金融工程

第十一章 布莱克-舒尔斯-默顿期权定价模型

厦门大学财务系
郑振龙 陈蓉

http:// efinance.org.cn
http:// aronge.net

目录

目录

基本思路

1. 股票价格服从的随机过程

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$$

2. 由 Itô-Doeblin 引理可得期权价格相应服从的随机过程

$$df_t = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S_t dz_t$$

3. BSM 微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f_t$$

4. BSM 期权定价公式（以看涨为例）

$$c_t = S_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

目录

标准布朗运动（维纳过程）

- 布朗运动（Brownian Motion）起源于英国植物学家布郎对水杯中的花粉粒子的运动轨迹的描述

- 标准布朗运动的四大特征：
  - 初值为零
  - 连续
  - 独立增量：对于任何两个不同时间间隔 Δt， Δz 的值相互独立
  - 独立同分布：增量均服从均值零、方差等于时间长度的正态分布

标准布朗运动的的性质

- 标准布朗运动的简易表达式：$dz_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$， ε_t 服从标准正态分布
- $Z_T - Z_t = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$
- $Z_T - Z_t$ 也服从正态分布
  - 均值等于 0
  - 方差等于 T – t
  - 标准差等于 $\sqrt{T-t}$
  - 方差可加性

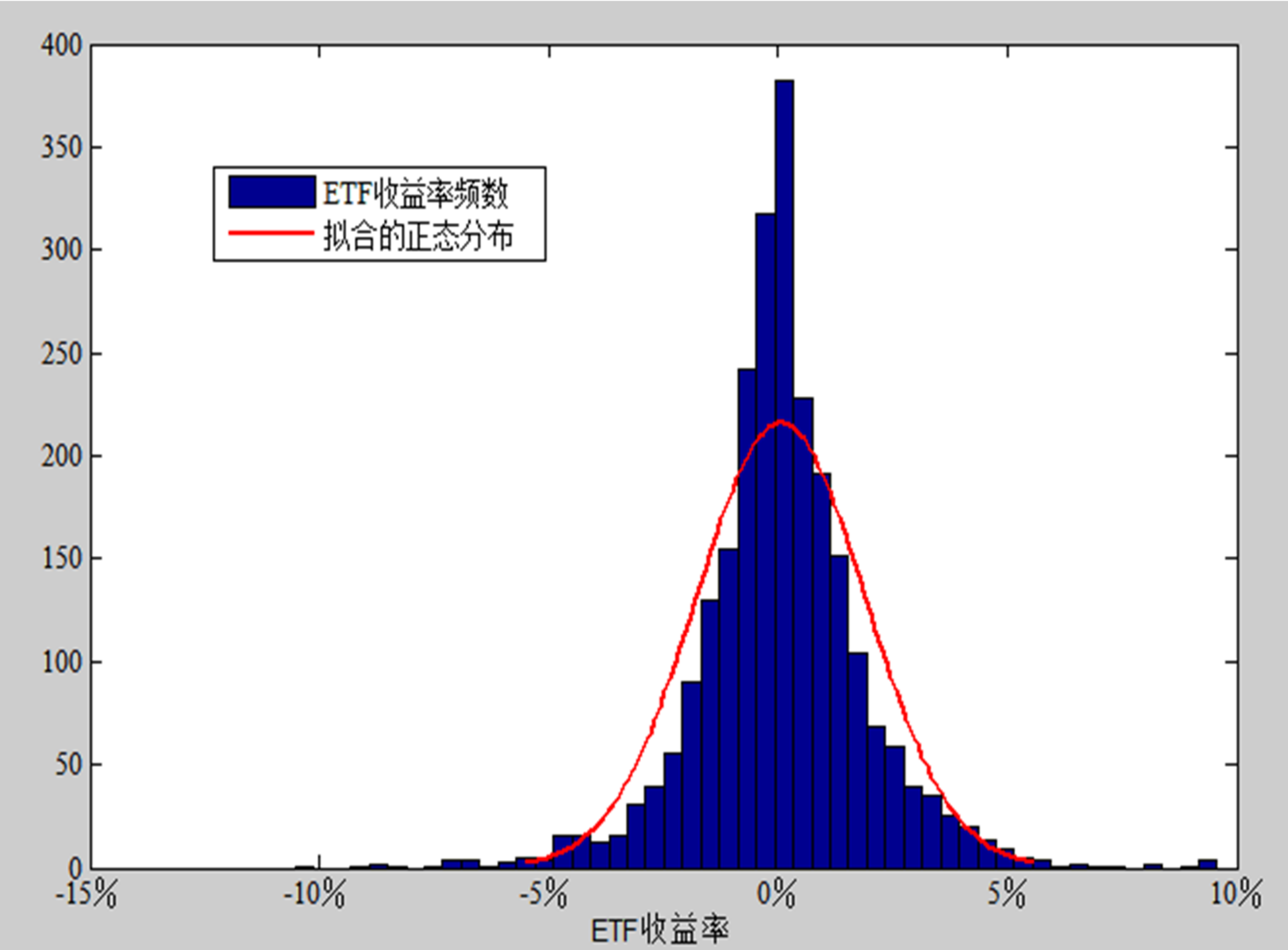
为何使用标准布朗运动？

* 正态分布：经验事实证明，股票价格的连续复利收益率近似地服从正态分布

* 数学上可以证明，维纳过程是一个马尔可夫随机过程，从而与弱式EMH相符。

* 维纳过程在数学上对时间处处不可导和二次变分（Quadratic Variation）不为零的性质，与股票收益率在时间上存在转折尖点等性质也是相符的

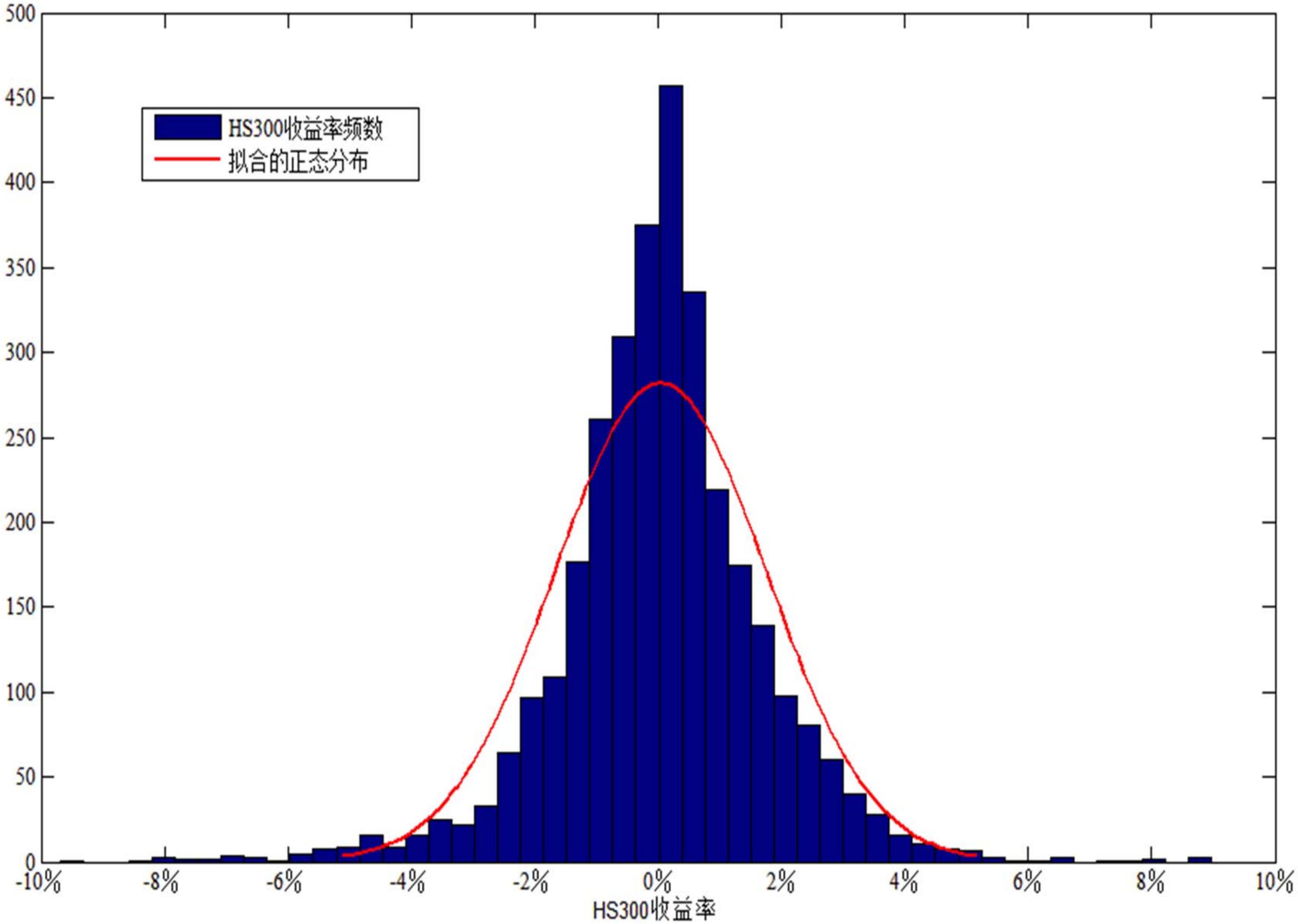
50ETF：20050224－20150525



Series: ETF
Sample 1 2491
Observations 2491

Mean	0.000609
Median	0.000000
Maximum	0.095710
Minimum	-0.105190
Std. Dev.	0.018484
Skewness	-0.015879
Kurtosis	6.800535
Jarque-Bera	1499.278
Probability	0.000000

沪深300：20020107－20150525



Series: HS300
Sample 1 3241
Observations 3241

Mean	0.000418
Median	0.000703
Maximum	0.089748
Minimum	-0.096952
Std. Dev.	0.017138
Skewness	-0.232019
Kurtosis	6.405454
Jarque-Bera	1595.173
Probability	0.000000

市场有效理论与随机过程

1965年，法玛（Fama）提出了著名的效率市场假说。该假说认为，证券价格对新的市场信息的反应是迅速而准确的，证券价格能完全反应全部信息。

有效市场三个层次

1、弱式效率市场假说

2、半强式效率市场假说

3、强式效率市场假说

根据众多学者的实证研究，发达国家的证券市场大体符合弱式效率市场假说。一般认为，弱式效率市场假说与马尔可夫随机过程（Markov Stochastic Process）是内在一致的。因此我们可以用数学来刻画股票的这种特征。

普通布朗运动

* 遵循普通布朗运动的变量 x 是关于时间和 dz 的动态过程，a和b为时间t的确定性函数

$$dx_t = a(t)dt + b(t)dz_t$$

或者

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dz_s$$

* adt 为确定项，漂移率 a 意味着每单位时间内 x 漂移 a ；
* bdz 是随机项，代表着对 x_t 的时间趋势过程所添加的噪音，使变量 x_t 围绕着确定趋势上下随机波动，且这种噪音是由维纳过程的 b 倍给出的，b^2称为方差率，b 称为波动率。

对普通布朗运动的理解

* 普通布朗运动的离差形式为 $\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$
    * Δx 具有正态分布特征，其均值为 $a\Delta t$，标准差为 $b\sqrt{\Delta t}$，方差为 $b^2\Delta$t
    * 在任意时间长度 T 后 x 值的变化也具有正态分布特征，其均值为 aT，标准差为 $b\sqrt{T}$，方差为 b^2T。
* 标准布朗运动为普通布朗运动的特例。

扩散过程（diffusion process）

* 扩散过程

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)dz_t$$

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_s, s)ds + \int_0^t b(x_s, s)dz_s$$

* 其中 $a(x_t, t)$ 和 $b(x_t, t)$ 为 x_t 和 t 的确定性函数

伊藤过程（Itô Process）

* 伊藤过程

$$dx_t = a_t dt + b_t dz_t$$

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dz_s$$

其中，dz 是一个标准布朗运动， a、 b 是满足一定正则性条件的任意函数或随机过程

$$\int_0^t |a_s| ds < \infty, \mathbb{E}\left[\int_0^t b_s^2 ds\right] < \infty$$

几何布朗运动（Geometric Brownian Motion）

- 几何布朗运动

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$$

其中 μ 和 σ 均为常数

- 一般用几何布朗运动描述股票价格的随机过程
  - 可以避免股票价格为负从而与有限责任相矛盾的问题
  - 几何布朗运动意味着股票连续复利收益率服从正态分布，这与实际较为吻合

单变量Itô-Doeblin Lemma

* 若变量 x 遵循伊藤过程,

$$dx_t = a_t dt + b_t dz_t$$

* 则变量 x 和 t 的函数 G 将遵循如下过程：

$$dG_t = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b_t^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b_t dz_t$$

前提条件是上述导数都存在并连续。其中，dz_t是一个标准布朗运动。

证明（1）泰勒展开

* G 的泰勒展开式为：

$$\Delta G_t = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x_t + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x_t^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x_t \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \ldots$$

(2) 忽略比 Δt 高阶的项

* 在常微分中，我们得到

$$\Delta G_t = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x_t + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t$$

* 在随机微分中，我们得到：

$$\Delta G_t = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x_t + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x_t^2$$

其中，最后一项的阶数为 Δt

(3) 将 Δx 代入

- 将 $\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ 代入最后一项，并忽略比 Δt 高阶的项，则

$$\Delta G_t = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x_t + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b_t^2\varepsilon^2\Delta t$$

- 由于 $\varepsilon \sim \varphi(0,1), E(\varepsilon) = 0, E\left(\varepsilon^2\right) - \left[E(\varepsilon)\right]^2 = 1$

$E\left(\varepsilon^2\right) = 1$,因此 $E\left(\varepsilon^2\Delta t\right) = \Delta t$

- 而 $\varepsilon^2\Delta t$ 的方差和 Δt^2 同阶，可以忽略，因此有

$$\Delta G_t = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x_t + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b_t^2\Delta t$$

（4）取极限

* 取极限

$$dG_t = \frac{\partial G}{\partial x} dx_t + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b_t^2 dt$$

* 代入

$$dx_t = a_t dt + b_t dz_t$$

* 可得

$$dG_t = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b_t^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b_t dz_t$$

Itô-Doeblin引理的运用

- 如果我们知道 x_t 遵循的伊藤过程，通过Itô-Doeblin引理可以推导出 $G(x, t)$ 遵循的随机过程

- 由于衍生产品价格是标的资产价格和时间的函数，因此Itô-Doeblin引理在衍生产品分析中扮演重要角色

应用1：衍生品价格所服从的随机过程

* 当股票价格服从几何布朗运动

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$$

* 根据Itô-Doeblin引理

$$dG_t = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S_t dz_t$$

* 衍生证券价格 G 和股票价格 S 都受同一个不确定性来源 dz 的影响

应用2 ： F 所遵循的随机过程

* 假设变量 S 服从几何布朗运动，r为常数

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$$

* 由于 $F_t = S_t e^{r(T-t)}$，则

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \frac{\partial F}{\partial t} = -rF_t$$

* 运用Itô-Doeblin引理可得

$$dF_t = (\mu - r) F_t dt + \sigma F_t dz_t$$

r为常数时，远期（期货）价格的漂移率比标的资产小 r。

应用3 ：ln S_t 所遵循的随机过程

* 假设变量 S_t 服从几何布朗运动 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$
* 令 $G_t = \ln S_t$ ， 则

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}, \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

* 运用伊藤引理可得 $G_t = \ln S_t$ 所遵循的随机过程为

$$dG_t = d\ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz_t$$

* 说明连续复利收益率 $d\ln S_t$ 服从期望值 $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt$ 方差为 $\sigma^2 dt$ 的正态分布

注意： $d\ln S_t \neq \frac{dS_t}{S_t}$

为何采用几何布朗运动？

（1）股票连续复利收益率服从正态分布。

* T – t 期间的连续复利收益率可以表示为（注意未年化）

$$\eta_t = \ln S_T - \ln S_t$$

* 该随机变量 η_t 服从正态分布

$$\eta_t \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

* **σ 是股票连续复利收益率的年化标准差，也被称为股票价格对数的波动率（Volatility）**

* 股票价格的对数服从普通布朗运动，特定时刻的股票价格服从对数正态分布。

$$\ln S_T - \ln S_t \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

$$E(S_T) = S_t e^{\mu(T-t)}$$

$$Var(S_T) = S_t^2 e^{2\mu(T-t)}\left[e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right]$$

* μ 是 Δt 时间内股票价格百分比的年化预期收益率。

（2）在几何布朗运动下St是非负的，符合有限责任原则

举例：几何布朗运动下股票价格的概率分布

* 设 A 股票的当前价格为 50 元，预期收益率为每年18%，波动率为每年 20%，假设该股票价格遵循几何布朗运动且该股票在 6 个月内不付红利。

* 请问该股票 6 个月后的价格S_T的概率分布如何？A 股票在 6 个月后股票价格的期望值和标准差分别是多少？

* $S_t = 50, \mu = 0.18, \sigma = 0.2, T - t = 0.5$ 年
* 因此6个月后S_T的概率分布为

$$\ln S_T \sim \Phi\left[\ln 50 + \left(0.18 - \frac{0.04}{2}\right) \times 0.5, 0.2 \times \sqrt{0.5}\right]$$

* 即

$$\ln S_T \sim \Phi(3.992, 0.141)$$

- 由于一个正态分布变量取值位于均值左右1.96个标准差范围内的概率为 95%，因此，置信度为 95% 时，

$$3.72 < \ln S_T < 4.27$$

$$41.09 < S_T < 71.41$$

- 因此，6 个月 A 股票价格落在 41.09 元到 71.41 元之间的概率为 95%。

* 半年后，A 股票价格的期望值为 54.71 元，标准差为$\sqrt{60.46}$ 或 7.78 。

$$E\left(S_T\right) = 50e^{0.18\times 0.5} = 54.71$$

$$Var\left(S_T\right) = 2500e^{2\times 0.18\times 0.5}\times\left(e^{0.04\times 0.5} - 1\right) = 60.46$$

百分比收益率与对数收益率

- 短时间内

$$\frac{\delta S_t}{S_t} = \mu\delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\delta t}$$

- 几何布朗运动只意味着短时间内的股票价格百分比收益率服从正态分布，长期间内股价百分比收益率正态分布的性质不再存在，但连续复利收益率始终服从正态分布。

1900－2000主要国家股指实际收益率

Series	Arith Mean	Std Dev	Geom Mean
Australia	9.0	17.7	7.5
Belgium	4.8	22.8	2.5
Canada	7.7	16.8	6.4
Denmark	6.2	20.1	4.6
France	6.3	23.1	3.8
Germany	8.8	32.3	3.6
Ireland	7.0	22.2	4.8
Italy	6.8	29.4	2.7
Japan	9.3	30.3	4.5
Netherlands	7.7	21.0	5.8
South Africa	9.1	22.8	6.8
Spain	5.8	22.0	3.6
Sweden	9.9	22.8	7.6
Switzerland*	6.9	20.4	5.0
UK	7.6	20.0	5.8
USA	8.7	20.2	6.7

预期收益率 μ

- μ为 Δt 时间内股票的年化百分比期望收益率，股票的期望连续复利收益率$\mu-\frac{1}{2}\sigma^2$。

- 根据CAPM，现实测度下的μ取决于该证券的系统性风险、无风险利率水平、以及市场的风险收益偏好。由于后者涉及主观因素，因此其决定本身就非常复杂。

- 幸运的是，在无套利条件下，衍生证券的定价与标的资产的预期收益率是无关的。

波动率 σ

$$\eta \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

- 证券价格对数的年波动率，是股票价格对数收益率的年化标准差（所有参数都是年化的）

- 历史标准差波动率：从历史的证券价格数据中计算出样本对数收益率的标准差，再对时间标准化，得到年标准差，即为波动率的一种常见估计值。

- 在计算中，一般情况下时间距离计算时越近越好；但时间窗口也不宜太短；一般采用交易天数计算波动率而不采用日历天数。

目录

假设

* 不存在无风险套利机会
* 允许卖空标的证券
* 没有交易费用和税收
* 证券交易是连续的，价格变动也是连续的
* 所有证券都完全可分
* 证券价格遵循几何布朗运动，即 μ 和 σ 为常数
* 衍生证券有效期内，无风险利率 r 为常数
* 衍生证券有效期内标的证券没有现金收益支付

BSM 偏微分方程的推导

- 由于假设股票价格 S 遵循几何布朗运动，因此

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t$$

在一个小的时间间隔 Δt 中， S 的变化值 ΔS_t 为

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta z_t$$

* 设 f 是依赖于 S 的衍生证券的价格，则 f 一定是 S 和t 的函数，根据伊藤引理可得：

$$df_t = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S_t dz_t$$

在一个小的时间间隔 Δt 中， f 的变化值 Δf 满足：

$$\Delta f_t = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S_t \Delta z_t$$

- 为了消除风险源 Δz_t，可以构建一个包括一单位衍生证券空头和 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 单位标的证券多头的组合。
- 令 Π 代表该投资组合的价值，则：

$$\Pi_t = -f_t + \frac{\partial f}{\partial S} S_t$$

在 Δt 时间后，该投资组合的价值变化 $\Delta \Pi_t$ 为

$$\Delta \Pi_t = -\Delta f_t + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S_t$$

* 代入 Δf 和 ΔS 可得

$$\Delta\Pi_t = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2\right)\Delta t$$

* 由于消除了风险，组合 Π 必须获得无风险收益，即

$$\Delta\Pi_t = r\Pi_t \Delta t$$

* 因此

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S_t^2\right)\Delta t = r\left(f_t-\frac{\partial f}{\partial S}S_t\right)\Delta t$$

化简可得：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS_t\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf_t$$

* 这就是著名的BSM偏微分分程，它适用于其价格取决于标的证券价格S的所有衍生证券的定价。

风险中性定价原理

* 观察BSM偏微分方程可以发现，受制于主观的风险收益偏好的标的证券预期收益率并未包括在衍生证券的价值决定公式中。这意味着，无论风险收益偏好状态如何，都不会对f的值产生影响。

* 因此我们可以作出一个可以大大简化我们工作的假设：在对衍生证券定价时，所有投资者都是风险中性的。

风险中性世界

- 投资者只关心资产的预期回报（Expected Payoff），而不关心该回报的风险。这样预期回报相等的资产，其目前的价格都相等。
- 对于到期回报为1的贴现式债券而言

$$P(t,T)=e^{-r(T-t)}$$

- 则对于到期预期回报为$E(S_T)$的资产而言，其价格为

$$S_t=e^{-r(T-t)}\,E(S_T)$$

* 在所有投资者都是风险中性的条件下（有时我们称之为进入了一个“风险中性世界”）：
  * 所有可交易资产的百分比预期收益率都等于无风险利率 r，因为风险中性的投资者并不需要额外的收益来吸引他们承担风险。
  * 未来现金流的期望值都应该使用无风险利率进行贴现。
* 这就是风险中性定价原理。

风险中性世界中可交易资产的随机过程

* 如果某种可交易资产的价格在现实世界中的随机过程为

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz_t$$

* 则在风险中性世界中其遵循：

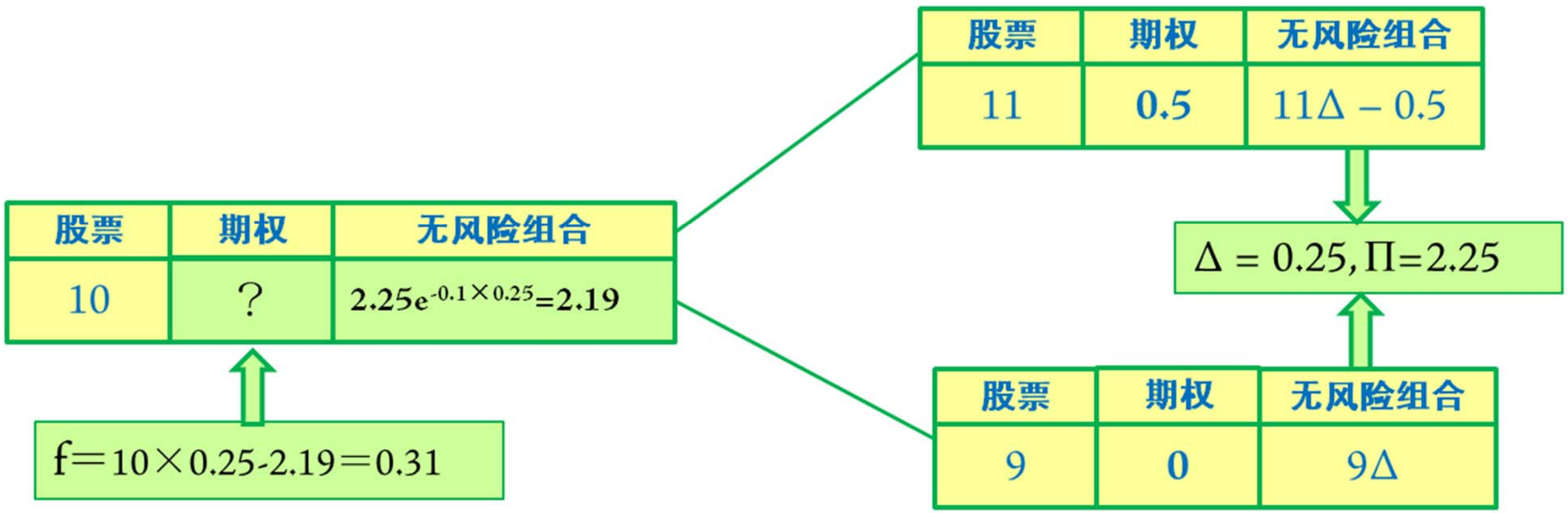
$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dz_t$$

* 根据伊藤引理，其远期合约的价值在风险中性世界中遵循

$$df_t = rf_t dt + \sigma S_t dz_t$$

例子：理解风险中性定价

- 股票无红利，3个月期行权价10.5的欧式看涨期权
- 无风险利率10%
- 构建一个由 1 单位看涨期权空头和 Δ 单位的标的股票多头组成的组合



理解风险中性定价

* 可以看出，在确定期权价值时，我们并不需要知道股票价格在真实世界中上涨到 11 元的概率和下降到 9 元的概率。也就是说，我们并不需要了解真实世界中股票未来价格的期望值，而期望值的确定正与投资者的主观风险偏好相联系。
* 因此我们可以在假设风险中性的前提下为期权定价。

* 投资者厌恶风险程度、股票的预期收益率和股票升跌概率之间的联系：
  * 在风险中性世界中，无风险利率为 10%，则股票上升的概率 P 为：

$$10 = e^{-0.1\times 0.25} \times \left[11P + 9\left(1 - P\right)\right] \Rightarrow P = 62.66\%$$

  * 如果在现实世界中股票的预期收益率为 15%，则股票的上升概率为：

$$10 = e^{-0.15\times 0.25} \times \left[11P + 9\left(1 - P\right)\right] \Rightarrow P = 69.11\%$$

无收益资产欧式看涨期权定价公式

- 在风险中性世界中，无收益资产欧式看涨期权到期时(T 时刻)的期望值为：

$$\hat{E}_t\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

其中，$\hat{E}_t$ 表示风险中性条件下的条件期望值。

- 相应地欧式看涨期权的价格 c 等于

$$c_t = e^{-r(T-t)}\hat{E}_t\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

* 由于在风险中性世界中

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

* 积分可得

$$c_t = S_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

BSM 期权定价公式的推导

- 由于

$$c_t = e^{-r(T-t)}\hat{E}_t\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

和

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

- 令

$$W_T = \frac{\ln S_T - m}{s}$$

* 其中

$$m=\hat{E}\left(\ln S_T\right)=\ln S_t+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T-t\right)$$

$$s=\sqrt{Var\left(\ln S_T\right)}=\sigma\sqrt{T-t}$$

* 显然 $W_T \sim N\left(0,1\right)$

* 即随机变量 W_T 的密度函数 $h(W_T)$ 为

$$h\left(W_T\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{W_T^2}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{E}_t\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(S_T - X\right) f\left(S_T\right) dS_T = \int_X^{\infty} S_T f\left(S_T\right) dS_T - \int_X^{\infty} X f\left(S_T\right) dS_T \\
&= \int_{\ln X}^{\infty} e^{\ln S_T} g\left(\ln S_T\right) d\left(\ln S_T\right) - \int_{\ln X}^{\infty} X g\left(\ln S_T\right) d\left(\ln S_T\right) = \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} e^{sW+m} h\left(W_T\right) dW_T - \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} X h\left(W_T\right) dW_T \\
&= \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} e^{sW+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}} dW_T - \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} X h\left(W_T\right) d\left(W_T\right) = \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} e^{\frac{s^2}{2}+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(W-s)^2}{2}} dW_T - XN\left(\frac{m - \ln X}{s}\right) * \\
&= \int_{\frac{\ln X - m}{s}-s}^{\infty} e^{\frac{s^2}{2}+m} h\left(W_T\right) dW_T - XN\left(\frac{\ln \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&= \hat{E}_t\left(S_T\right) N\left(\frac{\ln \frac{S_t}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - XN\left(\frac{\ln \frac{S_t}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)
\end{aligned}
$$

理解BSM定价公式I

- 我们可以用股票和负债复制期权。
  - 可以证明，

$$N(d_1) = \frac{\partial f}{\partial S}$$

是构造无风险组合Π 时的 Δ， 是复制投资组合中股票的数量，$S_tN(d_1)$就是股票的市值

  - 而$Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$ 则是复制交易策略中负债的价值。

- 由于主要参数都是时变的，因此这种复制策略是动态复制策略，必须不断调整相关头寸数量。

理解 II

* 从金融工程的角度来看，欧式看涨期权可以分拆成或有资产看涨期权（Asset-or-nothing Call Option）多头和 X 份或有现金看涨期权（Cash-or-nothing Call Option）空头之和

理解 III

* $N(d_2)$ 是在风险中性测度下$S_T > X$ 的概率，即欧式看涨期权被执行的概率，因此$Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$可以看成预期执行期权所需支付的现值。

* 而

$$e^{r(T-t)}S_tN(d_1) = \hat{E}_t(S_T)N(d_1)$$

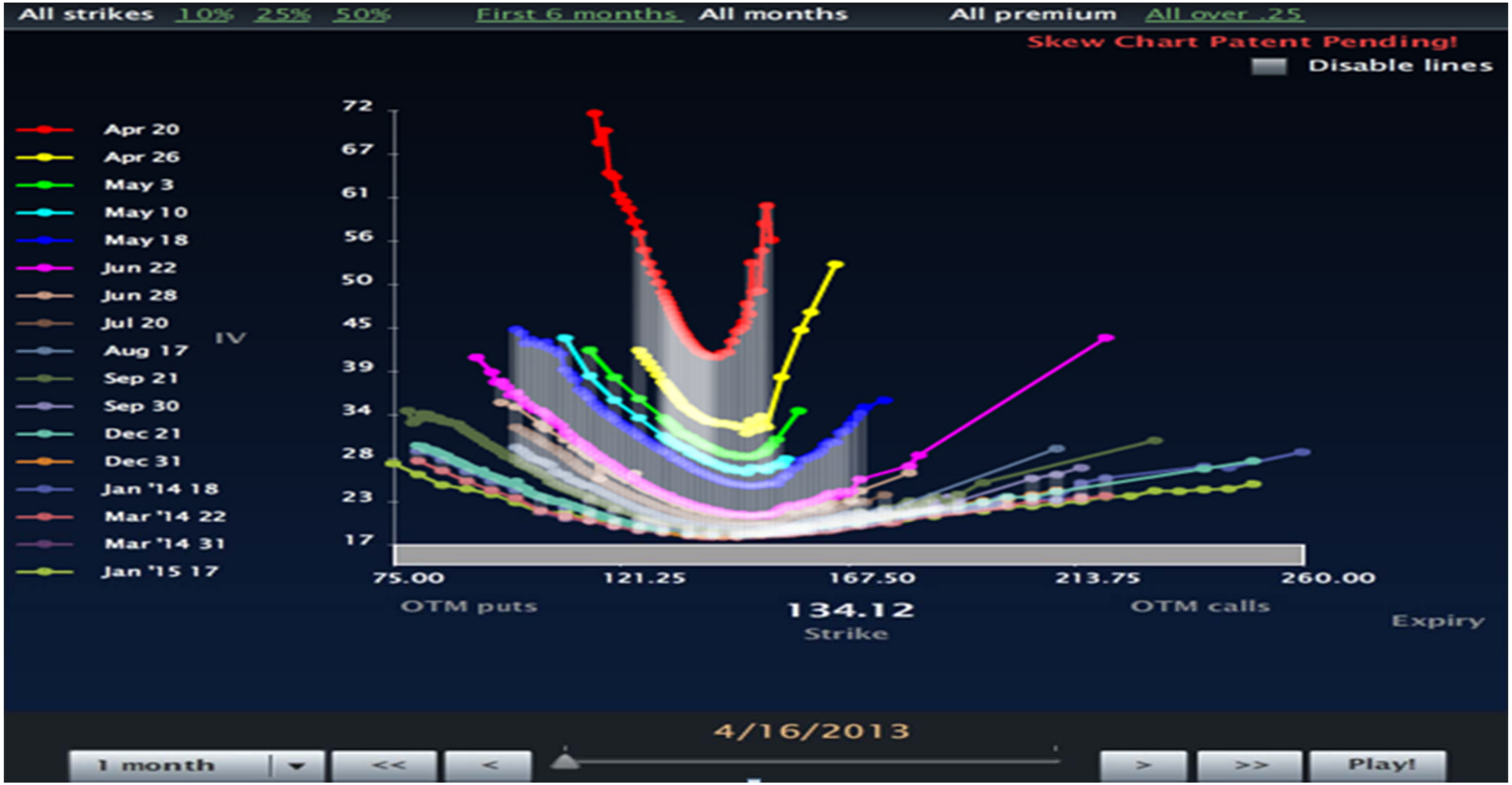
则是在风险中性测度下，一个如果$S_T > X$ 就等于S_T 否则就等于 0 的一个变量的期望值，$S_tN(d_1)$则是这个值的贴现值，可以看成期权持有者预期执行期权所得收入的现值。$N(d_1)$是在以股票作为记账单位的风险中性世界里S_T大于X的概率。

* 因此整个看涨期权定价公式就是在风险中性测度下期权未来期望回报的现值。

理解IV

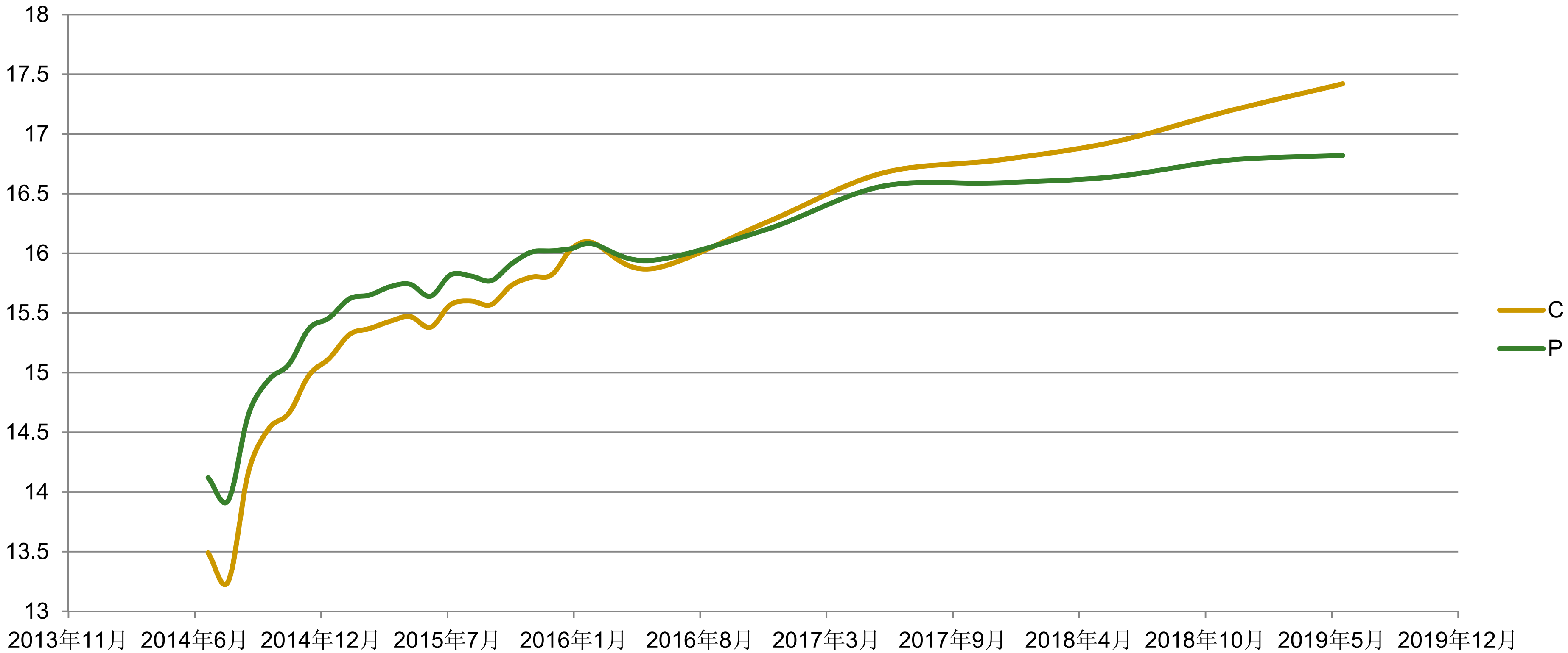
* 给定期权的市场价格，我们可利用BSM公式倒推期权隐含波动率
  * 波动率微笑
  * 波动率期限结构
  * 波动率曲面

波动率微笑

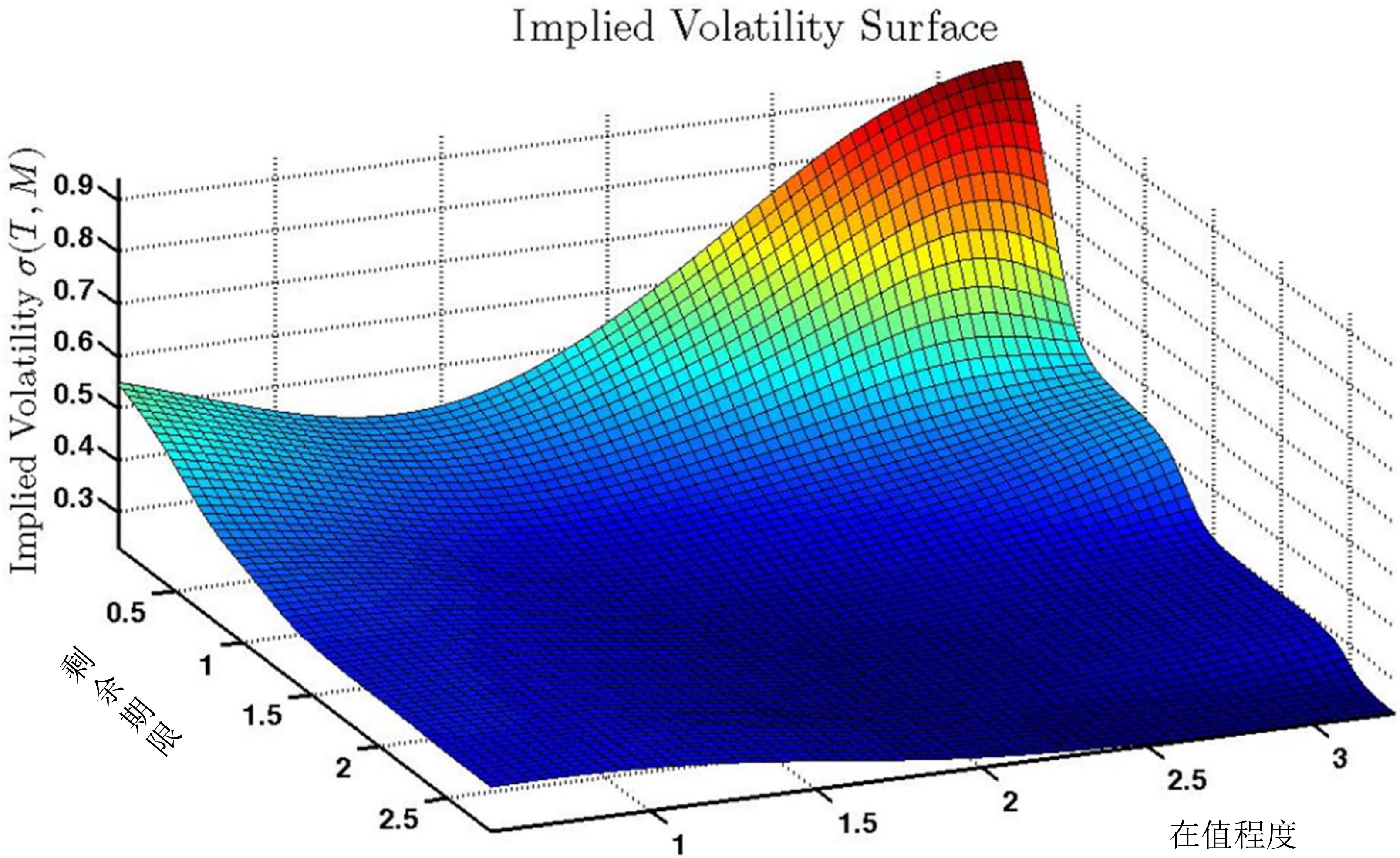

All strikes 10% 25% 50% First 6 months All months All premium All over .25
Skew Chart Patent Pending!
Disable lines
Apr 20
Apr 26
May 3
May 10
May 18
Jun 22
Jun 28
Jul 20
Aug 17
Sep 21
Sep 30
Dec 21
Dec 31
Jan '14 18
Mar '14 22
Mar '14 31
Jan '15 17
IV
72
67
61
56
50
45
39
34
28
23
17
75.00
121.25
167.50
213.75
260.00
OTM puts
134.12
Strike
OTM calls
Expiry
4/16/2013
1 month
<<
<
>
>>
Play!

波动率期限结构

* 隐含波动率与期限的关系
* 黄金期货期权波动率期限结构（2014.6.3）



隐含波动率曲面


Implied Volatility Surface
Implied Volatility $\sigma(T, M)$
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.5
1
1.5
2
2.5
剩余期限
1
1.5
2
2.5
3
在值程度

欧式平价看涨期权的定价公式

* 欧式平价看涨期权

$$\frac{c}{S} = N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) = 2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1$$

$$\approx 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} - \frac{\left(\sigma\sqrt{T-t}/2\right)^3}{6} + \frac{\left(\sigma\sqrt{T-t}/2\right)^5}{40} - \cdots + \cdots\right)\right] - 1$$

$$\approx \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4\sigma\sqrt{T-t}$$

平价期权 c/S与波动率与期限的关系

期限(年) / 波动率	0.1	0.2	0.4	0.5	0.9	1	2	4	9	16
1%	0.0013	0.0018	0.0025	0.0028	0.0038	0.0040	0.0056	0.0080	0.0120	0.0160
2%	0.0025	0.0036	0.0050	0.0056	0.0076	0.0080	0.0113	0.0160	0.0239	0.0319
5%	0.0063	0.0089	0.0126	0.0141	0.0189	0.0199	0.0282	0.0399	0.0598	0.0797
10%	0.0126	0.0178	0.0252	0.0282	0.0378	0.0399	0.0564	0.0797	0.1192	0.1585
20%	0.0252	0.0357	0.0504	0.0564	0.0756	0.0797	0.1125	0.1585	0.2358	0.3108
30%	0.0378	0.0535	0.0756	0.0845	0.1132	0.1192	0.1680	0.2358	0.3473	0.4515
50%	0.0630	0.0890	0.1256	0.1403	0.1875	0.1974	0.2763	0.3829	0.5467	0.6827
70%	0.0881	0.1244	0.1752	0.1955	0.2601	0.2737	0.3794	0.5161	0.7063	0.8385
80%	0.1007	0.1420	0.1997	0.2227	0.2957	0.3108	0.4284	0.5763	0.7699	0.8904
100%	0.1256	0.1769	0.2482	0.2763	0.3647	0.3829	0.5205	0.6827	0.8664	0.9545

无收益资产欧式看跌期权定价公式

- 根据 PCP 可得

$$p_t = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

- 对于平价期权，c=p

无收益资产美式看涨期权定价公式

- 在标的资产无收益情况下， C = c， 因此无收益资产美式看涨期权的定价公式同样是：

$$C_t = S_t N(d_1) - Xe^{-r(T-t)} N(d_2)$$

有收益资产的欧式期权定价公式

- 在收益已知的情况下，我们可以把标的证券的价格分解成两部分：期权有效期内已知收益的现值部分和一个有风险部分。在期权到期之前，收益现值部分将由于标的资产支付收益而消失。
- 因此，只要从标的证券当前的价格S中消去收益现值部分，将剩下有风险部分的证券价格作为真正影响期权价值的标的资产价格，用σ表示证券价格中风险部分的波动率，就可直接套用公式分别计算出有收益资产的欧式看涨期权和看跌期权的价值。

* 当标的证券已知收益的现值为 I 时，用 $(S_t - I)$ 代替 S_t

* 当标的证券的收益为按连续复利计算的固定收益率 q（单位为年）时，用 $S_t e^{-q(T-t)}$ 代替 S_t

- 一般来说，期货期权、股指期权和外汇期权都可以看作标的资产支付连续复利收益率的期权。
  - 欧式期货期权可以看作一个支付连续红利率为 r 的资产的欧式期权
  - 股指期权则是以市场平均股利支付率为收益率
  - 外汇期权标的资产的连续红利率为该外汇在所在国的无风险利率

有收益资产的美式看涨期权的定价

- 先确定提前执行美式看涨期权是否合理
  - 若不合理，则按欧式期权方法定价
  - 若在t_n提前执行可能是合理的，则要分别计算在T时刻和t_n时刻到期的欧式看涨期权的价格，然后将二者之中的较大者作为美式期权的价格。在大多数情况下，这种近似效果都不错。
  - 案例 11.6

美式看跌期权的定价

* 美式看跌期权无论标的资产有无收益都有提前执行的可能，而且与其对应的看涨期权也不存在精确的平价关系，因此一般通过数值方法来求美式看跌期权的价值。

BSM 期权定价公式的参数估计

* BSM 期权定价公式中的期权价格取决于下列五个参数：标的资产市场价格、执行价格、到期期限、无风险利率和标的资产价格波动率

* 在这些参数当中，前三个都是很容易获得的确定数值。但是无风险利率和标的资产价格波动率则需要进行估计。

* 到期期限、无风险利率和波动率的时间单位必须相同（通常为年）。

估计无风险利率

- 使用连续复利的即期利率
- 美国：国债利率；中国：银行存款利率/国债市场即期利率
- 选择距离期权到期日最近的利率

估计标的资产价格的波动率 I

* 历史波动率
  * 样本对数收益率标准差（案例 11.7）
  * 广义自回归条件异方差模型（Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH）和随机波动率模型
* 隐含波动率

目录

BSM 期权定价模型的基本思路

股票价格的变化过程

BSM 期权定价公式

BSM 期权定价公式的精确度评价与拓展

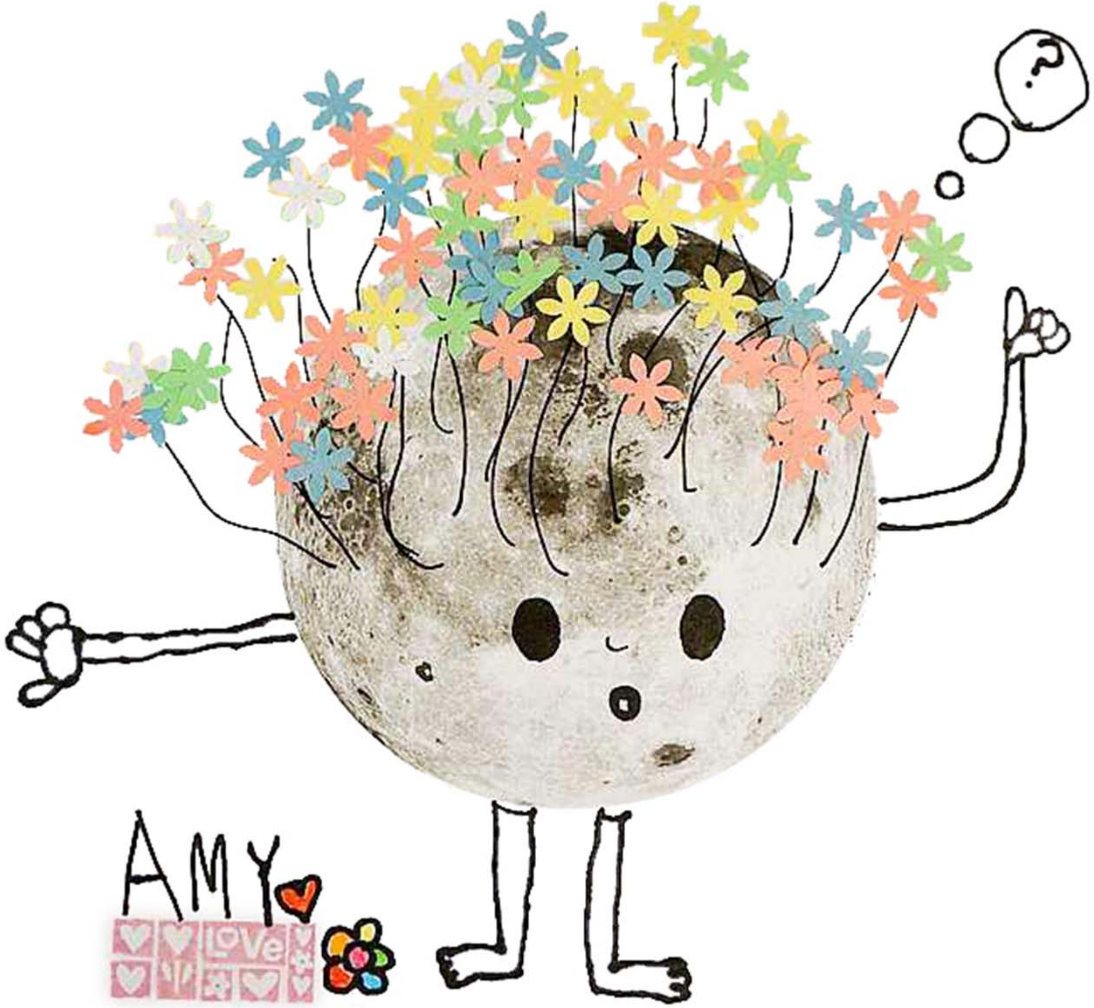
BSM 期权定价公式的精确度评价

- BSM 期权定价公式在定价方面存在一定偏差，但它依然是迄今为止解释期权价格动态的最佳模型之一，应用广泛，影响深远。
- BSM 期权定价与市场价格存在差异的主要原因：
  - 期权市场价格偏离均衡；
  - 使用错误的参数；
  - BSM 期权定价公式建立在众多假定的基础上。

BSM 期权定价公式的缺陷与拓展

* 无交易成本假设的放松
* 常数波动率假设的放松
* 参数假设的放松
* 资产价格连续变动假设的放松

Any Questions ?



謝謝

Email: zlzheng@xmu.edu.cn
aronge@xmu.edu.cn