第一篇　力　学

- **静力学**：研究物体平衡的条件
- **运动学**：研究物体位置随时间的变化
- **动力学**：研究各类运动发生的原因

第三章 刚体的转动

（Rotation of Rigid Body ）

刚体的运动学

- 描述转动的角量
  - 角位移 θ
  - 角速度 ω
  - 角加速度 α
- 描述各点运动的线量
  - 速度 v
  - 切向加速度 a_τ
  - 法向加速度 a_n

刚体的动力学
- 牛顿定律
- 力矩
- 转动惯量

转动定律
- 转动动能 → 机械能守恒
- 转动定理
- 角动量定理
  - 角动量
  - 角动量守恒

刚体：在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体.（任意两质点间距离保持不变的特殊质点组）

刚体的运动形式：平动、转动 .

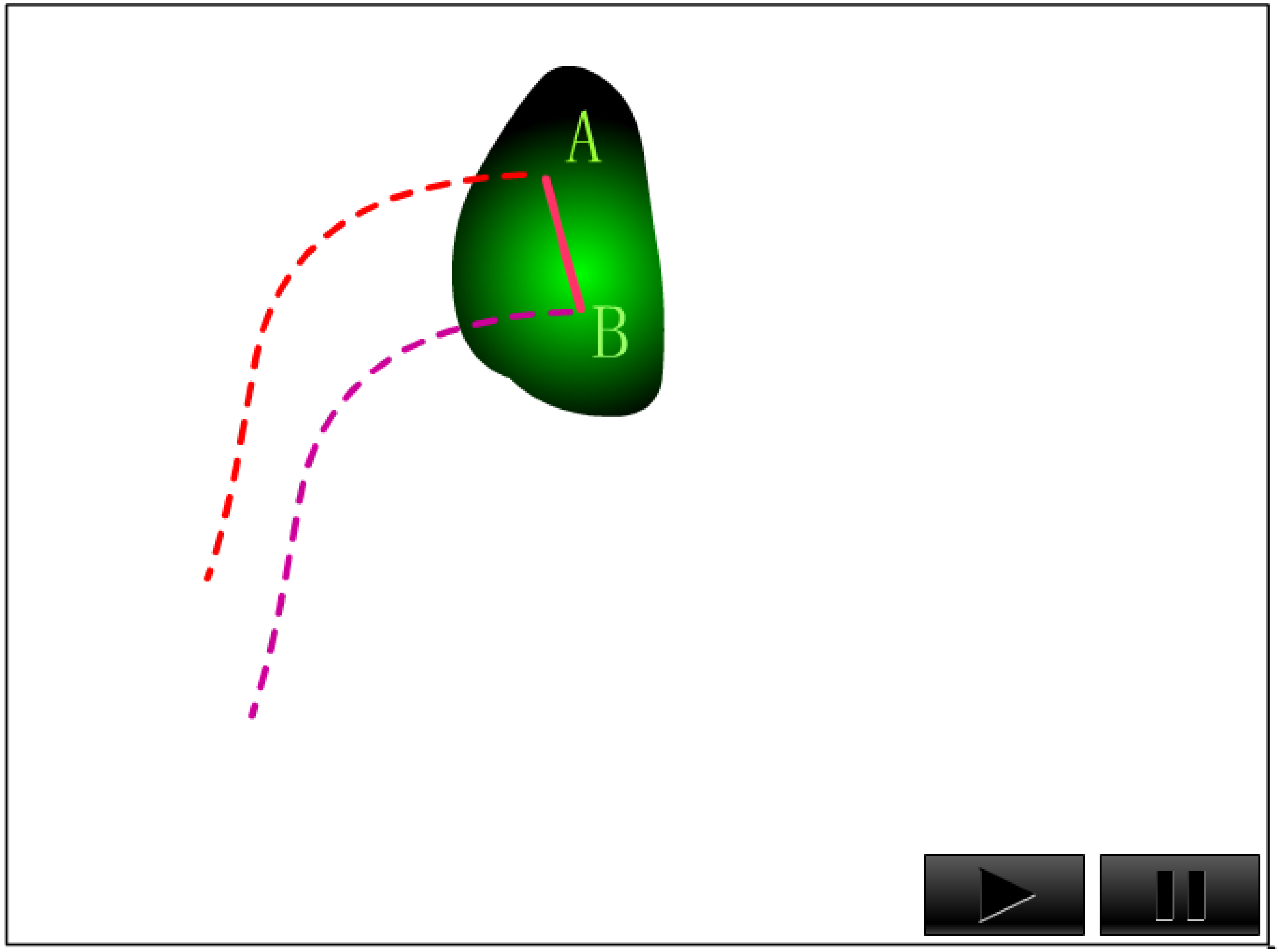
➢平动：若刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同，或者说刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线.

刚体平动 ⟹ 质点运动

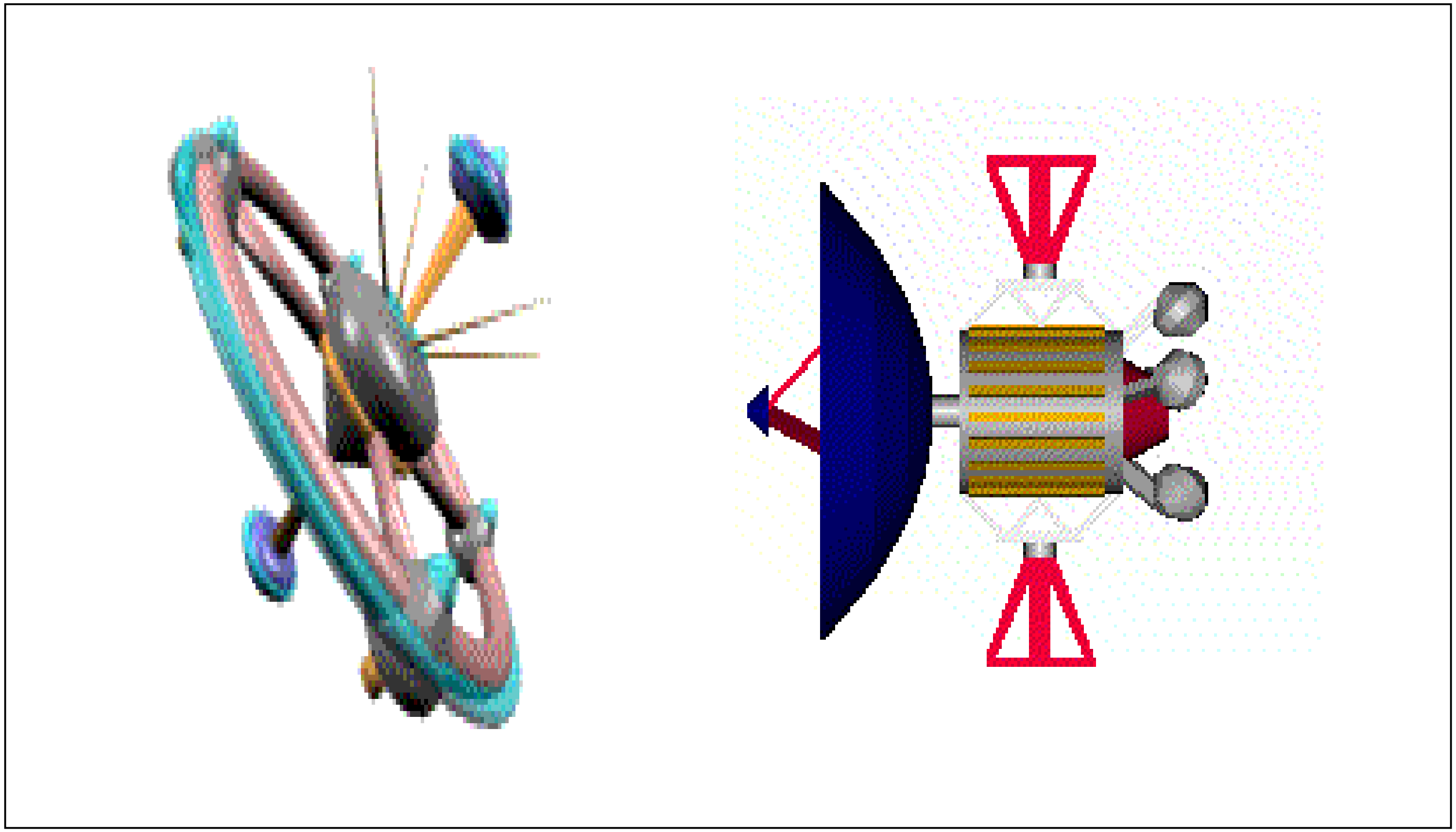
➢转动：刚体中所有的点都绕同一直线做圆周运动.转动又分定轴转动和非定轴转动 .

质点运动规律 + 微积分 ⟹ 刚体基本运动规律（大量质点运动的总效应）

刚体的转动（Rotation of Rigid Body ）

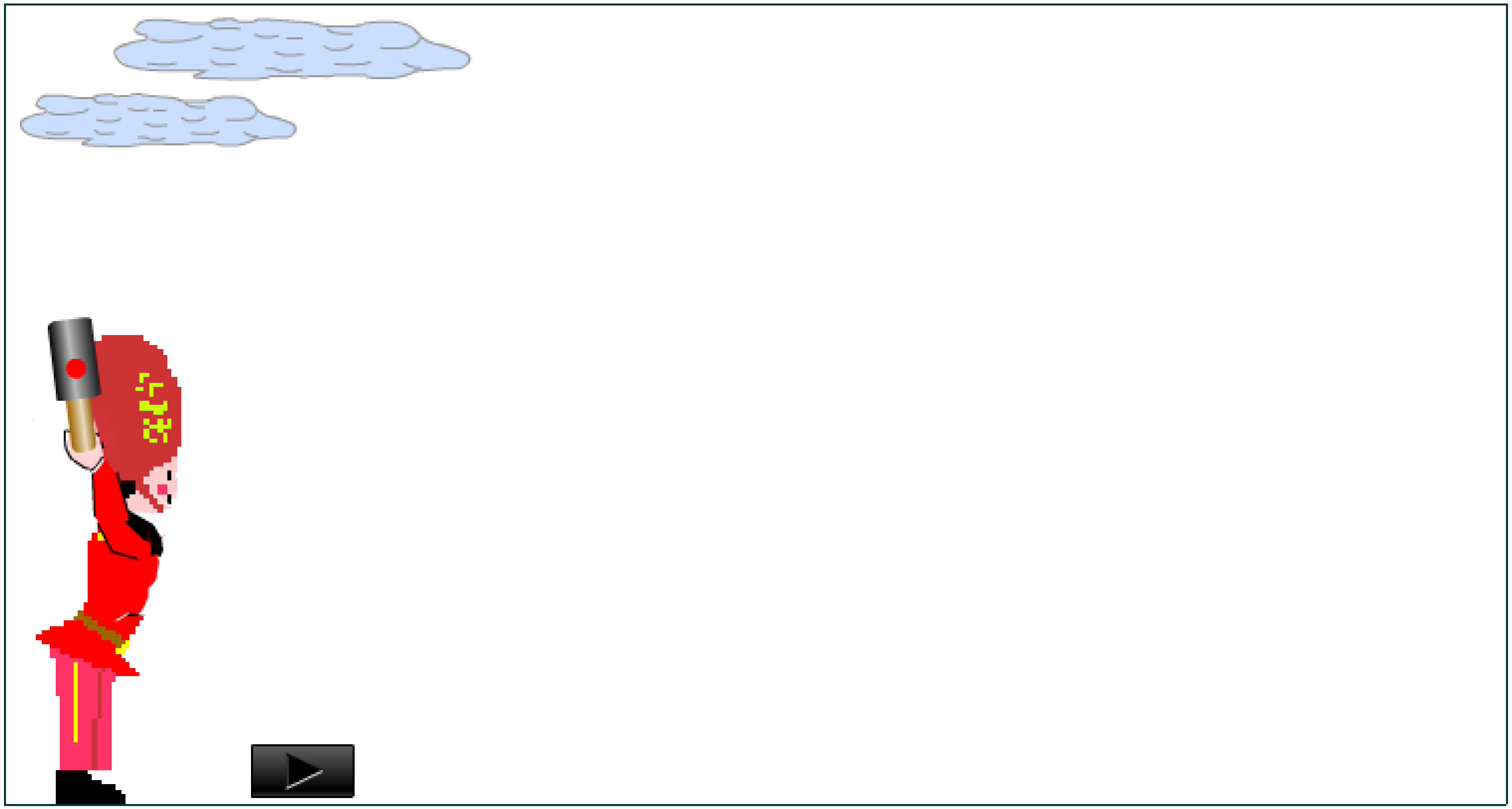


刚体的转动（Rotation of Rigid Body ）



- 刚体的平面运动．

➢刚体的一般运动 质心的平动 + 绕质心的转动



翻空筋斗

抛锤子

§3. 1 刚体的定轴运动

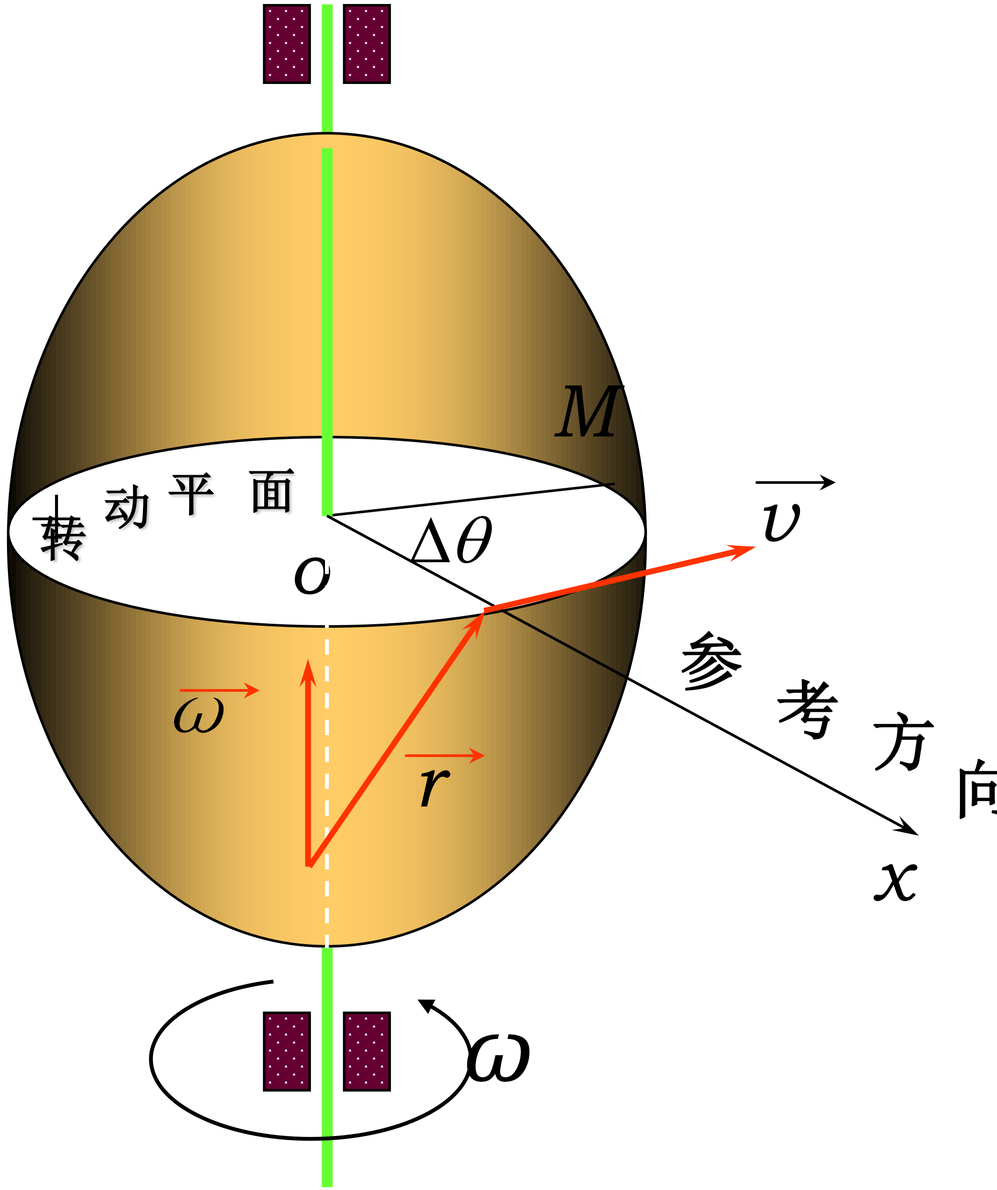
一、特征：

1.各点都有相同的 $\Delta\theta$、ω、α

2. **ω（标量）**

＋：刚体逆时针转

－：刚体顺时针转



3. 角量与线量

定轴转动(角速)　　定轴转动(角加速度)

$$\Delta S = r\Delta\theta$$

线位移与角位移

$$\vec{v} = r\omega\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

线速度与角速度

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

角速度为矢量

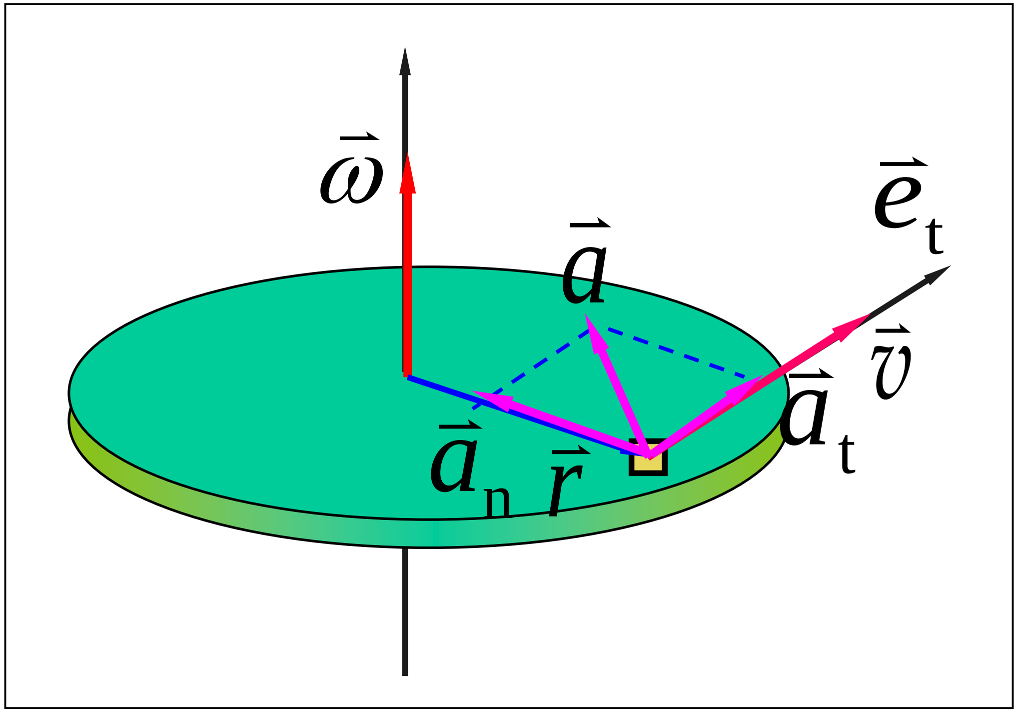
刚体角速度 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

刚体角加速度 $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

刚体质元的线加速度

$$\vec{a} = r\alpha\vec{e}_{\mathrm{t}} + r\omega^2\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$a_{\mathrm{t}} = r\alpha$$
$$a_{\mathrm{n}} = r\omega^2$$



二、匀变速转动

(α为常量)

$$\boxed{\begin{aligned} &\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2 \\ &\omega=\omega_0+\alpha t \\ &\omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0) \end{aligned}}$$

【例1】一飞轮半径为0.2m、转速为150r·min^{-1}，因受制动而均匀减速，经30s停止转动。试求：1）角加速度和在此时间内飞轮所转的圈数；2）制动开始后t =6s时飞轮的角速度；3）t=6s时飞轮边缘上一点的线速度、切向加速度和法向加速度 。

解　（1）　$\omega_0 = 5\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $t = 30$ s 时，$\omega = 0.$

设 $t = 0$ s 时，$\theta_0 = 0$ 飞轮做匀减速运动

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 5\pi}{30}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} = -\frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$$

飞轮 30 s 内转过的角度　$\theta = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \dfrac{-(5\pi)^2}{2\times(-\pi/6)} = 75\pi\ \mathrm{rad}$

转过的圈数　$N = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{75\pi}{2\pi} = 37.5\ \mathrm{r}$

（2）$t=6\mathrm{s}$时，飞轮的角速度

$$\omega=\omega_0+\alpha t=(5\pi-\frac{\pi}{6}\times 6)\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}=4\pi\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

（3）$t=6\mathrm{s}$时，飞轮边缘上一点的线速度大小

$$v=r\omega=0.2\times 4\pi\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}=2.5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

该点的切向加速度和法向加速度

$$a_{\mathrm{t}}=r\alpha=0.2\times(-\frac{\pi}{6})\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}=-0.105\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$a_{\mathrm{n}}=r\omega^2=0.2\times(4\pi)^2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}=31.6\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

【例 2】在高速旋转的微型电机里，有一圆柱形转子可绕垂直其横截面通过中心的轴转动．开始时，它的角速度 $\omega_0=0$，经 300s 后，其转速达到 18000 r·min^{-1}．已知转子的角加速度与时间成正比。问在这段时间内，转子转过多少转？

解　由题意，令 $\alpha=ct$，即 $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=ct$，积分

$$\int_0^{\omega}\mathrm{d}\omega=c\int_0^t t\mathrm{d}t \quad 得 \quad \omega=\frac{1}{2}ct^2$$

当 t = 300 s 时 $\omega=18000\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}=600\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

所以 $c=\dfrac{2\omega}{t^2}=\dfrac{2\times600\pi}{300^2}\mathrm{rad\cdot s^{-3}}=\dfrac{\pi}{75}\mathrm{rad\cdot s^{-3}}$　　$c=2\omega/t^2=(\pi/75)\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}}$

转子的角速度 $\omega=\dfrac{1}{2}ct^2=\dfrac{\pi}{150}\mathrm{rad\cdot s^{-3}}t^2$

由角速度的定义 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\pi}{150}\mathrm{rad\cdot s^{-3}}t^2$

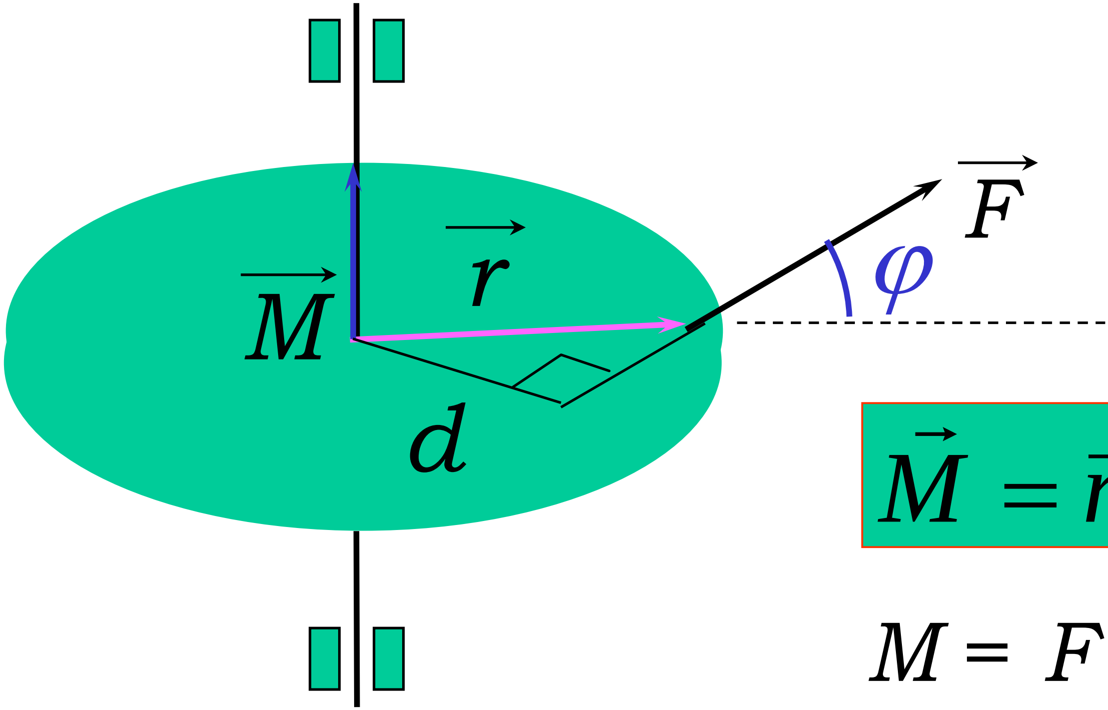
得 $\displaystyle\int_0^{\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{150}\mathrm{rad\cdot s^{-3}}\int_0^t t^2\mathrm{d}t$　　有 $\theta=\dfrac{\pi}{450}\mathrm{rad\cdot s^{-3}}t^3$

在 300 s 内转子转过的转数 $N=\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{\pi}{2\pi\times450}(300)^3=3\times10^4$

§3.2 刚体的转动定律

一、力矩　力矩是改变刚体转动状态的原因

1. 力在转动平面内



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = F\,d = F\,r\sin\varphi$$

在定轴转动问题中，如不讨论轴上受力，所考虑的力矩是指力在转动平面内的分力对转轴的力矩。

※定轴转动：M（标量）　+：刚体逆时针转

　　　　　　　　　　　　　　−：刚体顺时针转

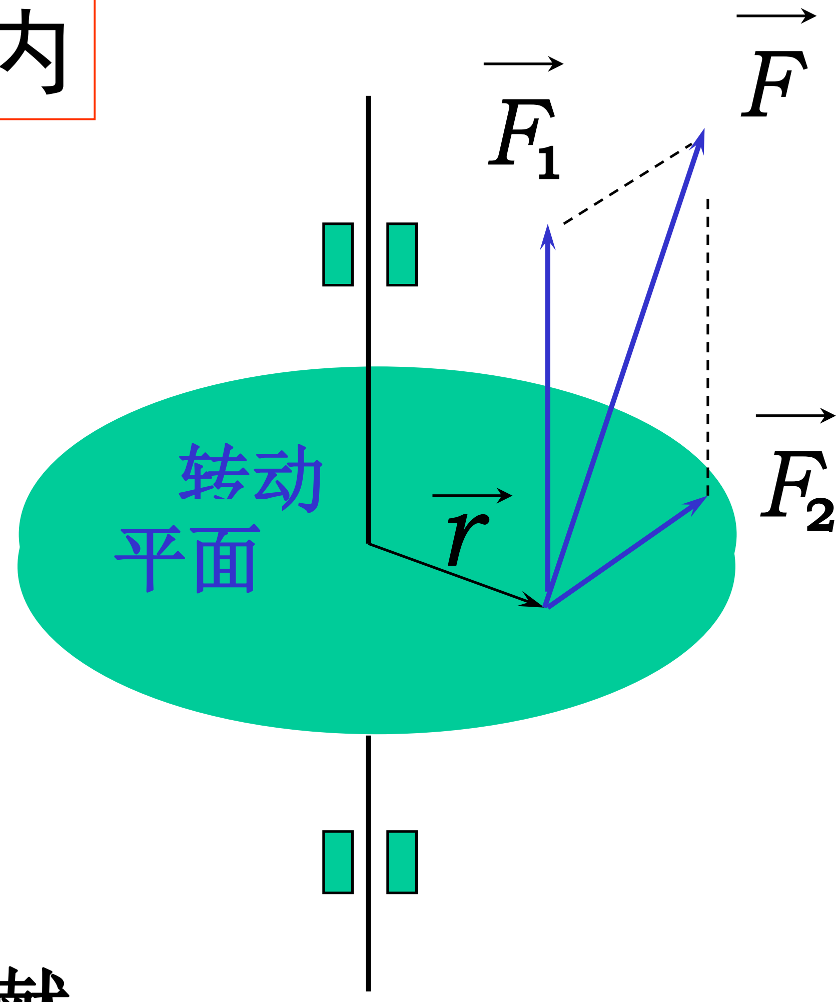
2. 力不在转动平面内

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

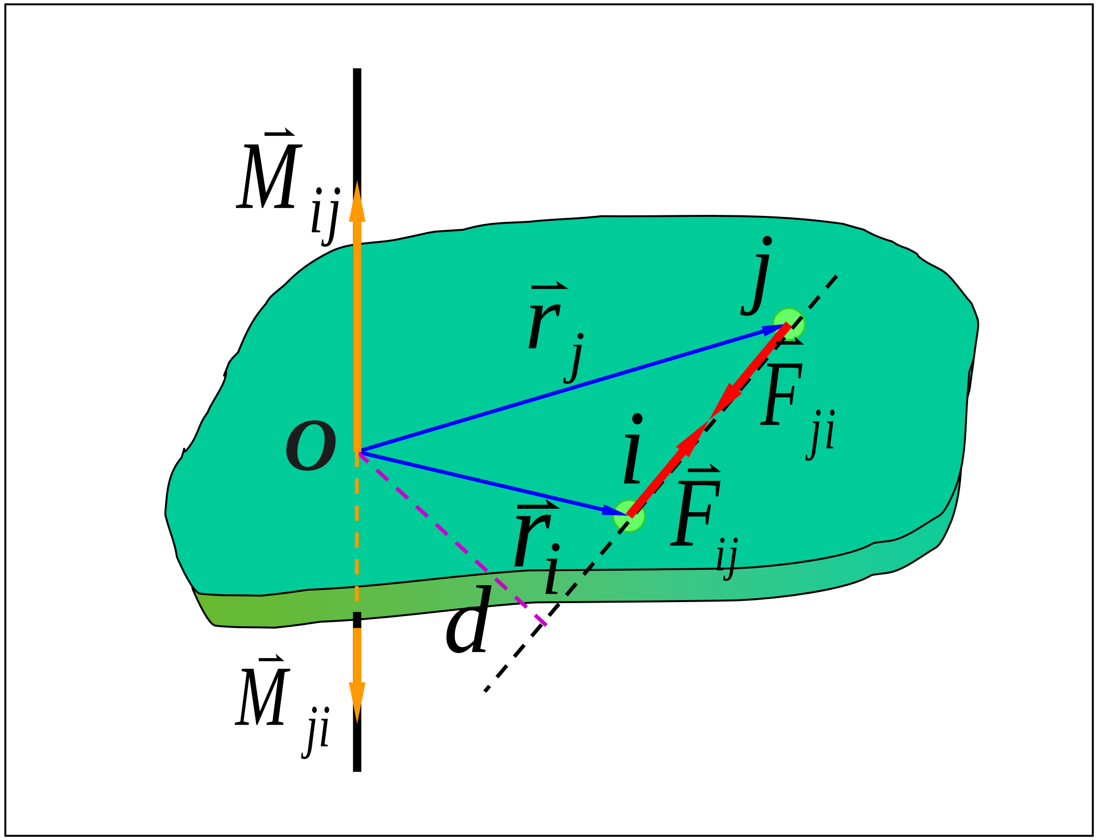
$$= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

$\vec{r} \times \vec{F}_1$ 只能引起轴的变形，对转动无贡献。



3 刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消



$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

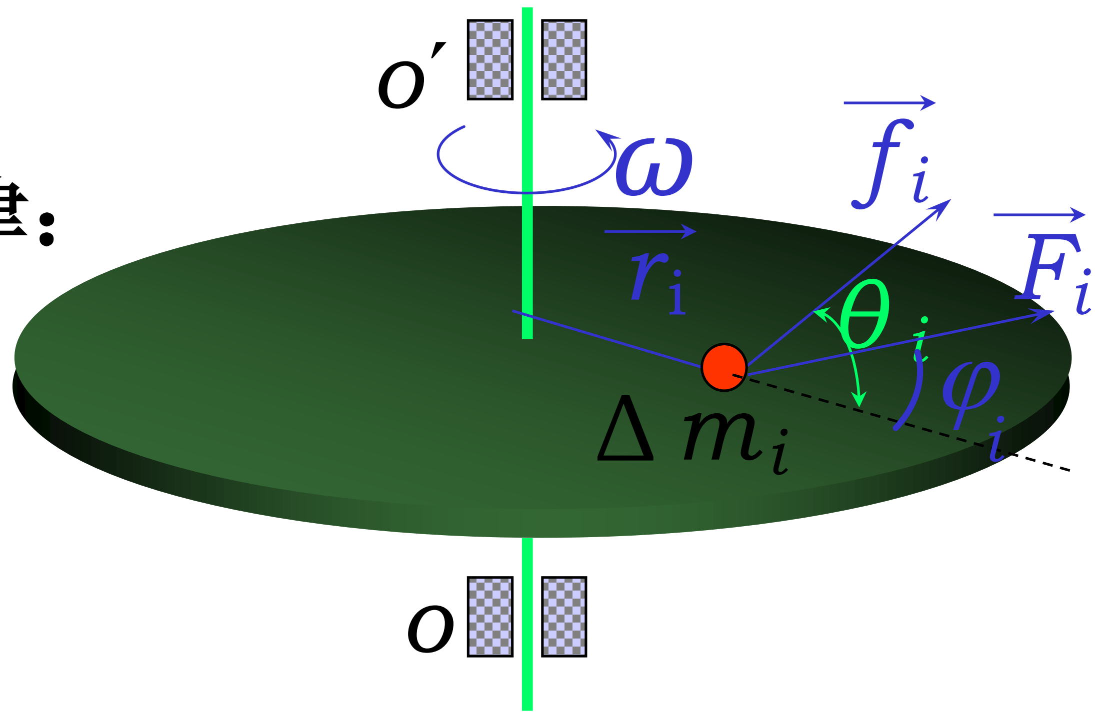
二、转动定律

对Δm_i质点

应用牛顿第二定律：

$F_i \longrightarrow$ 外力

$f_i \longrightarrow$ 内力



切向：$f_i \sin\theta_i + F_i \sin\varphi_i = \Delta m_i a_{it}$ —— (1)

法向：$-f_i \cos\theta_i - F_i \cos\varphi_i = \Delta m_i r_i \omega^2$ —— (2)

式(1) $\times\ r_i$ 并考虑到 $a_{it}=r_i\alpha$ 得到：

$$r_i f_i \sin\theta_i + r_i F_i \sin\varphi_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha$$

整个刚体：

$$\underbrace{\sum r_i f_i \sin\theta_i}_{0} + \underbrace{\sum r_i F_i \sin\varphi_i}_{M} = \underbrace{\sum \Delta m_i r_i^2 \alpha}_{J\alpha}$$

转动定律： $\boxed{M = J\alpha}$

刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比.

三、转动惯量（J）

是转动惯性大小的量度

平动：	$F = ma$
转动：	$M = J\alpha$

J的大小与
- 物体的质量
- 质量的分布
- 转轴的位置

有关

定义式：$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2 \;,\; J=\int r^2 \mathrm{d}m$

- 物理意义：转动惯性的量度．

转动惯性的计算方法

- 质量离散分布刚体的转动惯量 $J=\sum_j \Delta m_j r_j^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots$
- 质量连续分布刚体的转动惯量

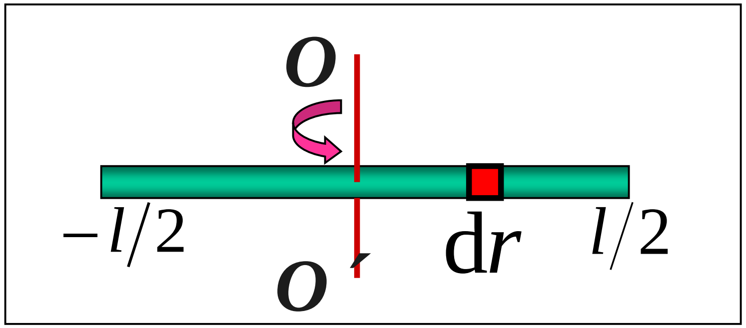
$$J=\sum_j \Delta m_j r_j^2 = \int r^2 \mathrm{d}m$$

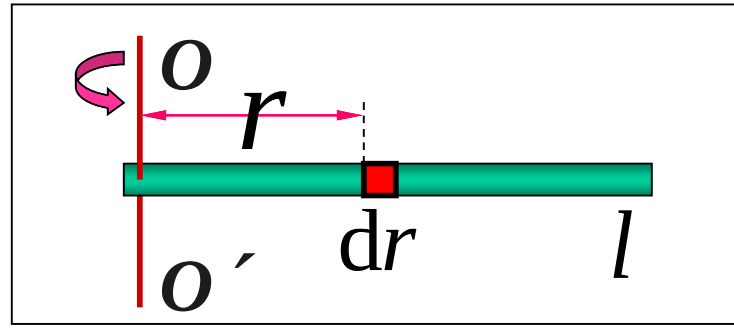
$\mathrm{d}m$：质量元

质量元的选取：

- 对质量线分布的刚体：$\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}l$　质量线密度 λ
- 对质量面分布的刚体：$\mathrm{d}m=\sigma \mathrm{d}S$　质量面密度 σ
- 对质量体分布的刚体：$\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$　质量体密度 ρ

【例 3】一质量为 m、长为 l 的均匀细长棒，求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量。





解 设棒的线密度为 λ，取一距离转轴 OO' 为 r 处的质量元 $\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}r$　$\mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=\lambda r^2\mathrm{d}r$

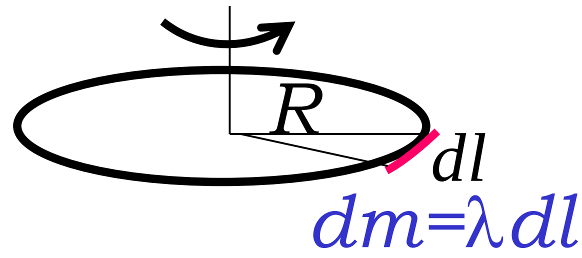
$$J=2\lambda\int_0^{l/2}r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{12}\lambda l^3$$

$$=\frac{1}{12}ml^2$$

如转轴过端点垂直于棒

$$J=\lambda\int_0^l r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}ml^2$$

【例 4】 均匀园环 m, R 的转动惯量。

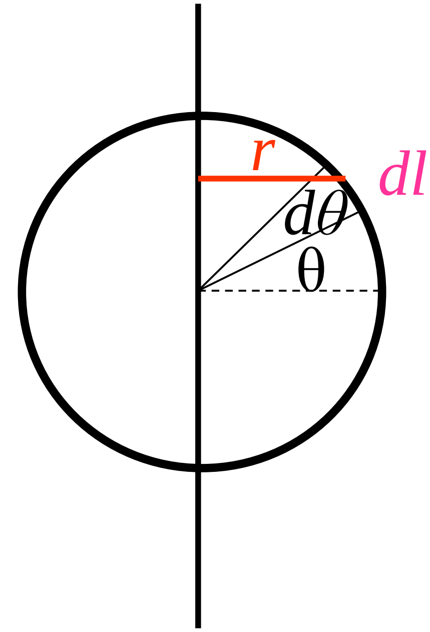


解: (1) 绕过中心与环面 ⊥ 轴的转动惯量

$$dJ = R^2 dm = R^2 \lambda dl$$

$$\Rightarrow J = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda dl = R^2 \frac{m}{2\pi R} \cdot 2\pi R = mR^2$$

(2) 绕沿直径轴的转动惯量



$$dJ = r^2 dm$$

$$= R^2 \cos^2 \theta \lambda dc$$

$$= R^2 \cos^2 \theta \lambda R d\theta$$

$$\Rightarrow J = \int_0^{2\pi} R^3 \lambda \cos^2 \theta d\theta = \frac{mR^2}{2}$$

【例 5】一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量 。

解　设圆盘面密度为 σ，在盘上取半径为 r，宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环

圆环质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$

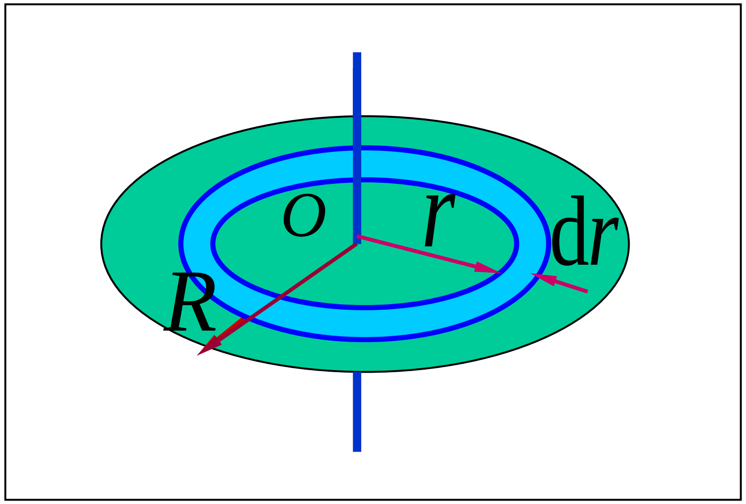
圆环对轴的转动惯量

$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m = 2\pi\,\sigma r^3\mathrm{d}r$$

$$J = \int_0^R 2\pi\,\sigma r^3\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2}\pi\,R^4$$

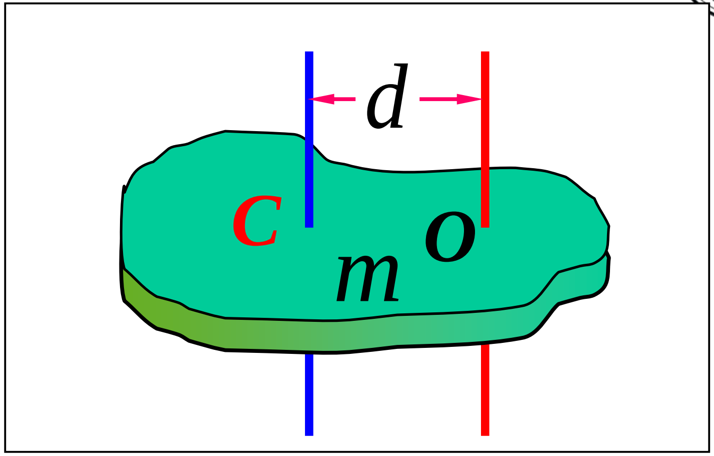
而　$\sigma = m/\pi\,R^2$

所以　$J = \dfrac{1}{2}mR^2$



四 平行轴定理

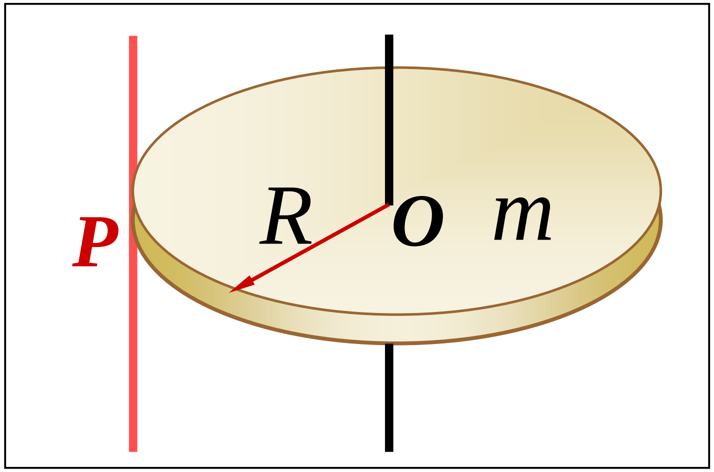
质量为m的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为J_C，则对任一与该轴平行，相距为d的转轴的转动惯量



$$\boxed{J_O = J_C + md^2}$$

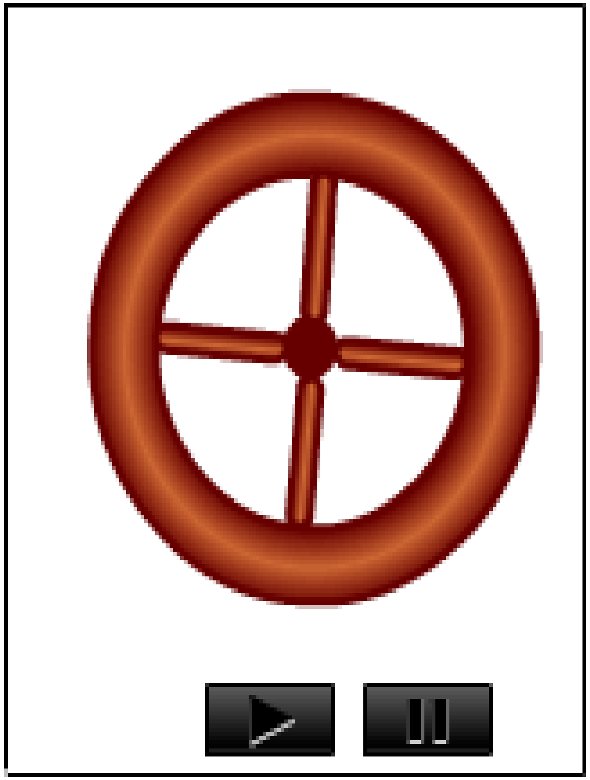
J_O: 刚体对过质心轴的转动惯量

d: 两平行轴间的距离

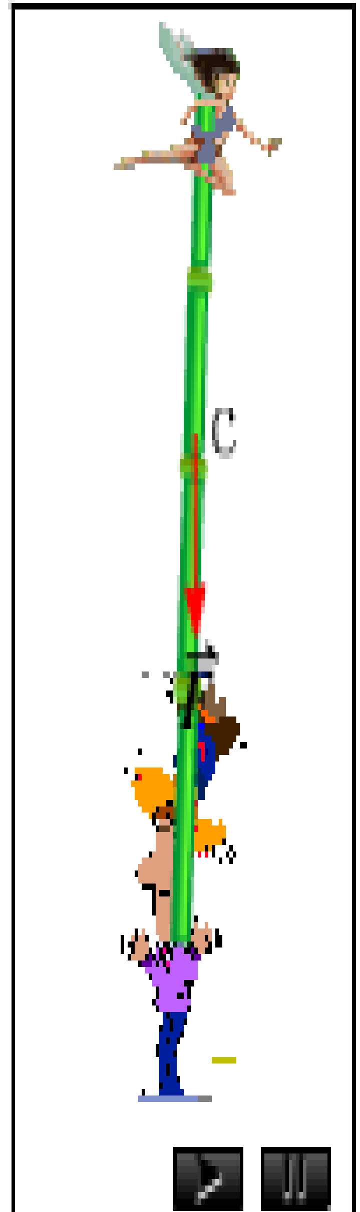


J_A: 刚体对平行于过质心轴的轴的转动惯量

圆盘对***P***轴的转动惯量 $J_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$

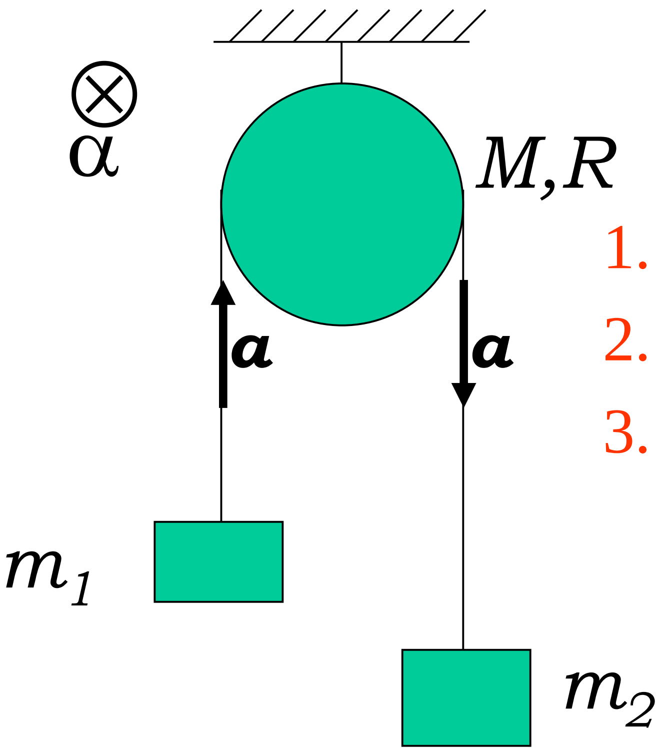


飞轮的质量为什么
大都分布于外轮缘？



竿子长些还是短些较安全？

【例 6】已知: m_1，m_2，M,R 求：α、a，T_1、T_2



$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a & (1) \\ m_2 g - T = m_2 a & (2) \end{cases}$$

1. 轻绳
2. 滑轮质量不计（中学）
3. 摩擦不计（轴无摩擦，绳有）

$$a \neq 0 \to \alpha \neq 0 \to M \neq 0 \to T_1 \neq T_2$$

重要提示：$T_1 \neq T_2$

$$T_1 R - T_2 R = J\alpha$$

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$

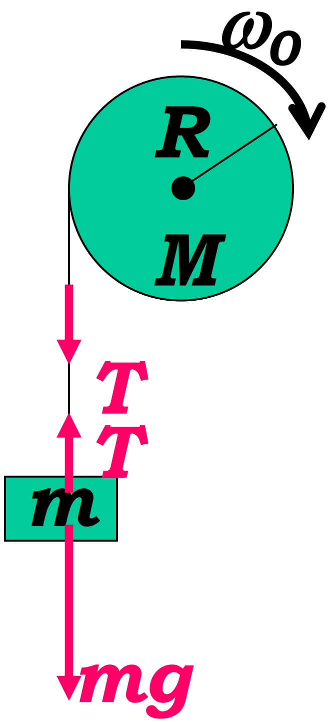
$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

$$a = \alpha \cdot R$$

【例 7】已知：$M = 2Kg$, $m = 5Kg$, $R= 0.1m$, $\omega_0 = 10\ rad/s$,

(1)求 α、 (2) $\omega = 0$ 时, m 上升 h、(3) m回到原位置时,求 ω。

解:(1)　M,m 受力如图所示



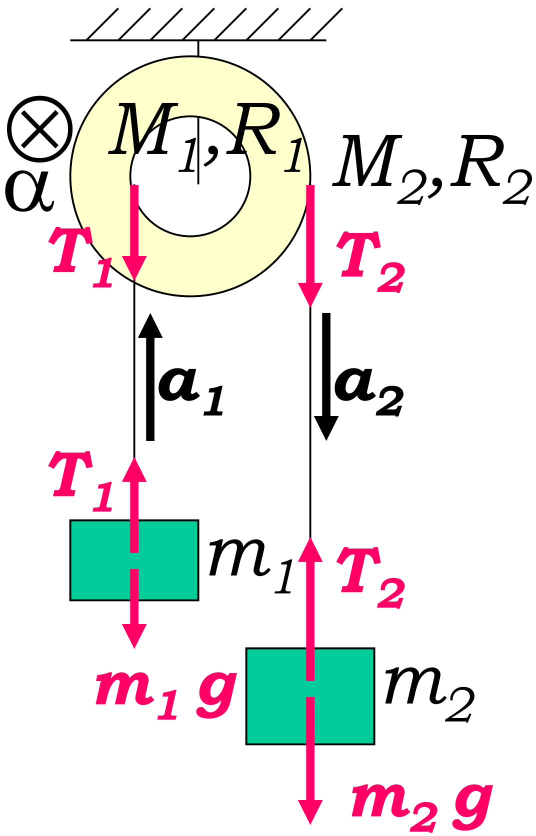
$$\left.\begin{aligned} mg - T &= ma \\ TR &= \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha \\ a &= \alpha \cdot R \end{aligned}\right\} \quad \alpha = \frac{mgR}{mR^2 + MR^2/2} = 81.7 rad/s^2$$

$$(2)\ \left.\begin{aligned} \omega_0 - \alpha t &= 0 \\ \theta &= \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ h &= R\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = 6.12\times 10^{-2} m$$

(3)从静止态回到原位置

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{2\alpha\theta} = 10 rad/s$$

【例 8】 已知: $m_1 = m_2$, M_1, R_1 M_2, R_2 求：α、 T_1 、 T_2



解：　受力分析如图所示

列方程 $\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a_1 & (1) \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 & (2) \end{cases}$

$$T_2 R_2 - T_1 R_1 = \left(\frac{1}{2} M_1 R_1^2 + \frac{1}{2} M_2 R_2^2\right)\alpha \quad (3)$$

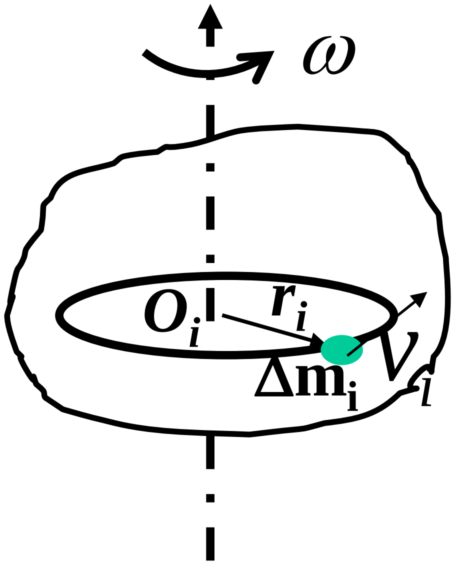
$$\begin{cases} a_1 = \alpha R_1 & (4) \\ a_2 = \alpha R_2 & (5) \end{cases}$$

由（1）（2）（3）（4）（5）解得：α、T_1、T_2

§3.3 刚体转动中的功能关系

一、定轴转动中的动能

质元 Δm_i 的动能：



$$E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

$$=\frac{1}{2}\Delta m_i(\omega r_i)^2=\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$$

刚体的转动动能：

$$E_k=\sum_i E_{ki}=\frac{1}{2}\sum_i(\Delta m_i r_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

二、力矩的功

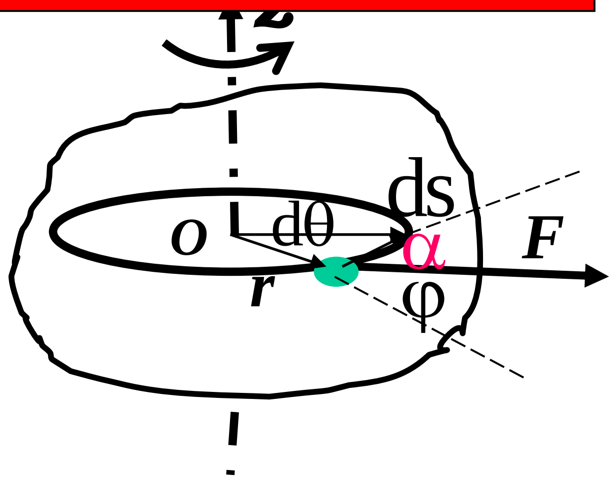
力的空间累积效应 → 力的功,动能,动能定理.

力矩的空间累积效应 → 力矩的功,转动动能,动能定理.

$$dA = Fds\cos\alpha$$

$$= Frd\theta\cos(90^0 - \varphi)$$

$$= Fr\sin\varphi d\theta = Md\theta$$



$$\theta_1 \to \theta_2: \boxed{A = \int dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta}$$

力矩的功率 $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega$

三、定轴转动中动能定理

$$A=\int_{\theta_0}^{\theta} Md\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\alpha d\theta$$
$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{d\omega}{dt}d\theta$$
$$=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$$

合外力矩对定轴转动刚体所作的功等于刚体转动动能的增量

※ $A_{保守力矩}=A_{保守力}=E_{P1}-E_{P2}$

※刚体的重力势能：$E_p=mgh_c$

其中：h_c为刚体质心到参照面的距离

刚体的转动动能与重力势能图 (刚体□

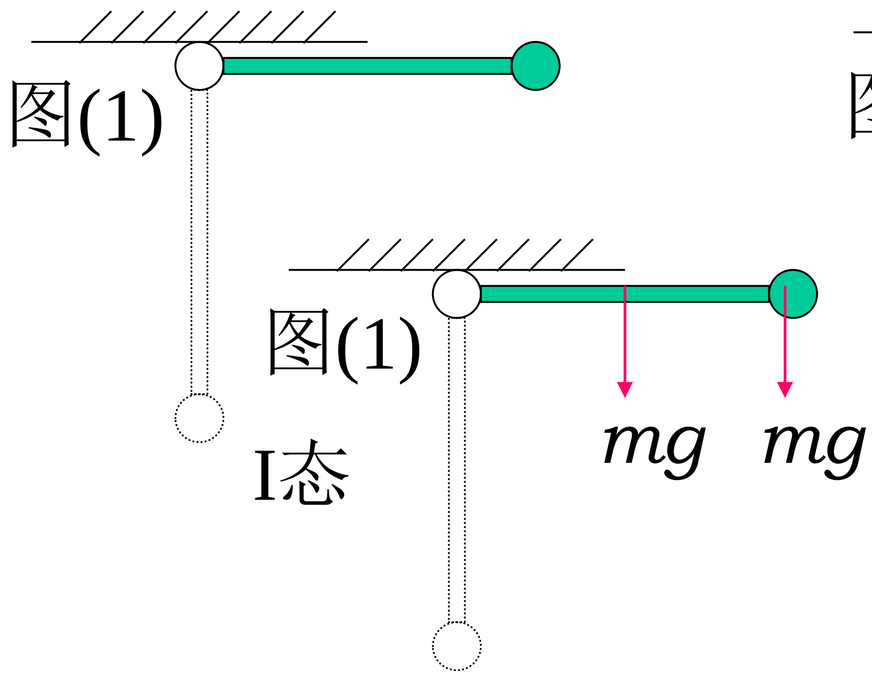
四、定轴转动的机械能守恒

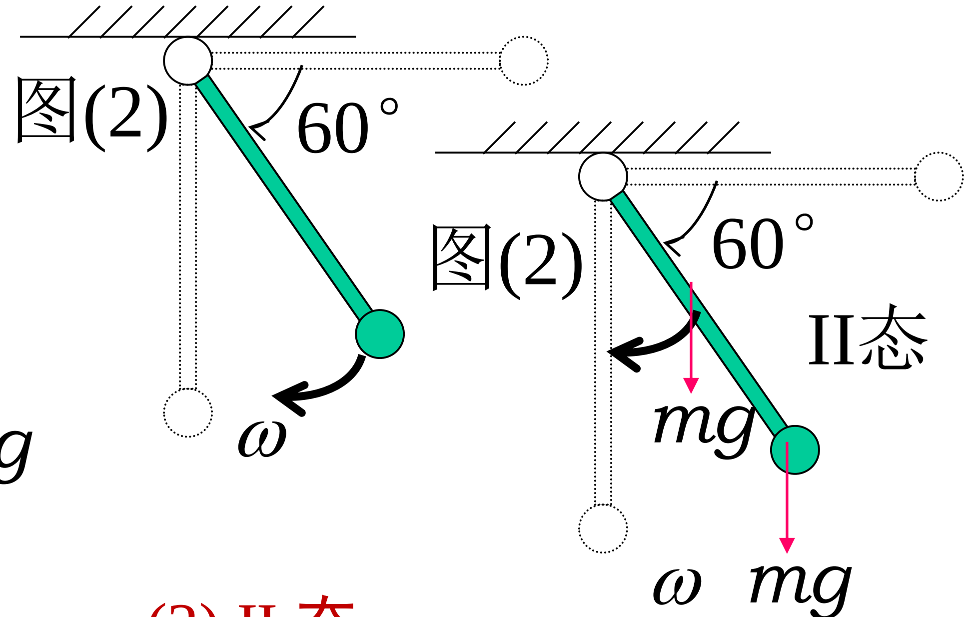
1。定轴转动过程中只有保守力作功的刚体, 其机械能（转动动能+重力势能）守恒

2。对于刚体、弹簧、质点的混合系统，此时系统机械能守恒条件为整个系统只有保守力作功！

【例 9】已知均质棒 m, l, 半径忽略的小球 m 组成图示系统，

求图(1) α; 图 (2) 棒中心a_t, a_n, ω





(2) II 态

解 (1)

$$M = mg\frac{l}{2} + mgl = \frac{3}{2}mgl$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$$

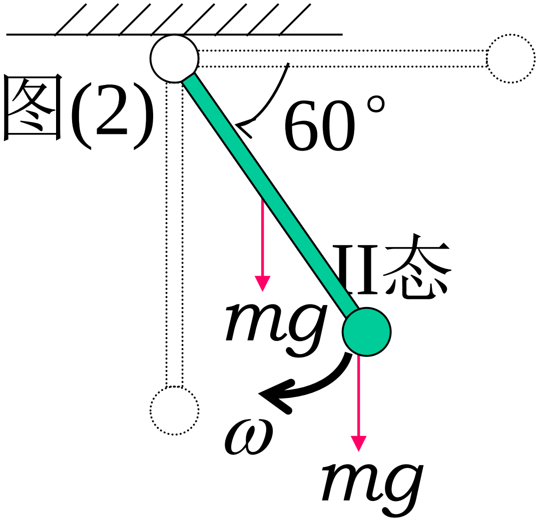
$$\Rightarrow \alpha = M/J = \frac{9g}{8l}$$

$$M = mg\frac{l}{2}\sin 30^0 + mgl\sin 30^0$$

$$= \frac{3}{4}mgl \Rightarrow \alpha = M/J = \frac{9g}{16l}$$

$$a_t = \alpha\frac{l}{2} = \frac{9g}{32}$$

I 态→II 态, E 守恒 $E_1 = E_2$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}ml^2\right)\omega^2 = mgl\sin 60^0 + mg\frac{l}{2}\sin 60^0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9\sqrt{3}g}{8l}} \qquad a_n = \omega^2\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}g}{16}$$

一般情况：

求：α用$M=J\alpha$

ω用动能定理或E守恒定律

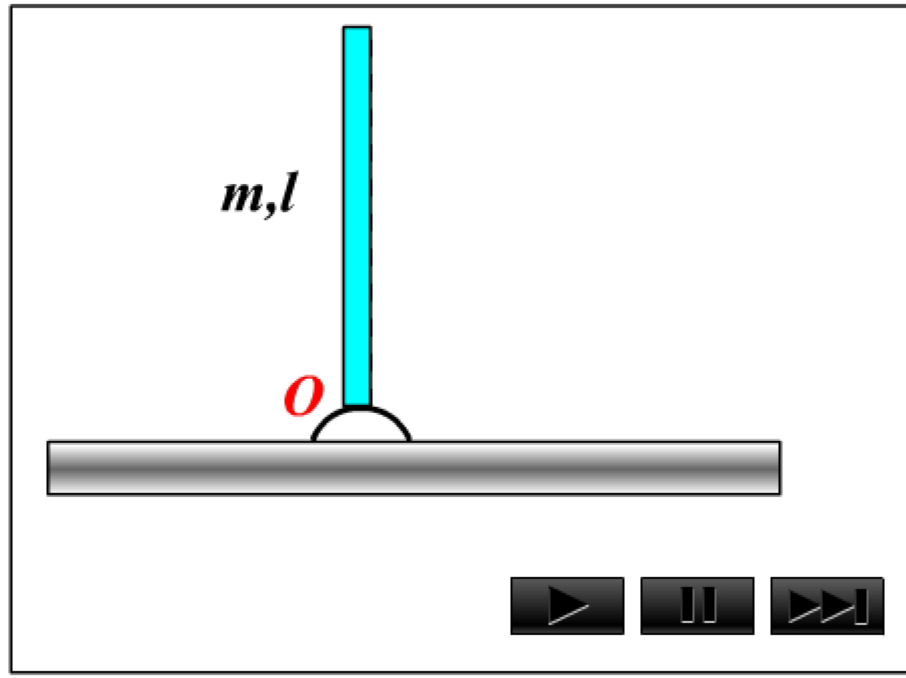
a_t、a_n、v用线量和角量关系式

【例 10】一长为 l 质量为 m 匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相接，并可绕其转动． 由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链 O 转动．试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度。

解 细杆受重力和铰链对细杆的约束力作用，$\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 由转动定律得

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\alpha \quad \text{式中} \quad J=\frac{1}{3}ml^2$$

得 $$\alpha=\frac{3g}{2l}\sin\theta$$

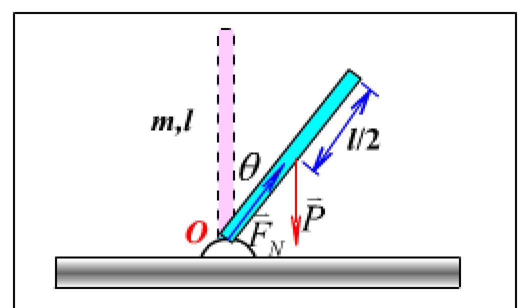


由角加速度的定义

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\omega\mathrm{d}\omega=\frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

代入初始条件积分 得 $$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$$



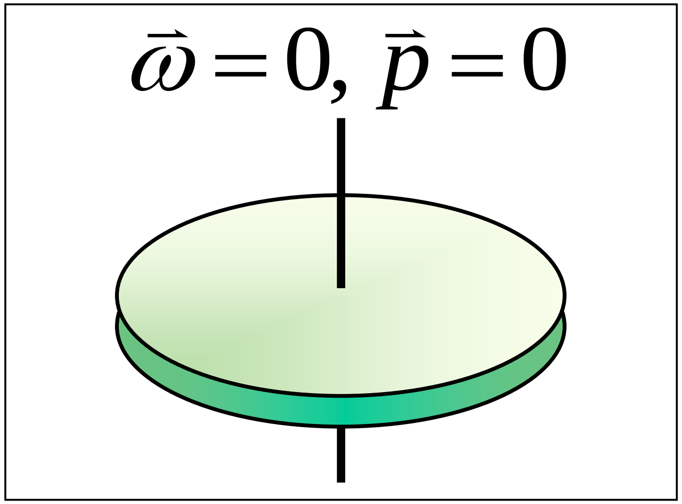
§3.4 刚体的角动量和角动量守恒定律

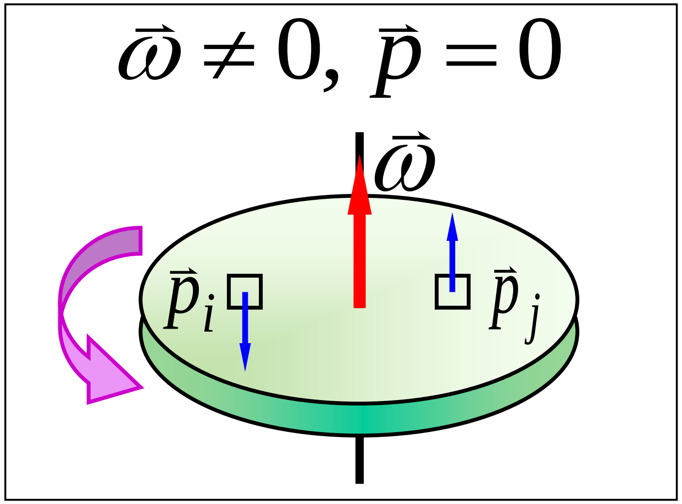
质点运动状态的描述

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad E_{\mathrm{k}} = mv^2/2$$

刚体定轴转动运动状态的描述

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \qquad E_{\mathrm{k}} = J\omega^2/2$$





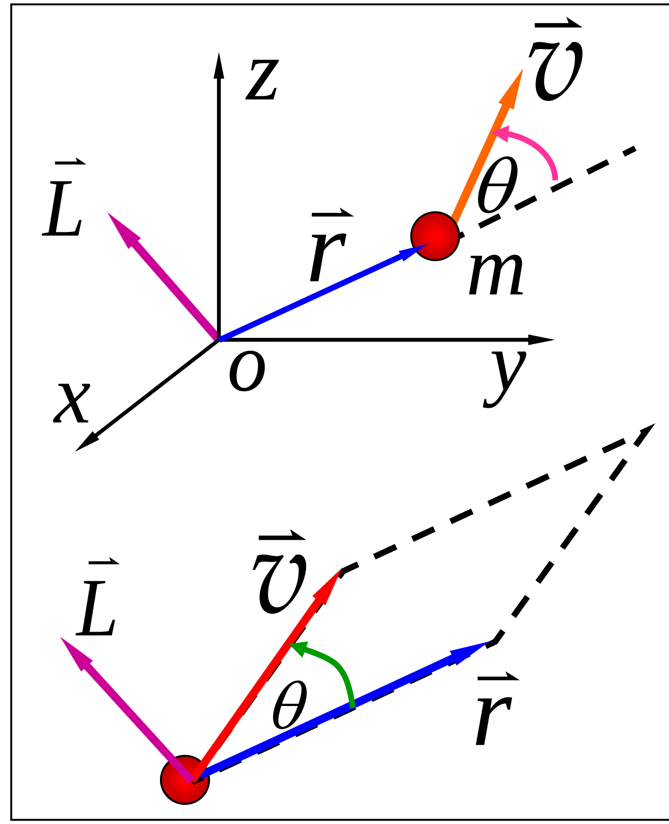
一、质点的角动量和角动量守恒

质量为 m 的质点以速度 $\vec{v}$ 在空间运动，某时刻相对原点 o 的位矢为 $\vec{r}$，质点相对于原点的角动量

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

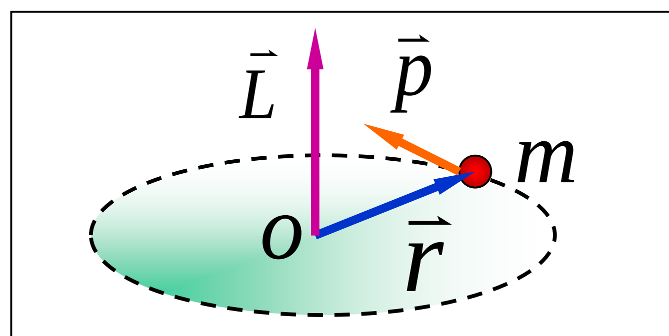
大小 $L=rmv\sin\theta$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则.



r 质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量

$$\boxed{L=mr^2\omega=J\omega}$$



质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}}$$

$$\because\ \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v},\quad \vec{v}\times\vec{p}=0 \qquad \therefore\ \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

作用于质点的合力对参考点 *O* 的力矩，等于质点对该点 *O* 的角动量随时间的变化率。

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t$

质点的角动量定理：对同一参考点 O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

质点的角动量守恒定律

$$\boxed{\vec{M} = 0} \qquad \vec{L} = \boxed{\text{恒矢量}}$$

质点所受对参考点 O 的合力矩为零时，质点对该参考点 O 的角动量为一恒矢量。

即刚体绕定轴转动动量矩为绕该轴转动惯量与角速度矢量之积

二、刚体定轴转动的角动量和角动量定理

质点：$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$

刚体：$\vec{M} = \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{d}{dt}(J\vec{\omega})$

※定轴转动：$M = \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{d}{dt}(J\omega) = J\dfrac{d\omega}{dt} + \omega\dfrac{dJ}{dt}$

1）若质点系为刚体（J为常数）

则：$M = J\dfrac{d\omega}{dt} = J\alpha$……转动定律

2）若质点系不是刚体（J 变化）

则：$M = J\alpha$ 不成立 但 $M = \dfrac{d}{dt}(J\omega)$ 成立

刚体定轴转动的角动量定理(积分式)

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} Mdt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d(J\omega) = J\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega = J\omega_2 - J\omega_1}$$

其中：$\int_{t_1}^{t_2} Mdt \cdots\cdots$冲量距

作用于刚体上冲量矩等于刚体动量矩增量

三、刚体的角动量守恒

由角动量定理可知，当$M=0$，则：$J\omega=J_0\omega_0$

即若系统的合外力矩为零，则系统的角动量守恒。

讨论：1. J、ω均不变， $J\omega$=常数

2. J、ω都改变， 但$J\omega$不变

刚体定轴转动的角动量理论总结

1 刚体定轴转动的角动量

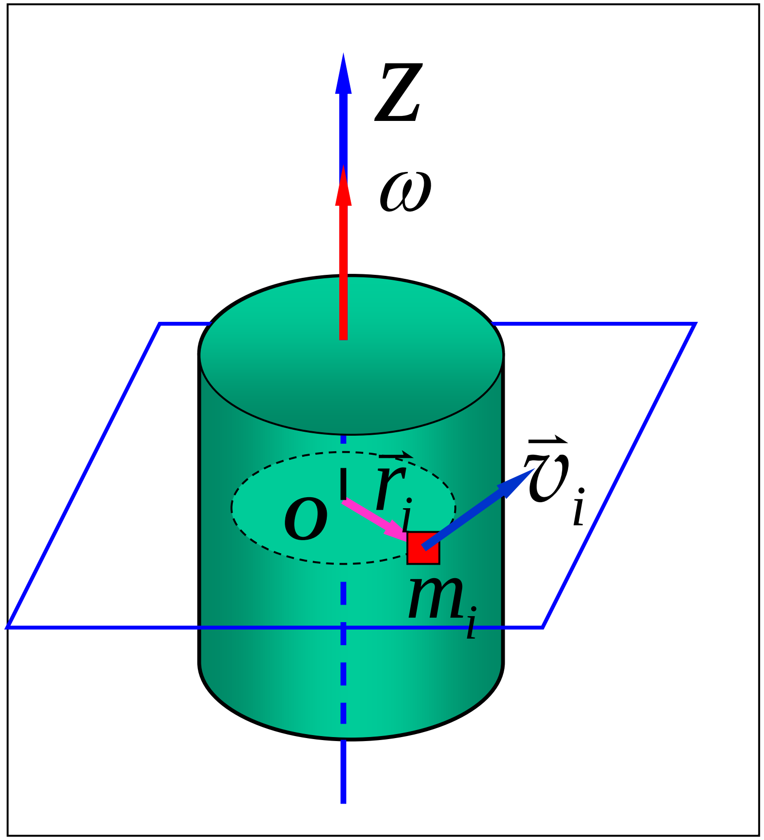
$$L = \sum_i m_i r_i v_i = (\sum_i m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L = J\omega}$$

2 刚体定轴转动的角动量定理

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1}$$



非刚体定轴转动的角动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$$

3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $M=0$，则 $\boxed{L=J\omega=\text{常量}}$

讨论

- 守恒条件 $M=0$

若 J 不变, ω 不变；若 J 变, ω 也变，但 $L=J\omega$ 不变.

- 内力矩不改变系统的角动量.
- 在冲击等问题中 $\because M^{\mathrm{in}} >> M^{\mathrm{ex}} \therefore L \approx \text{常量}$
- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律.

有许多现象都可以用角动量守恒来说明.

- 花样滑冰
- 跳水运动员跳水

跳台跳水　离心节速器　转盘

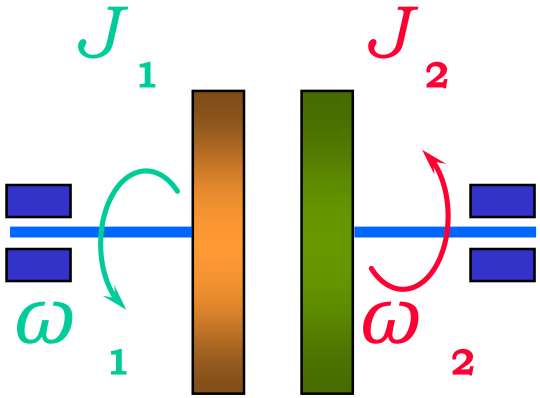
直升飞机的尾翼为什么要安装螺旋桨？

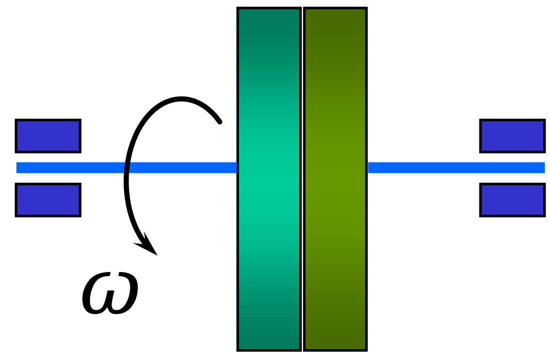
直升飞机

花样滑冰运动员通过改变身体姿态
即改变转动惯量来改变转速

【例 11】若对接前两轮的角速度分别为ω_1、 ω_2

求：1.对接后共同的角速度ω　　2.对接过程中的机械能损失





解：由角动量守恒得：　$J_1\omega_1 - J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 - J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2 - \left(\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2\right)$$

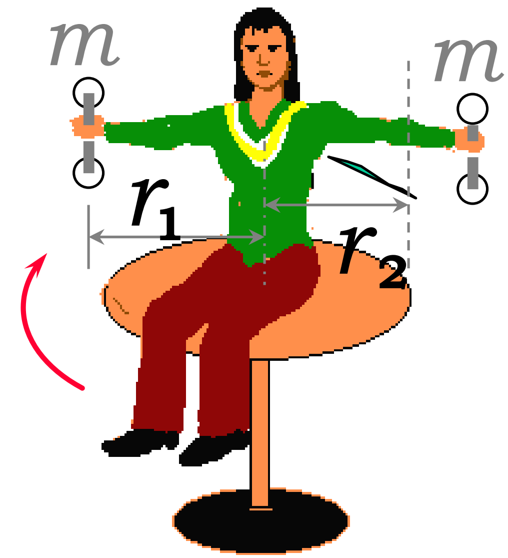
$$= -\frac{J_1 J_2(\omega_1 + \omega_2)^2}{(J_1 + J_2)} < 0$$

摩擦力矩作负功，有机械能损失。

【例 12】人和转盘的转动惯量为 J_0，哑铃的质量为 m，初始转速为ω_1。求：双臂收缩由r_1变为 r_2时的角速度及机械能增量。

解：由角动量守恒

$$(J_0+2mr_1^2)\ \omega_1=(J_0+2mr_2^2)\ \omega_2$$



解得：$\omega_2=\dfrac{(J_0+2mr_1^2)}{(J_0+2mr_2^2)}\omega_1$

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}(J_0+2mr_2^2)\ \omega_2^2-\frac{1}{2}(J_0+2mr_1^2)\ \omega_1^2$$

$$=\frac{1}{2}(J_0+2mr_1^2)\ \omega_1^2\left[\frac{J_0+2mr_1^2}{J_0+2mr_2^2}-1\right]>0$$

非保守内力作正功

【例 13】一质量为 M 长度为 L 的均质细杆可绕一水平轴自由转动。开始时杆子处于铅直状态。现有一质量为 m 的橡皮泥以速度 v 和杆子发生完全非弹性碰撞并且和杆子粘在一起。试求：1. 碰撞后系统的角速度； 2. 碰撞后杆子能上摆的最大角度。

解: (1)棒、泥为系统碰撞过程 $\vec{L}$ 守恒

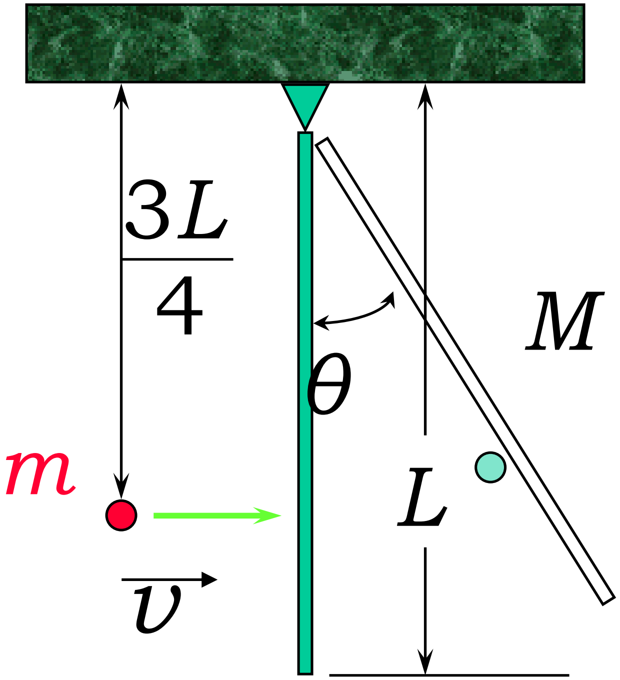
$$mv\frac{3}{4}L=[\frac{1}{3}ML^2+m(\frac{3}{4}L)^2]\omega \Rightarrow \omega=\frac{\frac{3}{4}mv}{[\frac{9}{16}mL+\frac{1}{3}ML]}$$

(2) 棒(泥)绕转轴上升过程，棒(泥)地球系统E守恒

$$\frac{1}{2}[\frac{1}{3}ML^2+m(\frac{3}{4}L)^2]\omega^2$$

$$=mg\frac{3}{4}L(1-\cos\theta)+Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \theta_{\max}=\cos^{-1}\frac{1-\frac{9}{32}m^2v^2}{(\frac{3}{4}m+\frac{1}{2}M)(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M)gL}$$

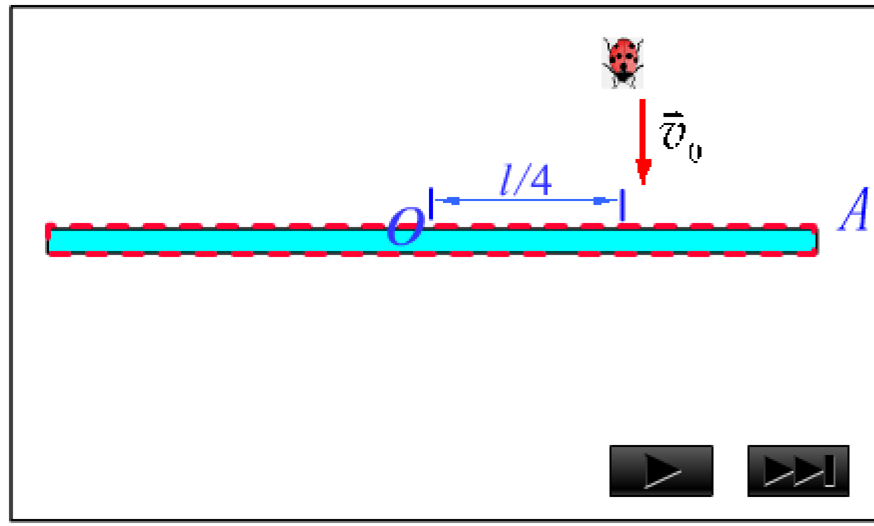


【例 14】质量很小长度为 l 的均匀细杆,可绕过其中心 O 并与纸面垂直的轴在竖直平面内转动.当细杆静止于水平位置时, 有一只小虫以速率 v_0 垂直落在距点 O 为 $l/4$ 处, 并背离点 O 向细杆的端点 A 爬行.设小虫与细杆的质量均为 m.问: 欲使细杆以恒定的角速度转动, 小虫应以多大速率向细杆端点爬行?

解　小虫与细杆的碰撞视为完全非弹性碰撞，碰撞前后系统角动量守恒

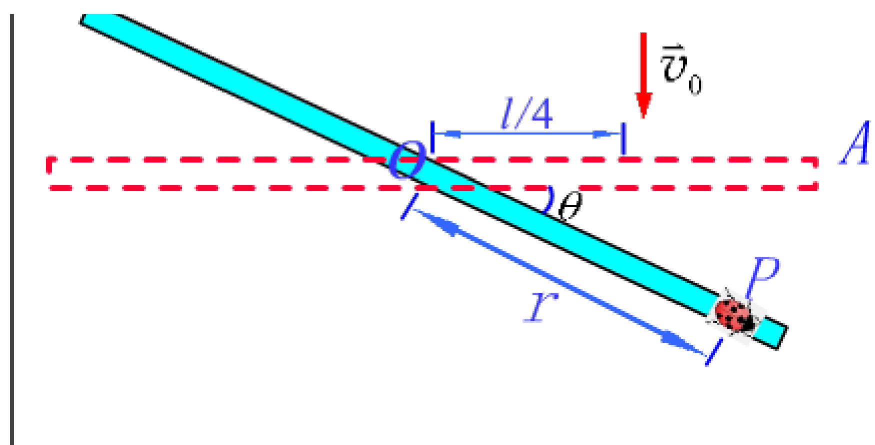
$$mv_0\frac{l}{4}=\left[\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right]\omega$$

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$



由角动量定理 $M=\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}=\omega\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$

即 $mgr\cos\theta=\omega\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{12}ml^2+mr^2\right)=2mr\omega\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$



考虑到 $\theta=\omega t$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t=\frac{7lg}{24v_0}\cos\left(\frac{12v_0}{7l}t\right)$$

【例 15】一杂技演员 M 由距水平跷板高为 h 处自由下落到跷板的一端 A, 并把跷板另一端的演员 N 弹了起来.设跷板是匀质的,长度为 l,质量为 m',跷板可绕中部支撑点 C 在竖直平面内转动, 演员的质量均为 m.假定演员 M 落在跷板上,与跷板的碰撞是完全非弹性碰撞.问演员 N 可弹起多高?

解　碰撞前 M 落在 A 点的速度 $v_{\mathrm{M}}=(2gh)^{1/2}$

碰撞后的瞬间, M、N具有相同的线速度 $u=\dfrac{l}{2}\omega$

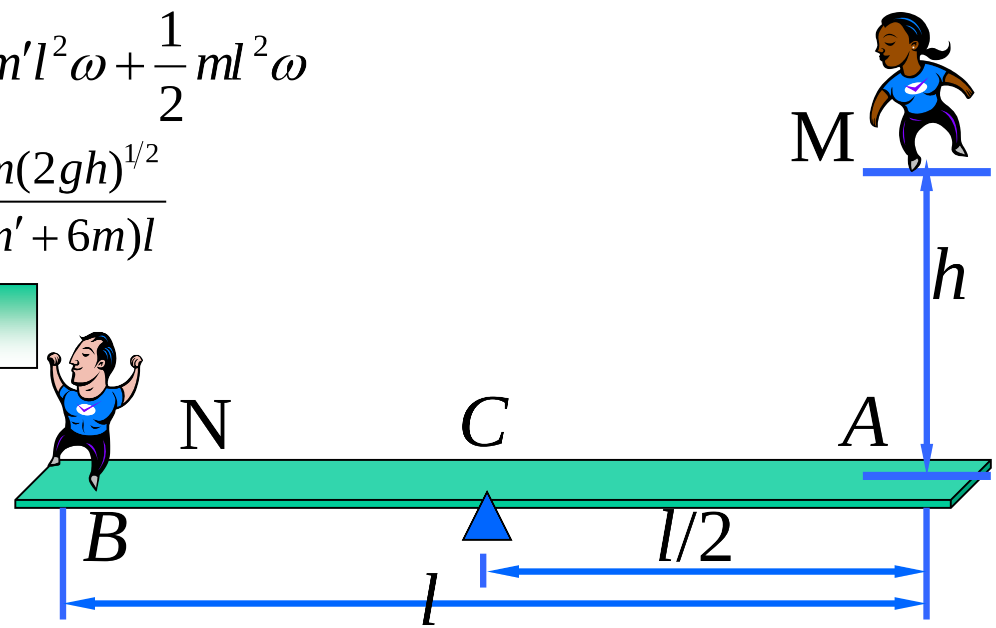
把M、N和跷板作为一个系统, 角动量守恒

$$mv_{\mathrm{M}}\frac{l}{2}=J\omega+2mu\frac{l}{2}=\frac{1}{12}m'l^2\omega+\frac{1}{2}ml^2\omega$$

解得
$$\omega=\frac{mv_{\mathrm{M}}l/2}{m'l^2/12+ml^2/2}=\frac{6m(2gh)^{1/2}}{(m'+6m)l}$$

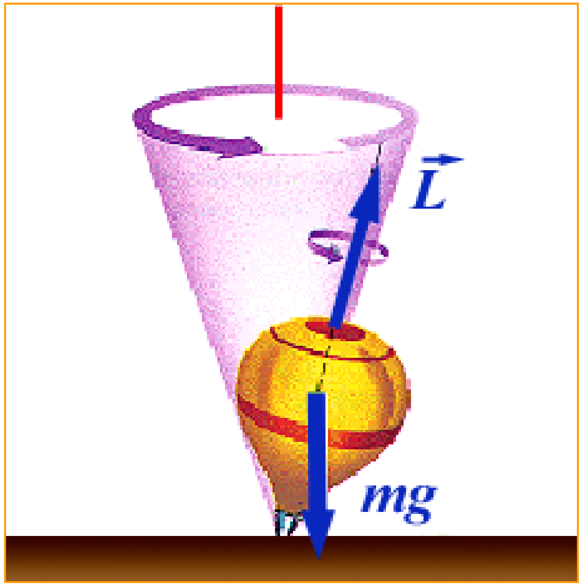
演员 N 以 u 起跳, 达到的高度

$$h'=\frac{u^2}{2g}=\frac{l^2\omega^2}{8g}=\left(\frac{3m}{m'+6m}\right)^2h$$



§3.5 旋进

1、陀螺

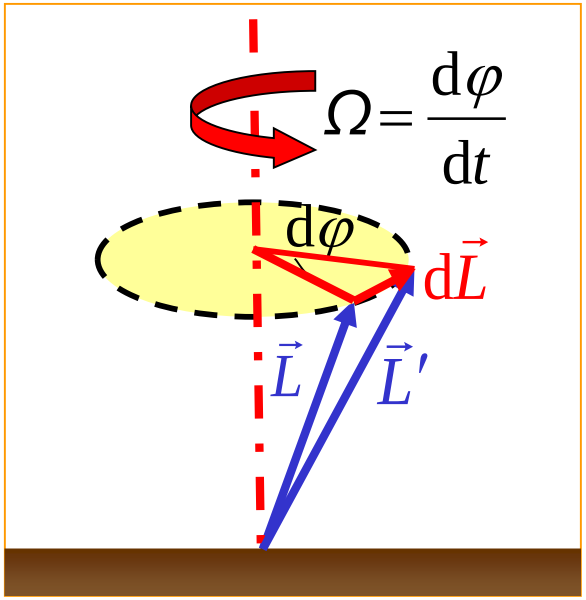


(1) 若 $\vec{L}=0$，则在重力矩 $\vec{r}_c\times m\vec{g}$ 作用下，陀螺将绕垂直于板面的轴转动，即倒地。

(2) 当 $\vec{L}\neq 0$ 时，重力矩 $\vec{r}_c\times m\vec{g}$ 将改变 $\vec{L}$ 的方向，而不改变 $\vec{L}$ 的大小，因

$$\vec{r}_c\times m\vec{g}\perp\vec{L}$$

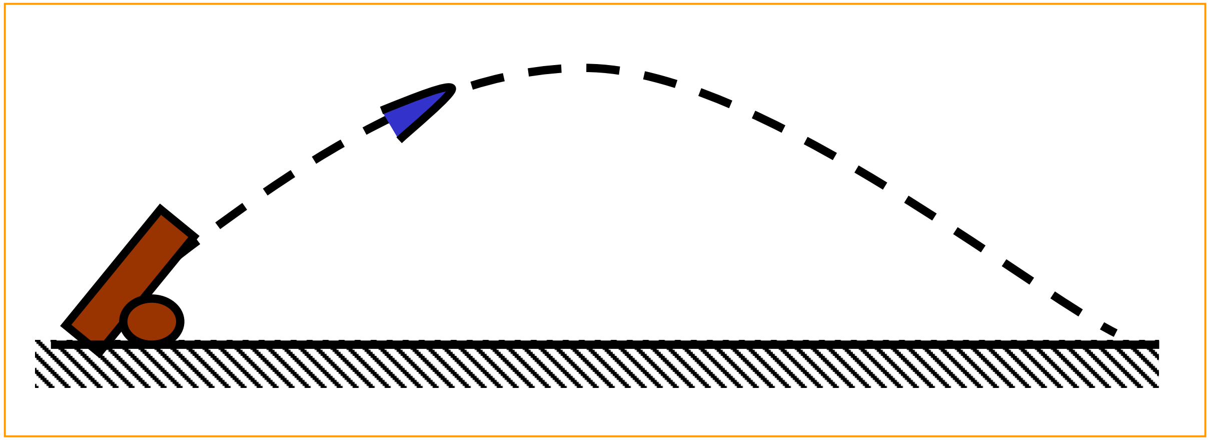
$$\because\ \vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\qquad\therefore\ \mathrm{d}\vec{L}\perp\vec{L}$$



最终效果：陀螺绕竖直轴旋转— 旋进

旋进角速度 $\Omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}L}{L\sin\theta\,\mathrm{d}t}=\frac{M}{L\sin\theta}$ $(\omega>>\Omega)$

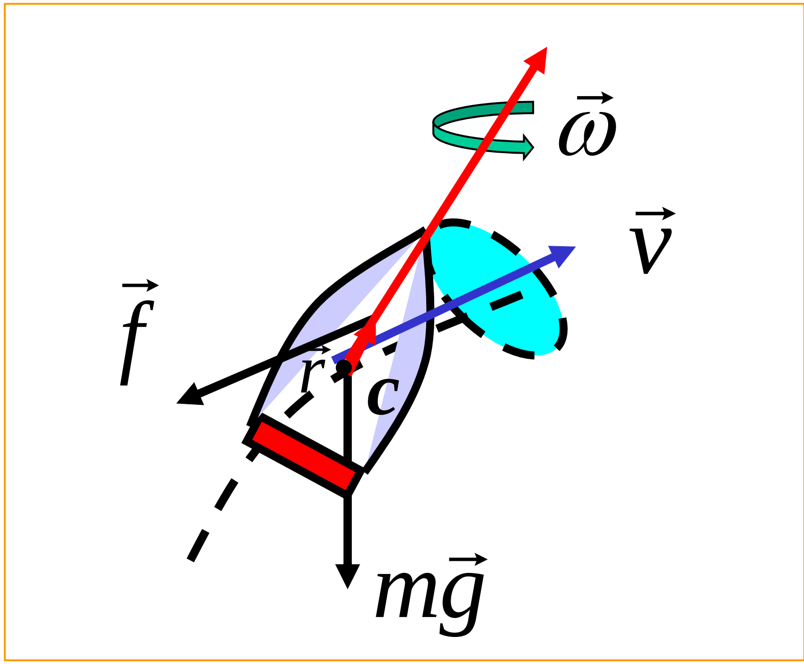
2、抛体的旋进



3、旋进现象在自然界广泛存在：

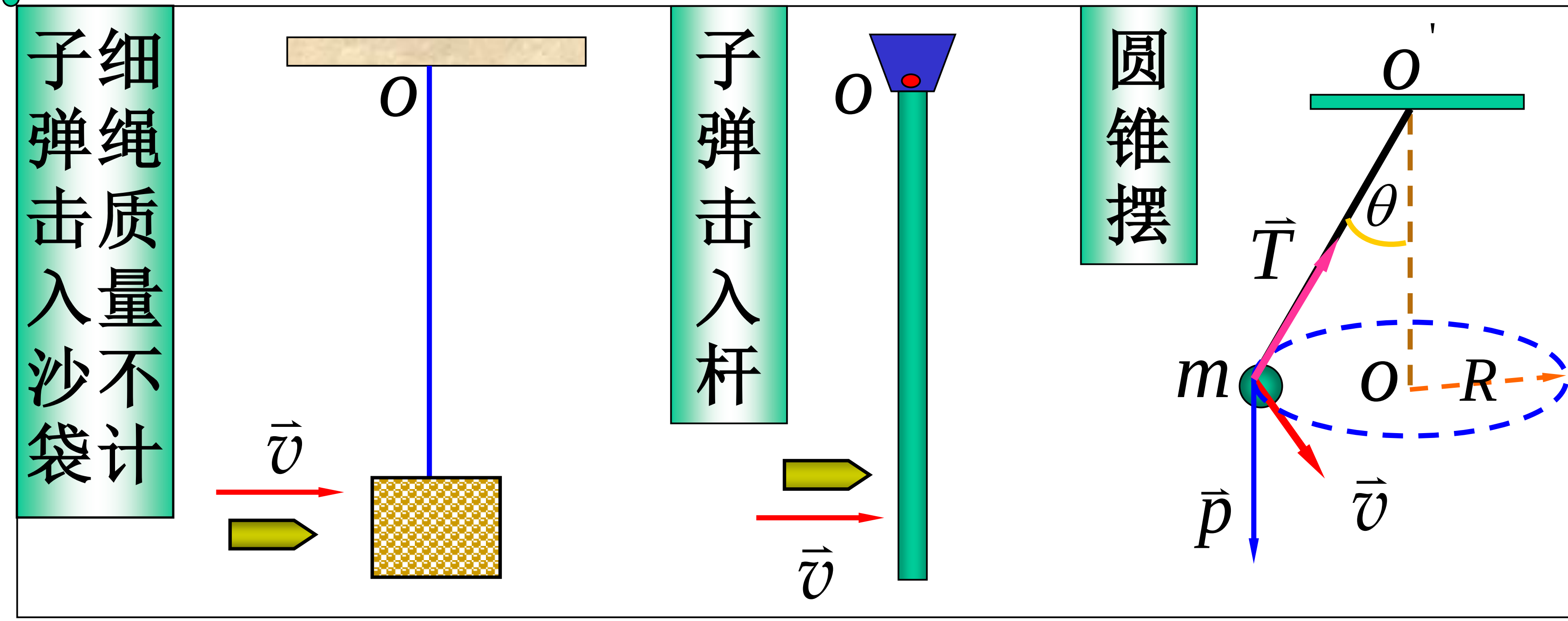
地球的旋进；

用电子在外磁场中的旋进解释物质的磁化的本质；



……

讨论



以子弹和沙袋为系统
动量守恒；
角动量守恒；
机械能不守恒 .

以子弹和杆为系统
动量不守恒；
角动量守恒；
机械能不守恒 .

圆锥摆系统
动量不守恒；
角动量守恒；
机械能守恒 .

§3.6 经典力学的成就和局限性

17 世纪牛顿力学构成了体系。可以说，这是物理学第一次伟大的综合。牛顿建立了两个定律，一个是运动定律，一个是万有引力定律，并发展了变量数学微积分，具有解决实际问题的能力。他开拓了天体力学这一科学，海王星的发现就充分显示了这一点。

一　经典力学只适用于处理物体的低速运动（$v \ll c$）

1　质点高速运动时伽利略变换为洛伦兹变换所代替

2　质点高速运动时的相对论性质量 $\boxed{m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}}$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

3　相对论动能 $\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2} \xrightarrow[v \ll c]{} E_k = \dfrac{1}{2}m_0v^2$

4　相对论质能关系 $\boxed{E = mc^2}$

二 确定性与随机性

确定性：已知物体初始运动状态及所受的力，应用牛顿定律可以确定运动物体任意时刻的运动状态和确定的运动轨迹 。初始运动状态的微小变化只能引起运动轨迹的微小变动。海王星的发现是牛顿力学确定论成功的典范。

牛顿力学具有内在随机性：应用牛顿定律可解的问题只是线性的，在自然界中只是一些特例，普遍存在的问题都是非线性的。现在知道，只要确定论的系统稍微复杂一些，它就会表现出随机行为，运动对初始条件特别敏感，存在混沌现象 。目前关于混沌的研究已涉及到生物学、天文学、社会学等领域。

三 能量的连续性与能量量子化

经典物理中，宏观物体的能量是连续变化的，但近代物理的理论证明，能量的量子化是微观粒子的重要特性 .

- 普朗克提出一维振子的能量

$$\boxed{E = nh\nu \quad (n = 1,2,3\cdots)}$$

- 爱因斯坦认为光子能量

$$\boxed{\varepsilon = h\nu}$$

量子力学指出，物体（微观粒子）的位置和动量相互联系，但不能同时精确确定，并且一般作不连续的变化 .