第十二章 电磁感应

（electromagnetic induction）

华东理工大学物理系

作者:葛自明

1820年：奥斯特实验　电流（运动电荷）→ 磁

1822年：法拉第　磁 $\xrightarrow[\text{条件 ？}]{\text{可能性 ？}}$ 电

1831年：法拉第电磁感应定律

揭示了电与磁的联系

科学研究：大胆假设小心求证

1865年麦克斯韦在前人研究基础上，提出电场和磁场是一个统一整体即宏观的电磁场理论，电磁理论突出特点是研究与“场”有关的问题。

制造出电动机、发动机，促成第二次工业革命（需求推动，不唯应用）

法拉第(Michael Faraday)1791-1867，英国物理学家和化学家

法拉第以精湛的实验和敏锐的观察力，经十余年努力于1831年首次观察到电流变化时产生的感应现象，接着做了一系列的实验，以揭示感应现象的奥秘。

法拉第：创造性地提出了场的思想，磁场这一名称是法拉第最早引入的（创新：唯物与唯心之别）。他是电磁理论的创始人之一，后又相继发现电解定律，物质的抗磁性和顺磁性，以及光的偏振面在磁场中的旋转。

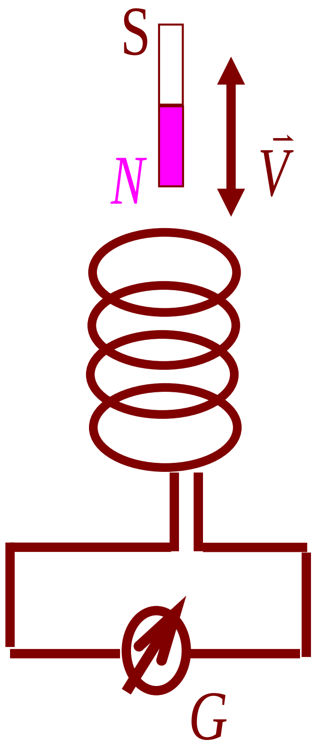
1845年诺埃曼给出电磁感应定律的数学公式。

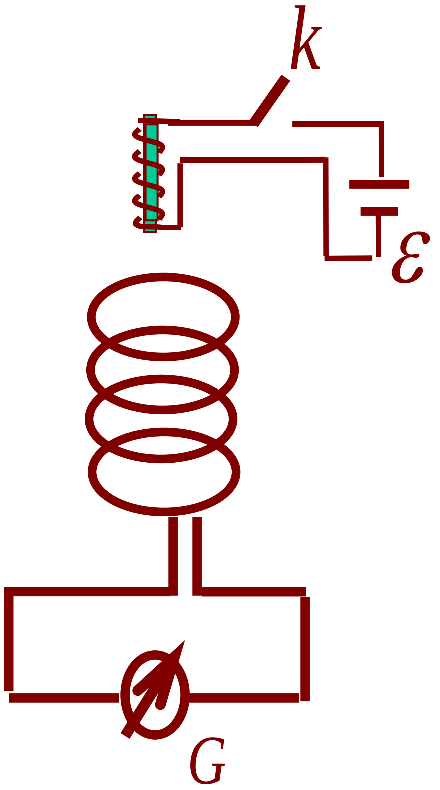
物理模型（图像）；数学模型（定量实验检验）；理论；指导实验。

第十二章　电磁感应

§ 12. 1　法拉第电磁感应定律

1.　电磁感应的基本实验现象

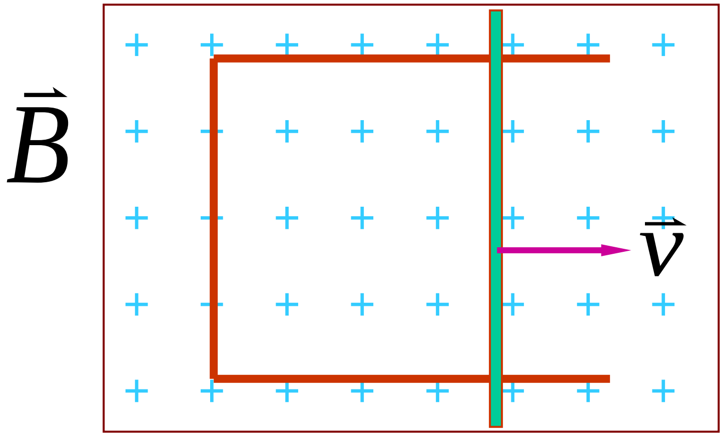


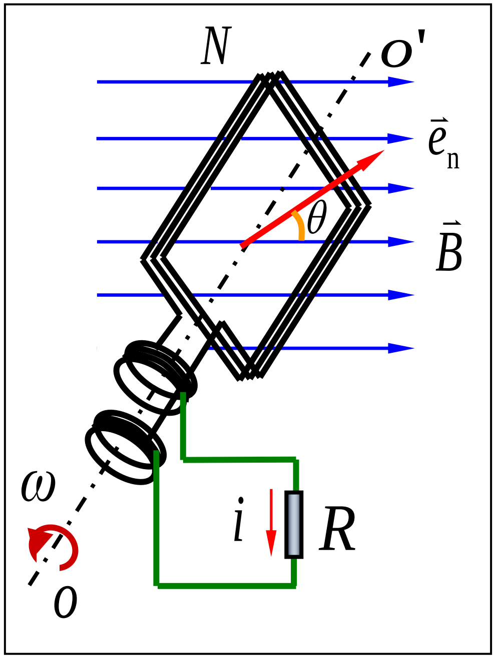


感应电流与N-S的
磁性、速度有关；

与有无磁介质、
电源极性有关。

现象：1）有磁；2）有导体；3）有运动或变化。产生电！





实验表明：

匀强磁场中，穿过线圈所包围面积内的磁通量发生变化时，在回路中将产生电流，该电流称为感应电流，这种现象称为电磁感应。

有感应电流，即存在电动势，为什么（是什么力推动电荷）？

2. 法拉第电磁感应定律

——导体回路中的感应电动势 ε的大小与穿过导体回路的磁通量的时间的变化率成正比。

$$\varepsilon = \boxed{-}\frac{d\Phi}{dt}$$

单位:1V=1Wb/s

负号表示感应电动势总是反抗（阻碍）磁通的变化。

$$\Rightarrow \Phi_m = \int_S \vec{B}\bullet d\vec{S} = \int_S B\cdot dS\cos\alpha$$

结论: Φ_m 变化时回路中产生 I_i

B 变化

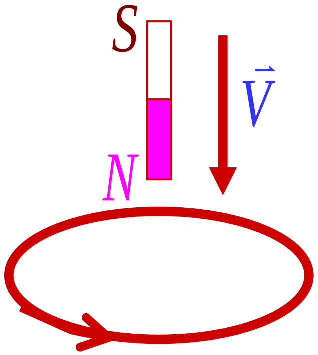
S 变化

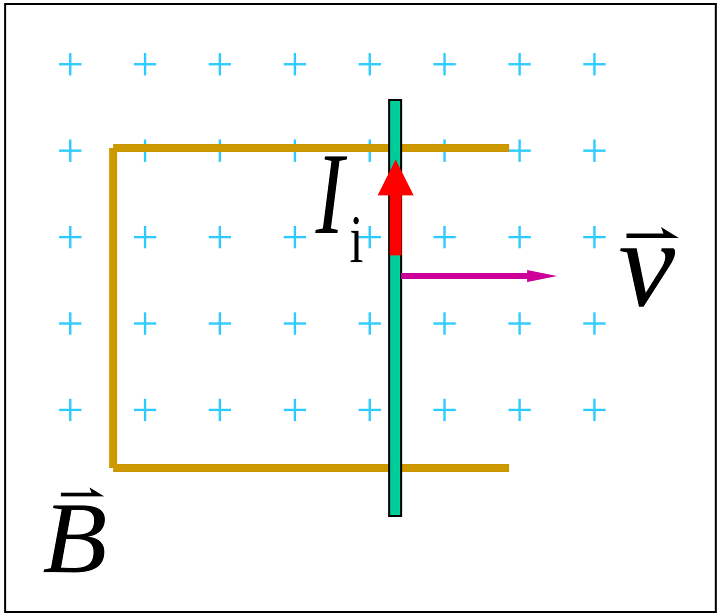
α 变化

实验表明：穿过线圈所包围面积内的磁通量发生变化时，在回路中将产生的电流，该电流称为感应电流，这种现象称为电磁感应.

3. 楞次定律

—— 闭合的导线回路中所出现的感应电流的方向，总是使它自己所激发的磁场反抗（阻碍）任何引发电磁感应的原因。



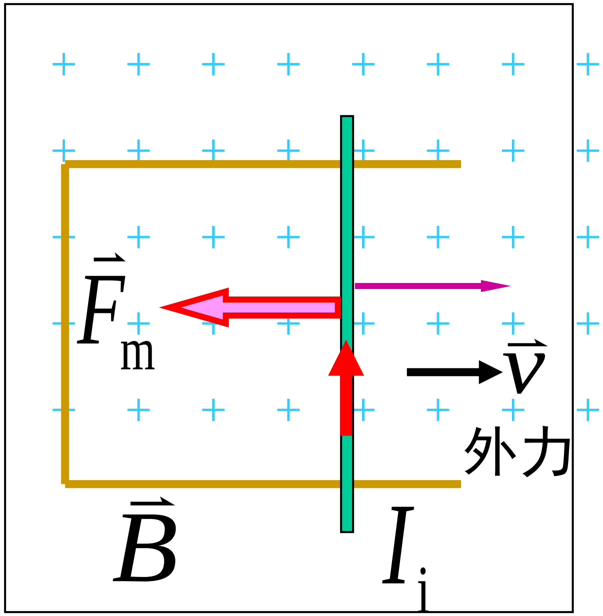


楞次定律是能量守恒定律在电磁感应中的一种具体表现。

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$\Rightarrow$减速运动$\Rightarrow$静止

机械能 $\Rightarrow$ 焦耳热



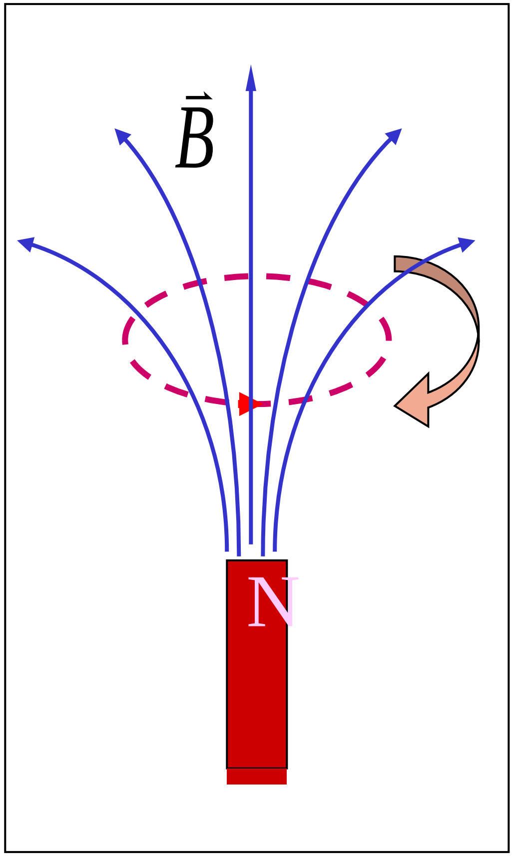
维持滑杆运动必须外加一力，此过程为外力克服安培力做功转化为焦耳热。

否则只需一点力开始使导线移动，将有无限大的电能出现，不符合能量守恒定律！

感应电动势的方向

$$\varepsilon_i = \boxed{-}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$\vec{B}$ 方向与回路（平面）成右螺旋。$\Phi > 0$



$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \Phi(t+\mathrm{d}t) - \Phi(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} > 0 \qquad \varepsilon_i < 0$$

ε_i 方向与回路的取向相反；

$$\varepsilon_i = \boxed{-}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

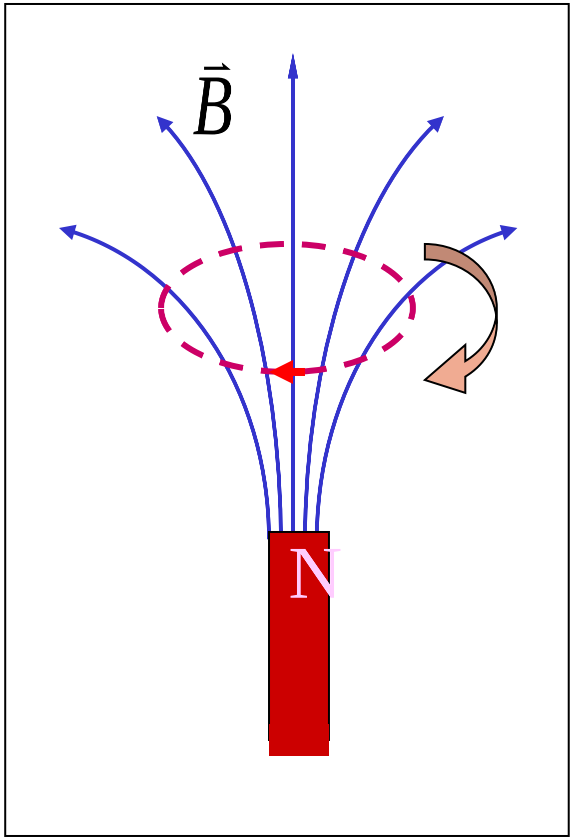
$\vec{B}$ 方向与回路（平面）成左螺旋。

$$\Phi < 0$$

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \Phi(t+\mathrm{d}t) - \Phi(t)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} < 0 \qquad \varepsilon_i > 0$$

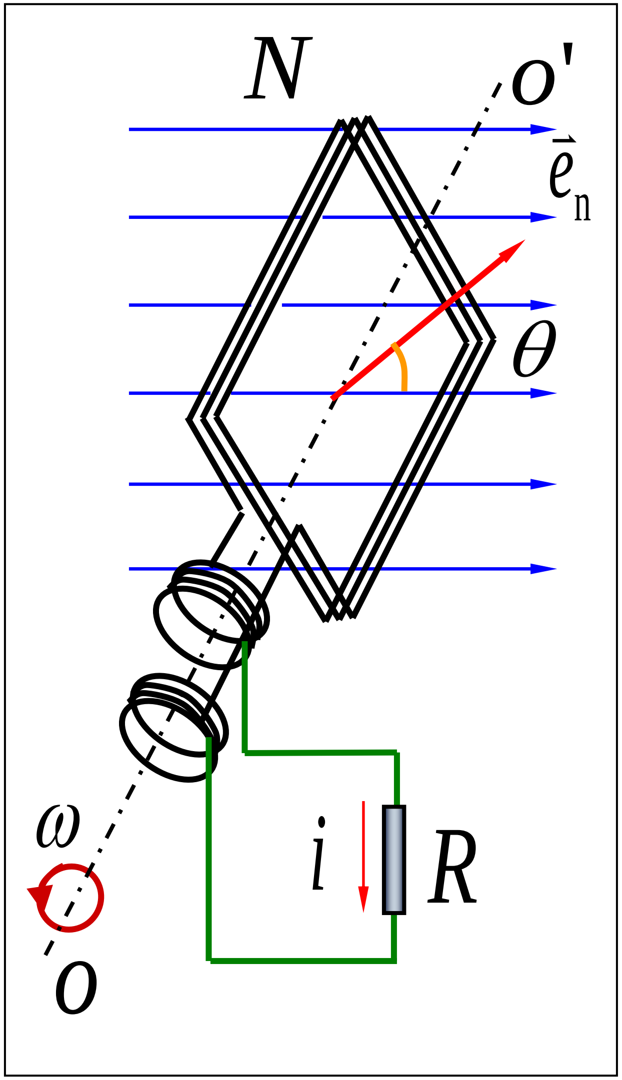
ε_i 方向与回路的取向相同。



当线圈有 N 匝时 $$\boxed{\varepsilon_i = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$$

在匀强磁场中，置有面积为S的可绕轴转动的N 匝线圈，若线圈以匀角速度 ω 作匀速转动，求线圈中的感应电动势。

已知实验参数 $\boldsymbol{B}$ S, N, ω 求 $\mathcal{E}$



解 设 $t=0$ 时，

$\vec{e}_n$ 与 $\vec{B}$ 同向，则 $\theta=\omega t$

$$\psi = N\phi = NBS\cos\omega t$$

电动势的大小：

$$\varepsilon = \left|\frac{d\psi}{dt}\right| = NBS\omega\sin\omega t$$

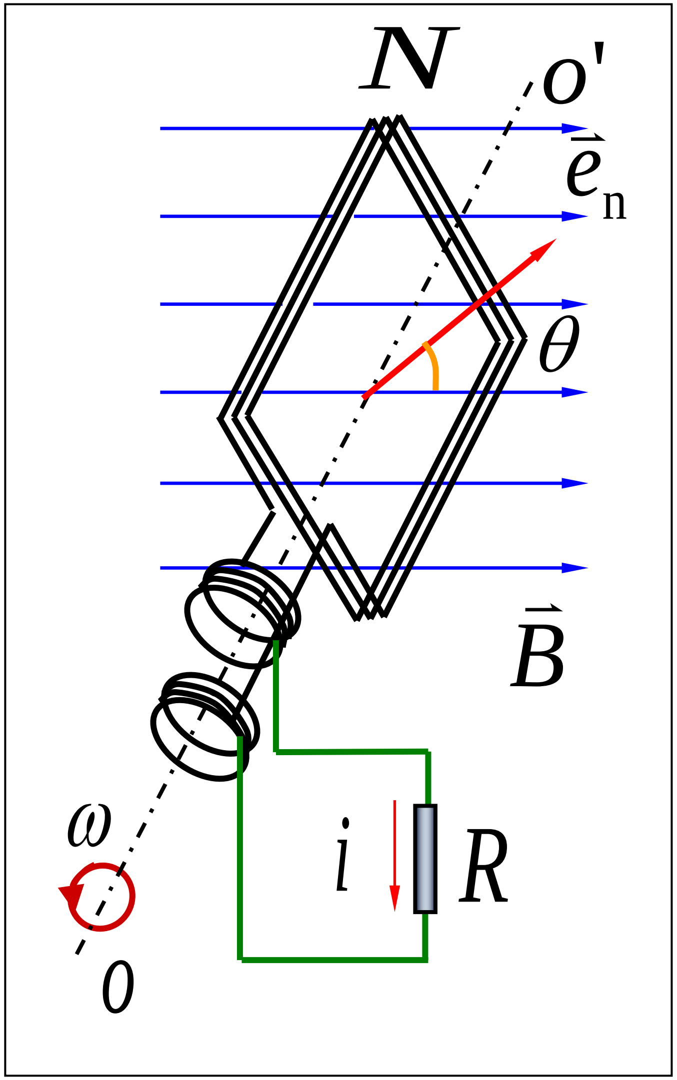
令 $\varepsilon_m = NBS\omega$

则 $\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t$

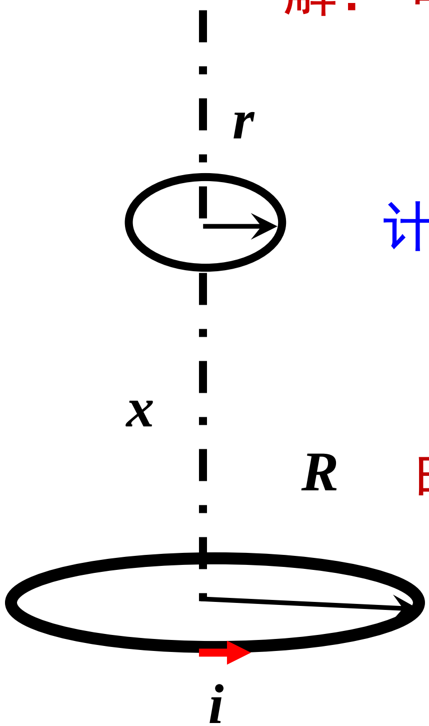
$$i = \frac{\varepsilon_m}{R} \sin \omega t = I_{\mathrm{m}} \sin \omega t$$

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{\varepsilon_m}{R}$$

可见在匀强磁场中匀速转动的线圈内的感应电流是时间的正弦函数，这种电流称交流电。



【例 1】如图，一水平静止放置的半径为 R、流过电流 i 的大环中心上方落下一半径 r 的小环，小环平面是水平方向，在高度 $x=NR$ 处的速度为 v，小环很小，x》R，求 NR 处小环中的感应电动势。



解： 由圆环轴线上磁场公式：$B=\dfrac{\mu_0 iR^2}{2\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\approx\dfrac{\mu_0 iR^2}{2x^3}$

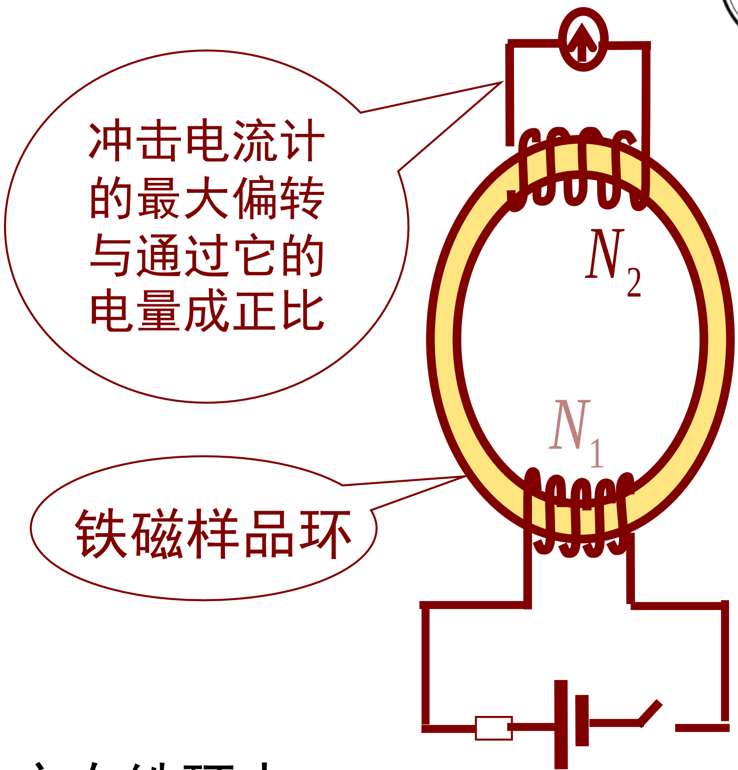
计算穿过小环的磁通量：$\varphi=\vec{B}\cdot\vec{S}=\dfrac{\mu_0 iR^2}{2x^3}\pi r^2$

由法拉第定律得到：$\varepsilon=\left|-\dfrac{d\varphi}{dt}\right|=\dfrac{\mu_0 iR^2}{2}\pi r^2\left|-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\dfrac{dx}{dt}\right|$

$$\varepsilon=\left|-\frac{d\varphi}{dt}\right|_{x=NR}=\frac{\mu_0 i\pi r^2 v}{2N^4R^2}$$

方向与大环电流 i 方向相反。

【例 2】如图，已知冲击电流计测得的电量q，线圈匝数N_2总电阻R，环截面积S较小，用感应电动势近似测到的铁环中的磁感应强度B多大。



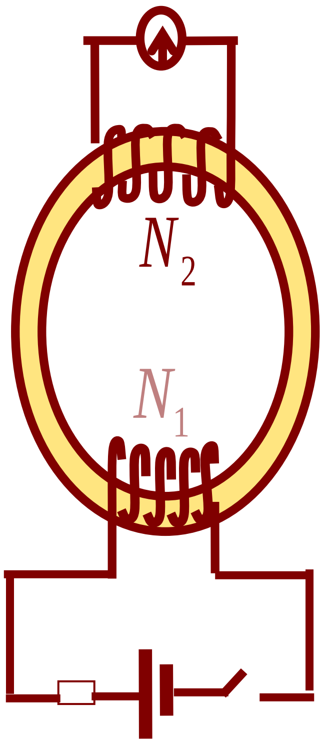
解：

当合上N_1线圈的开关，电流增大，它在铁环中的磁场增强，在N_2线圈中有感应电动势产生。

若S表示环的截面积 $\Phi = N_2\varphi = N_2 BS \Rightarrow |\varepsilon| = \left| -\dfrac{d\Phi}{dt} \right| = N_2 S \dfrac{dB}{dt}$

$$|\varepsilon| = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = N_2 S \frac{dB}{dt}$$

N_2线圈的总电阻是R，产生的电流为：



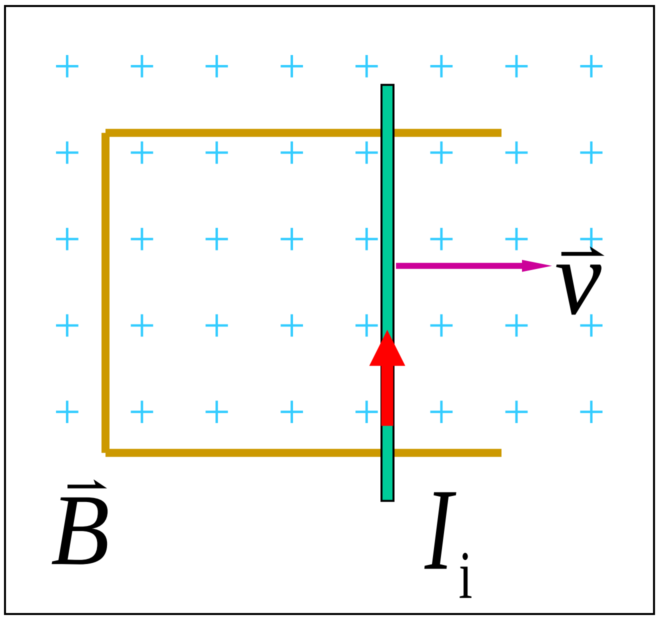
$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{N_2 S}{R} \cdot \frac{dB}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

$$q = \int_0^\tau i \cdot dt = \int_0^\tau \frac{N_2 S \cdot dB}{R \cdot dt} \cdot dt = \frac{N_2 S \cdot B}{R}$$

铁磁质中的磁感应强度B $\quad \therefore B = \dfrac{qR}{N_2 S}$

§ 12. 2　动生电动势和感生电动势

1. 引起磁通量变化原因的分类：

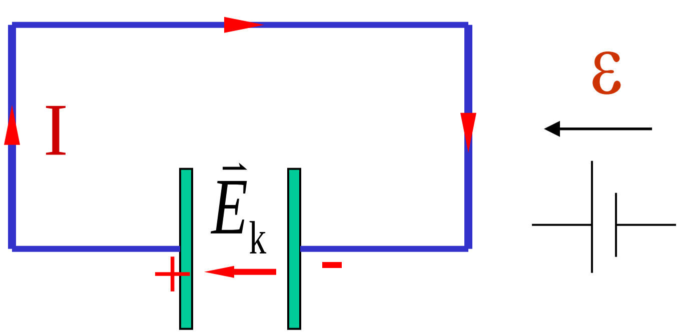


1）稳恒磁场中的运动导体（回路面积变化、取向变化等）⟹ 动生电动势

2）导体不动，磁场变化 ⟹ 感生电动势

◆ 电动势 $\varepsilon = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_{内} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$

$\vec{E}_k$ ：非静电的电场强度。



◆ 闭合电路的总电动势

$$\boxed{\varepsilon = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l}}$$

2. 动生电动势

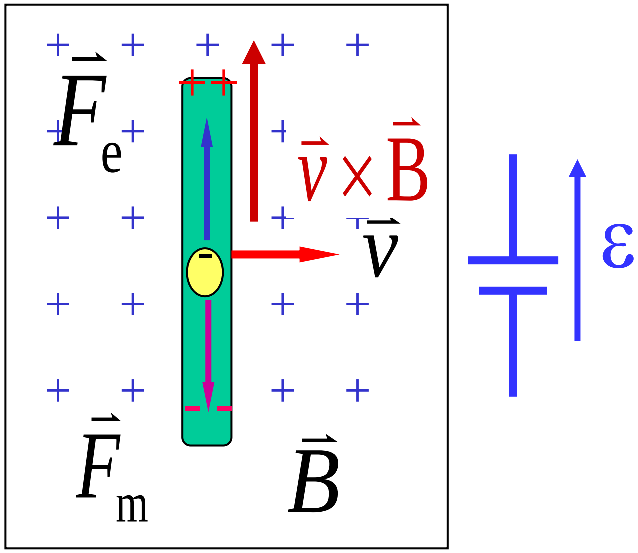
动生电动势的非静电力场 $\Longrightarrow$ 洛伦兹力

$\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$ 时，形成稳定的电势差；

$$\vec{F}_m = (-e)\vec{v}\times\vec{B}$$

非静电力场强 $\boxed{\vec{E}_k = \dfrac{\vec{F}_m}{-e} = \vec{v}\times\vec{B}}$

$$\varepsilon = \int_-^+ \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \boxed{\int_-^+ (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}}$$



判断 $\vec{v}\times\vec{B}$ 的方向以及二者之间角度φ= 90°的正弦sin φ;

$\vec{v}\times\vec{B}$后的方向与矢量dl点乘的二者之间角度 $\theta = 0°$的余弦cos θ;

设均匀磁场 B，杆匀速 v 运动，长为 L

$$\varepsilon = \int_0^L vBdl = vBL$$

【例 3】一导线矩形框在水平面，与竖直方向匀强磁场 $\vec{B}$ 垂直，在此矩形框上，有一质量为 m 长为 MN 的可移动的细导体棒 l；矩形框还接有一个电阻 R，其值较之导线的电阻值要大得很多，若开始时细导体棒以速度 $\vec{v}_0$ 沿如图所示的矩形框运动（不计摩擦），试求棒的速率随时间变化的函数关系。

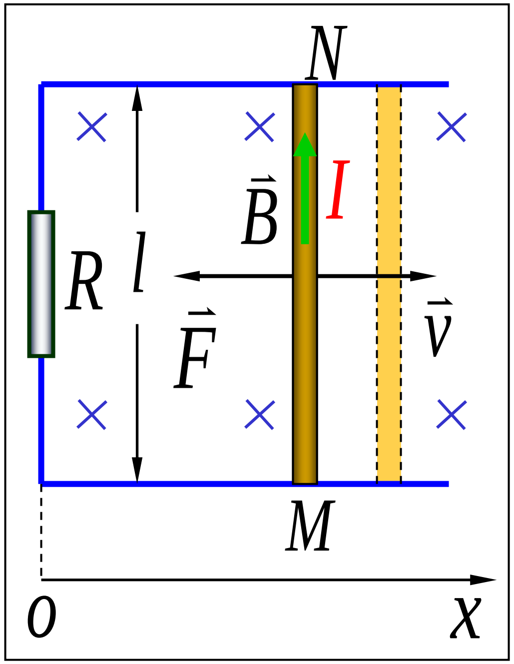
解 建立如图坐标系；

棒中 $\varepsilon_i = Blv$ 且由 $M \longrightarrow N$

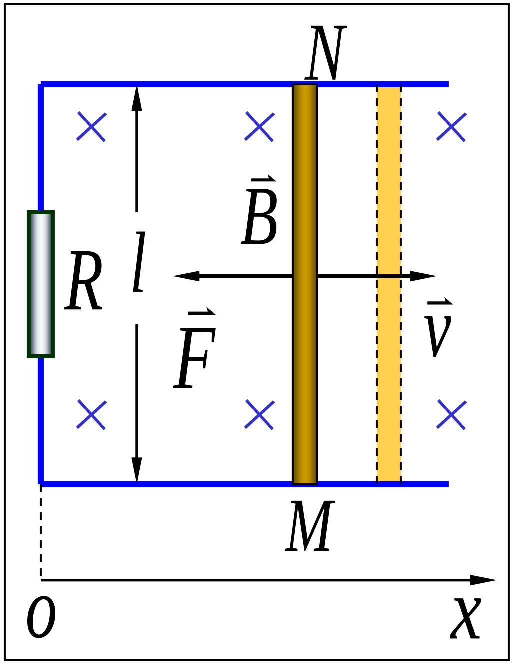
棒所受安培力为阻力：

$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

方向沿 OX 轴反向



$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$ 方向沿 ox 轴反向



棒的运动方程为：$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{B^2 l^2 v}{R}$

则 $$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int_0^t \frac{B^2 l^2}{mR}\mathrm{d}t$$

计算得棒的速率随时间变化的函数关系为：$v = v_0 \mathrm{e}^{-(B^2 l^2 / mR)t}$

若运动导体在非均匀磁场中，或导体上各点运动速度不一样,ε?

$$d\varepsilon = \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l} \Rightarrow \varepsilon = \int d\varepsilon$$

判断 $\vec{v}\times\vec{B}$ 的方向以及二者之间角度φ的正弦sin φ

$\vec{v}\times\vec{B}$ 后的方向与矢量dl点乘的二者之间角度 θ 的余弦cos θ

长 L 铜棒在均匀磁场B中，以匀角速度ω绕棒一端O转动，两端感应电动势。

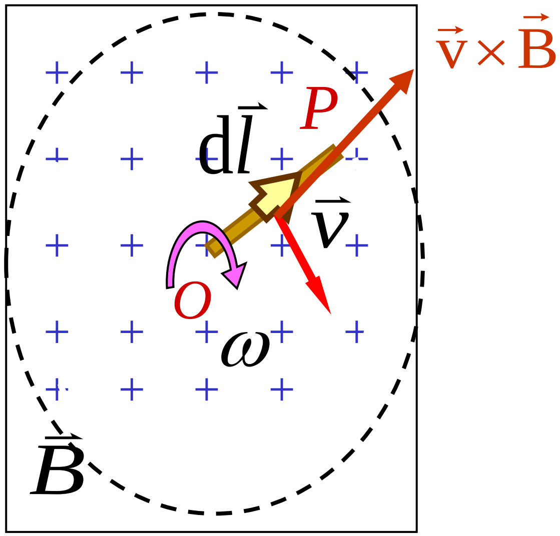
取微元dl 角度φ= 90°;

角度$\theta = 0°$;

$$d\varepsilon_i = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = vBdl$$

$$\int_0^L \omega lBdl = \int_0^L vBdl = \frac{1}{2}\omega BL^2$$

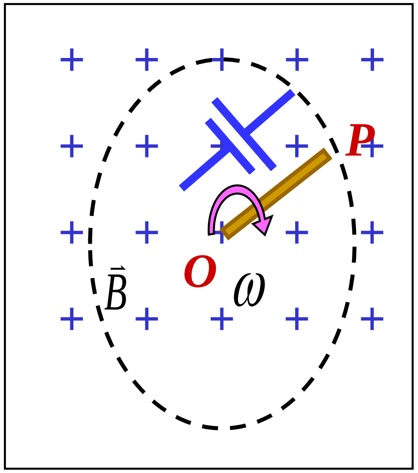
方向: O→ P 即 $U_P > U_O$



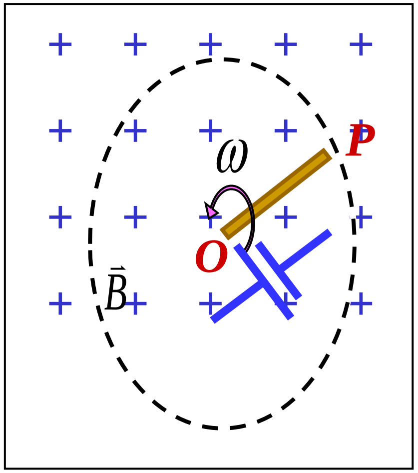
法拉第电机：设铜盘的半径为 R，角速度为ω。

可视为无数铜棒一端在圆心，另一端在圆周上，即为并联，因此其电动势类似于一根铜棒绕其一端旋转产生的电动势。

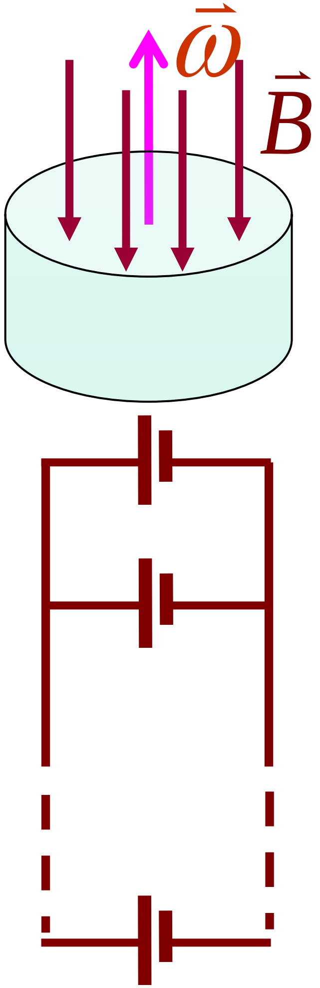
$$\therefore \Delta U = \frac{1}{2} B R^2 \omega$$



$U_P > U_O$



$U_P < U_O$



【例 4】如图，直导线CD在无限长直电流磁场中切割磁力线运动，已知实验参数a,b,v,I,α，计算直导线CD的感应电动势。

解：CD线上取微元dl

角度$\varphi = 90°$;

角度$\theta = 90° - \alpha$;

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

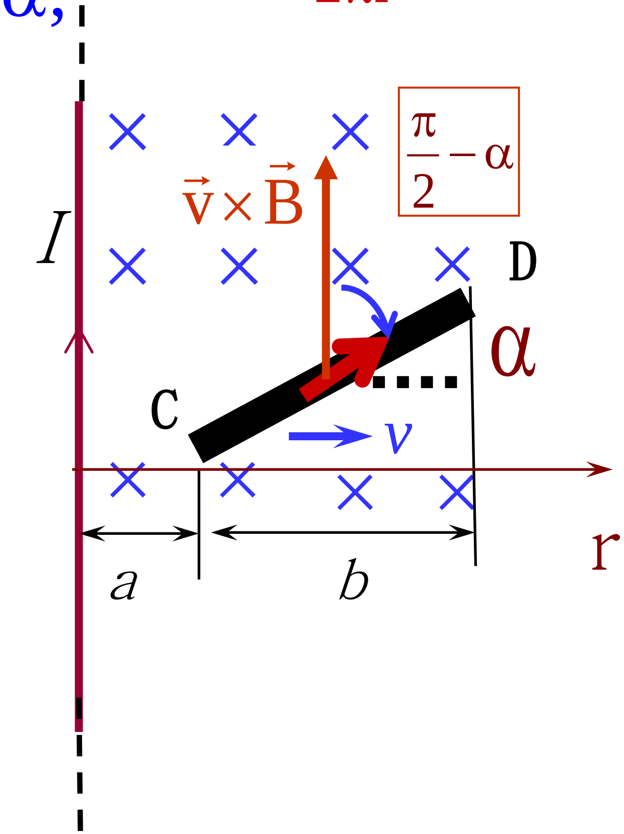
$$d\varepsilon = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad = vB\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) dl$$

$$= v\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sin\alpha \frac{dr}{\cos\alpha}$$

$$\varepsilon = \frac{v\mu_0 I \tan\alpha}{2\pi}\int_a^{a+b}\frac{dr}{r}$$

$$= \frac{v\mu_0 I \tan\alpha}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

方向：C→D



【例 5】已知半圆环半径为R，匀角速度ω转动，均匀磁场B，求：在图示位置(半圆在磁场平面内或角度 0°)，半圆弧两端的 ε_i.

解1：动生电动势解法，半圆弧上取微元dl

角度φ= 90°;

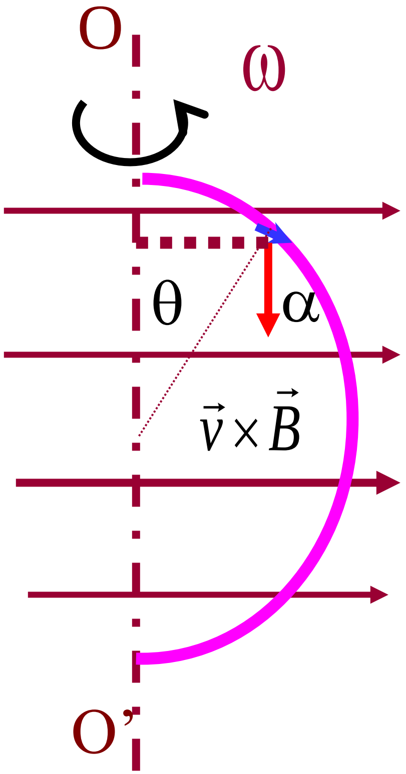
角度α;

$$d\varepsilon = \vec{v}\times\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= vB\cos\alpha dl$$

$$= (\omega R\sin\theta)B\sin\theta Rd\theta$$

$$= \omega BR^2\sin^2\theta d\theta$$

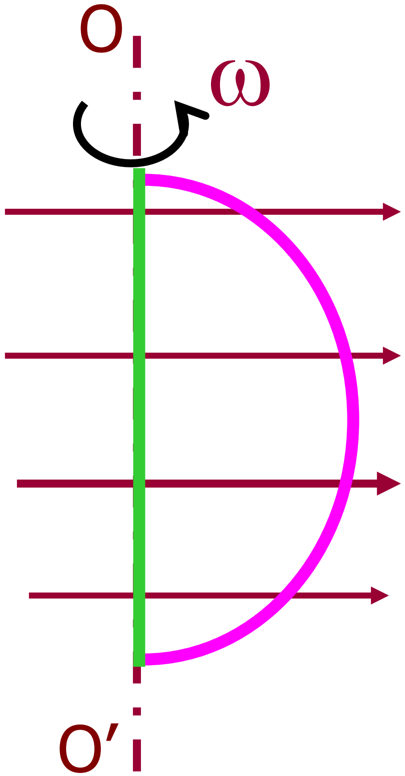


$$\varepsilon_i = \int_0^{\pi}\omega BR^2\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\omega B\pi R^2$$ 方向：O → O’

解2：法拉第定律直接求解（引入虚拟直径导线OO’形成虚拟回路）

回路磁通量 $\varphi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$= BS\sin\theta$

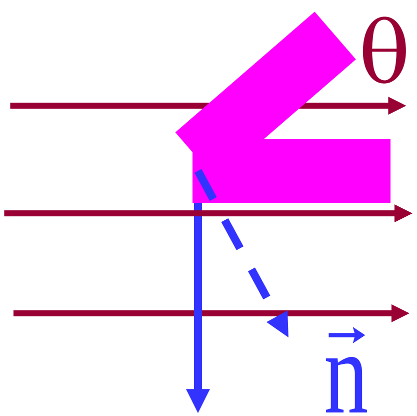


回路电动势

$$\left|\varepsilon_i\right| = \left|-\frac{d\varphi}{dt}\right| = B\frac{1}{2}\pi R^2\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

虚拟直径O O’无电动势，故

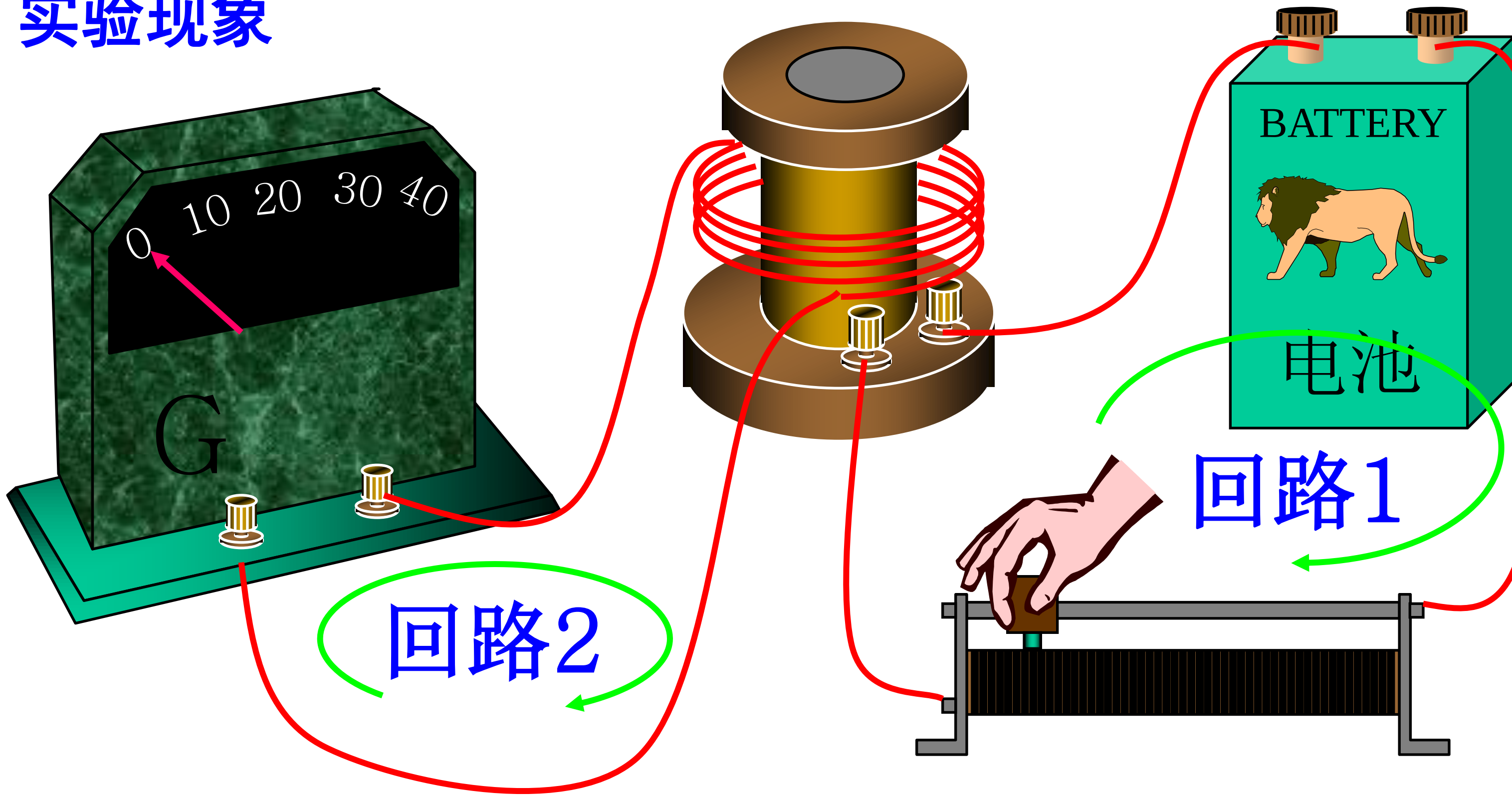
$$\varepsilon\Big|_{\theta=0} = B\frac{1}{2}\pi R^2\omega$$



方向：O $\rightarrow$ O’（楞次定律）

3. 感生电动势

1）实验现象



当回路 1中电流发生变化时，在回路2中出现感应电动势

产生感应电动势的非静电力是什么？

2）感生电动势

法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{d\varphi_m}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

电源电动势的定义

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

运动电荷→ 电流 → 磁场

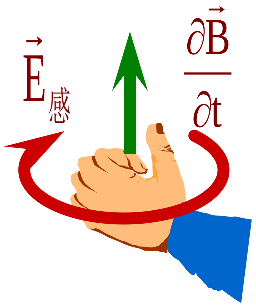
变化电流→ 变化磁场 → 电场 ？

- 感生电场（induced electric field) 由现象到本质！

Maxwell 的假说：变化的磁场在其周围空间激发一种电场，它提供一种能产生感生电动势非静电力。这种电场叫做感生电场。

3）感生电场（induced electric field)的空间物理图像

$$\oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



$$\begin{cases} \oint_L \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0 \\ \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

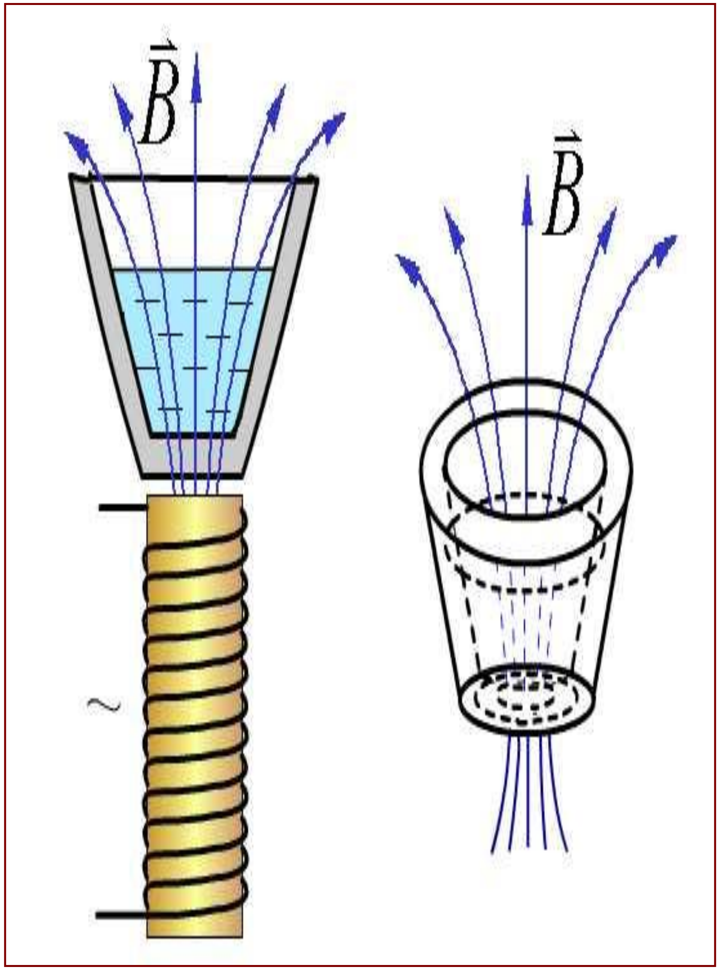
A) 感生电场永远和磁感应强度矢量的变化连在一起；

B) 感生电场对电荷都有作用力，若有导体存在都能形成电流。

C) 感生电场的电场线是无头无尾的闭合曲线，类似于磁感应线。即有旋电场；

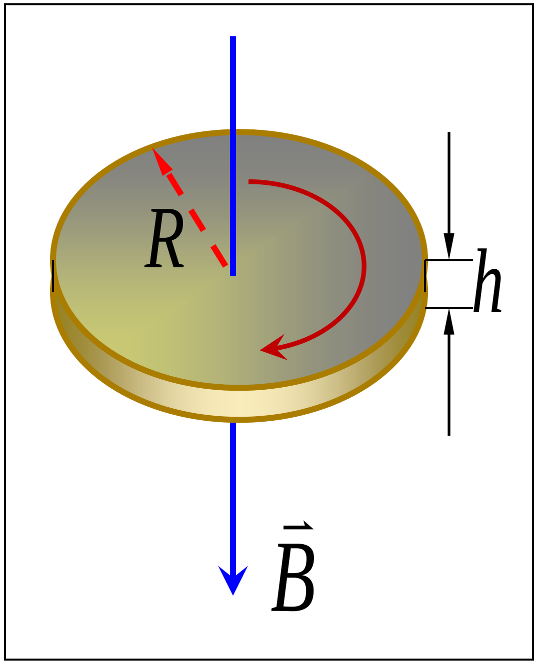
4. 涡电流

感应电流不仅能在导电回路内出现，而且当大块导体与磁场有相对运动或处在变化的磁场中时，在这块导体中也会激起感应电流。这种在大块导体内流动的感应电流,叫做涡电流，简称涡流。

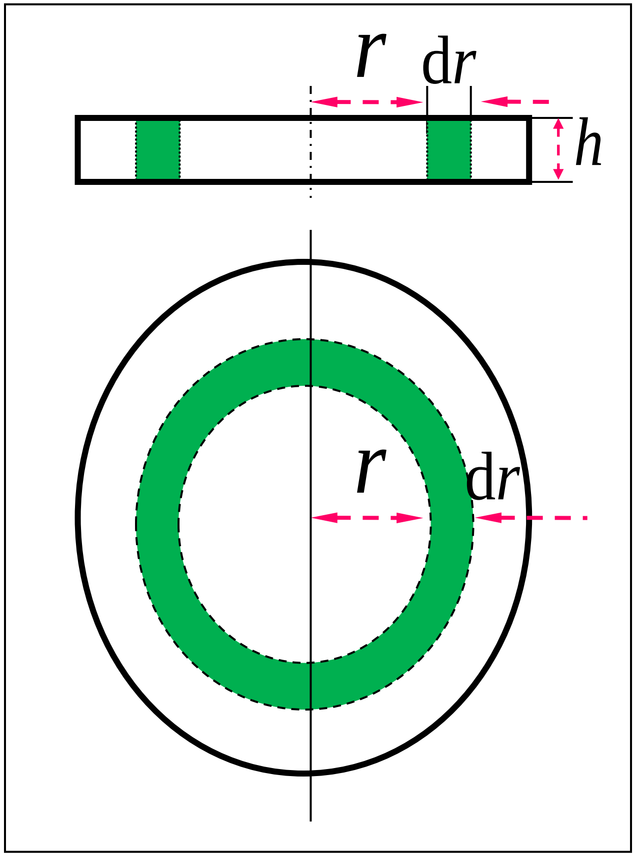


- 应用　热效应、电磁阻尼效应。

设有一半径为 R ，高度为 h 的铝圆盘，其电导率为γ ，把圆盘放在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，磁场方向垂直盘面，设磁场随时间变化，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t=k$ 且为一常量，求盘内的感应电流值。（圆盘内感应电流自己的磁场略去不计）



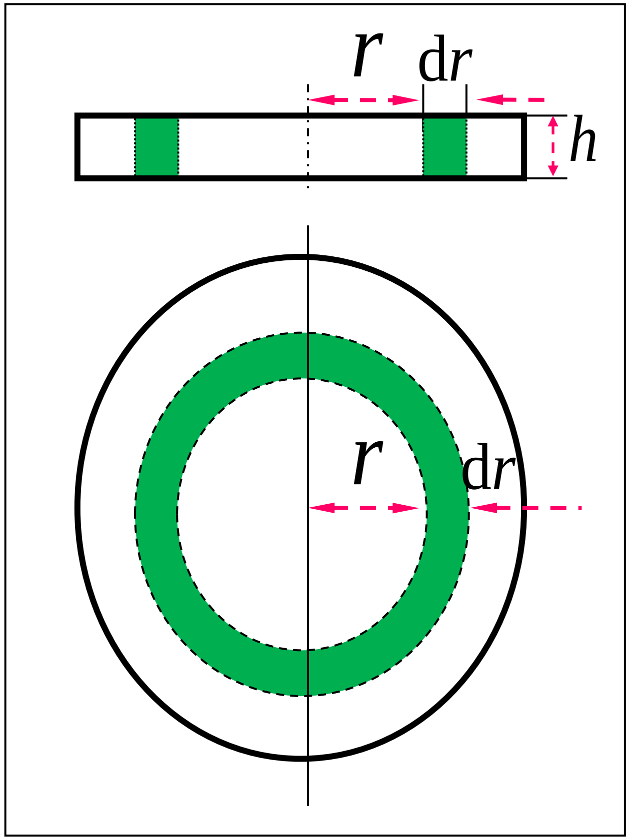
感应电场



已知实验参数 R，h，γ，$\vec{B}$，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = k$ 求 I

如图取一半径为 r ,宽度为$\mathrm{d}r$，

高度为h 的圆环，



则圆环中的感生电动势的值为：

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

代入已知条件得电动势 $\varepsilon_i = \dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\int_S \mathrm{d}s = k\,\pi r^2$

又电阻 $\mathrm{d}R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{2\pi\, r}{h\mathrm{d}r}$

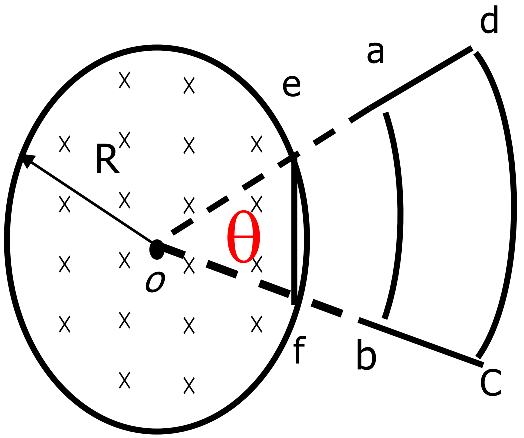
所以 $\mathrm{d}I = \dfrac{kh\gamma}{2} r\mathrm{d}r$

由计算得圆环中电流 $\mathrm{d}I = \dfrac{kh\gamma}{2} r\mathrm{d}r$

于是圆盘中的感应电流为

$$I = \int \mathrm{d}I = \frac{kh\gamma}{2}\int_0^R r\mathrm{d}r = \frac{1}{4}k\gamma R^2 h$$

【例 6】如图，在圆柱形的空间存在均匀磁场，图中abcd为导线回路，O为圆心，ab、cd为圆弧，半径R，圆心角度θ，当磁感应强度随时间变化 dB/dt 时，1）回路abcd中的感应电动势等于多少？2）导线 ab、cd、ad、bc两端电动势等于多少？3）导线回路中各点和线的感生电场是否相等？4) 弦线ef 两端电动势。



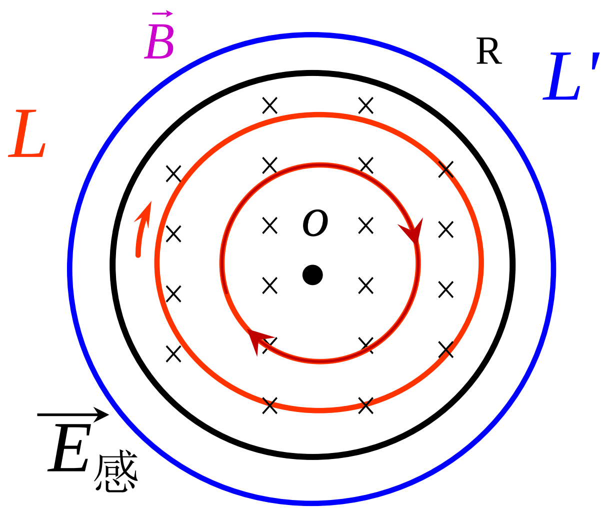
解：根据磁场的方向和变化来判断感应电场大小的对称性和方向

因为感应电场为闭合的涡旋场，其对称性为与无限长螺线管垂直的横截面内的圆环，且在圆环上感应电场大小相同。

变化磁场与感应电场的关系： $\oint_L E_{感} \cdot dl\cos 0^\circ = -\iint_S \frac{\partial B}{\partial t} dS\cos 0^\circ$

选择闭合回路 L 和面积的方向；

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



$$r < R, \oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = E_{感} 2\pi r = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

无限长螺线管内部（顺时针方向）

$$E_{感内} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

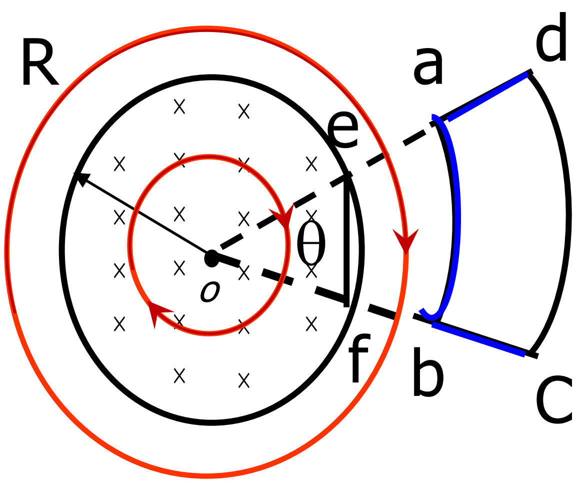
$$r > R, \oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = E_{感} 2\pi r = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

无限长螺线管外部（顺时针方向）

$$E_{感外} = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

解（1） 回路abcd中 $\varepsilon = 0 \quad (\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = 0)$

（2） 电动势定义的方法计算：



$$\varepsilon_{bc} = \int_b^c \vec{E} . \overrightarrow{dl} = \int_b^c E\cos\frac{\pi}{2} dl = 0$$

$$\varepsilon_{ad} = \int_a^d \vec{E} . \overrightarrow{dl} = \int_a^d E\cos\frac{\pi}{2} dl = 0$$

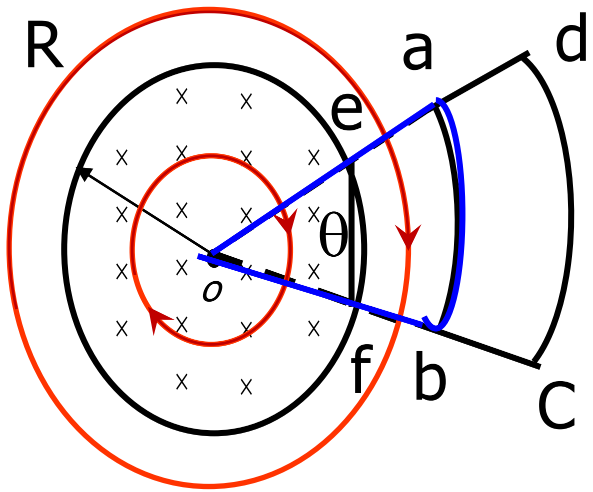
$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E dl$$

$$= \int_a^b -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} dl = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} r\theta$$

$$= -\frac{R^2\theta}{2}\frac{dB}{dt}$$

虚拟回路oabo中 $\varphi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS = B\dfrac{1}{2}R^2\theta$

虚拟回路oabo中电动势 $\varepsilon = -\dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{1}{2}R^2\theta\dfrac{dB}{dt}$ 此即ab弧的电动势



$\dfrac{dB}{dt} > 0$ 方向： b→a

$\dfrac{dB}{dt} < 0$ 方向： a→b

$\varepsilon_{cd} = \dfrac{R^2\theta}{2}\dfrac{dB}{dt}$ 顺时针方向，

方向讨论如上；

（3） ab弧上感应电场大小一样、方向不一样，cd弧亦如此；

ab线上感应电场大小不一样、cd线上感应电场大小也不一样

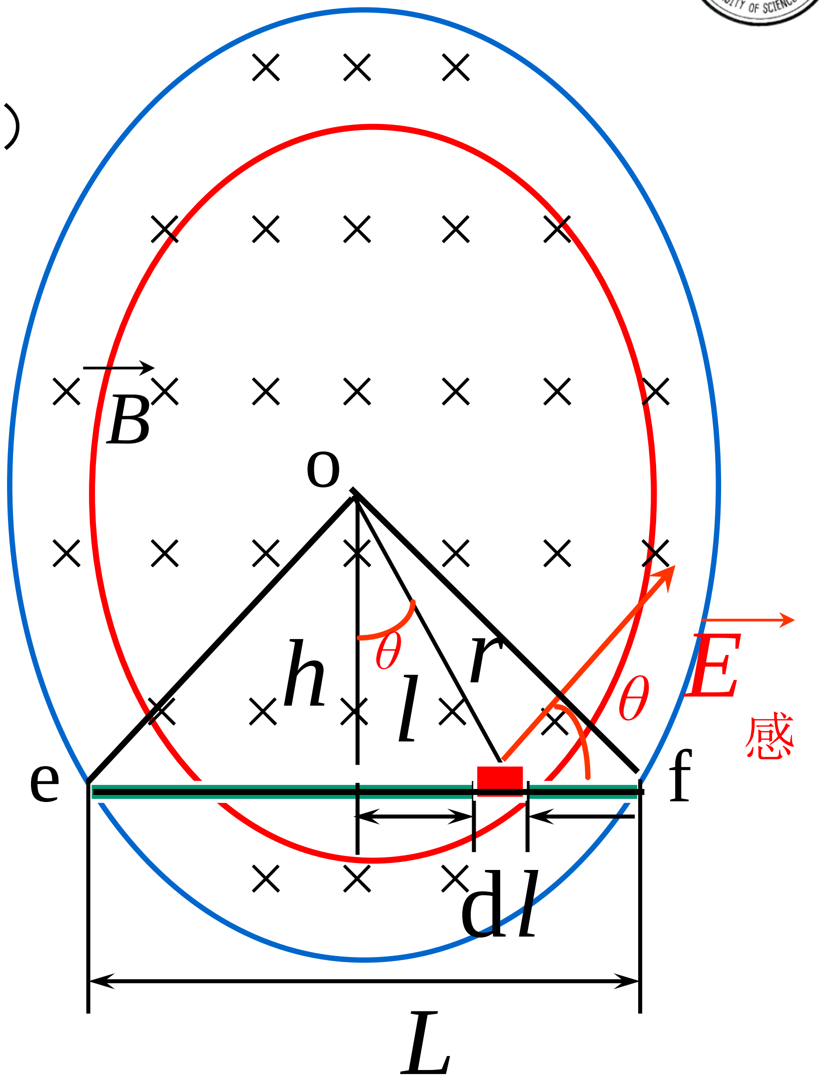
4) 由电动势的定义求解ε_{ef}（逆时针方向）

$$\varepsilon = \int \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = \int \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cos\theta dl$$

$$= \int \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\frac{h}{r}dl = \frac{1}{2}\frac{dB}{dt}h\int dl = \frac{1}{2}hL\frac{dB}{dt}$$

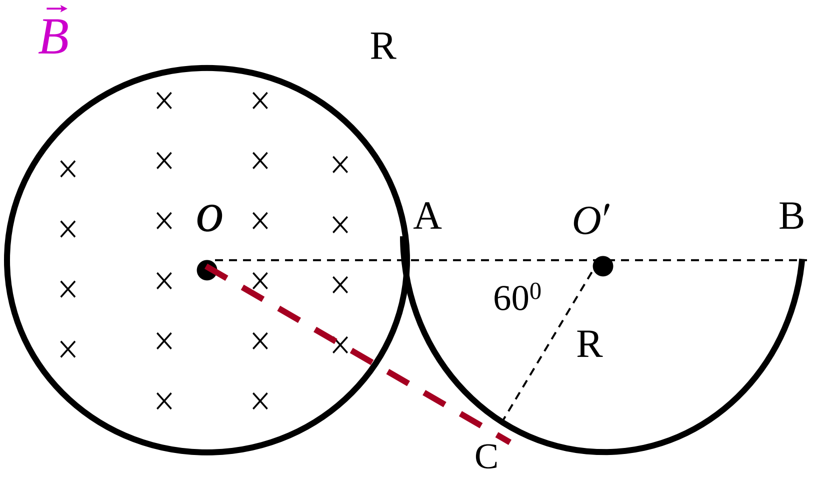
$\frac{dB}{dt} > 0$ 感生电动势方向为 e $\longrightarrow$ f

$\frac{dB}{dt} < 0$ 感生电动势方向为 f $\longrightarrow$ e

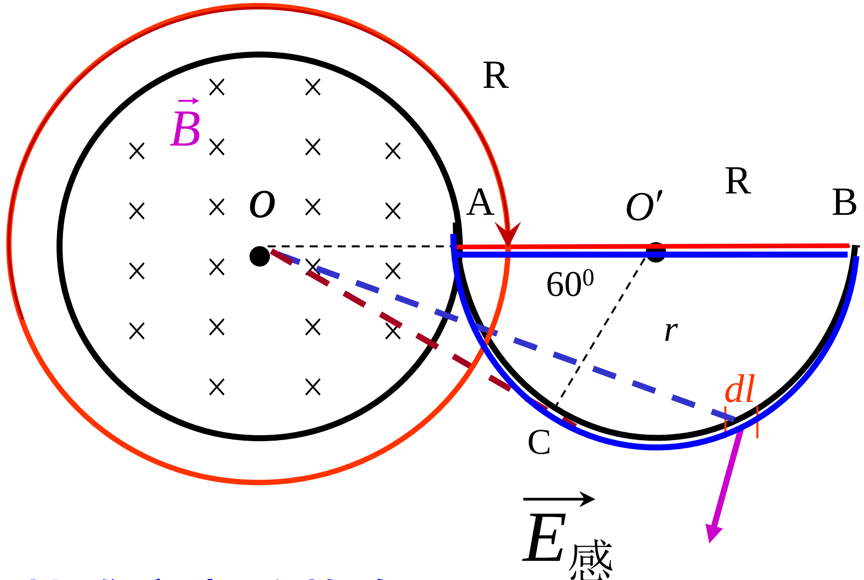


还可以作虚拟回路$oefo$由法拉第定律求解（同学们课后练习）

【例 7】如图所示，在半径为 R 的无限长螺线管内部磁感应强度的大小随时间而减小，$\mathrm{d}B/\mathrm{d}t=-K$，垂直于无限长螺线管的截面内有一半径为 R 的半圆弧导体ACB，C点恰好为在平面内过螺线管中心O点的半圆的切线上的切点。求半圆AB和弧长AC的感应电动势。



做辅助线导线直径AB,



直径AB的感应电动势为：

$$\varepsilon_{AB} = \int_{A\to B} \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = 0$$

选择虚拟闭合半圆回路ACBA，其感应电动势为 0。

半圆AB的感应电动势为： $\varepsilon_{\overset{\frown}{A}\overset{\frown}{B}} = 0$

理论上，半圆AB的感应电动势可以按积分定义计算，如图取微元dl：

$$E_{感外} = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} \qquad \varepsilon_{\overset{\frown}{A}\overset{\frown}{B}感} = \int_{\overset{\frown}{A}\to\overset{\frown}{B}} \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l}$$

如果选择合适的闭合回路，应用法拉第定律计算的效果会更方便：

选择扇形虚拟闭合回路ACO′A，$\because \phi = 0 \rightarrow \quad \varepsilon_{ACO'A} = \varepsilon_{\widehat{AC}} + \varepsilon_{\overline{CO'}} + \varepsilon_{\overline{O'A}} = 0$

$\varepsilon_{\overline{O'A}} = 0 \qquad \varepsilon_{\overline{CO'}} = 0$

圆弧AC的感应电动势 $\varepsilon_{\widehat{AC}} = 0$

$\varepsilon_{\overline{CO'}} \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l}_{O'C} \neq 0 \\ \int_{O'}^{C} \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} \neq 0 \end{array}}$$

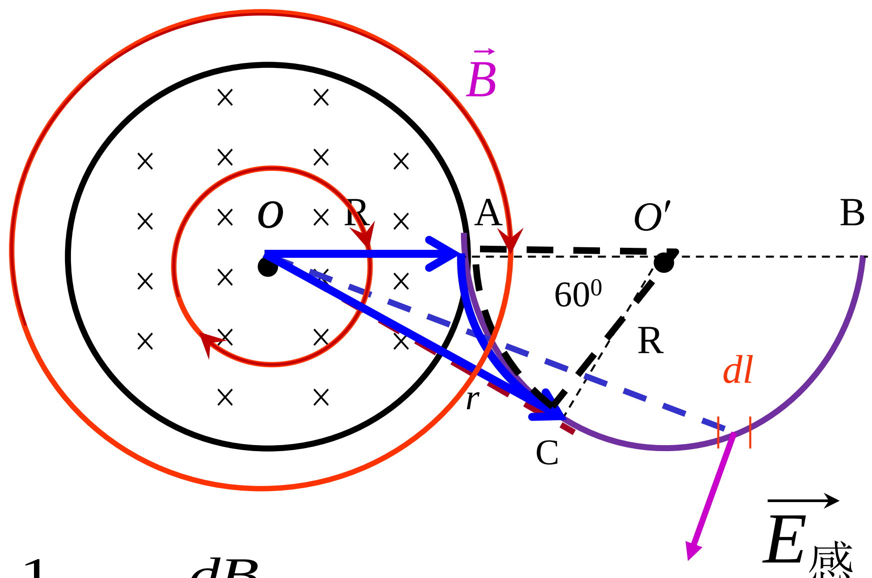
做辅助线导线OA和OC，选择闭合虚拟回路OCAO，应用法拉第定律计算：

其磁通量时由穿过30°圆心角的扇形面积的磁场来决定的。

$$\varepsilon_{OCAO} = -S\frac{dB}{dt} = -\frac{1}{12}\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\varepsilon_{AO} = 0 \qquad \varepsilon_{OC} = 0$$

$$\varepsilon_{OCAO} = \varepsilon_{OC} + \varepsilon_{\widehat{CA}} + \varepsilon_{AO}$$



圆弧AC的感应电动势

$$\varepsilon_{\widehat{CA}} = -\frac{1}{12}\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

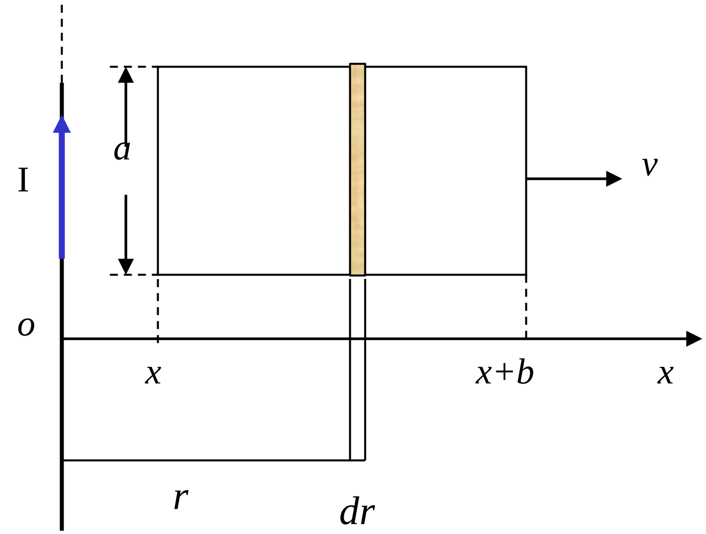
【例 8】如图，无限长直导线流过电流 $i = I_0\cos\omega t$，矩形导体线框与直线共面，导体线框以速度 v 沿 x 轴运动，求线框在图示位置时，线框回路中的感应电动势。

解：磁场变化同时导体运动，既有感生电动势，也有动生电动

选择法拉第定律是相对好的解决方法。

先确定空间磁场，然后计算磁通量 Φ。

再运用法拉第定律解决总电动势 ε 问题。



$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_x^{x+b} \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\boxed{adr} = \frac{\mu_0 ia}{2\pi}\ln\frac{x+b}{x}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 ia}{2\pi}\ln\frac{x+b}{x}\right)$$

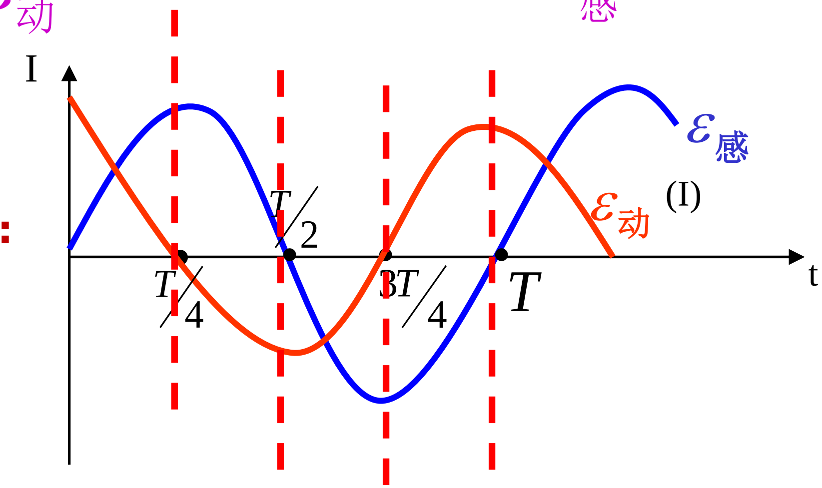
$$= -\frac{\mu_0 I_0 a\cos\omega t}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\ln\frac{x+b}{x}\right) - \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\frac{x+b}{x}\frac{d}{dt}\left(I_0\cos\omega t\right)$$

$$= \frac{\mu_0 a I_0\cos\omega t}{2\pi}\frac{b}{x(x+b)}\frac{dx}{dt} + \frac{\mu_0 a I_0\sin\omega t}{2\pi}\ln\frac{x+b}{x} = \frac{\mu_0 a I_0\cos\omega t}{2\pi}\frac{b}{x(x+b)}v + \frac{\mu_0 a I_0\sin\omega t}{2\pi}\ln\frac{x+b}{x}$$

$$\varepsilon = \underbrace{\frac{\mu_0 a I_0 \cos\omega t}{2\pi}\frac{b}{x(x+b)}}_{\varepsilon_{动}} v + \underbrace{\frac{\mu_0 a I_0 \sin\omega t}{2\pi}\ln\frac{x+b}{x}}_{\varepsilon_{感}}$$

电动势与时间 t 的部分讨论：

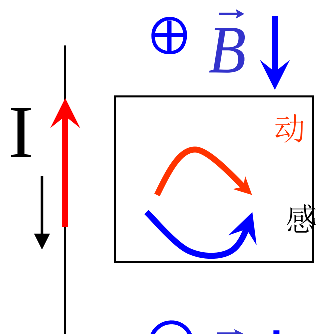
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



$$\boxed{i = I_0\cos\omega t}$$

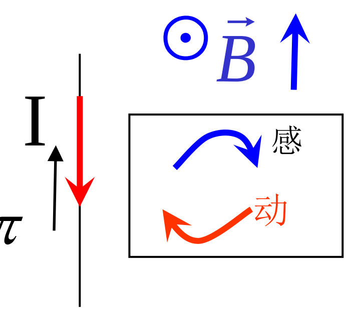
$$t: 0 \sim \frac{T}{4}$$

$$\omega t: 0 \sim \frac{\pi}{2}$$



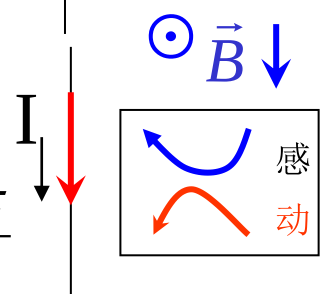
$$t: \frac{T}{4} \sim \frac{T}{2}$$

$$\omega t: \frac{\pi}{2} \sim \pi$$



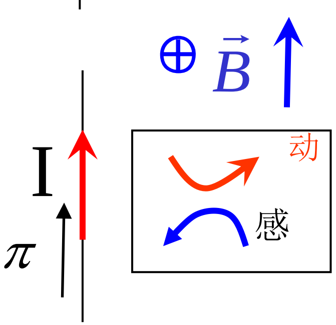
$$t: \frac{T}{2} \sim \frac{3T}{2}$$

$$\omega t: \pi \sim \frac{3\pi}{2}$$



$$t: \frac{3T}{2} \sim T$$

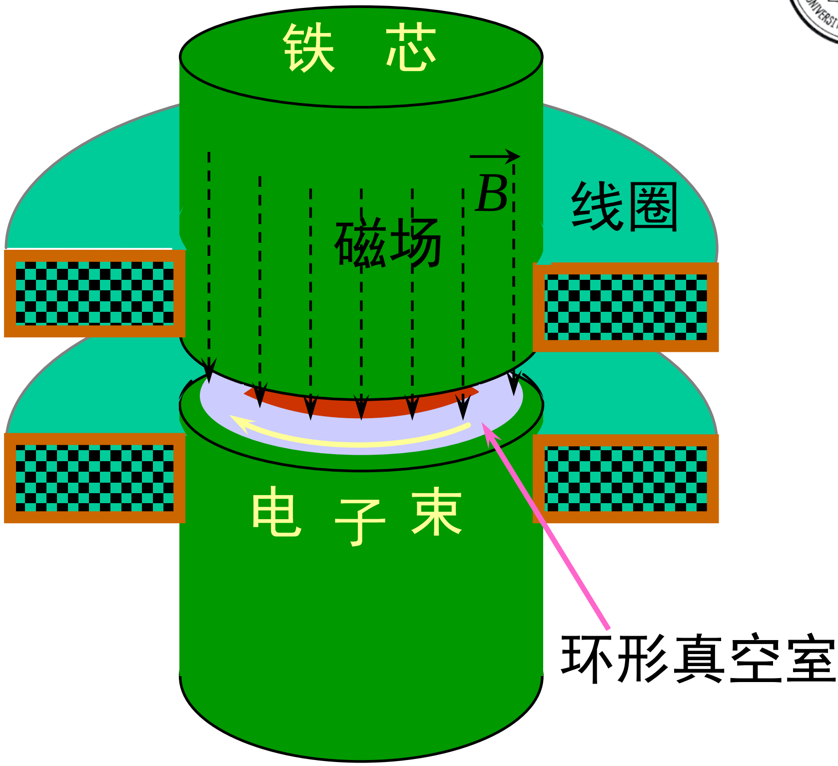
$$\omega t: \frac{3\pi}{2} \sim 2\pi$$

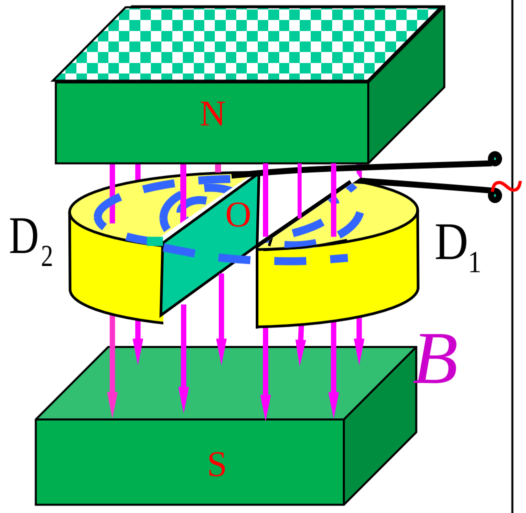


5. 电子感应加速器

—用感应电场使电子加速

当磁场发生变化时，就会沿规道方向产生感应电场，射入的电子被加速。





回旋加速器原理图

电子运行的轨道—环形真空室中半径为 r 的圆形。

如何使电子维持在恒定的圆形轨道上加速？

$$B_r ev = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{\mathrm{mv}}{\mathrm{eB_r}} = \text{恒量}$$

条件:B_r 随电子动量 mv 增加而增加

$$\because \oint_L \boldsymbol{E}_r \cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi r\, E_r = \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow E_r = \frac{1}{2\pi r}\frac{d\phi}{dt}$$ （电子轨道处的感应电场的大小）

$$\boxed{eE_r = \frac{e}{2\pi r}\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(mv)}$$

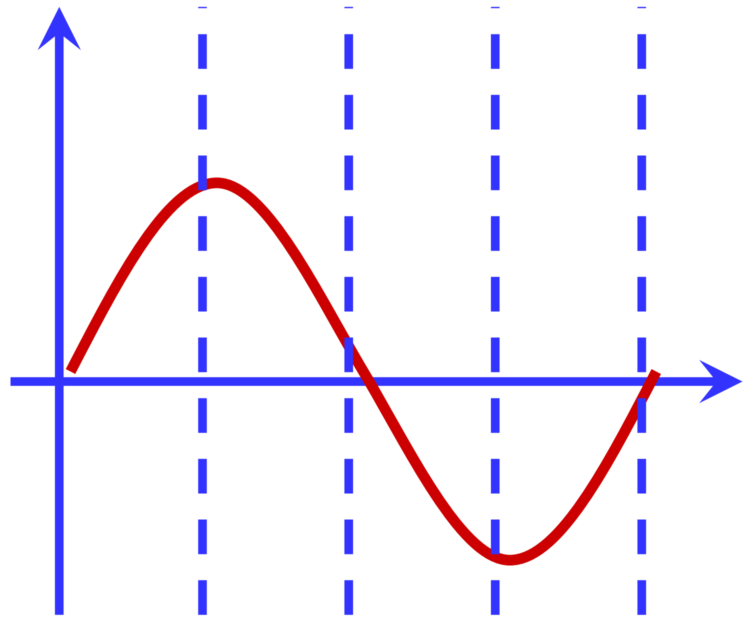
$$\boxed{\begin{aligned} &\therefore \int d(mv) = \int_0^{\phi} \frac{e}{2\pi r} d\phi \\ &mv = \frac{e}{2\pi r}\phi = \frac{e}{2\pi r}\pi r^2 \overline{B} = \frac{er}{2}\overline{B} \end{aligned}}$$

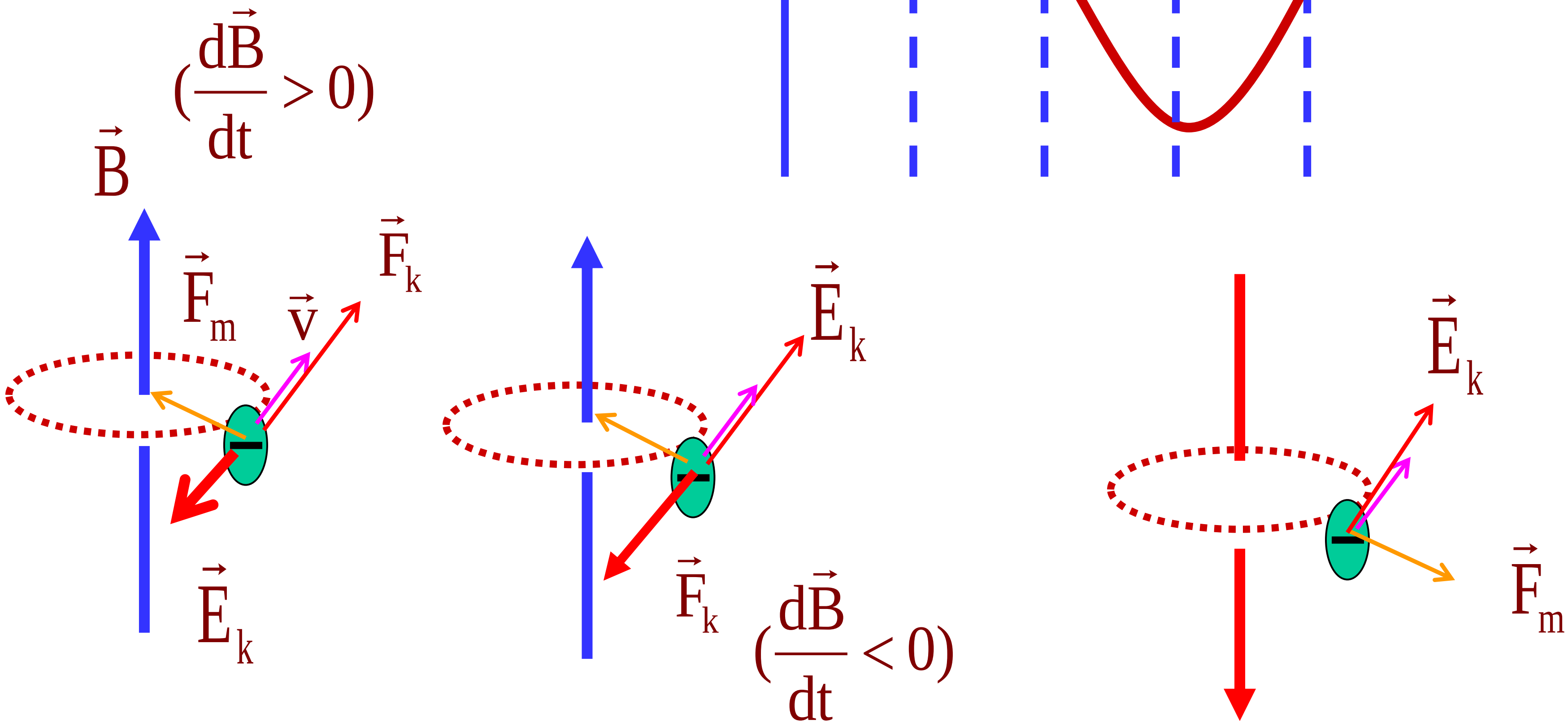
$$\boxed{r = \frac{mv}{eB_r} \Rightarrow mv = erB_r}$$

$$\boxed{B_r = \frac{1}{2}\overline{B}}$$

轨道平面上磁感应强度B必须不均匀，轨道处磁感应强度等于轨道内磁感应强度平均值的一半！

电子加速只发生在1/4周期内。





6. 感生电场与静电场性质的异同点

感应电场 （相同点：两种电场对放入其中的电荷都有作用力）静电场

感应电场	静电场
成因不同：变化的磁场激发	成因不同：静止的电荷激发
性质不同：感生电场是无源有旋场	性质不同：静电场为有源无旋场。
高斯定理：$\boxed{\oiint_S \vec{E}_{感} \cdot d\vec{S} = 0}$	高斯定理：$\boxed{\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{i0} = \iiint_V \rho dV}$
环路定理：$\boxed{\oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$	环路定理：$\boxed{\oint_L \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = 0}$
感应电场是涡旋场，非保守场	静电场是保守场引入势能和电势
在导体内可产生感生电动势和电流	不能在导体内产生持续电流

7. 动生电动势与感生电动势的不同

法拉第定律：$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

动生电动势

特点:导体在磁场中运动与磁力线切割

机制:运动导体中的电荷在磁场中产生非静电力—洛仑兹力；

应用：例如，电子回旋加速器；

计算动生电动势方法(从机制考虑)：

$$\varepsilon_{动} = \int_L \vec{E}_{非静电}\cdot d\vec{l} = \int_L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

从法拉第定律考虑，通过导体回路（或虚拟回路的面积S 、或其法向方向与磁场方向之间的夹角θ）随时间 t 变化，引起磁通量随时间变化来求解动生电动势。

感生电动势

特点:随时间变化磁场影响导体或回路电荷

机制:随时间变化的磁场激发感应电场，产生非静电力-感生电场力

应用：例如，电子感应加速器；

计算感生电动势方法(从机制考虑)：

$$\varepsilon_{感} = \int_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{E}_{感} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

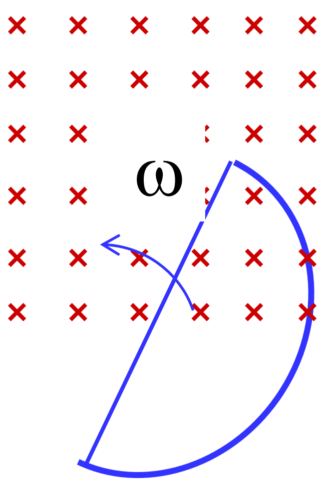
从法拉第定律考虑，随时间变化的磁场，引起通过导体回路(或含辅助导线的虚拟回路)的磁通量 Φ 随时间 t 发生变化来求解感生电动势

【练习 1】桌面水平放置r=10cm金属圆环，电阻R=1Ω，地磁场竖直分量5×10^{-5}T，将环面翻转一次，沿环流过任一横截面的电量为多少？

解：由法拉第定律方法：$\varepsilon=-\dfrac{d\varphi}{dt}$

由欧姆第定律：$I=\dfrac{\varepsilon}{R}=-\dfrac{1}{R}\dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{dq}{dt}\Rightarrow dq=-\dfrac{1}{R}d\varphi\Rightarrow q=\dfrac{2BS}{R}$ 同学们课后练习计算；

【练习 2】如图，匀强磁场，t=0时，半圆形闭合导线完全在磁场外，以匀角速度ω旋转，选顺时针为正，画出半圆形闭合导线中的电动势时间曲线。

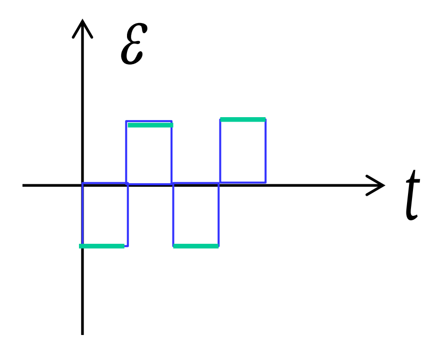


解：由法拉第定律方法：

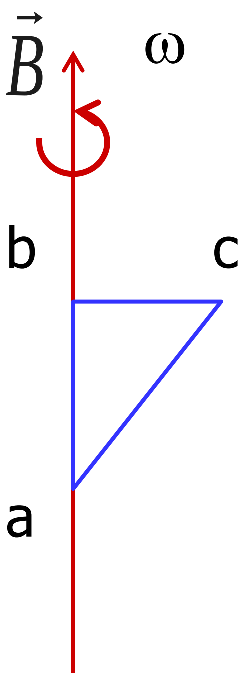
$\varepsilon=-\dfrac{d\varphi}{dt}$

$d\phi=BdS=BR^2d\theta/2$

$\varepsilon=-d\phi/dt=-\omega BR^2/2$



【练习 3】如图所示，直角三角形金属框架abc放在均匀磁场B中，B平行于ab边，当金属框架绕ab边以匀角速度ω转动时，abca回路中的感应电动势为多少？如果bc边的长度为 l，则a、c两点间的电势差为多少?



解：由法拉第定律方法和动生电动势方法计算：

$$\varepsilon = 0$$

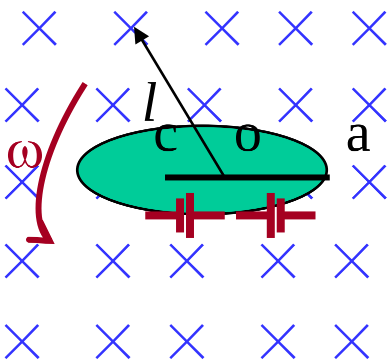
$$\varepsilon = 0 = \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} + \varepsilon_{ca}$$

$$U_{ac} = -\varepsilon_{ac} = \varepsilon_{ca} = -\varepsilon_{bc} = -\frac{1}{2}B\omega l^2$$

【练习 4】如图，匀强磁场，杆ca绕固定点O在垂直磁场平面内逆时针匀角速度为ω旋转，杆长d，旋转半径l，问ac之间的电势差？

解：由动生电动势方法计算：

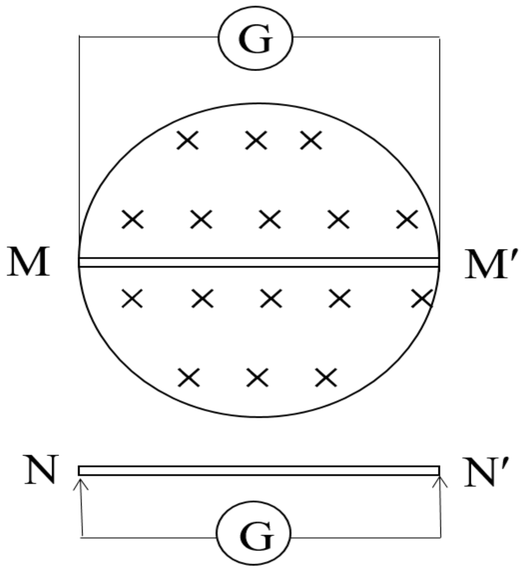
$$U_a - U_o = -\varepsilon_{ao} = -\frac{1}{2}\omega B l^2$$



$$U_a - U_c = U_a - U_0 + U_0 - U_c$$

$$= -\frac{1}{2}\omega B l^2 + \frac{1}{2}\omega B(d-l)^2$$

【练习 5】均匀磁场充满圆柱形体积内，两根金属棒长均 2R，分别如图放置，一根在圆柱形体积的截面的直径上，另一根在磁场外，分别用电流计接上。当 B 以速率 dB/dt 变化时，MM'、NN'中感应电动势 ε_1、ε_2 和流过两回路的电流 i_1，i_2 应为 [   ]：



（A）$\varepsilon_1 = 0$，$\varepsilon_2 \neq 0$，$i_1 \neq 0$，$i_2 = 0$

（B）$\varepsilon_1 \neq 0$，$\varepsilon_2 = 0$，$i_1 \neq 0$，$i_2 = 0$

（C）$\varepsilon_1 = 0$，$\varepsilon_2 \neq 0$，$i_1 = 0$，$i_2 \neq 0$

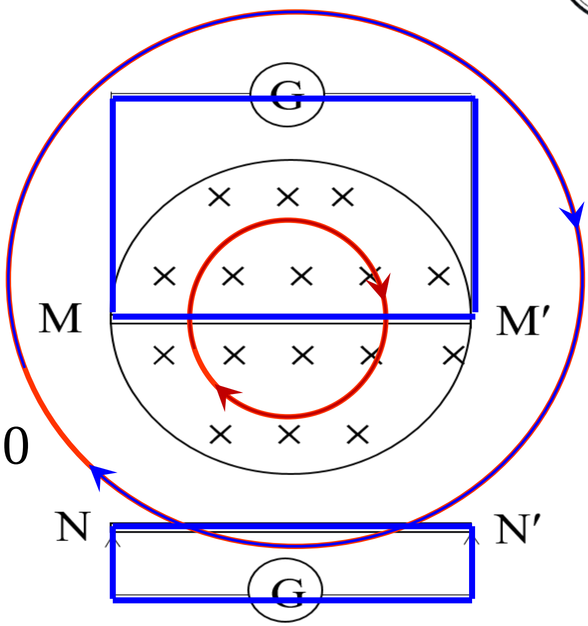
（D）$\varepsilon_1 \neq 0$，$\varepsilon_2 \neq 0$，$i_1 \neq 0$，$i_2 \neq 0$

（A） $\varepsilon_1 = 0$， $\varepsilon_2 \neq 0$ ， $i_1 \neq 0$， $i_2 = 0$

（B） $\varepsilon_1 \neq 0$， $\varepsilon_2 = 0$ ， $i_1 \neq 0$， $i_2 = 0$

（C） $\varepsilon_1 = 0$， $\varepsilon_2 \neq 0$ ， $i_1 = 0$， $i_2 \neq 0$

（D） $\varepsilon_1 \neq 0$， $\varepsilon_2 \neq 0$ ， $i_1 \neq 0$， $i_2 \neq 0$



解： MM'上感应电场处处与MM'垂直， $\varepsilon_{MM'} = 0$

包含MM'回路感应电动势不为0。

由穿过如图上半圆的磁场的磁通量随时间 t 的变化决定的。 $i_{MM'} \neq 0$

NN'的感应电场与NN'不垂直， $\boxed{\varepsilon_{NN'} \neq 0}$

包含NN '的回路的感应电动势为0。

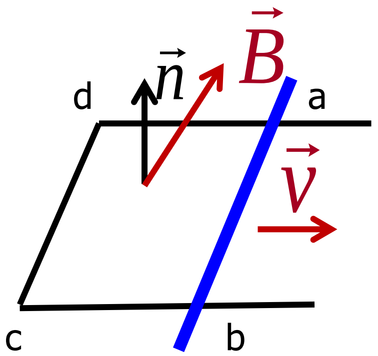
如图，没有下半圆的磁场穿过回路，磁通量为0。 $\boxed{i_{NN'} = 0}$

【练习 6】如图所示，长为l 的导线，以匀速率v在导线轨道abcd上平移。导体轨道处于均匀磁场中，方向与回路法线成60^0角，其大小B=kt(k>0)。如t=0时，杆ab在导轨dc处，则在任意时刻，导线回路中的感应电动势为

（A）k l vt，顺时针方向　　（B）k l vt，逆时针方向

（C）kl vt/2，顺时针方向　（D）k l vt/2，逆时针方向

解：由法拉第定律方法：$\varphi = \vec{B}\cdot\vec{S} = Bxl\cos 60^0$



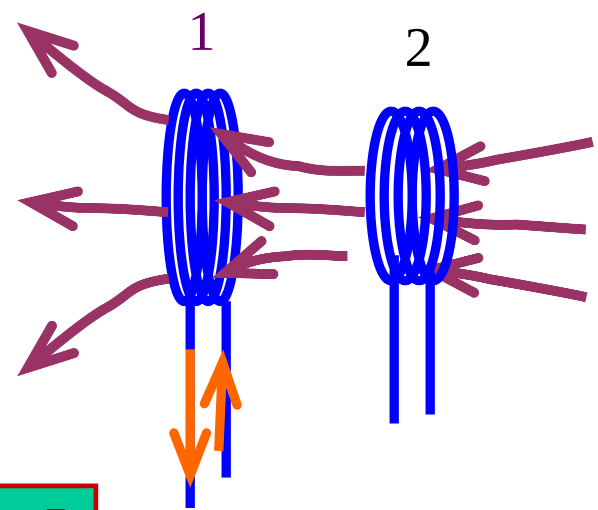
$$\varepsilon = \left|-\frac{d\varphi}{dt}\right| = l\cos 60^0\left(\frac{dB}{dt}x + B\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}l(kx+Bv)$$

$$= \frac{1}{2}l(kvt+ktv)$$

§12.3 互感和自感

1. 互感

当线圈1中电流变化时，所激发的磁场会在它邻近的线圈2中产生感应电动势的现象为互感现象，该电动势叫互感电动势。



实验可给出：　$\boxed{\Psi_{12} = M_{12} I_1}$　　$\boxed{\Psi_{21} = M_{21} I_2}$

若两回路几何形状、尺寸及相对位置不变，周围有无铁磁性物质。

实验和理论均可以证明：

$M_{21} = M_{12} = M$ ——互感系数　单位：亨利（H）

由互感磁通量和法拉第定律 $\Psi_{12} = MI_1$ $\Psi_{21} = M\ I_2$

互感电动势 $\boxed{\varepsilon_{12} = -\dfrac{d\Psi_{12}}{dt} = -M\dfrac{dI_1}{dt}}$ $\boxed{\varepsilon_{21} = -\dfrac{d\Psi_{21}}{dt} = -M\dfrac{dI_2}{dt}}$

讨论：1) 互感系数和互感电动势都与两回路的几何形状、尺寸，它们的相对位置，以及周围介质的磁导率有关。互感电动势还与线圈电流变化快慢有关。

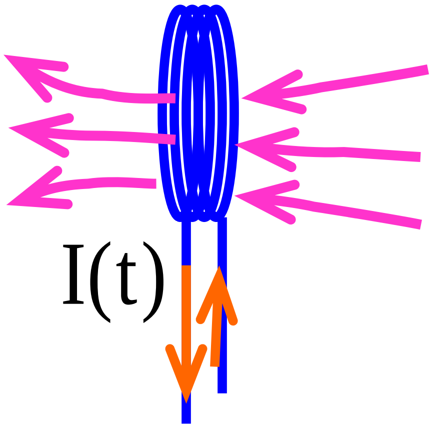
2) 互感系数的大小反映了两个线圈磁场的相互影响程度。

3) M 的存在的利与弊：在变压器中：M 越大，能量损失越小。

在电子线路中：M 越大，相互干扰越大。

2. 自感

当线圈中电流变化时，它所激发的磁场通过线圈自身的磁通量也在变化，使线圈自身产生感应电动势的现象，该电动势叫自感电动势。



$$d\varphi = \vec{B} \cdot d\vec{S} \propto I$$

回路磁通量与回路的电流成正比：

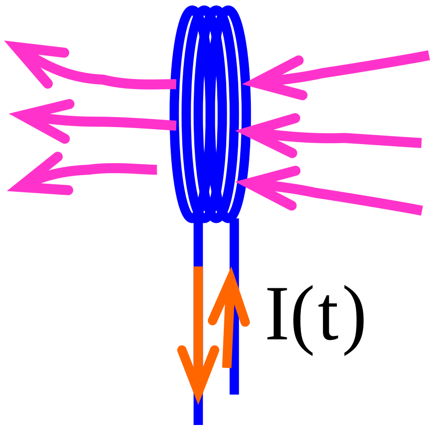
$$\varphi = LI$$ ——L 自感系数（亨利 H）

自感电动势：

$$\boxed{\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}}$$

自感电动势：

$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$



物理意义：自感 L有维持原电路状态的能力，L就是这种能力大小的量度，它表征回路电磁惯性的大小。

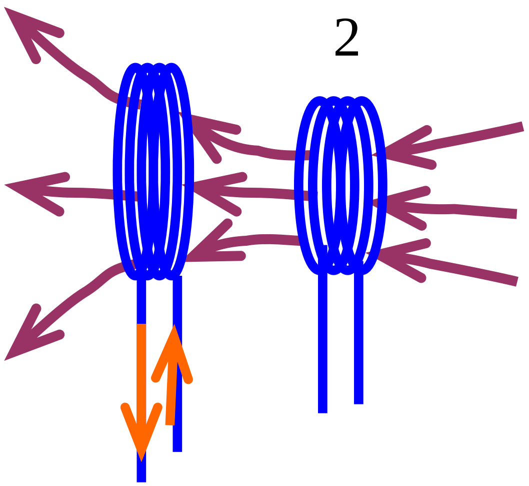
一个线圈中通有单位电流时，通过线圈自身的磁通链数，等于该线圈的自感系数。

电流强度变化率为一个单位时，在这个线圈中产生的感应电动势等于该线圈的自感系数。

3. 互感系数和自感系数的计算：

$$\Psi = LI \quad \boxed{\Rightarrow L = \frac{\Psi}{I}}$$

$$\varphi_{12} = M_{12} I_1 \quad \boxed{\Rightarrow M = \frac{\varphi_{12}}{I_1} = \frac{\varphi_{21}}{I_2}}$$



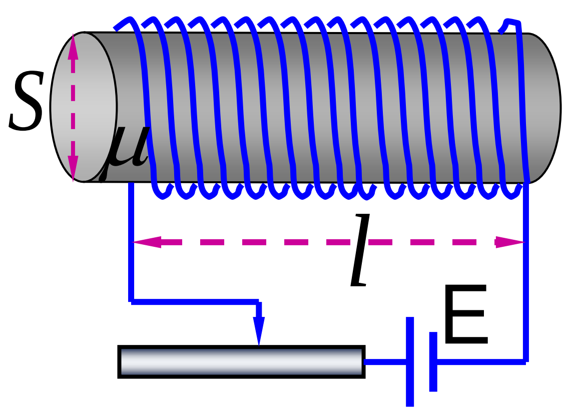
互感与自感的实际应用：

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = -M_{12}\dfrac{dI_2}{dt} \Rightarrow M = -\dfrac{\varepsilon_{12}}{\dfrac{dI_1}{dt}} \\ \\ \varepsilon_L = -L\dfrac{dI}{dt} \Rightarrow L = -\dfrac{\varepsilon_L}{\dfrac{dI}{dt}} \end{cases}$$

【例 9】已知两个共轴长直螺线管长为 l，截面S，匝数N_1、N_2，管内充满 μ 的磁介质，计算长直同轴螺线管的自感以及二者间的互感。

解：计算自感，假设电流 I 根据安培环路定理求得 $H \rightarrow B \rightarrow \Phi \rightarrow L$

$$B=\mu H=\mu nI \qquad \psi=N\Phi=NBS=N\mu\frac{N}{l}IS$$



$$\boxed{L=\frac{\psi}{I}=\mu\frac{N^2}{l}S}$$

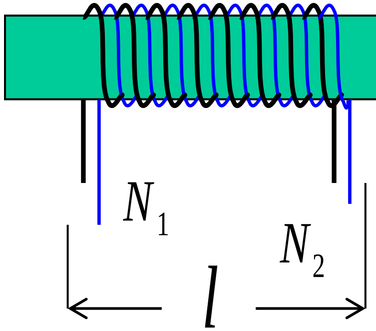
$$n=N/l \qquad V=lS$$

螺线管的自感 $\therefore L=\mu n^2 V$

（一般情况非理想线圈，可由实验上可用公式 $\varepsilon_L=-L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 测量自感 L）

计算互感的一般方法：

$$I_1 \rightarrow B_1 \rightarrow \Phi_{12} \rightarrow M = \frac{\Phi_{互12}}{I_1}$$



$$\because B_1 = n_1 \mu I_1$$

线圈1产生的磁场通过线圈2的磁通链数

$$\Psi_{12} = N_2\varphi_{12} = N_2 B_1 S = \underset{\overline{l}}{N_2}\left(\mu\frac{N_1}{l}I_1 S\right) l = \boxed{\mu n_1 n_2 V} I_1 = M_{12}\, I_1$$

同理可得：$\Psi_{21} = N_1\varphi_{21} = N_1\left(\mu\frac{N_2}{l}I_2 S\right) = \boxed{\mu n_2 n_1 V} I_2 = M_{21}\, I_2$

$$\boxed{\therefore \quad M = M_{21} = M_{12}}$$

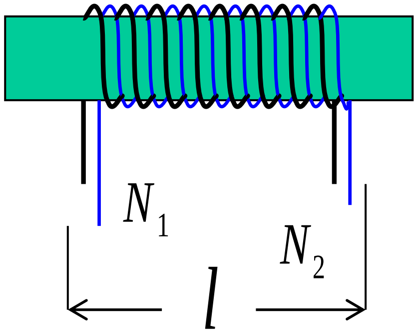
单位：亨利（H）

4. 同轴螺旋管的互感系数和自感系数的关系

已知参数 l，匝数分别为N_1、N_2，μ $\quad M = M_{21} = M_{12} = \mu n_1 n_2 V$

由无限长直螺线管的自感系数可知

$$L_1 = \mu n_1^2 V \qquad L_2 = \mu n_2^2 V$$



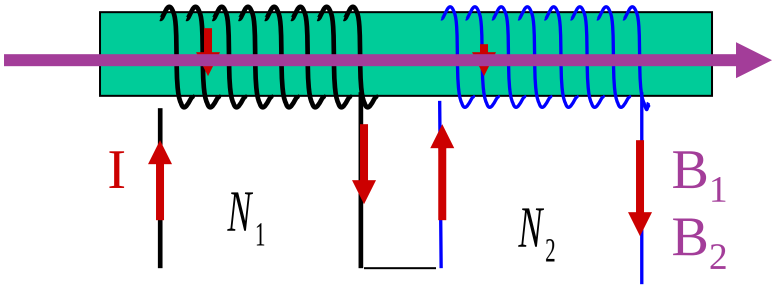
$\therefore \quad M = \sqrt{L_1 L_2}$ 无漏磁—即彼此磁场完全穿过

有漏磁: $\quad M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad 0 \le k \le 1$

耦合系数k与线圈的相对位置密切相关，连接方式不能唯一确定互感。

5. 同轴线圈的连接（线圈总自感）

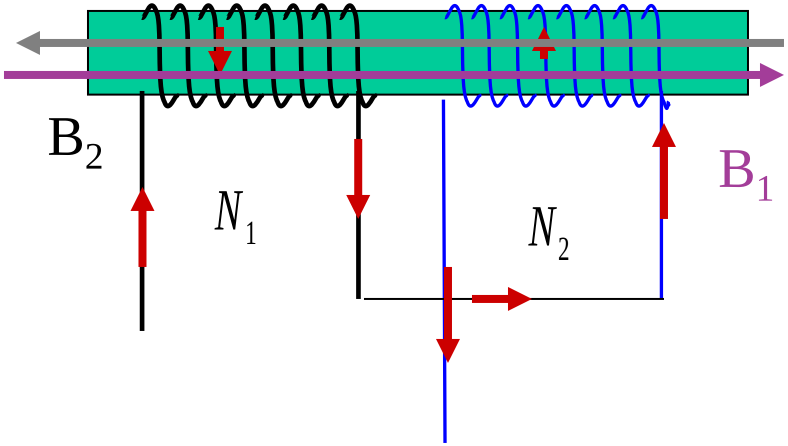
顺接：增大总自感 $L = L_1 + L_2 + 2M$



$$\varepsilon_i = \varepsilon_{L_1} + \varepsilon_{M_{21}} + \varepsilon_{L_2} + \varepsilon_{M_{12}}$$

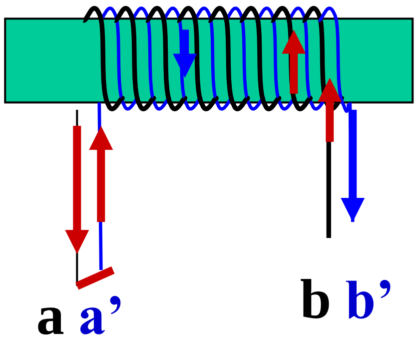
$$= -\left(L_1 \frac{dI}{dt} + M\frac{dI}{dt} + L_2\frac{dI}{dt} + M\frac{dI}{dt}\right) = -(L_1 + L_2 + 2M)\frac{dI}{dt}$$

反接：减小总自感 $L = L_1 + L_2 - 2M$

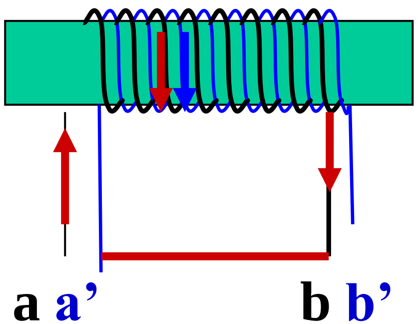


假设无漏磁 $L = L_1 + L_2 \pm 2\sqrt{L_1 L_2}$

【例 10】如图，纸筒上绕有两个相同线圈（同轴）$L_1=L_2=0.05H$，求总自感：1）a和a’相接，$L_{bb'}$；2）a’和b相接，$L_{ab'}$；3）aa’ 相接，bb’相接。

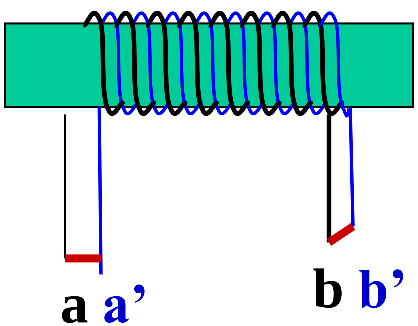


解：反接 $L=L_1+L_2-2\sqrt{L_1L_2}=0$



顺接 $L=L_1+L_2+2\sqrt{L_1L_2}=0.20H$

并联 $\varepsilon=\varepsilon_{ab}=\varepsilon_{a'b'}$



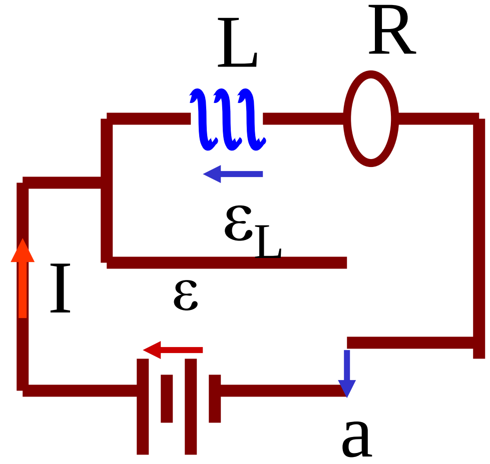
$$\varepsilon=-\left(L\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt}\right)=-2L\frac{dI_1}{dt}$$

$$=-2L\frac{d}{dt}\left(\frac{I}{2}\right)=-L\frac{dI}{dt}$$

$L=0.05H$

6. *RL*电路暂态过程

*RL*电路暂态过程——自感电路中电流的增长和衰减



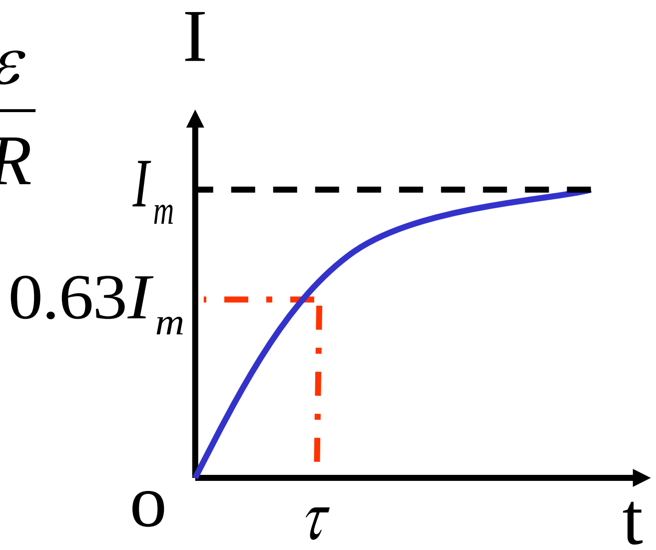
A回路　$\varepsilon + \varepsilon_L = Ri$　$\varepsilon - L\dfrac{di}{dt} = Ri$

$$\int_0^I \frac{di}{\frac{\varepsilon}{R} - i} = \int_0^t \frac{R}{L} dt \Rightarrow \boxed{I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

当$t \to \infty$时　$I = I_m = \dfrac{\varepsilon}{R}$

$t = \tau = \dfrac{L}{R}$时

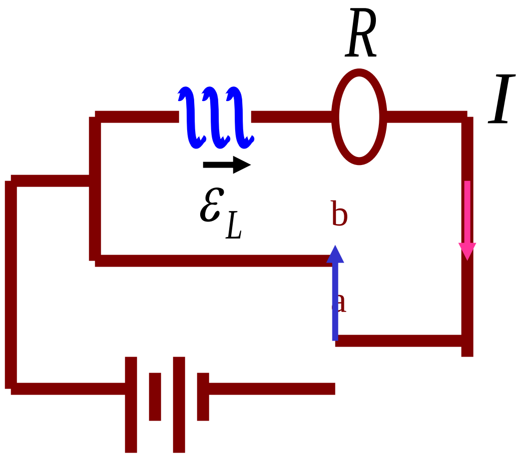
$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.63 I_m$$



（LR电路暂态过程）

τ——LR回路的时间常数或弛豫时间

B回路: $\varepsilon_L = iR \qquad -L\dfrac{di}{dt} = iR$

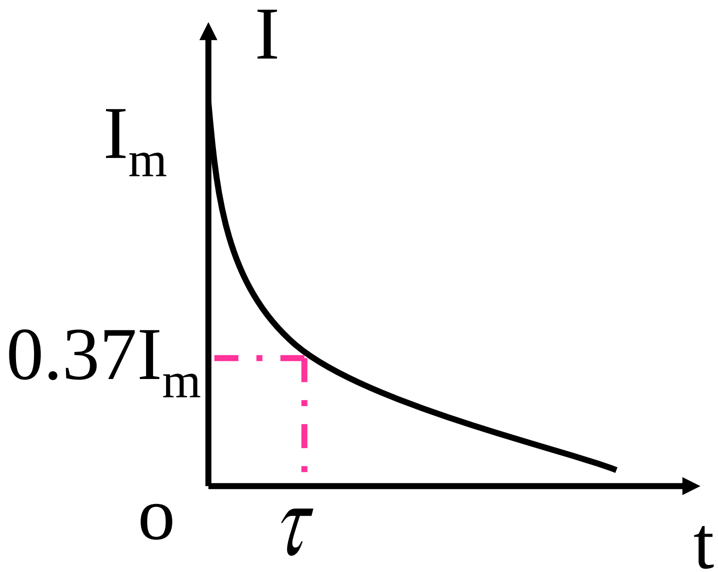


$$\int_{I_m}^{I}\frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt \Rightarrow \boxed{I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}}$$

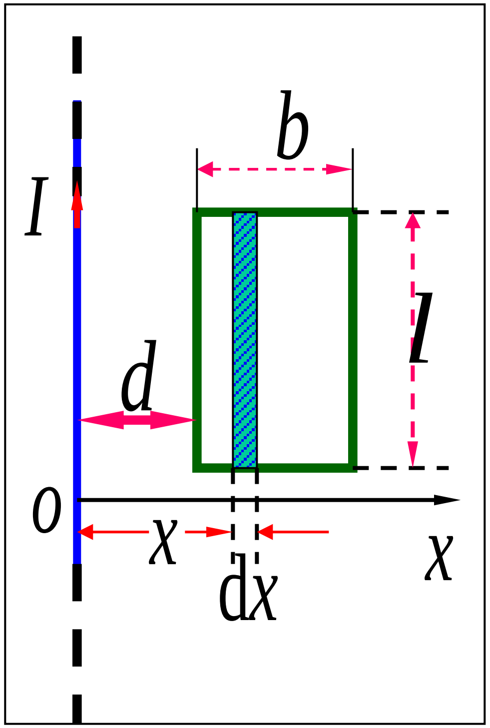
当: $t = 0$时, $I = I_m = \dfrac{\varepsilon}{R}$

$t \to \infty$时, $I \to 0$

$t = \dfrac{L}{R} = \tau$时, $I = 0.37I_m$



【例 11】在磁导率为 μ 的均匀无限大的磁介质中，一无限长直导线与一宽长分别为 b 和 l 的矩形线圈共面，直导线与矩形线圈的一侧平行，且相距为 d 。求二者的互感系数。

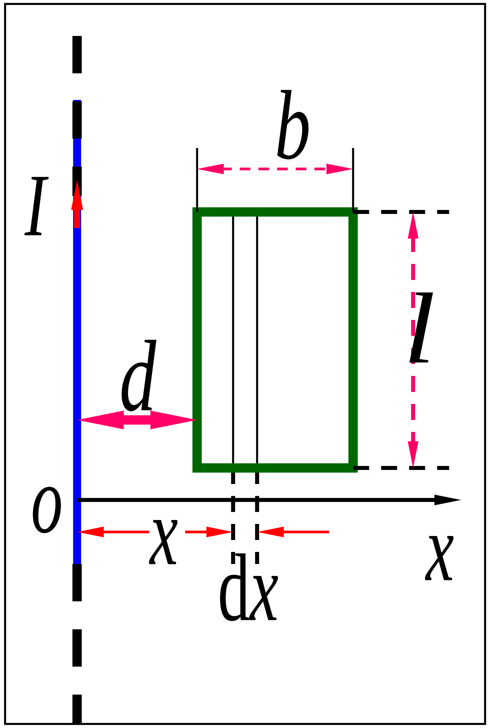


解　设长直导线通电流 I

$$B=\frac{\mu I}{2\pi x}$$

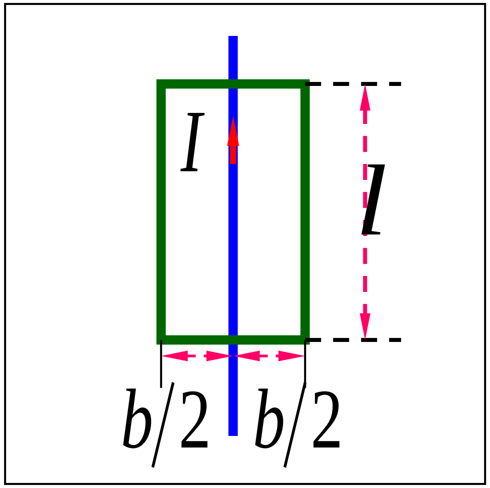
$$\mathrm{d}\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\mu I}{2\pi x}l\mathrm{d}x$$

$$\Phi=\int_{d}^{d+b}\frac{\mu I}{2\pi x}l\mathrm{d}x$$



$$\Phi=\int_d^{d+b}\frac{\mu I}{2\pi\ x}l\mathrm{d}x\ =\frac{\mu Il}{2\pi}\ln(\frac{b+d}{d})$$

$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln(\frac{b+d}{d})$$



若导线如左图放置，根据对称性可知

$$\Phi=0$$

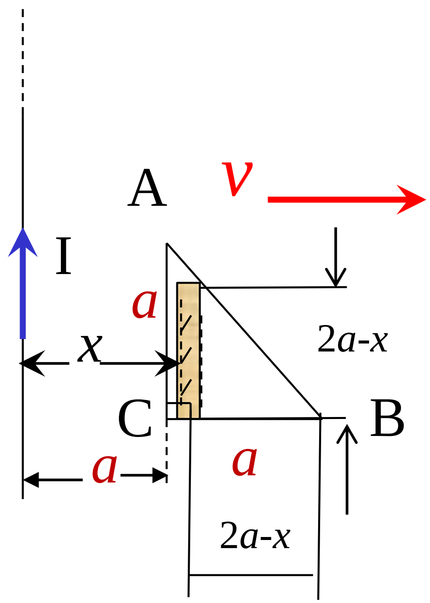
得 $M=0$

【例 12】如图，一无限长直导线与一边长为 a 三角形线圈共面，直导线电流强度为 I，线圈在平面内以速度 v沿垂直导线方向离开，求如图时刻互感系数 M 以及线圈的感应电动势 ε。

解：　设长直导线通电流 I，三角形线圈的磁通量为：

$$\Phi_{互12} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_a^{2a} \boxed{\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(2a-x)dx}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi}(2\ln 2 - 1)$$



互感系数：　$M = \Phi_{互12}/I_1$

长直导线与三角形线圈如图位置互感系数：　$M = \frac{\mu_0 a}{2\pi}(2\ln 2 - 1)$

解法1：感应动生电动势定义求解

$\vec{v}\times\vec{B}$ 之后的方向与路径 CA、AB、BA 积分的方向确定动生电动势积分中“点乘”的夹角，分别是0°、90°、135°的余弦。

导线CA动生电动势：

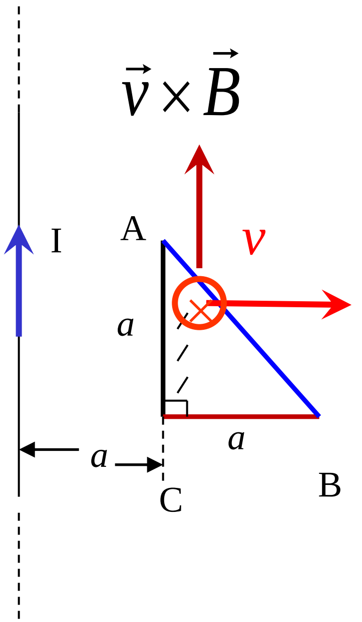
$$\varepsilon_{CA}=Bav=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cdot v\cdot a=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}$$

导线BC动生电动势： $\varepsilon_{BC}=0$

导线AB动生电动势为：

$$\varepsilon_{AB}=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int_L\frac{\mu_0 I}{2\pi x}v\boxed{\cos\tfrac{3}{4}}\pi dl$$

$$=\int_a^{2a}-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}vdx=-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln 2$$



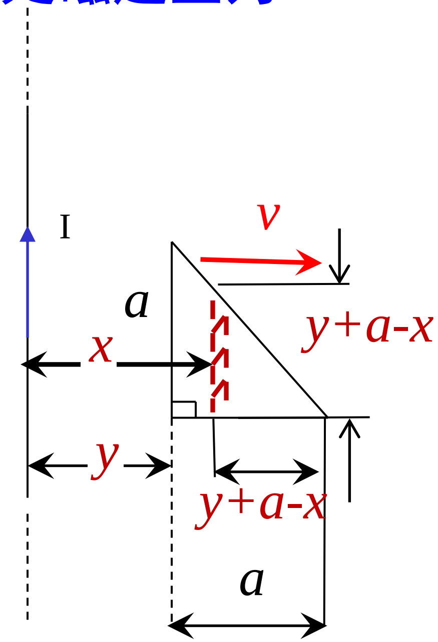
线圈ABCA动生电动势为： $\varepsilon_{ABC}=\varepsilon_{CA}+\varepsilon_{AB}+\varepsilon_{BC}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}(1-\ln 2)$

解法2： 法拉第定律求解： $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_{互12}}{dt}$

无限长直导线磁场在三角形线圈位于位置 y 处磁通量为：

$$\Phi_{互12} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_y^{y+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\boxed{(y+a-x)dx}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[(y+a)\ln\frac{y+a}{y} - a\right]$$



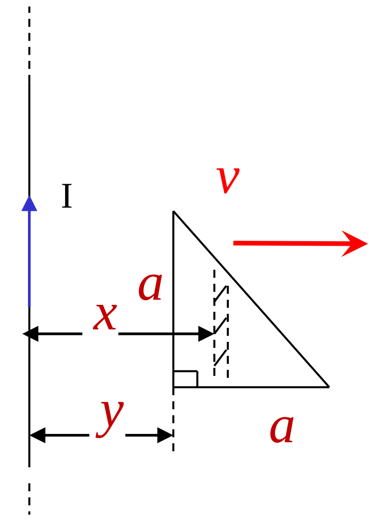
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{互12}}{dt} = -\frac{d\Phi_{互12}}{dy}v$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\frac{y+a}{y} + (y+a)\ln\frac{y+a}{y}\left(-\frac{a}{y^2}\right)\right]v = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\frac{y+a}{y} - \frac{a}{y}\right]v$$

线圈ABCA动生电动势为 $\varepsilon\big|_{y=a} = \dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}(1-\ln 2)$

解法 3： 互感方法求解：

互感磁通量与电流强度的关系： $\Phi_{互12} = MI_1$



长直线与三角形线圈的互感系数： $M = \dfrac{\Phi_{互12}}{I_1}$

穿过线圈ABCA的磁通量为：

$$\Phi_{互12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left[(y+a)\ln\frac{y+a}{y} - a\right]$$

无限长直导线与线圈ABCA任意位置y互感为： $M = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[(y+a)\ln\frac{y+a}{y} - a\right]$

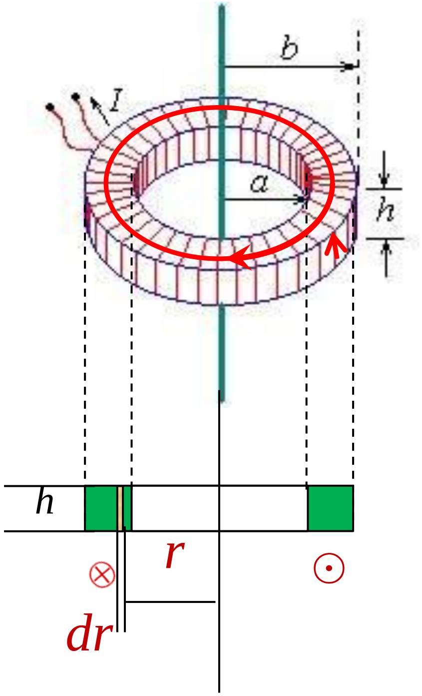
互感电动势为： $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_{互12}}{dt} = -\dfrac{d（MI_1）}{dt} = -M\dfrac{dI_1}{dt} - I_1\dfrac{dM}{dt} = -I\dfrac{dM}{dt}$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{\mu_0 v}{2\pi}\left[\ln\frac{y+a}{y} + (y+a)\frac{y}{y+a}\left(-\frac{a}{y^2}\right)\right]$$

线圈ABCA动生电动势为：

$$\varepsilon_M\big|_{y=a} = -I\left.\frac{dM}{dt}\right|_{y=a} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi}(1-\ln 2)$$

【例 13】截面为矩形的螺绕环共 N 匝，尺寸如图所示，图下半部两矩形表示螺绕环的截面，在螺绕环的轴线上另有一无限长直导线穿过。求螺绕环的自感系数，长直导线和螺绕环的互感系数。



解：计算自感的一般方法： $i \to B \to \Phi_{自} \to L$

螺绕环通过电流 I，由其对称性来分析磁场对称性;

应用安培环路定理 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$

螺绕环内 $a \le r \le b$ $\quad 2\pi r B = \mu_0 NI \qquad B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

磁场穿过螺绕环自身的磁通量为:

$$\Phi_{自} = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \boxed{Nhdr} = \frac{\mu_0 N^2 hI}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$

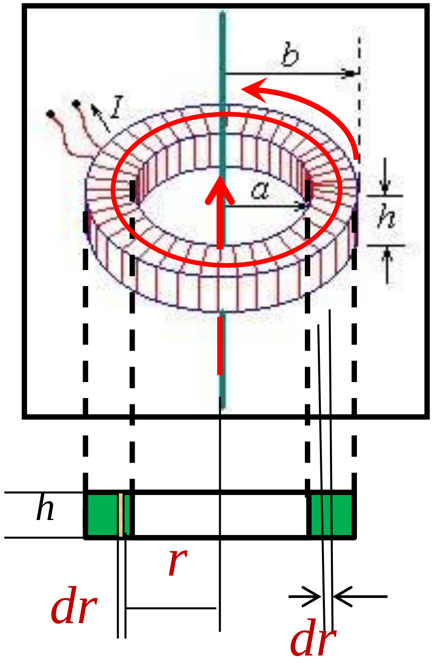
螺绕环的自感系数为: $\quad L = \dfrac{\Phi_{自}}{I} = \dfrac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\dfrac{b}{a}$

计算互感的一般方法： $I_1 \to B_1 \to \Phi_{12} \to M = \frac{\Phi_{互12}}{I_1}$

无限长直导线在空间的磁感应强度为： $B = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$

磁场穿过螺绕环的磁通量：

$$\Phi_{互12} = \int_a^b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \boxed{Nhdr} = \frac{\mu_0 N h I_1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

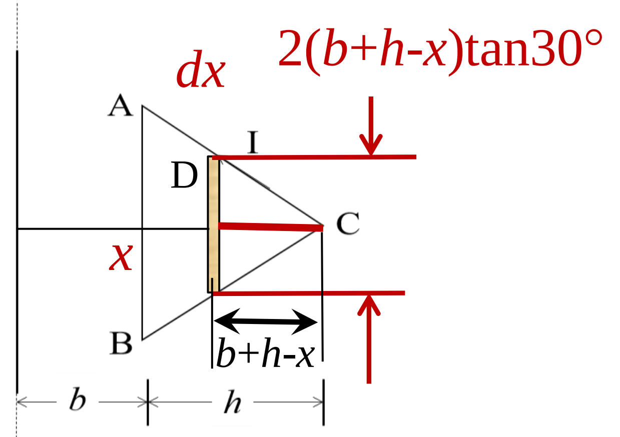


长直线与螺绕环的互感系数为:

$$M = \frac{\Phi_{互12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

【练习 7】如图所示，一根长直导线与一等边三角形线圈ABC 共面放置，三角形高为h，AB 边平行于直导线，且与直导线的距离为 b，三角形线圈中通有电流 $i = I_0 \sin\omega t$，电流 i 的正方向如箭头所示，求直导线中的感生电动势。

解：长直线通过电流 I 穿过三角形线圈中的磁通量



$$\Phi_{互} = \int_b^{b+h} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \boxed{2(b+h-x)\tan 30° dx} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I(b+h)}{3\pi}\ln\frac{b+h}{b} - \frac{\sqrt{3}\mu_0 I h}{3\pi}$$

长直线与三角形线圈中的互感

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\sqrt{3}\mu_0}{3\pi}\left((b+h)\ln\frac{b+h}{b} - h\right)$$

由于互感，$M_{12} = M_{21}$

三角形线圈流过电流 $i = I_0 \sin\omega t$，直导线中的感生电动势为：

$$\varepsilon = -M\frac{di}{dt} = -\frac{\sqrt{3}\mu_0}{3\pi}\left((b+h)\ln\frac{b+h}{b} - h\right)(\omega I_0\cos\omega t) = -\frac{\sqrt{3}\mu_0 \omega I_0 \cos\omega t}{3\pi}\left((b+h)\ln\frac{b+h}{b} - h\right)$$

§ 12. 4　磁场的能量

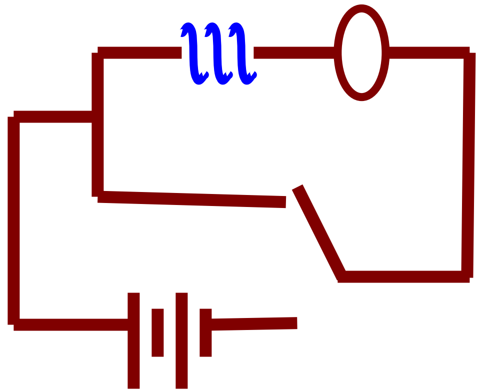
1. 线圈的自感磁能:

电容器充电以后储存了电场能量，当极板电压为U时储电场能为： $\boxed{W_C=\frac{1}{2}CU^2}$

$$i: \quad I\to 0 \qquad \varepsilon_L=-L\frac{di}{dt}$$

$$\varepsilon_L=iR \quad (\times idt\,)$$

$$\varepsilon_L idt=i^2Rdt$$

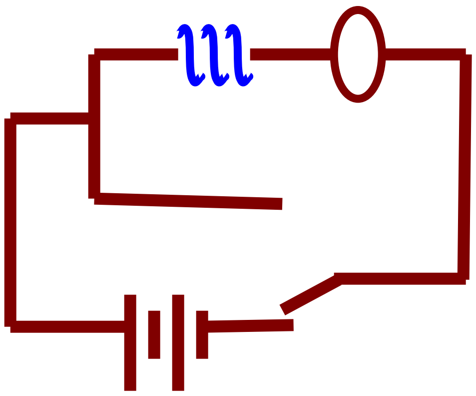


$$A_L=\int\varepsilon_L idt \quad =\int_I^0-L\frac{di}{dt}\cdot idt=\frac{1}{2}LI^2=W_m$$

自感为 L的线圈，通有电流 I 所储存的磁能等于这电流消失时自感电动势所做的功。

$$\varepsilon+\varepsilon_L=iR \qquad \Rightarrow \varepsilon=-\varepsilon_L+iR \quad (\times idt)$$

$$\varepsilon idt=-\varepsilon_L idt+i^2Rdt$$



电源反抗自感电动势所做的功

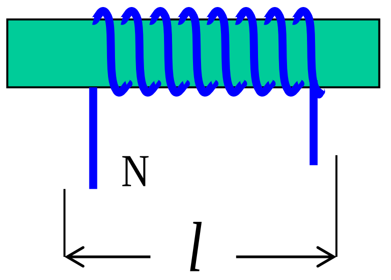
$$i: \quad 0\to I \quad \varepsilon_L=-L\frac{di}{dt}$$

$$A_L=\int-\varepsilon_L idt=\int_0^I L\frac{di}{dt}\cdot idt \boxed{=\frac{1}{2}LI^2}$$

线圈储存的磁能等于通电建立磁场过程中，电源反抗自感电动势所做的功。

线圈磁能的自感表示: $\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$ $\quad (I = \frac{\varepsilon}{R})$

2. 磁场的能量

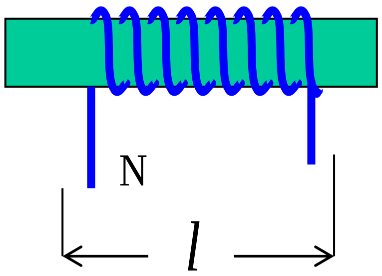


螺线管的自感: $L = \mu \frac{N^2}{l} S \qquad \because B = \mu n I = \mu \frac{N}{l} I$

螺线管内的磁能的磁场表示:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(\mu \frac{N^2}{l} S)(\frac{B}{\mu N / l})^2 \boxed{= \frac{B^2}{2\mu} V}$$

定义磁场的能量密度：$\omega_m = \dfrac{W_m}{V} = \dfrac{B^2}{2\mu} = \dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$



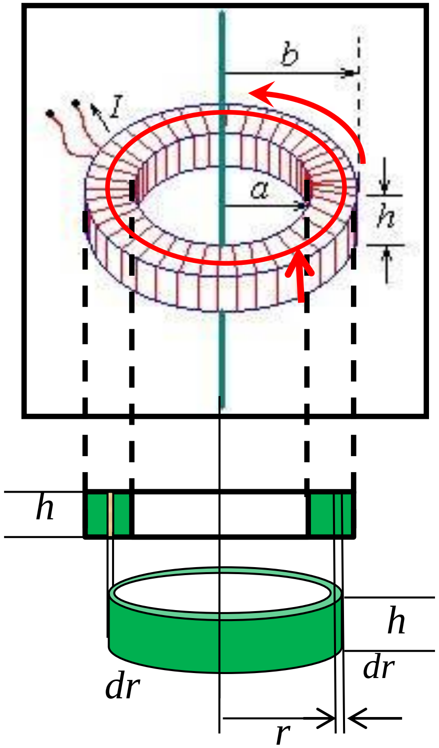
磁场所储存的总能量：（积分应遍及磁场存在的全空间）

$$W_M = \iiint w_m\, dV = \iiint \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\, dV$$

- 电磁场的总能量密度：$\omega = \dfrac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})$

电磁场的总能量：$\mathrm{W} = \iiint\limits_{\mathrm{V}} \dfrac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\cdot \mathrm{dV}$

截面为矩形的螺绕环共 N 匝，尺寸如图所示，图下半部两矩形表示螺绕环的截面，在螺绕环的轴线上另有一无限长直导线穿过。若在螺绕环内通以稳恒电流 I，求螺绕环内存储的磁能。



应用安培环路定理 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$

螺绕环内 $a \le r \le b$ $\quad 2\pi rB = \mu_0 NI \qquad B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

在螺绕环内取相同称轴、相同高度h、厚度dr的螺绕环薄筒，薄筒内部能量密度相同：

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

螺绕环内存储磁能为：

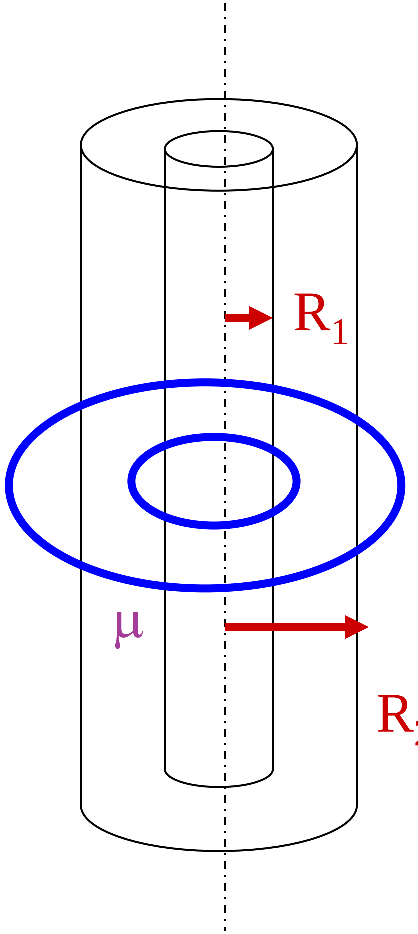
$$W = \iiint_V w dV = \int_a^b \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}\boxed{h2\pi r dr} = \int_a^b \frac{\mu_0 N^2 I^2}{4\pi r} h dr = \frac{\mu_0 h N^2 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

使用计算线圈磁场能量的方法 $W_L = \dfrac{LI^2}{2}$ 螺绕环的自感系数为 $L = \dfrac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$

【例 14】如图同轴电缆，中间充以磁介质μ，芯线与圆筒上的电流 I 大小相等、方向相反，已知内外筒的半径R_1和R_2（即金属芯线内的磁场可忽略），求单位长度同轴电缆的磁能和自感。

解 由安培环路定律可求 H

$$\begin{cases} r < R_1, & H = 0 \\ R_1 < r < R_2, & H = \dfrac{I}{2\pi r} \\ r > R_2, & H = 0 \end{cases}$$



$R_1 < r < R_2$ 磁能密度 $w_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$

则磁能密度 $R_1 < r < R_2$ $$w_m = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

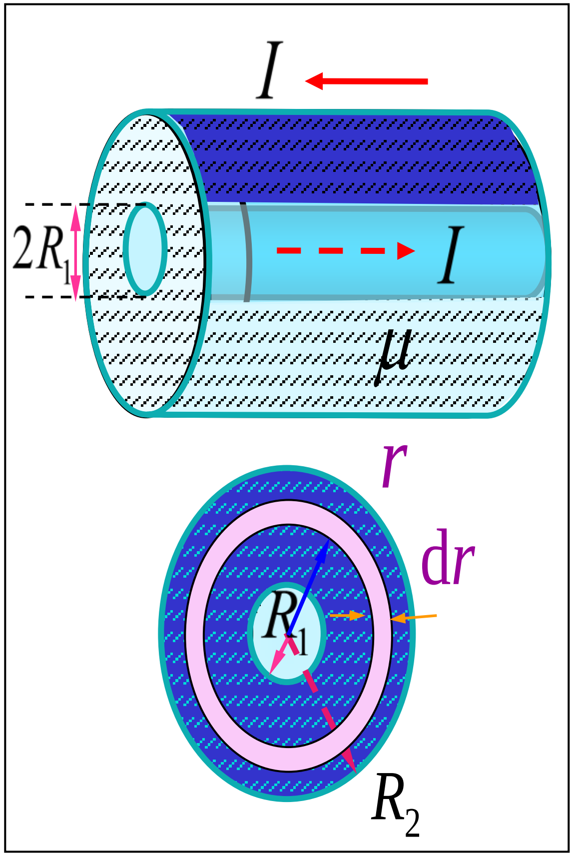
$$W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}\mathrm{d}V$$

单位长度壳层体积 $\mathrm{d}V = 2\pi\, r\mathrm{d}r \cdot 1$

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{4\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



磁通量方法计算自感： $B=\dfrac{\mu I}{2\pi r}$

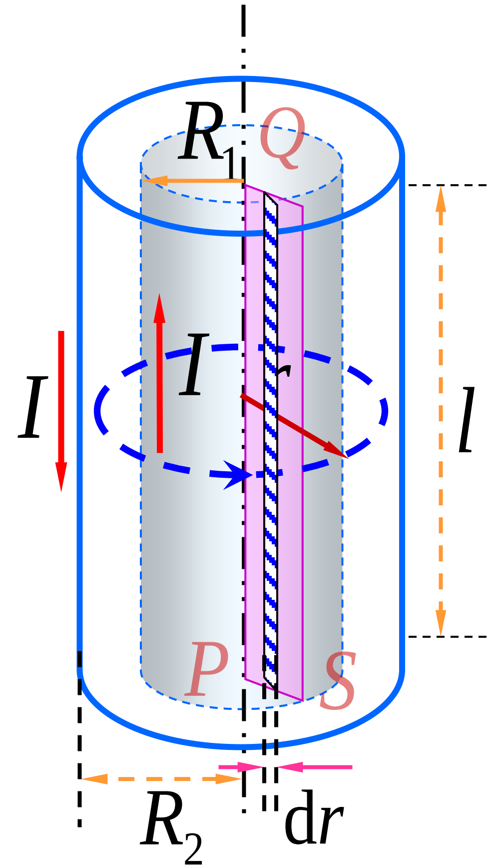
$$d\varphi=\vec{B}\cdot d\vec{S}=BdS=Bl\,dr$$

$$\varphi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}l\,dr=\frac{\mu I l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L=\frac{\varphi}{I}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的自感

$$L_0=\frac{L}{l}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



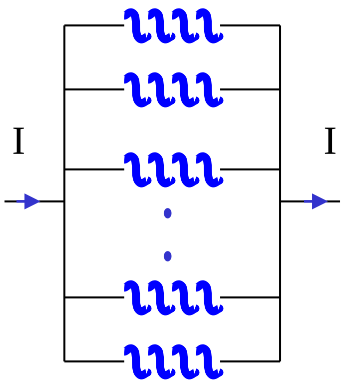
【练习 8】N 个完全相同的长直线圈相互并联，如图放置（不计它们之间的互感），每个线圈的自感为 L，求此组合的总自感 L^*

解：设总电流为 I，每一个支路电流为 I/N，总磁能为：

$$W_M = \frac{1}{2} L^* I^2$$

$$W_M = n \cdot \frac{1}{2} L I'^2 = n \cdot \frac{1}{2} L \left(\frac{I}{n}\right)^2 = \frac{1}{2n} L I^2$$

$$\boxed{L^* = \frac{L}{n}}$$



讨论：

1、N 个完全相同的感应线圈"并联"后，线圈之间没有互感的条件下，线圈的总自感为一个线圈自感的 N 分之一，否则，其他放置则会有不同的互感结果；

2、感应线圈的串并联与电阻和电容的串并联不同，后者只取决于线路的连接；而前者不仅取决于线圈连接，还取决于线圈的放置方式，线圈相同的连接，不同的放置将导致它们之间的磁场方向不同，方向不同一定会有不同的互感。

§ 12. 5　电磁场的理论基础

1. 静电场、稳恒磁场、感应电场的电磁理论的回顾

$$\text{静电荷} \xrightarrow{\text{有源无旋}} \text{静电场}$$

有旋电场

$$\text{磁荷或稳恒电流} \xrightarrow{\text{无源有旋}} \text{稳恒磁场}$$

？

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_{i0} = \iiint_V \rho dV$$ —— 电学高斯定理

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$ —— 法拉第电磁感应定律

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$ —— 磁学高斯定理

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_c = \iint \vec{j}_c\cdot d\vec{S}$$ —— 磁场安培环路定理

2. 位移电流 (displacement current)

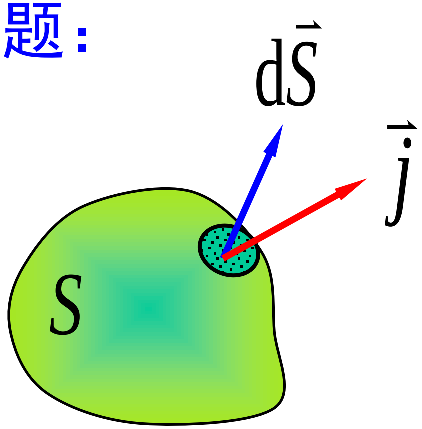
静电场
$$\begin{cases} \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_0 \\ \oint_L \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

稳恒磁场
$$\begin{cases} \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum I_c = \iint \vec{j}_c \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

感生电场
$$\begin{cases} \oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\varphi_m}{dt} = -\oiint \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \end{cases}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\varphi_m}{dt}$$

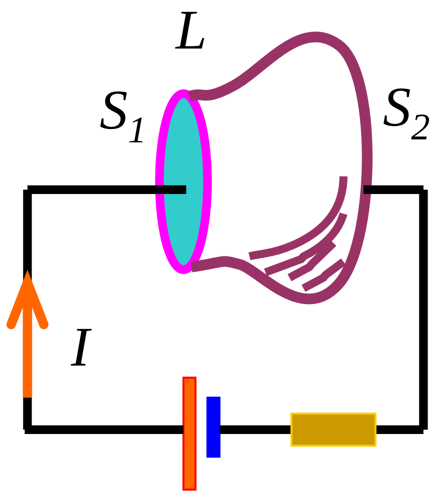
非稳恒条件下磁场安培环路定理遇到的问题：



电流强度与电流密度： $I=\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$

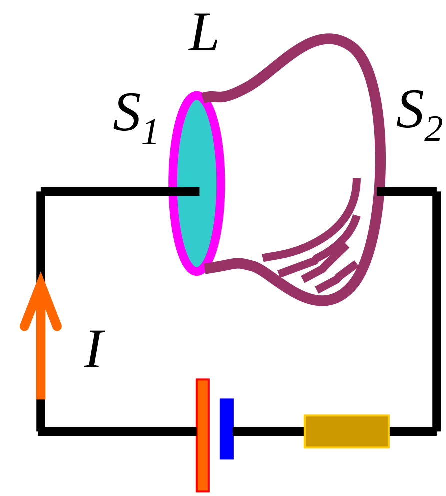
电流连续性方程： $\oiint\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\dfrac{dq}{dt}$ ——电荷守恒定律

稳恒条件下： $\oiint\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$



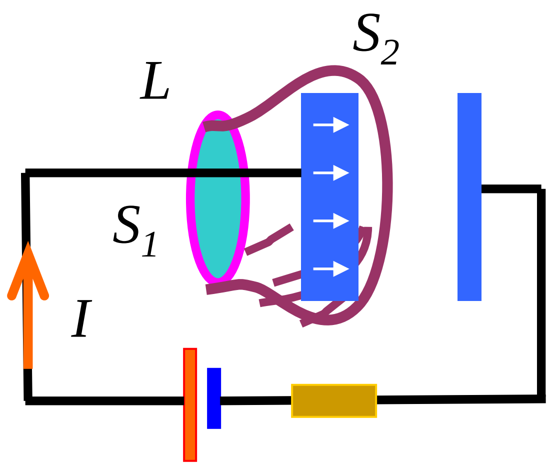
$$\int\limits_{S_2}\vec{j}\cdot d\vec{S}-\int\limits_{S_1}\vec{j}\cdot d\vec{S}=0 \Rightarrow \int\limits_{S_2}\vec{j}\cdot d\vec{S}=\int\limits_{S_1}\vec{j}\cdot d\vec{S}=I$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_i I_i$$ ——安路环路定理成立



考虑电容器充放电时的磁感应

强度沿任何闭合回路L的线积分：



$$\int_{S_1} \vec{j}\cdot d\vec{S} = I \qquad \int_{S_2} \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$$

非稳恒条件下

$$\frac{dq}{dt} = \oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} \neq 0$$

非稳恒条件下磁场安路环路定理不成立

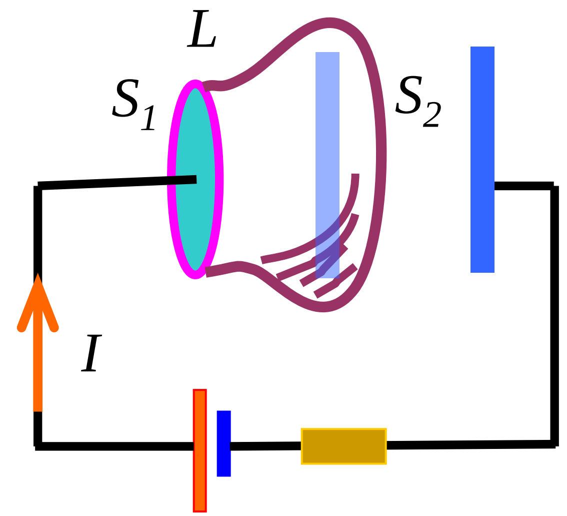
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} \neq \sum_i I_i$$

1861年麦克斯韦注意到充电时，极板间电场是变化的，

1）按对应原理有"电流"存在（不是传导电流）

2）穿过S_1面的电流在极板上积累应满足电流连续性原理

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \qquad \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$$



$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}} \Rightarrow \boxed{\oiint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} = 0}$$

在非稳恒时，传导电流不一定连续 $\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$ 永远是连续的

麦克斯韦的位移电流假说：

位移电流密度矢量：$\vec{j}_d = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

在变化的电场中存在着“电流”，它和传导电流一样能激发磁场。

全电流：

$$\boxed{I_s = \iint_S (\vec{j} + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S}}$$

位移电流

安路环路定理成立：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + I_d$$

物理思想是变化的电场激发磁场。

传导电流

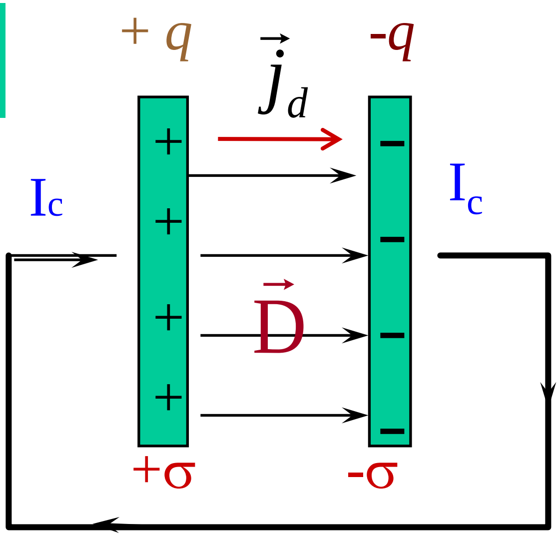
$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

变化的电场将激发涡旋磁场

在交变电场中电介质的反复极化

$$I_d \equiv \frac{d\varphi_D}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

平板电容器中 $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \sim \vec{j}_c$ $(D=\sigma_0)$



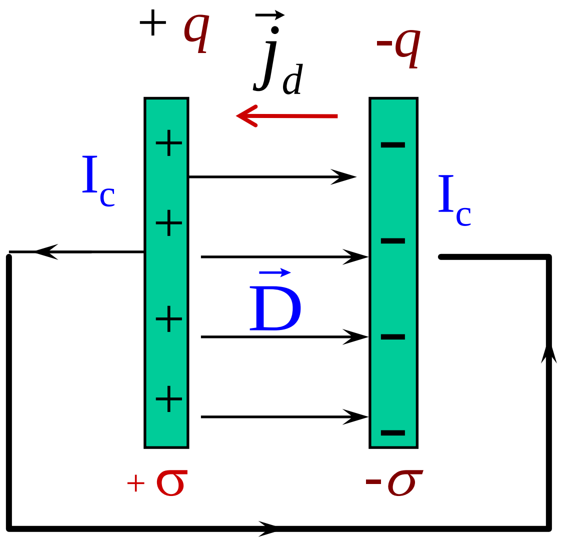
充电时： q↑ ⇒σ↑ ⇒D↑

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

与D的方向相同

I_d与I_c方向相同

放电时：q↓ ⇒σ↓ ⇒D↓

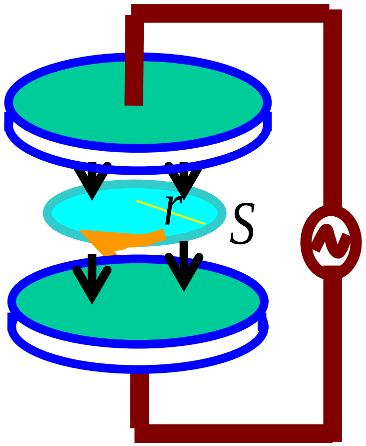


$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

与D的方向相反

I_d与I_c方向相同

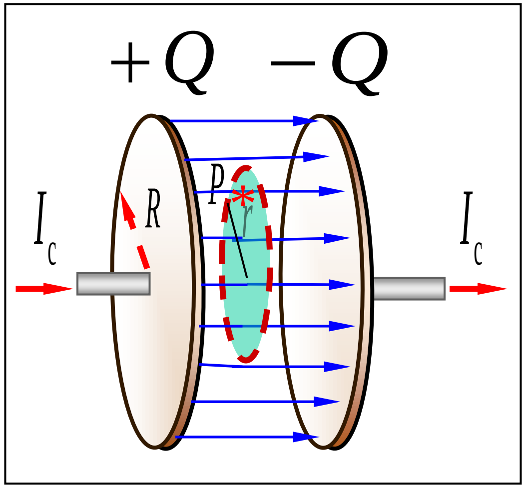
【例 15】半径为5.0cm圆形平板电容器，设充电后电荷在极板上均匀分布，两极板间dE/dt=2.0×10^{13}V/ms.求：1) 两极板间的位移电流。2) 两极板间磁感应强度分布和极板边缘处磁感应强度。



解：(1) 位移电流强度 $I_d \equiv \dfrac{d\phi_D}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{D}\cdot\vec{S})$

$(\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E})$ $\quad = \dfrac{d}{dt}(\varepsilon_0 E\pi R^2)$

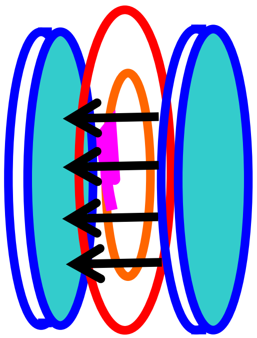
$$= \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}\pi R^2 = 1.4A$$



（2）取以轴点为圆心，半径为r 的圆为安培环路

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = H2\pi r = I_d$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = H2\pi r = I_d \quad = \frac{d}{dt}(D\pi r^2)$$



$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}\varepsilon_o r\frac{dE}{dt}$$

两极板间磁感应强度的分布

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_o\varepsilon_o}{2} r\frac{dE}{dt} \propto r$$

极板边缘处的磁感应强度

$$B\text{（}R) = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{2} R\frac{dE}{dt} = 5.6\times 10^{-6}\,T$$

【练习 9】如图，平板电容器（忽略边缘效应）充电过程中，下列表述正确的是：

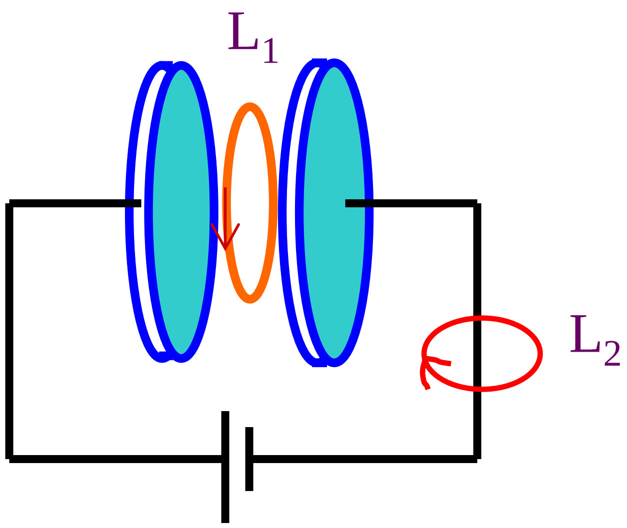
(A) $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} > \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$

(B) $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$

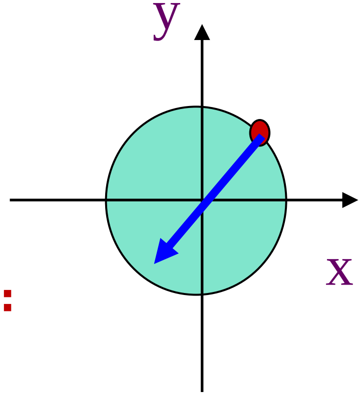
(C) $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} < \oint_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l}$

(D) $\oint_{L_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$

解：



【练习 10】如图，点电荷 q 以匀角速度 ω 逆时针、作 R 的圆周运动，设 t = 0 时，q 在 $x_0 = R$，y = 0，则在圆心O点的位移电流密度：



（A） $\dfrac{q\omega}{4\pi R^2}\sin\omega t\,\vec{i}$

（B） $\dfrac{q\omega}{4\pi R^2}\cos\omega t\,\vec{j}$

（C） $\dfrac{q\omega}{4\pi R^2}\vec{k}$

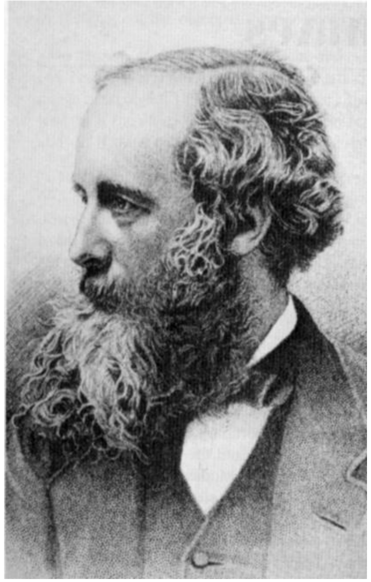
（D） $\dfrac{q\omega}{4\pi R^2}(\sin\omega t\,\vec{i}-\cos\omega t\,\vec{j})$

解：电场强度为：

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}(-\cos\omega t\,\vec{i}-\sin\omega t\,\vec{j})$$

位移电流密度为： $\vec{j}_d=\dfrac{d(\varepsilon_0\vec{E})}{dt}$

3. 麦克斯韦方程组



麦克斯韦（1831-1879）英国物理学家，1865 年麦克斯韦在总结前人工作的基础上，提出完整的电磁场理论，经典电磁理论的奠基人，气体动理论创始人之一 。他提出了有旋场和位移电流的概念，并预言了以光速传播的电磁波的存在。在气体动理论方面， 他还提出了气体分子按速率分布的统计规律。

他在电磁学领域的两个主要贡献是提出了"有旋电场"和"位移电流"两个假设，提出电磁理论方程组，并计算出电磁波的速度（即光速）。

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

（真空中 ）

感应电场的法拉第定律：$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

全电流安培环路定理：$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = i_c + i_d = \iint_S \left(\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$

麦克斯韦电磁场方程的**积分形式**

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_{i0} = \iiint_V \rho dV$$ —— 电学高斯定理

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$ —— 法拉第电磁感应定律

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$ —— 磁学高斯定理

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$ —— 磁学安培环路定理

在“变化”的情况下，电场和磁场密切不可分割，两者互为因果，形成统一的客体——电磁场。（并预言电磁波的存在）。

1888 年赫兹的实验证实了他的预言，麦克斯韦理论奠定了经典动力学的基础，为无线电技术和现代电子通讯技术发展开辟了广阔前景。

奥高公式：

$$\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV$$

斯托克斯公式：

$$\oint_L \vec{A}\cdot\vec{dl} = \iint_S \nabla\times\vec{A}\cdot\vec{dS}$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{D}dV = \iiint_V \rho dV \Rightarrow \nabla\cdot\vec{D} = \rho_e$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

麦克斯韦电磁场方程的微分形式

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$ —— 电学高斯定理

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$ —— 法拉第电磁感应定律

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$ —— 磁学高斯定理

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$ —— 磁场安培环路定理

对各向同性介质还有如下三个补充关系：$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{j}_0 = \sigma\vec{E}$

变化的磁场→感生电场；变化的电场→磁场；

4. 电磁波

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_c+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

上等式两边同时作用 $(\nabla\times)$

等式左边 $\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2E=-\nabla^2E$

在自由空间中：$\rho_e=0,\ I=0$

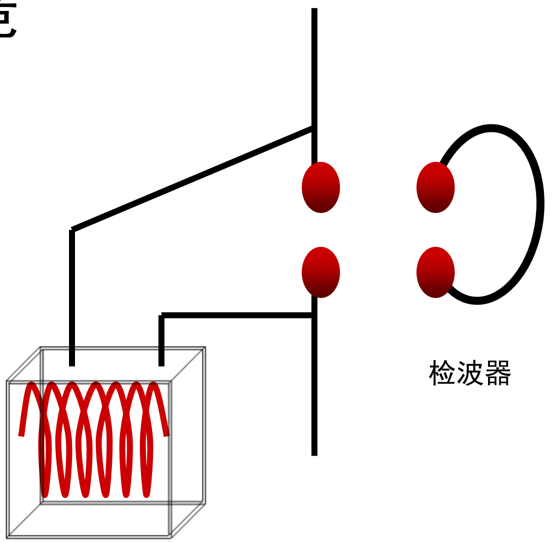
等式右边 $-\nabla\times\frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times B)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\frac{\partial D}{\partial t}\right)=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2E}{\partial t^2}$

波动方程 $\boxed{\nabla^2E=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2E}{\partial t^2}}$

$$\boxed{v=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8\,\mathrm{m/s}}$$

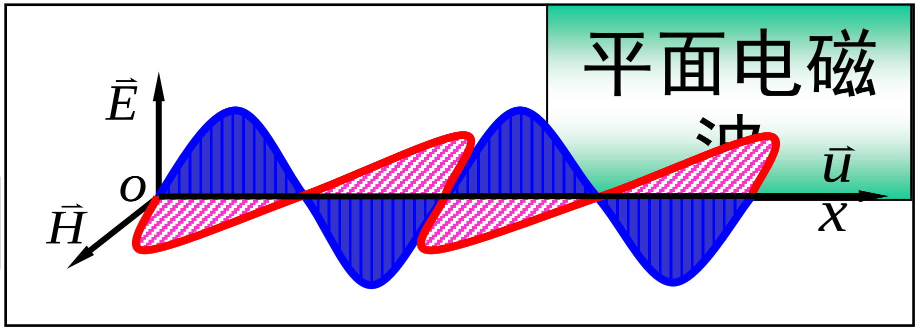
1878年德国物理学家亥姆霍兹给学生出了一个竞赛题：用实验的方法验证麦克斯韦的电磁理论。

1886年10月学生赫兹在做放电实验时，偶然发现其近旁的线圈也发出火花，敏锐意识到可能是电磁共振。



电磁波的基本性质

1) 电磁波是横波，电磁场同相



电磁波有偏振性,有反射、折射、干涉、衍射等现象

2）电磁波的能量、能流密度（强度）和动量

电磁波的能量——辐射能 $\omega = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})$

电磁波的能流密度（坡印廷）矢量 ——单位时间流过垂直于传播方向单位面积的能量；

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$$

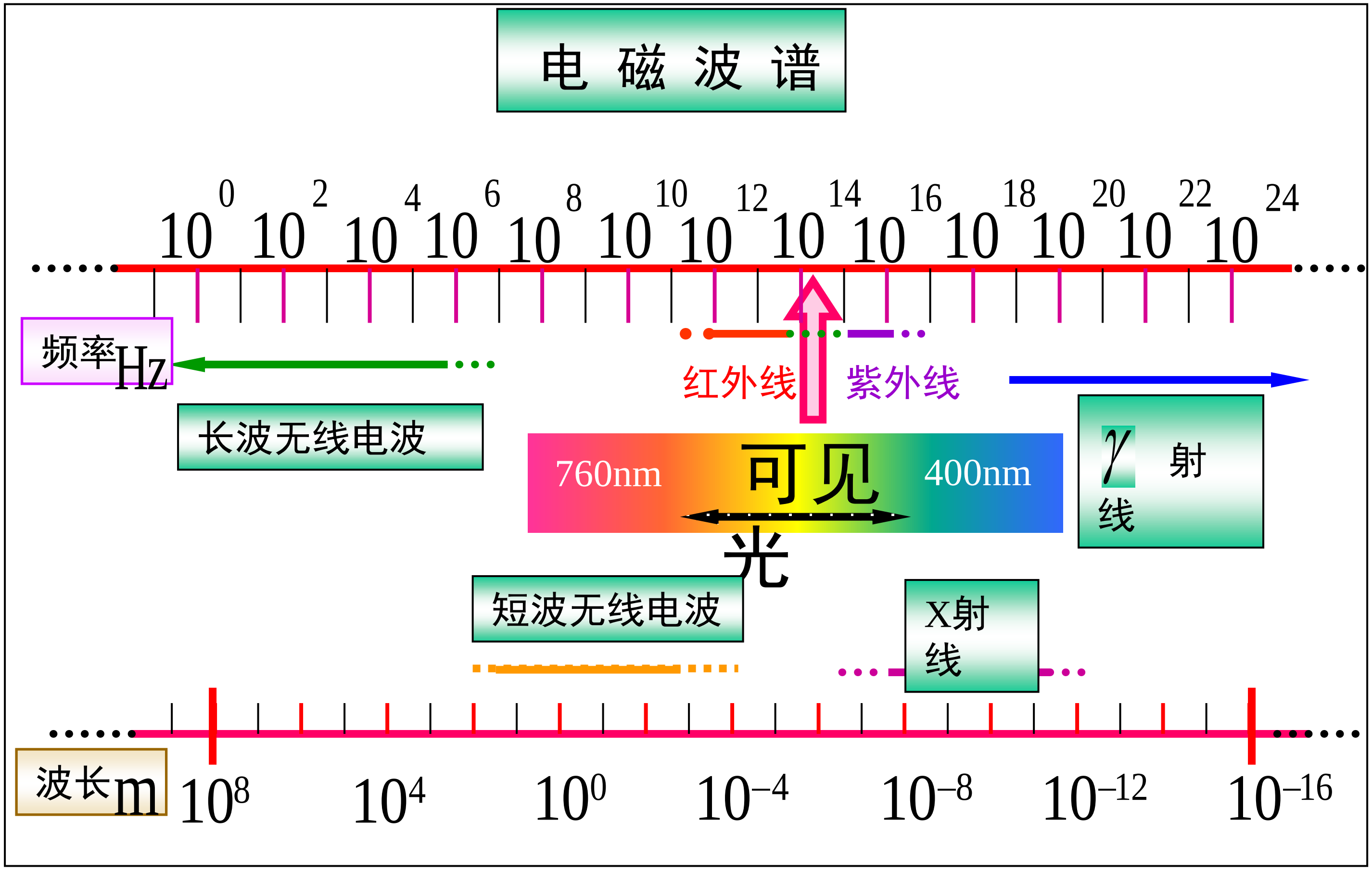
动量密度

$$p = \frac{w}{c} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}$$

辐射压力(光压)——射入到物体表面上对表面的压力

1920年列别捷夫光压实验证明电磁场与实物间有动量传递，并满足守恒定律。

3) 电磁波谱



无线电波 $3\times10^4\,\mathrm{m}\sim0.1\,\mathrm{cm}$

红外线 $6\times10^5\,\mathrm{nm}\sim760\,\mathrm{nm}$

可见光 $760\,\mathrm{nm}\sim400\,\mathrm{nm}$

紫外光 $400\,\mathrm{nm}\sim5\,\mathrm{nm}$

X射线 $5\,\mathrm{nm}\sim0.04\,\mathrm{nm}$

γ射线 $<0.04\,\mathrm{nm}$

A) 电磁感应知识点 → 理论基础

法拉第电磁感应定律

按产生原因分类

- 动生电动势 → 理论解释 → 计算公式
- 感生电动势 → 理论解释 → 计算公式

按激发方式分类

- 自感电动势 → 自感系数 → 线圈中的磁能 → 磁场能量
- 互感电动势 → 互感系数

B)电磁感应理论公式

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

按产生原因分类

动生电动势 $\longrightarrow \mathbf{f} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \longrightarrow \varepsilon_i = \oint_L (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}$

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

感生电动势 $\longrightarrow \mathbf{f} = q\mathbf{E}_i \longrightarrow \varepsilon_i = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$

按激发方式分类

自感电动势 $\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt} \longrightarrow L = \frac{\psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}$

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

$$W_M = \iiint_V \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}dV$$

互感电动势 $\varepsilon_{12} = -M\frac{dI_1}{dt} \longrightarrow M = \frac{N_1\Phi_{21}}{I_2} = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1}$

C 电磁场理论、电磁波

静电场的基本方程

实验验证赫兹实验

理论基础：麦克斯韦假设

电磁振荡

感生电场（涡旋电场）

电磁辐射，电磁波

稳恒电流磁场
的基本方程

位移电流

电磁波特性

电磁场的基本方程：
麦克斯韦方程组的积分形式

D） 电磁场规律的一般方程

静电场

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int_V \rho dV$$

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0$$

稳恒电流磁场

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0$$

$$\oint_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

感生电场（涡旋电场）

$$\oint_L \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{l}=-\int\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{S}=0$$

位移电流

$$I_d=\frac{d\Phi_D}{dt};\ j_d=\frac{d\mathbf{D}}{dt}$$

实验验证：赫兹实验

横波

同相位同周期

$$\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}=\sqrt{\mu}\mathbf{H}$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

麦克斯韦方程组的积分形式

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int_V \rho dV$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0$$

$$\oint_S \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{l}=-\int\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_S\left(\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S}$$