第十四章 图的基本概念

主要内容

- 图
- 通路与回路
- 图的连通性
- 图的矩阵表示
- 图的运算

预备知识

- 多重集合——元素可以重复出现的集合
- 无序积——$A\&B=\{\{x,y\} \mid x\in A\wedge y\in B\}$

14.1 图

定义14.1 无向图$G = <V,E>$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为**顶点**

(2) E为$V\&V$ 的多重集，其元素称为无向边，简称**边**

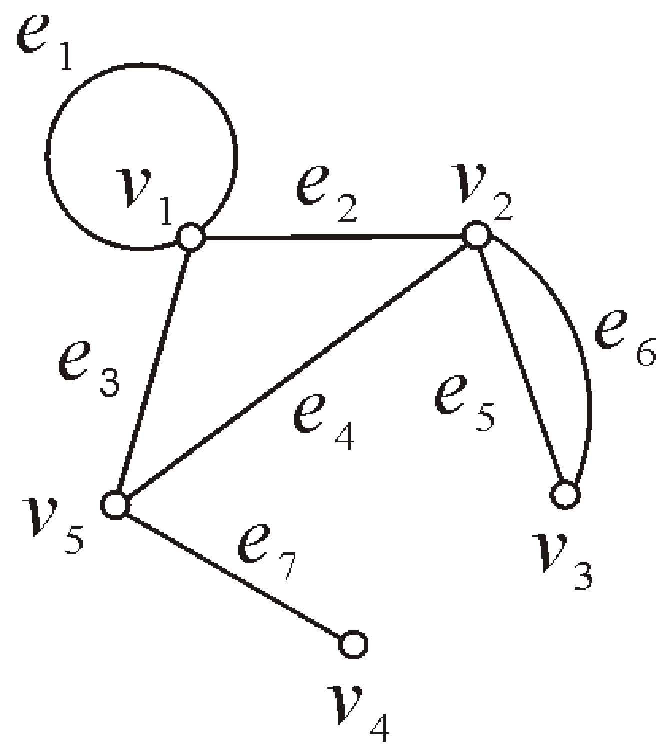
实例

设

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3),$
$(v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

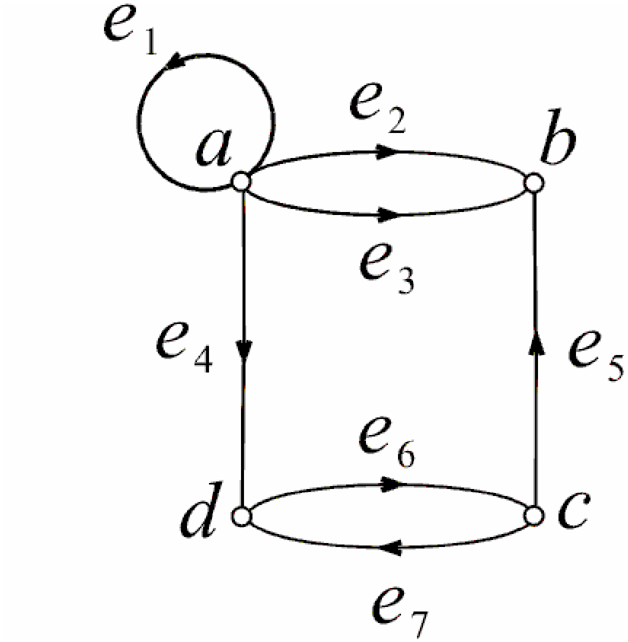
则 $G = <V,E>$为一无向图



有向图

定义14.2 有向图$D=<V,E>$, 只需注意E是$V\times V$ 的多重子集

图2表示的是一个有向图，试写出它的V 和 E



注意：图的数学定义与图形表示。

相关概念

1. 图
   ① 可用G泛指图（无向的或有向的）
   ② $V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$
   ③ n阶图
2. 有限图
3. n 阶零图与平凡图
4. 空图——$\varnothing$
5. 用 e_k 表示无向边或有向边
6. 顶点与边的关联关系
   ① 关联、关联次数
   ② 环
   ③ 孤立点
7. 顶点之间的相邻关系

相关概念

8. 邻域与关联集

① $v \in V(G)$ (G为无向图)

v的邻域 $N(v)=\{u \mid u \in V(G) \wedge (u,v) \in E(G) \wedge u \neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N}(v)=N(v) \cup \{v\}$

v 的关联集 $I(v)=\{e \mid e \in E(G) \wedge e\text{与}v\text{关联}\}$

② $v \in V(D)$ (D为有向图)

v的后继元集 $\Gamma_D^+(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle v,u \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的先驱元集 $\Gamma_D^-(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle u,v \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的邻域 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v)=N_D(v) \cup \{v\}$

9. 标定图与非标定图

10. 基图

多重图与简单图

定义14.3

(1) 无向图中的平行边及重数

(2) 有向图中的平行边及重数（注意方向性）

(3) 多重图

(4) 简单图

在定义14.3中定义的简单图是极其重要的概念

顶点的度数

定义14.4

(1) 设$G=<V,E>$为无向图, $\forall v\in V$, $d(v)$——v的度数, 简称度

(2) 设$D=<V,E>$为有向图, $\forall v\in V$,

$d^+(v)$——v的入度

$d^-(v)$——v的出度

$d(v)$——v的度或度数

(3) $\Delta(G)$, $\delta(G)$

(4) $\Delta^+(D)$, $\delta^+(D)$, $\Delta^-(D)$, $\delta^-(D)$, $\Delta(D)$, $\delta(D)$

(5) 奇顶点度与偶度顶点

握手定理

定理14.1 设$G=<V,E>$为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

证 G中每条边 (包括环) 均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m 条边共提供 $2m$ 度.

定理14.2 设$D=<V,E>$为任意有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = m$$

本定理的证明类似于定理14.1

握手定理推论

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证 设$G=\langle V,E\rangle$为任意图，令

$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)$为奇数$\}$

$V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)$为偶数$\}$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V} d(v)=\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v)$$

由于$2m$, $\sum_{v\in V_2} d(v)$ 均为偶数，所以$\sum_{v\in V_1} d(v)$ 为偶数，但因为V_1中顶点度数为奇数，所以$|V_1|$必为偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问G的阶数n为几？

解 本题的关键是应用握手定理.
设除3度与4度顶点外，还有x个顶点$v_1, v_2, \ldots, v_x$， 则

$$d(v_i) \le 2,\quad i = 1, 2, \ldots, x,$$

于是得不等式

$$32 \le 24 + 2x$$

得 $x \ge 4$, 阶数 $n \ge 4+4+3=11$.

图的度数列

1 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为无向图$G$的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集，

D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的入度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的出度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

3. 非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$在什么条件下是可图化的，是可简单图化的？

定理14.4 p277

易知：(2, 4, 6, 8, 10)，(1, 3, 3, 3, 4) 是可图化的，后者又是可简单图化的，而(2, 2, 3, 4, 5)，(3, 3, 3, 4) 都不是可简单图化的，特别是后者也不是可图化的

n 阶完全图与竞赛图

定义14.6

(1) n ($n\geq 1$) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n.

简单性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

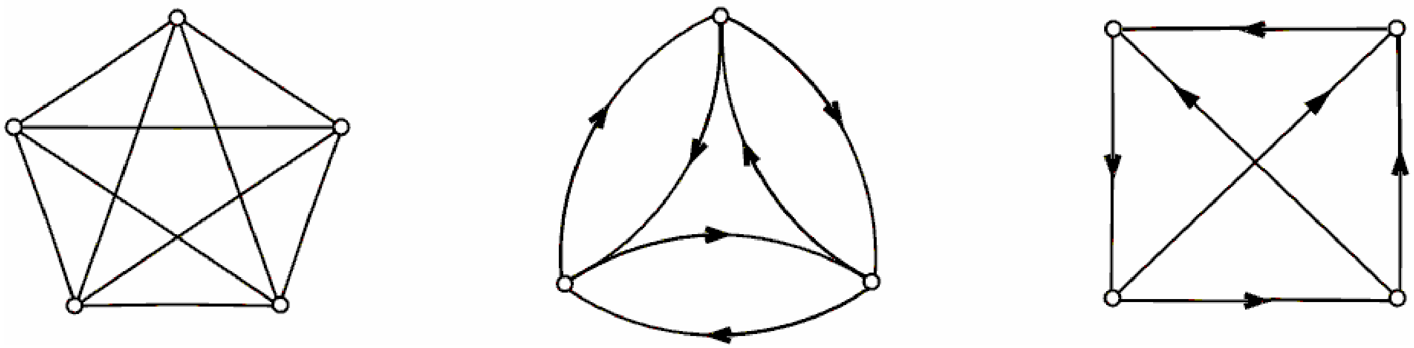
(2) n ($n\geq 1$)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

简单性质：$m=n(n-1), \Delta=\delta=2(n-1), \Delta^{+}=\delta^{+}=n-1$

(3) n ($n\geq 1$) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

简单性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

n 阶 k 正则图



(1) (2) (3)

(1)为K_5，(2)为3阶有向完全图，(3)为4阶竞赛图.

定义14.7 n 阶k正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图

简单性质：边数（由握手定理得）$m=\dfrac{nk}{2}$

n阶完全图K_n是 $n-1$正则图，

子图

定义14.8 $G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$

(1) $G' \subseteq G$ —— G'为G的子图，G为G'的母图

(2) 若$G' \subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

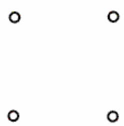
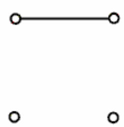
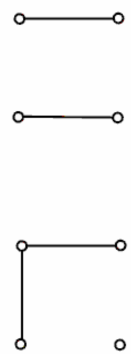
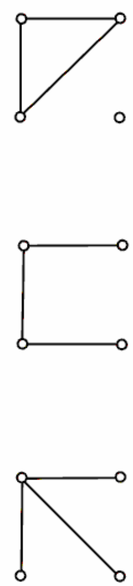
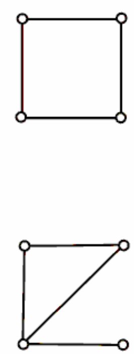
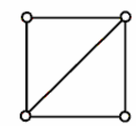
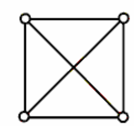
(3) 若$V' \subset V$或$E' \subset E$，称G'为G的真子图

(4) V'（$V' \subset V$且$V' \neq \varnothing$）的导出子图，记作$G[V']$

(5) E'（$E' \subset E$且$E' \neq \varnothing$）的导出子图，记作$G[E']$

实例

例2 画出K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6
							

补图

定义14.9 设$G=\langle V,E\rangle$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作$\overline{G}$.

若$G \cong \overline{G}$，则称G是自补图.

例：见书P280 图14.6

14.2 通路与回路

定义14.11 给定图G=<V,E>（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列 $\Gamma= v_0e_1v_1e_2…e_lv_l$，$v_{i-1}, v_i$ 是 e_i 的端点.

(1) 通路与回路：Γ为通路；若 $v_0=v_l$，Γ为回路，l 为回路长度.

(2) 简单通路与回路：所有边各异，Γ为简单通路，又若$v_0=v_l$，Γ为简单回路

(3) 初级通路(路径)与初级回路(圈)：Γ中所有顶点各异，则称Γ为初级通路(路径)，又若除$v_0=v_l$，所有的顶点各不相同且所有的边各异，则称Γ为初级回路(圈)

(4) 复杂通路与回路：有边重复出现

几点说明

表示法

① 定义表示法

② 只用边表示法

③ 只用顶点表示法（在简单图中）

④ 混合表示法

环（长为1的圈）的长度为1，两条平行边构成的圈长度为2，无向简单图中，圈长≥3，有向简单图中圈的长度≥2.

不同的圈（以长度≥3的为例）

通路与回路的长度

定理14.5 在n 阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到 v_j存在长度小于或等于$n-1$ 的通路.

推论 在 n 阶图G中，若从顶点v_i 到 v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i 到v_j存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）.

定理14.6 在一个n 阶图G中，若存在 v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于 n 的回路.

推论 在一个n 阶图G中，若存在 v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于n 的初级回路.

14.3 图的连通性

无向图的连通性

(1) 顶点之间的连通关系：$G=<V,E>$为无向图

① 若 v_i 与 v_j 之间有通路，则 $v_i \sim v_j$

② ~是V上的等价关系 $R=\{<u,v> \mid u,v \in V且u \sim v\}$

(2) G的连通性与连通分支

① 若$\forall u,v \in V$，$u \sim v$，则称G连通

② $\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$，称$G[V_1], G[V_2], \ldots,G[V_k]$为连通分支，其个数 $p(G)=k$ ($k \geq 1$)；

$k=1$，G连通

短程线与距离

(3) 短程线与距离

① u与v之间的短程线：u~v，u与v之间长度最短的通路

② u与v之间的距离：$d(u,v)$——短程线的长度

③ $d(u,v)$的性质：

$d(u,v)\geq 0$, $u \nsim v$时$d(u,v)=\infty$

$d(u,v)=d(v,u)$

$d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

无向图的连通度

1. 删除顶点及删除边

   $G-v$ ——从G中将v及关联的边去掉

   $G-V'$——从G中删除V'中所有的顶点

   $G-e$ ——将e从G中去掉

   $G-E'$——删除E'中所有边

2. 点割集与边割集

   点割集与割点 书p283

定义14.15 $G=<V,E>$, $V'\subset V$

V'为**点割集**——$p(G-V')>p(G)$且有极小性

v为**割点**——$\{v\}$为点割集

定义14.16 $G=<V,E>$, $E'\subseteq E$

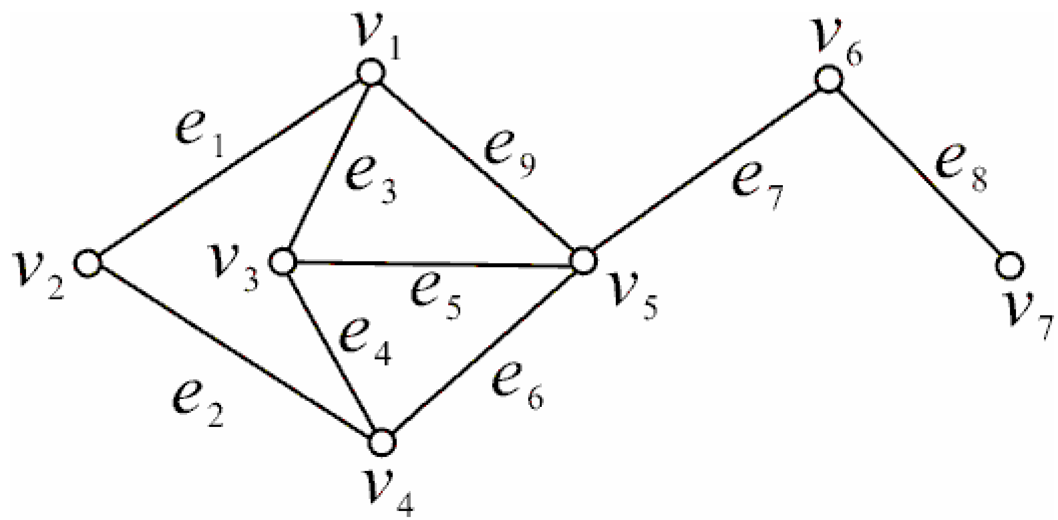
E'是**边割集**——$p(G-E')>p(G)$且有极小性

e是**割边**（桥）——$\{e\}$为边割集

点割集与割点

例3 $\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点. $\{v_2,v_5\}$是点割集吗？

$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$ 是边割集吗？



几点说明：

- K_n中无点割集，N_n中既无点割集，也无边割集，其中N_n为n 阶零图.
- 若G 连通，E'为边割集，则 $p(G-E')=2$，V'为点割集，则 $p(G-V')\geq 2$

点连通度与边连通度

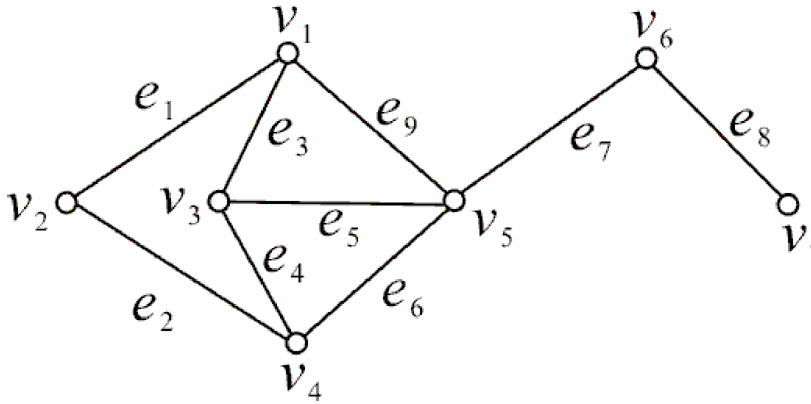
定义14.18 G为连通非完全图

点连通度— $\kappa(G) = \min\{ |V'| \mid V'\text{为点割集} \}$

规定 $\kappa(K_n) = n-1$

若G非连通，$\kappa(G) = 0$

若 $\kappa(G) \geq k$，则称G为 k-连通图



定义14.19 设G为连通图

边连通度——$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E'\text{为边割集}\}$

若G非连通，则$\lambda(G) = 0$

若$\lambda(G) \geq r$，则称G是 r 边-连通图

图中，$\kappa=\lambda=1$，它是 1-连通图 和 1边-连通图

有向图的连通性

定义14.20 $D=<V,E>$为有向图

$v_i \to v_j$（v_i 可达 v_j）——v_i到v_j有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$（v_i与v_j相互可达）

性质

$\to$ 具有自反性($v_i \to v_i$)、传递性

$\leftrightarrow$ 具有自反性、对称性、传递性

v_i到v_j的短程线与距离

类似于无向图中，只需注意距离表示法的不同

(无向图中$d(v_i,v_j)$，有向图中$d<v_i,v_j>$) 及 $d<v_i,v_j>$无对称性

有向图的连通性及分类

定义14.22 $D=<V,E>$为有向图

D弱连通(连通)——基图为无向连通图

D单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j$ 或 $v_j\to v_i$

D强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

易知，强连通⇒单向连通⇒弱连通

判别法

定理14.8 D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理14.9 D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

二部图

定义14.23 设 $G=<V,E>$为一个无向图，若能将 V分成 V_1和V_2 ($V_1 \cup V_2=V$，$V_1 \cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集，常将二部图G记为$<V_1,V_2,E>$.

又若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.

注意，n 阶零图为二部图.

14.4 图的矩阵表示

无向图的关联矩阵（对图无限制） P288

定义14.24 无向图G=<V,E>，|V|=n，|E|=m，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j 的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.

性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵

有向图的关联矩阵（无环有向图）P288

定义14.25 有向图$D=\langle V,E\rangle$，令
则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的**关联矩阵**，记为$M(D)$.

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^{-}(v_i),\quad \sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=d^{+}(v_i),\quad i=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij}=0$

(4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵（无限制）

定义14.26 设有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数，称为D的**邻接矩阵**，记作$A(D)$，或简记为A.

性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\quad i=1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j),\quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---- D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---- D中长度为1的回路数

邻接矩阵的应用

定理14.11 设 A为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$（$l\geq1$），则

B_l中元素 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的通路数.

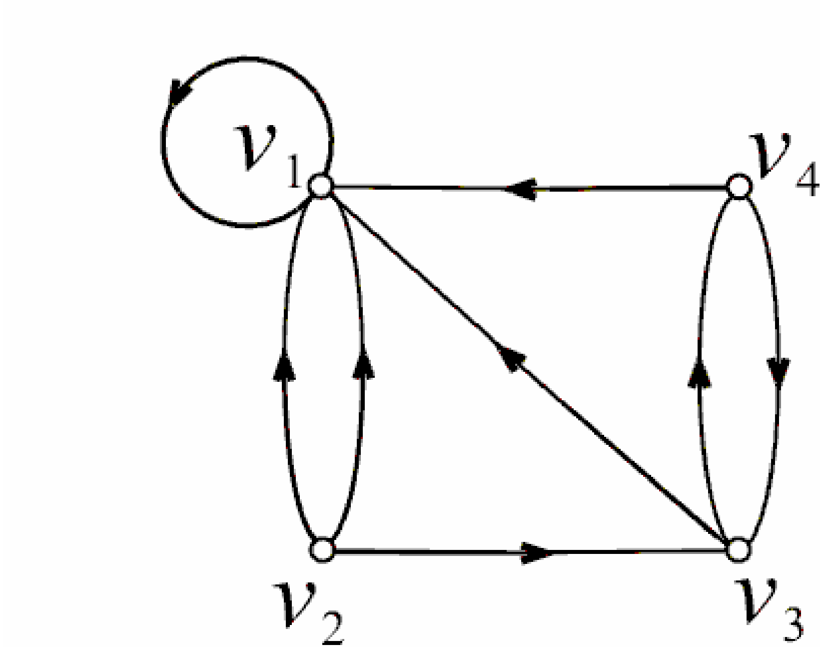
$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的回路数

实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A_2, A_3, A_4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



实例求解

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条.

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

有向图的可达矩阵（无限制）

定义14.27 设$D=<V,E>$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

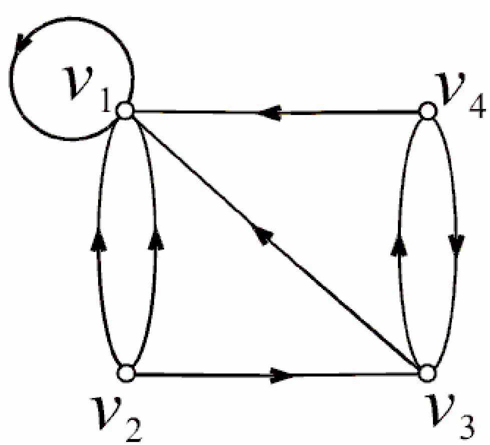
$$p_{ij}=\begin{cases} 0, & v_i\text{可达}v_j \\ 1, & \text{否则} \end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由于$\forall v_i\in V$，$v_i\leftrightarrow v_i$，所以$P(D)$主对角线上的元素全为1.

由定义不难看出, D 强连通当且仅当 $P(D)$为全1矩阵.

下图所示有向图 D 的可达矩阵为



$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

第十四章 习题课

主要内容

- 无向图、有向图、关联与相邻、简单图、完全图、正则图、子图、补图；握手定理与推论；图的同构
- 通路与回路及其分类
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类
- 图的矩阵表示

基本要求

- 深刻理解握手定理及推论的内容并能灵活地应用它们
- 深刻理解图同构、简单图、完全图、正则图、子图、补图、二部图的概念以及它们的性质及相互之间的关系
- 记住通路与回路的定义、分类及表示法
- 深刻理解与无向图连通性、连通度有关的诸多概念
- 会判别有向图连通性的类型
- 熟练掌握用邻接矩阵及其幂求有向图中通路与回路数的方法，会求可达矩阵

练习1

1．9阶无向图G中，每个顶点的度数不是5就是6. 证明G中至少有5个6度顶点或至少有6个5度顶点.

证　关键是利用握手定理的推论.

方法一：穷举法

设G中有x个5度顶点，则必有$(9-x)$个6度顶点，由握手定理推论可知，$(x,9-x)$只有5种可能：(0,9), (2,7), (4,5), (6,3), (8,1）它们都满足要求.

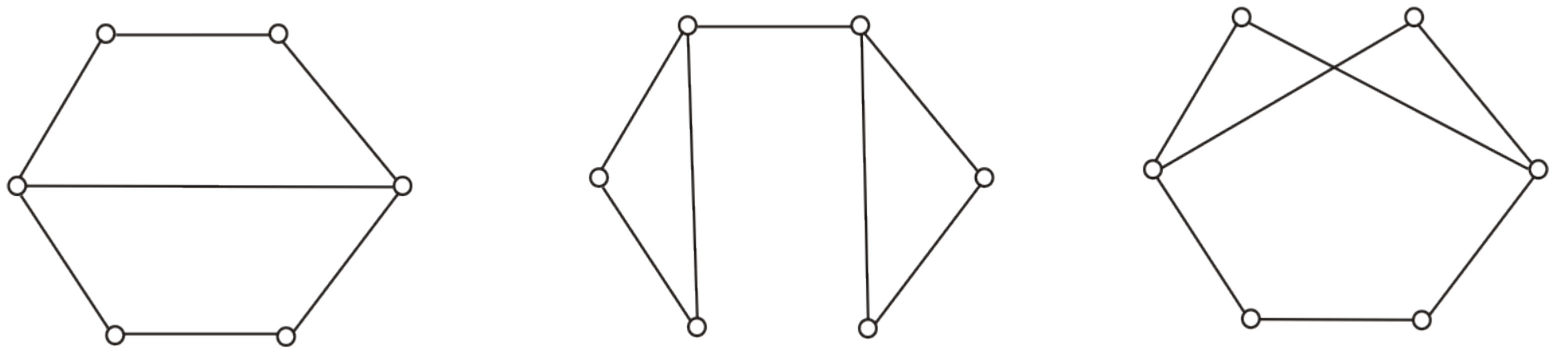
方法二：反证法

否则，由握手定理推论可知，“G至多有4个5度顶点并且至多有4个6度顶点”，这与G是 9 阶图矛盾.

练习2

2．数组2, 2, 2, 2, 3, 3能简单图化吗？若能，画出尽可能多图来.

只要能画出6 阶无向简单图，就说明它可简单图化. 下图的4个图都以此数列为度数列。



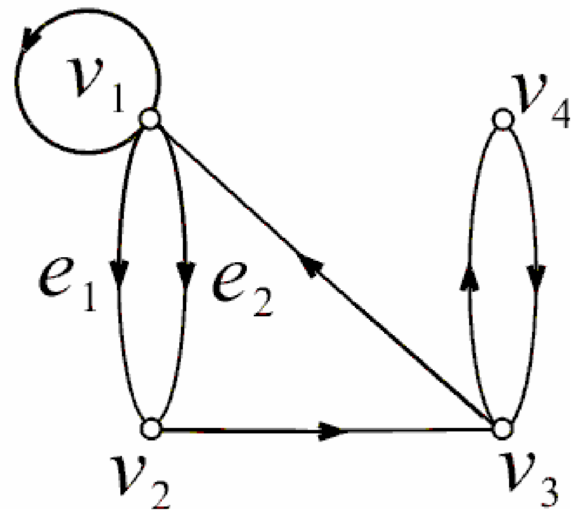
练习4

4．有向图D如图所示，回答下列诸问：

(1) D中v_1到v_4长度为1,2,3,4的通路各多少条？其中几条是非初级的简单通路？

(2) D中v_1到v_1长度为1,2,3,4的回路各多少条？讨论它们的类型.

(3) D中长度为4的通路（不含回路）有多



(4) D中长度为4的回路有多少条？

(5) D中长度≤4的通路有多少条？其中有几条是回路？

(6) 写出D的可达矩阵.

解答

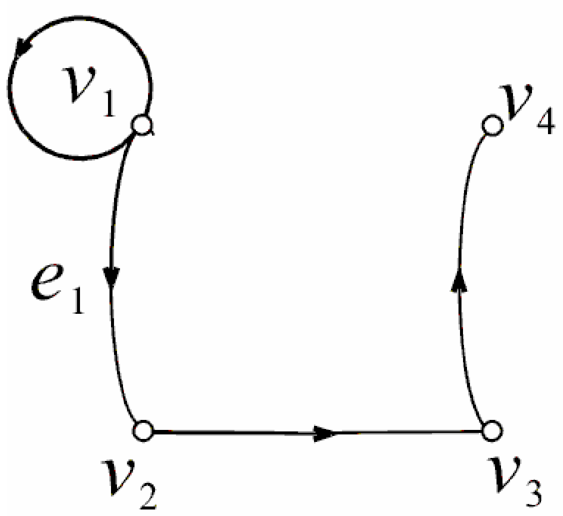
为解(1)—(6)，只需先求D的邻接矩阵的前4次幂.

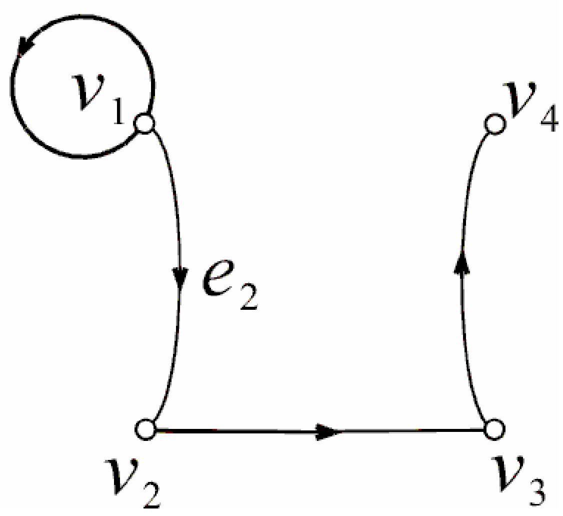
$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$$

解答

(1) v_1到v_4长度为1,2,3,4的通路数分别为0,0,2,2. 其中只有长度为4的两条是非初级的简单通路（定义意义下），见下图所示.





解答

(2) v_1到v_1长度为1,2,3,4的回路数分别为1,1,3,5. 其中长度为1的是初级的(环)；长度为2的是复杂的；长度为3的中有1条是复杂的，2条是初级的；长度为4的有1条是复杂的，有4条是非初级的简单回路. 请在图中行遍以上各回路.

(3) 长度为4的通路(不含回路)为33条.

(4) 长度为4的回路为11条.

(5) 长度≤4的通路88条，其中22条为回路.

(6) 4×4的全1矩阵.