4-3对称共焦腔内外的光场分布与激光横模

4.3.1 对称共焦腔内外的光场分布

回顾 ——讨论自再现模积分方程解的物理意义，建立了激光模式的概念.

内容 —— 求解对称开腔中的自再现模积分方程，求出**本征值和本征函数**，了解输出激光的具体场的分布，**从而决定开腔自再现模的全部特征。**

$$\sigma_{mn}u_{mn}(x,y)=\iint K\ (x,y,x',y')u_{mm}(x',y')ds' \quad \textbf{(3-7)}$$

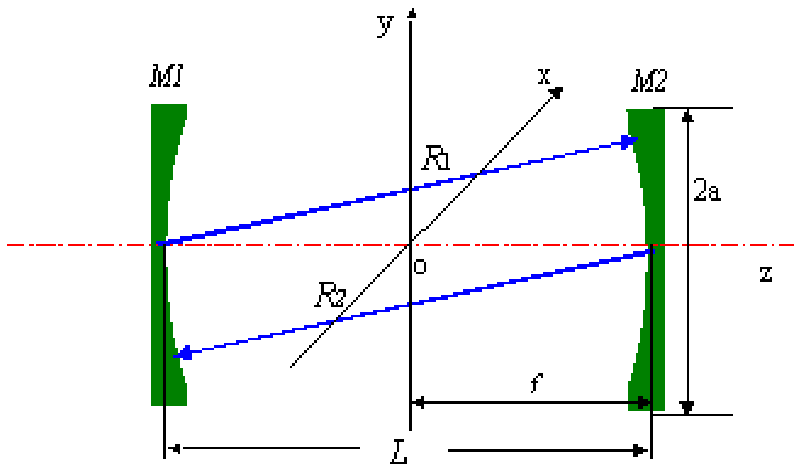
$$K(x,y,x',y')=\frac{ik}{2\pi L}e^{-ik\rho(x,y,x',y')}=\frac{i}{\lambda L}e^{-ik\rho(x,y,x',y')}$$

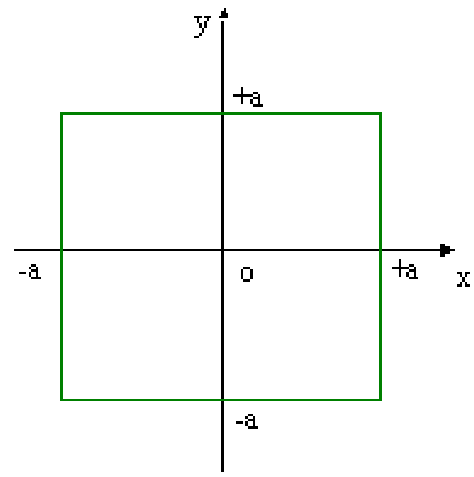
求解本征积分方程可得

- ❖镜面上场的振幅分布；
- ❖镜面上场的位相分布；
- ❖模的衰减；
- ❖模的相移；
- ❖模的谐振频率。

4.3.2 共焦腔镜面上的场分布

一. 方形镜面对称共焦腔





$$R_1 = R_2 = L = 2f$$

$$L >> a >> \lambda,$$

$$\frac{a^2}{L\lambda} >> (\frac{L}{a})^2$$

设方镜每边长为2*a*，共焦腔的腔长为*L*，光波波长为λ，并把x，y坐标的原点选在镜面中心, 而以(x，y)来表示镜面上的任意点

以方型镜面的对称共焦腔为例,求解(3-7)式方程

$$\sigma_{mn}u_{mn}(x,y)=\iint K\ (x,y,x',y')u_{mm}(x',y')ds'$$

二. 近轴情况下自再现模积分方程的解析解

1、本征函数的近似解：

$$u_{mn}\approx C_{mn}H_m(X)H_n(Y)e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}} \quad （3-18）$$

其中$X=x\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda L}},Y=y\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda L}}$ $H_m(X)$和$H_n(Y)$ 均为厄密多项式

$e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}$——高斯型函数 C_{mn} —— 常系数

镜面上的场分布是厄米多项式与高斯函数函数的乘积——厄米多项式的零点决定了场图的零点，高斯函数决定了场分布的外形轮廓

2、本征值的近似解：

$$\sigma_{mn}=\exp[-i(kL-(m+n+1)\frac{\pi}{2}] \quad （3-19）$$

本征函数描述共焦腔镜面上场的振幅和相位分布。

3. 场分布

$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}x\right)H_n\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$

几个低阶厄米多项式的值

$$H_0(\zeta)=1 \qquad H_1(\zeta)=2\zeta$$

$$H_2(\zeta)=4\zeta^2-2$$

$$H_3(\zeta)=8\zeta^3-12\zeta$$

$$H_4(\zeta)=16\zeta^4-48\zeta^2+12$$

$$H_m(\xi)=(-1)^m e^{\xi^2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\xi^m}e^{-\xi^2}$$

一、什么是横模

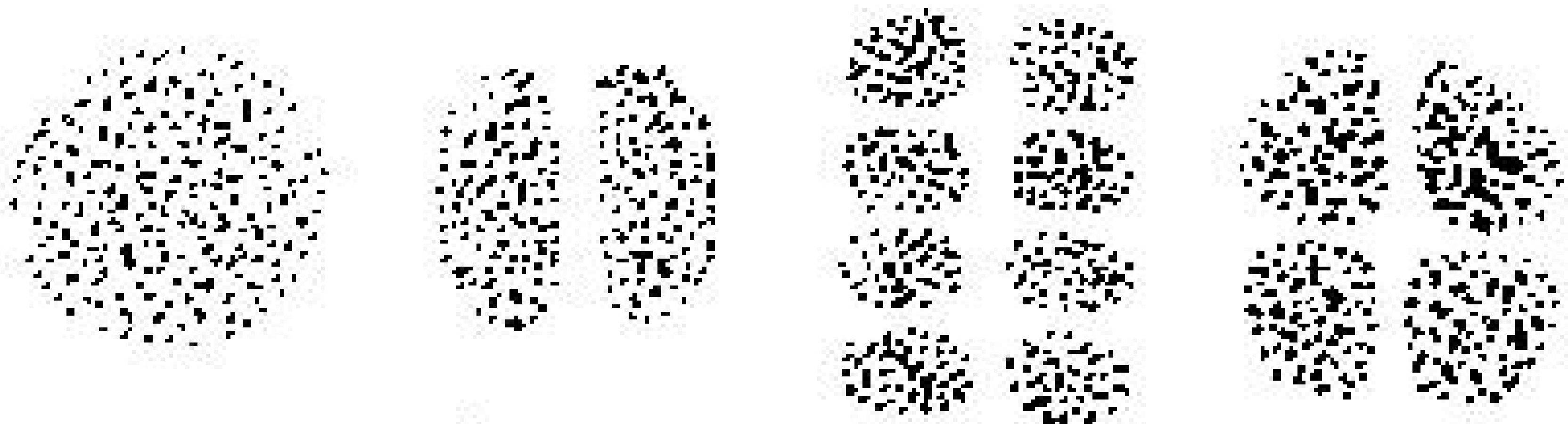
横模：沿光场传播方向的垂直截面上的稳定的

光强分布形式。

激光的模式用符号TEM_{mnq}表示，q是纵模序数，m和n是横模序数，等于垂直光传播方向内两个互相垂直方向上光强极小（暗区）的数目。

轴对称

TEM_{00}（基模） TEM_{10} TEM_{13} TEM_{11}

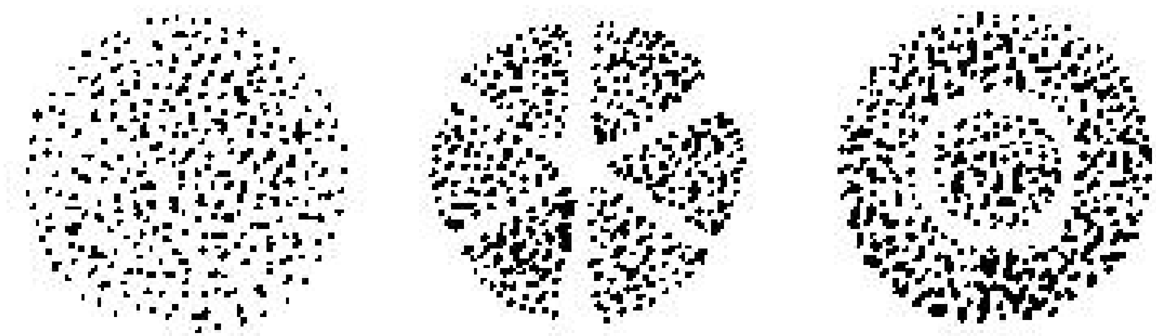


(a) TEM_{00} (b) TEM_{10} (c) TEM_{11} (d) TEM_{11}

m, n表示x, y方向暗区个数。

旋转对称

TEM_{00}　　TEM_{03}　　TEM_{10}



(e) TEM_{00}　(f) TEM_{03}　(g) TEM_{10}

m, n表示r, θ方向暗区个数。

基模为TEM_{00q}，其余的为高阶模。

三. 镜面上自再现模场的特征

1. 厄米—高斯近似共焦腔方型镜上场的振幅（强度）分布

$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}x\right)H_n\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}} \qquad （3\text{-}18）$$

① **基模：** 取（3−18）式中 $m=n=0$，得到共焦腔方型镜上基模 TEM_{00} 场的分布

因为 $$H_0(\xi)=1$$

所以 $$u_{00}(x,y)=C_{00}e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$

可见，基模在镜面上的分布是高斯型的，模的振幅从镜中心（$x=y=0$）向边缘平滑地降落。在离中心的距离为

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}}$$

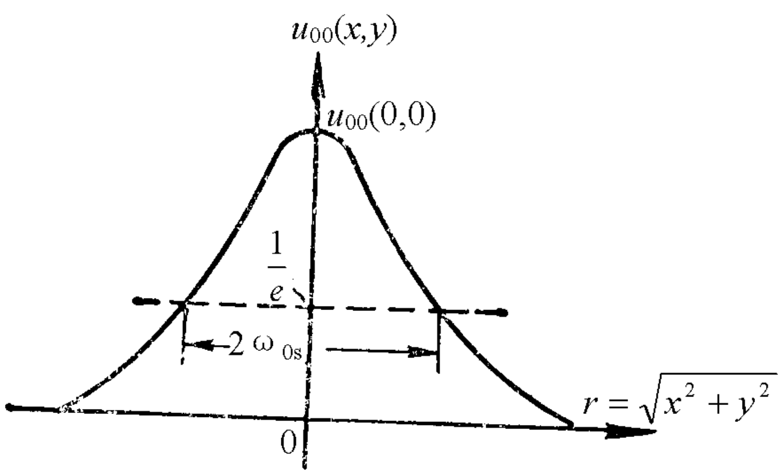
处场的振幅降落为中心处的$1/e$。

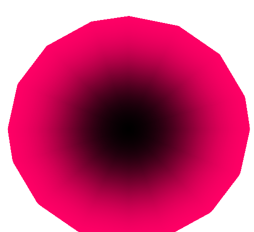
②定义基模光斑半径为 $\omega_{0s} = \sqrt{\dfrac{L\lambda}{\pi}}$

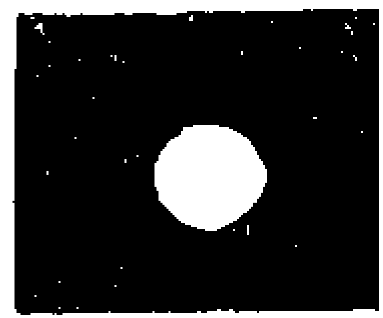
基模振幅最大值的1/e处

基模光束的能量集中在光斑有效截面圆内. 上式表明，共焦腔**基模在镜面上的光斑半径与镜的横向尺寸无关**，**只与腔长有关**。这是共焦腔的主要特征。

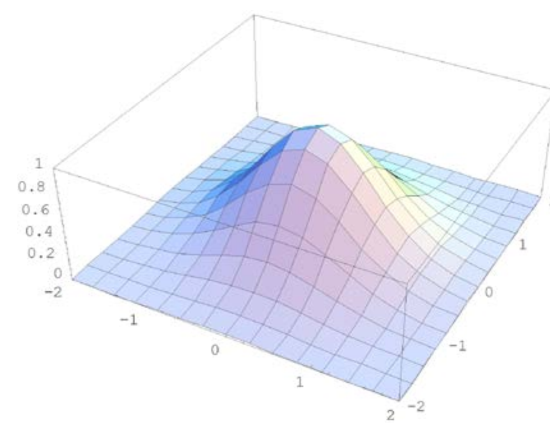
$$u_{00}(x,y) = C_{00} e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$







TEM_{00}



数值例：$L=1m$,$\lambda=10.6\mu m$,

共焦腔的CO_2激光器 $\omega_{0s}\approx 1.84mm$

$L=30cm$, $\lambda=0.6328\mu m$,共焦腔的H_e—N_e激光器

$\omega_{0s}\approx 0.25mm$ 可见，共焦腔的光斑半径非常小。

由 $\omega_{0s}=\sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}}$ 可知, 增大镜面宽度, 只减少衍射损耗, 对光斑尺寸并无影响.

③镜面上场的振幅和强度分布—高阶横模

利用基模光斑半径，本征函数的解可以写为：

$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$

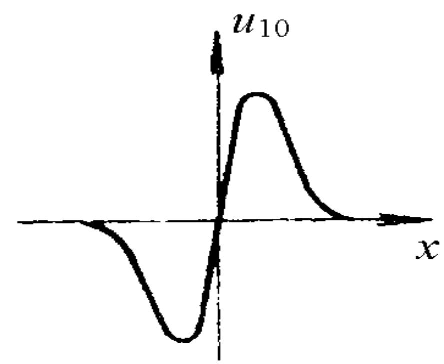
当m、n取不同时为零的一系列整数时，由上式可得出镜面上各高阶横模的振幅分布

因为 $H_1(\xi)=2\xi$ $H_0(\xi)=1$ 故

$$u_{10}=C_{10}\frac{2\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}\right)$$

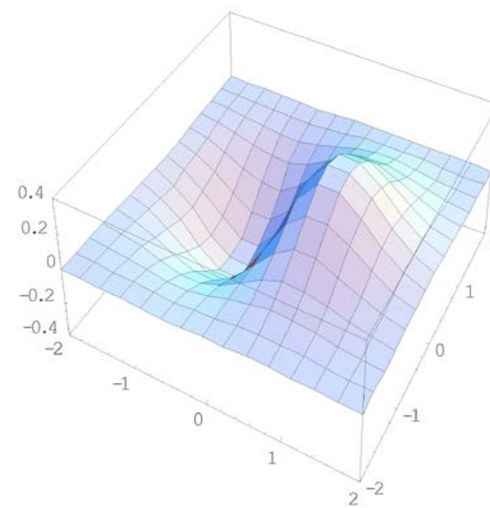
$$=C_{10}^{'}x\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\omega_{0s}}\right)$$

当$x=0$时$u_{10}=0$，出现一条暗线



TEM_{10}

TEM_{10}



$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x)H_n(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}y)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$

因为 $H_1(\xi)=2\xi$ $H_0(\xi)=1$ 故

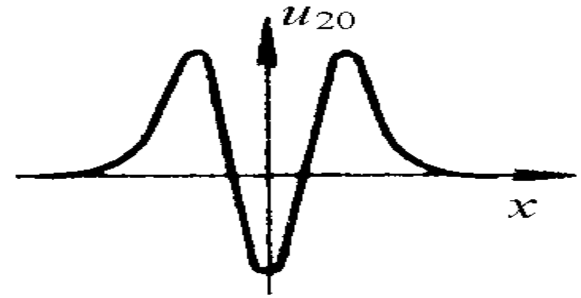
TEM_{01}

$$u_{01}=C_{01}\frac{2\sqrt{2}}{\omega_{0s}}y\cdot\exp(-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi})$$

$$=C_{01}^{'}y\cdot\exp(-\frac{x^2+y^2}{\omega_{0s}})$$

当$y=0$时$u_{01}=0$，出现一条暗线

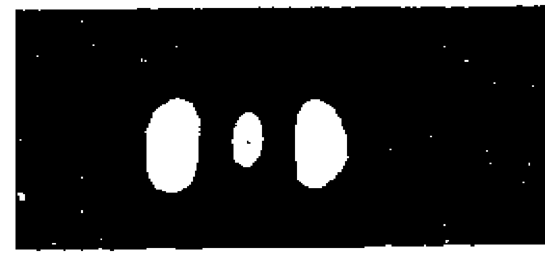
$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x)H_n(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}y)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$



TEM_{20}

因为 $H_2(\xi)=4\xi^2-2$ $H_0(\xi)=1$ 故

$$u_{20}=C_{20}[4\frac{2x^2}{\omega_{0s}^2}-2]\cdot\exp(-\frac{x^2+y^2}{\frac{L\lambda}{\pi}})$$

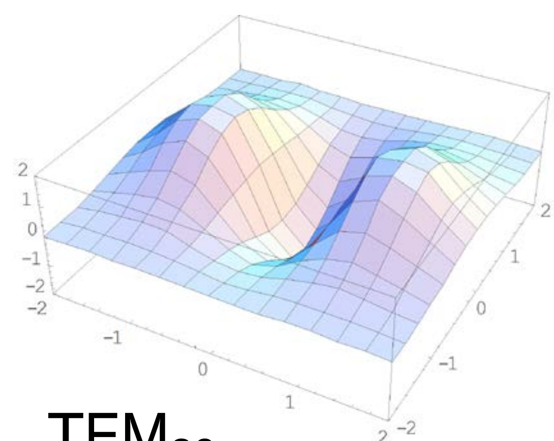


TEM_{20}

$$=C_{20}^{'}(4x^2-\omega_{0s}^2)\cdot\exp(-\frac{x^2+y^2}{\omega_{0s}^2})$$

$x=\pm\frac{\omega_{0s}}{2}$ 时 $u_{20}=0$

x方向出现两条暗线



TEM_{20}

$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x)H_n(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}y)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$

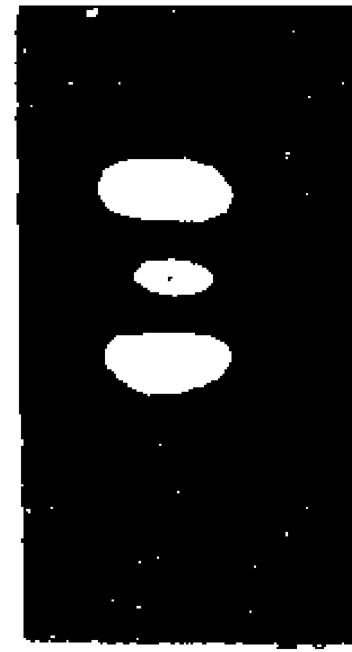
因为 $H_2(\xi)=4\xi^2-2$ $H_0(\xi)=1$ 故

$$u_{02}=C_{02}[4\frac{2y^2}{\omega_{0s}^2}-2]\cdot\exp(-\frac{x^2+y^2}{\frac{L\lambda}{\pi}})$$

$$=C_{02}^{'}(4y^2-\omega_{0s}^2)\cdot\exp(-\frac{x^2+y^2}{\omega_{0s}^2})$$

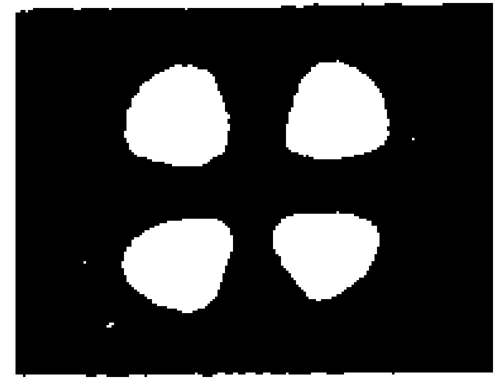
$y=\pm\frac{\omega_{0s}}{2}$ 时 $u_{02}=0$

y方向出现两条暗线



TEM_{02}

$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$



TEM_{11}

因为 $H_1(\xi)=2\xi$ 故

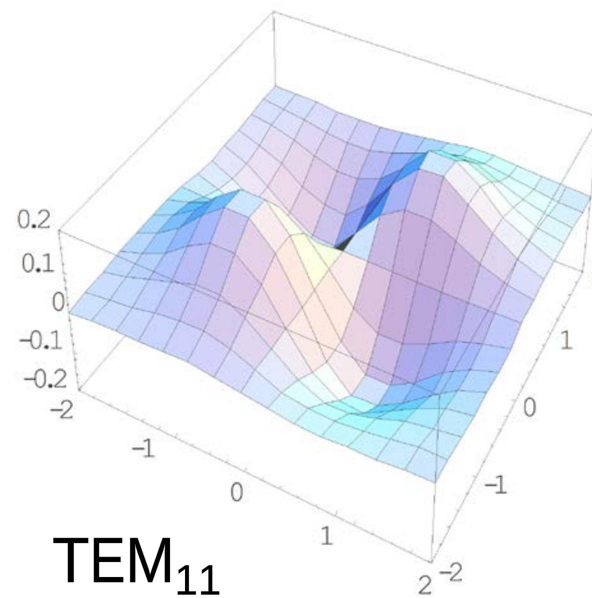
$$u_{11}=C_{11}\cdot 4\cdot\frac{2}{\omega^2{}_{0s}}xy\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\omega_{0s}^2}\right)$$

$$=C_{11}^{'}xy\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\omega_{0s}^2}\right)$$

当 $x=0$ 时 $u_{11}=0$

$y=0$ 时 $u_{11}=0$

在 x、y方向各出现一条暗线



TEM_{11}

$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x)H_n(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}y)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$

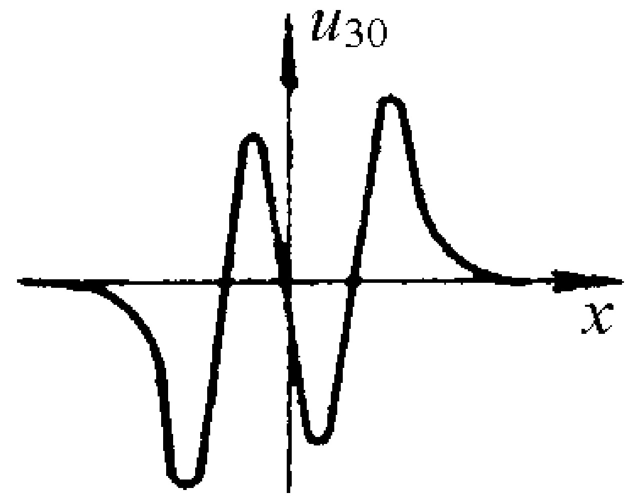
因为 $H_3(\xi)=8\xi^3-12\xi$　　$H_0(\xi)=1$　　故

$$u_{30}=C_{30}\ (\frac{16\sqrt{2}}{\omega_{0s}^3}x^3-\frac{12\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x)\ \exp(-\frac{x^2+y^2}{\omega_{0s}^2})$$

当 $x=0$ 和 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_{0s}$ 时

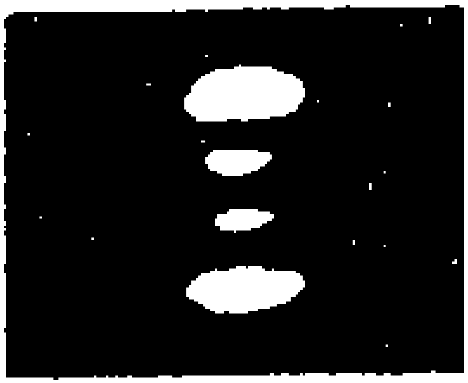
$u_{30}=0$

在 x 方向各出现三条暗线

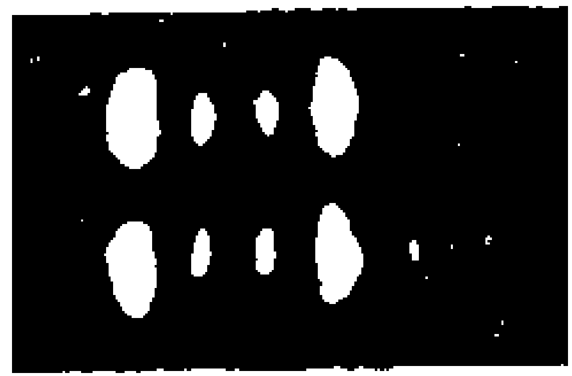


TEM_{30}

$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$



TEM_{03}



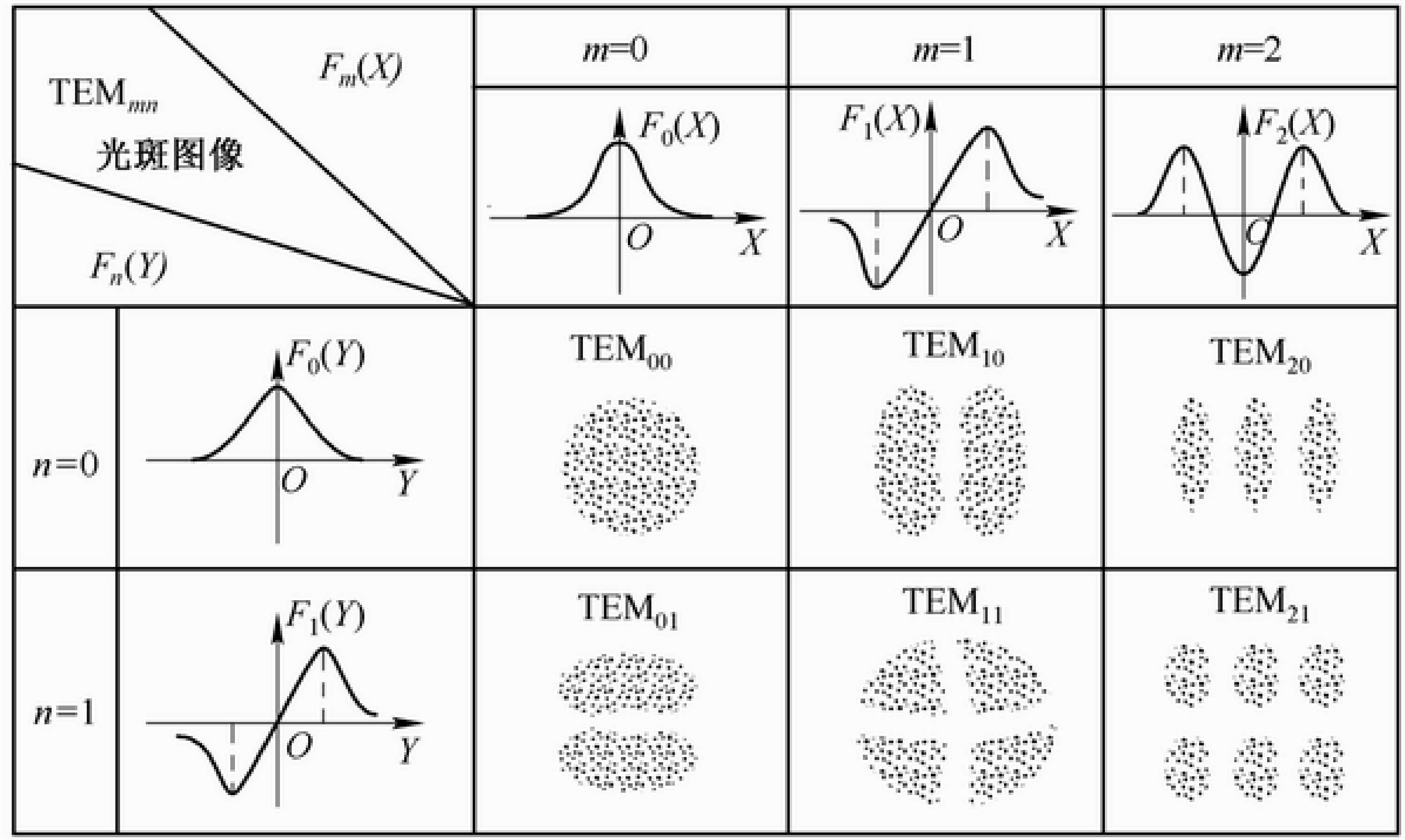
TEM_{31}

可以看出，$\boldsymbol{TEM_{mn}}$模在镜面上振幅分布的特点取决于<u>厄米多项式与高斯函数的乘积</u>。厄米多项式的零点决定场的节线，厄米多项式的正负交替的变化与高斯函数随着$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$的增大而单调下降的特征决定着场分布的外形轮廓。

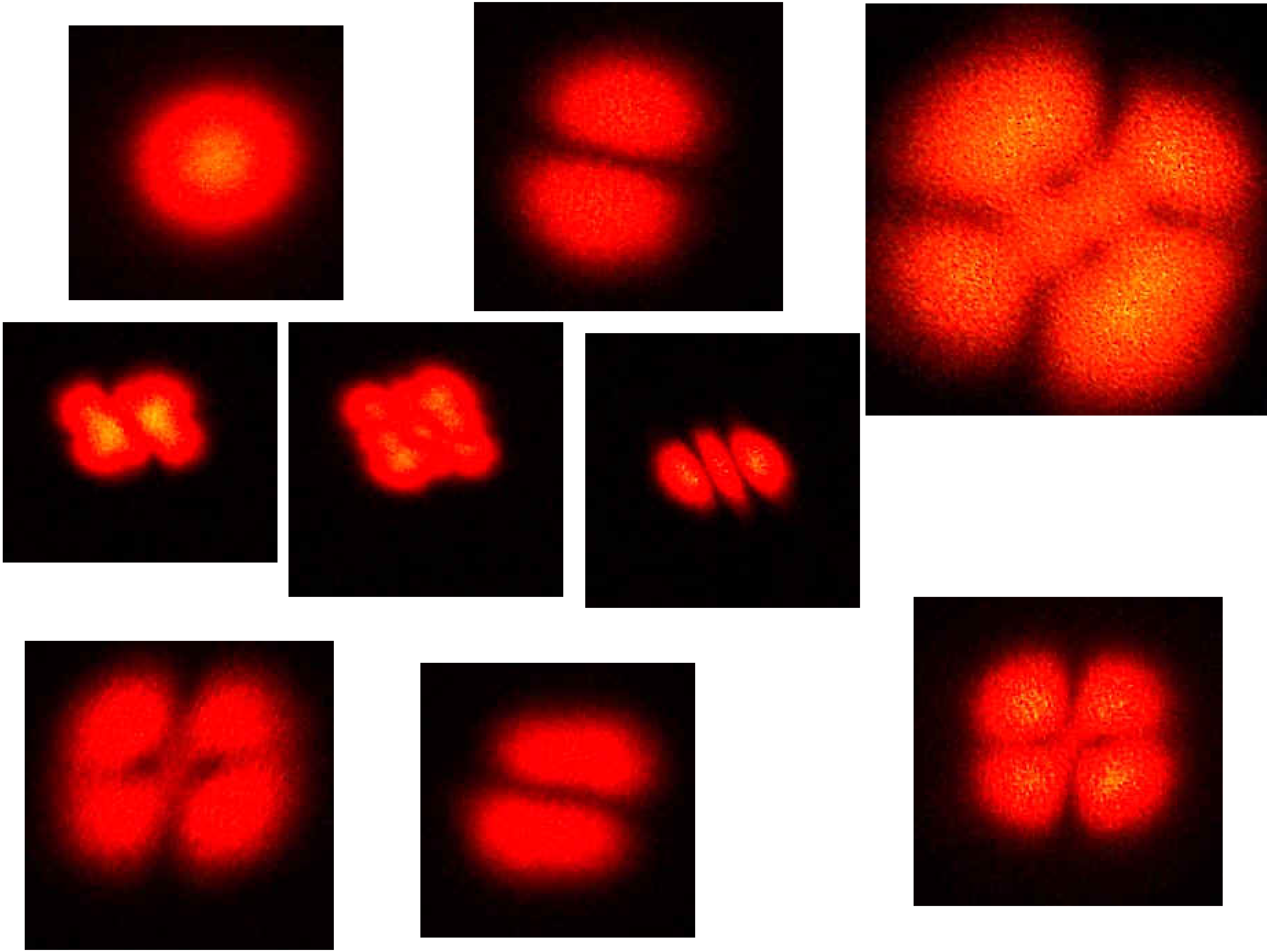
④高阶模的光斑尺寸与基模的关系

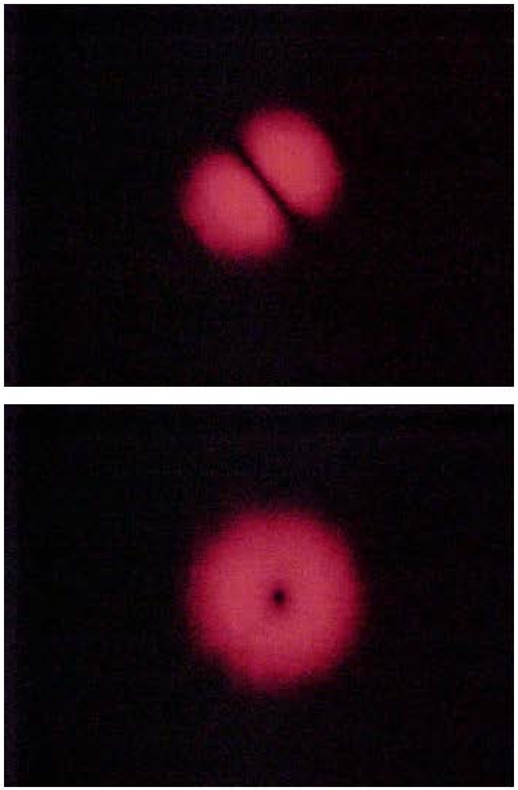
$$\left.\begin{aligned} \omega_{ms} &= \sqrt{2m+1}\,\omega_{0s} \\ \omega_{ns} &= \sqrt{2n+1}\,\omega_{0s} \end{aligned}\right\}$$

可见, 阶次越高, 光斑半径越大, 光强分布越偏离中心.

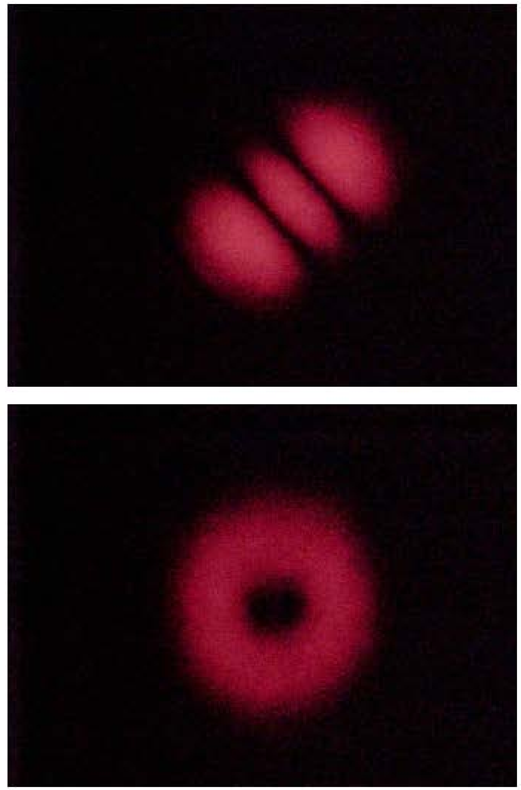


图(3-5) $F_m(X)-X$及$F_n(Y)-Y$的变化曲线及相应的光强分布

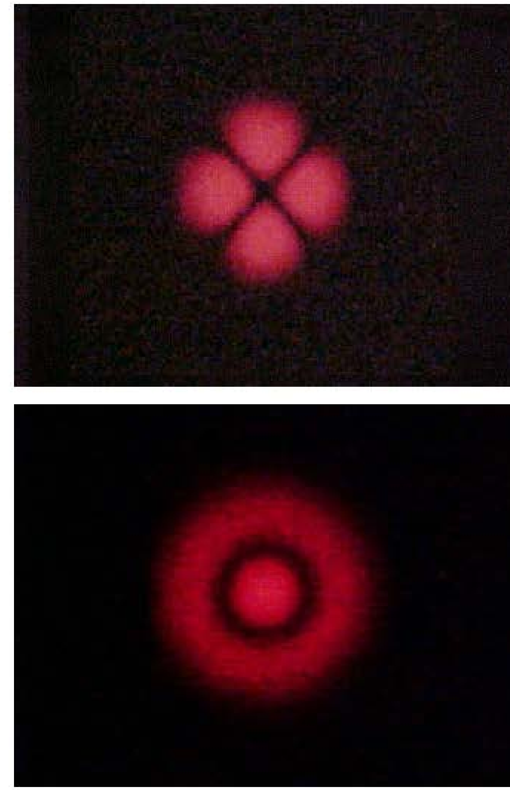




$HG_{10} \Rightarrow LG_{10}$



$HG_{20} \Rightarrow LG_{20}$



$HG_{11} \Rightarrow LG_{11}$

- Description of light
  - Intensity, $I \geq 0$
  - Phase, $2\pi \geq \phi \geq 0$

    $\phi = \omega t + kz + \ell\theta$

    $\ell = 0$, plane wave

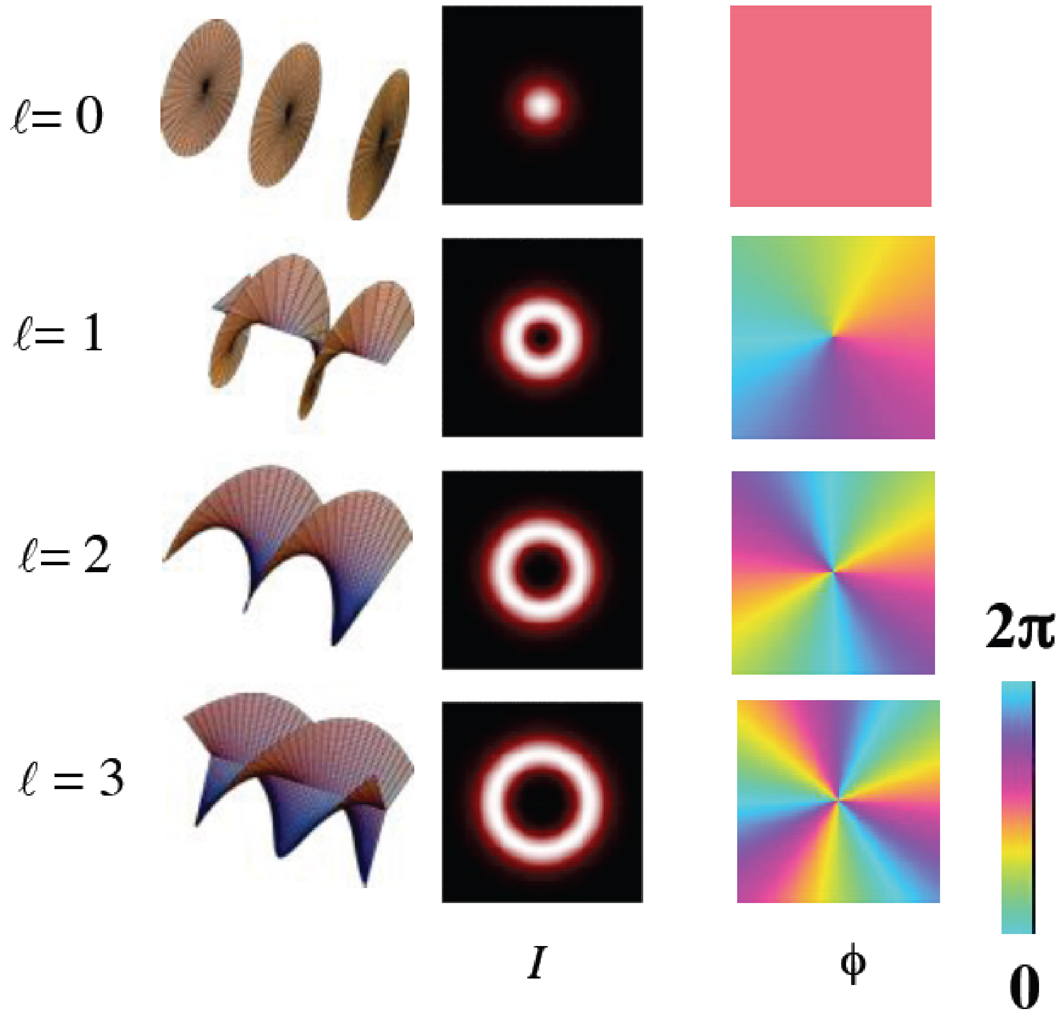
    $\ell = 1$, helical wave

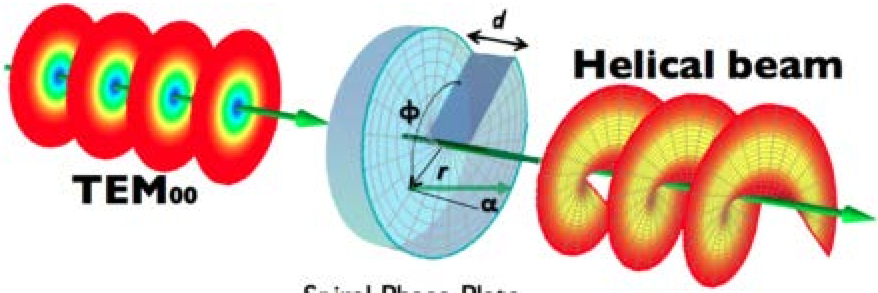
    $\ell = 2$, double helix

    $\ell = 3$, pasta fusilli

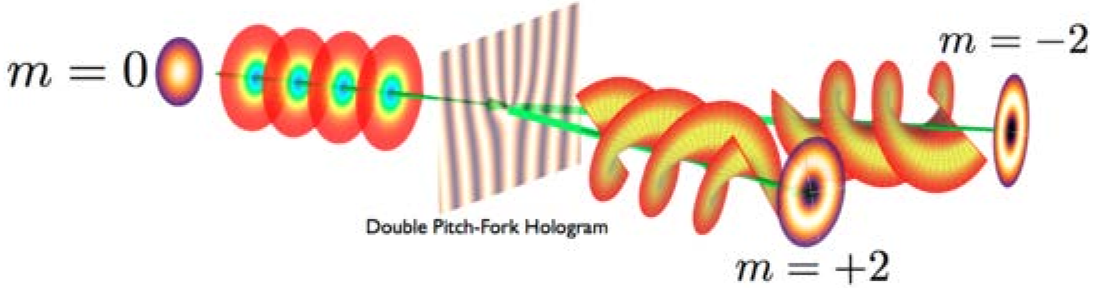
    etc.

ℓ = vortex charge

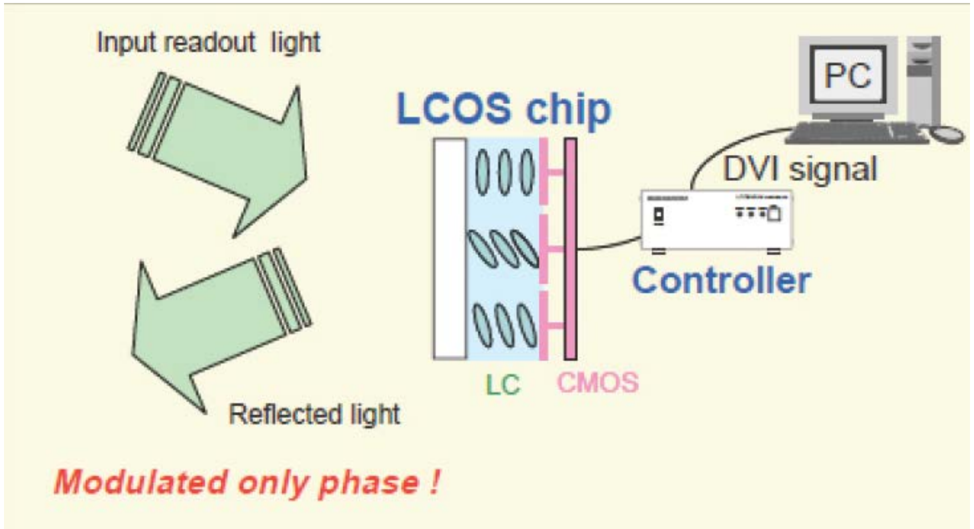


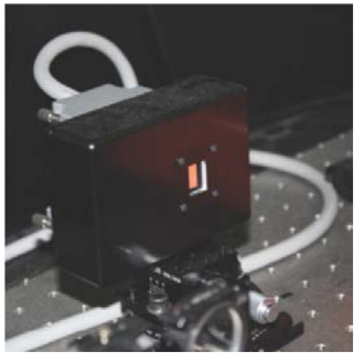


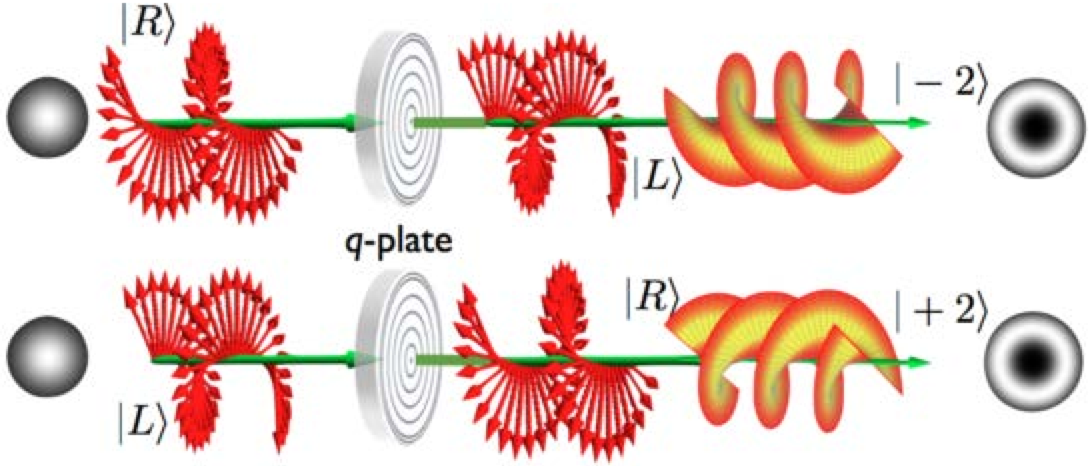
Spiral Phase Plate



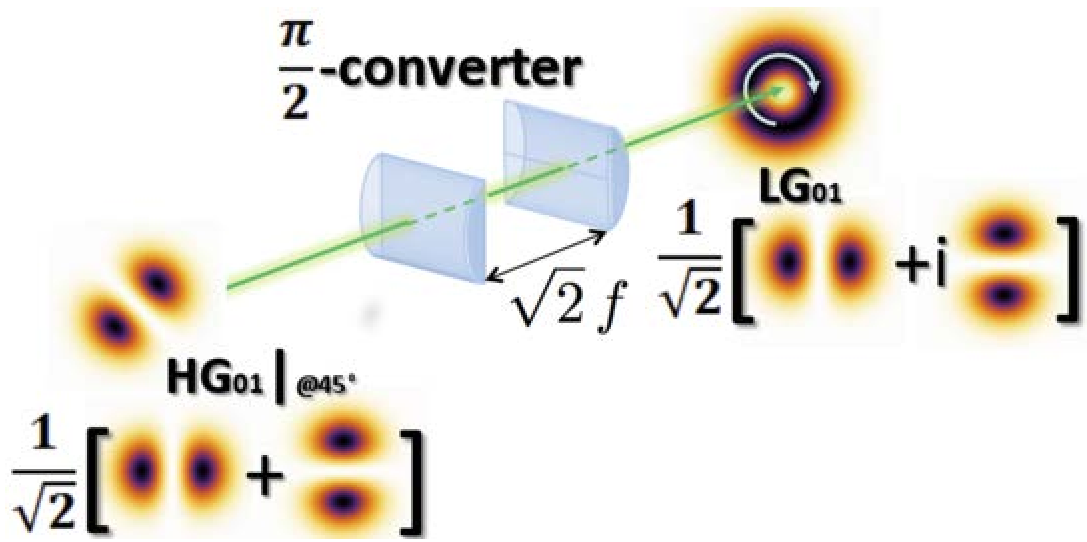
Double Pitch-Fork Hologram







$|R\rangle$
q-plate
$|L\rangle$
$|-2\rangle$
$|L\rangle$
$|R\rangle$
$|+2\rangle$



$\frac{\pi}{2}$-converter
LG01
$\sqrt{2}\,f$
$\frac{1}{\sqrt{2}}[\;+i\;]$
HG01 |@45°
$\frac{1}{\sqrt{2}}[\;+\;]$

2. 镜面上场位相分布:共焦腔反射镜面本身构成光场的一个等相位面。

①由自再现模$u_{mn}(x, y)$的辐角决定。

$$u_{mn}(x,y)=C_{mn}H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}x\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega_{0s}}y\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{L\lambda/\pi}}$$

由于 $u_{mn}(x,y)$ 为**实函数**, 说明镜面上各点的光场相位相同, 共焦腔反射镜面本身构成光场的一个**等相位面**

注意：不同于平行平面腔！平行平面腔镜面上不同相。

3. 单程相移与谐振频率：

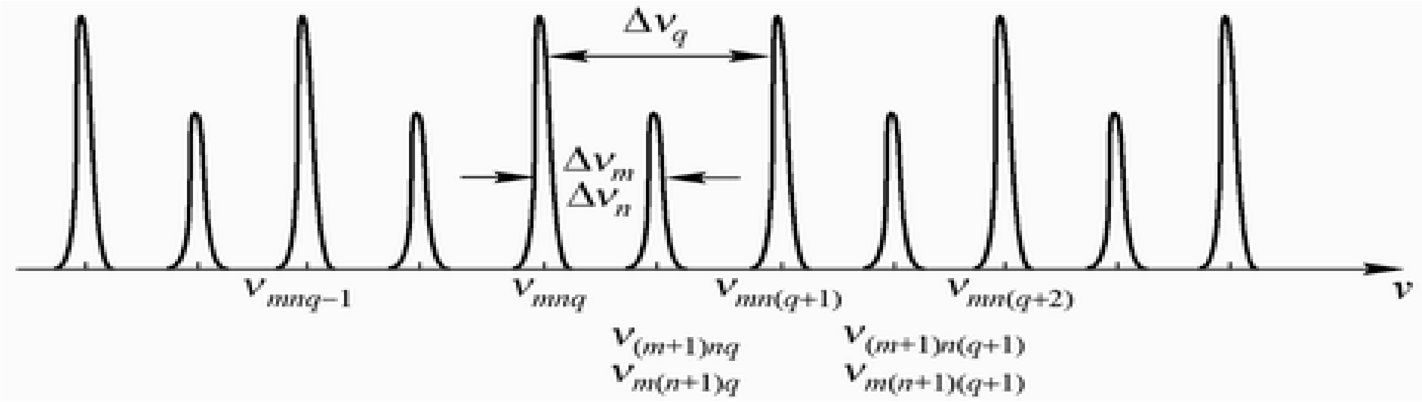
$$\left.\begin{aligned}\Delta\phi_{mn} &= kL + \arg\sigma_{mn} \\ \sigma_{mn} &= e^{-i[kL-(m+n+1)\frac{\pi}{2}]}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\Delta\phi_{mn} &= (m+n+1)\pi/2 \\ \nu_{mnq} &= \frac{qc}{2\mu L} + \frac{c}{2\pi\mu L}\Delta\phi_{mn}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \nu_{mnq} = \frac{c}{2\mu L}[q + \frac{1}{2}(m+n+1)] \Rightarrow$$

而当q一定时，若m、n改变，则横模的频率也将发生变化

$$\begin{cases}\Delta\nu_m = \nu_{m+1,nq} - \nu_{mnq} = \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{2\mu L} = \dfrac{1}{2}\Delta\nu_q \\ \Delta\nu_n = \nu_{m,n+1,q} - \nu_{mnq} = \dfrac{1}{2}\dfrac{c}{2\mu L} = \dfrac{1}{2}\Delta\nu_q\end{cases}$$

由以上两式可得共焦腔的振荡频率图



图(3-6) 方形镜共焦腔的振荡频谱

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2\mu L}[q + \frac{1}{2}(m+n+1)]$$

普通激光器的输出都是多模的

从上式可以看见，共焦腔在频率上是高度简并的，

（2*q*+*m*+*n*）相同的所有模式都具有相同的谐振频率。

如：TEM_{mnq}，$TEM_{m-1,\ n+1,\ q}$，$TEM_{m,\ n-2,\ q+1}$，$TEM_{m-2,\ n,\ q+1}$，

$TEM_{m+1,\ n-3,\ q+1}$等都有相同的频率。这种现象会对激光器的工作状态产生不良影响. 因为所有频率相等的模式都处在激活介质的增益曲线的相同位置处, 从而彼此间产生强烈的竞争作用, 导致多模振荡, 使输出激光光束质量变坏.

◆激光多横模振荡示意图

激光器通常情况下输出的是多横模，
为多种横模相互叠加的光斑。

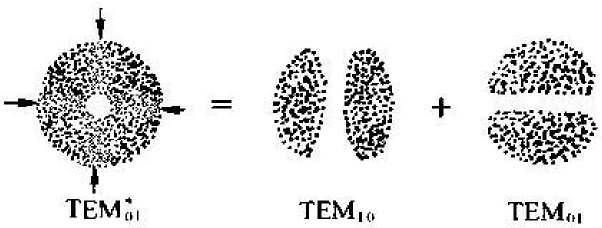
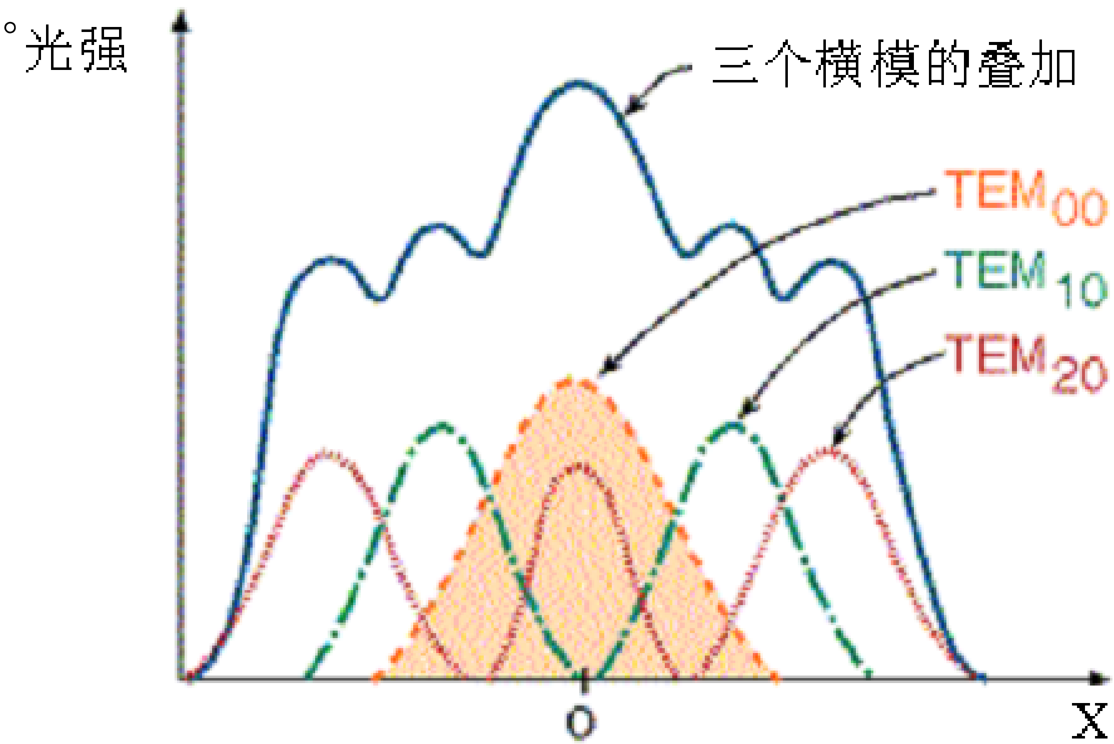
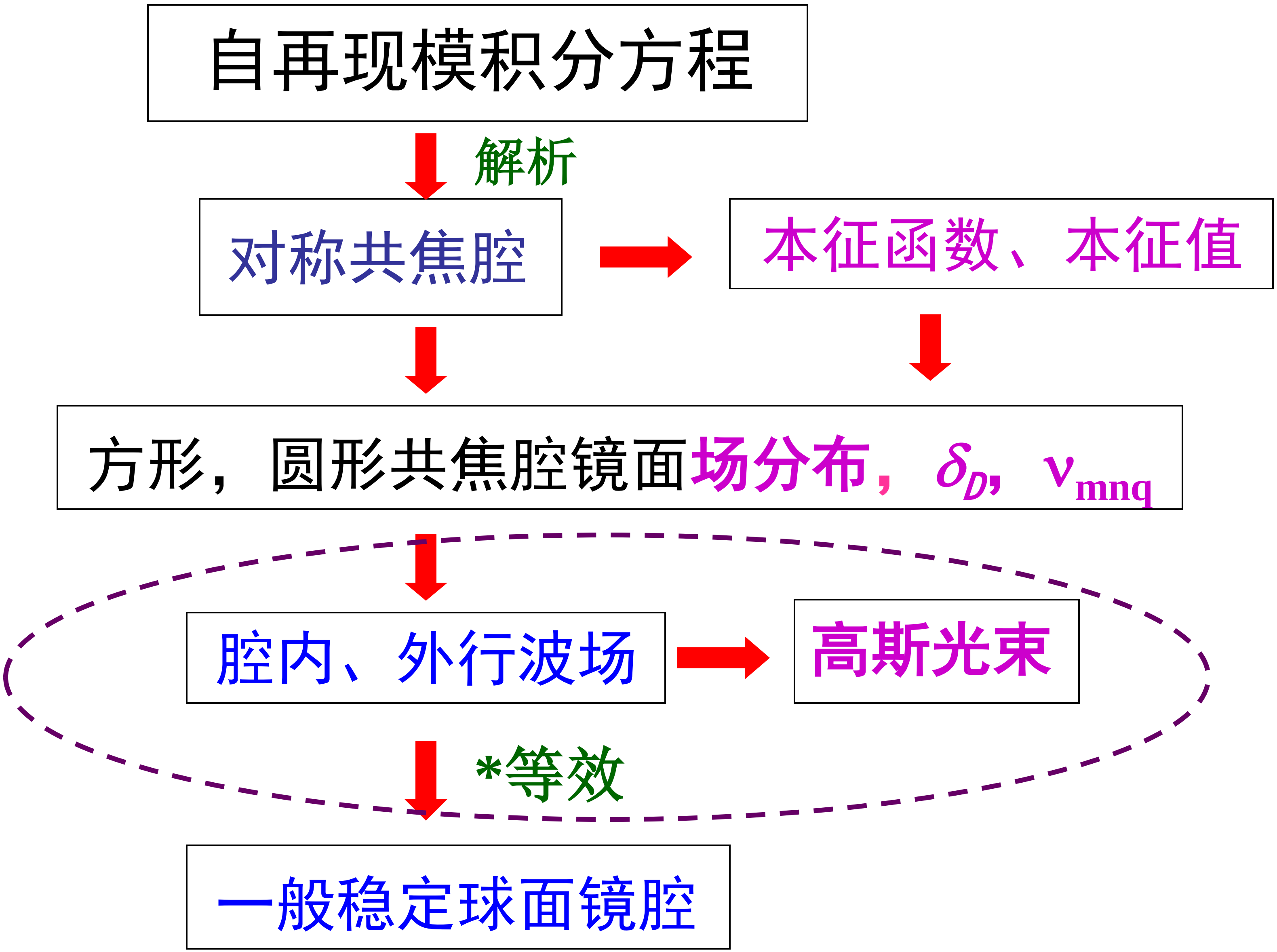


图 3-5-2 简并模

简并模：由不同横模合成的模式。

$TEM_{01}^{*}=TEM_{10}+TEM_{01}$




自再现模积分方程
解析
对称共焦腔
本征函数、本征值
方形，圆形共焦腔镜面场分布，δ_D，ν_{mnq}
腔内、外行波场
高斯光束
*等效
一般稳定球面镜腔