

第四章教学案例

1. 对由导热系数分别为 λ_1 和 λ_2 的两种材料组成的复合结构中发生的有内热源（均匀内热源强度为 $\dot{\phi}$ ）二维稳态导热问题进行数值计算，节点 P 布置在两种材料平直交界面上，如下图2所示。试用热平衡法建立节点 P 的离散方程（有限差分方程式，不需整理）。

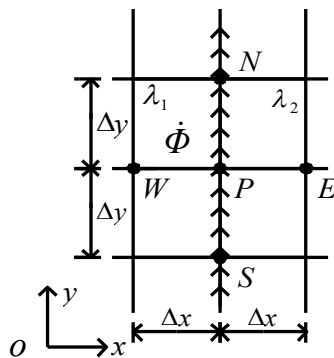


图 1

解：节点 P 周围各节点向节点 P 的导热热流量分别为：

$$\Phi_{WP} = \lambda_1 \frac{t_W - t_P}{\Delta x} \Delta y \times 1$$

$$\Phi_{EP} = \lambda_2 \frac{t_E - t_P}{\Delta x} \Delta y \times 1$$

$$\Phi_{NP} = \lambda_1 \frac{t_N - t_P}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} \times 1 + \lambda_2 \frac{t_N - t_P}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} \times 1$$

$$\Phi_{SP} = \lambda_1 \frac{t_S - t_P}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} \times 1 + \lambda_2 \frac{t_S - t_P}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} \times 1$$

在稳态导热情况下，导入节点的净热流量与内热源总生成热的代数和应等于零。

$$\Phi_{WP} + \Phi_{EP} + \Phi_{NP} + \Phi_{SP} + \dot{\phi} \Delta x \Delta y = 0$$

将式(a)~(d)代入式(e)，可得到节点 P 的有限差分方程式：

$$\lambda_1 \frac{\Delta y}{\Delta x} (t_W - t_P) + \lambda_2 \frac{\Delta y}{\Delta x} (t_E - t_P) + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\Delta x}{2\Delta y} (t_N + t_S - 2t_P) + \dot{\phi} \Delta x \Delta y = 0$$

讨论： 本案例要求学生熟练掌握采用热平衡方法通过对中心节点 P 控制单元列出能量守恒方程，来获取相应节点的离散方程。对于稳态问题，四周界面导入中心节点 P 控制单元的热量与控制单元自身内热源热量之和为零。另外，对于控制单元南北界面上的导热须采用加权平均方法计算。