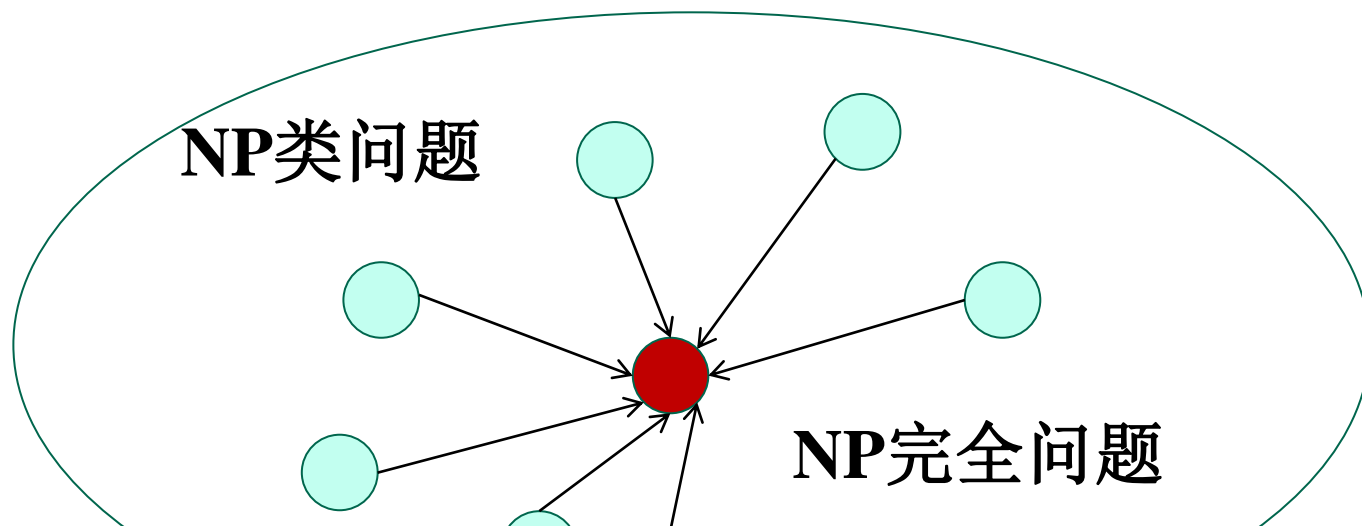


1.3 NP完全性理论

P类问题:能在多项式时间内解决的问题。

NP类问题:在多项式的时间里验证一个解的问题。

NPC问题:它是一个NP问题；所有的NP问题都可以约化到它。



<https://www.bilibili.com/video/av52735582?from=search&seid=5853840023803791337>

<https://www.bilibili.com/video/av19085452>

确定性算法： 设A是求解问题的一个算法,如果在算法的整个执行过程中,每一步只有一个确定的选择,并且对于同一输入实例运行算法,所得的结果严格一致.

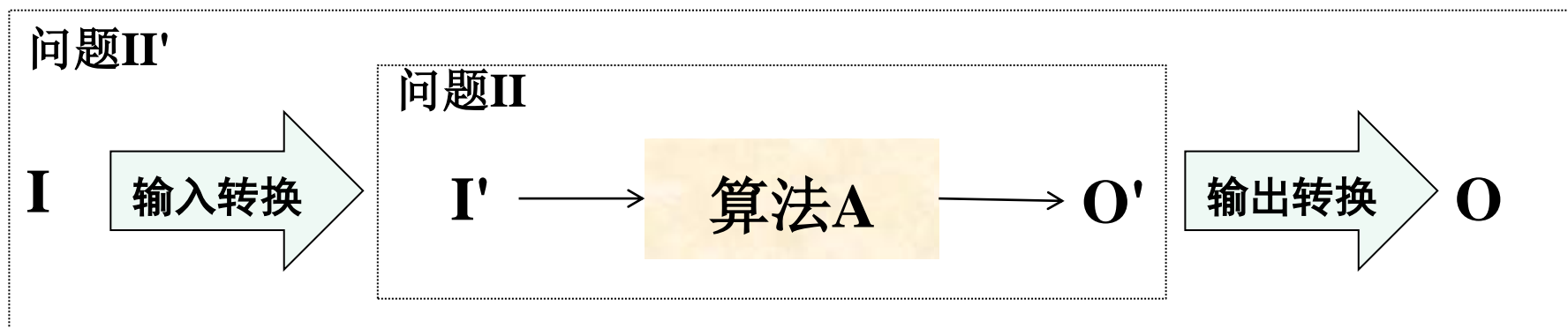
P类问题:对于某个判定问题II, 对于规模为 n 的输入, 能够在 $O(n^k)$ 时间内运行一个确定性算法求解得到yes或no的答案, 其中 k 为某一确定常数。

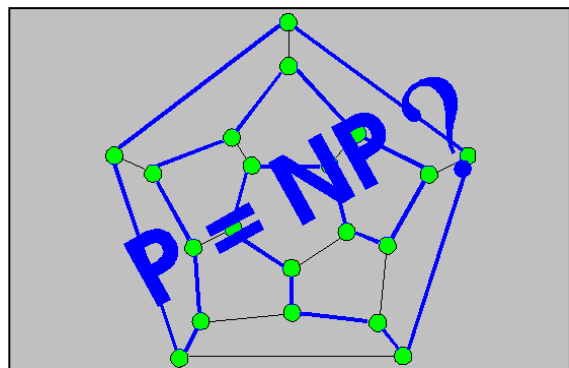
非确定性算法：设A是求解问题的一个算法，如果算法以如下猜测并验证的方式工作，算法A是非确定算法。

- (1)猜测阶段:对问题的输入实例产生一个任意字符串y, 在算法的每一次执行y的值可能不同,猜测以一种非确定性的形式工作;
 - (2)验证阶段:用一个确定性算法验证:
 - a)检查在猜测阶段产生的串y是否是合适的形式，如果不是，算法停止得到no;
 - b)如果y是合适的形式，再验证它是否是问题的解，如果是算法停止得到yes，否则算法停止得到no。
-

NP类问题:对于某个判定问题II, 对于规模为 n 的输入, 能够在 $O(n^k)$ 时间内运行一个非确定性算法求解得到yes或no,其中 k 为某一确定常数, 该判定问题II是一个NP类问题。

NP完全问题: 令II是个判定问题, 如果问题II属于NP类问题, 并且对NP类问题中的每个问题II', 都有(规约) $II' \propto_p II$, 则称判定问题II是个NP完全问题。





“NP完全”问题至今为止既没有人找出求解NP完全问题的**多项式时间算法**，也没有人能够证明对这类问题不存在多项时间算法。

如果任何NP完全问题可以在多项式时间内解决，那么所有NP问题都有一个多项式时间算法。

[旅行商问题，旅行推销员问题、货郎担问题，简称为TSP问题]
设有 n 个城市，已知任意两城市之间距离，现有一推销员想从某一城市出发经过每一城市（且只经过一次）最后又回到出发点，问如何找一条最短路径。

设城市集合 $v=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $c=(c_{ij})$ 为代价矩阵,要求找一条周游路径使路径长度最小.

与此相应的判定问题可描述为:

城市集合 $v=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $c=(c_{ij})$ 代价矩阵,对给定限界 b ,
问: 是否存在周游路线,其路径长度 $\leq b$?

当 m 和 c_{ij} 的值确定后,就得到问题的一个实例.

使用近似算法或解决某种易处理问题的特例，而不是寻求得问题确切解。

[背包问题] 给定一组物品，每种物品都有自己的重量和价格，在限定的总重量内，如何选择才能使得物品的总价格最高。

[布尔可满足性（简称SAT）问题]是用来解决给定的布尔方程式，是否存在一组变量赋值，使问题为可满足。例如：一个表达式： $x \vee y \wedge \neg z = 1$ ？如果能， x, y, z 分别等于什么，表达式被满足。

[图着色问题]给定一个无向图 $G = (V, E)$ ，其中 V 为顶点集合， E 为边集合，图着色问题即为将 V 分为 K 个颜色组，每个组形成一个独立集，即其中没有相邻的顶点。其优化版本是希望获得最小的 K 值。

课后练习

- **P7 算法分析题1: 1-1, 1-3, 1-4, 1-5, 1-8**
- **P8 算法实现题1: 1-1,1-2**

世界七大数学难题——千禧年难题

➤2000年初美国克雷数学研究所的科学顾问委员会选定了七个“千年大奖问题”，每个“千年大奖问题”的解决都可获得百万美元的奖励。

➤ NP 完全问题，霍奇猜想，**庞加莱猜想**，黎曼假设，杨-米尔斯理论，纳维-斯托克斯存在性与光滑性，贝赫和斯维讷通-戴尔猜想

➤英国著名数学家迈克尔·阿蒂亚宣称用简单而全新的方法证明了黎曼猜想，将于9月24日在2018年度海德堡获奖者论坛上宣讲
