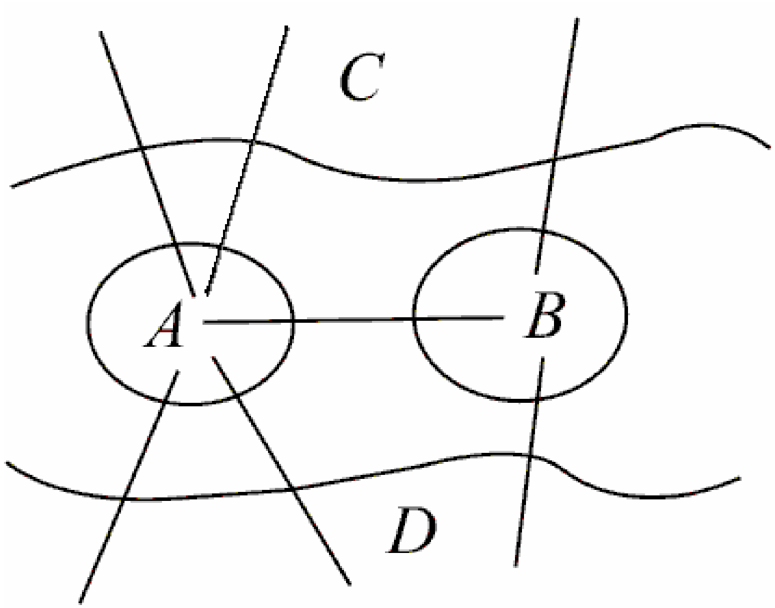
第十五章 欧拉图与哈密顿图

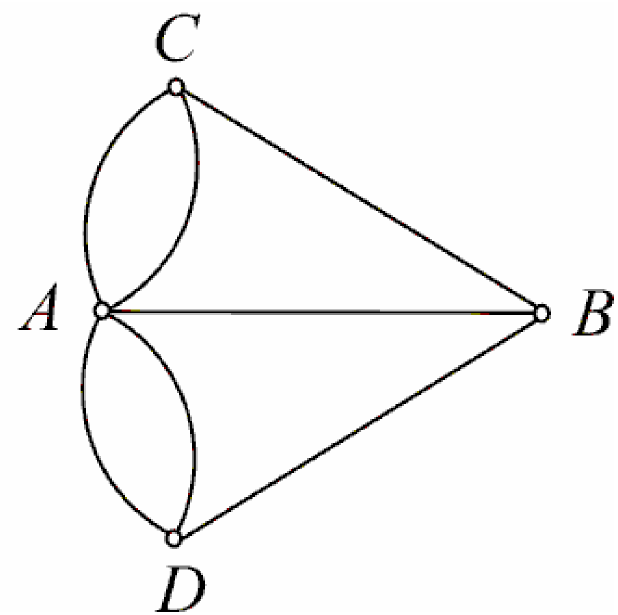
主要内容

- 欧拉图
- 哈密顿图
- 带权图与货郎担问题

15.1 欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图





欧拉图定义

定义15.1

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

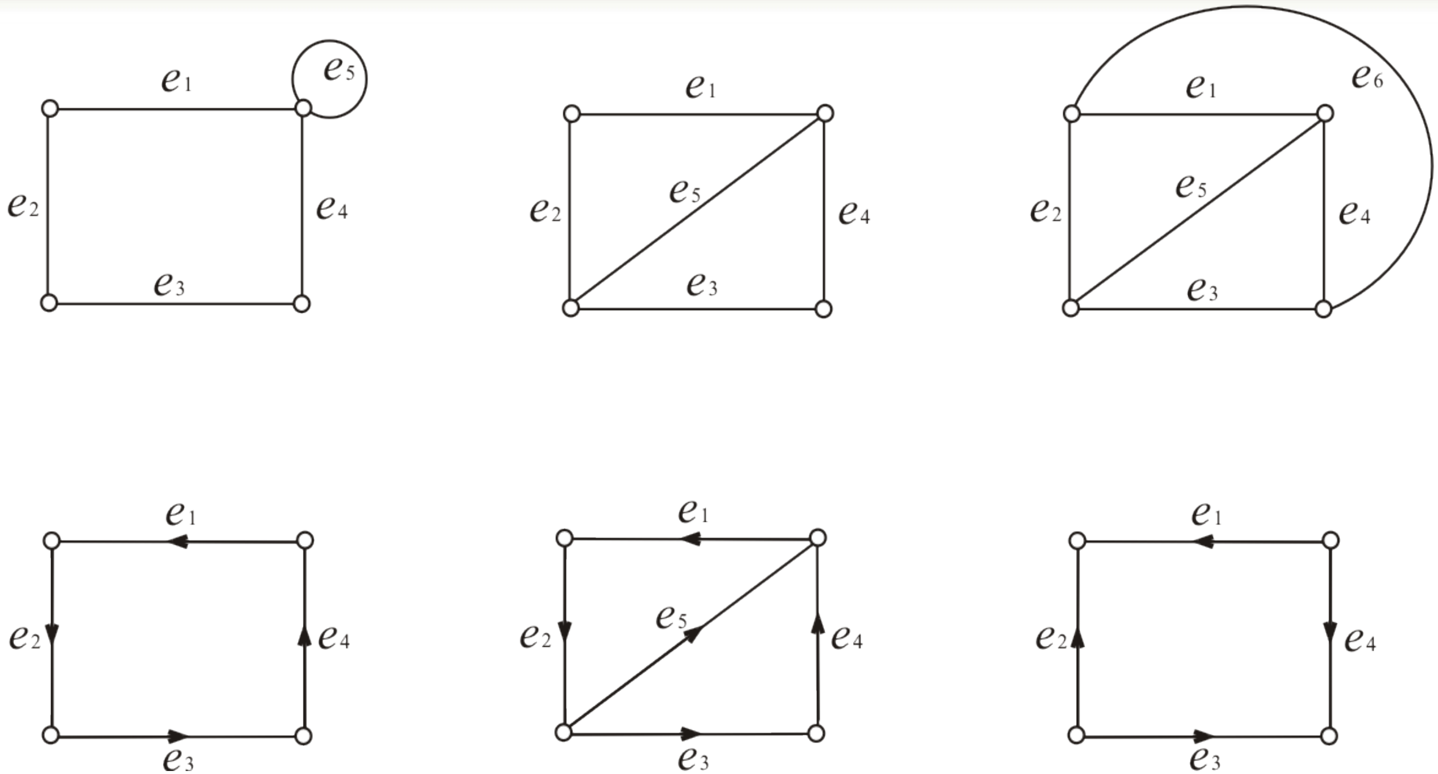
几点说明:

规定平凡图为欧拉图.

欧拉通路是生成的简单通路，欧拉回路是生成的简单回路.

环不影响图的欧拉性.

欧拉图实例



上图中，(1) ,(4) 为欧拉图，(2),(5)为半欧拉图，(3),(6)既不是欧拉图，也不是半欧拉图. 在(3),(6)中各至少加几条边才能成为欧拉图？

无向欧拉图的判别法

定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.

证 若G为平凡图无问题. 下设G为 n 阶 m 条边的无向图.

必要性 设C为G中一条欧拉回路.

(1) G 连通显然.

(2) $\forall v_i \in V(G)$，v_i在C上每出现一次获2度，所以v_i为偶度顶点.

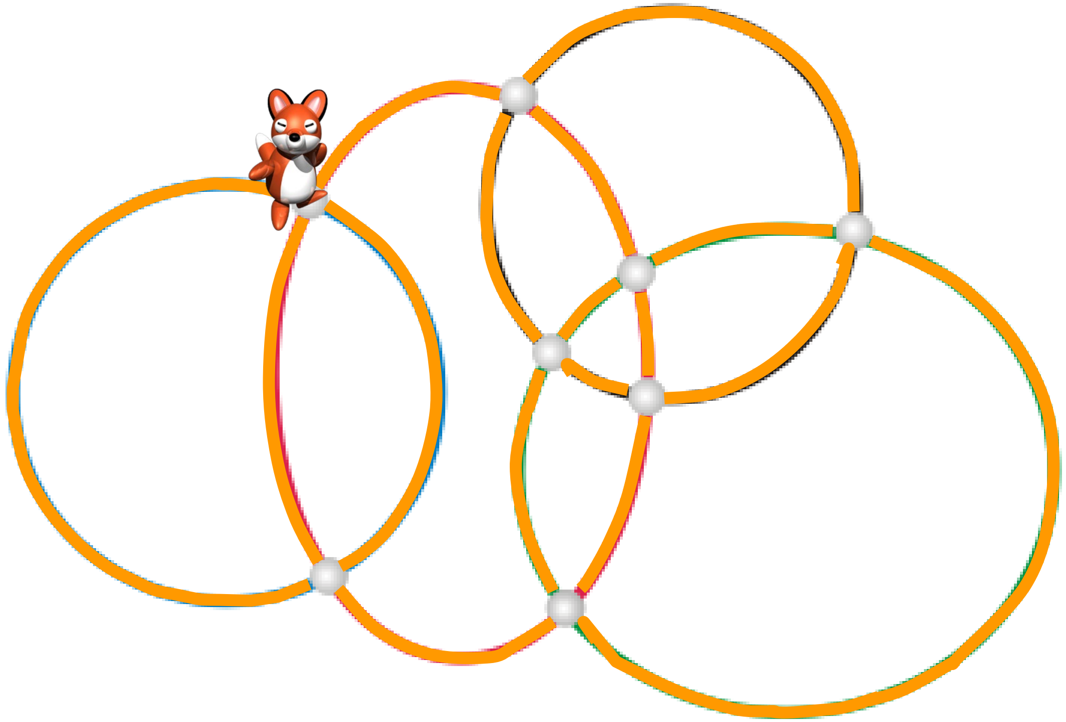
由v_i的任意性，结论为真.

充分性 对边数m做归纳法（第二数学归纳法）.

(1) $m=1$时，G为一个环，则G为欧拉图.

(2) 设$m \le k$（$k \ge 1$）时结论为真，$m=k+1$时如下证明：

从以上证明不难看出：欧拉图是若干个边不重的圈之并，见示意图3.



PLAY

欧拉图的判别法

定理15.2 无向图G是半欧拉图当且仅当G 连通且恰有两个奇度顶点.

证 必要性简单.

充分性（利用定理15.1）

设u,v为G 中的两个奇度顶点，令

$$G' = G \cup (u,v)$$

则G' 连通且无奇度顶点，由定理15.1知G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C，令

$$\Gamma = C - (u,v)$$

则Γ为 G 中欧拉通路.

有向欧拉图的判别法

定理15.3 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

本定理的证明类似于定理15.1.

定理15.4 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度.

本定理的证明类似于定理15.1.

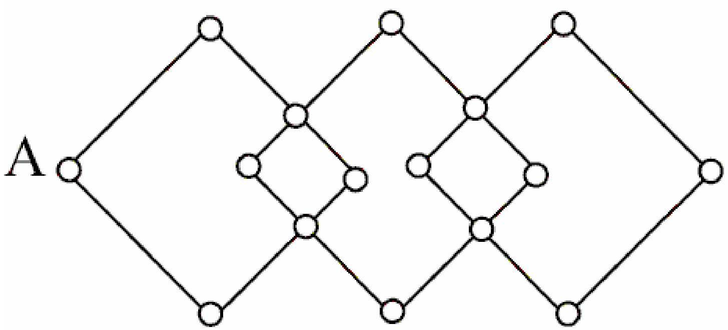
定理15.5 G是非平凡的欧拉图当且仅当G是连通的且为若干个边不重的圈之并.

可用归纳法证定理15.5.

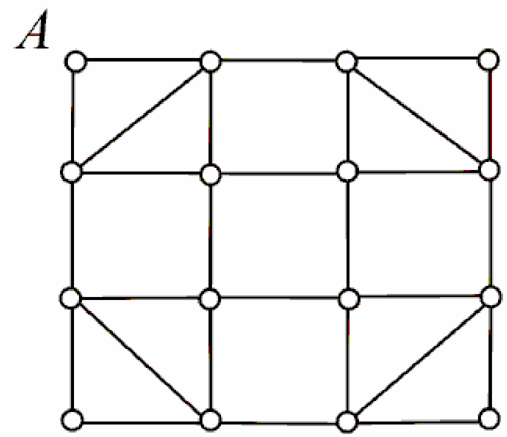
例题

例1 设G是欧拉图，但G不是平凡图，也不是一个环，则$\lambda(G)\geq 2$.

证 只需证明G中不可能有桥（如何证明？）



(1)



(2)

上图中，(1),(2)两图都是欧拉图，均从A点出发，如何一次成功地走出一条欧拉回路来？

Fleury算法

算法：

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0 = v_0$.

(2) 设$P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_i v_i$已经行遍，按下面方法从

$E(G) - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$中选取$e_{i+1}$：

(a) e_{i+1}与v_i相关联；

(b) 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为

$G_i = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$中的桥.

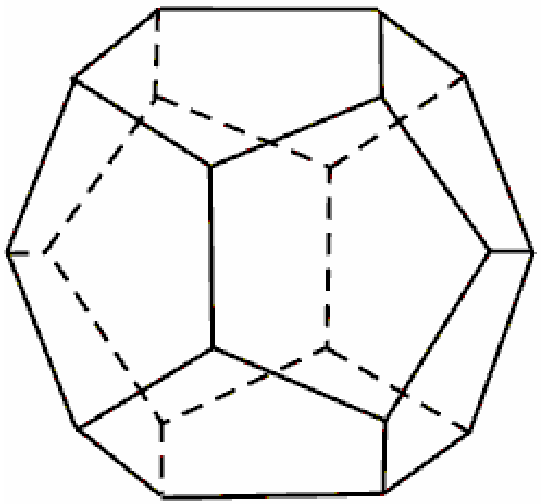
(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止.

可以证明算法停止时所得简单通路 $P_m = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_m v_m$ ($v_m = v_0$)为G 中一条欧拉回路.

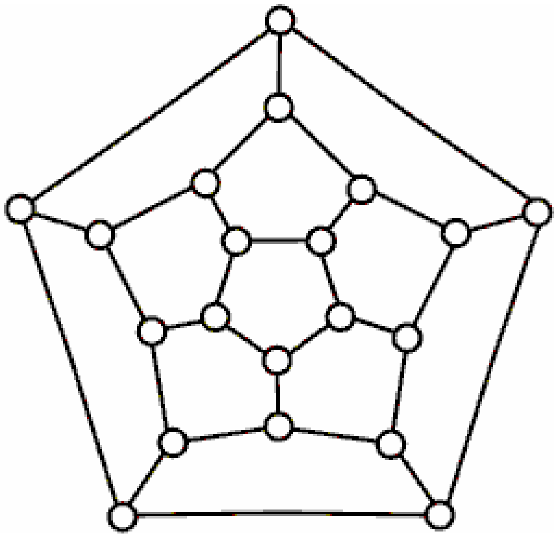
用Fleury算法走出上一页图(1),(2)从A出发（其实从任何一点出发都可以）的欧拉回路各一条.

15.2 哈密顿图

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图



(1)



(2)

哈密顿图与半哈密顿图

定义15.2

(1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.

(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明:

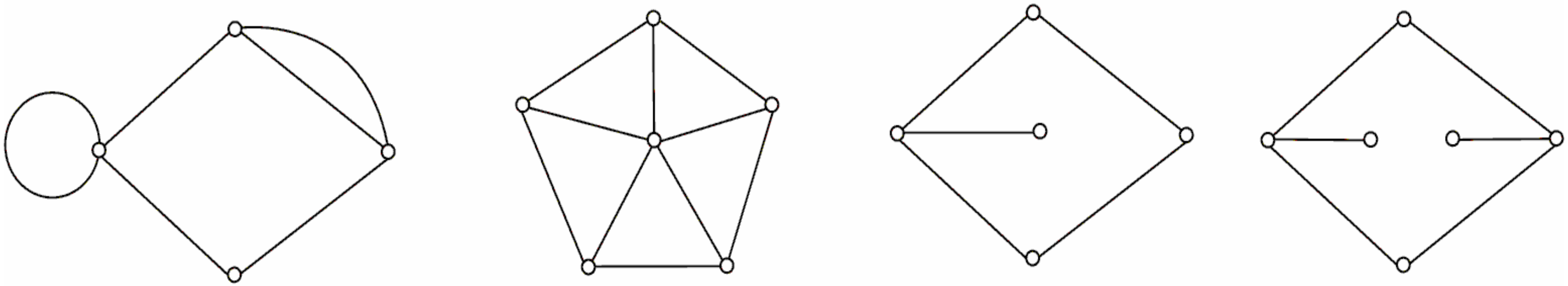
平凡图是哈密顿图.

哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.

环与平行边不影响哈密顿性.

哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上

实例



在上图中，

(1),(2) 是哈密顿图;

(3)是半哈密顿图;

(4)既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图，为什么？

无向哈密顿图的一个必要条件

定理15.6 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$，均有 $p(G-V_1)\leq|V_1|$

证 设C为G中一条哈密顿回路

(1) $p(C-V_1)\leq|V_1|$

(2) $p(G-V_1)\leq p(C-V_1)\leq|V_1|$　　（因为$C\subseteq G$）

推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$均有

$$p(G-V_1)\leq|V_1|+1$$

证 令Γuv为G中哈密顿通路，令$G'=G\cup(u,v)$，则G'为哈密顿图. 于是

$$p(G-V_1)=p(G'-V_1-(u,v))\leq|V_1|+1$$

几点说明

- 定理15.6中的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件（彼得松图）
- 由定理15.6立刻可知，$K_{r,s}$当$s \geq r+1$时不是哈密顿图. 易知$K_{r,r}$（$r \geq 2$）时都是哈密顿图，$K_{r,r+1}$都是半哈密顿图.
- 常利用定理15.6判断某些图不是哈密顿图.

例2 设G为n阶无向连通简单图，若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.

证 设v为割点，则 $p(G-v) \geq 2 > |\{v\}| = 1$.

K_2有桥，它显然不是哈密顿图. 除K_2外，其他有桥的图（连通的）均有割点.

其实，本例对非简单连通图也对.

无向哈密顿图的一个充分条件

定理15.7 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在哈密顿通路.

证明线索：

(1) 由(*)证G连通

(2) $\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$为$G$中极大路径. 若$l = n$, 证毕.

(3) 否则，证G 中存在过Γ上所有顶点的圈C，由(1) 知C外顶点存在与C上某顶点相邻顶点，从而得比Γ更长的路径，重复(2) –(3)，最后得G中哈密顿通路.

证明

证（着重关键步骤）

(1) 由(*)及简单图的性质，用反证法证明G连通.

(2) $\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$为极大路径，$l \le n$, 若$l = n$（结束）.

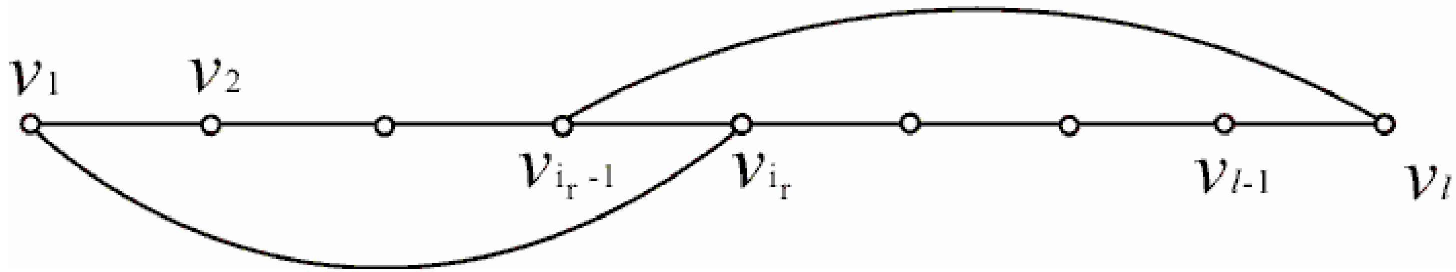
下面讨论$l<n$的情况，即要证G中存在过Γ上所有顶点的圈.

① 若(v_1,v_l)在G中，则$\Gamma\cup(u,v)$为G中圈

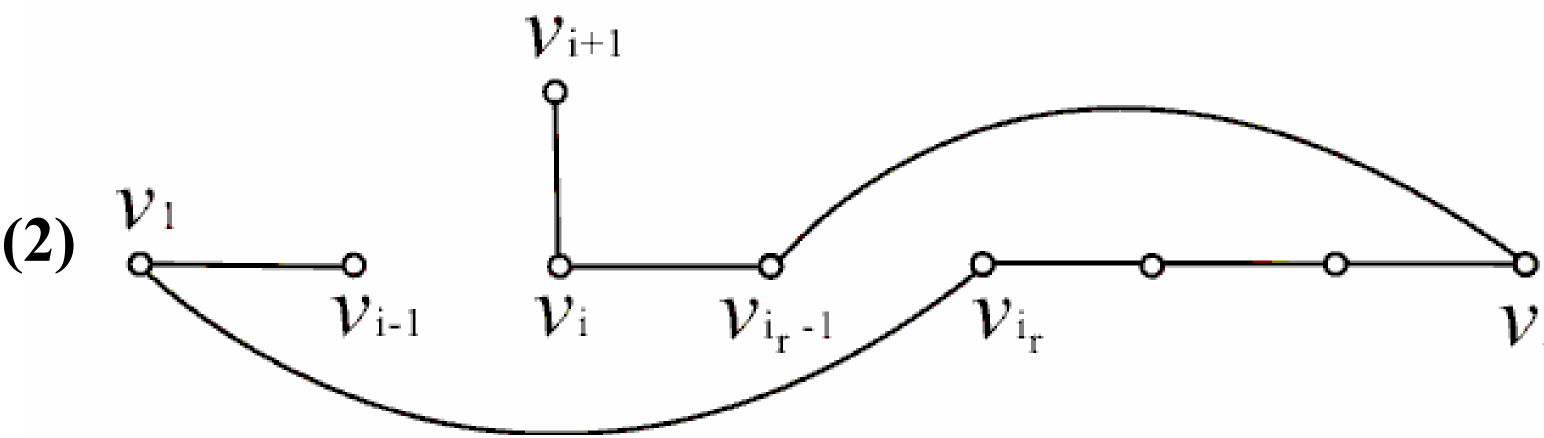
② 否则，设v_1与Γ上$v_{i_1}=v_2, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$相邻，则$k\ge2$ (否则由极大路径端点性质及(*)，会得到$d(v_1)+d(v_l)\le1+l-2<n-1$)，又$v_l$至少与$v_{i_2}, v_{i_3}, \ldots v_{i_k}$左边相邻顶点之一相邻(写出理由)，设$v_{i_r-1}$与$v_l$相邻，见图中(1)，于是得$G$中回路$C$ ((1)中图去掉边(v_{i_r-1}, v_{i_r}))

证明

图(1)



图(2)



(3) 由连通性，可得比Γ更长的路径（如图(2) 所示），对它再扩大路径，重复(2)，最后得哈密顿通路.

推论

推论 设G为n ($n\geq 3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

证明线索：由定理15.7得$\Gamma = v_1v_2\ldots v_n$为$G$中哈密顿通路. 若$(v_1,v_n)\in E(G)$，得证. 否则利用（**）证明存在过$v_1, v_2, \ldots, v_n$的圈(哈密顿回路).

定理15.8 设u,v为n阶无向简单图G中两个不相邻的顶点，且$d(u)+d(v)\geq n$，则G为哈密顿图当且仅当$G\cup(u,v)$为哈密顿图.

几点说明

定理15.7是半哈密顿图的充分条件，但不是必要条件. 长度为n–1（n≥4）的路径构成的图不满足（*）条件，但它显然是半哈密顿图.

定理15.7的推论同样不是哈密顿图的必要条件，G为长为n的圈，不满足（）条件，但它当然是哈密顿图.**

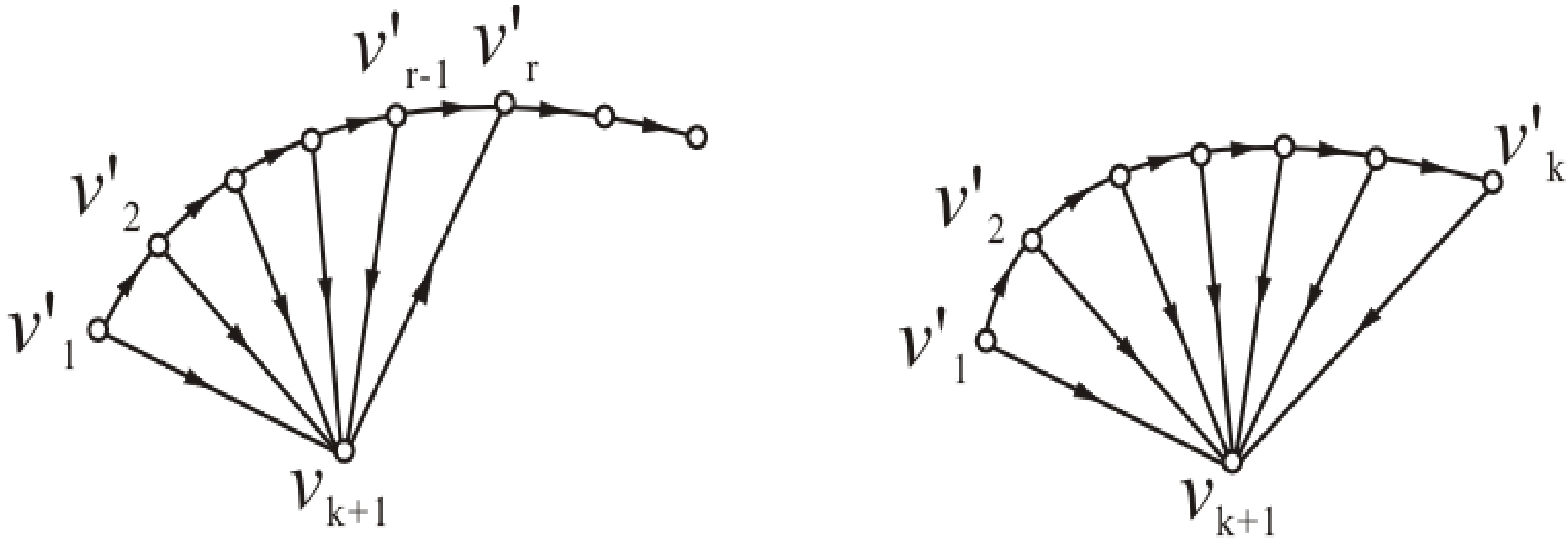
由定理15.7的推论可知，K_n（n≥3）均为哈密顿图.

无向哈密顿图的充分条件

n（***n***≥2）阶竞赛图中存在哈密顿通路

定理15.9 若*D*为*n*（*n*≥2）阶竞赛图，则*D*中具有哈密顿通路

证明思路：注意，竞赛图的基图是无向完全图. 对*n*（*n*≥2）做归纳. 只需观察下面两个图.



判断某图是否为哈密顿图方法

判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.

总结判断某图是哈密顿图或不是哈密顿图的某些可行的方法.

1. 观察出哈密顿回路.

例3 下图(周游世界问题)

是哈密顿图

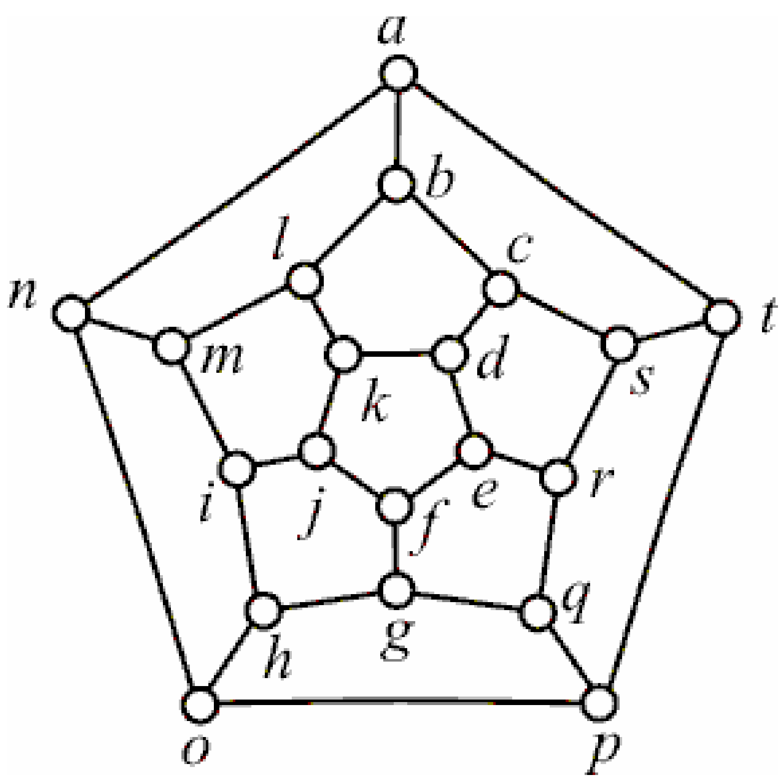
易知

a b c d e f g h i j k l m n p q r s t a

为图中的一条哈密顿回路.

注意，此图不满足定理15.7

推论条件.



判断某图是否为哈密顿图方法

2．满足定理15.7推论的条件（**）．

例4 完全图K_n $(n≥3)$ 中任何两个顶点u,v，均有

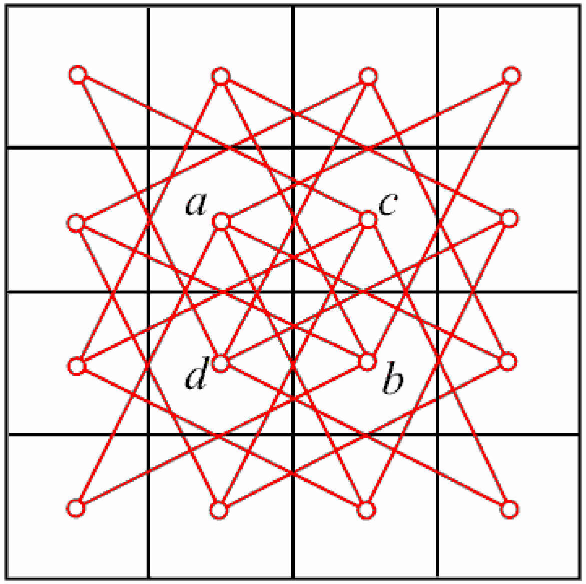
$$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n\ (n\geq 3),$$

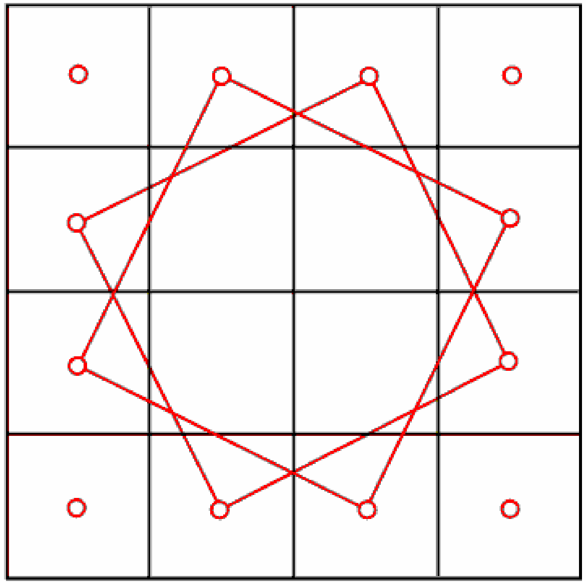
所以K_n为哈密顿图.

3．破坏定理15.6的条件的图不是哈密顿图.

例5 在四分之一国际象棋盘（4×4方格组成）上跳马无解.

在国际象棋盘上跳马有解.





令$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则 $p(G-V_1) = 6 >4$，由定理15.6可知图中无哈密顿回路.

在国际象棋盘上跳马有解，试试看.

定义15.3 给定图$G = <V,E>$，(G为无向图或有向图)，设$W:E \to \mathrm{R}$ (R为实数集)，对G中任意边$e = (v_i,v_j)$ (G为有向图时，$e = <v_i,v_j>$)，设$W(e) = w_{ij}$，称实数w_{ij}为边e上的**权**，并将w_{ij}标注在边e上，称G为**带权图**，此时常将带权图G记作$<V,E,W>$.

设$G' \subseteq G$，称 $\sum\limits_{e \in E(G')} W(e)$ 为G'的权，并记作$W(G')$，即

$$W(G') = \sum_{e \in E(G')} w(e)$$

货郎担问题

设G=<V,E,W>为一个n阶完全带权图K_n，各边的权非负，且有的边的权可能为∞. 求G中的一条最短的哈密顿回路，这就是货郎担问题的数学模型.

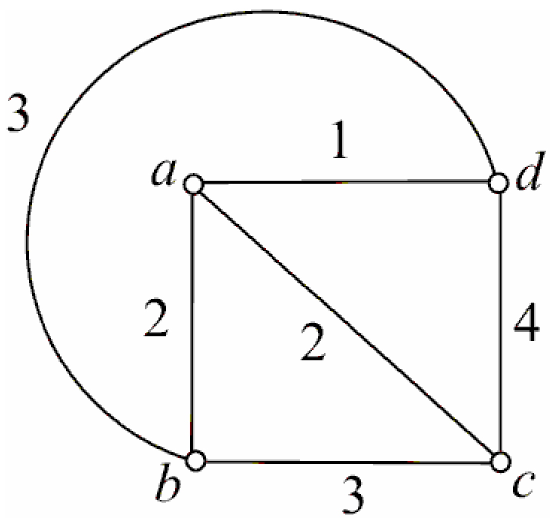
完全带权图K_n（n≥3）中不同的哈密顿回路数

(1) K_n中有$(n-1)!$ 条不同的哈密顿回路（定义意义下）

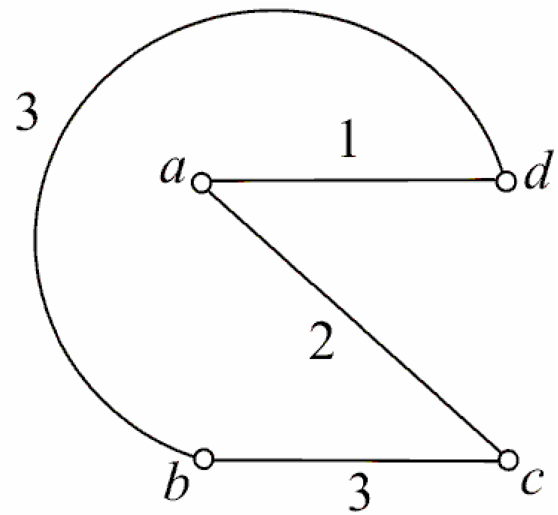
(2) 完全带权图中有$(n-1)!$ 条不同的哈密顿回路

(3) 用穷举法解货郎担问题算法的复杂度为$(n-1)$！，当n较大时，计算量惊人地大

例6 求图中(1) 所示带权图K_4中最短哈密顿回路.



(1)



(2)

解 $C_1= a\ b\ c\ d\ a,\quad W(C_1)=10$

$C_2= a\ b\ d\ c\ a,\quad W(C_2)=11$

$C_3= a\ c\ b\ d\ a,\quad W(C_3)=9$

可见C_3 (见图中(2)) 是最短的，其权为9.

第十五章 习题课

主要内容

- 欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图及其判别法
- 哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图
- 带权图、货郎担问题

基本要求

- 深刻理解欧拉图、半欧拉图的定义及判别定理
- 深刻理解哈密顿图、半哈密顿图的定义.
- 会用哈密顿图的必要条件判断某些图不是哈密顿图.
- 会用充分条件判断某些图是哈密顿图. 要特别注意的是，不能将必要条件当作充分条件，也不要将充分条件当必要条件.

练习1

1. 设G为n（$n\geq 2$）阶无向欧拉图，证明G中无桥(见例1思考题)

方法一：直接证明法.

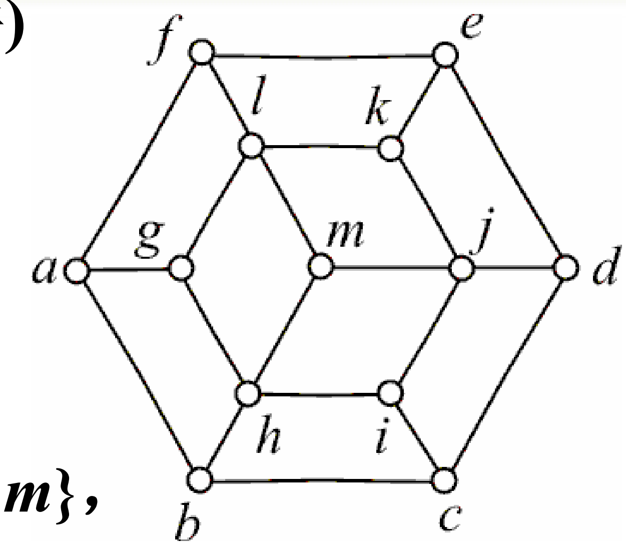
命题 (*)：设C为任意简单回路，e为C上任意一条边，则$C-e$连通.

证 设C为G中一条欧拉回路，任意的$e\in E(C)$，可知$C-e$是$G-e$的子图，由(*)知 $C-e$ 连通，所以e不为桥.

方法二：反证法. 利用欧拉图无奇度顶点及握手定理的推论. 否则，设$e=(u,v)$为G中桥，则$G-e$产生两个连通分支G_1, G_2，不妨设u在G_1中，v在G_2中. 由于从G中删除e时，只改变u,v的度数(各减1)，因而G_1与G_2中均只含一个奇度顶点，这与握手定理推论矛盾.

练习 2

2. 证明下图不是哈密顿图. (破坏必要条件)



方法一. 利用定理15.6，

取 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$，则

$$p(G-V_1) = 7 > |V_1| = 6$$

方法二. G为二部图，互补顶点子集

$V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$，$V_2 = \{b, d, f, g, i, k, m\}$，

$|V_1| = 6 \neq 7 = |V_2|$.

方法三. 利用可能出现在哈密顿回路上的边至少有n(n为阶数)条——这也是哈密顿图的一个必要条件，记为（*）.

此图中，$n = 13$，$m = 21$. 由于h, l, j 均为4度顶点，a, c, e为3度顶点，且它们关联边互不相同. 而在哈密顿回路上，每个顶点准确地关联两条边，于是可能用的边至多有

$21-(3\times2+3\times1) = 12$. 这达不到（*）的要求.

练习 3

3．某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都与两边的人交谈？

解　图是描述事物之间关系的最好的手段之一.

做无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中

$V=\{v|\ v$为与会者$\}$，

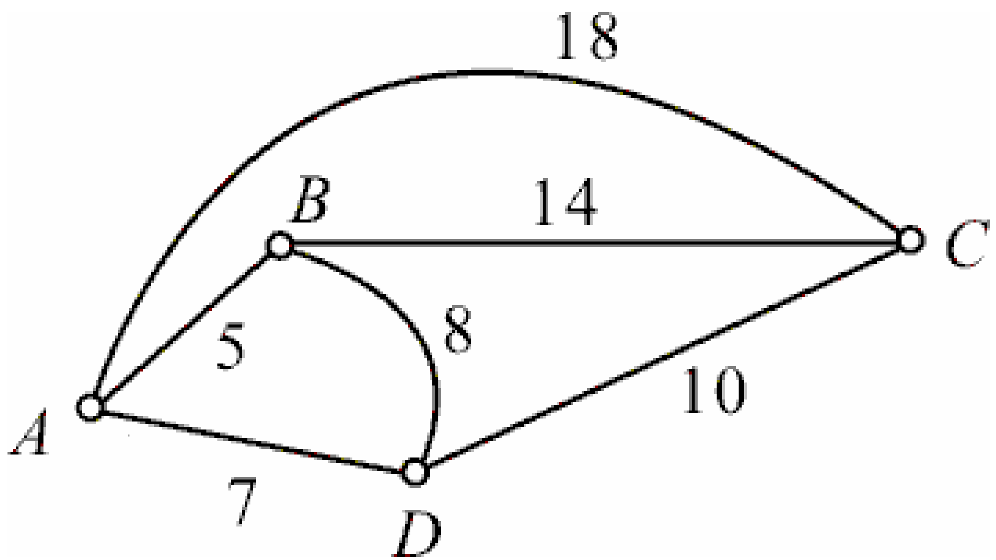
$E=\{(u,v)\mid u,v\in V$且u与v有共同语言，且$u\neq v\}$.

易知G为简单图且$\forall v\in V$, $d(v)\geq 4$，于是，$\forall u,v\in V$, 有$d(u)+d(v)\geq 8$，由定理15.7 的推论可知G为哈密顿图. 服务员在G中找一条哈密顿回路C，按C中相邻关系安排座位即可.

由本题想到的：哈密顿回图的实质是能将图中所有的顶点排在同一个圈中.

练习 4

4. 距离(公里) 如图所示. 他如何走行程最短?



最短的路为*ABCDA*，距离为36公里，其余两条各为多少?