上一次课：不可压缩流体的一维层流…

将雷诺输运定理应用于一维的微元控制体：

质量守恒： $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0$ （不可压： $\partial u/\partial x=0$ ）

运动（动量）方程：

作用于微元体诸力之和 = 微元体内动量的变化率 + 输出微元体动量流量 - 输入微元体动量流量

空间任一点的应力分布计算式

牛顿流体：$\tau_{yx}=\mu\frac{du}{dy}$

空间任一点的速度分布计算式

边界条件： 作用？固液、液液、气液

狭缝流动： 剪切流+压差流=复合流；**降膜流动**

思路与思维方法的学习：目的？

第五章作业上交！

第6章 流体流动的微分方程

本章任务： 在上章**一维流动**分析的基础上，进一步将微元体分析方法应用于三维微元控制体，得出任意三维流动的微分方程（组）。

流体流动的微分方程组包括**连续性方程**（质量守恒），**运动方程**（动量方程）和能量方程（能量守恒），即三大守恒定律在流体中的微分形式。

本章（课程）只研究**连续性方程**和**动量方程**的微分式.

能量方程：本课程暂不进一步研究其微分式. 原因：

① 传热学与工程热力学专门研究，特别是传热学中。

② 不可压流动，μ和ρ随T变化不大，T对流场（u和p）的影响较小，这时可不考虑T的影响. 除非专门需要温度场T，不必用到能量方程也能计算出流场（u和p）。

③ 能量方程微分式的推导及方程形式，与连续性方程及动量方程类似，数学上也没有特殊性。

微分方程方法：和积分方法一样，都是为了研究流体的质量、动量及能量的守恒特性。 积分法研究系统和空间整体情况，揭示总体性能，是场的外壳；微分法研究质点和空间任意点，揭示三维流场的空间分布细节，是场的内核。两种分析方法相辅相成，都必须学、都必须学好。

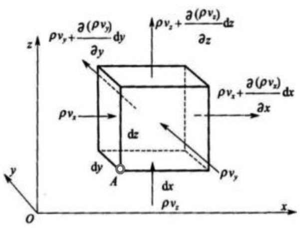
微元体分析法的核心：**将雷诺输运定理应用于流体微元控制体。**

6.1 连续性方程

连续性方程是任何流体流动都必须满足的方程，是流体力学最基本的方程之一。

6.1.1 直角坐标系中的连续性方程

微元体有多大？与流体质点有何不同？谁大谁小？



质量守恒条件（第4章）：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV+\int_{CS}\rho(\vec{v}\bullet\vec{n})dA=0$$

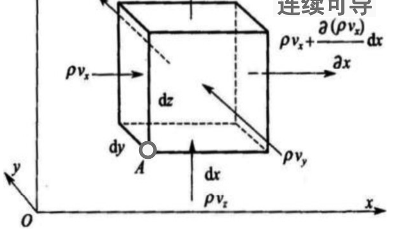
取三维微元体为控制体：

微元体内的质量变化率 + 输出微元体的质量流量 - 输入微元体的质量流量 = 0

4

1. X方向：dt时间内从六面体x+dx处（输出）和x处（输入）的质量差： 连续性方程

$$\left[\rho v_x+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dx\right]dydzdt-(\rho v_x)dydzdt=\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dxdydzdt$$



隐含假设连续可导

Y方向：

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dxdydzdt$$

Z方向：

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}dxdydzdt$$

5

2. dt时间内，整个六面体中，“输出 - 输入”的质量差：

输出微元体的质量流量 - 输入微元体的质量流量

= X方向 + Y方向 + Z方向

$$=\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dxdydzdt+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dxdydzdt+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}dxdydzdt$$

$$=\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt$$

6

连续性方程

3. dt时间内，微元体内的质量增加 $\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydzdt$

4. 代入质量守恒条件，$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV+\int_{CS}\rho(\vec{v}\bullet\vec{n})dA=0}$ 得

微元体形式的质量守恒 的具体表达式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydzdt+\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt=0$$

整理，得连续性方程(微分式/空间点的质量守恒方程)：

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0}$$

矢量形式：$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0}$

导出过程未作任何假设，故适用于层流/湍流/牛顿流体/非牛顿流体。

连续方程物理意义：流场中任一空间点的质量守恒关系

连续性方程

不可压缩 $\rho=const$：

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0}$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0}$$

连续性方程变为：

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0}\quad \text{或：}\quad \boxed{\nabla\cdot\vec{v}=0}$$

因为密度被当作常数，故对于不可压缩流动，无论稳态或非稳态，其连续性方程都一样。

一维不可压流动的连续方程：$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x}=0}$ 或 $\boxed{v_1A_1=v_2A_2}$

可压缩流动的情况，稳态与非稳态，连续性方程不同。

质量守恒方程(连续性方程)

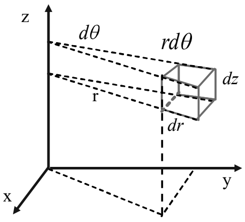
微分形式【刚刚】	如何看出等价？	积分形式【第4章】
$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$		$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV+\int_{CS}\rho(\vec{v}\bullet\vec{n})dA=0$
$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0$		对应的三个方向分别积分求和的形式

不可压、一维等，各自进一步简化形式…

知道怎么来，还知道怎么回去，才算是真正学通了…

连续性方程

6.1.2 柱坐标和球坐标系中的连续性方程



柱坐标系中微元体

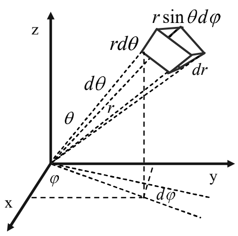
柱坐标系中：

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0}$$

不可压缩流体流动：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\rho\cdot rd\theta\cdot dr\cdot dz\right)dt\quad +r\text{方向}\quad +z\text{方向}\quad +\theta\text{方向}=...=0$$



球坐标系中微元体

球坐标系中的连续方程：

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}+\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\varphi}=0\end{gathered}}$$

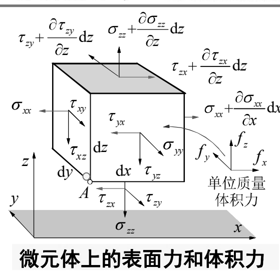
不可压缩流体流动：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(v_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}=0$$

6.2 以应力表示的运动方程

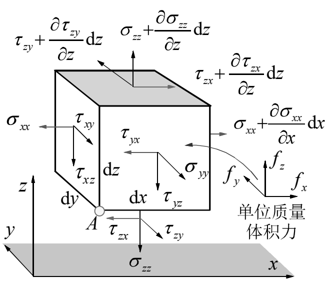
基本思路：对流场中的微元控制体，应用雷诺输运定理推导建立微分形式的动量方程(运动方程)。

$$\boxed{\text{作用于微元体诸力之矢量和}=\text{微元体内的动量变化率}+\text{输出微元体的动量流量}-\text{输入微元体的动量流量}}$$



微元体上的表面力和体积力

6.2.1 作用于微元体上的力



微元体上的表面力和体积力

体积力(质量力彻体力): f_i

表面力(应力): σ_{ii}, τ_{ij}

应力下标的含义

每个应力有两个下标:

第1个: 应力作用面的法向

第2个: 应力的作用方向

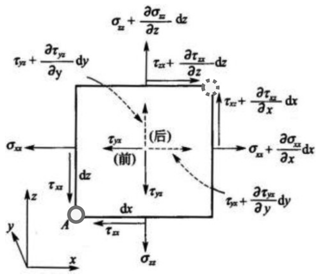
应力正负的规定

正应力: 拉为正/压为负, 或与外法线同向为正.

切应力: 外法线与坐标轴同向时, 作用方向沿坐标轴正向的τ为正, 反之负.

13

运动方程 应力状态及切应力互等定律



微元体上X和Z方向的表面力

应力状态

粘性流场中任意一点的应力有9个分量:

3正应力: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$

6切应力: $\tau_{yx}, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{zy}, \tau_{yz}$

切应力互等定律

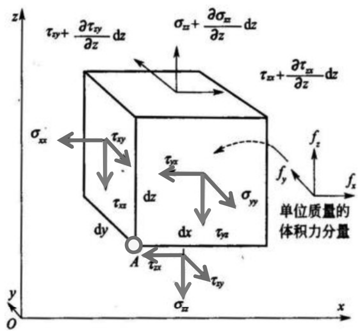
6个切应力分量中互换下标的每一对切应力相等

$$\boxed{\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx}\\ \tau_{xz} &= \tau_{zx}\\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}\end{aligned}}$$

定理证明?

14

运动方程 微元体表面力的总力 (向量)



X-方向的表面力

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz$$

Y-方向的表面力

$$\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)dxdydz$$

Z-方向的表面力

$$\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)dxdydz$$

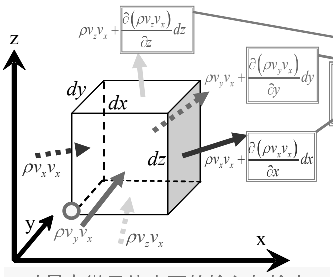
15

6.2.2 微元体表面动量流量 运动方程

动量通量 = 质量通量 × 流动速度= $\rho \vec{v}\vec{v}$

动量流量 = 动量通量 × 流通面积= $\rho \vec{v}\vec{v}A$

动量流量: 输出 - 输入



动量在微元体表面的输入与输出

(注意: 图中只标出了x-方向的动量)

X-方向:

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}\right]dxdydz$$

Y-方向:

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z}\right]dxdydz$$

Z-方向:

$$\left[\frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z^2)}{\partial z}\right]dxdydz$$

16

微元体内各个方向动量随时间的变化率 运动方程

x方向: $\frac{\partial \rho v_x}{\partial t}dxdydz$ y方向: $\frac{\partial \rho v_y}{\partial t}dxdydz$ z方向: $\frac{\partial \rho v_z}{\partial t}dxdydz$

6.2.3 以应力表示的运动微分方程

微元控制体中x-, y- 和z- 方向的动量各对应项代入:

作用于微元体诸力之矢量和 = 微元体内的动量变化率 + 输出微元体的动量流量 − 输入微元体的动量流量

X-方向:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t}dxdydz+\left[\frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}\right]dxdydz$$

$$=\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz+f_x\rho dxdxdz$$

17

各项同时除以 $dxdydz$ **，即得单位体积(或任意一点上):**

$$\text{X-:}\ \underbrace{\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}}_{\text{CV动量增加率}}+\underbrace{\frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}}_{\text{CS动量流量净流出}}=\underbrace{f_x\rho}_{\text{质量力(单位体积)}}+\underbrace{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}}_{\text{表面力}}$$

Y-: …

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_y)}{\partial z}=f_y\rho+\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)$$

Z-: …

$$\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_z)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z^2)}{\partial z}=f_y\rho+\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)$$

18

X-方向为例，进一步化简方程左边：

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}=f_x\rho+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

$$=\left(v_x\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)+\left(v_x\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}+\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)+\left(v_x\frac{\partial\rho v_y}{\partial y}+\rho v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+\left(v_x\frac{\partial\rho v_z}{\partial z}+\rho v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

$$=v_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_y}{\partial y}+\frac{\partial\rho v_z}{\partial z}\right)+\rho\left(\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}}\right)$$

认识否?

得出：

X-: $\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=f_x\rho+\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)$

方程右边：暂时未能简化 …

19

得出了以应力表示的运动微分方程：

X-: $\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=f_x\rho+\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)$

Y-: $\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=f_y\rho+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)$

Z-: $\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=f_z\rho+\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)$

注：推导过程无假设，故适用于层流、湍流、牛顿流体、非牛顿流体等任意情况。

20

运动方程

运动方程的物理意义：

X-: $\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=f_x\rho+\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)$

方程左边：括号内是速度 v_x 的质点导数, 是任意时刻 t 通过考察点A的流体质点(在x方向)的加速度.

整个左端项: 流体密度×流体质点的加速度

方程右边：是(x方向上)作用在单位体积流体上的所有体积力和表面力的合力。

方程可简略表示成：$\boxed{\rho\vec{a}=\vec{F}}$

这就是以单位体积的流体为基准的牛顿第二运动定律.

21

X-: $\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=f_x\rho+\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)$

遗留问题：

获得了3个动量方程和1个连续方程，共4个方程.

即使ρ和质量力f_i已知 (?!), 仍有9个未知数:

3个速度分量和6个独立的应力分量. 方程组不封闭.

如需求速度, 须补充方程.

第5章一维流动问题中，得到应力表示的运动方程后，为了得到速度分布，补充了牛顿剪切定律。

对粘性流体的任意三维流动问题, 需要补充广义的牛顿剪切定律, 即牛顿流体的本构方程。

问题: "即使ρ和质量力f_i已知"?

流体中为何总是消去应力求速度? 固体力学不同…

22

目标明确：

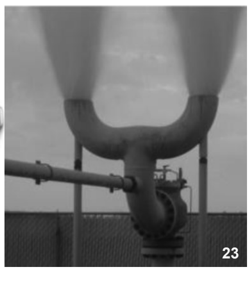
想要消去这些应力。一旦这些应力用速度的函数来表示了，则方程和未知数的个数能做到一样多。

最后得到的都是微分方程，对于特定的问题，如何使这些微分方程的解唯一确定？

思考:

1. 水龙头出水, 空气与水流之间的边界条件是怎样的?

2. 过热蒸汽喷入空气中, 两种气体之间是否有边界? 如有, 边界条件是怎样的?



23