# 第八章　相量及相量分析法

● 重点：

1. 正弦量的相量表示；

2. 阻抗和导纳；

3. 掌握正弦稳态电路的分析；

4. 掌握非正弦稳态电路的分析；

5. 串、并联谐振的概念；

# 8.1 正弦量的基本概念

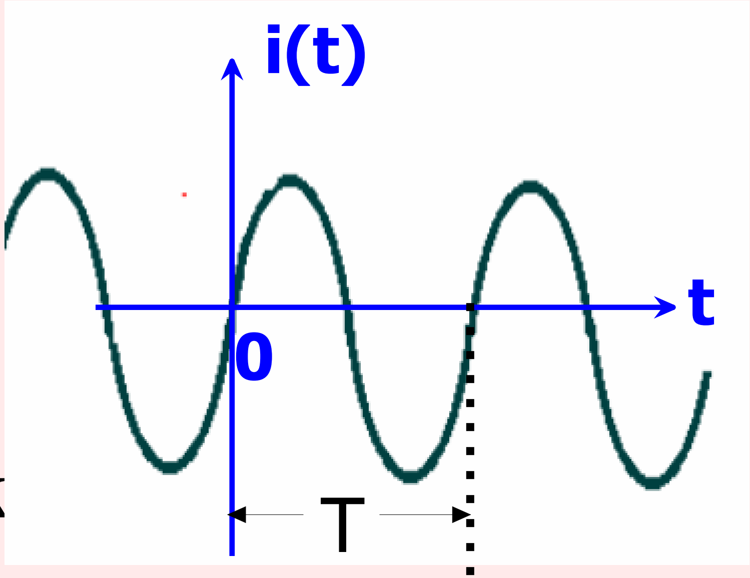
## 1. 正弦量

随时间按正弦规律变化的电流或电压或功率等。

**瞬时值表达式：**

$$i(t)=I_m\cos(w\,t+\Psi)$$

**波形：**




正弦量为周期函数　　　$f(t)=f\,(\,t+k$

**周期*T* (*period*)和频率*f* (*frequency*)：**

$$f \quad \frac{1}{T}$$

周期*T*：重复变化一次所需的时间。 单位：s，秒

频率*f*：每秒重复变化的次数。 单位：Hz，赫(兹)

● 正弦稳态电路 → 激励和响应均为正弦量且达到稳态的电路，简称为正弦电路或交流电路。

● 研究正弦电路的意义：

（1）正弦稳态电路在电力系统和电子技术领域占有十分重要的地位。

优点：正弦函数是周期函数，其加、减、求导、积分运算后仍是同频率的正弦函数

正弦信号容易产生、传送和使用。

（2）正弦信号是一种基本信号，任何变化规律复杂的信号可以分解为按正弦规律变化的分量。

## 2. 正弦量的三要素

$i(t)=I_m\cos(w\,t+\ \ )$

(1) 幅值（*amplitude*) (振幅、 最大值) $I_m$

反映正弦量变化幅度的大小。

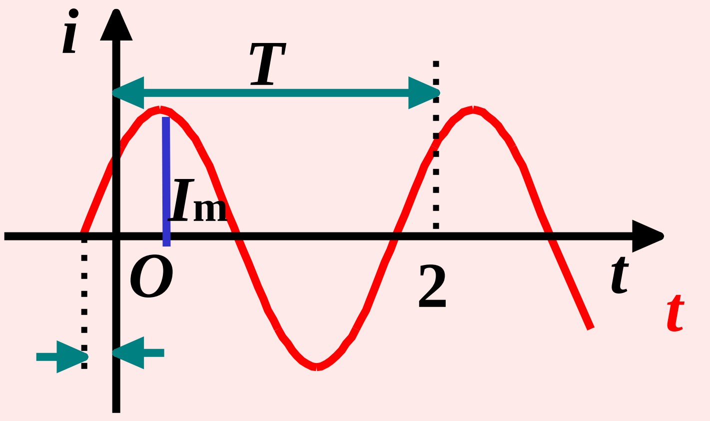
(2) 角频率(*angular frequency*) $\omega$

相位变化的速度， 反映正弦量变化快慢。

$2\quad f\quad 2/T$　　单位： rad/s ， 弧度 / 秒

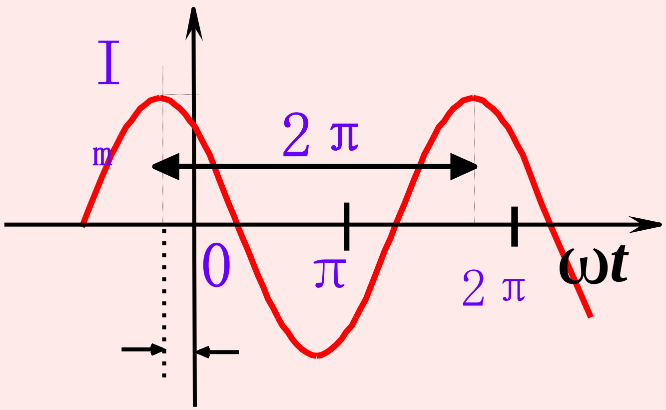
(3) 初相位(*initial phase angle*) *y*

反映正弦量的计时起点，
常用角度表示。 t=0 时的相
位 或 相角。

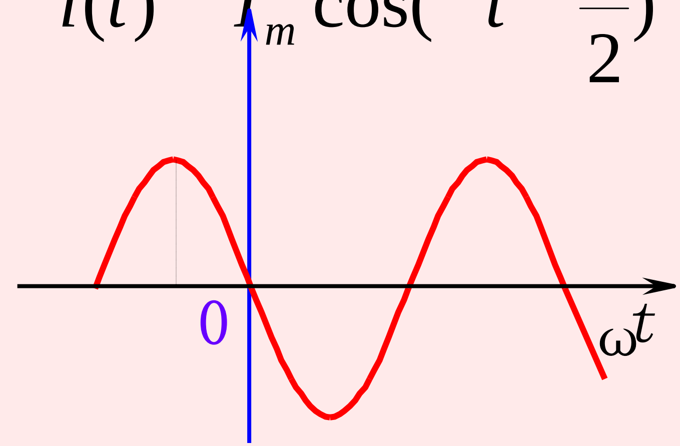


# 同一个正弦量，计时起点不同，初相位不同。

$$i(t) \quad I_m \cos( \quad t \qquad )$$

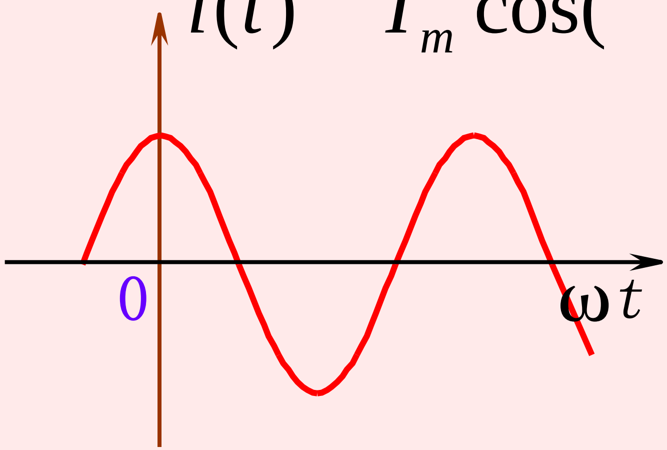



$$i(t) \quad I_m \cos( \quad t \quad \frac{}{2})$$



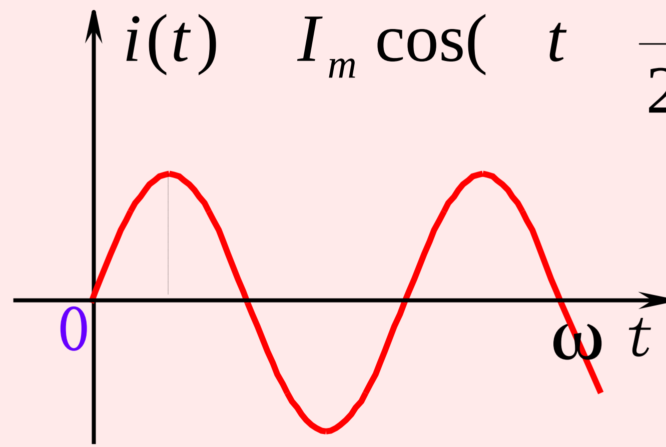

= /2

$$i(t) \quad I_m \cos( \quad t)$$




=0

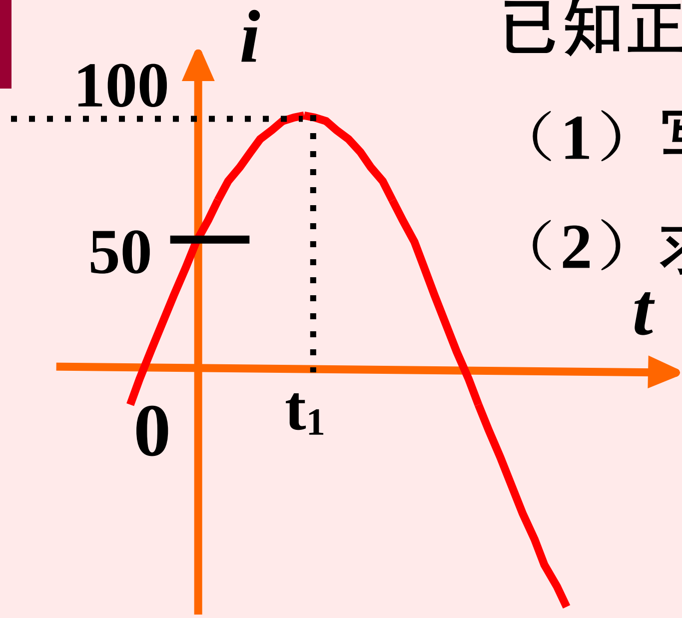
$$i(t) \quad I_m \cos( \quad t \quad \frac{}{2})$$




=− /2

一般规定：| | 。

**例**




已知正弦电流波形如图， ＝$10^3$rad/s，

（1）写出*i(t)*表达式；

（2）求最大值发生的时间$t_1$

**解** $i(t)\ 100\cos(10\ )$ $^{3}$

$t$ 050100cos

/3

由于最大值发生在计时起点右侧

$\overline{\ \ }$
3

$i(t)\ 100\cos(10\ )$ $^{3}$ $\overline{\ \ }$
3

$10^3 t_1$ /

$t_1\ ms\ \frac{/3}{10^3}$ 1.047

## 3. 同频率正弦量的相位差 (*phase difference*)。

设 $u(t)=U_{m}\cos(\quad t+\quad{}_{u})$，$i(t)=I_{m}\cos(\quad t+\quad{}_{i})$

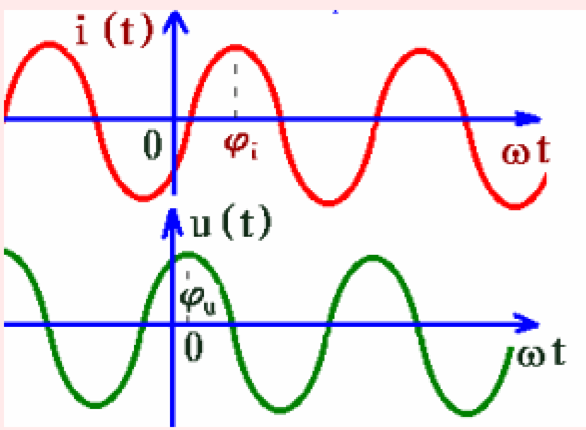
则 相位差 ： $\quad = (\quad t+\quad{}_{u})-(\quad t+\quad{}_{i})=\quad{}_{u}-\quad{}_{i}$

等于初相位之差

规定：| | (180°)。

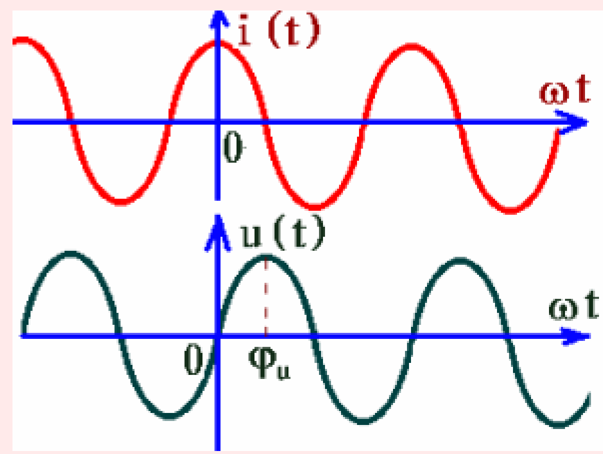
$>0$， 超前，

(*u* 比*i*先到达最大值)；



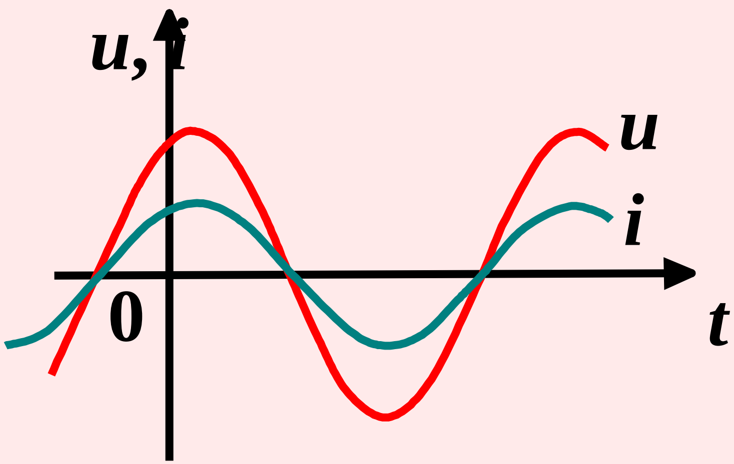

$<0$， *u* 滞后 *i* ，

*i* 比 *u* 先到达最大值。

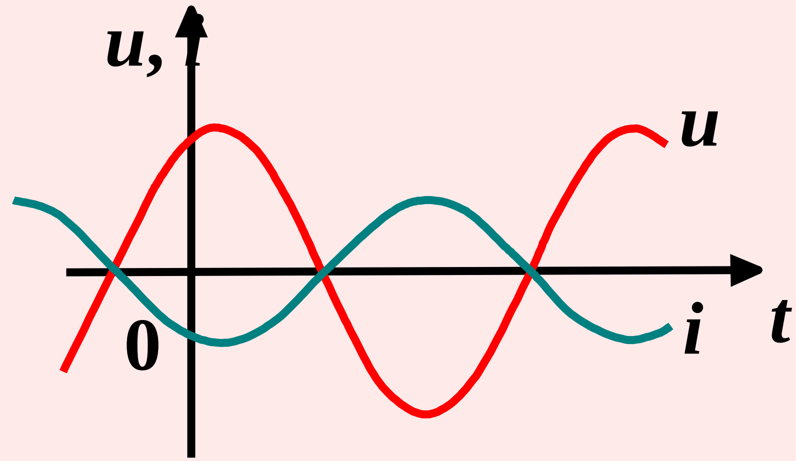


## 特殊相位关系：

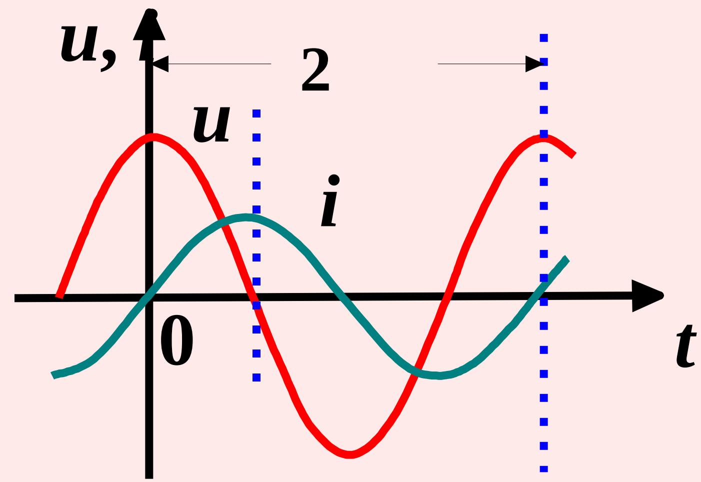
0， 同相：




= ( 180°)，反相：




= p/2,




*u* 领先 *i* p/2, 不说 *u* 落后 *i* 3p/2；

*i* 落后 *u* p/2, 不说 *i* 领先 *u* 3p/2。

**相位差从两波形上看为两个最近波峰（过零点）之间的角度值。**

**例** 计算下列两正弦量的相位差。 **解**

(1) $i_1(t)$ 10cos(100 34) /

$i_2(t)$ 10cos(100 2) /

34(/2)540 / /

25434 / /

(2) $i_1(t)$ 10cos(100 30) 0

$i_2(t)$ 10sin(100 15) 0

$i_2(t)$ 10cos(100105) 0

30(105)135 000

(3) $u_1(t)$ 10cos(100 30) 0

$u_2(t)$ 10cos(200 45) 0

12

不能比较相位差

(4) $i_1(t)$ 5cos(100 30) 0

$i_2(t)$ 3cos(100 30) 0

$i_2(t)$ 3cos(100150) 0

30(150)120 000

两个正弦量进行相位比较时应满足同频率、同函数、同符号，且在主值范围比较。

# 4. 周期性电流、电压的有效值

周期性电流、电压的瞬时值随时间而变，为了衡量其平均效果工程上采用有效值来表示。

- 周期电流、电压有效值(*effective value*)定义

直流$I$　　$R$

交流$i$　　$R$

物理意义

$$W = RI^2T \quad = \quad W = \int_0^T Ri^2(t)\,\mathrm{d}t$$

在同一个周期和同一负载上与交流信号产生相同热效应的直流电的量值——有效值。

电流有效值定义为

$$I \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

有效值也称均方根值(*root-meen-square*)

同样，可定义电压有效值：

$$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

● 正弦电流、电压的有效值

设 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\Psi)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\Psi)\,\mathrm{d}t}$$

$$\because \int_0^T \cos^2(\omega t+\Psi)\,\mathrm{d}t=\int_0^T \frac{1+\cos 2(\omega t+\Psi)}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t\Big|_0^T=\frac{T}{2}$$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\cdot\frac{T}{2}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=0.707I_m$$

$$I_m=\sqrt{2}I$$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\Psi)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)$$

同理，可得正弦电压有效值与最大值的关系：

$UUUU\frac{1}{\sqrt{2}}$ $_{mm}$ 或 $2$ $\sqrt{\ }$

若一交流电压有效值为$U$=220V，则其最大值为$U_m$ 311V；

$U$=380V， $U_m$

注

（1）工程上说的正弦电压、电流一般指有效值，如设备额定值，但耐压值指的是最大值。

（2）测量中，交流测量仪表指示的电压、电流读数一般为有效值。

（3）区分电压、电流的瞬时值、最大值、有效值的符号。

$i$ ， $I_m$ ， $I$

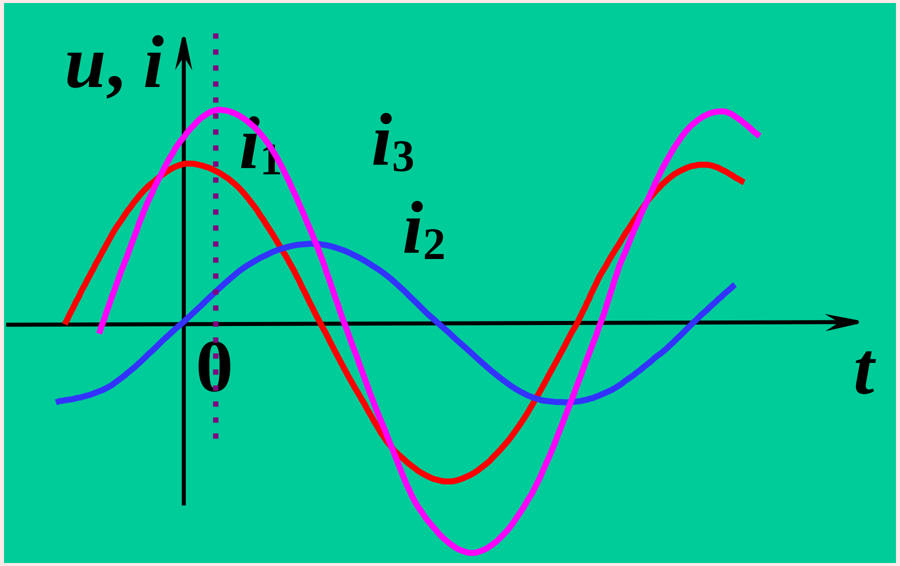
# 8.2 正弦量的相量表示

## 1. 问题的提出：

$i_1$ $i_2$ $i_1+i_2$ $i_3$

$I_1$ $I_2$ $I_3$

1 2 3




因一个正弦稳态电路中各支路电压或电流是同频的正弦量，所以，只要确定初相位和有效值 或最大值 就行了。因此，可以利用相量法进行分析。

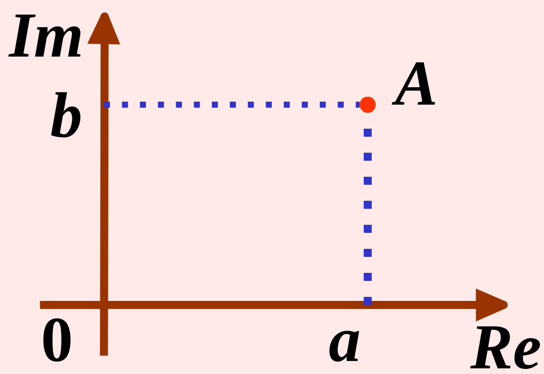
相量法需要运用复数的运算。

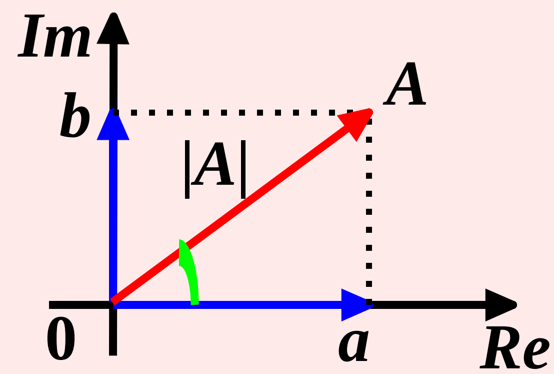
## 2. 复数及运算

$$A=a+jb$$

● 复数A的表示形式

$(j=\sqrt{-1}\ $ 为虚数单位$)$




$$A=a+jb$$

$$A=|A|e^{j\theta}$$

$$A=|A|e^{j\theta}=|A|(\cos\theta+j\sin\theta)$$

$$A=|A|e^{j\theta}=|A|\angle\theta$$

# 复数运算

$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

(1)加减运算——直角坐标

$AAAA_{121212}$ | || |

(2) 乘除运算——极坐标

$\frac{AA_{11}}{AA_{22}}$ || || $\grave{e}_{12}$

# 旋转因子

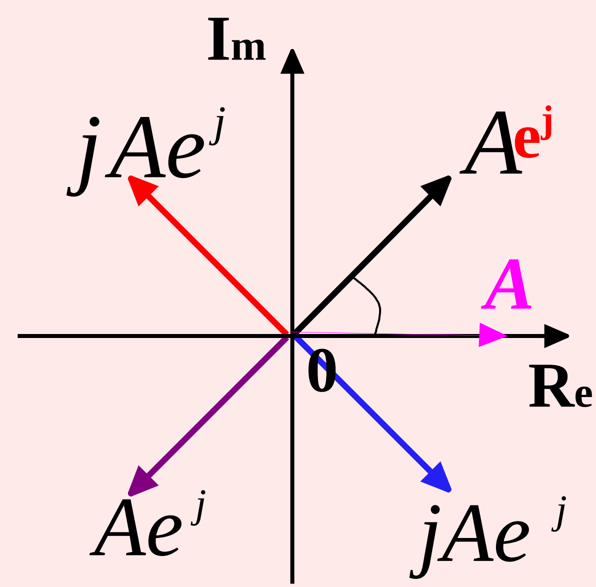
复数 $e^{j}$ = cos $y$ + jsin = 1∠ 称为旋转因子。

$A\,e^{j}$ ⟹ $A$逆时针旋转一个角度 ，模不变。

$e^{j\frac{}{2}}$ $\cos\frac{}{2}$ $j\sin\frac{}{2}$ $j$

$e^{j(\frac{}{2})}$ $\cos(\frac{}{2})$ $j\sin(\frac{}{2})$ $j$

$e^{j(\;)}$ $\cos(\;)$ $j\sin(\;)$ 1




+j，–j，−1 都可以看成旋转因子。

## 3. 正弦量的相量表示

无物理意义

造一个复函数 $A(t)=\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\Psi)}$

$=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)+j\sqrt{2}I\sin(\omega t+\Psi)$

是一个正弦量
有物理意义

对*A*(*t*)取实部： $\mathrm{Re}[A(t)]=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi)=i(t)$

对于任意一个正弦时间函数都有唯一与其对应的复数函数

$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\Psi) \leftrightarrow A(t)=\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\Psi)}$

*A*(*t*)还可以写成 $A(t)=\underbrace{\sqrt{2}Ie^{j\Psi}}e^{j\omega t}=\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}$

称 $\dot{I}=Ie^{j\Psi}=I\angle\Psi$

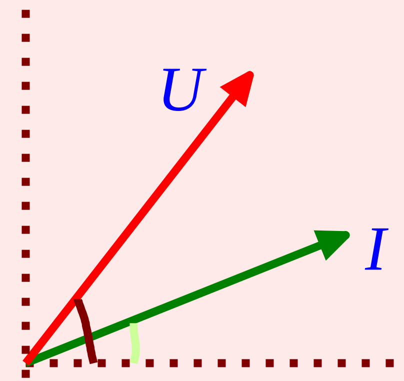
为正弦量 **i(t)** 对应的相量。

Ø 为正弦量 $i(t)$ 对应的相量。

$$i(t)\quad \sqrt{2}I\cos(\quad t\quad Ø)\qquad I\quad I\quad Ø$$

相量的模表示正弦量的有效值

相量的幅角表示正弦量的初相位




同样可以建立正弦电压与相量的对应关系:

$$u(t)\quad \sqrt{2}U\cos(\quad)$$

**例1** 已知

$i t\quad 141.4\cos(314 30)\text{A}\ ^{o}$

$u\quad 311.1\cos(314t 60)\text{V}^{o}$

试用相量表示 $i, u$ .

**解**

$I\quad 100 30\text{A}^{o}$

$U\quad 220 60\text{V}\ ^{o}$

**例2.** 已知 $\dot{I}\quad 50\quad 15^{\circ}\,\mathrm{A},\ f\quad 50\mathrm{Hz}$ .

试写出电流的瞬时值表达式。

**解:** $i\quad 50\sqrt{2}\cos(\,314\,t\quad 15^{\circ})\,\mathrm{A}$

**相量的几何意义:**

$$\dot{I}\quad I \qquad\qquad i(t)\quad \sqrt{2}I\cos(\quad t\qquad)$$

$$\dot{I}\quad I \qquad\qquad A(t)\quad \sqrt{2}Ie^{j(wt\quad)}\quad \sqrt{2}\quad \dot{I}\quad e^{j\quad t}$$

相量

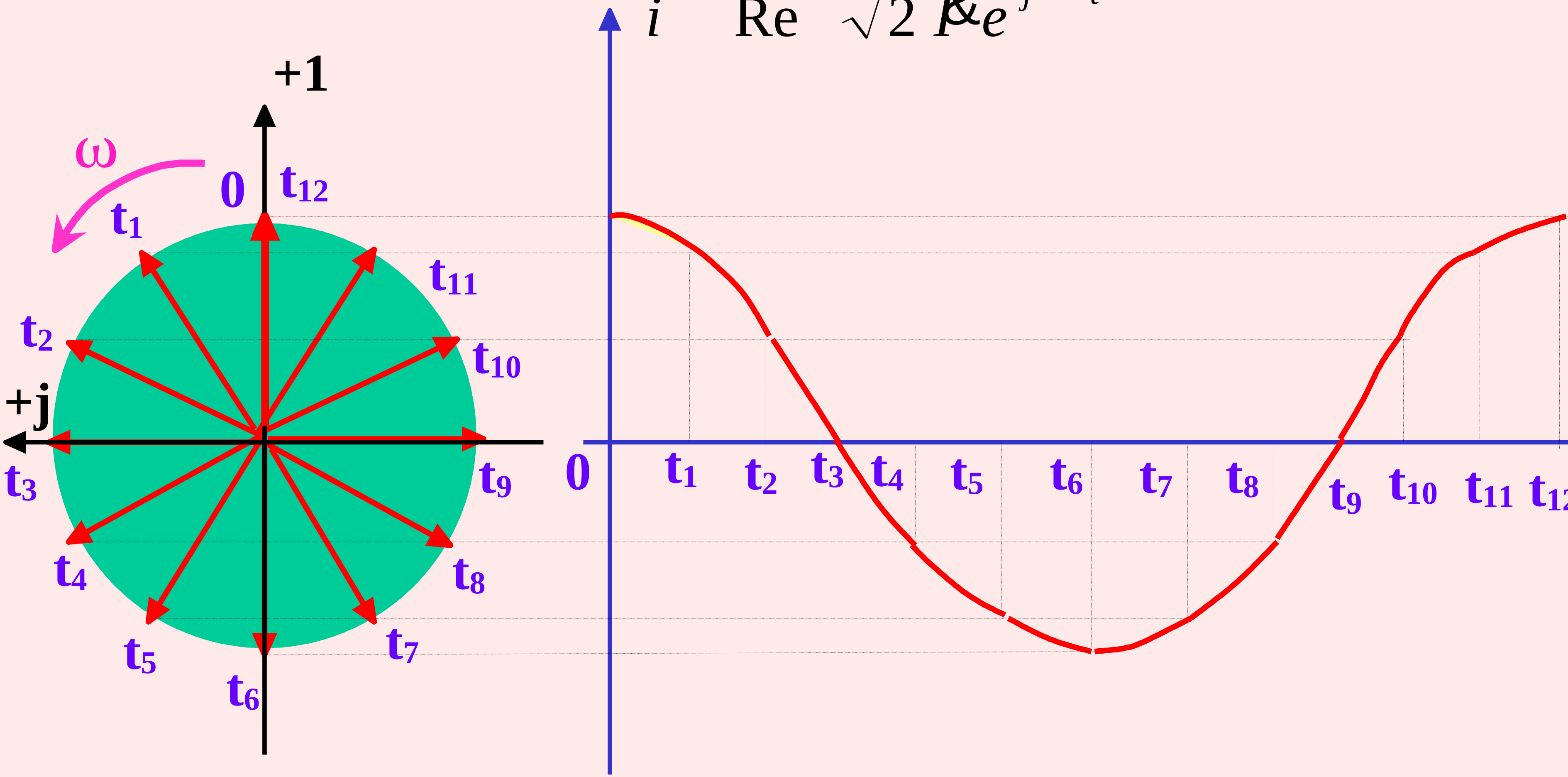
旋转因子

A(t)是旋转相量

$$A(t)\quad \sqrt{2}I\cos(\quad t\qquad)\quad \mathrm{j}\sqrt{2}I\sin(\quad t\qquad)$$

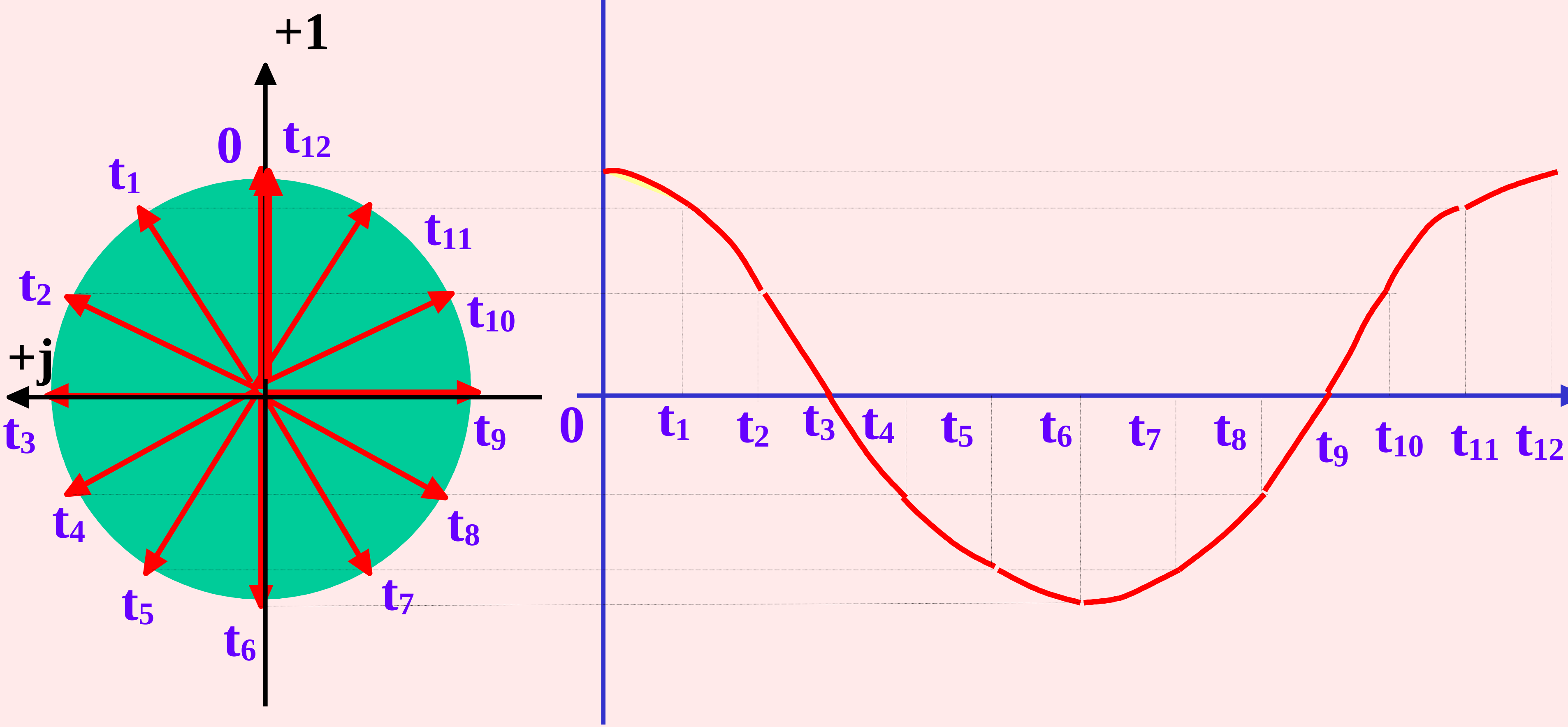
**旋转相量在实轴上的投影就是正弦函数!**

$$i = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\dot{I}e^{j\omega t}\right]$$




正弦电流i 的瞬时值等于其对应的旋转矢量 $\sqrt{2}\,\dot{I}e^{j\omega t}$ 在实轴上的投影

$$i = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\,\dot{I}e^{j\omega t}\right]$$




正弦电流i 的瞬时值等于其对应的旋转矢量 $\sqrt{2}\,\dot{I}e^{j\omega t}$ 在实轴上的投影

$i(t)=I_m\cos(\quad t+\quad)$ $\quad\sqrt{2}\,I\cos(\quad)$

$i(t)\quad \sqrt{2}I\cos(\quad t\quad \varnothing)\qquad I\quad I\quad \varnothing$

复数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}} = \cos y + \mathrm{j}\sin \quad = 1\angle$ 称为旋转因子。

$A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}}$ ⟹ $A$逆时针旋转一个角度 ，模不变。

+j , –j , −1 都可以看成旋转因子。

**复函数**

$A(t)\quad 2\mathrm{e}\quad \sqrt{\ }\quad \mathrm{j}()\ t \qquad \sqrt{2}\,\cos(\ )\mathrm{j}2\sin(\ )\quad \sqrt{\ }$

$A(t)\quad 2\,\mathrm{e}\mathrm{e}2\sqrt{\ }\quad \mathrm{j}\quad \mathrm{jj}\quad tt \quad \sqrt{\ }$ &

对$A(t)$取实部： $\mathrm{Re}[A(t)]\ 2\cos(\sqrt{\ }\ )$

# 8.1.3 相量法的基本性质

**(1) 线性性质**

已知： $u_1(t) \leftrightarrow \dot{U}_1$，$u_2(t) \leftrightarrow \dot{U}_2$

则

$$u(t) = k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t)$$

$$\updownarrow$$

$$\dot{U} = k_1 \dot{U}_1 + k_2 \dot{U}_2$$

故同频正弦量相加减运算变成对应相量的相加减运算。

**例**

$u_1(t)=6\sqrt{2}\cos(314t+30^\circ)\ \mathrm{V}$

$u_2(t)=4\sqrt{2}\cos(314t+60^\circ)\ \mathrm{V}$

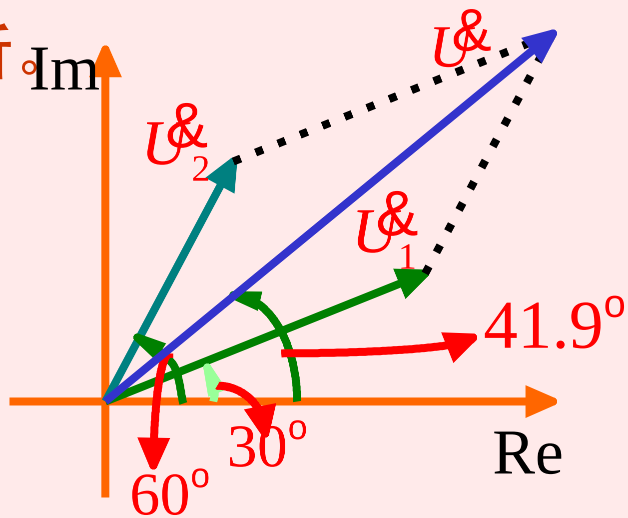
$\Rightarrow \begin{cases}\dot{U}_1 = 6\angle 30^\circ\ \mathrm{V}\\ \dot{U}_2 = 4\angle 60^\circ\ \mathrm{V}\end{cases}$

$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2 = 6\angle 30^\circ + 4\angle 60^\circ = 5.196 + j3 + 2 + j3.46$

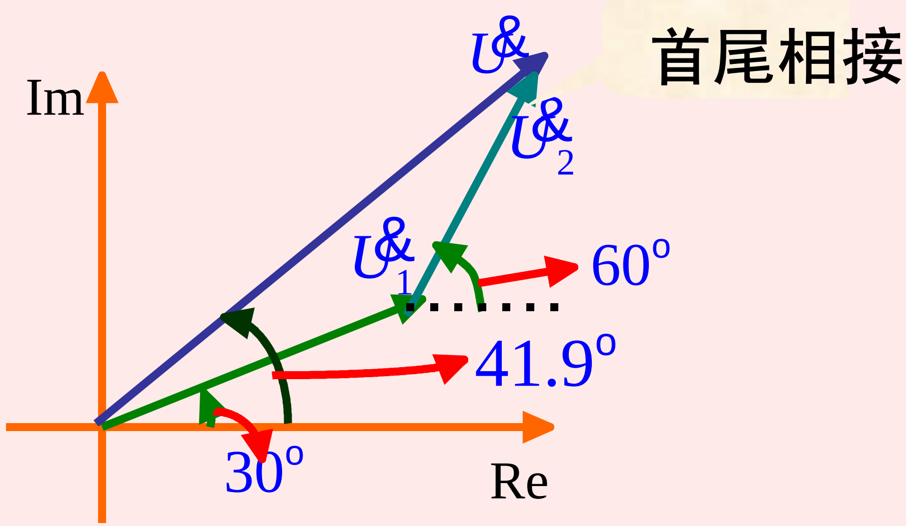
$= 7.196 + j6.46 = 9.64\angle 41.9^\circ\ \mathrm{V}$

$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=9.64\sqrt{2}\cos(314t+41.9^\circ)\ \mathrm{V}$

同频正弦量的加、减运算可借助相量图进行。相量图在正弦稳态分析中有重要作用，尤其适用于定性分析。




平行四边形法则




三角形法则

## 2 . 正弦量的微分，积分运算

$i \quad \dot{I}$

$\frac{di}{dt} \quad j\ \dot{I}$

$i \quad \dot{I}$

$idt \quad \frac{1}{j}\dot{I}$

微分运算：

$\frac{di}{dt} \frac{d}{dt} \mathrm{Re}\sqrt{2}\ \dot{I}e^{jt}$

$\mathrm{Re}\sqrt{2}\ \dot{I}je^{jt}$

积分运算：

$idt\ \mathrm{Re}\sqrt{2}\ d\ \dot{I}e^{jt}$

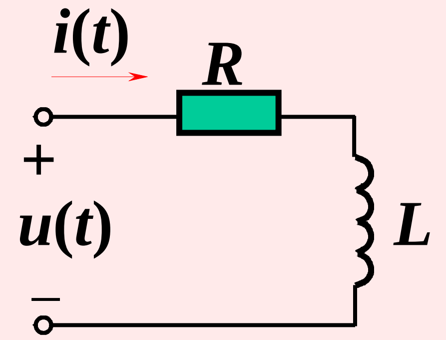
$\mathrm{Re}\sqrt{2}\ \frac{\dot{I}}{j}e^{jt}$

$\frac{di}{dt} \quad j\ \dot{I} \quad I\angle{}_i\ /2$

$idt \quad \frac{\dot{I}}{j} \quad \frac{I}{}\angle{}_i\ /2$

## 3 向量法：求解正弦电流电路的稳态解 （微分方程的特解）

**例** 已知：$u(t) \quad U_m \sin( \quad t \quad\quad {}_u)$ 求：稳态解 i(t)




$$u(t) \quad Ri(t) \quad L\frac{di(t)}{dt}$$ 取相量 $U \quad R I \quad j \quad L I$

$$I \quad \frac{U}{R \quad j \quad L} \quad \frac{U \qquad {}_u}{\sqrt{R^2 \qquad {}^2L^2} \quad \mathrm{arctg}\frac{L}{R}} \quad \frac{U}{\sqrt{R^2 \qquad {}^2L^2}} \qquad {}_u \quad \mathrm{arctg}\frac{L}{R}$$

$$i \quad \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 \qquad {}^2L^2}}\sin( \quad t \qquad {}_u \quad \mathrm{arctg}\frac{L}{R})$$

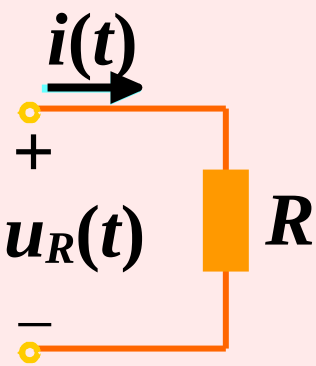
**相量法的优点：**

（1）把时域问题变为复数问题；

（2）把微积分方程的运算变为复数方程运算；

# 8.3 电路定理的相量形式

## 1. 电阻元件VCR的相量形式




时域形式：

已知 $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \theta_i)$

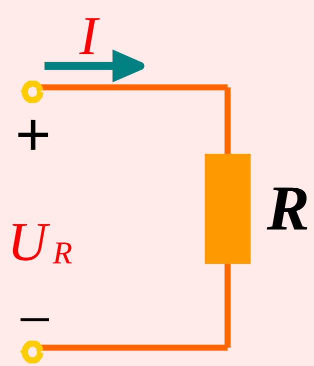
则 $u_R(t) = R\, i(t) = \sqrt{2} R I \cos(\omega t + \theta_i)$

$\underbrace{\qquad}_{U_R}$ $\underbrace{\qquad}_{\theta_u}$

相量形式：

$\dot{I} = I \angle \theta_i$

$\dot{U}_R = R\dot{I}$

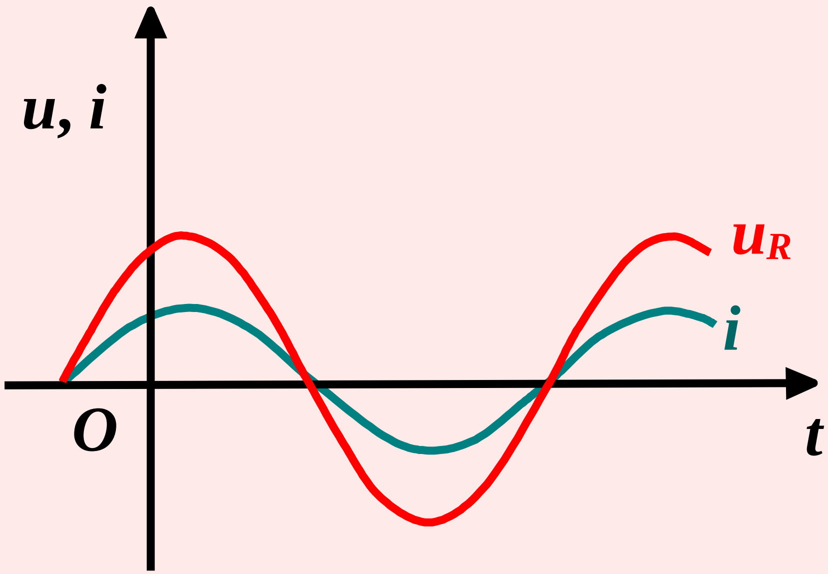


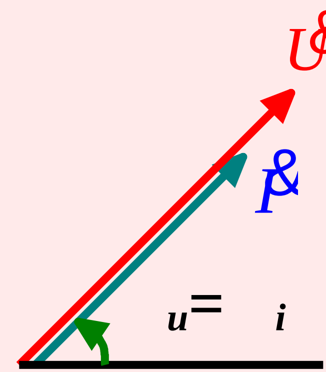

相量模型

相量关系：

$$\dot{U}_R = R\dot{I} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U_R = RI & \text{有效值关系} \\ \theta_u = \theta_i & \text{相位关系} \end{cases}$$

## 波形图及相量图：




同相位

$$\frac{u}{i} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R \text{ 电阻参数 [ ]}$$

**结论：**

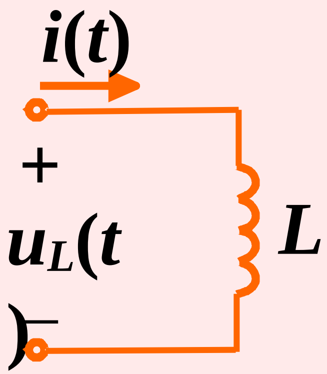
(1) $u_R$ 和 $i_R$为同频率正弦量；

(2) $u_R$ 和 $i_R$同相位；

(3) $u_R$ 和 $i_R$ 、$U_m$和$I_m$、U和I、均服从欧姆定律。

## 2. 电感元件VCR的相量形式

**时域形式：** $i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$

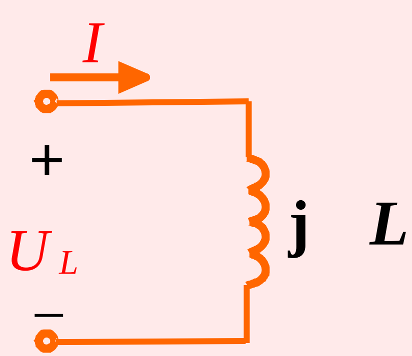



则 $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$

**相量形式：** $\dot{I} = I\angle\psi_i$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$$

**相量模型**



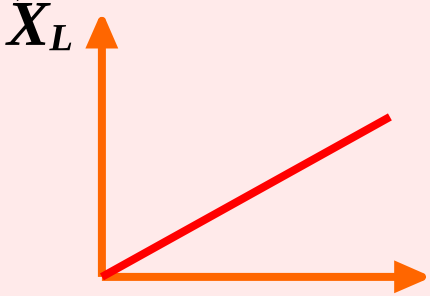

有效值关系： $U=\omega L I$

相位关系： $\psi_u=\psi_i+90°$

**感抗** $X_L=\omega L=2\pi fL$，称为感抗，单位为 $\Omega$ (欧姆)

# $X_L=$ $L$感抗的物理意义：

(1) 表示限制电流的能力；

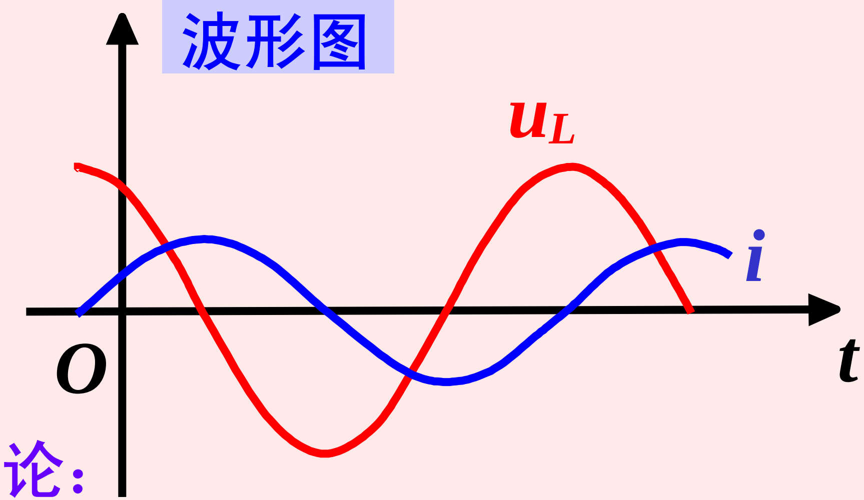



(2) 感抗和频率成正比；

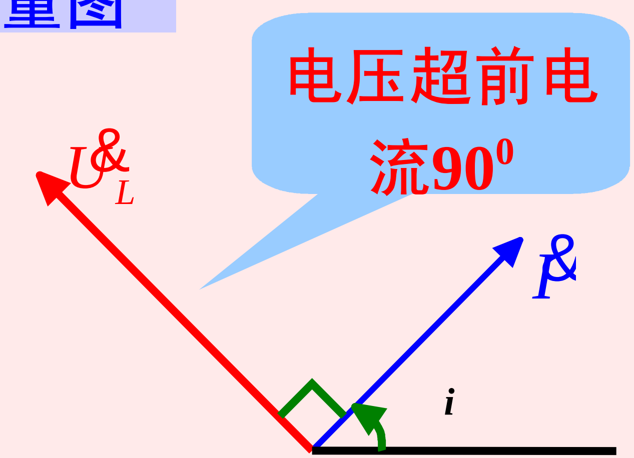
0( 0, ； $X_L$

， $X_L$；

## 波形图




## 向量图




结论：

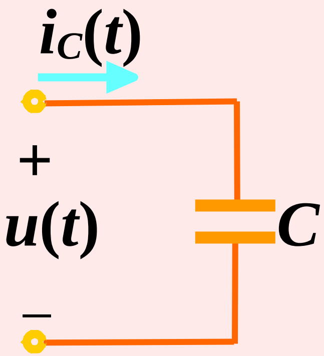
⑴ $u_L$ 和 $i_L$为同频率正弦量；

⑵ $u_L$ 超前 $i_L$ $\pi/2$；

## 3. 电容元件VCR的相量形式

**时域形式：**

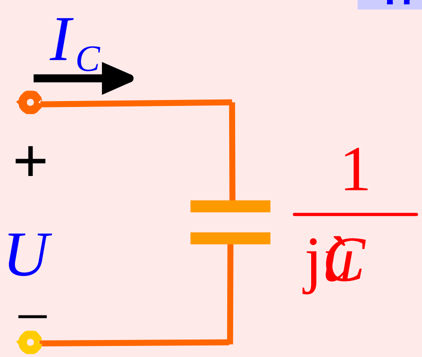
已知 $u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u)$




则 $i_C(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$

**相量形式：**

$\dot{I}_C=\mathrm{j}\omega C\dot{U}=\omega CU\angle(\psi_u+90^\circ)$




**相量关系：**

$\dot{U}=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}=-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}=-\mathrm{j}X_C\dot{I}$

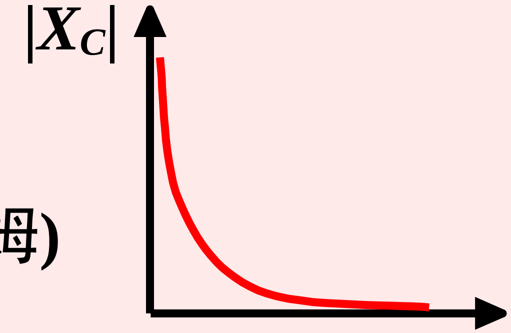
**相量模型**

有效值关系： $I_C=\omega CU$

相位关系： $\psi_i=\psi_u+90^\circ$

## 容抗与容纳：

$X_C = -1/w\ C$，　称为容抗，单位为 (欧姆)

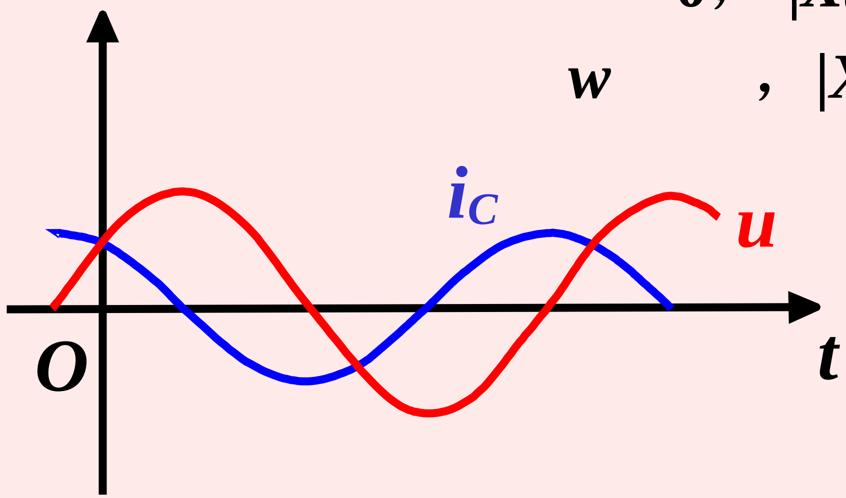


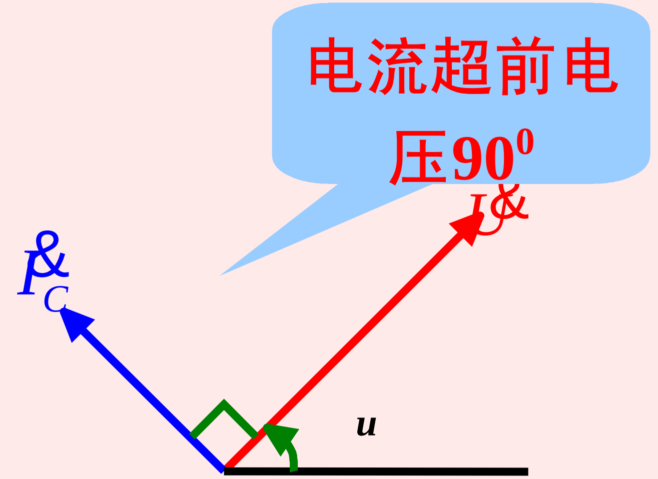

频率和容抗成反比,

## 波形图及相量图：

0，　$|X_C|$　　直流开路(隔直)

$w$　　，$|X_C|$　0　高频短路




**结论：**

⑴　$u_C$ 和 $i_C$为同频率正弦量；

⑵　$i_C$ 超前 $u_C$ $\pi/2$；

**例** 试判断下列表达式的正、误：

(1) $\dot{U}\ iLi$ $\quad \dot{I}$

(2) $5t\cos 50$ $\quad 0$

(3) $\dot{I}_m\ j\ CU$ $\quad \dot{U}_m$

(4) $X_L \quad \frac{U}{I} \quad \frac{U_m}{I_m}$

(5) $\frac{\dot{U}_C}{\dot{I}_C} \quad \frac{1}{j\ C}$

(6) $\dot{U}_L\ j L\dot{I}$ $\quad L$

# 4.电路定理的相量形式

## 一. 基尔霍夫定律的相量形式

$$i(t) \quad 0 \qquad\qquad \dot{I} \quad 0$$

$$u(t) \quad 0 \qquad\qquad \dot{U} \quad 0$$

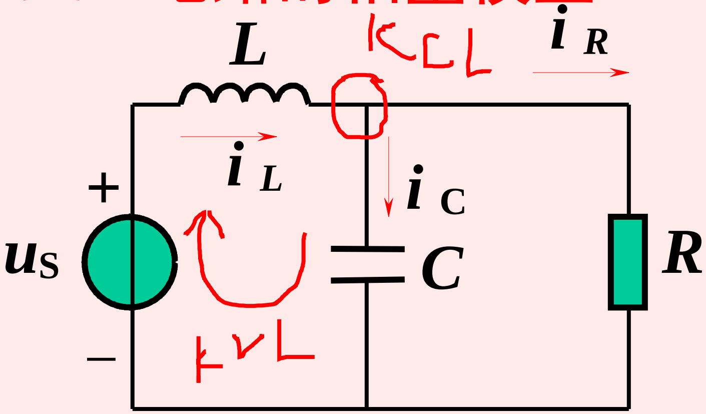
## 二. 电路元件的相量关系

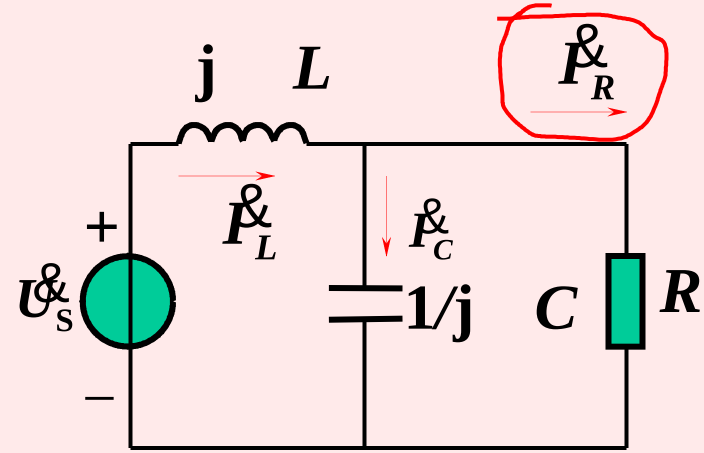
$$u \quad Ri \qquad\qquad \dot{U} \quad R\dot{I}$$

$$u \quad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad \dot{U} \quad j \quad L\dot{I}$$

$$u \quad \frac{1}{C} \quad i\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \dot{U} \quad \frac{1}{\mathrm{j} \quad C}\dot{I}$$

## 三. 电路的相量模型




时域电路模型

相量电路模型

$$\begin{cases} i_L \quad i_C \quad i_R \\ L\dfrac{di_L}{dt} \quad \dfrac{1}{C} \quad i_C dt \quad u_S \\ R\, i_R \quad \dfrac{1}{C} \quad i_C dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot I_L \quad \dot I_C \quad \dot I_R \\ j\ L\dot I_L \quad \dfrac{1}{j\ C}\dot I_C \quad \dot U_S \\ R\dot I_R \quad \dfrac{1}{j\ C}\dot I_C \end{cases}$$

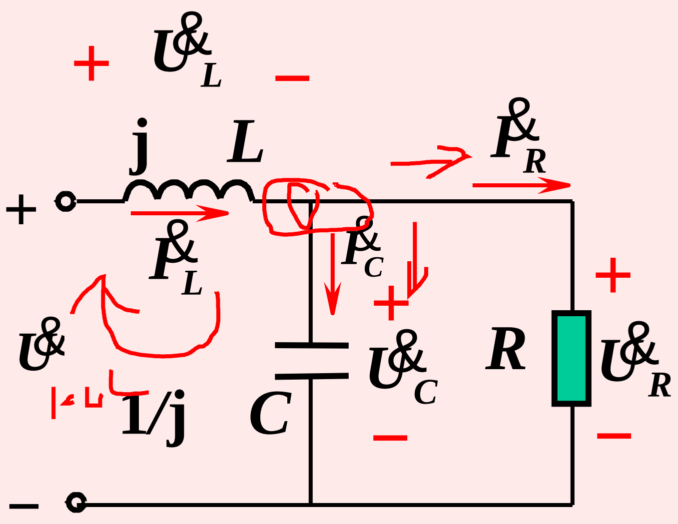
时域列写微分方程

相量形式代数方程

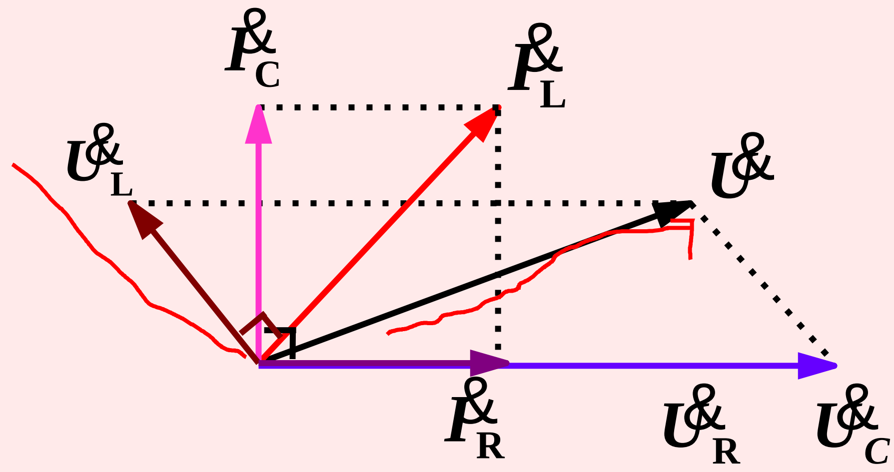
相量电路模型：电压、电流用相量；元件用复数阻抗。

## 四. 相量图

1. 选定一个参考相量(设初相位为零。)
2. 同频率的正弦量才能表示在同一个相量图中；



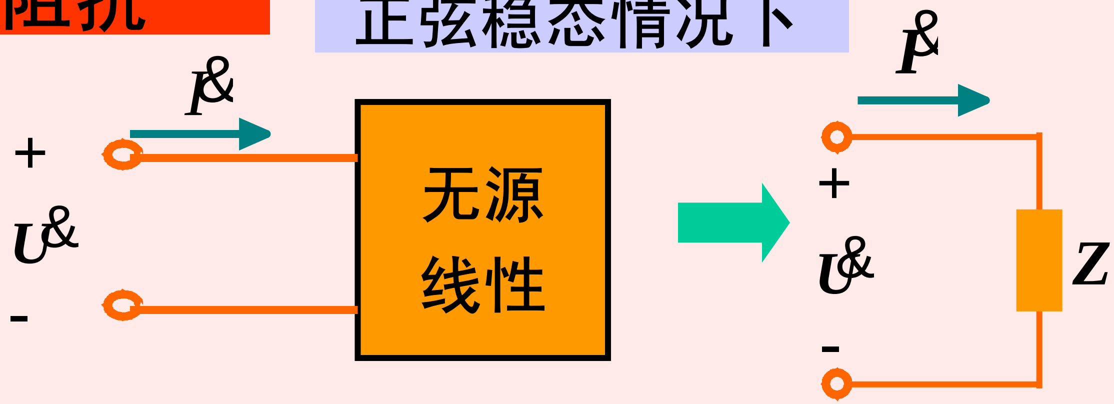

选 $\dot{U}_R$为参考相量



# 8.4 阻抗和导纳

## 1. 阻抗

正弦稳态情况下




$$Z \quad \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \qquad {}_{z}$$

欧姆定律的相量形式

$$|Z| \quad \frac{U}{I}$$

阻抗模

$$_{z} \qquad _{u} \qquad _{i}$$

阻抗角

单位：

$$Z Z R X | \quad | \qquad _{z} \qquad j$$

$Z Z R X \quad | \qquad {}_{z} \qquad j$

$Z$— 复阻抗；$R$—电阻(阻抗的实部)；$X$—电抗(阻抗的虚部)；

$|Z|$—复阻抗的模；${}_{z}$—阻抗角。

$$|Z| \quad \sqrt{R^2 \qquad X^2}$$

转换关系:

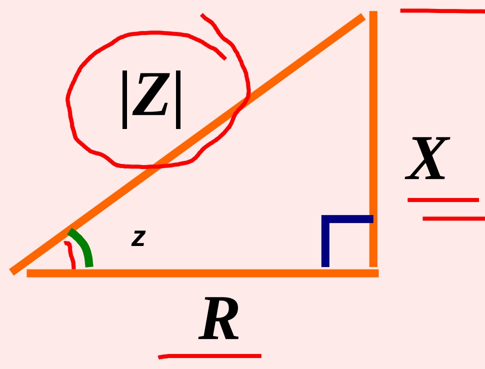
$$\ddot{o}_z \quad \mathrm{arctg}\frac{X}{R} \qquad |Z| \quad \frac{U}{I}$$

或

$$\begin{cases} R=|Z|\cos \quad z \\ X=|Z|\sin \quad z \end{cases}$$

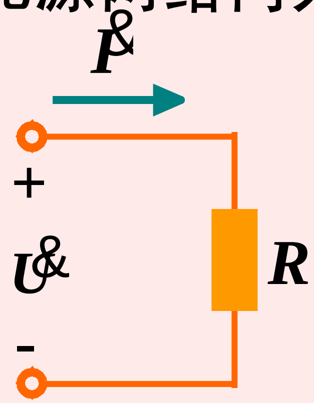
$$z \qquad u \qquad i$$

阻抗三角形

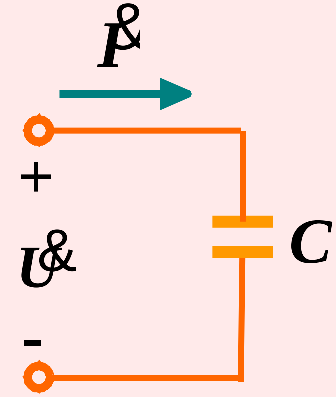


$ZZRX \quad | \quad {}_{z} \quad j$

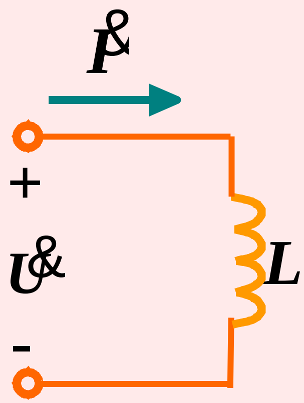
当无源网络内为单个元件时有：




$$Z \quad \frac{\dot U}{\dot I} \quad R$$



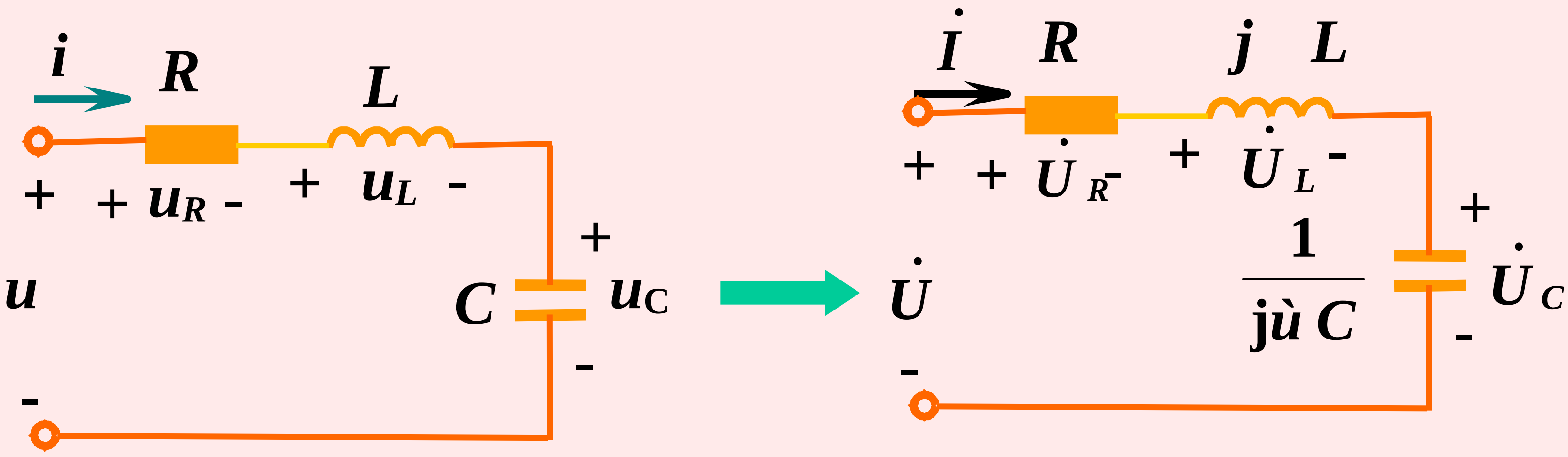

$$Z \quad \frac{\dot U}{\dot I} \quad j\frac{1}{C} \quad jX_C$$




$$Z \quad \frac{\dot U}{\dot I} \quad j \quad L \quad jX_L$$

Z可以是实数，也可以是虚数

# 例 :*RLC*串联电路



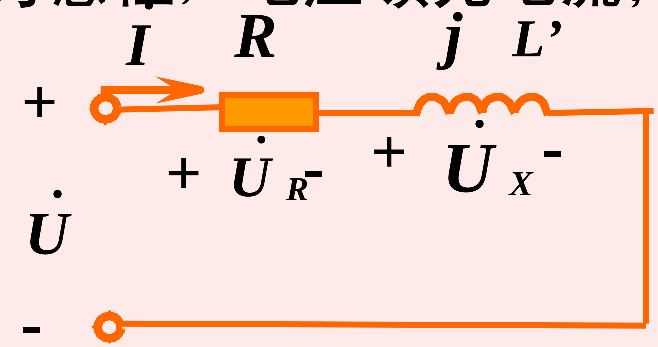

由KVL: $\dot{U}\quad \dot{U}_R\quad \dot{U}_L\quad \dot{U}_C\qquad R\dot{I}\quad j\ L\dot{I}\quad j\frac{1}{\ C}\dot{I}$

$$[R\quad j(\ L\quad \frac{1}{\ C})]\dot{I}\quad [R\quad j(X_L\quad X_C)]\dot{I}\quad (R\quad jX)\dot{I}$$

$$Z\quad \frac{\dot{U}}{\dot{I}}\quad R\quad j\ L\quad j\frac{1}{\ C}\quad R\quad jX\quad |Z|\qquad {}_z$$

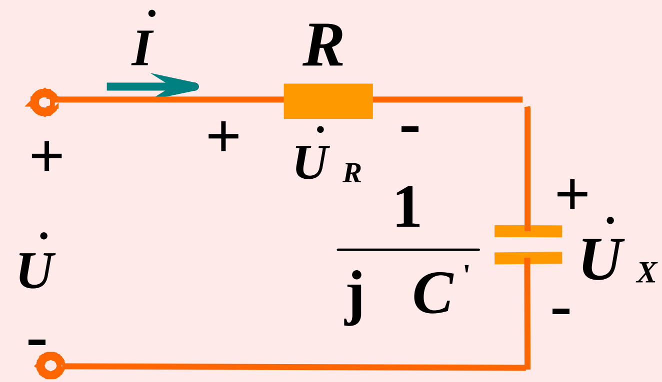
*L* > 1/ *C*，*X*>0， $_z$>0，电路为感性，电压领先电流；

等效电路



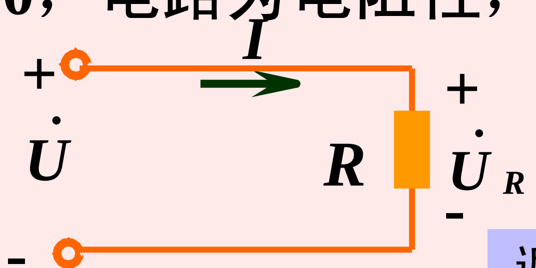

*L*<1/ *C*， *X*<0， $_z$<0，电路为容性，电压落后电流；

等效电路



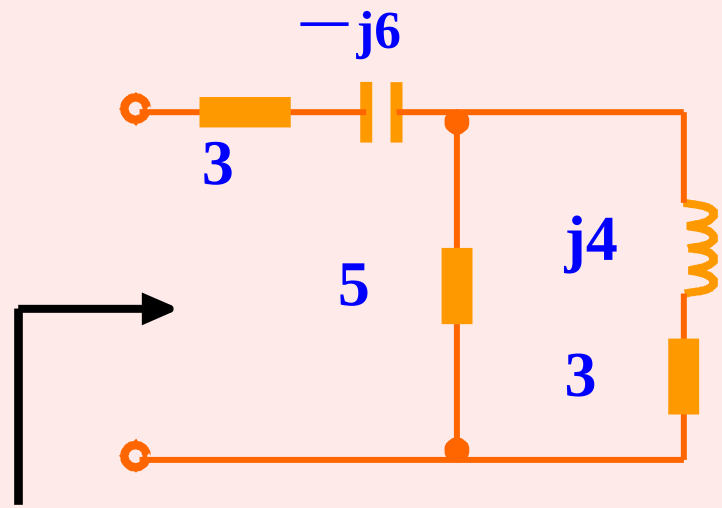

*L*=1/ *C*，*X*=0， $_z$=0，电路为电阻性，电压与电流同相。

等效电路




返 回 上 页 下 页

**例1** 求图示电路的输入阻抗，电路对外呈现感性还是容性？




**解** 输入阻抗为：

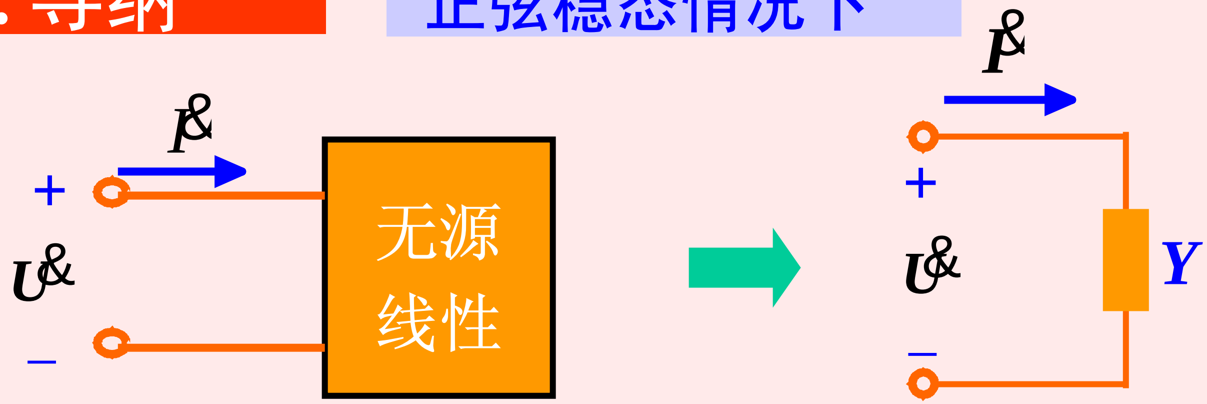
$$Z \quad 3 \quad j6 \quad \frac{5(3 \quad j4)}{5 \quad (3 \quad j4)}$$

$$3 \quad j6 \quad \frac{25 \quad 53.1^{0}}{8 \quad j4} \quad 5.5 \quad j4.75$$

电路对外呈现容性。

## 3. 导纳

正弦稳态情况下




$$Y \overset{\text{def}}{=} \frac{\dot I}{\dot U} = |Y| \angle \varphi_y$$

单位：S

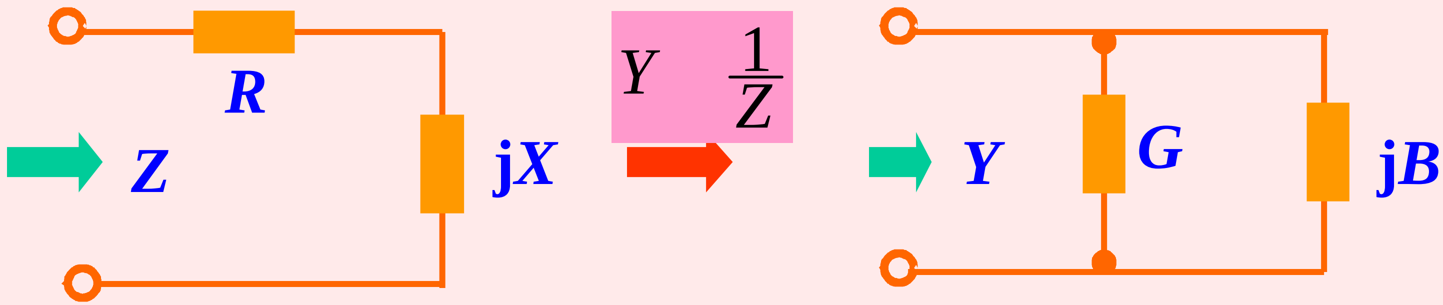
如Y为

- 纯电阻 $Y_R = G$
- 纯电感 $Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -jB_L$
- 纯电容 $Y_C = j\omega C = jB_C$

$B_L = \frac{1}{\omega L}$　　$B_C = \omega C$

感纳　　容纳

# 4. 复阻抗和复导纳的等效互换




$$Z \quad R \quad jX \quad |Z| \quad \ddot{o}_Z \qquad\qquad \boldsymbol{Y} \quad \boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{jB} \quad |\boldsymbol{Y}| \quad \boldsymbol{\ddot{o}_y}$$

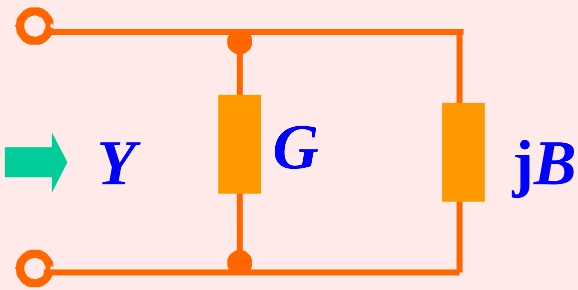
$$Y \quad \frac{1}{Z} \quad \frac{1}{R \quad jX} \quad \frac{R \quad jX}{R^2 \quad X^2} \quad G \quad jB$$

$$G \quad \frac{R}{R^2 \quad X^2}, \quad B \quad \frac{X}{R^2 \quad X^2} \qquad |\boldsymbol{Y}| \quad \frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{Z}|}, \quad \boldsymbol{\ddot{o}_y} \quad \boldsymbol{\ddot{o}_z}$$

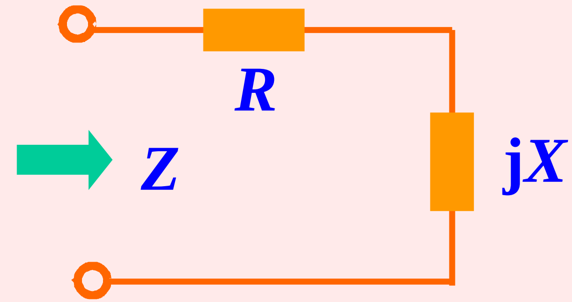
**注**

**一般情况 *G* 1/*R* *B* 1/*X*。若Z为感性，*X*>0，则*B*<0，即仍为感性。**

同样，若由$Y$变为$Z$，则有：




$Z \quad \dfrac{1}{Y}$




$$Z \quad R \quad \mathrm{j}X \quad |Z| \quad ö_Z \qquad Z \quad R \quad \mathrm{j}X \quad |Z| \quad ö_Z$$

$$|Z| \quad \frac{1}{|Y|} \;, \quad ö_Y \qquad ö_X$$

$$Z \quad \frac{1}{Y} \quad \frac{1}{G \quad jB} \quad \frac{G \quad jB}{G^2 \quad B^2} \quad R \quad \mathrm{j}X$$

$$\mathbf{R} \quad \frac{G}{G^2 \quad B^2} \;, \quad X \quad \frac{B}{G^2 \quad B^2}$$

#8.7,8.9

一般情况　**R　1/G ，　X　1/B**

# 8.5 正弦稳态电路的分析

**电阻电路与正弦电流电路的分析比较：**

电阻电路：

KCL：$\sum i = 0$

KVL：$\sum u = 0$

元件约束关系：$u = Ri$

或 $i = Gu$

正弦电路相量分析：

KCL：$\sum \dot{I} = 0$

KVL：$\sum \dot{U} = 0$

元件约束关系：$\dot{U} = Z\dot{I}$

或 $\dot{I} = Y\dot{U}$

可见，二者依据的电路定律是相似的。只要作出正弦电流电路的相量模型，便可将电阻电路的分析方法推广应用于正弦稳态的相量分析中。

***正弦稳态电路分析步骤:

1) 作出相量电路模型:

正弦电流、电压用相量表示;

无源支路用复阻抗表示。

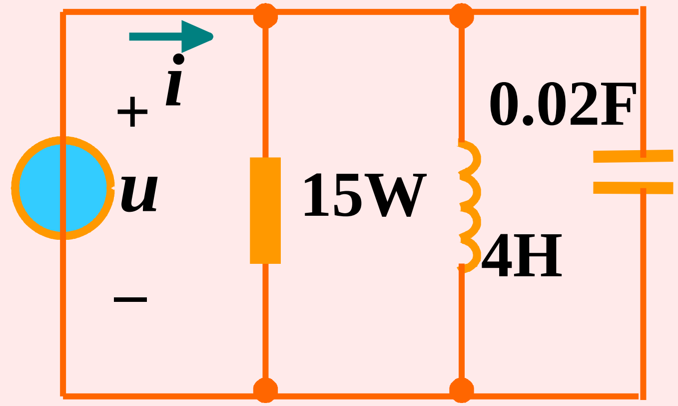
2）选择适当的电路分析方法:

采用 kcl、kvl、等效变换法、回路电流法、节点电压法、电路定理分析法等;

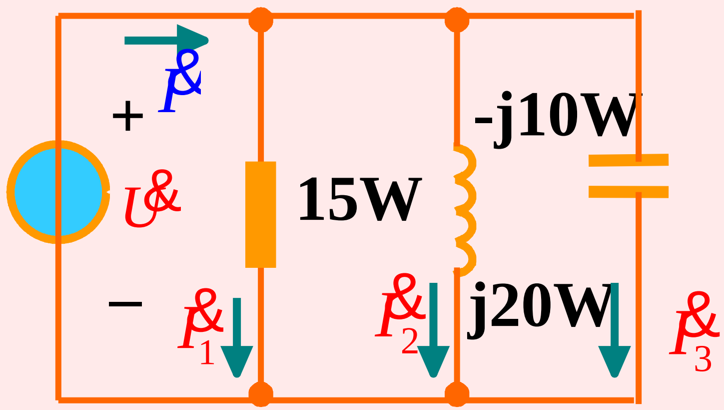
3）列出相量方程，为复数代数方程;

4）由所得到的相量解，用相量反变换得出解的

**例1** 已知 $u(t)=120\sqrt{2}\cos(5t)$, 求: $i(t)$




相量模型




**解**

$\dot U = 120\angle 0^0$

$jX_L = j4\times5 = j20$

$-jX_C = -j\dfrac{1}{5\times0.02} = -j10$

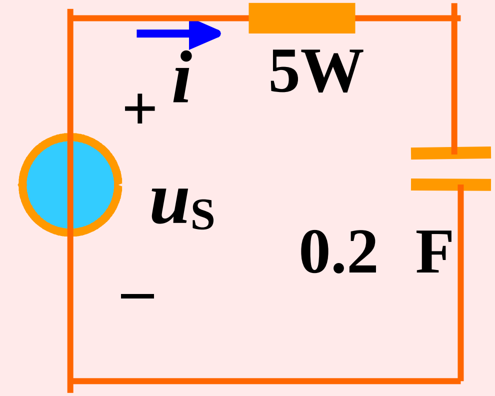
$\dot I = \dot I_R + \dot I_L + \dot I_C = \dfrac{\dot U}{R} + \dfrac{\dot U}{jX_L} + \dfrac{\dot U}{-jX_C}$

$= 120\left(\dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{j20} + \dfrac{1}{-j10}\right)$

$= 8 - j6 + j12 = 8 + j6 = 10\angle 36.9^0$

$i(t) = 10\sqrt{2}\cos(5t + 36.9^0)\ \mathrm{A}$

**例2** 已知 $5\sqrt{2}\cos(10^6 t+15°)$,:() $60$ $S$



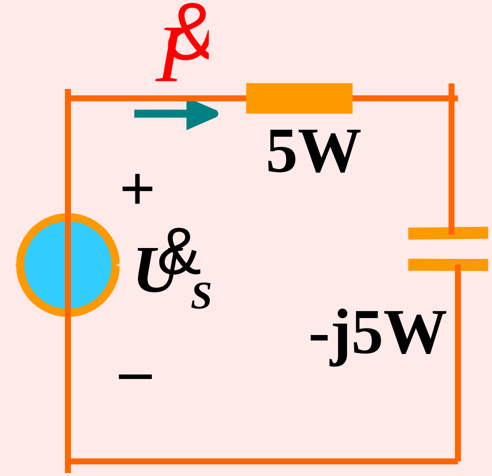

**解** $\dot{I}$ 515 $^0$

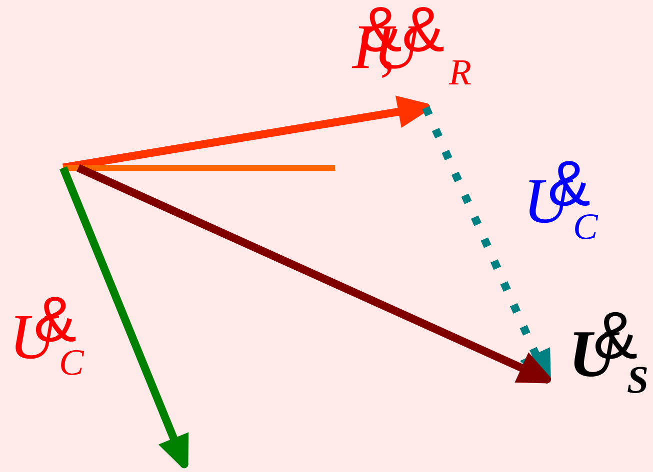
$jX_C = -j\dfrac{1}{10^6 \times 0.2 \times 10^{-6}}$ 5

$\dot{U}_S = \dot{U}_R + \dot{U}_C$ j 51555 $^0$

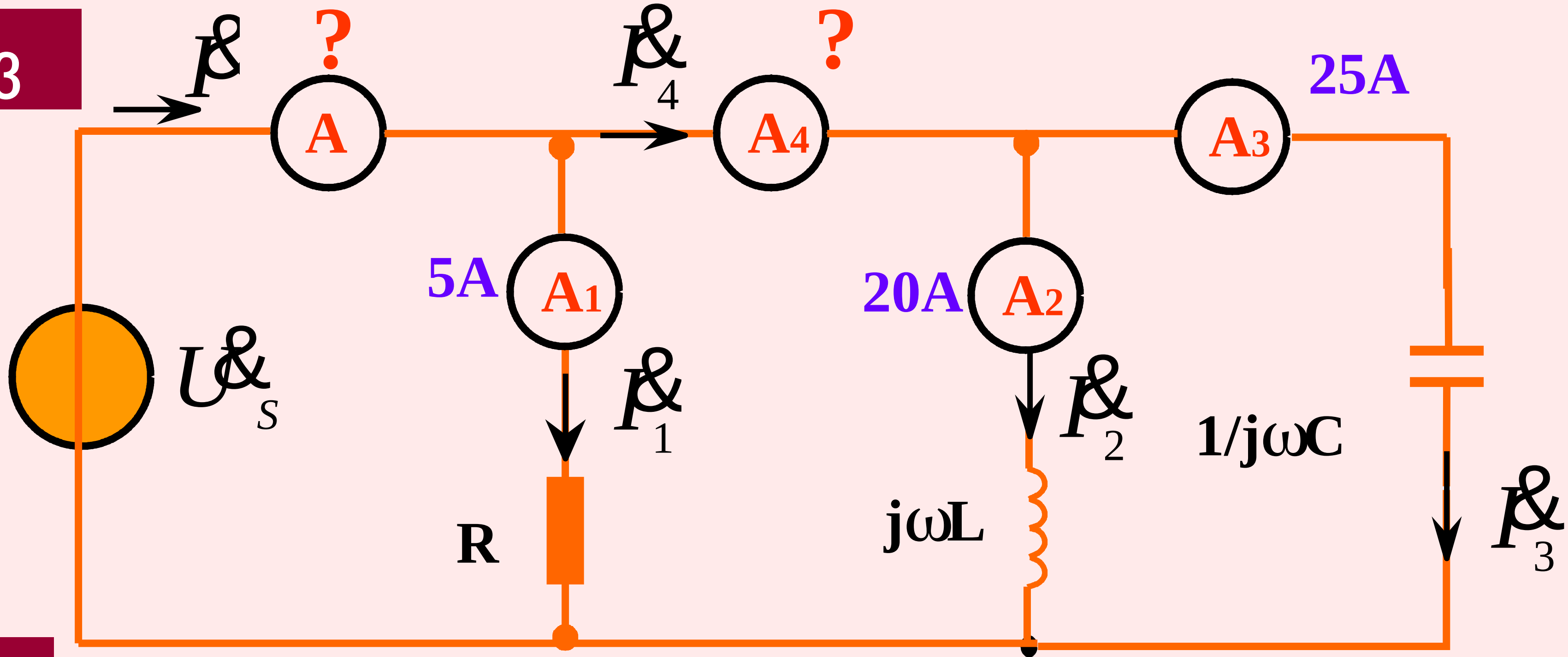
5155245255230 $^{000}$ $\sqrt{\ }$ $V$

相量模型



例3



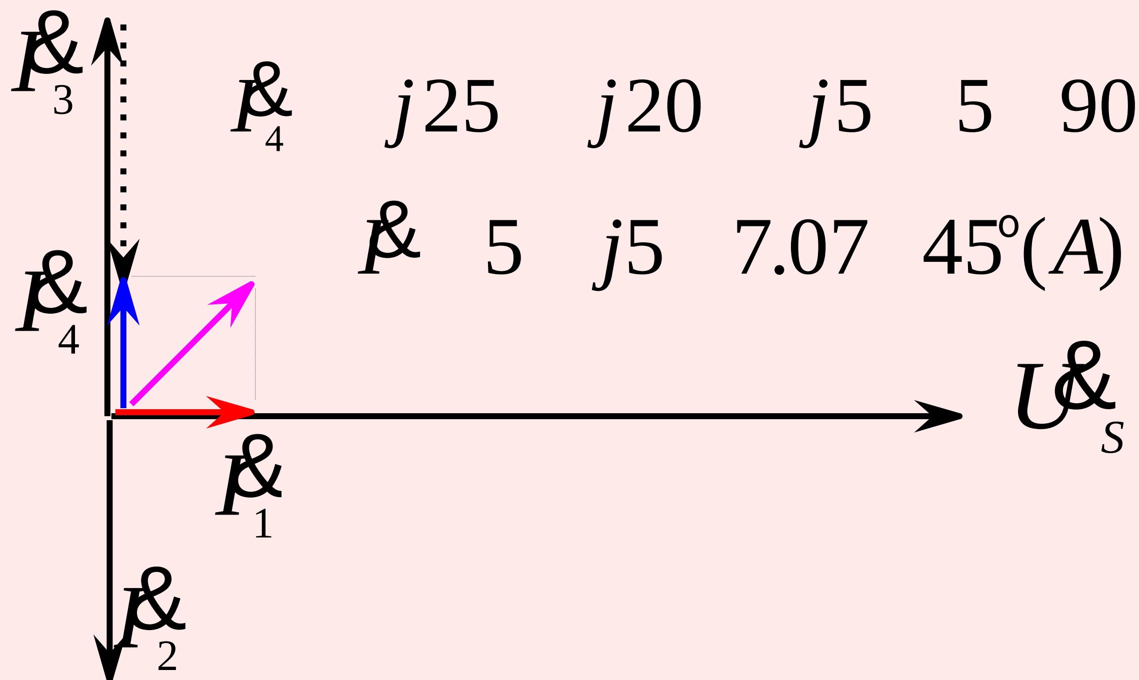

解

设 $\dot U_S = U_S\angle 0^o$

$\dot I_1 = 5\angle 0^o$

$\dot I_2 = 20\angle -90^o = -j20$

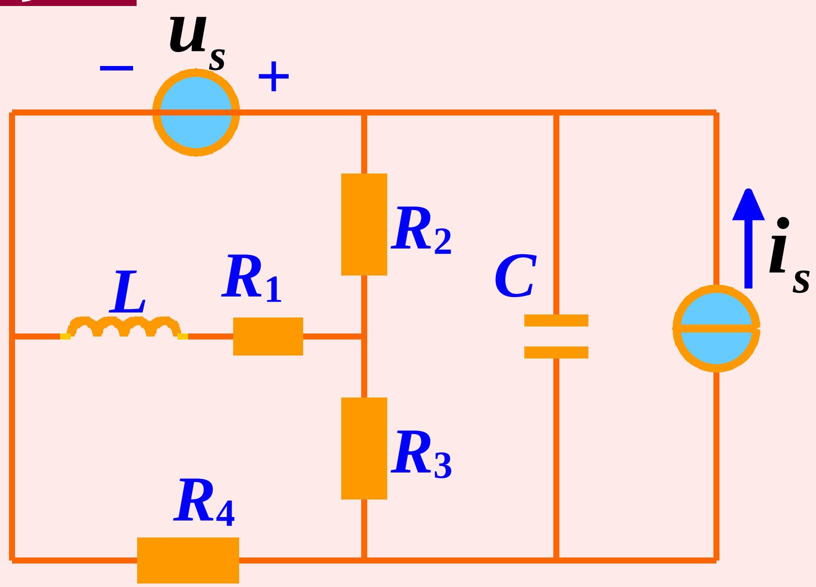
$\dot I_3 = 25\angle 90^o = j25$

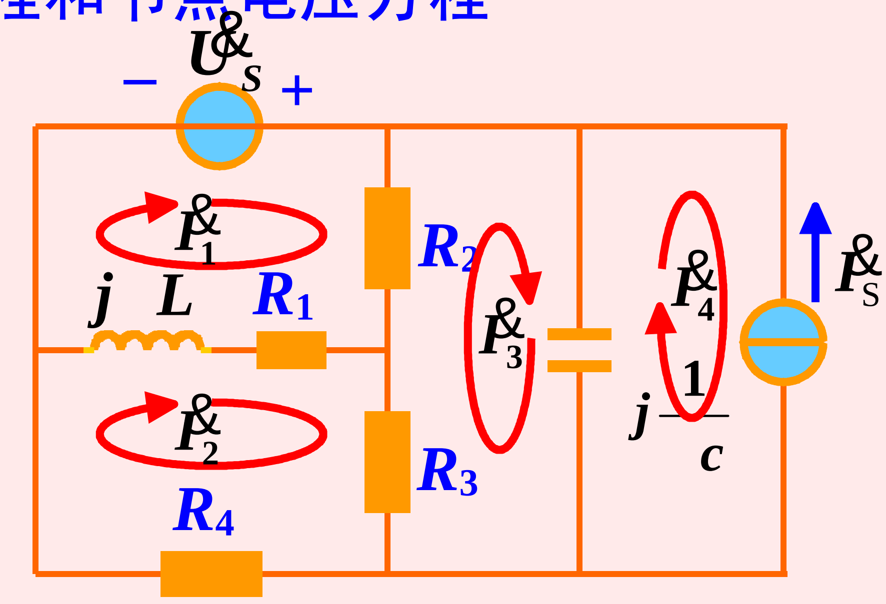



$$\dot I_4 = j25 - j20 = j5 = 5\angle 90^o (A)$$

$$\dot I = 5 + j5 = 7.07\angle 45^o (A)$$

## 例4. 列写电路的回路电流方程和节点电压方程

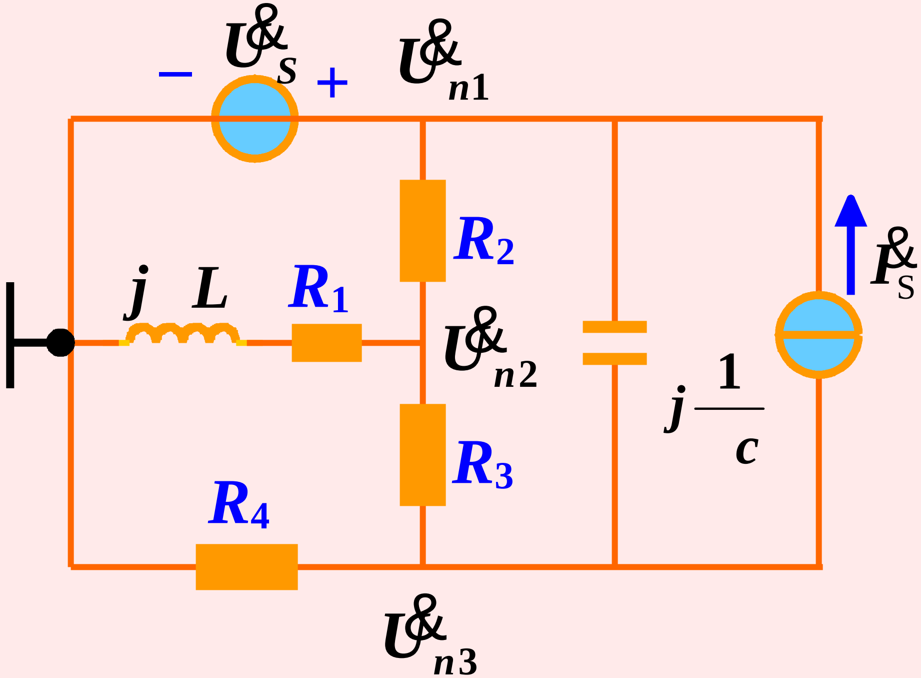



**解**

回路法:

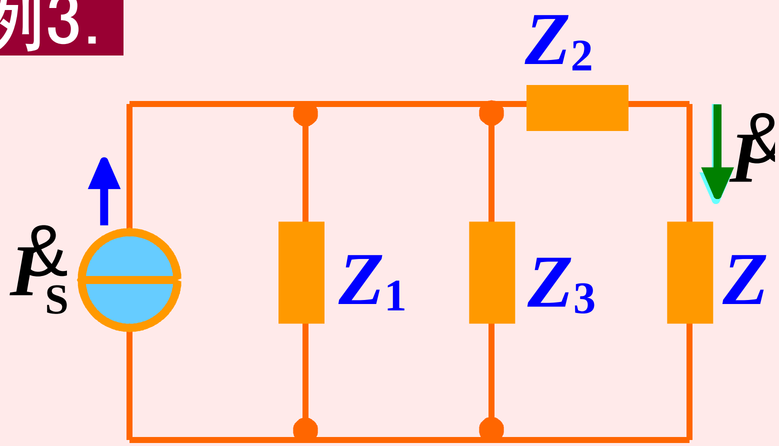
$$\begin{cases} (R_1 \quad R_2 \quad j \quad L)\dot{I}_1 \quad (R_1 \quad j \quad L)\dot{I}_2 \quad R_2\dot{I}_3 \quad \dot{U}_S \\ (R_1 \quad R_3 \quad R_4 \quad j \quad L)\dot{I}_2 \quad (R_1 \quad j \quad L)\dot{I}_1 \quad R_3\dot{I}_3 \quad 0 \\ (R_2 \quad R_3 \quad j\dfrac{1}{C})\dot{I}_3 \quad R_2\dot{I}_1 \quad R_3\dot{I}_2 \quad j\dfrac{1}{C}\dot{I}_4 \quad 0 \\ \dot{I}_4 \qquad \dot{I}_S \end{cases}$$




节点法:

$$\begin{cases} \dot{U}_{n1} \qquad \dot{U}_S \\ \left(\frac{1}{R_1 \quad j \quad L} \quad \frac{1}{R_2} \quad \frac{1}{R_3}\right)\dot{U}_{n2} \quad \frac{1}{R_2}\dot{U}_{n1} \quad \frac{1}{R_3}\dot{U}_{n3} \quad 0 \\ \left(\frac{1}{R_3} \quad \frac{1}{R_4} \quad j \quad C\right)\dot{U}_{n3} \quad \frac{1}{R_3}\dot{U}_{n2} \quad j \quad C\dot{U}_{n1} \quad \dot{I}_S \end{cases}$$

**例3.**



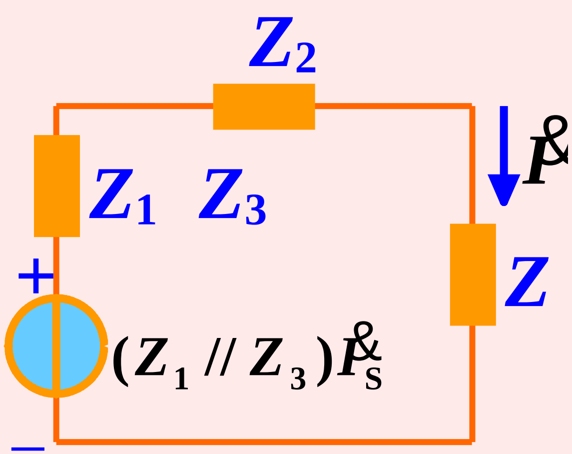

已知：$\dot I_S = 4\angle 90^\circ\,\text{A}$，$Z_1 = Z_2 = -j30\,\Omega$

$Z_3 = 30\,\Omega$，$Z = 45\,\Omega$

求：$\dot I$

**解**

**方法一：电源变换**



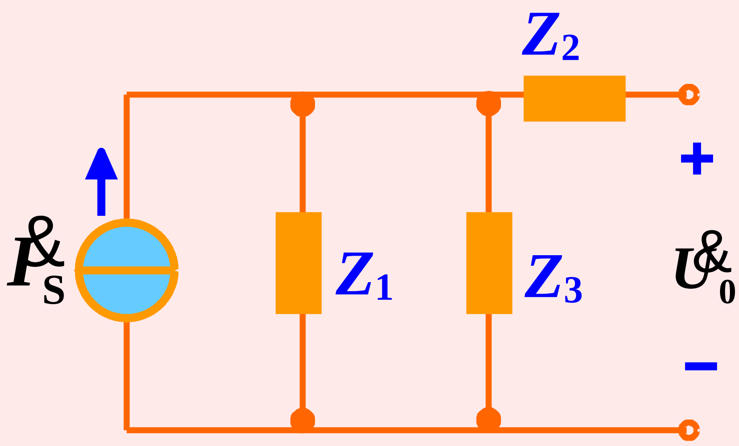

$$Z_1 // Z_3 = \frac{30(-j30)}{30-j30} = 15 - j15$$

$$\dot I = \frac{\dot I_S (Z_1 // Z_3)}{Z_1 // Z_3 + Z_2 + Z}$$

$$= \frac{j4(15-j15)}{15-j15-j30+45}$$

$$= \frac{5.657\angle 45^\circ}{5\angle -36.9^\circ} = 1.13\angle 81.9^\circ\,\text{A}$$

## 方法二：戴维南等效变换




求开路电压：

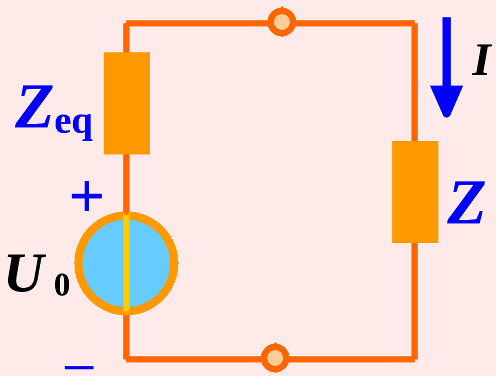
$$\dot{U}_0 \quad \dot{I}_S(Z_1 // Z_3)$$

$$84.86 \quad 45^\circ \mathrm{V}$$

求等效电阻：

$$Z_{eq} \quad Z_1 // Z_3 \quad Z_2$$

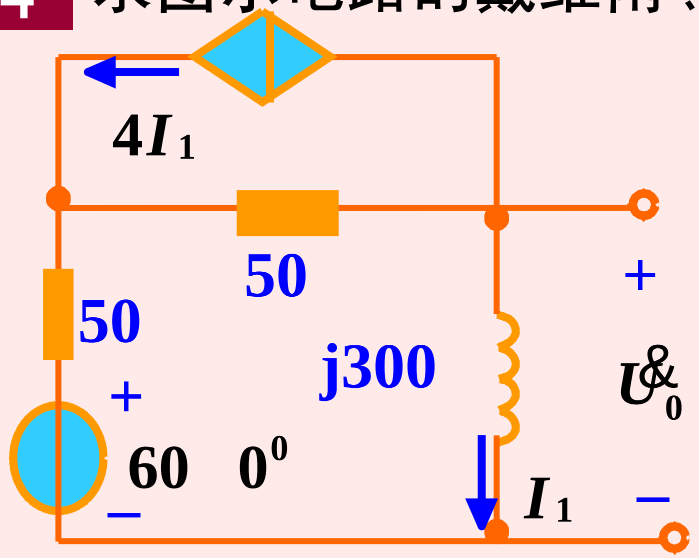
$$15 \quad j45$$

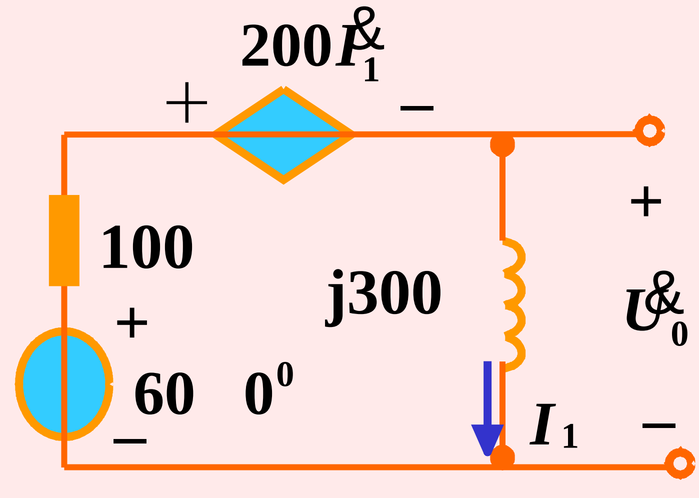



$$\dot{I} \quad \frac{\dot{U}_0}{Z_0 \quad Z} \quad \frac{84.86 \quad 45^\circ}{15 \quad j45 \quad 45}$$

$$1.13 \quad 81.9^\circ \mathrm{A}$$

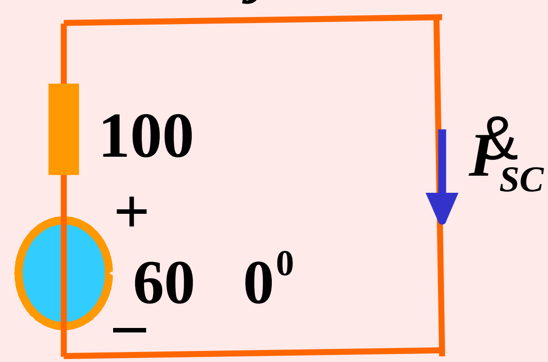
**例4** 求图示电路的戴维南等效电路。



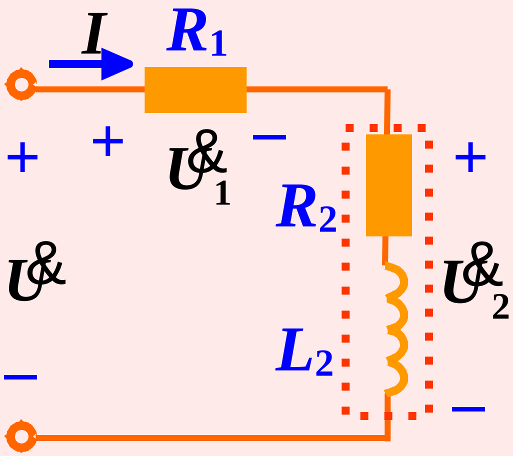

**解** $\dot{U}_o \quad 200\dot{I}_1 \quad 100\dot{I}_1 \quad 60 \qquad 300\dot{I}_1 \quad 60 \qquad 300\dfrac{\dot{U}_0}{j300} \quad 60$

$\dot{U}_o \quad \dfrac{60}{1 \quad j} \quad 30\sqrt{2} \quad 45^0$




求短路电流: $\dot{I}_{SC} \quad 60/100 \quad 0.6 \quad 0^0$

$Z_{eq} \quad \dfrac{\dot{U}_0}{\dot{I}_{SC}} \quad \dfrac{30\sqrt{2} \quad 45^0}{0.6} \quad 50\sqrt{2} \quad 45^0$




## 例5

已知：$U$=115V , $U_1$=55.4V , $U_2$=80V ，$R_1$=32W , $f$=50Hz

求： 线圈的电阻$R_2$和电感$L_2$。

## 解一

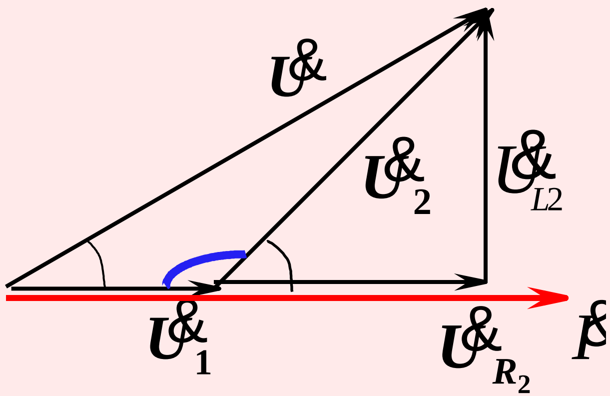
$$I \quad U_1 / R_1 \quad 55.4/32$$

$$\begin{cases} \dfrac{U}{\sqrt{(R_1 \quad R_2)^2 \quad (\quad L)^2}} \\ \dfrac{U_2}{\sqrt{R_2^{\,2} \quad (\quad L)^2}} \quad I \end{cases} \quad I \quad \begin{cases} \dfrac{115}{\sqrt{(32 \quad R_2)^2 \quad (314L)^2}} \quad \dfrac{55.4}{32} \\ \dfrac{80}{\sqrt{R_2^{\,2} \quad (314L)^2}} \quad \dfrac{55.4}{32} \end{cases}$$

$$R_2 \quad 19.6 \qquad L_2 \quad 0.133\text{H}$$

**解二**

$\dot U \quad \dot U_1 \quad \dot U_2 \quad \dot U_1 \quad \dot U_{R2} \quad \dot U_{L2}$



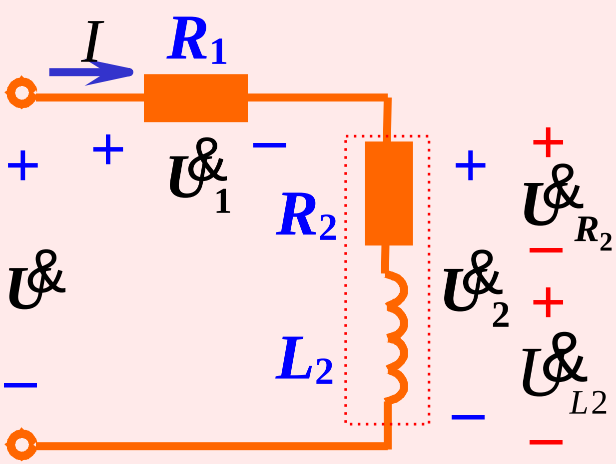

$$U^2 \quad U_1^2 \quad U_2^2 \quad 2U_1U_2\cos$$

$$\cos \quad 0.4237 \quad 115.1^\circ$$

$$_2 \quad 180^\circ \quad 64.9^\circ$$

$$U_{L2} \quad U_2\sin\ _2 \quad 80 \quad \sin 64.9^\circ \quad 72.45V$$

$$U_{R2} \quad U_2\cos\ _2 \quad 80 \quad \cos 64.9^\circ \quad 33.94V$$



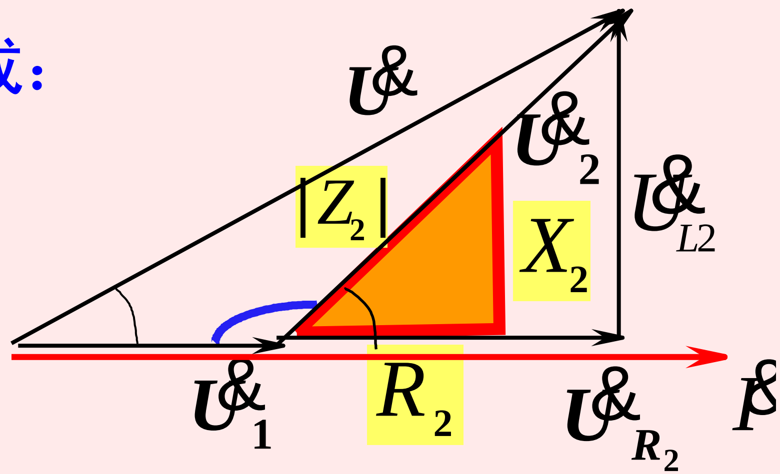

$$I \quad U_1 / R_1 \quad 55.4/32 \quad 1.731\text{A}$$

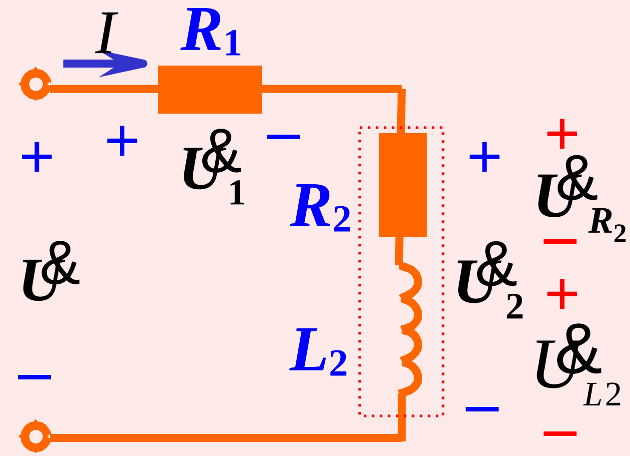
$$R_2 \quad U_{R2}/I \quad 33.94/1.731 \quad 19.6$$

$$L_2 \quad U_{L2}/I \quad 72.45/1.731 \quad 41.85$$

$$L_2 \quad 41.85/314 \quad 0.133\,H$$

或:




$$|Z_2| \quad U_2 / I \quad 80/1.731 \quad 46.22$$

$$R_2 \quad |Z_2|\cos \quad {}_2 \quad 46.22\cos 64.9^{\circ} \quad 19.6$$

$$X_2 \quad |Z_2|\sin \quad {}_2 \quad 46.22\sin 64.9^{\circ} \quad 41.86$$

$$L_2 \quad X_2/(2 \quad f\ ) \quad 0.133\ \mathrm{H}$$

8.13,8.16

# §8.6 非正弦周期稳态电路的分析

## 一. 非正弦信号

1. 定义：电路中的电压电流变量随时间不是按正弦规律变化时统称为非正弦信号。

2. 种类：
- 非周期性（“信号与系统”中研究）
- 周期性[ $i(t)=i(t+T)$ / $u(t)=u(t+T)$]

例：电子技术中常用的非正弦周期信号---
微分脉冲电流、方波电压、锯齿波电压、半波整流电压等。

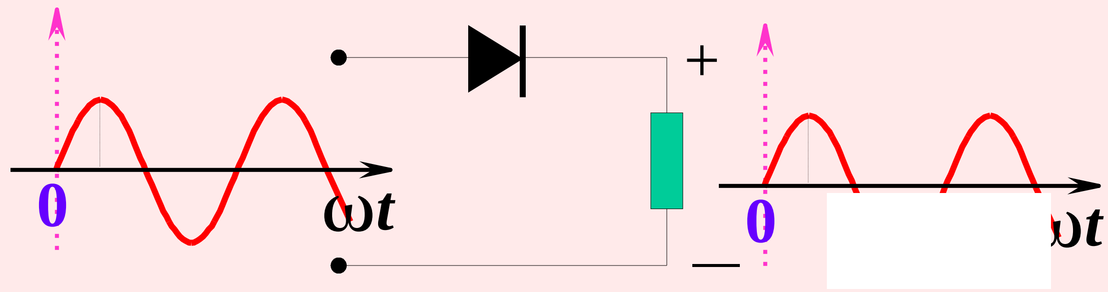
➢非正弦周期信号在工程实际中更具有其普遍的研究意义
(由于发电设备的限制即使工程中用的正弦量也只能是近似的)。

# 二. 非正弦电路

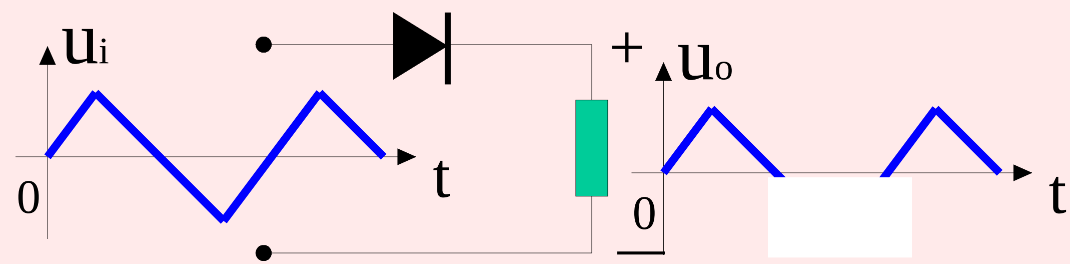
1. 定义：电路中的变量(电压、电流）呈现非正弦情况时称此电路为非正弦电路。

2. 种类：

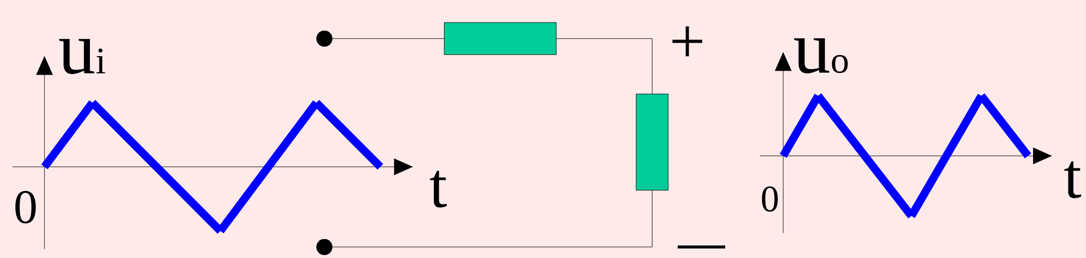
①正弦激励下的非线性电路




②非正弦激励下的非线性电路




③非正弦激励下的线性电路



# §8.6.1 周期函数分解为傅里叶级数
## (谐波分析)

## 一. 数学分析

设非正弦周期电流i(t)=i(t+T) ,当满足狄里赫利条件

( ① i(t)在一周期内连续or有有限多个第一类间断点;

② i(t)在一周期内有有限多个极大值与极小值 )时,

可展成收敛的傅里叶级数:

$$f(t) \quad a_0 \quad \underset{n\ 1}{} \quad (a_n \cos n \quad t \quad b_n \sin n \quad t)$$

其中:

$$A_0 \quad \underset{n\ 1}{} \quad A_{mn} \cos(n \quad t \quad {}_n)$$

$$a_0 \quad \frac{1}{T} \ {}^{T/2}_{T/2} \ f(t)dt$$

$$a_n \quad \frac{2}{T} \ {}^{T/2}_{T/2} \ f(t)\cos n \quad tdt$$

$$b_n \quad \frac{2}{T} \ {}^{T/2}_{T/2} \ f(t)\sin n \quad tdt$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{mn}} \quad \sqrt{\mathrm{a}_{\mathrm{n}}{}^{2} \quad \mathrm{b}_{\mathrm{n}}{}^{2}}$$

$$_n \quad \arctan\frac{b_n}{a_n}$$

讨论： $f(t) \quad A_0 \qquad A_{mn}\cos(n \quad t \qquad {}_n)$

$n \ \ 1$

1）$A_0=a_0$ ——常量，与频率无关（直流分量、零频分量）

2）$A_{mn}\cos(n\omega t+ \ {}_0)$——正弦量，与n有关（谐波分量）

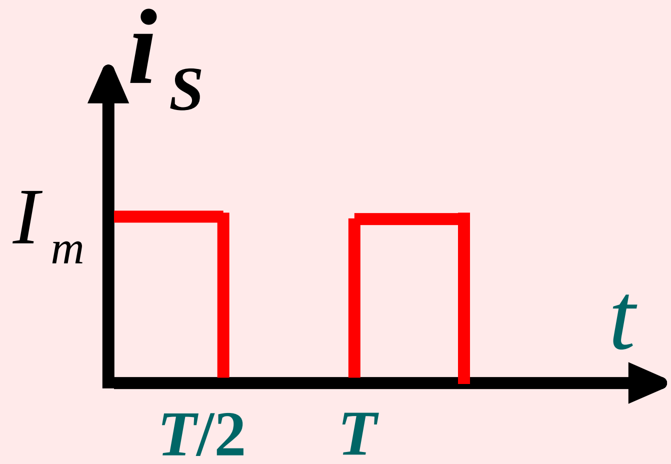
3）谐波分类：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A_0=a_0$ | 直流分量 | | |
| $A_{m1}\cos( \quad t \qquad {}_1)$ | 基波分量 | | |
| $A_{m2}\cos(2 \quad t \qquad {}_2)$ | 二次谐波 | 高次谐波 | 奇次谐波 |
| $A_{m3}\cos(3 \quad t \qquad {}_3)$ | 三次谐波 | | 偶次谐波 |
| $A_{mk}\cos(k \quad t \qquad {}_k)$ | k次谐波 | | |

**二. 物理意义：一个非正弦周期电流可以分解成一个直流分量和多个与ω成整数倍的不同频率的正弦交流电流。**

**例1** 周期性方波信号的分解

**解** 图示矩形波电流在一个周期内的表达式为：

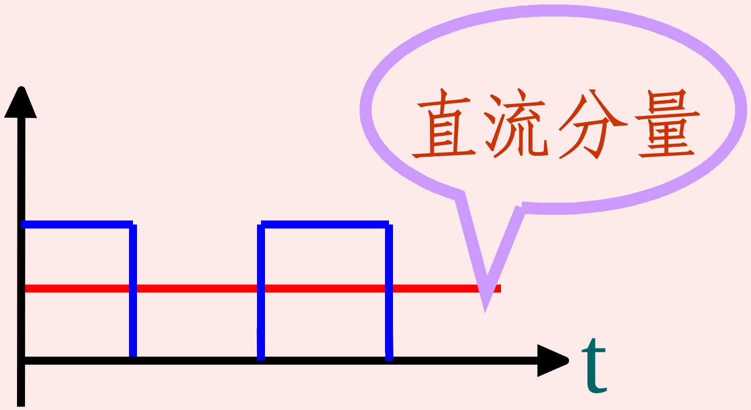


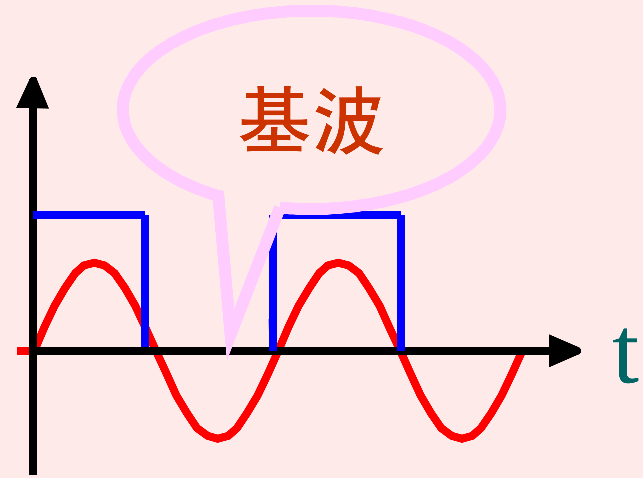

$$i_S(t) \quad \begin{cases} I_m & 0 \quad t \quad \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} \quad t \quad T \end{cases}$$

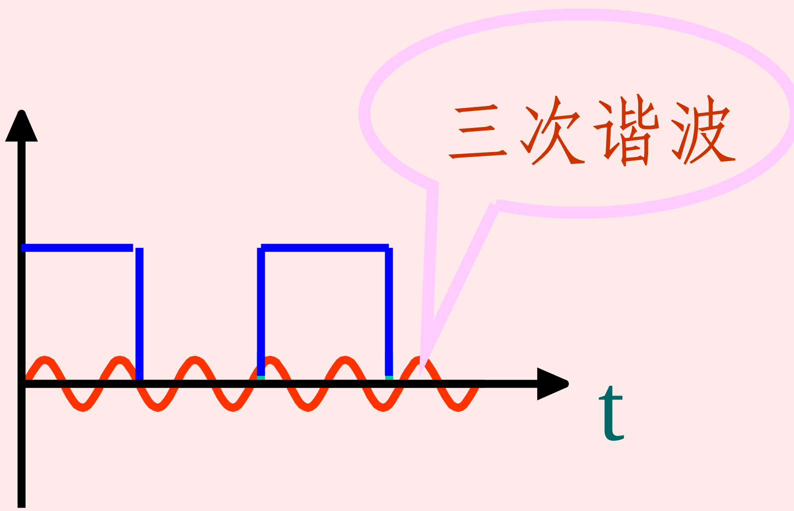
$i_S$ 的展开式为：

$$i_S \quad \frac{I_m}{2} \quad \frac{2I_m}{}(\sin \quad t \quad \frac{1}{3}\sin 3 \quad t \quad \frac{1}{5}\sin 5 \quad t \quad \Lambda\ )$$

# 周期性方波波形分解

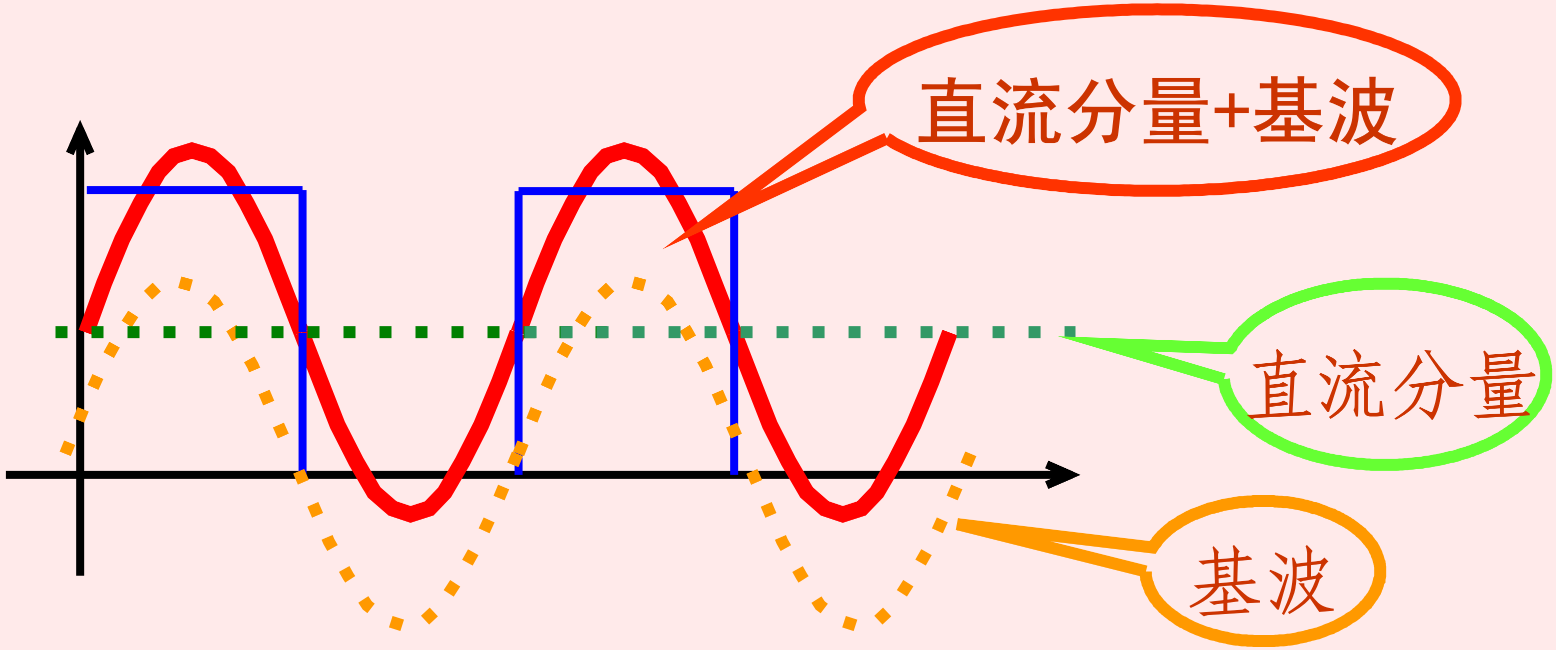


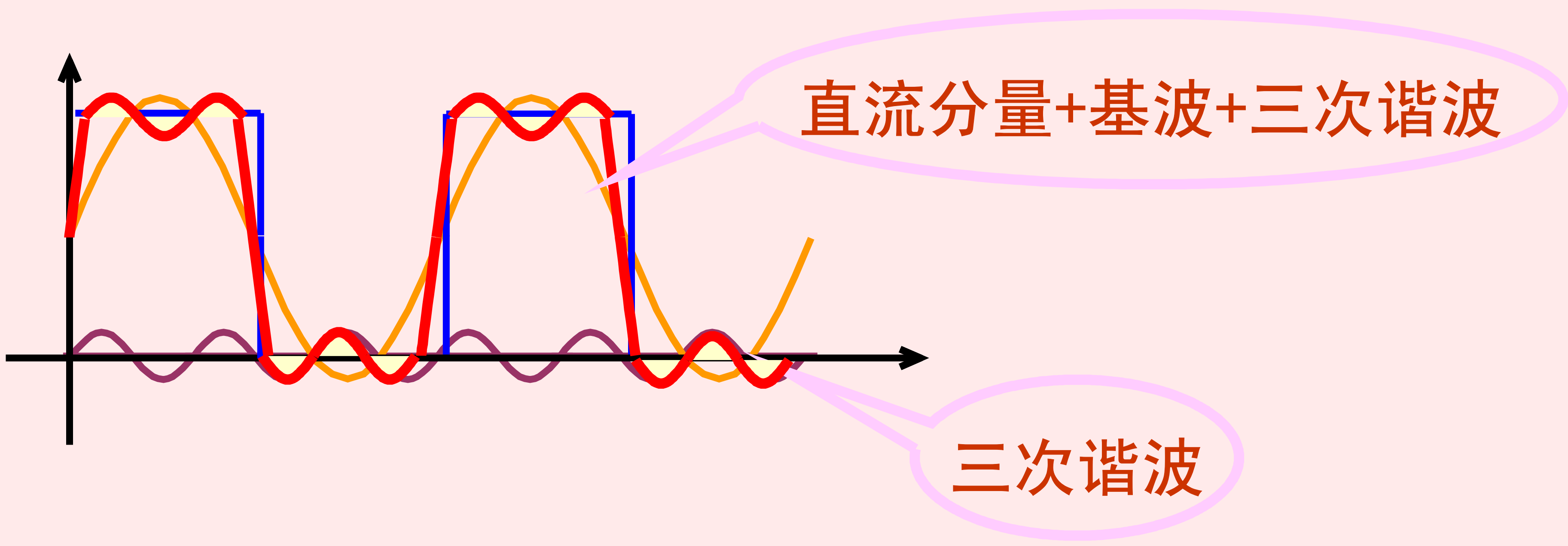



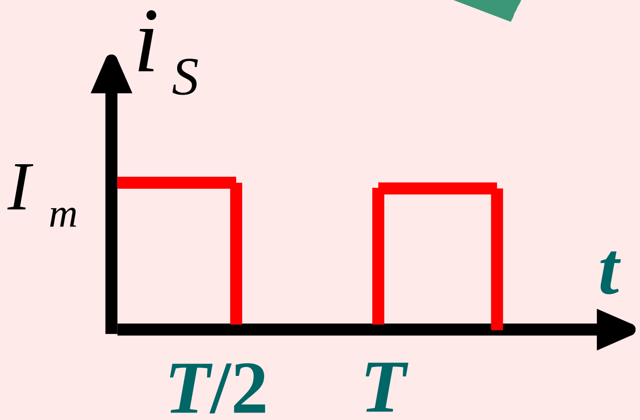




五次谐波

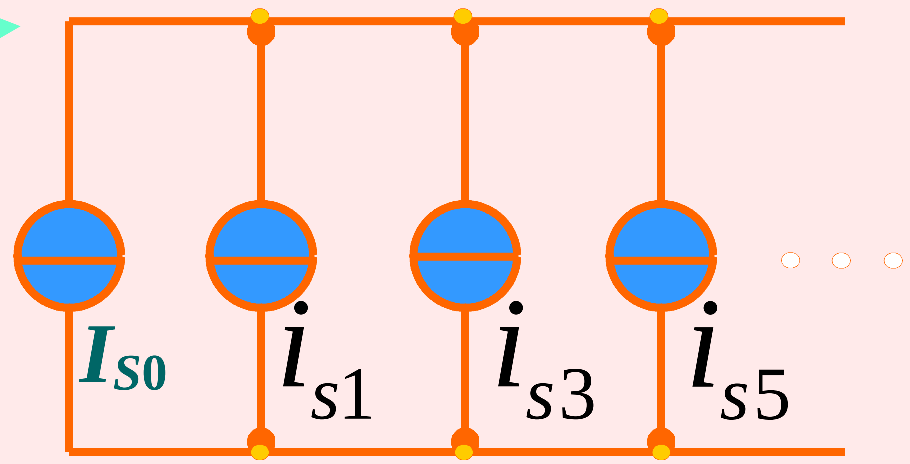
七次谐波


直流分量+基波
直流分量
基波


直流分量+基波+三次谐波
三次谐波




等效电源




$$i_S \quad \frac{I_m}{2} \quad \frac{2I_m}{\phantom{x}}(\sin \quad t \quad \frac{1}{3}\sin 3 \quad t \quad \frac{1}{5}\sin 5 \quad t \quad \mathrm{K})$$

$I_{S0}$ $\qquad$ $i_{s1}$ $\qquad$ $i_{s3}$ $\qquad$ $i_{s5}$

# 有效值、平均值和平均功率

## 三. 有效值

根据周期量有效值的定义，为其方均根值：

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [i(t)]^2\,dt} \qquad U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [u(t)]^2\,dt}$$

$$\because\ i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)$$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0+\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)\right]^2 dt}$$

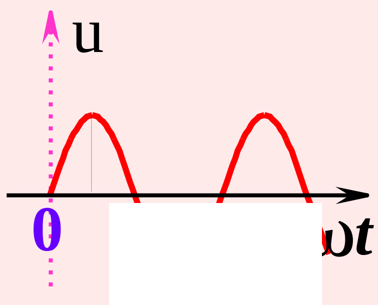
$$I=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots+I_k^2+\cdots}$$

同理有：$U \quad \sqrt{U_0^{\;2} \quad {}_{k\ 1}\, U_k^2} \quad \sqrt{U_0^2 \quad U_1^2 \quad U_2^2 \quad \Lambda \quad U_k^2 \quad \Lambda}$

**结论：非正弦周期电流（电压）的有效值，等于它的直流分量的平方与各次谐波的有效值的平方和的平方根。**

例1. 设正弦交流电压的最大值$U_m \quad \sqrt{2}\ 220\ V$,

求经过半波整流后电压的有效值。




解： 取傅里叶级数展开式的前三项：

$$u \quad \frac{2}{}U_m\left(\frac{1}{2} \quad \frac{}{4}\cos \quad {}_1 t \quad \frac{1}{3}\cos\ 2 \quad {}_1 t\right)$$

$$\frac{U_m}{} \quad \frac{U_m}{2}\cos \quad {}_1 t \quad \frac{2}{3}\frac{U_m}{}\cos\ 2 \quad {}_1 t$$

则有：$U \quad \sqrt{U_0^2 \quad U_1^2 \quad U_2^2} \quad \sqrt{\left(\frac{U_M}{}\right)^2 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{U_M}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{3}\frac{U_M}{}\right)^2} \quad 155.2\ V$

# §8.6.2 非正弦周期电流电路的计算

**理论依据：傅里叶级数展开 + 叠加定理**

## 计算步骤：

1. 求所给定的非正弦激励源的傅里叶级数(查表)，根据准确度要求取若干项。

**2.** 分别求出激励的直流分量和各次谐波分量单独作用时的响应。

画各分电路图注意点：

①直流分量激励下，C开路，L短路；

②各次谐波分量激励下，电抗值不同

$$\begin{cases} X_{Lk}=k\omega L \\ X_{Ck}=1/k\omega C \end{cases}$$

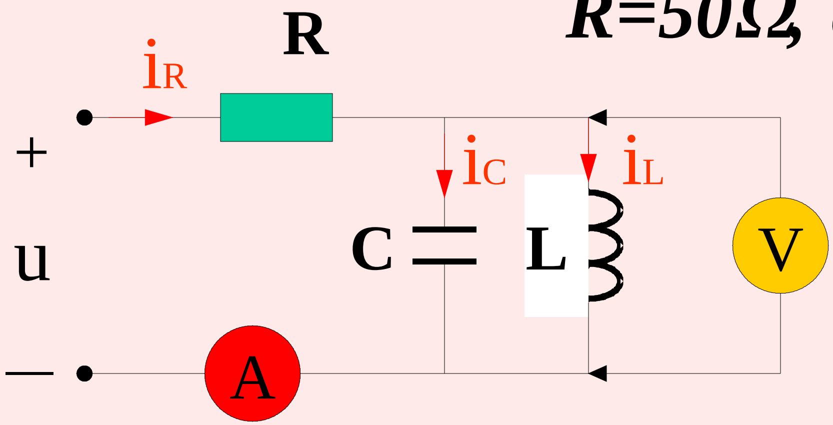
**3.** 将直流分量和各次谐波分量的瞬时响应叠加求和。

注意：$i\ t \quad I_0 \quad i_1\ t \quad i_2\ t \quad \Lambda$

$\dot{I} \quad I_0 \quad \dot{I}_1 \quad \dot{I}_2 \quad \Lambda$

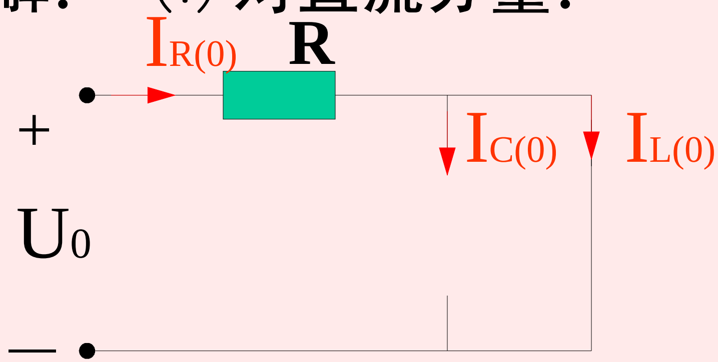
例1. 已知: $u=200+200\sin\omega t + 100\sin 2\omega t$

$R=50\Omega,\ \omega L=20\ \Omega,\ 1/\omega C=40\ \Omega$




求: $i_R$, $i_C$, $i_L$,电流表、电压表读数。

解: (1) 对直流分量:



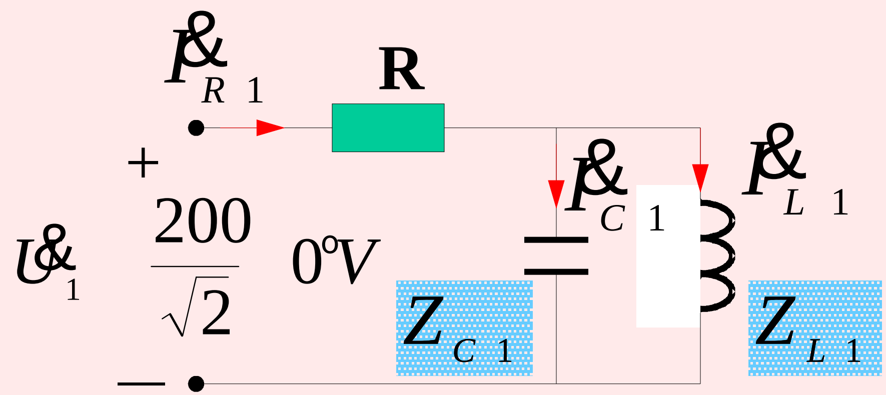

$I_{R(0)}=U_0/R=200/50=4A$

$I_{C(0)}=0$

$I_{L(0)}=I_{R(0)}=4A$

$U_{L(0)}=0$

(2) 对基波分量:

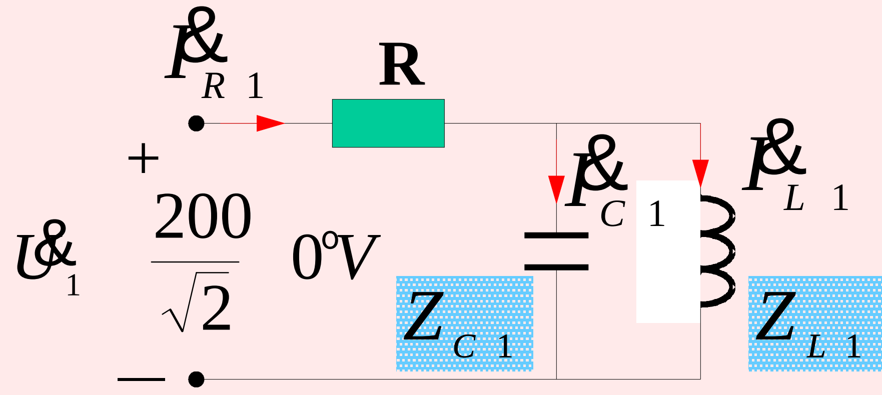



$Z_{C1} \qquad j\frac{1}{C} \qquad j40$

$Z_{L1} \qquad j\ \ L \qquad j20$

$Z_1 \quad R \quad Z_{C1} // Z_{L1}$

$$50 \quad \frac{j40 \quad j20}{j40 \quad j20}$$




$$50 \quad j40$$

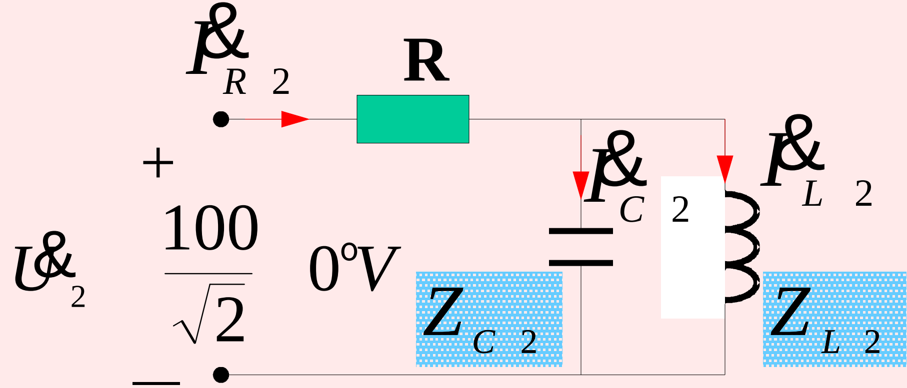
$$\dot{I}_{R1} \quad \frac{\dot{U}_1}{Z_1} \quad \frac{200/\sqrt{2} \quad 0^\circ}{50 \quad j40} \quad 2.21 \quad 38.7^\circ A$$

$$\dot{I}_{C1} \quad \dot{I}_{R1} \frac{j \quad L}{j \quad L \quad j\frac{1}{C}} \quad 2.21 \quad 38.7^\circ \quad \frac{j20}{j20 \quad j40} \quad 2.21 \quad 141.3^\circ A$$

$$\dot{I}_{L1} \quad \dot{I}_{R1} \frac{j\frac{1}{C}}{j \quad L \quad j\frac{1}{C}} \quad 2.21 \quad 38.7^\circ \quad \frac{j40}{j20 \quad j40} \quad 4.42 \quad 38.7^\circ A$$

$$\dot{U}_{L1} \quad \dot{I}_{L1} Z_{L1} \quad 4.42 \quad 38.7^\circ \quad j20 \quad 88.4 \quad 51.3^\circ V$$

⑶ 对二次谐波：




$$Z_{C\ 2}\qquad j\frac{1}{2\quad C}\qquad j20$$

$$Z_{L\ 2}\qquad j2\quad L\qquad j40$$

$$Z_{\ 2}\qquad R\quad Z_{C\ 2}\ //\ Z_{L\ 2}\qquad 50\quad \frac{j20\qquad j40}{j20\qquad j40}\quad 50\quad j40$$

$$\dot{I}_{R\ 2}\quad \frac{\dot{U}_{2}}{Z_{\ 2}}\quad \frac{100/\sqrt{2}\quad 0^{\circ}}{50\quad j40}\quad 1.11\quad 38.7^{\circ}A$$

$$\dot{I}_{C\ 2}\quad \dot{I}_{R\ 2}\frac{j2\ \ L}{j2\ \ L\quad j\frac{1}{2\ \ C}}\quad 1.11\quad 38.7^{\circ}\quad \frac{j40}{j40\quad j20}\quad 2.22\quad 38.7^{\circ}A$$

$$\dot{I}_{L\ 2}\quad \dot{I}_{R\ 2}\frac{j\frac{1}{2\ \ C}}{j2\ \ L\quad j\frac{1}{2\ \ C}}\quad 1.11\quad 38.7^{\circ}\quad \frac{j20}{j40\quad j20}\quad 1.11\qquad 141.3^{\circ}A$$

$$\dot{U}_{L2} \quad \dot{I}_{L2} Z_{L2} \quad 1.11 \quad 141.3^\circ \quad j40 \quad 44.4 \quad 51.3^\circ V$$

$$i_R \; t \quad I_{R0} \quad i_{R1} \; t \quad i_{R2} \; t$$

$$4 \quad 2.21\sqrt{2}\sin \quad t \quad 38.7 \quad 1.11\sqrt{2}\sin 2 \quad t \quad 38.7^\circ \; A$$

$$i_C \; t \quad I_{C0} \quad i_{C1} \; t \quad i_{C2} \; t$$

$$2.21\sqrt{2}\sin \quad t \quad 141.3^\circ \quad 2.22\sqrt{2}\sin 2 \quad t \quad 38.7^\circ \; A$$

$$i_L \; t \quad I_{L0} \quad i_{L1} \; t \quad i_{L2} \; t$$

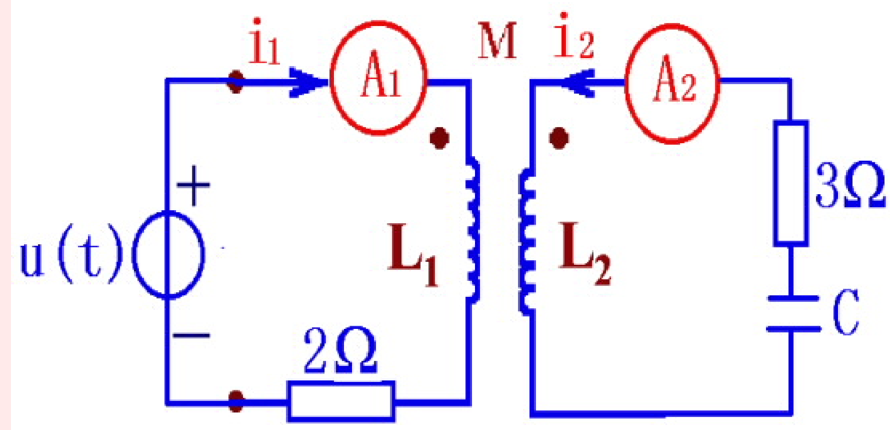
$$4 \quad 4.42\sqrt{2}\sin \quad t \quad 38.7^\circ \quad 1.11\sqrt{2}\sin 2 \quad t \quad 141.3^\circ \; A$$

A $$\sqrt{I_{R0}^2 \quad I_{R1}^2 \quad I_{R2}^2} \quad \sqrt{4^2 \quad 2.21^2 \quad 1.11^2} \quad 4.7A$$

V $$\sqrt{U_{L0}^2 \quad U_{L1}^2 \quad U_{L2}^2} \quad \sqrt{0^2 \quad 88.4^2 \quad 44.4^2} \quad 98.9V$$

**例2.** 求图示电路中电流i₁(t)和i₂(t)，并求两个电流表的读数。其中

$$u(t) \quad 20 \quad 20\cos \quad tV, \frac{1}{C} \quad 6 \quad , \quad L_1 \quad L_2 \quad 4 \quad , M \quad 1 \quad .$$




**解：** 直流分量作用：

$$i_2^{(0)} \quad 0 \quad i_1^{(0)} \quad \frac{20}{2} \quad 10A$$

基波分量作用：

$$\begin{cases} (2 \quad j4)\dot{I}_1 \quad j\dot{I}_2 \quad \dfrac{20 \quad 0}{\sqrt{2}} \\ j\dot{I}_1 \quad (3 \quad j4 \quad j6)\dot{I}_2 \quad 0 \end{cases}$$

$$\dot{I}_1 \quad \frac{2.24}{\sqrt{2}} \quad 61.76$$

$$\dot{I}_2 \quad \frac{1.18}{\sqrt{2}} \quad 118.07$$

由叠加定理，有：

$$i_1 \quad i_1^{(0)} \quad i_1^{(1)}$$

$$10 \quad 4.24\cos( \quad t \quad 61.76 \quad )A$$

$$i_2 \quad i_2^{(0)} \quad i_2^{(1)}$$

$$1.18\cos( \quad t \quad 118.07 \quad )A$$

$$I_1 \quad \sqrt{I_1^{(0)2} \quad I_1^{(1)2}} \quad 10.44\,A$$

$$I_2 \quad \frac{1.18}{\sqrt{2}} \quad 0.834\,A$$

# 8.7 频率响应和网络函数

## 1. 网络函数*H*（jw）的定义

在线性网络中，当无初始能量，且只有一个独立激励源作用时，网络中某一处响应的相量与激励的相量之比，叫做该响应的网络函数。

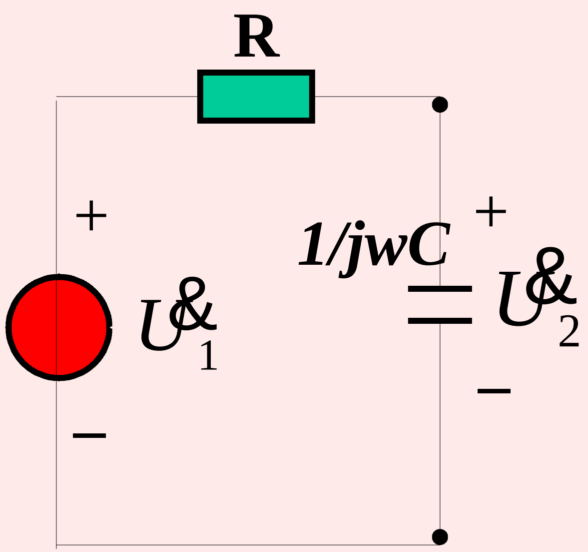
$$H(j\omega)\ \mathrm{H(jw)} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}} \quad \left| \quad \right| \quad \varphi(\omega)$$

分析*H*(j )随 变化的特性可知网络函数在正弦输入下随 变化的特性即频率响应特性。

分析|*H*(j )|随 变化的特性即幅频响应特性。

分析 $\varphi(\omega)$ 随 变化的特性即相频响应特性。

例1.　已知**u**₁为正弦激励，试定性分析以电压**u**₂为输出时该电路的频率响应特性。




$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{\omega_0}{j\omega+\omega_0}$$

[illegible] $\omega_0=\dfrac{1}{RC}$

$$|H(j\omega)|=\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

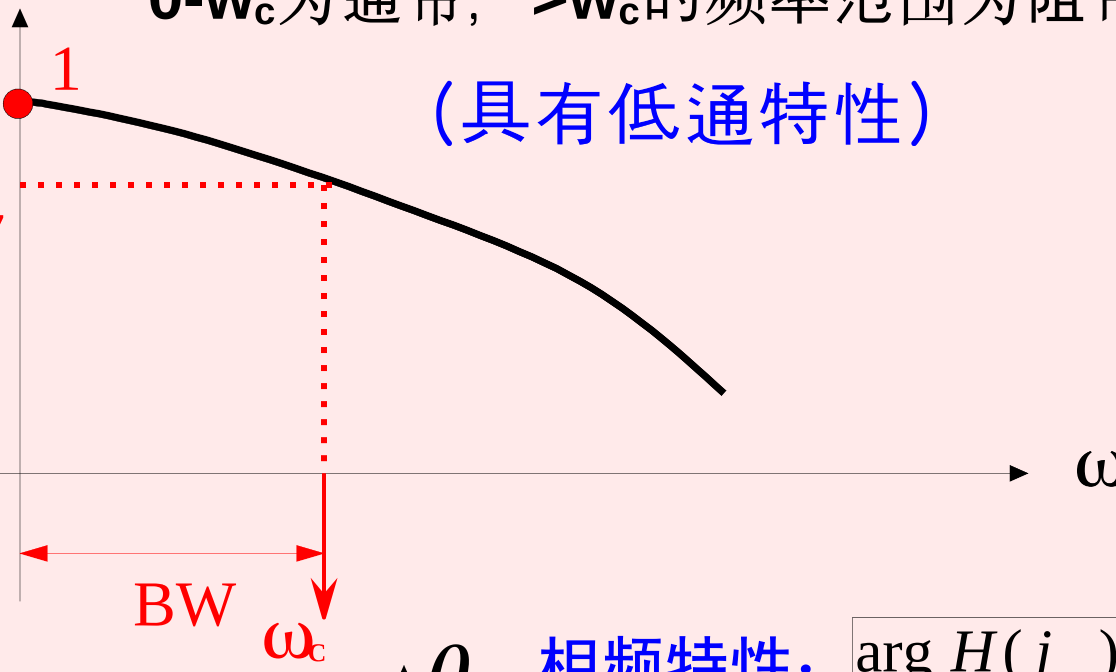
上 页　下 页

## 幅频特性：

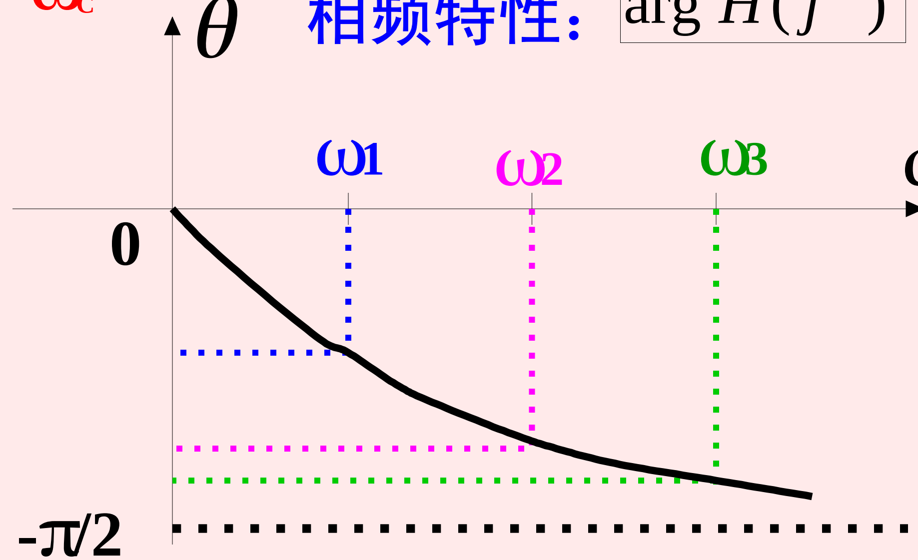
$|H(j\omega)| = \left|\frac{\dot U_2}{\dot U_1}\right|$

**0-$w_c$为通带，>$w_c$的频率范围为阻带**

（具有低通特性）




相频特性：$\arg H(j\omega)$

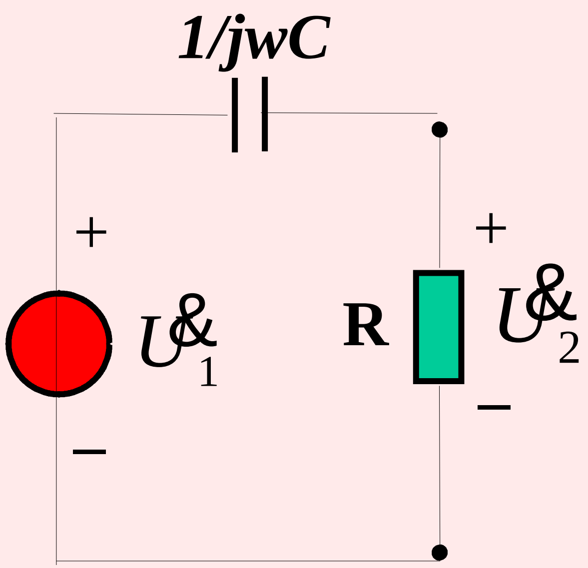



$$|H(j\omega)| = \frac{w_0}{\sqrt{w^2 + w_0^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

上 页　下 页

例2.　已知$u_1$为正弦激励，试定性分析以电压$u_2$为输出时该电路的频率响应特性。




$$H(j\omega)=\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{R}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega}{j\omega+\omega_0}$$

$$\omega_0=\frac{1}{RC}$$

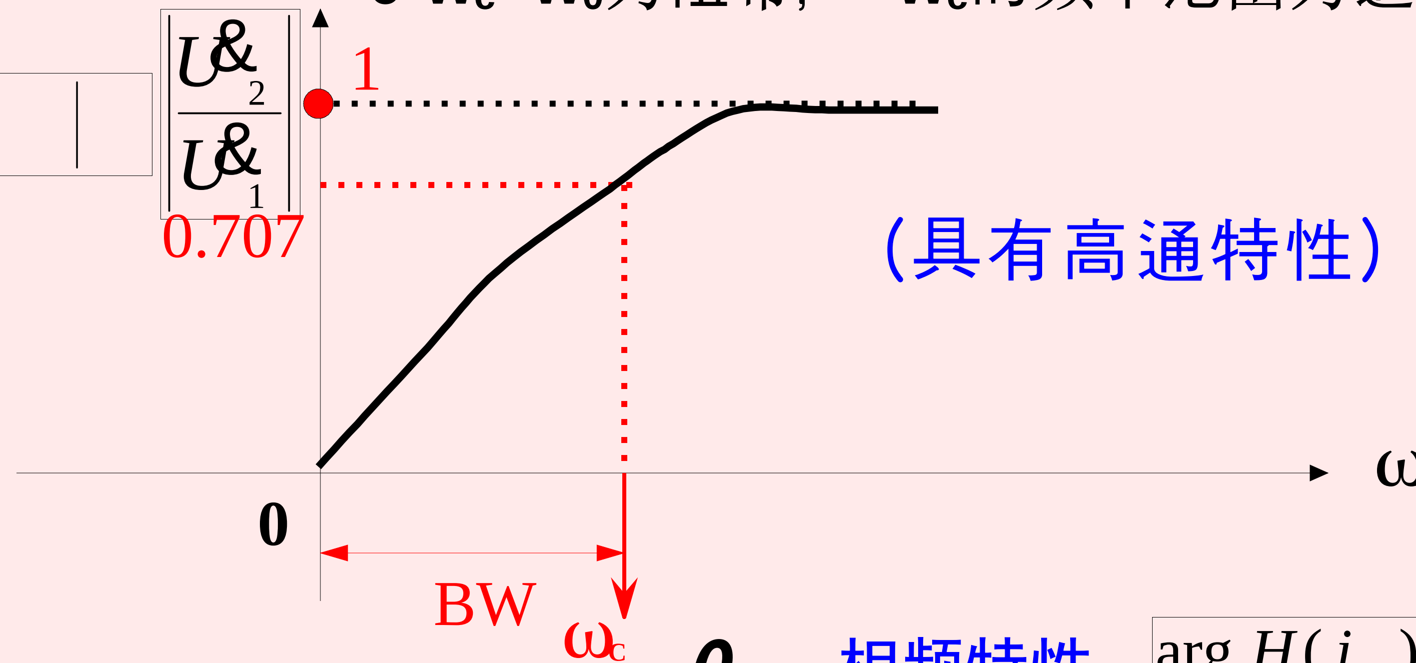
$$|H(j\omega)|=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\ \arctan\ \frac{\ \ }{\omega_0}$$

上 页　　下 页

**幅频特性：** $|H(j\ \ )|$ $\left|\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}\right|$

**0-w$_c$=w$_0$**为阻带，**>w$_c$**的频率范围为通带




（具有高通特性）

**相频特性：** $\arg H(j\ \ )$

$\theta$


$$|H(j\omega)| = \frac{w}{\sqrt{w^2+w_0^2}}$$

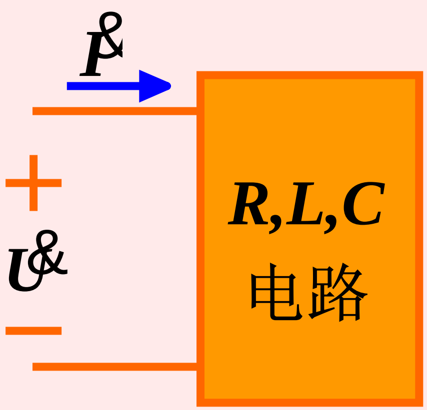
$$()\arctan\frac{0}{\quad}$$

上 页　下 页

# 8.7.2 RLC串联电路的频率特性

## 1. 谐振的定义

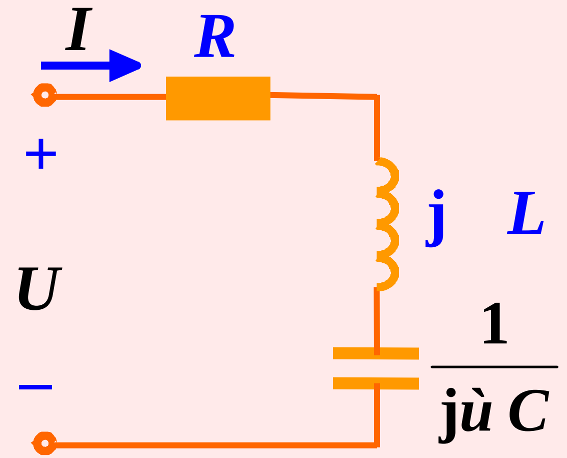
含有R、*L*、*C*的一端口电路，在特定条件下出现端口电压、电流同相位的现象时，称电路发生了谐振。




$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} \quad Z \quad R$$

发生谐振

# 2. 串联谐振的条件




$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$$

$$= R + \mathrm{j}X$$

当 $X = 0$ $\boxed{\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}}$ 时，电路发生谐振。

谐振条件

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

谐振角频率（*resonant angular frequency*)

仅与电路参数有关

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

谐振频率（*resonant frequency*)

串联谐振的实现方式：

1) $L$ $C$ 不变，改变 $w$，使 $X_L=|X_C|$ 。

2)电源频率不变，改变 $L$ 或 $C$ ( 常改变$C$ “调谐”)，使 $X_L=|X_C|$

# 3.RLC串联谐振的特征

$X$=0 $Z$=$R$ (电路呈电阻性)

$$|Z| \quad \sqrt{R^2 \quad X^2} \quad R$$ 最小

$$I \quad \frac{U}{|Z|} \quad \frac{U}{R}$$ 最大

品质因数(*quality factor*)

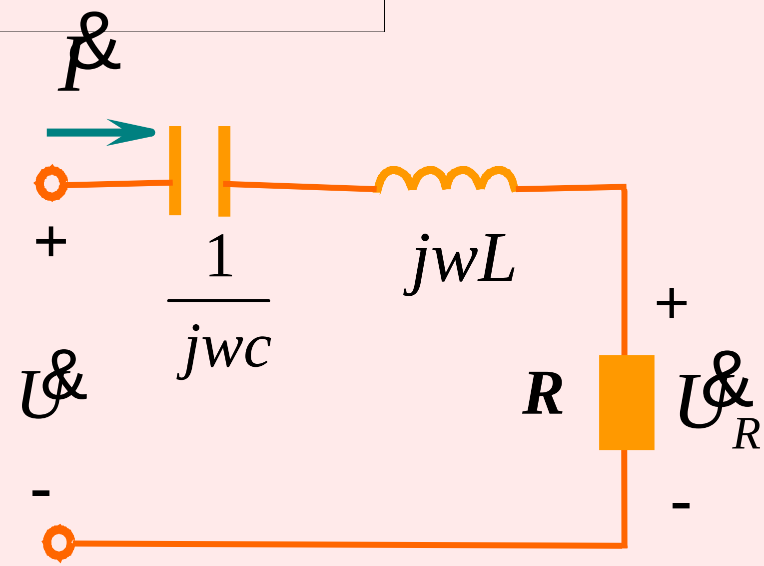
$$Q \quad \frac{\omega_0 L}{R} \quad \frac{1}{\omega_0 RC} \quad \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

无量纲

例 求如图所示**RLC**串联电路,以电阻电压作为响应的**网络函数**,

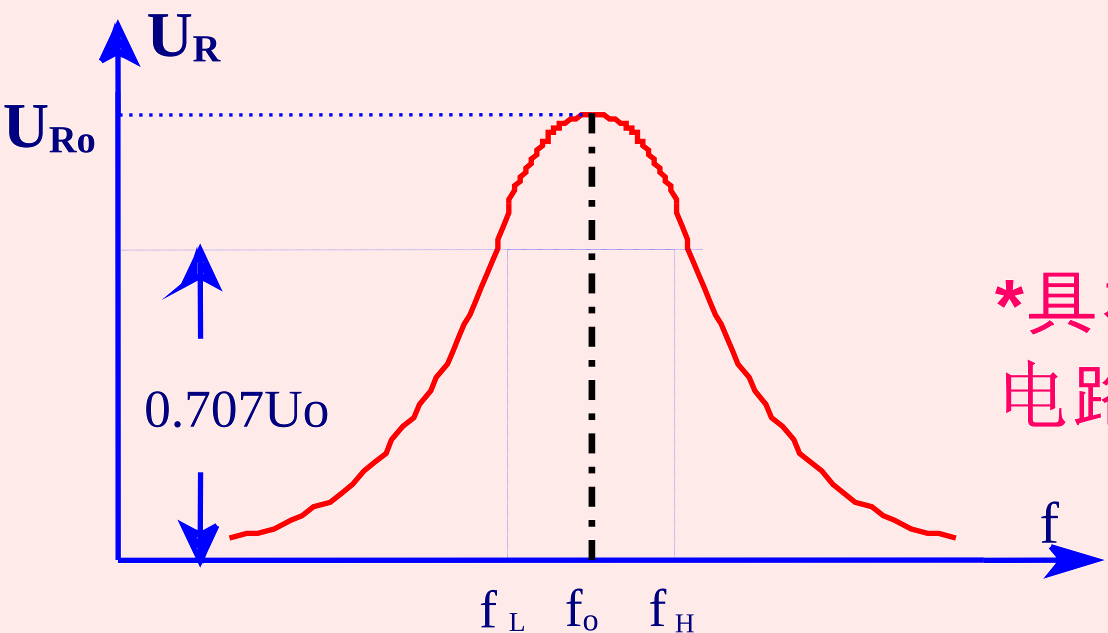
[redacted]

解 ：



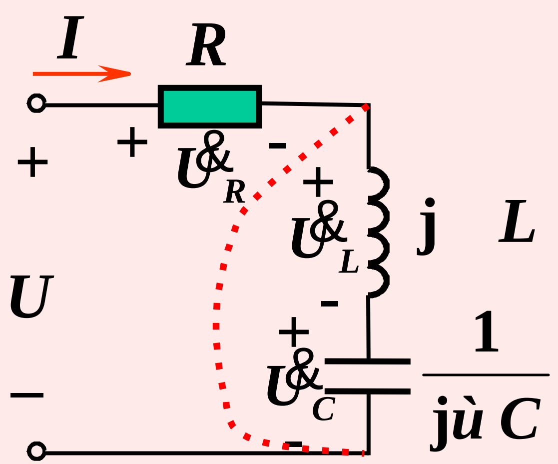

$$H(j\omega)=\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{R}{R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})}$$

幅频特性:




*具有带通特性， 为带通电路， **BW=F$_H$-f$_L$**

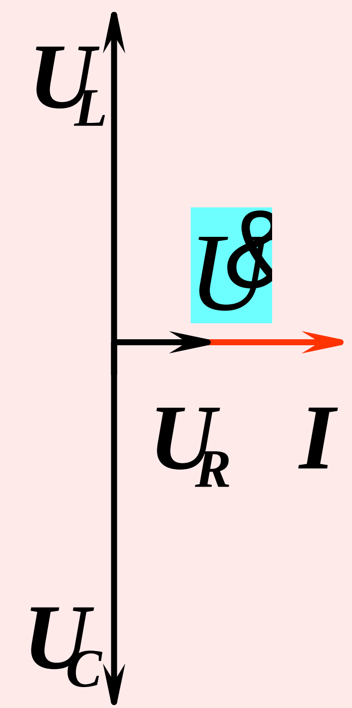
## 谐振时元件上的电压




$\dot{U} \quad \dot{U}_R \quad \dot{I}R$

$\dot{U}_L \quad \dot{I}j \;\; {}_0 L \quad j\dot{U}Q$

$\dot{U}_C \quad \frac{\dot{I}}{j \;\; {}_0 C} \quad j\dot{U}Q$



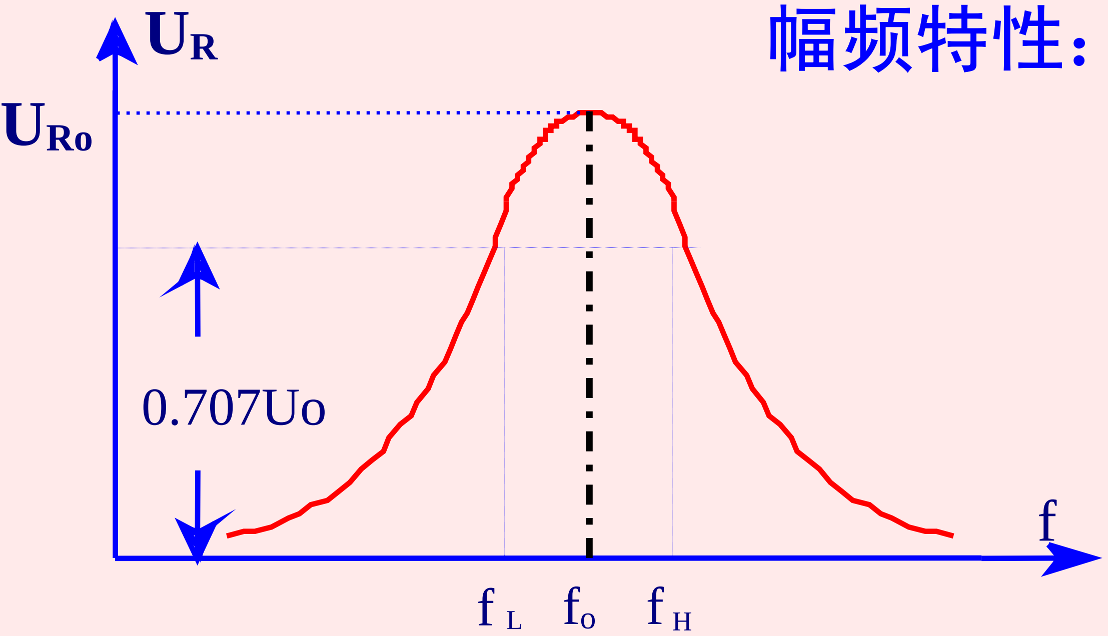

$\dot{U}_L \quad \dot{U}_C \quad 0$

L、C环节等效电抗为零，相当于短路。

谐振时的相量图

$U_L \quad U_C \quad QU$

当Q>>1时，$U_L = U_C >> U$，产生过电压现象，故串联谐振又称 电压谐振。




**幅频特性：**

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{R}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

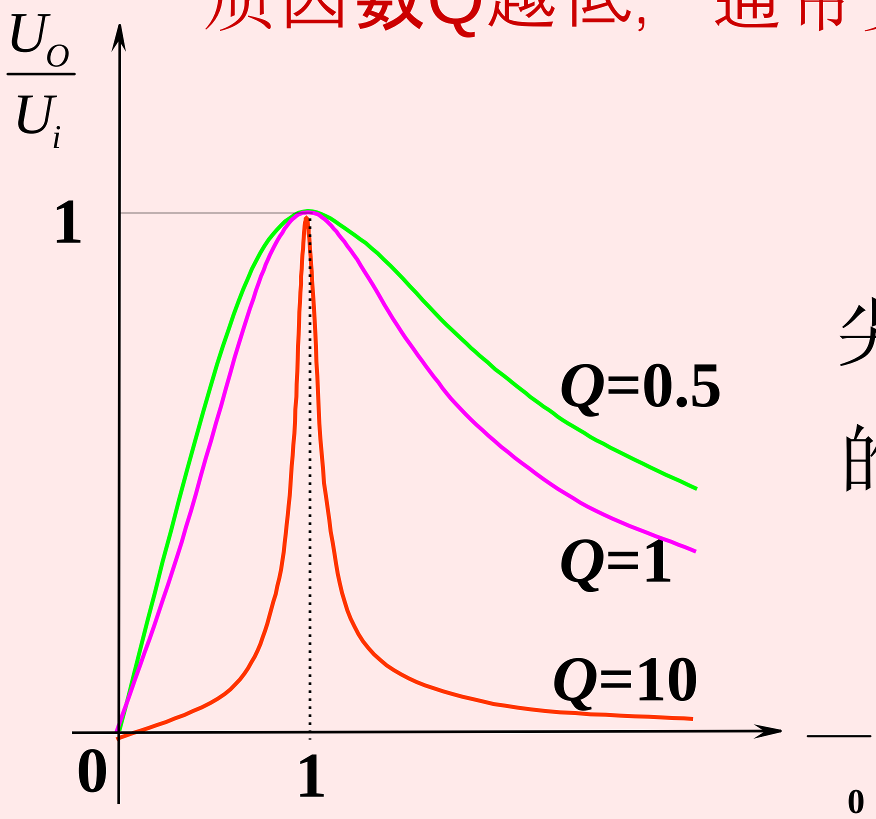
品质因数两种测量方法

(1) $Q=\frac{U_{L0}}{U}=\frac{U_{C0}}{U}$

(2) $Q=\frac{f_0}{f_H-f_L}$

$f_2$和$f_1$是失谐时，亦即输出电压的幅度下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ (＝0. 707) 倍时的上、下频率点。

R改变，Q变化。RLC带通滤波电路的通带宽度
与品质因**数**成反比。电路中的电阻R越大，品质因**数**Q越低，通带宽度就越宽。



谐振曲线

***Q***越大，谐振曲线越尖。电路对非谐振频率下的电流具有较强的抑制能力，所以选择性好。

#8.27，8.32

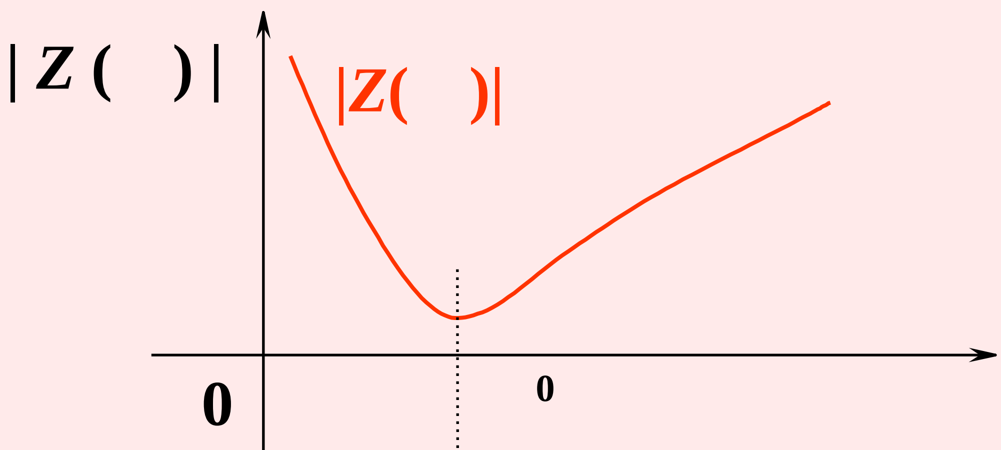
## 4. *RLC*串联谐振电路的谐振曲线

### 1. 阻抗频率特性

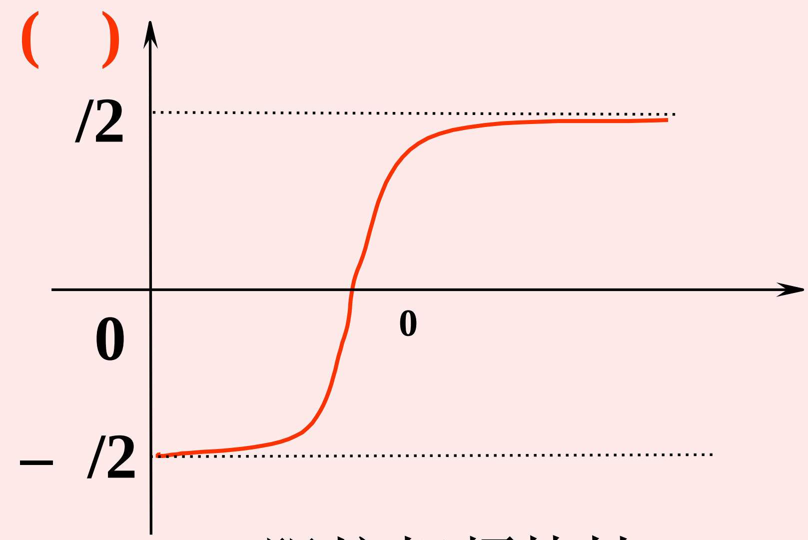
$Z \quad R \quad \mathrm{j}(\grave{u} L \quad \frac{1}{\grave{u} C}) \quad |Z(\grave{u})| \quad \ddot{o}(\grave{u})$

$|Z(\grave{u})| \quad \sqrt{R^2 \quad ( \quad L \quad \frac{1}{C})^2}$ 幅频特性

$\ddot{o}(\grave{u}) \quad \mathrm{tg}^{\;1} \frac{L \quad \frac{1}{C}}{R}$ 相频特性




阻抗幅频特性



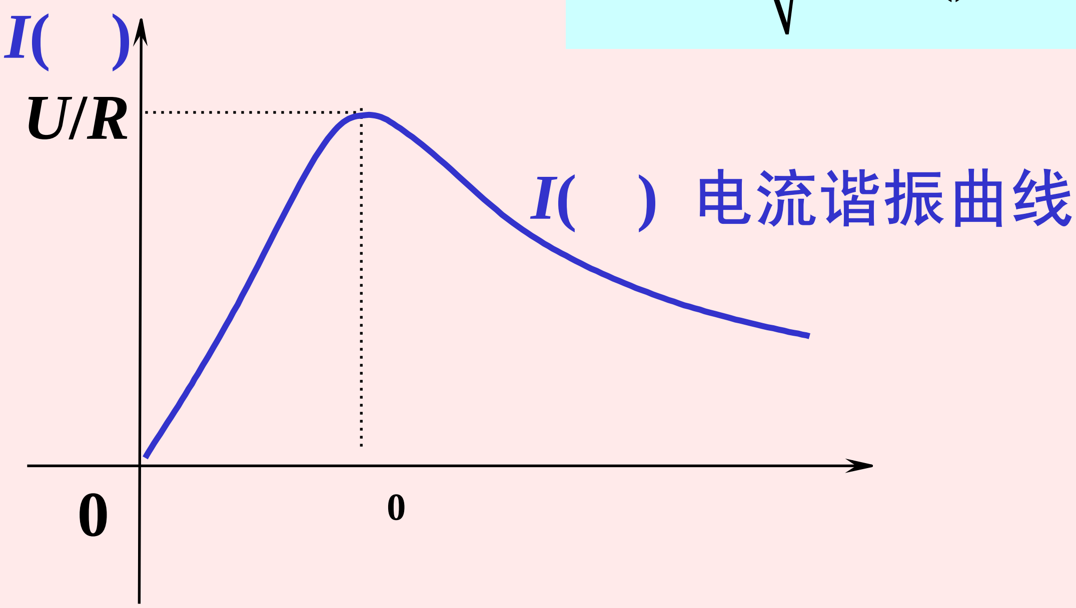

阻抗相频特性

## 2. 电流谐振曲线

谐振曲线：表明电压、电流与频率的关系。

幅值关系：

$$I(\omega)=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



## 3. 通用谐振曲线

为了不同谐振回路之间进行比较，把谐振曲线的横、纵坐标分别除以$w_0$和$I(w_0)$。

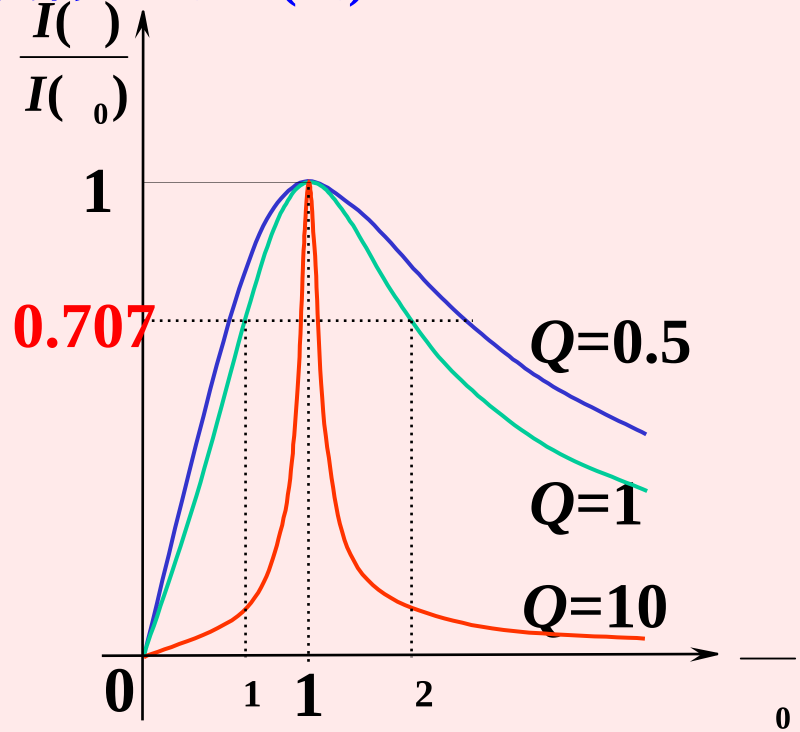
$$I(\ )\qquad \frac{U}{\sqrt{R^2\ L^2\ (\ )\qquad \frac{1}{C}}}$$

$I(\ _0)\quad I_0$

$$\frac{I(\ )}{I_0}\qquad \frac{1}{\sqrt{1\quad Q^2(\varsigma\quad \frac{1}{\varsigma})^2}}$$

$$\frac{\quad}{_0}$$

$Q$　当　不变　$\frac{I(\ )}{I_0}$　曲线越尖



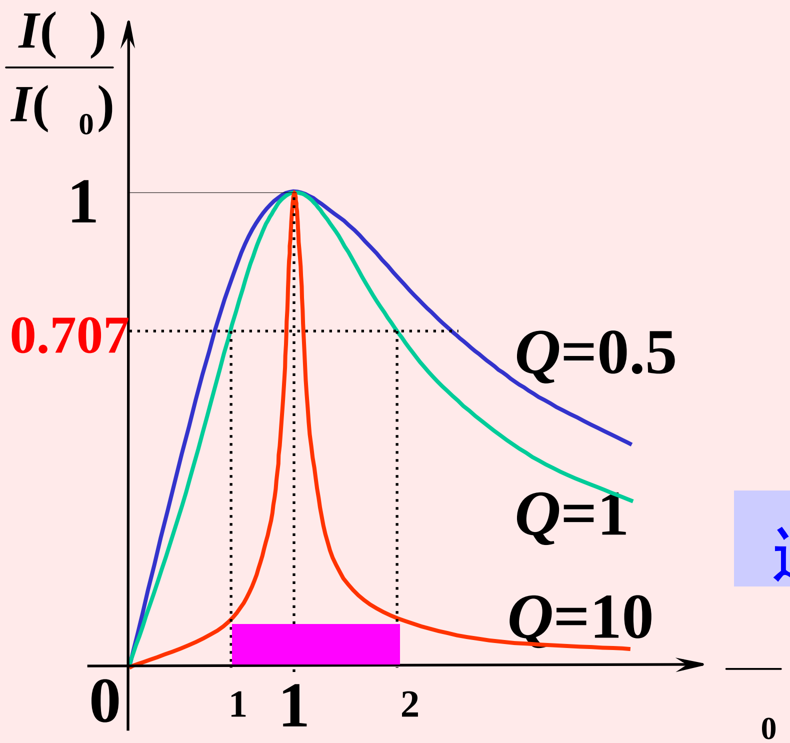

➢ 从多频率的信号中选出 $w_0$ 的那个信号的能力，即**选择性**。

串联谐振电路对不同频率的信号有不同的响应，对谐振信号最突出(表现为电流最大)，而对远离谐振频率的信号加以抑制(电流小)。

$Q$ 是反映谐振电路性质的一个重要指标。

工程上用通频带定量地衡量选择性:

令 $\frac{1}{\sqrt{1 \quad Q^{2}( \quad \frac{1}{\ })^{2}}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$




$_{1,\ 2} \quad \mu \frac{1}{2Q} \quad \sqrt{\frac{1}{4Q^{2}} \quad 1}$

$_{2} \quad _{1} \quad \frac{1}{Q}$

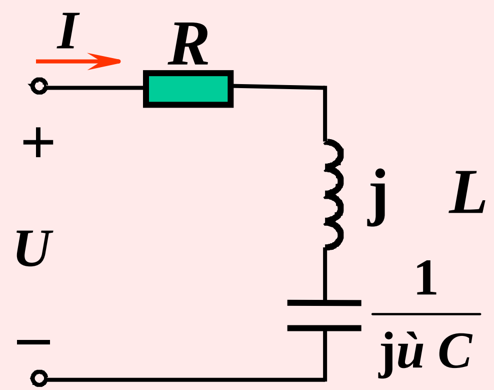
通频带

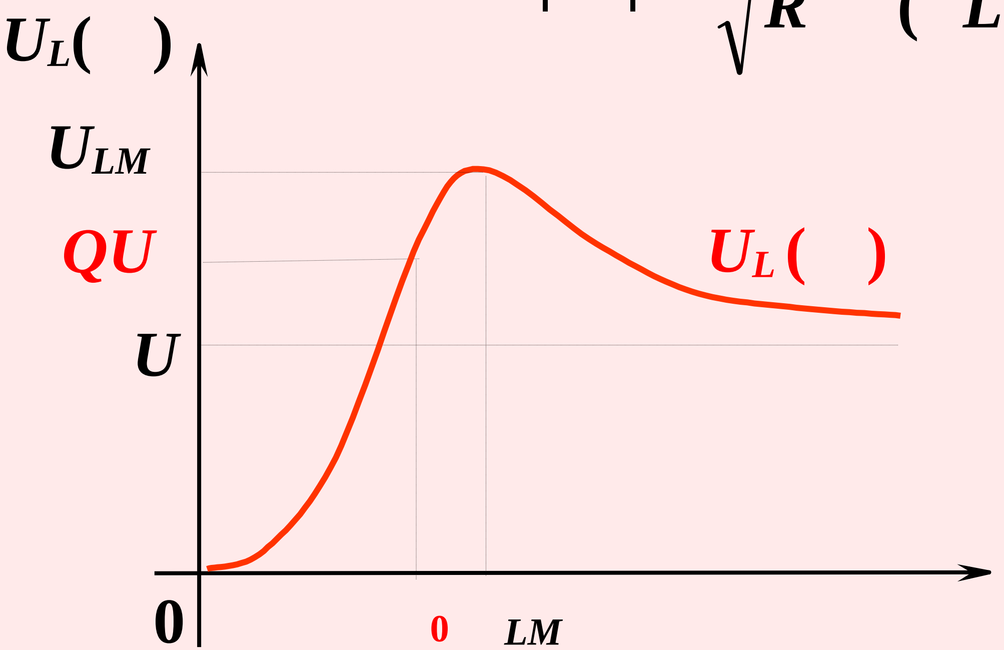
$W \quad _{21} \quad \frac{_{0}}{Q}$

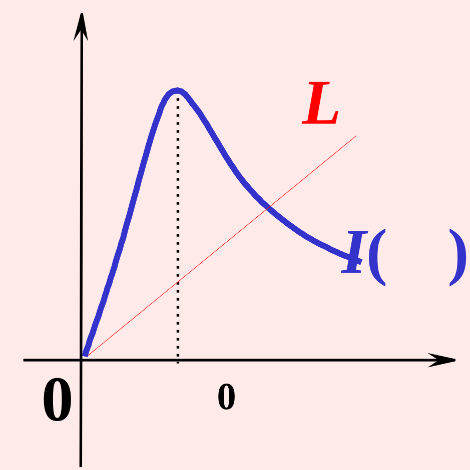
或 $f \quad \frac{f_{0}}{Q}$

# （5） $U_L(w\ )$与$U_C(w\ )$的频率特性

$$U_L(\grave{u})\qquad LI\qquad L\frac{U}{|Z|}\qquad \frac{LU}{\sqrt{R^2\quad(\ L\quad \frac{1}{C})^2}}$$




=0， $U_L = 0$；

0< $w$ < $_0$ ， $U_L$ ；

= $_0$ ， $U_L= QU$；

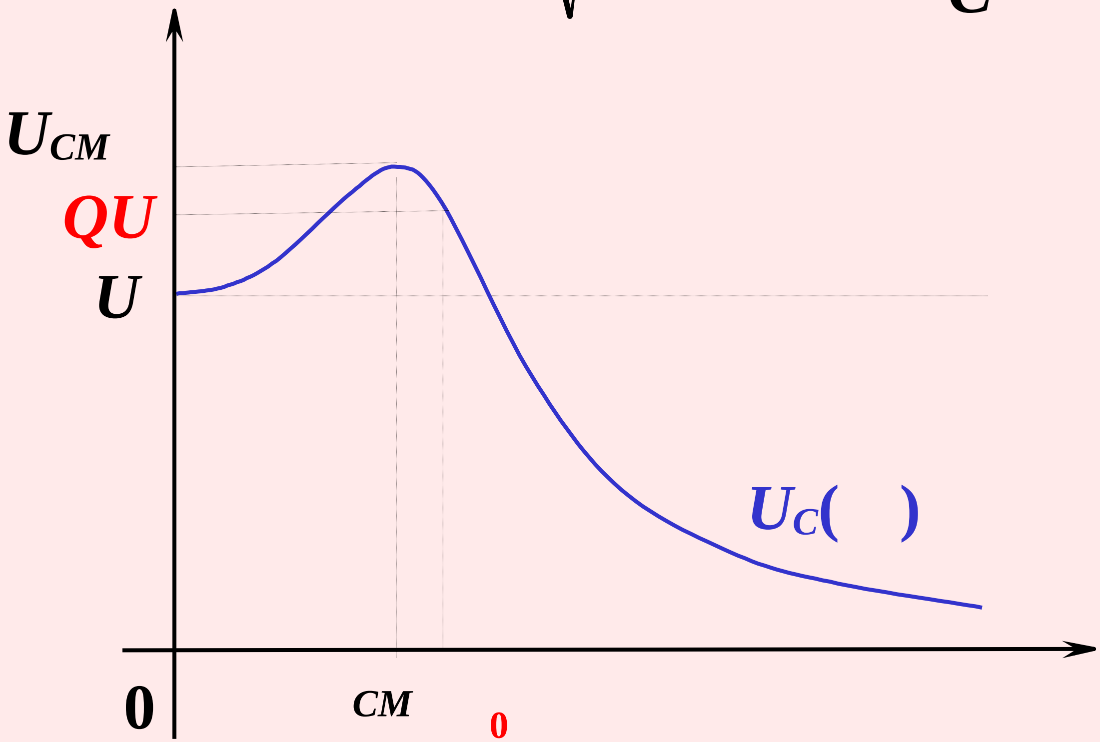
$w_0$< < $_{LM1}$ ， $U_L$ ；

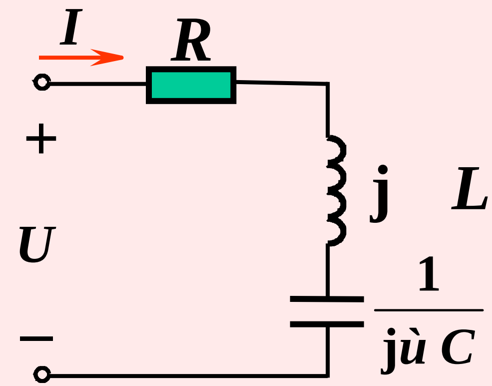
= $_{LM}$ ， $U_L = U_{LM}$ ；

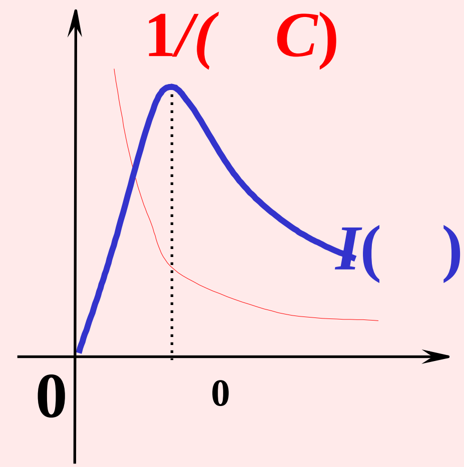
$_{LM}$ < ， $U_L$ ；

， $U_L$=$U$。

$$U_C(\grave{u}) \quad \frac{I}{C} \quad \frac{U}{C\sqrt{R^2 \quad (\ L \quad \frac{1}{C})^2}}$$




=0， $U_C = U$;

0<$w$ < $_{C\ M}$， $U_C$ ;

= $_{C\ M}$ ， $U_C = U_{CM}$ ;

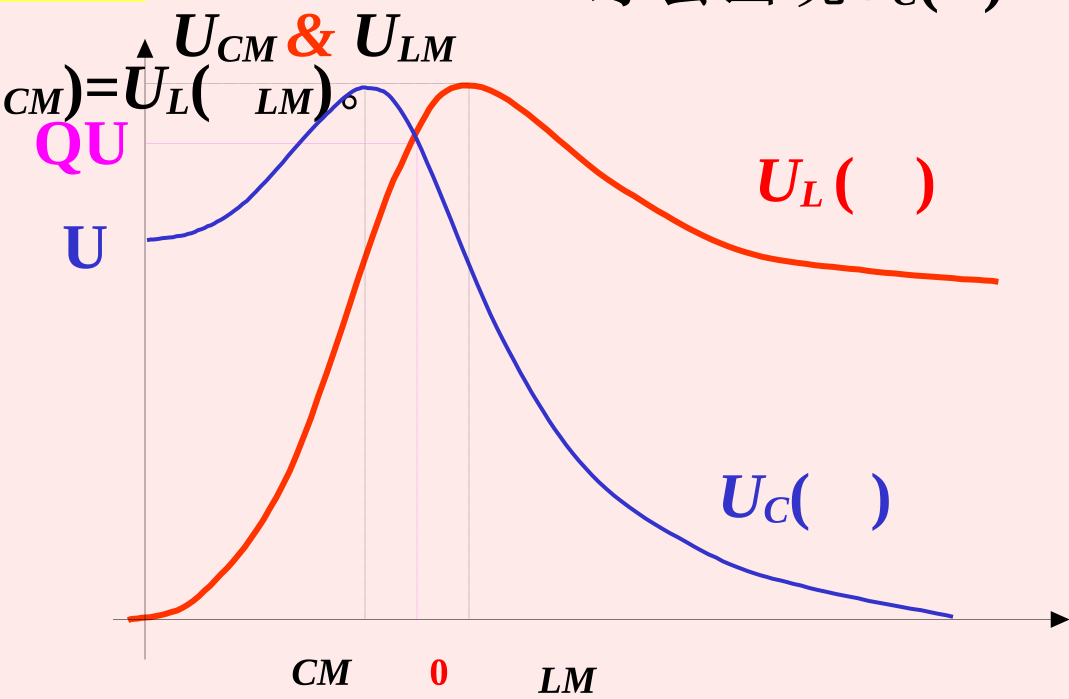
$_{C\ M}$< < $_0$， $U_C$ ;

= $_0$ ， $U_L$= $QU$ ;

$_0$< ， $U_C$ ;

$U_C$=0。

根据数学分析，当 $Q \quad 1/\sqrt{2}$ 才会出现$U_C(\quad)$，$U_L(\quad)$最大值。且$U_C(\quad_{CM})=U_L(\quad_{LM})$。



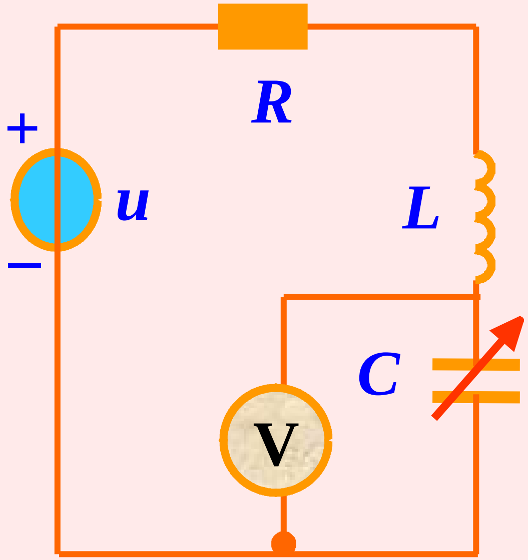

$$\grave{u}_{CM} \quad \grave{u}_0\sqrt{1 \quad \frac{1}{2Q^2}} \quad \grave{u}_0$$

$$\grave{u}_{LM} \quad \grave{u}_0\sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 \quad 1}} \quad \grave{u}_0$$

$$U_C(\grave{u}_{CM}) \quad U_L(\grave{u}_{LM}) \quad \frac{QU}{\sqrt{1 \quad \frac{1}{4Q^2}}} \quad QU$$

$Q$ 越高，$\quad_{LM}$ 和 $w_{CM}$ 越靠近 $w_0$

例




一接收器的电路参数为：$U$=10V $w$=5 $10^3$ rad/s，调C使电路中的电流最大，$I_{max}$=200mA，测得电容电压为600V，求R、L、C及Q

解

$$R \quad \frac{U}{I_0} \quad \frac{10}{200 \quad 10^{\ 3}} \quad 50$$

$$U_C \quad QU \quad Q \quad \frac{U_C}{U} \quad \frac{600}{10} \quad 60$$

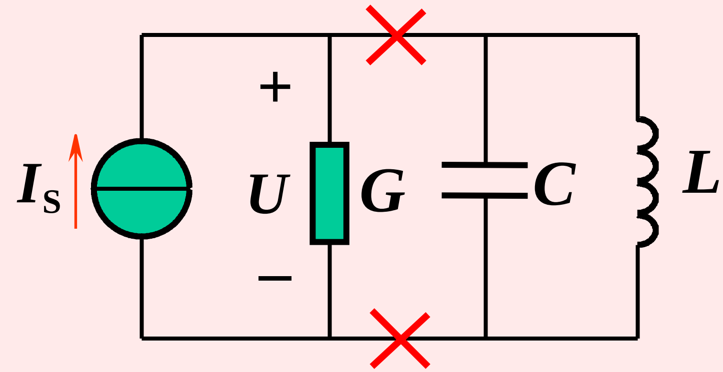
$$L \quad \frac{RQ}{\ _0} \quad \frac{50 \quad 60}{5 \quad 10^3} \quad 60mH$$

$$\mathrm{C} \quad \frac{1}{\ _0^2 L} \quad 6.67 \quad F$$

返 回 上 页 下 页

# §9-9 并联谐振电路

## 1.简单 *G*、*C*、*L* 并联电路




对偶：

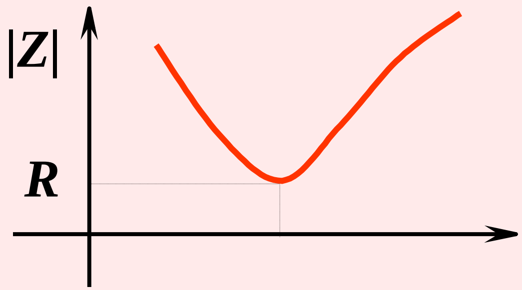
| <u>*R L C* 串联</u> | <u>*G C L* 并联</u> |
|---|---|
| $Z \quad R \quad j( \; L \quad \frac{1}{\;\;C})$ | $Y \quad G \quad j( \; C \quad \frac{1}{\;\;L})$ |

谐振条件： $\grave{u}_0 \quad \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\qquad$ $\grave{u}_0 \quad \frac{1}{\sqrt{LC}}$

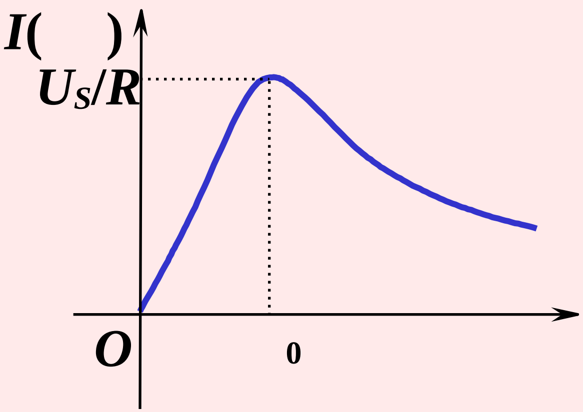
**L、C环节等效电抗为零，相当于短路。**

**L、C环节等效电纳为零，相当于开路。**

## $RLC$ 串联

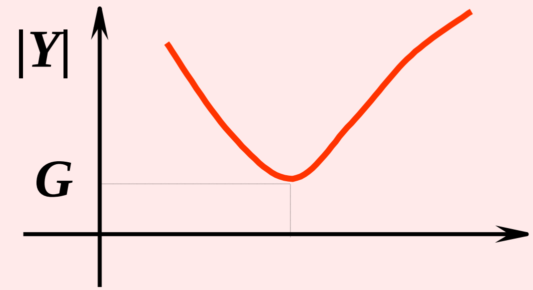



$|Z|$最小 （$R$）

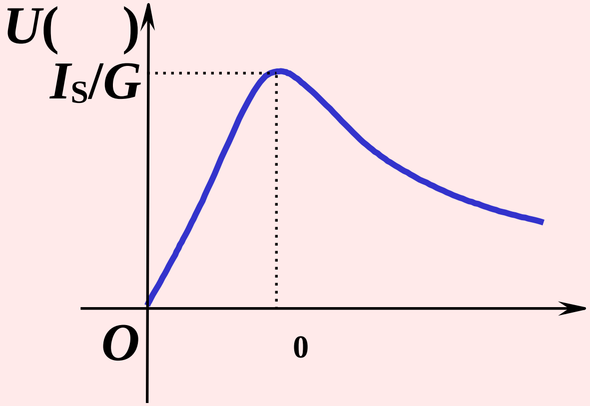



谐振时电流最大

## $GCL$ 并联

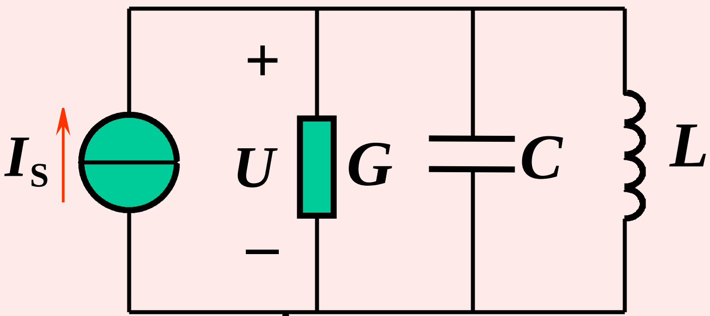


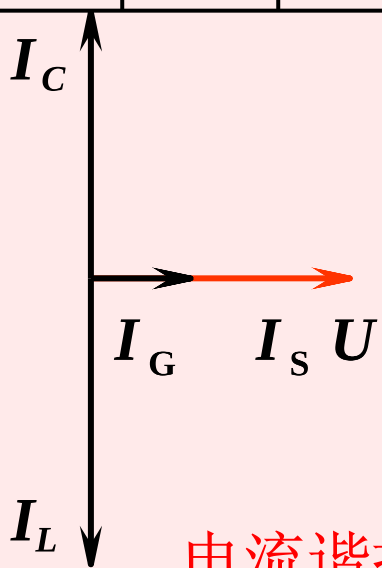

$|Y|$最小($G$)




谐振时电压最高

## GCL 并联



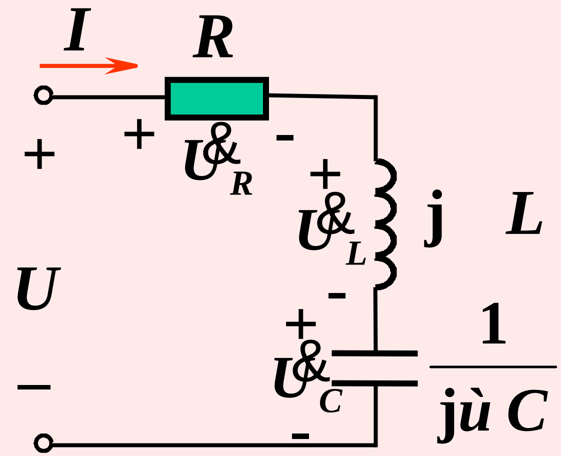



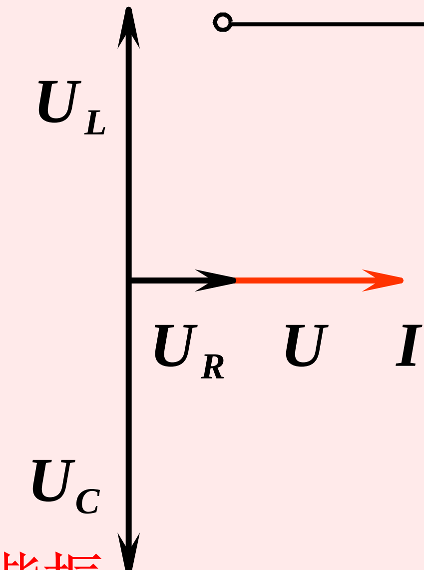

电流谐振

$$I_L(\omega_0)=I_C(\omega_0)=QI_S$$

$$Q=\frac{\omega_0 C}{G}=\frac{1}{\omega_0 GL}=\frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

## RLC 串联



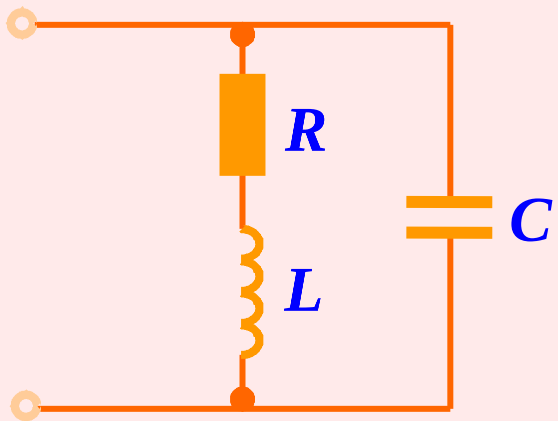

电压谐振

$$U_L(\omega_0)=U_C(\omega_0)=QU$$

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 RC}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

## 2. 电感线圈与电容器的并联谐振

实际的电感线圈总是存在电阻，因此当电感线圈与电容器并联时，电路如图：




### （1）谐振条件

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$$

$$= G + jB$$

谐振时 $B=0$，即

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

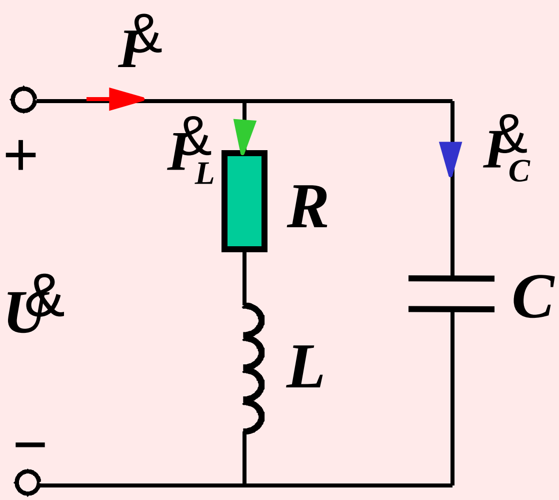
当 $\frac{1}{LC} \quad (\frac{R}{L})^2$，即 $R \quad \sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，可以发生谐振

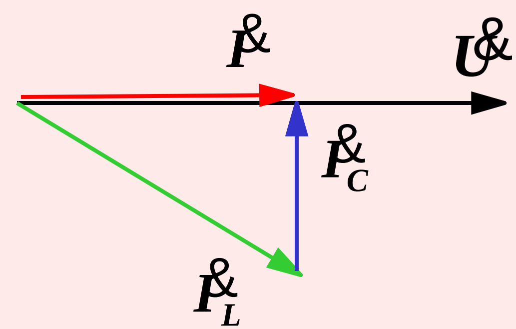
当电路发生谐振时，电路相当于一个电阻：

$$Y(\quad_0) \quad \frac{R}{R^2 \quad (\quad_0 L)^2}$$

$$\omega_0 C \quad \frac{\omega_0 L}{R^2 \quad (\omega_0 L)^2} \quad 0$$

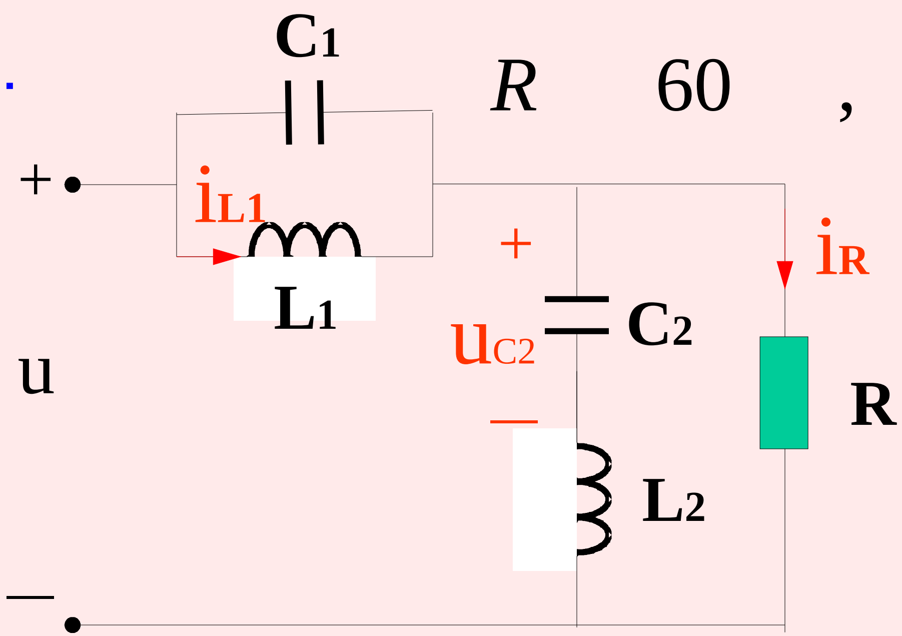
$$Z(\omega_0) \quad \frac{R^2 \quad (\omega_0 L)^2}{R} \quad \frac{L}{RC}$$



已知： $u\ t\ t\ t\ V$ $\;6090\cos(90)40\sin(2)$

例3.




$R$ 60 ， $L_1$ 100 ， $\frac{1}{C_1}$ 400

$L_2$ 100 ， $\frac{1}{C_2}$ 100

瞬时值 $i_{L1}(t)$ ，

有效值 $U_{C2}$

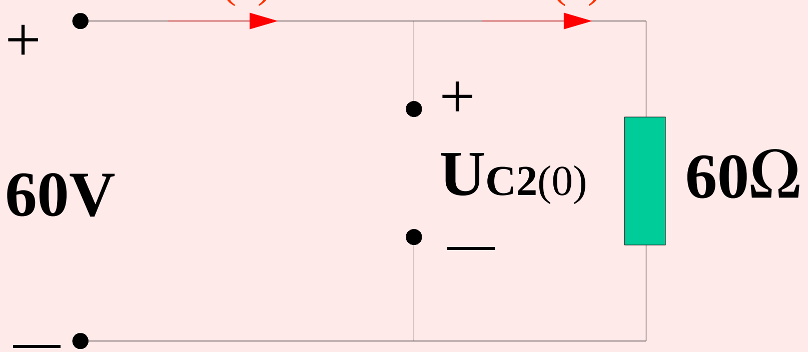
解：

先分析是否有谐振现象发生。

$\Theta \quad L_2 \quad \frac{1}{C_2} \quad 100$ 对基波发生串谐；

$\Theta \quad 2 \quad L_1 \quad \frac{1}{2 \quad C_1} \quad 200$ 对二次谐波发生并谐。

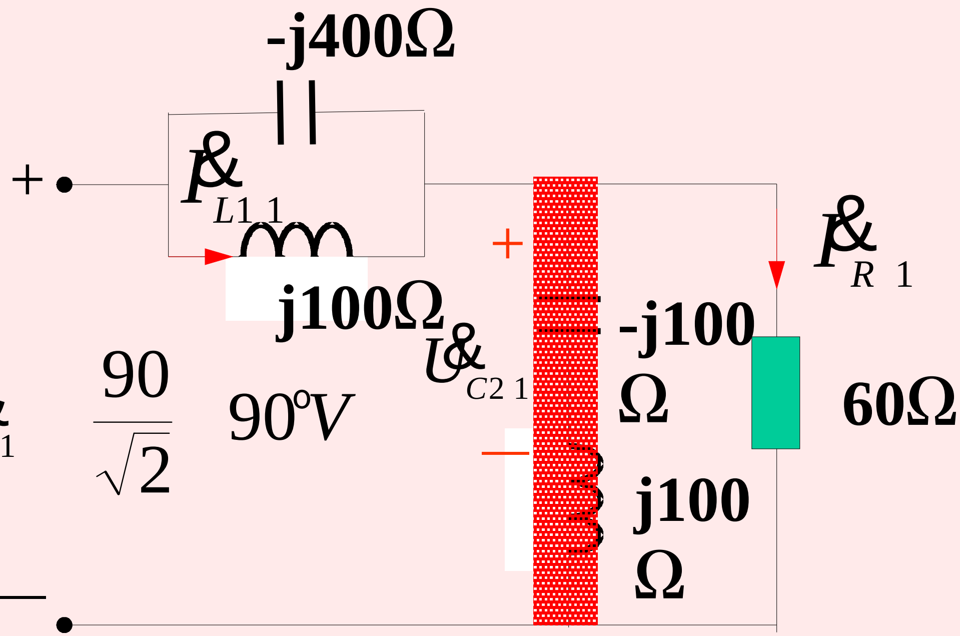
(1) 对直流分量：




$I_{L(0)} = I_{R(0)} = 60/R = 60/60 = 1A$

$U_{C2(0)} = 60V$

(2) 对基波分量： $L_2$和$C_2$串谐




$$\dot{U}_1 = \frac{90}{\sqrt{2}}\angle 90^\circ V$$

$$\dot{I}_{R1} = 0$$

$$\dot{I}_{L11} = \frac{(90/\sqrt{2})\angle 90^\circ}{j100} = \frac{0.9}{\sqrt{2}} A$$

$$\dot{U}_{C21} = \left[\frac{90/\sqrt{2}\angle 90^\circ}{j100} - \frac{90/\sqrt{2}\angle 90^\circ}{j400}\right] \cdot j100 = \frac{67.5}{\sqrt{2}}\angle 90^\circ V$$

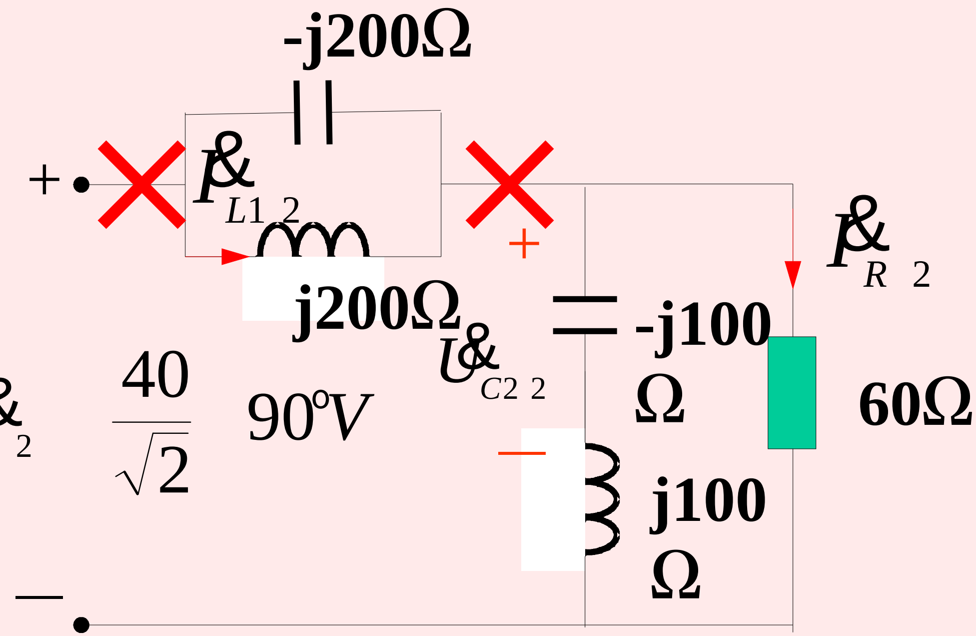
⑶ 对二次谐波：L₁和C₁并谐

$\dot{I}_{R2} = 0$

$\dot{I}_{L12} = \dfrac{(40/\sqrt{2})\angle 90^\circ}{j200} = \dfrac{0.2}{\sqrt{2}} A$

$\dot{U}_{C22} = 0$

$\dot{U}_2 = \dfrac{40}{\sqrt{2}}\angle 90^\circ V$




瞬时值 $i_{L1}$ $t$ $t$ $t$ $A$ $10.9\cos$ $0.2\cos$

有效值 $U_{C2} = \sqrt{60^2 + \left(\dfrac{67.5}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 76.67V$

#8.38

# 本章小结：

1、 正弦量的时域与频域表示；相位差、有效值

$i(t)=I_m\cos(\quad t+\quad_i)$ $\qquad I \quad I \quad _i$

2、 相量形式KCL和KVL $\quad \overset{n}{\underset{k\quad 1}{}} I_k \qquad 0 \qquad \overset{m}{\underset{k\quad 1}{}} U_k \qquad 0$

3、 正弦交流电路中电阻、电感、电容元件伏安关系

| 元件性质 | 电 阻 | 电 感 | 电 容 |
|---|---|---|---|
| 时域关系 | U=RI； =0 | U= L I； =90° | U=I/( C) =-90° |
| 频域关系 | $U \quad RI$ | $U \quad j \ LI \quad jX_L I$ | $U \quad \dfrac{1}{j \quad C} I \quad jX_C I$ |

4、 复阻抗、复导纳及等效变换： $Y \quad \dfrac{1}{Z}$

5.谐振 $\phi=0$ ， 电压与电流同相位，电路呈阻性。

## 6、正弦稳态电路分析步骤：

1) 作出相量电路模型：

正弦电流、电压用相量表示；

无源支路用复阻抗表示。

2）选择适当的电路分析方法：

采用 kcl、kvl、等效变换法、回路电流法、节点电压法、电路定理分析法等；

3）列出相量方程，为复数代数方程；

4）由所得到的相量解，用相量反变换得出解的

# 7、 非正弦周期电流电路的计算

**1.** 分别求出激励的直流分量和各次谐波分量单独作用时的响应。

画各分电路图注意点:

①直流分量激励下，C开路，L短路；

②各次谐波分量激励下，电抗值不同

$$\begin{cases} X_{Lk}=k\omega L \\ X_{Ck}=1/k\omega C \end{cases}$$

**2.** 将直流分量和各次谐波分量的瞬时响应叠加求和。

注意：$i \; t \quad I_0 \quad i_1 \; t \quad i_2 \; t \quad \Lambda$