

第3章非线性方程(组)求解(2)

- · 非线性方程求解函数-fzero
- · 多项式求根函数—roots
- · 非线性方程组求解函数—fsolve



上讲内容

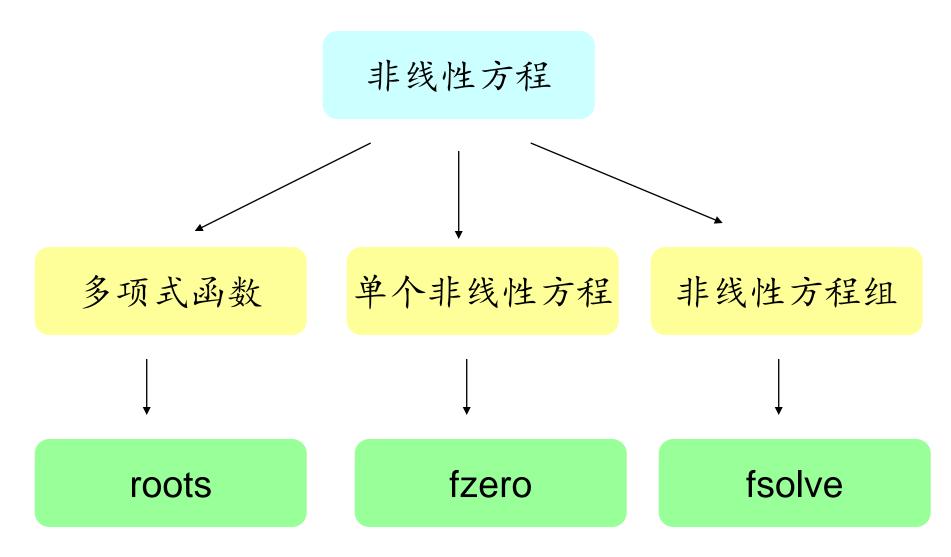


- •\的使用(系数矩阵A的行数等于方程个数,列数等 于未知数个数;右端向量为列向量)
- 合理利用MATLAB矩阵操作函数准确输入大型线性 方程组的系数矩阵
 - 通过下标引用按行输入
 - 通过循环语句
 - 利用分块矩阵的思想, 通过矩阵相加
- 了解非线性方程数值解法的基本思想和特点



MATLAB求解非线性方程函数







学习MATLAB函数的三部曲



- 1. 函数名称与作用:适用于求解哪类数学问题?
- 2. 函数要求的输入变量是什么?
- 3. 函数输出变量的意义是什么?
- 4. 函数有什么求解参数可以调整? (可选步骤)

函数fzero的使用方法



fzero函数用于求解一般的单个非线性方程

[x,fval,exitflag,output] = fzero(fun,x0,options, p1, p2, ...)

输入参数

- fun:表示待求解方程左侧的f(x),它可以是函数句柄或 匿名函数,对于给定的x值可以返回f(x)的函数值;
- x0: 初始值, x0可以是一个数或是一个区间[x1,x2]的 形式,使用后者时方程的值在x1和x2处异号,所得的 解在[x1,x2]内;
- options: 求解选项
- p1, p2, ...: 传递进fun函数的参数; 当不改变求解选项, 而仅传递参数时, fzero函数的输入参数写法如下: fzero(fun,x0,[], p1, p2, ...)



函数fzero的使用方法



[x,fval,exitflag,output] = fzero(fun,x0,options, p1, p2, ...)

输出参数

- X: 所求解
- fval: 函数fun在解x处的值
- exitflag:程序结束情况:等于1时,程序收敛于解; <0 时,程序没有收敛或收敛到一个奇异点;
- output: 是一个结构体,提供程序运行的信息; output.iterations,选代次数; output.functions,函数 fun的计算次数; output.algorithm,使用的算法
 - 1. fun函数如何编写?
 - 2. x0如何选取?



函数文件求解



$$x^3 - 2\sin x = 0$$

1. 直接编写函数文件

```
function Cha2demo4_4
    x0=1;
    [x,f,flag]=fzero(@fun,x0)
    disp(['The results is ',num2str(x)])
function y=fun(x)
    y=x^3-2*sin(x);
```

- 2. 将上述文件保存为Cha2demo4_4的m文件
- 3. 在命令窗口键入

>> Cha2demo4_4

则得到结果



例题5-匿名函数与命令行求解



1)
$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

2)
$$x^3 - 2\sin x = 0$$

- 3) 求sinx在3附近的零点;
- 4) 求cosx在[1,2]范围内的零点;

本例较简单,可直接在命令窗口输入命令求解:

- 1) >> $[x, fval, Flag] = fzero(@(x) x^3-2*x-5, 1);$
- 2) >> [x, fval, Flag]=fzero(@(x) x^3-2*sin(x),1)
- 3) >> [x, fval, Flag]=fzero(@sin, 3)
- 4) >> [x, fval, Flag]=fzero(@cos, [1, 2])



说明



- 1) 第2小题中,如果所给区间两端方程不异号, 则程序出错
- 2) 初值的选择对于解有影响,不同的初值可能 获得不同的解
 - 可以根据感兴趣的解的区间确定初值范围
 - 可以作出函数在一定范围内的曲线, 直观的确定解的大致范围



专业数值计算问题的求解过程



1. 待求解问题的关键表



选择合适的MATLAB 求解函数

达式形式



程序的输入变量 计算中间变量的值

2. 确定关键表达式的各 参数值



程序的输出 图形和文字输出都经常 采用

3. 求解,采用合适的方 式输出结果



4. 观察、检验结果

运用数学和专业知识确定 结果是否合理

- 数值计算的过程类似于"实验",有时需要进行多次尝试 才能找到最合适的解:
- 充分利用专业知识才可能更快、更好的找到问题的答案!





在p=945.36kPa(9.33atm)、T=300.2K时,容器中充以n=2mol氮气。已知此状态下氮气的P-V-T关系符合范德华方程,其范德华常数为a=4.17atm•L/mol², b=0.0371L/mol。试编写一个MATLAB函数求容器体积V。

数学模型: 范德华方程变形可得

$$f(V) = (p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) - nRT = 0$$
$$pV^3 - (pnb + nRT)V^2 + an^2V - an^3b = 0$$

这是关于V的三次方程, 可以fzero求解





$$f(V) = (p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) - nRT = 0$$

```
function vanderWaal 1
P = 9.33;
T = 300.2;
n = 2;
a = 4.17; b = 0.0371;
R = 0.08206;
Eq=(V) (P + a*n^2/V^2) * (V-n*b) - n*R*T;
V0 = n*R*T/P;
[V,fval,Flag]=fzero(Eq,V0);
disp(['The container volume is ', num2str(V),' m^3'])
```



$$f(V) = (p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) - nRT = 0$$

```
function vanderWaal 2
P = 9.33; T = 300.2; n = 2;
a = 4.17; b = 0.0371;
R = 0.08206;
V0 = n*R*T/P;
[V, fval] = fzero(@PVTeq, V0, [], P, T, n, a, b, R)
function f=PVTeq(V,P,T,n,a,b,R)
 f = (P+a*n^2/V^2)*(V-n*b)-n*R*T;
```

例题: 传热问题计算



某气体冷却器总传热面积A为20 m²,用以将流量 q_{m1} 为1.4 kg/s的某气体从 T_1 =50°C冷却到 T_2 =35°C。使用的冷却水初温 t_1 为25°C,与气体作逆流流动。换热器的传热系数K约为230 W/(m²·°C),气体的平均比热容 C_{p1} 为1000J /(kg·°C),水平均比热容 C_{p2} 为4180J /(kg·°C)。试编写一个MATLAB函数求冷却水用量 q_{m2} 和出口水温 t_2 ,将结果显示在屏幕上。

数学模型:
$$q_{m1}c_{p1}(T_1-T_2)=q_{m2}c_{p2}(t_2-t_1)$$

$$q_{m1}c_{p1}(T_1 - T_2) = KA \frac{(T_1 - t_2) - (T_2 - t_1)}{\ln \frac{T_1 - t_2}{T_2 - t_1}}$$



例题: 传热问题计算



function HeatTransferII %第二类换热操作型命题求解 A=20; K=230; %换热器参数 qm1=1.4; cp1=1000; T1=50; T2=35; 8热流体参数 t1=25; cp2=4180;%冷却水参数 HF=0 (t) qm1*cp1*(T1-T2)-K*A*((T1-t)-(T2-t))t1))/log((T1-t)/(T2-t1));[t2,fval,Flag]=fzero(HF,45); %冷却水出口温度 qm2=qm1*cp1*(T1-T2)/(cp2*(t2-t1)); %冷却水流量 fprintf('The ouetlet T for water is %.2f degrees\n',t2) fprintf('The flow rate of water is %.4f $kg/s\n',qm2)$ $4.57 = (40 - t_2) / \ln \frac{50 - t_2}{10}$ 当初始值取50时, 计算结果如何?



多项式求根函数roots



- 在MATLAB中表示多项式首先将多项式降幂排列 $P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$
- 将多项式的系数赋值给变量P $P = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$
- · 向量的长度等于多项式的最高次数n+1
- · 当P输入给多项式函数时会被识别为多项式。
- MATLAB提供的多项式函数包括: <u>多项式求根函数roots</u>, 求多项式的值, polyval; 多项式乘法, conv; 多项式除法, deconv; 多项式微分, polyder; 多项式拟合, polyfit

函数roots



- r = roots(c), 用于求解多项式的根
 - 输入变量C为多项式的行向量
 - 如果C中含有n+1个元素,则多项式为n次
- · roots可以获得多项式的所有根
- · roots采用的算法为计算友矩阵的特征值

求方程
$$x^3 = x^2 + 1$$
 的根

```
1.4656

-0.2328 + 0.7926i

-0.2328 - 0.7926i

>>polyval(c, r(1))

ans =

-2.5535e-015
```

例题: 立方型状态方程计算混合物体积



已知一个三元体系的组成和临界性质如下表所示:

组分	气相组成y;	临界温度Tc(K)	临界压力Pc(Pa)
乙炔	0.202	308.32	6.1391e6
乙烯	0.538	282.36	5.0318e6
乙烷	0.260	305.42	4.8801e6

体系的温度T=235.9 K, 压力P=1381.4 kPa, 编写 一个函数采用PR方程求体系的气相压缩因子Z。用 于混合物计算时,系数A和B应按以下混合规则计算:

$$A^{0.5} = \sum_{i} A_i^{0.5} y_i$$

$$B = \sum B_i y_i$$

$$A_i = \frac{aP}{R^2T^{2.5}} = \frac{0.42748P_r}{T_r^{2.5}}$$
 Pr=P/Pc

$$B_i = \frac{bP}{RT} = \frac{0.08664P_r}{T_r}$$

$$B_i = \frac{BT}{RT} = \frac{0.00004T_r}{T_r}$$

$$Z^{3} - Z^{2} - (B^{2} + B - A)Z - AB = 0$$



例题: 立方型状态方程计算混合物体积



```
function Cha3Demo7
y=[0.202 \ 0.538 \ 0.260];
Tc = [308.32 282.36 305.42];
Pc=[6.1391 5.0318 4.8801]*1e6;
T=235.9; P=1.3814e6;
Tr=T./Tc;Pr=P./Pc;
A=0.42748*Pr./Tr.^2.5;
B=0.08664*Pr./Tr;
AT = (sum(A.^0.5.*y))^2;
BT=sum(B.*y);
p = [1 -1 - (BT^2 + BT - AT) - AT*BT];
Zcal=roots(p);
Zgas=max(Zcal);
fprintf('The Z of gas phase is %.4f\n',Zqas)
```

思考: 当roots求解获得复数根如何处理?



函数fsolve



fsolve函数可求解非线性方程组的解。其算法采用的是最小二乘法(特殊的迭代算法)

fsolve调用格式:

[x,fval,exitflag,output,jacobian] = fsolve(fun,x0,options, p1, p2, ...)

- -输入变量fun为定义待求解方程的函数句柄;
- fun的返回值为一个向量,各元素为方程组的各个表达式在x处的值;
- 输入变量x0与fun函数返回向量元素个数相同;
- 输出变量: x为方程组的解; fval各表达式在x处的值, 成功求解时应接近0; exitflag退出标识, =1时收敛到 解, <0时求解出现错误



引题10



$$\begin{cases} \sin x + y^{2} + \ln z = 7 \\ 3x + 2^{y} - z^{3} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x + y + z = 5$$

$$\begin{cases} \sin x + y^2 + \ln z = 7 \\ 3x + 2^y - z^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(1) = \sin x(1) + x(2)^2 + \ln x(3) - 7 = 0 \\ y(2) = 3x(1) + 2^{x(2)} - x(3)^3 + 1 = 0 \\ y(3) = x(1) + x(2) + x(3) - 5 = 0 \end{cases}$$

function Cha3demo7

$$x0 = [1 \ 1 \ 1];$$

[x, f, flaq] = fsolve(@fun, x0)

function y=fun(x)

$$y(1) = \sin(x(1)) + x(2)^2 + \log(x(3)) - 7;$$

$$y(2) = 3 * x(1) + 2 ^ x(2) - x(3) ^ 3 + 1;$$

$$y(3) = x(1) + x(2) + x(3) - 5;$$

$$x = 0.5991 \quad 2.3959 \quad 2.0050$$

试一试采用不同的初始值会得到什么结果?



optimset



- 当fsolve输出exitflag值为0,2,3,4时,或对解的精度不满意时,可以尝试调节fsolve函数的设置,fsolve第3个输入变量options的值;
- 调整fsolve函数的求解参数可用optimset函数;例如下列命令:
 - opt=optimset('TolX',1e-10,'TolFun',1e-8)
- 在使用fsolve令时将options更改为新定义的结构 体,如
 - x = fsolve(fun, x0, opt)



常见fsolve求解选项



选项名称	含义	默认值
MaxFunEvals	函数值计算最大次 数	100*变量个数
MaxIter	最大迭代次数	400
TolFun	函数值允许的最小 变化值	1.0000e-006
TolX	自变量允许的最小 变化值	1.0000e-006

fzero的求解选项也可以采用optimset函数更改





使用fsolve函数求解方程组,初始值为[11]。

$$\begin{cases} 10x + 3y^2 = 3\\ x^2 - \exp(y) = 2 \end{cases}$$

- 1) 使用fsolve函数默认参数求解, 残差为多少?
- 2) 更改求解参数中的TolFun域值为1e-10, 残差变 为多少?



```
function FsolveOpt
opt=optimset('TolFun',1e-10);
x0 = [1 \ 1];
[x1,err1,flag1]=fsolve(@Eq8,x0)
[x2,err2,flag2]=fsolve(@Eq8,x0,opt)
function f=Eq8(x)
f1=10*x(1)+3*x(2)^2-3;
                              err1 = 1.0e - 010
                                               *
f2=x(1)^2-exp(x(2))-2;
                                   0.6573
f=[f1;f2];
                                   0.2087
                              err2 = 1.0e - 0.14 *
                                   0.1776
```



fsolve函数的应用



在铜管内在1 atm下将异丙醇加热到400℃。可能生成丙酮、 丙醛和正丙醇。三种产物的生成可用如下三个独立反应表示:

 $iC3H7OH(IP) \rightarrow n C3H7OH(NP)$ K1 = 0.064

iC3H7OH(IP) \rightarrow (CH3)CO(AC)+H2 K2 = 0.076

 $iC3H7OH(IP) \rightarrow C2H5CHO(PR) + H2$ K3 = 0.00012

后续加工步骤需要正丙醇, 可含丙酮, 但丙醛含量不能超过 5(mol)%。在上述反应条件下,是否存在违反这种规定的可 能性?

数学模型:设x1~x3分别化学平衡时正丙醇、丙酮和丙醛的 摩尔数。

$$\frac{x_1}{1 - x_1 - x_2 - x_3} = 0.064 \quad \frac{x_2(x_2 + x_3)}{(1 - x_1 - x_2 - x_3)(1 + x_2 + x_3)} = 0.076$$

$$\frac{x_3(x_2 + x_3)}{(1 - x_1 - x_2 - x_3)(1 + x_2 + x_3)} = 0.00012$$



fsolve函数的应用



```
\frac{x_2(x_2 + x_3)}{(1 - x_1 - x_2 - x_3)(1 + x_2 + x_3)} = 0.076
function Cha2demo7
                                            \frac{x_3(x_2 + x_3)}{(1 - x_1 - x_2 - x_3)(1 + x_2 + x_3)} = 0.00012
x0 = [0.05 \ 0.2 \ 0.01];
x = fsolve(@EquiC3,x0);
CAC=x(3)/sum(x)
if CAC<0.05
     disp('The AC concentration could not be over 0.05%')
else
     disp('The AC concentration could be over 0.05%')
end
function f = EquiC3(x)
f1 = x(1) - 0.064 * (1-x(1)-x(2)-x(3));
f2 = x(2)*(x(2)+x(3))-0.076*(1-x(1)-x(2)-x(3))*(1+x(2)+x(3));
f3 = x(3)*(x(2)+x(3))-0.00012*(1-x(1)-x(2)-x(3))*(1+x(2)+x(3));
f = [f1 \ f2 \ f3];
```

 $\frac{x_1}{1 - x_1 - x_2 - x_3} = 0.064$



例题13 平衡级式分离设备的严格计算

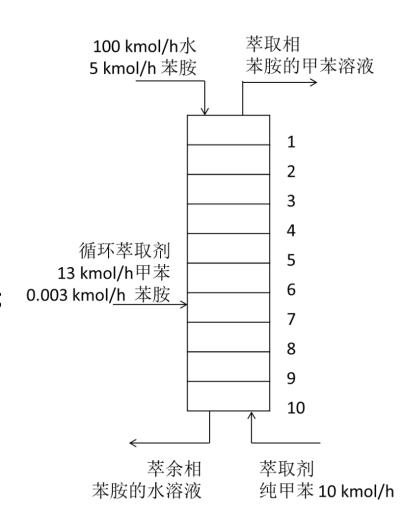


采用逆流萃取的方法用甲苯去除水中的苯胺,过程在一个有10个理论级的塔中进行。示意图如右图。

相平衡关系如下:

$$y_i / x_i = 9 + 20x_i$$

其中yi为萃取相中苯胺的摩尔分率; Xi为萃余相中苯胺的摩尔分率。 假定甲苯和水完全不互溶。试编 写一个MATLAB函数求解并以图 形方式输出各理论级上萃取和萃 余相中苯胺的摩尔流率。



例题13 平衡级式分离设备的严格计算

 $L_{n-1}H_{L,n-1} + V_{n+1}H_{V,n+1} + F_nH_{F,n} = (L_n + U_n)H_{L,n} + (V_n + W_n)H_{V,n} + Q_n$



物料衡算方程 (M方程)

$$L_{n-1}x_{i,n-1} + V_{n+1}y_{i,n+1} + F_nz_i = (L_n + U_n)x_{i,n} + (V_n + W_n)y_{i,n}$$

相平衡方程(E方程)

$$y_{i,n} = K_{i,n} x_{i,n}$$

归一化方程(S方程)

$$\sum_{i} x_{i,n} = 1, \quad \sum_{i} y_{i,n} = 1$$

热量衡算方程(H方程)

Ln-1

Vn



例题13 平衡级式分离设备的严格计算



```
function Cha3Demo11
x0=zeros(1,20);x0(1)=4;
opt=optimset('MaxFunEvals',1e4,'MaxIter',1e3);
[x,fval,exit]=fsolve(@Staged,x0,opt)
plot(1:10,x(1:10),'o',1:10,x(11:20),'s')
legend('Raffinate','Extract')
ylabel('Anilin flow rate [kmol/h]')
xlabel('Stage number')
function y=Staged(x)
y=zeros(20,1);LinA=5;LinW=100;VinT=10;
L=[LinA,x(1:10)];V=[x(11:20),0];
FV=ones(10,1)*VinT;FV(7)=FV(7)+13;F=zeros(10,1);F(7)=0.003;
for i=2:11
   y(i-1)=L(i-1)+V(i)+F(i-1)-L(i)-V(i-1);
   Xi=L(i)/(L(i)+LinW);
   Yi=V(i-1)/(FV(i-1)+V(i-1)+F(i-1));
   y(i-1+10)=Yi-Xi*(9+20*Xi);
end
```



关于数值计算的几点提醒



使用roots, fzero, fsolve得到运算结果后, 结果一定正确吗?

NO!

使用roots, fzero, fsolve运算结果错误的原因有哪些?

- □ 输入错误!
- □ 初始值选取错误!
- □ 程序没有收敛!

关于数值计算的几点提醒



- 仔细检查程序!
- 注意观察求解的返回结果!误差是否足够小? 求解是否收敛?
- 采用不同的初始值近多次试算!
- 利用专业知识检查结果是否合理!

化工数值计算中的迭代与试差



- 在较早的专业书籍中,对于化工过程非线性方程的手算求解一般采用迭代或试差方法
- 很多需要采用迭代或试差求解的问题都可以直接 采用本章介绍的MATLAB函数进行求解。
- 但对于复杂的、具有高度非线性的问题求解,如 多组分精馏的严格求解、复杂流程的物料衡算等, 往往仍需要使用特定的迭代算法进行求解。



某蒸馏釜的操作压强p为106.7 kPa, 其中溶液含苯摩尔分数为0.2, 甲苯摩尔分数为0.8, 求此溶液的泡点及平衡的气相组成。苯-甲苯溶液可作为理想溶液。各纯组分的蒸汽压为:

苯:
$$\log p_A^0 = 6.031 - \frac{1211}{t + 220.8}$$
 甲苯: $\log p_B^0 = 6.080 - \frac{1345}{t + 219.5}$

式中的 p^0 为物质的蒸气压,单位为kPa;温度t的单位为 $^{\circ}$ C。

理想物系的液相符合拉乌尔定律,气相为理想气体符合理想气体定律。假定苯组分的液相摩尔组成为x,则有:

$$p_A^0 x + p_B^0 (1 - x) = p$$





$$p_A^0 x + p_B^0 (1 - x) = p$$

将饱和蒸气压计算式代入上式,即成为一个关于t的非线性方程,求解此方程即可知体系的泡点。

联立道尔顿分压定律和拉乌尔定律可得气相组成:

$$y_A = \frac{p_A}{p} = \frac{x_A p_A^0}{p}$$





方法一: 采用逐步扫描法求解。程序如下:

```
function Cha3Demo12A
xA=0.2;xB=0.8;P=106.7;%已知数据
AntA=@(t) 10^(6.031-1211/(t+220.8));%定义安托因方程
AntB=(t) 10^(6.080-1345/(t+219.5));
for t=80:0.01:150
    PA=AntA(t); PB=AntB(t);%求各组分饱和蒸气压
    Pcal=PA*xA+PB*xB;%计算总压
    if abs(P-Pcal)<1e-2%判断计算总压与规定压力是否相符
       disp(['The bubbling point is ',num2str(t),' degrees'])
       yA=PA*xA/P;%计算气相组成
       y=[yA,1-yA]; %yB=1-yA
       disp(['The gas phase molar ratio of A and B are ', num2str(y)])
       break
    end
end
```





方法2:采用迭代法求解。

$$f(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{x_i p_i^0}{p} - 1$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{x_i p_i^0}{p} - 1$$

$$f'(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{x_i p_i^0}{p} \frac{\ln 10 \cdot B_i}{(C_i + t)^2}$$

迭代初值t0可以选取系统压力下沸点的摩尔分数加权平均值,即:

$$t_0 = t_A x_A + t_B x_B$$





```
function Cha3Demo12B
8采用牛顿迭代法求泡点温度
xA=0.2;xB=0.8;P=106.7;%已知数据
AntA=@(t) 10^(6.031-1211/(t+220.8));%定义安托因方程
AntB=0(t) 10^{(6.080-1345/(t+219.5))};
BT A=1211/(6.031-log10(P))-220.8;%求A的沸点
BT B=1345/(6.080-log10(P))-219.5;%求B的沸点
t0=[xA xB]*[BT A;BT B];%以A和B沸点的摩尔分数加权平均值为初值
ft=0(t) (AntA(t)*xA+AntB(t)*xB)/P-1;
dft=0(t)
(AntA(t)*xA*1211/(220.8+t)^2+AntB(t)*xB*1345/(219.5+t)^2)
*log(10)/P;
```







方法三:采用fzero函数

function Cha3Demo12C

 $f(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{x_i p_i^0}{p} - 1 = 0$

```
%采用fzero求泡点温度
xA=0.2;xB=0.8;P=106.7;%已知数据
AntA=@(t) 10^(6.031-1211/(t+220.8));%定义安托因方程
AntB=(t) 10^(6.080-1345/(t+219.5));
BT A=1211/(6.031-log10(P))-220.8;%求A的沸点
BT B=1345/(6.080-log10(P))-219.5;%求B的沸点
t0=[xA xB]*[BT A;BT B];%以A和B沸点的摩尔分数加权平均值为初值
ft=0(t) (AntA(t)*xA+AntB(t)*xB)/P-1;
bt=fzero(ft,t0);
disp(['The bubbling point is ',num2str(bt),' degrees'])
yA=AntA(bt)*xA/P;%计算气相组成
y = [yA, 1-yA]; %yB = 1-yA
disp(['The gas phase molar ratio of A and B are ', num2str(y)])
```



课堂练习



试编写一个MATLAB函数求解:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = e^{-x_1} \\ -x_1 + 2x_2 = e^{-x_2} \end{cases}$$
 初始值(-5,-5)



本讲小结



fzero, roots和fsolve函数的使用

- 要求的输入是什么?
- 返回的输出是什么?
- 计算是否正确?



作业



公共邮箱下载文档: work07.pdf, 直接打印、完成后上交

