# 第八章 函数

主要内容

函数的定义与性质

- 函数定义
- 函数性质

函数运算

- 函数的逆
- 函数的合成

双射函数与集合的基数

# 8.1 函数的定义与性质

主要内容

函数定义与相关概念

- 函数定义
- 函数相等
- 从$A$到$B$的函数$f:A\to B$
- $B^A$
- 函数的像与完全原像

函数的性质

- 单射、满射、双射函数的定义与实例
- 构造双射函数

某些重要的函数

# 函数定义

定义8.1 设 $F$ 为二元关系, 若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}F$ 使 $xFy$ 成立, 则称 $F$ 为函数

对于函数$F$, 如果有 $xFy$, 则记作 $y=F(x)$, 并称 $y$ 为$F$ 在 $x$ 的值.

例 $F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_2>\}$

$F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$

$F_1$是函数, $F_2$不是函数

定义8.2 设$F$, $G$ 为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

如果两个函数$F$ 和 $G$ 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$ 都有$F(x)=G(x)$

函数$F(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $G(x)=x-1$不相等, 因为 $\mathrm{dom}F \subset \mathrm{dom}G$.

# 从$A$到$B$的函数

定义8.3 设$A$, $B$为集合, 如果

$f$为函数, $\mathrm{dom}f=A$, $\mathrm{ran}f\subseteq B$,

则称$f$为从$A$到$B$的函数, 记作$f$: $A\to B$.

例 $f$: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $f(x)=2^x$是从N到N的函数,

$g$: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $g(x)=2$ 也是从N到N的函数.

定义8.4 所有从$A$到$B$的函数的集合记作$B^A$, 符号化表示为

$$B^A=\{f \mid f: A\to B\}$$

$|A|=m$, $|B|=n$, 且$m$, $n>0$, $|B^A|=n^m$

$A=\varnothing$, 则$B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则$B^A=\varnothing^A=\varnothing$

# 实例

**例1** 设$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求$B^A$.

解 $B^A=\{f_0, f_1, \dots, f_7\}$, 其中

$$f_0 = \{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$$
$$f_1 = \{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$$
$$f_2 = \{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$$
$$f_3 = \{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$$
$$f_4 = \{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$$
$$f_5 = \{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$$
$$f_6 = \{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$$
$$f_7 = \{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$$

# 函数的像和完全原像

定义8.5 设函数 $f$：$A\to B$, $A_1\subseteq A$, $B_1\subseteq B$

(1) $A_1$在 $f$ 下的像 $f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$，函数的像 $f(A)$

(2) $B_1$在 $f$ 下的完全原像 $f^{-1}(B_1)=\{x|x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$

注意：

- 函数值与像的区别：函数值 $f(x)\in B$, 像$f(A_1)\subseteq B$
- 一般说来 $f^{-1}(f(A_1))\neq A_1$, 但是$A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$

例 设 $f$：N→N, 且 $f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{若}x\text{为偶数} \\ x+1 & \text{若}x\text{为奇数} \end{cases}$

令$A=\{0,1\}$, $B=\{2\}$, 那么有

$$f(A)=f(\{0,1\})=\{f(0),f(1)\}=\{0,2\}$$
$$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{2\})=\{1,4\}$$

# 函数的性质

**定义8.6** 设 $f$: $A \to B$,

(1) 若 $\mathrm{ran}f=B$, 则称 $f:A\to B$是**满射**的

(2) 若 $\forall y \in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f:A\to B$ 是**单射**的

(3) 若 $f:A\to B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f:A\to B$是**双射**的

**例2** 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}, f(x) = -x^2+2x-1$

(2) $f:\mathrm{Z}^+\to\mathrm{R}, f(x) = \ln x$, $\mathrm{Z}^+$为正整数集

(3) $f:\mathrm{R}\to\mathrm{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) $f:\mathrm{R}\to R, f(x)=2x+1$

(5) $f:\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+, f(x)=(x^2+1)/x$, 其中$\mathrm{R}^+$为正实数集.

# 例题解答

解

(1) $f$:R→R, $f(x)=-x^2+2x-1$

在$x$=1取得极大值0. 既不是单射也不是满射的

(2) $f$:$Z^+$→R, $f(x)=\ln x$

是单调上升的, 是单射的. 但不满射, ran$f$={ln1, ln2, …}.

(3) $f$:R→Z, $f(x)=\lfloor x\rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如$f(1.5)=f(1.2)=1$

(4) $f$:R→R, $f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且ran$f$=R

(5) $f$:$R^+$→$R^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值 $f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的

# 实例

**例3** 对于给定的集合$A$和$B$构造双射函数 $f:A\to B$

(1) $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

(2) $A=[0,1]$, $B=[1/4,1/2]$

(3) $A=\mathrm{Z}$, $B=\mathrm{N}$

(4) $A=[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ , $B=[-1,1]$

# 解答

(1) $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令 $f:A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

# 解答

(2) 令 $f$:[0,1]→[1/4,1/2], $f(x)=(x+1)/4$

(3) 将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应:

$$
\begin{array}{cccccccc}
Z: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots
\end{array}
$$

这种对应所表示的函数是:

$$f:\ Z \to N,\ f(x) = \begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

(4) 令 $f$:[$\pi$/2,3$\pi$/2]→[−1,1]

$f(x) = \sin x$

# 某些重要函数

**定义8.7**

(1)设 $f:A\to B$, 如果存在$c\in B$使得对所有的 $x\in A$都有 $f(x)=c$, 则称 $f:A\to B$是**常函数**.

(2) 称 $A$上的恒等关系$I_A$为$A$上的**恒等函数**, 对所有的$x\in A$都有$I_A(x)=x$.

(3) 设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$, $\langle B, \preccurlyeq\rangle$为偏序集，$f:A\to B$，如果对任意的 $x_1$, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 $f$ 为**单调递增**的；如果对任意的$x_1$, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有$f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 $f$ 为**严格单调递增**的. 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数

# 某些重要函数

(4) 设$A$为集合, 对于任意的$A'\subseteq A$, $A'$的特征函数

$\chi_A{}':A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_A{}'(a)=1,\ a\in A'$$
$$\chi_A{}'(a)=0,\ a\in A-A'$$

(5) 设$R$是$A$上的等价关系, 令

$$g:A\to A/R$$
$$g(a)=[a],\ \forall a\in A$$

称 $g$ 是从 $A$ 到商集 $A/R$ 的自然映射

# 实例

例4 (1) 偏序集$<P(\{a,b\}),R_{\subseteq}>$, $<\{0,1\},\le>$, $R_{\subseteq}$为包含关系, $\le$为一般的小于等于关系，令

$$f:P(\{a,b\})\to\{0,1\},\quad f(\varnothing)=f(\{a\})=f(\{b\})=0,\ \ f(\{a,b\})=1,$$

$f$是单调递增的, 但不是严格单调递增的

(2) $A$的每一个子集 $A'$都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 例如$A=\{a,b,c\}$, 则有

$$\chi_{\varnothing}=\{<a,0>,<b,0>,<c,0>\},\quad \chi_{\{a,b\}}=\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$$

(3) 不同的等价关系确定不同的自然映射, 恒等关系确定的自然映射是双射, 其他自然映射一般来说只是满射. 例如

$$A=\{1,2,3\},\ R=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

$$g: A\to A/R,\ \ g(1)=g(2)=\{1,2\},\ g(3)=\{3\}$$

# 8.2 函数的复合与反函数

主要内容

- 复合函数基本定理
- 函数的复合运算与函数性质
- 反函数的存在条件
- 反函数的性质

# 复合函数基本定理

**定理8.1** 设$F$, $G$是函数, 则$F \circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F \circ G)=\{x|x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$有$F \circ G(x)=G(F(x))$

证 先证明$F \circ G$是函数.

因为$F$, $G$是关系, 所以$F \circ G$也是关系. 若对某个$x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$有

$xF \circ Gy_1$和 $xF \circ Gy_2$, 则

$$<x, y_1> \in F \circ G \wedge <x, y_2> \in F \circ G$$

$$\Rightarrow \exists t_1(<x,t_1> \in F \wedge <t_1,y_1> \in G) \wedge \exists t_2(<x,t_2> \in F \wedge <t_2,y_2> \in G)$$

$$\Rightarrow \exists t_1 \exists t_2(t_1=t_2 \wedge <t_1,y_1> \in G \wedge <t_2,y_2> \in G \qquad （F为函数）$$

$$\Rightarrow y_1=y_2 \qquad （G为函数）$$

所以 $F \circ G$ 为函数

# 证明

任取$x$,

$$x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$$

$$\Rightarrow \exists t\, \exists y(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G)$$

$$\Rightarrow \exists t\, (x \in \mathrm{dom}F \wedge t = F(x) \wedge t \in \mathrm{dom}G)$$

$$\Rightarrow x \in \{\, x \mid x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G \,\}$$

任取$x$,

$$x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G$$

$$\Rightarrow <x,F(x)> \in F \wedge <F(x),G(F(x))> \in G$$

$$\Rightarrow <x,G(F(x))> \in F \circ G$$

$$\Rightarrow x \in \mathrm{dom}(F \circ G) \wedge F \circ G(x) = G(F(x))$$

所以(1) 和(2) 得证

# 推论

**推论1** 设$F, G, H$为函数, 则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ(G\circ H)$都是函数, 且

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$$

证 由上述定理和运算满足结合律得证.

**推论2** 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 则 $f\circ g:A\to C$, 且$\forall x\in A$都有

$$f\circ g(x)=g(f(x))$$

证 由上述定理知 $f\circ g$是函数, 且

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(f\circ g)&=\{x|x\in \mathrm{dom}f\wedge f(x)\in \mathrm{dom}g\}\\&=\{x|x\in A\wedge f(x)\in B\}=A\end{aligned}$$

$$\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq \mathrm{ran}g\subseteq C$$

因此 $f\circ g:A\to C$, 且$\forall x\in A$有 $f\circ g(x)=g(f(x))$

# 函数复合与函数性质

**定理8.2** 设$f:A\to B$, $g:B\to C$

(1) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是满射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是满射的

(2) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的

(3) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的

证

(1) 任取$c\in C$, 由$g:B\to C$的满射性, $\exists b\in B$使得 $g(b)=c$.

对于这个$b$, 由 $f:A\to B$的满射性，$\exists a\in A$使得 $f(a)=b$.

由合成定理有

$$f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

从而证明了$f\circ g:A\to C$是满射的

# 证明

(2) 假设存在$x_1, x_2 \in A$使得

$$f\circ g(x_1)=f\circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

因为$g:B\to C$是单射的, 故$f(x_1)=f(x_2)$. 又由于$f:A\to B$是单射的, 所以$x_1=x_2$. 从而证明$f\circ g:A\to C$是单射的.

(3)由(1)和(2)得证.

注意：定理逆命题不为真, 即如果$f\circ g:A\to C$是单射(或满射、双射)的, 不一定有 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$都是单射(或满射、双射)的.

**定理8.3** 设$f:A\to B$, 则 $f=f\circ I_B=I_A\circ f$ （证明略）

# 实例

考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, $C=\{c_1,c_2,c_3\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>\}$$

$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_3>,<b_4,c_3>\}$$

$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_3>\}$$

那么 $f:A\to B$和$f\circ g:A\to C$是单射的, 但$g:B\to C$不是单射的.

考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$, $C=\{c_1,c_2\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_2>\}$$

$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_2>\}$$

$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_2>\}$$

那么$g:B\to C$ 和 $f\circ g:A\to C$是满射的, 但 $f:A\to B$不是满射的.

# 反函数

反函数存在的条件

(1) 任给函数$F$, 它的逆$F^{-1}$不一定是函数, 只是一个二元关系.

(2) 任给单射函数 $f:A\to B$, 则$f^{-1}$是函数, 且是从ran$f$ 到$A$的双射函数, 但不一定是从$B$到$A$的双射函数

(3) 对于双射函数 $f:A\to B$, $f^{-1}:B\to A$是从$B$到$A$的双射函数.

**定理8.4** 设 $f:A\to B$是双射的, 则$f^{-1}:B\to A$也是双射的.

证明思路:

先证明 $f^{-1}:B\to A$，即$f^{-1}$是函数，且dom$f^{-1}=B$, ran$f^{-1}=A$.

再证明$f^{-1}:B\to A$的双射性质.

# 证明

证 因为 $f$ 是函数, 所以 $f^{-1}$是关系, 且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B\ , \quad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A$$

对于任意的 $x \in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有$y_1, y_2 \in A$使得

$$<x,y_1> \in f^{-1} \wedge <x,y_2> \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$<y_1,x> \in f \wedge <y_2,x> \in f$$

根据 $f$ 的单射性可得$y_1=y_2$, 从而证明了$f^{-1}$是函数，且是满射的.

若存在$x_1, x_2 \in B$使得$f^{-1}(x_1)=f^{-1}(x_2)=y$, 从而有

$$<x_1,y> \in f^{-1} \wedge <x_2,y> \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow <y,x_1> \in f \wedge <y,x_2> \in f \Rightarrow x_1=x_2$$

对于双射函数$f:A\to B$, 称 $f^{-1}:B\to A$是它的反函数.

# 反函数的性质

**定理8.5**

(1) 设 $f:A\to B$是双射的, 则 $f^{-1}\circ f=I_B$, $f\circ f^{-1}=I_A$

(2) 对于双射函数 $f:A\to A$, 有 $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A$

证明思路:

根据定理可知 $f^{-1}:B\to A$也是双射的, 由合成基本定理可知 $f^{-1}\circ f:B\to B$, $f\circ f^{-1}:A\to A$，且它们都是恒等函数.

**例5** 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 3 \\ -2 & x<3 \end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

求 $f\circ g$, $g\circ f$. 如果$f$和 $g$ 存在反函数, 求出它们的反函数.

# 求解

解

$$f \circ g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$$g \circ f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

$f$:R→R不是双射的, 不存在反函数.

$g$:R→R是双射的, 它的反函数是

$g^{-1}$:R→R, $g^{-1}(x)=x-2$

# 8.3 双射函数与集合的基数

主要内容

- 集合的等势及其性质
- 重要的等势或不等势的结果
- 集合的优势及其性质
- 集合的基数
- 可数集

# 集合的等势

**定义8.8** 设$A$, $B$是集合, 如果存在着从$A$到$B$的双射函数, 就称$A$和$B$是**等势**的, 记作$A \approx B$. 如果$A$不与$B$ 等势, 则记作$A \not\approx B$.

集合等势的实例

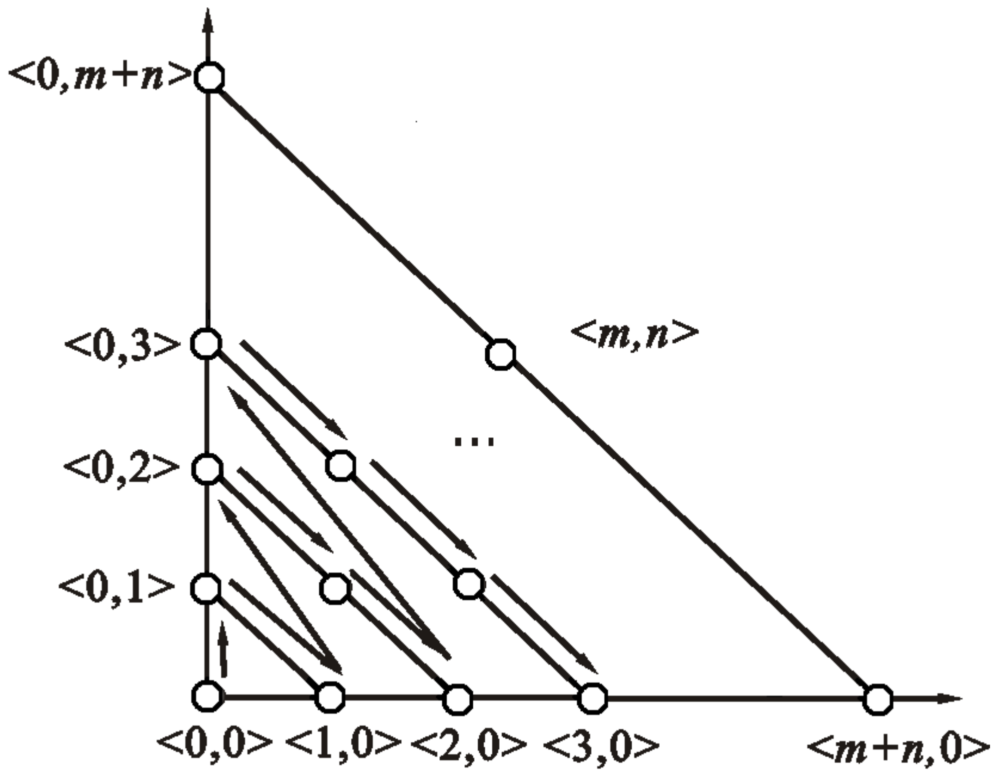
**例6** (1) Z≈N.

$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则$f$是Z到N的双射函数. 从而证明了Z≈N.

# 集合等势的实例: N×N≈N

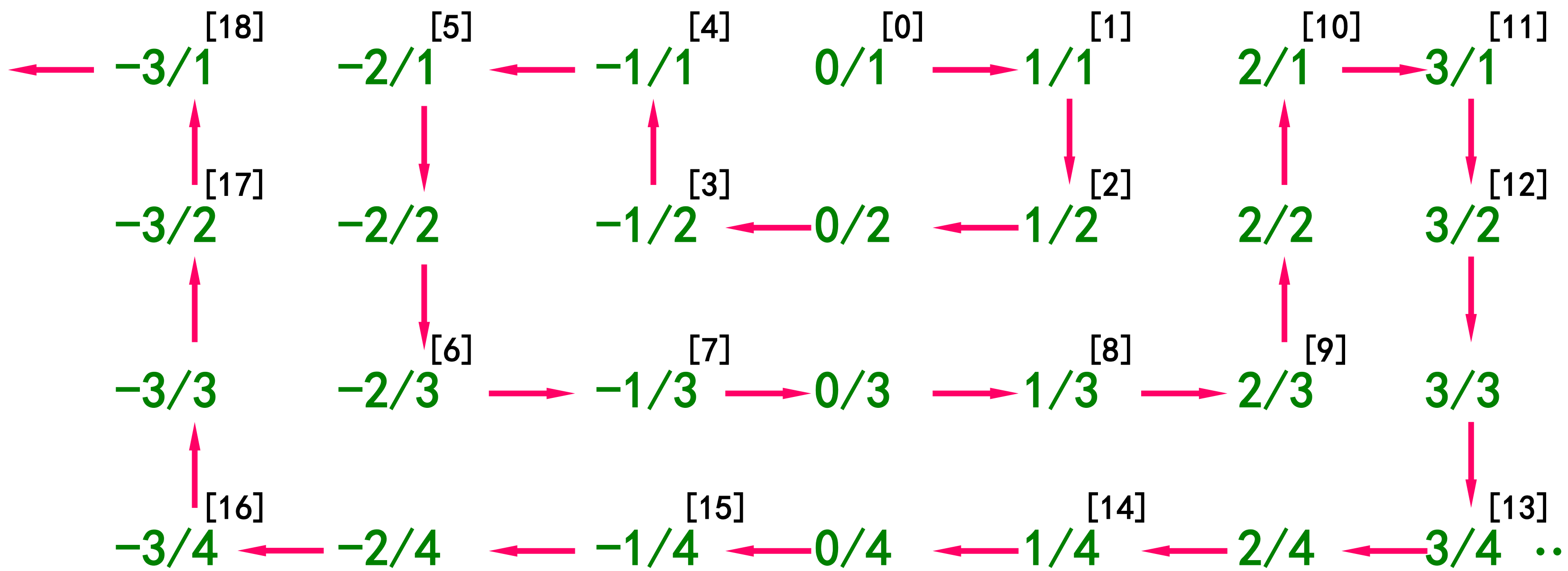
N×N≈N.  N×N中所有的元素排成有序图形




$$f:\mathrm{N}\times\mathrm{N}\to\mathrm{N},\quad f(<m,n>)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$$

# 集合等势的实例: N≈Q

N≈Q. 双射函数 $f$:N→Q, 其中$f(n)$是[$n$]下方的有理数.




PLAY

# 实数集合的等势

(4) (0,1)≈R. 其中实数区间 (0,1)={$x$| $x\in R\wedge 0<x<1$}. 令

$$f:(0,1)\to \mathrm{R},\quad f(x)=\tan\pi\frac{2x-1}{2}$$

(5) [0,1]≈(0,1). 其中(0,1)和[0,1]分别为实数开区间和闭区间. 令 $f$: [0,1]→(0,1)

$$f(x)=\begin{cases} 1/2 & x=0 \\ 1/2^2 & x=1 \\ 1/2^{n+1} & x=1/2^n, n=1,2,\ldots \\ x & \text{其它}x \end{cases}$$

(6) 对任何$a$, $b\in$R, $a<b$, [0,1]≈[$a$,$b$]，双射函数 $f$:[0,1]→[$a$,$b$],

$f(x)=(b-a)x+a$

类似地可以证明, 对任何$a$, $b\in R$, $a<b$, 有(0,1)≈($a$,$b$).

# 实例

**例7** 设$A$为任意集合, 则$P(A)\approx\{0,1\}^A$.

证 如下构造从$P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的函数

$$f:P(A)\to\{0,1\}^A,\ \ f(A')=\chi_{A'},\ \forall A'\in P(A).$$

其中$\chi_{A'}$是集合$A'$的特征函数. 易证 $f$是单射的.

对于任意的 $g\in\{0,1\}^A$, 那么有 $g:A\to\{0,1\}$. 令

$$B=\{\,x|\,x\in A\wedge g(x)=1\}$$

则$B\subseteq A$, 且$\chi_B=g$, 即$\exists B\in P(A)$, $f(B)=g$. 从而证明了$f$是满射的.

由等势定义得 $P(A)\approx\{0,1\}^A$.

# 等势的性质

**定理8.6** 设$A$, $B$,$C$是任意集合，

(1) $A \approx A$

(2) 若$A \approx B$，则$B \approx A$

(3) 若$A \approx B$，$B \approx C$，则$A \approx C$.

证明思路：利用等势的等义.

(1) $I_A$是从$A$到$A$的双射

(2) 若 $f:A \to B$是双射，则$f^{-1}:B \to A$是从$B$到$A$的双射.

(3) 若 $f:A \to B$，$g:B \to C$是双射，则$f \circ g:A \to C$是从$A$到$C$的双射

# 有关势的重要结果

等势结果

- $\mathbf{N} \approx \mathbf{Z} \approx \mathbf{Q} \approx \mathbf{N} \times \mathbf{N}$
- 任何实数区间都与实数集合R等势

不等势的结果:

**定理8.7** (康托定理)

(1) $\mathbf{N} \not\approx \mathbf{R}$;　　(2) 对任意集合$A$都有$A \not\approx P(A)$

证明思路:

(1) 只需证明任何函数 $f$:N→[0,1]都不是满射的.

任取函数 $f$:N→[0,1], 列出 $f$ 的所有函数值，然后构造一个[0,1]区间的小数$b$，使得$b$与所有的函数值都不相等.

(2) 任取函数 $f:A \to P(A)$，构造$B \in P(A)$，使得$B$与 $f$ 的任何函数值都不等.

# Cantor定理的证明

证 (1) 规定[0,1]中数的表示. 对任意的$x\in[0,1]$, 令

$$x = 0.x_1x_2\ldots, \quad 0\le x_i\le 9$$

规定在 $x$ 的表示式中不允许在某位后有无数个1的情况.

设 $f$: N→[0,1]是任何函数，列出 $f$ 的所有函数值:

$$f(0) = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\ldots$$
$$f(1) = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\ldots$$
$$\ldots$$
$$f(n-1) = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\ldots$$
$$\ldots$$

令 $y$ 的表示式为$0.b_1b_2\ldots$, 并且满足$b_i\ne a_i^{(i)}$, $i$=1,2,…, 那么 $y\in[0,1]$, 且$y$与上面列出的任何函数值都不相等. 这就推出 $y\notin \mathrm{ran}f$, 即 $f$ 不是满射的.

# Cantor定理的证明

(2) 我们将证明任何函数 $g:A\to P(A)$都不是满射的.

设 $g:A\to P(A)$是从$A$到$P(A)$的函数, 如下构造集合$B$:

$$B=\{x|\ x\in A\wedge x\notin g(x)\}$$

则$B\in P(A)$, 但对任意$x\in A$都有

$$x\in B \Leftrightarrow x\notin g(x)$$

从而证明了对任意的 $x\in A$都有 $B\neq g(x)$. 即$B\notin$rang.

注意：根据Cantor定理可以知道$\mathrm{N}\not\approx P(\mathrm{N})$，$\mathrm{N}\not\approx\{0,1\}^{\mathrm{N}}$.

# 集合的优势

**定义8.9** (1) 设$A$, $B$是集合, 如果存在从$A$到$B$的单射函数, 就称$B$**优势于**$A$, 记作$A \preccurlyeq\cdot B$. 如果$B$不是优势于$A$, 则记作$A \not\preccurlyeq\cdot B$.
(2) 设$A$, $B$是集合, 若$A \preccurlyeq\cdot B$ 且 $A \neq B$, 则称 $B$ **真优势于**$A$, 记作$A \prec\cdot B$. 如果 $B$ 不是真优势于$A$, 则记作$A \not\prec\cdot B$.

实例 $\mathrm{N} \preccurlyeq\cdot \mathrm{N}$, $\mathrm{N} \preccurlyeq\cdot \mathrm{R}$, $\mathrm{A} \preccurlyeq\cdot P(\mathrm{A})$,

$\mathrm{R} \not\preccurlyeq\cdot \mathrm{N}$

$\mathrm{N} \prec\cdot \mathrm{R}$, $\mathrm{A} \prec\cdot P(\mathrm{A})$, 但$\mathrm{N} \not\prec\cdot \mathrm{N}$

**定理8.8** 设 $A$, $B$, $C$是任意的集合, 则

(1) $A \preccurlyeq\cdot A$

(2) 若$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot A$, 则$A \approx B$

(3) 若$A \preccurlyeq\cdot B$且$B \preccurlyeq\cdot C$, 则$A \preccurlyeq\cdot C$

# 应用：证明等势

**例8** 证明 $\{0,1\}^{\mathrm{N}} \approx [0,1)$.

证 设$x\in[0,1)$, $0.\,x_1x_2\ldots$ 是 $x$ 的二进制表示. 规定表示式中不允许出现连续无数个1. 对于$x$，如下定义 $f:[0,1)\to\{0,1\}^{\mathrm{N}}$,

$f(x) = t_x$, 且 $t_x:\mathrm{N}\to\{0,1\}$,

$$t_x(n) = x_{n+1},\ n = 0,1,2,\ldots$$

例如 $x = 0.1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ldots$, 则对应于$x$ 的函数 $t_x$是：

| | |
|---|---|
| $n$ | 0 1 2 3 4 5 6 7… |
| $t_x(n)$ | 1 0 1 1 0 1 0 0… |

$t_x\in\{0,1\}^{\mathrm{N}}$, 且对于$x,y\in[0,1)$, $x\neq y$, 必有$t_x\neq t_y$, 即 $f(x)\neq f(y)$.

这就证明了$f:[0,1)\to\{0,1\}^{\mathrm{N}}$是单射的.

# 构造另一个单射

考虑 $t\in\{0,1\}^{N}$, 其中

$$t(0)=0,\ t(n)=1,\ n=1,2,\ldots.$$

按照 $f$ 的定义, 只有 $x=0.011\ldots$ 才能满足 $f(x)=t$. 但根据规定, 这个数 $x$ 记为0.100…, 所以根本不存在 $x\in[0,1)$, 满足 $f(x)=t$.

定义函数 $g:\{0,1\}^{N}\to[0,1)$. $g$的映射法则恰好与 $f$ 相反. 即
$\forall t\in\{0,1\}^{N}$,

$$t:\ N\to\{0,1\},\ g(t)=0.x_1x_2\ldots, \text{其中} x_{n+1}=t(n).$$

将$0.x_1x_2\ldots$ 看作数 $x$ 的十进制表示. 这样就避免了形如 0.0111…和0.1000….在二进制表示中对应了同一个数的情况，从而保证了$g$的单射性.

根据定理有$\{0,1\}^{N}\approx[0,1)$. 再使用等势的传递性得$\{0,1\}^{N}\approx R$.

# 自然数的集合定义

**定义8.10** 设$a$为集合, 称$a\cup\{a\}$为$a$的**后继**, 记作$a^+$, 即 $a^+=a\cup\{a\}$.

如下定义自然数:

$$0=\varnothing$$

$$1=0^+=\varnothing^+ = \{\varnothing\}=\{0\}$$

$$2=1^+= \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{0,1\}$$

$$3=2^+=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}^+= \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}= \{0,1,2\}$$

$$\ldots$$

$$n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$$

$$\ldots$$

自然数的相等与大小，即对任何自然数 $n$和$m$，有

$$m=n \Leftrightarrow m\approx n\ , \quad m<n \Leftrightarrow m\in n$$

# 有穷集和无穷集

**定义8.11**

(1) 一个集合是有穷的当且仅当它与某个自然数等势；

(2) 如果一个集合不是有穷的, 就称作无穷集.

实例：

(1) $\{a,b,c\}$是有穷集, 因为$3=\{0,1,2\}$, 且

$$\{a,b,c\}\approx\{0,1,2\}=3$$

(2) N和R都是无穷集, 因为没有自然数与N和R等势

利用自然数的性质可以证明：任何有穷集只与惟一的自然数等势.

# 集合基数的定义

**定义8.12**

(1) 对于有穷集合$A$, 称与$A$等势的那个惟一的自然数为$A$的**基数**, 记作card$A$ (也可以记作$|A|$)

$$\mathrm{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$$

(2) 自然数集合N的基数记作$\aleph_0$, 即

$$\mathrm{card}\mathbf{N} = \aleph_0$$

(3) 实数集R的基数记作$\aleph$, 即

$$\mathrm{card}\mathbf{R} = \aleph$$

# 基数的相等和大小

**定义8.13** 设$A$, $B$为集合, 则

(1) $\mathrm{card}A=\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\approx B$

(2) $\mathrm{card}A\le\mathrm{card}B \Leftrightarrow A\preccurlyeq\cdot B$

(3) $\mathrm{card}A<\mathrm{card}B \Leftrightarrow \mathrm{card}A\le\mathrm{card}B \wedge \mathrm{card}A\ne\mathrm{card}B$

根据上一节关于势的讨论不难得到:

$$\mathrm{card}\ \mathbf{Z} = \mathrm{card}\ \mathbf{Q} = \mathrm{card}\ \mathbf{N}\times\mathbf{N} = \aleph_0$$

$$\mathrm{card}\ P(\mathbf{N}) = \mathrm{card}\ 2^{\mathbf{N}} = \mathrm{card}\ [a,b] = \mathrm{card}\ (c,d) = \aleph$$

$$\aleph_0<\aleph$$

$$\mathrm{card}\ A<\mathrm{card}\ P(A)$$

其中$2^{\mathbf{N}} = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$

# 基数的大小

不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中:

$0, 1, 2\ldots, n, \ldots$ 是全体自然数, 是有穷基数.

$\aleph_0, \aleph, \ldots$ 是无穷基数, $\aleph_0$是最小的无穷基数, $\aleph$后面还有更大的基数, 如card$P$(R)等.

# 可数集

**定义8.14** 设$A$为集合，若card$A \le \aleph_0$，则称$A$为**可数集**或**可列集**.

实例：

$\{a,b,c\}$, 5, 整数集Z, 有理数集Q, N×N等都是可数集,
实数集 R不是可数集, 与R等势的集合也不是可数集.
对于任何的可数集, 它的元素都可以排列成一个有序图形. 换句话说, 都可以找到一个“数遍”集合中全体元素的顺序.

可数集的性质：

- 可数集的任何子集都是可数集.
- 两个可数集的并是可数集.
- 两个可数集的笛卡儿积是可数集.
- 可数个可数集的笛卡儿积仍是可数集.
- 无穷集$A$的幂集$P(A)$不是可数集

# 实例

**例9** 求下列集合的基数

(1) $T=\{x \mid x$是单词“*BASEBALL*”中的字母$\}$

(2) $B=\{x \mid x\in R \wedge x2=9 \wedge 2x=8\}$

(3) $C=P(A)$, $A=\{1, 3, 7, 11\}$

解 (1) 由$T=\{B, A, S, E, L\}$知 card$T$=5

(2) 由$B=\varnothing$, 可知 card$B$=0.

(3) 由$|A|=4$ 可知 card$C$=card$P(A)=|P(A)|=24=16$.

# 实例

**例10** 设$A$, $B$为集合, 且 card$A=\aleph_0$, card$B=n$, $n$是自然数, $n\neq 0$. 求card $A\times B$.

解 方法一 构造双射函数

由card$A=\aleph_0$, card$B=n$, 可知 $A$, $B$都是可数集. 令

$$A=\{a_0,a_1,a_2,\ldots\},\ B=\{b_0,b_1,b_2,\ldots,b_{n-1}\}$$

对任意的$\langle a_i,b_j\rangle$, $\langle a_k,b_l\rangle\in A\times B$有

$$\langle a_i,b_j\rangle=\langle a_k,b_l\rangle \Leftrightarrow i=k\wedge j=l$$

定义函数

$$f:A\times B\to \mathbf{N}$$

$$f(\langle a_i,b_j\rangle)=in+j,\ i=0,1,\ldots,\ \ j=0,1,\ldots,n-1$$

易见$f$是$A\times B$到N的双射函数, 所以

$$\text{card } A\times B=\text{card } \mathbf{N} = \aleph_0$$

# 实例

方法二　直接使用可数集的性质求解.

因为 card $A=\aleph_0$, card $B=n$, 所以$A$, $B$都是可数集.

根据性质(3) 可知 $A\times B$也是可数集, 所以

$$\text{card } A\times B\leq\aleph_0$$

显然当 $B\neq\varnothing$时,

$$\text{card } A\leq \text{card } A\times B,$$

这就推出

$$\aleph_0\leq \text{card } A\times B$$

综合上述得到

$$\text{card } A\times B=\aleph_0.$$

# 第八章 习题课

主要内容

- 函数，从$A$到$B$的函数 $f:A\to B$，$B^A$，函数的像与完全原像
- 函数的性质：单射、满射、双射函数
- 重要函数：恒等函数、常函数、单调函数、集合的特征函数、自然映射
- 集合等势的定义与性质
- 集合优势的定义与性质
- 重要的集合等势以及优势的结果
- 可数集与不可数集
- 集合基数的定义

# 基本要求

- 给定 $f, A, B$, 判别 $f$ 是否为从$A$到$B$的函数
- 判别函数 $f{:}A\to B$的性质（单射、满射、双射）
- 熟练计算函数的值、像、复合以及反函数
- 证明函数 $f{:}A\to B$的性质（单射、满射、双射）
- 给定集合$A, B$，构造双射函数 $f{:}A\to B$
- 能够证明两个集合等势
- 能够证明一个集合优势于另一个集合
- 知道什么是可数集与不可数集
- 会求一个简单集合的基数

# 练习1

1. 给定$A$, $B$ 和 $f$, 判断是否构成函数 $f$:$A \rightarrow B$. 如果是, 说明该函数是否为单射、满射、双射的. 并根据要求进行计算.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9,10\}$,

$f=\{<1,8>,<3,9>,<4,10>,<2,6>,<5,9>\}$.

(2) $A$,$B$同(1), $f=\{<1,7>,<2,6>,<4,5>,<1,9>,<5,10>\}$.

(3) $A$,$B$同(1), $f=\{<1,8>,<3,10>,< 2,6>,<4,9>\}$.

(4) $A=B=\mathrm{R}$, $f(x)=x^3$

(5) $A=B=\mathrm{R}^+$, $f(x)=x/(x2+1)$.

(6) $A=B=\mathrm{R}\times\mathrm{R}$, $f(<x,y>)=<x+y, x-y>$, 令

$L=\{<x,y>|x,y\in\mathrm{R}\wedge y=x+1\}$, 计算 $f(L)$.

(7) $A=\mathrm{N}\times\mathrm{N}$, $B=\mathrm{N}$, $f(<x,y>)=|x^2-y^2|$. 计算$f(\mathrm{N}\times\{0\})$, $f^{-1}(\{0\})$

# 解答

(1) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$既不是单射也不是满射, 因为 $f(3)=f(5)=9$, 且$7\notin \text{ran}f$.

(2) 不构成 $f:A\to B$, 因为 $f$ 不是函数. $<1,7>\in f$ 且$<1,9>\in f$, 与函数定义矛盾

(3) 不构成 $f:A\to B$, 因为$\text{dom}\, f = \{1,2,3,4\} \neq A$

(4) 能构成 $f:A\to B$, 且 $f:A\to B$是双射的

(5) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$既不是单射的也不是满射的. 因为该函数在 $x=1$取极大值 $f(1)=1/2$. 函数不是单调的,且$\text{ran}f\neq R^+$.

(6) 能构成 $f:A\to B$, 且 $f:A\to B$是双射的.

$$f(L) = \{<2x+1,-1>|x\in \mathrm{R}\}=\mathrm{R}\times\{-1\}$$

(7) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$既不是单射的也不是满射的. 因为

$$f(<1,1>)=f(<2,2>)=0,\ 2\notin \text{ran}f.$$

$$f(\mathrm{N}\times\{0\}) = \{n^2-0^2|n\in \mathrm{N}\} = \{n^2|n\in \mathrm{N}\}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{<n,n>|n\in \mathrm{N}$$

# 练习2

2. 设 $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathrm{R}^{\mathrm{R}}$，且

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases},\quad f_2(x)=x,$$

$$f_3(x)=\begin{cases}-1, & x\in Z\\ 1, & x\notin Z\end{cases}\quad f_4(x)=1$$

令$E_i$是由$f_i$导出的等价关系，$i$=1,2,3,4，即 $xE_iy \Leftrightarrow f_i(x)=f_i(y)$

(1) 画出偏序集<{$\mathrm{R}/E_1$, $\mathrm{R}/E_2$, $\mathrm{R}/E_3$, $\mathrm{R}/E_4$},$T$>的哈斯图，其中$T$是加细关系：

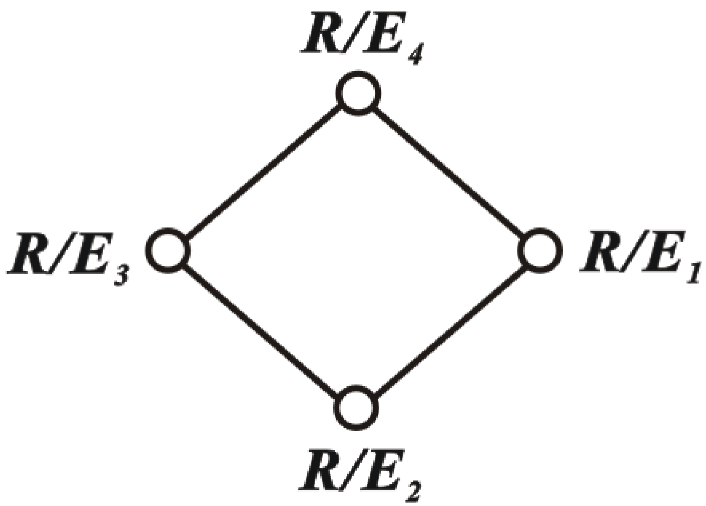
$$<\mathrm{R}/E_i, R/E_j>\in T \Leftrightarrow \forall x(x\in \mathrm{R}/E_i \rightarrow \exists y(y\in R/E_j \wedge x\subseteq y))$$

(2) $g_i$:R→R/$Ei$ 是自然映射，求$g_i(0)$，$i$=1,2,3,4.

(3) 对每个$i$, 说明 $g_i$ 的性质（单射、满射、双射）.

# 解答

(1) 哈斯图如下




(2) $g_1(0) = \{x \mid x\in \mathrm{R} \wedge x\geq 0\}$，$g_2(0)=\{0\}$，$g_3(0)=\mathrm{Z}$，$g_4(0)=\mathrm{R}$

(3) $g_1, g_3, g_4$是满射的；$g_2$是双射的.

# 练习3

3．对于以下集合$A$和$B$，构造从$A$到$B$的双射函数 $f{:}A\to B$

(1) $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a, b, c\}$

(2) $A=(0,1)$，$B=(0,2)$

(3) $A=\{x \mid x\in \mathrm{Z} \wedge x<0\}$，$B=\mathrm{N}$

(4) $A=\mathrm{R}$，$B=\mathrm{R}^+$

解

(1) $f=\{<1,a>, <2,b>, <3,c>\}$

(2) $f{:}A\to B$, $f(x)=2x$

(3) $f{:}A\to B$, $f(x)=-x-1$

(4) $f{:}A\to B$, $f(x)=\mathrm{e}^x$

# 练习4

4. 设 $f: \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$

证明 $f$ 既是满射的，也是单射的.

证 任取 $<u,v>\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，存在 $<\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}>$

使得 $$f(<\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}>) = <u,v>$$

因此 $f$ 是满射的

对于任意的 $<x,y>, <u,v>\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, 有

$$f(<x,y>) = f(<u,v>) \Leftrightarrow <x+y, x-y> = <u+v, u-v>$$

$$\Leftrightarrow x+y=u+v,\ x-y=u-v \Leftrightarrow x=u,\ y=v$$

$$\Leftrightarrow <x,y> = <u,v>$$

因此 $f$ 是单射的.

# 证明方法

1. 证明 $f:A\to B$是满射的方法：任取 $y\in B$, 找到 $x$ (即给出$x$的表示)或者证明存在$x\in A$，使得$f(x)=y$.
2. 证明 $f:A\to B$是单射的方法

方法一 $\forall x_1,x_2\in A$,

| | | |
|---|---|---|
| $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$ | $\ldots$ | $\Rightarrow x_1=x_2$ |
| 推理前提 | 推理过程 | 推理结论 |

方法二 $\forall x_1,x_2\in A$,

| | | |
|---|---|---|
| $x_1\neq x_2\Rightarrow$ | $\ldots$ | $\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ |
| 推理前提 | 推理过程 | 推理结论 |

3. 证明 $f:A\to B$不是满射的方法： 找到 $y\in B, y\notin \mathrm{ran}f$
4. 证明 $f:A\to B$不是单射的方法：找到 $x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$

# 练习5

5. 设$A$, $B$为二集合, 证明：如果$A\approx B$, 则$P(A)\approx P(B)$

证　因为$A\approx B$，存在双射函数$f{:}A\rightarrow B$，反函数$f^{-1}$：$B\rightarrow A$

构造函数 $g{:}P(A)\rightarrow P(B)$,

$$g(T)=f(T),\ \forall T\subseteq A\quad（f(T)\text{是}T\text{在函数}f\text{的像}）$$

证明 $g$ 的满射性. 对于任何$S\subseteq B$, 存在$f^{-1}(S)\subseteq A$, 且

$$g(f^{-1}(S))=f\circ f^{-1}(S)=S$$

证明$g$的单射性.

$$g(T_1)=g(T_2)\Rightarrow f(T_1)=f(T_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(T_1)=f^{-1}(f(T_2))$$

$$\Rightarrow I_A(T_1)=I_A(T_2)\Rightarrow T_1=T_2$$

综合上述得到$P(A)\approx P(B)$.

# 证明集合$A$与$B$等势的方法

方法一：直接构造从$A$到$B$的双射, 即定义一个从$A$到$B$的函数 $f:A\to B$，证明$f$的满射性，证明$f$的单射性

方法二：利用定理8.8，构造两个单射 $f:A\to B$ 和 $g:B\to A$. 即定义函数$f$和$g$，证明$f$和$g$的单射性

方法三：利用等势的传递性

方法四：直接计算$A$与$B$的基数，得到card $A$=card $B$.

注意：

- 以上方法中最重要的是方法一.
- 证明集合$A$与自然数集合N等势的通常方法是：找到一个“数遍”$A$中元素的顺序.

# 练习6

6．已知$A=\{n^7|n\in N\}$, $B=\{n^{109}|n\in N\}$, 求下列各题：

(1) Card $A$

(2) Card $B$

(3) card $(A\cup B)$

(4) card $(A\cap B)$

解 (1) 构造双射函数 $f$:$N\rightarrow A$, $f(n)=n^7$ , 因此 card $A=\aleph_0$

(2) 构造双射函数 $g$:$N\rightarrow A$, $g(n)=n^{109}$, 因此card $B=\aleph_0$

(3) 可数集的并仍旧是可数集，因此card$(A\cup B)\le \aleph_0$,

但是 card$(A\cup B) \ge$ card $A=\aleph_0$, 从而得到

$$\text{card}(A\cup B)= \aleph_0.$$

(4) 因为7与109互素，card$(A\cap B)=\{n^{7\times 109} \mid n\in N\}$，

与(1) 类似得到 card$(A\cap B)= \aleph_0$

# 练习7

ℵ

**7. 已知card$A$=$\aleph_0$, 且card$B$<card$A$, 求card($A$−$B$)**

**解　由$A-B\subseteq A$ 得到 card($A$−$B$) ≤ card$A$, 即**

$$\text{card}(A-B)\le \aleph_0$$

**由 card$B$<card$A$ 可知 $B$ 为有穷集，即存在自然数$n$使得**

$$\text{card}B=n.$$

**假设card($A$−$B$)< $\aleph_0$，那么存在自然数$m$，使得**

$$\text{card}(A-B)=m$$

**从而得到**

$$\text{card}A = \text{card}((A-B)\cup B) \le n+m,$$

**与card$A$=$\aleph_0$矛盾. 因此，**

$$\text{card}(A-B)= \aleph_0.$$