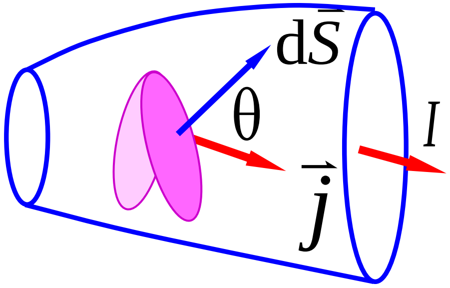
第十章　稳恒电流的磁场

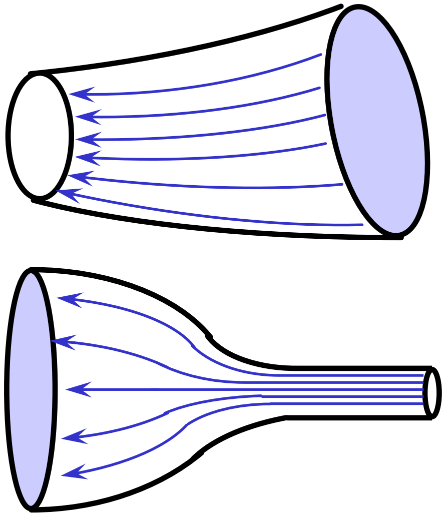
§ 10. 1 电流 电动势

一、电流密度

不同形状导体的电流分布

（1）定义： $\vec{j}=\dfrac{dI}{dS_{\perp}}\vec{n}^{\circ}$





方向：正电荷漂移运动的方向，

即该点电场强度的方向。

大小：等于垂直于该点电荷运动方向的单位面积上的电流强度。

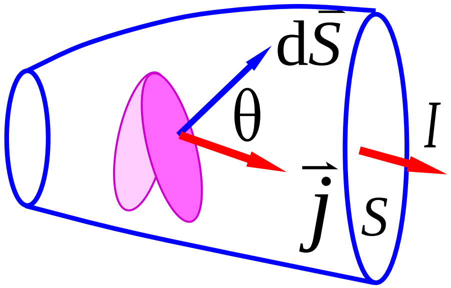
$$j=\frac{dI}{dS_{\perp}}$$

（2）电流线

一组疏密程度与电流密度矢量的大小成正比的曲线，且曲线上任一点的切线方向都表示该点的电流密度矢量的方向。

$$\left.\begin{array}{l} \because \vec{j} = \dfrac{dI}{dS_{\perp}}\vec{n}^{\circ} \\ 且 dS_{\perp} = dS\cos\theta \end{array}\right\}$$

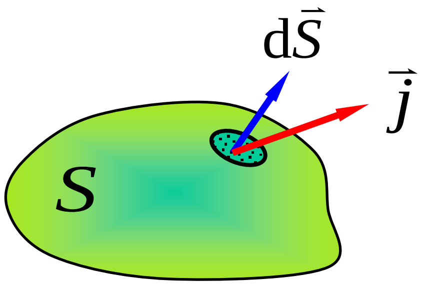
$$\mathrm{d}I = j\mathrm{d}S\cos\theta = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



$$\boxed{S: \quad I = \int_{S}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

通过某一截面的电流强度即为此截面上电流密度的通量。

（3）电流连续性方程



闭合曲面： $I=\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$

若: $I=\oint_s \vec{j}\cdot d\vec{s}>0$ 则表示有电荷通过闭合曲面向外迁移

若： $I=\oint_s \vec{j}\cdot d\vec{s}<0$ 则表示有电荷进入闭合曲面

若以 $\dfrac{dq}{dt}$ 表示闭合曲面内的电量随时间的变化率

则有： $\oint_s \vec{j}\cdot d\vec{S}=-\dfrac{dq}{dt}$ ——电流连续性方程

单位时间通过闭合面向外净流出的电荷量等于闭合面内单位时间电荷量的减少。

二、 稳恒电流

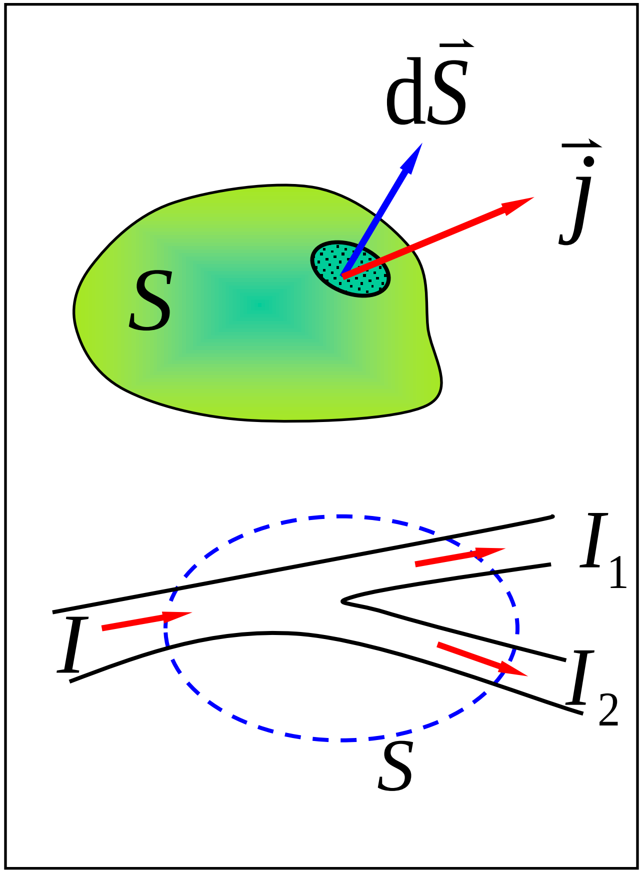
$$\oint_{s} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t}$$

若闭合曲面 S 内的电荷不随时间而变化，有

$$\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} = 0$$

恒 定 电 流 $\oint_{s} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

$$\boxed{-I + I_1 + I_2 = 0}$$



三　欧姆定律的微分形式

1　电阻率

一段电路的欧姆定律　　$U = IR$

电阻定律　$R = \rho \dfrac{l}{S}$　　$R = \dfrac{l}{\gamma S}$

电阻率　　电导率

电阻率（电导率）不但与材料的种类有关，而且还和温度有关．一般金属在温度不太低时

电阻率　$\rho_2 = \rho_1[1 + \alpha(T_2 - T_1)]$

电阻的温度系数

一微元欧姆定律的微分形式

$$\mathrm{d}I=\frac{\mathrm{d}U}{R}$$

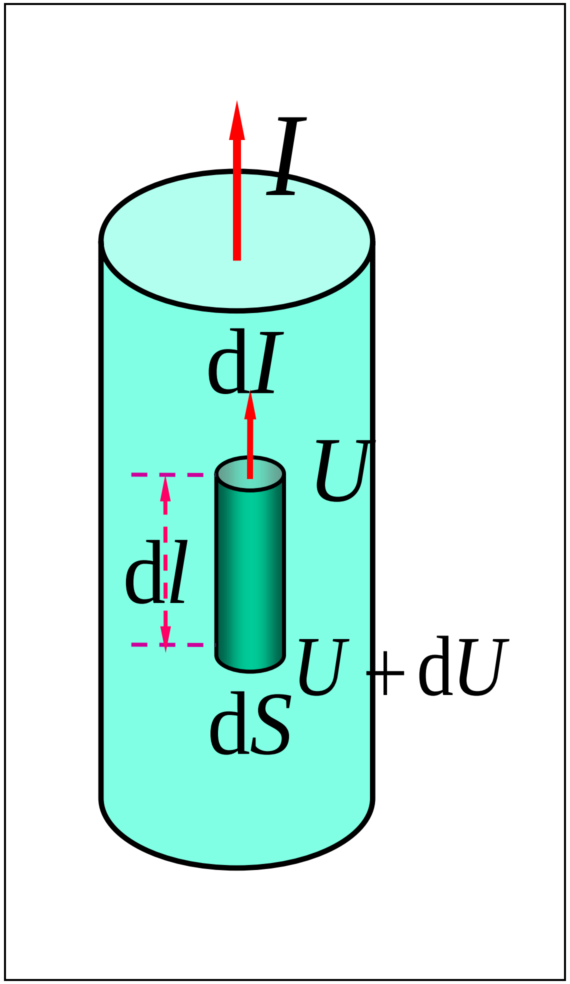
$$R=\frac{\rho\,\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S}$$

$$\mathrm{d}I=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}\mathrm{d}S$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}=\frac{1}{\rho}E=\sigma E$$

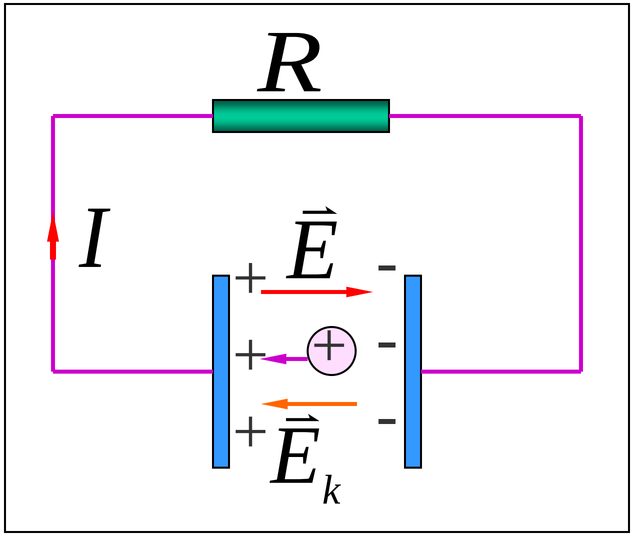
$$\vec{j}=\frac{1}{\rho}\vec{E}=\sigma\vec{E}$$

欧姆定律的微分形式



四 电源 电动势

非静电力: 能不断分离正负电荷使正电荷逆静电场力方向运动.



电源：提供非静电力的装置.

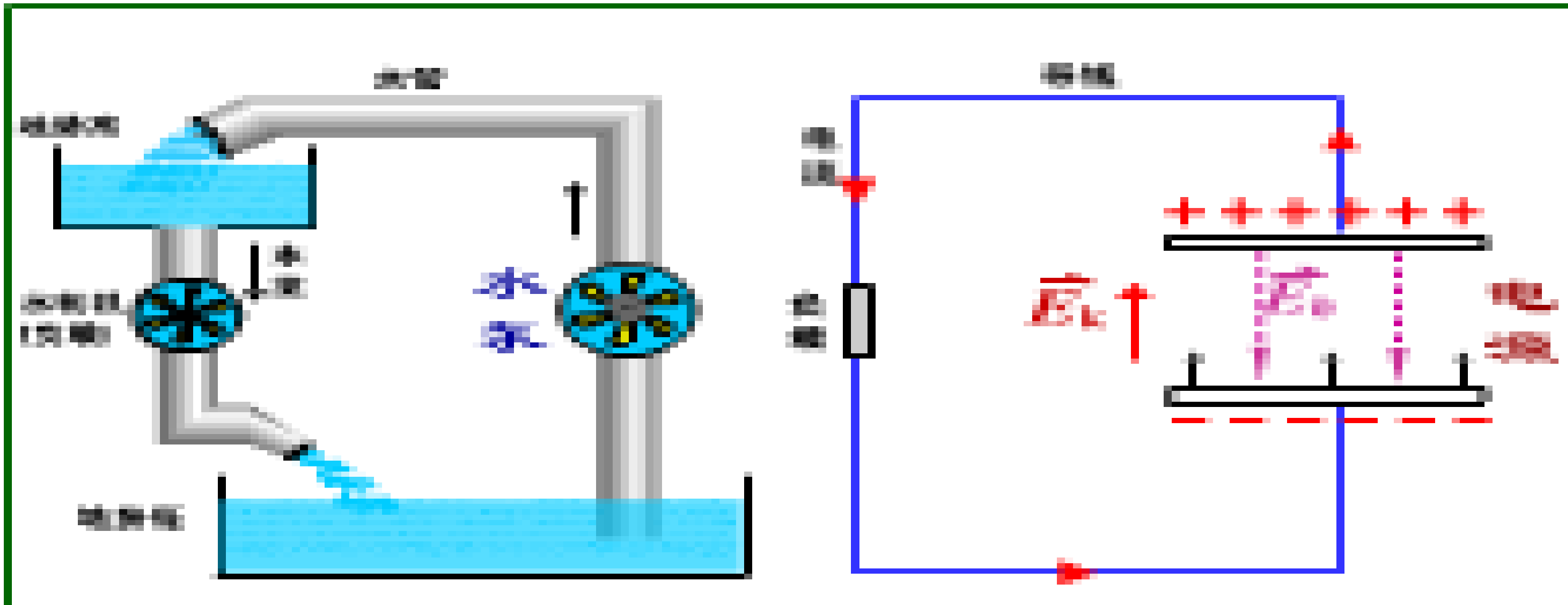
◆ 非静电**电场强度** $\vec{E}_k$: 为单位正电荷所受的非静电力.

$$W=\oint_l q(\vec{E}_k+\vec{E})\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\oint_l q\vec{E}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

◆ **电动势的定义**：单位正电荷绕闭合回路运动一周，非静电力所做的功.

电动势 $$E=\frac{W}{q}=\frac{\oint_l q\vec{E}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{q}$$

四 电源 电动势

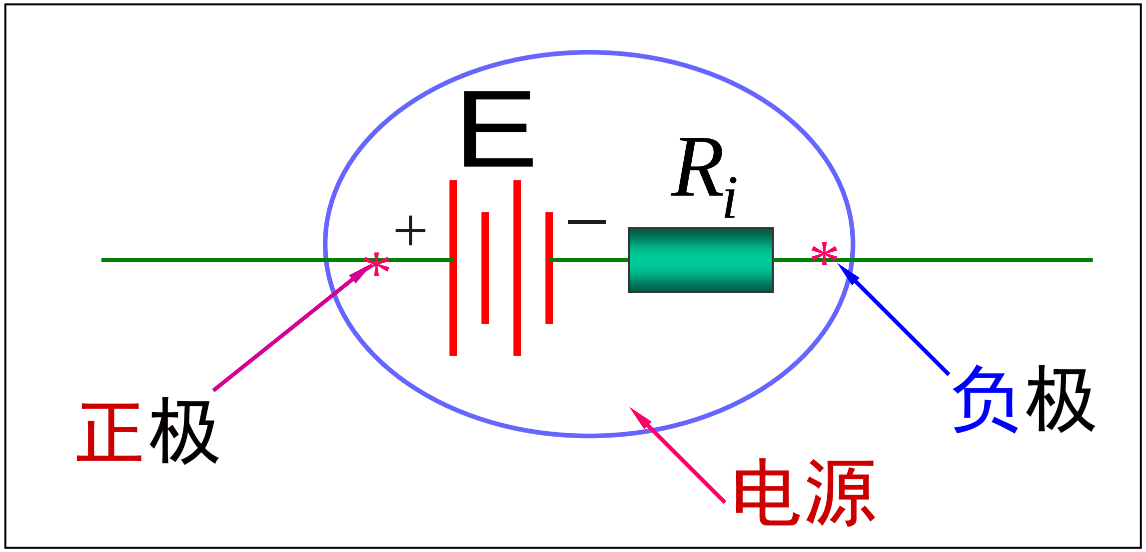


电源和水泵作用的类比

$$E=\frac{W}{q}=\frac{\oint_l q\vec{E}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{q} \qquad \because \int_{外}\vec{E}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$$

电源电动势 $\mathcal{E}=\oint_l \vec{E}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{内}\vec{E}_k\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

- 电源电动势大小等于将单位正电荷从负极经电源内部移至正极时非静电力所作的功.



电源的电动势 E和内阻 R_i

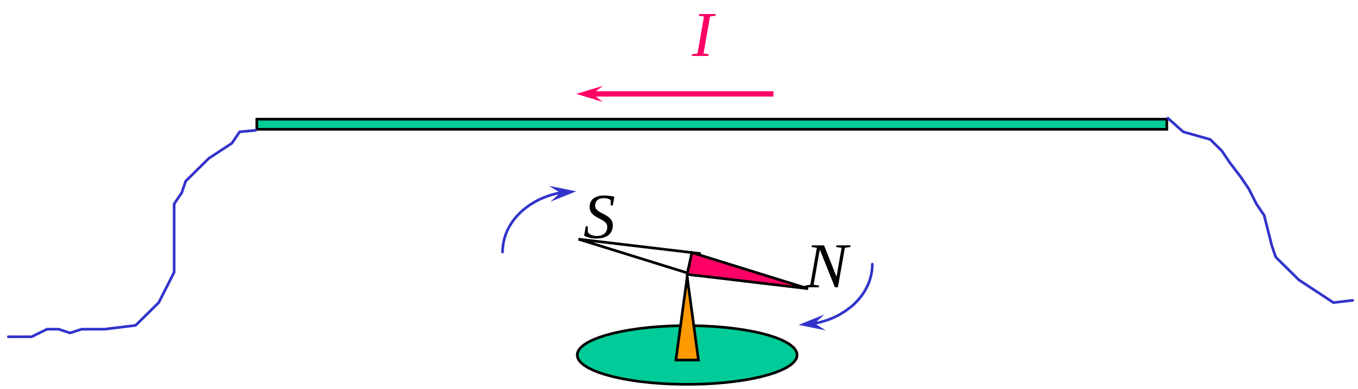
§10.2　电流的磁场

战国末期：有“慈石召铁，或引之也”的记载。

公元十一世纪：发明了指南针并发现了地磁偏角

1800年：伏特发明了电池

1820年7月：奥斯特实验——电流周围有磁场

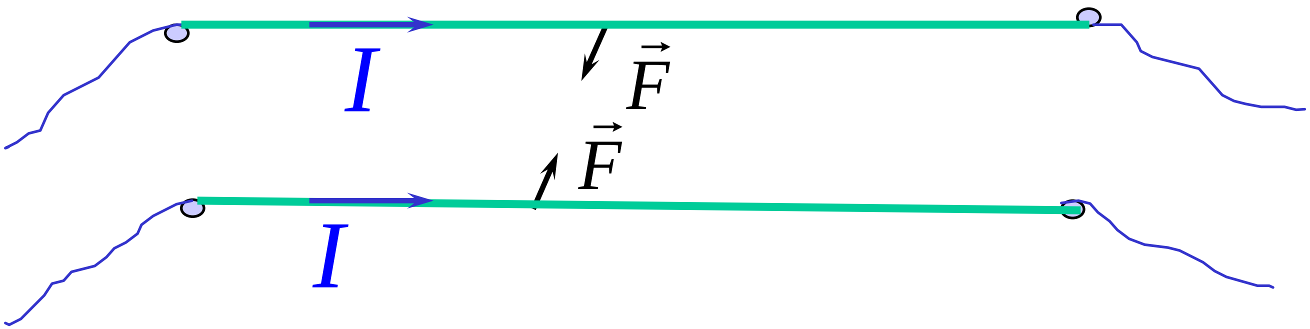


一切磁现象都是起源于电流

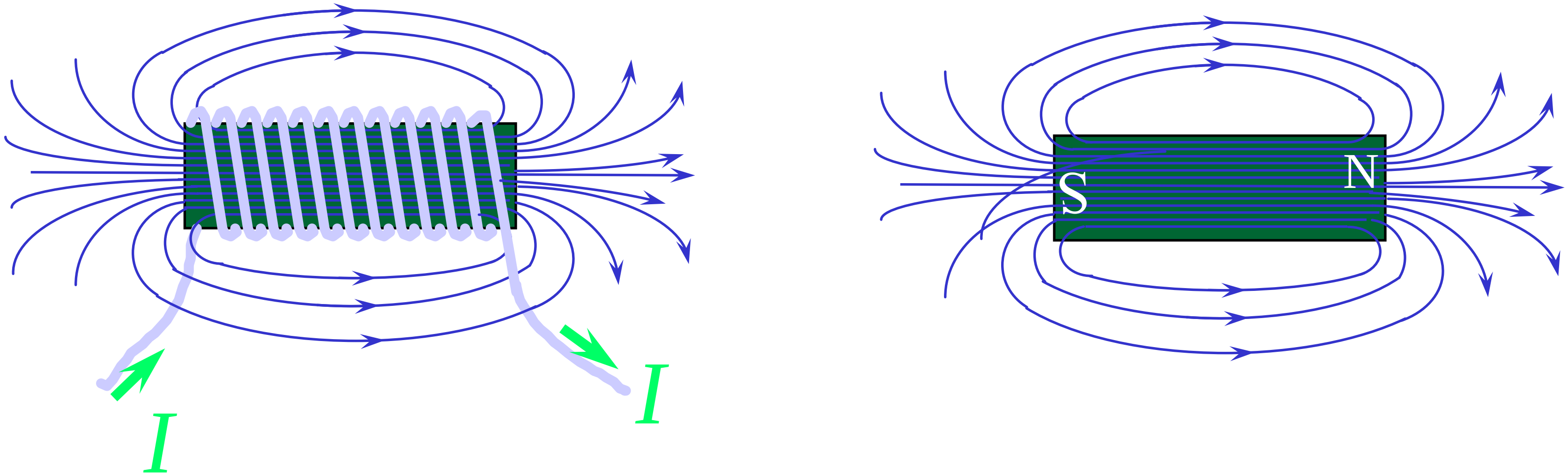
安培：

1820.9.18.　园电流对磁针的作用

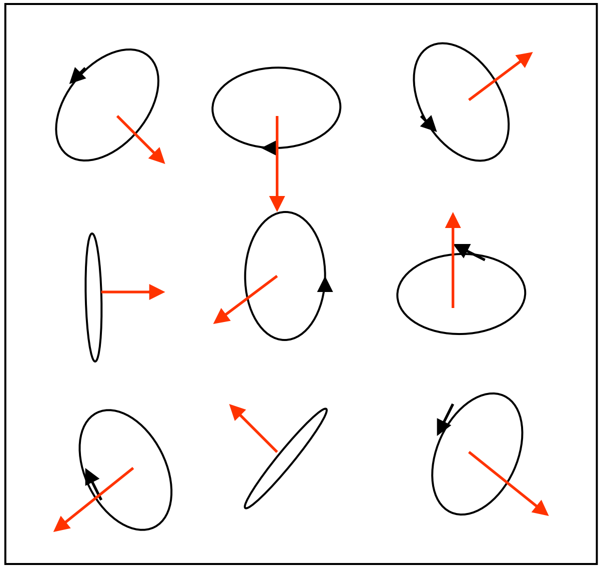
9.25.　两平行直电流的相互作用



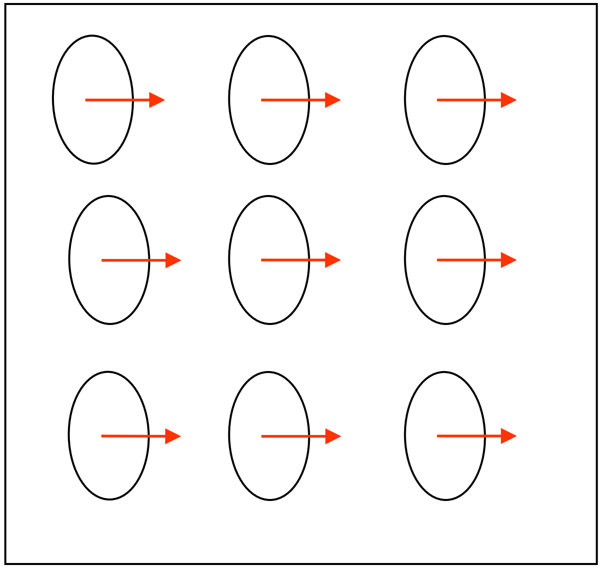
10.9.　通电螺线管与磁棒的等效性



1822年.　安培分子电流假说



无 外 磁 场



外 磁 场 中

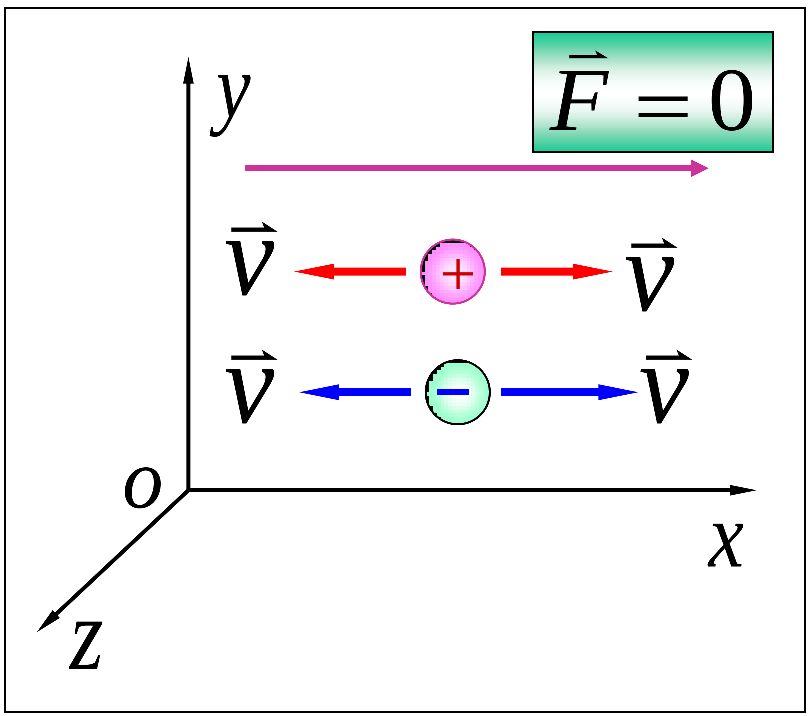
1.磁现象的本质是电流

2.磁极不能单独存在

一、磁 场

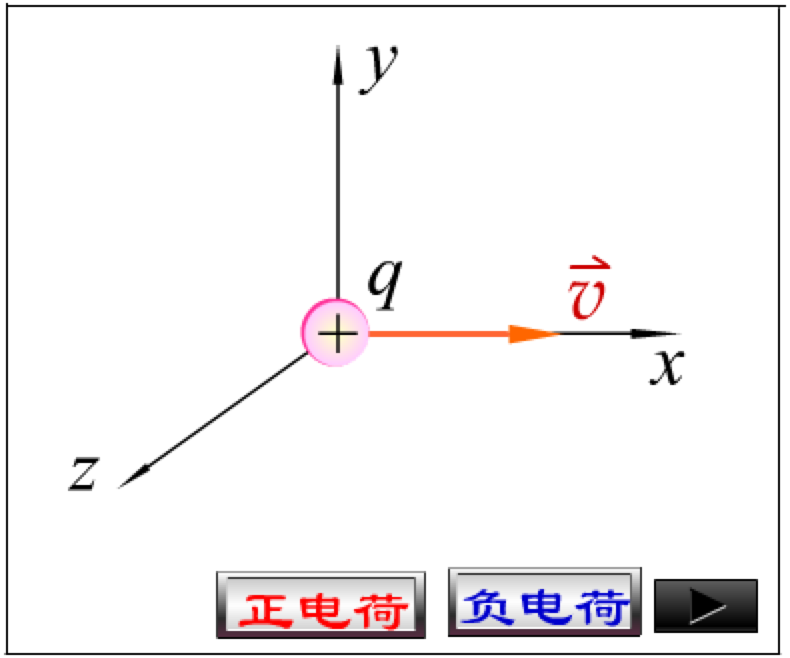
运动电荷 ⟷ 磁场 ⟷ 运动电荷

二、磁感强度 $\vec{B}$ 的定义



带电粒子在磁场中运动所受的力与运动方向有关.

实验发现带电粒子在磁场中沿某一特定直线方向运动时不受力，此直线方向与电荷无关.



带电粒子在磁场中沿其他方向运动时 $\vec{F}$ 垂直于 $\vec{v}$ 与特定直线所组成的平面.

当带电粒子在磁场中垂直于此特定直线运动时受力最大.

$$\vec{F} = \vec{F}_{\max} = \vec{F}_{\perp}$$

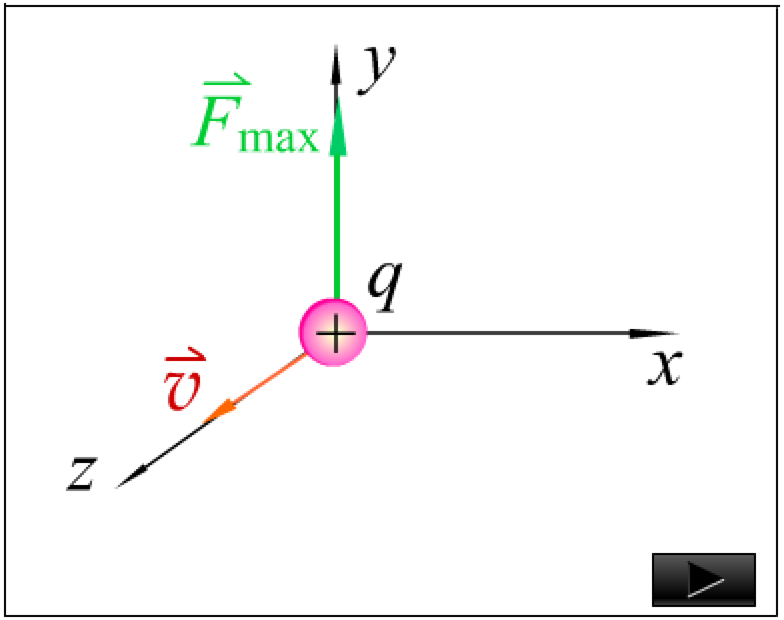
$$F_{\max} \propto qv$$

$\boxed{\dfrac{F_{\max}}{qv}}$ 大小与 q, v 无关，是场的性质！

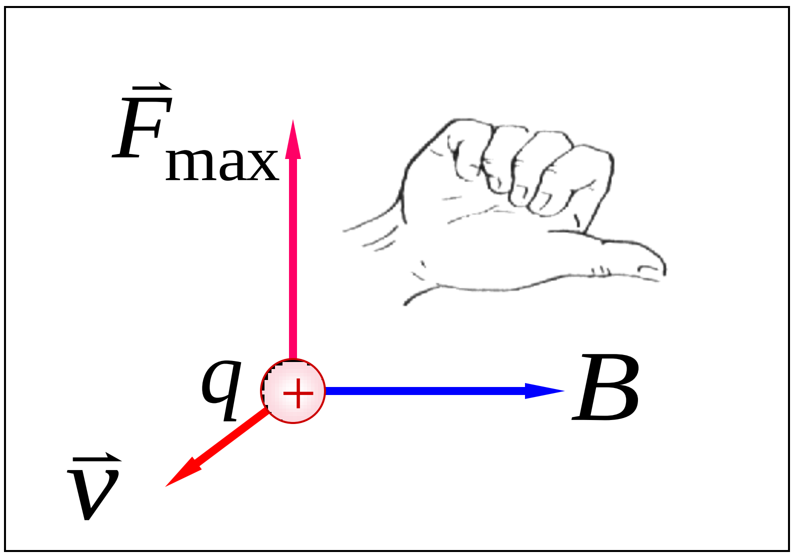
磁感强度 $\vec{B}$ 的定义：

该特定直线方向定义为该点的 $\vec{B}$ 方向.

$$\boxed{B = \frac{F_{\max}}{qv}}$$



磁感强度 $\vec{B}$ 的定义：当正电荷垂直于特定直线运动时，受力 $\vec{F}_{max}$ 将 $\vec{F}_{max}\times\vec{v}$ 方向定义为该点的 $\vec{B}$ 的方向.



磁感强度大小

磁感强度方向：

特定直线方向

$$B=\frac{F_{max}}{qv}$$

运动电荷在磁场中受力

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$$

单位 特斯拉 $1(\mathrm{T})=1\mathrm{N/A\cdot m}$

三、毕奥—萨伐尔定律

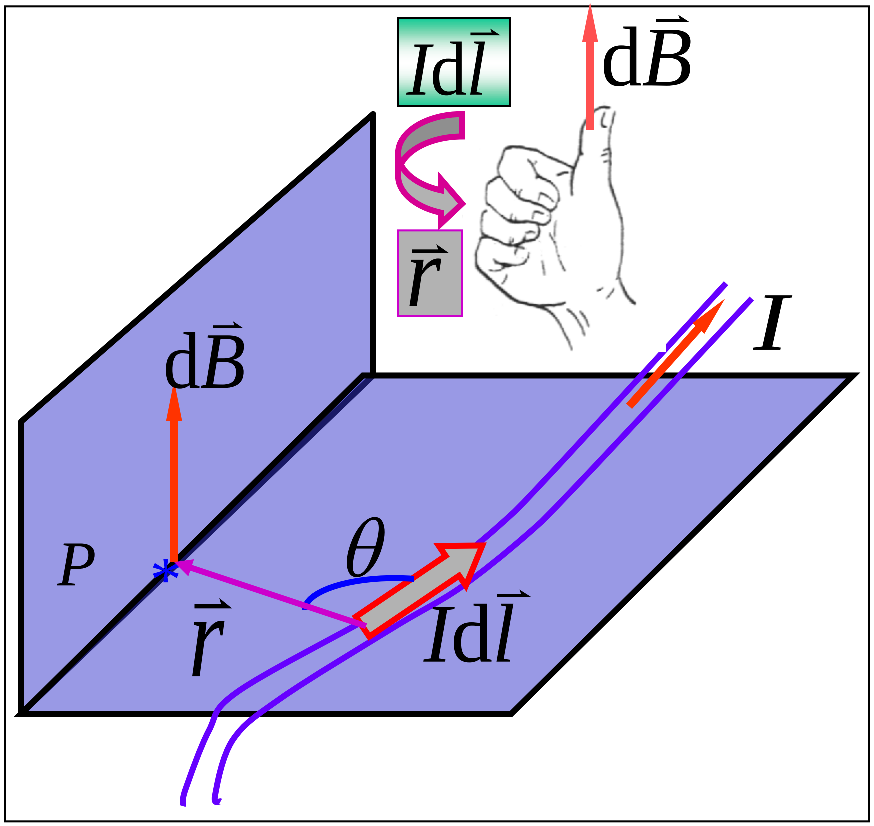
(电流元在空间产生的磁场)

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}}$$

毕奥—萨伐尔定律

真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot A^{-2}}$

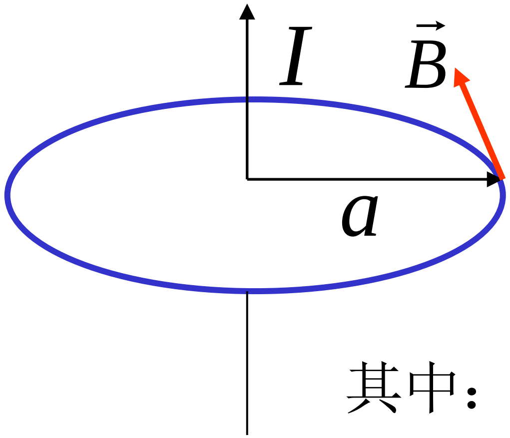


- 任意载流导线在点 P 处的磁感强度

磁感强度叠加原理 $\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$ *or* $\vec{B} = \sum \vec{B}_i$

三、毕—萨—拉定律 (电流元在空间产生的磁场)

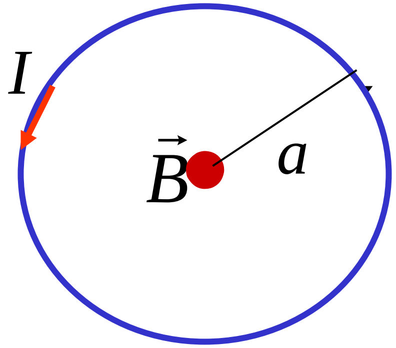
1.实验基础 (1)毕奥:无限长直载流导线周围的磁场



$$\vec{B}\begin{cases} B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} \\ \text{方向:}I\text{与}B\text{构成右手螺旋} \end{cases}$$

其中：$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,T\cdot m/A$……真空中的磁导率

(2)萨伐尔:载流园导线中心的磁场

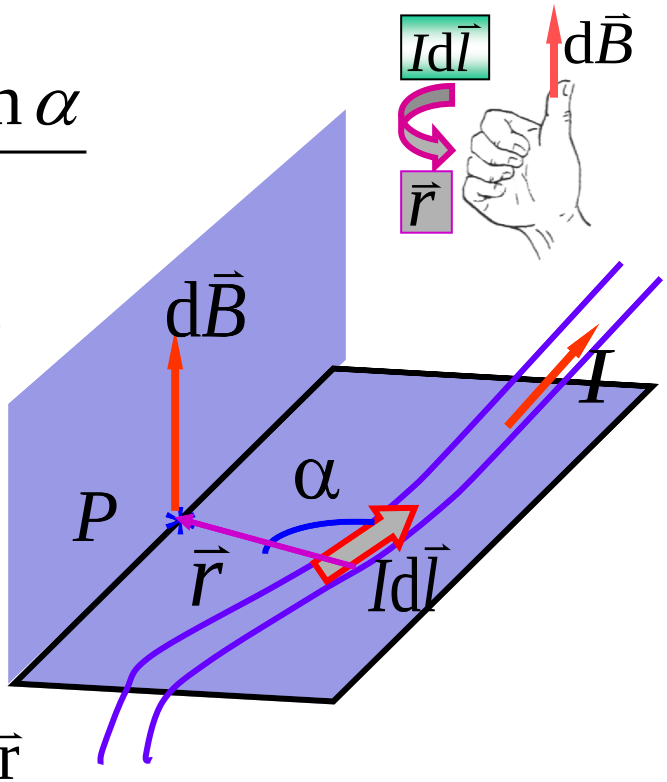


$$\vec{B}\begin{cases} B=\dfrac{\mu_0 I}{2a} \\ \text{方向:}I\text{与}B\text{构成右手螺旋} \end{cases}$$

2. 拉普拉斯定律:

$$B \propto \frac{I}{r} \Rightarrow Idl : dB \propto \frac{Idl}{r^2}$$

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}}
\begin{cases} dB = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\alpha}{r^2} \\ \text{方向：} Id\vec{l}\times\vec{r} \end{cases}$$



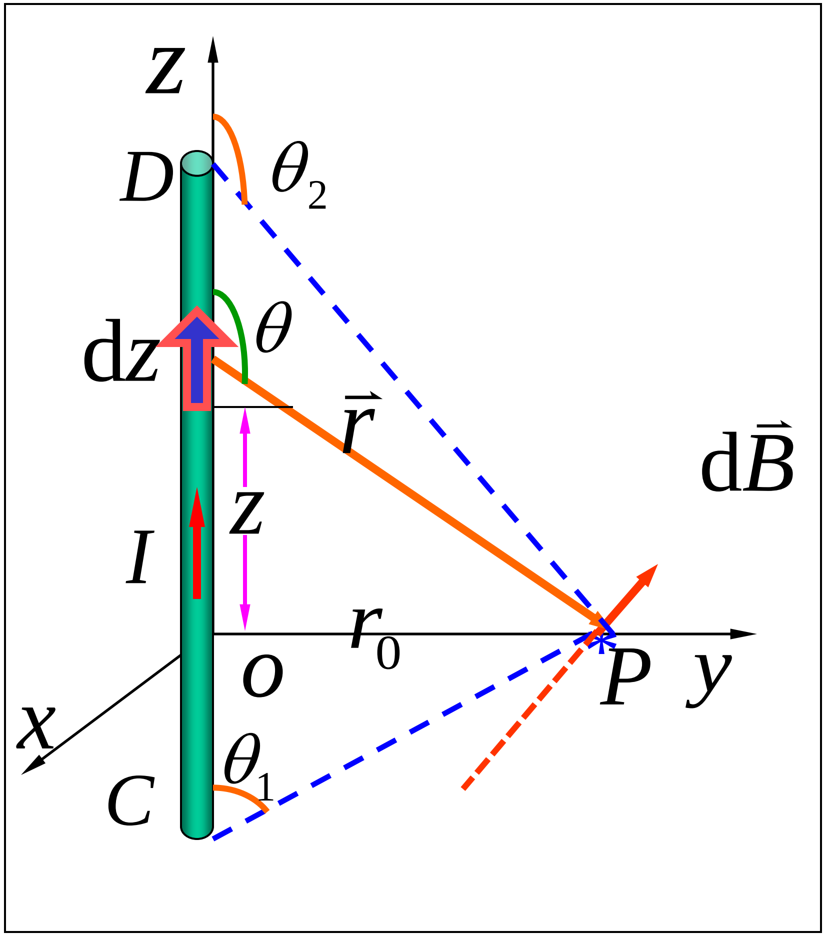
磁感强度叠加原理

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

四、毕奥---萨伐尔定律应用举例

【例 1】载流长直导线的磁场.　解

$$\boxed{\vec{B}=\int d\vec{B}\neq\int dB}$$



$d\vec{B}$ 方向均沿 x 轴的负方向

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idz\sin\theta}{r^2}$$

$$B=\int dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{CD}\frac{Idz\sin\theta}{r^2}$$

统一变量再积分

$$\boxed{r=r_0/\sin\theta}$$

$$\boxed{z=-r_0\cot\theta,}$$

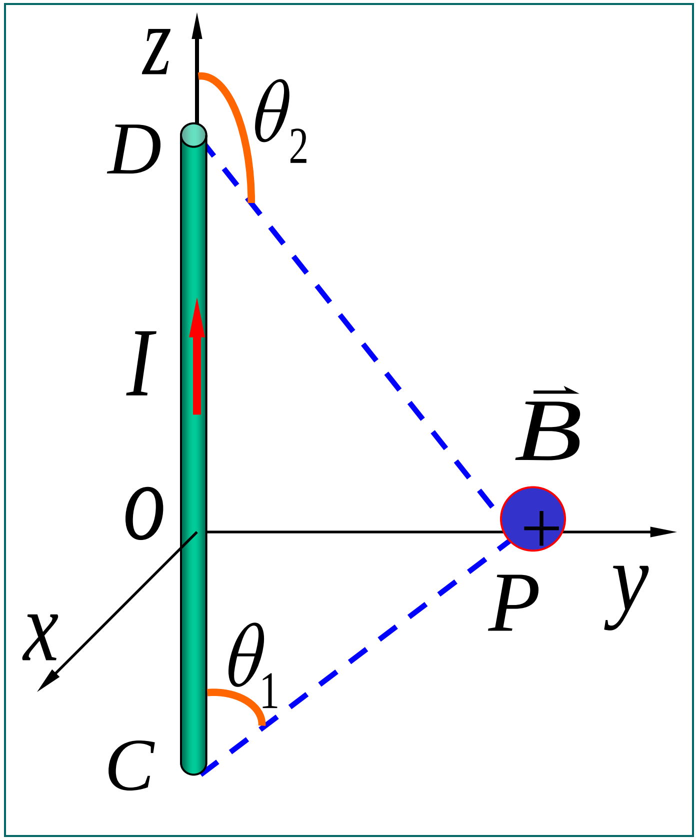
$$\boxed{dz=r_0 d\theta/\sin^2\theta}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ r_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta \mathrm{d}\theta \ \boxed{=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}$$

$\vec{B}$ 的方向沿 x 轴的负方向.

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}$$



无限长载流长直导线的磁场.

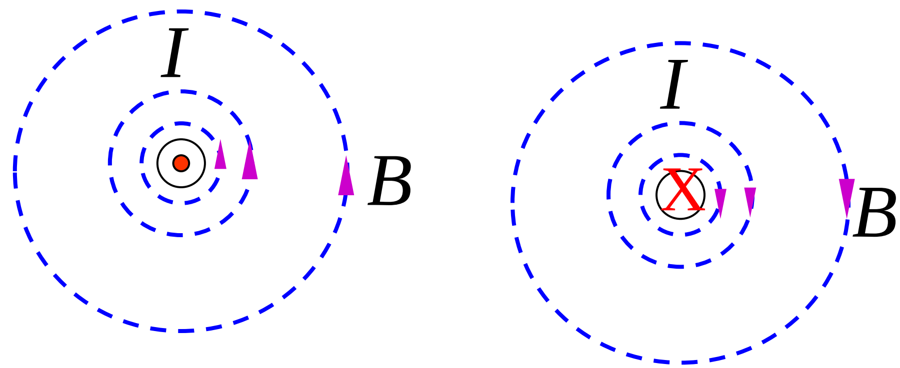
$\theta_1 \to 0$

$\theta_2 \to \pi$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi\ r_0}}$$

◆ 无限长载流长直导线的磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi\ r}$$



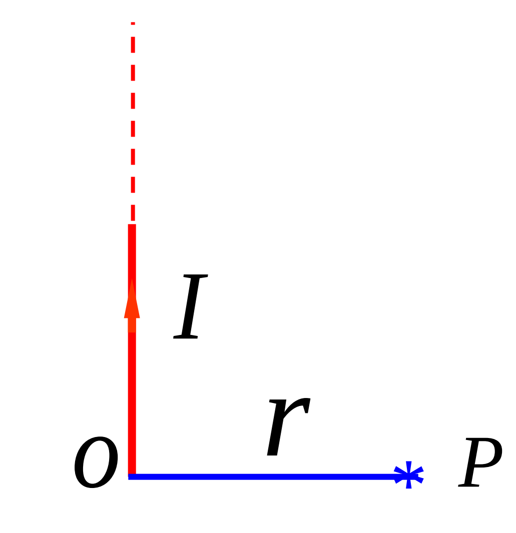
◆ 电流与磁感强度成右螺旋关系

半无限长载流长直导线的磁场

$$\theta_1 \to \frac{\pi}{2}$$

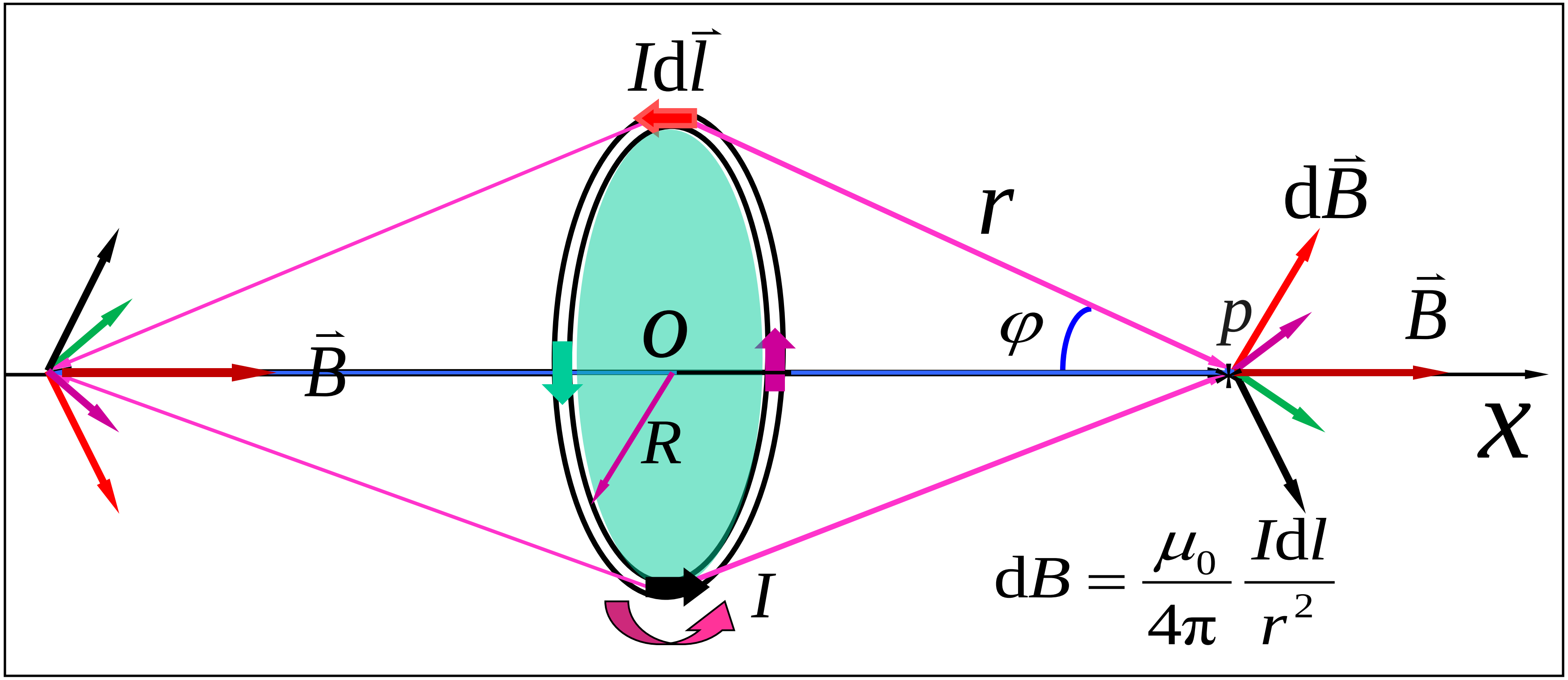
$$\theta_2 \to \pi$$

$$\boxed{B_P=\frac{\mu_0 I}{4\pi\ r}}$$



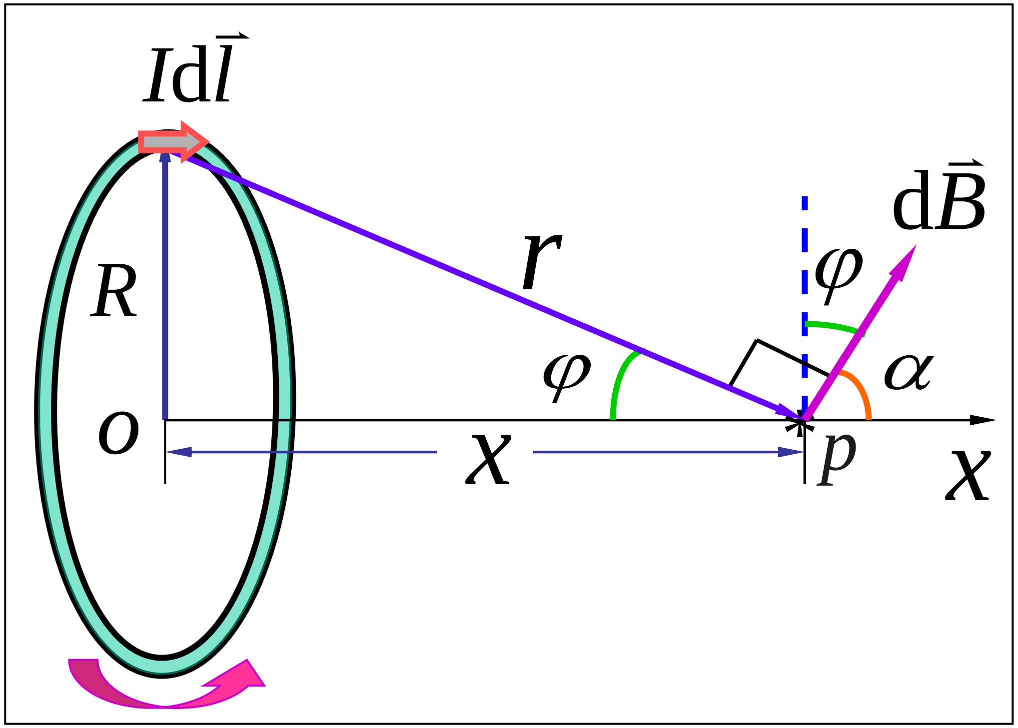
【例 2】圆形载流导线的磁场.

真空中，半径为R 的载流导线，通有电流I，称圆电流. 求其轴线上一点 p 的磁感强度的方向和大小.



$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$

解 根据对称性分析 $\boxed{\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} \neq \int \mathrm{d}B}$ $B = B_x = \int \mathrm{d}B\sin\varphi$



$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$

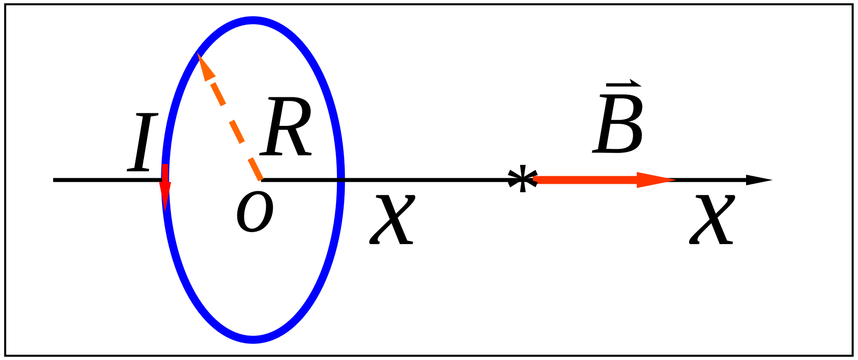
$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha\mathrm{d}l}{r^2}$$

$$\cos\alpha = R/r$$

$$r^2 = R^2 + x^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_l \frac{\cos\alpha\mathrm{d}l}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi\, r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l \qquad B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

讨论

1）若线圈有 N 匝 $\qquad B=\dfrac{\boxed{N}\ \mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$

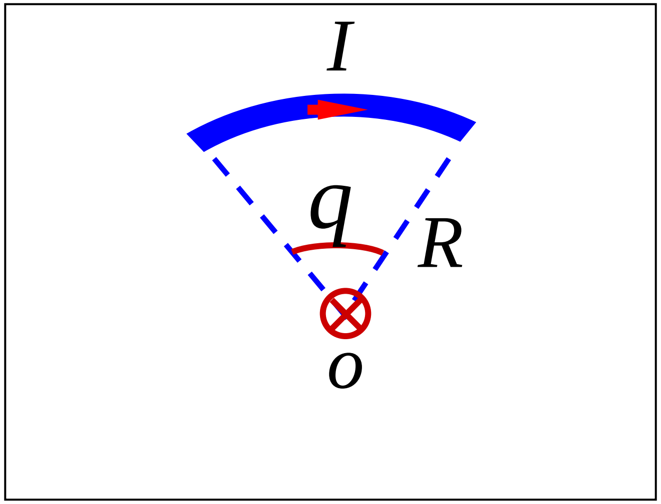
2）$x<0$ $\vec{B}$ 的方向不变(I 和 $\vec{B}$ 成右螺旋关系）

3）$x=0$ $\boxed{B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}}$ 圆环形电流中心的磁场

4）$x>>R$ $\qquad B=\dfrac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$， $\qquad B=\dfrac{\mu_0 I S}{2\pi\, x^3}$

圆弧形电流在圆心处的磁场为什么？

$$\boxed{B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\theta}{2\pi}}$$



方向：⊗

注：仍可由右手定则判定方向！

五、磁偶极矩

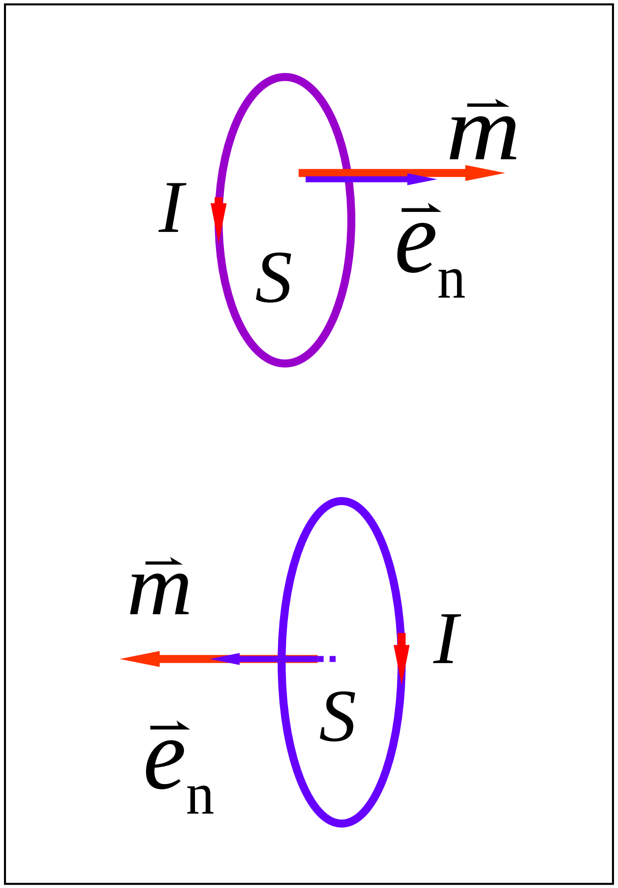
$$\boxed{\vec{m} = IS\vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

圆电流磁感强度公式也可写成

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi x^3}$$

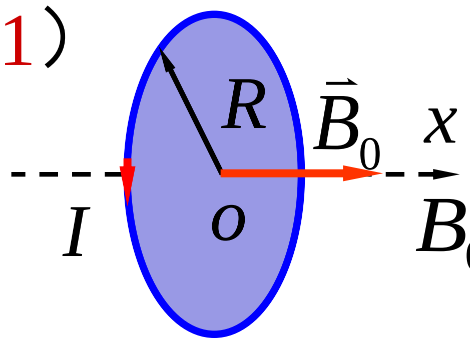
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$



说明：只有当圆形电流的面积S很小，或场点距圆电流很远时，才能把圆电流叫做磁偶极子.

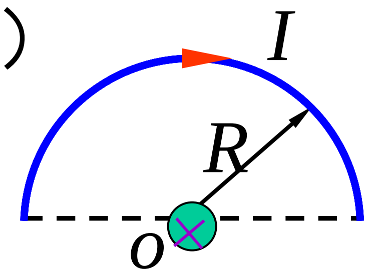
【例 3】几种典型电流体系的磁场

（1）



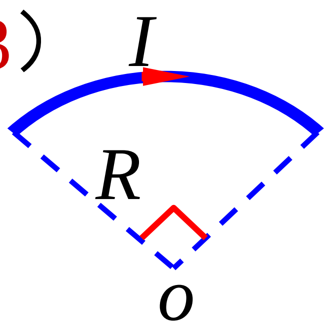
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

（2）



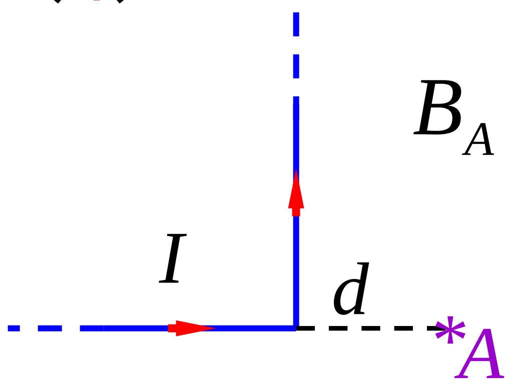
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

（3）



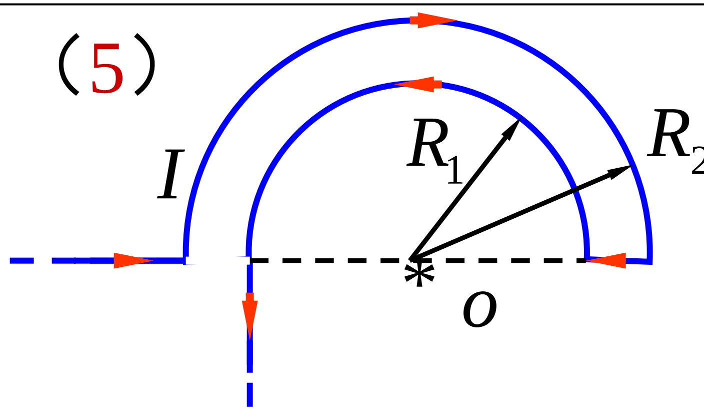
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

（4）



$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi\, d}$$

（5）



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi\, R_1}$$

问题一：电流元产生磁场的（唯象）定量表示：

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

问题二：载流圆线圈在轴线上的磁感应强度：

$$B = \frac{N\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

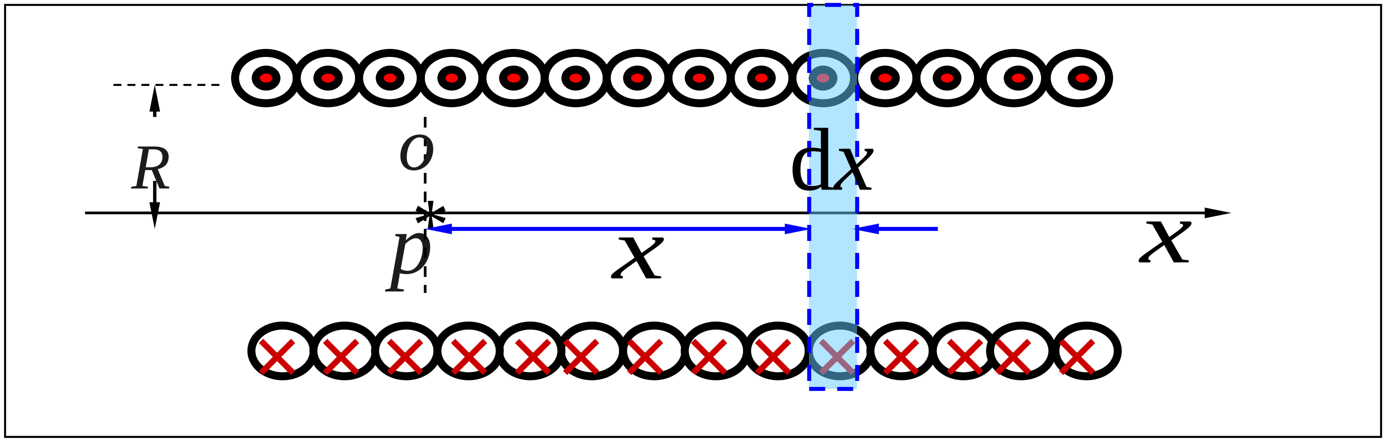
问题三：载流线段在空间产生的磁感应强度：

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\, r_0}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

问题四：载流线圈磁矩的定义： $\boxed{\vec{m} = IS\vec{e}_\mathrm{n}}$

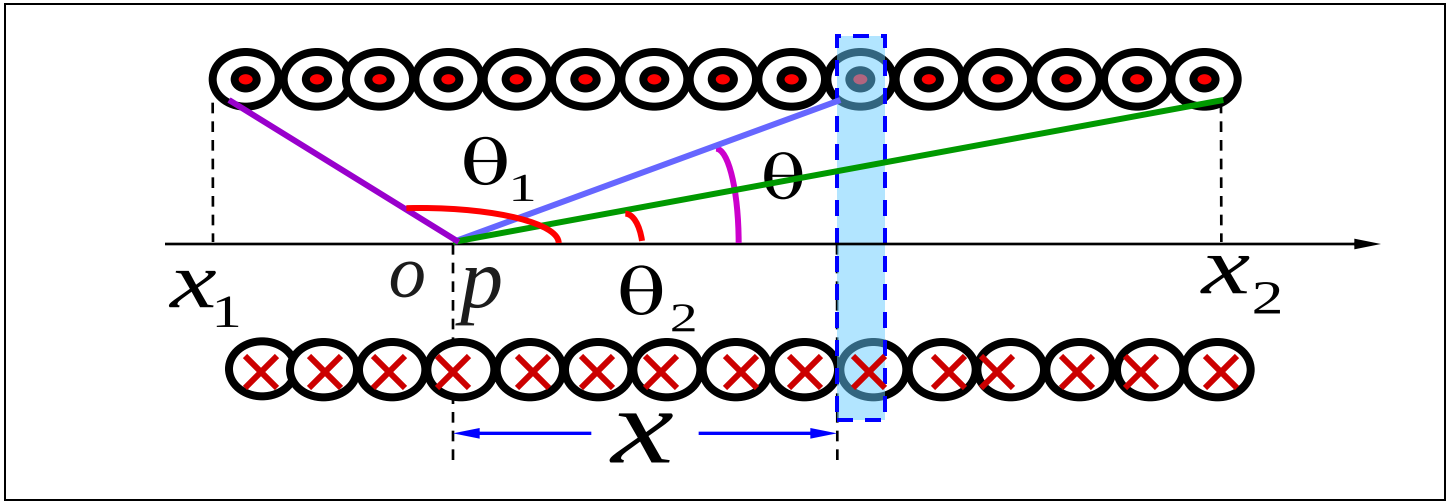
【例 4】载流直螺线管的磁场

如图所示，有一长为 l，半径为 R 的载流密绕直螺线管，螺线管的总匝数为 N，通有电流 I. 设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度.



解 由圆形电流磁场公式

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



取“微环”

$$dB=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 \boxed{Indx}}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$x=R\cot\theta$$

$$dx=-R\csc^2\theta d\theta$$

$$B=\int dB=\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{R^2 dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$R^2+x^2=R^2\csc^2\theta$$

$$B=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{R^3\csc^2\theta d\theta}{R^3\csc^3\theta d\theta}=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta$$

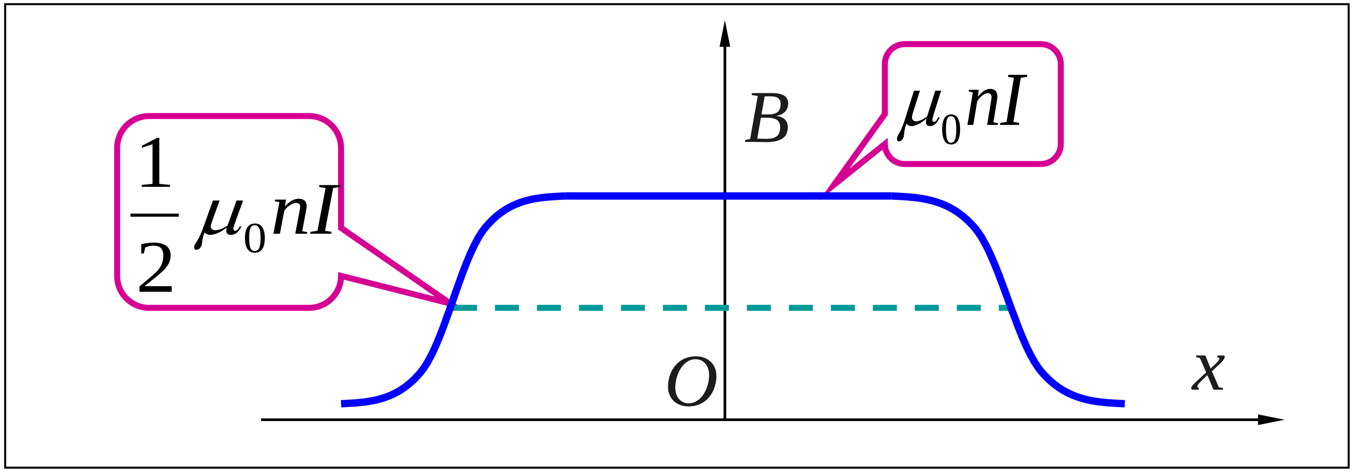
讨 论

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$$

(1) 无限长的螺线管 $\boxed{B=\mu_0 nI}$ 或由 $\theta_1=\pi,\theta_2=0$ 代入

（2）半无限长螺线管 $\boxed{B=\frac{1}{2}\mu_0 nI}$ $\theta_1=\frac{\pi}{2},\theta_2=0$

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$$



$$\boxed{B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)}$$

P点位于管内**轴线中点** $\beta_1=\pi-\beta_2$

$$\cos\beta_1=-\cos\beta_2$$

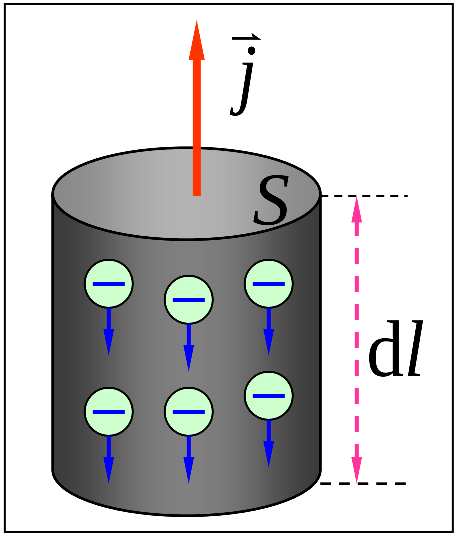
$$\boxed{\cos\beta_2=\frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+R^2}}}$$

$$\boxed{B=\mu_0 nI\cos\beta_2=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{l}{\left(l^2/4+R^2\right)^{1/2}}}$$

若 $l>>R$

$$\boxed{B=\mu_0 nI}$$

六、运动电荷的磁场



毕— 萨定律 $\mathrm{d}\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$

$$I\mathrm{d}\vec{l}=\vec{j}S\mathrm{d}l=nS\mathrm{d}lq\vec{v}$$

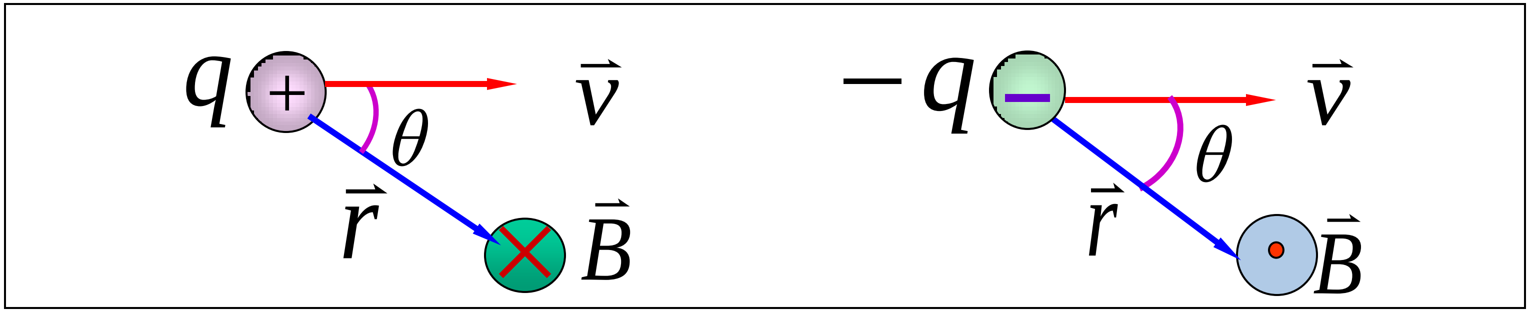
$$\mathrm{d}N=nS\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nS\mathrm{d}lq\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

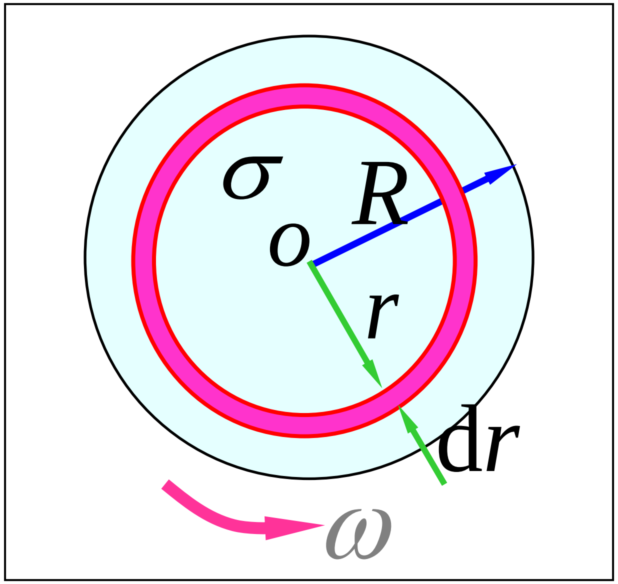
运动电荷的磁场

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}N}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}}$$

实用条件 $v<<c$



【例 5】半径为 R 的带电薄圆盘的电荷面密度为 σ, 并以角速度 ω 绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，求圆盘中心的磁感强度.



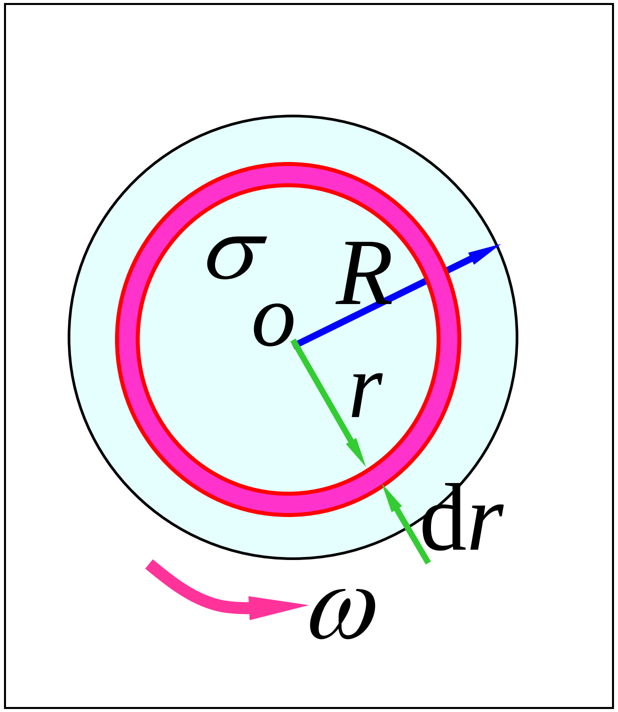
解　取“微环”，应用圆电流的磁场

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi r\mathrm{d}r=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

$\sigma>0$, $\vec{B}$ 向外　　　$\sigma<0$, $\vec{B}$ 向内



解法二　　运动电荷的磁场

$$\mathrm{d}B_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}qv}{r^2}$$

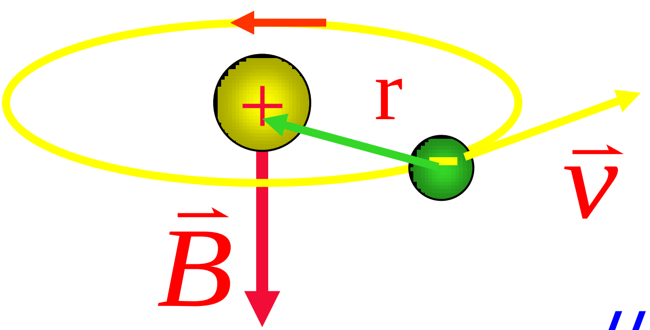
$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \sigma v}{2r}\mathrm{d}r$$

$$v = \omega r$$

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

【例 6】依波尔模型，氢原子中电子以速率 v = 2.2×10^{6}m/s 在半径为 r = 0.53×10^{-8}cm圆周上运动求这电子在轨道中心所产生的磁感应强度及磁矩.

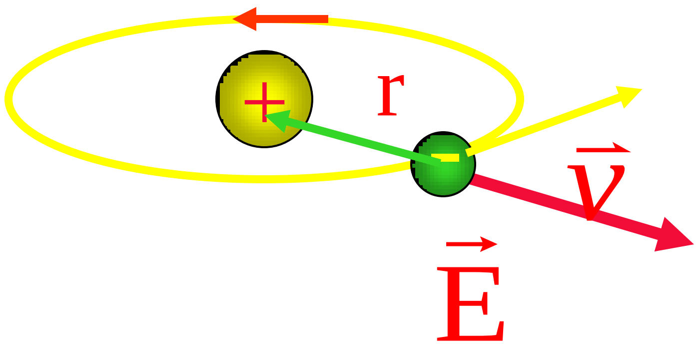


解 $$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin 90^\circ}{r^2}$$

$$= 10^{-7}\frac{1.60\times10^{-19}\times2.2\times10^6}{(0.53\times10^{-10})^2} = 13(T)$$

电场强度.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^{0}}\frac{q\vec{r}}{r^{3}}$$

$$E = 9\times10^{9}\times\frac{1.60\times10^{-19}}{(0.53\times10^{-10})^{2}} = 5.13\times10^{11}(V/M)$$

电场强度的物理规律决定了原子是球对称的（球形）.

1. 原子的“同一”性

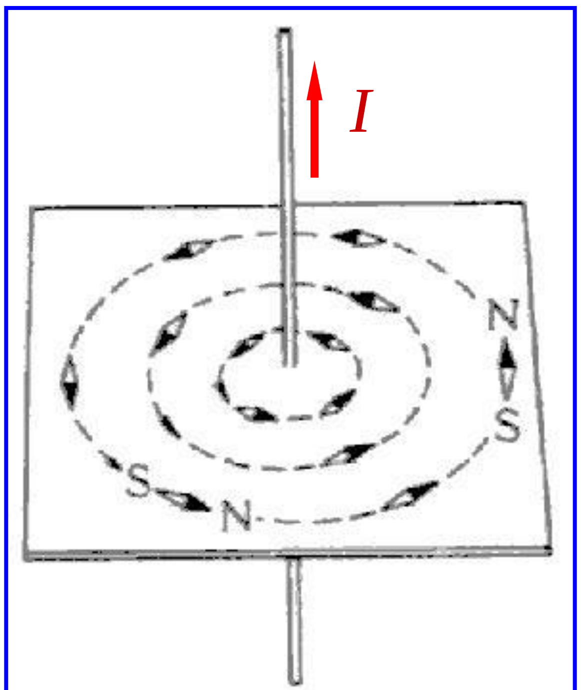
2. 原子的“再生”性

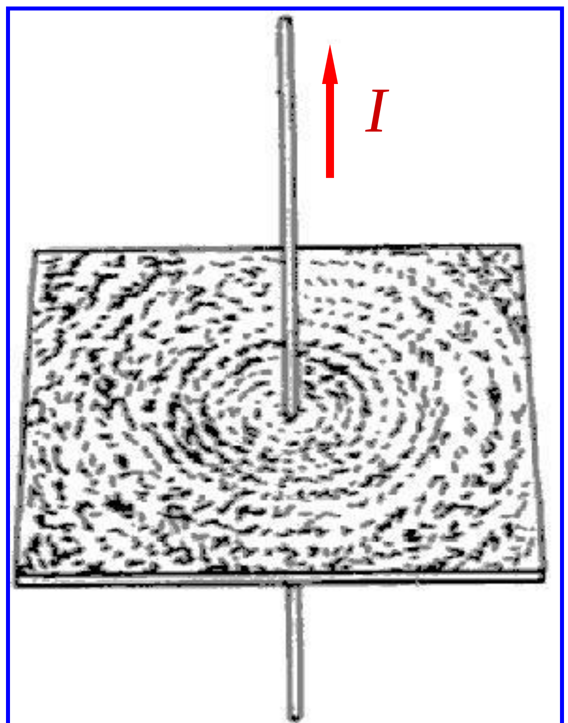
3. 原子的“稳定”性

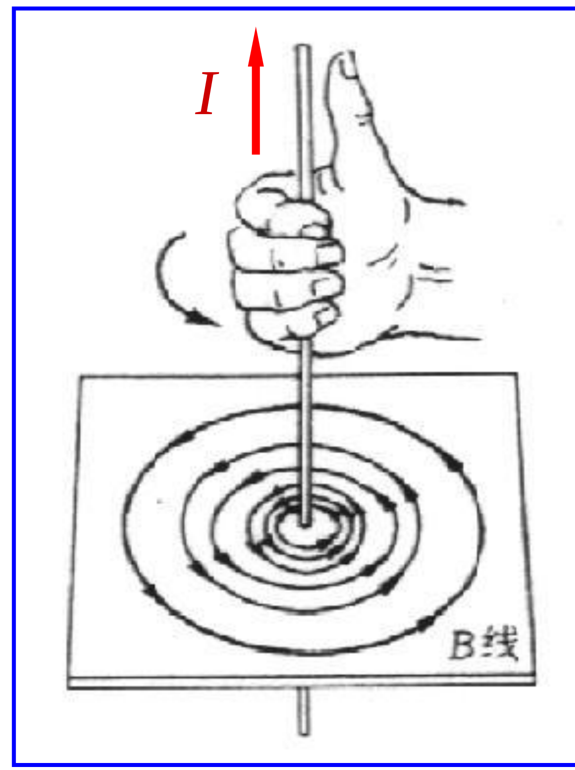
§10.3 磁场的高斯定理

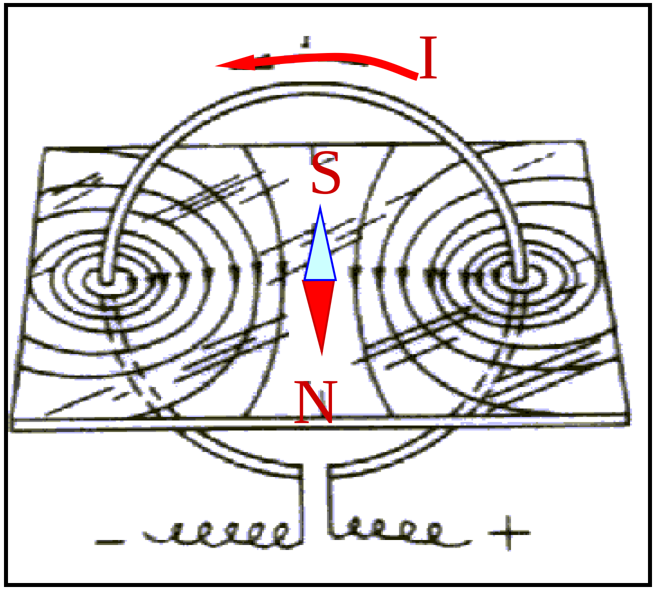
一、磁感线

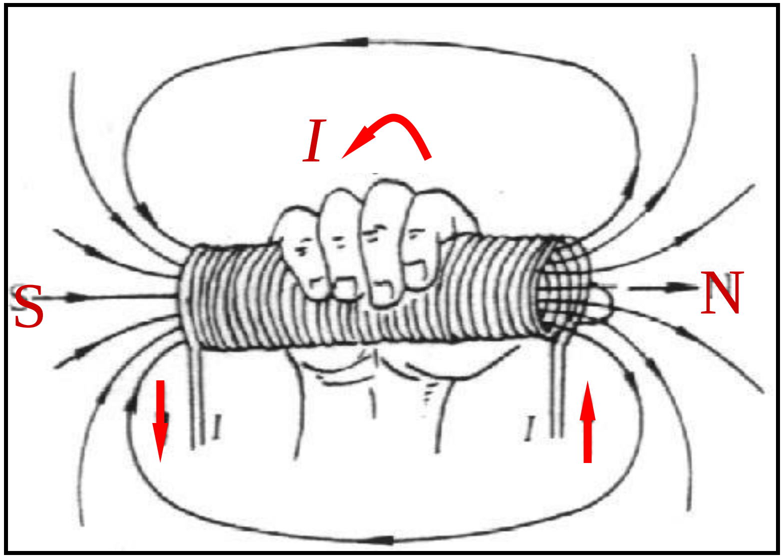
规定：曲线上每一点的切线方向就是该点的磁感强度 B 的方向，曲线的疏密程度表示该点的磁感强度 B 的大小.



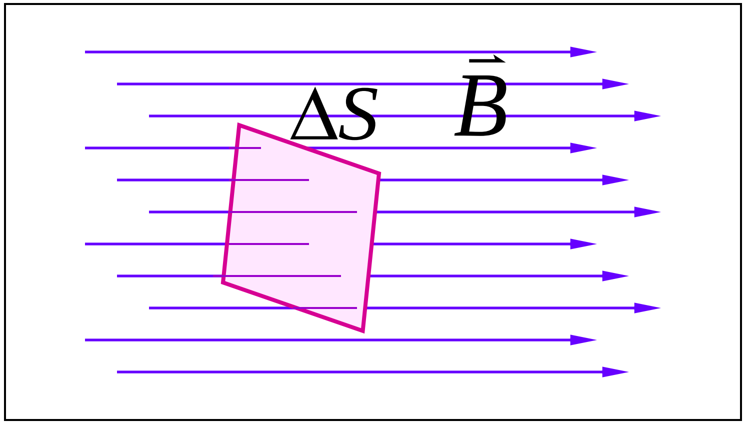






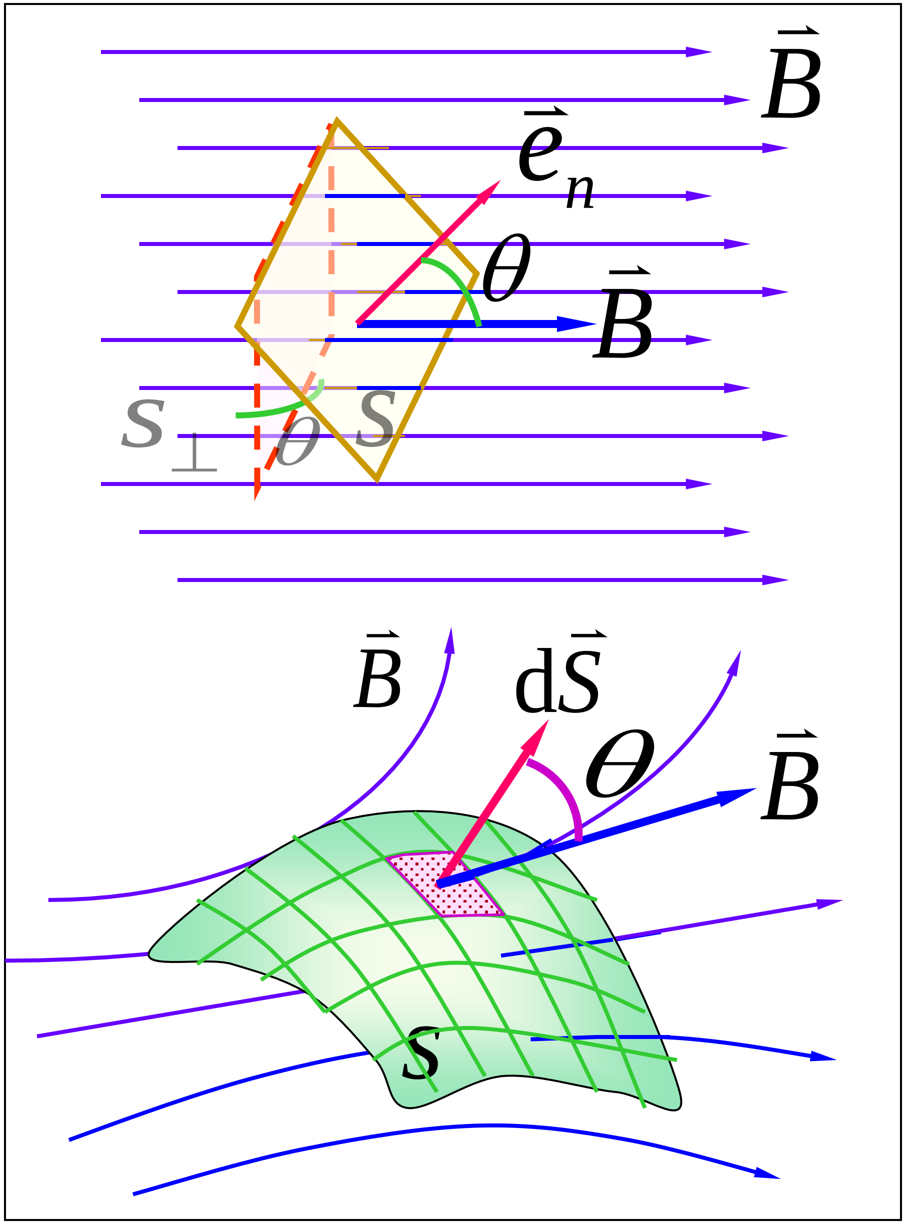


二、磁通量 磁场的高斯定理



规定：$B = \dfrac{\Delta N}{\Delta S}$

磁场中某点处垂直$\vec{B}$矢量的单位面积上通过的磁感线数目等于该点$\vec{B}$的数值.



磁通量：通过某一曲面的磁感线数为通过此曲面的磁通量.

$$\Phi = BS\cos\theta = BS_\perp$$

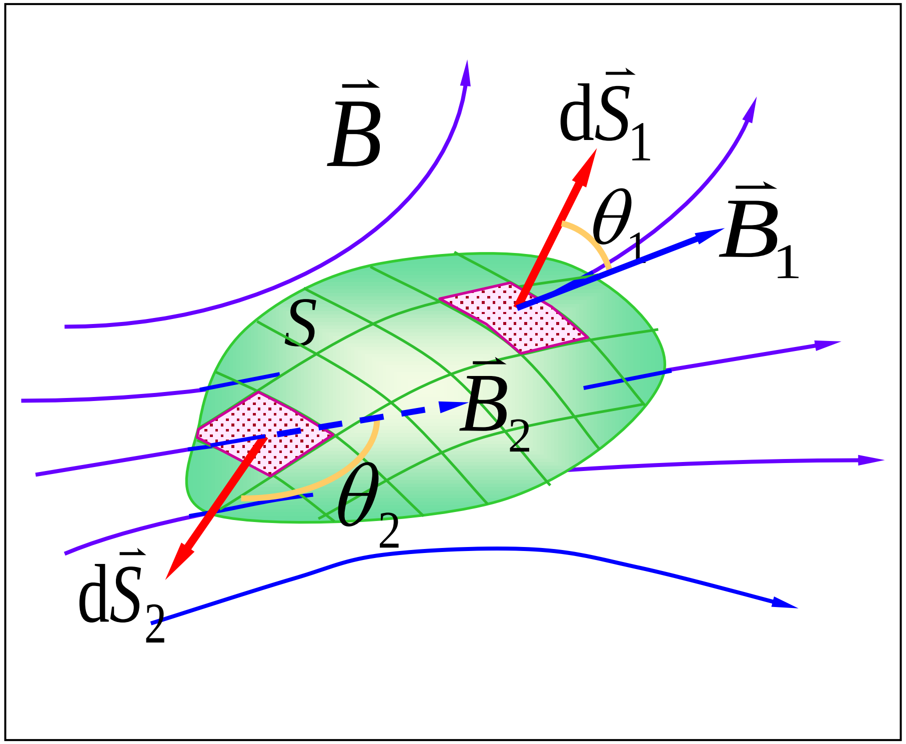
$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot\vec{e}_n S$$

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

单位 $1\mathrm{Wb} = 1\mathrm{T}\times 1\mathrm{m}^2$



$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\oint_S B\cos\theta \mathrm{d}S = 0$$

◆ 磁场高斯定理 $\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

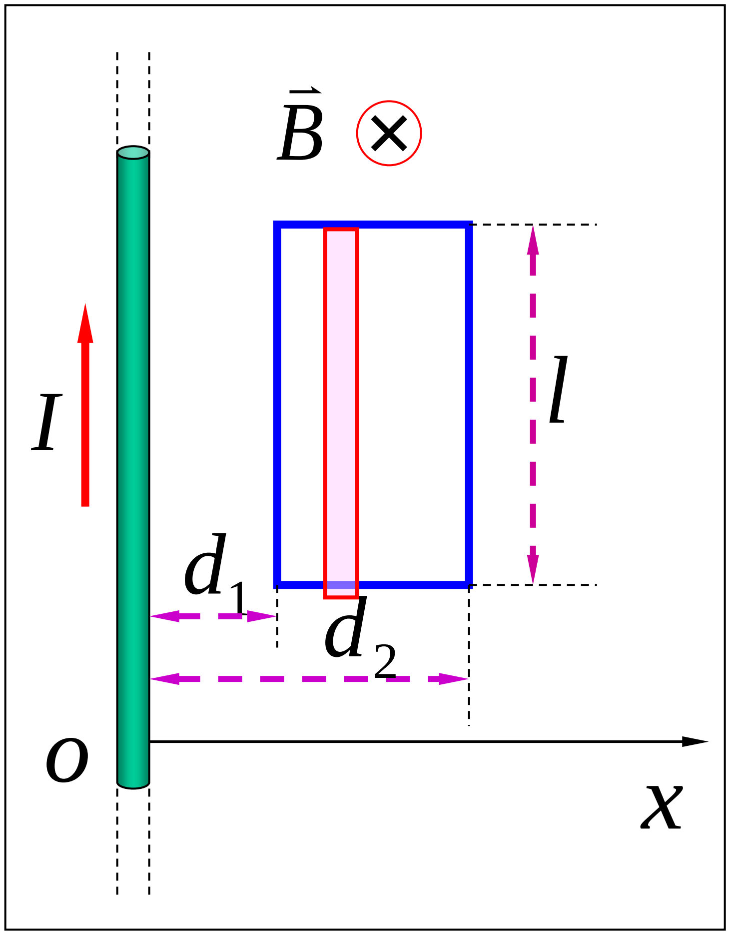
◆ 物理意义：通过任意闭合曲面的磁通量必等于零

（故磁场是无源的.）

求磁通量 (1) 用磁通量的定义求 (2) 用高斯定理求

【例 7】如图载流长直导线的电流为 I，问通过矩形面积的磁通量.

解 先求 $\vec{B}$，对变磁场给出后积分求 Φ



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \qquad \vec{B} // \vec{S}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_{d_1}^{d_2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{d_2}{d_1}$$

【例 8】一半径为 a 的无限长直载流导线，沿轴向均匀地流有电流 I，若作一个半径为 R = 5 a，高为 l 的柱形曲面，已知此柱形曲面的轴与载流导线的轴平行且相距3 a（如图），则在圆柱侧面 S 上的磁通量=？

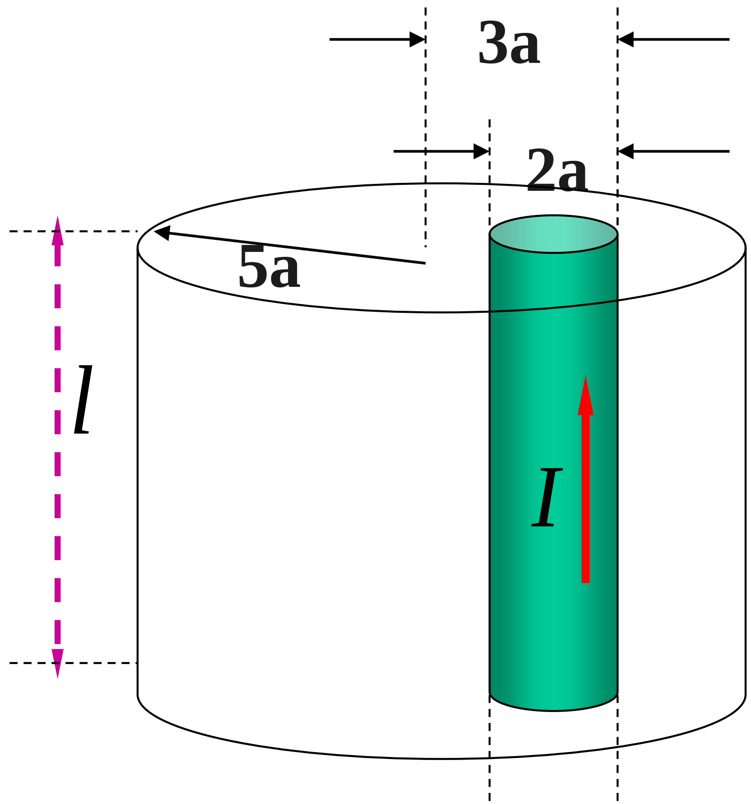
解：

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} =} \int_{s(\text{柱面})} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(\text{上底})} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{s(\text{下底})} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

积分0

积分0

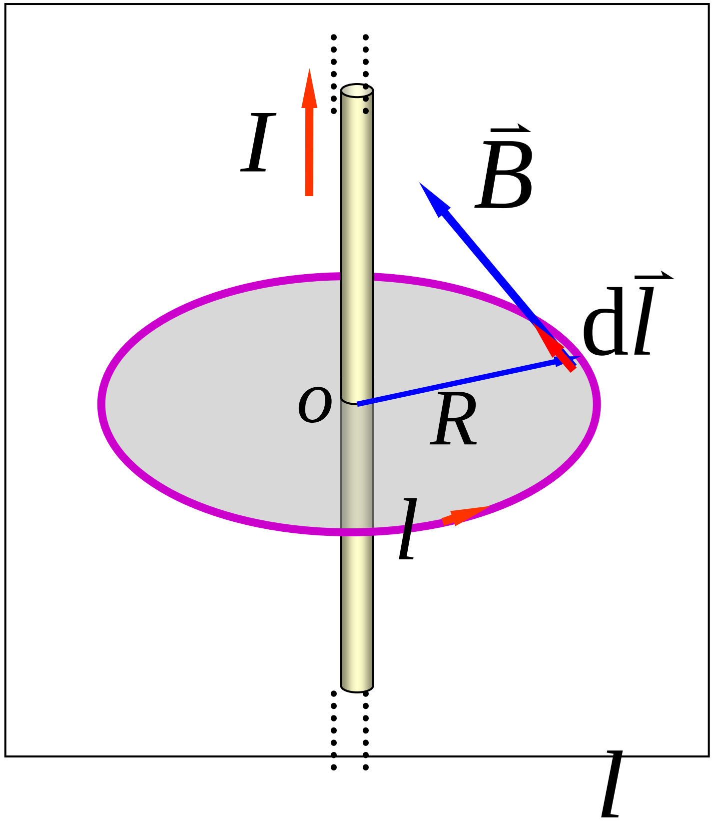


$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

§ 10. 4 安培环路定理

一、安培环路定理

1 设闭合回路 l 为圆形回路,载流长直导线位于其中心



$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

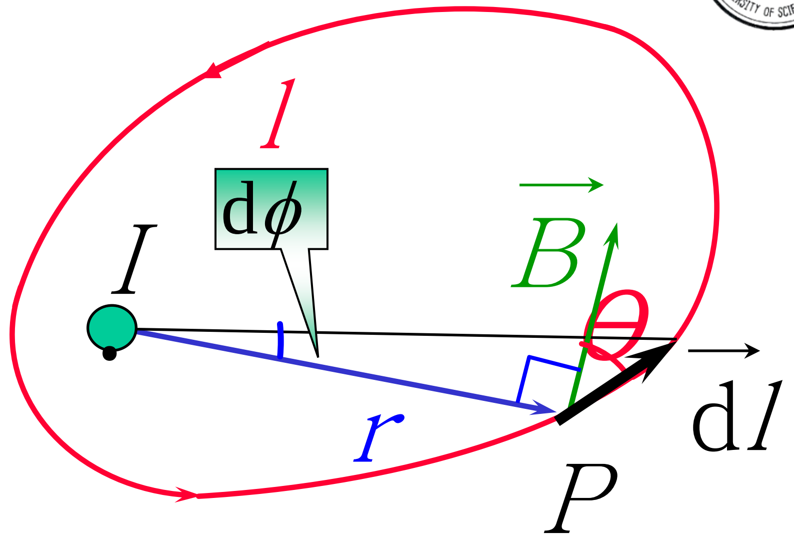
$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\oint_l\mathrm{d}l$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

设 l 与 I 成右螺旋关系

2. 平面内环路



$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cos\theta dl$$

$$\because B \perp r$$

$$dl\cos\theta \approx r d\varphi$$

$$\therefore \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Brd\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

则: $$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

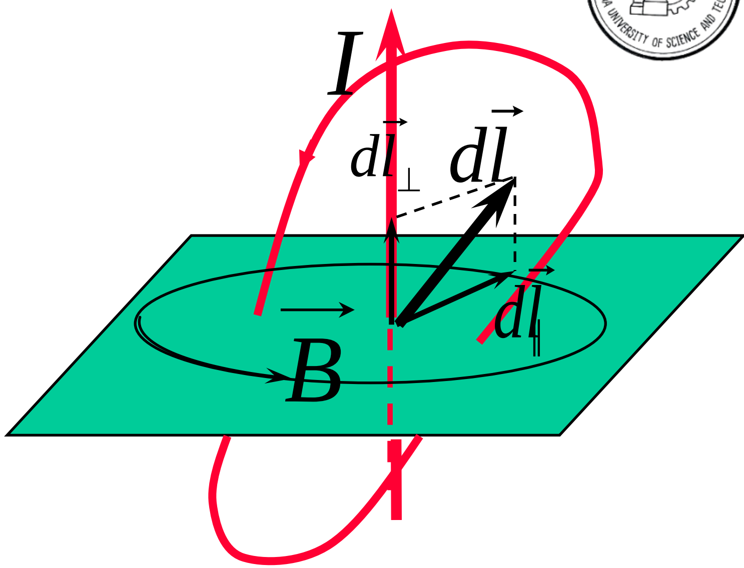
$$= \mu_0 I$$

3. 任意环路

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l \vec{B}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}_{//} + \mathrm{d}\vec{l}_{\perp})$$

$$= \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{//} + \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_{\perp}$$

$$= \mu_0 I + 0$$

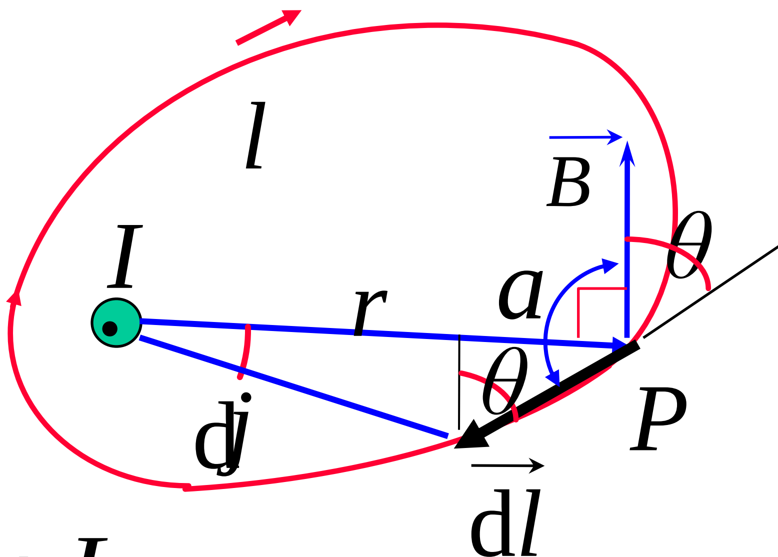


讨论：1） 若改变积分绕行方向

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\cos\alpha dl \quad = B\cos(\pi-\theta)dl$$

$$= -B\cos\theta dl = -Brd\varphi$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi \quad = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$



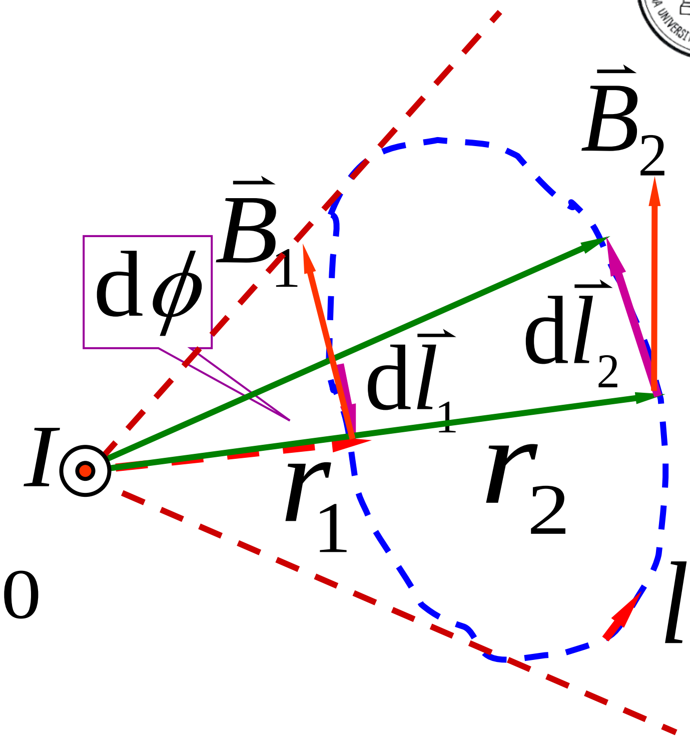
则：$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = -\mu_0 I$

2）电流在回路之外

$$\because \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$\vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$\therefore \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_1 + \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2 = 0 \Longrightarrow \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



3）回路内有多各电流

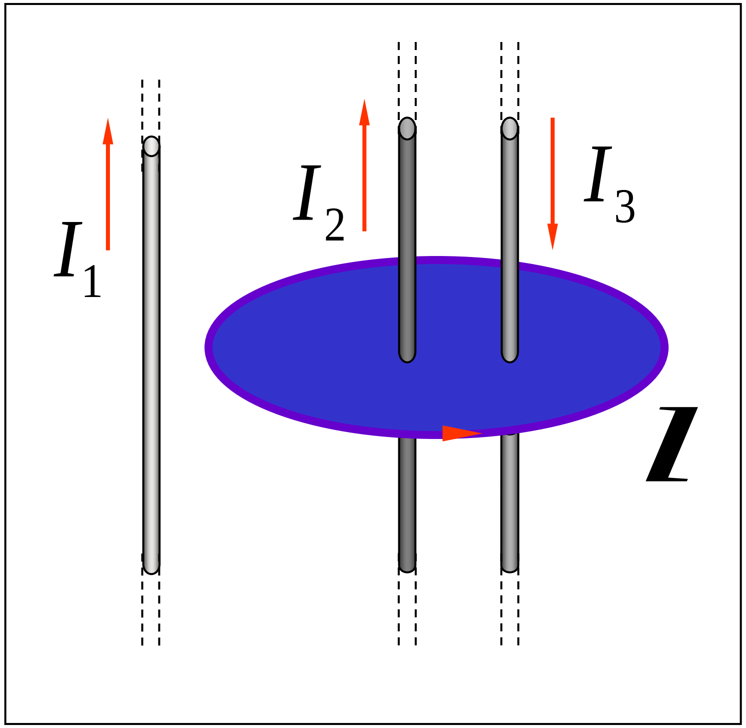
$$\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_l (\vec{B}_1 + B_2 + \cdots + B_n) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_l \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_l \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \oint_l \vec{B}_n \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \mu_0 I_1 + \mu_0 I_2 + \cdots + \mu_0 I_n = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

（4）多电流情况

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$



$$\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_3)$$

结果对任意形状的回路，任意形状的闭合电流（伸向无限远的电流）均成立.

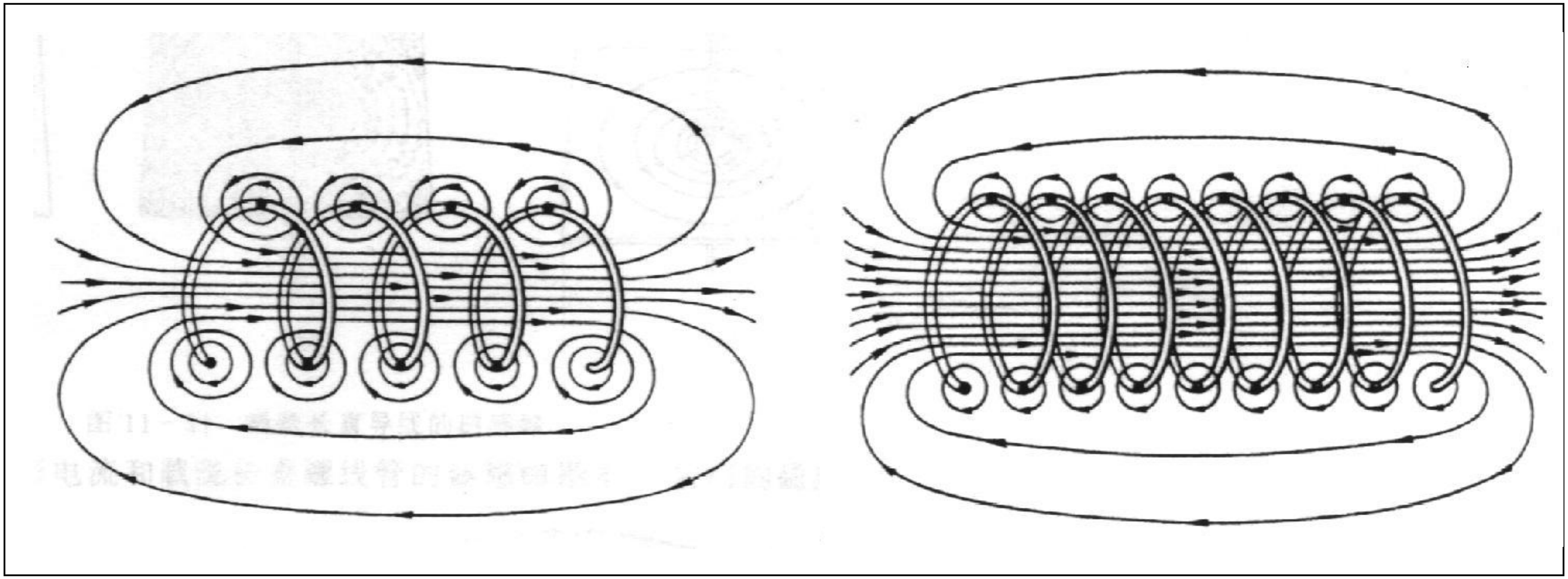
➢ 安培环路定理

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i}$$

二、安培环路定理的应用

1. 磁场对称性分析；
2. 根据对称性选择合适的安培环路；
3. 应用安培环路定理计算.

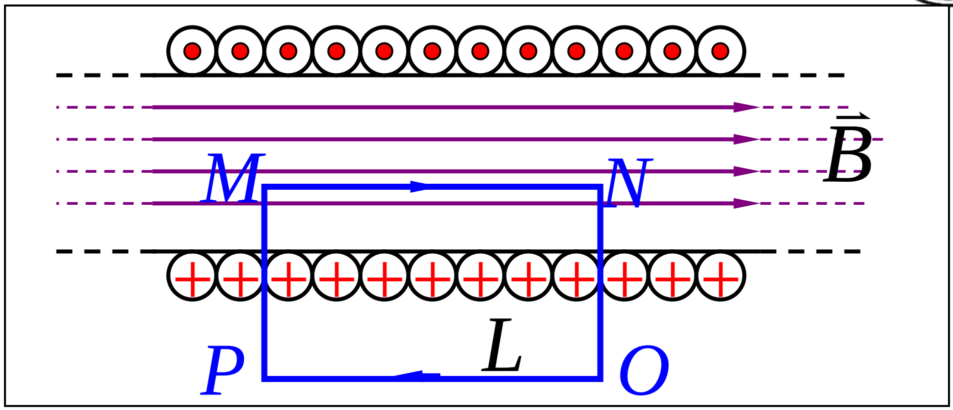
【例 9】求长直密绕螺线管内磁场



解　1）对称性分析螺旋管内为均匀场，方向沿轴向，外部磁感强度趋于零，即$B \simeq 0$.

2）选回路 L .

磁场 $\vec{B}$ 的方向与电流 I 成右螺旋.



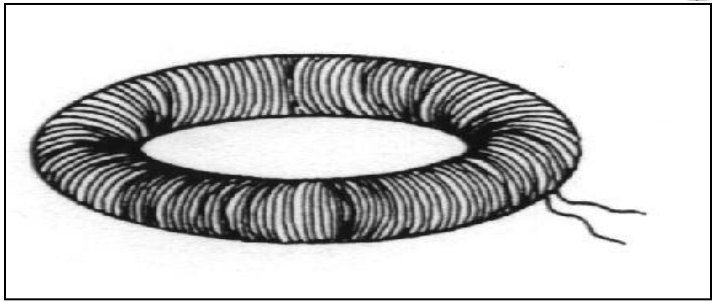
$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_{NO} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_{OP} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_{PM} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$B\cdot \overline{MN} = \mu_0 n \overline{MN} I$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

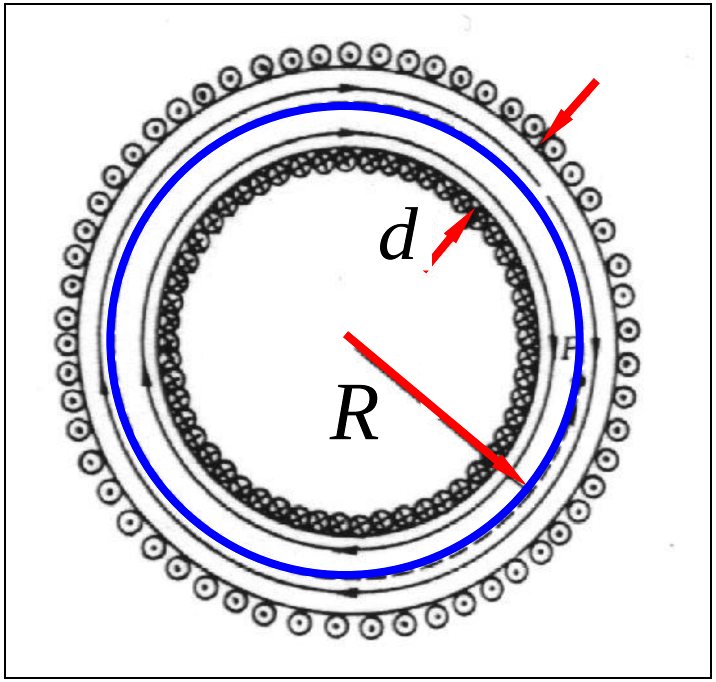
无限长载流螺线管内部磁场处处相等，外部磁场为零.

【例 10】求载流螺绕环内的磁场



解　1）　对称性分析；环内 $\vec{B}$ 线为同心圆，环外 $\vec{B}$ 为零.

2）选回路 .



$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi RB \quad = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\ R}$$

令 $L = 2\pi R$

$$\boxed{B = \mu_0 NI/L}$$

当 $2R >> d$ 时，螺绕环内可视为均匀场 .

【例 11】无限长载流圆柱体的磁场

解 1）对称性分析 2）选取回路

$$r > R \qquad \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

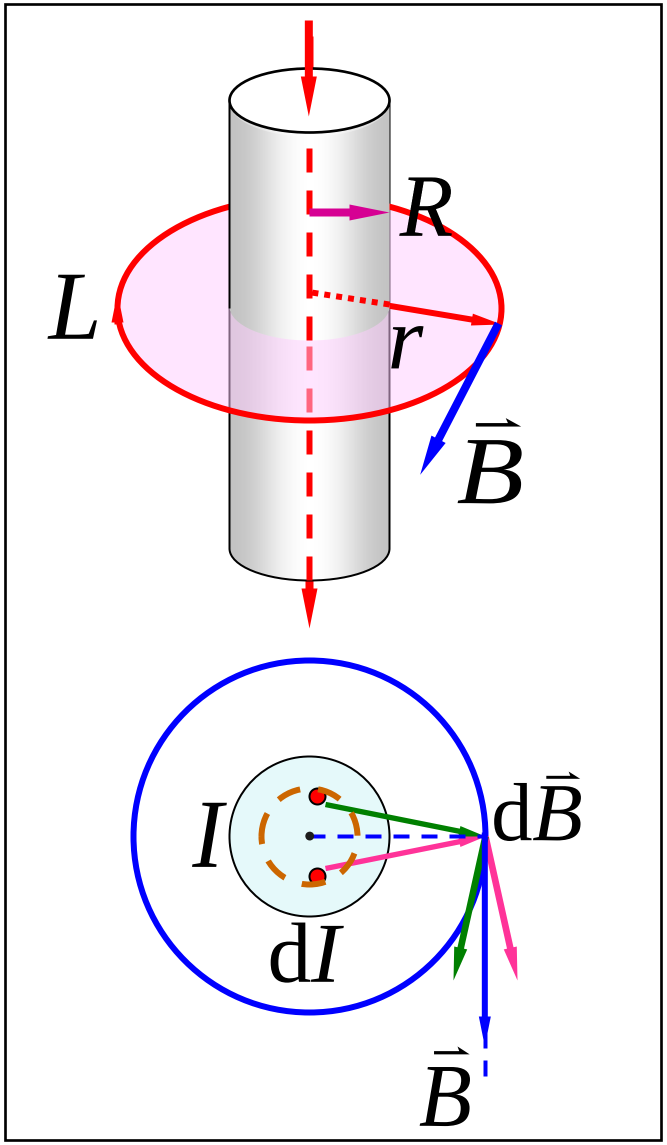
$$2\pi\, rB = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r}$$

$$0 < r < R \qquad \oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \frac{\pi\, r^2}{\pi\, R^2} I$$

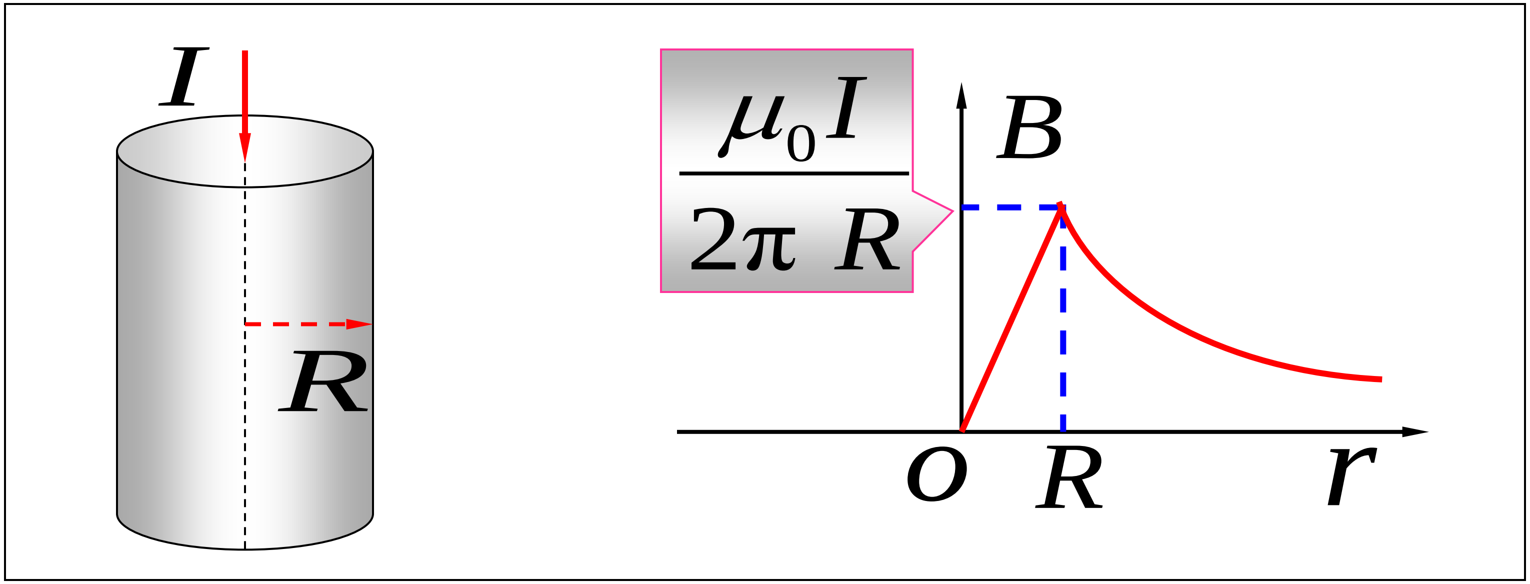
$$2\pi\, rB = \frac{\mu_0 r^2}{R^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi\, R^2}$$

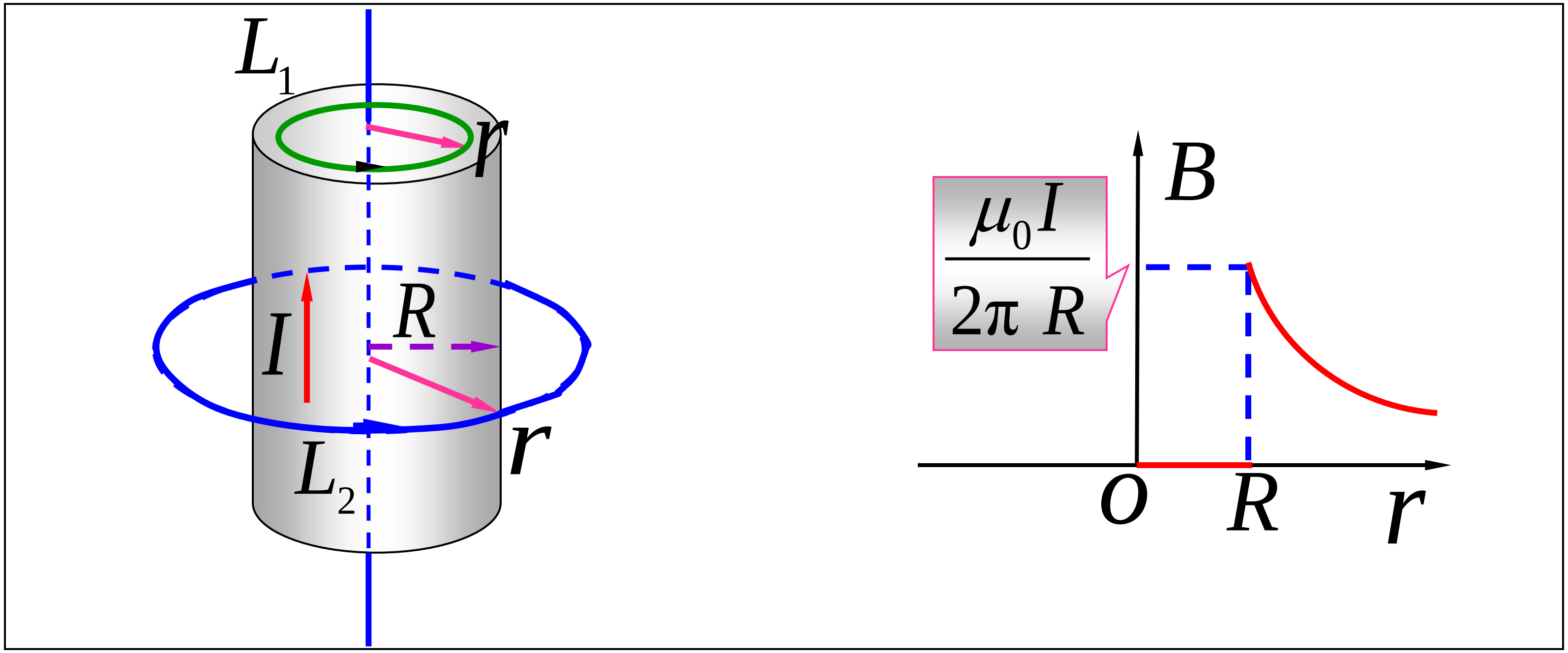


$\vec{B}$ 的方向与 I 成右螺旋

$$\begin{cases} 0 < r < R, & B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\ r > R, & B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$



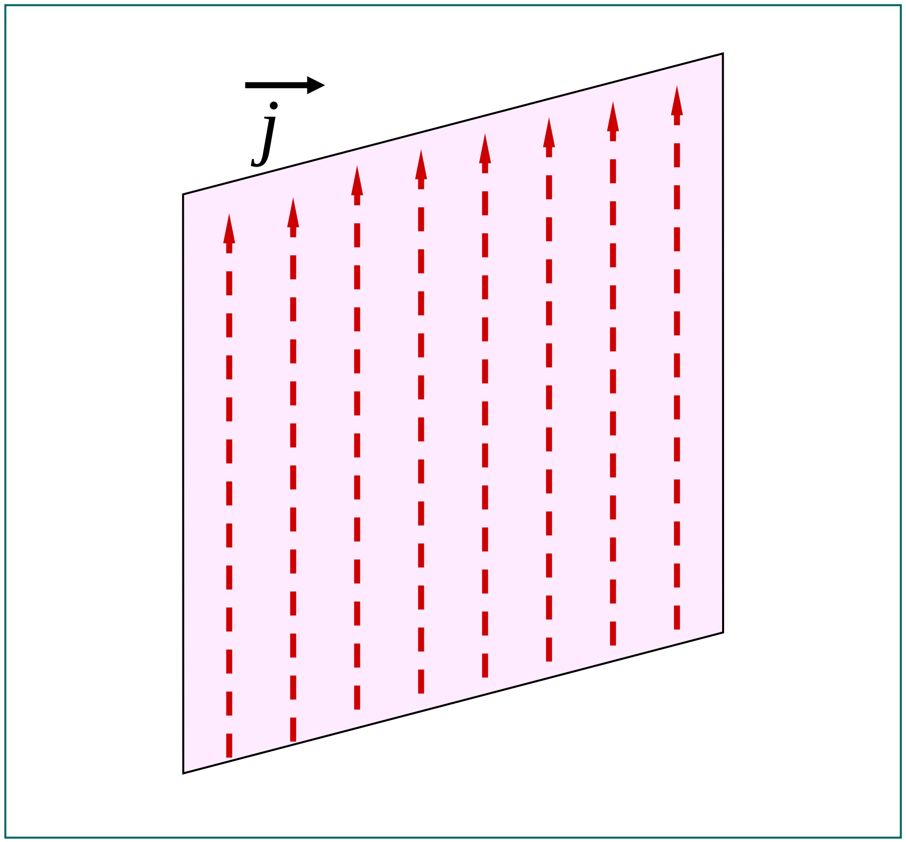
【例 12】无限长载流圆柱面的磁场

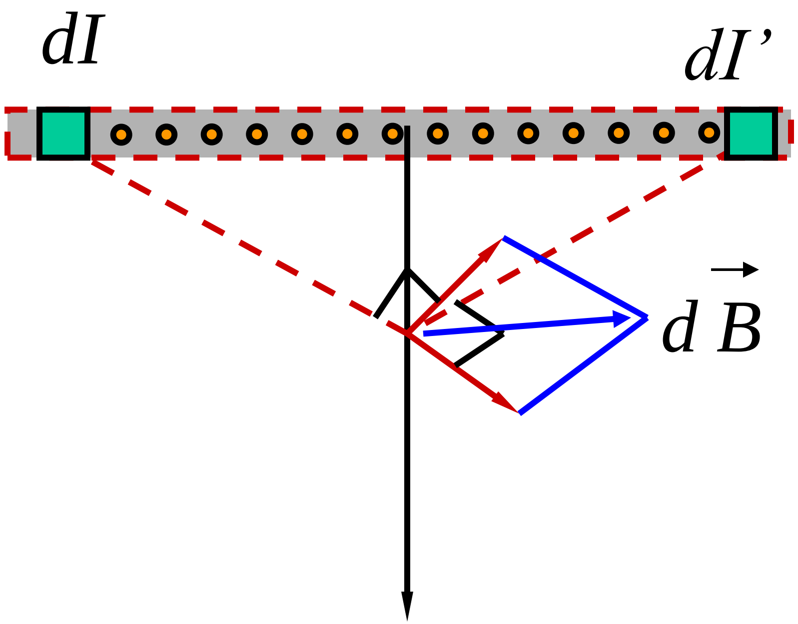


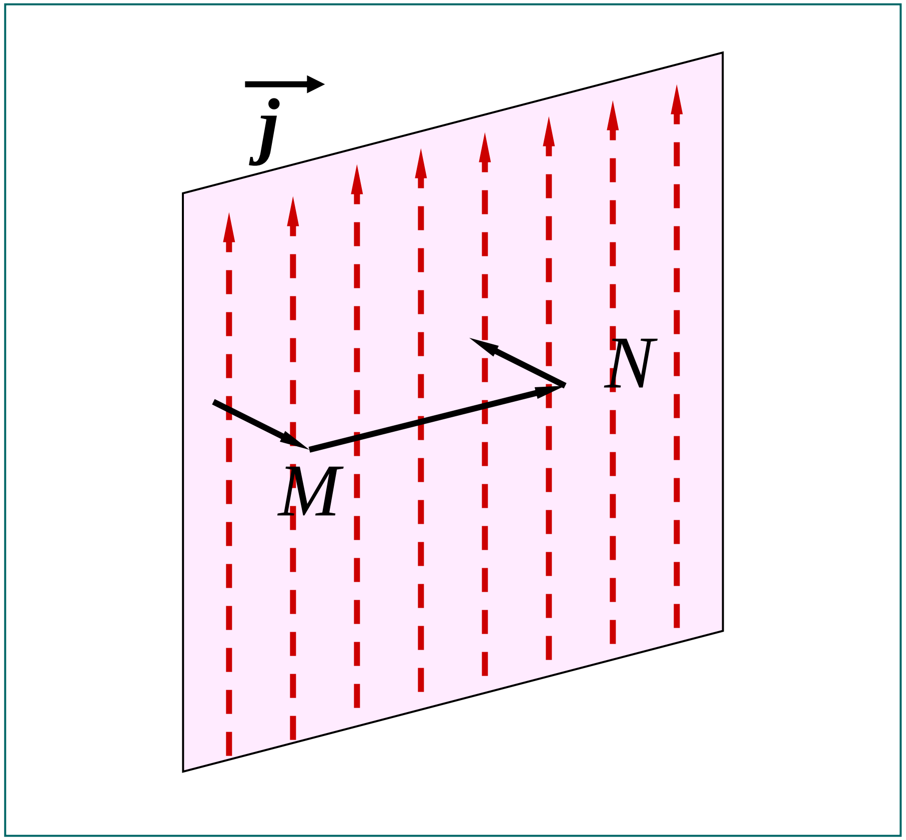
解 $0<r<R$ $\quad \oint_{L_1} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r = 0 \quad \boxed{B=0}$

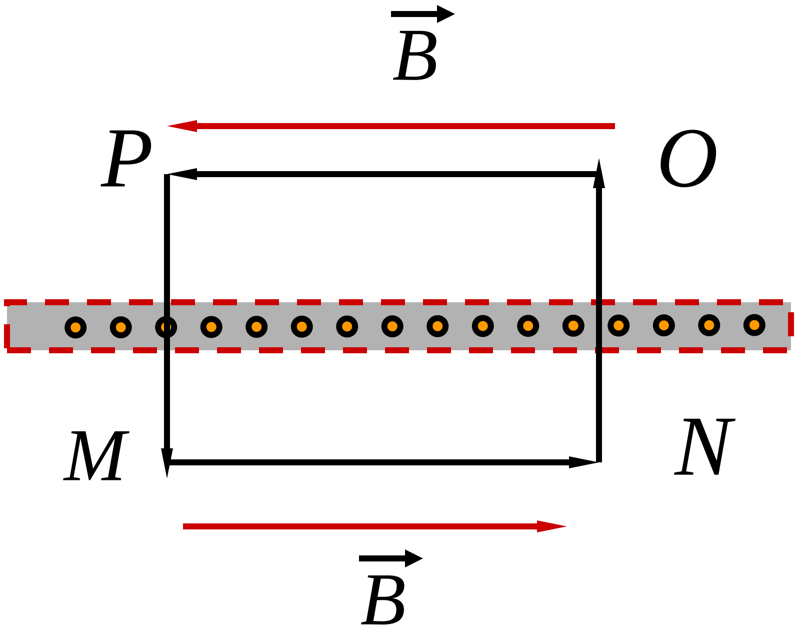
$r>R$ $\quad \oint_{L_2} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi r = \mu_0 I \quad \boxed{B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}}$

【例 13】在一无限大的导体平板上均匀流有电流密度为 j 的面电流，求平板两侧的磁感应强度。









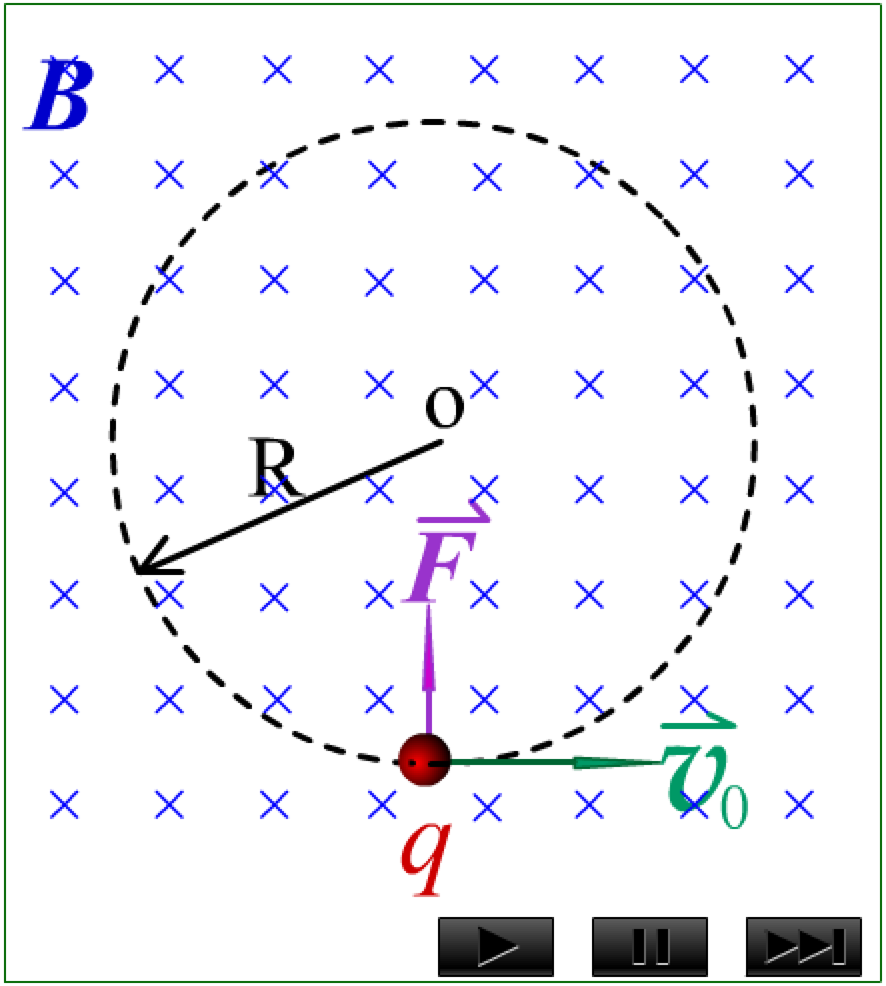
解： $\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_{NO} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \int_{OP} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_{PM} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$

$= 2Bl = \mu_0 j l$ 故 $\boxed{B = \mu_0 j / 2}$

§10.5 磁场对运动电荷的作用

一、带电粒子在磁场中运动演示

1．回旋半径和回旋频率



$$\boxed{\vec{v}_0 \perp \vec{B}}$$

$$qv_0B = m\frac{v_0^2}{R}$$

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}}$$

2． 磁聚焦

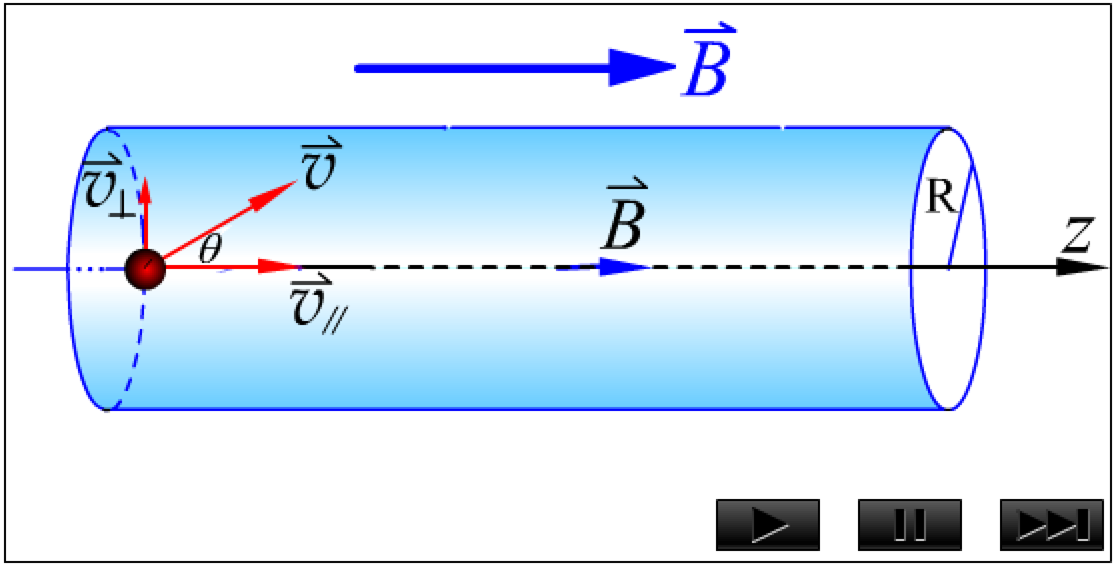
洛仑兹力 $\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}$ （洛仑兹力不做功）

$\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 不垂直

$$\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}$$

$$v_{//} = v\cos\theta$$

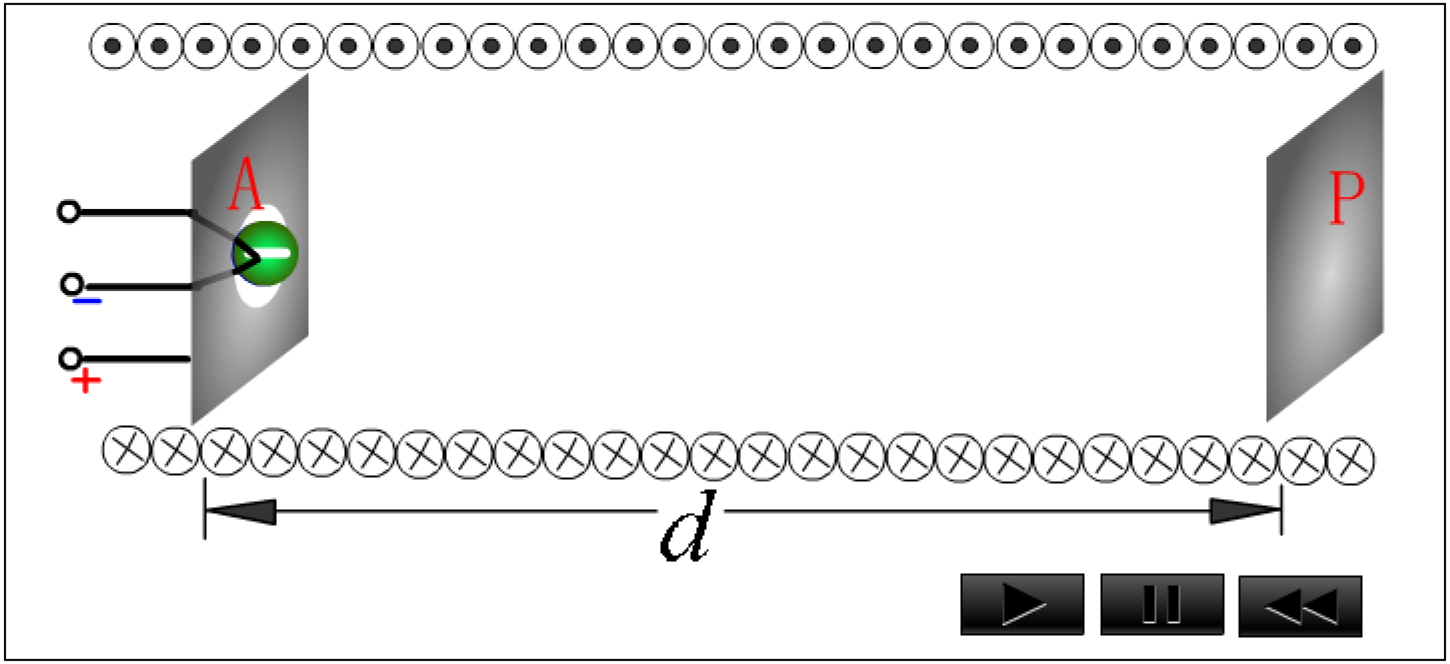
$$v_{\perp} = v\sin\theta$$



$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} \qquad T = \frac{2\pi\, m}{qB}$$

螺距 $d = v_{//}T = v\cos\theta \dfrac{2\pi\, m}{qB}$

◆ **磁聚焦** 在均匀磁场中某点 A 发射一束初速相差不大的带电粒子，它们的 $\vec{v}_0$ 与 $\vec{B}$ 之间的夹角 θ 不尽相同，但都较小，这些粒子沿半径不同的螺旋线运动，因螺距近似相等，都相交于屏上同一点，此现象称之为磁聚焦．



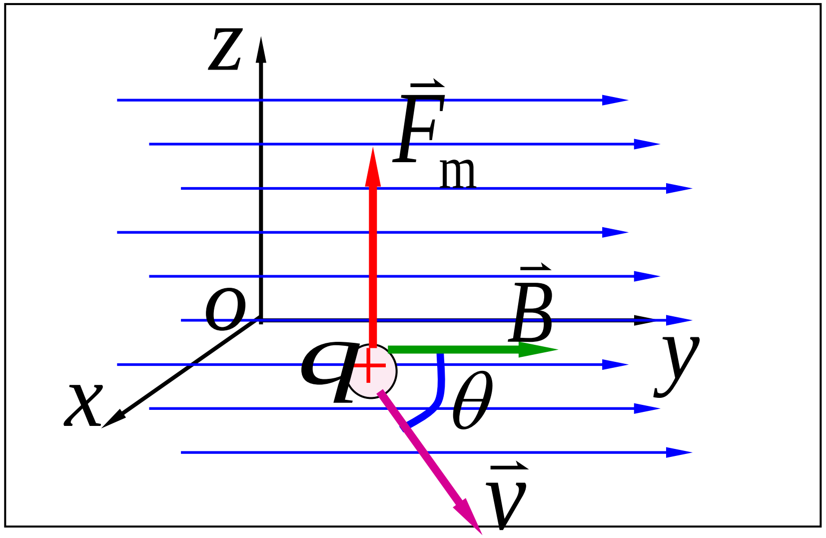
◆ **应用** 电子光学，电子显微镜等．

二、 带电粒子在电场和磁场中一般运动分析

电场力 $\boxed{\vec{F}_{\mathrm{e}} = q\vec{E}}$

磁场力（洛仑兹力）

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$



方向：即以右手四指 $\vec{v}$ 由经小于 180° 的角弯向 $\vec{B}$，拇指的指向就是正电荷所受洛仑兹力的方向.

运动电荷在电场和磁场中受的力:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

带电粒子在磁场中运动分析

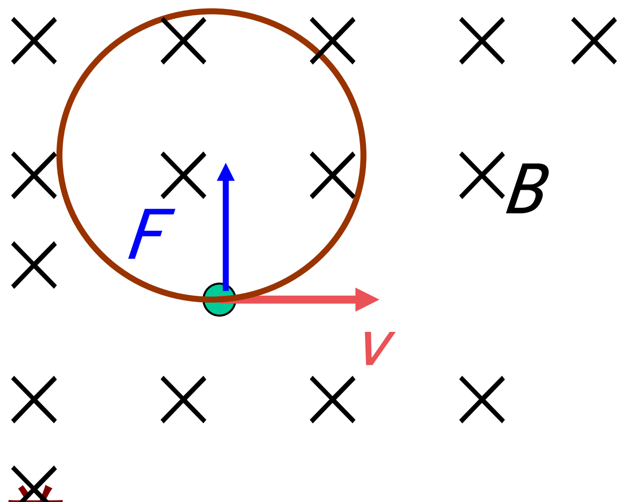
动力学方程： $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B}$

1. 带电粒子在 匀强磁场 中的运动

$\boxed{1）v \parallel \vec{B}}$ $\because \theta=0、\pi \quad \therefore F_m = o \Rightarrow a = 0$

——匀速直线运动

$\boxed{2)\quad \vec{v}\perp\vec{B}}$ （匀速圆周运动）



$$F_m = qvB = m\frac{v^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

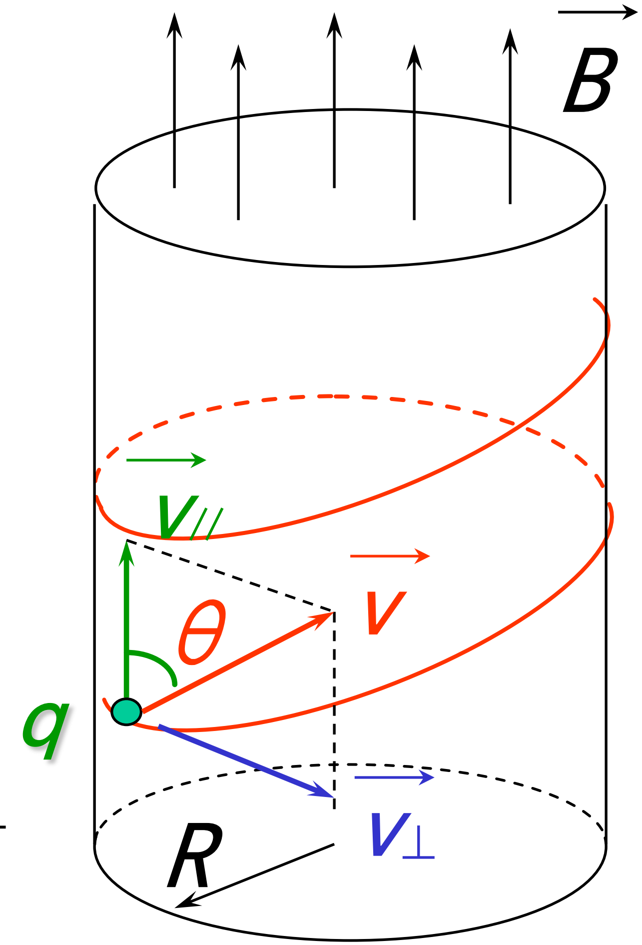
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$——周期与速度无关。

3) $\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 成 θ 角 （螺旋线运动）

$$v\begin{cases} v_{\perp} & \text{——圆周运动} \\ v_{//} & \text{——匀速直线运动} \end{cases}$$

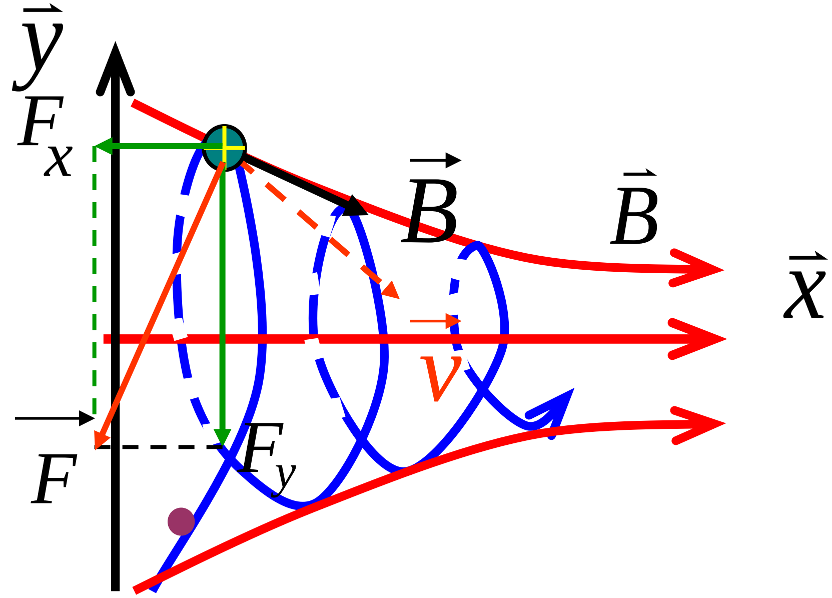
圆周运动半径 $R=\dfrac{mv_{\perp}}{qB}=\dfrac{mv\sin\theta}{qB}$

螺距 $h=v_{//}T=v\cos\theta\cdot\dfrac{2\pi m}{qB}$



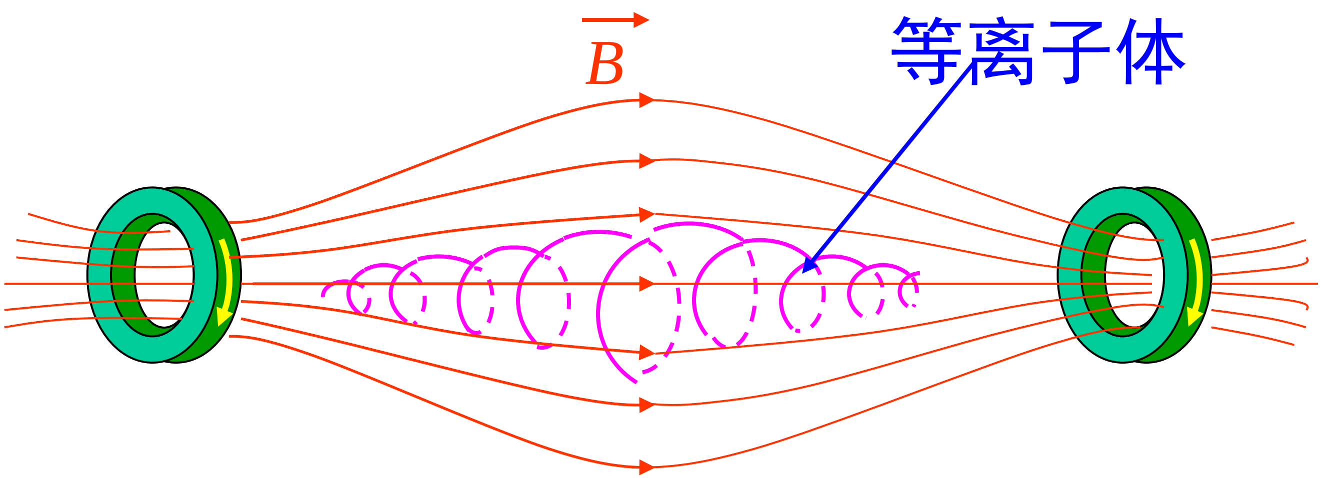
2. 带电粒子在 非均匀磁场 中的运动

$\because B$变　　$\therefore R$、h都变



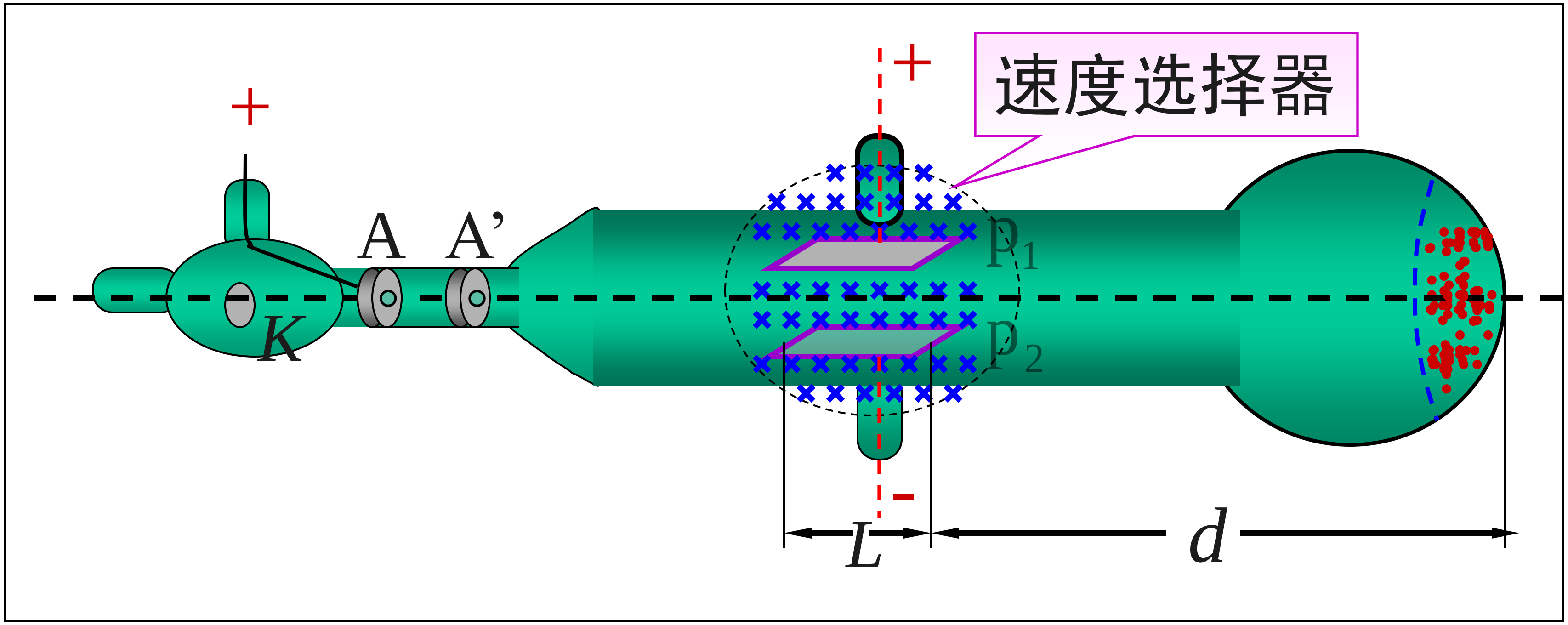
且粒子受到一个与运动方向相反的力F_x，此力阻止粒子向磁场增强方向运动，最后使沿磁场的运动被抑制，而被迫反转，象被“反射”回来一样。称为磁镜。

磁约束装置



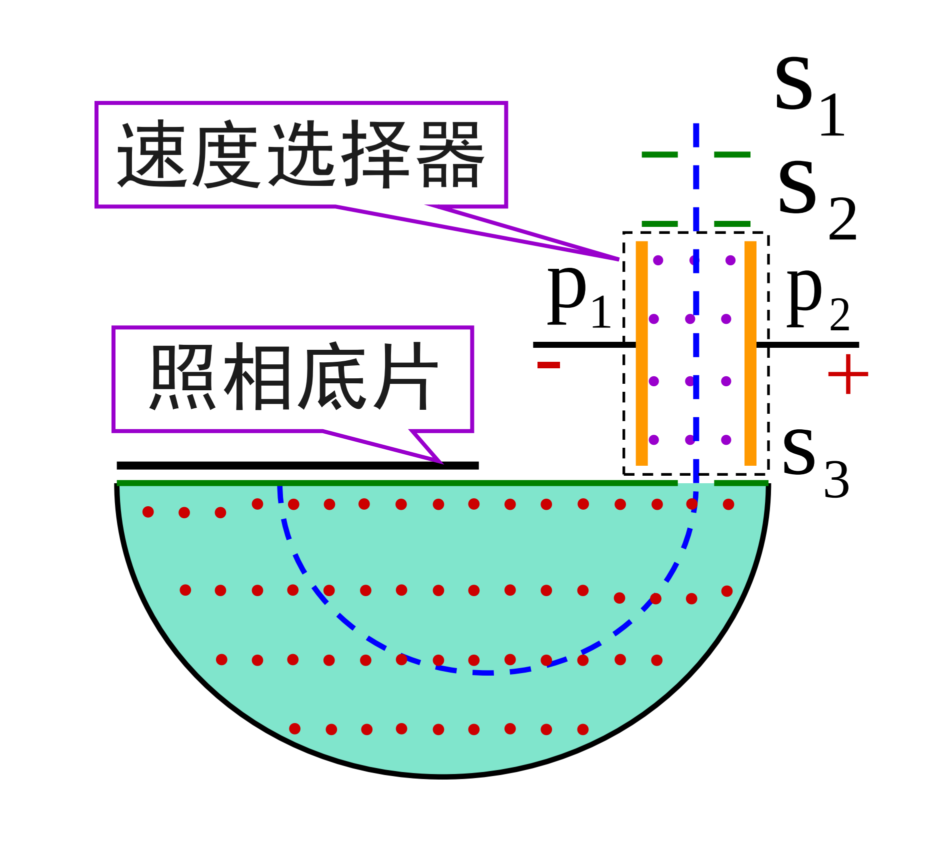
三、电场和磁场中带电粒子运动的应用

1．电子比荷的测定



$$e\vec{E} = e\vec{v}_0 \times \vec{B} \qquad v_0 = \frac{E}{B}$$

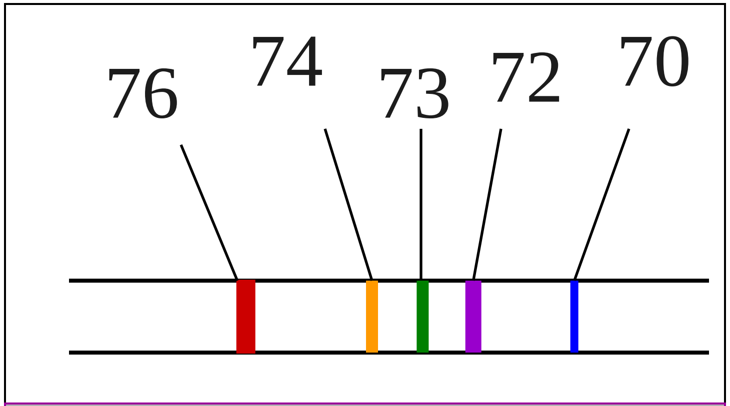
2．质谱仪



质谱仪的示意图

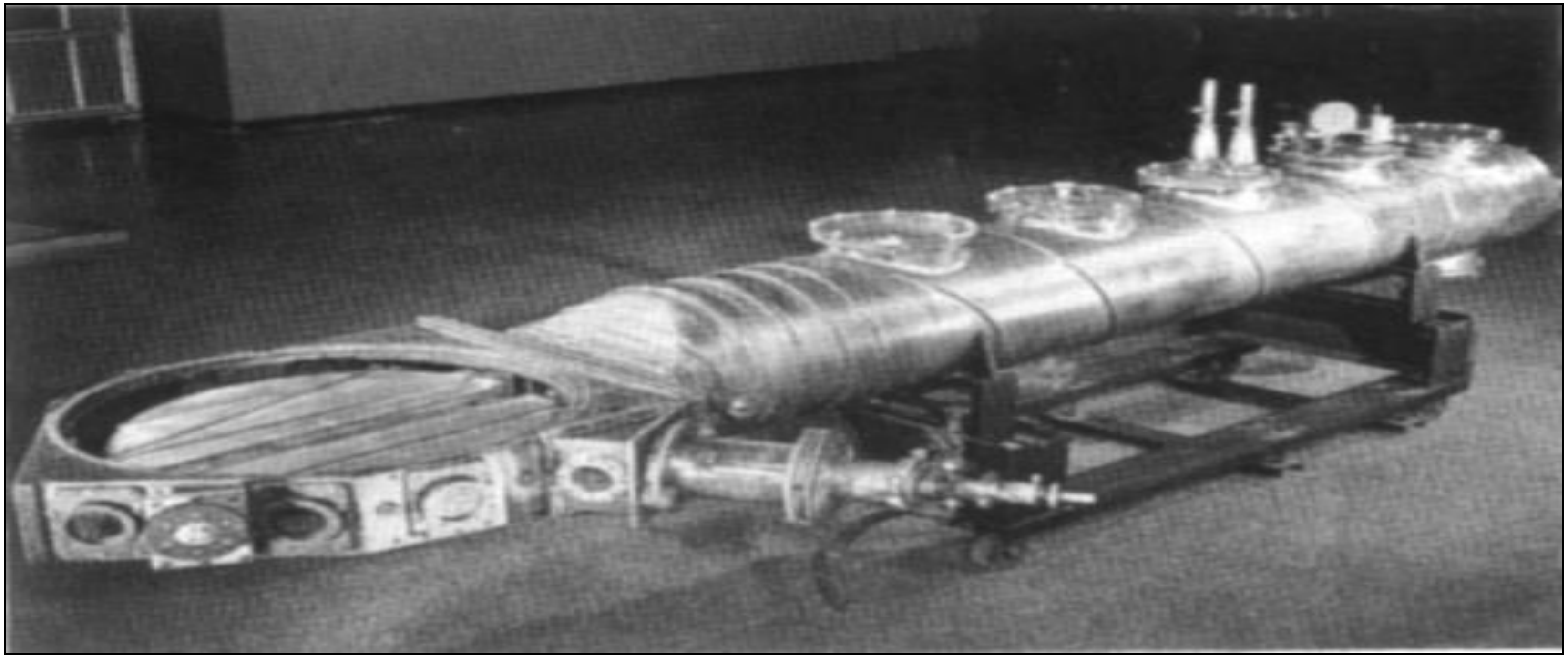
$$qvB' = m\frac{v^2}{R}$$

$$m = \frac{qB'R}{v}$$



锗的质谱

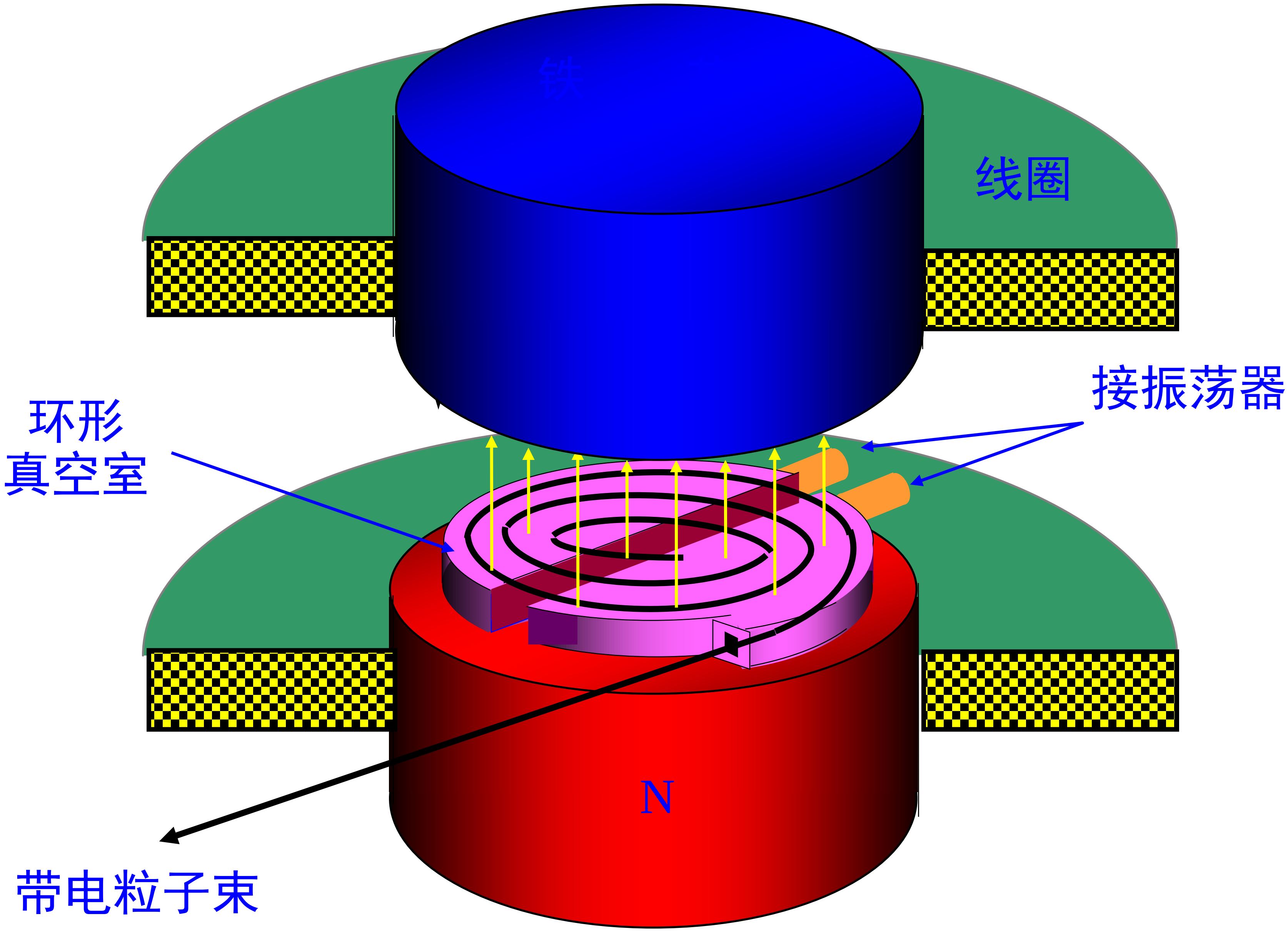
3．回旋加速器

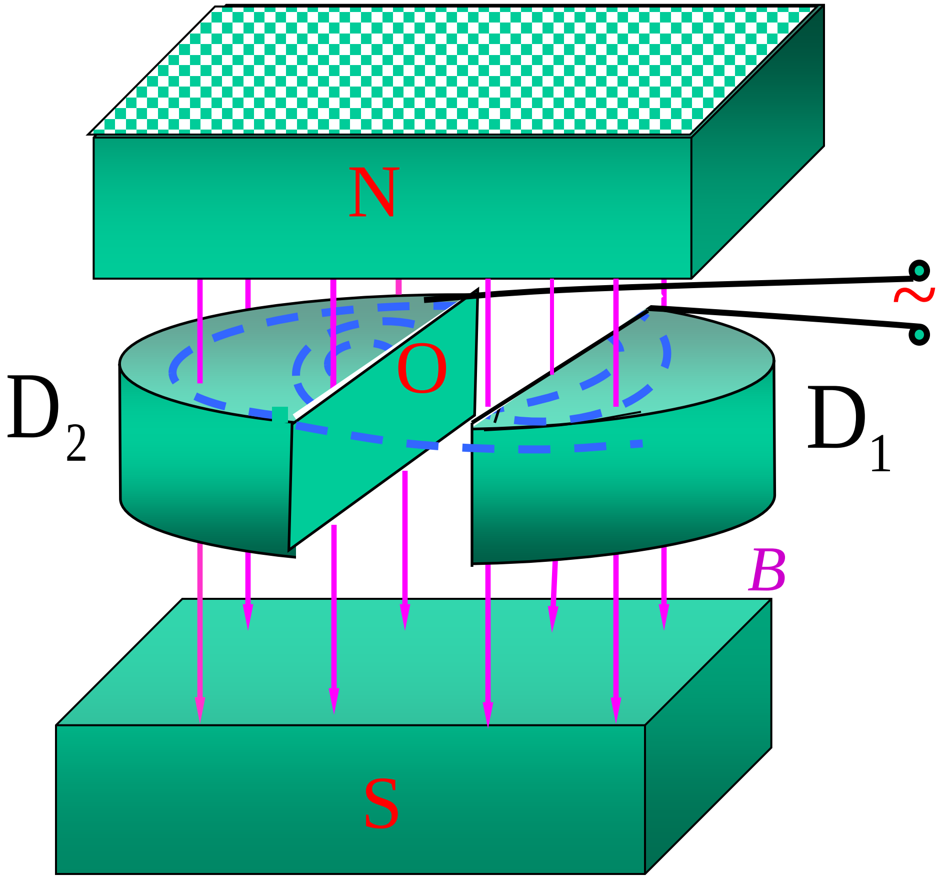


1932 年劳伦斯研制第一台回旋加速器的 D 型室.

此加速器可将质子和氘核加速到 1MeV 的能量，为此 1939 年劳伦斯获得诺贝尔物理学奖.

3.回旋加速器 ——获得高能粒子





回旋加速器原理图

频率与半径无关

$$f = \frac{qB}{2\pi m}$$

到半圆盒边缘时

$$v = \frac{qBR_0}{m}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_k = \frac{q^2B^2R_0^2}{2m}$$

【例 14】有一回旋加 速器，他 的交变 电压的 频率为 $12\times10^{6}\,\mathrm{Hz}$ ，半圆形电极的半径为0.532m . 问 加速氘核所需的磁感应强度为多大? 氘核所能达到的最大动能为多大? 其最大速率有多大? （已知氘核的质量为 $3.3\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$ ，电荷为 $1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ ）.

解　由粒子的回旋频率公式，可得

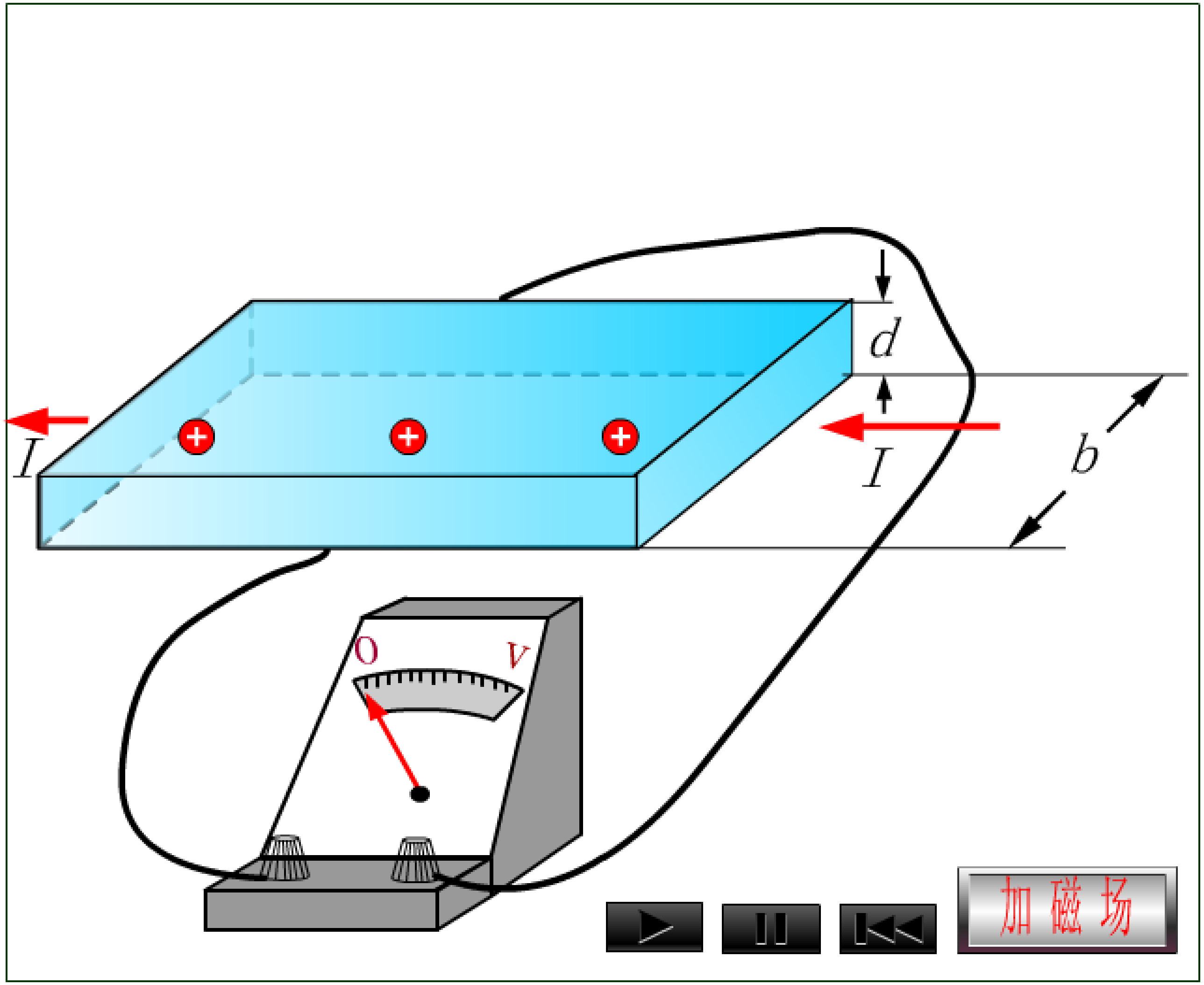
$$B=\frac{2\pi mf}{q}=\frac{2\pi\times3.3\times10^{-27}\times12\times10^{6}}{1.6\times10^{-19}}\mathrm{T}=1.56\mathrm{T}$$

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{q^{2}B^{2}R_{0}^{2}}{2m}=16.7\mathrm{MeV}$$

$$v=\frac{qBR_{0}}{m}=4.02\times10^{7}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

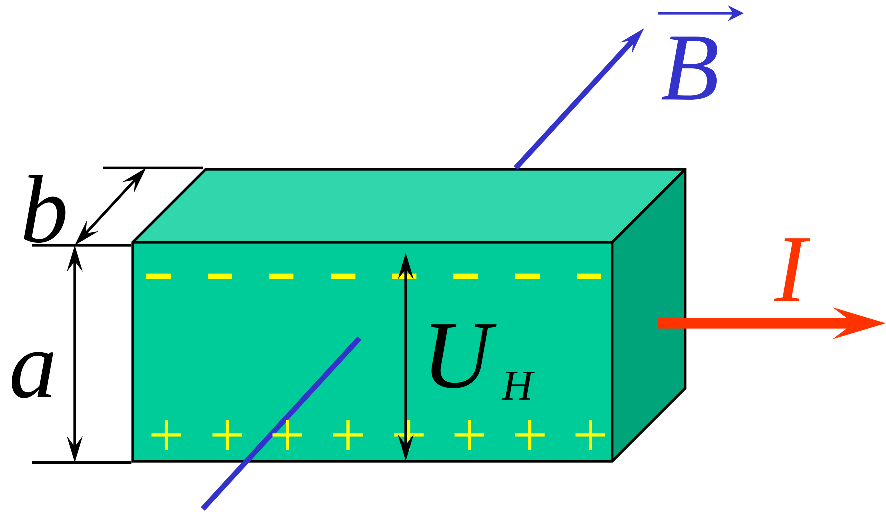
4． 霍耳效应

霍耳效应



*现象

1879年霍耳发现把一载流导体放在磁场中，如果磁方向与电流方向垂直，则在与磁场和电流二者垂直的方向上出现横向电势差，这一现象称之为霍耳现象。



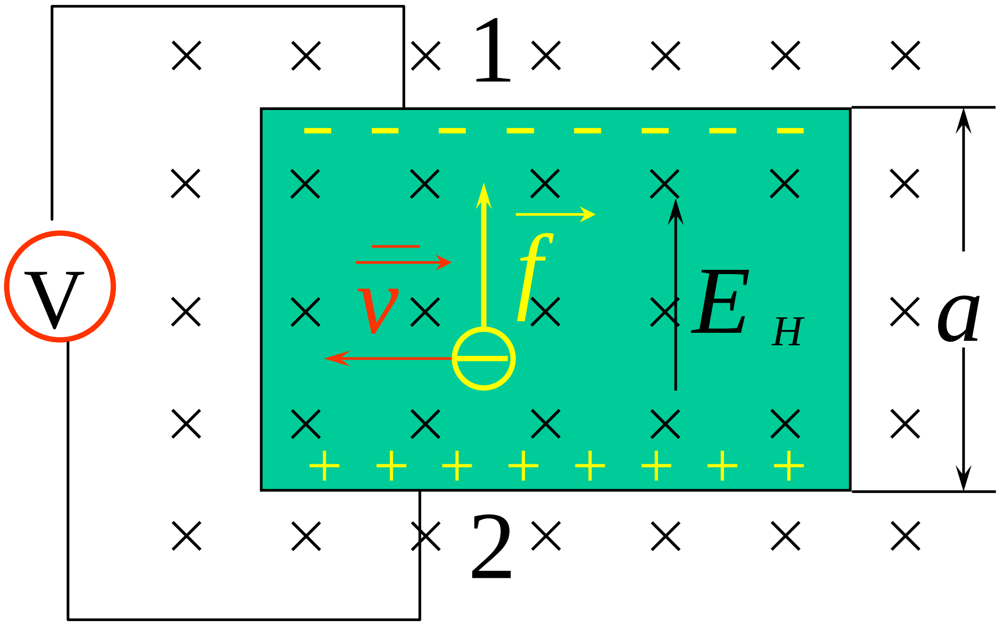
*实验结果 $U_H \propto \frac{IB}{b}$ $U_H = R_H \frac{IB}{b}$

R_H —— 霍耳系数,是和材料的性质有关的常数

*霍耳效应的经典解释

$$F_m = evB$$

$$F_e = eE_H = \frac{eU_H}{a}$$



平衡时： $F_m = F_e$

即： $evB = \dfrac{eU_H}{a}$

得： $U_H = vBa$

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}q = env_{\mathrm{d}}\mathrm{d}tS$$

$$I = env_{\mathrm{d}}S \quad 又 \because I = nevab \qquad \Rightarrow v = \frac{I}{neab}$$

$$U_H = \frac{1}{ne}\frac{IB}{b} \qquad \Rightarrow R_H = \frac{1}{ne}$$

*霍耳效应的应用

1.实验测定R_H ,确定材料的载流子浓度n

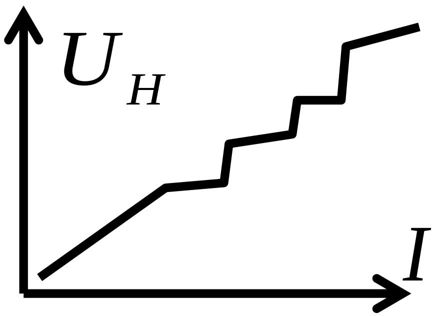
$$R_H = \frac{1}{ne}$$

2.根据U_H的符号确定材料的载流子类型（电子或空穴）

$$U_H = \frac{1}{ne}\frac{IB}{b}$$

3.测定U_H值,确定磁感应强度B

R_H实验值和计算值的差别是由于经典理论的缺陷，只有量子理论才能解决这一问题。九十年代，发现量子霍耳效应,即曲线$U_H \sim I$ 在B、b、R_H为常数时，出现台阶，而不为线性关系。



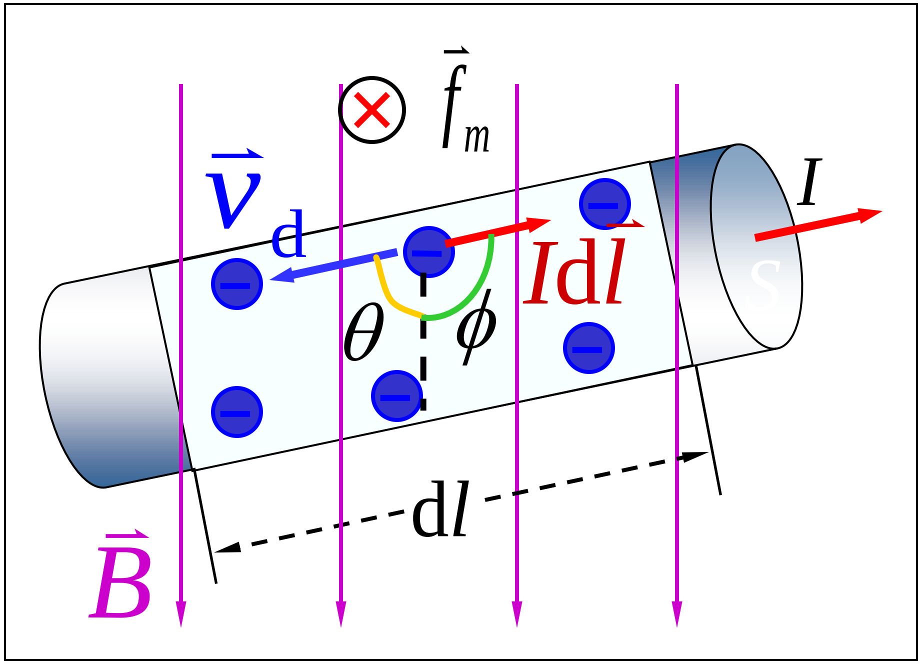
98年崔琦因量子霍耳效应理论获诺贝尔奖

§ 10. 6 磁场对载流导线的作用

一、安 培 力

由于自由电子与晶格之间的相互作用，使导线在宏观上看起来受到了磁场的作用力

-----此力即为安培力.



洛伦兹力 $\vec{f}_{\mathrm{m}} = -e\vec{v}_{\mathrm{d}} \times \vec{B}$

$$f_{\mathrm{m}} = ev_{\mathrm{d}}B\sin\theta \qquad \mathrm{d}F = nev_{\mathrm{d}}S\mathrm{d}lB\sin\theta$$

$$\boxed{I = nev_{\mathrm{d}}S} \qquad \mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB\sin\theta = I\mathrm{d}lB\sin\phi$$

安培定律　磁场对电流元的作用力 $\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$

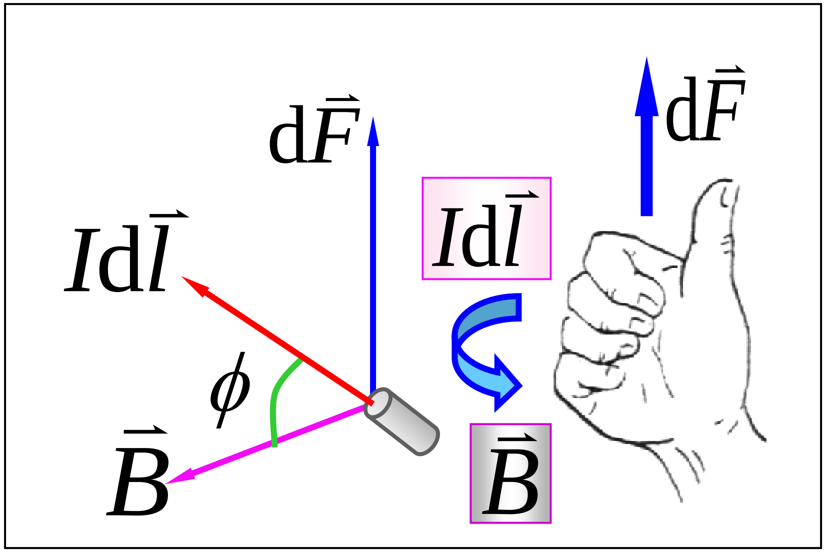
安培定律 $\boxed{\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}}$ $\mathrm{d}F=I\mathrm{d}lB\sin\phi$

◆ 意义　磁场对电流元作用的力，在数值上等于电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 的大小 、电流元所在处的磁感强度 $\vec{B}$ 大小以及电流元和磁感应强度之间的夹角 ϕ 的正弦之乘积， $\mathrm{d}\vec{F}$ 垂直于 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 和 $\vec{B}$ 所组成的平面, 且 $\mathrm{d}\vec{F}$ 与 $I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$ 同向 .

◆ 有限长载流导线

所受的安培力

$$\boxed{\vec{F}=\int_l \mathrm{d}\vec{F}=\int_l I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}}$$



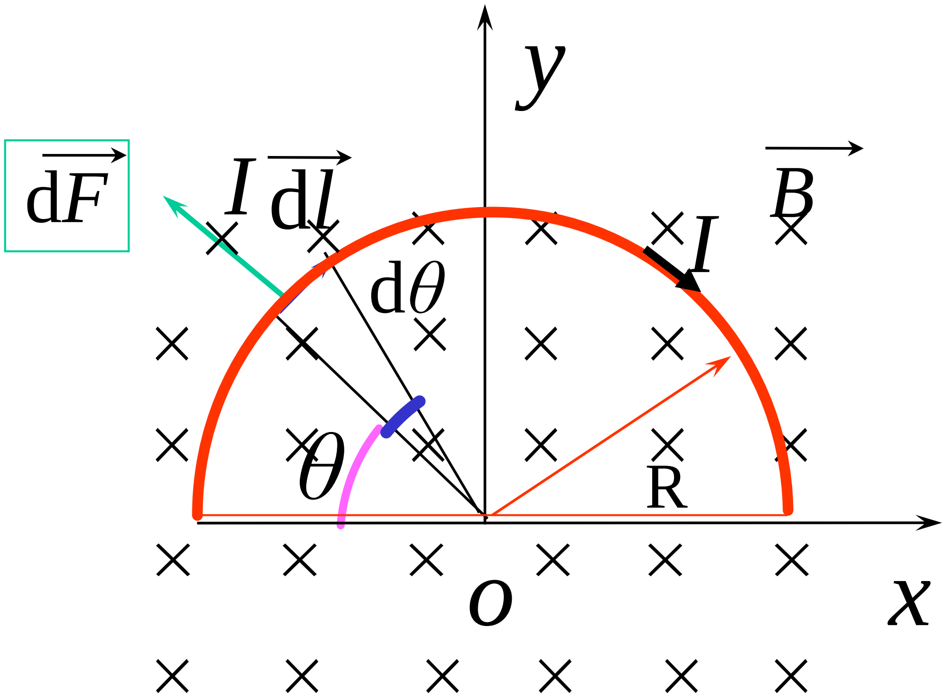
【例 15】有一半径为R 的半圆形导线，通有电流 I，它处于一磁感应强度为B 的匀强磁场之中。求：安培力。

解：

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$dF = B\,I\,dl\,\sin 90^0$$

$$= B\,I\,dl$$



由对称性知 $F_x = 0$

$$\boxed{F = \int F_y} = \int dF \sin\theta$$

$$\boxed{= \int BIdl \sin\theta} \boxed{= \int BIRd\theta \sin\theta}$$

$$= BIR\int d\theta \sin\theta \boxed{= 2BIR}$$

【例 17】求如图不规则的平面载流导线在均匀磁场中所受的力，已知 $\vec{B}$ 和 I.

解　取一段电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

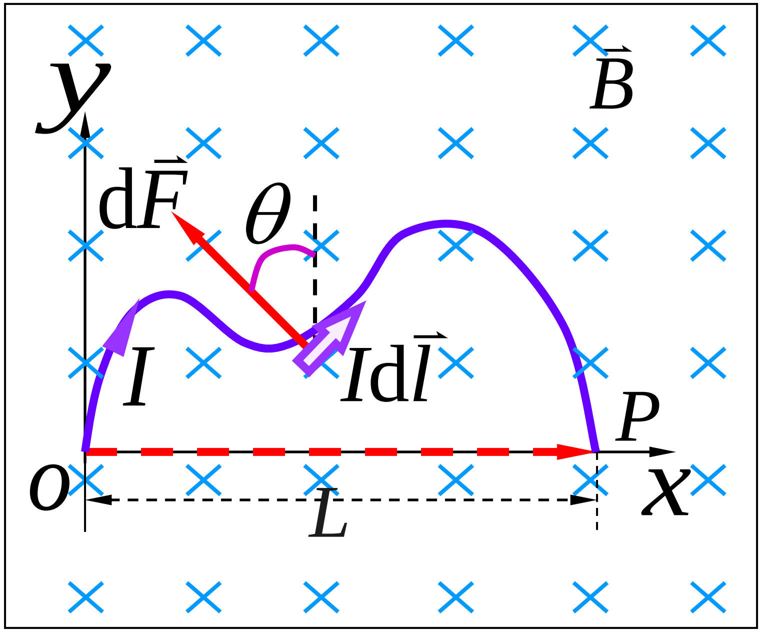
$$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\sin\theta = BI\mathrm{d}l\sin\theta = BI\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\cos\theta = BI\mathrm{d}l\cos\theta = BI\mathrm{d}x$$

$$F_x = \int \mathrm{d}F_x = BI\int_0^0 \mathrm{d}y = 0$$

$$F_y = \int \mathrm{d}F_y = BI\int_0^l \mathrm{d}x = BIl$$

$$\vec{F} = \vec{F}_y = BIl\vec{j}$$



结论：任意闭合平面载流导线在均匀磁场中所受的力为0。

【例 18】均匀磁场中任意闭合载流导线所受的合力均为零。

与无限长直线共面的圆受力不是0.

解：用磁场叠加原理，且均匀磁场 $\vec{B}$ 与积分无关

$$\vec{F}=\oint \mathrm{d}\vec{F}=\oint I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}=[I\oint \mathrm{d}\vec{l}\,]\times\vec{B}$$

对任意闭合回路均有 $\oint \mathrm{d}\vec{l}=0$　　于是 $\vec{F}=\oint \mathrm{d}\vec{F}=0$

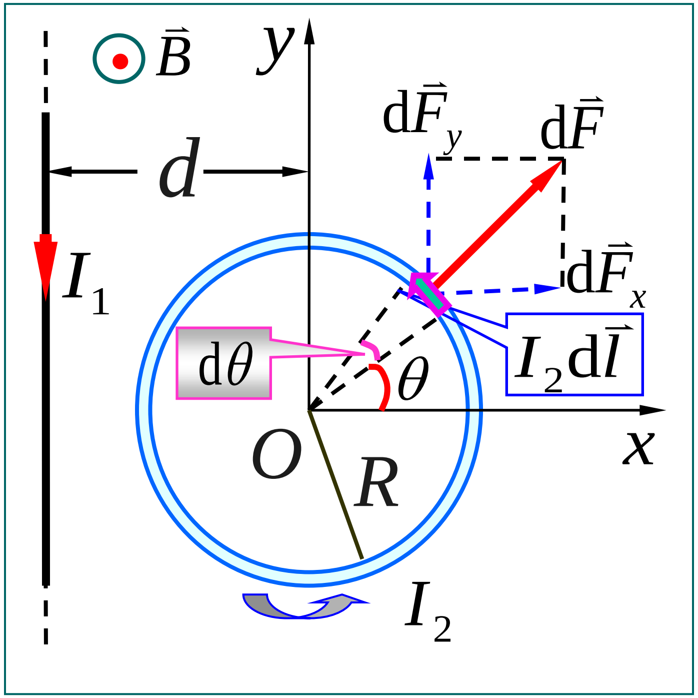
无限长直线

$$F_y=\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}=0$$

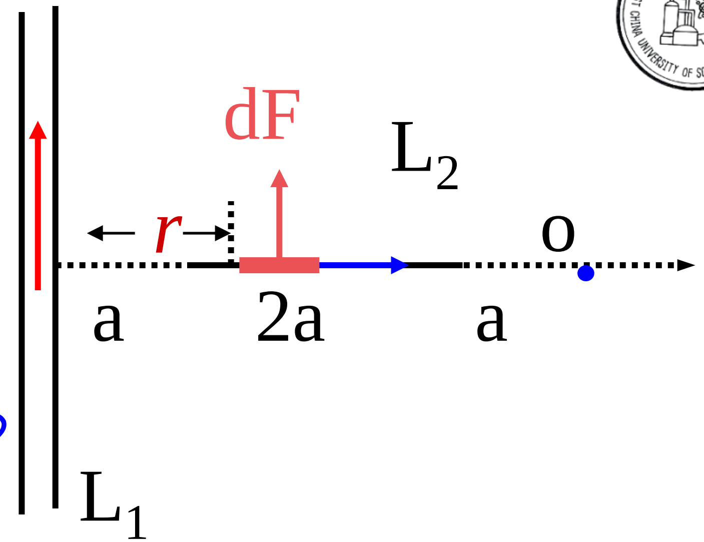
$$F_x=\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{d+R\cos\theta}$$

$$=\mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2-R^2}}\right)$$

$$\vec{F}=F_x\vec{i}=\mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2-R^2}}\right)\vec{i}$$



【例 19】L_1为无限长直导线，L_2为长为2a的直电线，两者位置如图所示。若L_1和L_2通以相同的电流I，求作用在L_2上的磁力及其对于O点的磁力矩为多少？



解：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$dF = IdrB = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} dr$$

$$F = \int_a^{3a} \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln 3$$

$$dM = (4a - r) dF$$

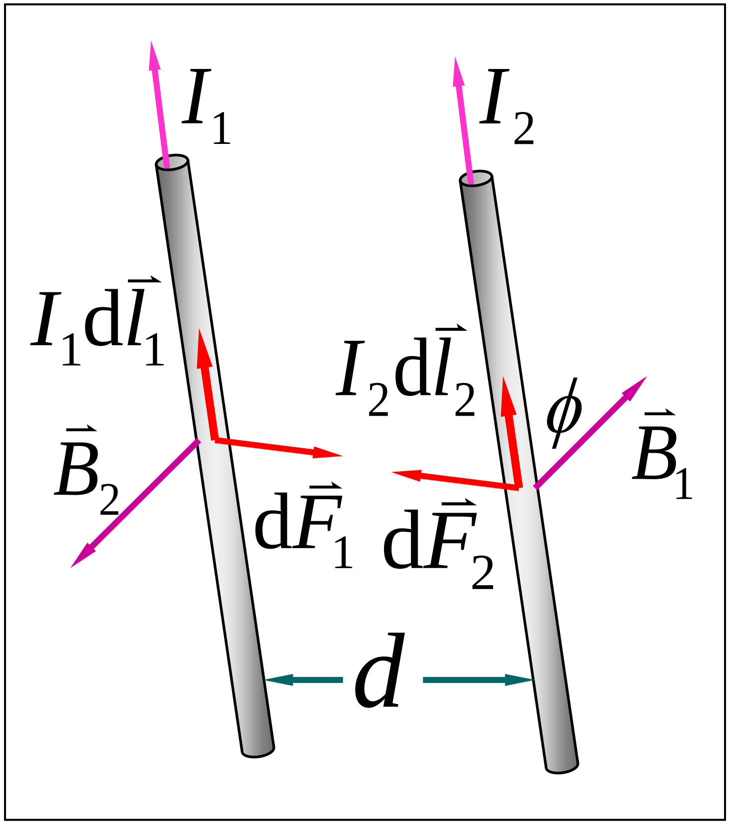
$$= (4a - r) \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} dr$$

$$M = \int_a^{3a} (4a - r) \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} (4a \ln 3 - 2a)$$

二 电流的单位 两无限长平行载流直导线间的相互作用

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\, d} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\, d}$$



$$\mathrm{d}F_2 = B_1 I_2 \mathrm{d}l_2 \sin\phi$$

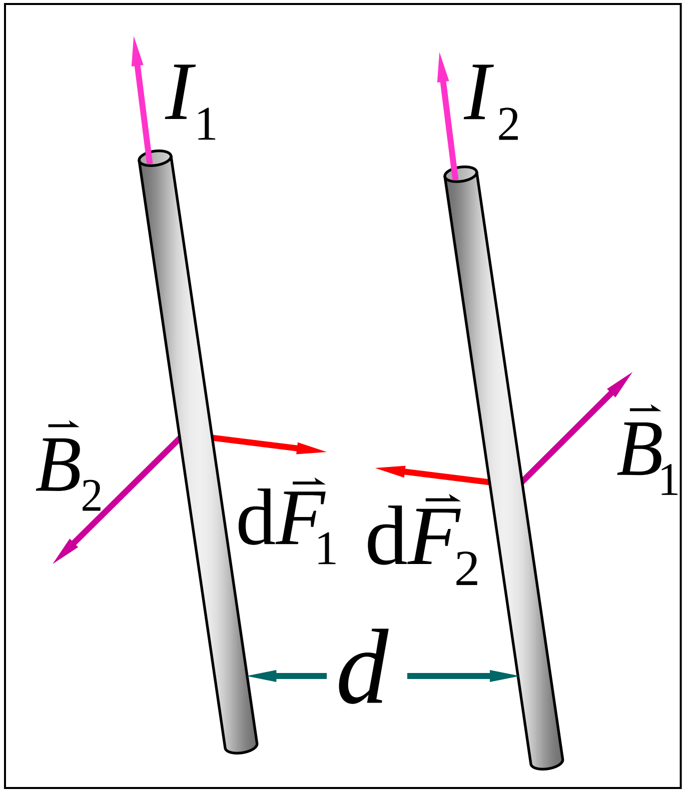
$$\phi = 90^\circ, \sin\phi = 1$$

$$\mathrm{d}F_2 = B_1 I_2 \mathrm{d}l_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}l_2}{2\pi d}$$

$$\mathrm{d}F_1 = B_2 I_1 \mathrm{d}l_1 = \frac{\mu_0 I_2 I_1 \mathrm{d}l_1}{2\pi d}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}l_2} = \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}l_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\, d}$$

◈ 国际单位制中电流单位安培的定义



在真空中两平行长直导线相距 1 m，通有大小相等、方向相同的电流，当两导线每单位长度上的吸引力为 $2\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ 时，规定这时的电流为 1 A（安培）.

$$\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}l_1}=\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}l_2}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\, d}$$

可得 $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot A^{-2}}$

$$= 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$$

问　若两直导线电流方向相反二者之间的作用力如何？

§ 10. 7　磁场力的功

一、 磁场作用于载流线圈的磁力矩

如图　均匀磁场中有一矩形载流线圈$MNOP$

$$MN = l_2 \quad NO = l_1$$

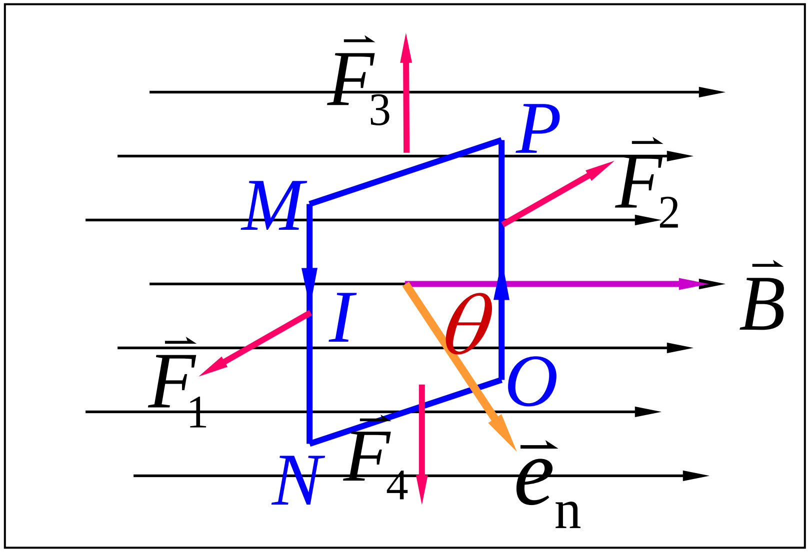
$$F_1 = BIl_2$$

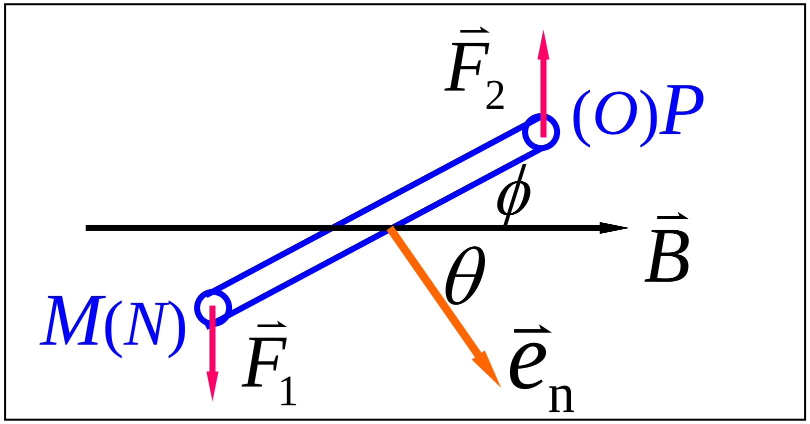
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

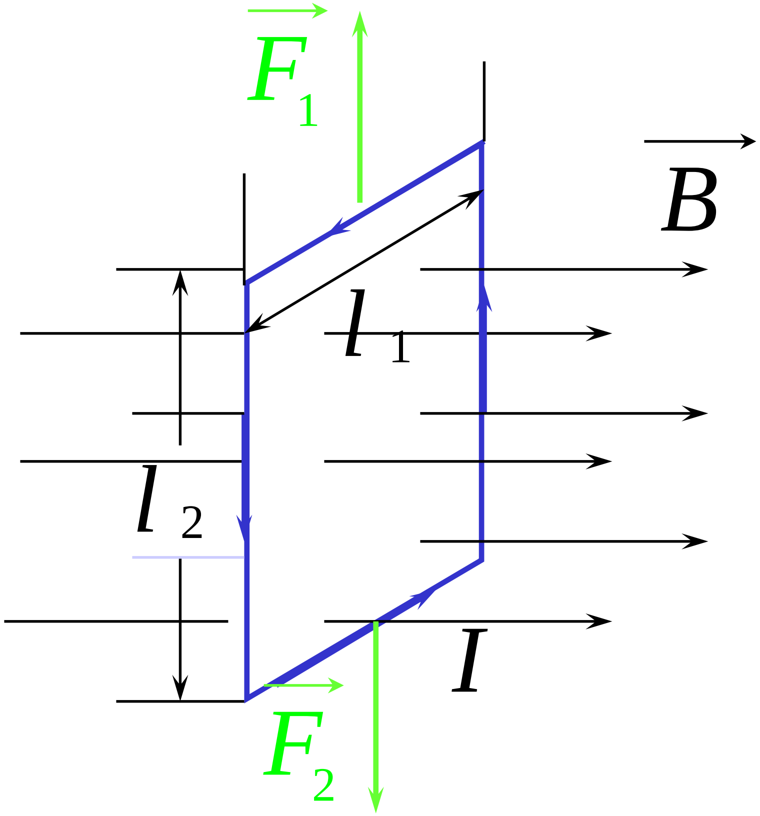
$$F_3 = BIl_1 \sin(\pi - \phi)$$

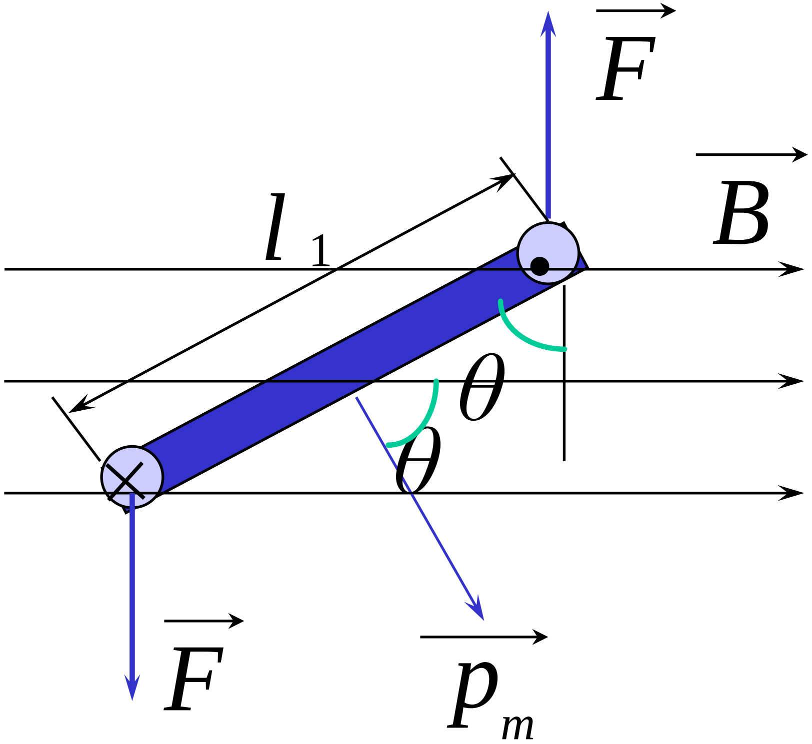
$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}_i = 0$$



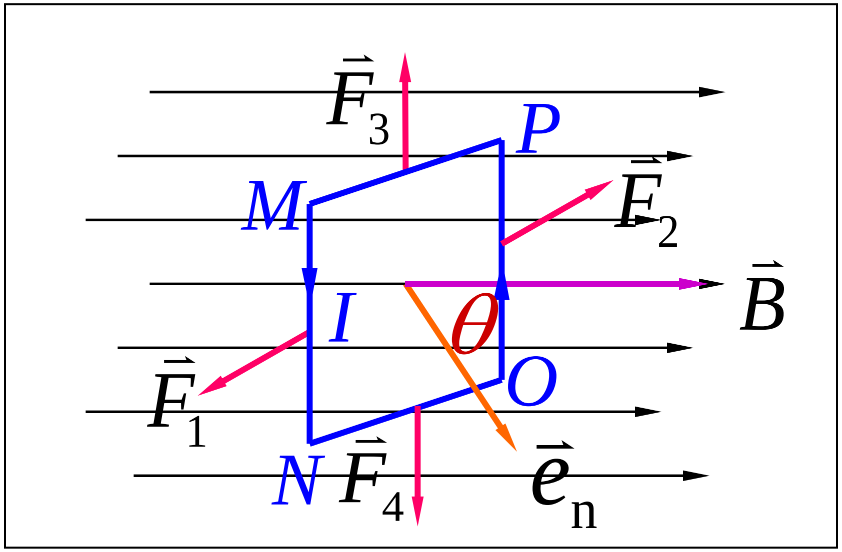


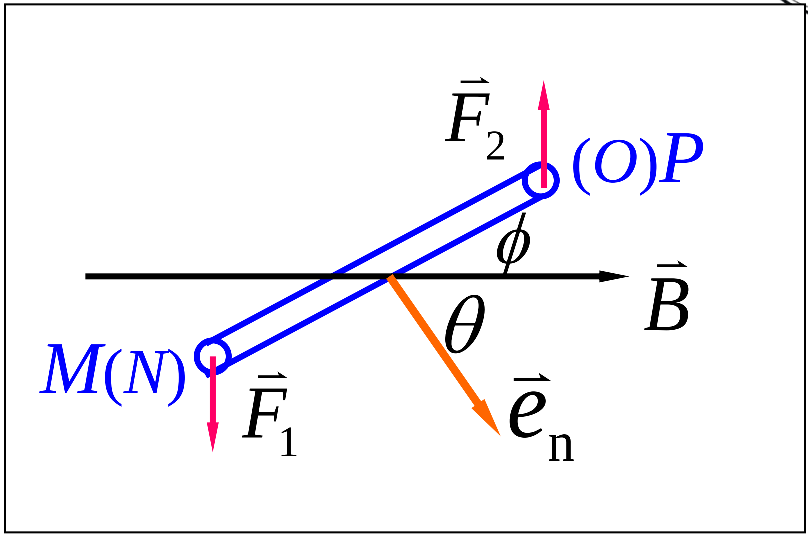




$$M = F\frac{l_1}{2}\sin\theta + F\frac{l_1}{2}\sin\theta = BIl_2l_1\sin\theta = BIS\sin\theta = P_mB\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{S}\times\vec{B} = \vec{P}_m\times\vec{B}}$$

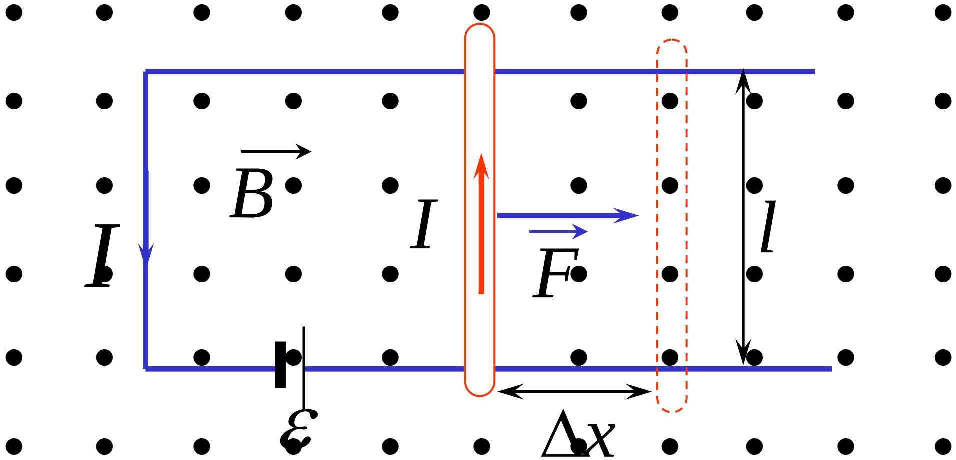




$$MN = l_2 \quad NO = l_1 \qquad M = F_1 l_1 \sin\theta = BIl_2 l_1 \sin\theta$$

$$M = BIS\sin\theta \qquad \vec{M} = \boxed{IS\vec{e}_n} \times \vec{B} = \boxed{\vec{m}} \times \vec{B}$$

线圈有N匝时 $\vec{M} = NIS\vec{e}_n \times \vec{B}$



$$F = IlB$$

$$A = F\Delta x = IlB\Delta x$$

$$= IB\Delta S = I\Delta\phi_m$$

$$dA = -Md\theta = -IBS\sin\theta$$

$$A = \int -IBS\sin\theta d\theta = \int I\, d\left(BS\cos\theta\right) = \int I\, d\varphi_m = I\left(\varphi_m - \varphi_{m0}\right)$$

$$= I\Delta\varphi$$

安培力的功等于电流强度与磁通量变化的积。

可以证明：

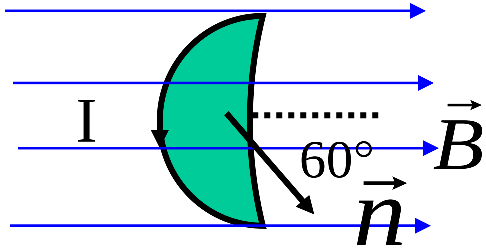
1.均匀磁场且I稳定：$A = I\Delta\varphi$

2.任何情况下：$A = \int Id\varphi$

【例 18】一半径为R的半圆形闭合线圈通有电流I，线圈放在均匀外磁场B中,B的方向与线圈平面成30°角，设线圈有N匝。问

（1）线圈的磁矩是多少?

（2）此时线圈所受力矩的大小和方向?



（3）线圈从图示位置转到平衡位置时，磁力矩做的功是多少?

解:(1) $\vec{P}_m = NIS\vec{n}$

大小：$P_m = NI\dfrac{\pi}{2}R^2$

方向与B成60^0角

（2） $\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}$

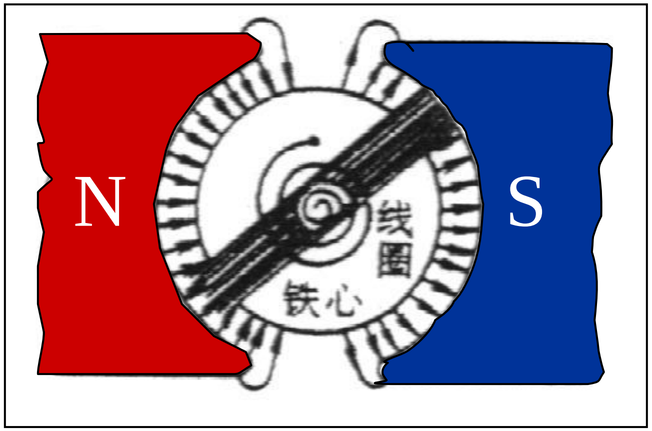
大小：$M = P_m B\sin\theta = NIB\dfrac{\sqrt{3}}{4}\pi R^2$

方向垂直B的方向向上

（3） $A = NI\Delta\phi = NI(B\dfrac{\pi}{2}R^2 - B\dfrac{\pi}{2}R^2\cos 60^0) = NIB\dfrac{\pi}{4}R^2$

二、磁电式电流计原理

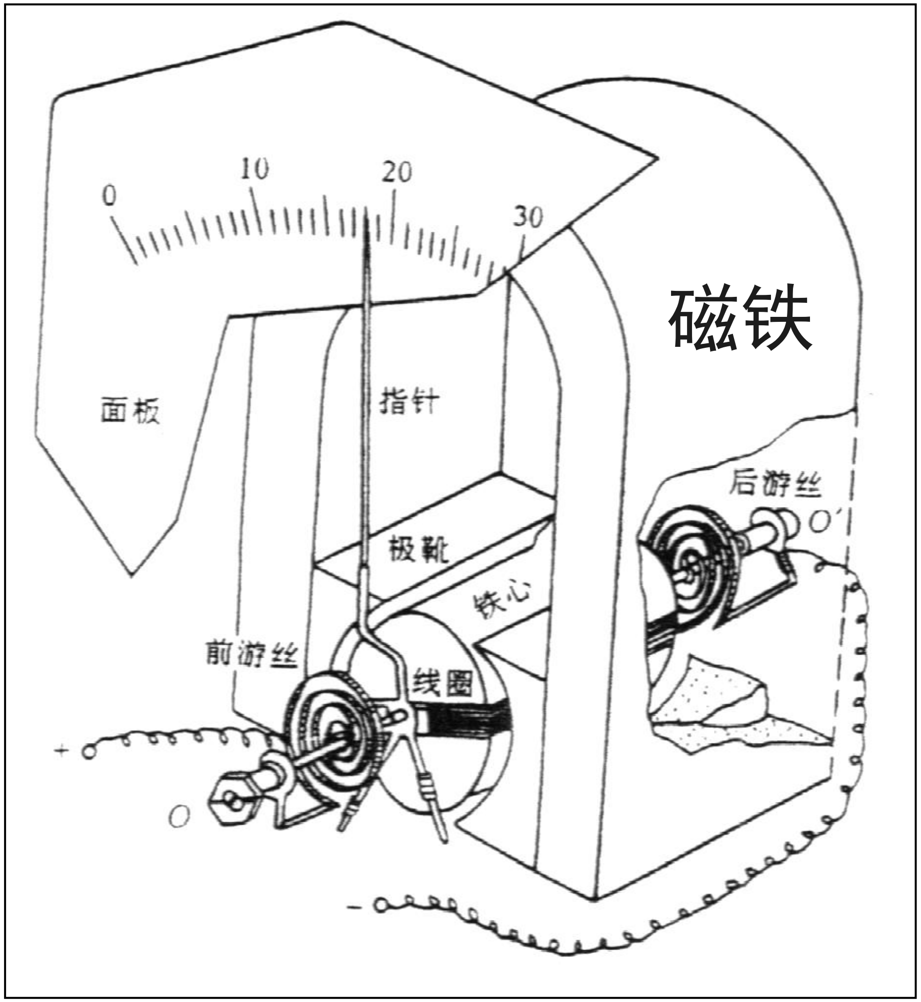
实验测定：游丝的反抗力矩与线圈转过的角度 θ 成正比.



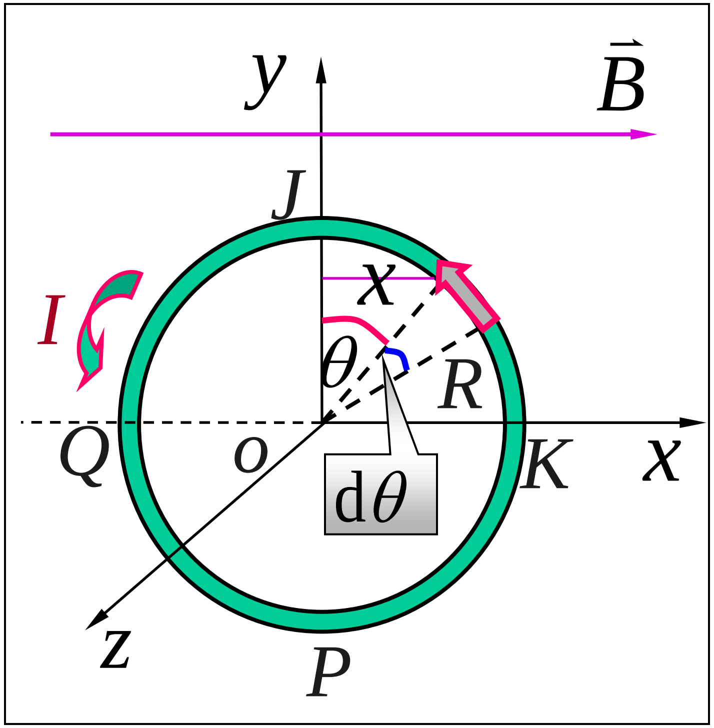
$$M' = a\theta$$

$$BNIS = a\theta$$

$$I = \frac{a}{NBS}\theta = K\theta$$



【例 20】如图半径为 0.20m，电流为 20A，可绕轴旋转的圆形载流线圈放在均匀磁场中，磁感应强度的大小为0.08T，方向沿 x 轴正向.问线圈受力情况怎样？ 线圈所受的磁力矩又为多少？



解 把线圈分为JQP和PKJ两部分

$$\vec{F}_{JQP} = BI(2R)\vec{k} = 0.64\vec{k}\,\mathrm{N}$$

$$\vec{F}_{PKJ} = -BI(2R)\vec{k} = -0.64\vec{k}\,\mathrm{N}$$

以Oy为轴,$I\mathrm{d}\vec{l}$所受磁力矩大小

$$\mathrm{d}M = x\mathrm{dF} = I\mathrm{d}lBx\sin\theta$$

$$x = R\sin\theta, \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

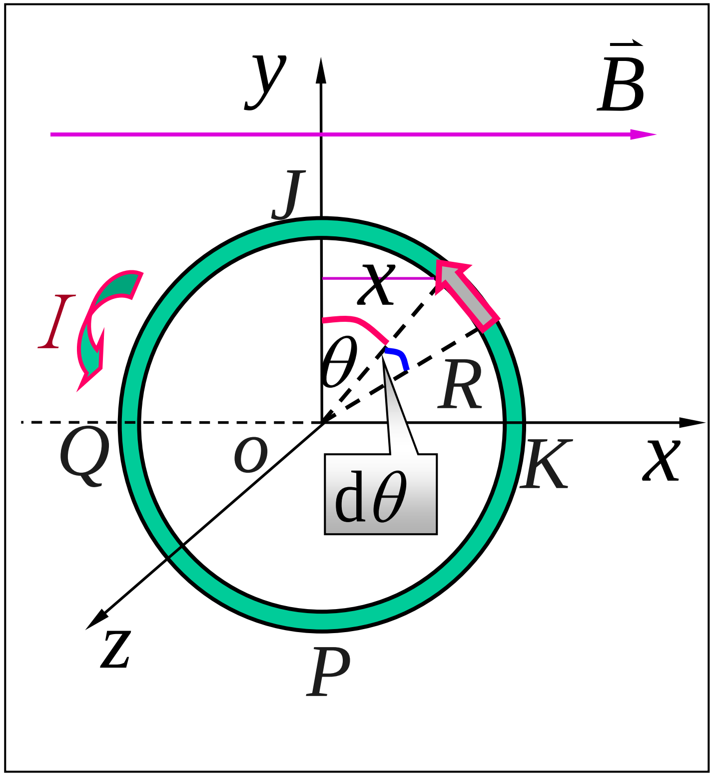
$$\mathrm{d}M = IBR^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$M = IBR^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$M = IB\pi R^2$$

$$\vec{m} = IS\vec{k} = I\pi R^2 \vec{k}$$

$$\vec{B} = B\vec{i}$$



$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = I\pi R^2 B\vec{k} \times \vec{i} = I\pi R^2 B\vec{j}$$