华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 8 册）

班级___________学号____________姓名____________任课教师____________

第十五次作业

教学内容：8.4 拉普拉斯变换的应用；6.1 共形映射的概念
6.2 分式线性映射

1. 求解下列微分方程

(1) $y''-2y'+y=e^t, y(0)=y'(0)=0;$

解 （1） 令 $Y(s)=\mathcal{L}[y(t)]$，在方程两端取拉氏变换，并代入初始条件，将

$$s^2Y(s)-2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)^3}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)^3},1\right]$$

$$=\frac{1}{2!}(e^{st})''\Big|_{s=1}$$

$$=\frac{1}{2}t^2e^t$$

(2) $y''-2y'+2y=2e^t\cos t, y(0)=y'(0)=0;$

解：同上题，有

$$s^2Y(s)-2sY(s)-2Y(s)=2\frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{2(s-1)}{(s^2-2s+2)^2}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)$$

由象函数的微分性质：$\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]=-t\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$，于是有

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)\right]$$

$$=t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]$$

$$=te^t\sin t$$

(3) $y^{(4)}-y'''=\cos t, y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=1;$

同上题，有

$$s^4Y(s)-s+s^3Y(s)-1=\frac{s}{s^2+1}$$

$$(s^4+s^3)Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+(s+1)$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}+\frac{1}{s^3}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]$$

$$=\lim_{s\to 6}\left[\frac{e^{st}}{(s+1)(s^2+1)}\right]'+\frac{e^{st}}{s^2(s^2+1)}\Big|_{s=-1}+\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s+i)}\Big|_{s=i}$$

$$+\frac{e^{st}}{s^2(s+1)(s^2-i)}\Big|_{s=-i}+\frac{1}{2}t^3$$

$$=t-1+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)+\frac{t^3}{2}$$

(4) $y^{(4)}+2y''+y=0, y(0)=y'(0)=y'''(0)=0, y''(0)=1;$

同上题方法，有

$$s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)+2s^2Y(s)-2sy(0)$$

$$-2y'(0)+Y(s)=0$$

$$Y(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

从而方程解为：

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\cos t*\sin t=\frac{1}{2}t\sin t$$

2． 求解下列微积分方程

$$y'+2y=\sin t-\int_0^t y(\tau)d\tau, y(0)=0$$

解：两端取拉氏变换，并由微分和积分性质，有

$$sY(s)\ \ +2\mathrm{Y(s)}=\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s}Y(s)$$

即 $(s+2+\frac{1}{3})Y(s)=\frac{1}{s^2+1}$

$$Y(s)=\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}$$

因此 $y(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}te^{-t}$

$$=\frac{1}{2}(\sin t-te^{-t})$$

3．求解下列方程组

（1）
$$\begin{cases} x''-x-2y'=e^t & x(0)=-\frac{3}{2}, x'(0)=\frac{1}{2} \\ x'-y''-2y=t^2 & y(0)=1, y'(0)=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

解： 设 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$, $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$

在方程组两边取 Laplace 变换，并应用初始条件得

$$\begin{cases} s^2X(s)+\frac{3}{2}s-\frac{1}{2}-X(s)-2sY(s)+2=\frac{1}{s-1} \\ sX(s)+\frac{3}{2}-s^2Y(s)+s-\frac{1}{2}-2Y(s)=\frac{2}{s^3} \end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases} X(s)=-\frac{3}{2(s-1)}+\frac{2}{s^2} \\ Y(s)=-\frac{1}{2(s-1)}-\frac{1}{s^3}+\frac{3}{2s}. \end{cases}$$

求逆变换得

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{3}{2}e^t + 2t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}e^t - \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

（2）$\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2 & x(0) = x'(0) = 0 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

解：设 $L|x| = X(s), L|y| = Y(s)$。对方程组的每个方程两边分别取拉氏变换，并考虑到初始条件得：

$$\begin{cases} s^2Y(s) - s^2X(s) + sX(s) - Y(s) = \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{2}{s}, \\ 2s^2Y(s) - s^2X(s) - 2sY(s) + X(s) = -\dfrac{1}{s^2}, \end{cases}$$

整理计算得：$\begin{cases} X(s) = \dfrac{2s-1}{s^2(s-1)^2} = \dfrac{2}{s(s-1)^2} - \dfrac{1}{s^2(s-1)^2}, \\ Y(s) = \dfrac{1}{s(s-1)^2} \end{cases}$

以下求 $X(s)$ 的拉氏逆变换：因为

$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] = 1,\ \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-1)^2}\right] = te^t,\ \mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2}\right] = t$ 故由卷积定理可得

$\mathscr{L}^{-1}[X(s)] = 2\int_0^t \tau e^\tau d\tau - \int_0^t (t-\tau)\tau e^\tau d\tau = te^t - t$，

同理可求

$\mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = te^t - e^t + 1$ ，

所以方程组的解为 $\begin{cases} x = L^{-1}[X(s)] = te^t - t, \\ y = L^{-1}[Y(s)] = te^t - e^t + 1, \end{cases}$

（3）$\begin{cases} (2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0 & x(0) = x'(0) = 1 \\ (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0 & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

解：方程组中每个方程两边取拉氏变换，得

$$\begin{cases} (2s^2 - s + 9)X(s) - (s^2 + s + 3)Y(s) = 1 + 2s \\ (2s^2 + s + 7)X(s) - (s^2 - s + 5)Y(s) = 3 + 2s \end{cases}$$

整理得$\begin{cases} 2X(s)-Y(s)=\dfrac{2s+2}{s^2+4} \\ X(s)+Y(s)=\dfrac{1}{s-1} \end{cases}$

解之得

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{s^2+4} \\ Y(s)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{s^2+4} \end{cases}$$

再取拉氏逆变换得到其解为：

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{3}e^t+\dfrac{2}{3}\cos 2t+\dfrac{1}{3}\sin 2t \\ y(t)=\dfrac{2}{3}e^t-\dfrac{2}{3}\cos 2t-\dfrac{1}{3}\sin 2t \end{cases}$$

4.填空题

(1) 分式线性映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 在 $z=i$ 处的旋转角为 $\underline{-\dfrac{\pi}{2}}$ 伸缩率为 $\underline{\dfrac{1}{2}}$

（2）在 $w=z^2$ 的映射下，$y=x+1$ 的像曲线为 $\underline{v=\dfrac{1}{2}(u^2-1)}$，$y^2=x^2+1$ 的像曲线 $\underline{u=-1}$

（3）在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下，区域 $x>1, y>0.$ 映射为 $\underline{(u-\frac{1}{2})^2+v^2<(\frac{1}{2})^2, v<0.}$

(4)在分式线性映射 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下，$|z|<1$ 像为 $\underline{\mathrm{Re}\,w<0}$

第十六次作业

教学内容：6.2 分式线性映射（续）;6.3 几种常见的分式线性映射

1．填空

(1)把 $z_1=2, z_2=i, z_3=-2;$ 映射为 $w_1=-1, w_2=i, w_3=1$ 的分式线性映射为__($w=\dfrac{z-6i}{3iz-2}$)

(2) 由三点 $z_1=\infty, z_2=i, z_3=0$ 到 $w_1=0, w_2=i, w_3=\infty$ 的分式线性映射为__($w=-\dfrac{1}{z}$)

2 求把上半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 映射成单位圆域 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(i)=0, \quad \arg f'(i)=-\dfrac{\pi}{2}$

解：$f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$，则 $f'(z)=e^{i\theta}\dfrac{zi}{(z+i)^2}$

$$f'(i)=e^{i\theta}\cdot(-\frac{i}{2})=e^{i\theta}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

由于 $\arg f'(i)=-\dfrac{\pi}{2}$

所以 $\theta-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$，$\theta=0$

所求映射为 $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$

(2) $f(i)=0,\qquad f(-1)=1;$

解：因为 $f(i)=0$，则 $f(-i)=\infty,$

$$f(z)=k\frac{z-i}{z+i}$$

又 $f(-1)=k\dfrac{-1-i}{-1+i}=ki=1$

$k=-i$

所求映射为 $f(z)=-i\dfrac{z-i}{z+i}$

(3) $f(2i)=0,\qquad \arg f'(2i)=0;$

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-2i}{z+2i}$$

$$f'(2i)=e^{i\theta}\cdot(-\frac{2i}{9})=e^{i\theta}\cdot\frac{2}{9}e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$\theta-\dfrac{\pi}{2}=0\qquad \theta=\dfrac{\pi}{2}$

所求映射为 $f(z)=\mathrm{i}\dfrac{z-2i}{z+2i}$

3. 求把单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(\frac{1}{2})=0,\qquad f(-1)=1;$

解：令 $f(z)=k\dfrac{2z-1}{z-2}$

由 $f(-1)=1$得, $k=1$

故 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z-2}$

(2) $f(\frac{1}{2})=0,\qquad \arg f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$.

解： $f(\frac{1}{2})=0$ 则 $f(2)=\infty$

令 $f(z)=k\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$

$|f(1)|=\left|\dfrac{k}{2}\right|=1$，$|k|=2$

$$f(z)=2e^{i\theta}\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$$

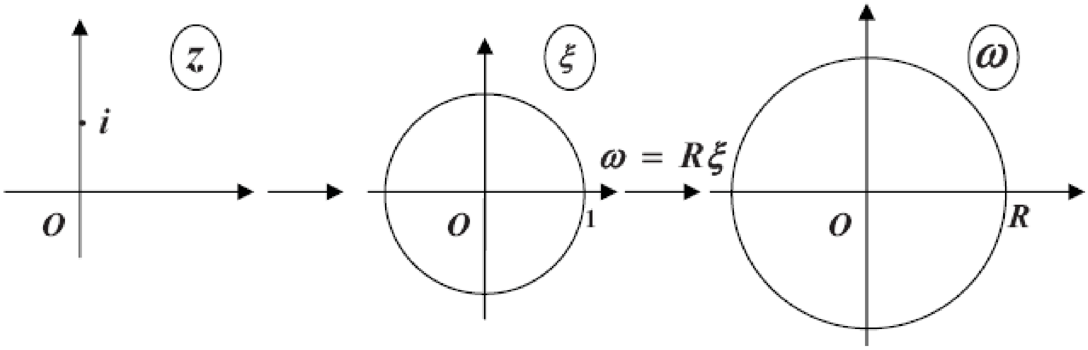
$f'(z)=2e^{i\theta}\dfrac{-3}{2(z-2)^2}$，$f'(\frac{1}{2})=\dfrac{4}{3}e^{i\theta+\pi i}$

$\theta+\pi=\dfrac{\pi}{2}$， 所以 $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$

$$f(z)=-2i\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}=-i\frac{2z-1}{z-2}.$$

4. 求将上半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 映射成圆 $|w|<R$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，且满足 $f(i)=0$，$f'(i)=1$.

解：



应用条件 $L(i)=0$ 知 $\omega = \mathrm{R}e^{i\theta}\dfrac{z-i}{z+i}$，再应用条件 $L'(i)=1$，则可确定 $R=2, e^{i\theta}=i$，所以变换为 $\omega = 2i\dfrac{z-i}{z+i}$

5.求分式线性映射 $w=f(z)$，它把 $|z|=1$ 映射为 $|w|=1$，并使 $1, 1+i$ 分别映射为 $1, \infty$

解：$1+i$ 和 ∞ 关于 $|z|=1$ 和 $|\omega|=1$ 的对称点分别是 $\dfrac{1+i}{2}$ 和 0.

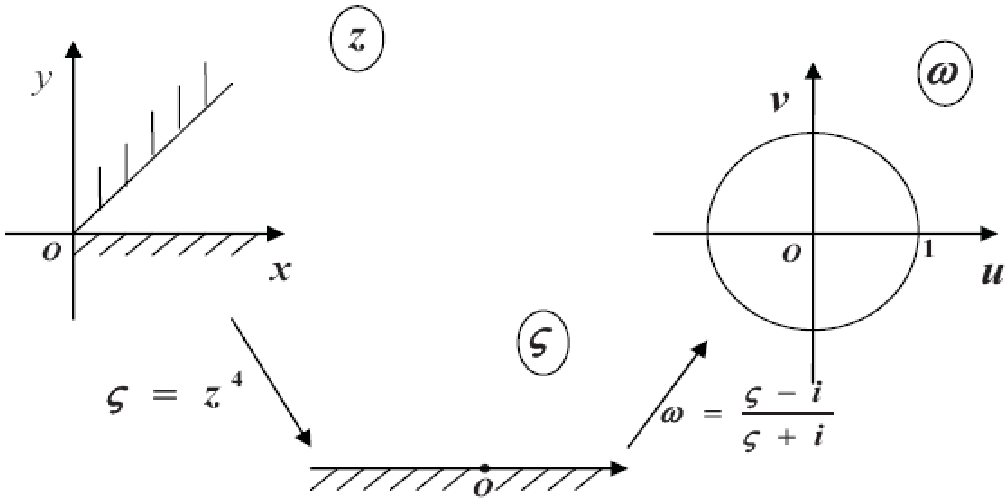
故分式线形映射 $\omega = L(z)$ 将单位圆内的点 $z=\dfrac{1+i}{2}$ 映为单位圆内的点 $\omega = 0$

所以 $\omega = L(z) = e^{i\beta}\dfrac{z-\dfrac{1+i}{2}}{1-\dfrac{1-i}{2}z}$，

又 $L(1)=1$，所以 $e^{i\beta}=i$ 即所求变换为 $\omega = i\dfrac{2z-(1+i)}{2-(1-i)z} = \dfrac{(i-1)z+1}{-z+(1+i)}$

6*. 求把角形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的一个映射.

解：复合如图 4 所示的两个变换，即得所求的变换为 $\omega = \dfrac{z^4-i}{z^4+i}$.



z
y
o
x
ς
ω
v
o
1
u
$\varsigma = z^4$
o
$\omega = \dfrac{\varsigma - i}{\varsigma + i}$