认识对象与视野的逐步扩大

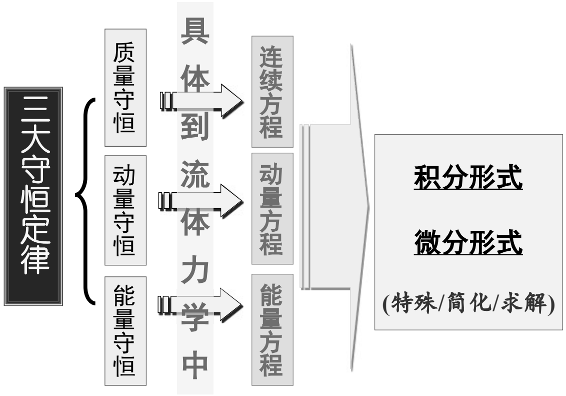
牛顿力学的基础: 质点系统的三大守恒定律

从流体质点到流场: 基本概念知识储备 (第1-2章)

静止的流场　　　　(第3章)

真正的流场　　　　(第4章以后章节)

- 流体力学的研究目的与精髓: 流体动力学
- **系统与控制体, 积分方程: 场的外壳 (第4章)**
- **任意点微分方程: 场的内核, 回归到流体质点! (5/6/9)**



第四章 流体流动的守恒原理

本章任务: 流体运动的三大控制方程 —连续性方程、动量方程、能量方程(积分式)及其应用.

4.1 系统和控制体、雷诺输运定理
4.2 质量守恒方程
4.3 动量守恒方程
4.4 动量矩守恒方程
4.5 能量守恒方程

4.1系统和控制体、雷诺输运定理

Reynolds Transport Theorem (RTT)

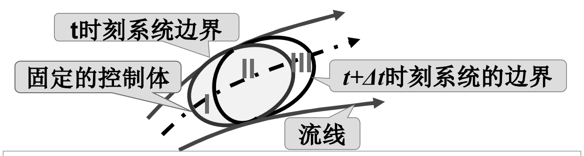
4.1.1 系统与控制体

系统：**由确定不变的物质组成的集合。系统与外界之间通过系统边界(可变形)可发生能量和动量的交换，但不发生质量交换。**

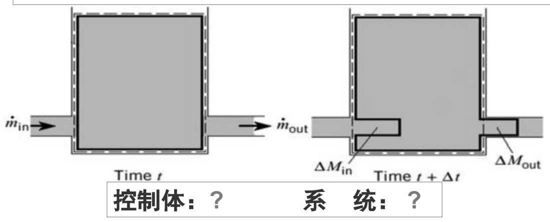
—— 拉格朗日方法体系：**追踪所有的流体质点**

控制体：**根据需要所选取的具有确定的位置、体积、形状的流场空间。控制体边界处可有质量、动量和能量交换。**

——欧拉方法体系：**考察一定空间中的流动参数**

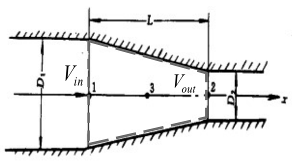


控制体：蓝线内区域, *CV*, *CS*.
系统：*t* 时刻 蓝线 (I+II); *t+Δt* 时刻 黑线 (II+III). *Sys.*
***t* 时刻系统与控制体边界重合**

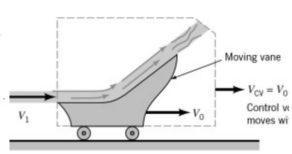


控制体：？　　　系　统：？

注意：控制体的几何空间并非绝对固定不动，而只是相对于观察者固定不变。



固定的控制体



相对运动的控制体

热力学参数：

尺度量(广延量): 与物质的数量有关, 是与质量成正比的量, 具有基于物质数量的可加性. 如:系统的总质量、一定空间内的分子数、动量、内能等.

强度量: 与物质的数量无关, 在“点”上定义的量, 不具有基于物质数量的可加性。如压力、温度等.

注意：物理学中学习过的三大(尺度量)守恒定律，当时都是从系统(一定质量体系)的角度来描述的！

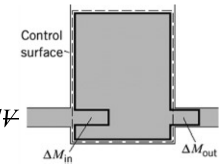
问：为了方便地研究流体，如何在欧拉方法(一定空间/控制体)中应用系统物理量的守恒定律？

必须先找出流体系统与控制体之间尺度量的关系！

雷诺输运定理

5

4.1.2 输运公式(雷诺输运定理)



β: 单位质量流体具有的物理量

B: 系统内的总物理量 $B=\int_{Sys}\beta\rho d\forall$

雷诺输运定理：

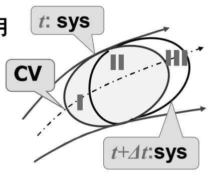
$$\boxed{\frac{dB}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{Sys}\beta\rho d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\beta\rho d\forall+\int_{CS}\beta\rho(\vec{V}\bullet\vec{n})dA}$$

系统中物理总量的时间变化率	控制体内物理总量的时间变化率	控制面流出的物理总量的净流量

单位时间内系统物理量(尺度量)的增量，等于控制体内物理量的增量与从控制面流出物理量的净流量之和.

将拉格朗日体系下系统中尺度量的变化与欧拉体系下控制体中的尺度量的变化联系起来了！【似曾相识？〓】6

雷诺输运定理的验看 --- 非严格证明



t时刻: 系统占据空间为I+II，系统边界与控制体边界重合.
系统质量： $m|_t=m_I|_t+m_{II}|_t$

t+Δt时刻: 系统移动到一个新空间位置，系统空间为II+III，控制体为I+II.
系统质量： $m|_{t+\Delta t}=m_{II}|_{t+\Delta t}+m_{III}|_{t+\Delta t}$

系统质量随时间的变化率：

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{m|_{t+\Delta t}-m|_t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{(m_{II}+m_{III})|_{t+\Delta t}-(m_I+m_{II})|_t}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{m_{II}|_{t+\Delta t}+m_{III}|_{t+\Delta t}-m_I|_t-m_{II}|_t+m_I|_{t+\Delta t}-m_I|_{t+\Delta t}}{\Delta t}$$ 加上再减去

$$=\underbrace{\lim_{\Delta t\to0}\frac{(m_{II}+m_I)|_{t+\Delta t}-(m_{II}+m_I)|_t}{\Delta t}}_{1}+\underbrace{\lim_{\Delta t\to0}\frac{m_{III}|_{t+\Delta t}}{\Delta t}}_{2}-\underbrace{\lim_{\Delta t\to0}\frac{m_I|_{t+\Delta t}}{\Delta t}}_{3}$$

①控制体内质量变化率 ② 流出控制体的质量 ③ 流入控制体的质量

以上是质量为例. 动量能量等尺度量, 雷诺输运定理均成立 7

$$\boxed{\frac{dB}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{Sys}\beta\rho d\forall=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\beta\rho d\forall+\int_{CS}\beta\rho(\vec{V}\bullet\vec{n})dA}$$

系统中物理总量的时间变化率	控制体内物理总量的时间变化率	控制面流出的物理总量的净流量

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{\text{系统}}=\text{输出控制体的质量流量}-\text{输入控制体的质量流量}+\text{控制体内的质量变化率}$$

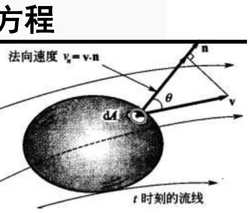
$$\left(\frac{d m\mathbf{v}}{dt}\right)_{\text{系统}}=\text{输出控制体的动量流量}-\text{输入控制体的动量流量}+\text{控制体内的动量变化率}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{系统}}=\text{输出控制体的能量流量}-\text{输入控制体的能量流量}+\text{控制体内的能量变化率}$$

8

4.2 质量守恒方程

4.2.1 控制面上的质量流量



通过微元面和曲面的质量流：

$$dq_m=\rho v_n dA=\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA$$

$$q_m=\iint_A\rho v_n dA=\iint_A\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA$$

ρv_n 或 $\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})$：单位面积的质量流量(通量)

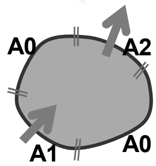
4.2.2 控制体(?)质量守恒方程(连续方程的积分式)

质量守恒：系统中流体质量不随时间变化，故：

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{sys}=0\Longrightarrow\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho d\forall+\int_{CS}\rho(\vec{V}\bullet\vec{n})dA=0}$$

单位时间内控制体中总质量的减少 = 净流出控制体的质量流量 9

$$\underbrace{\text{输出控制体的质量流量}-\text{输入控制体的质量流量}}_{\text{控制面上净输出的质量流量}}+\text{控制体内的质量变化率}=0$$



更具体的情况, 将控制面分三部分:

A1: 输入面; A2: 输出面;

A0: 无质量出入. 则:

控制面上净输出的质量流量 $=\iint_{CS}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA$

$$=\underbrace{\iint_{A_2}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA}_{\text{从}A_2\text{流出}}-\underbrace{\left[-\underbrace{\iint_{A_1}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA}_{\text{从}A_1\text{流出}}\right]}_{\text{从}A_1\text{流进}}$$

10

一般形式： $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV\!\!\!/ + \int_{CS}\rho(\vec{V}\bullet\vec{n})dA = 0}$$

不可压缩流动：

$$\int_{CS}(\vec{V}\bullet\vec{n})dA = 0$$ **对于不可压流，流进控制体的体积流量等于流出的体积流量**

哪里曾听说过？可有哪些形式？是否一回事？证明？

定常流（稳态流）：

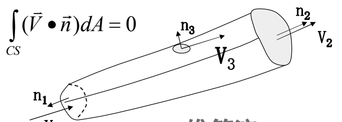
$$\int_{CS}\rho(\vec{V}\bullet\vec{n})dA = 0$$ **对于稳定流，流进控制体的质量流量等于流出的质量流量**

不可压缩的稳态流动：？

11

流管内的不可压流： $\int_{CS}(\vec{V}\bullet\vec{n})dA = 0$

$$\bar{V}_1 A_1 = \bar{V}_2 A_2$$



一维管流

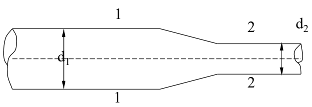
流管内的稳定流： $\int_{CS}\rho(\vec{V}\bullet\vec{n})dA = 0$

$$(\rho\bar{V})_1 A_1 = (\rho\bar{V})_2 A_2$$

扩张管　　　　**收敛管**

12

思考：已知管道中油的质量流量为Q_m=250kg/s，d_1=200 mm，d_2=100mm，求流量和1、 2两管中的平均流速。



思考：在微风的日子里，高层建筑附近却有大风，人们夏天喜欢在此乘凉. 为什么高层建筑附近风总是很大?

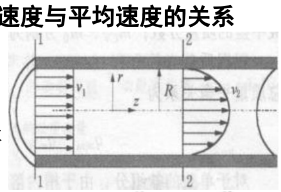
街道狭谷风效应

13

例4-1 不可压圆管层流的最大速度与平均速度的关系

1-1:均匀速度V1

2-2: $v_2 = v_{\max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$



解：1-1/2-2之间取为控制体

质量守恒：

$$\iint_{CS}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA = \iint_{A_2}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})dA - \iint_{A_1}[-\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})]dA = \iint_{A_2}\rho v_2 dA - \iint_{A_1}\rho v_1 dA$$

$$= \rho v_{\max}2\pi\int_0^R\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r dr - \rho v_1\pi R^2 = \frac{\rho v_{\max}}{2}\pi R^2 - \rho v_1 \pi R^2 \boxed{=0}$$

$$\Rightarrow\quad v_{\max} = 2v_1$$

这个结论有点意思，不妨记住。

【例4－2】搅拌槽出口溶液浓度， P66.

14

思考题

1. **什么是系统,控制体？系统与控制体有何区别和联系？**
2. **以系统为对象研究流动过程时有何不便之处？**
3. **以控制体为对象研究流动过程时，为什么需要建立雷诺输运定理（输运公式）？**
4. **雷诺输运定理（输运公式）有何意义？**
5. **流体以速度 $\vec{v}$ 进入或输出控制面时，若控制面的单位外法向量是 $\vec{n}$ ，则$(\vec{v}\cdot\vec{n})$的意义是什么？$(\vec{v}\cdot\vec{n})$的正负号说明什么问题？**

15