



离散数学

高等教育出版社



主要内容

- 命题逻辑基本概念
- 命题逻辑等值演算
- 命题逻辑推理理论
- 一阶逻辑基本概念
- 一阶逻辑等值演算与推理



主要内容

- 命题与联结词
 - 命题及其分类
 - 联结词与复合命题
- 命题公式及其赋值



命题与真值

命题：判断结果惟一的陈述句

命题的真值：判断的结果

真值的取值：真与假

真命题与假命题

注意：

感叹句、祈使句、疑问句都不是命题

陈述句中的悖论，判断结果不惟一确定的不是命题



例1 下列句子中那些是命题？

(1) $\sqrt{2}$ 是有理数.

假命题

(2) $2 + 5 = 7$.

真命题

(3) $x + 5 > 3$.

不是命题

(4) 你去教室吗？

不是命题

(5) 这个苹果真大呀！

不是命题

(6) 请不要讲话！

不是命题

(7) 2050年元旦下大雪.

命题，但真值现在不知道



命题分类：简单命题（也称原子命题）与复合命题

简单命题符号化

- 用小写英文字母 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i (i \geq 1)$ 表示简单命题
- 用“1”表示真，用“0”表示假

例如，令

$p: \sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为0，

$q: 2 + 5 = 7$ ，则 q 的真值为1



定义1.1 设 p 为命题, 复合命题 “非 p ”(或 “ p 的否定”) 称为 p 的**否定式**, 记作 $\neg p$, 符号 \neg 称作**否定联结词**. 规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

定义1.2 设 p, q 为两个命题, 复合命题 “ p 并且 q ”(或 “ p 与 q ”) 称为 p 与 q 的**合取式**, 记作 $p \wedge q$, \wedge 称作**合取联结词**. 规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

定义1.3 设 p, q 为两个命题, 复合命题 “ p 或 q ” 称作 p 与 q 的**析取式**, 记作 $p \vee q$, \vee 称作**析取联结词**. 规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.



例2 将下列命题符号化.

- (1) 吴颖既用功又聪明.
- (2) 吴颖不仅用功而且聪明.
- (3) 吴颖虽然聪明，但不用功.
- (4) 张辉与王丽都是三好生.
- (5) 张辉与王丽是同学.



解 令 p :吴颖用功, q :吴颖聪明

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $\neg p \wedge q$

(4) 设 p :张辉是三好生, q :王丽是三好生

$$p \wedge q$$

(5) p :张辉与王丽是同学

(1)—(3) 说明描述合取式的灵活性与多样性

(4)—(5) 要求分清 “与” 所联结的成分



例3 将下列命题符号化

- (1) 2 或 4 是素数.
- (2) 2 或 3 是素数.
- (3) 4 或 6 是素数.
- (4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.
- (5) 王小红生于 1975 年或 1976 年.



解

(1) 令 p :2是素数, q :4是素数, $p \vee q$

(2) 令 p :2是素数, q :3是素数, $p \vee q$

(3) 令 p :4是素数, q :6是素数, $p \vee q$

(4) 令 p :小元元拿一个苹果, q :小元元拿一个梨

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

(5) p :王小红生于 1975 年, q :王小红生于1976 年,

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \text{ 或 } p \vee q$$

(1)—(3) 为相容或

(4)—(5) 为排斥或, 符号化时(5)可有两种形式, 而(4)则不能



定义1.4 设 p, q 为两个命题，复合命题“如果 p ，则 q ”称作 p 与 q 的**蕴涵式**，记作 $p \rightarrow q$ ，并称 p 是蕴涵式的**前件**， q 为蕴涵式的**后件**， \rightarrow 称作**蕴涵联结词**. 规定： $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假.

(1) $p \rightarrow q$ 的逻辑关系： q 为 p 的必要条件

(2) “如果 p ，则 q ”有很多不同的表述方法：

若 p ，就 q

只要 p ，就 q

p 仅当 q

只有 q 才 p

除非 q ，才 p 或 除非 q ，否则非 p ，....

(3) 当 p 为假时， $p \rightarrow q$ 恒为真，称为空证明

(4) 常出现的错误：不分充分与必要条件



例4 设 p : 天冷, q : 小王穿羽绒服, 将下列命题符号化

- | | |
|----------------------|-------------------|
| (1) 只要天冷, 小王就穿羽绒服. | $p \rightarrow q$ |
| (2) 因为天冷, 所以小王穿羽绒服. | $p \rightarrow q$ |
| (3) 若小王不穿羽绒服, 则天不冷. | $p \rightarrow q$ |
| (4) 只有天冷, 小王才穿羽绒服. | $q \rightarrow p$ |
| (5) 除非天冷, 小王才穿羽绒服. | $q \rightarrow p$ |
| (6) 除非小王穿羽绒服, 否则天不冷. | $p \rightarrow q$ |
| (7) 如果天不冷, 则小王不穿羽绒服. | $q \rightarrow p$ |
| (8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. | $q \rightarrow p$ |

注意: $p \rightarrow q$ 与 $\neg q \rightarrow \neg p$ 等值 (真值相同)



定义1.5 设 p, q 为两个命题, 复合命题 “ p 当且仅当 q ”称作 p 与 q 的**等价式**, 记作 $p \leftrightarrow q$, \leftrightarrow 称作**等价联结词**. 规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假.

$p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系: p 与 q 互为充分必要条件

例5 求下列复合命题的真值

(1) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$.

(2) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数.

(3) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 太阳从东方升起.

(4) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 美国位于非洲.

(5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是 它在 x_0 连续.

1
0
1
0
0



- 本小节中 p, q, r, \dots 均表示命题.
- 联结词集为 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$ 为基本复合命题. 其中要特别注意理解 $p \rightarrow q$ 的涵义. 反复使用 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的联结词组成更为复杂的复合命题.

设 $p: \sqrt{2}$ 是无理数, $q: 3$ 是奇数,

$r: \text{苹果是方的}, s: \text{太阳绕地球转}$

则复合命题 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((r \wedge \neg s) \vee \neg p)$ 是假命题.

- 联结词的运算顺序: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, 同级按先出现者先运算.



命题变项与合式公式

- 命题变项
- 合式公式
- 合式公式的层次

公式的赋值

- 公式赋值
- 公式类型
- 真值表



命题常项

命题变项（命题变元）

常项与变项均用 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$ 等表示.

定义1.6 合式公式（简称公式）的递归定义：

- (1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作**原子命题公式**
- (2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是
- (3) 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是
- (4) 只有有限次地应用(1)—(3) 形成的符号串才是合式公式

几点说明：

归纳或递归定义，元语言与对象语言，外层括号可以省去

**定义1.7**

- (1) 若公式 A 是单个命题变项, 则称 A 为0层公式.
- (2) 称 A 是 $n+1$ ($n \geq 0$) 层公式是指下面情况之一:
 - (a) $A = \neg B$, B 是 n 层公式;
 - (b) $A = B \wedge C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式, 且 $n = \max(i, j)$;
 - (c) $A = B \vee C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);
 - (d) $A = B \rightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);
 - (e) $A = B \leftrightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b).
- (3) 若公式 A 的层次为 k , 则称 A 为 k 层公式.

例如 公式 $A=p$, $B=\neg p$, $C=\neg p \rightarrow q$, $D=\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$,
 $E=((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$
分别为0层, 1层, 2层, 3层, 4层公式.



定义1.8 设 p_1, p_2, \dots, p_n 是出现在公式 A 中的全部命题变项, 给 p_1, p_2, \dots, p_n 各指定一个真值, 称为对 A 的一个**赋值**或**解释**. 若使 A 为1, 则称这组值为 A 的**成真赋值**; 若使 A 为0, 则称这组值为 A 的**成假赋值**.

几点说明:

- A 中仅出现 p_1, p_2, \dots, p_n , 给 A 赋值 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是指
 $p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2, \dots, p_n = \alpha_n, \alpha_i = 0$ 或 $1, \alpha_i$ 之间不加标点符号
- A 中仅出现 p, q, r, \dots , 给 A 赋值 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ 是指
 $p = \alpha_1, q = \alpha_2, r = \alpha_3 \dots$
- 含 n 个命题变项的公式有 2^n 个赋值.

如 000, 010, 101, 110是 $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ 的成真赋值
001, 011, 100, 111是成假赋值.



定义1.9 将命题公式 A 在所有赋值下取值的情况列成表, 称作 A 的**真值表**.

构造真值表的步骤:

- (1) 找出公式中所含的全部命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n (若无下角标则按字母顺序排列), 列出 2^n 个全部赋值, 从 $00\dots 0$ 开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至 $11\dots 1$ 为止.
- (2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次.
- (3) 对每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.



例6 写出下列公式的真值表, 并求它们的成真赋值和成假赋值:

(1) $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

(2) $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$

(3) $\neg (\neg p \vee q) \wedge q$



$$(1) A = (p \vee q) \rightarrow \neg r$$

p q r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值:000,001,010,100,110; 成假赋值:011,101,111



$$(2) B = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$$

p	q	$q \rightarrow p$	$(q \rightarrow p) \wedge q$	$(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

成真赋值:00,01,10,11; 无成假赋值



(3) $C = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0

成假赋值:00,01,10,11; 无成真赋值



定义1.10

- (1) 若 A 在它的任何赋值下均为真, 则称 A 为**重言式**或**永真式**;
- (2) 若 A 在它的任何赋值下均为假, 则称 A 为**矛盾式**或**永假式**;
- (3) 若 A 不是矛盾式, 则称 A 是**可满足式**.

由例1可知, $(p \vee q) \rightarrow \neg r$, $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$, $\neg (\neg p \vee q) \wedge q$
分别为非重言式的可满足式, 重言式, 矛盾式.

注意: 重言式是可满足式, 但反之不真.

真值表的用途:

求出公式的全部成真赋值与成假赋值, 判断公式的类型



主要内容

- 命题、真值、简单命题与复合命题、命题符号化
- 联结词 \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow 及复合命题符号化
- 命题公式及层次
- 公式的类型
- 真值表及应用

基本要求

- 深刻理解各联结词的逻辑关系, 熟练地将命题符号化
- 会求复合命题的真值
- 深刻理解合式公式及重言式、矛盾式、可满足式等概念
- 熟练地求公式的真值表, 并用它求公式的成真赋值与成假赋值及判断公式类型



1. 将下列命题符号化

- (1) 豆沙包是由面粉和红小豆做成的.
- (2) 苹果树和梨树都是落叶乔木.
- (3) 王小红或李大明是物理组成员.
- (4) 王小红或李大明中的一人是物理组成员.
- (5) 由于交通阻塞, 他迟到了.
- (6) 如果交通不阻塞, 他就不会迟到.
- (7) 他没迟到, 所以交通没阻塞.
- (8) 除非交通阻塞, 否则他不会迟到.
- (9) 他迟到当且仅当交通阻塞.



提示:

分清复合命题与简单命题

分清相容或与排斥或

分清必要与充分条件及充分必要条件

答案: (1) 是简单命题

(2) 是合取式

(3) 是析取式 (相容或) (4) 是析取式 (排斥或)

设 p : 交通阻塞, q : 他迟到

(5) $p \rightarrow q$,

(6) $\neg p \rightarrow \neg q$ 或 $q \rightarrow p$

(7) $\neg q \rightarrow \neg p$ 或 $p \rightarrow q$,

(8) $q \rightarrow p$ 或 $\neg p \rightarrow \neg q$

(9) $p \leftrightarrow q$ 或 $\neg p \leftrightarrow \neg q$

可见(5)与(7), (6)与(8) 相同 (等值)



2. 设 p : 2是素数

q : 北京比天津人口多

r : 美国的首都是旧金山

求下面命题的真值

$$(1) (p \vee q) \rightarrow r \quad 0$$

$$(2) (q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r) \quad 1$$

$$(3) (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r) \quad 0$$

$$(4) (q \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q)) \quad 0$$



3. 用真值表判断下面公式的类型

(1) $p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$

(2) $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$

(3) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$



$$(1) p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$$

p	q	r	$q \rightarrow p$	$\neg(q \rightarrow p)$	$p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

矛盾式



$$(2) ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

永真式



$$(3) (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$$

p q r	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	0	1	0
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	1	1

非永真式的可满足式