华 东 理 工 大 学

复变函数与积分变换作业（第2册）

班级___________学号____________姓名____________任课教师____________

第三次作业

教学内容：2.1.2 柯西—黎曼方程

1．填空：

(1) 函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 的导数 $f'(z)=$ __0__

(2) 函数 $f(z)=z^n$ 的导数 $f'(z)=$ $\underline{nz^{n-1}}$

（3）函数 $\dfrac{z-3}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为 $\underline{-1,\pm i}$

2．下列函数何处可导？何处解析？

（1） $f(z)=x^2-yi$；（2） $f(z)=2x^3+3y^3i$；（3） $f(z)=z^2\bar{z}$

解：（1） $f(z)=x^2-yi$，则 u=x^2，v=-y，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial v}{\partial y}=-1,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ 令\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ 得，\ x=-\frac{1}{2}$$

即：在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上可导，复平面内处处不解析。

（2） $f(z)=2x^3+3y^3i$，则 u=$2x^3$，v=3y，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2,\frac{\partial v}{\partial y}=9y^2,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ 令\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ 得，\ \sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$$

即：在直线 $\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$ 上可导，在复平面内处处不解析。

（3） $f(z)=z^2\bar{z}$， $f(z)=\left(x^3+xy^2\right)+i\left(x^2y+y^3\right)$，则 $u=x^3+xy^2$，$v=x^2y+y^3$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2,\frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2,\frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\ 令\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\ 得，$$

$y=\pm x$，$x=0$，$y=0$，即：函数仅在直线 $y=\pm x$、实轴和虚轴上满足 C-R 方程，

该函数在这四条直线上可导，在复平面内处处不解析。

3．验证函数 $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ 在复平面上解析，并求其导数。

解：$u=\sin x\cosh y$，$v=\cos x\sinh y$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cosh y,\frac{\partial v}{\partial y}=\cos x\cosh y,\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x\sinh y,\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\sinh y,$$

即：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，所以函数在复平面上解析。

$$f'(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$$

4．设函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i\left(x^3+Lxy^2\right)$ 是复平面内解析函数，求 L，m，n 的值。

解：$u=my^3+nx^2y$，$v=x^3+Lxy^2$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2nxy,\frac{\partial v}{\partial y}=2Lxy,\frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2,\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+Ly^2$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 得，

$L=-3$，$m=1$，$n=-3$

5．设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，证明：如果 $f(z)$ 满足下列条件之一，那么它在 D 内为常数.

（1）$\overline{f(z)}$ 解析；(2) $2u+3v=1$；(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数.

证明：关键证明 u,v 的一阶偏导数皆为 0。

（1）$\overline{f(z)}=u-iv$，因其解析，故由柯西-黎曼方程得

$$u_x=-v_y,u_y=v_x--------(1)$$

而由 $f(z)$ 的解析性，又有 $u_x=v_y,u_y=-v_x--------(2)$

由（1）、（2）知，$u_x=u_y=v_y=v_x=0$，因此 $u\equiv c_1,v\equiv c_2$，即

$f(z)\equiv c_1+ic_2$ 为常数

(2) 同前面一样，$2u+3v=1$ 两端分别对 x,y 求偏导数，得 $2u_x+3v_x=0$，$2u_y+3v_y=0$

考虑到柯西-黎曼方程 $u_x=v_y,u_y=-v_x$，仍有 $u_x=u_y=v_y=v_x=0$，证毕。

（3）由已知，$\left|f(z)\right|^2=u^2+v^2\equiv c_0$ 为常数，等式两端分别对 x,y 求偏导数，得

$$2uu_x+2vv_x=0\text{，}$$

$$2uu_y+2vv_y=0\text{，}\quad\text{------------------------------}\quad（1）$$

因 $f(z)$ 解析，所以又有 $u_x=v_y,u_y=-v_x$ ---------------------------（2）

说明 u,v 皆与 x,y 无关，因而为常数，从而 $f(z)$ 也为常数。

6. 证明：若 $f(z)$ 解析，则有 $(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|)^2=|f'(z)|^2$

证明：由柯西-黎曼方程知，左端 $(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u^2+v^2})^2+(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{u^2+v^2})^2$

$$=(\frac{uu_x+vv_x}{\sqrt{u^2+v^2}})^2+(\frac{uu_y+vv_y}{\sqrt{u^2+v^2}})^2=\frac{(uu_x+vv_x)^2+(uv_x-vu_x)^2}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{u^2(u_x+v_x)^2+v^2(u_x+v_x)^2}{u^2+v^2}=(u_x+v_x)^2=\left|u_x+iv_x\right|^2=\left|f'(z)\right|^2=\text{右端，证毕。}$$

第四次作业

教学内容：2.2 初等函数及其解析性　2.3 解析函数与调和函数的关系

1.填空题

（1）$\exp\left(\frac{2-\pi i}{3}\right)=$________

（2）$\left(e^i\right)^i=$________；

（3）$Ln\left(-3+4i\right)=$________；

（4）$\ln\left(ie\right)=$________；

(5) $\ln e^i=$__________.

解：（1）$\exp\left(\frac{2-\pi i}{3}\right)=e^{\frac{2}{3}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=e^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（2）$Lne^i=i\left(1+2k\pi\right)\quad k=0,\pm1,$ 等，

$$\left(e^{i}\right)^{i}=e^{iLne^{i}}=e^{-(1+2k\pi)}\quad k=0,\pm1,\text{等}$$

(3) $Ln(-3+4i)=\ln|-3+4i|+i\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)$

$=\ln5+i\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}+2k\pi\right)\quad k=0,\pm1,$等 （2）$\ln(ie)=\ln|ie|+i\frac{\pi}{2}=1+i\frac{\pi}{2}$

（4）$\ln(ie)=\ln|ie|+i\frac{\pi}{2}=1+i\frac{\pi}{2}$

（5）$e^{i}=\cos1+i\sin1$，$\ln\left(e^{i}\right)=\ln\left|e^{i}\right|+i=i$

2　求下列各式的值

（1）3^{i}；（2）$(1+i)^{i}$；（3）$\sin(1+2i)$；（4）$|\cos z|^{2}$

解：（1）$3^{i}=e^{iLn3}=e^{i(\ln3+i2k\pi)}=e^{-2k\pi-i\ln3}\quad k=0,\pm1,$等

（2）$(1+i)^{i}=e^{iLn(1+i)}=e^{i\left[\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]}=e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\ln\sqrt{2}}\qquad k=0,\pm1,$等

（3）$\sin(1+2i)=\dfrac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i}=\dfrac{e^{-2+i}-e^{2-i}}{2i}$

$$=\frac{\left(e^{-2}-e^{2}\right)\cos1+i\left(e^{-2}+e^{2}\right)\sin1}{2i}$$

$$=\frac{\left(e^{-2}+e^{2}\right)\sin1-i\left(e^{-2}-e^{2}\right)\cos1}{2}$$

（4）$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$，

$$\begin{aligned}|\cos z|^{2}&=(\cos x\cosh y)^{2}+(\sin x\sinh y)^{2}\\&=\cos^{2}x\left(1+\sinh^{2}y\right)+\left(1-\cos^{2}x\right)\sinh^{2}y\\&=\cos^{2}x+\sinh^{2}y\end{aligned}$$

3. 设 $z=re^{i\theta}$ 求 $\mathrm{Re}[Ln(z-1)]$

解：$Ln(z-1)=\ln|z-1|+i[\arg(z-1)+2k\pi i]$因此

$$\mathrm{Re}[Ln(z-1)]=\ln|z-1|=\ln\sqrt{(r\cos\theta-1)^{2}+(r\sin\theta)^{2}}=\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^{2})$$

4. 解下列方程：

（1）$e^x - 1 - \sqrt{3}i = 0$；（2）$\ln z = 2 - \frac{\pi}{6} i$；（3）$\cos z = 0$；（4）$\sin z + \cos z = 0$

解：（1）$e^x = 1 + \sqrt{3}i$，

$$z = Ln\left(1+\sqrt{3}i\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad k = 0, \pm 1, 等$$

（2）$z = e^{2-\frac{\pi}{6}i} = e^2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = e^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$

（3）$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0$，$e^{i2z} = -1$，

$$i2z = Ln\left(-1\right) = i\left(\pi + 2k\pi\right)$$
$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \left(k = 0, \pm 1, 等\right)$$

（4）由于$\sin z = -\cos z, \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{-1}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$故

$$e^{2iz} - 1 = -i(e^{2iz} + 1) \qquad e^{2iz} = \frac{1-i}{1+i}$$

$$z = \frac{1}{2i} Ln(\frac{1-i}{1+i}) = \frac{1}{2i} Ln(-i) = \frac{1}{2i}\left[\ln|-i| + i(\arg(-i) + 2k\pi i)\right] = (k - \frac{1}{4})\pi, k = 0, \pm 1, \cdots$$

5.证明下列各式：

(1) $\cos iz = \cosh z$

证明：$\cos iz = \frac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z$。

(2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$;

证明：$\cosh^2 z - \sinh^2 z = (\frac{e^z+e^{-z}}{2})^2 - (\frac{e^z - e^{-z}}{2})^2 = 1$。

6．由下列各已知调和函数求解析函数$f(z) = u + iv$：

（1）$u = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$；

解：则

$$\mu_x = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \mu_y = 3x^2 - 6xy - 3y^2,$$

$$f'(z) = \mu_x - i\mu_y = 3x^2 + 6xy - 3y^2 - i(3x^2 - 6xy - 3y^2) = 3(1 - i)z^2,$$

故 $f(z) = (1-i)z^3 + ic, c \in R$

（2） $v=\arctan\frac{y}{x}, x>0$；

$$f'(z)=v_y+iv_x=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{1}{z},\text{故 } f(z)=\ln z+c, c\in R$$

（3） $v=\frac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0$。

$$f'(z)=\mu_x+iv_x=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}})^2=\frac{1}{z^2},\text{故 } f(z)=\frac{-1}{z}+c, c\in R$$

由 $f(2)=0$得，$c=\frac{1}{2}$ 故 $f(z)=\frac{-1}{z}+\frac{1}{2}, c\in R$

7.设$u(x,y)=e^{px}\sin y$，求 p 的值使$v(x,y)$为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$。

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=pe^{px}\sin y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{px}\cos y, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=p^2e^{px}\sin y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{px}\sin y,$

由拉普拉斯方程知 $p=\pm 1$

当 $p=1$时，

$$u(x,y)=e^x\sin y$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y$$
$$v=\int e^x\sin y dy=-e^x\cos y+g(x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow g(x)=C$$
$$f(z)=e^x\sin y+i(-e^x\cos y+C)$$

当 $p=-1$时，

$$u(x,y)=e^{-x}\sin y$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}\sin y$$
$$v=\int -e^{-x}\sin y dy=e^{-x}\cos y+g(x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow g(x)=C$$
$$f(z)=e^{-x}\sin y+i(e^{-x}\cos y+C)$$

8．已知，$u+v=x^2-y^2+2xy-5x-5y$ 试确定解析函数 $f(z)=u+iv$

解：首先，等式两边分别对 x, y 求偏导数，得

$\mu_x + v_x = 2x + 2y - 5$

$\mu_y + v_y = 2x - 2y - 5$

联立 C-R 方程解得

$$\mu_{\mathrm{x}} = 2x - 5, \mu_y = -2y \text{；}$$

对 μ_x 积分，得 $\mu = x^2 - 5x + c(y)$，带入 μ_y 中，

得 $c'(y) = -2y, c(y) = -y^2 + c_0$

$\mu = x^2 - 5x + c_0 - y^2$

$v = 2yx - 5y - c_0$

故 $f(z) = u + iv = z^2 - 5z + c_0 - c_0 i$

$f(z) = u + iv = z^2 - 5z + c_0 - c_0 i$