第六章　一阶电路

● 重点

1. 动态电路方程的建立及初始条件的确定；

熟练掌握

一阶电路的计算方法

三要素法（直流激励）

2. 一阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应求解；

3. 理解一阶电路的阶跃响应和冲击响应。

下 页

§6-1一阶电路及其电路方程

1. 动态电路

一. 定义：含有动态元件(L,C)、需用微分方程描述的电路。

电阻电路 $\xrightarrow[\text{元件约束：U=RI}]{\text{拓扑约束：KCL,KVL}}$ 建立代数方程

动态电路 $\xrightarrow{\text{拓扑约束：KCL,KVL}}$ 建立微分方程

元件约束：$u_R = R i$

$u_L = L\, di_L/dt$

$i_C = C\, du_C/dt$

二. 动态电路的分类

以微分方程的阶数分
- 一阶动态电路(含有一个动态元件)
- 二阶动态电路(含有二个独立动态元件)
- n阶动态电路(含有n个独立动态元件)

二阶以上的动态电路称为高阶动态电路

三. 动态电路的工作状态

物理系统的工作状态
- 稳态：描述系统工作状态的变量为常数或具有固定周期的周期函数。
- 暂态：非稳定状态(过渡过程)

动态电路的工作状态亦分为稳态和暂态(过渡过程)。

上 页 下 页

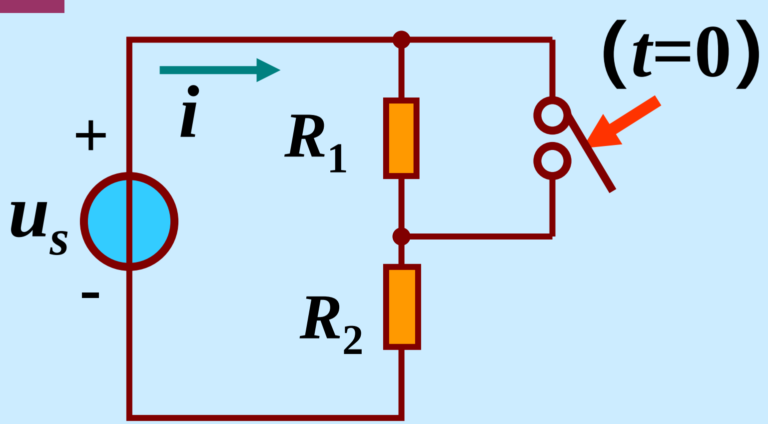
原稳态 → 新稳态

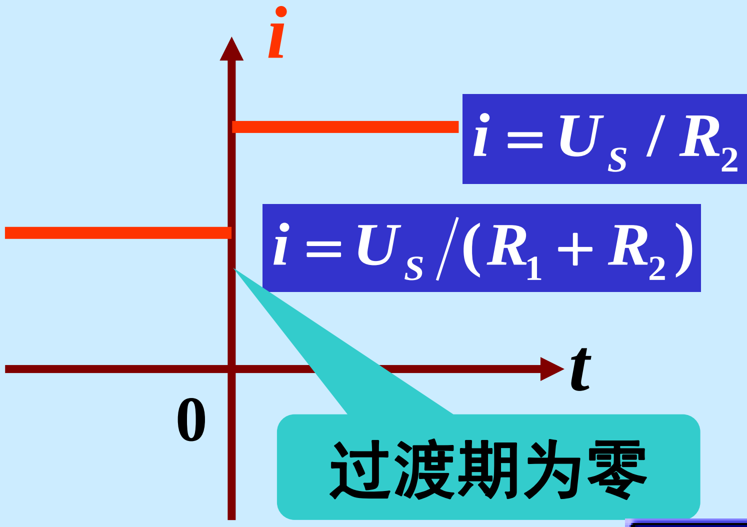
过渡过程(暂态)

过渡过程：当动态电路状态发生改变时（换路）,电路由一个稳态过渡到另一个稳态需要经历的过程。

换路 → 电路结构、状态发生变化 $\begin{cases}\text{支路接入或断开}\\\text{电路参数变化}\end{cases}$

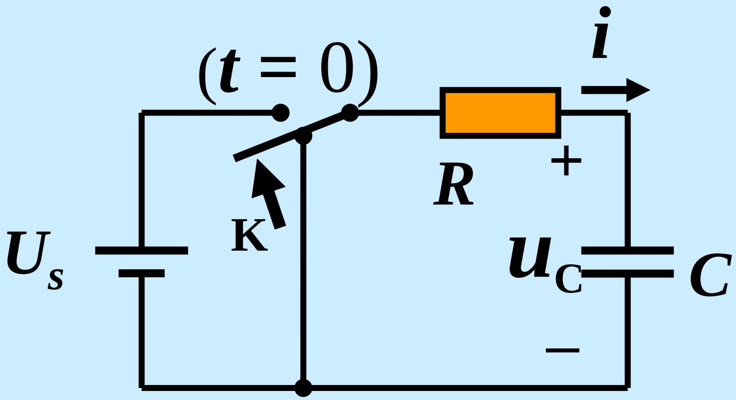
例 电阻电路





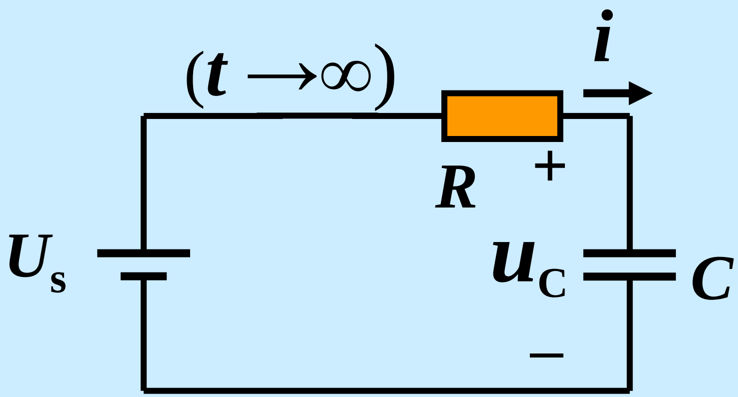
例 **电容电路**

K未动作前，电路处于稳定状态

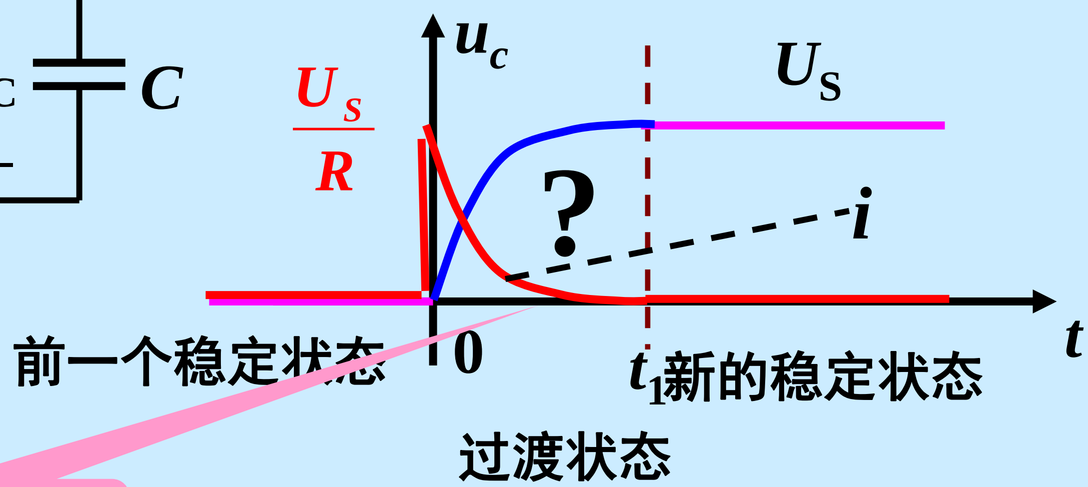


$$i = 0\ ,\quad u_C = 0$$

K接通电源后很长时间，电容充电完毕，电路达到新的稳定状态



$$i = 0\ ,\quad u_C = U_s$$



有一过渡期

过渡过程产生的原因

（1）内因：电路内部含有储能元件 L 、C，电路在换路时能量发生变化，而能量的储存和释放都需要一定的时间来完成。

$$p = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

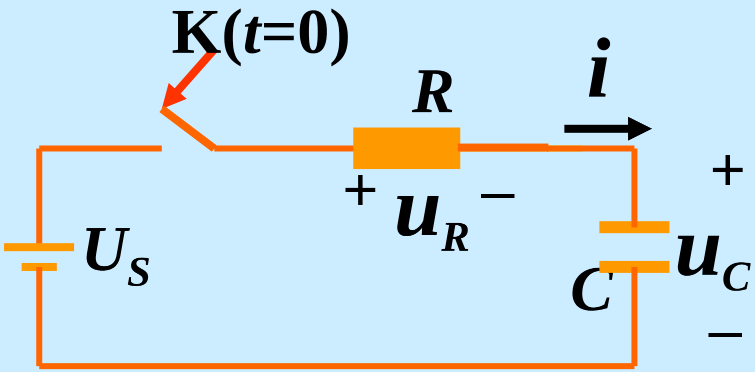
(2). 外因： 电路结构、参数突然发生变化----换路

四. 稳态分析和暂态分析的区别

稳　态	暂　态
换路前及 换路发生很长时间后	换路刚发生后的一段时间
i 、u 不随时间变化	i_L 、u_C 随时间变化
代数方程组描述电路	微分方程组描述电路

2. 一阶电路方程的求解

类似于 $a\dfrac{df}{dt}+bf=c$



$u_C(0^-)=$ Uo

列方程：

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S$$

非齐次线性常微分方程

解答形式为：

$$u_c=u_c'+u_c''$$

齐次方程通解

非齐次方程特解

u_C'' ⟹ **特解，稳态分量**

$RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=U_S$ **的特解** ⟶ $u_C''=U_S$

与输入激励的变化规律有关

u'_C → 通解（暂态分量）

$RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$ 的通解 → $u'_C=Ae^{-\frac{t}{RC}}$

特征方程 $RCp+1=0$ 特征根 $p=-\dfrac{1}{RC}$

则 $u_C=Ae^{pt}=Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

变化规律由电路参数和结构决定

全解 $u_C(t)=u'_C+u''_C=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$

由初始条件 $u_C(0^+)$=Uo 定积分常数 A

$u_C(0^+)=A+U_S=$ Uo → A= Uo $-U_S$

$$u_C=U_S+Ae^{\frac{-t}{\tau}}=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geq 0$$

上页
下页

6.2 三要素法分析一阶电路

一阶电路的数学模型是一阶微分方程：

$$a\frac{df}{dt}+bf=c$$

其解答一般形式为：

$$f(t)=f(\infty)+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

令 $t=0^+$

$$f(0^+)=f(\infty)+A \longrightarrow A=f(0^+)-f(\infty)$$

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

三要素 $\begin{cases} f(\infty) & \text{稳态解} \\ f(0^+) & \text{初始值} \\ \tau & \text{时间常数} \end{cases}$

稳态解 → 用t→∞的新稳态电路求解

初始值 → 用0^+时刻等效电路求解

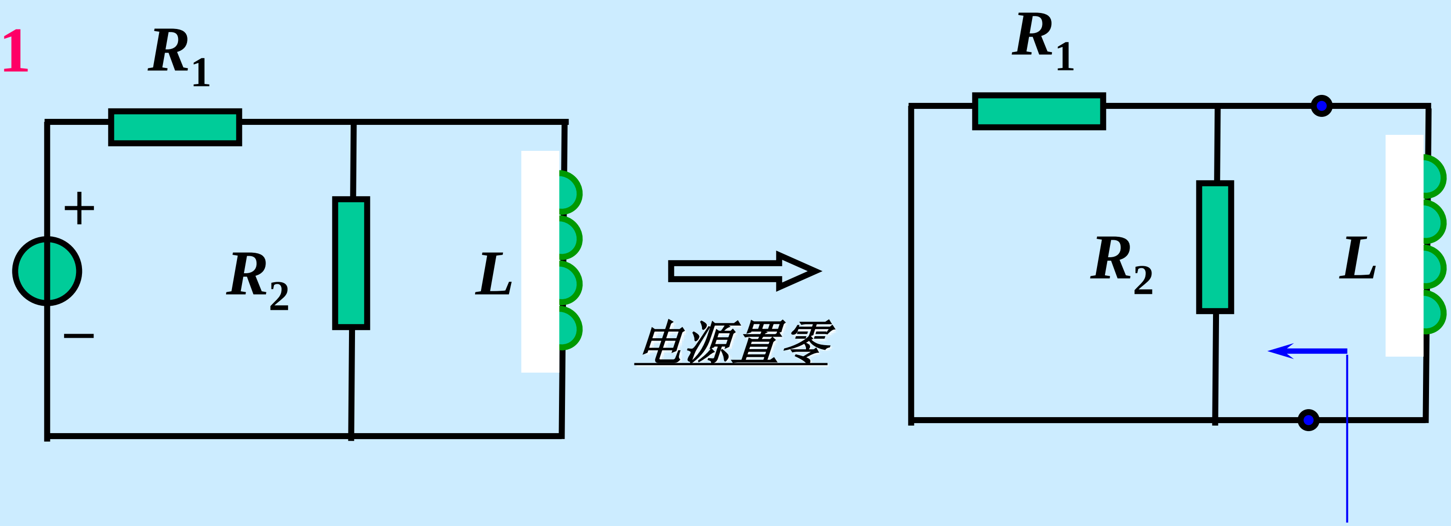
三要素法：可以跳过电路微分方程的过程，直接求出电路的三个要素，并写出响应的数学表达式。

1 时间常数τ的计算：

*RC*电路　$\tau = R_{eq}C$ ，　*RL*电路　$\tau = L/R_{eq}$

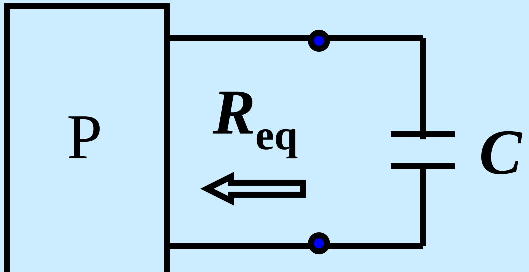
*R*为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。

例1



$$\tau = L / R_{eq} = L / (R_1 // R_2)$$

例2



$$\tau = R_{eq}C$$

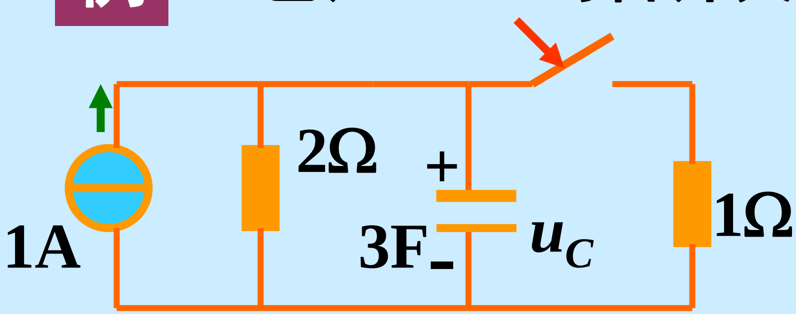
上 页　下 页

2.稳态解：

电路换路后，达到新稳态时，电路中的电压和电流值，此时电路中的电压和电流不再变化，为常量。

计算时，**电容开路等效，电感用短路等效。**可把电路成为不含动态元件的电阻电路，用电阻电路的求解方法分析。

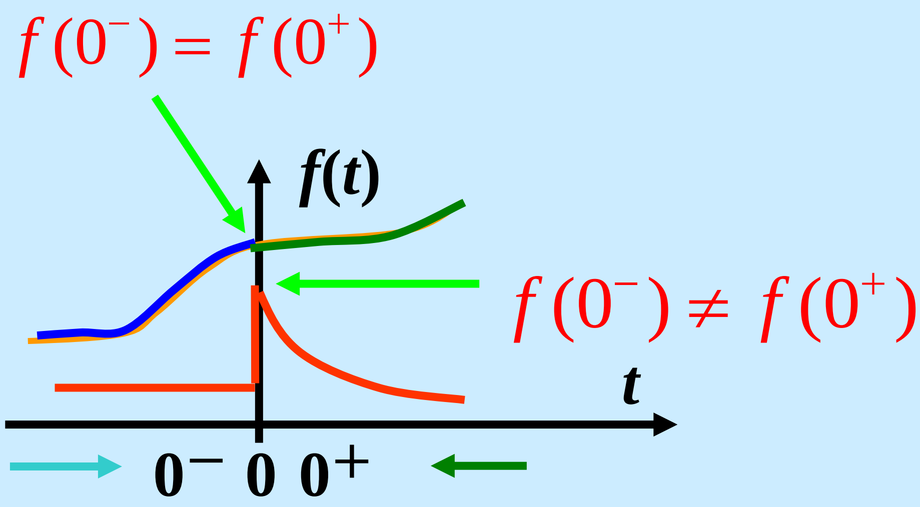
例 已知：t=0时合开关，求换路后的u_C稳态解。



$$u_C(\infty)=(2//1)\times 1=0.667\text{V}$$

3. 初始值

(1) $t = 0^+$与$t = 0^-$的概念



认为换路在 t=0时刻进行

0^-　换路前一瞬间

0^+　换路后一瞬间

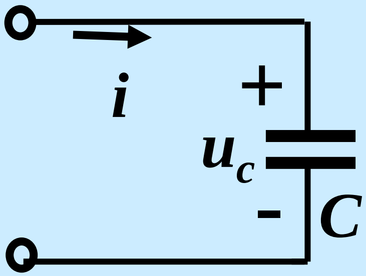
$$f(0^-) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t<0}} f(t)$$

$$f(0^+) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} f(t)$$

电路的初始条件为: $t = 0^+$时u ， i 值即$u(0^+)$,$i(0^+)$等

(2) 电容的初始条件

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$



$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$t = 0^+$时刻 $\quad u_C(0^+)=u_C(0^-)+\cancelto{0}{\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i(\xi)\mathrm{d}\xi}$

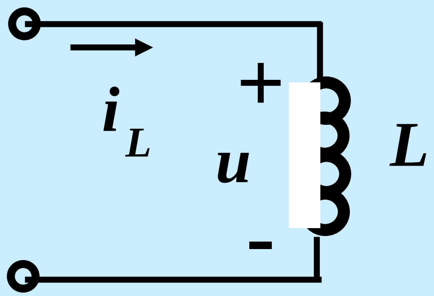
当$i(\xi)$为有限值时 $\quad \boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-)}$

结论

换路瞬间，若电容电流保持为有限值，

则电容电压换路前后保持不变。

(3) 电感的初始条件



$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0^-}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{t}u(\xi))\mathrm{d}\xi$$

$$=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{t}u(\xi)d\xi$$

$t=0^+$时刻

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)+\cancelto{0}{\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}u(\xi)d\xi}$$

当u为有限值时

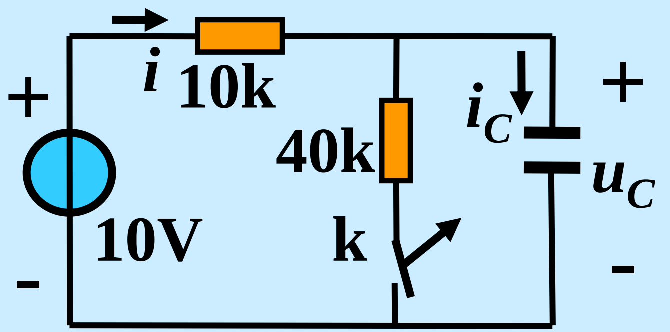
$$\boxed{i_L(0^+)=i_L(0^-)}$$

结论

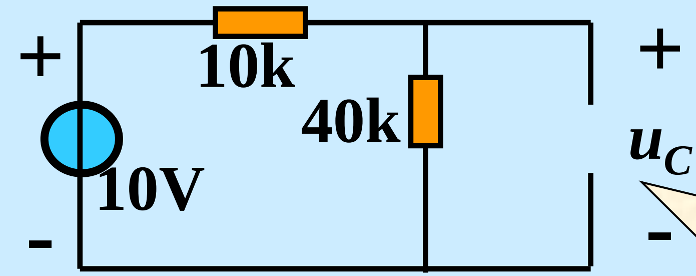
换路瞬间，若电感电压保持为有限值，
则电感电流换路前后保持不变。

（4）电路初始值的确定

例1 求 $i_C(0^+)$， $i(0+)$



(1) 由0^-原稳态电路求 $u_C(0^-)$或$i_L(0^-)$

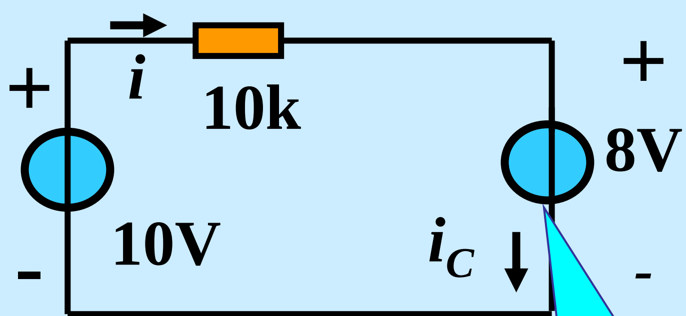


电容开路

$$u_C(0^-)=8V$$

(2) 由换路定律

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=8V$$



0^+时刻等效电路

电容用电压源替代

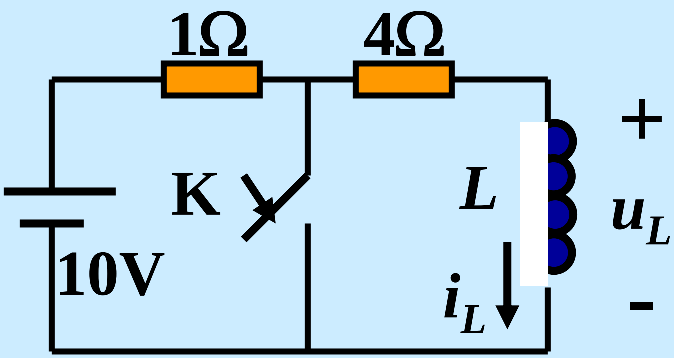
(3) 由0^+等效电路求 $i_C(0^+)$

$$i(0^+)=i_C(0^+)=\frac{10-8}{10}=0.2\text{mA}$$

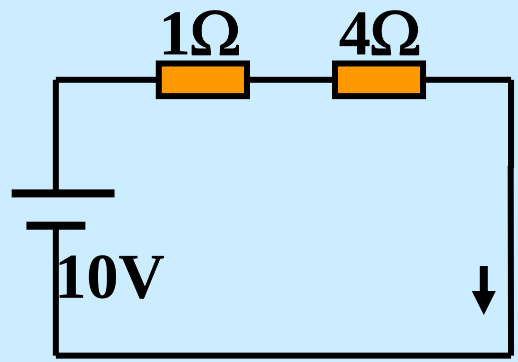
$$i_C(0^-)=0 \neq i_C(0_+)$$

上 页 下 页

例 2　$t=0$时闭合开关k，求 $u_L(0^+)$



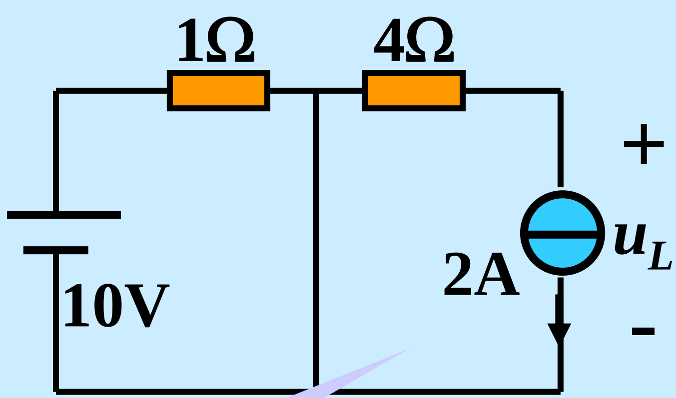
解　先求 $i_L(0^-)$



电感短路

$$i_L(0^-)=\frac{10}{1+4}=2A$$

0+时刻电路



电感用电流源替代

$$\because u_L(0^-)=0 \qquad \therefore \cancel{u_L(0^+)=0}$$

由换路定律:

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=2A$$

$$u_L(0^+)=-2\times4=-8V$$

求初始值的步骤:

1. 由换路前电路（原稳定状态）求$u_C(0^-)$和$i_L(0^-)$；

2. 由换路定律得 $u_C(0^+)$ 和 $i_L(0^+)$。

3. 画0^+时刻等效电路。

   a. 换路后的电路

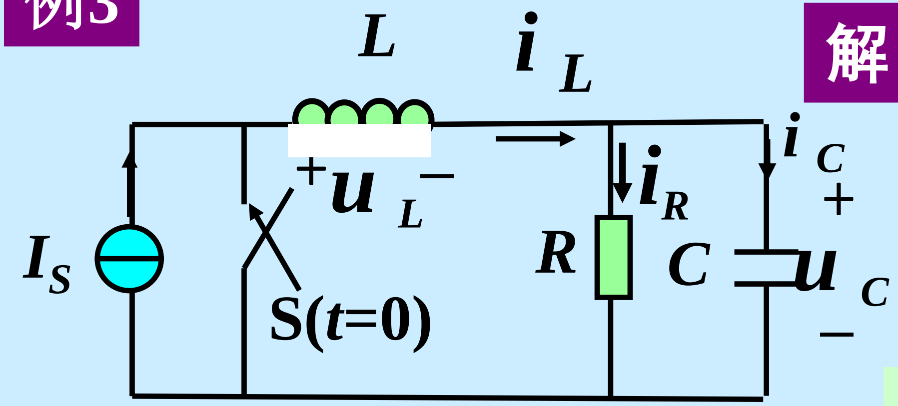
   b. 电容用电压源替代。电感用电流源替代。

   （其中电源的值取0^+时刻值，方向与原假定的电容电压、电感电流方向相同）。

4. 由0^+时刻电路求所需各支路电流或电压变量的0^+值。

例3

求 $i_C(0^+)$，$u_L(0^+)$, $i_R(0+)$

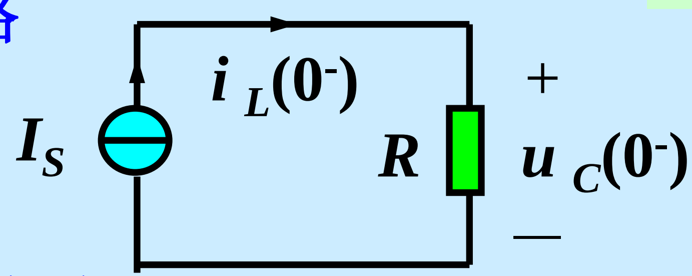


解：

(1) 由0⁻电路求 $i_L(0^-)$、$u_C(0^-)$

$$i_L(0^-) = I_S \quad 、\quad u_C(0^-) = RI_S$$

0⁻电路

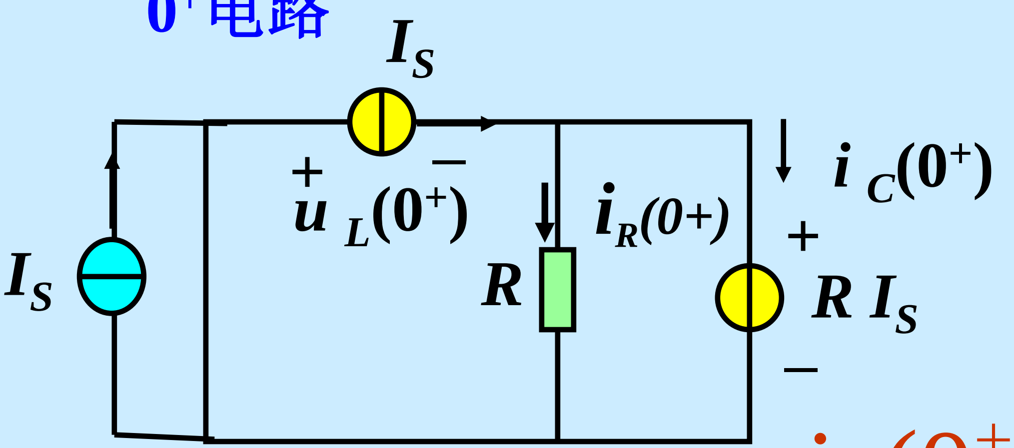


(2) 由换路定律求 $i_L(0^+)$、$u_C(0^+)$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_S$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = RI_S$$

0⁺电路



(3) 由0⁺电路求解

$$u_L(0^+) = -RI_S$$

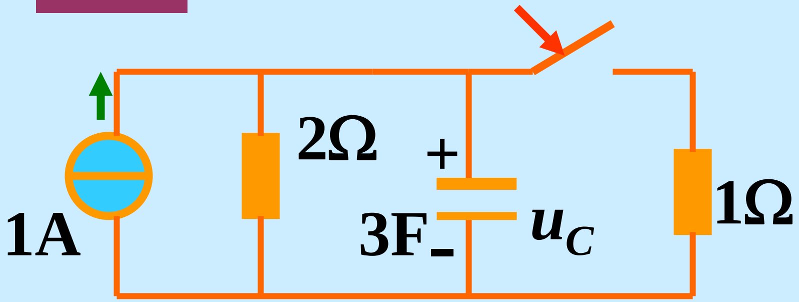
$$i_C(0^+) = I_s - \frac{RI_S}{R} = 0$$

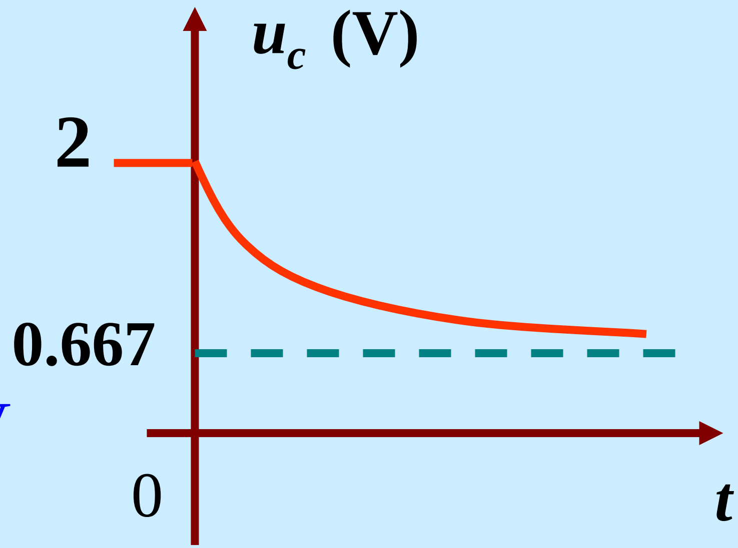
$$i_R(0^+) = I_S$$

#6.7，6.8

三要素法求解一阶电路例题：

例1 已知：t=0时合开关，求换路后的$u_C(t)$ 。





解

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=2\text{V}$$

$$u_C(\infty)=(2//1)\times1=0.667\text{V}$$

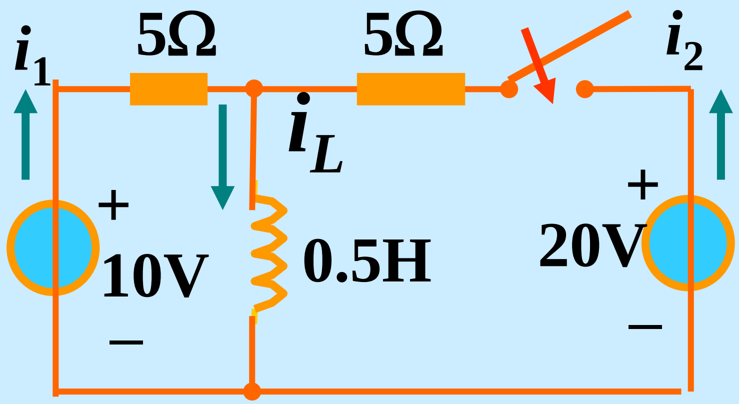
$$\tau=R_{eq}C=\frac{2}{3}\times3=2\text{ s}$$

$$u_c(t)=u_c(\infty)+[u_c(0^+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C=0.667+(2-0.667)e^{-0.5t}=0.667+1.33e^{-0.5t}\quad t\geq0$$

例2 t=0时 ,开关闭合，求t>0后的i_L、i_1、i_2

解1 三要素为：



$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=10/5=2A$$

$$i_L(\infty)=10/5+20/5=6A$$

$$\tau=L/R=0.6/(5//5)=1/5s$$

应用三要素公式 $$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0^+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(t)=6+(2-6)e^{-5t}=6-4e^{-5t}\quad t\geq 0$$

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=0.5\times(-4e^{-5t})\times(-5)=10e^{-5t}V$$

$$i_1(t)=(10-u_L)/5=2-2e^{-5t}A$$

$$i_2(t)=(20-u_L)/5=4-2e^{-5t}A$$

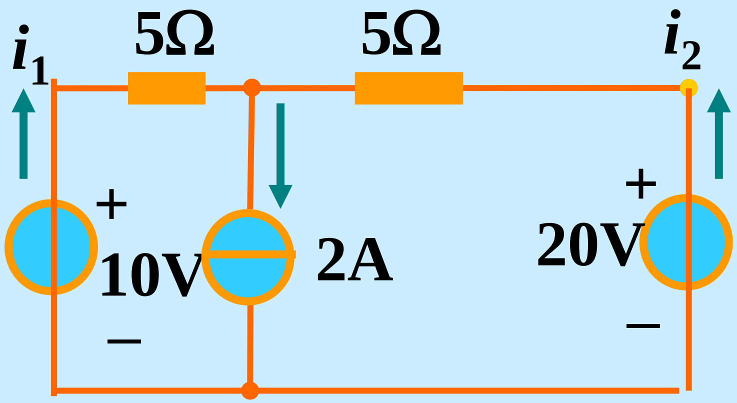
解2

三要素为：

$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=10/5=2A$$

$$i_L(\infty)=10/5+20/5=6A$$

$$\tau=L/R=0.6/(5//5)=1/5s$$



0⁺等效电路

$$i_1(0^+)=\frac{(10-20)}{10}+1=0A$$

$$i_1(\infty)=10/5=2A$$

$$i_2(0^+)=\frac{(20-10)}{10}+1=2A$$

$$i_2(\infty)=20/5=4A$$

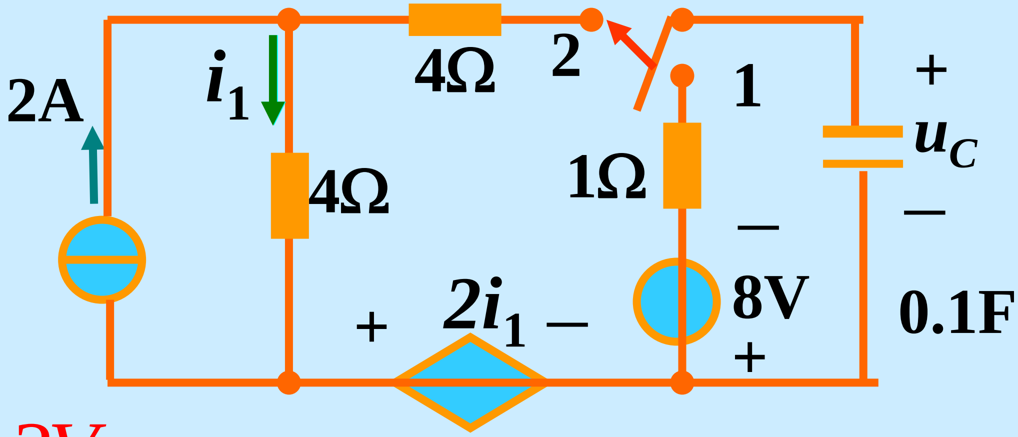
$$i_L(t)=6+(2-6)e^{-5t}=6-4e^{-5t}\quad t\geq 0$$

$$i_1(t)=2+(0-2)e^{-5t}=2-2e^{-5t}A$$

$$i_2(t)=4+(2-4)e^{-5t}=4-2e^{-5t}A$$

例3 已知：t=0时开关由1→2，求换路后的$u_C(t)$。

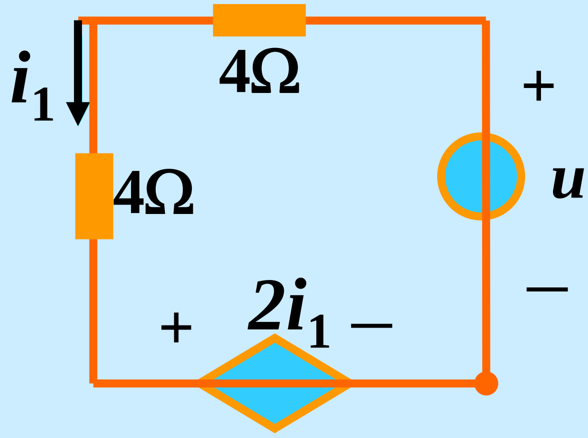
解 三要素为：



$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = -8V$$

$$u_C(\infty) = 4i_1 + 2i_1 = 6i_1 = 12V$$

$$\tau = R_{eq}C = 10 \times 0.1 = 1s$$



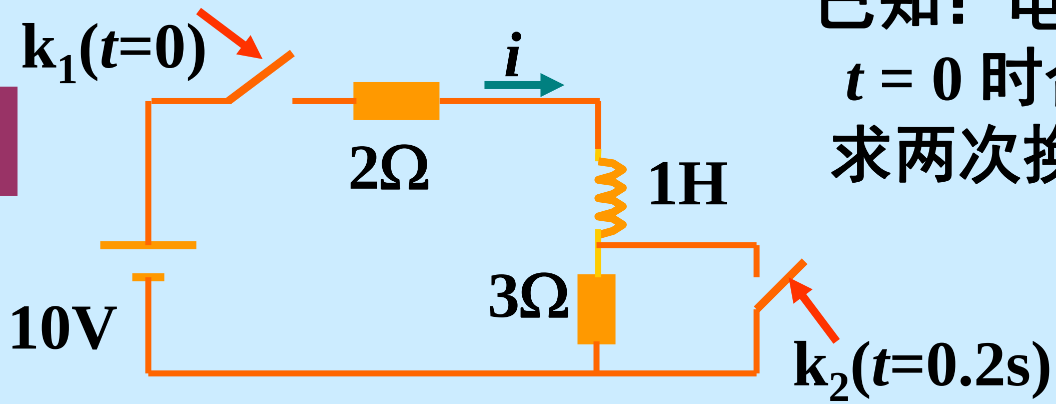
$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0^+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u = 10i_1 \rightarrow$$

$$R_{eq} = u / i_1 = 10\Omega$$

$$u_c(t) = 12 + [-8-12]e^{-t}$$

$$= 12 - 20e^{-t}V$$



例4

已知：电感无初始储能

$t = 0$ 时合k_1，$t = 0.2$s时合k_2

求两次换路后的电感电流$i(t)$。

解

$0 < t < 0.2s$

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

$$\tau_1 = L / R_{eq} = 1/5 = 0.2\ \text{s}$$

$$i(\infty) = 10/5 = 2\text{A}$$

$$i(t) = 2 - 2e^{-5t}\ \text{A}$$

$t > 0.2s$

$$i(0.2^-) = 2 - 2e^{-5\times 0.2} = 1.26$$

$$i(0.2^+) = 1.26A$$

$$\tau_2 = L / R_{eq} = 1/2 = 0.5$$

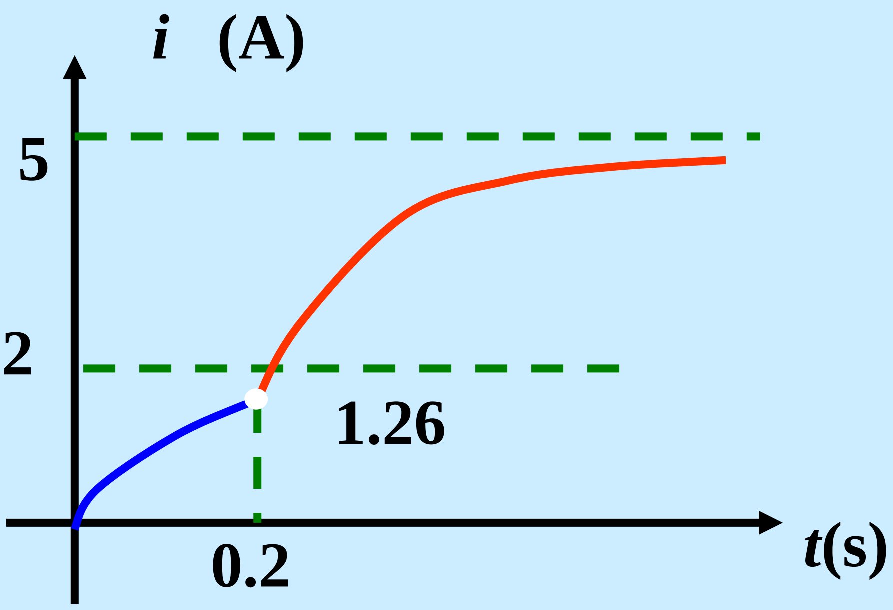
$$i(\infty) = 10/2 = 5A$$

$$i(t) = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)}\ \text{A}$$

$$f(t) = f(\infty) + \left[f(t_0^{\ +}) - f(\infty) \right] e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (t>t_0)$$

上 页　下 页

$$\begin{cases} i = 2 - 2e^{-5t} & (0 < t \le 0.2\text{s}) \\ i = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)} & (t \ge 0.2\text{s}) \end{cases}$$



6.3 一阶电路的 分析方法

本章采用

1. 经典法　　（时域分析法）

（1）根据KVl、KCL和VCR建立以时间为变量的微分方程

（2）求解微分方程

激励 $u_s(t)$　　　　响应 $i(t)$

$$a_n \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = u_s \qquad t \geq 0$$

则解形式为　$i(t) = Ae^{pt} + K$

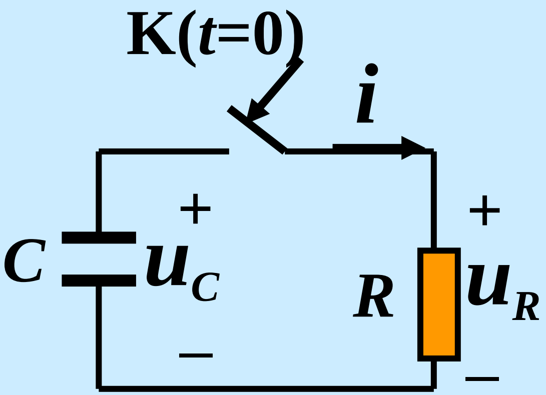
2. 拉普拉斯变换法　　（复频域分析法）

6.3.1 一阶电路的零输入响应

零输入响应 → 换路后外加激励(独立源)为零，仅由动态元件初始储能所产生的电压和电流。

1. *RC*电路的零输入响应

已知 $u_C(0^-)=U_0$



$$-u_R+u_C=0$$

$$\begin{cases} i=-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ u_R=Ri \end{cases}$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0 \\ u_C(0^+)=U_0 \end{cases}$$

特征方程 $RCp+1=0$ 特征根 $p=-\dfrac{1}{RC}$

则 $u_C=\mathrm{A}e^{pt}=\mathrm{A}e^{-\frac{1}{RC}t}$

上 页 下 页

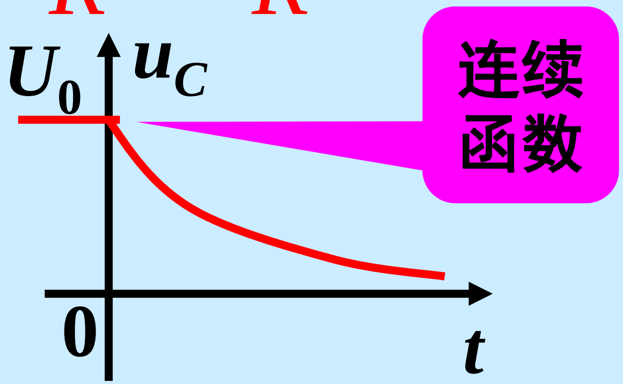
$$u_c = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

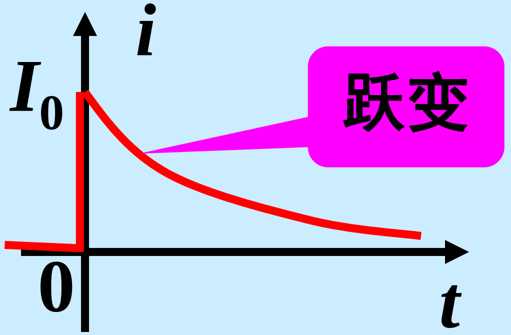
代入初始值 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=U_0$

$$\rightarrow A=U_0 \rightarrow$$

$$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

$$i = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$





（1）电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；

(2)其衰减快慢与RC有关；令 $\tau = RC$ ，称τ为一阶电路的时间常数

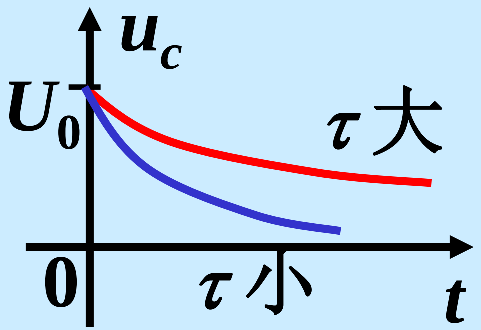
$$\tau = RC$$

$$[\tau]=[RC]=[\text{欧}][\text{法}]=[\text{欧}]\left[\frac{\text{库}}{\text{伏}}\right]=[\text{欧}]\left[\frac{\text{安秒}}{\text{伏}}\right]=[\text{秒}]$$

时间常数 τ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大 → 过渡过程时间长

τ小 → 过渡过程时间短

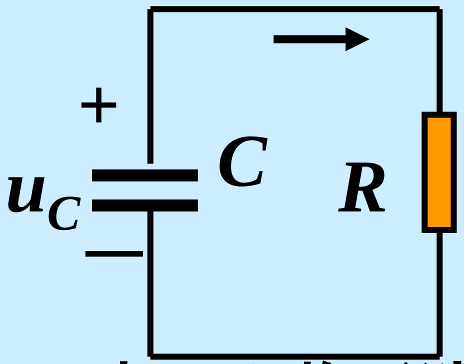


t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
	U_0	$0.368\ U_0$	$0.135\ U_0$	$0.05\ U_0$	$0.007\ U_0$

工程上认为，经过 3τ - 5τ，过渡过程结束。

τ：电容电压**衰减到**原来电压36.8%所需的时间。

能量关系 → 电容不断释放能量被电阻吸收，直到全部消耗完毕.



设$u_C(0^+)=U_0$

电容放出能量：→ $\frac{1}{2}CU_0^2$

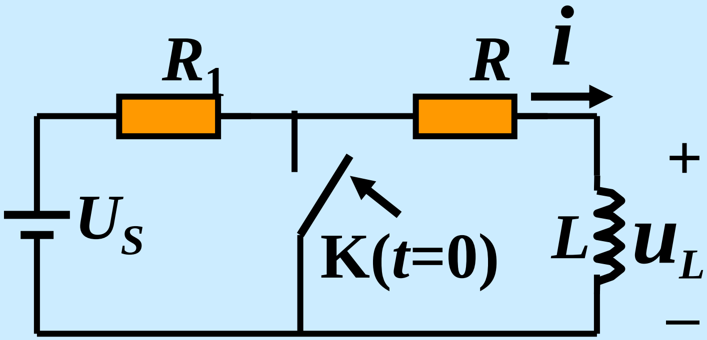
电阻吸收（消耗）能量：→

$$W_R=\int_0^{\infty} i^2 R dt \quad =\int_0^{\infty} \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R dt$$

$$=\frac{U_0^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt \quad =\frac{U_0^2}{R}\left(-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\Big|_0^{\infty} \quad =\frac{1}{2}CU_0^2$$

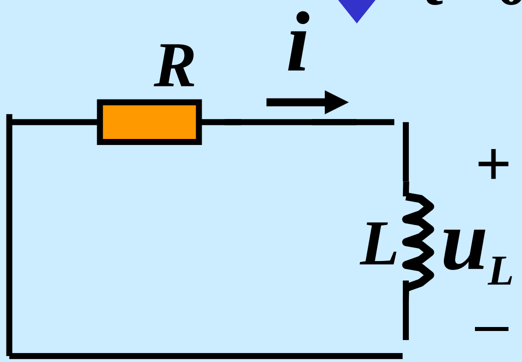
上 页　下 页

2. *RL*电路的零输入响应



$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=\frac{U_S}{R_1+R}=I_0$$

t >0



$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0\qquad t\geq 0$$

$$i(t)=Ae^{pt}$$

特征方程 $Lp+R=0$

特征根 $p=-\frac{R}{L}$

代入初始值 $i(0^+)=I_0$ → $A=i(0^+)=I_0$

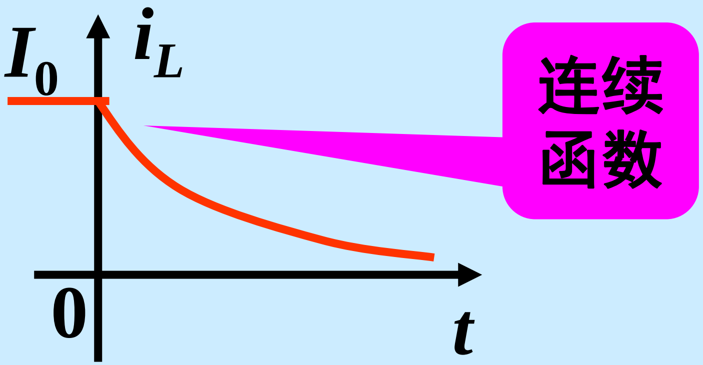
得 $i(t)=I_0e^{pt}=I_0e^{-\frac{R}{L}t}\quad t\geq 0$

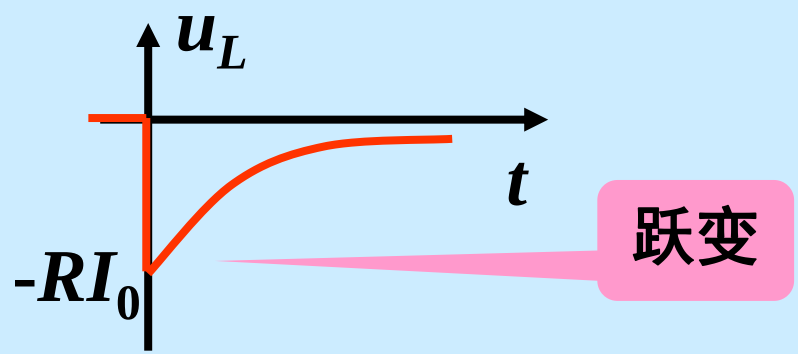
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{L/R}}$$

从以上式子可以得出：

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律衰减的函数；





（2）响应与初始状态成线性关系，其衰减快慢与L/R有关；

上 页 下 页

令 $\tau = L/R$，称为一阶RL电路时间常数

$$[\tau] = [\frac{L}{R}] = [\frac{\text{亨}}{\text{欧}}] = [\frac{\text{韦}}{\text{安}\cdot\text{欧}}] = [\frac{\text{伏}\cdot\text{秒}}{\text{安}\cdot\text{欧}}] = [\text{秒}]$$

$$\tau = L/R$$

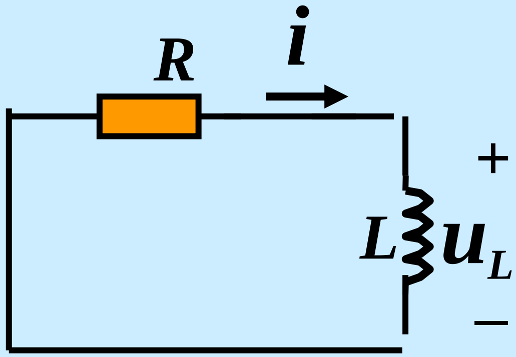
时间常数 τ 的大小反映了电路过渡过程时间的长短

τ大 $\rightarrow$ 过渡过程时间长

τ小 $\rightarrow$ 过渡过程时间短

（3）能量关系 → 电感不断释放能量被电阻吸收，

直到全部消耗完毕.



设$i_L(0^+)=I_0$

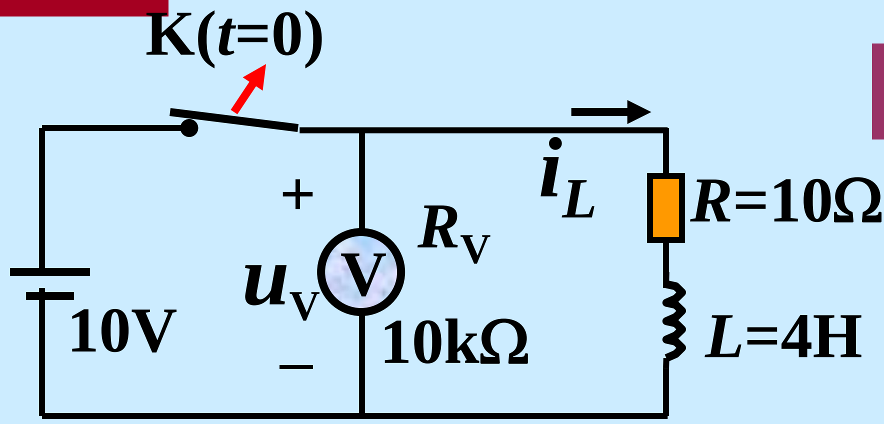
电感放出能量：→ $\frac{1}{2}LI_0^2$

电阻吸收（消耗）能量：→

$$W_R=\int_0^\infty i^2Rdt \quad =\int_0^\infty (I_0e^{-\frac{t}{L/R}})^2Rdt$$

$$=I_0^2R\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{L/R}}dt=I_0^2R(-\frac{L/R}{2}e^{-\frac{2t}{RC}})\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}LI_0^{\ 2}$$

例1　　t=0时，打开开关K，求u_v。 电压表量程：50V



解

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\ \text{A}$$

$$i_L = e^{-t/\tau} \qquad t \geq 0$$

$$\tau = \frac{L}{R+R_V} = \frac{4}{10000} = 4\times10^{-4}s$$

$$R_V = 10k\Omega$$

$$u_V = -R_V i_L = -10000e^{-2500t} \qquad t \geq 0$$

$u_V(0^+)$=— 10000V 造成 V 损坏。

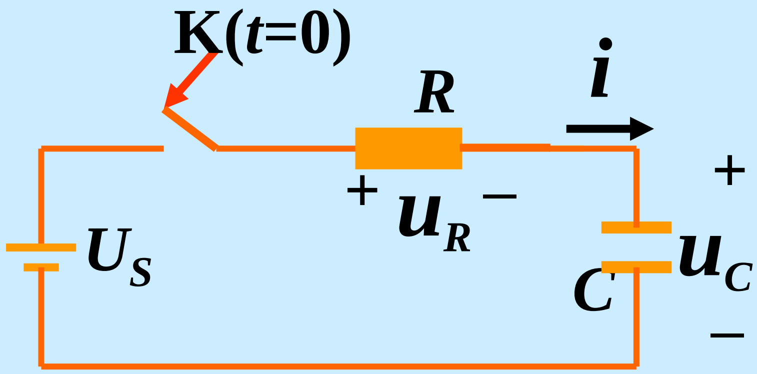
现象：电压表坏了

解决办法：在电压表的两端并联一个小电阻。

6.3.2 一阶电路的零状态响应

零状态响应 → 动态元件初始能量为零，由$t>0$电路中外加输入激励作用所产生的响应。

1. *RC*电路的零状态响应



$u_C(0^-)=0$

列方程：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$

非齐次线性常微分方程

解答形式为：

$$u_c=u_c'+u_c''$$

齐次方程通解

非齐次方程特解

u''_C 特解（强制分量，稳态分量）

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S$$ 的特解 $\longrightarrow$ $u''_C=U_S$

与输入激励的变化规律有关，为电路的稳态解

u'_C 通解（自由分量，暂态分量）

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$ 的通解 $\longrightarrow$ $u'_C=Ae^{-\frac{t}{RC}}$

变化规律由电路参数和结构决定

全解 $u_C(t)=u'_C+u''_C=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$

由初始条件 $u_C(0^+)=0$ 定积分常数 A

$u_C(0^+)=A+U_S=0$ $\longrightarrow$ $A=-U_S$

$$u_c=U_S-U_Se^{-\frac{t}{RC}}=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\qquad(t\geq 0)$$

上 页
下 页

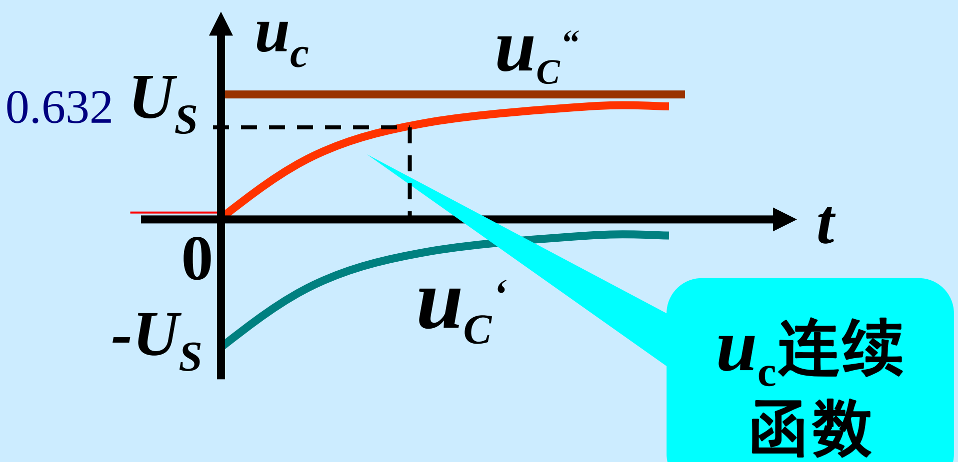
$$u_c = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0)$$

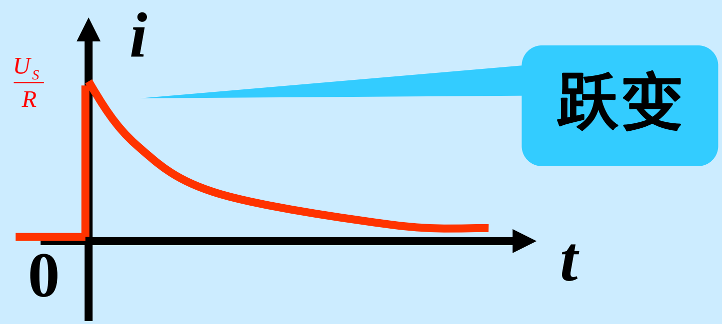
从以上式子可以得出：

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

（1）电压、电流是随时间按同一指数规律变化的函数；电容电压由两部分构成：

稳态分量（强制分量） + **暂态分量（自由分量）**

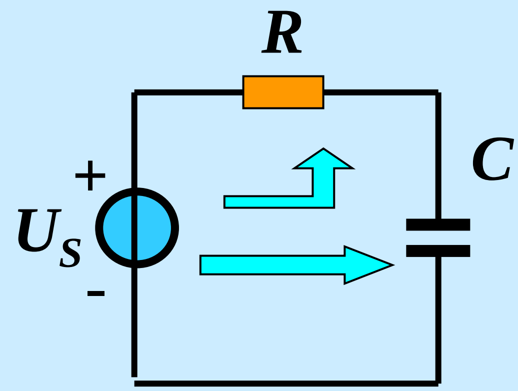




τ亦可用零状态响应波形增长到0.632Us所对应的时间测得。

（2）响应变化的快慢，由时间常数τ＝RC决定；τ大，充电慢，τ小充电就快。

（3）响应与外加激励成线性关系；



（4）能量关系

电容储存： $\frac{1}{2}CU_S^2$

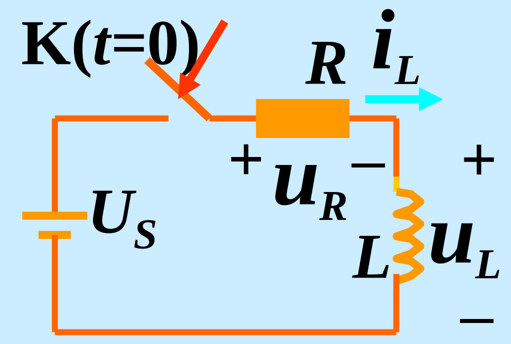
电源提供能量： $\int_0^\infty U_S i\mathrm{d}t = U_S q = CU_S^2$

电阻消耗 $\int_0^\infty i^2 R\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}CU_S^2$

电源提供的能量一半消耗在电阻上，一半转换成电场能量储存在电容中。

2. *RL*电路的零状态响应

已知$i_L(0^-)=0$，电路方程为：



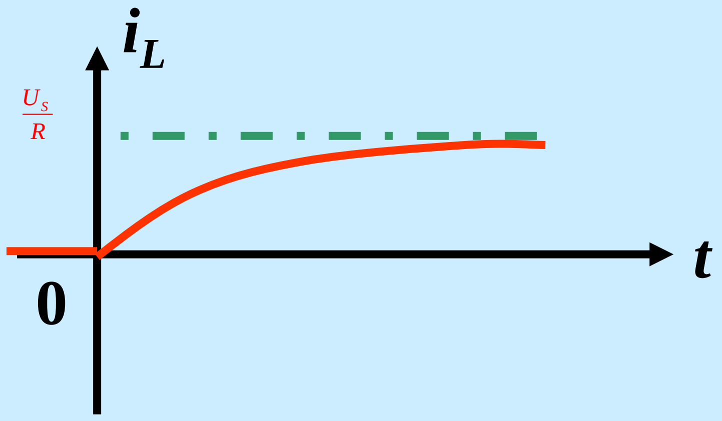
$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=U_S$$

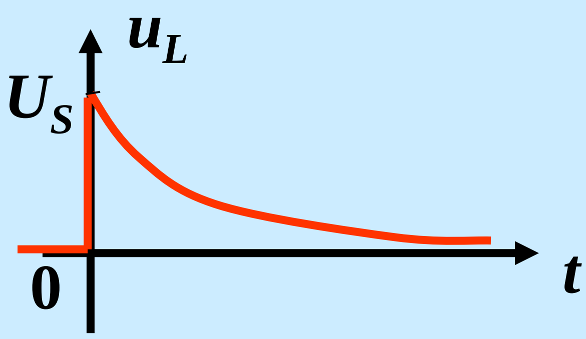
$$i_L=i_L'+i_L''=\frac{U_S}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(0^+)=0 \rightarrow \mathrm{A}=-\frac{U_S}{R}$$

$$\boxed{i_L=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})}$$

$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=U_S e^{-\frac{R}{L}t}$$



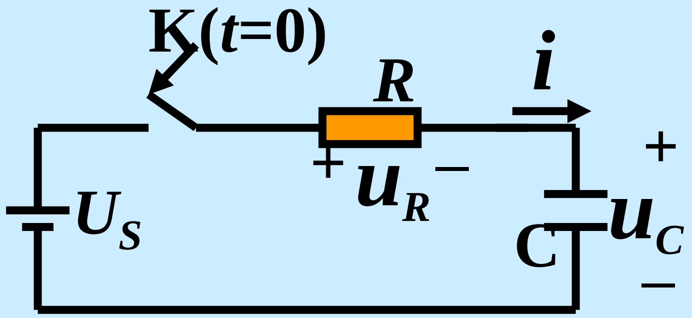


6.3.3 一阶电路的全响应

全响应 → 电路的初始状态不为零，同时又有外加激励源作用时电路中产生的响应。

1. 全响应

以RC电路为例，三要素法：



$$\tau = RC$$

$$u_C(0^+) = u_C(0-) = U_0$$

$$u_C(\infty) = U_S$$

$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0^+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

上 页　下 页

$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

强制分量(稳态解)

自由分量(暂态解)

2. 全响应的两种分解方式

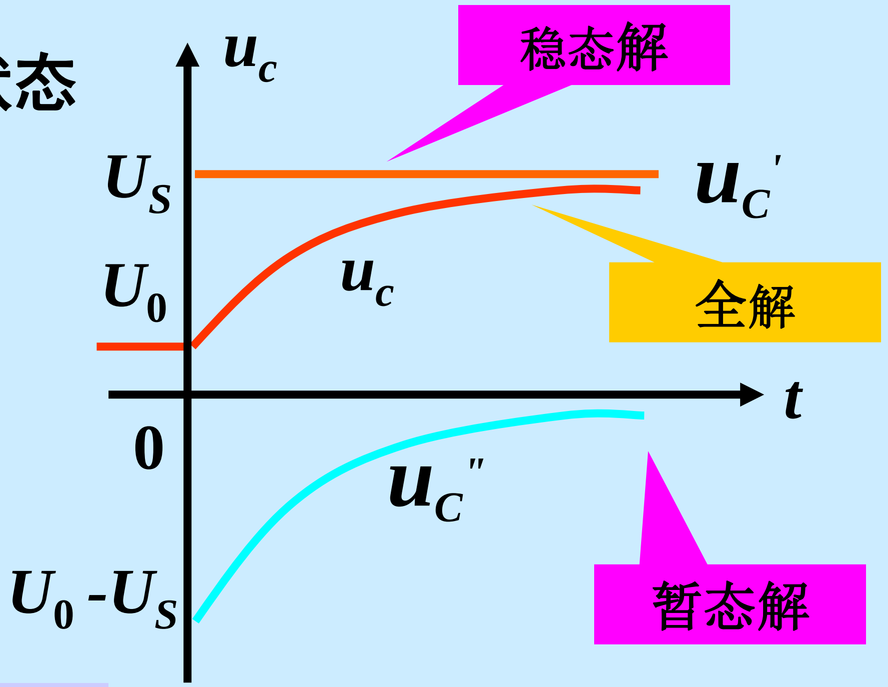
（1） 着眼于电路的两种工作状态

全响应 =

强制分量(稳态解)

+

自由分量(暂态解)



物理概念清晰

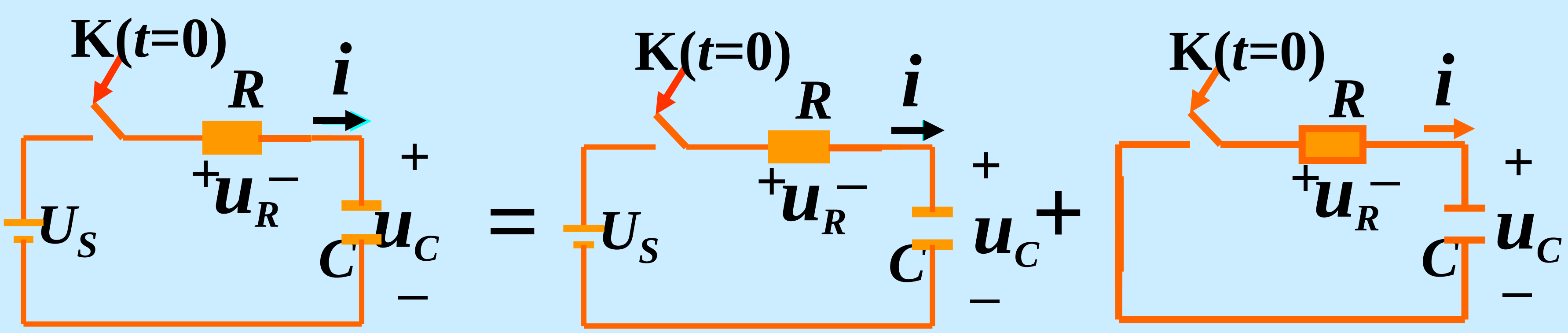
(2). 着眼于因果关系

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应

零输入响应

全响应= 零状态响应 ＋ 零输入响应

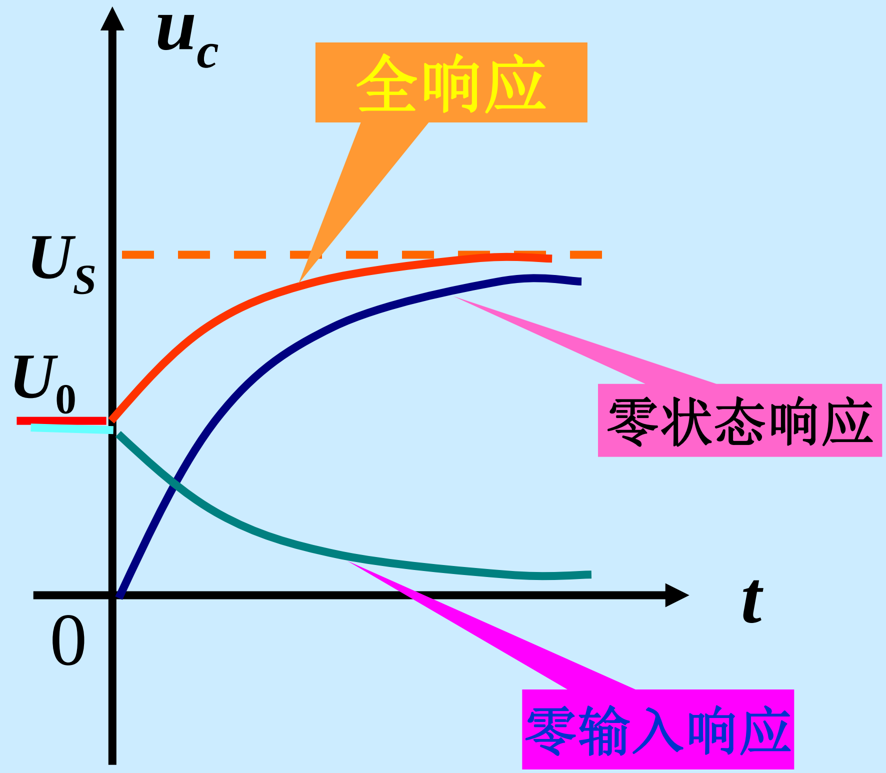


$u_C(0^-)=U_0$ $u_C(0^-)=0$ $u_C(0^-)=U_0$

$$u_C = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

零状态响应

零输入响应



小结

分析一阶电路问题转为求解电路的三个要素的问题

1. 一阶电路的零输入响应和零状态响应是全响应的特例，可用三要素法求解。

如零输入响应

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=f(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中$f(\infty)=0$

如零输入响应

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=f(\infty)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

其中$f(0+)=0$

2. 衰减快慢取决于时间常数τ

***RC*电路** $\tau=ReqC$ ， ***RL*电路** $\tau=L/Req$

***Req*为与动态元件相连的一端口电路的等效电阻。**

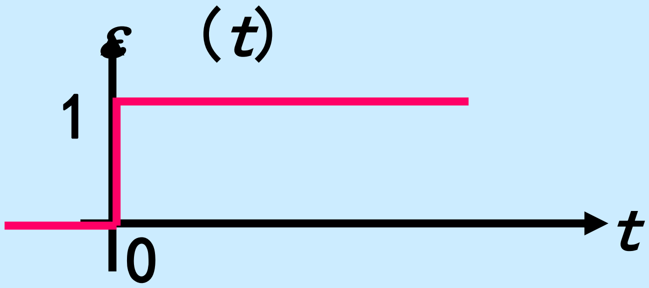
3. 同一电路中所有响应具有相同的时间常数。

6.4 一阶电路的阶跃响应

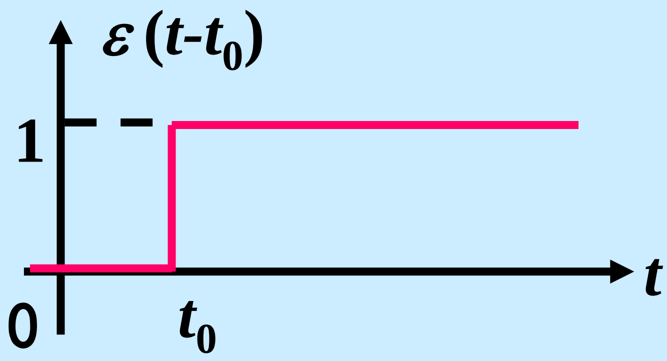
1. 单位阶跃函数

● 定义

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t\le 0_-)\\ 1 & (t\ge 0_+)\end{cases}$$



● 单位阶跃函数的延迟

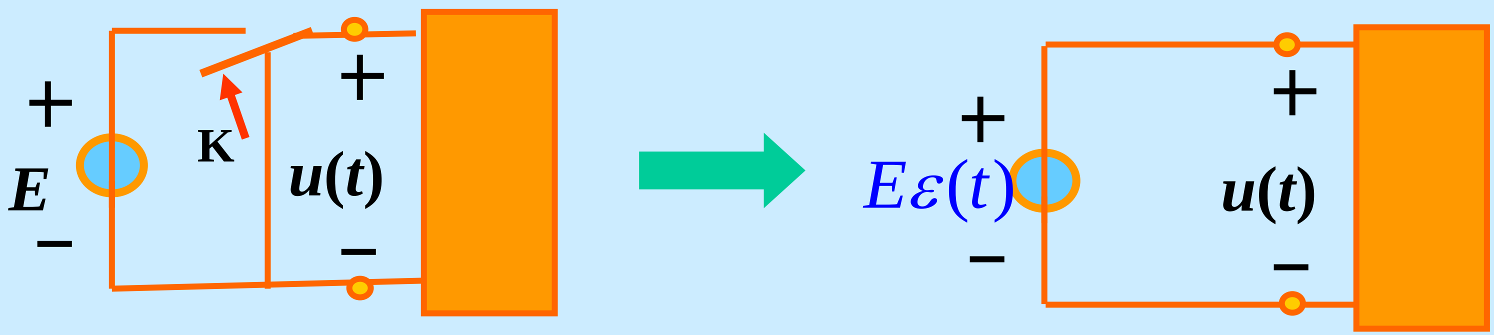


$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t\le t_{0_-})\\ 1 & (t\ge t_{0_+})\end{cases}$$

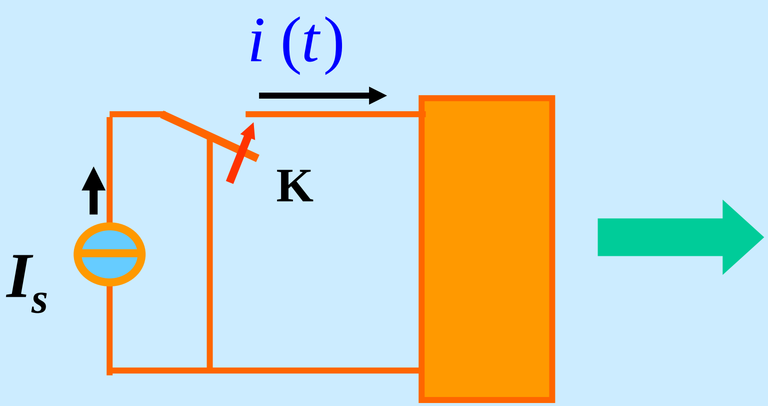
● 单位阶跃函数的作用

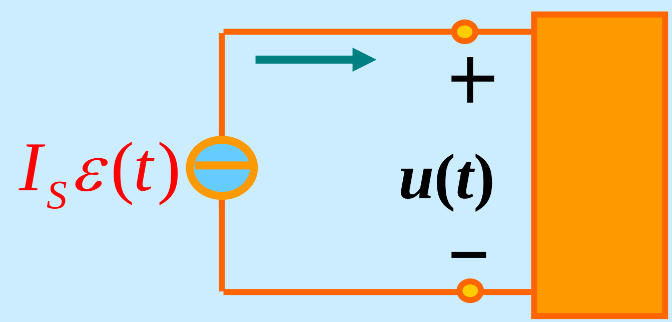
（1）在电路中模拟开关的动作

$t = 0$合闸 $u(t) = E\varepsilon(t)$

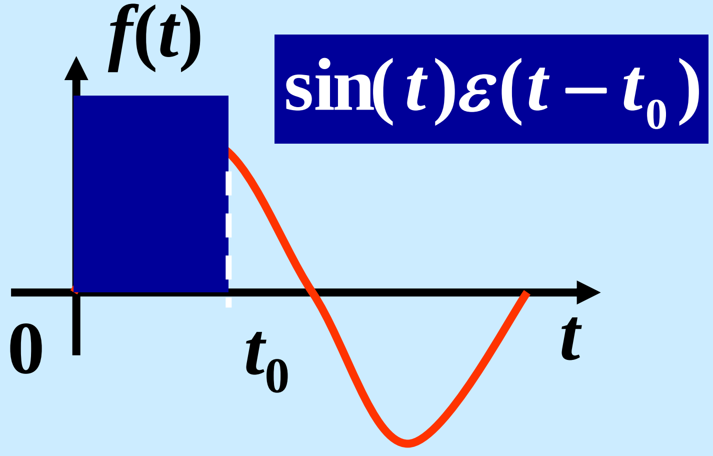


$t = 0$合闸 $i(t) = I_s\varepsilon(t)$

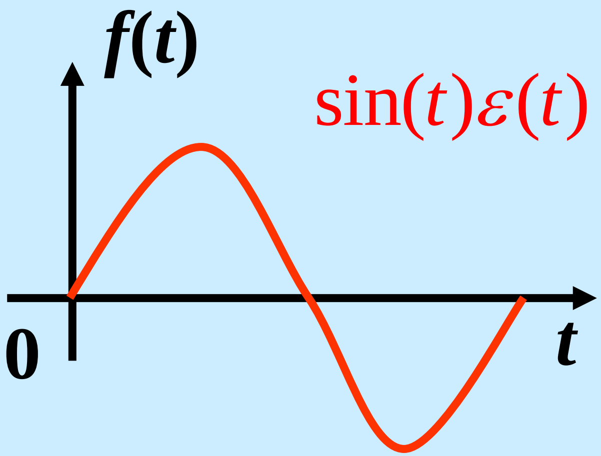


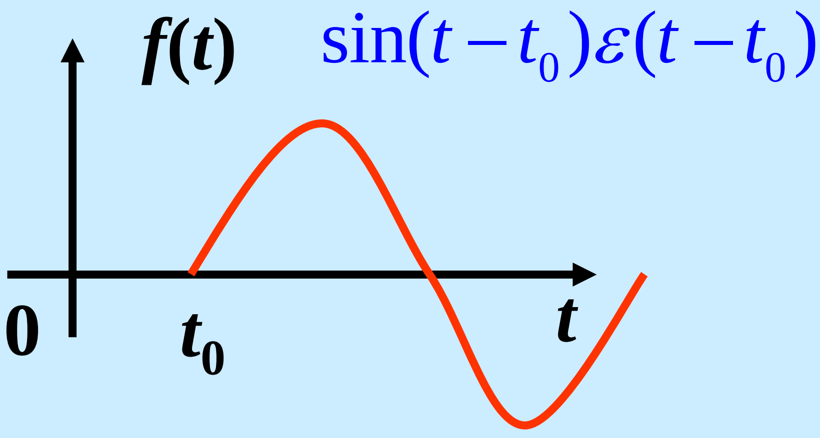


（2）起始一个函数



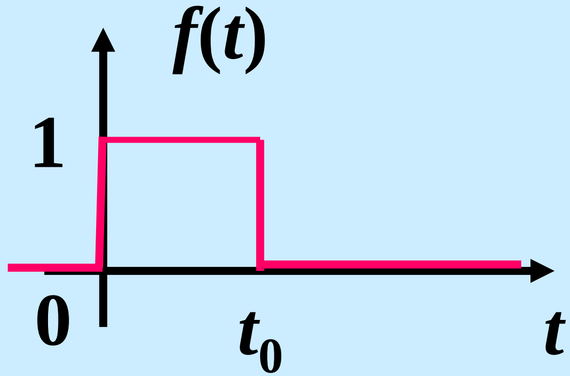
（3）延迟一个函数

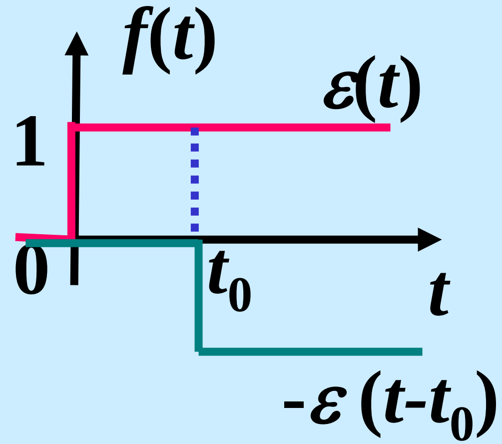




● 用单位阶跃函数表示复杂的信号

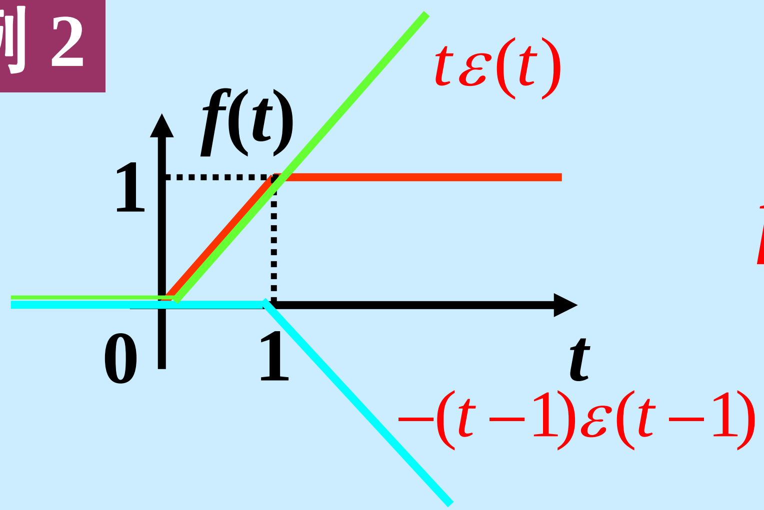
例 1





$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

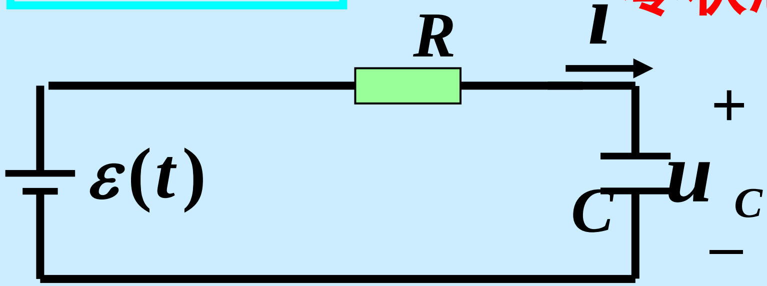
例 2

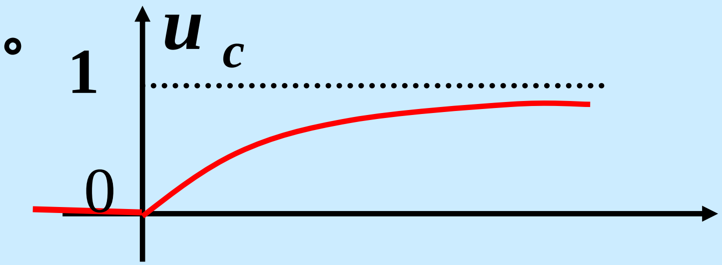


$$f(t)=t\,\varepsilon(t)-(t-1)\,\varepsilon(t-1)$$

2. 一阶电路的阶跃响应

阶跃响应 → 激励为单位阶跃函数时，电路中产生的零状态响应。





已知：$u_C(0^-)=0$，

求：单位阶跃响应$S(t)=u_c(t)$

解：

$$u_c(\infty)=1$$

$$\tau=RC$$

$$\varepsilon(t) \longrightarrow S(t)$$

$$U_0\varepsilon(t) \longrightarrow U_0S(t)$$

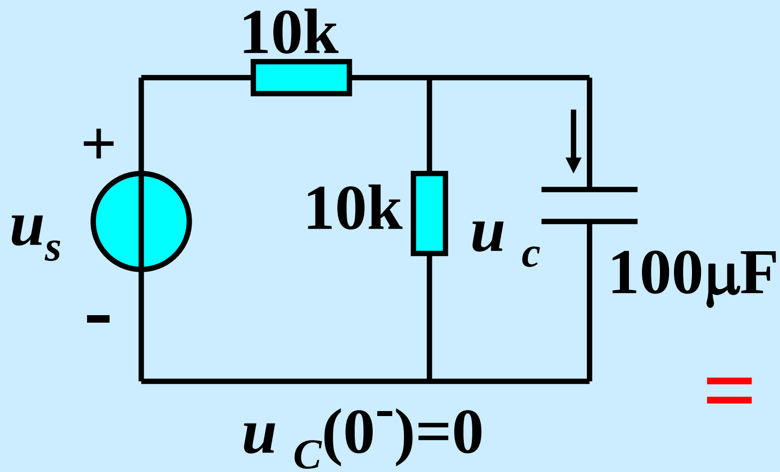
$$\varepsilon(t-t_0) \longrightarrow S(t-t_0)$$

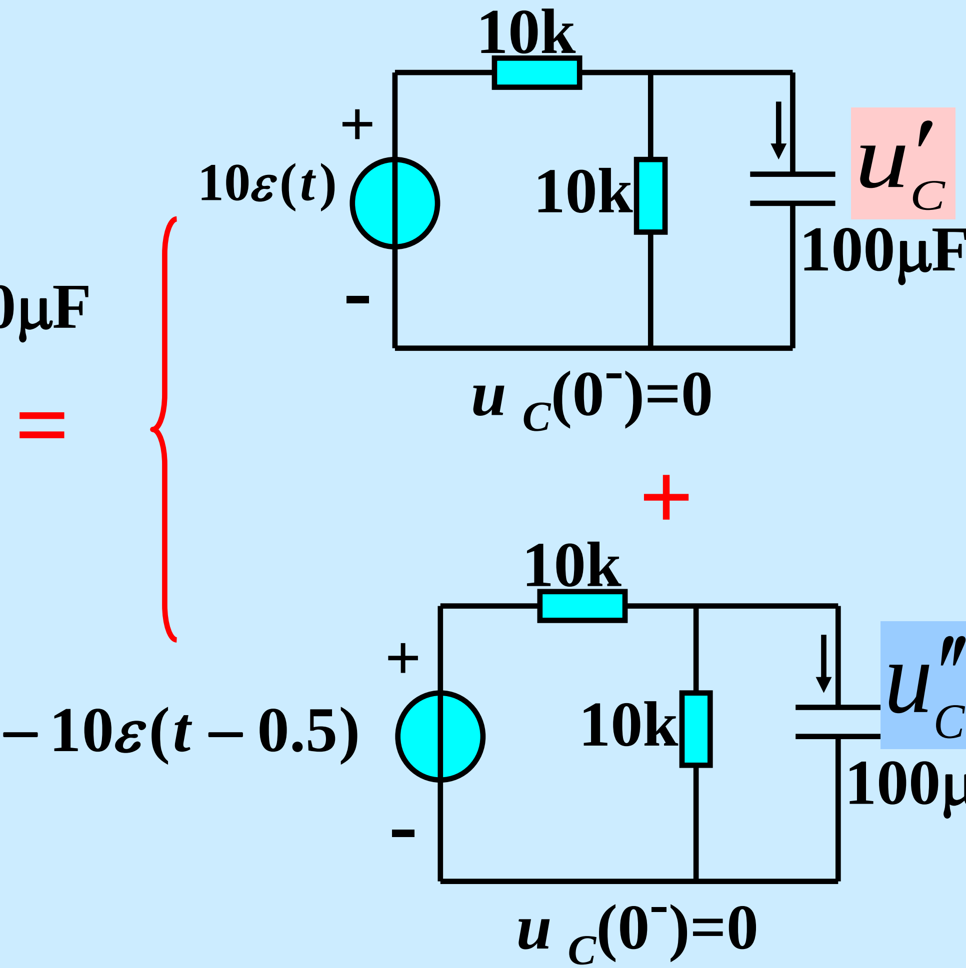
$$S(t)= u_C(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\ \varepsilon(t)$$

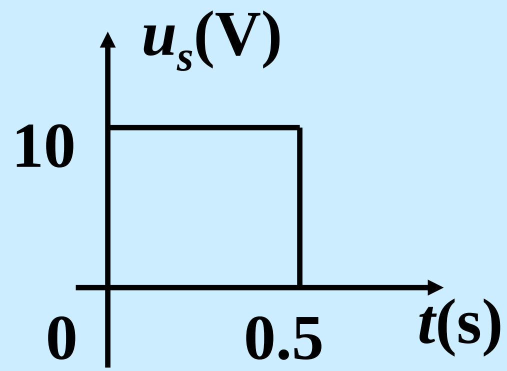
若激励为单位延迟阶跃函数$\varepsilon(t-t_0)$，则单位延迟阶跃响应为：

$$S(t-t_0)= u_C(t-t_0)=(1-e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\ \varepsilon(t-t_0)$$

例 求图示电路中电压$u_C(t)$

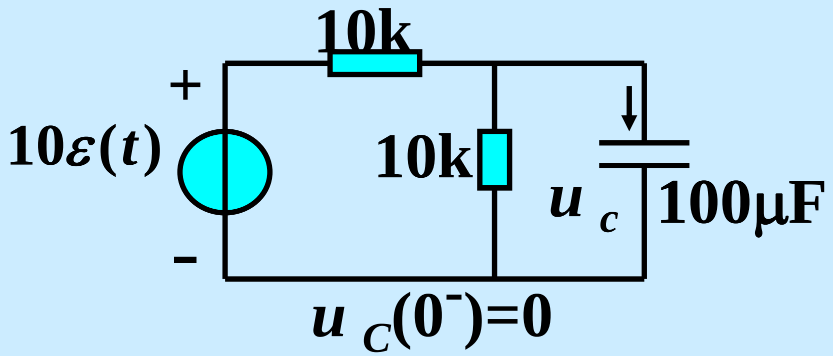






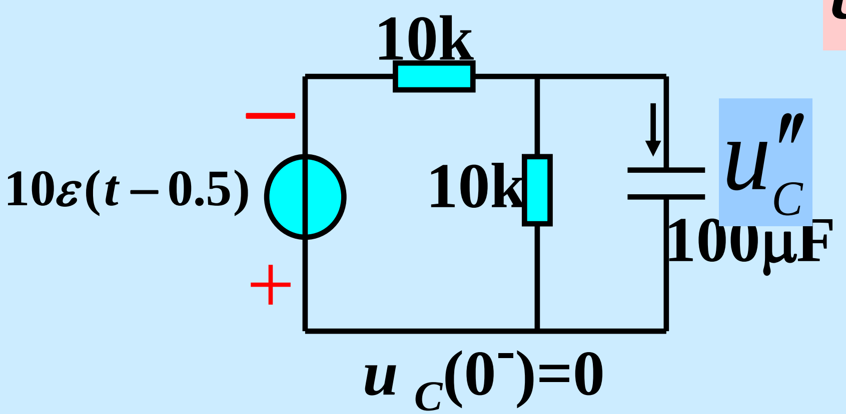
方法1: 阶跃函数求解法

$$u_S = 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)$$



$$\tau = RC = 100\times10^{-6}\times5\times10^{-3} = 0.5\text{s}$$

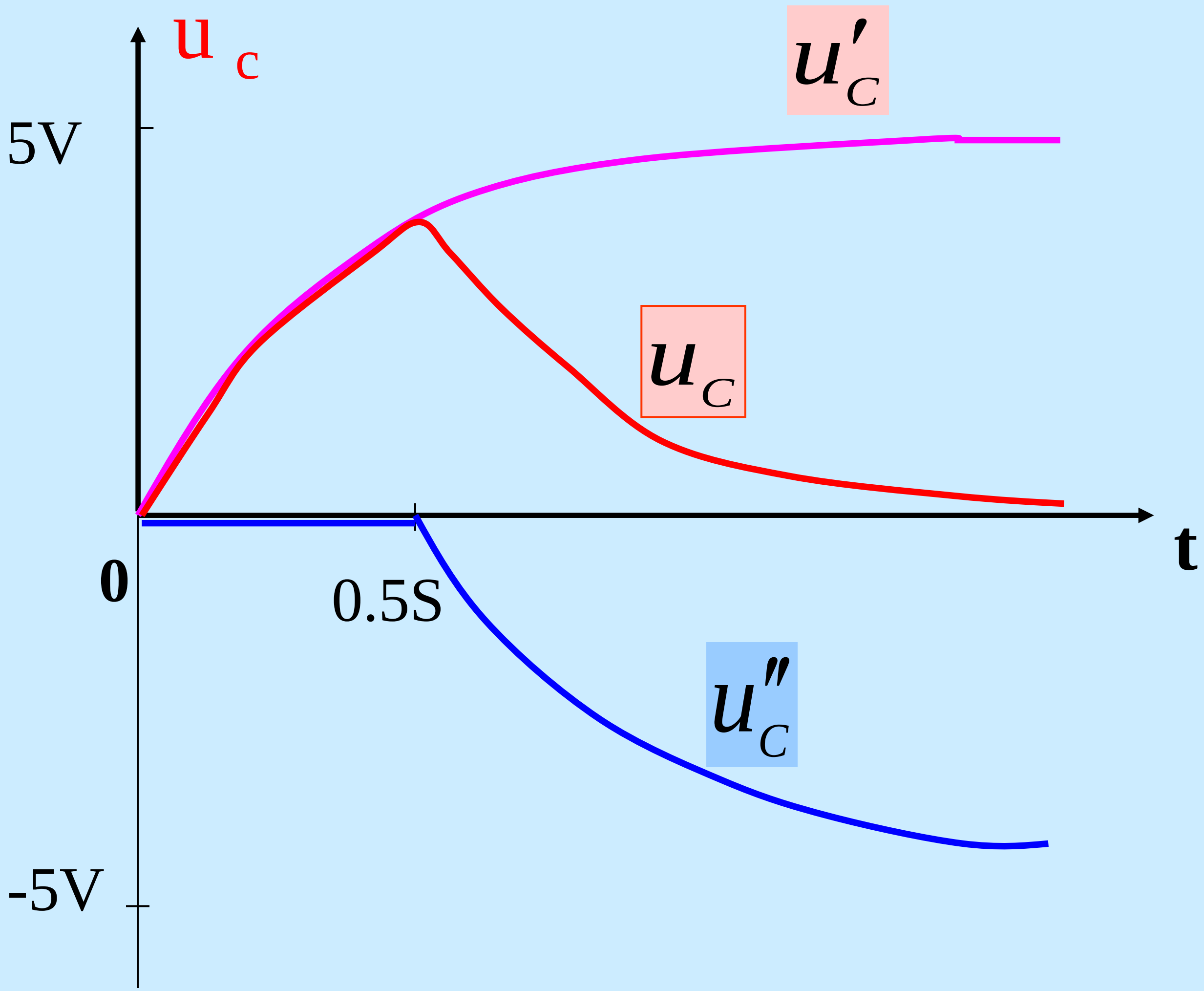
$$u'_C = 5(1-e^{-2t})\varepsilon(t) \quad V$$



$$u''_C = -5(1-e^{-2(t-0.5)})\varepsilon(t-0.5)\ V$$

$$\therefore u_C = 5(1-e^{-2t})\varepsilon(t) - 5(1-e^{-2(t-0.5)})\varepsilon(t-0.5) \quad V$$

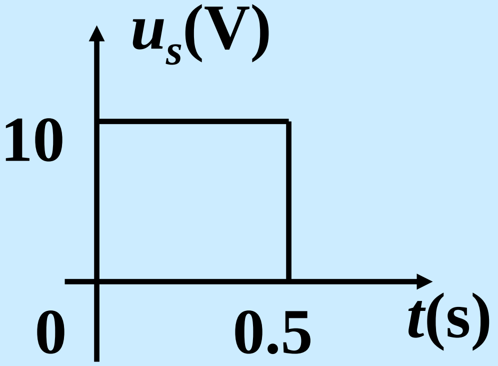
$$\therefore u_C = 5(1-e^{-2t})\varepsilon(t) - 5(1-e^{-2(t-0.5)})\varepsilon(t-0.5) \quad V$$



方法2：分段求解法

0≤t≤0.5S 区间为RC电路的零状态响应：

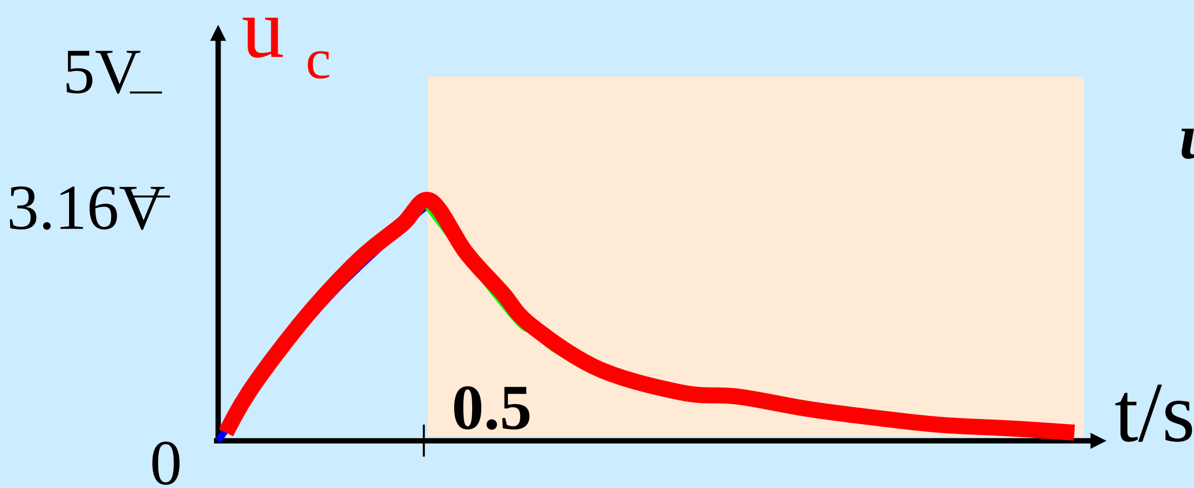
$$\therefore u_C = 5(1-e^{-2t}) \quad V$$

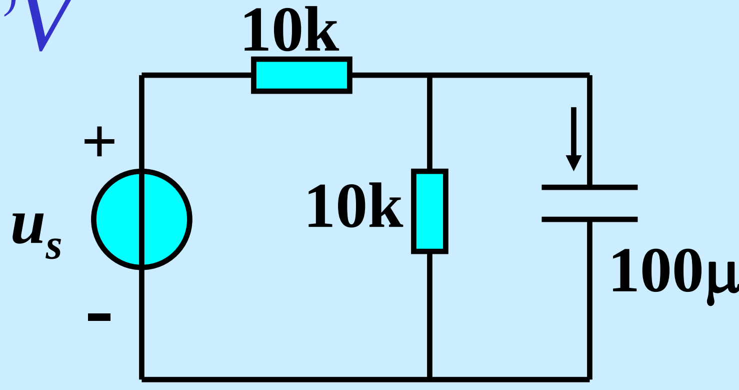


0.5S ≤t<∞ 区间为RC电路的零输入响应：

$$u_C(0.5) = 5(1-e^{-2\times0.5}) = 3.16V$$

$$\therefore u_C = 3.16e^{-2(t-0.5)}V$$





$u_C(0^-)=0$

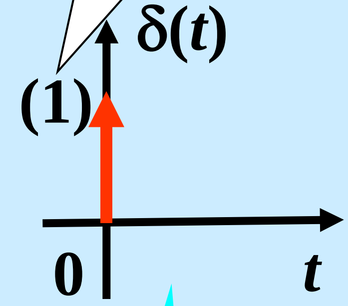
6.5 一阶电路的冲激响应

1. 单位冲激函数

● 定义

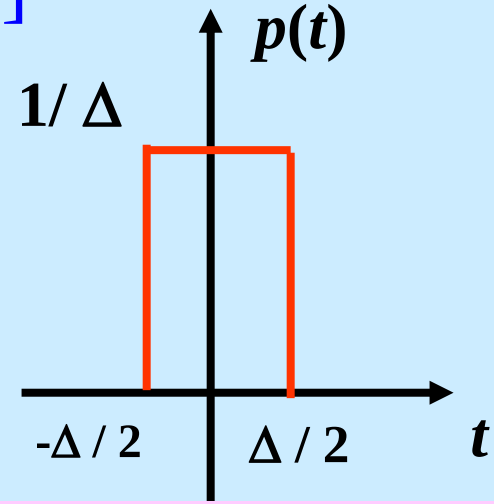
$$\begin{cases} \delta(t)=0 \quad (t\neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \quad 或 \int_{0-}^{0+}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$

冲激函数的强度



$$p(t)=\frac{1}{\Delta}[\varepsilon(t+\frac{\Delta}{2})-\varepsilon(t-\frac{\Delta}{2})]$$

$\Delta \rightarrow 0 \qquad \frac{1}{\Delta} \rightarrow \infty$



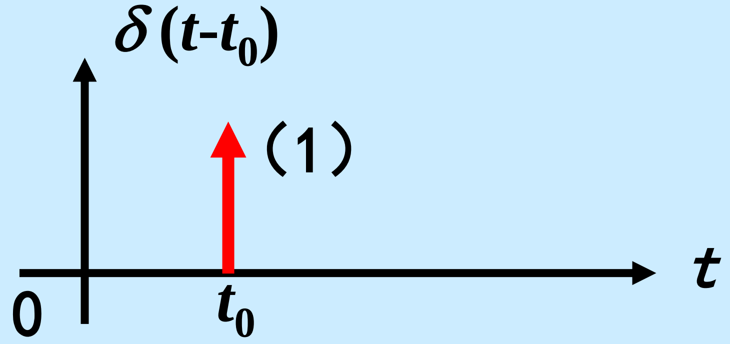
单位脉冲函数的极限

$$\lim_{\Delta\to 0} p(t)=\delta(t)$$

$K\delta(t)$表发生在$t=0$处，强度为K的冲激函数

上 页 下 页

● 单位冲激函数的延迟



$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$

● 单位冲激函数的性质

（1）冲激函数对时间的积分等于阶跃函数。

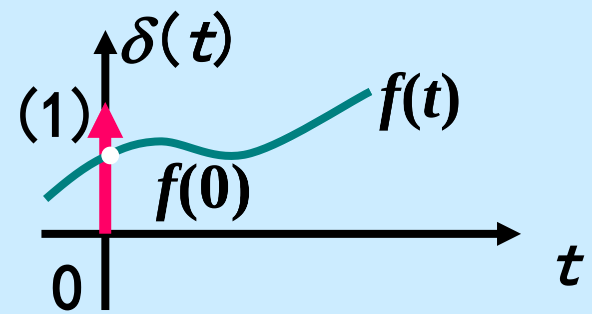
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & t<0^- \\ 1 & t>0^+ \end{cases} = \varepsilon(t) \rightarrow \boxed{\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \delta(t)}$$

2. 冲激函数的筛分性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)\int_{0-}^{0+} \delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

$$\| \\ f(0)\,\delta(t)$$

同理有：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$



例

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin t + t)\delta(t-\frac{\pi}{6})\mathrm{d}t$$

$$= \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}=1.02$$

* $f(t)$在 t_0 处连续

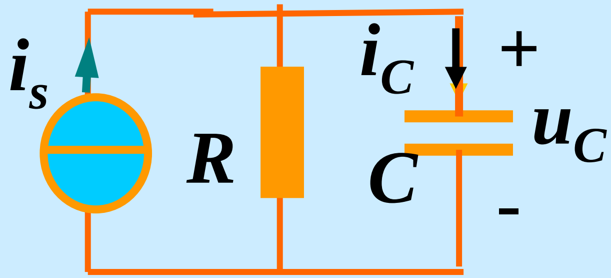
2. 一阶电路的冲激响应

冲激响应 → 激励为单位冲激函数时，电路中产生的**零状态响应**。

- **单位阶跃响应和单位冲激响应关系**

单位阶跃	单位阶跃响应	
$\varepsilon(t)$	$s(t)$	$\delta(t)=\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$
单位冲激	单位冲激响应	
$\delta(t)$	$h(t)$	$h(t)=\dfrac{d}{dt}s(t)$

求： $i_s(t)$为单位冲激时电路响应 $u_C(t)$和 $i_C(t)$



已知： $u_c(0^-)=0$

方法1：先求单位阶跃响应,令：

$$i_S(t)=\varepsilon(t)$$

$u_C(0^+)=0$ $u_C(\infty)=R$ $\tau=RC$ $i_C(0^+)=1$ $i_C(\infty)=0$

$$u_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_c=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

再求单位冲激响应,令： $i_S(t)=\delta(t)$

$$u_C=\frac{d}{dt}R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)=\underbrace{R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)}_{0}+\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

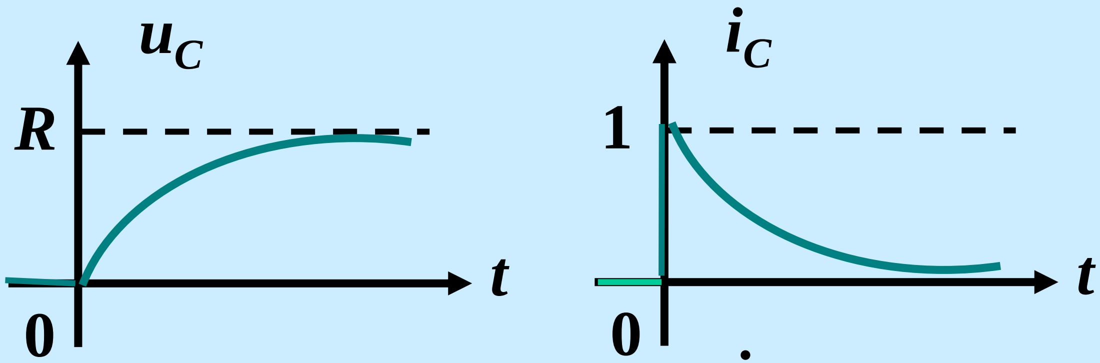
$$=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

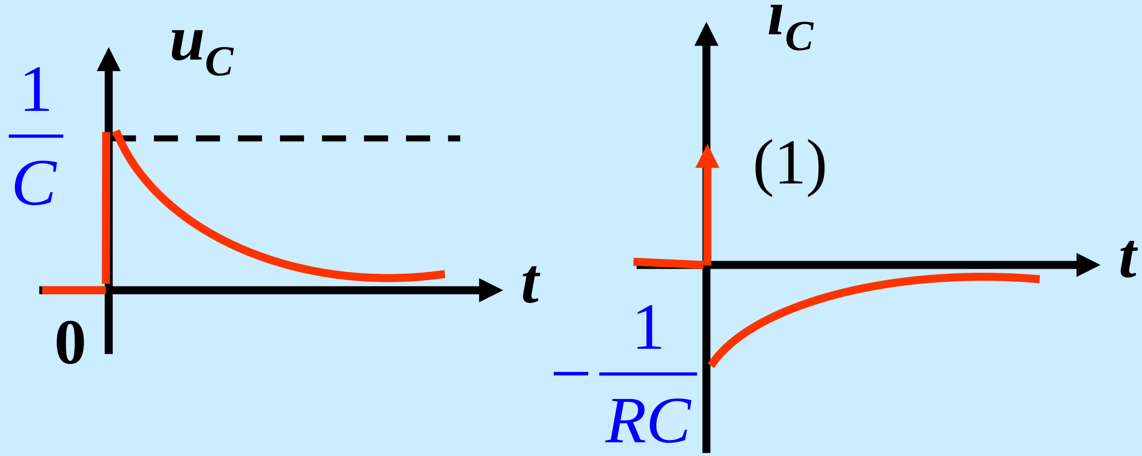
$$i_c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)] \quad = e^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$= \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

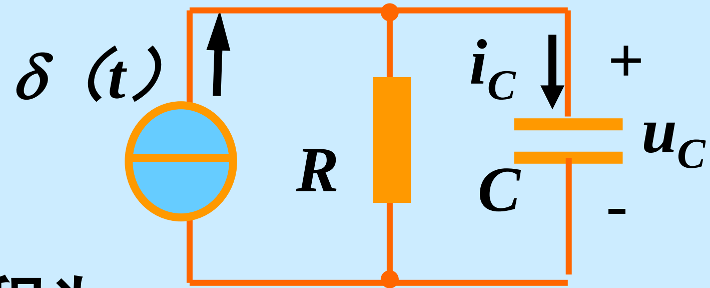
阶跃响应



冲激响应



方法2. 分二个时间段来考虑冲激响应。



(1). t 在 $0^- \longrightarrow 0^+$ 间　电容充电，方程为：

$u_C(0^-)=0$

$$C\frac{du_c}{dt}+\frac{u_c}{R}=\delta(t)$$

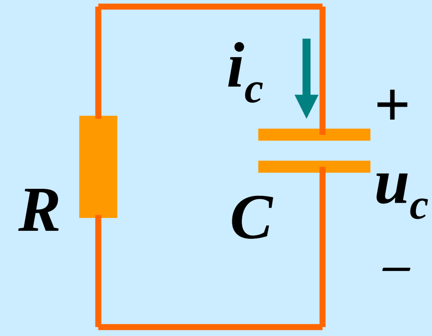
u_c是有限值

$$\int_{0^-}^{0^+}C\frac{du_c}{dt}\mathrm{d}t+\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\frac{u_c}{R}\mathrm{d}t}_{0}=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

$$\longrightarrow\quad C[u_c(0^+)-u_c(0^-)]=1 \qquad u_c(0^+)=\frac{1}{C}\neq u_C(0^-)$$

电容中的冲激电流使电容电压发生跃变

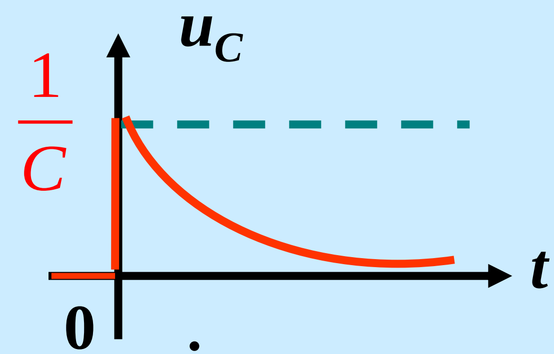
(2).$t > 0^+$ 为零输入响应（RC放电）

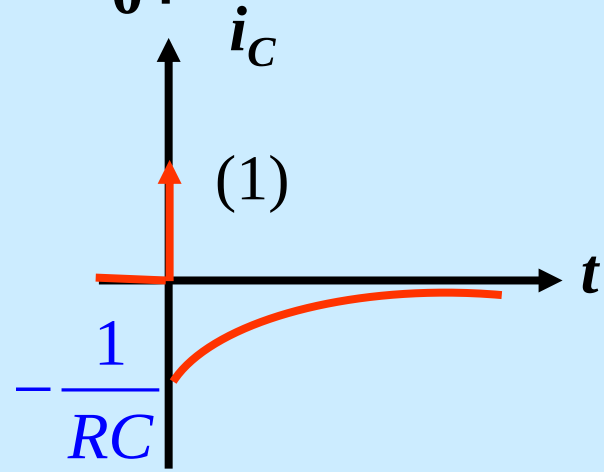


$$u_c = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0^+ \neq \quad u_c(0^+) = \frac{1}{C}$$

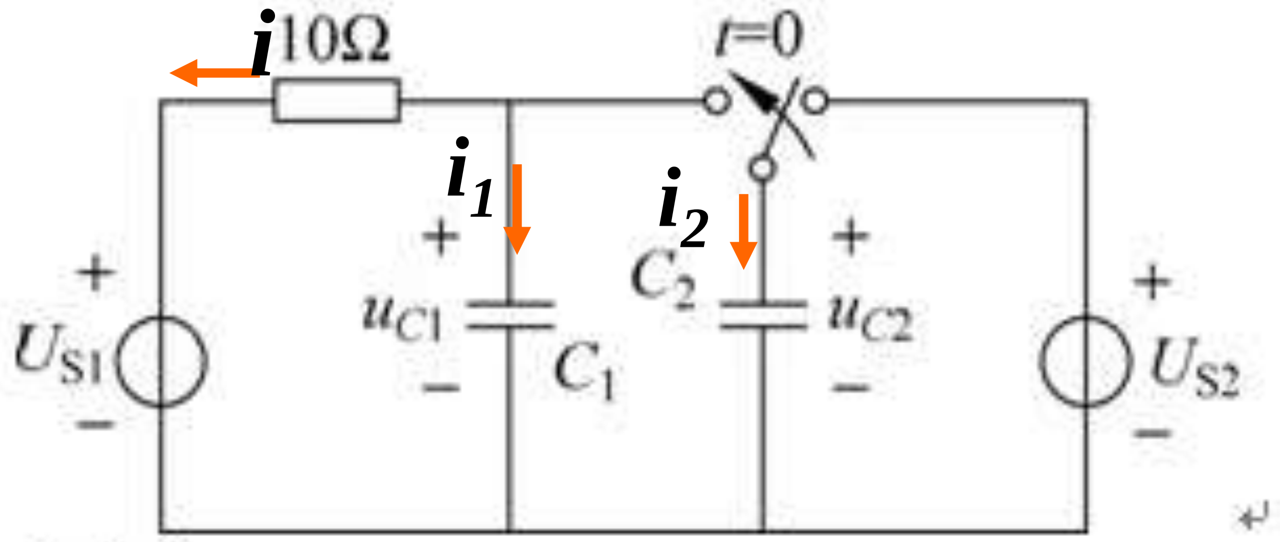
$$i_c = -\frac{u_c}{R} = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0^+$$

$$\begin{cases} u_c = \dfrac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \\ i_c = \delta(t) - \dfrac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) \end{cases}$$

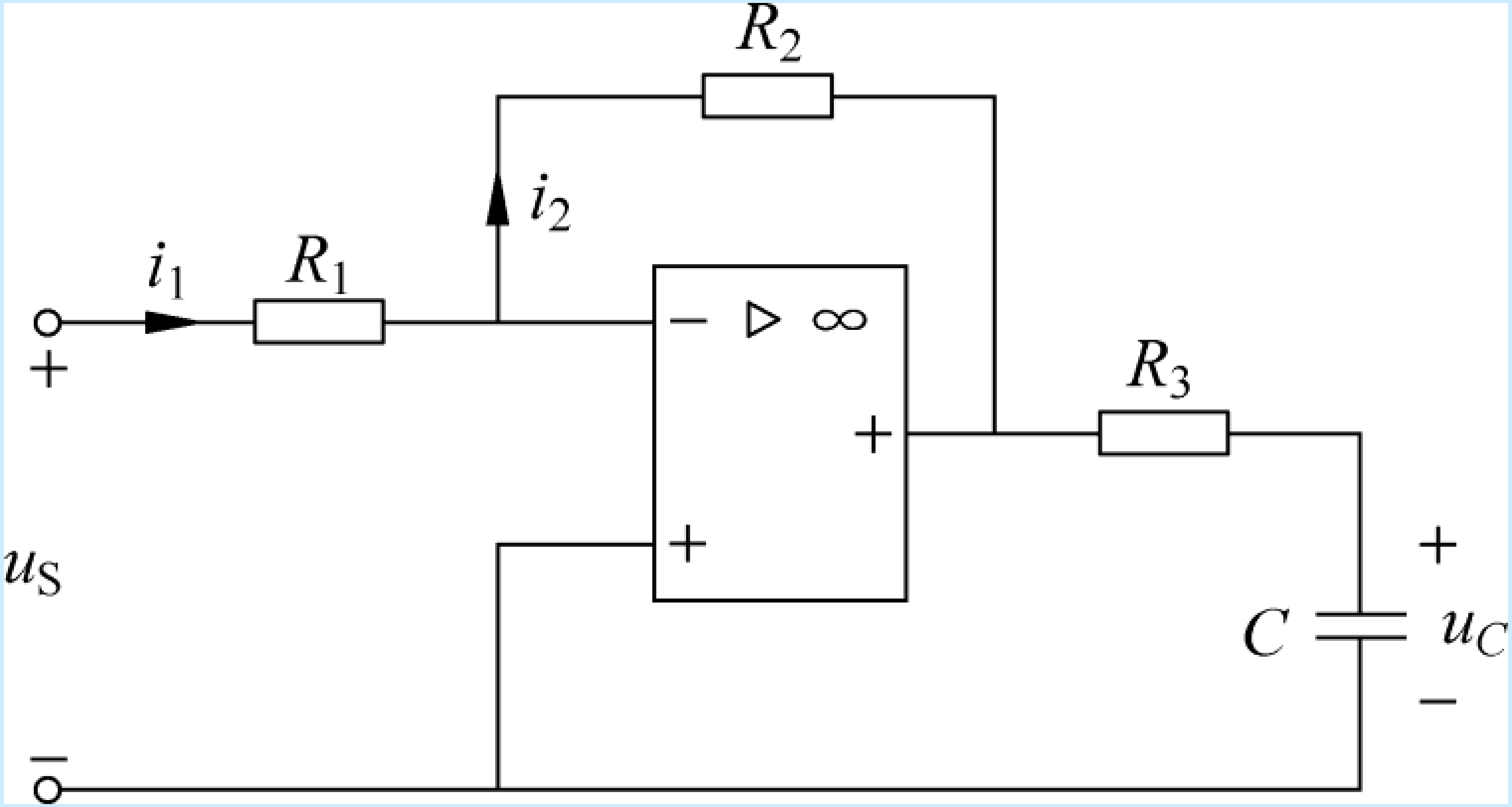




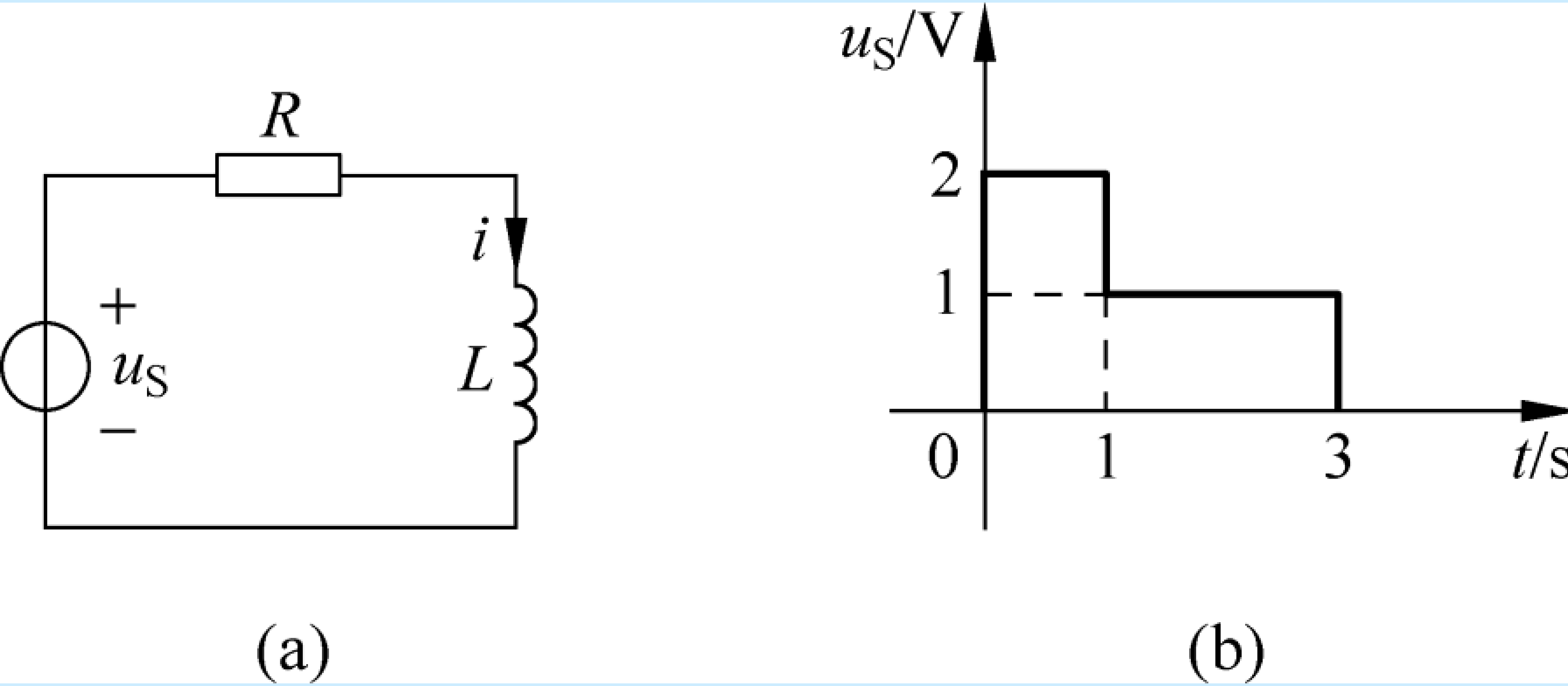
#6.26， 6.28



题图 6.7



- 题图6.18



- 题图6.25