

# 第二章 静力学的基本原理与方法

## 静力学的基本概念

### 1. 平衡

运动的一种特殊状态，即如果物体相对于惯性参考系(如地面)保持静止或作匀速直线运动，则称该物体处于平衡状态。

### 2. 质点 (系)

当所研究物体的运动范围远远超过它本身的几何尺寸时，它的形状对运动的影响极微小，可以将物体简化为只有质量而没有体积的几何点。

### 3. 刚体

在力的作用下，物体内部任意两质点间的距离始终保持不变的质点系。

## 4. 力系-作用在物体上的一群力

- **等效力系**：作用于某一刚体上的力系可以用另一力系代替，而不会改变刚体在原力系作用下的运动状态的二力系。
- **合力**：与一个力系等效的力。
- **分力**：力系中的各力称为合力的分力。
- **平衡力系**：作用于刚体能使该刚体保持平衡的力系。
- **力系的平衡条件**：力系成为平衡力系时应满足的充分必要条件。
- **加减平衡力系原理**：在刚体上加上或减去任意的平衡力系，并不改变原力系对刚体的运动状态。
- **刚化原理**：在力系作用下处于平衡状态的变形体如刚化成刚体，则平衡不受影响。

刚体的平衡条件对变形体而言，只是必要不充分条件。

# 第一节 力的基本性质

## 性质一：

力对物体的效应取决于力的三要素：大小、方向、作用点。

作用于物体上的力是定位矢量。

## 性质二：

作用力与反作用力同时存在，大小相等、方向相反，沿同一作用线分别作用于两个不同的物体上。

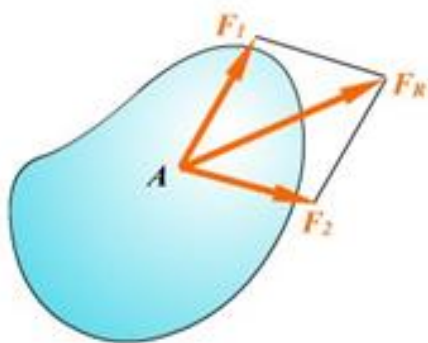
### 性质三（力的平行四边形法则）：

作用在物体上同一点的两个力，其合力仍作用于该点，合力的大小和方向由两力为边所构成的平行四边形的对角线确定。

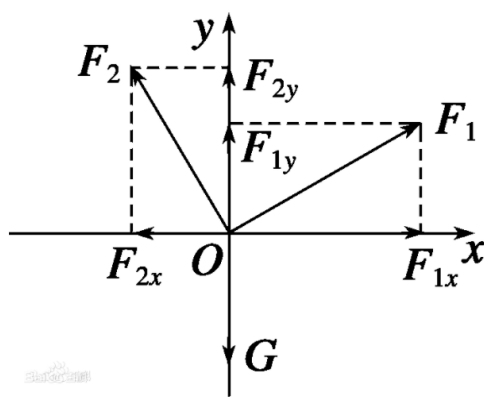
合力等于两分力的矢量和： $F_R = F_1 + F_2$

当合力矢量等于零时： $F_1 = -F_2$

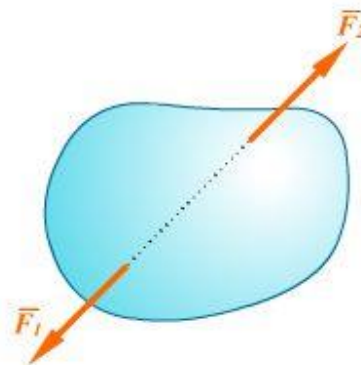
二力平衡条件----受两力作用的刚体平衡的充分必要条件是：  
两力大小相等，方向相反，沿同一作用线。



共点两个力的合力



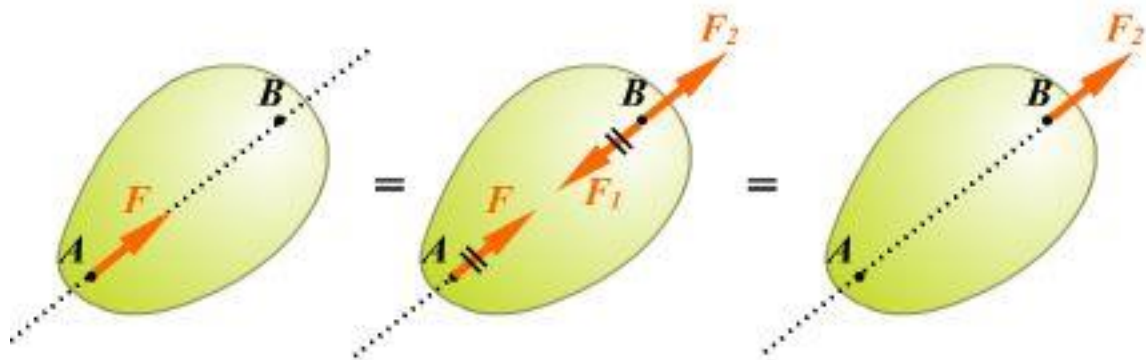
力的正交分解



二力平衡

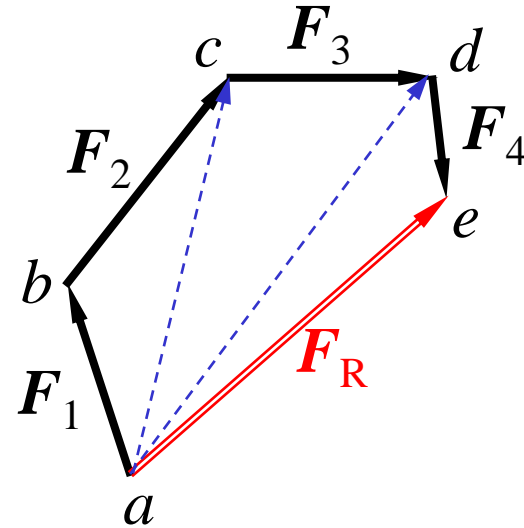
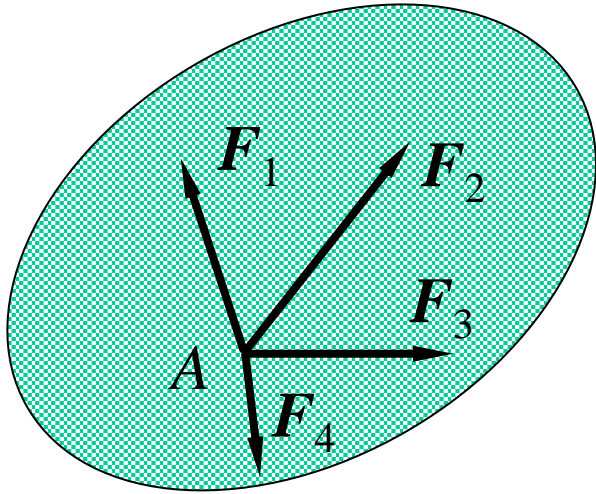
## 推理 力的可传性

作用于刚体上的力可以沿其作用线移动而不改变它对刚体的效应。



作用在刚体上的力是**滑动矢量**，力的三要素为**大小**、**方向**和**作用线**。

# 力的多边形法则



作用在物体上同一点的任意个力，其合力仍作用于该点。合力的大小和方向由各力矢量所构成的多边形的封闭边矢量确定。封闭边矢量自力多边形的第一个力矢量起点指向最后一个力矢量的终点。

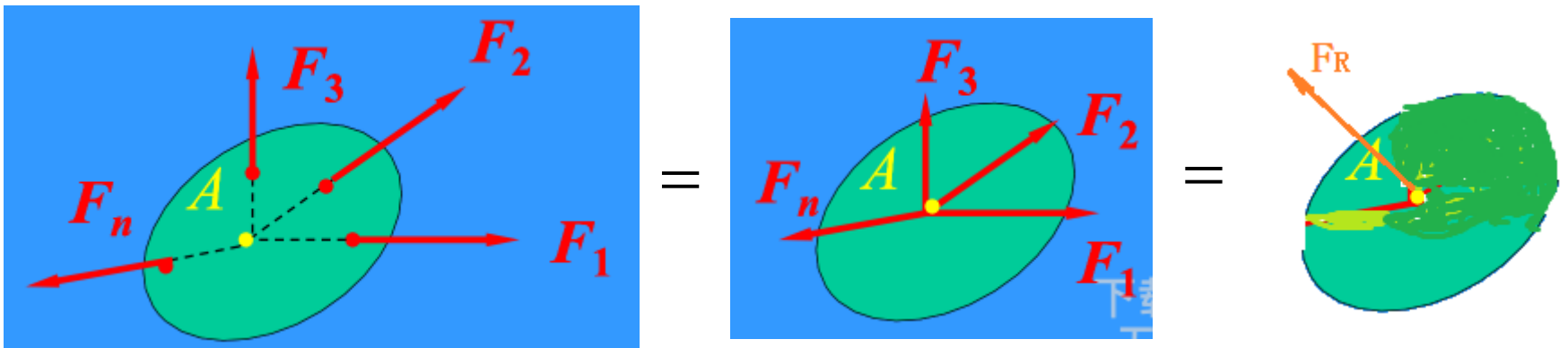
$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i$$

## 汇交力系：各力的作用线汇交于一点

### 结论：

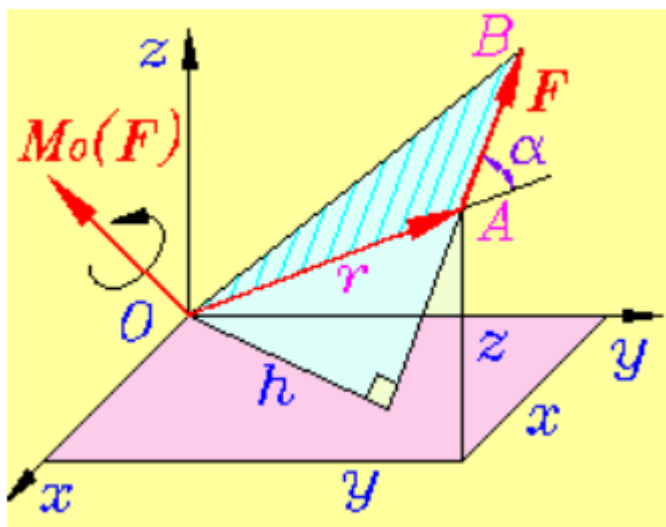
汇交力系的合力作用线过汇交点，合力的大小和方向由力系各力所组成的力多边形的封闭边矢量确定。即合力矢量等于汇交力系各力的矢量之和。

$$F_R = \sum_{i=1}^n F_i$$



## 第二节 力矩

### 一、力对点之矩



$O$ 称为矩心， $r$ 为矩心 $O$ 引向力 $F$ 的作用点 $A$ 的矢径。

#### 1、力对点之矩的概念

作用于刚体的力 $F$ 对空间任意一点 $O$ 的力矩定义为：

矩心到该力作用点的矢径与力矢的矢量积：

$$M_O(F) = r \times F$$



## 2、力对点之矩矢 $M_O(F)$ 的三要素

力矩矢的三要素为大小、方位和指向。

### (1) $M_O(F)$ 的大小 (模)

$$M_O(F) = |r \times F| = Fr \sin \theta = F \cdot h$$

$\theta$ 为 $r$ 和 $F$ 正方向间的夹角,  $h$ 为矩心到力作用线的垂直距离, 称为**力臂**

### (2) $M_O(F)$ 的方位:

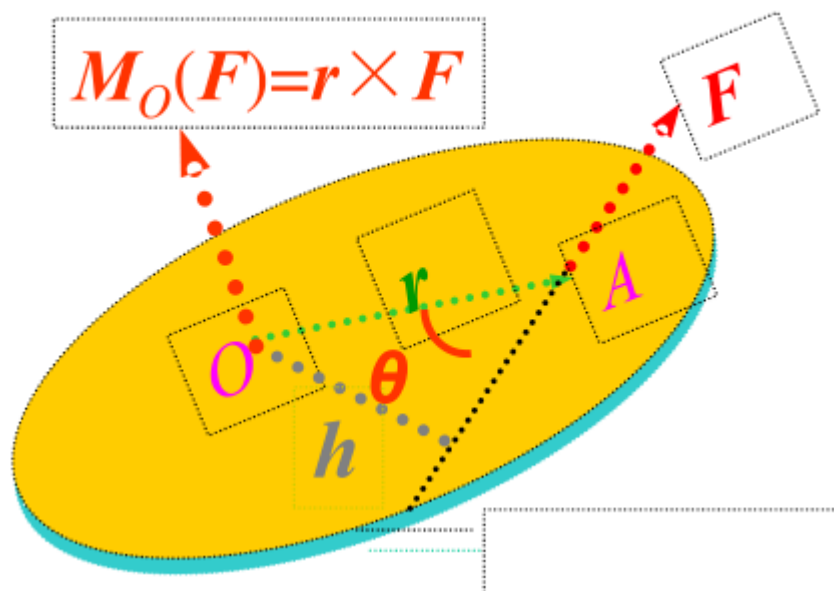
垂直于 $r$ 和 $F$ 所确定的平面

### (3) $M_O(F)$ 的指向:

指向由**右手螺旋法则**确定。

由于力矩矢的大小和方向都

与矩心位置有关, 力矩是一个**定位矢量**



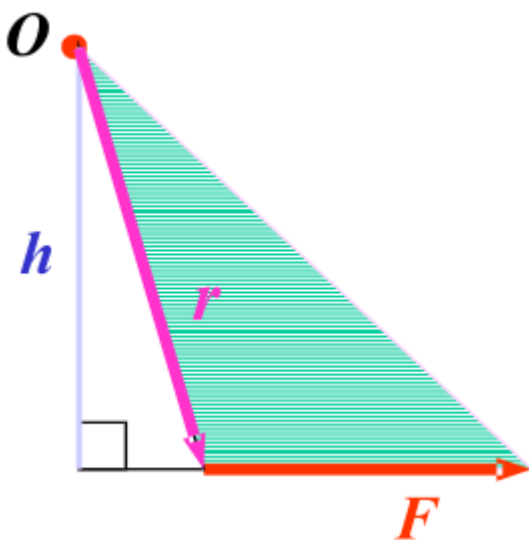
### 3、平面问题

矩心与力矢均在同一个特定的平面内，力矩矢总是垂直于该平面，即力矩的方位不变，指向可用正、负号区别，故力矩由矢量变成了代数量，且有：

$$M_O(F) = \pm F \cdot h$$

**正负：**力使物体绕矩心逆时针转向时为正，反之为负。

单位：N·m或kN·m



## 4、合力矩定理

以O为原点建立直角坐标系Oxyz, 则矢径r与力F均可以用坐标形式表示:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

**投影**



$$\left. \begin{aligned} [M_O(\boldsymbol{F})]_x &= yF_z - zF_y \\ [M_O(\boldsymbol{F})]_y &= zF_x - xF_z \\ [M_O(\boldsymbol{F})]_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\}$$

设一共点力系 $F_1, F_2, \dots, F_n$ , 则其合力  $F_R = \sum_{i=1}^n F_i$  作用于该点, 于是, 力系诸力对O点的力矩之和为

$$\sum_{i=1}^n M_O(F_i) = \sum_{i=1}^n r \times F_i = r \times \sum_{i=1}^n F_i = r \times F_R$$

**结论:**共点力系的合力对任一点之矩等于该力系诸力对同一点之矩的矢量和

$$M_O(F_R) = \sum_{i=1}^n M_O(F_i)$$

当共点力系中诸力作用线位于同一平面时, 由于力对点之矩由

$M_O(F) = \pm F \cdot h$  表示, 因此:

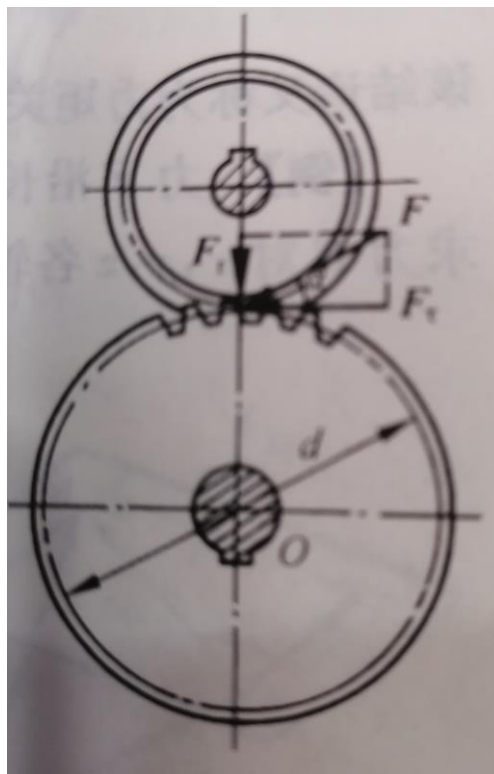
$$M_O(F_R) = \sum_{i=1}^n M_O(F_i)$$

**合力矩定理:**

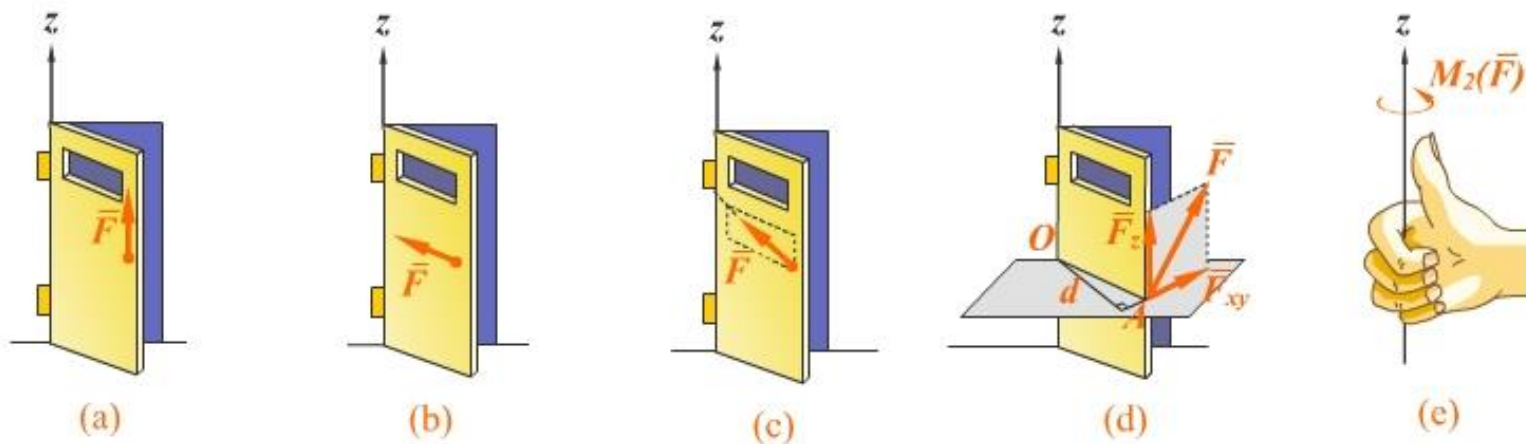
平面共点力系的合力对该平面内任一点之矩等于该力系诸力对同一点之矩的代数和

课堂演算题目：

圆柱直齿轮转动,从动轮节圆直径 $d=30\text{cm}$ ,受到主动轮传动啮合力 $F=1\text{KN}$ ,压力角 $\alpha=20^\circ$ , 求啮合力 $F$ 对从动轮中心 $O$ 的传动力矩 $M_O(F)$



## 二、力对轴之矩



**定义：**空间力对轴之矩等于力在垂直于该轴的平面上的投影对该轴与该平面交点之矩。

$$M_z(F) = M_O(F_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$$

**正负号：**按右手螺旋法则确定，从Oz轴的正端向负端看， $F_{xy}$ 使刚体绕轴有作逆时针转动趋势时， $M_z(F)$ 取正值，反之取负值。

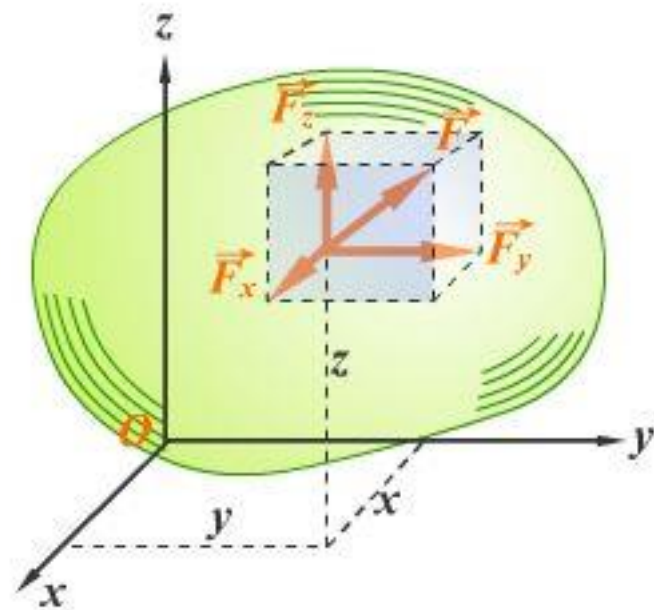
力与轴相交（力臂 $h=0$ ）或与轴平行（分力 $F_{xy}=0$ ），力对轴之矩等于零。➡ **力与轴共面时力对轴之矩等于零。**

设空间力 $F$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 的三条坐标轴上的投影分别为 $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ , 力的作用点的坐标分别为 $x$ ,  $y$ ,  $z$ 。  
可算得, 力对坐标轴 $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ 之矩分别为:

$$\left. \begin{aligned} M_x(F)_x &= yF_z - zF_y \\ M_y(F)_y &= zF_x - xF_z \\ M_z(F)_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\}$$

**力矩关系定理:** 力对点之矩矢量在通过该点的轴上的投影等于力对该轴之矩:

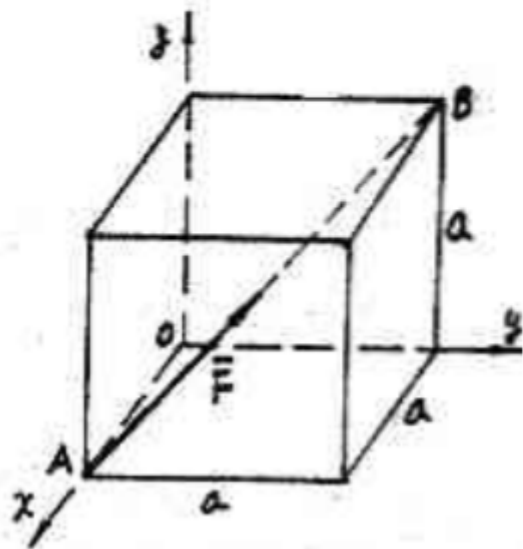
$$\left[ \begin{aligned} [M_o(F)]_x &= M_x(F)_x \\ [M_o(F)]_y &= M_y(F)_y \\ [M_o(F)]_z &= M_z(F)_z \end{aligned} \right\}$$



## 课堂练习：

正方体的边长  $a=20\text{ cm}$ ，力  $F$  沿对顶线  $AB$  作用，如图 3-13 所示，其大小以  $AB$  线的长度表示，每  $1\text{cm}$  代表  $10\text{N}$ 。试求：

力  $F$  在各坐标轴上的投影，(2) 力  $F$  对各坐标轴之矩，(3) 力  $F$  对  $O$  点的矩矢。

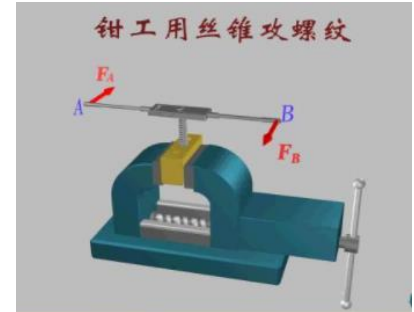




## 第三节 力偶

### 力偶的概念：

大小相等、方向相反，作用线平行但不重合的两个力组成的力系



力偶作用面：两力作用线所决定的平面

力偶臂：两力作用线的垂直距离

作用效应：使刚体的转动状态发生改变

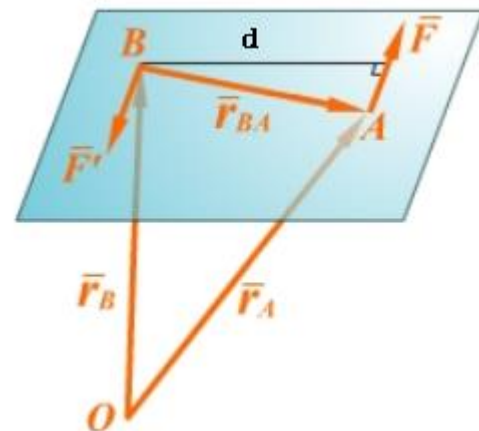
单位：N·m或kN·m

$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = 0$   $\longrightarrow$  力偶不存在合力

$\mathbf{F}$  与  $\mathbf{F}'$  不是平衡力系  $\longrightarrow$  力偶不能与一个力等效，力偶只能由力偶平衡

$$\begin{aligned} M_O(\mathbf{F}) + M_O(\mathbf{F}') &= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}' \\ &= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

$\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$  表示由B点到A点所作的矢径



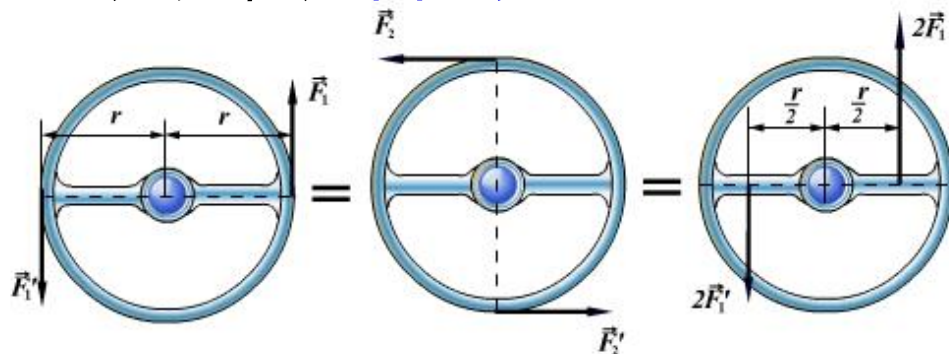
力偶中两力对任意点之矩之和恒等于矢积  $\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$ ，与矩心位置无关。

矢积： $\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$  力偶( $\mathbf{F}, \mathbf{F}'$ )的力偶矩矢量  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$$

力偶矩的模： $|M| = |\mathbf{r}_{BA}| \cdot |\mathbf{F}| \sin(\mathbf{r}_{BA}, \mathbf{F}) = Fd$

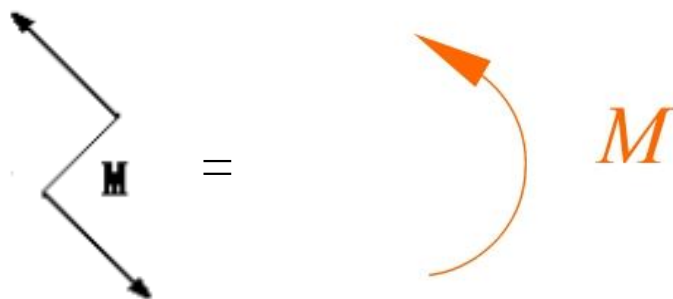
力偶矩矢量与矩心位置无关，是自由矢量



作用于刚体的诸力偶作用面相互平行，将所有力偶都搬到同一平面上，力偶矩用代数值表达力偶矩的大小和转向。

$$M = \pm Fd$$

**规定：**若力偶有使刚体作逆时针转动的趋势时，力偶矩取正值，反之取负值。



同时作用在刚体上的一群力偶称为力偶系

合力偶矩矢量：

力偶系的合成仍是力偶，称为力偶系的合力偶

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_i$$