图 1: 华东理工大学

常微分方程知识总结 (第二版)

莫

2023 年 5 月

前言

欢迎你。

这本来是作者高数时候总结的有关微分方程的知识。事后我萌发出了把它继续完善的想法，并有一种将它传播的愿望。但是这本书的定位呢，其实就是**为已经初步学过高数中微分方程一章的同学进行一个复习的工作**，所以本整理较多的陈列了有关知识点的问题，不过我还是在每个知识点（除微分算子法外）后面附加了一两个例题，也作为一个归纳复习的依据。认真来说，从数学分析的角度来看，这点知识其实是远远不够的，但作为高数的要求来讲，其实已经够了，虽然用做非数学类竞赛的话其实还是与相应的大纲有不小的距离。

同时受作者本人能力限制，如果你有什么批评意见或者建议，我真诚欢迎。QQ 或邮箱均可。邮箱 mointeresting@163.com.

本整理可参考的食用方法

初学/初看本整理：

1. 看定义（大概印象即可）

2. 归纳学习，尽量总体性地思考

完整学习过微分方程且能独立解出本整理 80% 题及以上的高数佬：

1. 看定义（深刻记忆）

2. 自己抽出题目中的共性，学着推演与创造

目录

1 一阶微分方程

定义 1.1: 一阶微分方程

有一般形式：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

对于这类问题，有以下定理可以运用：

定理 1.1: 解的存在和唯一性定理

如果 $f(x, y)$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ 在矩形区域 $\{(x, y)||x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ 上连续，那么存在一个正数 $h(0 < h \leqslant a)$, 使得定解问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 在 $|x - x_0| < h$ 上有唯一的解 $y = \varphi(x)$, 即在 $|x - x_0| < h$ 上成立

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad 及\varphi(x_0) = y_0$$

注释 1.1:
有了这个定理，我们在之后用下列方法求出微分方程的表达式的时候，可以知道表达式唯一。

1.1 可分离变量的微分方程

1.1.1 可分离的变量

定义 1.2: 可分离变量的微分方程

如果一个一阶方程可以写成 $y' = f(x, y)$ 能写成 $P(x)dx = Q(y)dy$ 的形式，这就是可分离变量的微分方程。

解法 1.1

对于上式，两边积分即可。

例题 1.1
若 $y' = x + 1$，求 y 的表达式

注意:
积分后微分方程一定记得加入任意常数，有时候对于有特解的问题需要解开它。

证明. 解：这个可以写成

$$ydy = (x + 1)dx$$

于是

$$\int ydy = \int (x+1)dx$$

所以

$$y^2 = (x+1)^2 + C$$

C 为任意常数

□

1.1.2 变量代换后可分离的变量

解法 1.2: 换元积分

若 $y' = f(ax+by+c)$，解法如下：令 $u = ax+by+c$，则 $u' = a+bf(u)$，分离变量则有 $\dfrac{du}{a+bf(u)} = dx$，于是 $\displaystyle\int \frac{du}{a+bf(u)} = \int dx$.

例题 1.2 例题：求微分方程 $dy = sin(x+y+100)dx$ 的通解

证明. 解：令 $u = x+y+100$，容易知道 $\dfrac{du}{dx} = 1 + dydx$ 于是

$$\frac{du}{dx} = 1 + sinu$$

得到了可分离变量方程，稍做处理可以知道

$$\frac{du}{1+sinu} = dx$$

所以

$$\frac{2}{1+tan\frac{u}{2}} = -x + C$$

则

$$tan\frac{x+y+100}{2} = \frac{2}{C-x} - 1$$

解得

$$y = 2arctan(\frac{2}{C-x} - 1) - x - 100$$

□

提示：

对于 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+sinx}$ 的积分，可以用万能公式法。

注意:

我们只需要求得通解，对于一些不成立的解，不用写出来。
但是值得注意的是，方程变形后，可能会丢失某些解。例如上题的 $\int \frac{du}{1+sinu}$ 中，我们发现，当 $u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}(k \in \mathbb{N})$ 时，是无法求出本题通解答案的。
不过，只要求出的解中含有独立的任意常数的个数与方程的阶数相同，它就是通解。**若题目是求通解，则无需考虑丢失的解，否则，还是应将丢失的解补上。**

1.2 齐次微分方程

定义 1.3: 齐次微分方程

其标准形式为 $y' = f(\frac{y}{x})$，其中 f 有连续的导数

解法 1.3: 换元

令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y' = u + xu'$，代入 y'，则原方程变成可分离变量的方程 $xu' + u = f(u)$

评注:

对应于一般形式方程 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}), (c_1, c_2$不全为 0），其求解方法为:

1. 若 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 令$x = t+\alpha, y = u+\beta(\alpha, \beta,$ 为待定常数).且满足方程 $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0, \end{cases}$ 则原方程化为$\frac{du}{dx} = f(\frac{a_1t+b_1u}{a_2t+b_2u})$(齐次方程)

2. 若 $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, 则$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$令$u = a_1x + b_1y$, 方程化为$\frac{du}{dx} = a_1 + b_1 f(\frac{u+c_1}{\lambda u + c_2})$(可分离变量方程)

注意:

全微分方程本总结不讲解。

例题 1.3 解定解问题 $\begin{cases} (y + \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0(x > 0), \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$

证明. 解：将方程化为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{(1 + (\frac{y}{x})^2)}$ 容易知道这是一个齐次方程，令 $y = ux$, 得到

$$x\frac{du}{dx} + u = u + \sqrt{1+u^2}.$$

化简并分离变量后:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

对上面左右两式积分，再取以 e 为底的指数，容易知道

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$$

代入初始条件, 知道 $C=1$ 化简后，知道 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ □

1.3 一阶线性微分方程

定义 1.4: 一阶线性方程

即 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$, 其中 $P(x),Q(x)$ 均为连续函数。

结论 1.3.1: 一阶线性方程的解

利用分离变量法，可以得到相应的齐次线性微分方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$，再用常数变易法，可以得到非齐次线性微分方程的通解为

$$y=(e^{-\int P(x)dx})(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)$$

例题 1.4 求微分方程 $(1+y^2)dx+(x-arctany)dy=0$ 的通解

证明. 解：方程变形为 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{1+y^2}x=\frac{arctany}{1+y^2}$ 代入上述解法，可以知道其通解为

$$x=Ce^{-arctany}+arctany-1$$

□

1.4 伯努利方程

定义 1.5: 伯努利方程

即 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$, 其中 $P(x),Q(x)$ 均为连续函数,$n\neq 0,1$

解法 1.4

解：方程两端同除以 y^n，令 $z=y^{1-n}$，可以化为一阶线性方程 $\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$，接下来用一阶线性微分方程的结论代入即可。

注意：

当 $n>0$ 时，$y=0$ 也是方程的解，不要漏了。

例题 1.5 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y+x^2}$ 的通解

证明. 解：视 x 为因变量，y 为自变量，方程变形为 $x'-x=\dfrac{y}{x}$

令 $z=x^2$, 方程两边同除以 x^{-1}，得到

$$\frac{dz}{dy}-2z=2y$$

使用一阶线性方程的解法，得到

$$x^2=1+Ce^{-2y}$$

□

2 可降阶的微分方程

2.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型

定理 2.1

形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的方程，通过 n 次积分可以求出此类方程的通解。

例题 2.1 求微分方程 $y'''=lnx$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=0,y'|_{x=1}=1,y''|_{x=1}=1$ 的特解

证明. 解：容易知道

$$y''=\int_1^x y'''dt+y''|_{x=1}=xlnx-x+2.$$

同理

$$y'=\int_1^x y''dt+y'|_{x=1}=\frac{x^2}{2}lnx-\frac{3x^2}{4}+2x-\frac{1}{4}$$

于是

$$y=\int_1^x y'dt+y|_{x=1}=\frac{x^3}{6}lnx-\frac{11}{36}x^3+x^2-\frac{1}{4}x-\frac{4}{9}$$

□

> **注释 2.1:** 对于特解问题，不要忘记 $y(x)=\displaystyle\int_{x_0}^x tdt+y|_{(x=0)}$。

2.2 $y''=f(x,y^{'})$ 型

定理 2.2

形如 $F(x,y',y'')=0$的方程(不显含未知函数 y). 令 $y'=p(x)$，该方程可化为一阶方程 $F(x,p,p')=0$.

推论 2.1

对于 $F(x,y',y''...,y^k)=0,(k>2,k\in\mathbb{N})$ 一样可以用这个方法降阶。

注意：
高次降阶之后可以是伯努利方程，也可以是 $n-1$ 阶线性微分方程，根据需要选择方法。

例题 2.2 求方程 $yy''-2(y')^2=0$ 的通解

证明. 解：令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$, 原方程变为

$$yp\frac{dp}{dy}-2p^2=0,$$

若 $p\neq 0$, 则有方程 $y\frac{dp}{dy}=2p$，其通解为 $p=C'y^2$，即 $\frac{dy}{dx}=C'y^2$. 于是

$$y=\frac{1}{Cx+D}$$

C,D 是任意常数且不同时为零 □

2.3 $y''=f(y,y^{'})$ 型

定理 2.3

形如 $F(y,y',y'')=0$的方程(不显含自变量 x)，将 y 看成自变量，令 $y'=p(y)$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$. 该方程化为一阶方程 $F(y,p,p\frac{dp}{dy})=0$

注释 2.1： 这个也有跟 2.2 一样的推论。

例题 2.3 解微分方程 $y''+\frac{(y')^2}{1-y}=0$

证明. 解：令 $y'=p$，由上述的求导公式，$y''=p\frac{dp}{dy}$ 因此原方程化为

$$p\frac{dp}{dy}+\frac{p^2}{1-y}=p(\frac{dp}{dy}+\frac{p}{1-y})=0$$

分类讨论：

1.$p=0$，则原方程特解 $y=C(C\neq 1)$

2.$p \neq 0$，则分离变量，知道原方程通解为

$$y = 1 + C_2 e^{C_1 x} (C_2 \neq 0)$$

□

3 线性齐次和非齐次微分方程解的性质以及解的结构

定义 3.1: 二阶线性微分方程

二阶线性微分方程的一般形式为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = f(x)$$

当 $f(x) \equiv 0$ 时就是齐次线性微分方程，即

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = 0$$

当 $p(x), q(x)$ 都等于常数时，称上述方程为**常系数线性微分方程**，否则称为**变系数线性微分方程**

注意：
关于二阶线性微分方程的定解问题，也有它解的存在和唯一性定理，这里不做赘述。

3.1 二阶线性齐次微分方程

注释 3.1： 在这里，我们总假定 $p(x), q(x)$和$f(x)$ 在区间 $I \in (a, b)$ 上连续。

定理 3.1: 齐次线性方程解的线性性质

$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = 0$$

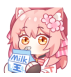
在 I 上的两个线性无关的解，则其任意线性组合 $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)(\alpha, \beta$是任意常数)包含了方程的全部解.

定义 3.2: 线性相关和线性无关

设 $\{y_j(x)\}_{j=1}^m$ 是m个I 上的函数，若存在一组不全为 0 的常数 $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$, 使得

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k(x) = 0, x \in I$$

则称这 m 个函数在 I 上是**线性相关**的，否则就称为**线性无关**.



注释 3.2: 对于一组解 y_1, y_2，如果相除得到的是一个常数，就是线性相关，此时必须舍弃一个。

这里介绍一个很有用的解法：

解法 3.1: Liouville 公式

若 y_1 是

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = 0$$

的一个解，那么另一个解

$$y_2 = \frac{1}{y_1}\int y_1^2 e^{-\int p(x)dx} dx$$

也是它的一个解

3.2 二阶线性非齐次微分方程

定理 3.2: 非齐次线性微分方程的通解

非齐次线性微分方程的通解等于该方程的一个**特解**加上相应的齐次线性微分方程的通解。

这里还有一个结论：

结论 3.2.1: 解的叠加原理

若 $y_1(x), y_2(x)$ 分别是线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = f_1(x)$$

和

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = f_2(x)$$

的解，则 $y_1(x) + y_2(x)$ 是线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

的解

评注：
上述线性性质，以及解的叠加原理对于任何 n 阶线性常微分方程都成立。

接下来我们来看几道例题。

例题 3.1 已知 $y_1 = 3, y_2 = 3 + x^2, y_3 = 3 + e^x$ 是某二阶线性非齐次微分方程的解，求该微分方程及其通解.

证明. 解：由已知,$y_2 - y_1 = x^2, y_3 - y_1 = e^x$ 是对应的二阶线性齐次微分方程的两个线性无关的解，而 $y_1 = 3$ 是所求线性非齐次微分方程的特解，所以通解就是

$$y = 3 + C_1x^2 + C_2e^x$$

□

评注：
本题的方法可以当结论直接用，证明的话求导代入即可。

例题 3.2 已知 $y = x$ 是齐次微分方程 $x(x-1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ 的一个解，求该方程的通解

证明. 解：设 $y = xC(x)$，其中 C(x) 是待定系数，求导后代入方程，整理之后得到 $(x^2 - x)C''(x) = 2C'(x)$ 这是类似于不显含 y 的可降阶的微分方程，令 $C'(x) = p$，不难发现

$$C'(x) = p = C_1(1 - \frac{1}{x})^2$$

知道 $C(x) = C_1(x - 2ln|x| - \frac{1}{x}) + C_2$其中$C_1, C_2$为任意常数 再代入回 $y = xC(X)$ 即可得到答案 □

评注：
当你知道二阶线性齐次方程的一个解的时候，可以运用常数变易法，也可以使用上述的 Liouville 公式。

例题 3.3 求出以 x 和 $cosx$ 为特解的二阶线性齐次微分方程。

证明. 解：容易知道，解必然可以表示为 $y = C_1x + C_2cosx$ 的形式。

由于 y 与 $x, cosx$ 线性相关，我们可以得出一个式子

$$\lambda_1 y + \lambda_2 x + \lambda_3 cosx = 0$$

求导后得到

$$\begin{cases} \lambda_1 y + \lambda_2 x + \lambda_3 cosx = 0 \\ \lambda_1 y' + \lambda_2 - \lambda_3 sinx = 0 \\ \lambda_1 y'' \qquad - \lambda_3 cosx = 0 \end{cases}$$

把它看成以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为未知量的线性方程组，由于知道它有非零解，所以其系数行列式

$$\begin{vmatrix} y & x & cosx \\ y' & 1 & sinx \\ y'' & 0 & cosx \end{vmatrix} = 0$$

即

$$(xsinx + cosx)y'' - (xcosx)y' + (cosx)y = 0$$

这就是以 x 和 $cosx$ 为特解的二阶线性齐次微分方程。 □

注意：

一定要记得上述定义 3.2：线性相关和线性无关给出的式子！运用它，我们可以列出第一个式子。

评注：

本题由线性代数的知识再加上齐次方程组（线性方程组的特殊形式）的知识，我们知道 n 个解 n 个未知量的线性方程组**唯一解的充要条件**是其系数行列式不等于 0，等于 0 就是有零解或者有无数解。但是齐次方程组**必有零解**，所以当其系数行列式不等于 0 的时候，这个唯一解就是零解。所以本题的系数行列式必须等于 0。

下面具体介绍一下用常数变易法解二阶非齐次线性微分方程的方法。

解法 3.2: 用常数变易法解二阶非齐次线性微分方程

对于非齐次线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)=f(x)$$

如果知道其对应的线性微分方程的两个线性无关解 $y_1(x),y_2(x)$，通解

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

为了求得非齐次线性微分方程的解，用常数变易法

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

求导

$$y'=C_1'(x)y_1(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_2(x)y_2'(x)$$

为了避免 $C(x)$ 出现二阶导的情况，与此同时，让 y 拥有二阶导似乎可以凑 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)=0$ 来抵消一些项，暂且尝试这样做，然后我们令 $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$，对 y' 再求一次导，结果如下：

$$y''=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)$$

代入对应的非齐次线性微分方程

$$C_1(x)[y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1]+C_2(x)[y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2]+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=0$$

发现对应的齐次微分方程

$$y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1=0,y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2=0$$

故得到一组线性方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0\\C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)\end{cases}$$

容易知道

$$C_1'(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)},C_2'(x)=\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}$$

这里 $W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x)&y_2(x)\\y_1'(x)&y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$，再对 $C_1'(x),C_2'(x)$ 积分，代入 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 即可。

4 常系数齐次以及非齐次线性微分方程的通解

注意：
在本节中，没有特别说明的时候，通解中的所有 C 均为任意常数。

4.1 二阶常系数线性齐次微分方程

定义 4.1: 二阶常系数齐次线性微分方程及其特征方程

二阶常系数齐次微分方程如下：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$$

有

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

这就是它的特征方程。

解法 4.1: 根据特征方程的解法

分情况讨论
1. 若特征方程有两个不同的实根 x_1,x_2，可设通解 $y=C_1e^{x_1}+C_2e^{x_2}$
2. 若特征方程有两个相同的实根 x_1，可设通解 $y=(C_1+C_2x)e^{x_1}$
3. 若特征方程有一对共轭复根 $a\pm ib$，可设通解 $y=e^{ax}(C_1sinbx+C_2cosbx)$

注意：
上述讨论具有一般性，也就是说，对 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_ny=0$$

也有类似的结论:
1. 若 λ是实数单重根，则$e^{\lambda x}$ 是微分方程的解；
2. 若 λ是实数 k 重根，则$e^{\lambda x},xe^{\lambda x},x^2e^{\lambda x},\cdots,x^{k-1}e^{\lambda x}$ 是微分方程 k 个线性无关的解；
3. 若 $\lambda\pm i\mu$ 是单重共轭复根，则 $e^{\lambda x}cos\mu x$ 和 $e^{\lambda x}sin\mu x$ 是微分方程的两个线性无关的解。
4. 若 $\lambda\pm i\mu$ 是 k 重共轭复根，则 $e^{\lambda x}cos\mu x,e^{\lambda x}sin\mu x,xe^{\lambda x}cos\mu x,xe^{\lambda x}sin\mu x,\cdots,x^{k-1}e^{\lambda x}cos\mu x,x^{k-1}e^{\lambda x}sin\mu x,$ 是微分方程的 2k 个线性无关的解。

这样，恰好可以找到 n 个线性无关的解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$, 于是，微分方程的通解为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是任意常数。

4.2 二阶常系数线性非齐次微分方程

解法 4.2: 二阶常系数线性非齐次微分方程的特解

形式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

特解分类讨论：1. 如果 $f(x)=U_n(x)e^{\lambda^* x}$ 若 m 重根 $(m=0,1,2)$，则方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

有形式为

$$y^*=x^mV_n(x)e^{\lambda^* x}$$

其中,$V_n(x)$ 是跟 $U_n(x)$ 同次的多项式

2. 如果 $f(x)=U_n(x)e^{ax}cosbx$ 或 $U_n(x)e^{ax}sinbx(b\neq 0)$ 则方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

有形式为

$$y^*=x^me^{ax}[V_n(x)cosbx+\tilde{V}_n(x)sinbx]$$

这里 $V_n(x)$与$\tilde{V}_n(x)$ 也是跟 $U_n(x)$ 同次的多项式，m 根据 $a\pm ib$ 其中之一是不是对应特征方程的解而取 0 或 1

评注：
在这里，当 f(x) 是多项式、指数函数、正弦和余弦函数或者它们的乘积时，由于这些类函数求导后不会改变函数的形式，因此，可以设方程的解是同类函数，利用待定系数法求出其特解 $y*$。至于怎么求，这里不再赘述。

于是，我们来看两道例题。

例题 4.1 求微分方程 $y''+4y=4x^2+2x+5+cos2x$ 的通解

注释 4.1： 这就是需要用解的叠加原理的时候了。

证明. 解：这个方程对应的齐次微分方程是 $y''+4y=0$，由特征方程，容易知道其通解为

$$y=C_1cos2x+C_2sin2x$$

对于前者 $y''+4y=4x^2+2x+5$，可设特解为 $y_1=a_2x^2+a_1x+a_0$，代入 $y''+4y=4x^2+2x+5$，化简，整理，可以得到

$$4a_2x^2+4a_1x+2a_2+4a_0=4x^2+2x+5$$

比较系数后知道

$$a_2 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_0 = \frac{3}{4}$$

因此 $y_1 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$，对于后者 $y'' + 4y = cos2x$，可设特解 $y_2 = axcos2x + bxsin2x$，代入 $y'' + 4y = cos2x$，化简整理后，同上，用比较系数知道 $a = 0, b = \frac{1}{4}$，则

$$y_2 = \frac{1}{4}xsin2x$$

由解的叠加原理知道

$$y = C_1cos2x + C_2sin2x + x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}xsin2x$$

□

下面这道题反过来，已知两个解，去求方程。

例题 4.2 设四阶常系数线性齐次方程有一个解为 $y = 3e^x cos2x$，另一个解为 $y = (3 + 2x)e^x$，求该方程及其通解。

证明. 解：容易知道四个解是：$1, 1, 1 \pm 2i$, 所以特征方程是 $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 10\lambda^2 - 12\lambda + 5 = 0$ 微分方程就是：

$$y^{(4)} - y^{(3)} + 10y'' - 12y' + 5y = 0$$

通解就是

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + e^x(C_3sin2x + C_4cos2x)$$

□

5 欧拉方程

定义 5.1: 欧拉方程

形如

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

的微分方程称为**二阶 Euler 方程**，其中 p, q 为常数.

解法 5.1: 变量代换 $x = e^t$

作变量代换 $x = e^t$，即 $t = lnx$，则可将原方程化为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (p-1)\frac{dy}{dx} + qy = f(e^t)$$

这是一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程。对于 **n 阶 Euler 方程**也是如此，可以将

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} + p_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}x\frac{dy}{dx} + p_ny = f(x)$$

作一样的变换。

例题 5.1 求 $x^2y'' - xy' + y = 2x$ 的通解

证明. 解：作 $x = e^t$，则 $t = lnx$，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx})$$

代入方程，得

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2e^t.$$

这就是二阶线性非齐次微分方程，解法已经很明显了。再把 $t = lnx$，最终结果就是

$$y = x(C_1 + C_2lnx) + xln^2x$$

□

评注：
在欧拉变换中，一定注意求导是对哪个变量求导，正如上题一样。

6 微分方程组

定义 6.1: 常系数线性微分方程组

如果微分方程组的每一个微分方程都是常系数线性微分方程，那么这种微分方程组就叫做**常系数线性微分方程组**。

解法 6.1: 常系数线性微分方程组的解法

第一步从方程组中消去一些未知函数及其各阶导数，得到只含有一个未知函数的高阶常系数线性微分方程。

第二步解此高阶微分方程，求出满足该函数的未知函数。

第三步把已求得的函数代入原方程组，一般情况下，不用积分就可以求出其余的未知函数。

例题 6.1 解微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - x = e^t \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \end{cases}$$

证明. 解：用记号 D 表示 $\frac{d}{dt}$，则方程组可记作

$$\begin{cases} (D^2-1)x + Dy = e^t \\ Dx + (D^2+1)y = 0 \end{cases}$$

这个方程可以像解代数方程组一样，于是我们知道

$$(-D^4 + D^2 + 1)y = e^t$$

这就是四阶非齐次线性方程，它的特征方程是

$$-r^4 + r^2 + 1 = 0$$

解得特征根

$$r_{1,2} = \pm\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, r_{3,4} = \pm\beta i = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

容易求得一个特解 $y^* = e^t$，于是知道通解

$$y = C_1e^{-\alpha t} + C_2e^{\alpha t} + C_3cos\beta t + C_4sin\beta t + e^t$$

又因为

$$x = -D^3y - e^t$$

用求得的 y 的通解代入，可以知道

$$x = \alpha^3C_1e^{-\alpha t} - \alpha^3C_2e^{\alpha t} - \beta^3C_3cos\beta t + \beta^3C_4sin\beta t - 2e^t$$

求得的 x, y 再联立一下，就是所求方程组的通解 □

注意：
在解常系数微分方程组的时候，用微分算子法简化运算是个不错的选择，特别是二阶及以上的微分方程组。

7 微分方程的应用

这里选择了一道较难的应用题（微分方程的几何运用），用来锻炼自己。

例题 7.1 一个冬季的早晨开始下雪，且以恒定的速度不停地下。一台扫雪机从上午 8 点开始在公路上扫雪，到 9 点前进了 2(km)，到 10 点前进了 3(km)。假定扫雪机每小时扫去积雪地体积为常数，问何时开始下雪。

证明. 解：由题目知道，下雪速度恒定，假设 h 是 t 时间时地面的积雪厚度，则不难知道 $\frac{dh}{dt}=C$，于是 $h=Ct+C_1$，又因为 $t=0$ 时候，地面没积雪，所以 $C_1=0$，故 $h=Ct$。

另一方面，由于扫雪机每小时扫去雪地体积为一常数，所以它扫雪的速度跟雪堆积的厚度成反比，即 $\frac{dx}{dt}=\frac{k}{h}$，其中，k 为一常数，代入 h 的表达式，不难得到

$$\frac{dx}{dt}=\frac{A}{t}$$

解开这个方程知道

$$x=Alnt+B(B\text{为任意常数})$$

设 T 是天上开始下雪到扫雪机开始工作的这段时间，我们可以得到三个式子

$$\begin{cases} AlnT+B=0 \\ Aln(T+1)+B=2 \\ Aln(T+2)+B=3 \end{cases}$$

上述第二个式子减去第一个式子，第三个式子减去第二个式子，根据倍数关系，可以得到

$$(\frac{T+1}{T+2})^2=\frac{T+1}{T}$$

解这个方程式，我们知道

$$T=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618(h),\text{也就是约等于 37 分 5 秒}$$

所以这场雪是 7:22:55 开始下的。 □

评注：
充分挖掘本题隐藏的信息：下雪速度恒定，扫雪机扫雪体积恒定（化为扫雪深度），好好利用它们。

8 微分算子法 *

微分算子法对于一些微分方程的计算是极其好用的，咱们在微分方程组里已经初步看出了它的强大的简化计算能力。

如下，微分算子的本质其实就是一种映射。

$$\boxed{\text{y}} \longrightarrow \boxed{\text{D}} \longrightarrow \boxed{\text{y'}}$$

定义 8.1: 微分算子

我们把 $D=\dfrac{d}{dx}$ 叫做微分算子。

类比函数的表达方式，$Dy=y'$，其实这就是对 y 求一次导。不难发现 $D^n y=y^{(m)}$ 就是求了 n 次导。

结论 8.0.1: 微分算子性质

1. 我们把 d 代入计算的话，可以看到 $y'=\dfrac{1}{D}y$，所以 $\dfrac{1}{D^n}f^{(n)}(x)=f(x)$
2. 若 $F(D)=D-k,\dfrac{1}{F(D)}e^{bx}=\dfrac{1}{b-c}e^{bx}$
3. 若 $F(D)=D^2-(a+b)D+ab=(D-a)(D-b)$, 则 $\dfrac{1}{F(D)}f(x)=\dfrac{1}{D-b}\dfrac{1}{D-a}f(x)$
4. $\dfrac{1}{F(D)}e^{kx}=\dfrac{1}{F(k)}e^{kx}$，其中 $F(k)\neq 0$.
5. $\dfrac{1}{F(D)}u(x)e^{kx}=e^{kx}\dfrac{1}{F(D+k)}u(x)$
6. $\dfrac{1}{F(D)}[f_1(x)+f_2(x)]=\dfrac{1}{F(D)}f_1(x)+\dfrac{1}{F(D)}f_2(x)$
7. 若 $F(D)=D-k$, 则 $\dfrac{1}{F(D)}x^a=(-\dfrac{1}{k}-\dfrac{D}{k^2}-\cdots-\dfrac{D^a}{k^{a+1}})x^a$

评注:

对于性质 2. 构造微分方程：$y'-ky=e^{bx}(b\neq k)$，特解设为 $y^*=\dfrac{1}{b-k}$

这里需要注意，性质 7. 用整式除法也可以得到相似的结果。

注释 8.1: 考虑到这只是个复习笔记，这里 3. - 7. 不提供推理过程。

而且，整个微分算子法几乎都是从知乎一篇文章抄过来的，这里建议直接进入原文观看: https://zhuanlan.zhihu.com/p/429780174

这大抵就是全部了。至于未来的更新想法，暂且没有。pdf 中出现的谬误敬请指正，联系方法见序言。