華東理工大學

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECENOLOGY

离　散　数　学

集合论　**Set Theory**

任课教师：杨海

yanghai@ecust.edu.cn

勤 奋 求 实

励 志 明 德

内容提要

1. 集合
2. 关系
3. 关系性质与闭包
4. 等价关系
5. 偏序关系
6. 函数
7. 集合基数

1、集合

概念：

集合，外延性原理，∈，⊆ ，⊂，空集，全集，幂集

文氏图，交，并，差，补，对称差

集合 一些可以明确区分的对象的整体, 对象的次序无关紧要. 对象称为元素.

- 约定: 用大写字母表示集合. 例:A ; 用小写字母表示元素. 例:a

  属于: $a \in A$ 不属于: $a \notin A$

- 集合表示:

  列举法 eg. $A = \{ a,b,c \}$

  叙述法 eg. $A=\{ x|x=a$或$x=b$或$x=c \}$

- 集合相等 (外延性原理) : 两个集合相等,当且仅当它们有相同的元素. 例:

  $\{ 1,2 \} = \{ 2,1 \}$

  $\{ 1,2,2 \} = \{ 1,2 \}$

集合与集合之间的关系：$\subseteq$, $=$, $\nsubseteq$, $\neq$, $\subset$, $\not\subset$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

空集 $\varnothing$　　不含有任何元素的集合

实例：　$\{\, x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \,\}$

定理：　空集是任何集合的子集。

推论：　$\varnothing$是惟一的。

全集 E　　包含了所有元素的集合

注：全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集

幂集 $P(A)=\{\, x \mid x \subseteq A \,\}$

例: (1) 令 A= {1,2 }, 则 P(A)={∅,{1},{2},{1,2}}

(2) 计算 P(∅), P(P(∅)), P(P(P(∅))).

定理：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

集合的基本运算

并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

差（相对补） $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

对称差 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

补（绝对补） $\sim A = E - A = \{x \mid x \notin A\}$

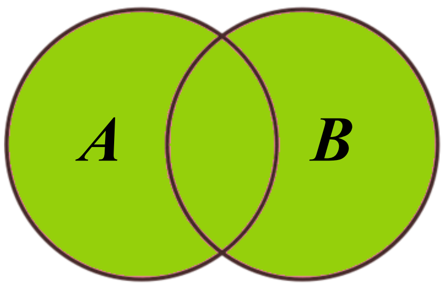
注：并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

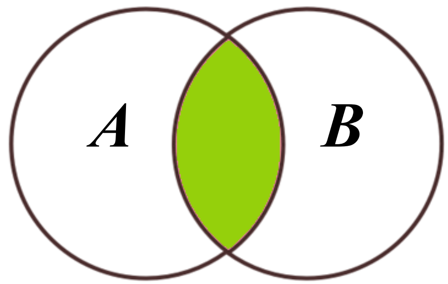
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$$

文氏图 (Venn Diagram):将全集E看成二维的全平面上所有的点构成的集合.而E的子集表示成平面上由封闭曲线围成的点集.

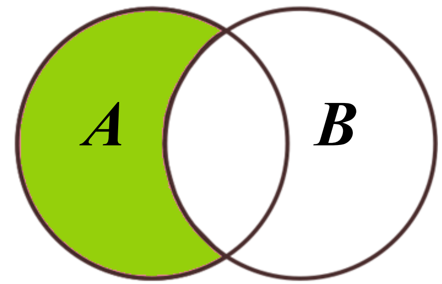
集合运算的表示



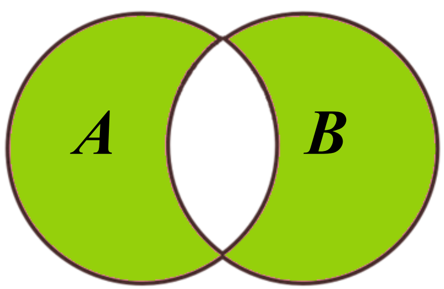
$A \cup B$



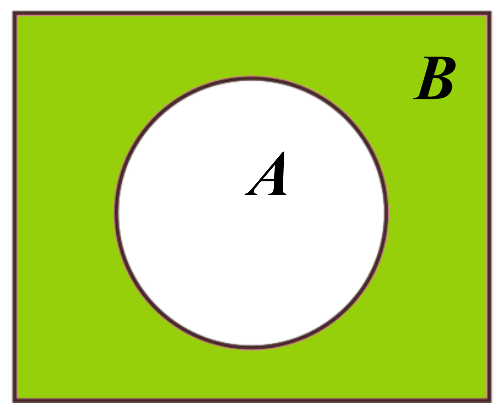
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

广义运算

广义并 $\cup A = \{ x \mid \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$

广义交 $\cap A = \{ x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

例: $\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$

$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$

$\cup\{\{a\}\}=\{a\}$， $\cap\{\{a\}\}=\{a\}$

$\cup\{a\}=a$， $\cap\{a\}=a$

集合恒等式

集合算律

1. 只涉及一个运算的算律：
   交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3．涉及补运算的算律：

DM律，双重否定律

	$-$	$\sim$
*D.M*律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

集合算律

4．涉及全集和空集的算律：

补元律、零律、同一律、否定律

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

2、关系

概念：

序偶, 笛卡尔积, 关系, **domR**, **ranR**, 关系图, 空关系, 全域关系, 恒等关系.

序偶 （有序对， Pair）

由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组，记作$\langle x,y\rangle$.

有序对性质:

(1) 有序性 $\langle x,y\rangle\neq\langle y,x\rangle$ （当$x\neq y$时）

(2) $\langle x,y\rangle$与$\langle u,v\rangle$相等的充分必要条件是

$$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle \Leftrightarrow x=u\wedge y=v.$$

笛卡儿积 设**A,B**为集合，**A**与**B**的**笛卡儿积**记作**A×B**定义为

$$A\times B = \{<x,y> \mid x\in A \wedge y\in B\}.$$

例： $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B= \{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A= \{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

- **注意: $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 时，$A\times B=\varnothing$**
- **“×” 不满足结合律.**

当 $A_1\times A_2\times\ldots A_n$时,约定"×"左结合,即

$$A_1\times A_2\times\ldots A_n=(\ldots(A_1\times A_2)\times\ldots A_{n-1})\times A_n$$

$A^n=A\times A\times\ldots A$ (n个 A)

性质证明

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证　任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例2

(1) 证明$A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B, C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$$
$$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in D$$
$$\Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定.反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

关系(Relation)：两个定义

(1) 序偶的一个集合, 确定了一个二元关系R。R 中任一序偶 <x,y>,可记作 <x, y>$\in$R 或 xRy

(2) 笛卡尔积的子集： $R \subseteq A \times B$

对通常的"关系"给出了一种抽象的描述.

例： 令 A=B={1,2,3} R={<1,2>,<1,3>,<2,3>}，其实R就是通常意义下的 ‘<' 关系。

前域 dom(R) $= \{x \mid \exists y. \langle x,y\rangle \in R\}$

值域 ran(R) $= \{y \mid \exists x. \langle x,y\rangle \in R\}$

域 fld(*R*) $= \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

例5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的限制记作 $R\restriction A$, 其中

$$R\restriction A = \{ \langle x,y\rangle \mid xRy \wedge x\in A \}$$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\restriction A)$$

例： 设$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$, 则

$R\restriction\{1\} = \{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

$R\restriction\varnothing = \varnothing$

$R\restriction\{2,3\} = \{\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$R[\{1\}] = \{2,3\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$

R$\subseteq$ A×B,则称R是从A到B的关系.

当 **A=B** 时称 **R** 为 **A** 上的二元关系.

全域关系 $A \times B$

空关系 $\varnothing$

恒等关系 $I_A = \{<x,x>|\ x \in A\}$

关系的表示

关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\ r_{ij}\ ]_{m\times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, y_j\rangle \in R.$$

关系图

若$A= \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=\langle A, R\rangle$, 其中$A$为结点集，$R$为边集．如果$\langle x_i,x_j\rangle$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

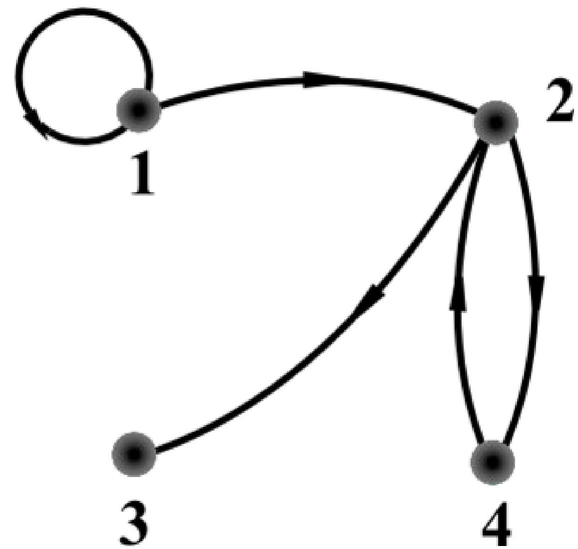
注意：

- 关系矩阵适合表示从A到B的关系或A上的关系（A,B为有穷集）
- 关系图适合表示有穷集A上的关系

实例

A={1,2,3,4}, ***R***={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>},
R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



复合关系 (Composition)

$$R \circ S = \{ <x, z> \mid \exists\, y\, (<x, y> \in R \wedge <y, z> \in S) \}$$

例： $R = \{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S = \{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^{-1} = \{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

- $(R \circ S) \circ P = R \circ (S \circ P)$

  (设 $R \in X \times Y$, $S \in Y \times Z$, $P \in Z \times W$)

- $R^m = R \circ R \circ \ldots \circ R$

  (m个R)

逆关系 (Inverse)

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$

- 互逆 $(R^{-1})^{-1} = R$

定理1：设R , S都是从A到B的二元关系,则

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(A \times B)^{-1} = B \times A$$

$$(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$$

定理2: 设$R \subseteq X \times Y$,$S \subseteq Y \times Z$,则 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

3、关系性质与闭包

概念：

自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的, 传递的

自反闭包 r(R),对称闭包 s(R), 传递闭包 t(R)

注意：讨论关系性质时，均假定R为某个集合A上的二元关系，即$R \subseteq A\times A$.

自反的 Reflexive

若 $\forall x\in A$，都有$<x,x>\in R$, 则称 R 是自反的.

反自反的 Anti-Reflexive

若 $\forall x\in A$，都有$<x,x> \notin R$, 则称 R 是反自反的.

实例：$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_2 自反，R_3 反自反，R_1既不是自反的也不是反自反的.

对称的 Symmetric

对任意x,y∈A,满足，若 <x,y>∈R,则<y,x>∈R

反对称的 Anti-symmetric

对任意x,y∈A,满足，若 <x,y>∈R 且 <y,x>∈R,则x=y

例：设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$，$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1：对称和反对称；R_2：只有对称；R_3：只有反对称；

R_4：不对称、不反对称

传递的　Transitive

对任意的x,y,z∈A, 满足:

若<x,y>∈R　且　<y,z>∈R,　则<x,z>∈R,

则称R是传递的.

例：　设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

自反闭包 (Reflexive closure)

设R是A上的二元关系,如果有另一个关系R'满足:

①R'是自反的;

② R'⊇R;

③对于任何自反的关系R”,若R"⊇R, 则有R"⊇R'.

则称关系R'为R的自反闭包. 记为 r(R).

注: 类似地可定义对称闭包 s(R) 和传递闭包 t(R)。

定理：设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup I_A$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

特殊地，若$|A|=n$，则 $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$

例: 设A={1,2,3}，在A上定义表示 R ={< 1,2> ,< 2,3>}.
求 r(R), s(R), t(R).

4、等价关系

概念：

等价关系，等价类，商集，划分.

等价关系 (Equivalence relation)

设 **R** 为集合 **A** 上的一个二元关系。若 **R** 是自反的, 对称的, 传递的，则称 **R** 为 **A** 上的等价关系.

例: 令A={1,2,3,4}

R={< 1,1> ,< 1,4> ,< 4,1> ,< 4,4> , < 2,2> ,< 2,3> ,
< 3,2> ,< 3,3>}

等价类 (Equivalence class)

设R为集合A上的等价关系, 对$\forall a\in A$, 定义:

$$[a]_R = \{x|x\in A \text{ 且 } <a,x>\in R\}$$

称之为元素a关于R的等价类。

例(续上): $[1]_R=[4]_R=\{1,4\}$

$[2]_R=[3]_R=\{2,3\}$

定理1: 给定A上的等价关系R,对于$a,b\in A$有
aRb iff $[a]_R=[b]_R$

商集 (Quatient set)

设**R**是**A**上的等价关系，定义 $A/R=\{[a]_R | a\in A\}$

称之为**A关于R的商集**.

例: (见上例)中商集为: $\{[1]_R,[2]_R\}$

或更详细写成 $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$

划分 （Partition）

设A为非空集合, 若A的子集族π($\pi \subseteq P(A)$)满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个划分, 称π中的元素为A的划分块.

定理2: 给定集合 A 上的等价关系 R, 则商集 A/R 是 A 的一个划分.

例(见上例): A/R={{1,4},{2,3}}是一个划分.

定理3: 集合A的一个划分π诱导出A上的一个等价关系R. R定义为R= {<x,y>| x,y ∈A 且x,y在π的同一分块中}

例: 设A={a,b,c,d,e}的一个划分为S={ {a,b},{c},{d,e} }. 求由划分S诱导的A上的一个等价关系R.

定理 4: 设R_1和R_2为非空集合A上的一个等价关系,

则 $R_1 = R_2$ iff $A/R_1 = A/R_2$.

5、偏序关系

概念：

偏序，哈斯图，全序(线序)，极大元/极小元，最大元/最小元，上界/下界.

偏序 (Partial Ordering)

设A是一个集合. 如果 A 上的二元关系 R 是自反的,反对称的和传递的, 则称R是A上的一个偏序关系. 记R为“$\leq$”, 且称序偶$<A,\leq>$ 为偏序集。

例: 设A={a,b},在 P(A)上的二元关系R为包含关系, 即

$$R=\{ <x,y> | x,y\in P(A) \text{ 且 } x\subseteq y \}$$

证明: < P(A), R>是偏序集.

全序/线序(Total Ordering/ Linear Ordering)

设 $<A,\leq>$为偏序集, 若对任 意的$x,y\in A$满足:

$x\leq y$或 $y\leq x$

则称 $\leq$ 为全序关系. $<A,\leq>$为全序集.

例: (1) Z为整数集，$<Z, \leq>$为全序集。

(2) 设$A=\{a,b\}$，则$< P(A), \subseteq >$是偏序集，但不是全序集。

覆盖（Covering）

设$\langle A,\leq\rangle$为偏序集,若$x,y\in A$,

$x\leq y, x\neq y$且没有其它元素z满足$x\leq z, z\leq y$,

则称**y覆盖x**. 记**$covA$**$=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A$且$y$覆盖$x\}$

例:$cov(P(A))=\{\langle\varnothing,\{a\}\rangle,\langle\varnothing,\{b\}\rangle,\langle\{a\},\{a,b\}\rangle,\langle\{b\},\{a,b\}\rangle\}$

哈斯图(Hasse Diagram)

作图规则

① 用小元圈∘代表元素;

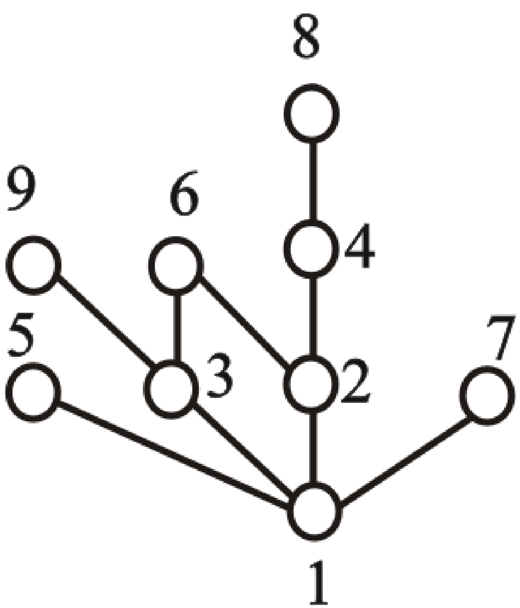
② 若$x \le y$且$x \ne y$,则将代表y的小元圈画在代表x的小元圈之上;

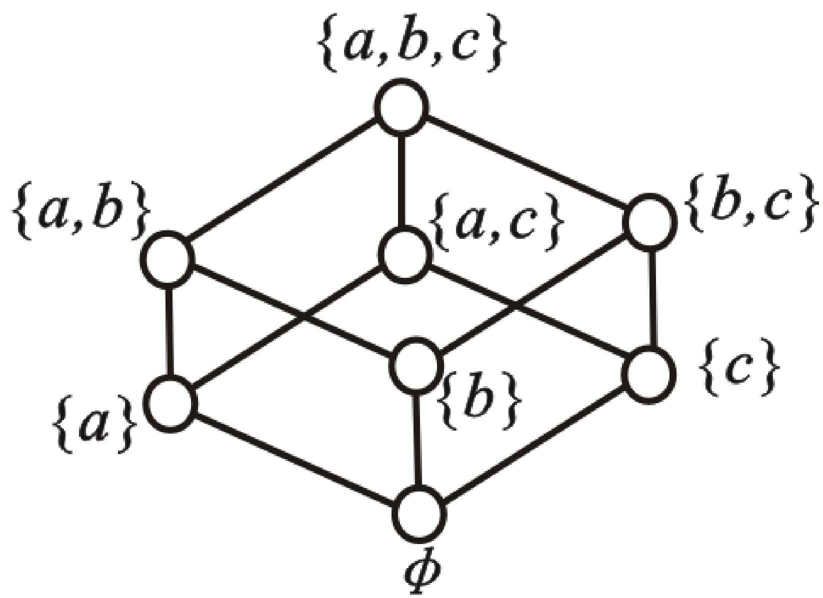
③ 若$\langle x,y \rangle \in covA$, 则在x,y之间用直线连接。

例: 画出 $\langle P(A),R \rangle$ 的哈斯图.

其他例子

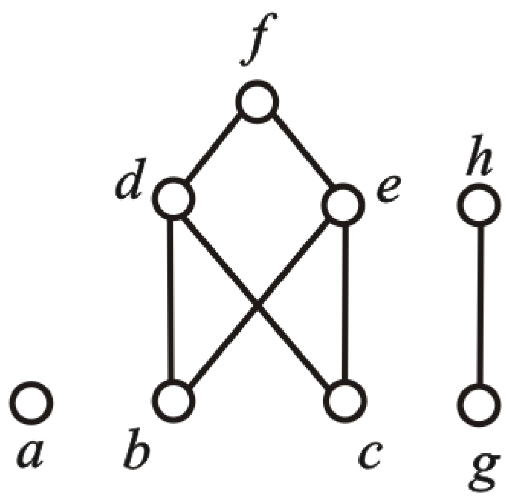
偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, R整除>和<P({a,b,c}),$R_{\subseteq}$>的哈斯图.





实例

已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如下图所示, 试求出集合A和关系R的表达式.



解 $A=\{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

极小元(Minimal Element)/极大元(Maximal Element)

设$<A,\leq>$为偏序集, $B\subseteq A$

(1) 对$b\in B$，若B中不存在x满足:

$b\neq x$且 $x\leq b$

则称b为B的极小元.

(2) 对$b\in B$，若B中不存在x满足:

$b\neq x$且 $b\leq x$

则称b为B的极大元.

最小元(The Smallest Element) / 最大元 (The Greatest Element)

设$<A,\leq>$为偏序集,$B\subseteq A$,若有某个$b\in B$

(1) 对于B中每一个元素x都有$b\leq x$，则称b为B的最小元.

(2) 对于B中每一个元素x都有$x\leq b$，则称b为B的最大元.

下界(Lower Bound) / 上界(Upper bound)

设$<A,\leq>$为偏序集, $B\subseteq A$

(1) 若有$a\in A$,且对$\forall x\in B$ 满足 $a\leq x$，则称a为B的下界。

进一步:设a为B的下界,若B的所有下界y均有$y\leq a$,

则称a为B的下确界，记为glb B。

(2) 若有$a\in A$,且对$\forall x\in B$ 满足 $x\leq a$，则称a为B的上界。

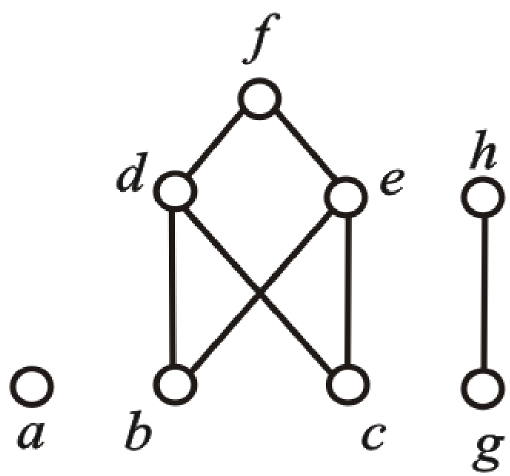
进一步:设a为B的上界,若B的所有上界y均有$a\leq y$,

则称a为B的上确界，记为lub B。

▪

实例

设偏序集<A,≼>，求A的极小元、最小元、极大元、最大元，设B＝{ b,c,d }, 求B的下界、上界、下确界、上确界.



解

极小元：a, b, c, g；

极大元：a, f, h；

没有最小元与最大元.

B的下界和最大下界都不存在；

上界有 d 和 f,

最小上界为 d.

六、函数

概念：

函数，常函数，恒等函数，满射，入射，双射，

复合函数，反函数

函数

设X,Y为两个集合,$f \subseteq X \times Y$, 若对$\forall x \in X$,$\exists! y \in Y$,满足:

$$\langle x,y\rangle \in f,$$

则称f为**函数**.记为:$f:X \to Y$

- **定义域**: domf=X
- **值域**: ranf (有时记为f(X))=$\{f(x) | x \in X\}$

例: 判别下列关系能否构成函数.

$f1 = \{\langle y_1,y_2\rangle \mid y_1,y_2 \in R \text{ 且 } y_2^2=y_1\}$

$f2 = \{\langle y_1,y_2\rangle \mid y_1,y_2 \in R \text{ 且 } y_2 = y_1^2\}$

$f3 = \{\langle y_2,y_1\rangle \mid y_1,y_2 \in R \text{ 且 } y_2^2 =y_1\}$

$f4 = \{\langle y_1,y_2\rangle \mid y_1,y_2 \in N \text{ 且 } y_1 + y_2<10\}$

函数相等

设**f**和**g**都是从**A**到**B**的函数, 若对任意$x \in A$,有$f(x)=g(x)$,则称**f和g相等**.记为**$f=g$**

函数的个数

设$f:A \to B, |A|=m, |B|=n$.记 $B^A=\{f|f: A \to B\}$, 则$|B^A|= n^m$

实例

设$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求B^A.

解：$B^A=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

$f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

$f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_5=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

$f_6=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$

$f_7=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

满射(Surjective) (到上映射)

设 f: X →Y, 若 ranf = Y, 则称 f 为满射的.

入射(Injective) (一对一映射)

设f: X→Y, 对 $\forall$ x_1, x_2 ∈X, 满足:

若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$,

称 f 为入射的.

双射(bijective) (一一对应映射)

设f:X→Y, 若f既是满射的, 又是入射的. 则称f是双射的.

例：判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f:R→R, $f(x) = -x^2+2x-1$

(2) f:Z^+→R, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集

(3) f:R→Z, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) f:R→R, $f(x)=2x+1$

(5) f:R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

	单射	满射	双射
（1）	×	×	×
（2）	√	×	×
（3）	×	√	×
（4）	√	√	√
（5）	×	×	×

几个特殊函数

(1)设 $f:A\to B$, 如果存在$c\in B$使得对所有的 $x\in A$都有 $f(x)=c$, 则称 $f:A\to B$是常函数.

(2) 称 A上的恒等关系I_A为A上的恒等函数, 对所有的$x\in A$都有$I_A(x)=x$.

(3) 设$<A, \preccurlyeq>$, $<B, \preccurlyeq>$为偏序集，$f:A\to B$，如果对任意的 x_1, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的x_1, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有$f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的. 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数

几个特殊函数（续）

(4) 设A为集合, 对于任意的$A'\subseteq A$, A'的特征函数

$\chi_A{}':A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_A{}'(a)=1,\ a\in A'$$
$$\chi_A{}'(a)=0,\ a\in A-A'$$

(5) 设R是A上的等价关系, 令

$$g:A\to A/R$$
$$g(a)=[a],\ \forall a\in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射

复合函数

设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$, 定义:

$fog = \{<x,z>|x\in X$ 且 $z\in Z$ 且可找到 $y\in Y$ 使 $y=f(x),z=g(y)\}$

称fog为f与 g 的复合函数.

注:

(1) 课本中关系、函数均使用“右复合”。函数复合在习惯上也常采用“左复合”，$g\circ f(a)=g(f(a))$。读文献时须留意。

(2) 函数的复合运算可结合.

函数复合与函数性质

定理 设$f:A\to B$, $g:B\to C$

(1) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是满射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是满射的

(2) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的

(3) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的

反函数（逆函数）

设f:X→Y是一个双射函数，那么f^{-1}是Y→X的双射函数.

称f^{-1}为f的反函数.

注：

（1）互逆 $(f^{-1})^{-1}=f$

（2）设 f:$A \to B$是双射的, 则 $f^{-1} \circ f = I_B$, $f \circ f^{-1} = I_A$

七、集合基数

概念：

基数，等势，有限集/无限集，可数集，不可数集

- 1638年，意大利天文学家Galieo比较集合大小的困惑：

  “部分”等于“整体”？

  $N=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

  $N^{(2)}=\{0, 1, 4, 9, \cdots\}$

- 1874-1897年，德国数学家Cantor

  冲破传统观念，采用数“数”的方法观察集合大小。

基数(Cardinality)

用来衡量集合大小的一个概念. 对于有限集合集来说，集合的基数就是其中所含元素的个数.

等势的（基数相同）

设A, B是集合, 如果存在着从A到B的双射函数, 就称A和B是等势的, 记作$A \approx B$. 如果A不与B 等势, 则记作$A \not\approx B$.

注：通常将A的基数记为 |A|.

重要等势结果

- $N \approx Z \approx Q \approx N \times N$
- 任何实数区间都与实数集合R等势
- $\{0,1\}^N \approx R$

（1）证明： Z≈N.

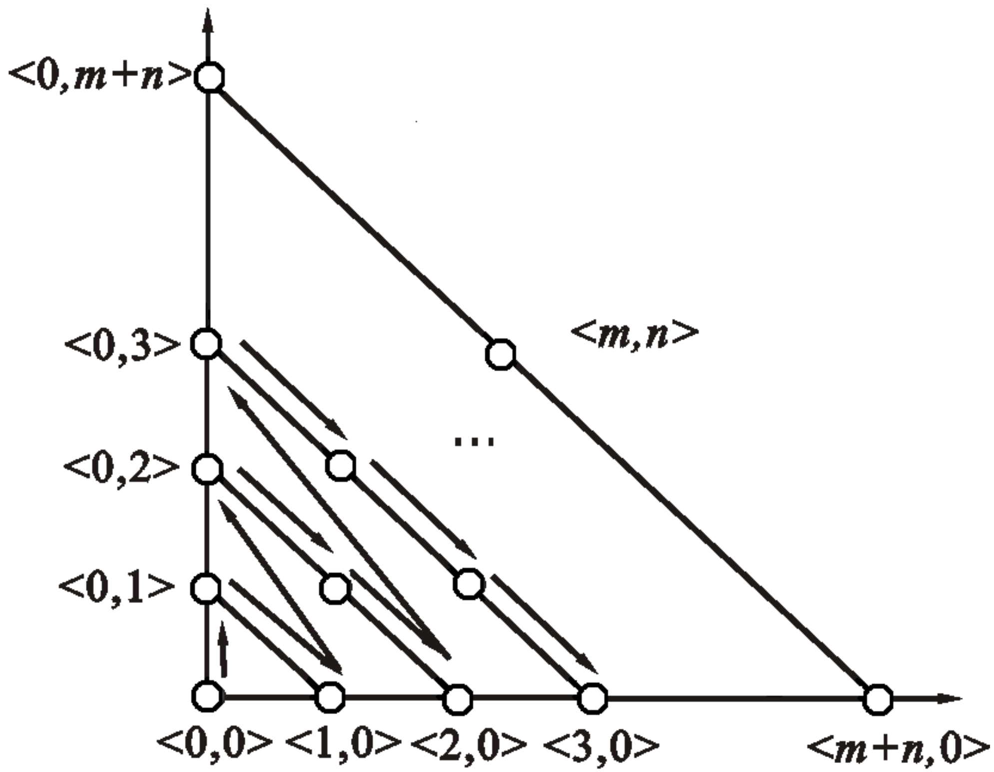
证：

$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则 f 是Z到N的双射函数. 从而证明了Z≈N.

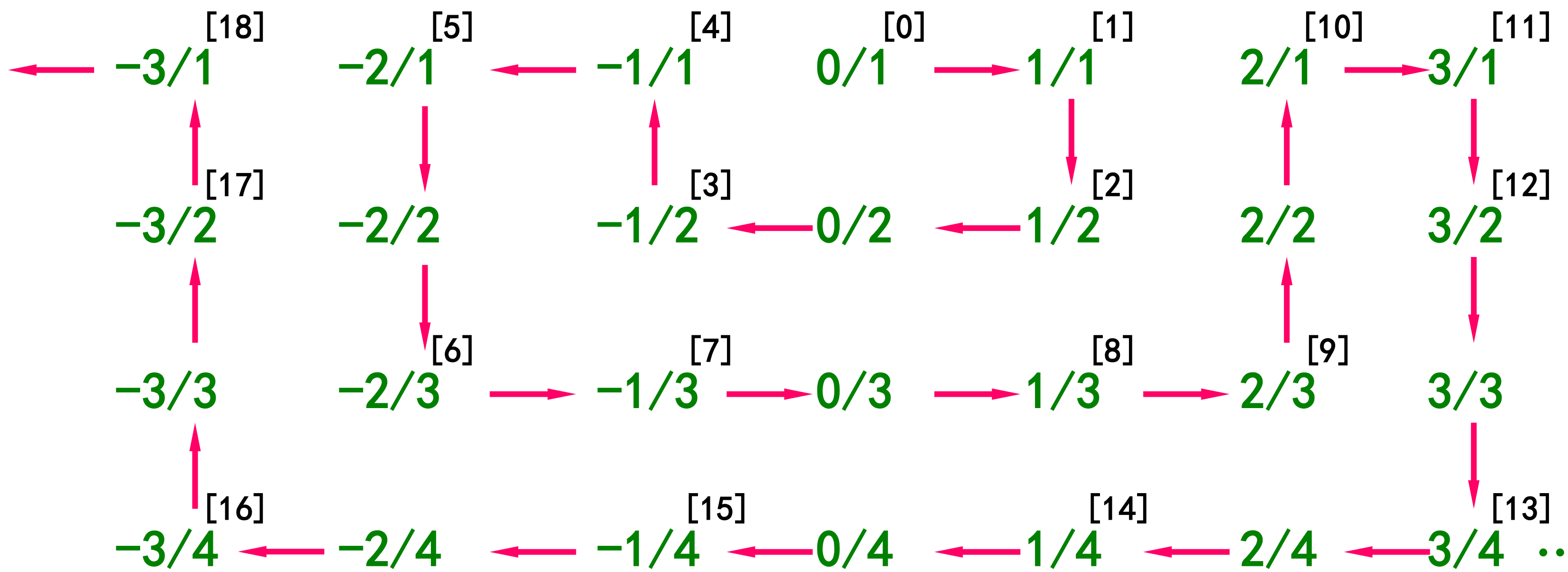
（2）N≈Q

① N×N≈N.　N×N中所有的元素排成有序图形



$$f: \mathrm{N}\times\mathrm{N}\to\mathrm{N},\quad f(<m,n>)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$$

② **N≈Q.** 双射函数 f:N→Q, 其中$f(n)$是[n]下方的有理数.



(3) (0,1)≈R. 其中实数区间 **(0,1)={*x*| *x*∈*R*∧0<*x*<1}.** 令

$$f:(0,1)\to \mathrm{R},\quad f(x)=\tan\pi\frac{2x-1}{2}$$

(4) [0,1]≈(0,1). 其中**(0,1)**和**[0,1]**分别为实数开区间和闭区间.

令 $f:[0,1]\to(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & x=0\\ 1/2^2 & x=1\\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n,\ n=1,2,\ldots\\ x & \text{其它}x\end{cases}$$

(5) 对任何 $a, b\in \mathrm{R}$, $a<b$, $[0,1]\approx[a,b]$，双射函数 $f:[0,1]\to[a,b]$,

$$f(x)=(b-a)x+a$$

类似地可以证明, 对任何 $a, b\in R$, $a<b$, 有 $(0,1)\approx(a,b)$.

(6) 设A为任意集合, 则$P(A)\approx\{0,1\}^A$.

证　如下构造从$P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的函数

$$f:P(A)\to\{0,1\}^A,\quad f(A')=\chi_{A'},\ \forall A'\in P(A).$$

其中$\chi_{A'}$是集合A'的特征函数. 易证 f 是单射的.

对于任意的 $g\in\{0,1\}^A$, 那么有 $g:A\to\{0,1\}$. 令

$$B=\{\,x\,|\,x\in A\wedge g(x)=1\}$$

则$B\subseteq A$, 且$\chi_B=g$, 即$\exists B\in P(A)$, $f(B)=g$. 从而证明了f 是满射的.

由等势定义得　$P(A)\approx\{0,1\}^A$.

康托定理

(1) $\mathrm{N} \not\approx \mathrm{R}$;

(2) 对任意集合A都有$A \not\approx P(A)$.

证明思路（对角线方法 Diagonal method）：

(1) 只需证明任何函数 f:N→[0,1]都不是满射的.

任取函数 f:N→[0,1], 列出 f 的所有函数值，然后构造一个[0,1]区间的小数b，使得b与所有的函数值都不相等.

(2) 任取函数 $f:A \to P(A)$，构造$B \in P(A)$，使得B与 f 的任何函数值都不等.

有限集(Finite set)/无限集 (Infinite set)

设A为一个集合. 若存在某个自然数n, 使得A与集合{0,1,…,n-1}等势, 则称A是有限的. 若集合A不是有限的, 则称A是无限的.

注：有限集也称为有穷集；无限集也称为无穷集。

结论

(1) 自然数集合N是无限的.

(2) 无限集必与它的一个真子集为等势.

推论:凡不能与自身的任一真子集等势的集合为有限集.

可数集(可列集) (Countable Set, Enumereable Set)

与自然数集**N**等势的任意集合称为可数的. 其基数为$\aleph_0$

结论

(1) A为可数的iff 可排列成$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$的形式.

(2) 任一无限集必含有可数子集.

(3) 可数集的任何无限子集是可数的.

(4) 可数个两两不相交的可数集合的并集,仍是一个可数集.

(5) $N\times N$是可数集.

(6) 有理数的全体组成的集合是可数集.

(7) 全体实数构成的集合R是不可数的.

基数的常识

① 对于有穷集合A, 基数是其元素个数n，$|A| = n$;

② 自然数集合N的基数记作$\aleph_0$;

③ 实数集R的基数记作$\aleph$, 即$\mathrm{card}R = \aleph$;

④ 没有最大的基数。将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到：

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

连续统猜想（Continuum Hypothesis）

不存在这样的有限集,基数严格介于$\aleph_0$与 $\aleph$ 之间.

(1900年Hilbert在巴黎第二届世界数学家大会上提出的23个数学问题中的第一个问题.)

集合论总结

1. 集合：集合，外延性原理，∈，⊆ ，⊂，空集，全集，幂集，文氏图，交，并，差，补，对称差
2. 关系：序偶, 笛卡尔积, 关系, **domR**, **ranR**, 关系图, 空关系, 全域关系, 恒等关系
3. 关系性质与闭包:自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的, 传递的,自反闭包 **r(R)**,对称闭包 **s(R)**, 传递闭包 **t(R)**

集合论总结 (续)

4. 等价关系：等价关系，等价类，商集，划分
5. 偏序关系:偏序，哈斯图，全序(线序)，极大元/极小元，最大元/最小元，上界/下界
6. 函数：函数，常函数，恒等函数，满射,入射,双射，反函数，复合函数
7. 集合基数:基数，等势，有限集/无限集，可数集，不可数集