第十六章 树

主要内容

- 无向树及其性质
- 生成树
- 根树及其应用

16.1 无向树及其性质

定义16.1

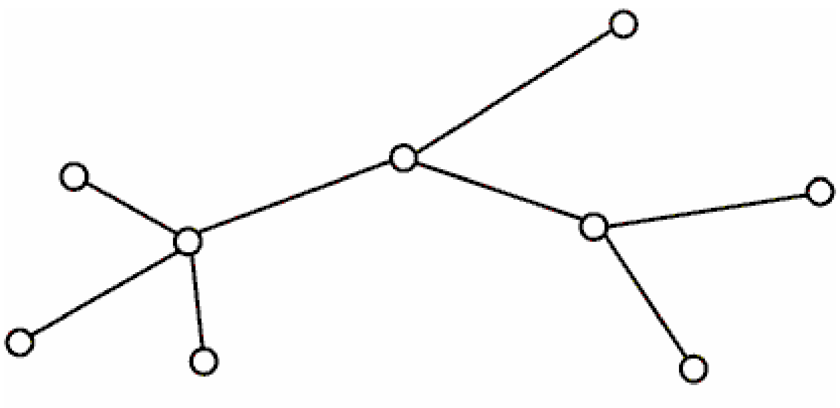
(1) 无向树——连通无回路的无向图

(2) 平凡树——平凡图

(3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶——1度顶点

(5) 分支点——度数≥2的顶点



无向树的等价定义

定理16.1 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

证明思路

(1)⇒(2). 关键一步是, 若路径不惟一必有回路.

(2)⇒(3). 若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一. 对n用归纳法证明$m=n-1$.

$n=1$正确. 设$n\le k$时对，证$n=k+1$时也对：取G中边e，$G-e$有且仅有两个连通分支G_1,G_2(为什么?)．$n_i\le k$，由归纳假设得$m_i=n_i-1$, $i=1,2$. 于是，$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$.

(3)⇒(4). 只需证明G连通. 用反证法. 否则G有s（$s\ge 2$）个连通

分支都是小树. 于是有$m_i=n_i-1$, ,

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i-s=n-s\ (s\ge 2)$$

这与$m=n-1$矛盾.

证明思路

(4)⇒(5). 只需证明G中每条边都是桥. 为此只需证明命题

“G是n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$”.

命题的证明: 对n归纳.

$\forall e \in E$, $G-e$只有$n-2$条边，由命题可知$G-e$不连通，故e为桥.

(5)⇒(6). 由(5)易知G为树，由(1)⇒(2)知，$\forall u,v \in V$（$u \neq v$），u到v有惟一路径，加新边(u,v)得惟一的一个圈.

(6)⇒(1). 只需证明G连通，这是显然的.

无向树的性质

定理16.2 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

证 设T有x片树叶，由握手定理及定理16.1可知，

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$.

例题

例1 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

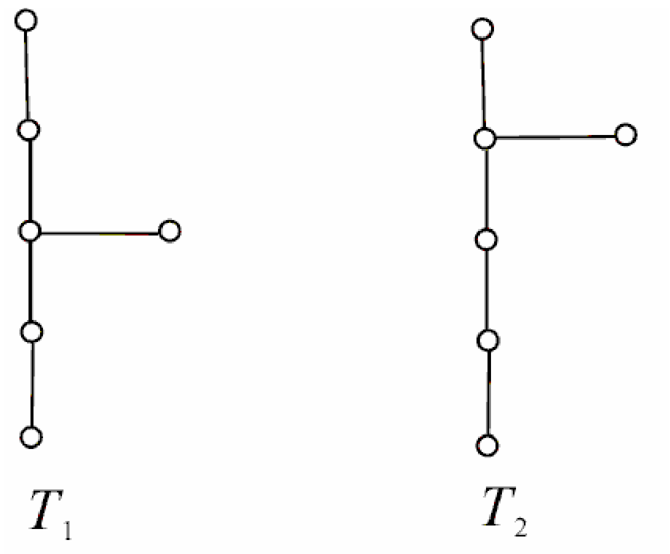
解 解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.

设有x片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶.

T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.



例题

例2 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.

解 设T的阶数为n, 则边数为$n-1$，4度顶点的个数为$n-7$.

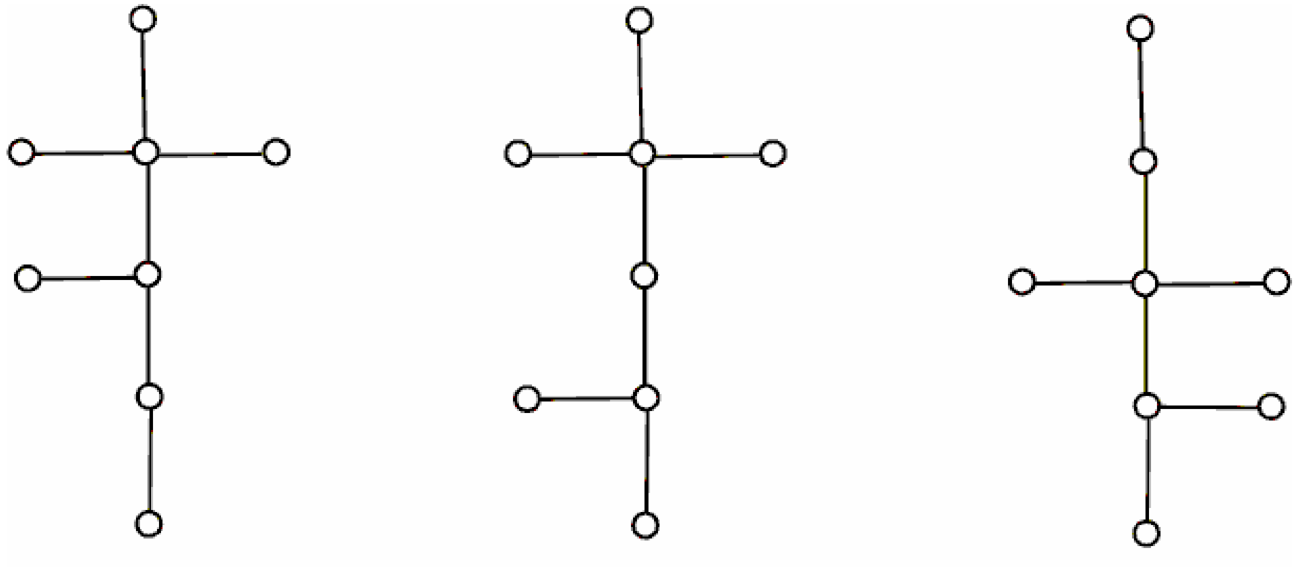
由握手定理得

$$2m = 2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$$

解出$n = 8$，4度顶点为1个.

例题

***T*的度数列为1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4，共有3棵非同构的无向树，如图所示.**



T_1 T_2 T_3

16.2 生成树

定义16.2 设G为无向图

(1) G的**树**——T 是G 的子图并且是树

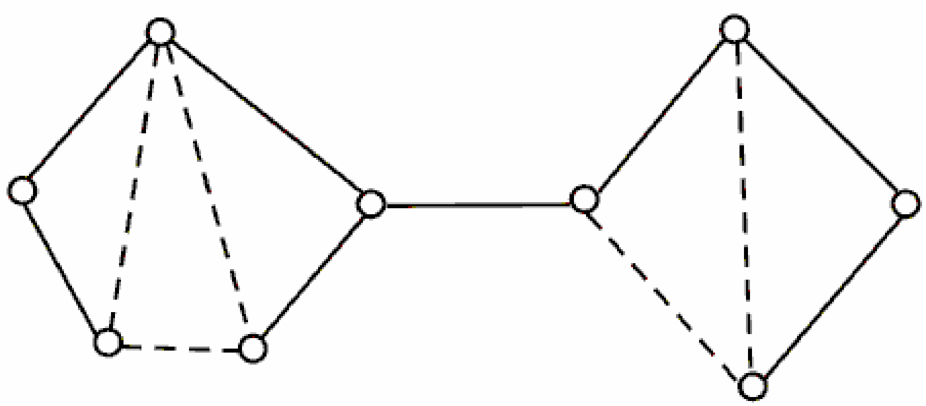
(2) G的**生成树**——T 是G 的生成子图并且是树

(3) 生成树T的**树枝**——T 中的边

(4) 生成树T的**弦**——不在T 中的边

(5) 生成树T的**余树** $\overline{T}$ ——全体弦组成的集合的导出子图

$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路，如图所示



生成树存在条件

定理16.3 无向图G具有生成树当且仅当G连通.

证 必要性显然.

充分性用破圈法（注意：在圈上删除任何一条边，不破坏连通性）

推论1 G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$.

推论2 $\overline{T}$ 的边数为$m-n+1$.

推论3 $\overline{T}$为G的生成树T的余树，C为G中任意一个圈，则C与 $\overline{T}$一定有公共边.

证 否则，C中的边全在T中，这与T为树矛盾.

基本回路系统

定理16.4 设T为G的生成树，e为T的任意一条弦，则$T\cup e$中含一个只有一条弦其余边均为T的树枝的圈. 不同的弦对应的圈也不同.

证 设$e=(u,v)$，在T中u到v有惟一路径Γ，则$\Gamma\cup e$为所求的圈.

定义16.3 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m-n+1}$为$T$的弦. 设$C_r$为$T$添加弦$e'_r$产生的只含弦$e'_r$、其余边均为树枝的圈. 称$C_r$为$G$的对应树$T$的弦$e'_r$的基本回路或基本圈，$r=1, 2, \ldots, m-n+1$. 并称$\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$为$G$对应$T$的基本回路系统，称$m-n+1$为$G$的圈秩，记作$\xi(G)$.

求基本回路的算法：设弦$e=(u,v)$，先求T中u到v的路径Γ_{uv}，再并上弦e，即得对应e的基本回路.

基本割集的存在

定理16.5 设T是连通图G的一棵生成树，e为T的树枝，则G中存在只含树枝e，其余边都是弦的割集，且不同的树枝对应的割集也不同.

证 由定理16.1可知，e是T的桥，因而$T-e$有两个连通分支T_1和T_2，令

$$S_e=\{e \mid e\in E(G)\text{且 } e \text{ 的两个端点分别属于} V(T_1)\text{和} V(T_2)\},$$

由构造显然可知S_e为G的割集，$e\in S_e$且S_e中除e外都是弦，所以S_e为所求. 显然不同的树枝对应的割集不同.

基本割集与基本割集系统

定义16.4 设T是n阶连通图G的一棵生成树，$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}$为$T$的树枝，$S_i$是$G$的只含树枝$e'_i$的割集，则称$S_i$为$G$的对应于生成树$T$由树枝$e'_i$生成的基本割集，$i$=1, 2, …, n−1. 并称$\{S_1,S_2, \ldots, S_{n-1}\}$为$G$对应$T$的基本割集系统，称$n$−1为$G$的割集秩，记作$\eta(G)$.

求基本割集的算法

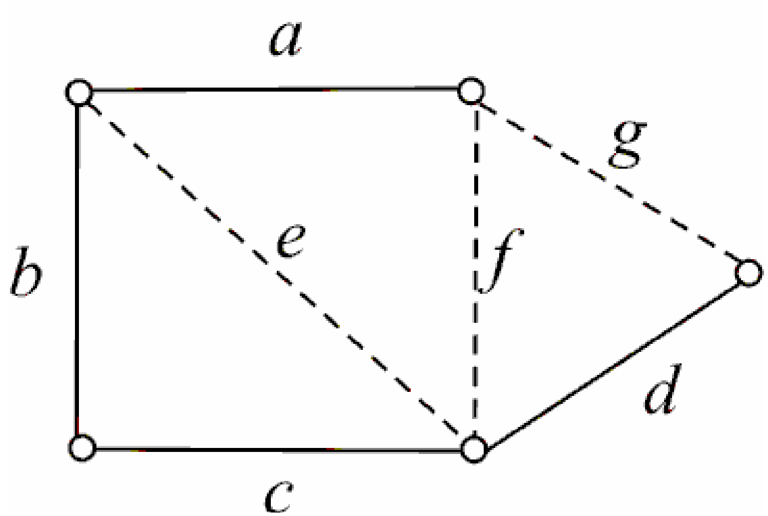
设e'为生成树T的树枝，$T-e'$为两棵小树T_1与T_2，令

$$S_{e'}=\{e \mid e\in E(G)\text{且}e\text{的两个端点分别属于}T_1\text{与}T_2\}$$

则$S_{e'}$为e'对应的基本割集.

实例

例3 图5实线边所示为生成树，求基本回路系统与基本割集系统



解 弦e, f, g对应的基本回路分别为

$$C_e = e\ b\ c,\ C_f = f\ a\ b\ c,\ C_g = g\ a\ b\ c\ d,\ C_{基} = \{C_e, C_f, C_g\}.$$

树枝a, b, c, d对应的基本割集分别为

$$S_a = \{a, f, g\},\ S_b = \{b, e, f, g\},\ S_c = \{c, e, f\ g\},\ S_d = \{d, g\},$$

$S_{基} = \{S_a, S_b, S_c, S_d\}$.

最小生成树

定义16.5 T是$G=\langle V,E,W\rangle$的生成树

(1) $W(T)$——T各边权之和

(2) 最小生成树——G的所有生成树中权最小的

求最小生成树的一个算法

避圈法（Kruskal）设$G=\langle V,E,W\rangle$，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$.

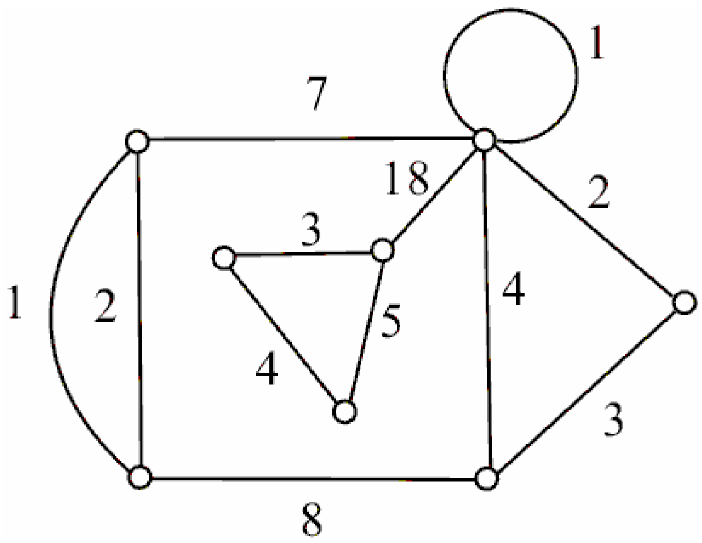
(1) 取e_1在T中

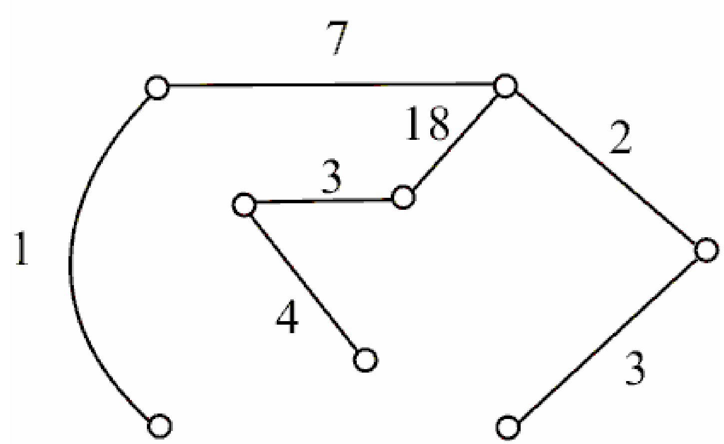
(2) 查e_2，若e_2与e_1不构成回路，取e_2也在T中，否则弃e_2.

(3) 再查$e_3,\ldots,$ 直到得到生成树为止.

实例

例4 求图的一棵最小生成树.





所求最小生成树如图所示，$W(T)=38$.

16.3 根树及其应用

定义16.6 T是有向树（基图为无向树）

(1) T 为根树——T 中一个顶点入度为0，其余的入度均为1.

(2) 树根——入度为0的顶点

(3) 树叶——入度为1，出度为0的顶点

(4) 内点——入度为1，出度不为0的顶点

(5) 分支点——树根与内点的总称

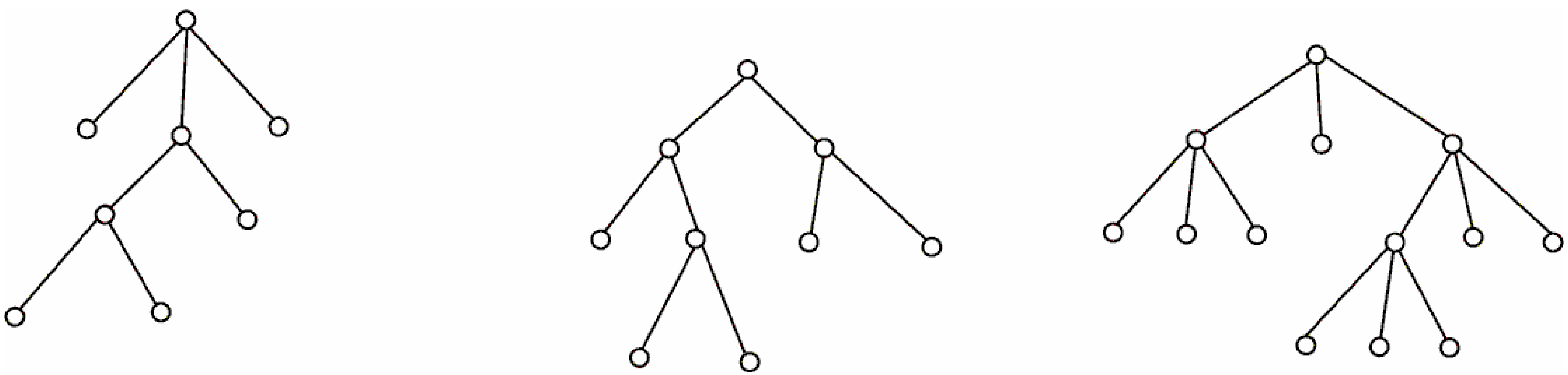
(6) 顶点v的层数——从树根到v的通路长度

(7) 树高——T 中层数最大顶点的层数

(8) 平凡根树——平凡图

根树实例

根树的画法——树根放上方，省去所有有向边上的箭头



家族树与根子树

定义16.7 T 为非平凡根树

(1) 祖先与后代

(2) 父亲与儿子

(3) 兄弟

定义16.8 设v为根树T中任意一顶点，称v及其后代的导出子图为以v为根的**根子树**.

根树的分类

(1) T 为有序根树——同层上顶点标定次序的根树

(2) 分类

① r 叉树——每个分支点至多有 r 个儿子

② r 叉有序树——r 树是有序的

③ r 叉正则树——每个分支点恰有 r 个儿子

④ r 叉正则有序树

⑤ r 叉完全正则树——树叶层数相同的 r 叉正则树

⑥ r 叉完全正则有序树

最优二叉树

定义16.9 设2叉树T有t片树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$，权分别为$w_1, w_2, \ldots, w_t$，称 $W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为T的权，其中$l(v_i)$是v_i的层数. 在所有有t片树叶，带权$w_1, w_2, \ldots, w_t$的2叉树中，权最小的2叉树称为**最优2叉树**.

求最优树的算法—— **Huffman算法**

给定实数$w_1, w_2, \ldots, w_t$，且$w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_t$.

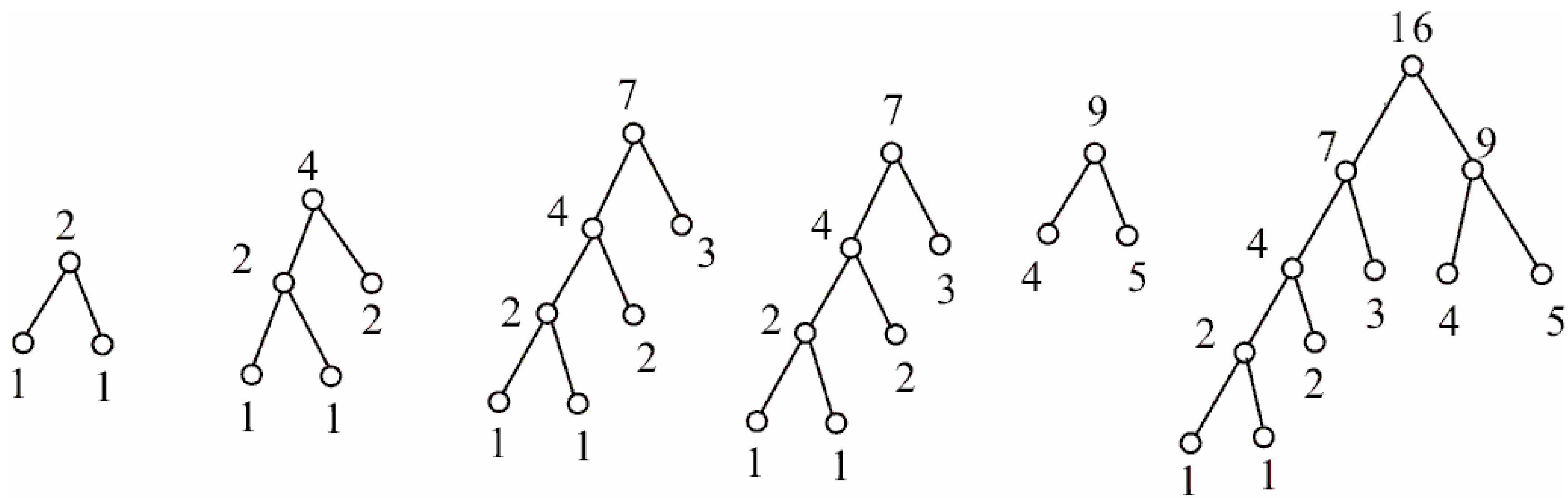
(1) 连接权为w_1, w_2的两片树叶，得一个分支点，其权为w_1+w_2.

(2) 在$w_1+w_2, w_3, \ldots, w_t$中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点(不一定是树叶)，得新分支点及所带的权.

(3) 重复(2)，直到形成 $t-1$个分支点，t片树叶为止.

例 5 求带权为1, 1, 2, 3, 4, 5的最优树.

解题过程由图9给出，$W(T)=38$



最佳前缀码

定义16.10 设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$是长度为 n 的符号串

(1) 前缀——$\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$

(2) 前缀码——$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$中任何两个元素互不为前缀

(3) 二元前缀码——β_i (i=1, 2, …, m) 中只出现两个符号，如0与1.

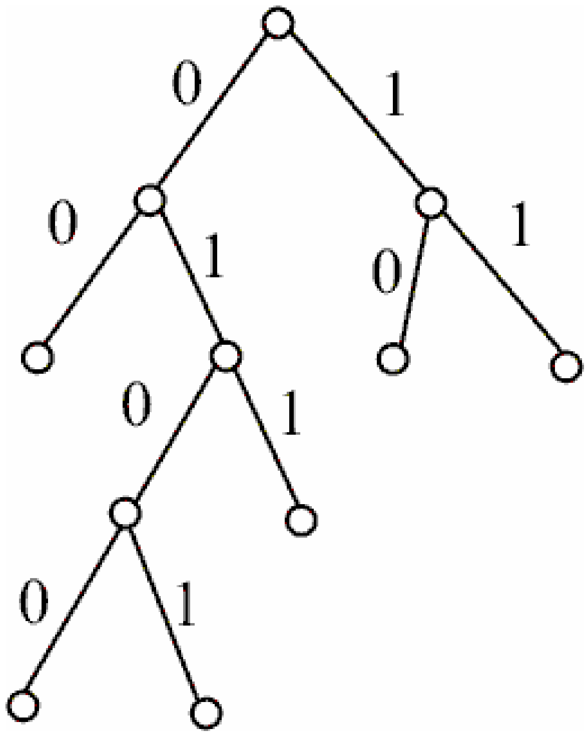
如何产生二元前缀码?

定理16.6 一棵2叉树产生一个二元前缀码.

推论 一棵正则2叉树产生惟一的前缀码（按左子树标0，右子树标1）

图所示二叉树产生的前缀码为

{ 00, 10, 11, 011, 0100, 0101 }



用Huffman算法产生最佳前缀码

例6 在通信中，八进制数字出现的频率如下：

0：25%　　1：20%

2：15%　　3：10%

4：10%　　5：10%

6：5%　　7：5%

求传输它们的最佳前缀码，并求传输10n（n≥2）个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？若用等长的（长为3）的码字传输需要多少个二进制数字？

求最佳前缀码

解 用100个八进制数字中各数字出现的个数，即以100乘各频率为权，并将各权由小到大排列，得w_1=5, w_2=5, w_3=10, w_4=10, w_5=10, w_6=15, w_7=20, w_8=25. 用此权产生的最优树如图所示.

01-----0	11-----1
001-----2	100-----3
101-----4	0001-----5
00000-----6	00001-----7

W(*T*)=285，

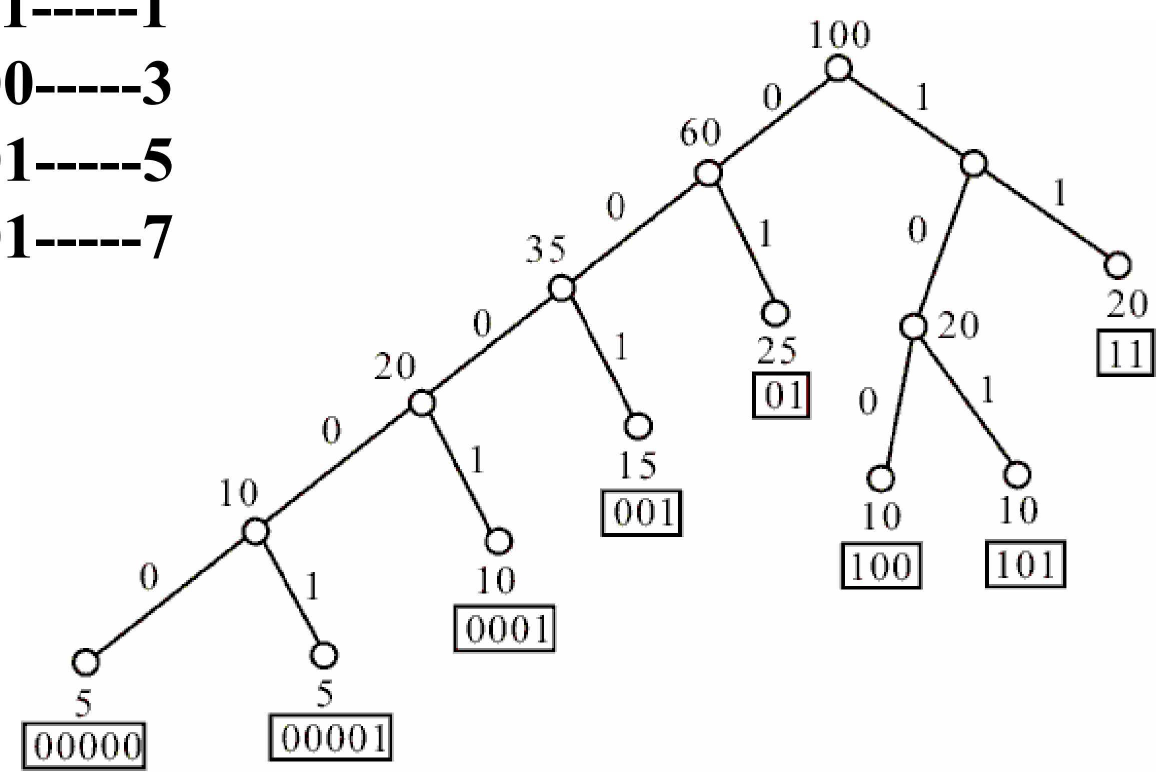
传10^n(n≥2)个

用二进制数字需

2.85×10^n个，

用等长码需

3×10^n个数字.



波兰符号法与逆波兰符号法

行遍或**周游根树*T***——对*T*的每个顶点访问且仅访问一次.

对2叉有序正则树的周游方式:

① **中序行遍法**——次序为:左子树、根、右子树

② **前序行遍法**——次序为:根、左子树、右子树

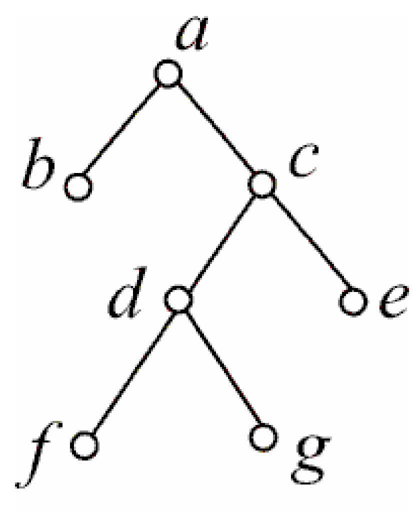
③ **后序行遍法**——次序为:左子树、右子树、根

对图所示根树按中序、前序、后序行遍法访问结果分别为:

$b\ \underline{a}\ (f\ \underline{d}\ g)\ \underline{c}\ e$,

$\underline{a}\ b\ (\underline{c}\ (\underline{d}\ f\ g)\ e)$,

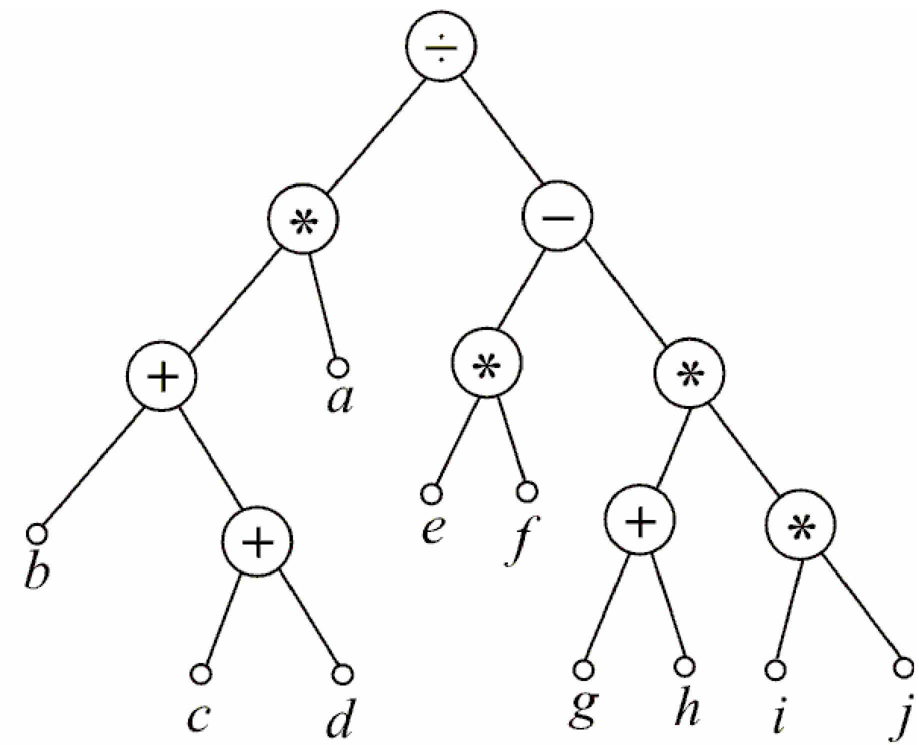
$b\ ((f\ g\ \underline{d})\ e\ \underline{c})\ \underline{a}$



用2叉有序正则树存放算式

存放规则

- 最高层次运算放在树根
- 后依次将运算符放在根子树的根上
- 数放在树叶上
- 规定：被除数、被减数放在左子树树叶上



算式 $((b+(c+d))*a)\div((e*f)-(g+h)*(i*j))$

存放在图所示2叉树上.

波兰符号法

波兰符号法

按前序行遍法访问存放算式的2叉有序正则树，其结果不加括号，规定每个运算符号与其后面紧邻两个数进行运算，运算结果正确. 称此算法为波兰符号法或前缀符号法. 对上图的访问结果为

$$\div * + b + c\, d\, a - * e\, f * + g\, h * i\, j$$

逆波兰符号法

按后序行遍法访问，规定每个运算符与前面紧邻两数运算，称为逆波兰符号法或后缀符号法. 对上图的访问结果为

$$b\, c\, d + + a * e\, f * g\, h + i\, j * * - \div$$

第十六章 习题课

主要内容

- 无向树及其性质
- 生成树、最小生成树、基本回路系统、基本割集系统
- 根树及其分类、最优树、最佳前缀码、波兰符号法、逆波兰符号法

基本要求

- 深刻理解无向树的定义及性质
- 熟练地求解无向树
- 准确地求出给定带权连通图的最小生成树
- 深刻理解基本回路、基本割集的概念，并会计算
- 理解根树及其分类等概念
- 会画n阶（n较小）非同构的无向树及根树（$1\le n\le 6$）
- 熟练掌握求最优树及最佳前缀码的方法
- 掌握波兰符号法与逆波兰符号法

练习1

1. 无向树 T 有 n_i 个 i 度顶点，i=2, 3, …,k，其余顶点全是树叶，求 T 的树叶数.

解　用树的性质：边数 $m=n-1$（n为阶数），及握手定理.

(1)
$$n=\sum_{i=2}^{k} n_i + t \qquad t□ □ □ □$$

(2)
$$m=\sum_{i=2}^{k} n_i + t - 1$$

(3)
$$2m = 2\sum_{i=2}^{k} n_i + 2t - 2 = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=2}^{k} i\,n_i + t$$

从而解出 $t=\sum_{i=3}^{k}(i-2)n_i + 2$

练习2

2．设n阶非平凡的无向树T中，$\Delta(T) \geq k$，$k \geq 1$. 证明T至少有k片树叶.

证　反证法.

否则，T至多有s片树叶，$s < k$，下面利用握手定理及树的性质$m = n-1$推出矛盾.

由于$\Delta(T) \geq k$，故存在$v0$，$d(v0) \geq k$. 于是，

$$2m = 2n - 2 = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq 2(n - s - 1) + k + s$$

由此解出$s \geq k$，这与$s < k$矛盾.

证本题的方法有多种，请用分支点都是割点来证明.

练习3

3．设G为n 阶无向简单图，$n\geq5$，证明G 或$\overline{G}$ 中必含圈.

本题的方法很多，证明中用：G与 $\overline{G}$ 边数之和为K_n的边数 $\frac{n(n-1)}{2}$，以及树的性质：$m = n-1$.

方法一. 反证法. 否则G与$\overline{G}$ 的各连通分支都是树. 设G与$\overline{G}$的连通分支分别为$G_1, G_2, \ldots, G_s$和$G'_1, G'_2, \ldots, G'_{s'}$. 令$n_i, m_i$与 n'_j, m'_j分别为G_i, G'_j的顶点数和边数. 于是

$$\frac{n(n-1)}{2}=\sum_{i=1}^{s}m_i+\sum_{j=1}^{s'}m'_j=\sum_{i=1}^{s}(n_i-1)+\sum_{j=1}^{s'}(n'_j-1)=2n-(s+s')\leq 2n-2$$

得 $n^2-5n+4\leq 0$，

解出 $1\leq n\leq 4$, 矛盾于$n\geq 5$.

练习3

方法二. 在G与$\overline{G}$中存在一个，比如说G，它的边数

$$m \geq \frac{n(n-1)}{4}$$

用反证法证明G中必含圈. 比方法一简单.

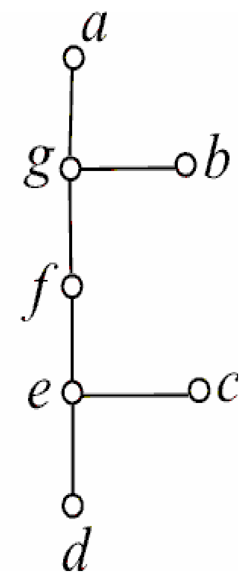
方法三. 不妨设G的边数

$$m \geq \frac{n(n-1)}{4}$$

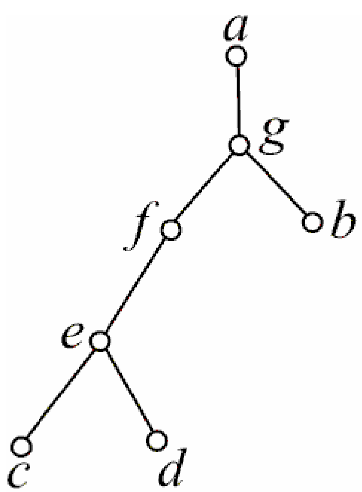
由于$n\geq5$，得$m\geq n$. 再用反证法证明之，更简单.

练习4

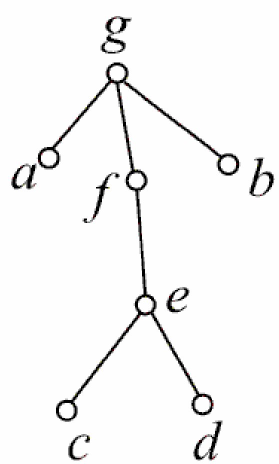
4．画出基图为图所示无向树的所有非同构的根树



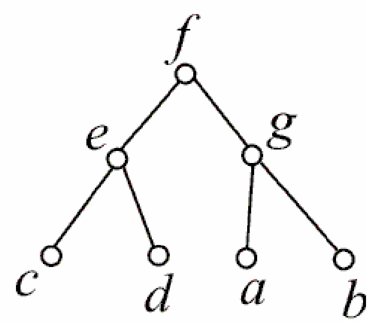
以 a, b, c 或 d 为根的根树同构，选 a 为根，则根树如图(1)；以 e 与 g 为根的根树同构，取 g 为根，则根树如图(2)； 以 f 为根，如图(3) 所示.



(1)



(2)



(3)

练习5

5．设T是正则2叉树，T有t片树叶，证明T的阶数 $n=2t-1$.

方法一. 利用正则2叉树的定义及树的性质直接证明.

(1) $n = t+i$ (i为分支点数)

(2) $n = m+1$ （m为T的边数）

(3) $m = 2i$ （正则2叉树定义）

由(2)、(3)得 $i = \frac{n-1}{2}$，代入（1）得$n = 2t-1$.

方法二. 利用握手定理及树的性质证.

T的树根为2度顶点，所有内点为3度顶点，当然叶为1度顶点，有

(1) $2m = 2+3(i-1)+t$

(2) $n = m+1 = i+t$

由(1) 和(2) 可解出$n = 2t-1$.