

4-4 高斯光束的相关性质

自再现模积分方程

↓ 解析

对称共焦腔



本征函数、本征值



方形，圆形共焦腔镜面场分布， δ_D ， v_{mnq}



腔内、外行波场



高斯光束

↓ *等效

一般稳定球面镜腔

4.4.1 共焦腔中的行波场与腔内外的光场分布

✱ **腔内的光场:** 可以通过基尔霍夫衍射公式计算由镜面 M_1 上的场分布在腔内造成的行波求得，行波被反射镜 M_2 反射产生传播方向相反的另一列行波，两列行波在腔内迭加成驻波。

✱ **腔外的光场:** 则就是腔内沿一个方向传播的行波透过镜面的部分。即行波函数乘以镜面的透射率 t 。

✱ **求空间场分布的关键是:** 求出镜面场分布生成的行波在任意空间点的表达式。

4.4.1 共焦腔中的行波场与腔内外的光场分布

一、方形镜对称共焦腔的行波场 — 厄米-高斯光束

1、推导方法

菲涅耳—基尔霍夫
衍射积分公式

镜面上的场  腔内、外任一点的场

$$V(x, y, z) = \frac{ik}{4\pi} \iint_{s_1} V(x_1, y_1) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} (1 + \cos \theta) ds_1$$



坐标原点设在腔中心

$$V_{mn}(x, y) = C_{mn} H_m \left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}} x \right) H_n \left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}} y \right) e^{-\frac{x^2 + y^2}{(L\lambda/\pi)}}$$

2、腔中的场分布——由镜面 M_1 上的场分布在腔内造成的行波求得

定义 $\zeta = 2z/L$ 得腔中场分布

$$u_{mn}(x, y, z) = C_{mn} H_m \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} x \right) H_n \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} y \right) \cdot \exp \left(-\frac{2}{1+\zeta^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{w_s^2} \right) \exp(-i\phi(x, y, z))$$

上式表示 TEM_{mn} 模在腔内任意点 (x, y, z) 处的电场强度。其中, 实部代表振幅, 虚部代表相位

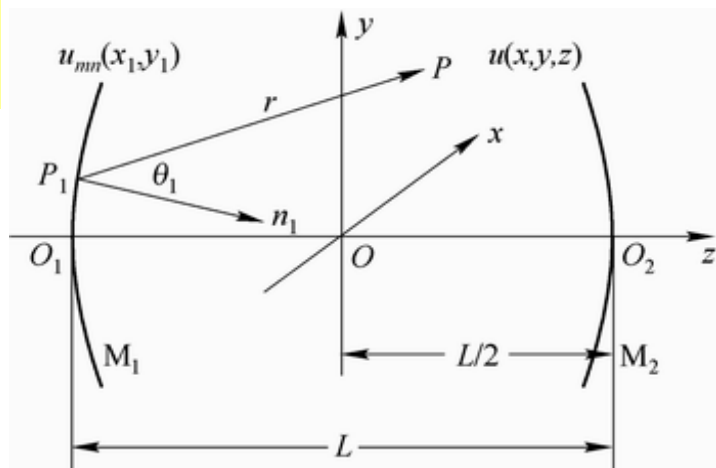


图3-7 计算腔内外光场分布的示意图

$$u_{mn}(x, y, z) = C_{mn} H_m \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} x \right) H_n \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} y \right) \cdot \exp \left(-\frac{2}{1+\zeta^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{w_s^2} \right) \exp(-i\phi(x, y, z))$$

$$\phi(x, y, z) = k \left[\frac{L}{2} (1+\zeta) + \frac{\zeta}{1+\zeta^2} \frac{x^2 + y^2}{L} \right] - (m+n+1) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

$$\varphi = \arctg \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \arctg \frac{L-2z}{L+2z}$$

描述了波阵面上的相位分布，称为相位因子

(1) H_m , H_n —— m 阶、 n 阶厄米多项式,确定了场在 x 、 y 方向的大小及节线数目

H_m : 有 m 个零点, x 方向有 m 条节线;

H_n : 有 n 个零点, y 方向有 n 条节线.

(2) $\exp[-\frac{2}{1+\zeta^2} \frac{x^2 + y^2}{w_s^2}]$ 高斯函数, 随 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 增大而变小,

确定了场的收敛性(集中于 z 轴附近).

3、腔外的场分布

考虑到镜的适当透过率后, $u_{mn}(x, y, z)$ 也适用于腔外的场。

4.4.2 高斯光束的振幅和强度分布

一、共焦腔内或腔外的一点的行波场的解析式：

$$u_{mn}(x, y, z) = C_{mn} H_m \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} x \right) H_n \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} y \right) \cdot \exp \left(-\frac{2}{1+\zeta^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{w_s^2} \right) \exp(-i\phi(x, y, z))$$

1 $H_m \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} x \right) H_n \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} y \right) \cdot \exp \left(-\frac{2}{1+\zeta^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{w_s^2} \right)$ 行波场横向振幅分布因子

—厄米—高斯函数

在横截面内的场振幅分布按高斯函数所描述的规律从中心(即传输轴线)向外平滑地降落。

花样：沿x方向有m条节线，沿y方向有n条节线。

2 $\exp(-i\phi(x, y, z))$ ：位相因子，决定了共焦腔的位相分布

$$u_{mn}(x, y, z) = C_{mn} H_m \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} x \right) H_n \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} y \right) \cdot \exp \left(-\frac{2}{1+\zeta^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{w_s^2} \right) \exp(-i\phi(x, y, z))$$

二、振幅分布和光斑尺寸

1、振幅分布

对基横模 TEM_{00}

$$U_{00} = C_{mn} \exp \left(\frac{-2}{1+\zeta^2} \frac{x^2 + y^2}{\omega_s^2} \right)$$

——基模截面是高斯函数

基横模 TEM_{00} 的光强

$$I_{00} = U_{00}^2 = C_{mn}^2 \exp \left(\frac{-4}{1+\zeta^2} \frac{x^2 + y^2}{\omega_s^2} \right)$$

$m=0, n=0$ 的一项是由镜面场分布的基横模衍射生成的基横模行波场分布，通常称为 TEM_{00} 行波。基横模行波场是上式最简单的一项，也是激光器输出最重要的一部分。基横模行波输出在与光束前进方向的垂直平面上的强度呈高斯型分布，通常称为**高斯光束**。高斯光束体现出激光光束与普通光源发出的光束不同的基本特点，对激光的应用有极其重要的意义。**研究高斯光束的场分布及传输和变换特性，对于与激光束变换有关的光学系统的设计，以及光学谐振腔的工程设计很重要。**

2、光斑尺寸振幅下降为**最大值** $1/e$ 时的光斑半径

$$\omega(z) = \frac{\omega_s}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \zeta^2} = \frac{\omega_s}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{4z^2}{L^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega(z) &= \frac{\omega_s}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \zeta^2} = \frac{\omega_s}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{4z^2}{L^2}} \\ \omega_s &= \sqrt{x_s^2 + y_s^2} = \sqrt{\lambda L / \pi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega(z) = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi} \left[1 + \left(\frac{2z}{L} \right)^2 \right]}$$

光斑尺寸

高斯光束的“光腰”或“束腰”

①当 $z=0$ 时, $\omega(z)$ 达到最小值

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}}$$

——高斯光束的基模腰斑半径(腰粗)

②当 $z = \pm f = \pm \frac{L}{2}$ 时, 即在镜面上时, 有:

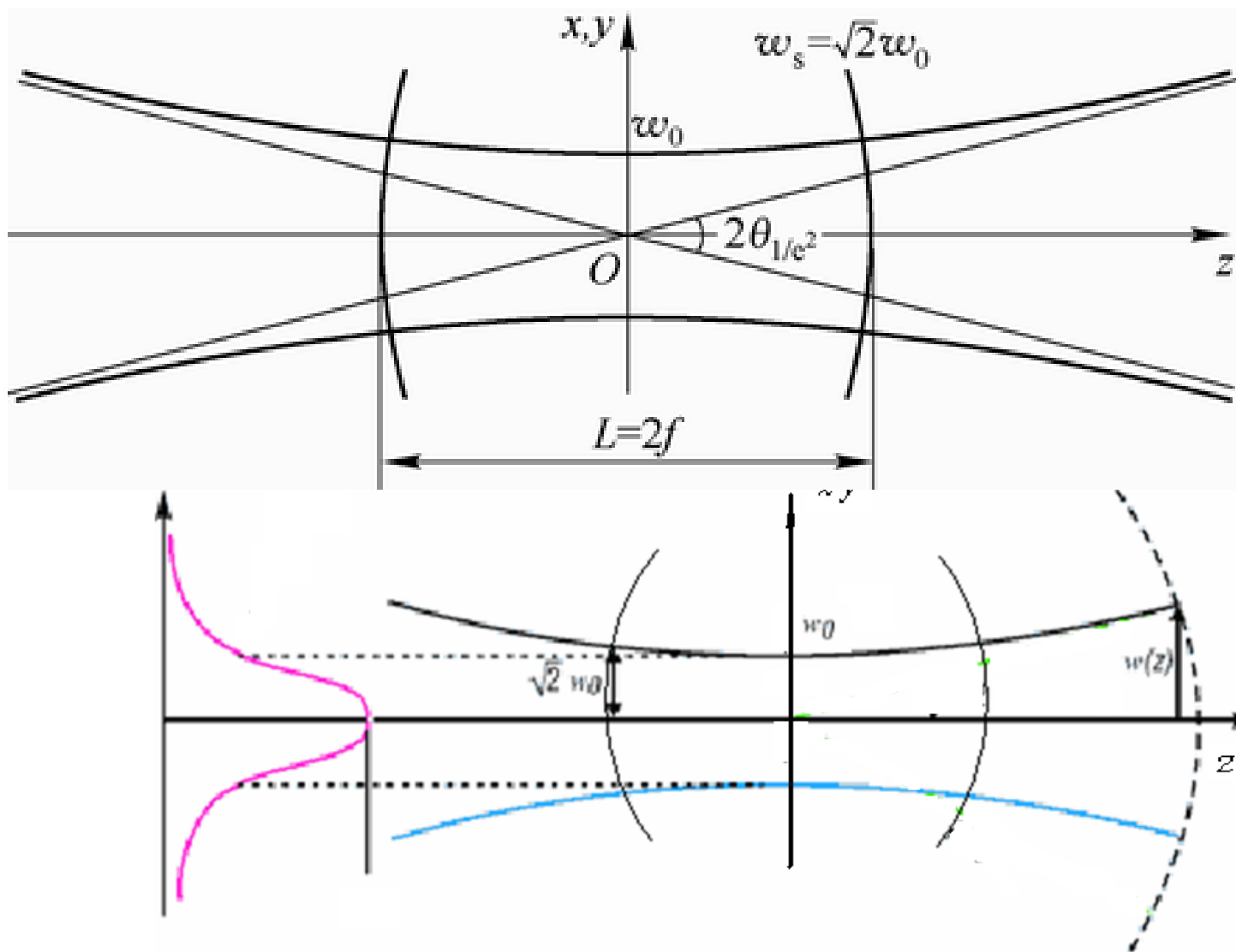
$$\omega(z) = \sqrt{2} \omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}}$$

3、 $\omega(z)$ 在纵截面上的表达式

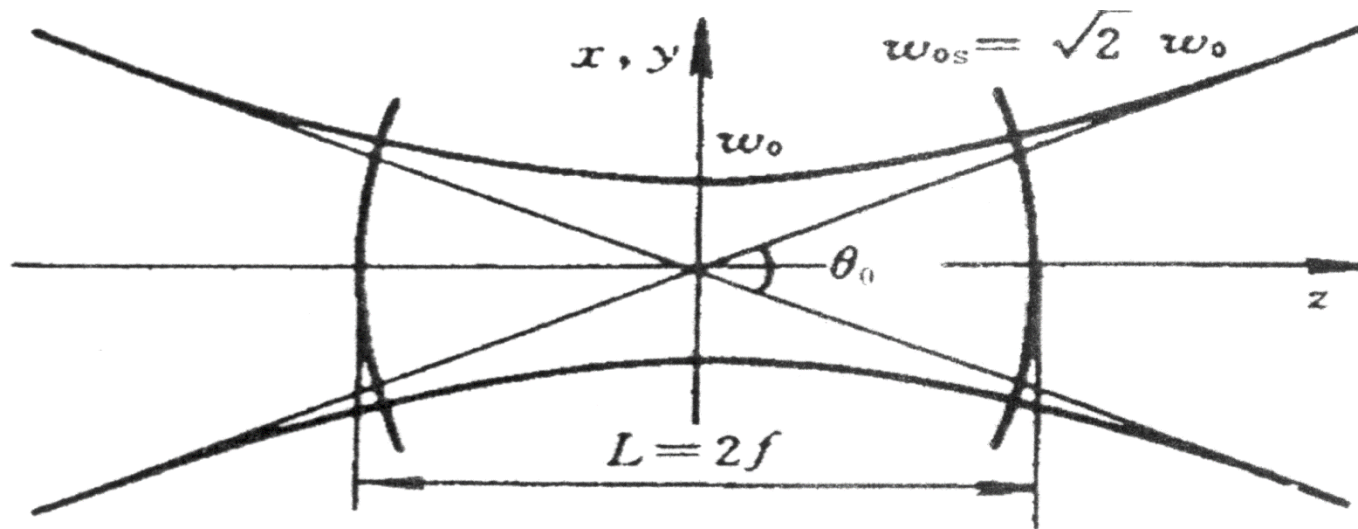
$$\left. \begin{aligned} \omega(z) &= \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi} \left[1 + \left(\frac{2z}{L} \right)^2 \right]} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2} \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{z^2}{(\pi \omega_0^2 / \lambda)^2} = 1$$

双曲线方程

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{z^2}{(\pi\omega_0^2/\lambda)^2} = 1$$



图(3-8) 基模光斑半径随 z 按双曲线规律的变化



共焦腔

$$\left(f = \frac{L}{2} \right)$$

光斑尺寸 $\omega(z) = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi} \left[1 + \left(\frac{2z}{L} \right)^2 \right]}$

腰斑尺寸 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}}$

镜面上 $\omega(\pm f) = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi} \left[1 + \left(\frac{2f}{L} \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}}$

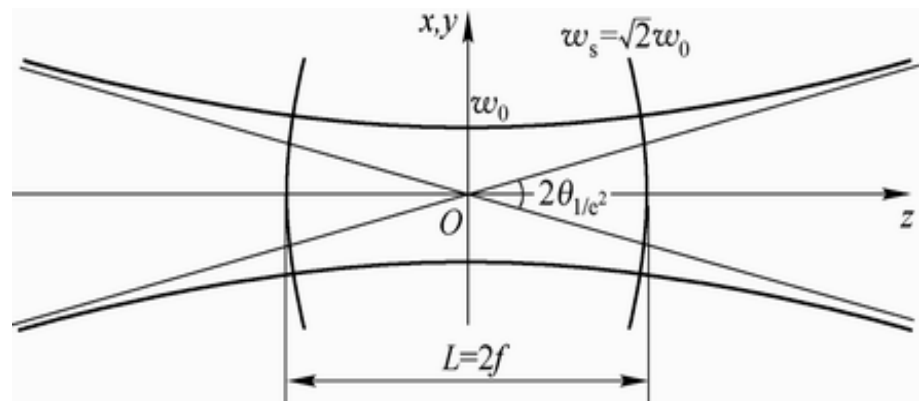
三、模体积

1、定义：描述某一腔模在腔内扩展的空间体积。

2、意义：模体积大。对激活介质能量的提取就大，对模式振荡作贡献的粒子数越多，就有可能获得大的输出功率。

3、对称共焦腔基模的模体积：看成底半径为 ω_0 ，高为 L 的圆柱体。

$$\begin{aligned} \text{高阶模: } V_{mn}^0 &= \frac{1}{2} L \pi \omega_{ms} \omega_{ns} = \sqrt{(2m+1) \cdot (2n+1)} \frac{\lambda L^2}{2} \\ &= \sqrt{(2m+1) \cdot (2n+1)} V_{00}^0 \end{aligned}$$



图(3-8) 基模光斑半径随 z 按双曲线规律的变化

决定一个模式能否振荡，能获得多大的输出功率，与其它模式的竞争情况等。

$$V_{00}^0 = \frac{1}{2} L \pi \omega_{0s}^2 = \frac{L^2 \lambda}{2}$$

4.4.3 高斯光束的相位分布

共焦腔内或腔外的一点的行波场的解析式：

$$u_{mn}(x, y, z) = C_{mn} H_m \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} x \right) H_n \left(\sqrt{\frac{2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{w_s} y \right) \cdot \exp \left(-\frac{2}{1+\zeta^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{w_s^2} \right) \exp(-i\phi(x, y, z))$$

相位因子

位相弯曲因子

传播因子

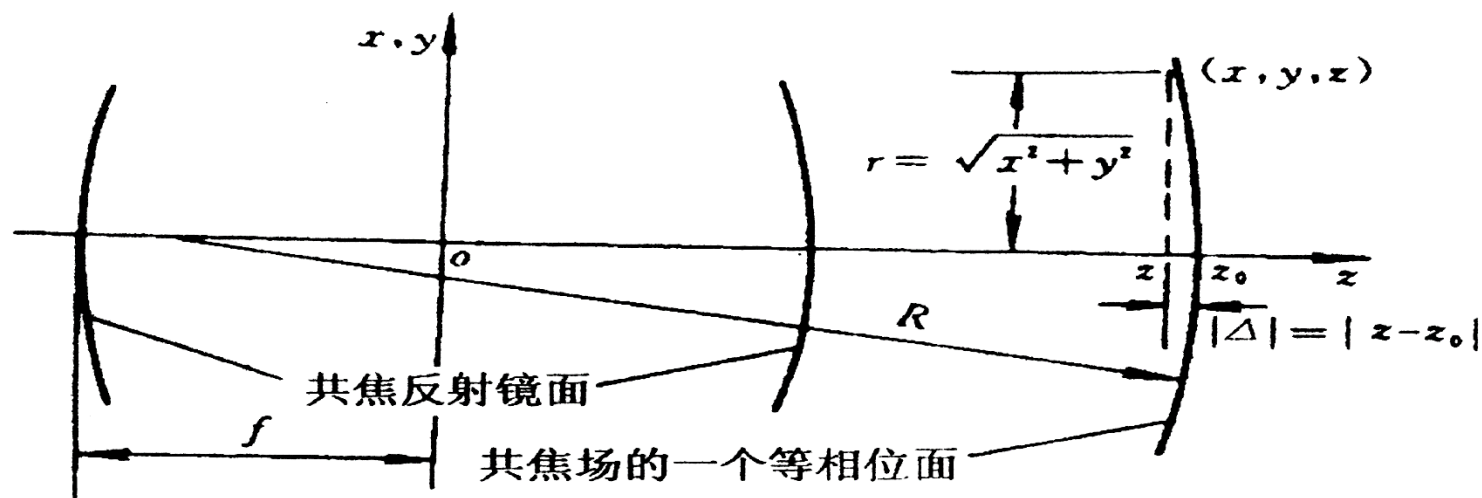
附加相移因子

$$\phi(x, y, z) = k \left[\frac{L}{2} \left(1 + \frac{2z}{L} \right) + \frac{2z/L}{1 + (2z/L)^2} \frac{x^2 + y^2}{L} \right] + (m + n + 1) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

——决定了共焦场的位相分布

$$\varphi = \arctan \frac{L - 2z}{L + 2z}$$

一、等相位面的分布



1. $\phi(x, y, z)$ 随坐标而变化, 与腔的轴线相交于 z_0 点的等相位面的方程为

$$\phi(x, y, z) = k \left[\frac{L}{2}(1 + \zeta) + \frac{\zeta}{1 + \zeta^2} \frac{x^2 + y^2}{L} \right] - (m + n + 1) \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right)$$

$$\phi(x, y, z) = \phi(0, 0, z_0)$$

$$\phi(x, y, z) = k \left[\frac{L}{2} \left(1 + \frac{2z}{L} \right) + \frac{2z/L}{1 + (2z/L)^2} \frac{x^2 + y^2}{L} \right] - (m + n + 1) \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \Rightarrow$$

$$k \left[\frac{L}{2} \left(1 + \frac{2z}{L} \right) + \frac{\frac{2z}{L}}{1 + \left(\frac{2z}{L} \right)^2} \frac{x^2 + y^2}{L} \right] - \left(\frac{\pi}{2} - \phi(z) \right) = k \left[\frac{L}{2} \left(1 + \frac{2z_0}{L} \right) \right] - \left(\frac{\pi}{2} - \phi(z_0) \right)$$

一、等相位面的分布

1、等相位面——行波场中相位相同的点连成的曲面

2、与腔轴线相交于 z_0 的等相位面的方程 $\phi(x, y, z) = \phi(0, 0, z_0)$

$$\phi(x, y, z) = k \left[\frac{L}{2} \left(1 + \frac{2z}{L} \right) + \frac{2z/L}{1 + (2z/L)^2} \frac{x^2 + y^2}{L} \right] - (m + n + 1) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \phi(0, 0, z_0)$$

$$k \left[\frac{L}{2} \left(1 + \frac{2z}{L} \right) + \frac{\frac{2z}{L}}{1 + \left(\frac{2z}{L} \right)^2} \frac{x^2 + y^2}{L} \right] - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi(z) \right) = k \left[\frac{L}{2} \left(1 + \frac{2z_0}{L} \right) \right] - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi(z_0) \right)$$

若忽略由于 z 的变化而造成附加相移因子的微小变化，则在近轴情况下， z 处的等相位面方程为：

$$z - z_0 = - \frac{\frac{2z}{L}}{1 + \left(\frac{2z}{L} \right)^2} \frac{x^2 + y^2}{L} \approx - \frac{\frac{2z_0}{L}}{1 + \left(\frac{2z_0}{L} \right)^2} \frac{x^2 + y^2}{L} = - \frac{x^2 + y^2}{2z_0 \left[1 + \left(\frac{L}{2z_0} \right)^2 \right]}$$

3、等相位面的特点

$$z - z_0 = -\frac{\frac{2z}{L}}{1 + \left(\frac{2z}{L}\right)^2} \frac{x^2 + y^2}{L} \approx -\frac{\frac{2z_0}{L}}{1 + \left(\frac{2z_0}{L}\right)^2} \frac{x^2 + y^2}{L} = -\frac{x^2 + y^2}{2z_0 \left[1 + \left(\frac{L}{2z_0}\right)^2\right]}$$

旋转抛物面方程

在近轴情况下，等相位面是顶点位于 z_0 的旋转抛物面，抛物面的焦距为：

$$f' = \left| \frac{z_0}{2} + \frac{f^2}{2z_0} \right|$$

令 $R_0 = z_0 \left[1 + \left(\frac{L}{2z_0}\right)^2\right]$ ，则有：

近轴区域

$$z - z_0 = -\frac{x^2 + y^2}{2R_0} \approx R_0 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_0^2}} - R_0 = \sqrt{R_0^2 - (x^2 + y^2)} - R_0$$

$$R_0^2 = x^2 + y^2 + (z - z_0 + R_0)^2$$

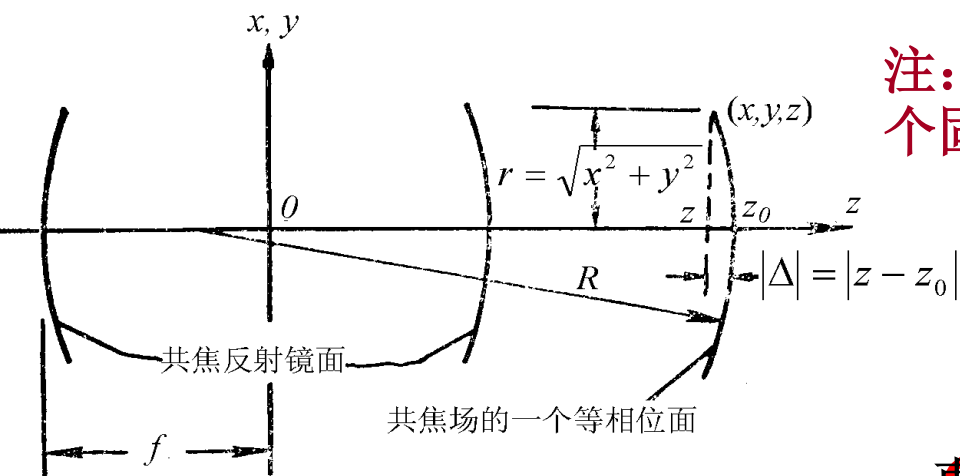
球面方程

——等位相面在近轴区域可看成半径为 R_0 的球面

在近轴情况下，共焦场的在 z_0 处的等相位面近似为球面，其曲率半径为 R_0 。

二.讨论

$$R_0^2 = x^2 + y^2 + (z - z_0 + R_0)^2 \quad R_0 = z_0 \left[1 + \left(\frac{L}{2z_0} \right)^2 \right] = z_0 \left[1 + \left(\frac{f}{z_0} \right)^2 \right]$$



注：高斯光束等相面的曲率中心并不是一个固定点，它要随着光束的传播而移动。

束腰处的等相位面为平面，
曲率中心在无穷远处

1.当 $z_0 = 0$ 时, $R(z_0) \rightarrow \infty$

2.当 $z_0 \rightarrow \infty$ 时, $R(z_0) \rightarrow \infty$

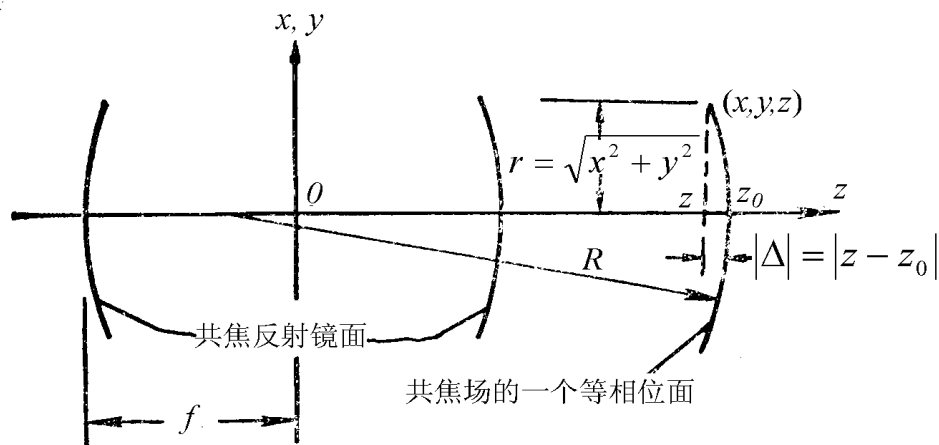
3.当 $z_0 \gg f$ 时, $R(z_0) \rightarrow z_0$

4.当 $z_0 = \pm f$ 时, $R(z_0) = L = 2f$

无穷远处等相位面为平面，
曲率中心在 $z=0$ 处

光束可近似为一个由 $z=0$ 点发出的半径为 z 的球面波。

共焦腔的反射镜面是两个等相位面，与场的两个等相位面重合，且曲率半径达到最小值。



$$R_0^2 = x^2 + y^2 + (z - z_0 + R_0)^2$$

$$R_0 = z_0 \left[1 + \left(\frac{L}{2z_0} \right)^2 \right] = z_0 \left[1 + \left(\frac{f}{z_0} \right)^2 \right]$$

$$z - z_0 = -\frac{x^2 + y^2}{2R(z)}$$

5.当 $z_0 > 0$ 时, $R(z) > 0 \Rightarrow z_0 > 0 \Rightarrow R(z_0) > 0 \Rightarrow z - z_0 < 0$

6.当 $z_0 < 0$ 时, $R(z) < 0 \Rightarrow z_0 < 0 \Rightarrow R(z_0) < 0 \Rightarrow z - z_0 > 0$

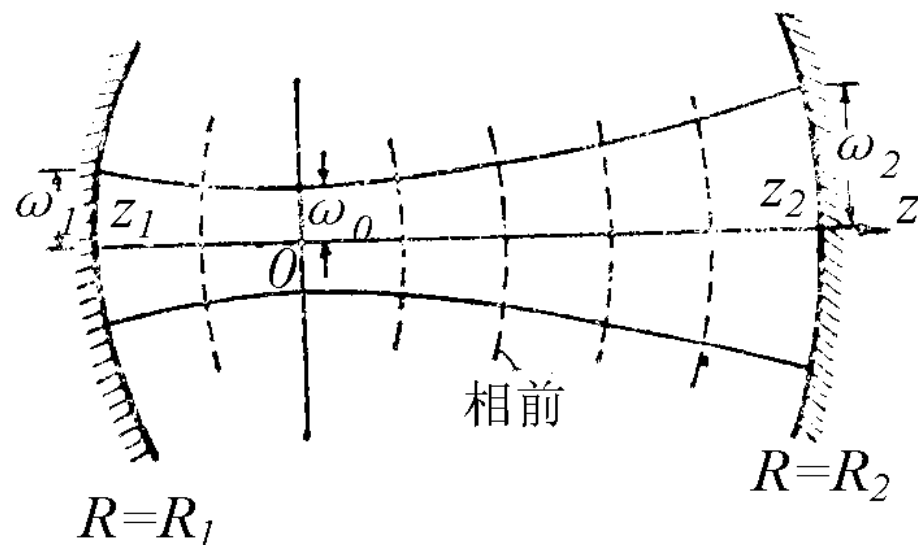
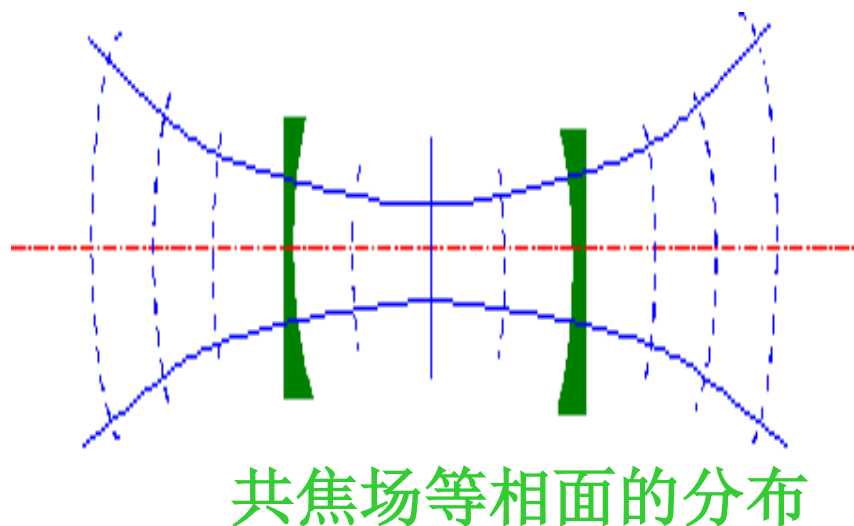
——共焦腔的等相面是凹面向着腔的中心的球面

结论:在 $z < 0$ 处, 光束是沿着 z 的方向传播的会聚球面波;

在 $z = 0$ 处变成一个平面波;

在 $z > 0$ 处又变成发散球面波。

三.共焦场的等相位面的分布图



可以证明：

如果在场的任意一个等相位面处放上一块具有相应曲率的反射镜片, 则入射在该镜片上的场将准确地沿着原入射方向返回, 这样共焦场分布将不会受到扰动, 共焦腔内场分布不会发生变化. 这是非常重要的性质.

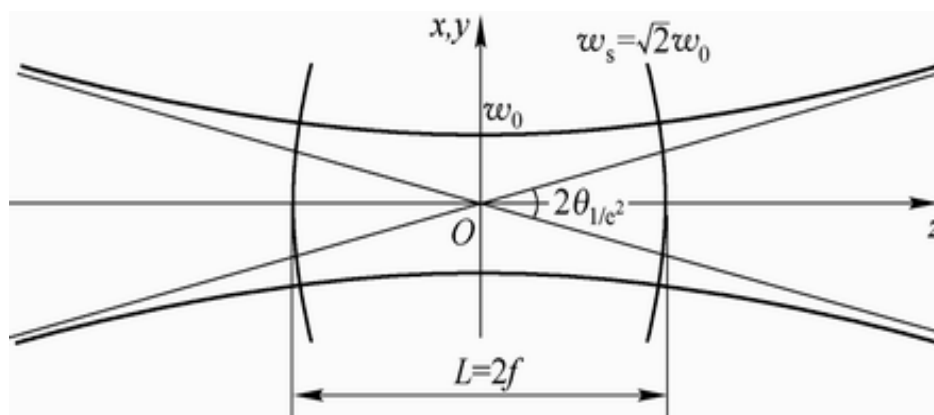
●小结：高斯光束的基本性质

1. 高斯光束在其轴线附近可看作是一种非均匀高斯球面波，
2. 在其传播过程中曲率中心不断改变
3. 其振幅在横截面内为一高斯光束
4. 强度集中在轴线及其附近
5. 等相位面保持球面

4.4.4 高斯光束的远场发散角

一、定义：

基模远场发散角 2θ ：双曲线两根渐近线之间的夹角：

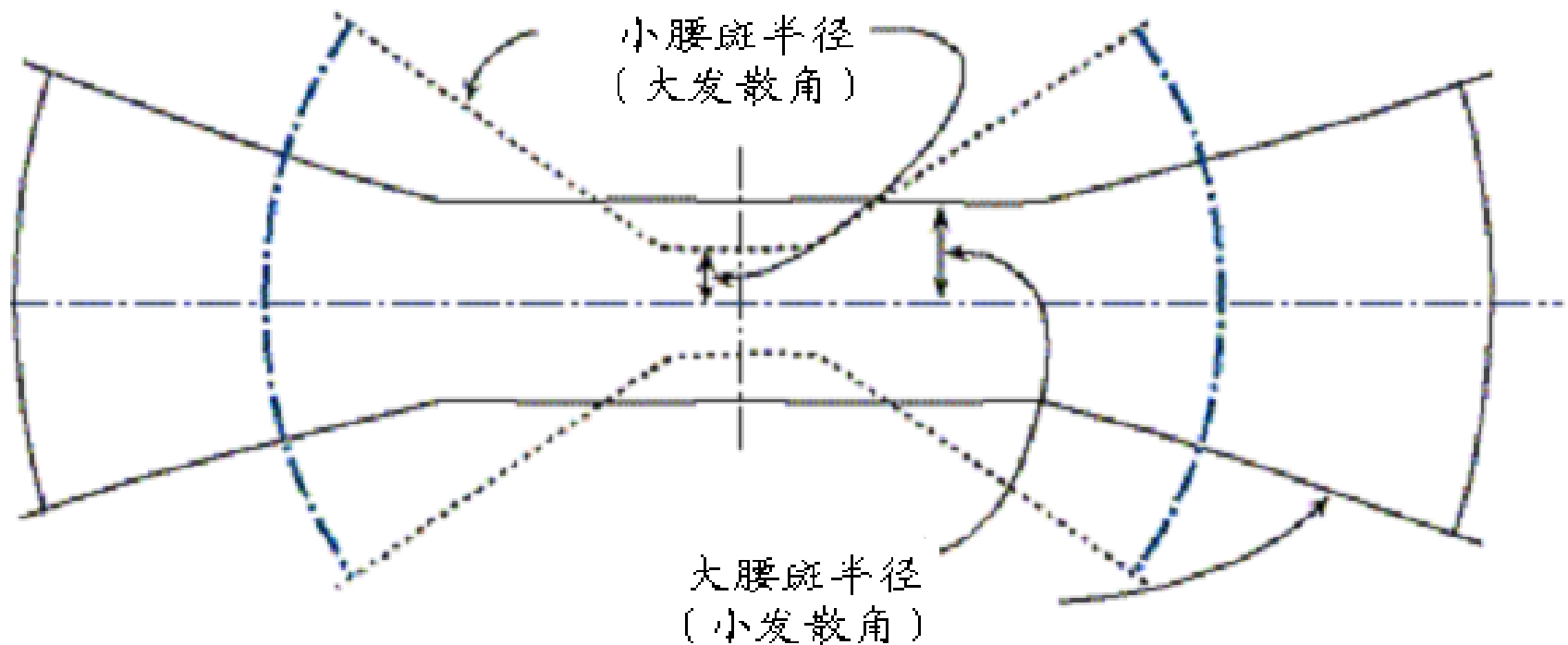


图(3-8) 基模光斑半径随 z 按双曲线规律的变化

$$\left. \begin{aligned} 2\theta &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2\omega(z)}{z} \\ \omega(z) &= \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2}\right)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\theta = 2\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi L}} = \frac{2\lambda}{\pi \omega_0}$$

高阶模的发散角随阶次的增大而增大，方向性变差！

$$2\theta = 2\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi L}} = \frac{2\lambda}{\pi\omega_0}$$



不同的腰半径的激光光束的远场发散角对比图

由波动光学知道，在单色平行光照明下，一个半径为 r 的圆孔夫琅和费衍射角 (主极大至第一极小值之间的夹角) $\theta = 0.61\lambda/r$ 。与上式相比较可知，**高斯光束半角远场发散角在数值上等于以腰斑 ω_0 为半径的光束的衍射角，即它已达到了衍射极限。**

例：某共焦腔氦氖激光器， $L=30\text{cm}$ ， $\lambda=0.638\mu\text{m}$

$$2\theta = 2\sqrt{\frac{\lambda}{f\pi}} \approx 2.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

某共焦腔二氧化碳激光器， $L=1\text{m}$ ， $\lambda=10.6\mu\text{m}$

$$2\theta \approx 5.2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

一般激光器的远场发散角都很小，约为 10^{-3} 弧度，也就是表明激光具有很好的方向性。

高阶横模的光束发散角 θ_m 和 θ_n 可以通过基模的光斑和发散角求出来：

$$2\theta_m = \sqrt{2m+1} 2\theta_0$$

$2\theta_0$ 为基模光束的发散角

$$2\theta_n = \sqrt{2n+1} 2\theta_0$$

由于高阶模的发散角是随着模的阶次的增大而增大，所以多模振荡时，光束的方向性要比单基模振荡差。

由

$$\omega_{0s} = \sqrt{2}\omega_0$$

$$V_{00}^0 = L\pi\omega_0^2$$

$$2\theta = \frac{2\lambda}{\pi\omega_0}$$

可知,镜面上的光斑尺寸,基模体积和远发散角等高斯光束的参数都可以通过基模腰斑半径(“腰粗”) ω_0 来表征,故“腰粗”是高斯光束的一个特征参数.

计算表明: 2θ 内含**86.5%**的光束总功率

4.4.5 高斯光束的高亮度

1. 亮度 B : 单位面积的发光面在其法线方向上单位立体角范围内输出出去的辐射功率。

$$B = \frac{\Delta I}{\Delta S \Delta \Omega}$$

单位: $\text{W}/(\text{cm}^2 \cdot \text{sr})$

在其他条件不变的情况下, 发射光束的立体角越小, 则亮度越高。

由于激光的远场发散角 θ 很微小,

$$\Delta \Omega = \pi(\theta R)^2 / R^2 = \pi \theta^2$$

$$\theta_{1/e^2} = 2 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\Delta \Omega = \pi \times 4 \times 10^{-6} \text{ sr}$$

2. 一般的激光器是向着数量级约为 10^{-6} sr 的立体角范围内输出激光光束的。而普通光源发光(如电灯光)是朝向空间各个可能的方向的, 它的发光立体角为 $4\pi \text{ sr}$ 。相比之下, 普通光源的发光立体角是激光的约百万倍。

数值例:

| 器件 | 辐射能量 | 脉冲时间 | P |
|-------------|------|---------------------------------|--------------------------------|
| 普通红宝石激光器 | 1J | 10^{-4}s | 10^4W |
| 调Q红宝石激光器 | 1J | 10^{-9}s | 10^9W |
| 调Q及锁模红宝石激光器 | 1J | $10^{-12}\sim 10^{-13}\text{s}$ | $10^{12}\sim 10^{13}\text{ W}$ |

*结论:输出能量一定时,激光器由于脉冲时间缩短可使 ΔI 很大;
而且因 θ (或 Ω)很小,故亮度B很大。

例：测量实验室中的一台 Ar^+ 激光器，获得如下数据：

(1) 在输出镜上光斑半径 $r \approx 0.5\text{mm}$, (2) 光束发散角 $\theta \approx 0.5 \times 10^{-3}\text{rad}$, (3) 连续输出功率 $\Delta I = 1\text{W}$, 求激光器辐射亮度。

解：输出镜面上光束截面积 $\Delta S = \pi r^2 = 7.5 \times 10^{-3}\text{cm}^2$

光束所占立体角 $\Delta \Omega = \pi \theta^2 \approx 7.5 \times 10^{-7}\text{sr}$

$$B = \frac{\Delta I}{\Delta S \Delta \Omega} \approx 2 \times 10^8 \text{W} / (\text{cm}^2 \cdot \text{sr})$$

而 $B_{\text{太阳}} = 1.2 \times 10^3 \text{W} / (\text{cm}^2 \cdot \text{sr})$

$$\frac{B_{\text{Ar}^+}}{B_{\text{太阳}}} = 10^5 \quad (\text{十万倍})$$

三. 小结一下高斯光束的主要特征参量:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}} \quad R_0 = |z| \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]$$

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2} \quad \omega_s = \sqrt{2} \omega_0 \quad 2\theta = 2\lambda / \pi \omega_0$$