



華東理工大學

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND
TECHNOLOGY

离散数学

谓词逻辑

Predicative Logic

任课教师：杨海

yanghai@ecust.edu.cn

勤 奋 求 实
励 志 明 德

内容提要

1. 谓词与量词
2. 项与公式
3. 公式语义
4. 前束范式
5. 推理理论

1、谓词与量词

概念：

谓词，个体词，论域，全称量词，存在量词

命题的局限性

考虑以下推理（苏格拉底三段论）：

所有的人都会死的。

苏格拉底是人。

∴ 苏格拉底会死的。

直观上是有效的论证，但命题语言表示为：

p

q

∴ r

不是有效推论。

原因：“苏格拉底三段论”有效性不是取决于前提、结论之间的作为简单的命题的关系，而是依赖于命题的成分之间的联系。有必要将命题分解得更细。

命题的成分：

命题 = 主语+谓语+宾语

个体词

谓词

[+ 量词]

- 例：(1) 苏格拉底是人
(2) 所有的人都会死的。

注意：逻辑中主、谓成分划分与汉语有区别。

谓词 表示命题的谓语部分的符号或符号串

常用表示：大写字母，**A,B,C,...**

带有下标的大写字母，**A₁,A₂,A₃,...**

以大写字母为首的字符串，**Human,...**

谓词的元数: 谓词中包含个体的数目。

- 1元谓词描述个体的性质，2元或多元谓词描述两个或多个个体间的关系。
- 0元谓词中无个体，理解为就是命题

个体词 用于表示命题中主语部分的符号或符号串。
通常用小写字母，或带小标的小写字母表示。

个体常元 表示确指个体。

例：Human(s)中s指苏格拉底，是个体常元。

个体变元 表示不确指个体。

例：Human(x)中的x。

个体域(domain): 个体变元的取值范围，常用D表示。

量词：限定个体数量特性的词。

全称量词(Universal quantifier)

\forall 对所有的, for All

➤ $\forall x A(x)$ 表示个体域中的**任意**个体 x 均具有性质 A 。

例：所有的整数都有质因子。

理解成 “对所有 x ，若 x 是整数，那么 x 有质因子”

$$(\forall x)(I(x) \rightarrow P(x))$$

存在量词(Existential quantifier)

\exists , 有些, there Exist

➤ $\exists x A(x)$ 表示存在着个体域中的个体 x 具有性质 A 。

例：有些猪有翅膀。

理解为 “至少有一个物体 x , x 是猪并且 x 有翅膀。”

$$(\exists x)(P(x) \wedge W(x))$$

例：将下列语句符号化：

(1) 不是所有的鸟都能飞。

$$\neg (\forall x)(B(x) \rightarrow F(x))$$

(2) 所有的人都能做那件事。

$$(\forall x)(M(x) \rightarrow D(x))$$

(3) 有些人是笨的。

$$(\exists x)(M(x) \wedge S(x))$$

(4) 有一个整数比其它任何整数都大。

$$(\exists x)(I(x) \wedge (\forall y)(E(y) \wedge D(x,y) \rightarrow G(x,y)))$$

考虑例（1）“不是所有的鸟都能飞”

可理解为“至少有一只鸟不能飞”。

$$\neg(\forall x)(B(x) \rightarrow F(x))$$

$$(\exists x)(B(x) \wedge \neg F(x))$$

$\neg(\forall x)\neg$ 等价于 \exists 。即只要有一个量词就够了。

2、项与合式公式

概念：

项，原子公式，合式公式，自由变元，约束变元，辖域，
换名，代入

谓词语言：用符号串表示个体、谓词、量词和命题

一阶谓词逻辑 的基本符号

个体变元符号： x, y, z, \dots

个体常元符号： a, b, c, \dots

函数符号： f, g, \dots

谓词符号： P, Q, R, \dots

命题常元符号： \perp, \top

量词符号： \forall, \exists

连接词符号： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

辅助符号： $) , ($

逻辑符号：在任何情况下都作用相同的符号。

非逻辑符号：其他符号，即个体常元符号、函数符号、谓词符号。

项 (Term)

- (1) 个体常元和变元是项;
- (2) 若 f 是 n 元函数符号, t_1, \dots, t_n 是项, 则 $f(t_1, \dots, t_n)$ 是项;
- (3) 仅仅有限次使用(1), (2)产生的符号串是项。

注: 项将解释成个体对象。

原子公式 (Atomic formulas)

若 P 是一个元谓词符号, t_1, \dots, t_n 是项, 则 $P(t_1, \dots, t_n)$ 是原子公式。

合式公式 (Well-Formed Formulas)

递归定义如下:

- (1) 原子公式是公式;
- (2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 是合式公式;
- (3) 若 A, B 是公式, 则 $(A \vee B), (A \wedge B), A \rightarrow B, (A \leftrightarrow B)$ 是公式;
- (4) 若 A 是公式, x 是变元, 则 $\forall xA, \exists xA$ 是公式;
- (5) 仅仅有限次使用 1 ~ 4 得到的符号串才是合式公式。

变元的约束 设公式 α 的一个子公式为 $\forall x A$ 或 $\exists x A$ 。则称：

指导变元： x 是 \forall 或 \exists 的指导变元。

辖域(Scope)： A 是相应量词的辖域。

约束出现(bounded)： 辖域中 x 的一切出现，以及 $(\forall x)$ 中的 x 称为 x 在 α 中的约束出现。

自由出现(free)： 变元的非约束出现。

约束变元： 约束出现的变元。

自由变元： 自由出现的变元。

封闭的 (Closed) 一个公式 A 是封闭的，若其中不含自由变元。

例： $\forall x \forall y (P(x,y) \wedge Q(y,z)) \wedge \exists x P(x,y)$

变元换名 (Replacement)

目的是避免变元的约束与自由同时出现，引起混淆,可对约束变元换名。

规则：（1）换名的范围是量词的指导变元,及其相应辖域中的变元，其余部分不变。

（2）换名时最好选用辖域中未出现的变元名。

例： $\forall x (P(x) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y)$

可换为： $\forall z (P(z) \rightarrow R(z,y)) \wedge Q(x,y)$

不能： $\forall y (P(y) \rightarrow R(y,y)) \wedge Q(x,y)$

变元代入(Substitution)

代入对自由变元进行。不能改变约束关系。

3、谓词公式语义

概念：

解释，赋值，有效的，可满足的，不可满足的

解释 (Interpretation) 谓词语言的一个解释 $I = (D, \varphi)$ 包括:

- (1) 非空集合 D , 称之为论域;
- (2) 对应于每一个个体常元 a , $\varphi(a) \in D$;
- (3) 对应于每一个 n 元函数符号 f 都有一个函数 $\varphi(f): D^n \rightarrow D$;
- (4) 对应于每一个 n 元谓词符号 A 都有一个 n 元关系 $\varphi(A) \subseteq D^n$ 。

注: 解释也称为**结构**, 通常简单地用 φ 表示。

赋值 (Assignment) 解释I中的赋值 \mathbf{v} 为每一个个体变元 \mathbf{x} 指定一个值 $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbf{D}$ ，即设 \mathbf{V} 为所个体变元的集合，则赋值 \mathbf{v} 是函数 $\mathbf{v}:\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{D}$.

若 \mathbf{v} 是赋值，则 \mathbf{v} 的 \mathbf{a} -equivalent 赋值记为 $\mathbf{v}[\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{a}]$ （其中 $\mathbf{a} \in \mathbf{D}$ 表示一个由

$$\mathbf{v}[\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{a}](\mathbf{u}) = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{若 } \mathbf{u} = \mathbf{x} \\ \mathbf{v}(\mathbf{u}) & \text{else} \end{cases}$$

定义的赋值。

注：给定解释I和I中的赋值 \mathbf{v} 后，任何项和公式的含义就明确了。

$$\mathbf{v}_I:\mathbf{TERM} \rightarrow \mathbf{D}$$

$$\mathbf{v}_I:\mathbf{WFF} \rightarrow \{1,0\}$$

项的语义

项 t 在解释 $I=(D, \varphi)$ 和赋值 v 下的值, 记为 $v_I(t)$

(1) 若 t 是常元 a , 则 $v_I(t) = \varphi(a)$

(2) 若 t 是变元 x , 则 $v_I(t) = \varphi(x)$

(3) 若 t 是 $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, 则 $v_I(t) = \varphi(f)(v_I(t_1), v_I(t_2), \dots, v_I(t_n))$

例、 $\Sigma = \{a, f\}$, $f(x, a)$ 是一个项

解释 φ_1 、 φ_2 、 φ_3 :

$$\varphi_1(a)=1, \quad \varphi_1(f)=+; \quad I_1=(Z, \varphi_1)$$

$$\varphi_2(a)=0, \quad \varphi_2(f)=-; \quad I_2=(Z, \varphi_2)$$

$$\varphi_3(a)=-2, \quad \varphi_3(f)=\times; \quad I_3=(Z, \varphi_3)$$

x 的赋值 v_1 、 v_2 、 v_3

$$v_1(x)=7, \quad v_2(x)=0, \quad v_3(x)=-5$$

公式的语义

公式A在解释 $I=(D, \varphi)$ 和赋值 v 下的值, 记为 $v_I(A)$

1、若A为命题常元符号 p , 则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若 } A = \top \\ 0 & \text{若 } A = \perp \end{cases}$$

2、若A为原子公式 $P(t_1, \dots, t_n)$, 则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \langle v_I(t_1), v_I(t_2), \dots, v_I(t_n) \rangle \in \varphi(P); \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

3、若A为否定式($\neg B$)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若 } v_I(B) = 0 \\ 0 & \text{若 } v_I(B) = 1 \end{cases}$$

4、若A为析取式($B \vee C$)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若 } v_I(B) = 1 \text{ 或 } v_I(C) = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

5、若A为合取式($B \wedge C$)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若 } v_I(B) = 1 \text{ 且 } v_I(C) = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

6、若A为蕴含式($B \rightarrow C$)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 0 & \text{若 } v_I(B) = 1 \text{ 或 } v_I(C) = 0 \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

7、若A为等价式($B \leftrightarrow C$)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若 } v_I(B) = v_I(C) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

8、若A为 $(\forall xB)$ ，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若对任何 } d \in D, v[x \leftarrow d]_I(B) = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

9、若A为 $(\exists xB)$ ，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若对某个 } d \in D, v[x \leftarrow d]_I(B) = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

练习

给出如下两个公式：

$$1) G = \exists x (P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$$

$$2) H = \forall x (P(x) \wedge Q(x, a))$$

给出如下的解释I：

$$D = \{2, 3\}$$

$$a = 2$$

$$\begin{array}{cc} f(2) & f(3) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} P(2) & P(3) & Q(2, 2) & Q(2, 3) & Q(3, 2) & Q(3, 3) \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

$$1$$

$$1$$

$$1$$

$$0$$

$$1$$

有效公式

当一个解释I的所有赋值v都使公式A的真值为1，则称A在解释I下有效的(valid in the interpretation I);当公式A在所有的解释下都有效时，称A是(逻辑)有效的(Logically valid)。

可满足的 给定公式A，若在某一解释中至少有一种赋值使A取值为1，则称A为可满足的。否则称A是不可满足的。

等值式 $A \Leftrightarrow B$: 若 $A \leftrightarrow B$ 是有效的。

例、

$A = \exists x P(x, y)$ 可满足公式

$A = \forall x (P(x, y) \wedge \neg P(x, y))$ 不可满足公式

$A = (P(x, y) \vee \neg P(x, y))$ 有效公式

几类等值式

(1) 命题公式的推广

$$\text{e.g. } P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$$

(2) 否定深入

$$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x))$$

$$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x (\neg P(x))$$

(3) 量词作用域的扩张与收缩

设**B**中不含**x**的自由出现，则

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$

$$(4) \quad \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \\ \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

(5) 多个量词的使用

$$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$$

$$\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$$

置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含 A 的公式, 那么, 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

换名规则

设 A 为一公式, 将 A 中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号, 其余部分不变, 设所得公式为 A' , 则 $A' \Leftrightarrow A$.

4、前束范式

概念：

前束范式

前束范式： 如果谓词公式A有如下形状：

$$Q_1x_1 \dots Q_nx_nM$$

其中 Q_ix_i 或者是 $\forall x_i$, 或者是 $\exists x_i$, $i=1, \dots, n$, M 是不含量词的公式, $Q_1x_1 \dots Q_nx_n$ 称为首标, M 称为母式。

例、 $\forall x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow Q(x, z));$

$$\exists x \exists y \exists z P(x, y, z)$$

均为前束范式。

➤ 对于任意谓词公式, 都存在与之等值的前束范式。

前束范式的算法：

步1. 对约束出现的变元进行必要的换名，使得约束出现的变元互不相同且不与任何自由变元同名。

步2. 将所有的否定号 \neg 深入到量词后面。

$$\neg \forall x A = \exists x \neg A \quad \neg \exists x A = \forall x \neg A$$

步3. 将量词符号移至公式最外层。 **x 不在 B 中自由出现**

$$\forall x A \wedge B = \forall x (A \wedge B) \quad \exists x A \wedge B = \exists x (A \wedge B)$$

$$\forall x A \vee B = \forall x (A \vee B) \quad \exists x A \vee B = \exists x (A \vee B)$$

$$\forall x A \rightarrow B = \exists x (A \rightarrow B) \quad \exists x A \rightarrow B = \forall x (A \rightarrow B)$$

$$A \rightarrow \forall x B = \forall x (A \rightarrow B) \quad A \rightarrow \exists x B = \exists x (A \rightarrow B)$$

x 不在 A 中自由出现

例、 $(\neg \forall x P(x) \wedge \forall x \exists y Q(x,y)) \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)$

换名 $= (\neg \forall x P(x) \wedge \forall w \exists y Q(w,y)) \rightarrow \exists u \exists v R(u,v)$

\neg 深入 $= (\exists x \neg P(x) \wedge \forall w \exists y Q(w,y)) \rightarrow \exists u \exists v R(u,v)$

$$= \exists x (\neg P(x) \wedge \forall w \exists y Q(w,y)) \rightarrow \exists u \exists v R(u,v)$$

量词符号前移

$$= (\exists x \forall w \exists y (\neg P(x) \wedge Q(w,y))) \rightarrow \exists u \exists v R(u,v)$$

$$= \exists u \exists v (\exists x \forall w \exists y (\neg P(x) \wedge Q(w,y)) \rightarrow R(u,v))$$

$$= \exists u \exists v \forall x \exists w \forall y ((\neg P(x) \wedge Q(w,y)) \rightarrow R(u,v))$$

例、 $\forall x \forall y (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$

$$= \forall x \forall y (\neg (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z))) \vee \exists u Q(x,y,u))$$

$$= \forall x \forall y (\forall z (\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z)) \vee \exists u Q(x,y,u))$$

$$= \forall x \forall y \forall z (\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z) \vee \exists u Q(x,y,u))$$

$$= \forall x \forall y \forall z \exists u (\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z) \vee Q(x,y,u))$$

5、谓词逻辑推理理论

概念：

逻辑蕴含式，有效结论， \forall -规则 (US)， \forall +规则 (UG)， \exists -规则 (ES)， \exists +规则 (EG)，推理

逻辑蕴含式 $A \Rightarrow C$: 当且仅当 $A \rightarrow C$ 是有效的。

有效结论

设 A 、 C 是两个谓词公式，若 $A \Rightarrow C$ ，称 C 是 A 的有效结论。

推广: 若 $H_1 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$ ，称 C 是一组前题 H_1, \dots, H_n 的有效结论。

几类逻辑蕴涵式

第一组 命题逻辑推理定理的代换实例

如, $\forall xF(x) \wedge \exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

第二组 基本等值式生成的推理定理

如, $\forall xF(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xF(x)$, $\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$

$\neg\forall xF(x) \Rightarrow \exists x\neg F(x)$, $\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$

第三组 其它常用推理定律

$$(1) \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

$$(2) \exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

$$(3) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$$

$$(4) \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$$

推理规则

\forall - 规则(US):

$$\frac{\forall x A}{A[t/x]}$$

\forall +规则(UG):

$$\frac{A}{\forall x A}$$

\exists - 规则(ES):

$$\frac{\exists x A(x)}{A(c)}$$

\exists + 规则(EG):

$$\frac{A[t/x]}{\exists x A}$$

自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$

自然推理系统 $N_{\mathcal{L}}$ 定义如下:

1. 字母表. 同一阶语言 \mathcal{L} 的字母表
2. 合式公式. 同 \mathcal{L} 的合式公式
3. 推理规则:
 - (1) 前提引入规则
 - (2) 结论引入规则
 - (3) 置换规则
 - (4) 假言推理规则
 - (5) 附加规则
 - (6) 化简规则
 - (7) 拒取式
 - (8) 假言三段论规则
 - (9) 析取三段论规则
 - (10) 构造性二难推理规则
 - (11) 合取引入规则
 - (12) \forall -规则
 - (13) $\forall+$ 规则
 - (14) \exists -规则
 - (15) $\exists+$ 规则

推理（证明）

从前提 A_1, A_2, \dots, A_k 到结论 B 的推理是一个公式序列 C_1, C_2, \dots, C_l .
其中 $C_i (1 \leq i \leq l)$ 是某个 A_j , 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且 $C_l = B$ 。

例：用推理理论证明

(1) $\{\forall x (H(x) \rightarrow M(x)), H(s)\} \vdash M(s)$

(2) $\{\forall x (C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x)), \exists x (C(x) \wedge Q(x))\} \vdash \exists x (Q(x) \wedge R(x))$

注：先用**ES**，再用**US**。

(3) $\{\forall x (P(x) \vee Q(x))\} \vdash \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

注：a.用归谬法。

b.用**CP**规则：将 $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$ 看成 $\neg \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

谓词逻辑总结

1. 谓词与量词: 谓词, 个体词, 论域, 全称量词, 存在量词
2. 项与公式: 项, 原子公式, 合式公式, 自由变元, 约束变元, 辖域, 换名, 代入
3. 公式语义: 解释, 赋值, 有效的, 可满足的, 不可满足的
4. 前束范式: 前束范式
5. 推理理论: 逻辑蕴含式, 有效结论, \forall -规则 (US), \forall +规则 (UG), \exists -规则 (ES), \exists +规则 (EG), 推理