代数结构

Algebra Structures

6、格与布尔代数

概念：

格，对偶原理，子格，分配格，有界格，有补格

布尔代数，有限布尔代数的表示定理

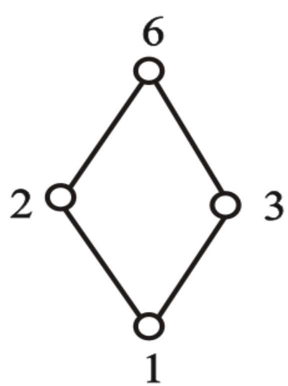
格（Lattice）

设$<S, \preccurlyeq>$是偏序集，如果$\forall x,y\in S$，$\{x,y\}$都有最小上界和最大下界，则称S关于偏序$\preccurlyeq$作成一个格。

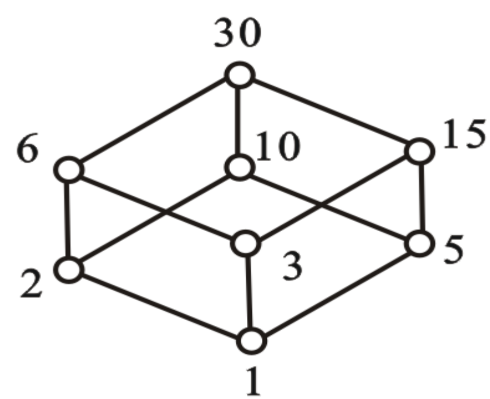
注：求$\{x,y\}$ 最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算$\vee$和$\wedge$.

例：设n是正整数，S_n是n的正因子的集合. D为整除关系，则偏序集$<S_n,D>$构成格. $\forall x,y\in S_n$，$x\vee y$是lcm(x,y)，即x与y的最小公倍数. $x\wedge y$是gcd(x,y)，即x与y的最大公约数.

(S_8,D)



(S_6,D)



(S_{30},D)

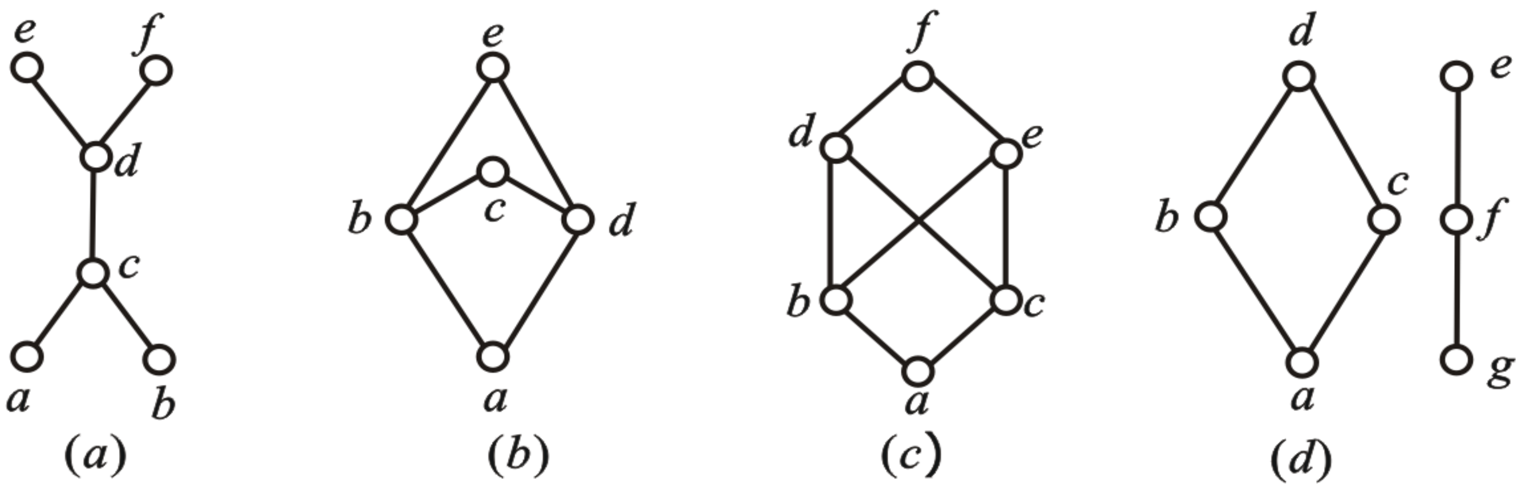
实例

判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) $<P(B),\subseteq>$，其中$P(B)$是集合B的幂集.

(2) $<\mathrm{Z}, \leq>$，其中Z是整数集，≤为小于或等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



(1) 幂集格. $\forall x,y\in P(B)$，$x\vee y$就是$x\cup y$，$x\wedge y$就是$x\cap y$.

(2) 是格. $\forall x,y\in Z$，$x\vee y = \max(x,y)$，$x\wedge y = \min(x,y)$，

(3) 都不是格. 可以找到两个结点缺少最大下界或最小上界

设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题.

令 f^*是将 f 中的$\preccurlyeq$替换成$\succcurlyeq$,$\succcurlyeq$替换成$\preccurlyeq$,$\vee$替换成$\wedge$,$\wedge$替换成$\vee$所得到的命题. 称 f^* 为 f 的对偶命题.

例：在格中令 f 是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$, f^*是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$.

格的对偶原理

设 f 是含有格中元素以及符号$=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$和$\wedge$等的命题. 若 f 对一切格为真, 则 f 的对偶命题 f^*也对一切格为真.

格的性质

设$<L, \preccurlyeq>$是格, 则运算$\vee$和$\wedge$适合交换律、结合律、幂等律和吸收律, 即

(1) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee b = b \vee a,\ \ a \wedge b = b \wedge a$$

(2) $\forall a,b,c \in L$ 有

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ \ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

(3) $\forall a \in L$ 有

$$a \vee a = a,\ \ a \wedge a = a$$

(4) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee (a \wedge b) = a,\ \ a \wedge (a \vee b) = a$$

格的性质：序与运算

设L是格, 则$\forall a,b\in L$有

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a\wedge b = a \Leftrightarrow a\vee b = b$$

证 (1) 先证 $a \preccurlyeq b \Rightarrow a\wedge b = a$

由 $a \preccurlyeq a$ 和 $a \preccurlyeq b$ 可知 a 是$\{a,b\}$的下界, 故 $a \preccurlyeq a\wedge b$.

显然有$a\wedge b \preccurlyeq a$. 由反对称性得 $a\wedge b = a$.

(2) 再证 $a\wedge b = a \Rightarrow a\vee b = b$

根据吸收律有 $b = b\vee(b\wedge a)$

由 $a\wedge b = a$ 和上面的等式得 $b = b\vee a$, 即 $a\vee b = b$.

(3) 最后证 $a\vee b = b \Rightarrow a\preccurlyeq b$

由 $a \preccurlyeq a\vee b$ 得 $a \preccurlyeq a\vee b = b$

格的性质：保序

设L是格, $\forall a,b,c,d \in L$，若$a \preccurlyeq b$ 且 $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d, \quad a \vee c \preccurlyeq b \vee d$$

证 $\quad a \wedge c \preccurlyeq a \preccurlyeq b, \ a \wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq d$

因此 $a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$. 同理可证 $a \vee c \preccurlyeq b \vee d$

格的代数系统定义

设<S, $*$, $\circ$ >是代数系统, $*$和$\circ$是二元运算, 如果$*$和$\circ$满足交换律、结合律和吸收律, 则<S, $*$,$\circ$>构成格.

注：S中的偏序关系 ≼定义为： 对$\forall a,b \in S$ 有

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \circ b = b .$$

子格（Sub-lattice）

设$<L,\wedge,\vee>$是格, S是L的非空子集, 若S关于L中的运算$\wedge$和$\vee$仍构成格, 则称S是L的子格.

例：设格L如图所示. 令

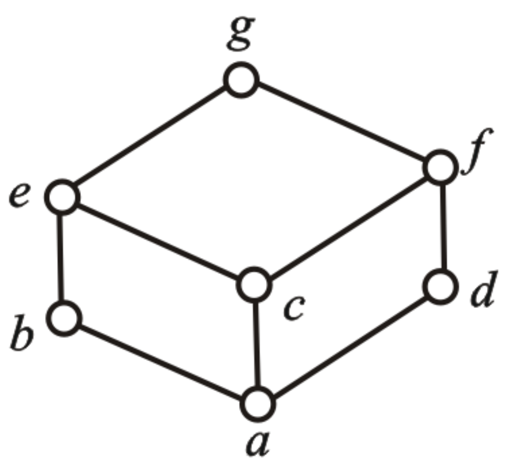
$S_1=\{a, e, f, g\}$,

$S_2=\{a, b, e, g\}$

S_1不是L的子格, 因为$e, f\in S_1$但

$$e\wedge f = c\notin S_1.$$

S_2是L的子格.



注： 对于格$<L, \preccurlyeq>$, S是L的非空子集, $<S, \preccurlyeq>$必定是偏序集，但未必是格；而且即使$<S, \preccurlyeq>$是格，也未必是$<L, \preccurlyeq>$的子格。

分配格（Distributive lattice）

设$<L,\wedge,\vee>$是格, 若$\forall a,b,c\in L$,有

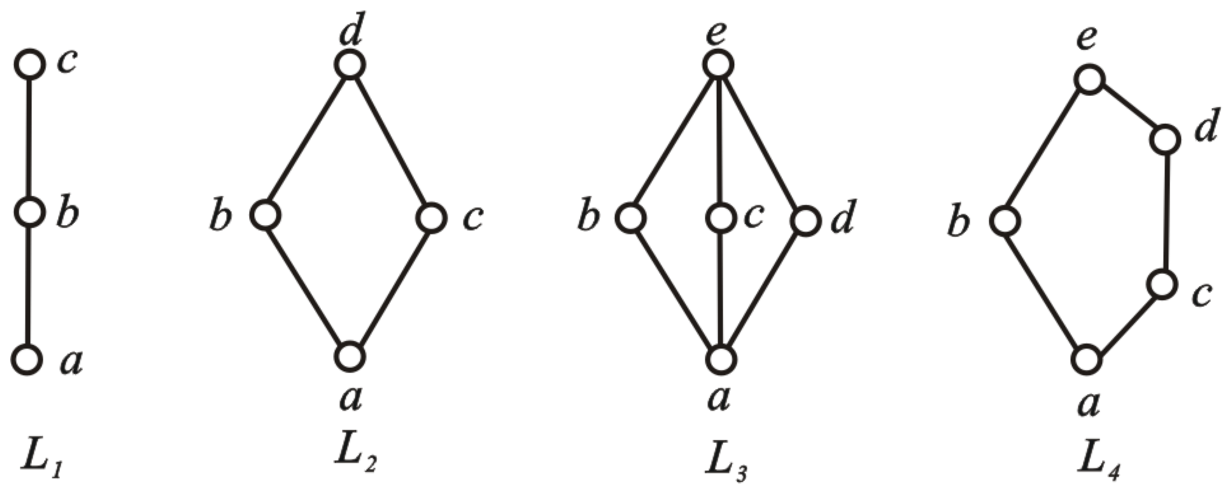
$$a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称L为分配格.

- 注意：可以证明以上两个条件是等价的。

例



L_1 和 L_2 是分配格, L_3 和 L_4不是分配格.
称 L_3为钻石格, L_4为五角格.

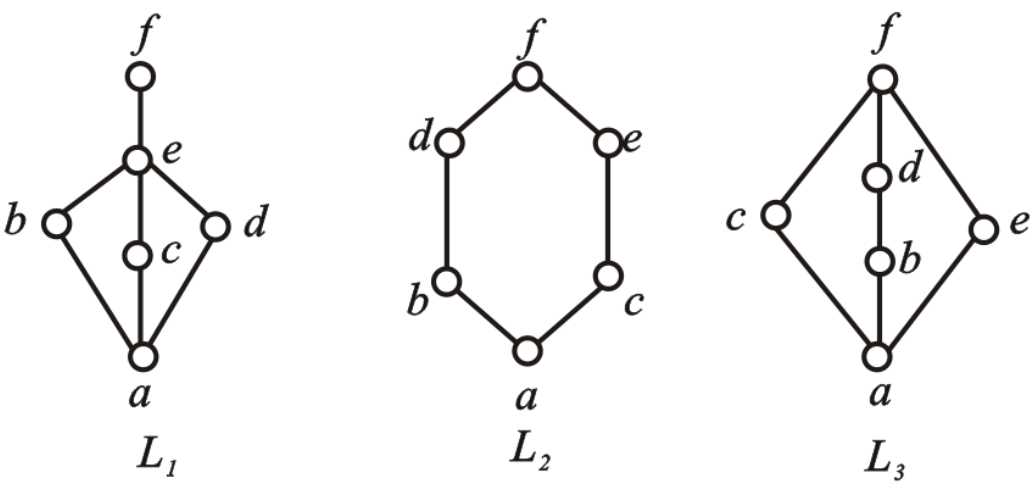
分配格的判别

定理：设L是格, 则L是分配格当且仅当L不含有与钻石格或五角格同构的子格.

推论 (1) 小于五元的格都是分配格.

(2) 任何一条链都是分配格.

例：说明图中的格是否为分配格, 为什么？



解 都不是分配格.

$\{a,b,c,d,e\}$是L_1的子格, 同构于钻石格

$\{a,b,c,e,f\}$是L_2的子格, 同构于五角格;

$\{a,c,b,e,f\}$ 是L_3的子格同构于钻石格.

设L是格,

(1) 若存在$a \in L$使得$\forall x \in L$有 $a \preccurlyeq x$, 则称a为L的全下界;

(2) 若存在$b \in L$使得$\forall x \in L$有 $x \preccurlyeq b$, 则称b为L的全上界 。

说明:

- 格L若存在全下界或全上界, 一定是惟一的.
- 一般将格L的全下界记为0, 全上界记为1.

有界格（Bounded lattice）

设L是格，若L存在全下界和全上界, 则称L 为有界格，一般将有界格L记为$<L,\wedge,\vee,0,1>$.

有界格的性质

定理： 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格, 则$\forall a\in L$有

$$a\wedge 0 = 0,\ \ a\vee 0 = a,\ \ a\wedge 1 = a,\ \ a\vee 1 = 1$$

注意:

- 有限格$L=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$是有界格, $a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n$是$L$的全下界, $a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n$是$L$的全上界.
- 0是关于$\wedge$运算的零元,$\vee$运算的单位元；1是关于$\vee$运算的零元,$\wedge$运算的单位元.
- 对于涉及到有界格的命题, 如果其中含有全下界0或全上界1, 在求该命题的对偶命题时, 必须将0替换成1, 而将1替换成0.

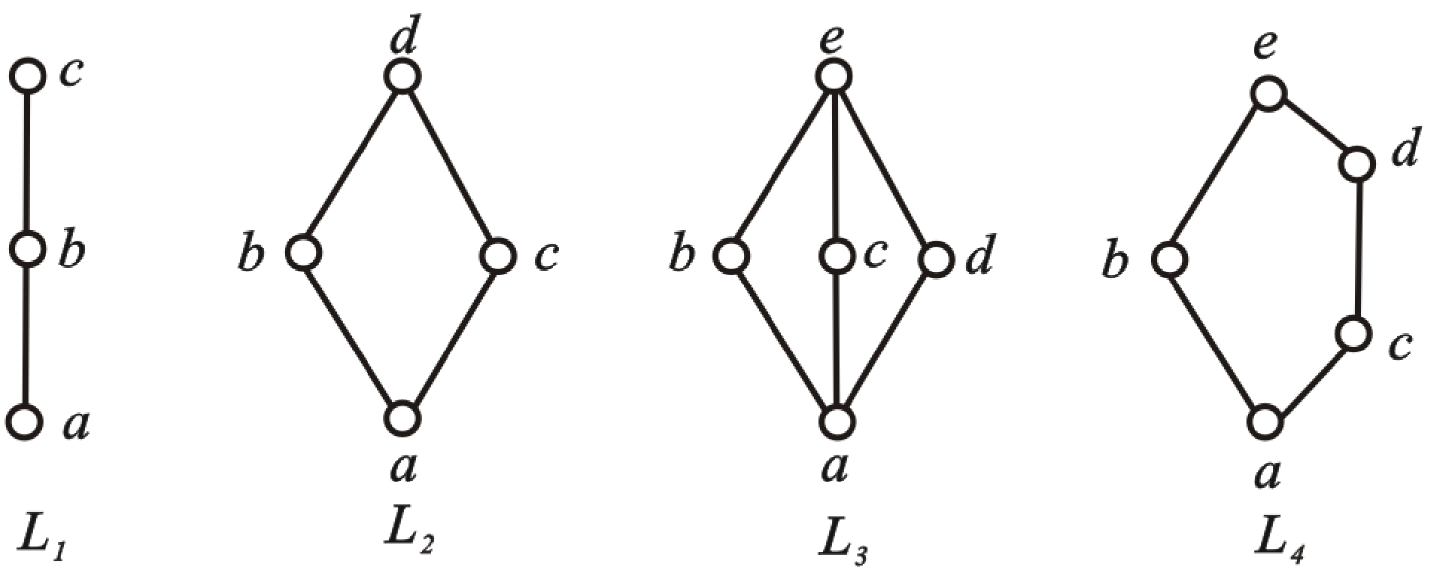
设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格, $a\in L$, 若存在$b\in L$ 使得

$$a\wedge b = 0 \text{ 和 } a\vee b = 1$$

成立, 则称b是a的补元.

- 注意：若b是a的补元, 那么a也是b的补元. a和b互为补元.

例： 考虑下图中的格. 针对不同的元素，求出所有的补元.



解答

(1) L_1中 a 与 c 互为补元, 其中 a 为全下界, c为全上界, b 没有补元.

(2) L_2中 a 与 d 互为补元, 其中 a 为全下界, d 为全上界, b与 c 也互为补元.

(3) L_3中a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b 和 d ; d 的补元是 b 和 c； b, c, d 每个元素都有两个补元.

(4) L_4中 a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b； d 的补元是 b .

有界分配格的补元惟一性

定理：设<L,$\wedge$,$\vee$,0,1>是有界分配格. 若L中元素 a 存在补元, 则存在惟一的补元.

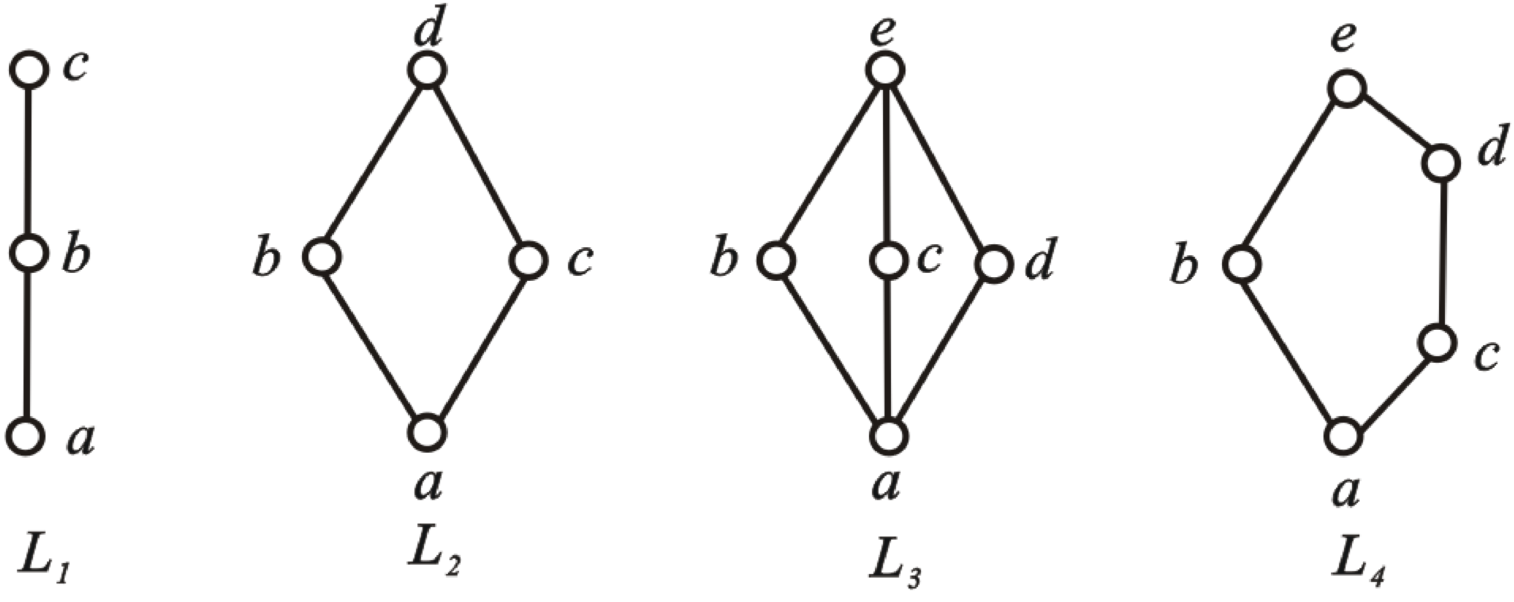
注意：

- 在任何有界格中, 全下界0与全上界1互补.
- 对于一般元素, 可能存在补元, 也可能不存在补元. 如果存在补元, 可能是惟一的, 也可能是多个补元. 对于有界分配格, 如果元素存在补元, 一定是惟一的.

有补格 (Complemented lattice)

设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格，若L中所有元素都有补元存在, 则称L为有补格.

例：图中的L_2, L_3和L_4是有补格, L_1不是有补格.



布尔格 (Boolean lattice)

如果一个格是有补分配格, 则称它为布尔格或布尔代数. 布尔代数标记为$<B,\wedge,\vee,', 0, 1>$, $'$为求补运算.

例:

（1）设 S_{110} = {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110}是110的正因子集合, gcd表示求最大公约数的运算，lcm表示求最小公倍数的运算，则$<S_{110}$, gcd, lcm$>$构成布尔代数。

（2）设B为任意集合, 证明B的幂集格$<P(B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, B>$构成布尔代数。

布尔代数的性质

定理：设$<B,\wedge,\vee,',0,1>$是布尔代数, 则

(1) $\forall a\in B$, $(a')' = a$.

(2) $\forall a,b\in B$, $(a\wedge b)' = a'\vee b'$, $(a\vee b)' = a'\wedge b'$ （德摩根律）

布尔代数的代数系统定义

设$<B, *, \circ>$是代数系统, $*$和$\circ$是二元运算. 若$*$和$\circ$运算满足:

(1) 交换律, 即$\forall a,b \in B$有 $a*b = b*a$, $a\circ b = b\circ a$

(2) 分配律, 即$\forall a,b,c \in B$有

$$a*(b\circ c) = (a*b)\circ(a*c),\ \ a\circ(b*c) = (a\circ b) * (a\circ c)$$

(3) 同一律, 即存在$0,1 \in B$, 使得$\forall a \in B$有$a * 1 = a$, $a\circ 0 = a$

(4) 补元律, 即$\forall a \in B$, 存在 $a' \in B$ 使得 $a * a' = 0$, $a\circ a' = 1$

则称 $<B,*,\circ>$是一个布尔代数.

有限布尔代数的结构

设 L 是格, $0\in L$, $a\in L$若$\forall b\in L$有 $0 \prec b \preccurlyeq a \Leftrightarrow b = a$, 则称 a 是 L 中的原子.

注：原子是盖住全下界0的元素。

有限布尔代数的表示定理

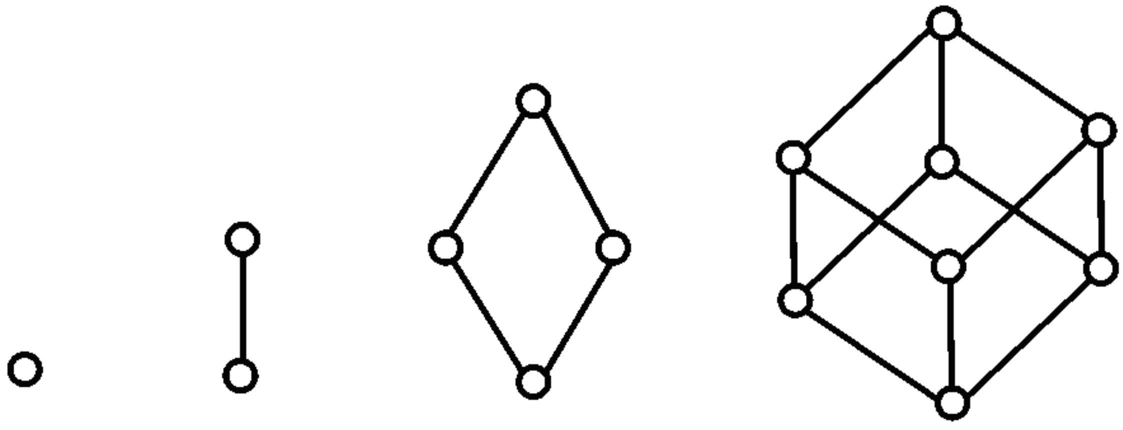
设B是有限布尔代数, A是B的全体原子构成的集合，则B同构于A的幂集代数$P(A)$.

推论1 任何有限布尔代数的基数为2^n, $n\in$ N.

推论2 任何等势的有限布尔代数都是同构的.

实例

下图给出了 1 元, 2 元, 4 元和 8 元的布尔代数.



总结

1. 运算及其性质：运算，封闭的, 可交换的, 可结合的, 可分配的, 吸收律，幂等的，幺元, 零元, 逆元
2. 代数系统：代数系统，子代数，积代数，同态，同构。
3. 群与子群：半群, 子半群, 元素的幂，独异点，群，群的阶数，子群, 平凡子群，陪集，拉格朗日（**Lagrange**）定理
4. 阿贝尔群和循环群：阿贝尔群(交换群)，循环群, 生成元
5. 环与域：环，交换环，含幺环，整环，域
6. 格与布尔代数：格，对偶原理，子格，分配格，有界格，有补格，布尔代数，有限布尔代数的表示定理