



主要内容

推理的形式结构

- 推理的正确与错误
- 推理的形式结构
- 判断推理正确的方法
- 推理定律

自然推理系统 P

- 形式系统的定义与分类
- 自然推理系统 P
- 在 P 中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法



所谓推理是指从前提出发推出结论的思维过程。

定义3.1 设 A_1, A_2, \dots, A_k, B 为命题公式. 若对于每组赋值,
 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为假, 或当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为真时, B 也为真,
则称由**前提** A_1, A_2, \dots, A_k 推出**结论** B 的**推理是有效的或正确的**, 并称 B 是**有效结论**.

定理3.1 由命题公式 A_1, A_2, \dots, A_k 推 B 的推理正确当且仅当
 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$ 为重言式

注意: 推理正确不能保证结论一定正确



由 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 推 B 的推理有以下的形式结构:

1. $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B$

若推理正确, 记为 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$

2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$

若推理正确, 记为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B$

3. 前提: A_1, A_2, \dots, A_k

结论: B

判断推理是否正确的方法:

真值表法 (见例子3.1)

等值演算法 (见例子3.2)

主析取范式法 (见例子3.2)



例1 判断下面推理是否正确

- (1) 若今天是1号, 则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.
(2) 若今天是1号, 则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设 p : 今天是1号, q : 明天是5号.

(1) 推理的形式结构: $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

用等值演算法

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \\ \Leftrightarrow & \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow 1 \end{aligned}$$

由定理3.1可知推理正确



(2) 推理的形式结构: $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$

用主析取范式法

$$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

结果不含 m_1 , 故01是成假赋值, 所以推理不正确



- | | |
|--|-------------|
| 1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ | 附加律 |
| 2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | 化简律 |
| 3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | 假言推理 |
| 4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | 拒取式 |
| 5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ | 析取三段论 |
| 6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ | 假言三段论 |
| 7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ | 等价三段论 |
| 8. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ | 构造性二难 |
| $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$ | 构造性二难(特殊形式) |
| 9. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ | 破坏性二难 |

每个等值式可产生两个推理定律

如, 由 $A \leftrightarrow \neg\neg A$ 可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$



本节对由 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 推 B 的正确推理的证明给出严格的形式描述

定义3.2 一个形式系统 I 由下面四个部分组成:

- (1) 非空的字母表, 记作 $A(I)$.
- (2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集, 记作 $E(I)$.
- (3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集, 记作 $A_X(I)$.
- (4) 推理规则集, 记作 $R(I)$.

记 $I = \langle A(I), E(I), A_X(I), R(I) \rangle$, 其中 $\langle A(I), E(I) \rangle$ 是 I 的形式语言系统, $\langle A_X(I), R(I) \rangle$ 是 I 的形式演算系统.

自然推理系统: 无公理, 即 $A_X(I) = \emptyset$

公理推理系统 推出的结论是系统中的重言式, 称作**定理**



定义3.3 自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表

(1) 命题变项符号: $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$

(2) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号: $(,), ,$

2. 合式公式 (同定义1.6)

3. 推理规则

(1) 前提引入规则: 在证明的任何步骤都可引入前提

(2) 结论引入规则: 在证明的任何步骤得到的结论都可以做为后续证明的前提

(3) 置换规则: 在证明的任何步骤, 命题公式中的子公式都可用等值的公式置换, 得到公式序列中又一个公式



(4) 假言推理规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{\therefore B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A \vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$



(10) 构造性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ A \vee C \\ \hline \therefore B \vee D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ \neg B \vee \neg D \\ \hline \therefore \neg A \vee \neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A \wedge B \end{array}$$



设前提 A_1, A_2, \dots, A_k , 结论 B 及公式序列 C_1, C_2, \dots, C_l . 如果每一个 $C_i (1 \leq i \leq l)$ 是某个 A_j , 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且 $C_l = B$, 则称这个公式序列是由 A_1, A_2, \dots, A_k 推出 B 的**证明**

见例子3.3/3.4

例2 构造下面推理的证明:

若明天是星期一或星期三, 我明天就有课. 若我明天有课, 今天必备课. 我今天没备课. 所以, 明天不是星期一、也不是星期三.

解 (1) 设命题并符号化

设 p : 明天是星期一, q : 明天是星期三,

r : 我明天有课, s : 我今天备课



(2) 写出证明的形式结构

前提: $(p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow s, \neg s$

结论: $\neg p \wedge \neg q$

(3) 证明

- | | |
|------------------------------|-------|
| ① $r \rightarrow s$ | 前提引入 |
| ② $\neg s$ | 前提引入 |
| ③ $\neg r$ | ①②拒取式 |
| ④ $(p \vee q) \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ⑤ $\neg(p \vee q)$ | ③④拒取式 |
| ⑥ $\neg p \wedge \neg q$ | ⑤置换 |



附加前提证明法 适用于结论为蕴涵式
欲证

前提: A_1, A_2, \dots, A_k

结论: $C \rightarrow B$

等价地证明

前提: A_1, A_2, \dots, A_k, C

结论: B

理由:

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B$$



例3 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数, 则 $\sqrt{2}$ 是无理数. 若 $\sqrt{2}$ 是无理数, 则4不是素数. 所以, 如果4是素数, 则2是合数.

解 用附加前提证明法构造证明

(1) 设 p : 2是素数, q : 2是合数,
 r : $\sqrt{2}$ 是无理数, s : 4是素数

(2) 推理的形式结构

前提: $p \vee q, p \rightarrow r, r \rightarrow \neg s$

结论: $s \rightarrow q$



(3) 证明

- | | |
|--------------------------|---------|
| ① s | 附加前提引入 |
| ② $p \rightarrow r$ | 前提引入 |
| ③ $r \rightarrow \neg s$ | 前提引入 |
| ④ $p \rightarrow \neg s$ | ②③假言三段论 |
| ⑤ $\neg p$ | ①④拒取式 |
| ⑥ $p \vee q$ | 前提引入 |
| ⑦ q | ⑤⑥析取三段论 |



归谬法（反证法）

欲证

前提： A_1, A_2, \dots, A_k

结论： B

做法

在前提中加入 $\neg B$ ，推出矛盾.

理由

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$$

$$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0$$



例4 前提: $\neg(p \wedge q) \vee r$, $r \rightarrow s$, $\neg s$, p

结论: $\neg q$

证明 用归谬法

- | | |
|-----------------------------|---------|
| ① q | 结论否定引入 |
| ② $r \rightarrow s$ | 前提引入 |
| ③ $\neg s$ | 前提引入 |
| ④ $\neg r$ | ②③拒取式 |
| ⑤ $\neg(p \wedge q) \vee r$ | 前提引入 |
| ⑥ $\neg(p \wedge q)$ | ④⑤析取三段论 |
| ⑦ $\neg p \vee \neg q$ | ⑥置换 |
| ⑧ $\neg p$ | ①⑦析取三段论 |
| ⑨ p | 前提引入 |
| ⑩ $\neg p \wedge p$ | ⑧⑨合取 |



主要内容

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
 - 真值表法
 - 等值演算法
 - 主析取范式法
- 推理定律
- 自然推理系统 P
- 构造推理证明的方法
 - 直接证明法
 - 附加前提证明法
 - 归谬法(反证法)



- 理解并记住推理形式结构的两种形式：
 1. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \rightarrow B$
 2. 前提: A_1, A_2, \dots, A_k
结论: B
- 熟练掌握判断推理是否正确的不同方法（如真值表法、等值演算法、主析取范式法等）
- 牢记 P 系统中各条推理规则
- 熟练掌握构造证明的直接证明法、附加前提证明法和归谬法
- 会解决实际中的简单推理问题



1. 判断下面推理是否正确：

(1) 前提： $\neg p \rightarrow q, \neg q$

结论： $\neg p$

解 推理的形式结构： $(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

方法一：等值演算法

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q$$

易知10是成假赋值，不是重言式，所以推理不正确。



方法二：主析取范式法，

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\Leftrightarrow M_2$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

未含 m_2 , 不是重言式, 推理不正确.



方法三 真值表法

p	q	$\neg p \rightarrow q$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$(\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1

不是重言式, 推理不正确

方法四 直接观察出10是成假赋值



(2) 前提: $q \rightarrow r, p \rightarrow \neg r$

结论: $q \rightarrow \neg p$

解 推理的形式结构: $(q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow \neg r) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

用等值演算法

$$(q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow \neg r) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \rightarrow (\neg q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg((q \wedge \neg r) \vee (p \wedge r)) \rightarrow (\neg q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg((q \vee p) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \rightarrow (\neg q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow ((q \vee p) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee p)) \vee (\neg q \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow 1$$

推理正确



2. 在系统 P 中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩. 如果颐和园游人太多，就不去颐和园. 今天是周六，并且颐和园游人太多. 所以，我们去圆明园或动物园玩.

证明：

(1) 设 p ：今天是周六， q ：到颐和园玩，
 r ：到圆明园玩， s ：颐和园游人太多
 t ：到动物园玩

(2) 前提： $p \rightarrow (q \vee r)$, $s \rightarrow \neg q$, p , s
 结论： $r \vee t$



(3) 证明:

- | | |
|------------------------------|---------|
| ① $p \rightarrow (q \vee r)$ | 前提引入 |
| ② p | 前提引入 |
| ③ $q \vee r$ | ①②假言推理 |
| ④ $s \rightarrow \neg q$ | 前提引入 |
| ⑤ s | 前提引入 |
| ⑥ $\neg q$ | ④⑤假言推理 |
| ⑦ r | ③⑥析取三段论 |
| ⑧ $r \vee t$ | ⑦附加 |