5.1 流体微团运动

5.1.1 描叙流体流动的两种描述方法

➢描述流体时，跟踪流体质点，指出各流体质点在不同时刻的位置和有关的物理参数（如速度、压强、密度、温度等）的方法称为**拉格朗日法**(*Lagrangian method*)，又叫**质点法**(*particle method*)。

$$B = B(a,b,c,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B(a,b,c,t)}{\partial t}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,b,c,t) \\ y &= y(a,b,c,t) \\ z &= z(a,b,c,t) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

5.1.1 描叙流体流动的两种描述方法

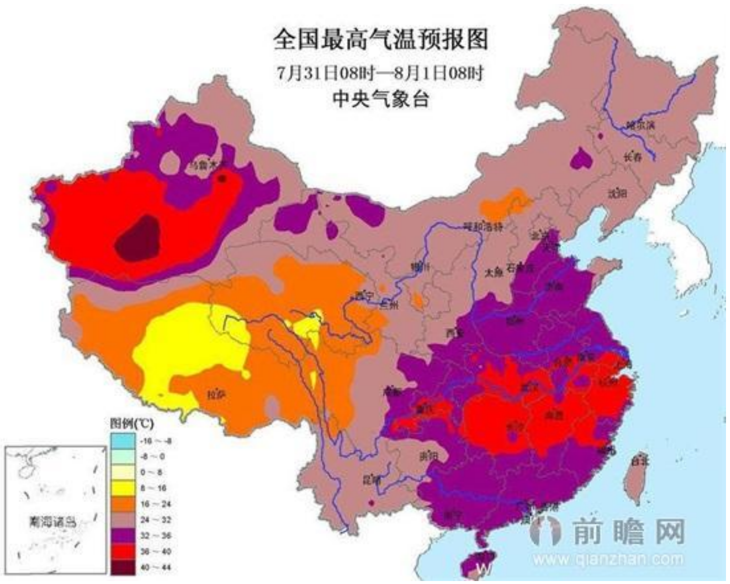
- 着眼于流场的各空间位置，指出在各空间位置不同时刻流体的有关物理参数（如速度、压强、密度、温度等）的方法称为**欧拉法**(*Eulerian method*)，也叫**场方法**(*field method*)。

$$B = B(x,\ y,\ z,\ t)$$

流体的速度在直角坐标系可表示为：

$$u = u(x,y,z,t) \quad \text{或} \quad \left.\begin{aligned} u_x &= u_x(x,\ y,\ z,\ t) \\ u_y &= u_y(x,\ y,\ z,\ t) \\ u_z &= u_z(x,\ y,\ z,\ t) \end{aligned}\right\}$$

5.1.1 描叙流体流动的两种描述方法



- *Eulerian method*
- *Lagrangian method*

- Eulerian and Lagrangian descriptions in daily life

5.1.1 描叙流体流动的两种描述方法

➤*Euerian method*

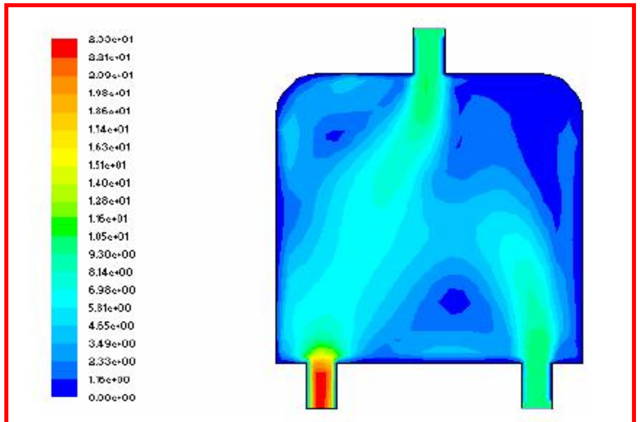


图9-8 速度等高线图

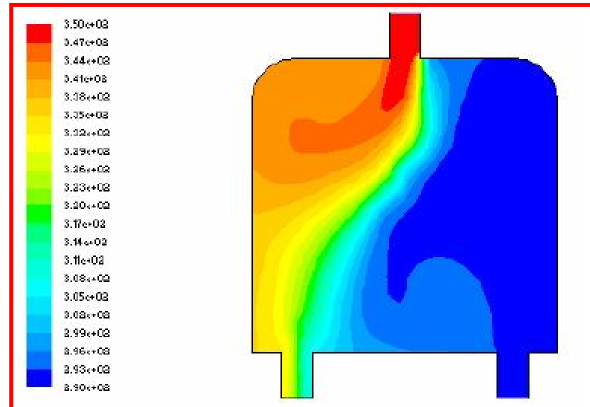


图9-9 温度分布图

➤*Lagrangian method*

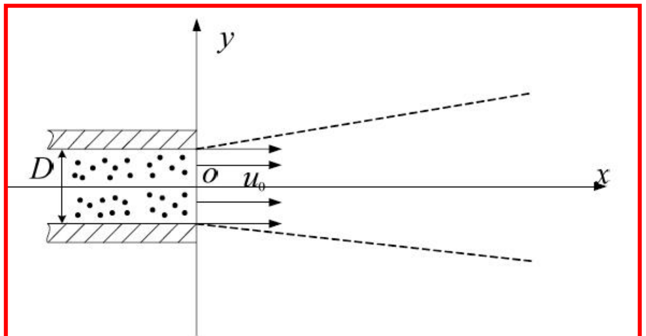


图 1 气固两相平面射流示意图

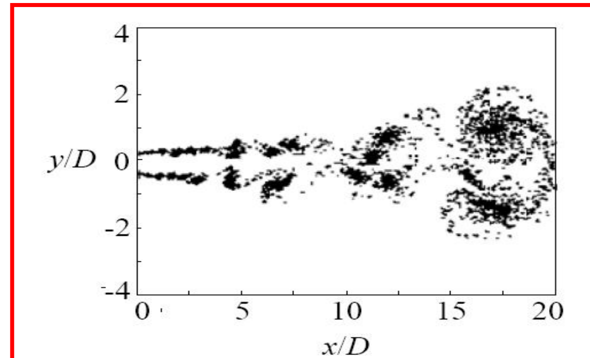
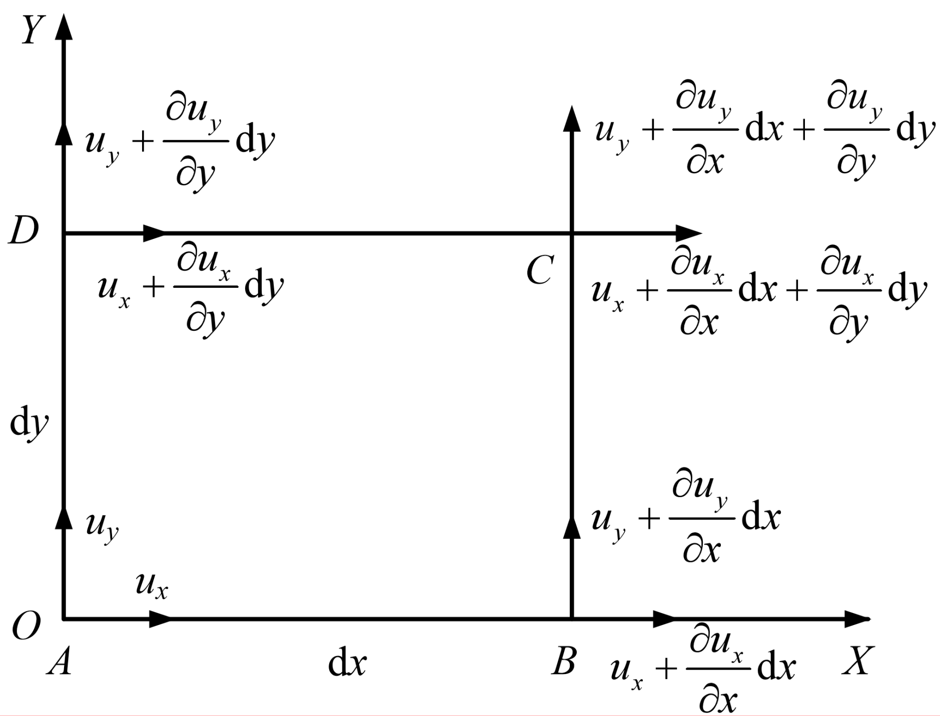


图 3 平面射流中的瞬时涡结构

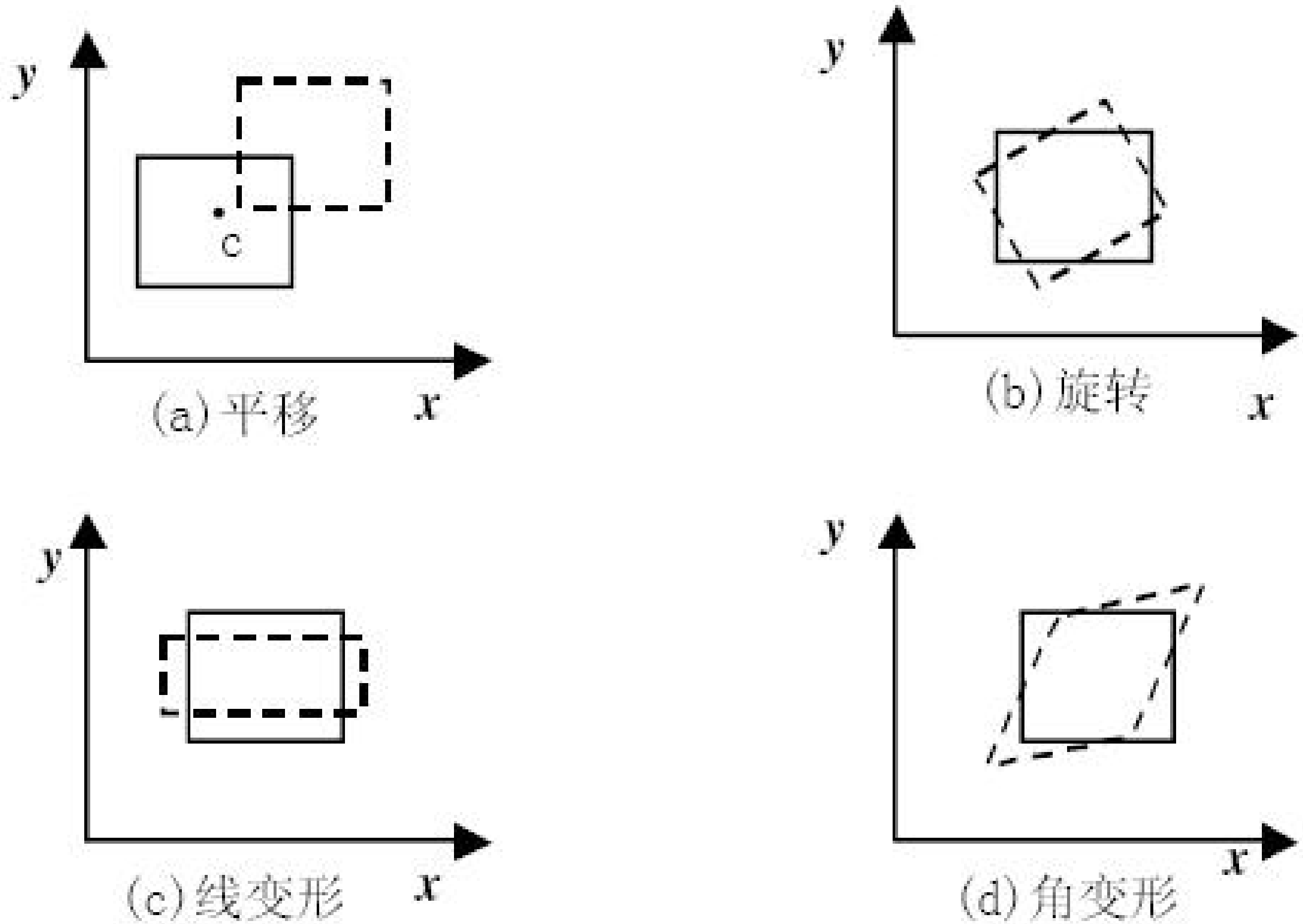
➤Eulerian and Lagrangian Descriptions in Fluid Mechanics

5.1.2 流体微团运动

➢从理论力学知道，刚体的运动可以分解为平移和旋转两种基本运动。流体运动要比刚体运动复杂得多，流体微团基本运动形式有平移运动，旋转运动和变形运动等，而变形运动又包括线变形和角变形两种。



5.1.2 流体微团运动



流体微团的四种运动形式

5.1.2 流体微团运动

(1) 平移

微团上各点公有的分速度 u_x 和 u_y 使它们在 $\mathrm{d}t$ 时间内均沿 x 方向移动一距离 $u_x\mathrm{d}t$，沿 方向移动一距离 $u_y\mathrm{d}t$，如图5-2所示，因此将 A 点的速度 u_x 和 u_y 定义为流体微团的平移运动速度。

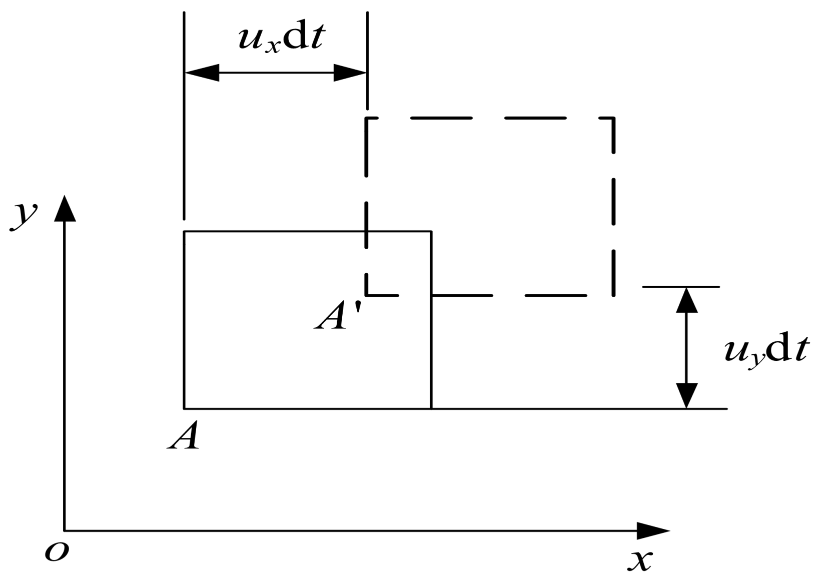


图5-2 流体微团的平移

5.1.2 流体微团运动

(2) 线变形

微团左、右两侧的A点和B点沿x方向的速度差为$\frac{\partial u_x}{\partial x}\mathrm{d}x$，当这速度差值为正时，微团沿$x$方向发生伸长变形；当它为负时，微团沿$x$方向发生缩短变形，如图5-3所示。单位时间，单位长度的线变形称为线变形速度。以 θ_x 表示流体微团沿x方向的线变形速度，则：

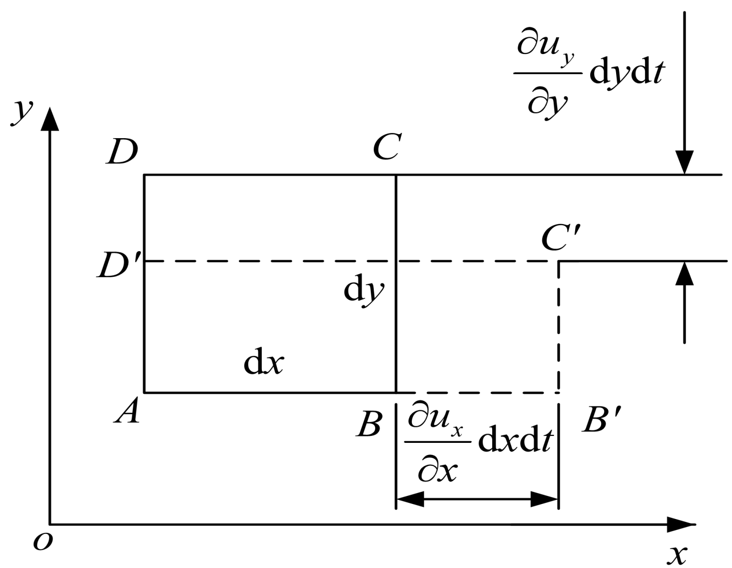


图5-3 流体微团的线变形

$$\theta_x = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\theta_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\left.\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \theta_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \theta_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

(3) 旋转

过流体微团上A点的任两条正交微元流体边在其所在平面内旋转角速度的平均值，称作A点流体微团的旋转角速度在垂直该平面方向的分量，如图5-4所示。

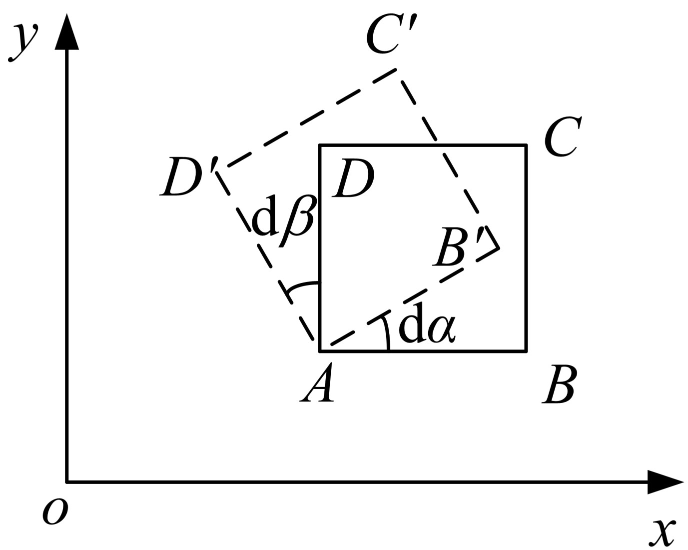


图5-4 流体微团的旋转

$$d\alpha \approx \tan d\alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dxdt}{dx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt$$

$$d\beta \approx \tan d\beta = \frac{-\frac{\partial u_x}{\partial y} dydt}{dy} = -\frac{\partial u_x}{\partial y} dt$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \frac{d\alpha + d\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

5.1.2 流体微团运动

(3) 旋转

过流体微团上A点的任两条正交微元流体边在其所在平面内旋转角速度的平均值，称作A点流体微团的旋转角速度在垂直该平面方向的分量，如图5-4所示。

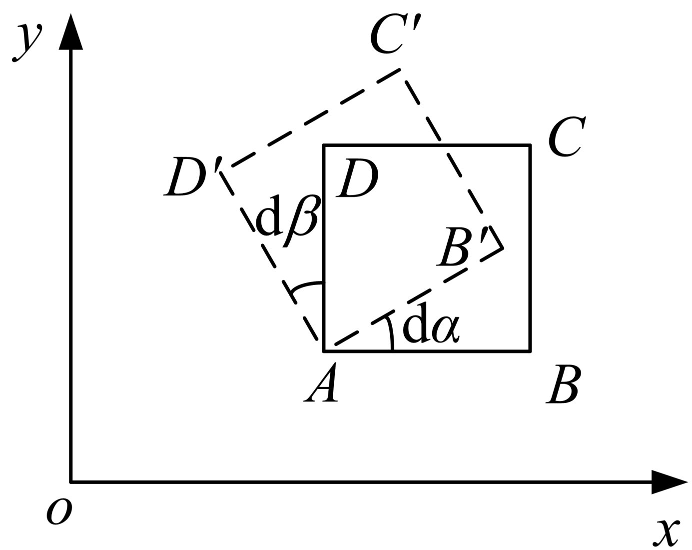


图5-4 流体微团的旋转

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\qquad \omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$$

(4)角变形速率

*AB*线上各点的 方向速度分量不相等，*B*点相对于*A*点有一 方向速度分量的增量 $\frac{\partial u_y}{\partial x}\mathrm{d}x$，*AB*发生偏转，如图5-5所示，偏转角度为

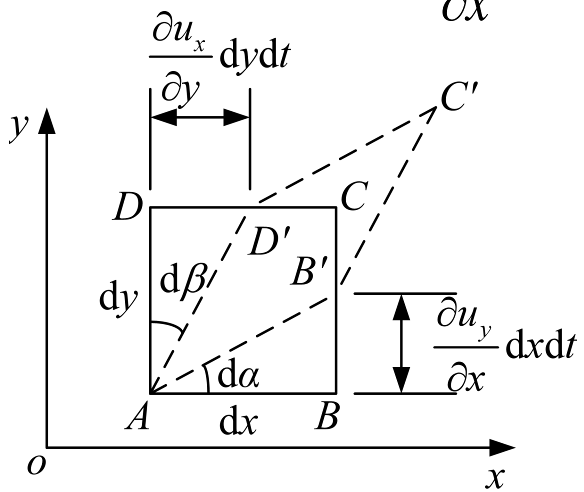


图5-5 流体微团的角变形

$$d\alpha \approx \tan d\alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}dxdt}{dx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}dt$$

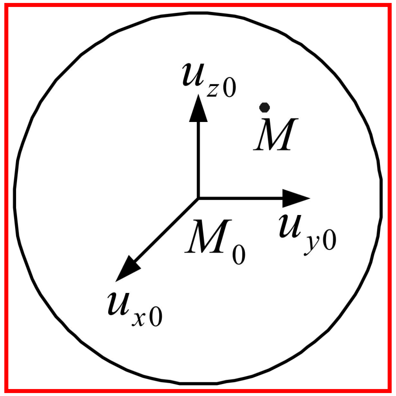
同理，*AD*也将发生偏转偏转角度为

$$d\beta \approx \tan d\beta = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}dydt}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}dt$$

单位时间微团在*oxy*平面上的角变形，称为角变形速率:

$$\frac{1}{2}\frac{d\alpha + d\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \varepsilon_z$$

亥姆霍兹速度分解定理(Helmhotz theorem)



$$u_x = u_{x0} + \mathrm{d}u_x$$
$$u_y = u_{y0} + \mathrm{d}u_y$$
$$u_z = u_{z0} + \mathrm{d}u_z$$

$$\mathrm{d}u_x = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{\mathrm{M0}} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{\mathrm{M0}} \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)_{\mathrm{M0}} \mathrm{d}z$$

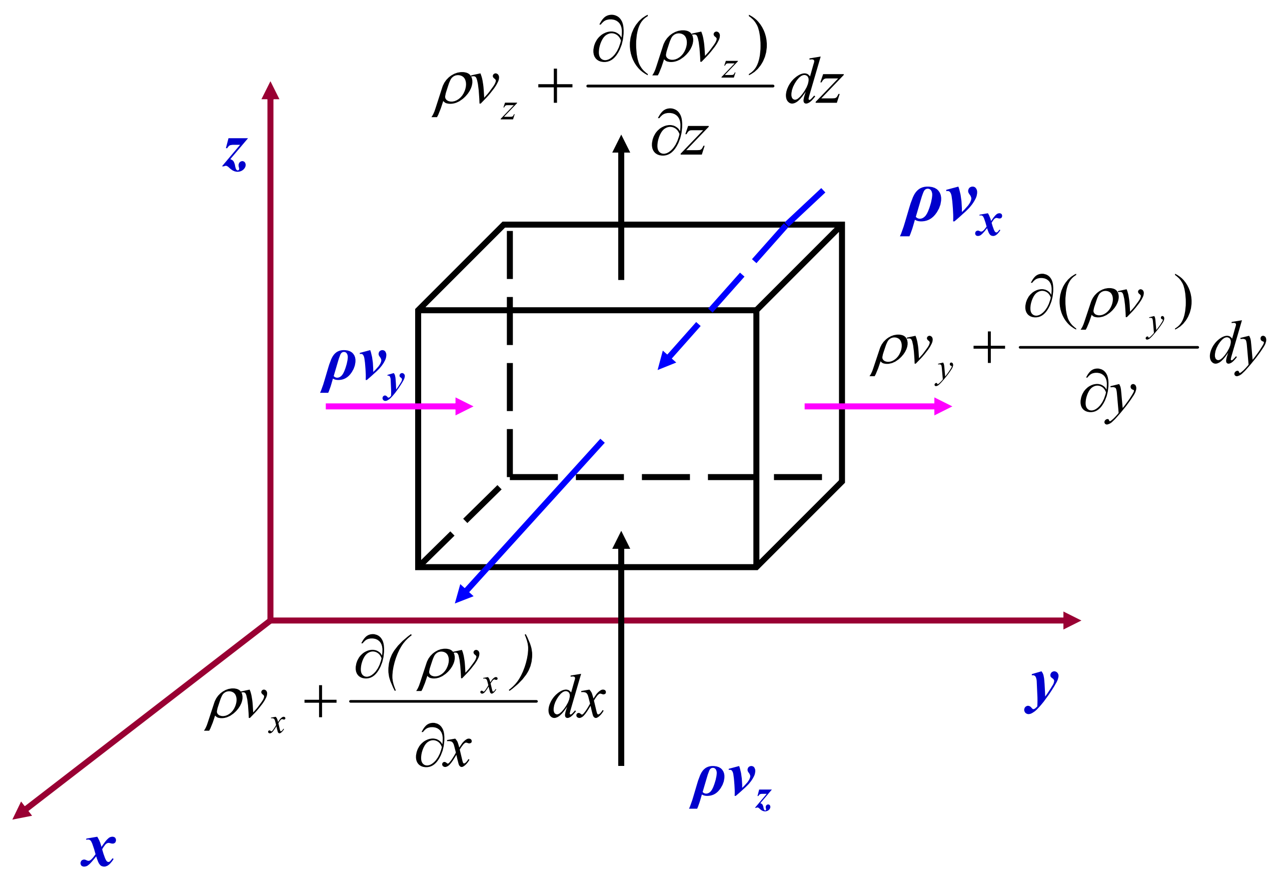
$$u_x = u_{x0} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{\mathrm{M0}} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{\mathrm{M0}} \mathrm{d}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{\mathrm{M0}} \mathrm{d}y$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_{\mathrm{M0}} \mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_{\mathrm{M0}} \mathrm{d}z$$

亥姆霍兹速度分解定理(*Helmhotz theorem*)

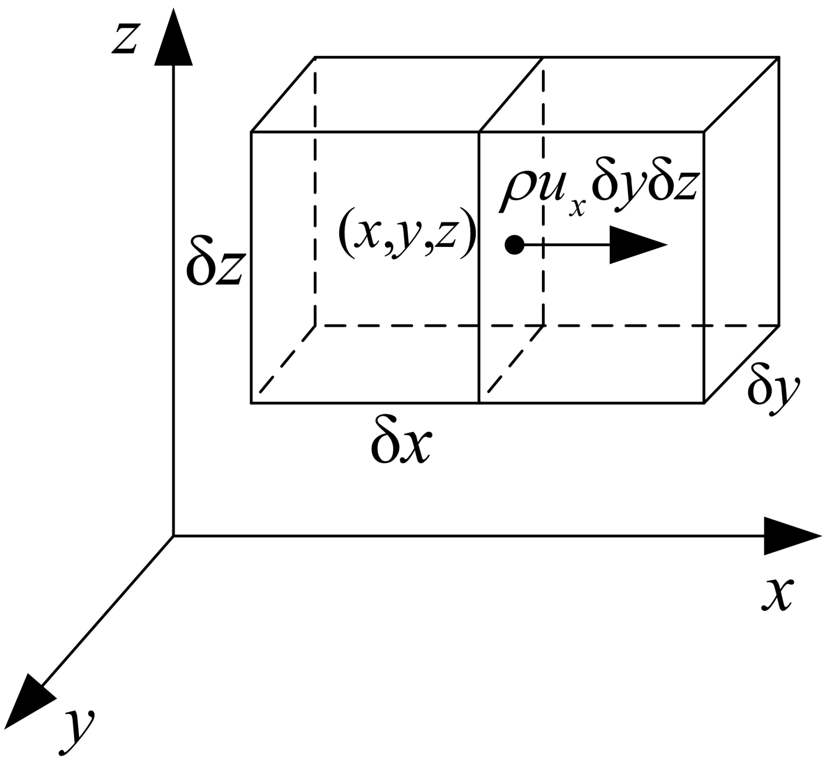
$$\left.\begin{aligned}
u_x &= u_{x0} - \omega_z \mathrm{d}y + \omega_y \mathrm{d}z + \theta_x \mathrm{d}x + \varepsilon_z \mathrm{d}y + \varepsilon_y \mathrm{d}z \\
u_y &= u_{y0} - \omega_x \mathrm{d}z + \omega_z \mathrm{d}x + \theta_y \mathrm{d}y + \varepsilon_x \mathrm{d}z + \varepsilon_z \mathrm{d}x \\
u_z &= u_{z0} - \omega_y \mathrm{d}x + \omega_x \mathrm{d}y + \theta_z \mathrm{d}z + \varepsilon_y \mathrm{d}x + \varepsilon_x \mathrm{d}y
\end{aligned}\right\}$$

- **右边第一项为平移速度，第二，三项是微团的旋转运动所产生的速度增量。第四项和第五、六项分别为线变形运动和角变形运动所引起的速度增量。**
- **可见，流体微团的运动可以分解为平移运动，旋转运动，线变形运动和角变形运动之和，这就是亥姆霍兹速度分解定理(*Helmhotz theorem*)。**

连续性方程反映流动过程遵循质量守恒。



5.2 连续性方程



右: $\left[\rho u_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\frac{\delta x}{2}\right]\delta y \delta z$

左: $\left[\rho u_x - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\frac{\delta x}{2}\right]\delta y \delta z$

净: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)\delta x \delta y \delta z$

5.2 连续性方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)\right]\delta x\delta y\delta z \qquad -\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$$

总净流出质量流量　　　　质量减少率

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

连续性方程(*continuity equation*)

对不可压缩流动($\rho=\text{const}$): $\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$

对恒定流 ($\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$): $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)=0$

5.2 连续性方程

- **例题：不可压缩流体的二维平面流动，y方向的速度分量为**

$$v_y = y^2 - y - x$$

- **试求x方向的速度分量，假定x=0时，v_x=0。**

➢解：不可压缩流体的平面运动满足连续性方程

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

➢由已知条件得

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + 2y - 1 = 0$$

➢积分得 $v_x = (1-2y)x + f(y)$

5.2 连续性方程

- 根据边界条件x=0时v_x=0代入上式得

$$0=(1-2y)\times 0+f(y)$$

- 故有 $f(y)=0$

- 所以 $v_x=(1-2y)x=x-2xy$

5.3 无旋运动

流动场中各点旋转角速度等于零的运动，无旋流动（*non-rotational flow*），**也称为势流**（*potential flow*）。**无旋流动中：**

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0$$

因此，无旋流动的前提条件是：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

5.3 无旋运动

$$\mathrm{d}\varphi(x、y、z)=u_{\mathrm{x}}\mathrm{d}x+u_{\mathrm{y}}\mathrm{d}y+u_{\mathrm{z}}\,\mathrm{d}z$$

函数φ称为速度势函数。存在着速度势函数的流动，称为有势流动，简称势流。无旋流动必然是有势流动。

展开势函数的全微分， $d\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z$

则可以得到：

$$\left.\begin{aligned} u_{\mathrm{x}} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ u_{\mathrm{y}} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ u_{\mathrm{z}} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

即速度在三坐标上的投影，等于速度势函数对于相应坐标的偏导数。

5.3 无旋运动

把速度势函数代入不可压缩流体的连续性方程： $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u_y}{\partial y}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0$

其中： $\dfrac{\partial u_x}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

同理： $\dfrac{\partial u_y}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ $\qquad \dfrac{\partial u_z}{\partial z}=\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

得出：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0$$

上述方程称为拉普拉斯方程。

拉普拉斯方程是最常见的数理方程之一，在相应的边界条件下，求解该方程即可得到势函数，从而得知速度场。

流函数：描述流场的函数

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

不可压缩流的二维流函数：

- 流函数满足连续性方程和拉普拉斯方程，是调和函数。
- 流函数的等值线就是流线。
- 通过两条流线间任意一曲线（单位厚度）的体积流量等于两条流线的流函数之差，与流线形状无关。

例题：不可压缩流体的速度分布为

$$u=Ax+By,\ v=Cx+Dy,\ w=0$$

若此流场满足连续性方程和无旋条件，试求

A，B，C，D所满足的条件。不计重力影响。

- 解：由连续方程可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

- 则有 $A+D=0$
- 又由于流动无旋，则有 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$
- 则有 $B-C=0$

5.4 有旋运动

- 流体微团的旋转角速度在流场内不完全为0的流动称为有**旋流动**(*rotational flow*)，否则称为**无旋流动**(*non-rotational flow*)，也称为势流(*potential flow*)。
- 设流体微团的旋转角速度$\omega(x,y,z,t)$，则

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} \stackrel{\Omega}{=} \Omega_x \boldsymbol{i} + \Omega_y \boldsymbol{j} + \Omega_z \boldsymbol{k}$$

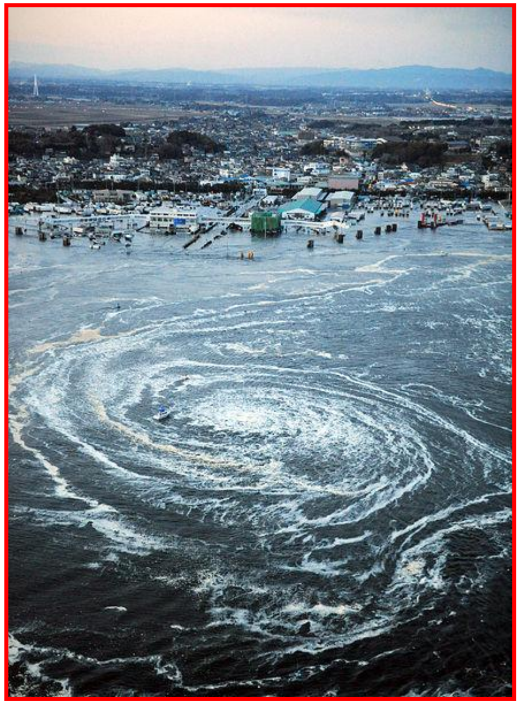
称为涡量(*vorticity*)，其中 Ω_x ,Ω_y，Ω_z 是涡量$\boldsymbol{\Omega}$ 在x、y、z坐标上的投影。

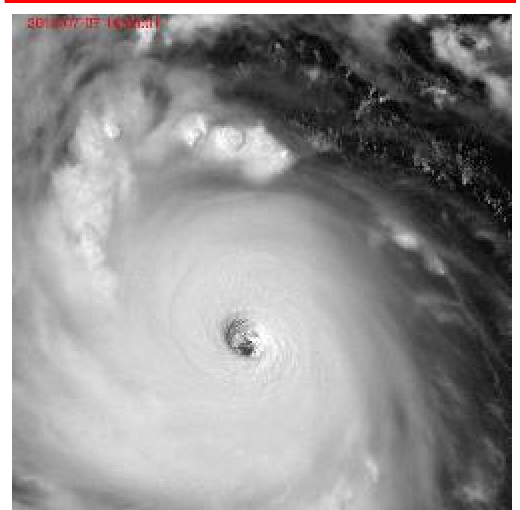
$$\left.\begin{aligned}
\Omega_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\
\Omega_y &= \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
\Omega_z &= \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}
\end{aligned}\right\}$$

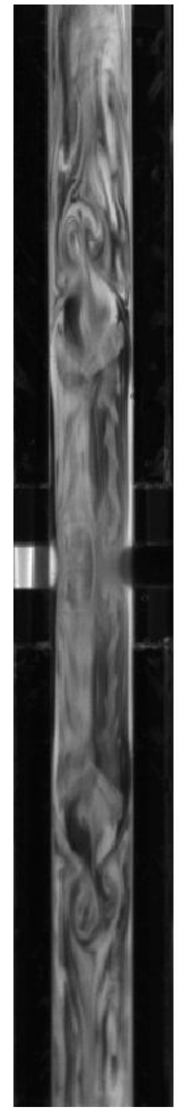
涡量是空间坐标和时间的矢量函数：

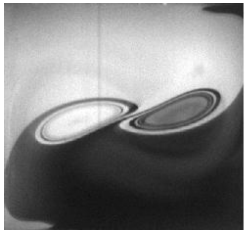
$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(x,y,z,t)$$

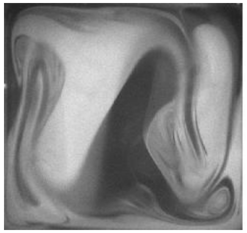
5.4 有旋运动

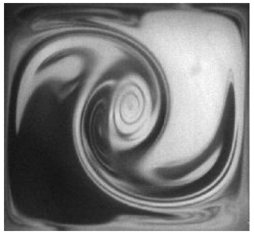


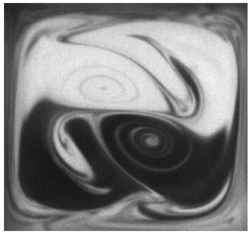




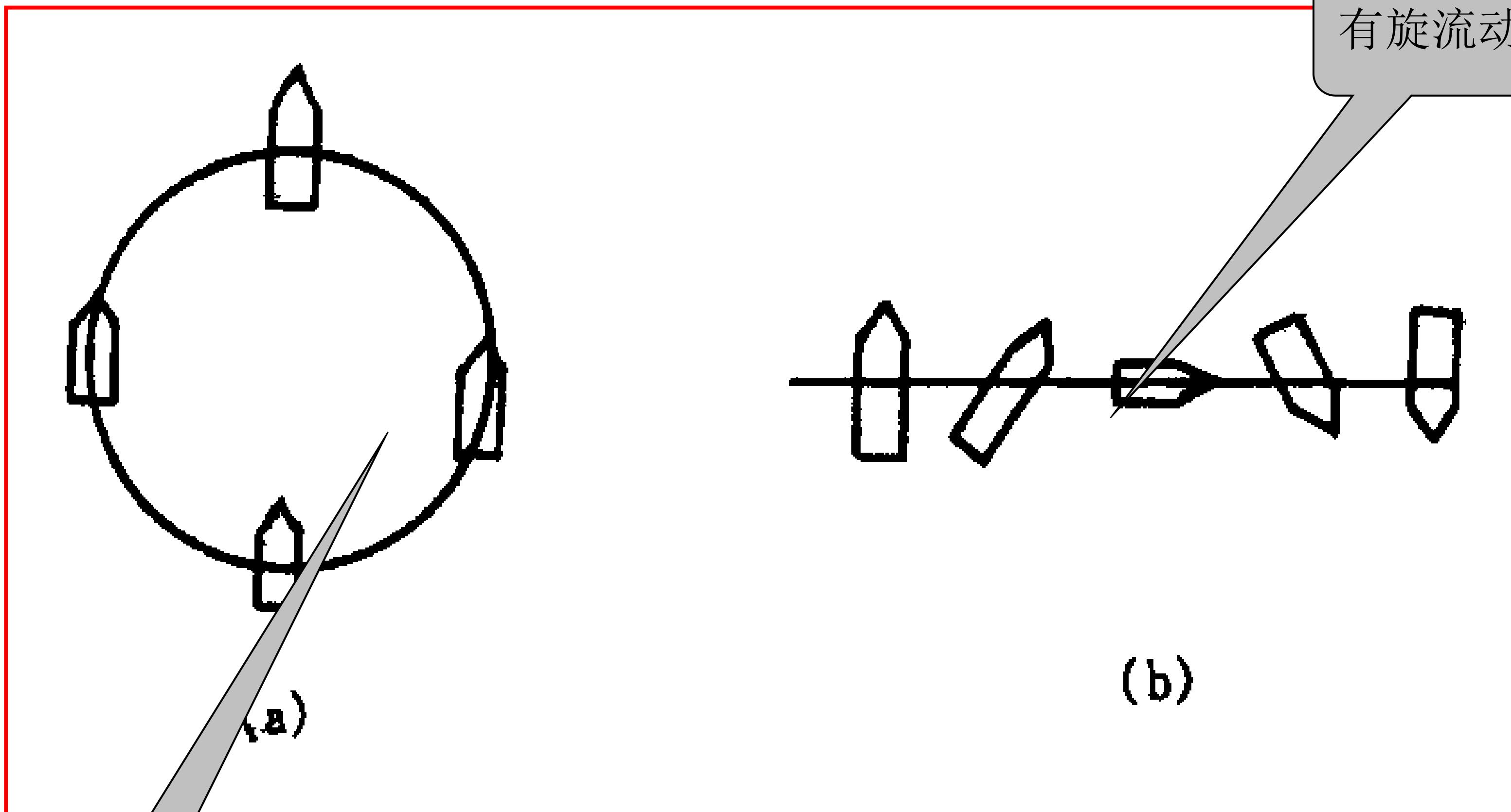








5.4 有旋运动



有旋流动

无旋流动

5.4 有旋运动

速度场和涡量场都是体现流动特征的矢量场，因此，描述速度场和涡量场的基本概念之间，具有一一对应的关系，例如：

速度场	旋涡场
速度	平均旋转角速度
流线	涡线
流管	涡管
流量	涡通量

5.4 有旋运动

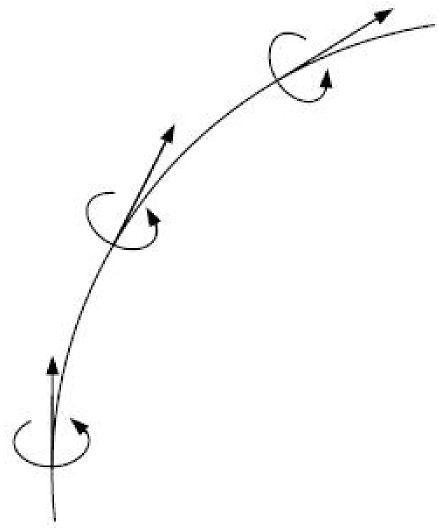


图5-7 涡线

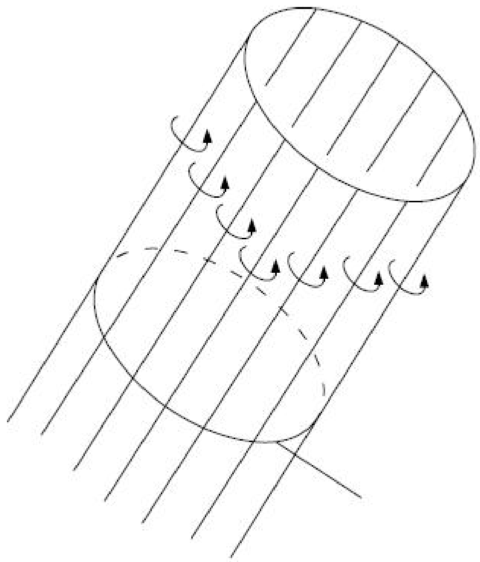


图5-8 涡管

涡线的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\omega_x}=\frac{\mathrm{d}y}{\omega_y}=\frac{\mathrm{d}z}{\omega_z}$$

涡通量

$$J=\int_A \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int_A \Omega_n \mathrm{d}A$$

$$=\int_A \Omega_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\Omega_y \mathrm{d}z\mathrm{d}x+\Omega_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在同一瞬间，通过同一涡管的各截面的涡通量相等: $\int_{A_1} \Omega_n dA=\int_{A_2} \Omega_n dA$

5.4 有旋运动

在同一瞬间，通过同一涡管的各截面的涡通量相等： $\int_{A_1} \Omega_n dA = \int_{A_2} \Omega_n dA$

https://mp.weixin.qq.com/s?__biz=MzI3MzE3OTI0Mw==&mid=2247524314&idx=1&sn=e186502e5427c71c27f8ee844af51539&chksm=eb25e8dedc5261c8372d84ecb808f14efe6be77f80bf998088570f1f270580ce5c6722e91852&scene=27

https://haokan.baidu.com/v?pd=wisenatural&vid=3999423398805053182

https://www.bilibili.com/video/BV1aY4y137QK/?vd_source=afc4987ce6d2e19534132da8ed0ef623

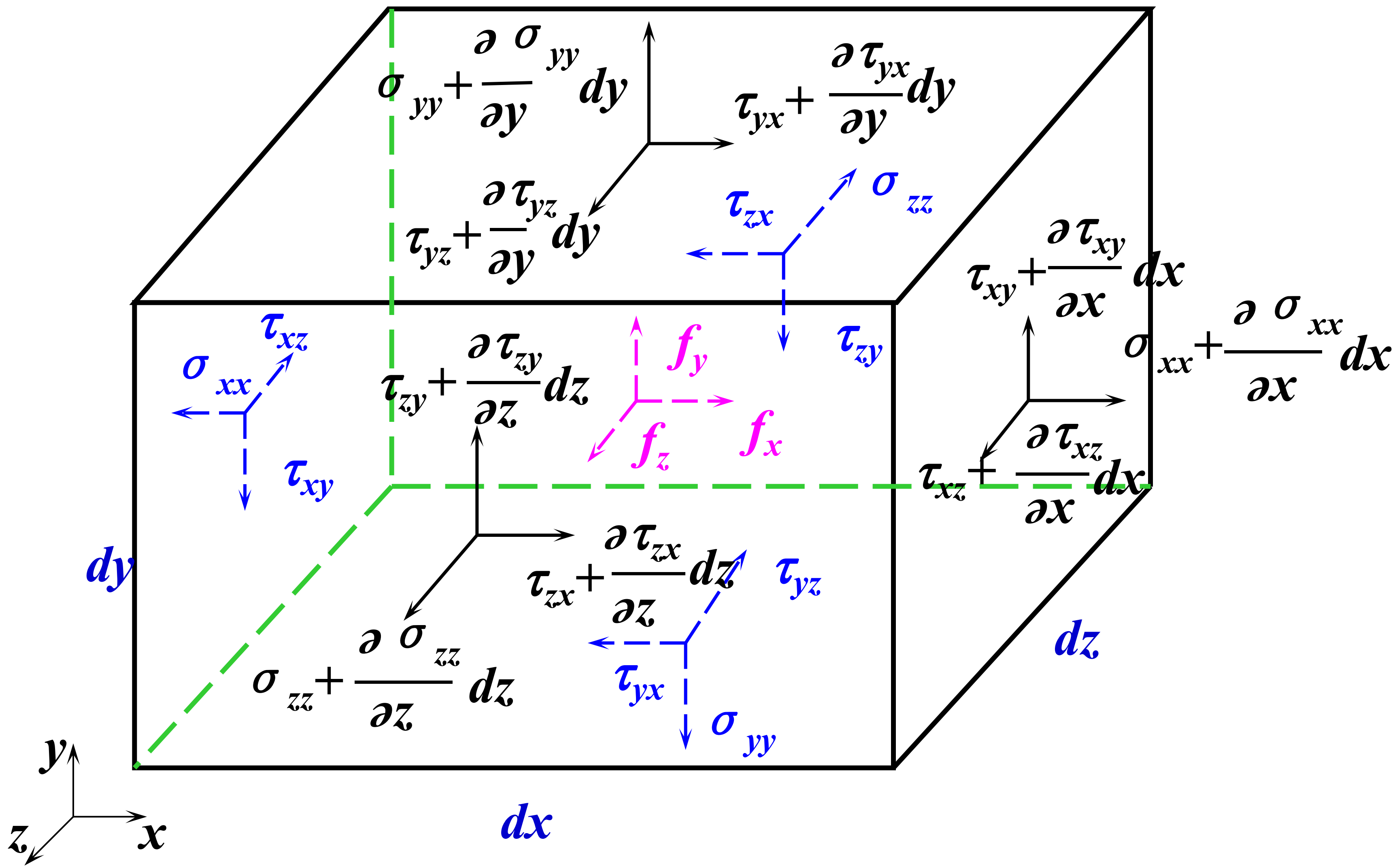
https://zhuanlan.zhihu.com/p/570986548

N-S方程简介

- 纳维-斯托克斯方程（Navier-Stokes equations），由纳维和斯托克斯导出，是一组描述不可压缩粘性流体动量守恒的运动方程。
- 基本假设：流体是连续的，所有涉及到的场全部是可微的。
- 在大多数实际情况下是非线性的偏微分方程，使得很多问题很难求解；在某些情况下，可简化为线性方程组。
- 是流体力学中最常用的方程之一，可用于分析天气、洋流、恒星运动、飞行器设计和血液循环等。

5.5 粘性流体的运动方程

5.5.1 N-S方程的建立



5.5 粘性流体的运动方程

5.5.1 N-S方程的建立

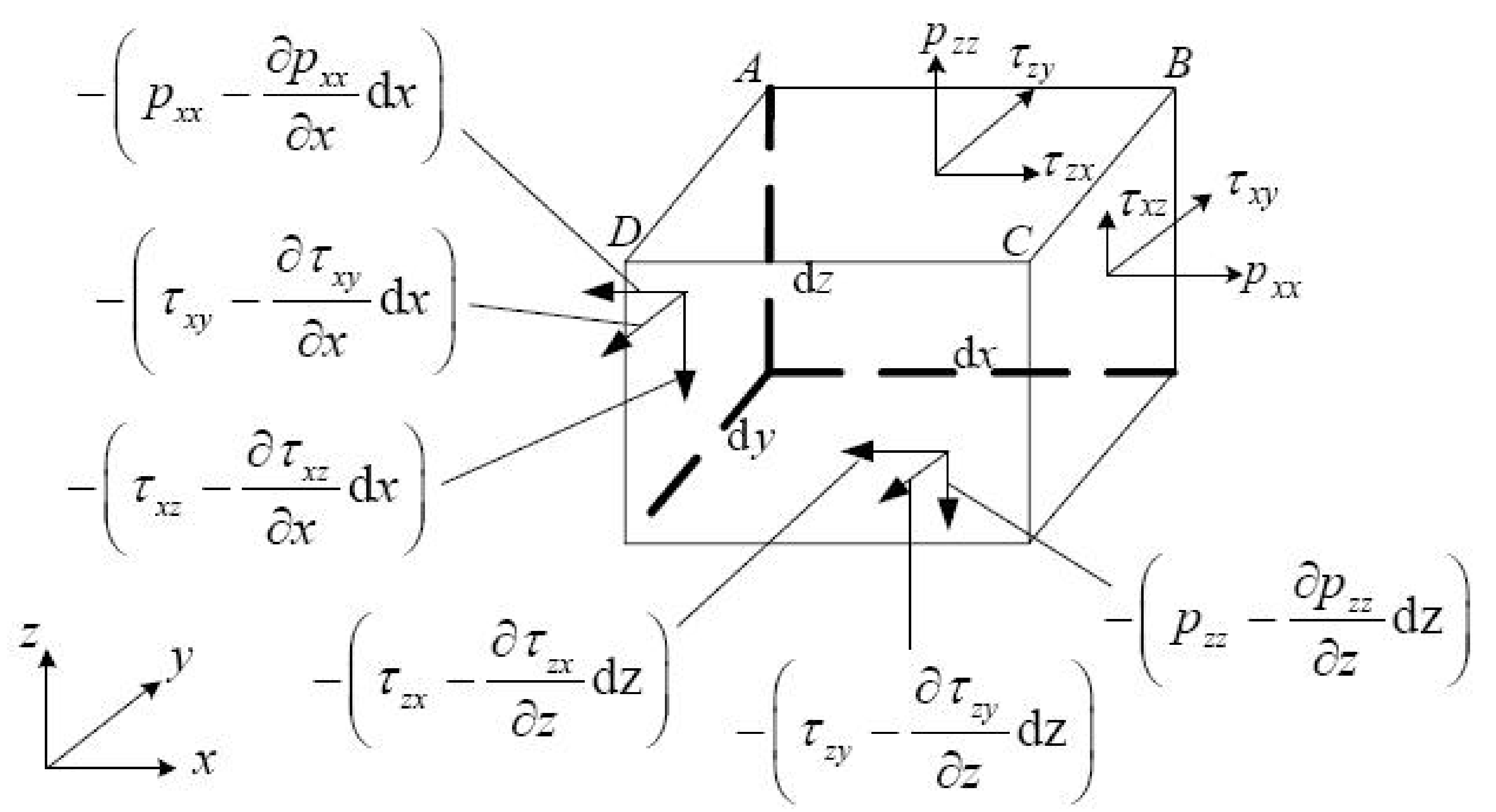


图 5-10 表面应力示意图

5.5 粘性流体的运动方程

x方向的运动微分方程：

$$\rho X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+p_{xx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[-\left(p_{xx}-\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}dx\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]+\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left[-\left(\tau_{yx}-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right]+\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left[-\left(\tau_{zx}-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}$$

粘性流体运动微分方程式：

$$\left.\begin{aligned}
X+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)&=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\\
Y+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)&=\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\\
Z+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)&=\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\}$$

Stokes假设（1845年）

（1）流体是连续的，它的应力矩阵与变形率矩阵成线性关系，与流体的平动和转动无关。

（2）流体是各向同性的，其应力与变形率的关系与坐标系的选择和位置无关。

（3）当流体静止时，变形率为零，流体中的应力为流体静压强。

广义牛顿内摩擦定理

5.5 粘性流体的运动方程

切应力表达式：

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}$$

法向应力表达式：

$$\left.\begin{aligned}p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\\ p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\\ p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}$$

5.5 粘性流体的运动方程

正应力与线变形率：

流体正应力由两部分构成：一部分是流体静压力产生的正应力（压应力-p）；另一部分是黏性流体运动变形所产生的正应力(拉伸或压缩应力)，且仅与流体的线变形速率有关。

$$\boldsymbol{p} = p_{xx}\mathbf{i}+\sigma_{yy}\mathbf{j}+p_{zz}\mathbf{k}=(-p+\Delta p_{xx})\mathbf{i}+(-p+\Delta p_{yy})\mathbf{j}+(-p+\Delta p_{zz})\mathbf{k}$$

$$\begin{cases}
\Delta p_{xx} = 2\mu\dfrac{\partial u_x}{\partial x}-\dfrac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{u}) \\
\Delta p_{yy} = 2\mu\dfrac{\partial u_y}{\partial y}-\dfrac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{u}) \\
\Delta p_{zz} = 2\mu\dfrac{\partial u_z}{\partial z}-\dfrac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{u})
\end{cases}$$

5.5 粘性流体的运动方程

正应力与线变形率：

$$u_y = u_z = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = \partial u_x / \partial x \Rightarrow \Delta p_{xx} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

加速时同方向一前一后两流体质点将处于分离趋势，流体线的变形为拉伸变形，故由此产生的附加黏性正应力为拉应力(正)；反之，减速时同方向一前一后两流体质点将处于挤压趋势，流体线的变形为压缩变形，故由此产生的附加黏性正应力为压应力(负)。

$$\Delta p_{xx} = p$$ **流体将发生分离，失去连续性**

$$p_{xx} = -p + \Delta p_{xx} \le 0$$ **真实流体不能承受拉应力**

5.5 粘性流体的运动方程

正应力与静压力：

流体静止时 $p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-p$

流体运动时 $\Delta p_{xx}+\Delta p_{yy}+\Delta p_{zz}=0$

$$p=-\frac{p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}}{3}$$

虽然运动流体的三个正应力在数值上一般不等于压力值，但它们的平均值却总是与静压力大小相等的。

5.5 粘性流体的运动方程

$$
\left.
\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+v\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+v\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)=\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+v\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)=\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (5\text{-}37)
$$

这就是不可压缩粘性流体的运动微分方程，一般称为**纳维—斯托克斯方程**(*Navier-Stokes equation*)，**简称*N-S*方程**，是不可压缩流体最普遍的运动微分方程。

以上三式加上不可压缩流体的连续性方程 $\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$

共四个方程，原则上可以求解方程组中的四个未知量，即流速分量U_x, U_y, U_z和压强 P 。

5.5 粘性流体的运动方程

由于速度是空间坐标x，y，z和时间t的函数，(5-37)式中的加速度项可以展开为四项：

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} \qquad (5\text{-}38)$$

式(5-38)中右边第一项表示空间固定点的流速随时间的变化(对时间的偏导数)，称为时变加速度或当地加速度，后三项表示固定质点的流速由于位置的变化而引起的速度变化，称为位变加速度。

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}39)$$

5.5.2 欧拉方程

当流体为理想流体时，运动粘度 ν =0，则*N-S*方程(5-39)可简化为：

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\
Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\\
Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}40)$$

式(5-40)中*X*，*Y*，*Z*是体积力在*x*，*y*，*z*方向上的分量，这组方程称欧拉平衡微分方程(*Euler equilibrium differential equation*)，简称欧拉方程，与式(3-12)的理想流体运动微分方程等价。

- 假设流体不可压缩、作定常运动，且作用在流体上的体积力只有重力，根据第三章内容可知，由欧拉方程可导得伯努利方程：

$$Z+\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}=\text{常数}$$

5.5.3 运动方程的定解条件

（1）初始条件

如果流动是非定常的，必须给出初始条件，初始条件决定所求函数在某一给定时刻的值，即未知变量初始时的空间分布。对不可压缩流体的运动，要求给定 $t=t_0$ 时的 u_x,u_y,u_z,p ，即

$$u_x(x,y,z,t_0)=f_1(x,y,z)$$

$$u_y(x,y,z,t_0)=f_2(x,y,z)$$

$$u_z(x,y,z,t_0)=f_3(x,y,z)$$

$$p(x,y,z,t_0)=f_4(x,y,z)$$

式中，f_1 ，f_2 ，f_3 ，f_4 都是 t_0 时刻的已知函数。

5.5.3 运动方程的定解条件

(2) 边界条件

边界条件决定所求函数在流动边界上的值，它们在不同的具体问题中是不相同的。对于工程问题，常见的流场边界条件可以分为（或简化为）以下三类：

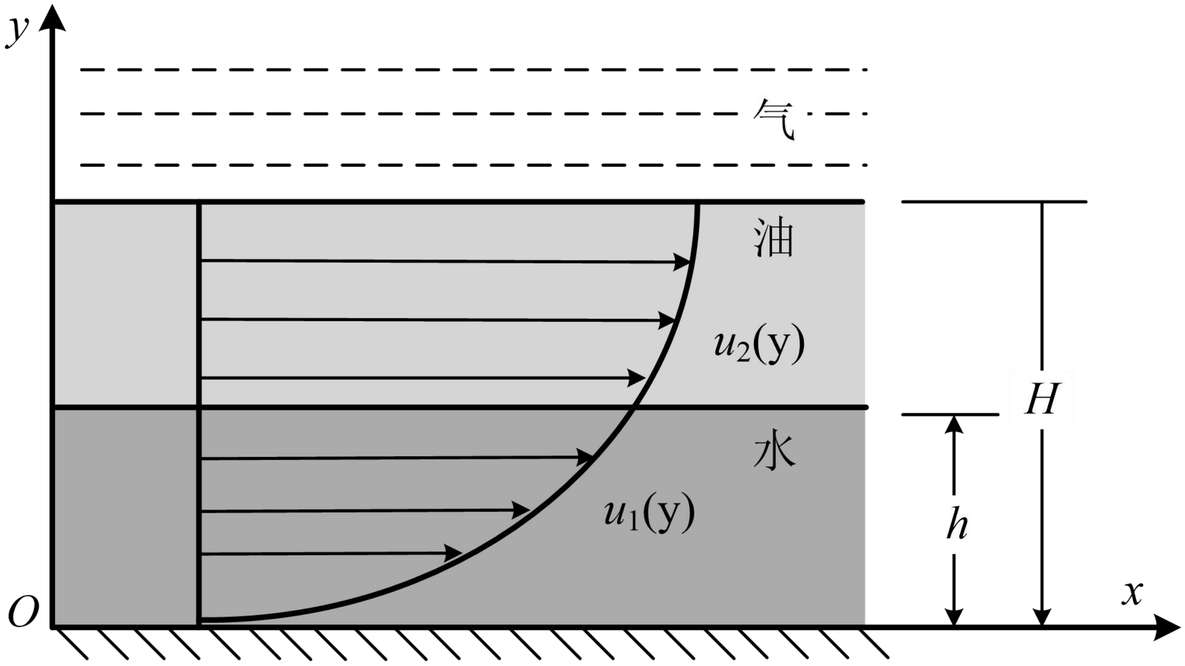
① **固壁-流体边界**　由于流体具有黏滞性，故在与流体接触的固体壁面上，流体的速度将等于固体壁面的速度。特别地，在静止的固体壁面上，流体的速度为零。

② **液体-液体边界**　由于穿越液-液界面的速度分布或切应力分布具有连续性，故液-液界面两侧的速度或切应力相等。

③ **气体-液体边界**　对于非高速流动，气-液界面上的切应力相对于液相内的切应力很小，故通常认为气-液界面上切应力为零，由牛顿剪切定理可知，这等同于认为**气-液界面上速度梯度为零**。

5.5.3 运动方程的定解条件

（2）边界条件



常见边界条件

5.5.3 运动方程的定解条件

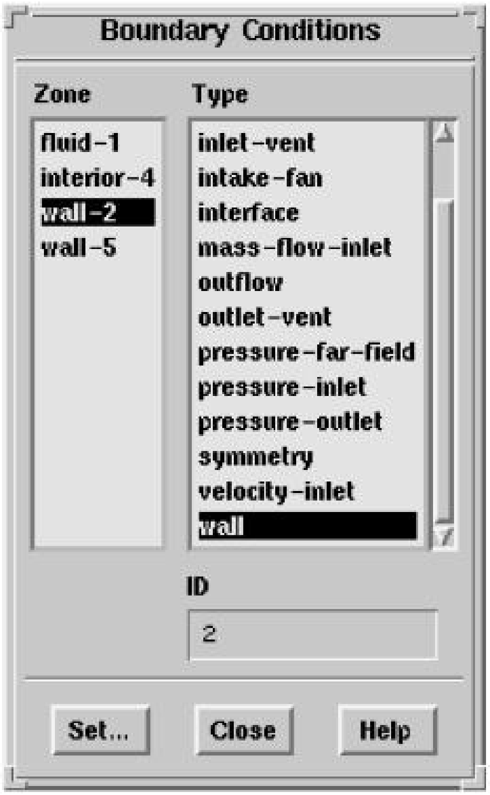


Figure 1: 边界条件面板

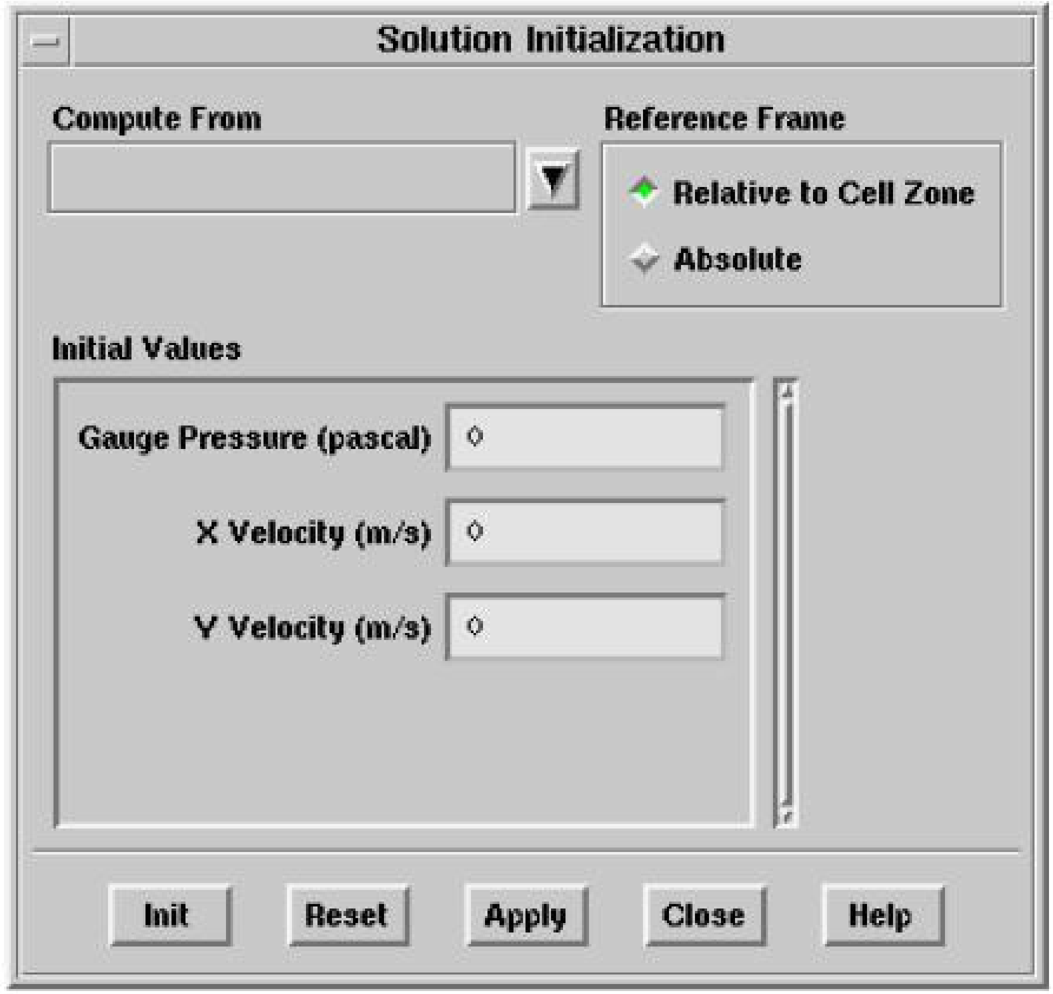


Figure 1:解的初始化面板

5.5.4 *N-S*方程的求解

- 解*N-S*方程可以得到流动问题的精确解，但是因为*N-S*方程是二阶非线性非齐次偏微分方程。对于大多数工程中的复杂的不可压缩粘性流体的流动问题，特别是湍流脉动，*N-S*方程无法精确求解，只能通过计算机数值计算或实验研究得到。

- 粘性流体运动方程组中有四个未知数（三个速度分量U_x, U_y, U_z及压力p），它们是独立变量x, y, z, t以及一些参数如 μ, ρ, g等的函数。假设 μ, ρ 是常数，体积力仅有重力，则四个未知数有四个方程式，问题是可解的。但由于这组方程中包含有未知数的乘积，如 $u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x}$，因而方程是非线性的。求它的一般解，在数学上有极大的困难，因此，只能在若干特定情况下求解。求解运动方程有三种方法：精确解、近似解和数值解。

例5-3　泊谡/库特（*Poiseuille/Couette*）流—平行平板间的流动

不可压缩的牛顿流体，在压力梯度$\frac{\partial p}{\partial x}$作用下，于相距为$h$的两平行平板之间作定常流动（泊谡流），当上面的一块板以均匀速度U_0沿x方向运动时，称为库特流，如图5-13附图（a）所示。假定流动是缓慢的，粘性引起的发热可以忽略，不计质量力。试求远离进、出口处流体的速度分布与流量。

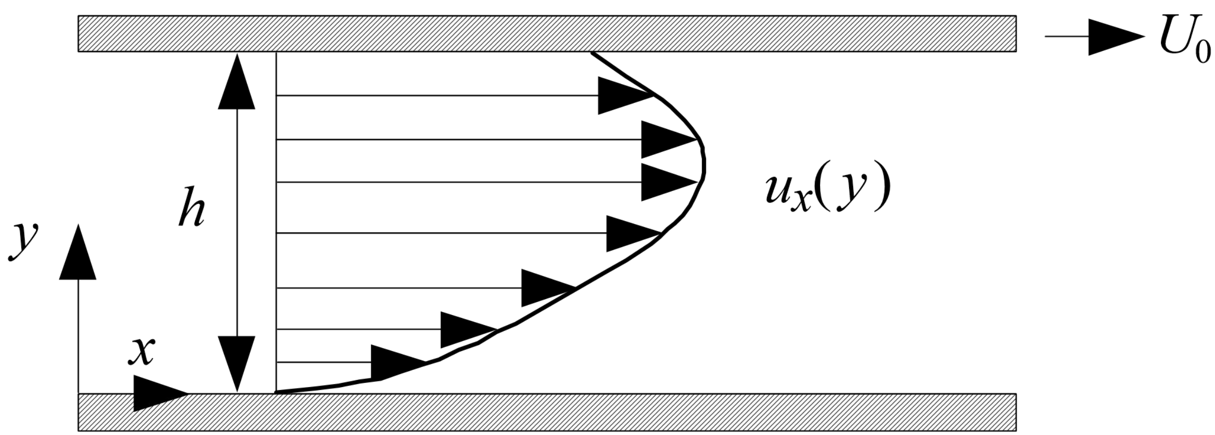
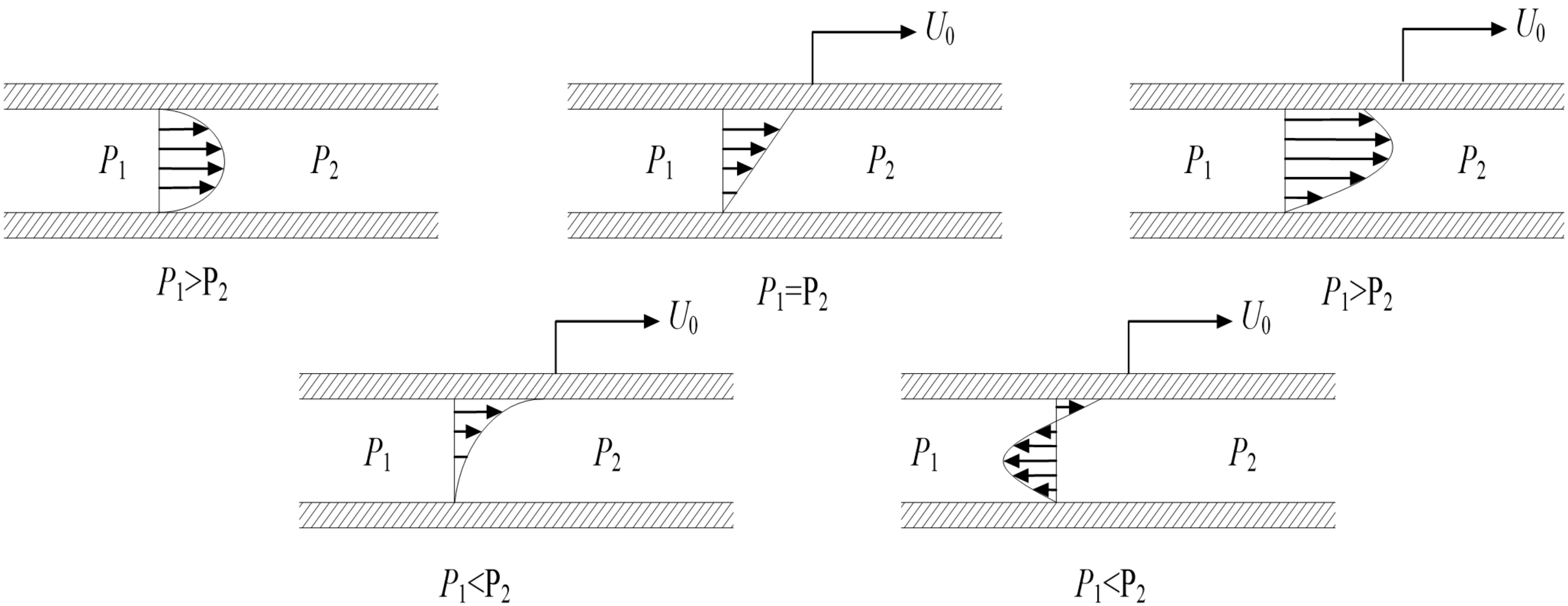
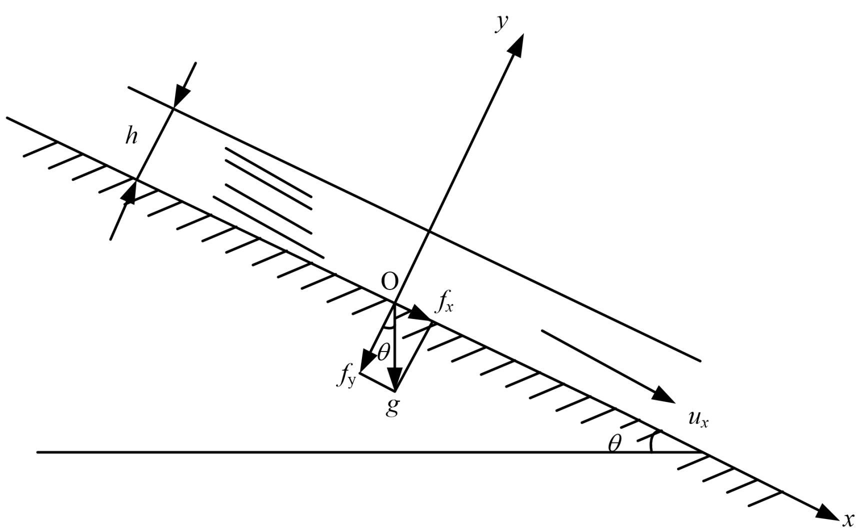


图5-13 附图(a)

$$u_x = U_0\left(\frac{y}{h}\right) - \frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]$$



例5-4 一块与水平面成 角的斜平板，在垂直图面的z方向为无限长。动力黏度为 的液体，在重力作用下沿平板作定常层流运动。假定液体层厚度为h，上表面是大气压p_a，如图5-14所示。试求流层内的压强和速度分布表达式，以及z方向取单位长度的流量表达式。



题5-4 图 详见PPT-第五章 不可压缩流体一维流动-降膜流动