



命题逻辑

Propositional Logic

虞慧群

yhq@ecust.edu.cn

主讲老师：杨海

yanghai@ecust.edu.cn



5、推理理论

概念：

重言蕴含式，有效结论，P规则，T规则，CP规则，推理

重言蕴含式 当且仅当 $P \rightarrow Q$ 是一个重言式时，称**P**重言蕴含**Q**，记为 $P \Rightarrow Q$ 。

注意: (1) \Rightarrow 和 \rightarrow 含义的本质区别。

(2) 重言蕴含式也称为逻辑蕴含式。

证明 $P \Rightarrow Q$ 的方法：任给赋值 v

(1) 假设 $v(P)=1$, 推出 $v(Q)=1$, 或者

(2) 假设 $v(Q)=0$, 推出 $v(P)=0$ 。

例：求证： $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

常见的重言蕴含式(P.46)

推理定律——重言蕴涵式

- | | |
|--|-------------|
| 1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ | 附加律 |
| 2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | 化简律 |
| 3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | 假言推理 |
| 4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | 拒取式 |
| 5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ | 析取三段论 |
| 6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ | 假言三段论 |
| 7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ | 等价三段论 |
| 8. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ | 构造性二难 |
| $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$ | 构造性二难(特殊形式) |
| 9. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ | 破坏性二难 |

每个等值式可产生两个推理定律

如, 由 $A \leftrightarrow \neg\neg A$ 可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$

有效结论

设 A 、 C 是两个命题公式，若 $A \Rightarrow C$ ，称 C 是 A 的有效结论。

推广:若 $H_1 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow C$ ，称 C 是一组前题 H_1, \dots, H_n 的有效结论。

注：(1) 从理论上说，可利用真值表来判断某公式是否为一组公式的有效结论，但有“组合爆炸”问题。

(2) 利用少量公理、若干推理规则推理出有效结论。

形式系统: 一个**形式系统** I 由下面四个部分组成:

- (1) 非空的字母表, 记作 $A(I)$.
- (2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集, 记作 $E(I)$.
- (3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集, 记作 $A_x(I)$.
- (4) 推理规则集, 记作 $R(I)$.

记 $I = \langle A(I), E(I), A_x(I), R(I) \rangle$, 其中 $\langle A(I), E(I) \rangle$ 是 I 的**形式语言系统**, $\langle A_x(I), R(I) \rangle$ 是 I 的**形式演算系统**.

自然推理系统: 无公理, 即 $A_x(I) = \emptyset$

公理推理系统 (Hilbert): 推出的结论是系统中的重言式, 称作**定理**

P规则 在推导过程中,可以随时添加前提。

T规则 在推导过程中,可以引入公式**S**, 它是由其前题的一个或多个公式借助重言、蕴含而得到的。

推理（证明）

从前提 A_1, A_2, \dots, A_k 到结论 B 的推理是一个公式序列 C_1, C_2, \dots, C_l . 其中 $C_i (1 \leq i \leq l)$ 是某个 A_j , 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且 $C_l = B$ 。

例: (1) $\{P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S\} \vdash S \vee R$

(2) $\{(W \vee R) \rightarrow V, V \rightarrow (C \vee S), S \rightarrow U, \neg C \wedge \neg U\} \vdash \neg W$

归谬法（反证法）

例：（3） $\{A \rightarrow B, \neg(B \vee C)\} \vdash \neg A$

（4） $\{P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S\} \vdash S \vee R$

CP规则(演绎定理)

若 $\Gamma \cup \{R\} \vdash S$ ，则 $\Gamma \vdash R \rightarrow S$ ，其中 Γ 为命题公式的集合。

例：（5） $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg D \vee A, B\} \vdash D \rightarrow C$

命题逻辑总结

1. 命题公式：命题，联结词(\neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow), 合式公式，子公式
2. 公式的真值：赋值，求值函数，真值表，等值式，重言式，矛盾式
3. 范式：析取范式，极小项，主析取范式，合取范式，极大项，主合取范式
4. 联结词的完备集：真值函数，异或，条件否定，与非，或非，联结词完备集
5. 推理理论：重言蕴含式，有效结论，P规则，T规则，CP规则，推理