谓词逻辑

Predicative Logic

内容提要

1. 谓词与量词
2. 项与公式
3. 公式语义
4. 前束范式
5. 推理理论

1、谓词与量词

概念：

谓词，个体词，论域，全称量词，存在量词

命题的局限性

考虑以下推理（**苏格拉底三段论**）：

所有的人都会死的。

苏格拉底是人。

∴ **苏格拉底会死的。**

直观上是有效的论证，但命题语言表示为：

p

q

∴ r

不是有效推论。

原因：“苏格拉底三段论”有效性不是取决于前提、结论之间的作为简单的命题的关系，而是依赖于命题的成分之间的联系。有必要将命题分解得更细。

命题的成分：

命题 = **主语**+**谓语**+**宾语**

个体词 **谓词**

[+ 量词]

例：（1） 苏格拉底是人
（2） 所有的人都会死的。

注意：逻辑中主、谓成分划分与汉语有区别。

谓词 表示命题的谓语部分的符号或符号串

常用表示：大写字母，**A,B,C,…**

带有下标的大写字母，$A_1,A_2,A_3,\ldots$

以大写字母为首的字符串，**Human,…**

谓词的元数: 谓词中包含个体的数目。

- 1元谓词描述个体的性质，2元或多元谓词描述两个或多个个体间的关系。
- 0元谓词中无个体，理解为就是命题

个体词 用于表示命题中主语部分的符号或符号串。

通常用小写字母，或带小标的小写字母表示。

个体常元 表示确指个体。

例：**Human(s)**中**s**指苏格拉底，是个体常元。

个体变元 表示不确指个体。

例：**Human(x)**中的**x**。

个体域(domain): 个体变元的取值范围，常用D表示。

量词：限定个体数量特性的词。

全称量词(Universal quantifier)

$\forall$ **对所有的，for All**

- **$\forall x A(x)$表示个体域中的任意个体x均具有性质A。**

例： 所有的整数都有质因子。

理解成“对所有x，若x是整数，那么x有质因子”

$$(\forall x)(I(x) \to P(x))$$

存在量词(Existential quantifer)

∃，有些，there Exist

- $\exists xA(x)$表示存在着个体域中的个体x具有性质A。

例：有些猪有翅膀。

理解为“至少有一个物体x，x是猪并且x有翅膀。”

$$(\exists x)(P(x) \wedge W(x))$$

例：将下列语句符号化：

（1）不是所有的鸟都能飞。

$\neg (\forall x)(B(x) \to F(x))$

（2）所有的人都能做那件事。

$(\forall x)(M(x) \to D(x))$

（3）有些人是笨的。

$(\exists x)(M(x) \land S(x))$

（4）有一个整数比其它任何整数都大。

$(\exists x)(I(x) \land (\forall y)(E(y) \land D(x,y) \to G(x,y)))$

考虑例（1）“不是所有的鸟都能飞”

可理解为“至少有一只鸟不能飞”。

$$\neg(\forall x)(B(x) \rightarrow F(x))$$

$$(\exists x)(B(x) \land \neg F(x))$$

$\neg(\forall x)\neg$ 等价于 $\exists$。即只要有一个量词就够了。

2、项与合式公式

概念：

项，原子公式，合式公式，自由变元，约束变元，辖域，换名，代入

谓词语言：用符号串表示个体、谓词、量词和命题

一阶谓词逻辑的基本符号

- 个体变元符号：x，y，z，…
- 个体常元符号：a，b，c，…
- 函数符号：f，g，…
- 谓词符号：P，Q，R，…
- 命题常元符号：$\perp$，$\top$
- 量词符号：$\forall$，$\exists$
- 连接词符号：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$
- 辅助符号：），（

逻辑符号：在任何情况下都作用相同的符号。

非逻辑符号：其他符号，即个体常元符号、函数符号、谓词符号。

项（Term）

(1)个体常元和变元是项；
(2) 若f是n元函数符号，t_1, …, t_n是项，则$f(t_1, …, t_n)$是项；
(3) 仅仅有限次使用(1)，(2)产生的符号串是项。

注：项将解释成个体对象。

原子公式 (Atomic formulas)

若P是一个元谓词符号，$t_1,\ldots,t_n$是项, 则$P(t_1,\ldots,t_n)$是原子公式。

合式公式 (Well-Formed Formulas)

递归定义如下：

(1) 原子公式是公式；

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$是合式公式；

(3) 若A，B是公式，则$(A\vee B)$，$(A\wedge B)$，$A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$是公式；

(4) 若A是公式，x是变元，则$\forall xA$，$\exists xA$是公式；

(5)仅仅有限次使用 1 ～ 4 得到的符号串才是合式公式。

变元的约束 设公式 α的一个子公式为$\forall x\ A$或$\exists x\ A$。则称：

- **指导变元**：x是∀或∃的指导变元。
- **辖域(Scope)**：A是相应量词的辖域。
- **约束出现(bounded)**：辖域中x的一切出现，以及$(\forall x)$中的x称为x在α中的约束出现。
- **自由出现(free)**：变元的非约束出现。
- **约束变元**：约束出现的变元。
- **自由变元**：自由出现的变元。
- **封闭的 (Closed)** 一个公式A是封闭的，若其中不含自由变元。

例： $\forall x \forall y (P(x,y) \wedge Q(y,z)) \wedge \exists x P(x,y)$

变元换名 (Replacement)

目的是避免变元的约束与自由同时出现，引起混淆,可对约束变元换名。

规则：（1） 换名的范围是量词的指导变元,及其相应辖域中的变元，其余部分不变。

（2） 换名时最好选用辖域中未出现的变元名。

例：$\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y)$

可换为：$\forall z\,(P(z) \rightarrow R(z,y)) \wedge Q(x,y)$

不能：$\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,y)) \wedge Q(x,y)$

变元代入(Substitution)

代入对自由变元进行。不能改变约束关系。

3、谓词公式语义

概念：

解释，赋值，有效的，可满足的，不可满足的

解释 (Interpretation) 谓词语言的一个解释 $I=(D, \varphi)$包括：

(1) 非空集合D，称之为论域；

(2) 对应于每一个个体常元a， $\varphi(a)\in D$；

(3) 对应于每一个n元函数符号f都有一个函数 $\varphi(f):D^n \to D$；

(4) 对应于每一个n元谓词符号A都有一个n元关系$\varphi(A) \subseteq D^n$。

注：解释也称为结构，通常简单地用φ表示。

赋值 (Assignment) 解释I中的赋值v为每一个个体变元x指定一个值v(x) ∈ D，即设 V为所个体变元的集合，则赋值v是函数 v:V → D.

若v是赋值，则v的a-equivalent 赋值记为v[x←a]（其中a ∈D表示一个由

$$v[x \leftarrow a](u)=\begin{cases} a & \text{若} u=x \\ v(u) & else \end{cases}$$

定义的赋值。

注：给定解释I和I中的赋值v后，任何项和公式的含义就明确了。

v_I:TERM → D

v_I:WFF → {1,0}

项的语义

项t在解释I=(D，φ)和赋值v下的值，记为$v_I(t)$

(1) 若t 是常元a，则$v_I(t) = \varphi(a)$

(2) 若t 是变元x，则$v_I(t) = \varphi(x)$

(3) 若t 是$f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$，则$v_I(t) = \varphi(f)(v_I(t_1), v_I(t_2), \ldots, v_I(t_n))$

例、 Σ={a, f}，f(x,a)是一个项

解释φ_1、φ_2 、 φ_3：

$\varphi_1(a)=1$， $\varphi_1(f)=+$； $I_1=(Z,\varphi_1)$

$\varphi_2(a)=0$， $\varphi_2(f)=-$； $I_2=(Z,\varphi_2)$

$\varphi_3(a)=-2$， $\varphi_3(f)=\times$； $I_3=(Z,\varphi_3)$

x的赋值v_1、v_2、v_3

$v_1(x)=7$、$v_2(x)=0$、$v_3(x)=-5$

公式的语义

公式A在解释I=(D，φ)和赋值v下的值，记为$v_I(A)$

1、若A为命题常元符号p，则

$$v_I(A)=\begin{cases}1 & 若A=\top\\ 0 & 若A=\bot\end{cases}$$

2、若A为原子公式$P(t_1,\ldots,t_n)$，则

$$v_I(A)=\begin{cases}1 & 若\ \langle v_I(t_1),v_I(t_2),\cdots,v_I(t_n)\rangle\in\varphi(P);\\ 0 & else\end{cases}$$

3、若A为否定式(¬B)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & 若\ v_I(B) = 0 \\ 0 & 若\ v_I(B) = 1 \end{cases}$$

4、若A为析取式(B∨C)，则

$$\mathrm{v}_I(A) = \begin{cases} 1 & 若\mathrm{v}_I(B) = 1或\mathrm{v}_I(C) = 1 \\ 0 & e\mathrm{lse} \end{cases}$$

5、若A为合取式(B ∧C)，则

$$\mathrm{v}_I(A) = \begin{cases} 1 & 若\mathrm{v}_I(B) = 1且\mathrm{v}_I(C) = 1 \\ 0 & e\mathrm{lse} \end{cases}$$

6、若A为蕴含式(B→C)，则

$$\mathrm{v}_I(A)=\begin{cases}0 & 若\mathrm{v}_I(B)=1且\mathrm{v}_I(C)=0\\ 1 & else\end{cases}$$

7、若A为等价式(B ↔C)，则

$$\mathrm{v}_I(A)=\begin{cases}1 & 若\mathrm{v}_I(B)=\mathrm{v}_I(C)\\ 0 & else\end{cases}$$

8、若A为(∀xB)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若对任何} d \in D, v[x \leftarrow d]_I(B) = 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

9、若A为(∃xB)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & \text{若对某个} d \in D, v[x \leftarrow d]_I(B) = 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

练习

给出如下两个公式：

1) $G=\exists x(P(f(x))\wedge Q(x, f(a)))$

2) $H=\forall x(P(x)\wedge Q(x, a))$

给出如下的解释I：

$D=\{2, 3\}$

$a=2$

f(2)	f(3)
3	2

P(2)	P(3)	Q(2, 2)	Q(2, 3)	Q(3, 2)	Q(3, 3)
0	1	1	1	0	1

有效公式

当一个解释I的所有赋值v都使公式A的真值为1，则称A在解释I下有效的(valid in the interpretation I);当公式A在所有的解释下都有效时，称A是(逻辑)有效的(Logically valid)。

可满足的 给定公式A，若在某一解释中至少有一种赋值使A取值为1，则称A为可满足的。否则称A是不可满足的。

等值式 $A \Leftrightarrow B$ ：若$A \leftrightarrow B$是有效的。

例、

A=$\exists$xP(x，y)可满足公式

A=$\forall$x（P(x，y)$\wedge\neg$ P(x，y)）不可满足公式

A=（P(x，y)$\vee\neg$ P(x，y)）有效公式