華東理工大學
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECENOLOGY

离 散 数 学

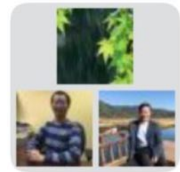
命题逻辑 Propositional Logic

任课教师：杨海 信息学院 计算机系
yanghai@ecust.edu.cn

勤奋求实
励志明德

内容提要

1. 命题公式
2. 公式的真值
3. 范式
4. 联结词的完备集
5. 推理理论



离散数学-C304

该二维码7天内(9月14日前)有效，重新进入将更新

数理逻辑体系

数理逻辑是采用数学的方法，研究思维形式及其规律的一门学科。

- ✓ 对思维的研究转变为对符号的演算。
- ✓ 避免了自然语言的歧义性。
- ✓ 奠定了自动推理的理论基础。

语法（**Syntax**）：语言符号及表达规则 。

语义（**Semantics**）：语言符号及表达规则的含义。

形式系统（**Formal System**）：利用逻辑语言的形式结构（即从语法的角度）来表达逻辑语句之间的关系。

1、命题公式

概念：

命题，　联结词(¬，∧，∨，→，↔)，合式公式，子公式

命题：具有确定真值的陈述句。

命题的定义中包含二层含义：

(1)在语法上．命题必须是陈述句。而疑问句、祈使句和感叹句等无所谓真假，所以不是命题。

(2)命题具有惟一的真值，这与我们是否知道它的真假是两回事。

- **真值：1(或T)表示“真”；0(或 F)表示“假”**

命题判断举例

下列句子中那些是命题?

(1) $\sqrt{2}$是有理数. 假命题

(2) $2 + 5 = 7$. 真命题

(3) $x + 5 > 3$. 不是命题

(4) 你去教室吗? 不是命题

(5) 这个苹果真大呀! 不是命题

(6) 请不要讲话! 不是命题

(7) 2050年元旦下大雪. 命题，但真值现在不知道

(8) 理发师Richard专门为那些不给自己理发的人理发。 不是命题，悖论

命题符号：　用来表示命题符号。

- 通常用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ $(i \geq 1)$表示命题。

例如，令

p：$\sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为0，

q：$2 + 5 = 7$，则 q 的真值为1

- 命题符号分类：
  - 命题常元（命题常项）：$\perp$ (bottom)，　$\top$（top）
  - 命题变元（命题变项）：$p, q, r, \ldots$

命题分类

- 简单命题（也称原子命题）：再分解为更简单的命题。
- 复合命题：若干简单命题通过**联结词(connectives)**而构成的新命题。

常见的5个联结词

$\neg$ **否定 (negation)**

$\wedge$ **合取(conjunction)**

$\vee$ **析取(disjunction)**

$\rightarrow$ **蕴含(implication)**

$\leftrightarrow$ **等价(equailvalence)**

♥这些联结词有明确的含义，注意与自然语言对应词的联系与区别！

否定词符号 ¬

设p是一个命题，¬p称为p的否定式。
¬p是真的当且仅当p是假的。

p	¬p
1	0
0	1

例、 p： 上海是一个大城市。

¬p：上海不是一个大城市。

合取词符号 $\wedge$

设p，q是两个命题，命题“p并且q”称为p，q的合取，记以$p\wedge q$，读作p且q。

$p\wedge q$是真的当且仅当p和q都是真的。

例、 p：$2\times 2=5$，

q：雪是黑的

$p\wedge q$：$2\times 2=5$并且雪是黑的

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

析取词符号 $\vee$

设p，q是两个命题，命题“p或者q”称为p，q的析取，记以$p\vee q$，读作p或q。

$p\vee q$是真的当且仅当p，q中至少有一个是真的。

例如，p：今天下雨，q：今天刮风

$p\vee q$：今天下雨或者刮风。

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

“∨”所表示的“或”是“可兼或”

自然语言中的“或者”一词有不可兼的意思。

例、他是跳远冠军或是百米冠军。

我今天到北京出差或者到广州去度假

表示的是二者只能居其一，不会同时成立。

- 按照联结词“∨”的定义，当p，q都为真时，p∨q也为真。因此，对于“不可兼或”，我们不可以用∨来表示。

p：我今天到北京出差，
q：我到广州去度假

p	q	命题
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

蕴含词符号 →

设p，q是两个命题，命题 “如果p，则q”称为p蕴含q，记以p→q。

p→q是假的当且仅当p是真的而q是假的。

例、 p：f(x)是可微的，

q：f(x)是连续的

p→q： 若f(x)是可微的，则f(x)是连续的。

p　　q	$p \to q$
1　　1	1
1　　0	0
0　　1	1
0　　0	1

“善意的推定”：

如果p是假命题，则不管q是什么命题，命题“如果p，则q”($p \to q$)在命题逻辑中都被认为是真命题。

例、p： 2×2=5，q： 雪是黑的，

命题“如果2×2=5，则雪是黑的”是真命题。

等价词符号 $\leftrightarrow$

设p，q是两个命题，命题 “p当且仅当q”称为p等价q，记以$p\leftrightarrow q$。

$p\leftrightarrow q$是真的当且仅当p，q或者都是真的，或者都是假的。

例、 p： $a^2+b^2=a^2$， q： $b=0$

$p\leftrightarrow q$： $a^2+b^2=a^2$当且仅当$b=0$

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

命题语言的语法

命题语言的基本符号

- 命题变元符号：p、q、r
- 命题常元符号：$\perp$，$\top$
- 连接词符号：$\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
- 辅助符号：），（

合式公式(Well-Formed Formulas): 递归定义如下:

(1) 命题常元和变元符号是合式公式;

(2) 若A是合式公式，则(¬A)是合式公式，称为A的否定式;

(3) 若A，B是合式公式，则 (A∨B)， (A∧B)， (A→B)， (A↔B)是合式公式;

(4) 所有合式公式都是有限次使用(1)，(2)，(3)、(4)得到的符号串。

子公式 (subformulas): 如果X是合式公式A的一部分，且X本身也是一个合式公式，则称X为公式A的子公式。

公式举例：

$$(1)\quad (((\neg p) \vee q) \rightarrow p);$$

$$(2)\quad ((p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee q));$$

$$(3)\quad ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p));$$

$$(4)\quad (((\neg p) \rightarrow p) \leftrightarrow p);$$

$$(5)\quad (p \rightarrow (\bot \rightarrow r)).$$

例、如下符号串不是公式：

$$((p \vee \top;$$

$$((r \vee X) \rightarrow q);$$

约定：（1）最外层的括号可以省略；

（2）联结词运算的优先次序（由高到底）为：

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$，$\leftrightarrow$

目的为减少括号的数量。

例、$\neg p \wedge \neg q$ 表示$((\neg p) \wedge (\neg q))$;

$\neg p \vee q$ 表示$((\neg p) \vee q)$;

- **(A→B)不是合式公式，是一个公式模式，代表一类具体的公式**

$$(p \longrightarrow q)$$

$$((p \longrightarrow q) \longrightarrow (s \longrightarrow r))$$

$$((p \vee r) \longrightarrow (\neg q))$$

2、 公式的真值

概念

赋值，公式求值函数，真值表，等值式，重言式，矛盾式，蕴含式

赋值（指派，解释）： 设Σ是命题变元集合，则称函数v：Σ→{1，0}是一个真值赋值。

A是一个公式，v是一个赋值，则A在赋值v下的值，记为v(A),有：

1、若A为命题变元符号p，则v(A)= v(p);

2、若A为命题常元，则

$$v(A) = \begin{cases} 1 & 若A = \top \\ 0 & 若A = \bot \end{cases}$$

3、若A为否定式(¬B)，则

$$v(A)=\begin{cases}1 & 若\, v(B)=0\\ 0 & 若\, v(B)=1\end{cases}$$

4、若A为析取式(B∨C)，则

$$v(A)=\begin{cases}1 & 若\, v(B)=1或\, v(C)=1\\ 0 & else\end{cases}$$

5、若A为析取式(B ∧C)，则

$$v(A)=\begin{cases}1 & 若\, v(B)=1且\, v(C)=1\\ 0 & else\end{cases}$$

6、若A为蕴含式(B→C)，则

$$v(A) = \begin{cases} 0 & 若\, v(B) = 1 且\, v(C) = 0 \\ 1 & else \end{cases}$$

7、若A为等价式(B ↔C)，则

$$v(A) = \begin{cases} 1 & 若\, v(B) = v(C) \\ 0 & else \end{cases}$$

成真赋值：当$v(A)=1$时，称v满足A，记为$v \models A$

成假赋值：当$v(A)=0$时，称v不满足A，记为$v \not\models A$

例、$A=p\vee q$

$v(p)=1, v(q)=0, \quad v(A)=1$

$v(p)=0, v(q)=0, \quad v(A)=0$

真值表：公式A在其所有可能的赋值下所取真值的表，称为A的真值表。

➢ **若公式A中有n个不同变元$p_1, p_2, \ldots, p_n$，那么A共有2^n种不同的赋值。**

例、

公式 $(p\wedge q)\rightarrow r$

p	q	r	$(p\wedge q)\rightarrow r$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	0	0	1

可满足的：公式A，若$\exists$赋值v，使得v $\models$ A，则称A是可满足的。

不可满足的：若$\forall$赋值v，使得v $\not\models$A，则称A是不可满足的。

例、 $(p\wedge q)\rightarrow r$　可满足的

$(p\wedge \neg p)$　不可满足的

扩充到公式集U

v满足U：公式集U，若∃赋值v，使得对∀公式A∈U，有 v $\models$ A，则称v为U的成真赋值。
否则，U是不可满足的。

例、 $\{q \wedge \neg r, q \vee r\}$;

$\{p \rightarrow q, \neg q, p\}$;

重言式、矛盾式

重言式（永真式） 任意赋值v， 有v $\models$ A

矛盾式（永假式）任意赋值v， 有v $\not\models$ A

例、$(p \land \neg p)$

$(p \lor \neg p)$

- A是永真的当且仅当$\neg$A是永假的。
- 若A是永真的，则A是可满足的；反之不对。
- 设A是公式，则A是矛盾式当且仅当A是不可满足的。

证明：

A是矛盾式$\Leftrightarrow$ $\forall$赋值v，有v $\not\models$ A

$\Leftrightarrow\forall$赋值v，有v(A)=0

$\Leftrightarrow$不存在赋值v，使得v(A)=1

$\Leftrightarrow$ A是不可满足的

等值式：若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A\Leftrightarrow B$。

注意：

- $\Leftrightarrow$与$\leftrightarrow$是两个完全不同的 符号
- 用真值表可检查两个公式是否等值
- 基本等值式（见课本pp.17-18）

置换规则（置换定理）

设X是公式A的子公式，$X\Leftrightarrow Y$。将A中的X（可以是全部或部分X）用Y来置换，所得到的公式B，则 $A\Leftrightarrow B$。

判断下列各组公式是否等值:

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$

p q r	$q\rightarrow r$	$p\rightarrow(q\rightarrow r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow r$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论: $p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\rightarrow r$

等值式例题

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

p q r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

基本等值式

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

零律	$A\vee \top \Leftrightarrow \top$，$A\wedge \bot \Leftrightarrow \bot$
同一律	$A\vee \bot \Leftrightarrow A$．$A\wedge \top \Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A \Leftrightarrow \top$
矛盾律	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow \bot$
蕴涵等值式	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
归谬论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B) \Leftrightarrow\neg A$

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础

等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程。

证明两个公式等值

例2 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$

证 $p\rightarrow(q\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ （德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$ （蕴涵等值式，置换规则）

3、范式

概念：

文字，析取范式，极小项，主析取范式，合取范式，极大项，主合取范式

文字 设$A \in \Sigma$（命题变元集），则A和 $\neg A$都称为命题符号A的文字，其中前者称为正文字，后者称为负文字。

析取范式

形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \quad (n \geq 1)$$

的公式称为析取范式，其中$A_i(i=1,\ldots,n)$是由文字组成的合取范式。

例：求$\neg (P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$的析取范式。

极小项 文字的合取式称为极小项，其中公式中每个命题符号的文字都在该合取式中出现一次。

注：(1) n个命题符号共有2^n个极小项。

(2)极小项的编码与性质（p.25）。

主析取范式

给定的命题公式的主析取范式是一个与之等价的公式，后者由极小项的析取组成。

例：求公式$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$的主析取范式

定理：公式的真值表中真值为1的指派所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式。

例：求$P\rightarrow Q$的主析取范式

合取范式

形为

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \ (n \geq 1)$$

的公式称为合取范式，其中$A_1,\ldots,A_n$都是由文字组成的析取式。

例：求$(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$的合取范式

极大项 文字的析取式称为极大项，其中公式中每个命题符号的文字都在该合取式中出现一次。

注：（1）n个命题符号共有2^n个极大项。

（2）极大项的编码等性质（p.25）。

主合取范式 给定的命题公式的主合取范式是一个与之等价的公式，后者由极大项的合取组成。

定理：公式的真值表中真值为0的指派所对应的极大项的合取，即为此公式的主合取范式。

例：求$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$的主析取范式与主合取范式。

4、联结词的完备集

概念：

真值函数，异或，条件否定，与非，或非，联结词完备集

真值函数： 称F:$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为n元真值函数.

$\{0,1\}^n=\{00\ldots0, 00\ldots1, \ldots, 11\ldots1\}$，包含 2^n 个长为n的0,1符号串.
共有 2^{2^n} 个n元真值函数.

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2元真值函数

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

异或 $P \oplus Q \Leftrightarrow \neg (P \leftrightarrow Q)$

条件否定 $P \overset{c}{\rightarrow} Q \Leftrightarrow \neg (P \rightarrow Q)$

与非 $P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg (P \wedge Q)$

或非 $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \vee Q)$

注：能构造多少联结词呢？

11个（二元以内）

联结词的完备集(Adequate Set of Connectives)

设C是联结词的集合，若对于任意一个合式公式均存在一个与之等价的公式，而后者只含有C中的联结词，则称C是联结词的完备集。

例如：

（1）{¬，∧，∨，→，↔}，{ ¬，∧，∨ } 是联结词 的完备集。

（2） {¬， ∧}， {¬， ∨}，{⊥ ， →}是联结词 的完备集。

（3）{↑}是联结词的完备集。

（4）{ ¬ }，{ ∨ }，{ ∧ }，{ ∨ ,∧ }不是联结词的完备集。

5、推理理论

概念：

重言蕴含式，有效结论，P规则，T规则，CP规则，推理

重言蕴含式 当且仅当$P\to Q$是一个重言式时，称P重言蕴含Q，记为$P\Rightarrow Q$。

注意: (1) $\Rightarrow$ 和 $\to$ 含义的本质区别。

(2) 重言蕴含式也称为逻辑蕴含式。

证明$P \Rightarrow Q$的方法：任给赋值v

(1) 假设$v(P)=1$, 推出$v(Q)=1$，或者

(2) 假设$v(Q)=0$, 推出$v(P)=0$。

例：求证：$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

常见的重言蕴含式(P.46)

推理定律——重言蕴涵式

1. $A \Rightarrow (A \lor B)$ 附加律
2. $(A \land B) \Rightarrow A$ 化简律
3. $(A \to B) \land A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A \to B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论
6. $(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ 假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论
8. $(A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$ 构造性二难

   $(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)
9. $(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$ 破坏性二难

每个等值式可产生两个推理定律

如, 由$A \Leftrightarrow \neg\neg A$可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$

有效结论

设A、C是两个命题公式，若A $\Rightarrow$ C，称C是A的有效结论。

推广:若$H_1 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$, 称C是一组前题$H_1, \ldots, H_n$的有效结论。

注：(1) 从理论上说，可利用真值表来判断某公式是否为一组公式的有效结论，但有“组合爆炸”问题。

(2) 利用少量公理、若干推理规则推理出有效结论。

形式系统: 一个**形式系统** I 由下面四个部分组成：

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记 $I=<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$, 其中$<A(I),E(I)>$是 I 的**形式语言系统**, $<A_X(I),R(I)>$ 是 I 的**形式演算系统**.

自然推理系统: 无公理, 即$A_X(I)=\varnothing$

公理推理系统 (Hilbert): 推出的结论是系统中的重言式, 称作**定理**

P规则 在推导过程中,可以随时添加前提。

T规则 在推导过程中,可以引入公式S，它是由其前题的一个或多个公式借助重言、蕴含而得到的。

推理（证明）

从前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$到结论B的推理是一个公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$. 其中$C_i(1\le i\le l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l=B$。

例：（1）$\{P \vee Q，P \rightarrow R，Q\rightarrow S\} \vdash S \vee R$

（2）$\{(W\vee R)\rightarrow V，V\rightarrow(C\vee S), S\rightarrow U, \neg C\wedge\neg U\} \vdash \neg W$

归谬法（反证法）

例：（3）$\{A \to B，\neg(B \vee C)\} \vdash \neg A$

(4) $\{P \vee Q，P \to R，Q \to S\} \vdash S \vee R$

CP规则(演绎定理)

若$\Gamma \cup \{R\} \vdash S$，则 $\Gamma \vdash R \to S$, 其中Γ为命题公式的集合。

例：（5）$\{A \to (B \to C), \neg D \vee A, B\} \vdash D \to C$

命题逻辑总结

1. 命题公式：命题，　联结词($\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$)，合式公式，子公式
2. 公式的真值：赋值，求值函数，真值表，等值式，重言式，矛盾式
3. 范式：析取范式，极小项，主析取范式，合取范式，极大项，主合取范式
4. 联结词的完备集：真值函数，异或，条件否定，与非，或非，联结词完备集
5. 推理理论：重言蕴含式，有效结论，P规则，T规则，CP规则，推理