图论

Graph Theory

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

1、图的基本概念

概念：

无向图、有向图、关联与相邻、简单图、完全图、正则图、子图、补图，握手定理，图的同构

预备知识

- **多重集合**——元素可以重复出现的集合
- **无序积**——$A\&B=\{(x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$

无向图$G = \langle V,E\rangle$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为顶点；

(2) E为$V\&V$ 的多重集，其元素称为无向边，简称边。

例：

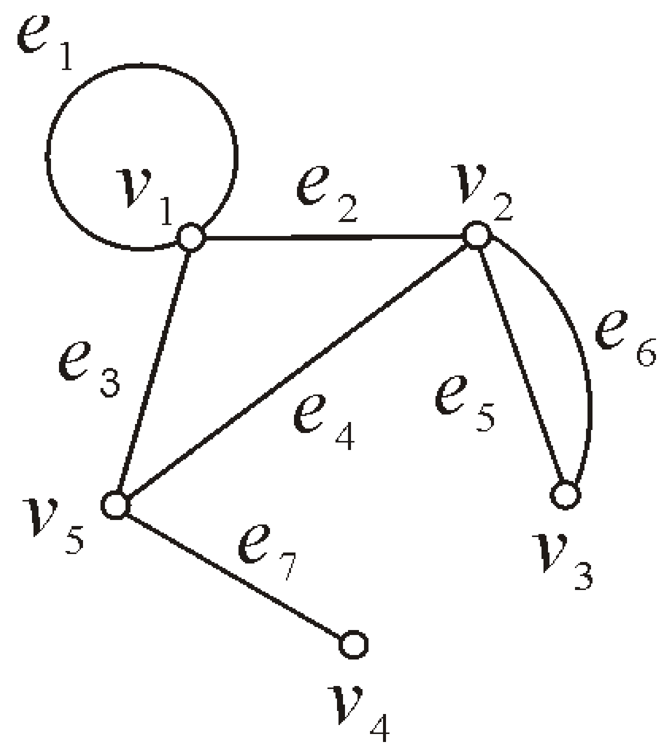
设

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3),$

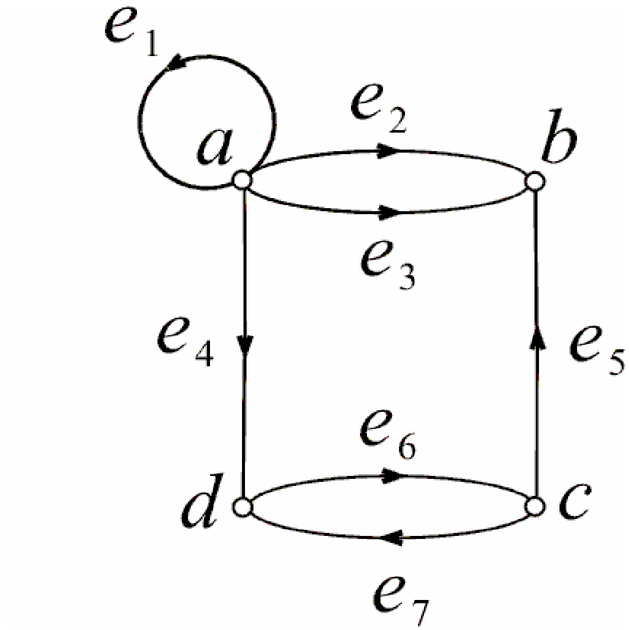
$(v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

则 $G = \langle V,E\rangle$为一无向图



有向图 ***D*=<*V*,*E*>, 只需注意*E*是*V*×*V* 的多重子集**

例：下图表示的是一个有向图， ***D*=<*V*,*E*>**



$V = \{a,b,c,d\}$, $E = \{<a,a>,<a,b>,<a,b>,<a,d>,<d,c>,<c,d>,<c,b>\}$

图的相关概念

1. n阶图：顶点个数为n.
2. 零图：边的个数为0.
   - n 阶零图记为N_n
   - 平凡图：1 阶零图N_1
4. 空图——∅
5. 标定图与非标定图：依据顶点和边是否命名标识。
6. 有向图的基图：有向边改为无向边后的图。

点与边的相关概念

用 e_k 表示无向边或有向边。

1. 顶点与边的关系 $e_k=(v_i\ ,\ v_j)$

   ① 关联： e_k 与 v_i ， v_j 关联

   ② 关联次数：0(不关联)，1($v_i \neq v_j$)， 2($v_i = v_j$)

   ③ 环：与同一顶点关联次数为2的边；

   ④ 孤立点：不与任何边关联的顶点。

2. 顶点相邻：两个顶点之间有边。
3. 边相邻：两条边有公共端点。
4. 平行边：关联的端点相同的两条边。

邻域与关联集

① $v \in V(G)$ (G为无向图)

v的邻域 $N(v)=\{u \mid u \in V(G) \wedge (u,v) \in E(G) \wedge u \neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N}(v)=N(v) \cup \{v\}$

v 的关联集 $I(v)=\{e \mid e \in E(G) \wedge e\text{与}v\text{关联}\}$

② $v \in V(D)$ (D为有向图)

v的后继元集 $\Gamma_D^+(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle v,u \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的先驱元集 $\Gamma_D^-(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle u,v \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的邻域 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v)=N_D(v) \cup \{v\}$

多重图与简单图

多重图：含平行边的图；

简单图：即不含平行边又不含环的图。

顶点的度数

(1) 设$G=<V,E>$为无向图, $\forall v\in V$, $d(v)$——v的度数, 简称度

(2) 设$D=<V,E>$为有向图, $\forall v\in V$,

$d^+(v)$——v的出度

$d^-(v)$——v的入度

$d(v)$——v的度或度数

(3) 最大度$\Delta(G)$，最小度 $\delta(G)$

(4) $\Delta^+(D)$, $\delta^+(D)$, $\Delta^-(D)$, $\delta^-(D)$, $\Delta(D)$, $\delta(D)$

(5) 奇顶点度与偶度顶点

握手定理

定理 (1) 设$G=<V,E>$为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

(2) 设$D=<V,E>$为任意有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = m$$

推论： 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

握手定理应用例

无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问G的阶数n为几？

解　本题的关键是应用握手定理.

设除3度与4度顶点外，还有x个顶点$v_1, v_2, \ldots, v_x$，则

$$d(v_i) \le 2，\ i = 1, 2, \ldots, x,$$

于是得不等式

$$32 \le 24 + 2x$$

得 $x \ge 4$, 阶数 $n \ge 4+4+3=11$.

图的度数列

1 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为无向图$G$的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列 。

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集，

D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

3. 非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$是可图化的；是可简单图化的.

定理（1）非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$是可图化的当且仅当 $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数.

（2）设G为任意n阶无向简单图，则 $\Delta(G) \le n-1$.

例：判断下列度数列是否可图化？可简单图化？

(2，4，6，8，10)

(1，3，3，3，4)

(2，2，3，4，5)

(3，3，3，4)

(2, 4, 6, 8, 10)是可图化的
(1, 3, 3, 3, 4) 是可图化的，也是可简单图化的
(2, 2, 3, 4, 5) 是可图化的， 但不是可简单图化的，
(3, 3, 3, 4)不 是可图化的

图的同构

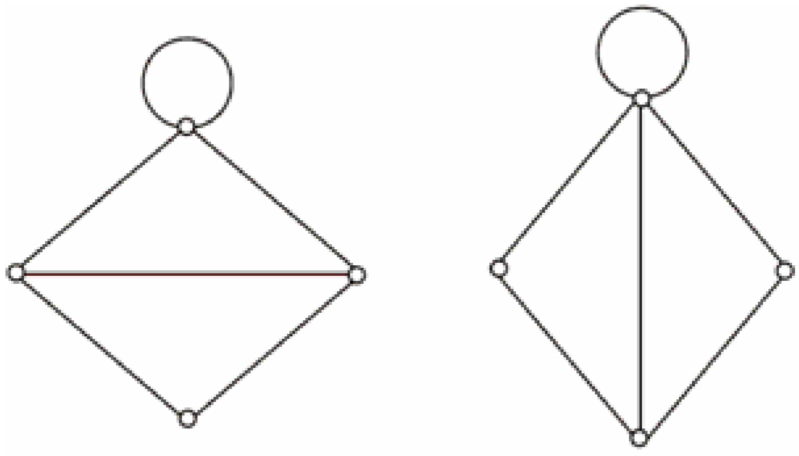
设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个无向图(两个有向图)，若存在双射函数$f:V_1\to V_2$，对于$v_i, v_j\in V_1$,

$(v_i,v_j)\in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i), f(v_j))\in E_2$

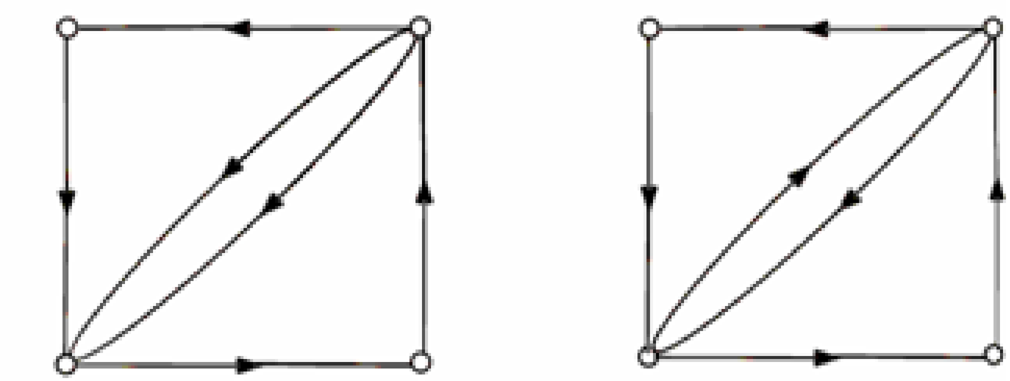
（$<v_i,v_j>\in E_1$ 当且仅当 $<f(v_i), f(v_j)>\in E_2$）

并且, (v_i,v_j)（$<v_i,v_j>$）与 $(f(v_i), f(v_j))$（$<f(v_i),f(v_j)>$）的重数相同，则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1\cong G_2$.

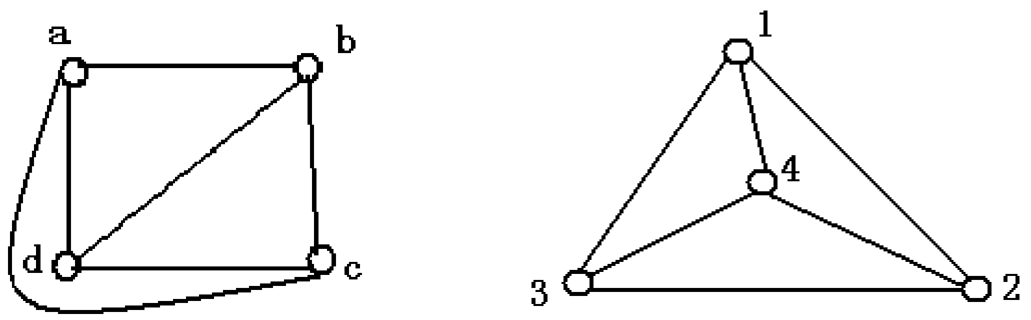
例



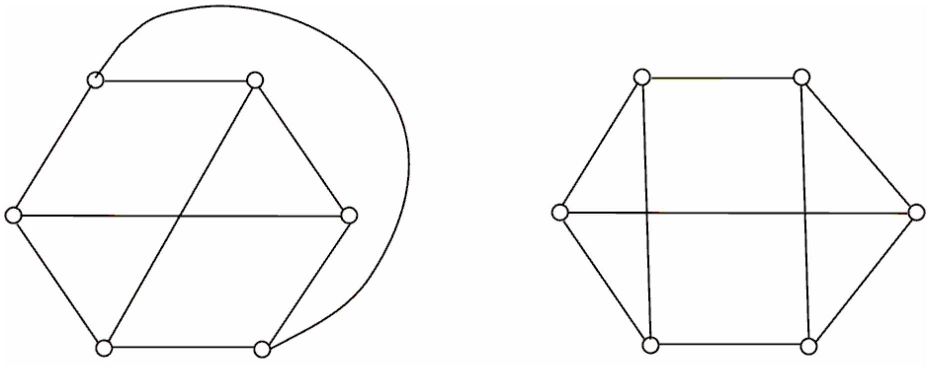
不同构
（度数列不同）



不同构



同构



(1)　　　　　　　　(2)

图中(1)与(2)的度数列相同，它们同构吗？为什么？

答：不同构

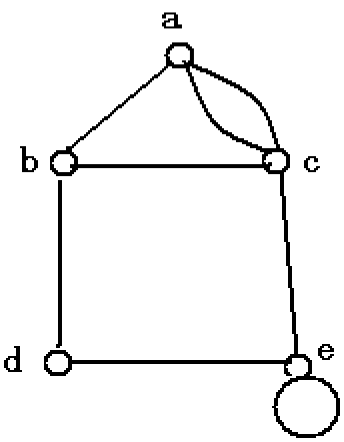
➢ G_1与G_2同构的必要条件：

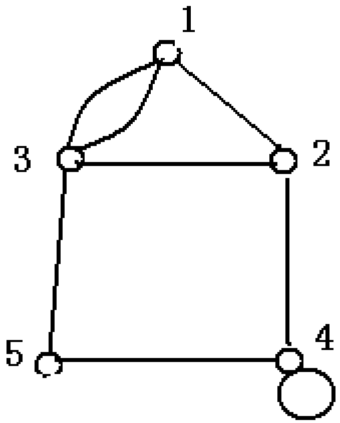
1、顶点数相同

2、边数相同

3、度数相同的顶点数目相等

例





n 阶完全图与竞赛图

(1) n (n≥1) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n.

性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

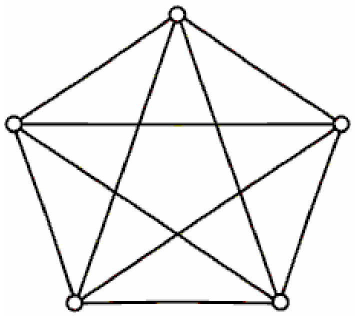
(2) n (n≥1)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

性质：边数 $m=n(n-1), \Delta=\delta=2(n-1), \Delta^{+}=\delta^{+}=n-1$

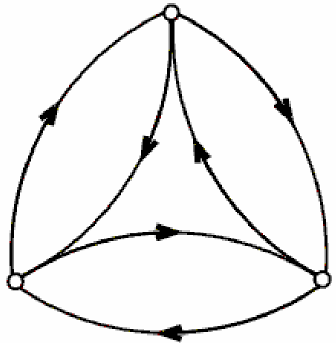
(3) n (n≥1) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

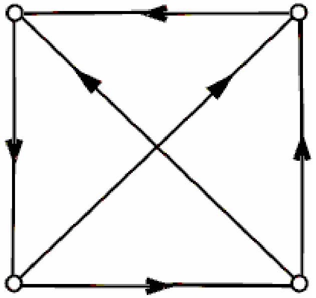
实例



(1)



(2)



(3)

(1) 为K_5

(2) 为3阶有向完全图

(3) 为4阶竞赛图.

n 阶 k 正则图

n 阶k正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图。

性质：边数（由握手定理得）

$$m=\frac{nk}{2}$$

K_n是 $n-1$正则图。

子 图

$G=\langle V,E\rangle$， $G'=\langle V',E'\rangle$

（1）$V' \subseteq V$ 且 $E' \subseteq E$，则称G’为G的子图，记为$G' \subseteq G$，称G为G′的母图；

（2）若$G' \subseteq G$且$V'=V$，则称G′为G的生成子图；

（3）若$V' \subset V$或$E' \subset E$，称G′为G的真子图；

（4）V'（$V' \subset V$且$V' \neq \varnothing$）的导出子图，记作$G[V']$；

（5）E'（$E' \subset E$且$E' \neq \varnothing$）的导出子图，记作$G[E']$.