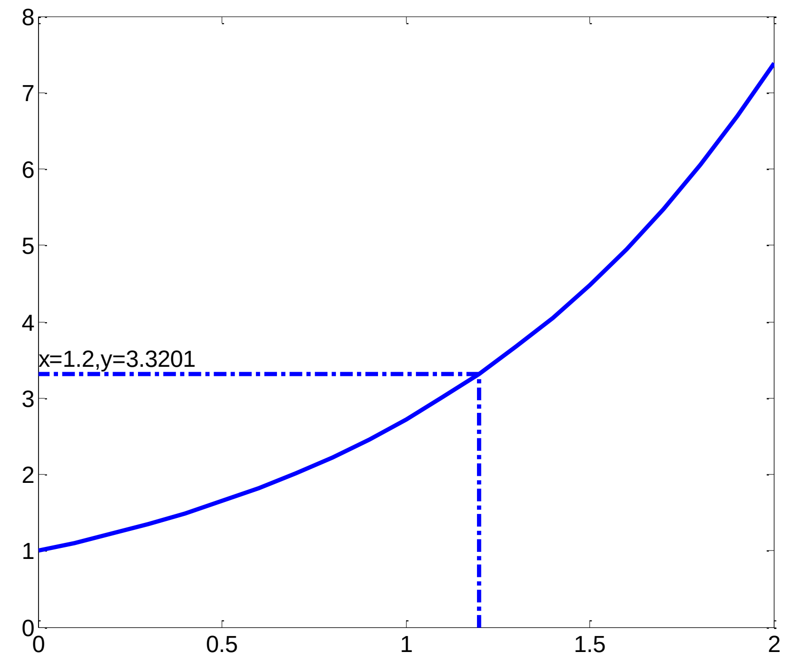
第2章矩阵操作与线性方程组求解

- 矩阵的生成
- 矩阵的基本性质函数
- 矩阵操作
- 矩阵分析函数

作业情况

一条命令画折线

plot([0,x,x],[exp(x),exp(x),0],'b-.')



上讲内容

- 关系运算符：==，~=，>=，<=，>，<
- 逻辑运算符：&，|，~
- 运算符的优先级：括号>一元运算符>数学>：>关系>逻辑
- if-end，for-end；while-end
- 程序终止控制error，break，return

MATrix LABoratory矩阵实验室

- elfun - 矩阵运算的初等函数
- elmat - 基本矩阵、数组信息、矩阵操作、多维数组函数、特殊矩阵几类，用于矩阵的生成、操作等功能
- matfun - 矩阵分析、线性方程求解相关函数（包括矩阵分解函数）、特征值与特征向量相关函数

矩阵的生成

- 手动输入
- 利用小阵生成大阵
  - 矩阵作为另一个矩阵的元素(分块矩阵);
  - 采用cat函数进行矩阵的拼接;
  - 采用repmat函数将矩阵复制成新的矩阵;

```
A=[1 2 3; 4 5 6;
7 8 9];
B=[A+0.1 A+0.2;
A+0.3 A+0.4]
```

```
C=A*2;
D=cat(2,A,C)%等价于D=[A,C]
E=cat(1,A,C)%等价于E=[A;C]
```

```
F=[1 2;3 4];
G=repmat(F, 2, 3)
```

repmat和cat函数

B = repmat(A,n)	表示把A在行和列的维度上复制n次
B = repmat (A,M,N)	表示把A在行和列的维度上复制M和N次
C = cat(dim, A, B) C = cat(dim, A1, A2, A3, ...)	将A和B等矩阵在dim指定的维上拼接，dim为1时表示列，2表示行。

1. 如果Rnd是一个3行3列的矩阵，那么repmat(Rnd,2)和repmat(Rnd,2,1)的执行结果是否一样？

2. 什么情况下cat不能被执行？

3. C=cat(1,A,B)与C=[A;B]执行效果相同；D=cat(2,A,B)与D=[A,B]执行效果相同

特殊矩阵的生成

Elementary martix		Specialized matrix
zeros	全零阵	compan
ones	全1阵	hadamard
eye	单位阵	hankel
rand	均匀分布随机数	hilb
randn	正态分布随机数	magic
		pascal
		toeplitz
		vander
		wilkinson

基础矩阵必须牢记！

特殊矩阵的生成函数

zeros(n)	生成n行n列的全零阵
zeros(m,n)	生成m行n列全零阵
ones(n)	生成n行n列的全1阵
ones(m,n)	生成m行n列全1阵
rand(n)	生成n行n列均匀分布的随机数阵
rand(m,n)	生成m行n列均匀分布的随机数阵
eye(n)	生成n行n列的单位阵
eye(m,n)	生成m行n列单位阵

空阵

1. 在MATLAB工作内存中确实存在被赋予空阵的变量;
2. 给变量赋值[ ]时，该变量即为空阵;
3. 空阵中不包括任何元素，它的阶数是0×0;
4. 空阵可以在MATLAB的运算中传递;
5. 可以用clear从内存中清除空阵变量
6. 空阵不是“0”，也不是“不存在”,可以用来使矩阵按要求进行缩维

```
>>A=[];
>>B=A(1)
```

矩阵的基本性质函数

size	矩阵的阶数	numel	矩阵元素个数
length	向量的长度	ndims	矩阵的维数
isnan	是否非数	isempty	矩阵是否为空
isequal	矩阵是否相等	isrow	是否为行向量
isscalar	是否为标量	isvector	是否为向量
iscolum	是否为列向量	isnumeric	是否为数值矩阵

size函数

size函数的使用方法：

- D=size(X)　　　%返回矩阵X的行数和列数，结果为向量
- [M, N]=size(X) %返回才矩阵X的行数和列数，行数赋予M，列数赋予N

```
>> X = [16 2 3 13;5 11 10 8;9 7 6 12];
>> D = size(X)
>>[M, N] = size(X)
```

D = 3　4
M = 3，N=4

```
>> X = [‘ab’,‘c’;'def'];
>> D = size(X)
```

D = 2　3

length函数

length函数的使用方法：

$$L = length(X)$$

- 当X为向量时，返回向量X的长度；
- 当X为矩阵时，返回max(size(X))

```
>>X=[1 2 3;4 5 6];
>>L= length(X)
```

L = 3

```
Time=2:3:13;
Tot=0;
for i=1:length(Time)
    Tot=Tot+Time(i);
end
```

Tot=26

矩阵的索引与下标

- 矩阵元素的引用可以通过索引或下标进行
- 矩阵索引(index)与下标(subscript)之间的对应关系如下图所示

索引：表示元素在矩阵的顺序

二维矩阵

索引

1	4	7
2	5	8
3	6	9

下标

1,1	1,2	1,3
2,1	2,2	2,3
3,1	3,2	3,3

下标：表示元素在矩阵的位置

三维矩阵

1	3
2	4

5	7
6	8

1,1,1	1,2,1
2,1,1	2,2,1

1,1,2	1,2,2
2,1,2	2,2,2

ind2sub

ind2sub将索引转化为下标，使用方法如下：

- [I1,I2,I3,...,In] = ind2sub(siz,IND)
- 输入参数siz为一个向量，各元素分别表示所需转换矩阵的各维的大小（[行数，列数，页数……]），IND表示需要转换的索引；
- 输出变量I1,I2,I3,...,In 为IND指定元素在每一维（行、列、页）的顺序。

```
>>IND = [3 4];
>>s = [3, 3];
>>[I, J] = ind2sub(s, IND)
```

```
I =   3   1
J =   1   2
```

sub2ind

sub2ind将下标转化为索引，使用方法如下：

- IND = sub2ind(size,I,J)
- IND = sub2ind(size,I1,I2,...,In)
- 输入参数size表示所需转换矩阵的阶数，I, J等表示需要转换的下标，返回参数为转换后的索引。

```
>>A = [17 24 1 8; 2 22 7 14; 4 6 13 20];
>>A(:,:,2) = A - 10;
>>sub2ind(size(A),2,1,2)
```

ans = 14

判断：MATLAB命令IND2=sub2ind([3 3],[2 2])可以计算得到3行3列矩阵中第2行第2列元素的索引。

（×）

索引和下标的使用方法

A()

A([一个向量])　　　　A([一个向量], [一个向量])

- A(n)，n为正整数或正整数组成的向量，表示采用索引引用A中的元素；
- A(m, n)表示采用下标引用矩阵元素，m和n分别表示矩阵的行和列，m和n可以为正整数或正整数组成的向量；
- 在索引和下标引用时都可以使用end引用“最后一个/行/列”的元素
  - A(end)表示引用A中的最后一个元素，A(end-1) 表示引用倒数第二个元素，依次类推。A(end,1）表示引用最后一行第1列的元素。

例题1

已知矩阵A=[16, 2, 3, 13; 则以下变量的值为多少？
5, 11, 10, 8;
9, 7, 6, 12;
4, 14, 15, 1]；

1) a= A(5)　　2) b=A(2,3)　　3) c=A(end-5)

4) d=A([1,4,8])　　5) e=A([1,4],[2,3])　　6)f=A(end,[1,3])

7) g=A([1;4;8])

解：

1) a= 2　　2) b=10　　3) c=6

4) d= [16,4,14]　　5) e=[2, 3; 14, 15]　　6) f=[4, 15]

7) g=[16;4;14]

冒号运算符

- 在索引中使用：运算符
  - A(j:step:k) 将j:step:k生成向量指定的索引元素排列成行向量
  - A（j：k） 将A的第j个到第k个分量排成一个行向量
  - A(1:end) 将A的各元素排成一个行向量
  - A（：） 将A的各元素排成一个列向量

- 在下标中使用：运算符
  - A（m:n，j:k）引用A的第m到n行，第j列到第k列的元素所形成的矩阵，j：step：k也允许，表示待提取的列数由向量j:step:k中的元素指定；
  - A（i，：）引用A的第i行
  - A（：，j）引用A的第j列

例题

已知矩阵A=[16, 2, 3, 13;　则以下变量的值为多少？

5, 11, 10, 8;

9, 7, 6, 12;

4, 14, 15, 1];

1) >>a= A(:,2)	a=[2;11;7;14]
2) >>b=A(1:3,1)	b=[16;5;9]
3) >>c=A(2:3,3:4)	c=[10 8;6 12]
4)>>d=A(3:4,[1,3])	d= [9 6;4 15]
5) >>e=A(5:7)	e=[2 11 7]
6) >>f=A(3:5:end)	f=[9 14 13]

逻辑与关系运算

采用逻辑与关系运算或函数查找符合一定条件的元素

A([逻辑量矩阵]))

A(逻辑或关系表达式)	查找A中符合该表达式的元素
Ind=find(A) [Row,Col]=find(A)	查找A中非零元素的索引； 查找A中非零元素的下标；
Ind=find(逻辑或关系表达式) [Row,Col]=find(逻辑或关系表达式)	查找A中符合该表达式的元素的位置
all(逻辑或关系表达式)	判读矩阵元素是否都满足表达式，是则返回1，否则返回0
any(逻辑或关系表达式)	判读矩阵是否有元素满足表达式，是则返回1，否则返回0

例题2

已知矩阵A=[16, 2, 3, 13; 则以下变量的值为多少？
5, 11, 10, 8;
9, 7, 6, 12;
4, 14, 15, 1]；

1.>>a=A(A>12)

a=[16;14;15;13]

2.>>b=A(A>10&A<15)

b=[11;14;13;12]

3.>>c=find(A)

c=[1;2;3;4;....,15;16]

4.>>[d,e]=find(A>12)

d=[1;4;4;1]
e=[1;2;3;4]

5.>>f=A(find(A>12))

f=[16;14;15;13]

矩阵元素的修改

只需采用合理的方法引用需要修改的元素，再重新进行赋值即可

已知矩阵A=[8 1 6; 3 5 7;4 9 2]；现需进行以下修改，试写出其命令?

1) 将A中的第5个元素值更改为0

2) 将A增加新的一行[1 2 3]

3) 删除A中的第2列

1) A(5)=0

2) A(4,:)=[1 2 3]

3)A(:,2)=[]

练习

已知矩阵A=[8 1 6; 3 5 7;4 9 2]；根据以下要求写出生成新矩阵的MATLAB命令：

1) A将原A中的第2行元素修改为0
2) B将A的第1行与第3行互换
3) C将A中大于5的元素值修改为5
4) D在A的第1列前新增一列1

```
1) A(2,:)=0
2) B=A([3,1,2],:)
3) A(A>5)=5，C=A
4) D=[ones(4,1),A]
```

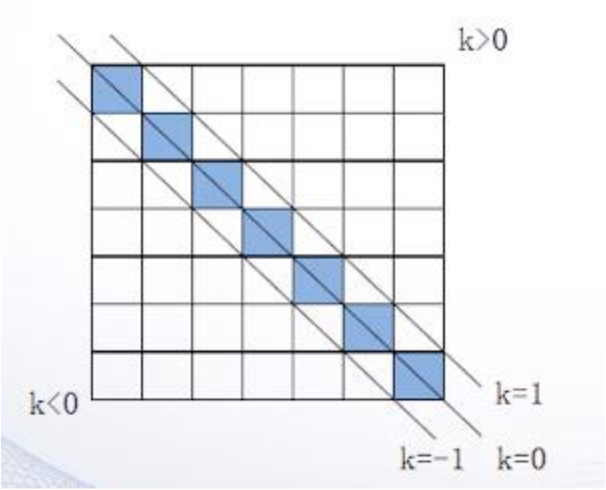
矩阵操作函数

通过MATLAB提供的一些矩阵操作函数可以方便的提取矩阵特定位置的元素，如对角线元素等

– diag函数
– tril函数
– triu函数

diag函数

- diag函数的使用方法：
  - diag(X) 当X 是矩阵时,diag(X) 是X的主对角线元素
  - diag(X,K) 当X 是矩阵时，从矩阵X的K对角线上提取向量；K = 0是主对角, K > 0 在主对角以上，K < 0在主对角以下
  - diag(V) 当V是有N个元素的向量时，生成以向量V为主对角线元素的方阵，非主对角线元素为0
  - diag(V,K) 当V是有N个元素的向量时，生成一个N+abs(K)阶方阵，K对角线元素为向量V



tril函数和triu函数

- tril函数的使用方法：
  - tril(X) 返回矩阵X的下三角阵元素，其它元素值为0
  - tril(X, K) 返回矩阵X的K对角线以下的元素

- triu函数的使用方法与tril函数完全相同，区别仅在于triu返回的是X的上三角阵元素

例题4

已知矩阵A=[8 1 6; 3 5 7;4 9 2]；则以下变量的值为多少？

1) >>a= diag(A)

1) a=[8 5 2]'

2) >>b=diag(A,-2)

2) b=4

3) >>c=diag(A,1)

3) c=[1,7]'

4)>>d=diag(diag(A,-1))

4) d= [3 0;0 9]

5) >>e=tril(A,1)

5) e=[8 1 0; 3 5 7;4 9 2]

6)>>f=triu(A)

6) f= [8 1 6; 0 5 7;0 0 2]

矩阵最大值和最小值的查找

max的使用方法，（min的使用方法同max）

- C = max(A)
  - A为向量时，返回的C为向量中的最大值；
  - A为二维矩阵时，返回的C为A中每列元素的最大值组成的向量；
- C = max(A,B)　　A，B为同维矩阵，C为A和B对应元素中较大元素组成的新矩阵；
- C = max(A,[],dim) 以dim指定的维数查找对应向量的最大值，当dim为1时，查找每列元素最大值，dim为2时，查找每行元素最大值；
- [C,I] = max(A)　　C为最大值向量，I为C中各元素在A中的行数；当使用[C,I]=max(A,[],2)时，返回的I为C中各元素在A中的列数。

例题5

已知矩阵A=rand(3);试写出实现以下功能的命令

1) 查找A每行元素的最大值及其所在的列数

2) 查找A每列元素的最小值及其所在的行数

3) 查找A中最大元素的值及其所在的行数和列数

```
1) [M1,Col1]=max(A,[],2)
```

```
2) [M2,Row2]=min(A)
```

```
3) [M3,I3]=max(A(:));
   [Row3, Col3]=ind2sub(size(A),I3)
```

矩阵元素的排序

sort函数的使用方法

- B = sort(A)
  - 如果A为向量，A中元素升序排列；
  - 如果A为二维矩阵，A中每列元素升序排列；
  - 如果A为多维矩阵，沿A中第一个非奇异维升序排列；
- B = sort(A,dim)按dim指定的维对A进行排序；dim=1时对列排序，dim=2时对行排序
- B = sort(...,mode)　　mode可以为’ascend’或’descend’，表示按升序或降序排序
- [B,IX] = sort(A,...)　　B的意义同上，IX表示B在原排序向量中的位置

例题7

已知矩阵A，执行命令[B,IX]=sort(A,2,‘descend’)得到结果如下

B=[8 6 1 ;7 5 3 ;9 4 2], IX=[1 3 2 ;3 2 1 ;2 1 3],

试写出矩阵A。

解：

命令[B,IX]=sort(A,2,'descend')表示将A矩阵的行元素按降序排列，IX为元素在A中的列数，例如B的第1行8，6，1同样为A的第1行，IX的第1行各元素表示这几个元素分别位于A的第1，3和2列，据此容易写出A=[8 1 6;3 5 7;4 9 2]。

矩阵变形

函数及其使用方法	功能
A’	将矩阵A转置
reshape(A,row,col)	将A矩阵变换为row行col列的新矩阵
reshape(A,siz)	将A矩阵变换为siz指定行和列的新矩阵
fliplr(A)	将A矩阵左右翻转
flipud(A)	将A矩阵上下翻转
rot90(A, n)	将A矩阵逆时针旋转n *90°，当n=1时，可以省略

例题8

已知矩阵A=magic(4)；现需进行以下修改，试写出其命令？

1) 将A中行列元素互换；2) 将A矩阵元素重新排列成一个2行8列的矩阵；3) 将A中的元素倒排，即第一个元素变为最后一个；

```
1) >> B=A’
```

```
2) >>C=reshape(A,2,8)
```

```
3)>>D=rot90(A,2)或D=fliplr(flipud(A))
```

矩阵分析函数

函数	功能
rank(A)	求矩阵A的秩；
det(A)	求方阵A行列式的值；
trace(A)	求矩阵A的迹，即矩阵对角元素的和；
inv(A)	求方阵A的逆；
sum(A)	如果A为向量，则求A中各元素的和，如果A为二维矩阵，则求每列元素的和；
sum(A,dim)	对于矩阵A，求dim指定维数元素的和，即dim为1时，按列求和，dim为2时求各行元素的和
norm(A)	当A为向量时，sum(abs(A).^2)^(1/2)

例题9

已知矩阵A=magic(4)；试编写一个script文件，检验A中每行，每列以及两条对角线上元素的和是否为34，如果均为34，则在屏幕显示It's magic matrix。

```
A=magic(4);
B=sum(A);
C=sum(A,2);
D=trace(A);
E=trace(rot90(A));
F=length(find(B==34));
G=length(find(C==34));
if F==4&&G==4&&D==34&&E==34      % if all([B,C',D,E]==34)
    disp('It is a magic matrix')
else
    disp('It is not a magic matrix')
end
```

例题10

在一个复杂反应体系中，某些反应的化学计量方程可以由其它反应的化学计量方程线性组合得到。如果m个同时发生的反应中，若每一个反应的计量方程都不能由其它反应的计量方程的线性组合得到，则称这m个反应是相互独立的。一个反应体系的独立反应数等于其化学计量系数矩阵的秩。

已知氨氧化过程可发生下列反应：用化学计量数方程求取独立反应数。

$$4NH_3 + 5O_2 \rightarrow 4NO + 6H_2O$$

$$4NH_3 + 3O_2 \rightarrow 2N_2 + 6H_2O$$

$$4NH_3 + 6NO \rightarrow 5N_2 + 6H_2O$$

$$2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$$

$$2NO \rightarrow N_2 + O_2$$

$$N_2 + 2O_2 \rightarrow 2NO_2$$

例题10

以上反应体系的化学计量数矩阵如下：

$$
A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} NH_3 & O_2 & NO & H_2O & N_2 & NO_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -4 & -5 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -6 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}
$$

b＝rank(A)，则结果为b＝3。
说明此体系有三个独立反应。

本讲小结

矩阵元素的引用，修改与各种操作

- ✓ A([])
  - []可以为索引向量
  - 布尔矩阵（逻辑与关系运算产生）
- ✓ A([],[])
  - 通过下标引用矩阵元素
  - 注意：运算符和end的使用

课堂练习

已知矩阵A=rand(4)，试写出以下矩阵操作的命令

1. 把A的第3至第6个元素，赋值给变量B
2. 找出矩阵A中大于0.5元素的位置
3. 将矩阵A中小于0.2的元素值修改为0
4. 矩阵C为A的第3和第5行交换
5. 求矩阵主对角线元素的连乘积

作业

公共邮箱下载文档：work05.pdf，直接打印、完成后上交