过程设备机械设计基础

----平面弯曲

主讲：付 尧

电话：64252096

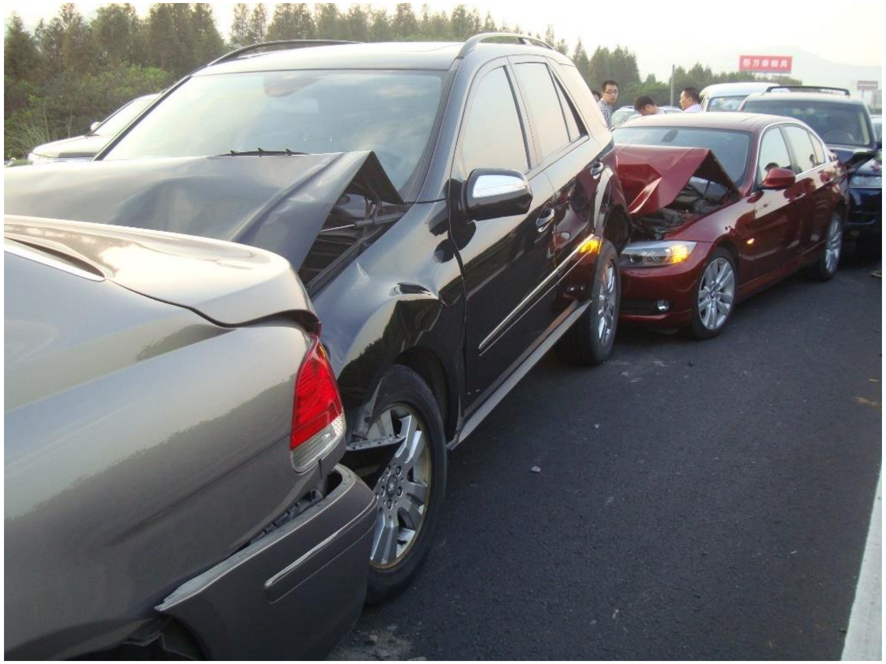
email：fuyao@ecust.edu.cn

学习资料及论坛：www.chenjj.org

主要内容

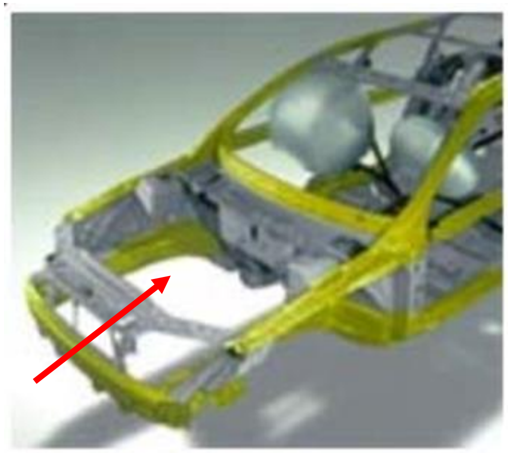
1. 平面弯曲的概念及实例

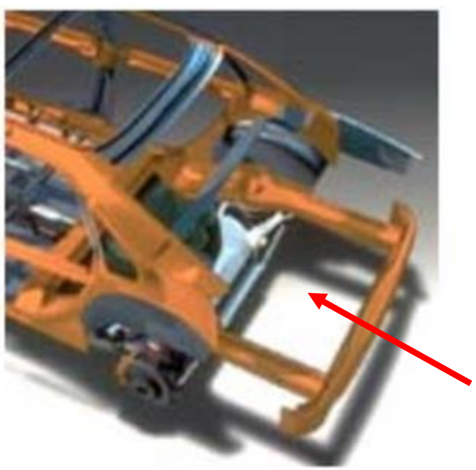
- 汽车工业的飞速发展使道路日益拥挤，发生碰撞意外几率的增加。
- 一旦发生碰撞，你认为车身的变形是大好，还是小好?



1. 平面弯曲的概念及实例

- 为了在发生碰撞更好地保护车内乘客的安全，轿车车身的前后均应设计变形区，或者称为吸能区。以便保证在发生碰撞时，轿车车身的变形能够按照预先设计的方向逐渐变形直至停车，从而尽量减小传递到乘客舱和乘客身体的冲击，减小乘客舱的变形，保障车内乘客安全。





Volvo 某汽车车身前后吸能区设计

1. 平面弯曲的概念及实例

起重机大梁

1. 平面弯曲的概念及实例

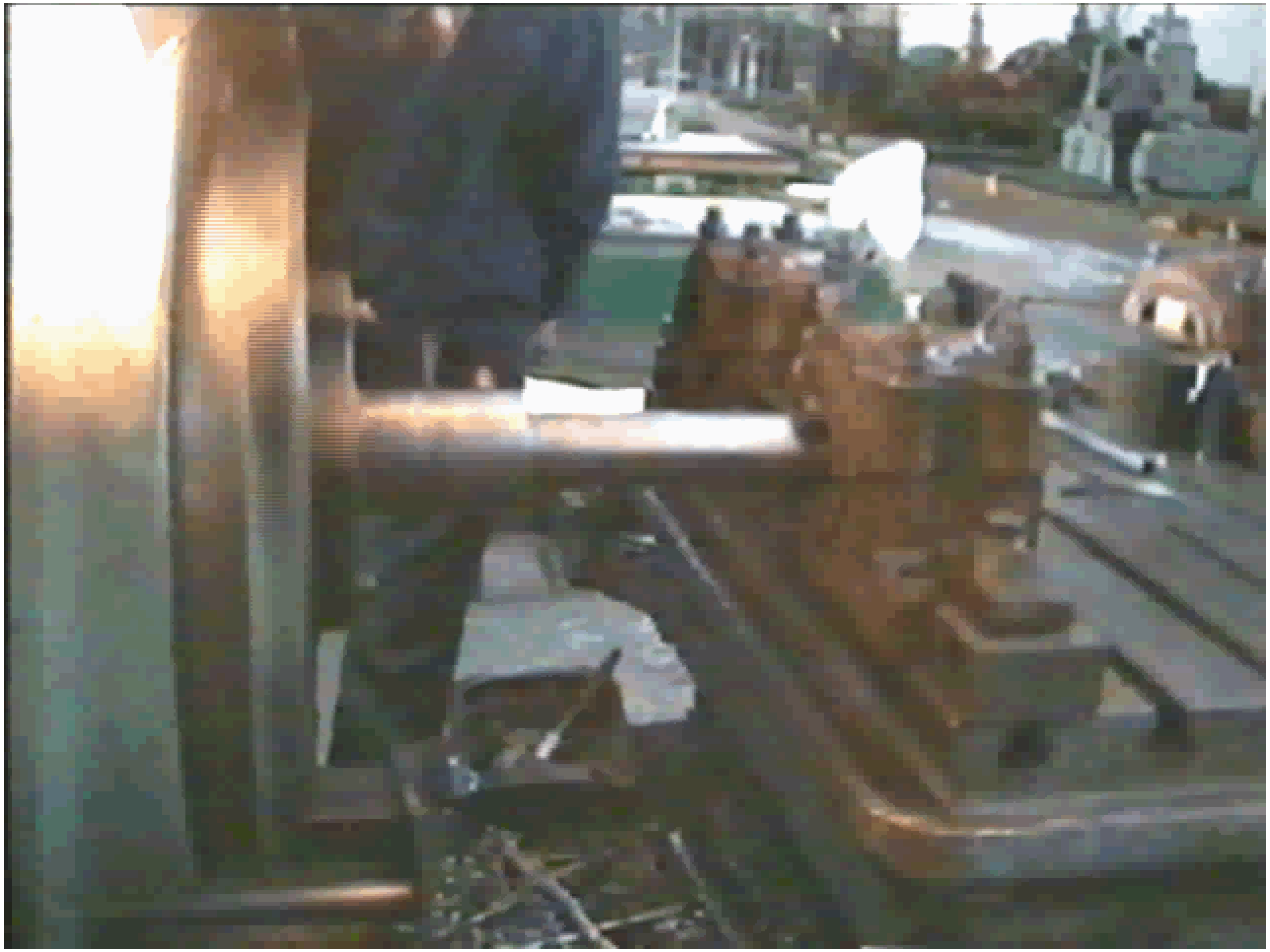
车削工件

1. 平面弯曲的概念及实例

火车轮轴

1. 平面弯曲的概念及实例

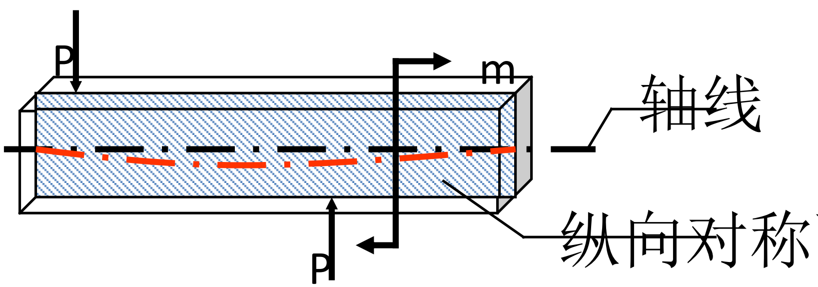
镗刀杆



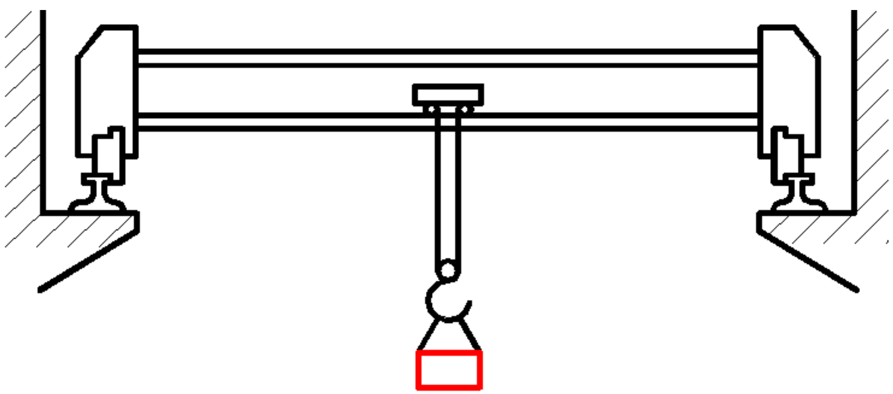
1. 平面弯曲的概念及实例

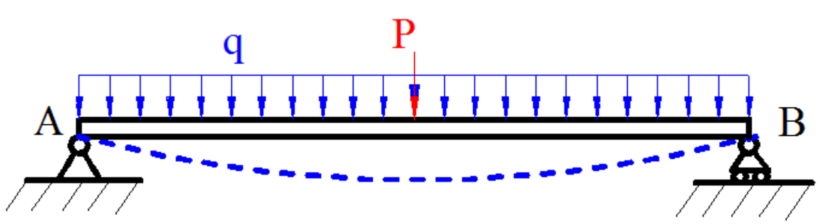
承受垂直于其轴线的外力，或在其轴线平面内作用有外力偶矩。受力后直的轴线变成了曲线，这种变形称为**弯曲变形**。工程上把以弯曲为主的构件称为梁。

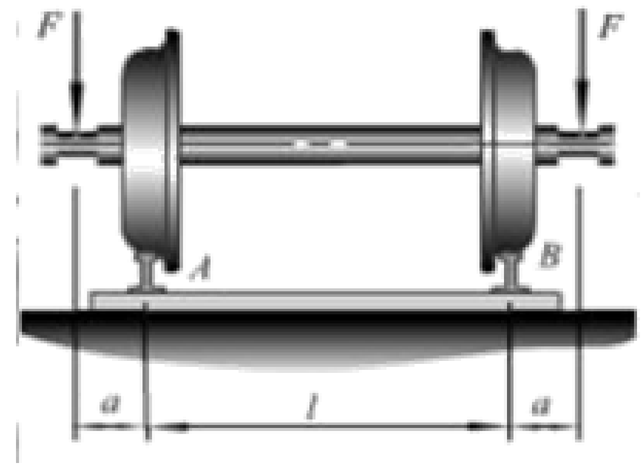
什么是弯曲变形？

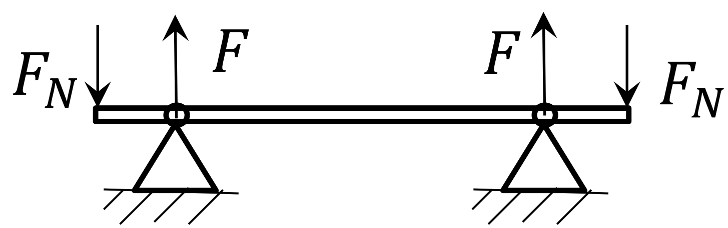


1. 平面弯曲的概念及实例

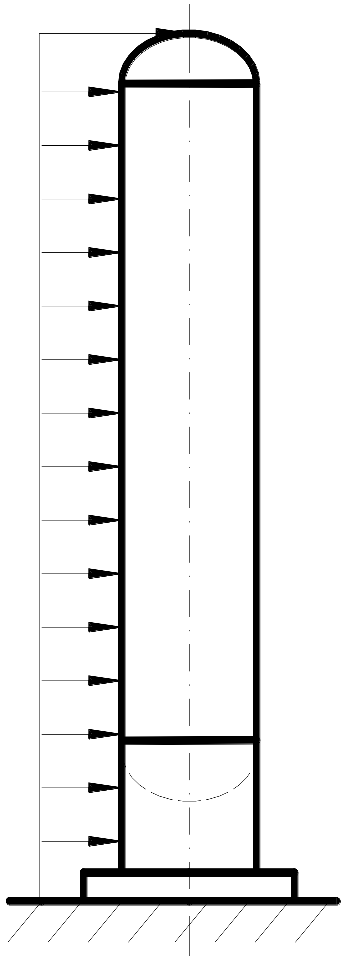


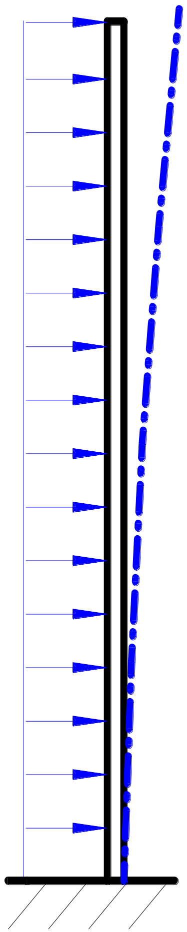




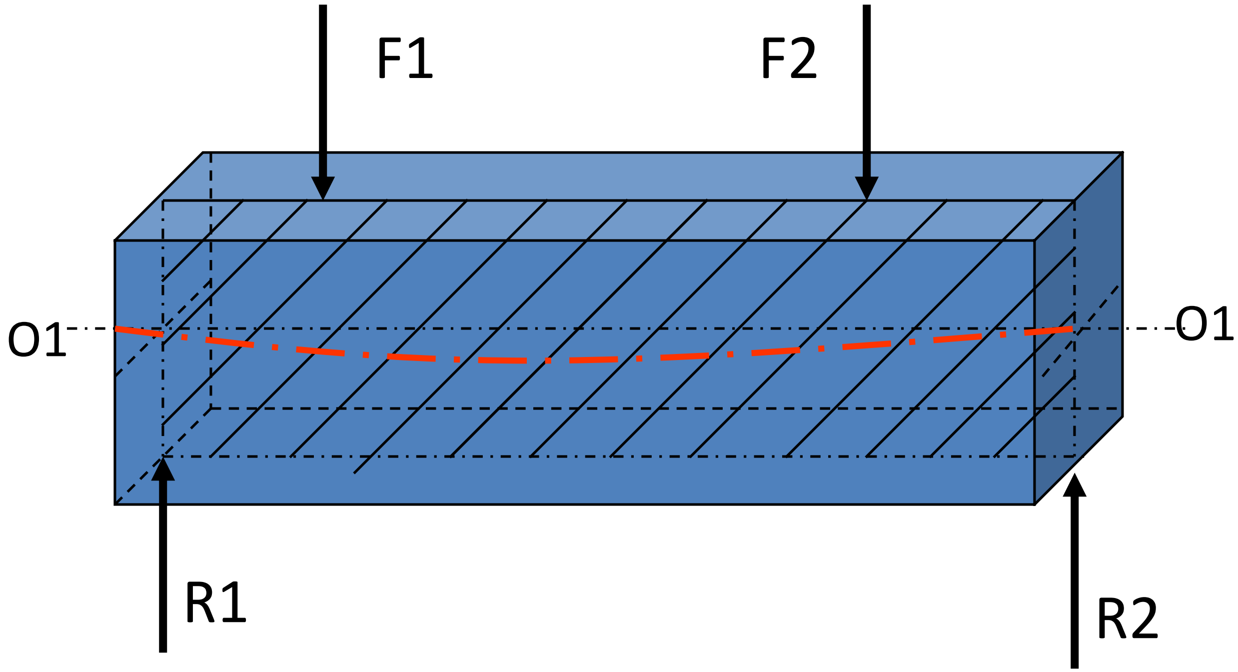


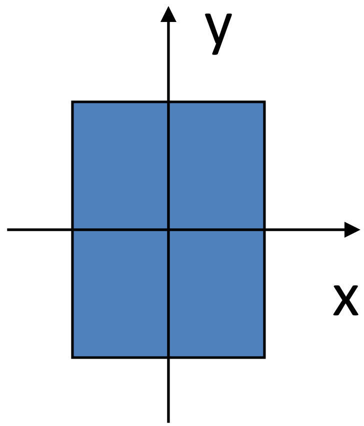
1. 平面弯曲的概念及实例





1. 平面弯曲的概念及实例





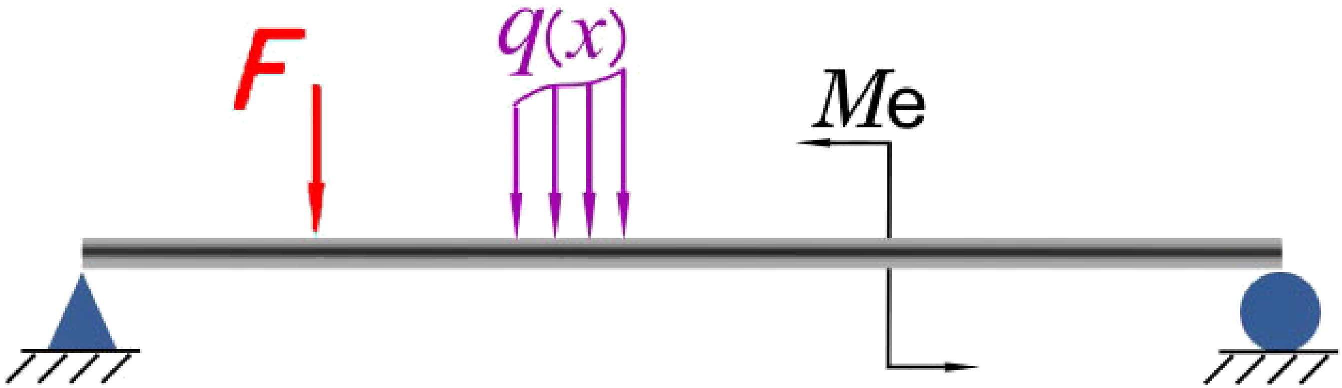
梁： **以弯曲变形（横向力）为主的杆件**

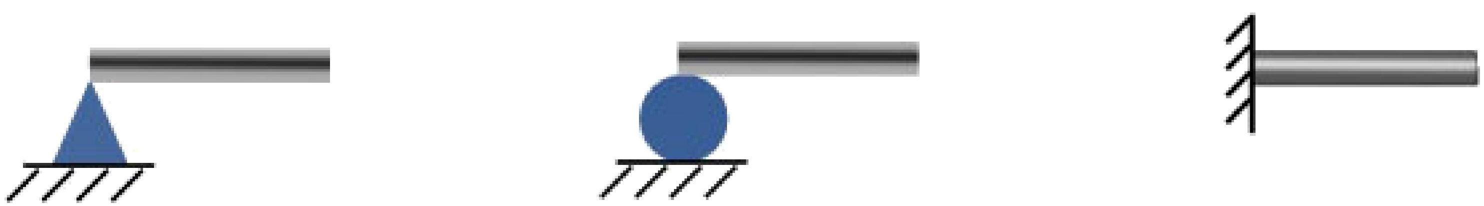
纵向对称面： **对称轴与轴线组成的平面**

平面弯曲： **梁轴线弯曲成此平面内的一条曲线**

1. 平面弯曲的概念及实例

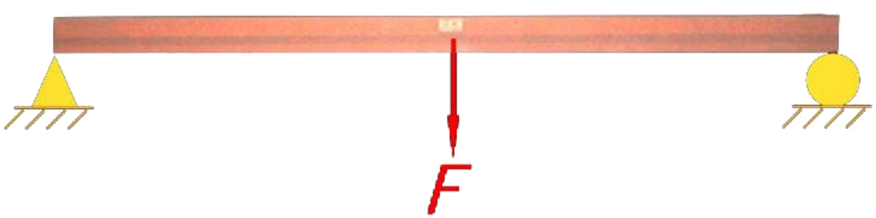
- 载荷的简化： 集中载荷、分布载荷、集中力偶

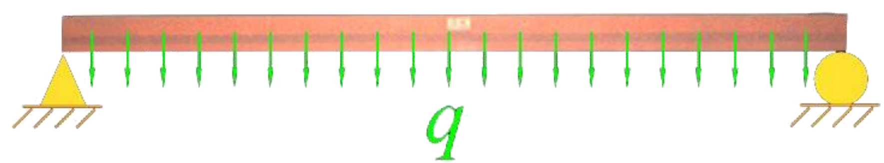




1. 平面弯曲的概念及实例

吊车大梁简化



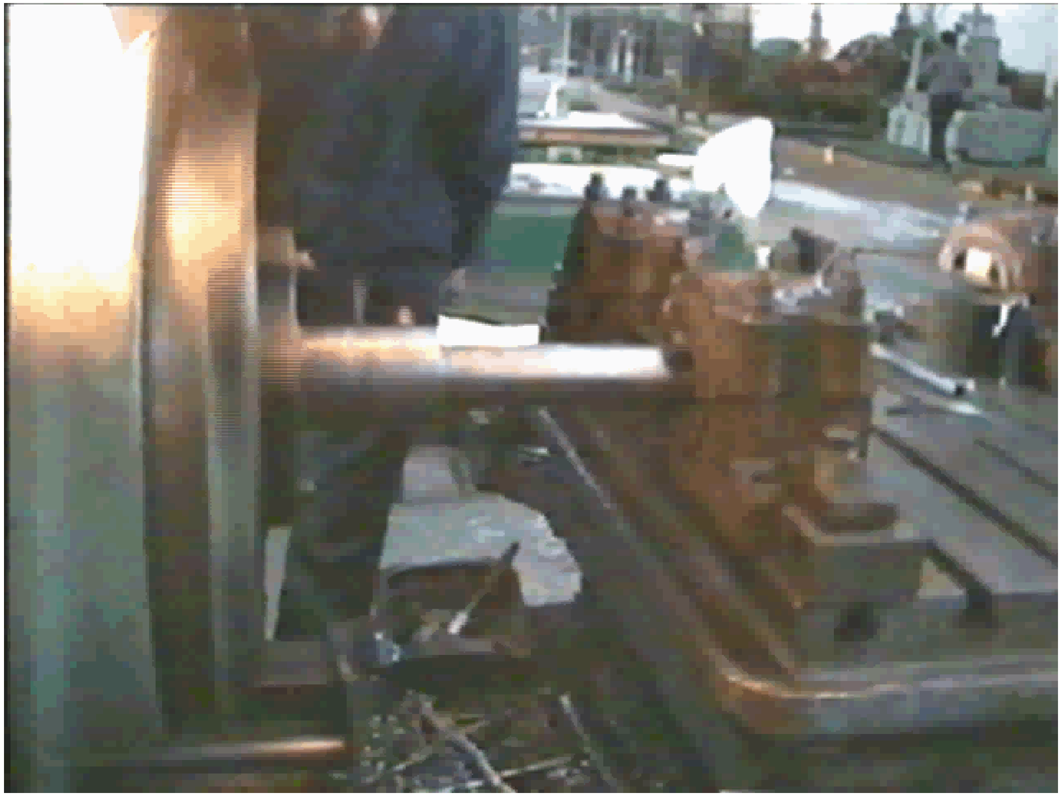


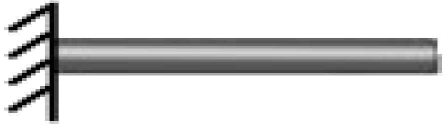
均匀分布载荷

简称均布载荷

1. 平面弯曲的概念及实例

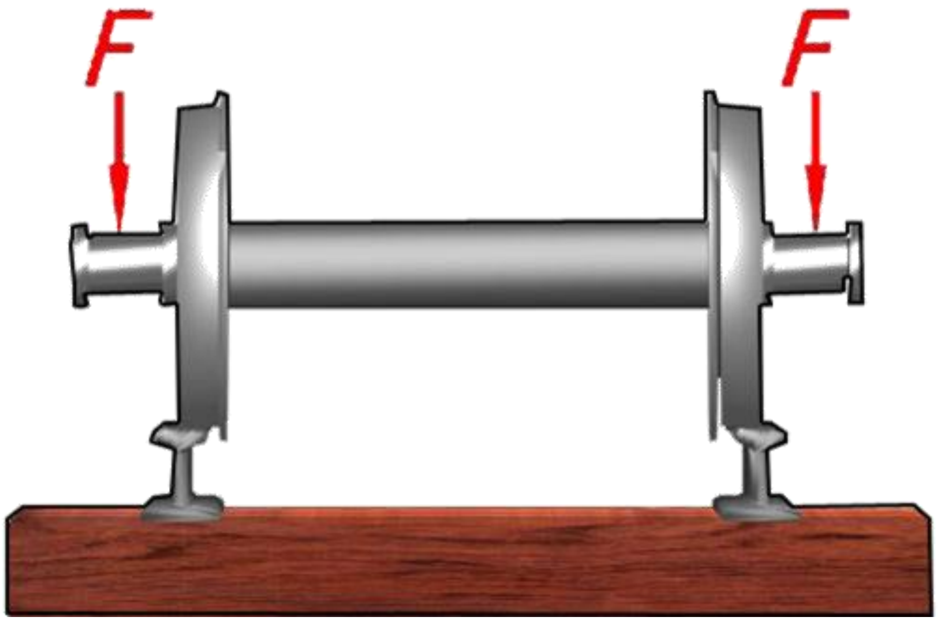
镗刀杆的简化

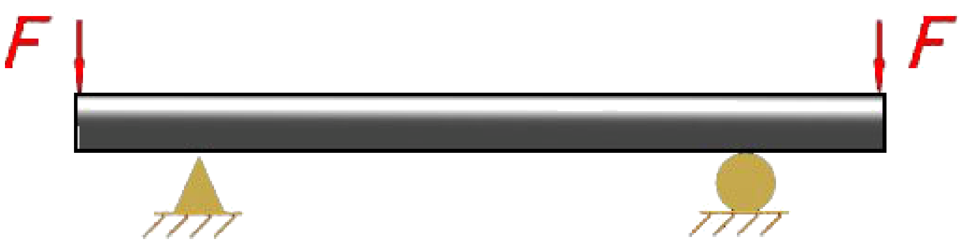




1. 平面弯曲的概念及实例

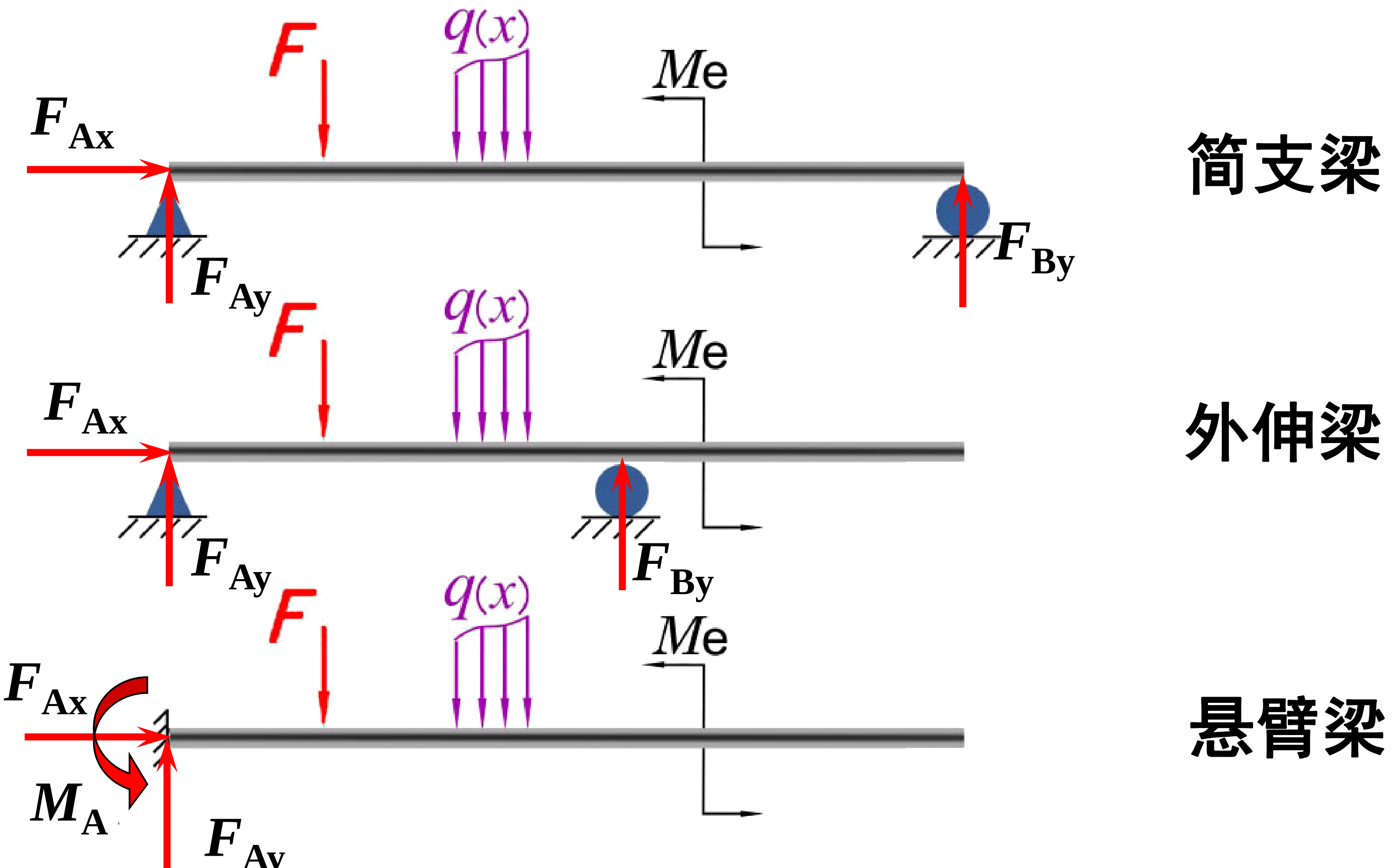
火车轮轴简化



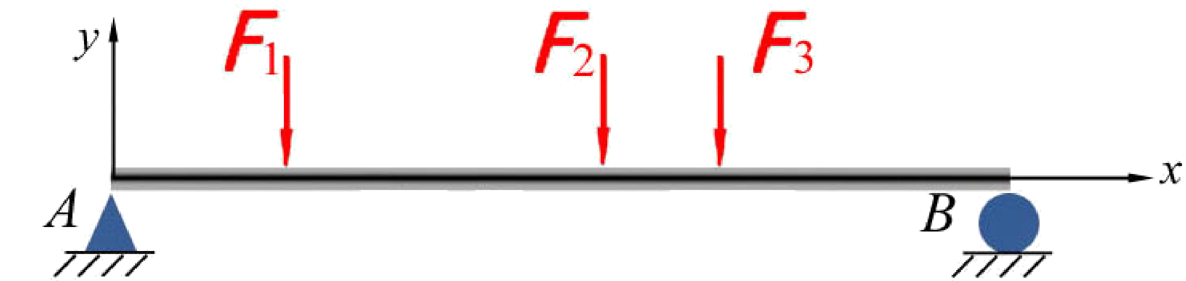


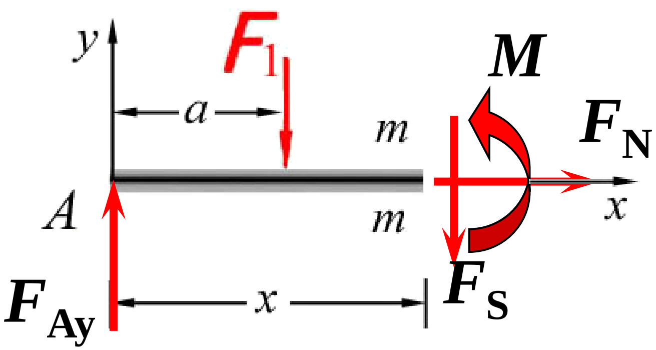
1. 平面弯曲的概念及实例

静定梁的基本形式



2.平面弯曲梁的内力分析

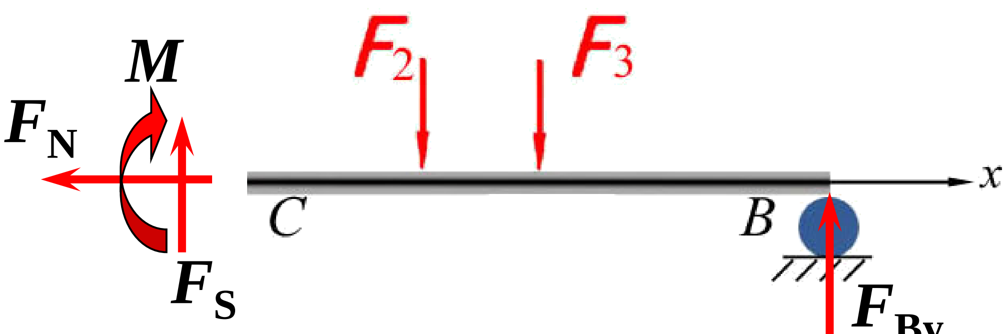




$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow F_N = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow F_S = F_{Ay} - F_1$$

$$\sum F_{Mc} = 0 \quad \Rightarrow M = F_{Ay}x - F_1(x-a)$$



F_S**剪力，平行于横截面的内力合力**

M **弯矩，垂直于横截面的内力系的合力偶矩**

2.平面弯曲梁的内力分析

- **剪力方程和弯矩方程--剪力图和弯矩图**

  - 剪力和弯矩随横截面的位置而变化：

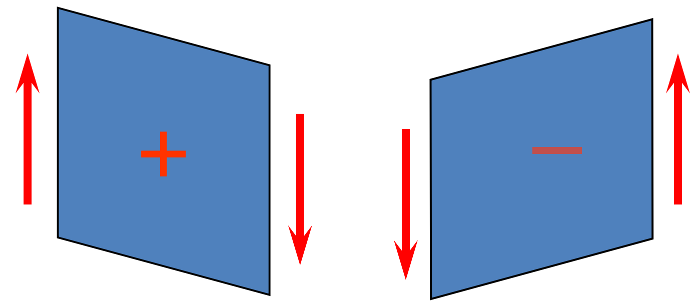
$$\left.\begin{aligned} Q &= Q(x) \\ M &= M(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{随x变化的函数}$$

  - 以x为横坐标、Q和M为纵坐标作图即得剪力图和弯矩图。

2.平面弯曲梁的内力分析

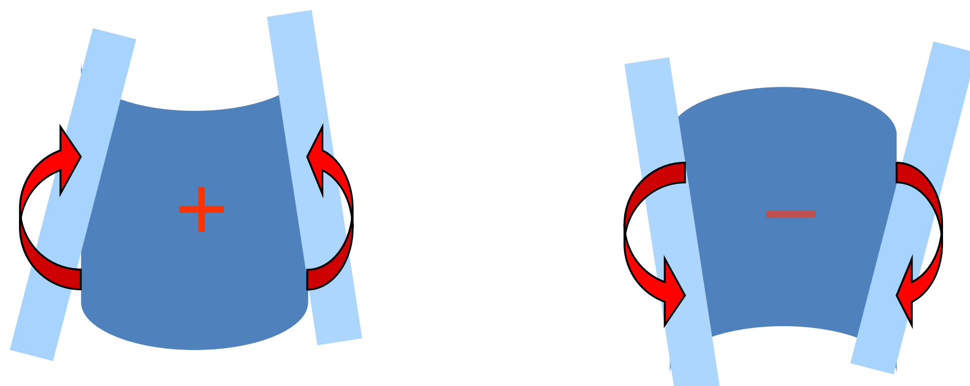
- **剪力和弯矩的符号规定**

截面上的剪力对梁上任意一点的矩为顺时针转向时，剪力为正；反之为负。



左上右下为正；反之为负

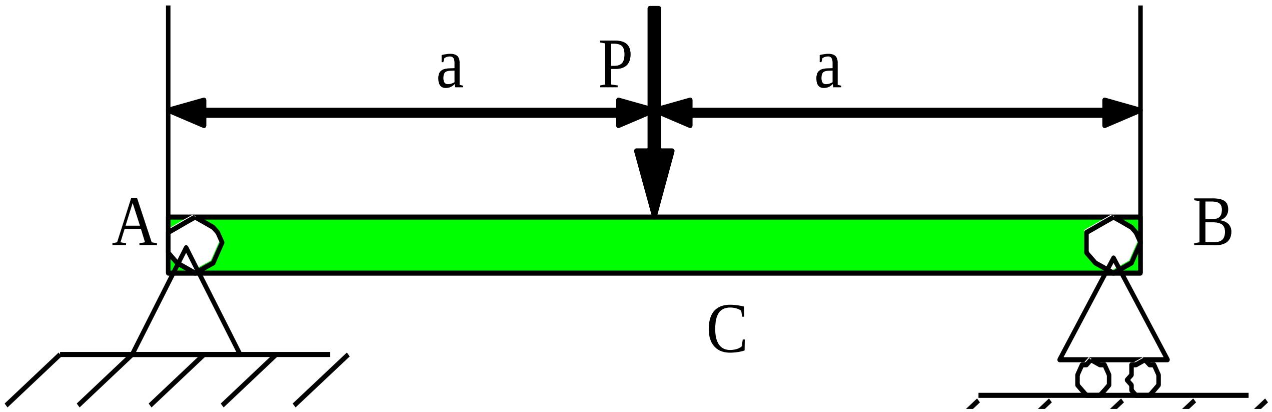
截面上的弯矩使得梁呈凹形为正；反之为负。



左顺右逆为正；反之为负

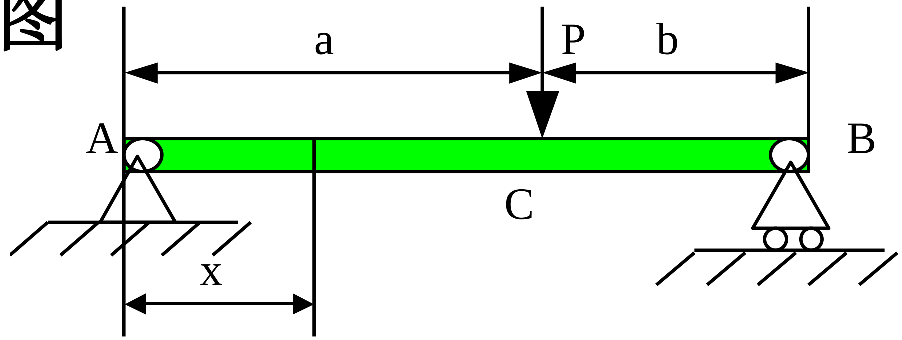
2.平面弯曲梁的内力分析

例：画简支梁的剪力图和弯矩图(Q－M图)



2.平面弯曲梁的内力分析

例：求简支梁的剪力和弯矩图



1、求反力：

2、求剪力和弯矩方程

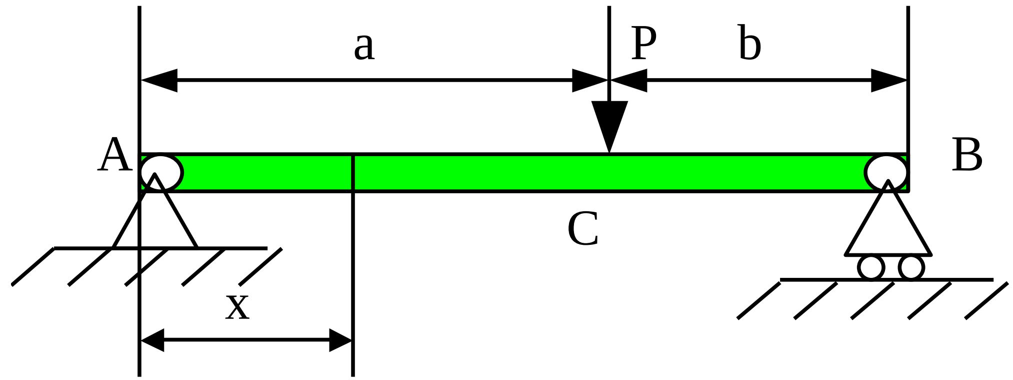
以左段作研究对象

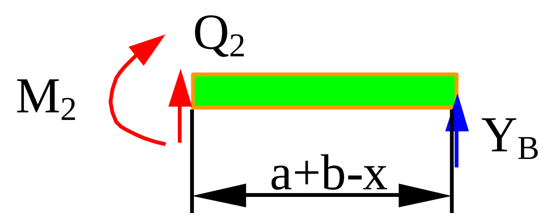
AC段 (0<x<a)

$$\begin{cases} Q_1(x) = Y_A = \dfrac{Pb}{a+b} \\ M_1(x) = Y_A x = \dfrac{Pb}{a+b}x \end{cases}$$

2.平面弯曲梁的内力分析

BC段(a<x<(a+b))

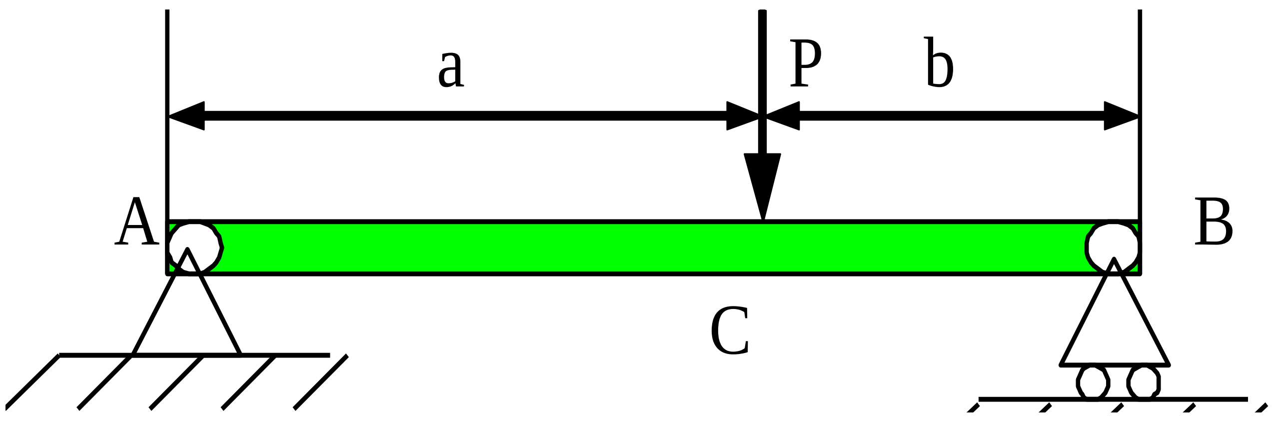




$$\begin{cases} Q_2(x) = -Y_B = -\dfrac{Pa}{a+b} \\ M_2(x) = Y_A x - P(x-a) = Y_B(a+b-x) = Pa - \dfrac{Pa}{a+b}x \end{cases}$$

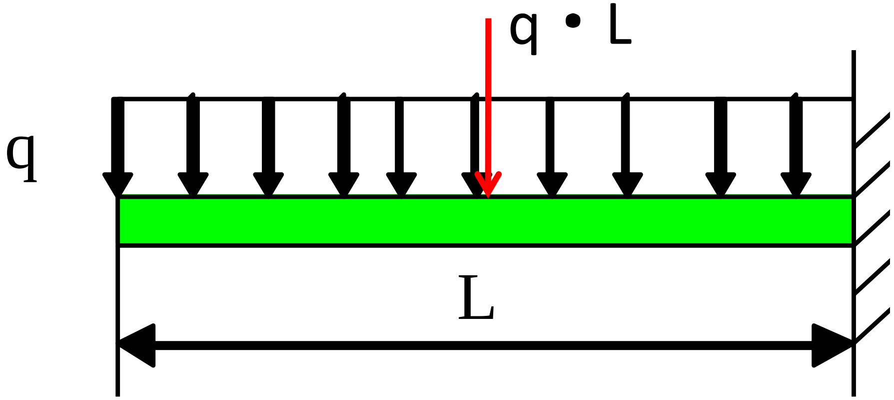
2.平面弯曲梁的内力分析

3、画简支梁的剪力图和弯矩图(Q—M图)



2.平面弯曲梁的内力分析

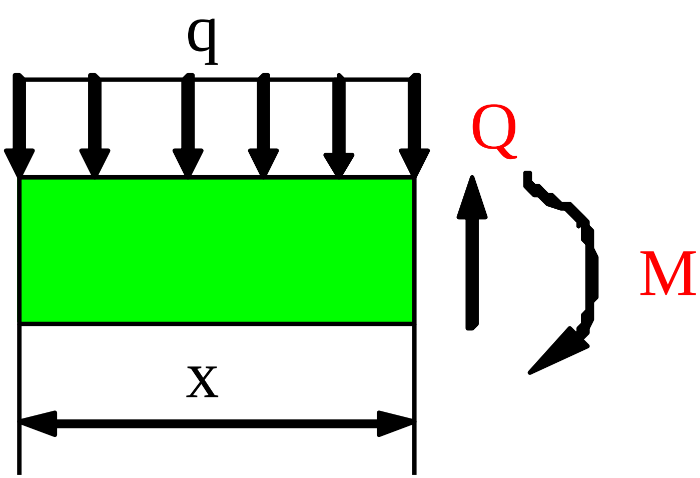
例 求悬臂梁的剪力图和弯矩图



剪力方程:

Q(x)=-qx

(0<x<L)



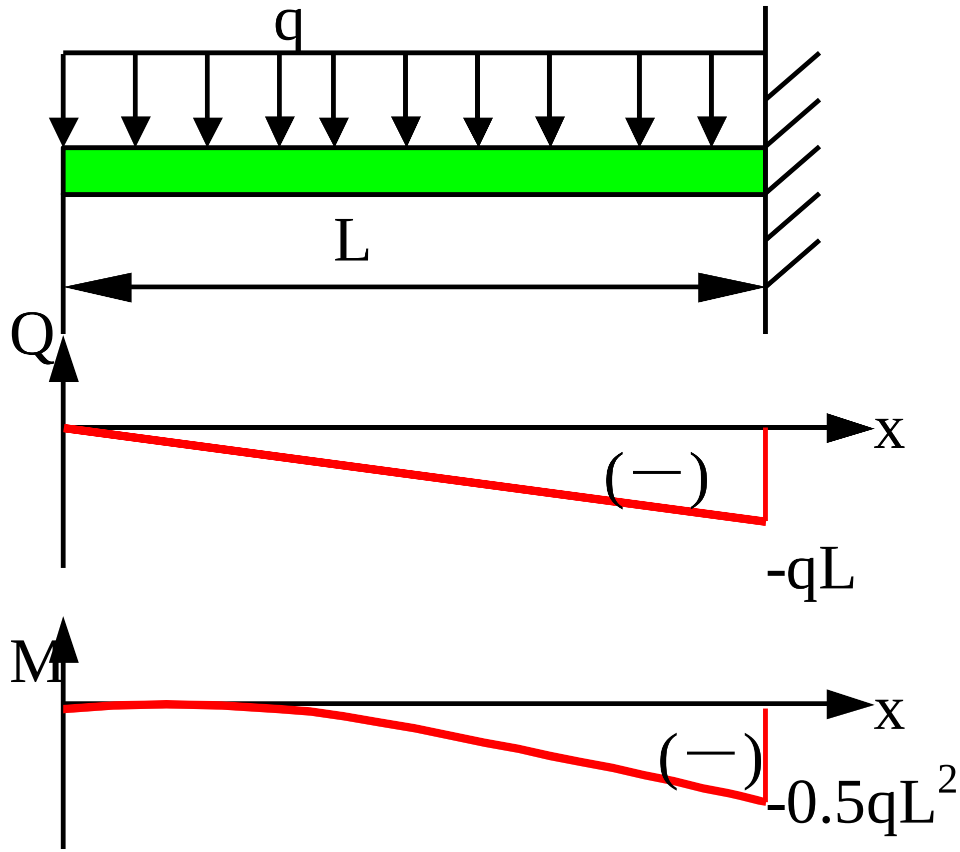
弯矩方程:

M(x)=-qx² / 2

(0<x<L)

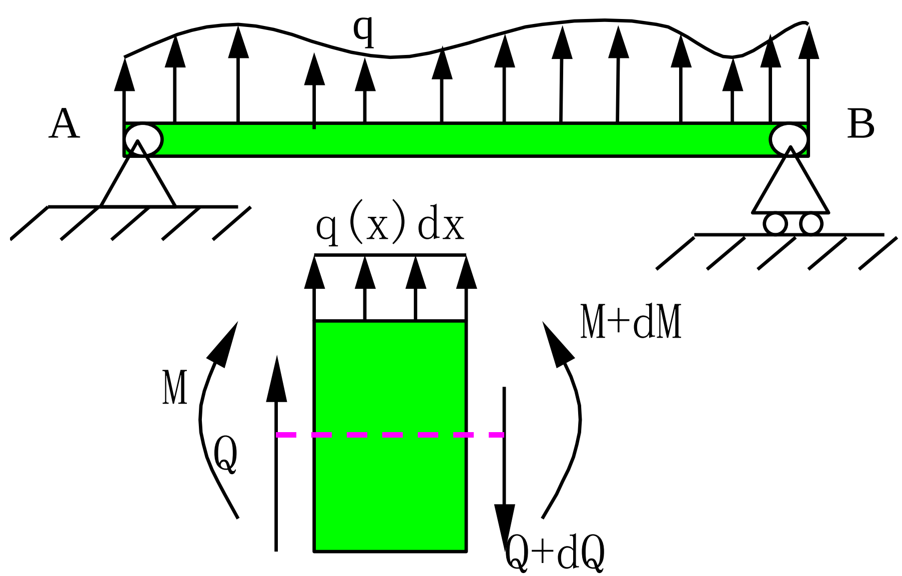
2.平面弯曲梁的内力分析

悬臂梁的剪力弯矩图（Q－M图)



2.平面弯曲梁的内力分析

- 剪力、弯矩和载荷集度间的微分关系



$$\frac{dQ(x)}{dx} = q(x)$$

剪力图上任一点的切线斜率等于梁上相应点处的载荷集度q

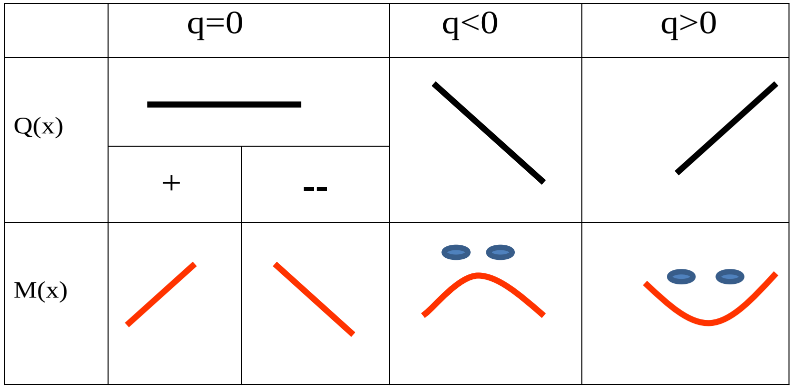
$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

弯矩图上任一点的切线斜率等于梁相应横截面上的剪力Q

2.平面弯曲梁的内力分析

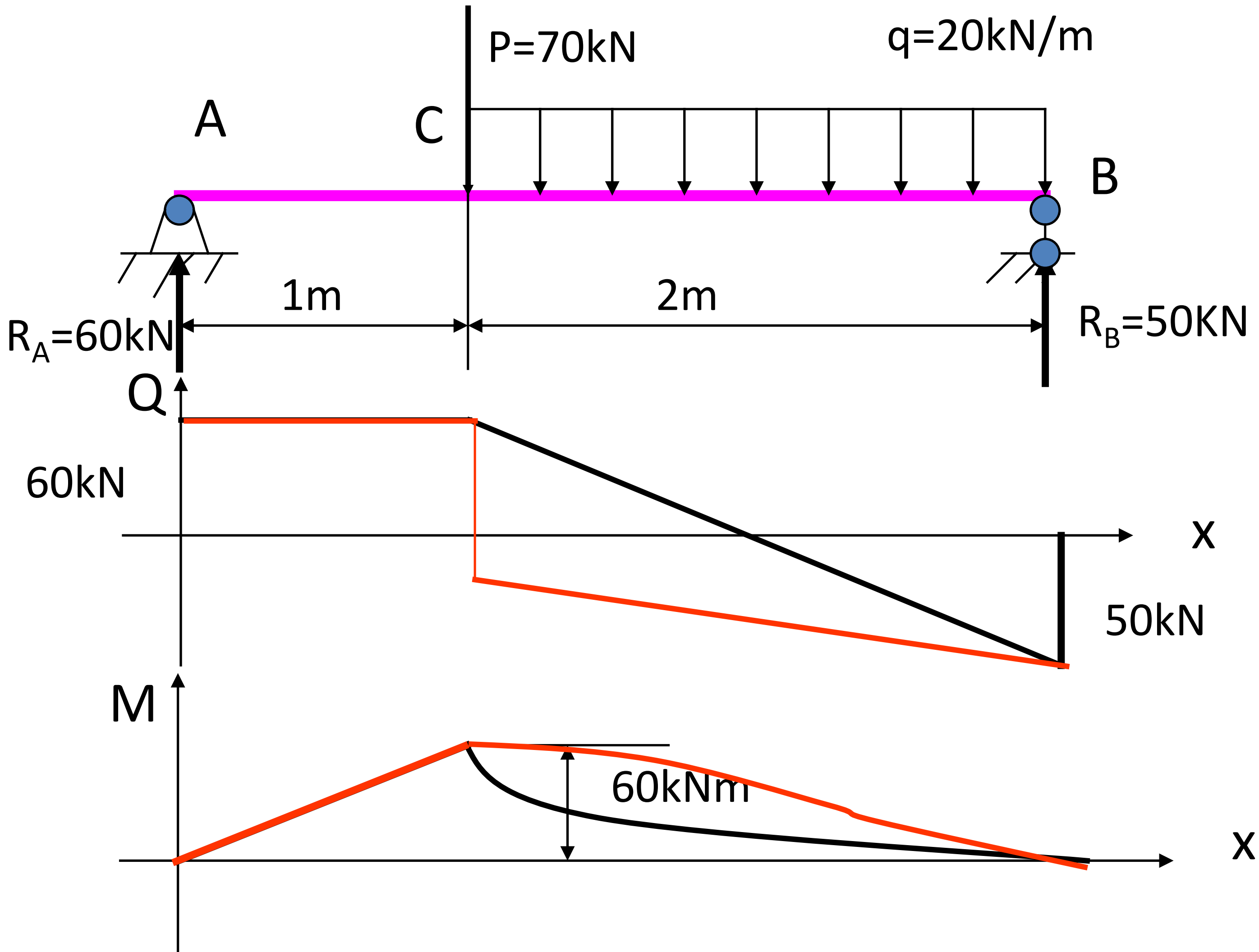
- Q-M图的规律

1. 梁上某段无分布力，Q为水平线，M为斜直线
2. 有向下的分布力，Q图递减(↘)，M为上凸(⌒)
   有向上的分布力，Q图递增(↗)，M为下凹(∪)
   如分布力均匀，Q为斜直线，M为二次抛物线
3. 在集中力作用处，Q图有突变，M图有折角
   在集中力偶处，弯矩图有突变
4. 某截面Q＝0，则弯矩为极值。

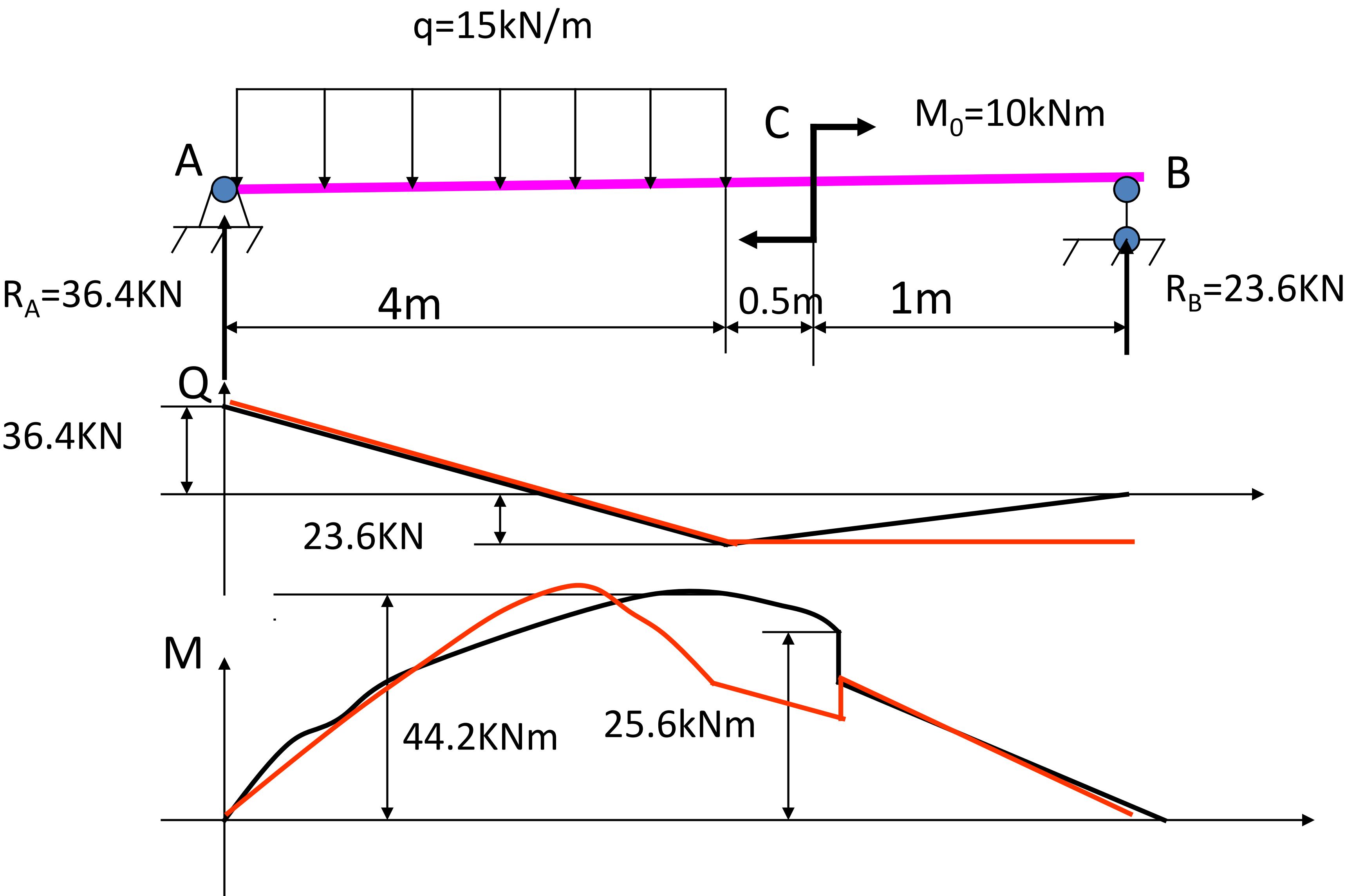


2.平面弯曲梁的内力分析

例：判断Q、M图是否有错?

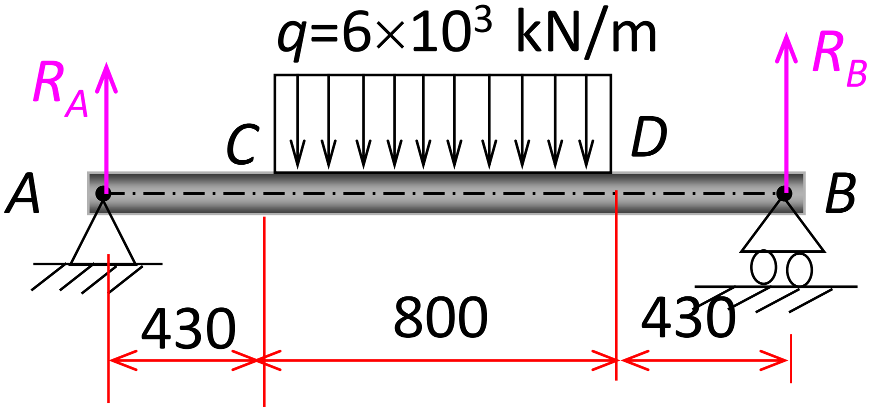


2.平面弯曲梁的内力分析



2.平面弯曲梁的内力分析

例：一受均匀载荷作用的简支梁（单位mm）。



$$R_A = R_B = 2400kN$$

$$Q_C = 2400kN$$

$$Q_D = -2400kN$$

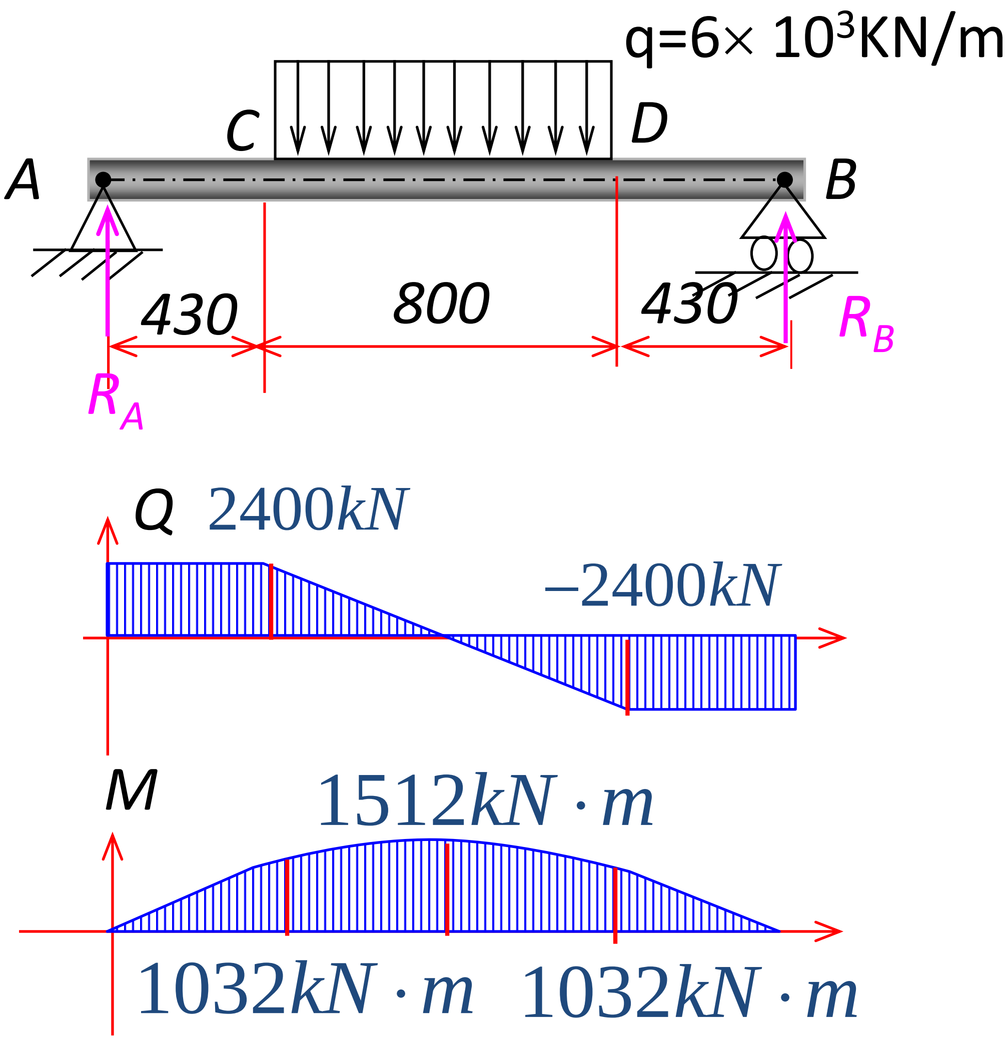
$$M_C = 2400 \times 430 = 1032kN \cdot m$$

$$M_D = 2400 \times 430 = 1032kN \cdot m$$

$$M_{\max} = 2400 \times (0.43 + 0.4) - 6 \times 10^3 \times 0.4 \times \frac{0.4}{2}$$

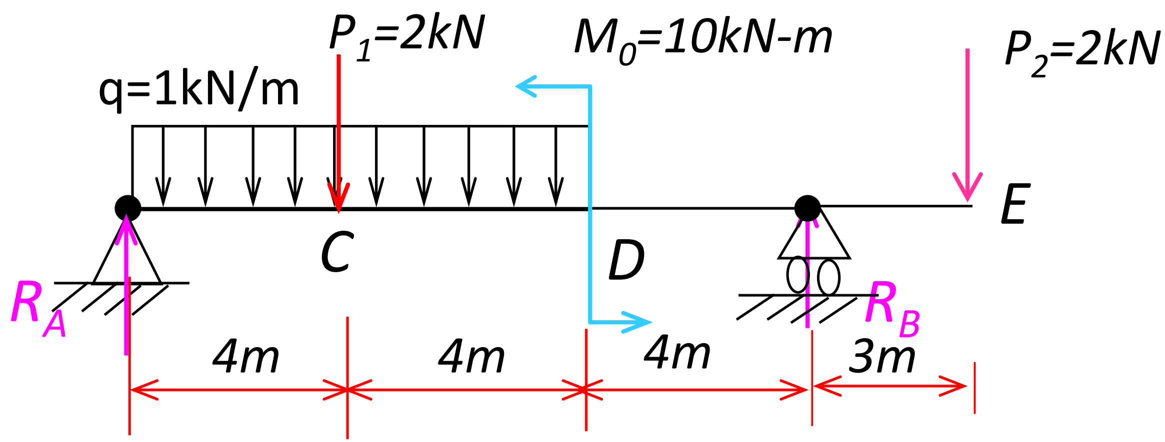
$$= 1512kN \cdot m$$

2.平面弯曲梁的内力分析



2.平面弯曲梁的内力分析

例：一外伸梁如图，画其剪力和弯矩图。



按静力平衡方程求得支座反力为：

$$\sum M_A = 0$$

$$-P_2 \times 15 + R_B \times 12 - M_0 - P_1 \times 4 - q \times 8 \times \frac{8}{2} = 0$$

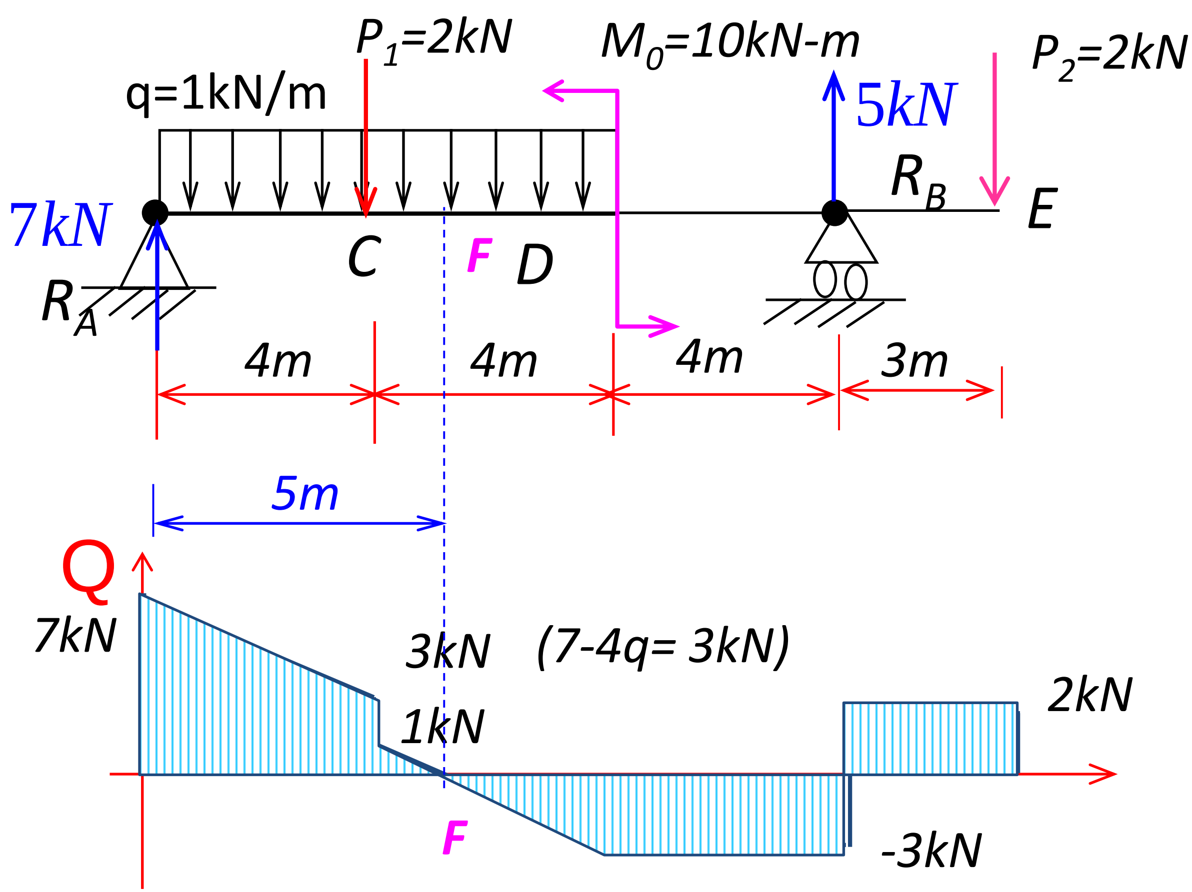
$$R_B = 5kN$$

$$\sum F_Y = 0$$

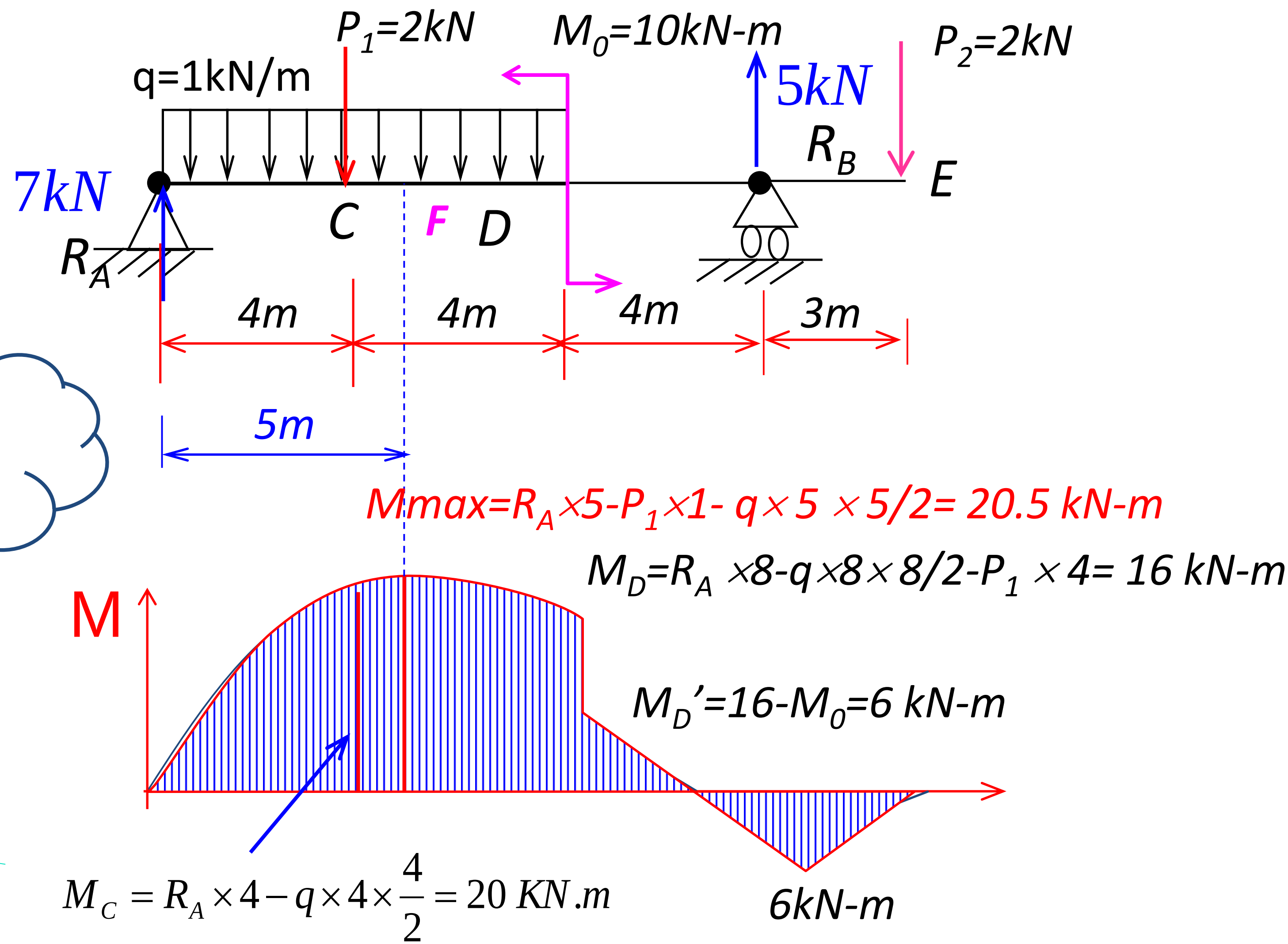
$$R_A + R_B - q \times 8 - P_1 - P_2 = 0$$

$$R_A = 7kN$$

2.平面弯曲梁的内力分析

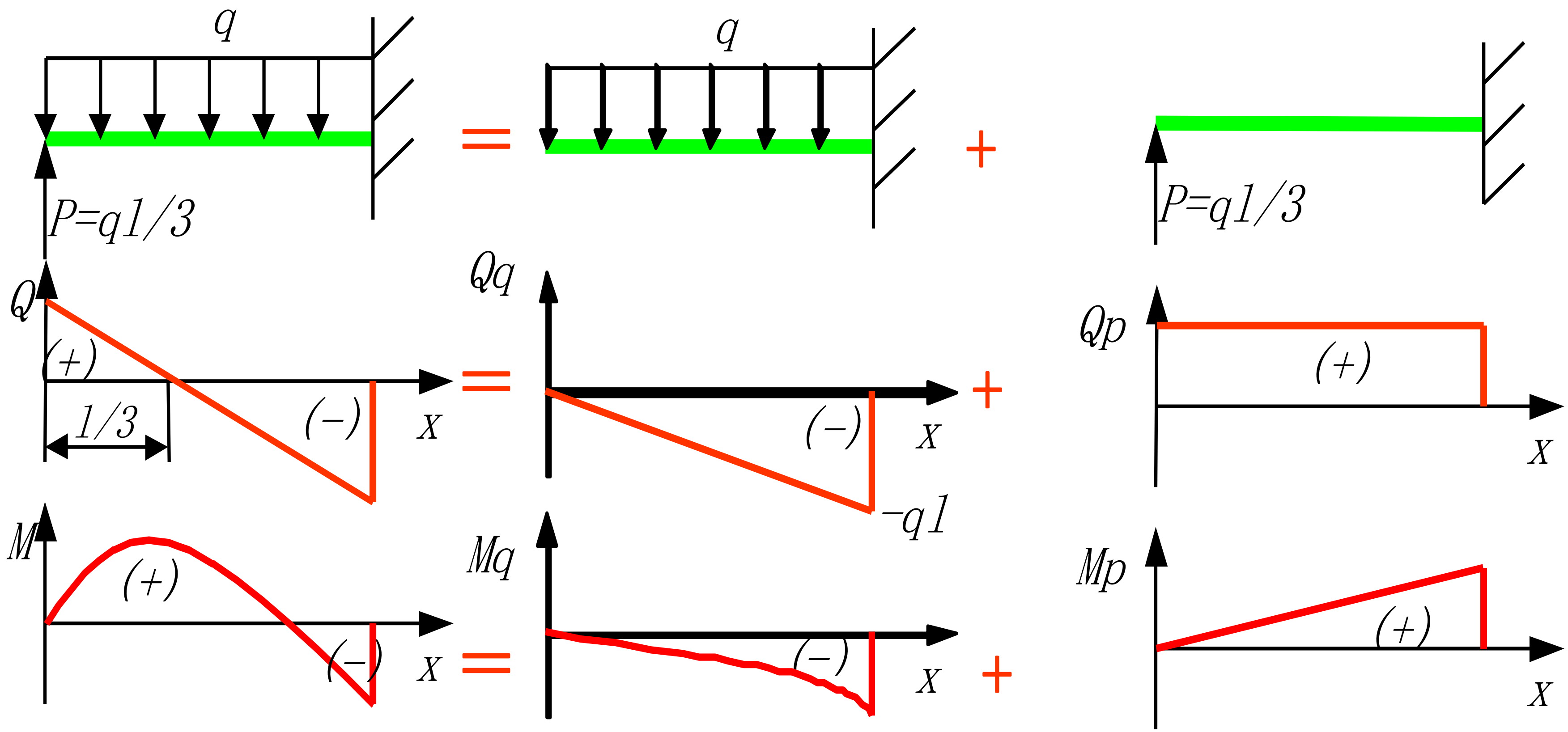


2.平面弯曲梁的内力分析

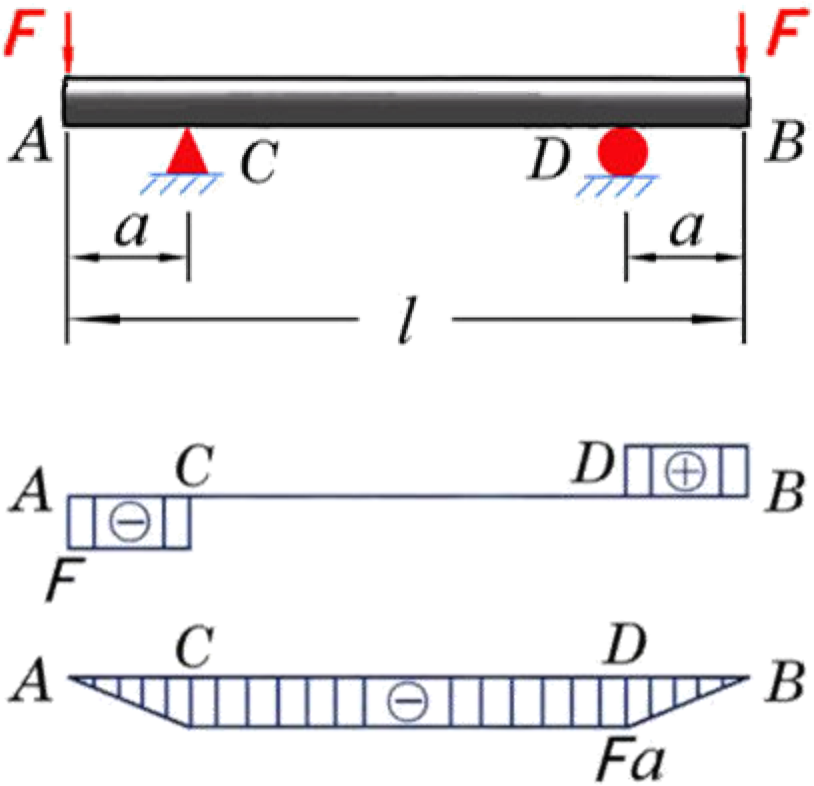


2.平面弯曲梁的内力分析

- 叠加法作Q - M图



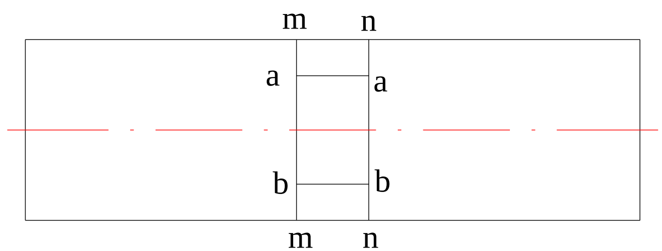
3. 平面弯曲时梁的正应力

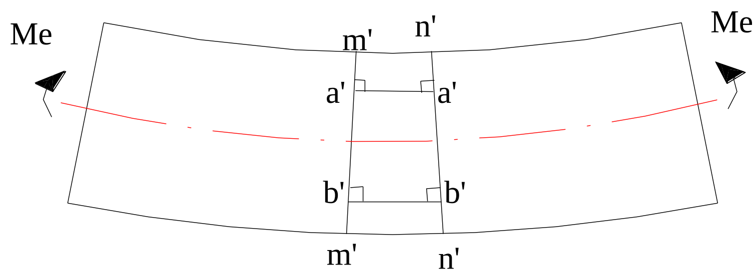


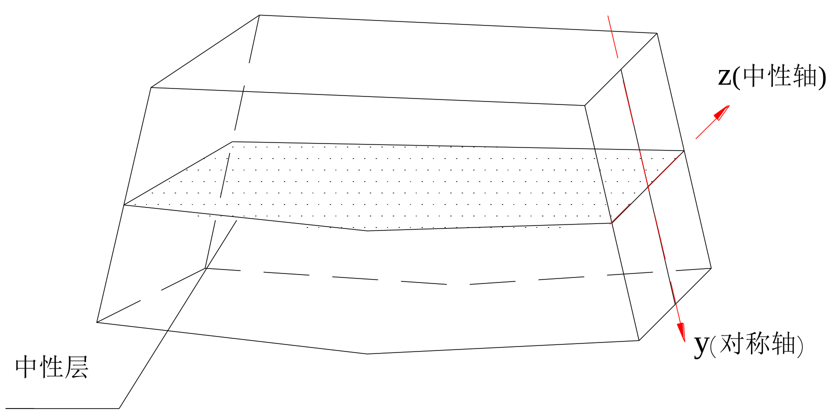
梁段CD上，只有弯矩，没有剪力——纯弯曲

梁段AC和BD上，既有弯矩，又有剪力——横力弯曲

3. 平面弯曲时梁的正应力







- 横向线仍为直线，只是转动一角度；
- 纵向线变成弧线，仍垂直变形后横向线；
- 线段bb′伸长，aa′缩短。

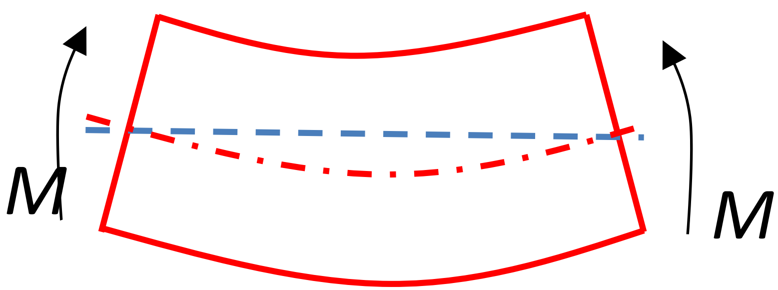
平面假设：横截面变形后仍为平面，相邻横截面作相对转动，并仍与弯曲后轴线正交。

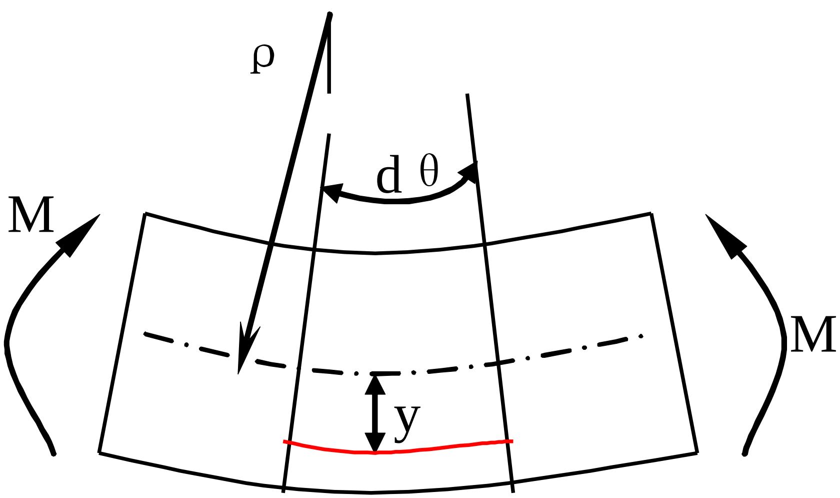
中性层：一弯曲面，不伸长，不缩短。

中性轴：中性层和横截面交线。

3. 平面弯曲时梁的正应力

- 刚性平面假设：梁在纯弯曲变形后，其横截面仍然保持平面，并与变形后的梁轴线垂直，只是绕截面内某一轴旋转了一个角度。





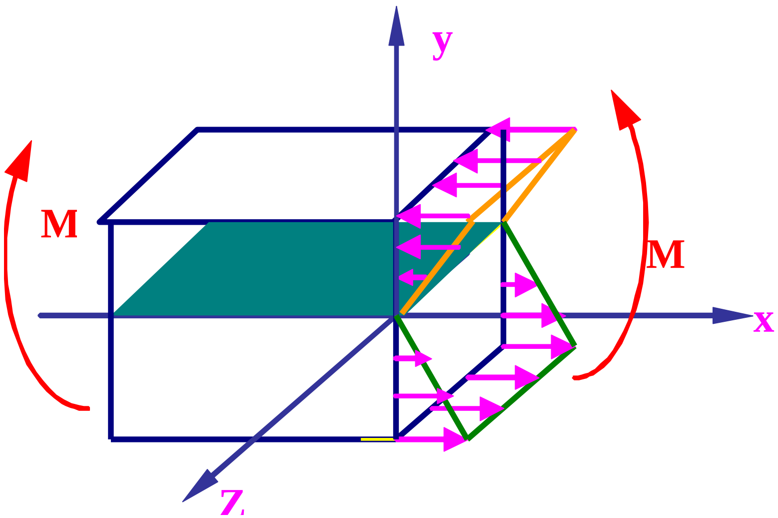
✦ 变形几何方程：

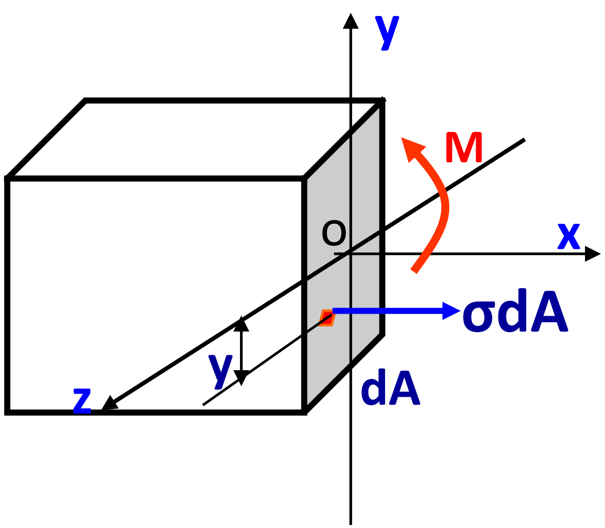
$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

✦ 应力应变方程：

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$$

3. 平面弯曲时梁的正应力





✦ 静力学关系:

$$\sum M_z = \int_A y\sigma dA = M$$

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$$

$$M = \frac{E}{\rho}\boxed{\int_A y^2 dA}$$

$$I_z = \int y^2 dA$$

（横截面对中性轴z的惯性矩）

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI_Z} \\ \sigma = \dfrac{M}{I_z} y \end{cases}$$

3. 平面弯曲时梁的正应力

- 横截面上的最大正应力

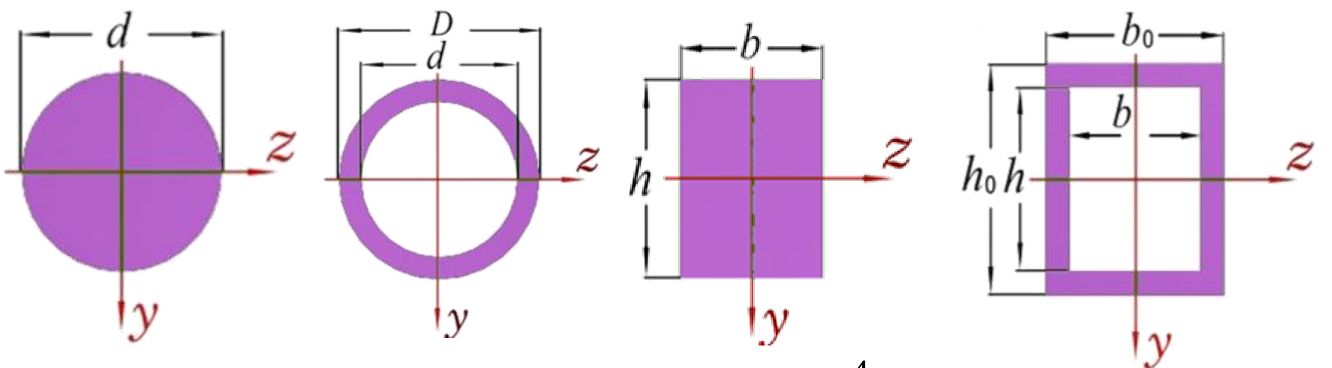
$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z}$$

定义： $W_z = \dfrac{I_z}{y_{\max}}$ 截面的**抗弯截面模量**

横截面上最大的正应力 $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{\max}}{W_z}$

3. 平面弯曲时梁的正应力

- **常见截面的 I_Z 和 W_Z**



$$\left\{\begin{aligned} I_Z &= \int_A y^2 dA \\ W_Z &= \frac{I_Z}{y_{\max}} \end{aligned}\right.$$

圆截面 $I_Z = \dfrac{\pi d^4}{64}$ $\quad W_Z = \dfrac{\pi d^3}{32}$

空心圆截面 $I_Z = \dfrac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ $\quad W_Z = \dfrac{\pi}{32D}(D^3 - d^4)$

矩形截面 $I_Z = \dfrac{bh^3}{12}$ $\quad W_Z = \dfrac{bh^2}{6}$

空心矩形截面 $I_Z = \dfrac{b_0 h_0{}^3}{12} - \dfrac{bh^3}{12}$ $\quad W_Z = (\dfrac{b_0 h_0{}^3}{12} - \dfrac{bh^3}{12})/(h_0/2)$

3. 平面弯曲时梁的正应力

- 梁弯曲时正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

根据这一确定条件可进行三项工作：

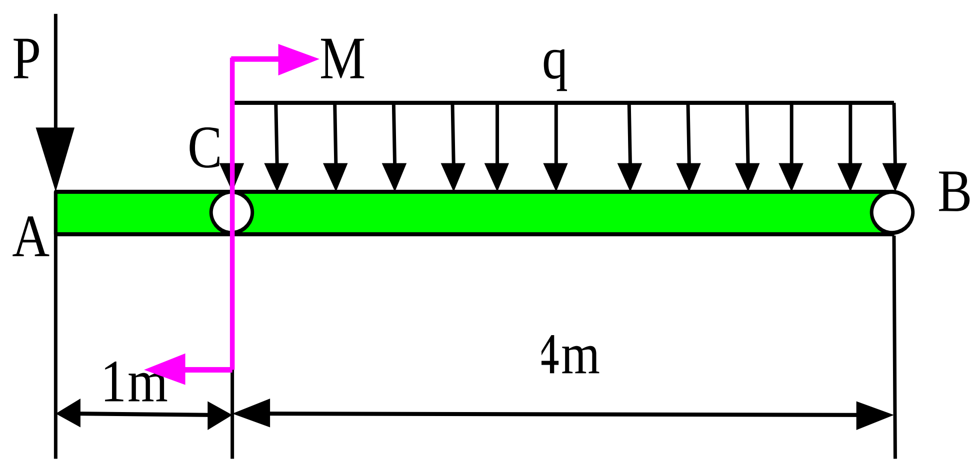
1 设计截面

2 强度校核

3 计算许可载荷

3. 平面弯曲时梁的正应力

- 例：某梁由工字钢制成，材料为Q235A.F，$[\sigma]$=160MPa, P=20KN，q=10KN/m，M=40KN·m，试确定工字钢的型号。



3. 平面弯曲时梁的正应力

STEP 1：画受力图，求支座反力

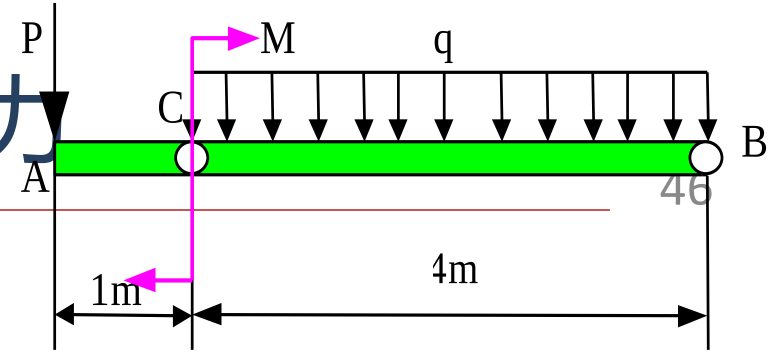
$$\sum M_C = 0 \quad 20\times1-40+Y_B\times4-10\times4\times2=0$$

$$Y_B = 25KN$$

$$\sum M_B = 0 \quad 20\times5-40-Y_c\times4+10\times4\times2=0$$

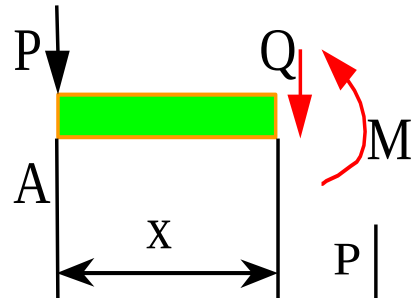
$$Y_C = 35KN$$

3. 平面弯曲时梁的正应力

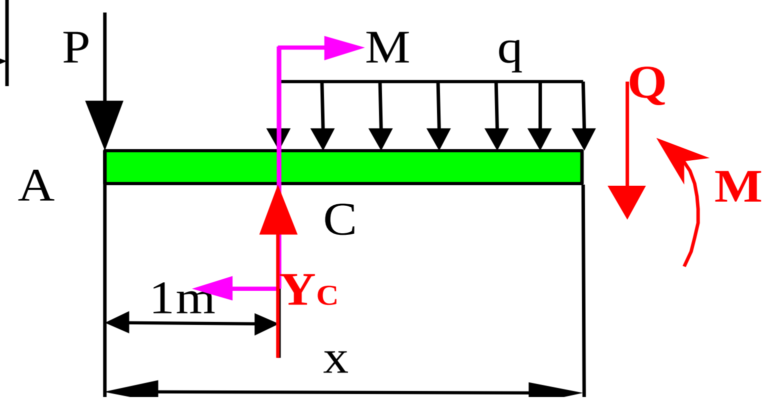


STEP2：求出剪力和弯矩

AC段：（0<x<1）



$$\begin{cases} Q_{AC} = -20 \ \ \mathrm{KN} \\ M_{AC} = -20x \ \mathrm{KN} \cdot \mathrm{m} \end{cases}$$

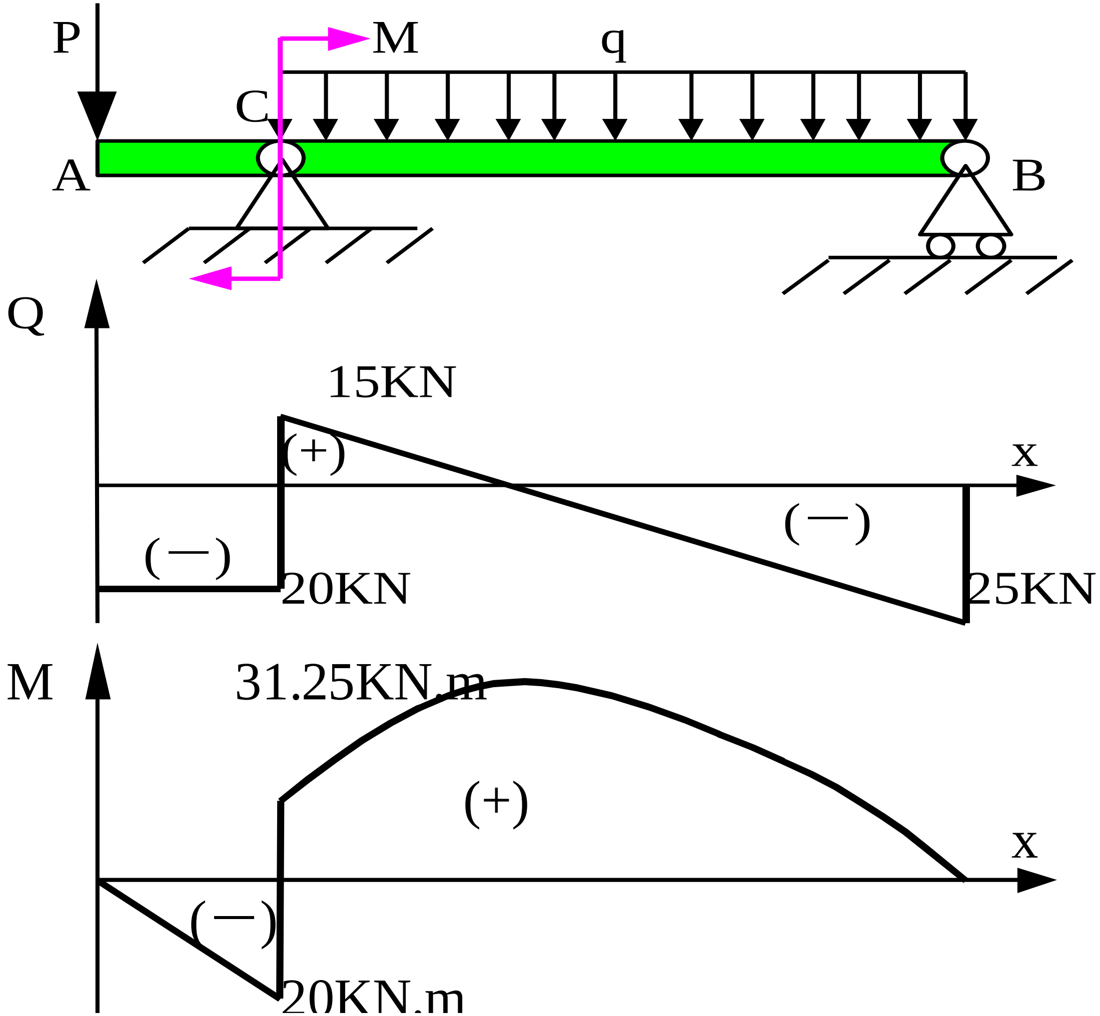


CB段：（1<x<5）

$$\begin{cases} Q_{BC} = 35 - 20 - 10(x-1) = 25 - 10x \quad \mathrm{KN} \\ M_{BC} = 35(x-1) + 40 - 20x - \dfrac{10(x-1)^2}{2} \ \mathrm{KN} \cdot \mathrm{m} \end{cases}$$

3. 平面弯曲时梁的正应力

STEP 3：画Q、M图



3. 平面弯曲时梁的正应力

STEP 4：求最大W_Z

$$W_Z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{31.25}{160} = 195 \times 10^3 mm^3$$

查表P293，应选用20a工字钢，W_Z＝237×10^3 mm^3

3. 平面弯曲时梁的正应力

- 提高梁抗弯曲的主要措施

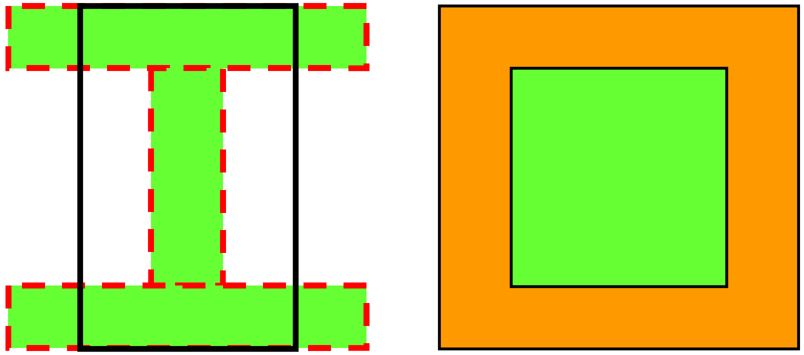
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

1. 选择合理截面，增加抗弯模量
2. 合理布置支座和载荷作用位置(减少M_{max})
3. 分散载荷
4. 采用变截面梁

3. 平面弯曲时梁的正应力

- 选择合理截面，增加抗弯模量

以比值W_Z/A来衡量截面的合理程度，该值越大，截面越经济合理。



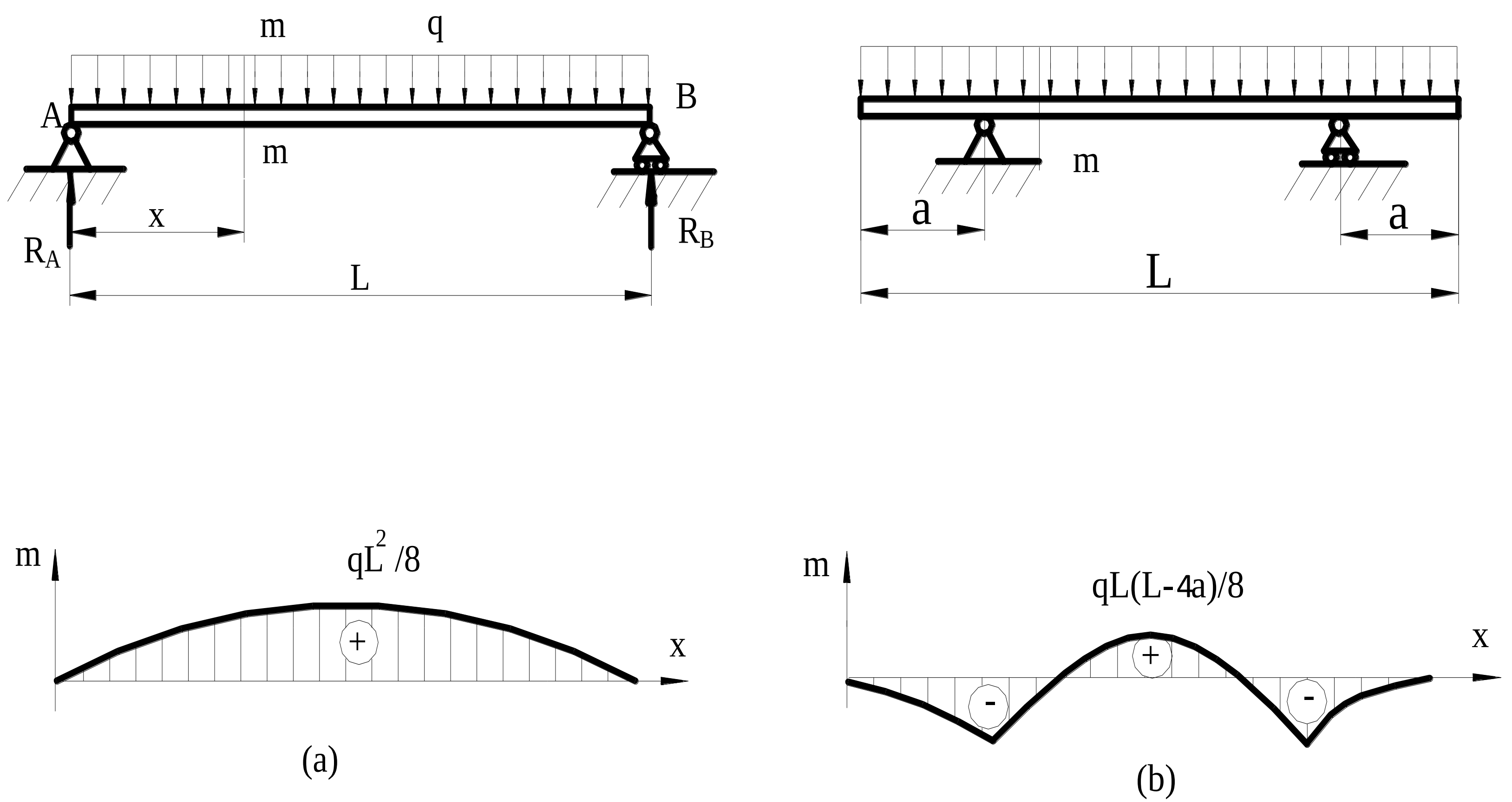
矩形截面：$$\frac{W_z}{A}=\frac{bh^2/6}{bh}=\frac{h}{6}=0.167h$$

圆形截面：$$\frac{W_z}{A}=\frac{\pi d^3/32}{\pi d^2/4}=\frac{d}{8}=0.125d$$

工字形截面：$$\frac{W_z}{A}=(0.27-0.31)h$$

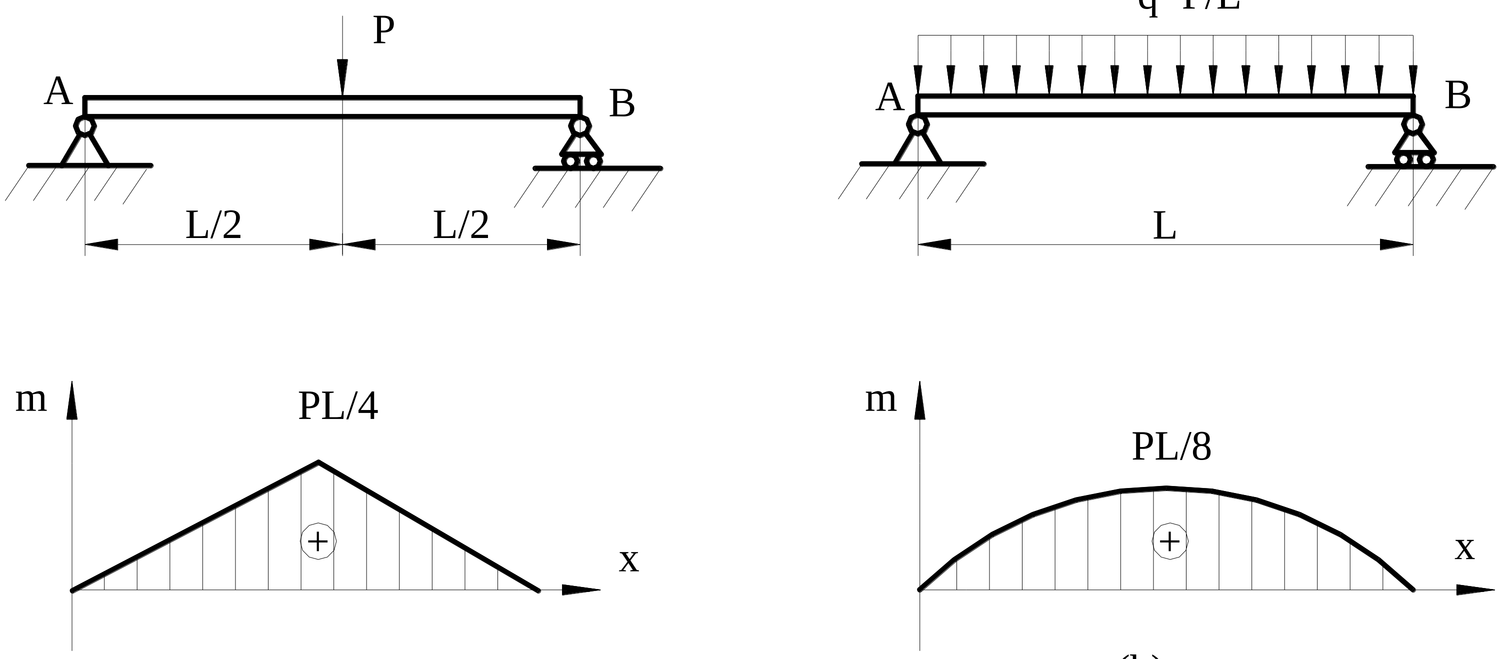
3. 平面弯曲时梁的正应力

- 合理布置支座和载荷作用位置(减少M_{max})



3. 平面弯曲时梁的正应力

- 分散载荷

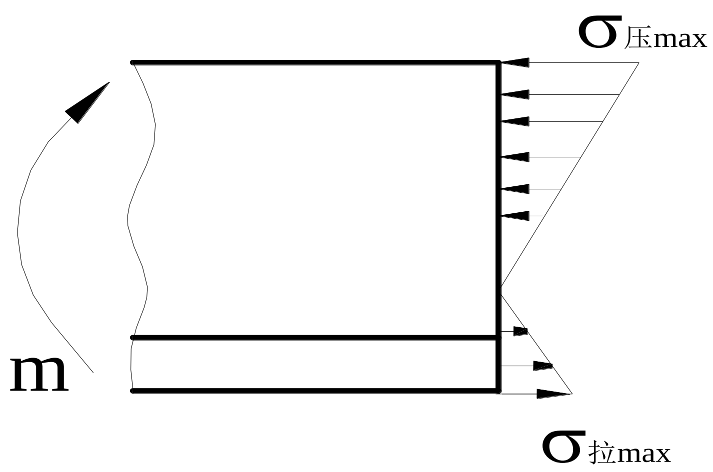


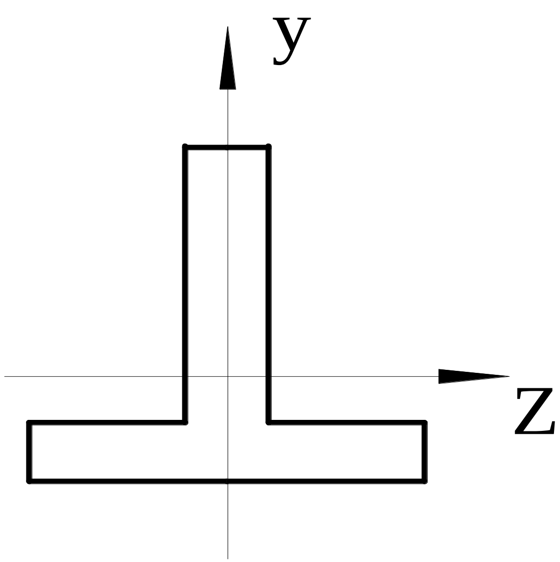
(a) (b)

3. 平面弯曲时梁的正应力

- 采用变截面梁

材料性能抗拉和抗压不同时，应采用不对称的中性轴，如铸铁：

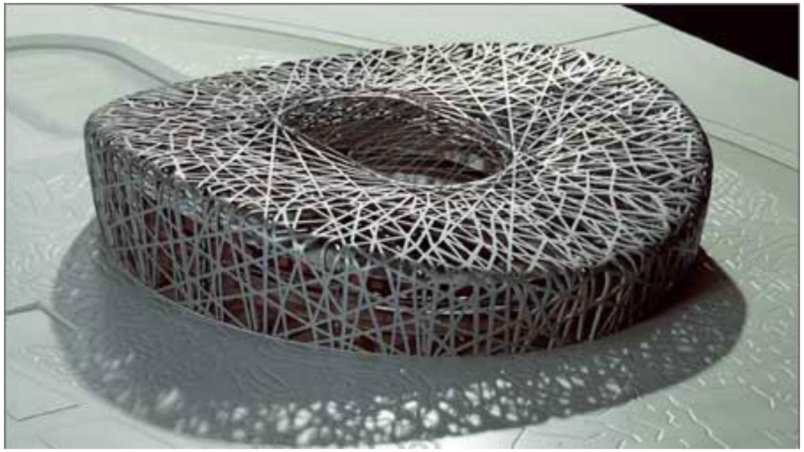




$$\frac{\sigma_{压max}}{\sigma_{拉max}}=\frac{\frac{My_1}{I_z}}{\frac{My_2}{I_z}}=\frac{[\sigma_{压}]}{[\sigma_{拉}]}$$

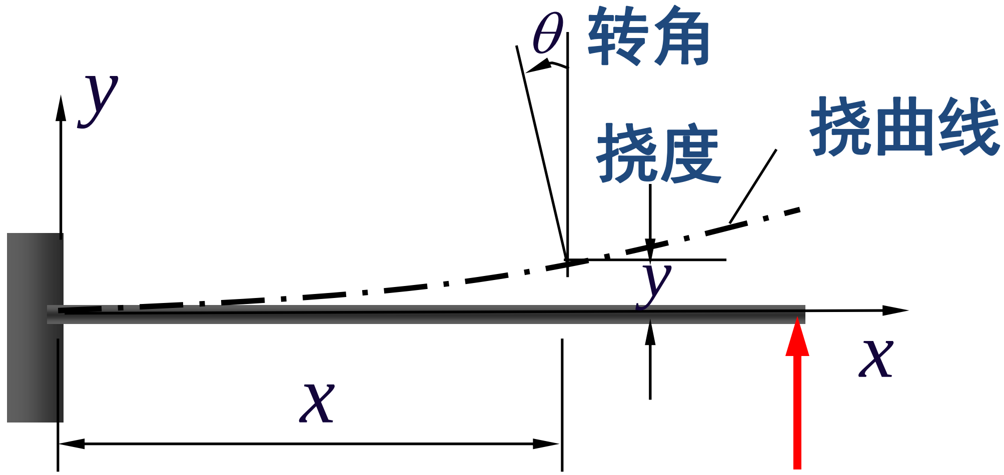
4. 平面弯曲梁的变形

- 屋顶的设计必须考虑弯曲变形



4. 平面弯曲梁的变形

弯曲变形的挠度和转角



挠曲线方程：

$$y = y(x)$$

挠度y：截面形心在y方向的位移

y 向上为正

转角 θ：截面绕中性轴转过的角度。θ 逆向为正

由于小变形，截面形心在x方向的位移忽略不计

挠度转角关系为： $\theta \approx \tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$

4. 平面弯曲梁的变形

挠曲线近似微分方程

- **挠曲线可用y=f(x)表示，则转角**

$$tg\theta = f'(x) \approx \theta$$

- **挠曲线曲率：** $$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$$

- **数学定义曲率：** $$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \pm y''$$

4. 平面弯曲梁的变形

- 综合两式，得挠曲线近似微分方程：

$$\pm y'' = \pm \frac{d^2 y}{d^2 x} \approx \frac{M(x)}{EI}$$

- 积分一次得转角方程：

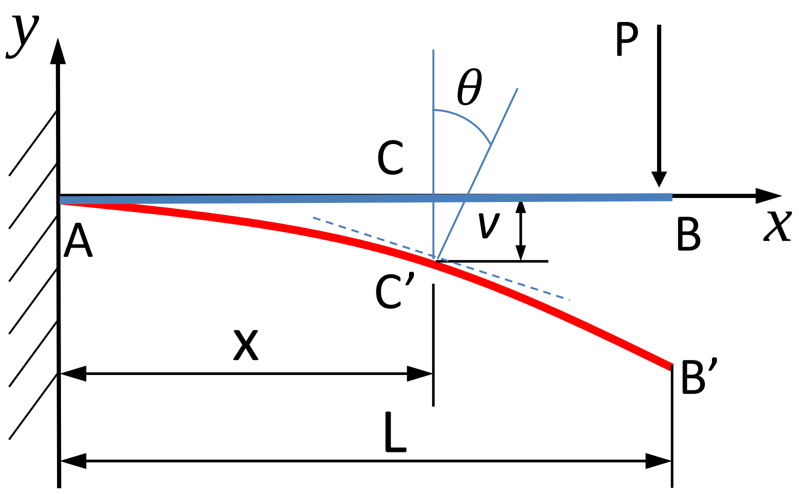
EIθ=∫ M(x)dx+C

- 再积分得挠度方程：

EIy=∫∫ M(x)dx.dx+Cx+D

4. 平面弯曲梁的变形

- 积分法求梁的变形



1. 列出弯矩方程

$$M(x) = -P(L-x)$$

2. 建立挠曲线微分方程

$$EIy'' = -P(L-x)$$

两次积分：

$$EIy' = -PLx + \frac{1}{2}Px^2 + C$$

$$EIy = -\frac{1}{2}PLx^2 + \frac{1}{6}Px^3 + Cx + D$$

当x=0时，y’ =0，因此C=0

当x=0时，y=0，因此D=0

4. 平面弯曲梁的变形

3. 确定转角和挠度方程

- 转角方程： $EIy' = -PLx + \frac{1}{2}Px^2$
- 挠度方程： $EIy = -\frac{1}{2}PLx^2 + \frac{1}{6}Px^3$

4. 确定最大转角和最大挠度

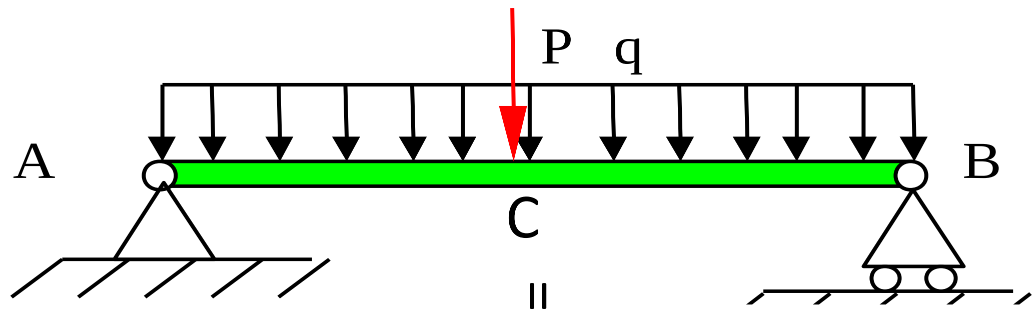
- 发生在x=L处

$$\begin{cases} \theta_{\max} = \dfrac{pL^2}{2EI} \\ y_{\max} = \dfrac{pL^3}{3EI} \end{cases}$$

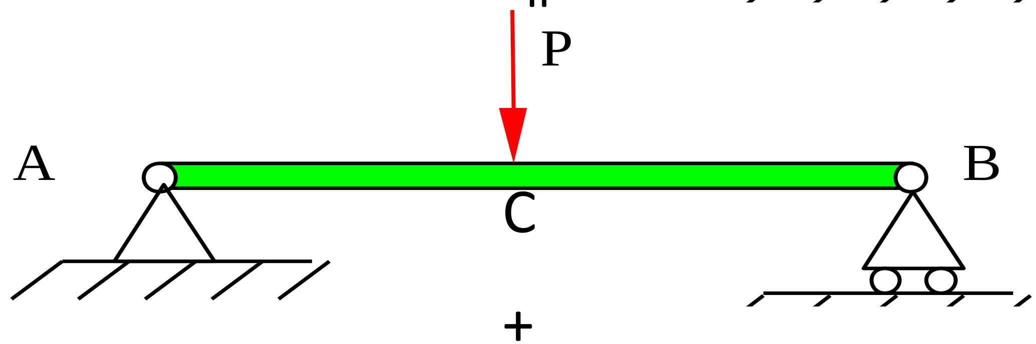
4. 平面弯曲梁的变形

- 叠加法求梁的变形

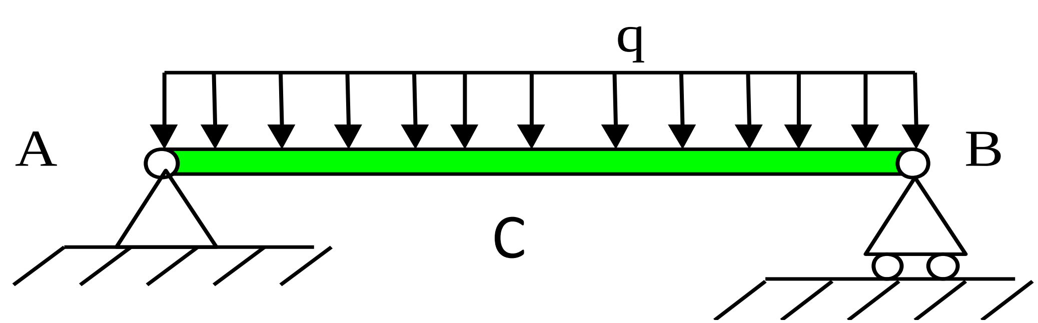
$y_{max}=y_{pc}+y_{qc}$



$$y_{pc}=-\frac{pl^3}{48EJ}$$



$$y_{qc}=-\frac{5ql^4}{384EJ}$$



4. 平面弯曲梁的变形

- 刚度条件:

$$\begin{cases} y_{\max} \leq [y] \\ \theta_{\max} \leq [\theta] \end{cases}$$

- 提高梁抗弯刚度的主要途径

1 减少跨度，或增加支座;

2 选用合理截面形状。

第四章的重点与要点

（1）掌握Q、M方程的写法，Q、M图的画法,注意内力符号

（2）惯矩I_z和抗弯截面模量W_z

矩形
$$\begin{cases} I_z = \dfrac{bh^3}{12} \\ w_z = \dfrac{bh^2}{6} \end{cases}$$

圆形
$$\begin{cases} I_z = \dfrac{\pi D^4}{64} \\ W_z = \dfrac{\pi D^3}{32} \approx 0.1 D^3 \end{cases}$$

（3）弯曲正应力强度条件

作业

- 4 -1(b,c,f)
- 4-2(a\b)
- 4-7
- 4-8
- 4-15