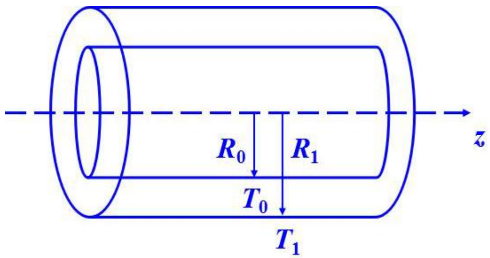
传递过程

鲍　博

华东理工大学 化工学院

3.3.2管道保温



柱坐标系下的对流传热微分方程

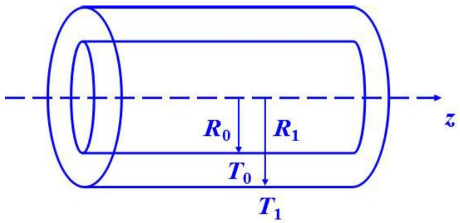
$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial T}{\partial z}=a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]+\frac{\dot{q}}{\rho C_P}$$

定常：$\frac{\partial T}{\partial t}=0$

保温层内：$\begin{cases} u_r=0 \\ u_\theta=0 \\ u_z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial r}\neq 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta}=0 \\ \frac{\partial T}{\partial z}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}=0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \end{cases}$

无内热源：$\dot{q}=0$

3.3.2.1单层保温管道



简化对流传热微分方程得：

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0$$

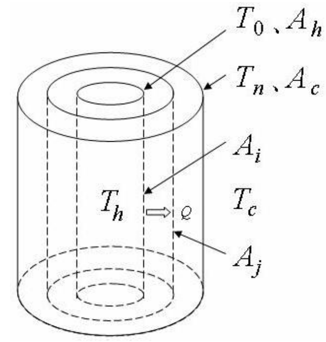
边界条件：$\begin{cases} r=R_0, & T=T_0 \\ r=R_1, & T=T_1 \end{cases}$

积分得：$T=C_1\ln r+C_2$

保温层内温度分布：$\dfrac{T-T_0}{T_1-T_0}=\dfrac{\ln\dfrac{r}{R_0}}{\ln\dfrac{R_1}{R_0}}$

传热速率：$Q=-k\left.\dfrac{dT}{dr}\right|_{r=R_0}2\pi R_0 L=\dfrac{2\pi kL}{\ln\dfrac{R_1}{R_0}}\left(T_0-T_1\right)$

3.3.2.2多层保温管道



导热

$$T_0-T_1=\frac{Q}{\dfrac{2\pi k_1 L}{\ln\dfrac{R_1}{R_0}}}$$

$$T_1-T_2=\frac{Q}{\dfrac{2\pi k_2 L}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}}$$

……

$$T_{n-1}-T_n=\frac{Q}{\dfrac{2\pi k_n L}{\ln\dfrac{R_n}{R_{n-1}}}}$$

对流

$$T_h-T_0=\frac{Q}{h_h A_h}$$

$$T_n-T_c=\frac{Q}{h_c A_c}$$

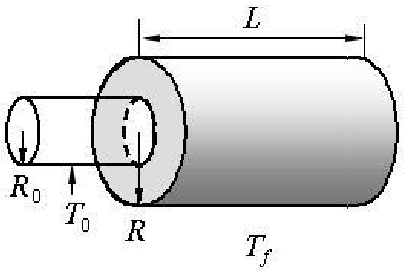
$$\boxed{Q=\frac{T_h-T_c}{\dfrac{1}{h_h A_h}+\sum_1^n\dfrac{\delta_i}{k_i A_n}+\dfrac{1}{h_c A_c}}}$$

其中 $A_n=\dfrac{A_j-A_i}{\ln\dfrac{A_j}{A_i}}$

A_i、A_j分别为某层圆筒的内外面积

3.3.2.3临界散热半径

管道保温

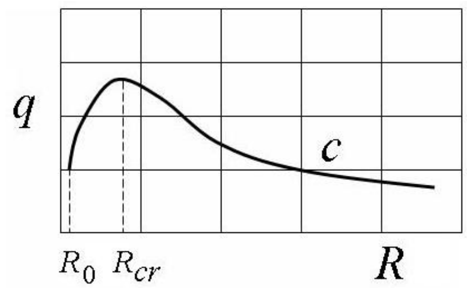


$$Q = \frac{T_0 - T_f}{\dfrac{\ln\left(R/R_0\right)}{2\pi Lk} + \dfrac{1}{2\pi RLh}}$$

$$\frac{dQ}{dR} = \frac{2\pi L\left(T_0 - T_f\right)\left(\dfrac{1}{kR} - \dfrac{1}{hR^2}\right)}{-\left[\dfrac{\ln\left(R/R_0\right)}{k} + \dfrac{1}{hR}\right]^2} = 0 \qquad \text{极 值}$$

$$R = \frac{k}{h}$$

最大临界散热半径：$R_{cr} = \dfrac{k}{h}$



对R_0管道，保温层加厚，起散热作用。当大于C点时，才保温。

例3-5 管道保温

实验装置上有根温度为100℃、半径为8mm的圆管，采用包石棉保温，石棉层厚度为2mm。已知空气的对流换热系数 $h = 25\text{W/m}^2\cdot\text{K}$，石棉的热导率 $k = 0.19\text{W/m}\cdot\text{K}$，石棉层起到的效果是（　　）。

A．保温作用　　B．无作用

C．散热作用　　D．不确定

例3-5 管道保温

实验装置上有根温度为100℃、半径为8mm的圆管，采用包石棉保温，石棉层厚度为2mm。已知空气的对流换热系数 $h = 25\text{W/m}^2\cdot\text{K}$，石棉的热导率 $k = 0.19\text{W/m}\cdot\text{K}$，石棉层起到的效果是（ A ）。

A．保温作用　　B．无作用

C．散热作用　　D．不确定

$$R_{cr} = \frac{k}{h} = 7.6\text{mm} < 8\text{mm}$$

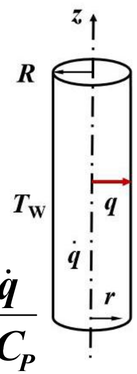
当临界散热半径小于管道半径时，无论增加多厚的保温层，保温效果都会增加。

问题探讨

你能画出不同R_0的$q\sim R$曲线吗?

3.3.3通电导线内的温度分布

柱坐标系下的对流传热微分方程



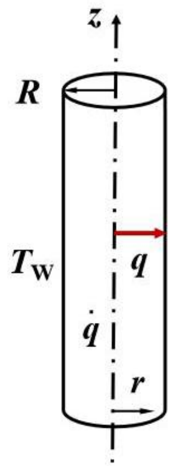
$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial T}{\partial z}=a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]+\frac{\dot{q}}{\rho C_P}$$

定常：$\frac{\partial T}{\partial t}=0$

导线内：
$$\begin{cases} u_r=0 \\ u_\theta=0 \\ u_z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial r}\neq 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial \theta}=0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial z}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}=0 \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \end{cases}$$

有内热源：$\dot{q}\neq 0$

简化对流传热微分方程



得：$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{\dot{q}}{k}$

边界条件：$\begin{cases} r=0, & \dfrac{dT}{dr}=0 \\ r=R, & T=T_W \end{cases}$

积分得：$r\frac{dT}{dr}=-\frac{\dot{q}}{2k}r^2+C_1$

$$\because r=0, \frac{dT}{dr}=0; \quad \therefore C_1=0$$

再积分，代入边界条件得：$T=T_W+\frac{\dot{q}}{4k}\left(R^2-r^2\right)$

通电导线内的温度分布

过余温度分布： $T - T_W = \frac{\dot{q}}{4k}\left(R^2 - r^2\right)$

$r = 0$ $\quad T = T_0$ $\quad$ 最大温升： $T_0 - T_W = \frac{\dot{q}}{4k}R^2$

无量纲温度分布： $\frac{T - T_W}{T_0 - T_W} = 1 - \frac{r^2}{R^2}$

截面平均温度： $T_{av} = \frac{\int_0^R T2\pi r dr}{\pi R^2} = T_W + \frac{\dot{q}}{8k}R^2$

平均温度与最大温升的关系： $\frac{T_{av} - T_W}{T_0 - T_W} = \frac{1}{2}$

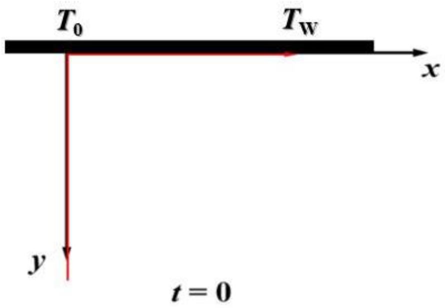
课后思考 其与管内层流规律类似？

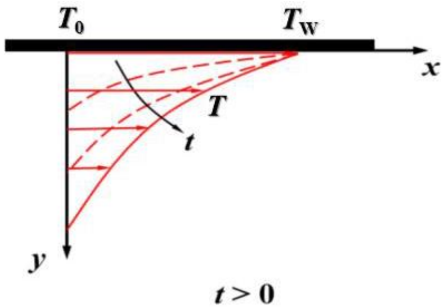
课后思考

1.电热棒、管式固定床反应器、核燃料棒的温度分布规律？

3.3.4半无限大平壁非定常导热

一半无限大平壁，初始温度为T_0，突然壁面温度变为 T_W，并维持不变。平壁内的温度分布T随时间也发生变化。

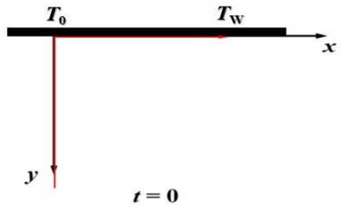


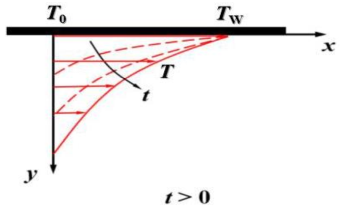


导热微分方程：$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \dot{q}$

相似性

1.类似静止流体中的平板启动，推导半无限大平壁非定常导热数学模型为：





$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + 2\eta\frac{dT}{d\eta} = 0$$

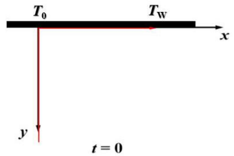
边界条件：$\begin{cases} \eta = 0, T = T_W \\ \eta \to \infty, T = T_0 \end{cases}$

非定常：$\dfrac{\partial T}{\partial t} \neq 0$

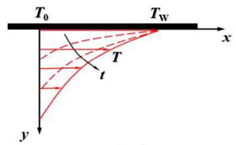
一维导热：$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \neq 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \neq 0 \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$

无内热源：$\dot{q} = 0$

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \dot{q}$$



$t = 0$

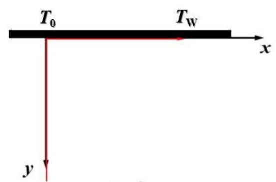


$t > 0$

简化导热微分方程，可得：

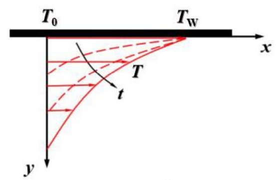
$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

初始条件：$t = 0, T = T_0$



$t = 0$

边界条件：$t > 0, \begin{cases} y = 0, T = T_W \\ y \to \infty, T = T_0 \end{cases}$



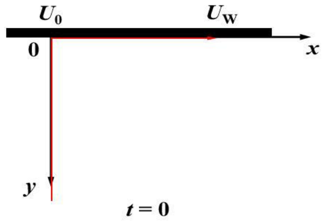
$t > 0$

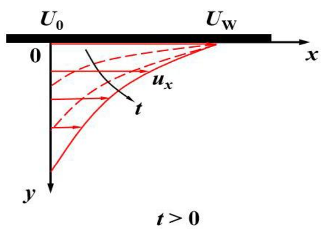
回顾：静止流体中的平板启动

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=v\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

初始条件：$t=0, u_x=0$

边界条件：$t>0,\begin{cases} y=0, u_x=U_W \\ y\to\infty, u_x=U_0=0 \end{cases}$





方程为一维非定常偏微分方程 $\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

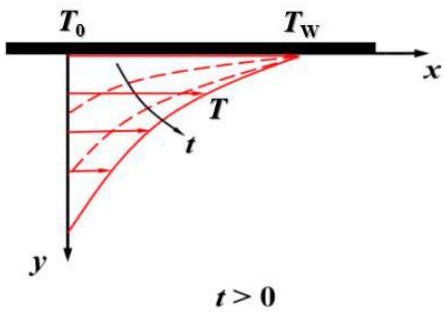
令 $\eta=\frac{y}{\sqrt{4at}}$ 则 $\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-\frac{\eta}{2t}\frac{\partial T}{\partial \eta}$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{4at}}\frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{4at}}\frac{\partial \frac{\partial T}{\partial \eta}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{4at}\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}$$

代入原方程可得：$\frac{d^2 T}{d\eta^2}+2\eta\frac{dT}{d\eta}=0$

$$\frac{d^2T}{d\eta^2}+2\eta\frac{dT}{d\eta}=0$$



边界条件：$\begin{cases}\eta=0, T=T_W\\ \eta\to\infty, T=T_0\end{cases}$

解方程得温度分布：

$$\frac{T-T_W}{T_0-T_W}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}d\eta=erf(\eta)$$

$\frac{T-T_W}{T_0-T_W}=erf(\eta)$ 高斯误差函数 $\eta=\frac{y}{\sqrt{4at}}$

问题探讨 其规律与半无限大流体非定常流动类似吗？

回顾：静止流体中的平板启动

$$u_x-U_W=C_1\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}d\eta$$

边界条件：$\eta\to\infty, u_x=U_0=0$

$$C_1=\frac{U_0-U_W}{\int_0^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta}$$ 其中：$\int_0^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

解方程得速度分布：

$$\frac{u_x-U_W}{U_0-U_W}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}d\eta$$

高斯误差函数

$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\eta^2}d\eta=erf(\eta)=\frac{u_x-U_W}{U_0-U_W}$ 其中：$\eta=\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}$

t 时刻壁面处的导热通量：

$$q_{t,y=0} = -k\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -k\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\bigg|_{y=0} = \frac{k\left(T_W - T_0\right)}{\sqrt{\pi a t}}$$

0~ t 时间内通过单位面积壁面的导热量：

$$Q = \int_0^t q_{t,y=0}dt = \int_0^t \frac{k\left(T_W - T_0\right)}{\sqrt{\pi a t}}dt = 2k\left(T_W - T_0\right)\sqrt{\frac{t}{\pi a}}$$

例3-6 大地升温

若温度5°C的大地，表面突然升至37°C。

(1). 1小时后地表面下0.05m处的温度？

(2). [t, 2t]与[0，t]内单位面积传热量之比。

已知：大地 $a = 4.65\times 10^{-7}$ m²/s。

(1). $\eta = \frac{y}{\sqrt{4at}} = 0.61$ 查表 $erf\left(\eta\right) \approx 0.612 = \frac{T - T_W}{T_0 - T_W}$

$$\therefore T = 17.4^{\circ}\mathrm{C}$$

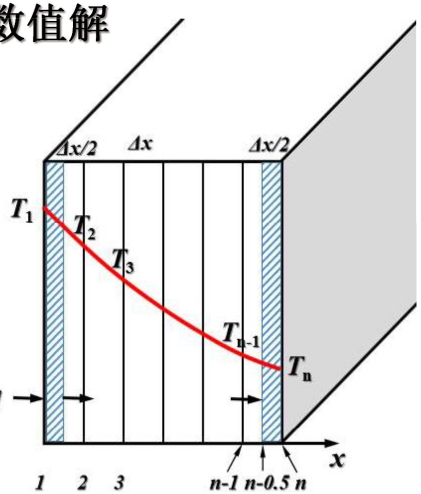
(2). $$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2k\left(T_W - T_0\right)\frac{\sqrt{2t} - \sqrt{t}}{\sqrt{\pi a}}}{2k\left(T_W - T_0\right)\sqrt{\frac{t}{\pi a}}}$$

$$= \sqrt{2} - 1 = 0.414 = 41.4\%$$

以下3.3.5内容为自学部分

3.3.5无限大平板非定常导热—数值解

一无限大平板，初始温度为T_0，突然左侧平面置于温度为 T_b 的对流环境中，右侧平面绝热。平板内的温度分布T随时间发生变化。

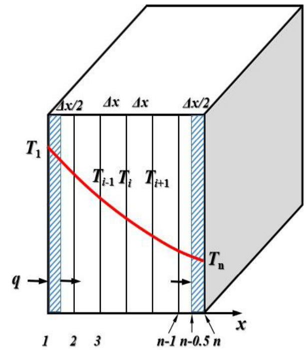


简化导热微分方程，可得：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

自学部分

将平板分割成厚度为Δx 的 n 份薄板。



$$T_{i+1} = T_i + \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=i}\Delta x + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=i}\frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots\cdots$$

$$T_{i-1} = T_i - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=i}\Delta x + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=i}\frac{\Delta x^2}{2!} - \cdots\cdots$$

二式相加，整理且忽略高价小量，得：

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x=i} = \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{\Delta x^2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{x=i} = \frac{T_i' - T_i}{\Delta t}$$

T_i, T_i' 为i处 t和$t+\Delta t$ 的瞬时温度。

自学部分

节点温度方程： $$\frac{T_i'-T_i}{\Delta t}=a\frac{T_{i+1}+T_{i-1}-2T_i}{\Delta x^2}$$

$$T_{i+1}+T_{i-1}-2T_i=\frac{\Delta x^2}{a\Delta t}\left(T_i'-T_i\right)$$

选取 Δx 和 Δt 越小，精度越高，相应计算量也越大。

为使计算过程简化，令： $$\frac{\Delta x^2}{a\Delta t}=2$$

计算时，Δx 和 Δt 不能同时独立选取，可根据精度要求先选其一，然后由上式确定另一个。

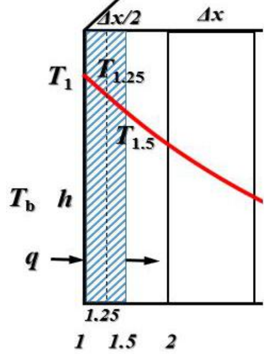
节点温度方程简化为： $$T_i'=\frac{T_{i+1}+T_{i-1}}{2}$$

上式表明：i 处在 $t+\Delta t$ 的瞬时温度等于其相邻两点在 t 的瞬时温度算术平均值。

自学部分

平板两侧的节点温度方程可通过热量衡算求出。

左侧节点温度方程



左侧剖面控制体，Δt 时间内。

左侧平面与环境对流传热量：

$$Q_1=hA\left(T_b-T_1\right)\Delta t$$

右侧平面导热传出的热量：

$$Q_2=-kA\Delta t\left.\frac{dT}{dx}\right|_{1.5}=-kA\Delta t\frac{T_2-T_1}{\Delta x}=\frac{kA\Delta t}{\Delta x}\left(T_1-T_2\right)$$

控制体累积的热量：$Q_3=\rho C_p\dfrac{\Delta x}{2}A\left(T_{1.25}'-T_{1.25}\right)=\rho C_p\dfrac{\Delta x}{2}A\left(T_1'-T_1\right)$

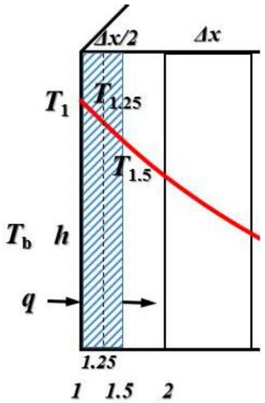
由于 Δt 时间很短，近似有： $T_{1.25}\approx T_1$ $\quad T_{1.25}'\approx T_1'$

自学部分

热量守恒 $Q_1 - Q_2 = Q_3$

$$h\left(T_b - T_1\right) - \frac{k}{\Delta x}\left(T_1 - T_2\right) = \rho C_p \frac{\Delta x}{2\Delta t}\left(T_1' - T_1\right)$$

$$\frac{\Delta x^2}{a\Delta t} = 2 \qquad a = \frac{k}{\rho C_p}$$

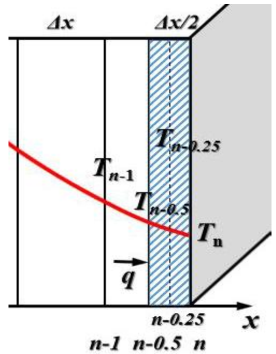


左侧节点温度方程：

$$T_1' = \frac{\Delta x h}{k}\left(T_b - T_1\right) + T_2$$

自学部分

右侧节点温度方程



右侧剖面控制体，Δt 时间内。

左侧平面导热传入的热量：

$$Q_1' = -kA\Delta t \left.\frac{dT}{dx}\right|_{n-0.5} = -kA\Delta t \frac{T_n - T_{n-1}}{\Delta x} = \frac{kA\Delta t}{\Delta x}\left(T_{n-1} - T_n\right)$$

控制体累积的热量：

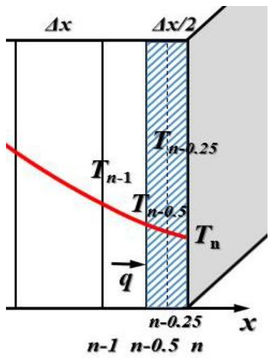
$$Q_2' = \rho C_p \frac{\Delta x}{2} A\left(T_{n-0.25}' - T_{n-0.25}\right) = \rho C_p \frac{\Delta x}{2} A\left(T_n' - T_n\right)$$

由于Δt 时间很短，近似有：$T_{n-0.25} \approx T_n \qquad T_{n-0.25}' \approx T_n'$

热量守恒 $Q_1' = Q_2'$

$$\frac{k\Delta t}{\Delta x}\left(T_{n-1}-T_n\right)=\rho C_p\frac{\Delta x}{2}\left(T_n'-T_n\right)$$

$$\frac{\Delta x^2}{a\Delta t}=2 \qquad a=\frac{k}{\rho C_p}$$



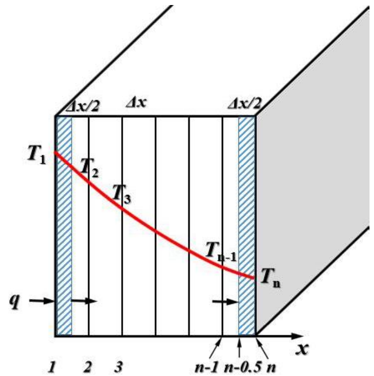
右侧节点温度方程： $T_n' = T_{n-1}$

平板的节点温度方程为：

$$T_1'=\frac{\Delta x h}{k}\left(T_b-T_1\right)+T_2$$

$$T_i'=\frac{T_{i+1}+T_{i-1}}{2}$$

$$T_n' = T_{n-1}$$

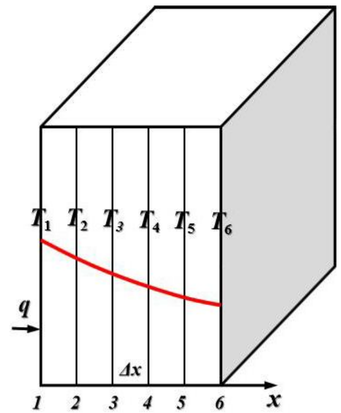


自学部分

例3-7 大平板非定常导热

不锈钢板厚度为0.305m，初始温度均匀为20℃，突然左侧平面置于温度为 100℃的饱和水蒸汽中，右侧平面绝热。用数值法计算经历0.6小时后平板内的温度分布。

已知：a=0.0186m²/h。



解：$\Delta x=\frac{0.305}{5}=0.061m$

令 $\frac{\Delta x^2}{a\Delta t}=2$ 得：$\Delta t=\frac{\Delta x^2}{2a}=\frac{0.061^2}{2\times 0.0186}=0.1h$

则0.6小时需分割6段Δt

自学部分

接触水蒸汽瞬间 $t=0$ 时刻：

$$T_1=\frac{20+100}{2}=60°C \qquad T_2=\cdots=T_2=20°C$$

此后左侧平面温度一直保持恒壁温

$$T_1=T_1'=T_1''=\cdots=100°C$$

经过第1个 Δt 后：

$$T_i'=\frac{T_{i+1}+T_{i-1}}{2}$$

$$T_2'=\frac{T_1+T_3}{2}=40°C$$

$$T_3'=T_4'=T_5'=20°C$$

$$T_6'=T_5=20°C$$

次数	时间 h	温度°C					
		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	0	60	20	20	20	20	20
1	0.1	100	40	20	20	20	20
2	0.2	100					
3	0.3	100					
4	0.4	100					
5	0.5	100					
6	0.6	100					

自学部分

同理应用中间和右侧节点温度方程可得：

$$T_i'=\frac{T_{i+1}+T_{i-1}}{2} \qquad T_6'=T_5$$

次数	时间 h	温度°C					
		T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
0	0	60	20	20	20	20	20
1	0.1	100	40	20	20	20	20
2	0.2	100	60	30	20	20	20
3	0.3	100	65	40	25	20	20
4	0.4	100	70	45	30	22.5	20
5	0.5	100	72.5	50	33.75	25	22.5
6	0.6	100	75	53.13	37.5	28.13	25