3.4 高阶系统

在大量的系统中，尤其是机械系统，几乎都可用高阶微分方程来描述。这种用高阶微分方程描述的系统称之为**高阶系统**。

对高阶系统的分析和研究一般都较复杂，可利用对二阶系统的分析结论，对高阶系统做定量的分析。

线性定常高阶系统对单输入单输出的闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

$$=\frac{k\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k{}^2)}(n\geq m，\ q+2r=n)$$

当 $X_i(s)=\frac{1}{s}$ 时，得：

$$X_o(s)=\frac{k\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\xi_k\omega_k s+\omega_k{}^2)}$$

。

当极点互不相同时，得：

$$X_o(s)=\frac{a}{s}+\sum_{j=1}^{q}\frac{a_j}{s+p_j}+\sum_{k=1}^{r}\frac{b_k(s+\xi_k\omega_k)+c_k\omega_k\sqrt{1-\xi_k^{\ 2}}}{(s+\xi_k\omega_k)^2+(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^{\ 2}})^2}$$

$$\Rightarrow\quad x_o(t)=a+\sum_{j=1}^{q}a_je^{-p_jt}+\sum_{k=1}^{r}D_ke^{-\xi_k\omega_kt}\sin(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^{\ 2}}t+\beta_k)$$

$$\beta_k=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi_k^{\ 2}}}{\xi_k}=\cos^{-1}\xi_k$$

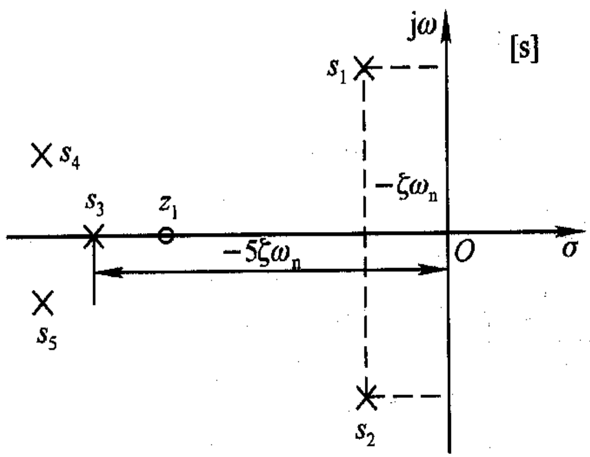
因此，高阶系统的单位阶跃响应是由一阶系统的单位阶跃响应和二阶系统的单位阶跃响应叠加而成的。

❖ 讨论：

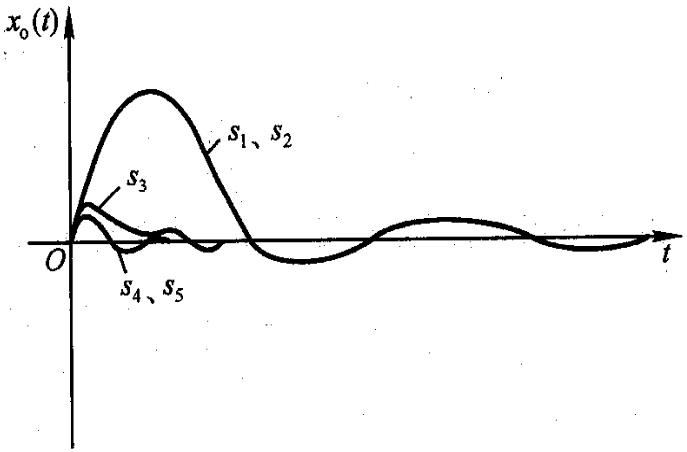
$$x_o(t)=a+\sum_{j=1}^{q}a_je^{-p_jt}+\sum_{k=1}^{r}D_ke^{-\xi_k\omega_kt}\sin(\omega_k\sqrt{1-\xi_k^{\ 2}}t+\beta_k)$$

（1）由上式可见，若所有闭环极点都具有负实部（即 p_j和$\xi_k\omega_k$ 都为正），位于 s 平面的左半部，则$t\uparrow\rightarrow e^{-p_jt}$，$e^{-\xi_k\omega_kt}\downarrow\rightarrow$系统是稳定的，且$x_o(\infty)=a$。

（2）由上式可见，高阶系统的各个闭环极点对系统时间响应的影响程度是不同的。距离虚轴越远的极点，因其负实部绝对值越大，所以其指数项和阻尼指数项分量衰减越快。相反，距离虚轴很近的极点则对系统的时间响应起主导作用，而对前者可忽略其影响。



a) 零点、极点分布图



b) 单位脉冲响应的各个分量

主导极点：

在工程中，一般将高阶系统中距离虚轴最近、其实部的绝对值为其他极点绝对值的1/5或更小且附近没有零点的闭环极点称为主导极点，它们经常以共轭复数的形式成对出现。

当高阶系统存在主导极点时，可只考虑主导极点对系统时间响应的影响。

应用主导极点分析高阶系统的过渡过程，实质上就是把高阶系统近似作为二阶振荡系统来处理，这样就大大简化了系统的分析和综合工作，但在应用这种方法时一定要注意条件，同时还要注意，在精确分析中，其他极点与零点对系统过渡过程的影响不能忽视。