是水，温度为 20°C 试求粘性底层及过渡层的厚度。

解： 20°C 时，水的密度 $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$ ，粘度 $\mu = 100.42 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ；

水的平均流速和雷诺数分别为：

$$u_m = \frac{q_v}{\pi D^2 / 4} = 0.339 \text{ m/s}, \quad \text{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu} = 50546$$

单位长度的压降为

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\lambda}{D} \frac{\rho u_m^2}{2} = \frac{0.3164}{\text{Re}^{1/4}} \frac{\rho u_m^2}{2D} = \frac{0.3164}{50546^{1/4}} \frac{998.2 \times 0.339^2}{2 \times 0.150} = 8.069 \text{ Pa/m}$$

由此得壁面切应力为 $\tau_0 = \frac{D}{4} \frac{\Delta p}{L} = \frac{0.150}{4} \times 8.069 = 0.302 \text{ N/m}^2$

根据定义可得摩擦长度为

$$y^* = \mu / \sqrt{\tau_0 \rho} = 100.42 \times 10^{-5} / \sqrt{0.302 \times 998.2} = 5.784 \times 10^{-5} \text{ m}$$

粘性底层和过渡层厚度分别为

$$\delta_1 = y|_{y^+=5} - 0 = 5y^* = 5 \times 5.784 \times 10^{-5} = 0.289 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 0.289 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = y|_{y^+=30} - y|_{y^+=5} = (30-5)y^* = 25 \times 5.784 \times 10^{-5} = 1.446 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.446 \text{ mm}$$

9-5 用一根内径为 30cm 的新铸铁管输送 20°C 的水。为了检查泄漏量的大小，在管道泄漏点与上游 600m 处各装一只压力表，测得压力降为 140kPa。在下游 600m 处又装一只压力表，测得与泄漏点的压力降为 133kPa。请据此估计泄漏流量的大小。

解：20°C 时，水的密度 $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$ ，粘度 $\mu = 100.42 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ；查表 9-1 得新铸铁管粗糙度 $e = 0.3 \text{ mm}$ ，相对粗糙度 $e/D = 0.3/300 = 0.001$ 。

由力平衡关系计算壁面切应力，然后应用摩擦长度定义式 (9-27) 可得

$$\tau_0 = \frac{D \Delta p}{4L}, \quad y^* = \frac{\mu}{\sqrt{\rho \tau_0}} = \frac{\mu}{\sqrt{\rho D \Delta p / 4L}}$$

代入数据，上游管道： $y_1^* = \frac{100.42 \times 10^{-5}}{\sqrt{998.2 \times 0.3 \times 140000 / (4 \times 600)}} = 7.598 \times 10^{-6} \text{ m}$

下游管道： $y_2^* = 7.598 \times 10^{-6} \sqrt{\frac{140}{133}} = 7.795 \times 10^{-6} \text{ m}$

因为 $5 y_1^* = 0.038 \text{ mm}$ ， $70 y_1^* = 0.532 \text{ mm}$ ，所以 $5 y_1^* < e < 70 y_1^*$ ，属于过渡型圆管流动（下游管道类同），其摩擦阻力系数关系式 (9-54) 可写为

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 - 0.87 \ln \left(\frac{2e}{D} + \frac{18.7}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) \quad (9-54)$$

又因为 $\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho u_m^2}{2} = \lambda \text{Re}^2 \frac{L}{D^3} \frac{\mu^2}{2\rho} \rightarrow \sqrt{\lambda} \text{Re} = \frac{D}{\mu} \sqrt{2\rho \frac{D \Delta p}{L}} = \begin{cases} 111679.6 \\ 108851.8 \end{cases}$

所以将 $\sqrt{\lambda} \text{Re}$ 代入式 (9-54) 可得上、下游管道阻力系数分别为

$$\lambda_1 = 0.020, \quad \lambda_2 = 0.020$$

又因为 $\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho u_m^2}{2} \rightarrow q_v = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\lambda \rho} \frac{D}{L}}$

所以泄漏量为 $\Delta q_v = q_{v1} - q_{v2} = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{D}{L}} \left(\sqrt{\frac{\Delta p_1}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\Delta p_2}{\lambda_2}} \right)$

代入数据得 $\Delta q_v = \frac{\pi 0.3^2}{4} \sqrt{\frac{2}{998.2} \frac{0.3}{600}} \left(\sqrt{\frac{140000}{0.02}} - \sqrt{\frac{133000}{0.02}} \right) = 4.74 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 4.74 \text{ L/s}$

9-6 内径 25 cm 的旧铸铁管输送 15 °C 的水；该铸铁管长为 300m，表面粗糙度 1.50mm，测得阻力损失为 5m，试求水的流量。

解: 15 °C时, 水的密度 $\rho = 998.9 \text{ kg/m}^3$, 粘度 $\mu = 115.47 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$;

假设流动处于粗糙管充分发展湍流区, 由相对粗糙度 $e/D = 1.5/250 = 0.006$, 查 Moody 图 9-8 可得阻力系数 $\lambda = 0.032$; 因此

$$h_f = \lambda \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2g} \rightarrow u_m = \sqrt{h_f \frac{D}{L} \frac{2g}{\lambda}} = \sqrt{5 \times \frac{0.25}{300} \frac{2 \times 9.8}{0.032}} = 1.60 \text{ m/s}$$

水的体积流量为 $q_v = \frac{\pi}{4} D^2 u_m = \frac{\pi}{4} 0.25^2 \times 1.60 = 0.0785 \text{ m}^3/\text{s}$

雷诺数为 $\text{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{998.9 \times 1.6 \times 0.25}{115.47 \times 10^{-5}} = 3.46 \times 10^5$

经验证, 流体流动确实处于粗糙管充分发展湍流区, 且 $\lambda = 0.032$, 故以上计算有效。

9-7 对液体在圆管中的充分发展湍流的测量表明, 在管壁到管轴心线距离的一半位置, 液体的速度是轴心线上速度的 0.9 倍。假定管内湍流为水力粗糙管情况, 试求:

- (1) 以轴心线上速度所表示的平均速度;
- (2) 管道的相对粗糙度。

解: 根据水力粗糙管速度分布式 (9-38)

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 2.5 \ln \frac{R-r}{e} + 8.5$$

当 $r=0$ 和 $r=R/2$ 时 $\frac{\bar{u}_{\max}}{u^*} = 2.5 \ln \frac{R}{e} + 8.5, \quad \frac{0.9 \bar{u}_{\max}}{u^*} = 2.5 \ln \frac{R}{2e} + 8.5$

两式相减可得 $\frac{\bar{u}_{\max}}{u^*} = 25 \ln 2$ 或 $u^* = \frac{\bar{u}_{\max}}{25 \ln 2}$

- (1) 根据水力粗糙管平均速度与最大速度关系式 (9-41) 有

$$\bar{u}_m = \bar{u}_{\max} + 3.75 u^* = \bar{u}_{\max} + 3.75 \frac{\bar{u}_{\max}}{25 \ln 2} = 0.783 \bar{u}_{\max}$$

- (2) 因为 $\bar{u}_{\max}/u^* = 25 \ln 2$, 且

$$\frac{\bar{u}_{\max}}{u^*} = 2.5 \ln \frac{R}{e} + 8.5 \rightarrow \frac{e}{D} = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2.5} \left(\frac{\bar{u}_{\max}}{u^*} - 8.5 \right) \right]$$

所以 $\frac{e}{D} = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2.5} (25 \ln 2 - 8.5) \right] = 0.0146$

9-8 换热器内管束按正方形及等边三角形排列, 如图 9-19 所示。若管道外径为 d , 管与管之间的距离为 b , 试导出本题附图中阴影部分的水力直径计算公式。

解: 根据水力直径定义: $D_h = 4A/P$ 。

对于正方形排列管束:

$$D_h = 4 \frac{b^2 - \pi d^2/4}{\pi d} = \frac{4b^2 - \pi d^2}{\pi d}$$

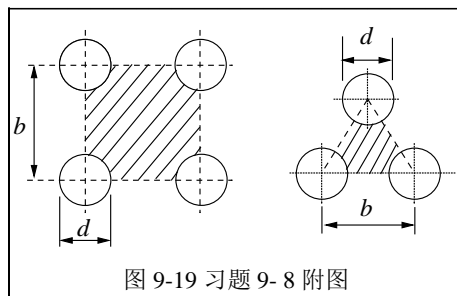


图 9-19 习题 9-8 附图

对于三角形排列管束：
$$D_h = 4 \frac{b^2 \sqrt{3}/4 - \pi d^2/8}{\pi d/2} = \frac{2\sqrt{3}b^2 - \pi d^2}{\pi d}$$

9-9 用光滑铝板制作成的矩形管输送标准状态下的空气，矩形管截面的长为 $a=100$ cm，宽为 $b=50$ cm，流量为 $4.50 \text{ m}^3/\text{s}$ 。试求在相同压力梯度条件下，用同样材料做成的圆管输送这些空气需要的圆管直径（湍流摩擦阻力系数采用 Blasius 公式）。

解：标准状态下空气密度 $\rho=1.293 \text{ kg/m}^3$ ，粘度 $\mu=1.72 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。

矩形管水力直径、平均流速、雷诺数分别如下：

$$D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = 0.667 \text{ m}, \quad u_m = \frac{q_v}{ab} = 9 \text{ m/s}, \quad \text{Re} = \frac{\rho u_m D_h}{\mu} = 451272$$

因为流动为湍流，按 Blasius 公式计算阻力系数，矩形管和圆形管压降梯度可分别表示为

$$\text{矩形管: } \frac{\Delta p}{L} = \lambda \frac{\rho u_m^2}{2D_h} = \frac{0.3164}{(\rho u_m D_h / \mu)^{0.25}} \frac{\rho u_m^2}{2D_h} = \frac{0.3164 \rho}{2(\rho/\mu)^{0.25}} \frac{u_m^{1.75}}{D_h^{1.25}} = C \frac{q_v^{1.75}}{D_h^{1.25} (ab)^{1.75}}$$

$$\text{圆形管: } \frac{\Delta p}{L} = \lambda \frac{\rho u_m^2}{2D} = C \frac{u_m^{1.75}}{D^{1.25}} = C \frac{q_v^{1.75}}{D^{1.25} (\pi D^2/4)^{1.75}} = C \frac{q_v^{1.75}}{D^{4.75} (\pi/4)^{1.75}}$$

由两者压降梯度 $\Delta p/L$ 和体积流量 q_v 相同有

$$D^{4.75} (\pi/4)^{1.75} = D_h^{1.25} (ab)^{1.75}$$

由此解出圆形管直径为：

$$D = 76.1 \text{ cm}$$

9-10 离心泵进口管内径为 50mm，进口装置包括一根内径为 50mm 长为 2m 的无缝钢管、一个底阀、一个 90° 弯头。如果用来泵送 20°C 的水，流量为 $3 \text{ m}^3/\text{h}$ ，试求进口装置的总阻力损失。

解： 20°C 水的密度 $\rho=998.2 \text{ kg/m}^3$ ，粘度 $\mu=100.42 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ；

查表 9-2 可得：底阀进口局部阻力系数 $\zeta=10$ ， 90° 弯头局部阻力系数 $\zeta=0.75$ 。

$$\text{水流雷诺数} \quad \text{Re} = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{4 \rho q_v}{\pi D \mu} = \frac{4 \times 998.2 \times 3/3600}{\pi \times 0.05 \times 100.42 \times 10^{-5}} = 21094$$

$$\text{阻力系数} \quad \lambda = 0.3164 / \text{Re}^{0.25} = 0.3164 / 21094^{0.25} = 0.0263$$

$$\begin{aligned} \text{阻力损失} \quad h_f &= \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right) \frac{u^2}{2g} = \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right) \frac{1}{2g} \left(\frac{4q_v}{\pi D^2} \right)^2 \\ &= (0.0263 \frac{2}{0.05} + 10.75) \frac{1}{2 \times 9.8} \left(\frac{4 \times 3/3600}{\pi \times 0.05^2} \right)^2 = 0.108 \text{ m} \end{aligned}$$

第 10 章 流体绕物流动

10-1 考虑边界层的排挤厚度 δ_d 和动量损失厚度 δ_m ，试证明：若要按完全理想流动条件（流速 u_0 ）来计算边界层实际动量 M ，则必须将平壁表面向上推移的距离是 $(\delta_d + \delta_m)$ 。

解：边界层内实际动量和理想动量分别为

$$M = \int_0^\delta \rho u^2 dy, \quad M_i = \rho u_0^2 \delta = \int_0^\delta \rho u_0^2 dy$$

完全理想条件下的动量损失厚度 $\delta_{m,i}$ ，即平壁表面向上推移的距离，为

$$\rho u_0^2 \delta_{m,i} = M_i - M = \int_0^\delta \rho u_0^2 dy - \int_0^\delta \rho u^2 dy$$

即

$$\delta_{m,i} = \int_0^\delta \frac{1}{u_0^2} (u_0^2 - u^2) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) \left(1 + \frac{u}{u_0}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy + \int_0^\delta \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy = \delta_d + \delta_m$$

10-2 在风洞中用模型作高速火车头的摩擦阻力实验，在车头的顶面和底面将形成边界层。实验时一般让风洞的地板以来流 u_0 的速度运动以避免在气流到达车头时已形成边界层。风洞风速为 6 m/s 时，地板前缘到车头的距离为 2.5m，湍流转捩点的雷诺数为 10^6 ，空气运动粘度为 $1.55 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。假定地板不运动，试求当气流到达车头时边界层的厚度。

解： 计算 $L=2.5\text{m}$ 处的雷诺数为

$$\text{Re}_L = \frac{uL}{\nu} = \frac{6 \times 2.5}{1.55 \times 10^{-5}} = 967742 < 10^6, \text{ 属于层流}$$

所以，按 Blasius 解析式可得气流到达车头时的边界层厚度为

$$\delta = \frac{4.96}{\text{Re}_L^{0.5}} L = 0.0126\text{m} = 12.6\text{mm}$$

10-3 假定平壁层流边界层的速度分布函数为 $u = \alpha y$ ，试求无压差流的边界层厚度和排挤厚度。若平壁的长度为 L ，宽度为 b ，试求平壁的总摩擦阻力系数。

解： 由边界条件： $y = \delta, u = u_0$ 可得

$$\alpha = \frac{u_0}{\delta}, \quad \frac{u}{u_0} = \frac{y}{\delta}, \quad \tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{u_0}{\delta}$$

因为无压差，所以根据冯卡门积分方程 (10-36) 有

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \rho u_b^2 \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \frac{u}{u_b} \left(1 - \frac{u}{u_b}\right) dy \right) \rightarrow \mu \frac{u_0}{\delta} = \rho u_0^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) dy \\ &\rightarrow \mu \frac{u_0}{\delta} = \frac{\rho u_0^2}{6} \frac{d\delta}{dx} \rightarrow \frac{6\mu}{u_0 \rho} = \delta \frac{d\delta}{dx} \rightarrow \frac{12x^2}{u_0 \rho x / \mu} = \delta^2 \end{aligned}$$

即
$$\frac{\delta}{x} = 2\sqrt{3} \text{Re}_x^{-1/2}$$

排挤厚度：
$$\delta_d = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy = \frac{\delta}{2} = \sqrt{3} x \text{Re}_x^{-1/2}$$

局部阻力系数：
$$C_{fx} = \frac{\tau_0}{\rho u_0^2 / 2} = \frac{\mu u_0 / \delta}{\rho u_0^2 / 2} = \frac{2\mu}{\rho u_0} \frac{1}{2\sqrt{3} x \text{Re}_x^{-1/2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Re}_x^{-1/2}$$

平均阻力系数：
$$C_f = \frac{1}{Lb} \int_0^L C_{fx} b dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Re}_x^{-1/2} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{Re}_L^{-1/2}$$

δ 、 δ_d 、 C_f 与 Blasius 精确解 $\delta = 4.96x \text{Re}_x^{-0.5}$ 、 $\delta_d = 1.73x \text{Re}_x^{-0.5}$ 、 $C_f = 1.328 \text{Re}_L^{-0.5}$ 的相对偏差分别为 -30%、0.11%、-13%。

10-4 假定平壁层流边界层的速度分布函数为

$$u = \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3$$

试求无压差流的边界层厚度和排挤厚度。若平壁的长度为 L ，宽度为 b ，试求平壁的摩擦阻力系数。

解：由边界条件：

$$y = 0, u = 0; \quad y = \delta, u = u_0; \quad y = \delta, \partial u / \partial y = 0; \quad y = 0, \partial^2 u / \partial y^2 = 0$$

确定系数 a 、 b 、 c 、 d ，可得速度分布为

$$\frac{u}{u_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

对于层流流动，根据牛顿剪切公式和速度分布方程得

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\mu u_0}{\delta} \quad (\text{a})$$

因为无压差，所以根据冯卡门积分方程 (10-36) 有

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \rho u_b^2 \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \frac{u}{u_b} \left(1 - \frac{u}{u_b} \right) dy \right) \\ \rightarrow \frac{3}{2} \frac{\mu u_0}{\delta} &= \rho u_0^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[\frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy \\ \frac{d\delta}{dx} &= \frac{140}{13} \frac{\nu}{u_0 \delta} \end{aligned}$$

再次积分上式，由边界条件 $\delta|_{x=0} = 0$ 确定积分常数，可得边界层厚度为

$$\frac{\delta}{x} = 4.64 \sqrt{\frac{\nu}{u_0 x}} = \frac{4.64}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (\text{b})$$

排挤厚度：
$$\delta_d = \int_0^\delta \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right) dy = \frac{3\delta}{8} = 1.74x \text{Re}_x^{-1/2}$$

将式 (b) 代入式 (a) 可得壁面剪应力为

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\mu u_0}{\delta} = \frac{0.646}{\sqrt{\text{Re}_x}} \frac{\rho u_0^2}{2}$$

由此计算得到局部阻力系数为

$$C_{fx} = \frac{\tau_0}{\rho u_0^2 / 2} = \frac{0.646}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

设平板为矩形板，且沿 x 方向长度为 L ，则总阻力系数为

$$C_f = \frac{1}{A} \iint_A C_{fx} dA = \frac{1}{L} \int_0^L C_{fx} dx = \frac{1.292}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$

δ 、 δ_d 、 C_f 与 Blasius 精确解 $\delta = 4.96x \text{Re}_x^{-0.5}$ 、 $\delta_d = 1.73x \text{Re}_x^{-0.5}$ 、 $C_f = 1.328 \text{Re}_L^{-0.5}$ 的相对偏差分别为 -6.5%、0.58%、-2.7%。

10-5 帆船的稳定板浸没在海水中，如图 10-18 所示。其高为 965.2mm，上部长为 863.6mm，下部长为 381mm。若船以 1.544 m/s 的速度航行，试求稳定板的总摩擦阻力。海水的运动粘度为 $1.546 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ，密度为 1000 kg/m^3 ，临界雷诺数为 10^6 。（提示：由于板长是变化的，可用平均板长计算）

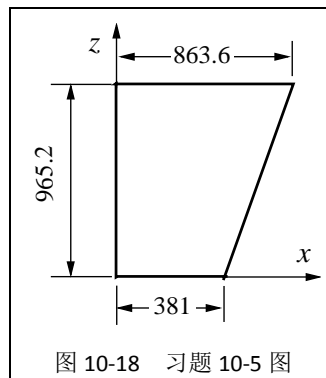


图 10-18 习题 10-5 图

解：由板的几何尺寸可知， z 处板长 $L = 0.5z + 0.381$ ，平均板长 $L_m = 0.6223 \text{ m}$ 。

因为最大板长时

$$\text{Re}_L = uL/\nu = 1.544 \times 0.8636 / 1.546 \times 10^{-6} = 8.625 \times 10^5 < 10^6$$

属于层流，所以按 Blasius 解可得稳定板的总摩擦阻力为

$$\begin{aligned} F_f &= 2 \int_0^{0.9652} \frac{1.328}{\text{Re}_L^{0.5}} \frac{\rho u^2}{2} L dz = 2 \frac{1.328}{(u/\nu)^{0.5}} \frac{\rho u^2}{2} \int_0^{0.9652} L^{0.5} dz = 2 \times 1.584 \int_0^{0.9652} (0.5z + 0.381)^{0.5} dz \\ &= 2 \times 1.584 \times 0.7565 = 2.396 \text{ N} \end{aligned}$$

如果按平均板长计算则有

$$F_f = 2 \frac{1.328}{\text{Re}_{L_m}^{0.5}} \frac{\rho u^2}{2} L_m b = 2 \frac{1.328}{(6.21 \times 10^5)^{0.5}} \frac{1000 \times 1.544^2}{2} 0.6223 \times 0.9652 = 2.413 \text{ N}$$

10-6 一轿车高 1.5m，长 4.5m，宽 1.8m，汽车底盘离地 0.16m，其平均摩擦阻力系数 $C_f = 0.08$ ，压差阻力系数 $C_p = 0.25$ ，近似将轿车看成长方体，求轿车以 60km/h 的速度行驶时克服空气阻力所需功率。空气密度 1.2 kg/m^3 。

解：空气总阻力为

$$\begin{aligned} F_D &= F_f + F_p = (C_f A_f + C_p A_D) \frac{\rho u_0^2}{2} = [C_f \times 2(a+b) \times L + C_p ab] \frac{\rho u_0^2}{2} \\ &= [0.08 \times 2(1.8 + 1.34) \times 4.5 + 0.25 \times 1.8 \times 1.34] \frac{1.2 \times (60/3.6)^2}{2} \\ &= 376.8 + 100.5 = 477.3 \text{ N} \end{aligned}$$

克服空气阻力所需功率为： $P = F_D u_0 = 477.3 \times 60 / 3.6 = 7955 \text{ W}$

10-7 习题 10-2 中，如果临界雷诺数为 3.2×10^5 ，(1) 试计算临界点 x 的值，并分别按层流公式和湍流公式计算此点对应的边界层厚度；(2) 提出一个折中的办法计算此条件下到车头时边界层的厚度。

解：(1) 临界点 x 的值为

$$x = \frac{\nu}{u} \text{Re}_{cr} = \frac{1.55 \times 10^{-5}}{6} 3.2 \times 10^5 = 0.827 \text{ m}$$

分别按层流公式和湍流公式计算此点对应的边界层厚度为

$$\text{层流: } \delta = \frac{4.96}{\text{Re}_L^{0.5}} L = \frac{4.96}{(3.2 \times 10^5)^{0.5}} \times 0.827 = 7.25 \times 10^{-3} \text{ m} = 7.25 \text{ mm}$$

$$\text{层流: } \delta = \frac{0.376}{\text{Re}_L^{0.2}} L = \frac{0.376}{(3.2 \times 10^5)^{0.2}} \times 0.827 = 0.0246 \text{ m} = 24.64 \text{ mm}$$

(2) 完全按湍流计算, $x=2.5\text{m}$ 处的边界层厚度为

$$\delta = \frac{0.376}{\text{Re}_L^{0.2}} L = 24.64 \left(\frac{2.5}{0.827} \right)^{0.8} = 59.70 \text{ mm}$$

折中的办法之一是扣除 $x=0.827\text{m}$ 处完全按湍流计算的湍流与层流边界层高差, 即

$$\delta = 59.70 - (24.64 - 7.25) = 42.31 \text{ mm}。$$

10-8 风车安装在海边, 风以 30km/h 的速度沿海岸向风车吹来。如果风车的叶片长为 30m , 风车距海岸前缘 1000m , 若要使叶片尖端距离地面空气边界层 3m 以上, 试求风车叶轮轴线的最低安装高度 (已知临界雷诺数为 500000 , 气温为 10°C , 全部边界层都按湍流边界层处理); 并分析层流边界层的存在对计算结果的影响。

解: 气温 10°C 时, 空气密度 $=1.247 \text{ kg/m}^3$, 运动粘度 $=14.16 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。 1000m 处的雷诺数为

$$\text{Re}_L = \frac{uL}{\nu} = \frac{(30/3.6) \times 1000}{14.16 \times 10^{-6}} = 5.89 \times 10^8 > 5 \times 10^5 \text{ (湍流)}$$

1000m 处的边界层厚度为

$$\delta = \frac{0.376}{\text{Re}_L^{0.2}} L = \frac{0.376}{(5.89 \times 10^8)^{0.2}} \times 1000 = 6.62 \text{ m}$$

风车叶轮轴线的最低安装高度: $H=30+3+6.62=39.62 \text{ m}$

因为层流边界层距离 $x = \frac{\nu}{u} \text{Re}_{cr} = \frac{14.16 \times 10^{-6}}{30/3.6} 5 \times 10^5 = 0.850 \text{ m}$, 影响较小。

10-9 鱼雷直径 0.533m , 长度 7.2m , 外形是良好的流线型, 在 20°C 的静水中以 80km/h 的速度前进, 仅考虑摩擦阻力 (近似按圆柱面考虑), 试计算其所需功率。设水的密度为 1000 kg/m^3 , 运动粘度 1.01×10^{-6} , 取临界雷诺数 $\text{Re}_{cr}=5 \times 10^5$ 。

解: 7.2m 处的雷诺数为

$$\text{Re}_L = \frac{uL}{\nu} = \frac{(80/3.6) \times 7.2}{1.01 \times 10^{-6}} = 1.58 \times 10^8 > 5 \times 10^5 \text{ (湍流)}$$

查表 10-2, 修正系数 $B=1700$, 根据 Re 范围采用公式 (10-60) 计算阻力系数

$$C_f = \frac{0.455}{(\log \text{Re}_L)^{2.58}} - \frac{B}{\text{Re}_L} = \frac{0.455}{(\log 1.58 \times 10^8)^{2.58}} - \frac{1700}{1.58 \times 10^8} = 1.99 \times 10^{-3}$$

总摩擦阻力 F_f 和所需功率分别为

$$F_f = C_f A_f \frac{\rho u_0^2}{2} = 1.99 \times 10^{-3} \times (\pi \times 0.533 \times 7.2) \times \frac{1000 \times (80/3.6)^2}{2} = 5923 \text{ N}$$

$$P = F_f u_0 = 5912 \times 80/3.6 = 131622 \text{ W} = 131.6 \text{ W}$$

10-10 跳伞者的质量为 160 斤，降落时迎风面积为 0.2 m^2 ，设其阻力系数 C_D 为 0.8，气温为 0°C ，空气密度为 1.292 kg/m^3 。不考虑空气的浮力作用，试求跳伞者的终端速度。

解：跳伞者达到终端速度时，所受阻力等于其重力，所以

$$G = F_D = C_f \frac{\rho u_t^2}{2} A_D \rightarrow u_t = \sqrt{\frac{G}{C_f A_D \rho}} = \sqrt{\frac{80 \times 9.81}{0.8 \times 0.2 \times 1.292}} = 87.14 \text{ m/s}$$

10-11 已测得密度为 1630 kg/m^3 的塑料珠在 20°C 的 CCl_4 液体中的沉降速度为 $1.70 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ ， 20°C 时 CCl_4 的密度为 1590 kg/m^3 ，粘度为 $1.03 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ，求此塑料珠的直径。

解：假定颗粒沉降处于 Allen 区 ($2 < \text{Re} < 500$)，则根据沉降速度公式 (10-76) 有

$$u_t = 0.1528 \frac{d^{1.143} [(\rho_p - \rho)g]^{0.7143}}{\rho^{0.2857} \mu^{0.4286}} \rightarrow d = 0.261 \text{ mm}$$

$$\text{此时对应的雷诺数 } \text{Re} = \frac{\rho u_t d}{\mu} = \frac{1590 \times 1.7 \times 10^{-3} \times 0.261 \times 10^{-3}}{1.03 \times 10^{-3}} = 0.685$$

可见与假定不符。重新假定颗粒沉降处于 Stokes 区 ($\text{Re} < 2$)，则根据公式 (10-75) 有

$$u_t = \frac{d^2 (\rho_p - \rho) g}{18 \mu} \rightarrow d = \sqrt{\frac{18 \mu u_t}{(\rho_p - \rho) g}} = \sqrt{\frac{18 \times 1.03 \times 10^{-3} \times 1.7 \times 10^{-3}}{(1630 - 1590) 9.81}} = 0.283 \times 10^{-3} \text{ m}$$

此时对应的雷诺数： $\text{Re} = 0.685 \times 0.283 / 0.261 = 0.743 < 2$ ，颗粒沉降确实处于 Stokes 区，因此颗粒直径 $d = 0.283 \text{ mm}$ 。

10-12 有时让光滑小球在粘性液体中自由沉降可测量液体的粘度。现将密度为 8010 kg/m^3 ，直径为 0.16 mm 的钢球置于密度为 980 kg/m^3 的某一液体中，装液体的玻璃管内径为 20 mm 。测得小球的沉降速度为 1.7 mm/s ，试验温度为 20°C ，试求此时液体的粘度。
提示：考虑器壁效应。

解：假定颗粒沉降处于 Stokes 区 ($\text{Re} < 2$)，则根据沉降速度公式 (10-75) 有

$$u_t = \frac{d^2 (\rho_p - \rho) g}{18 \mu} \rightarrow \mu = \frac{d^2 (\rho_p - \rho) g}{18 u_t}$$

考虑器壁效应，根据式 (10-80)，颗粒的自由沉降速度为

$$u_t = u'_t \left(1 + 2.104 \frac{d}{D} \right) = 1.7 \times 10^{-3} \left(1 + 2.104 \times \frac{0.16}{20} \right) = 1.729 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$\text{所以 } \mu = \frac{(0.16 \times 10^{-3})^2 (8010 - 980) 9.81}{18 \times 1.729 \times 10^{-3}} = 56.7 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s} = 0.0567 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

此时 $Re = (980)(1.729 \times 10^{-3})(0.16 \times 10^{-3})/0.0567 = 0.005 < 2$ ，假定合理，结果有效。

第 11 章 化工机械中的典型流动分析

11.1 叶轮机械中的流体流动	(11-1)
11.1.1 叶轮机械工作原理	(11-1)
11.1.2 轴流式叶轮机械中的流体流动	(11-4)
11.1.3 径流式叶轮机械中的流体流动	(11-5)
11.2 旋流器中的流体流动	(11-6)
11.2.1 概述	(11-6)
11.2.2 旋流器中的流体流动	(11-7)
11.2.3 旋流器中的压力分布	(11-8)
11.3 通过滤饼层的流体流动	(11-10)
11.3.1 达西 (Darcy) 公式及其修正	(11-10)
11.3.2 不可压缩滤饼和可压缩滤饼	(11-12)
11.3.3 过滤基本方程的积分	(11-15)
11.3.4 离心过滤	(11-16)
11.4 沉降离心机中的流体流动	(11-18)
11.4.1 转鼓内的流体流动形式	(11-19)
11.4.2 颗粒的运动	(11-20)
思考题	(11-21)
本章符号说明	(11-21)