传递过程

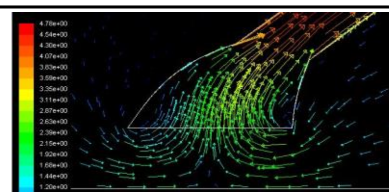
鲍　博　　　副教授

华东理工大学 化工学院

2022年秋季

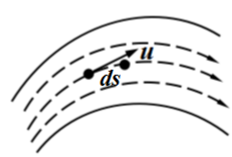
1.3.3 流体流动

1.3.3.1流体运动的表示方法



拉格朗日法

考察流场中流体质点的运动规律



$$\begin{cases} x = f_1(a,b,c,t) \\ y = f_2(a,b,c,t) \\ z = f_3(a,b,c,t) \end{cases}$$

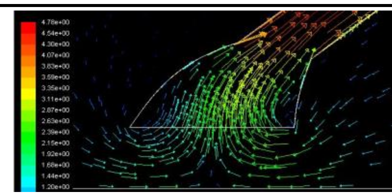
轨线

取不同a、b、c和t值，可得不同时刻全部流体质点在流动空间的位置分布，求一阶导数，可得流体质点的速度。

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt$$

穷追不舍

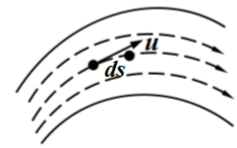
欧拉法



考察流场中流经固定点流体的变化规律

$$\begin{cases} u_x = F_1(x,y,z,t) \\ u_y = F_2(x,y,z,t) \\ u_z = F_3(x,y,z,t) \end{cases}$$

（速度分布）



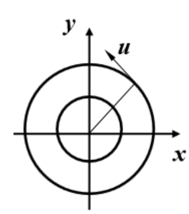
流线

同一时刻不同流体质点组成的曲线，特点是处于曲线上的流体质点的速度方向与该点切线方向一致。

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

守株待兔

例1-3 定常流动时的轨线与流线



已知流体速度分布 $\begin{cases} u_x = -ky \\ u_y = kx \\ u_z = 0 \end{cases}$

其中k为常数，求轨线和流线。

解：

轨线 $$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt$$

$$\frac{dx}{-ky} = dt \qquad \frac{dy}{kx} = dt$$

$$\frac{dx}{-ky} = \frac{dy}{kx} \qquad xdx + ydy = 0$$

$$x^2 + y^2 = C$$

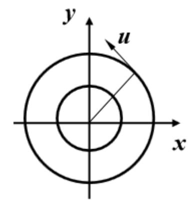
流线 $$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

$$\frac{dx}{-ky} = \frac{dy}{kx} \qquad xdx + ydy = 0$$

$$x^2 + y^2 = C$$

问题探讨：轨线与流线在定常流动中的关系

例1-3 定常流动时的轨线与流线



已知流体速度分布 $\begin{cases} u_x = -ky \\ u_y = kx \\ u_z = 0 \end{cases}$

其中k为常数，求轨线和流线。

解：

轨线 $\dfrac{dx}{u_x} = \dfrac{dy}{u_y} = \dfrac{dz}{u_z} = dt$

$$\frac{dx}{-ky} = dt \qquad \frac{dy}{kx} = dt$$

$$\frac{dx}{-ky} = \frac{dy}{kx} \qquad xdx + ydy = 0$$

$$x^2 + y^2 = C$$

流线 $\dfrac{dx}{u_x} = \dfrac{dy}{u_y} = \dfrac{dz}{u_z}$

$$\frac{dx}{-ky} = \frac{dy}{kx} \qquad xdx + ydy = 0$$

$$x^2 + y^2 = C$$

问题探讨：轨线与流线是两个意义不同的曲线，
只有在定常运动中两者重合

例1-4 流线的函数—流函数

已知平面流速度分布：$\begin{cases} u_x = f_1(x, y) \\ u_y = f_2(x, y) \\ u_z = 0 \end{cases}$

二维流线方程：$\dfrac{dx}{u_x} = \dfrac{dy}{u_y}$

$$-u_y dx + u_x dy = 0$$

如果有一函数 ψ

全微分 $d\psi = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$ 令

则有 $\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$ ψ 流函数

$$d\psi = 0$$

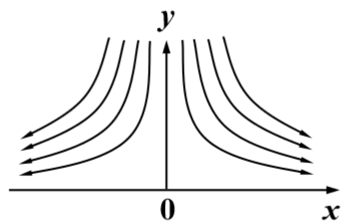
$\psi = C$ 流线簇

令流函数ψ等于常数，就是流线

已知一流场的流函数为： $\psi = axy$

令 $\psi = C$ $\quad axy = C$

流线 $\quad xy = C'$



$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax \qquad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ay$$

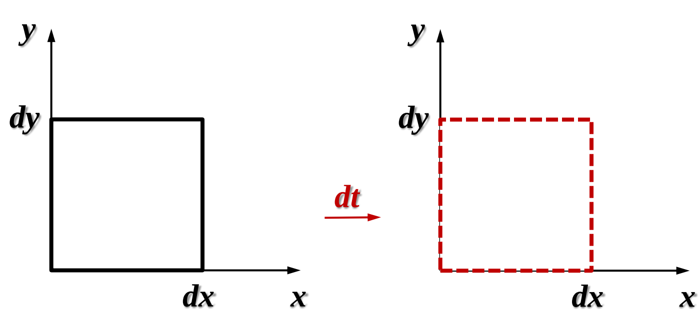
该流场的速度分布为：
$$\begin{cases} u_x = ax \\ u_y = -ay \\ u_z = 0 \end{cases}$$

<u>问题探讨</u>：某一特定时刻，流场内流线可以相交吗？

1.3.3.2流体微团运动形式

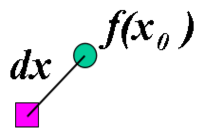
平移、线变形、角变形、旋转

平移



流体微团只产生位移

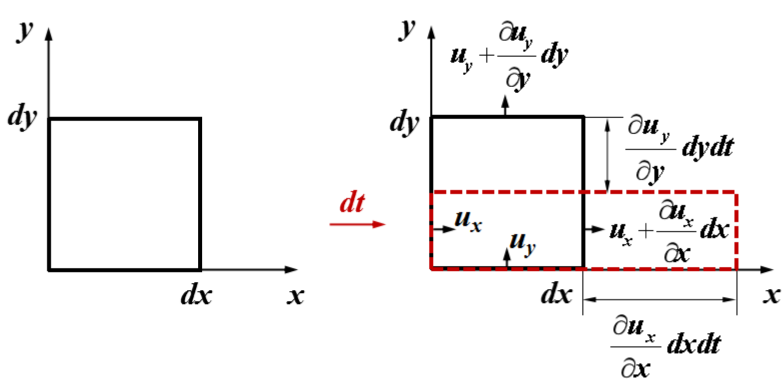
泰勒级数



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)dx + \frac{f''(x_0)}{2!}dx^2 + \cdots$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}dx$$

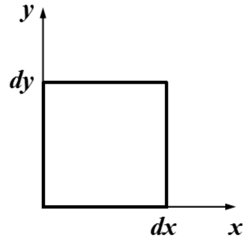
线变形

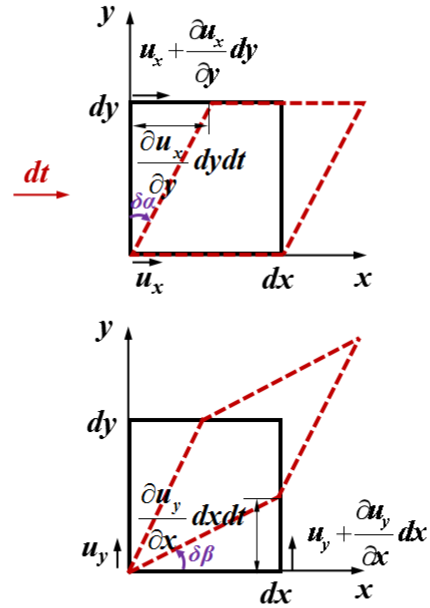


单位时间内长度的变化量与原长度之比，称**线变形速率**

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x}dxdt}{dxdt} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

角变形





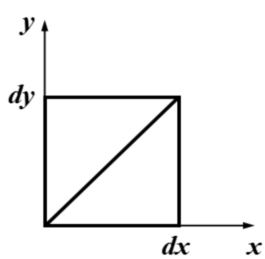
$$\delta\alpha = -arctg\frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}dydt}{dy} \approx -\frac{\partial u_x}{\partial y}dt$$

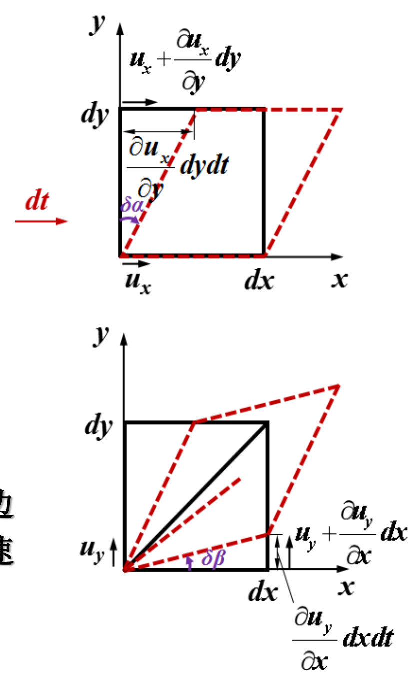
$$\delta\beta = arctg\frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}dxdt}{dx} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}dt$$

单位时间内夹角的平均变化量，称**角变形速率**，即**剪切速率**

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{-\delta\alpha+\delta\beta}{2dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

旋转





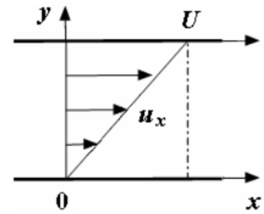
$$\delta\alpha = -arctg\frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}dydt}{dy} \approx -\frac{\partial u_x}{\partial y}dt$$

$$\delta\beta = arctg\frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}dxdt}{dx} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}dt$$

单位时间内，逆时针方向，两直角边旋转角度的平均变化量，称旋转角速度，即**夹角平分线**的旋转速率

$$\omega_z = \frac{\delta\alpha+\delta\beta}{2dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

例1-5 简单剪切运动



已知：平板间流体的速度分布

$$u_x = cy$$

求：流场中流体微团的剪切速率$\dot{\gamma}$和旋转角速度ω。

解： 剪切速率

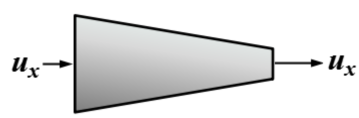
$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}c$$

旋转角速度

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}c$$

问题探讨 线变形、角变形和旋转的起因？

1.3.3.3加速度和随体导数



$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$ 全导数

$$\frac{dx}{dt} = u_x \qquad \frac{dy}{dt} = u_y \qquad \frac{dz}{dt} = u_z$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z$$

流体加速度：

随体导数

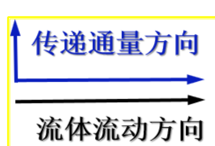
$$a_x = \frac{Du_x}{Dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

局部导数

对流导数

1.4 传递机理

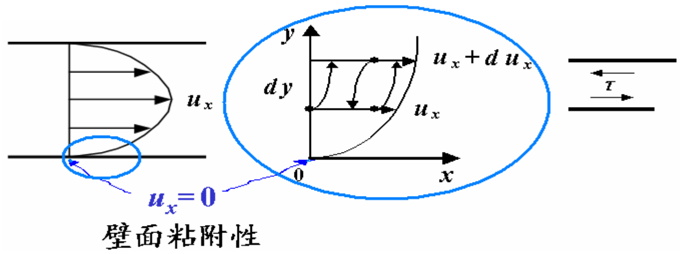
- 分子传递（由分子的随机热运动引起）
  - 导热
  - 分子扩散
  - 层流
- 涡流传递 —— 湍流（由微团的脉动引起）
- 层流、湍流 → 对流传递
  - 对流传热
  - 对流传质
  - 主体流动传递



问题探讨　以上传递与流动方向之间的关系？

1.5 分子传递现象

1.5.1 牛顿粘性定律



流体层相对运动产生了内摩擦力τ，宏观表现为流体的“粘性”。

牛顿粘性定律 $$\tau_{yx} = \pm\mu\frac{du_x}{dy}$$

τ_{yx} ： 剪切应力 [N/m^2]

μ ： 粘度 [N·s / m ^{2}]

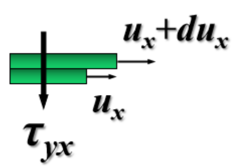
$\frac{du_x}{dy}$ ： u_x在 y方向上的梯度 $\left[\frac{\text{m/s}}{\text{m}}\right]$

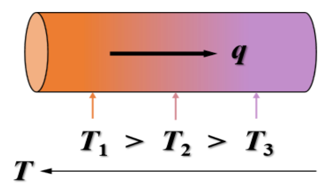
问题探讨 剪切应力（τ）与动量（mu）之间有何联系？

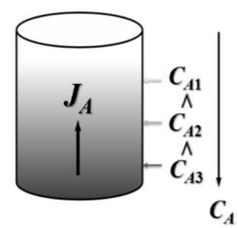
回顾：传递通量

单位时间、通过单位面积的传递特征量称：

动量通量	热量通量	质量通量
$\tau_{yx}:\dfrac{kg\cdot m/s}{m^2\cdot s}$	$q:\dfrac{J}{m^2\cdot s}$	$J_A:\dfrac{kmol}{m^2\cdot s}$







注意：需要注意的是，作为动量通量，τ_{yx}的方向总是垂直于流体流动的方向，并指向速度梯度的相反方向；如作为剪切应力，τ_{yx}与流体流动的方向平行

牛顿流体与非牛顿流体

凡符合牛顿粘性定律的流体，称**牛顿流体**，不符合的称**非牛顿流体**。

牛顿流体：水、空气、甘油、天然气等

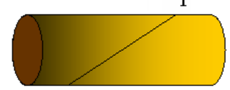
非牛顿流体
- 幂律流体
  - 假塑性流体：CMC溶液、油墨等（特征：剪切稀化）
  - 胀塑性流体：淀粉糊、阿拉伯树胶等（特征：剪切稠化）
- 宾汉流体：牙膏、雪花膏等
- 凯森流体：血液、油漆等

1.5.2 傅里叶导热定律

傅里叶定律 $q_x = -k\dfrac{dT}{dx}$

q_x：导热通量 [J/m² s]

k ：热导率 [W/m K]

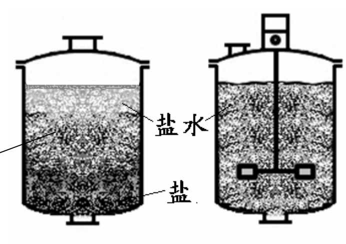


$\dfrac{dT}{dx}$：温度梯度 [K/m]

负号表明热量由高温传向低温。

1.5.3 费克扩散定律

$$J_{Ay} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dy}$$



J_{Ay} ：扩散通量 [kmol /m ². s]

D_{AB}：扩散系数 [m ²/s]

$\dfrac{dC_A}{dy}$：浓度梯度 $\left[\dfrac{\text{kmol/m}^3}{\text{m}}\right]$

若浓度用 ρ_A 表示

$$j_{Ay} = -D_{AB}\frac{d\rho_A}{dy}$$

1.6 类似现象

费克分子扩散定律 $j_{Ay}=-D_{AB}\frac{d\rho_A}{dy}$

傅里叶导热定律 $q_x=-k\frac{dT}{dx}$

牛顿粘性定律 $\tau_{yx}=-\mu\frac{du_x}{dy}$

1.6.1 量纲分析

$$j_{Ay}=-D_{AB}\frac{d\rho_A}{dy}$$

$\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2\cdot s}}\right]$ 质量通量　$\left[\mathrm{m^2/s}\right]$ 扩散系数　$\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right]$ 质量浓度

$$q_y=-k\frac{dT}{dy}=-\frac{k}{\rho C_P}\frac{d\left(\rho C_P T\right)}{dy}=-a\frac{d\left(\rho C_P T\right)}{dy}$$

$\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^2\cdot s}}\right]$ 热量通量　$\left[\mathrm{m^2/s}\right]$ 导温系数　$\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3}}\right]$ 热量浓度

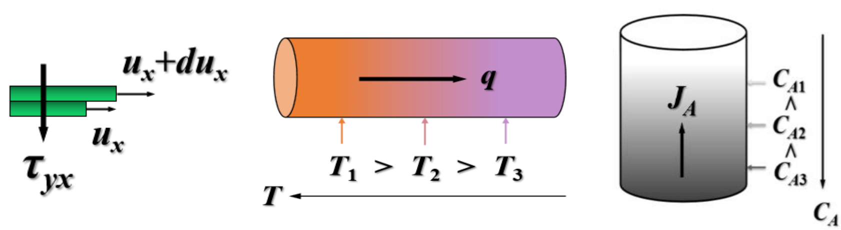
$$\tau_{yx}=-\mu\frac{du_x}{dy}=-\frac{\mu}{\rho}\frac{d\left(\rho u_x\right)}{dy}=-\nu\frac{d\left(\rho u_x\right)}{dy}$$

$\left[\frac{\mathrm{kg\cdot m/s}}{\mathrm{m^2\cdot s}}\right]$ 动量通量　$\left[\mathrm{m^2/s}\right]$ 粘性系数　$\left[\frac{\mathrm{kg\cdot m/s}}{\mathrm{m^3}}\right]$ 动量浓度

$$\left.\begin{array}{c}\text{动量}\\\text{热量}\\\text{质量}\end{array}\right\}\text{通量}=\left.\begin{array}{c}\text{动量}\\\text{热量}\\\text{质量}\end{array}\right\}\text{系数}\times\left.\begin{array}{c}\text{动量}\\\text{热量}\\\text{质量}\end{array}\right\}\text{浓度梯度}$$

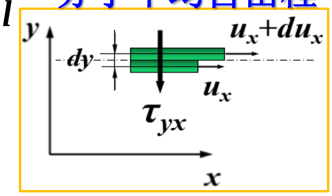
$$\text{传递通量}=\frac{\text{浓度梯度}}{\dfrac{1}{\text{扩散系数}}}=\frac{\text{推动力}}{\text{阻力}}$$

传递现象的本质



分子热运动 → 碰撞 → 交换 → 完成传递

1.6.2 分子运动理论



对理想气体，相邻两层气体间距 $dy=\bar{l}$

设**单位体积**气体中分子数为 n，

其中 沿 y方向运动有：$\frac{1}{3}n$

若分子平均速度为 $\bar{\upsilon}$，

则**单位时间**、**单位面积**、沿 y方向运动的分子数为

$$\frac{\frac{1}{3}n\bar{\upsilon}dtA}{dtA}=\frac{1}{3}n\bar{\upsilon}$$

令分子质量为 m，则 y方向传递的净动量为：

$$\frac{du_x}{dy}=\frac{du_x}{\bar{l}}$$

$$\rho=nm$$

$$\tau_{yx}=-\frac{1}{3}n\bar{\upsilon}m\left(u_x+du_x\right)+\frac{1}{3}n\bar{\upsilon}mu_x=-\frac{1}{3}n\bar{\upsilon}mdu_x$$

$$\tau_{yx}=-\frac{1}{3}\rho\bar{\upsilon}\bar{l}\frac{du_x}{dy}=-\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{l}\frac{d\left(\rho u_x\right)}{dy}=-\nu\frac{d\left(\rho u_x\right)}{dy}$$

$$\boxed{\nu=\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{l}}$$

布置作业

1.证明分子热运动引起的热量传递表达式为：

$$q_y=-a\frac{d\left(\rho C_pT\right)}{dy}$$

式中：$a=\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{l}$

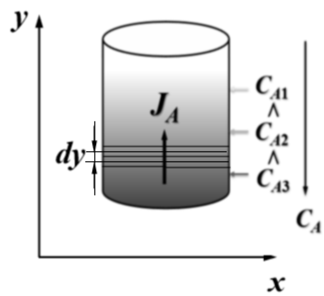
$\bar{\upsilon}$ 分子平均速度

$\bar{l}$ 分子平均自由程

同样类似地，在 y 方向传递的净质量为：

$$j_{Ay}=-\frac{1}{3}(n_A+dn_A)m\bar{\upsilon}+\frac{1}{3}n_Am\bar{\upsilon}=-\frac{1}{3}m\bar{\upsilon}dn_A=-\frac{1}{3}\bar{\upsilon}d(n_Am)$$

$$\rho_A=n_Am \qquad \frac{d\rho_A}{dy}=\frac{d\rho_A}{\bar{l}}$$



$$j_{Ay}=-\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{l}\,\frac{d\rho_A}{dy}=-D_{AB}\frac{d\rho_A}{dy}$$

$$\boxed{D_{AB}=\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{l}}$$

$$\rho_A=M_AC_A$$

$$j_A=M_AJ_A$$

$$J_{Ay}=-D_{AB}\frac{dC_A}{dy}$$

$$\boxed{\nu=\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{l}}$$

$$\boxed{a=\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{l}}$$

$$\boxed{D_{AB}=\frac{1}{3}\bar{\upsilon}\bar{l}}$$

分子热运动决定了三传之间的类似，这对传递现象的研究奠定了基础。