交实验报告！

第九章 作业

P209：

思考题：**9-1，9-2，9-3，9-4**

习题：**9-1，9-5，9-6.**

网上找《工程流体力学》模拟自测试题

必须开始全面系统的复习了！

否则考试将绝无可能通过！

9.2 时均及雷诺时均方程

9.3 圆管充分发展湍流

9.4 圆管流动的阻力损失

9.5 其它几个问题的说明

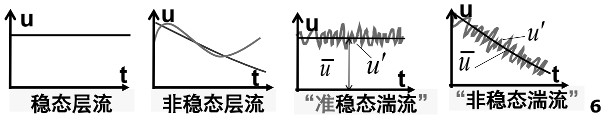
9.2 湍流物理量的时均值及雷诺时均方程

稳态层流：流动参数(压力/速度/温度等)不随时间变化，只随空间位置变化。/ 非稳态层流

准稳态湍流：各流场参数(如速度u)的瞬时变化虽无规律，但时均参数，如($\bar{u}$)不随时间变化.

非稳态湍流：时均参数也随时间变化。“是因为非稳态流场中主体流动随时间变化而引起的”（P189）

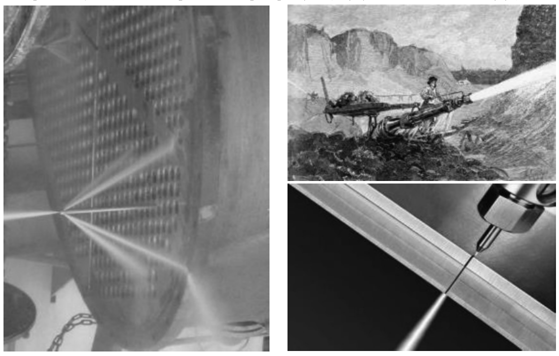
(严格讲，“稳态/非稳态湍流”的提法很不恰当!!!)



6

湍流的随机脉动往往数值较小，对工程流动问题的平均量起不了决定作用，如: 射流的冲击力

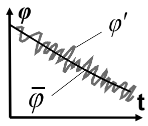
工程中起关键作用的往往是湍流的**平均**参数！



7

任意变量时均参数的定义：

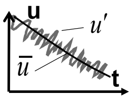
$$\bar{\phi}(x,y,z,t)=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\phi(x,y,z,t)dt$$



仍是时间的函数！

例如时均速度：

$$\bar{u}(x,y,z,t)=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}u(x,y,z,t)dt$$ **,简记：** $\bar{u}$



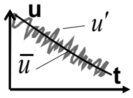
Δt：**统计平均所经历的时间间隔**
远大于最快脉动的周期；远小于工程问题分析要求的最小时间间隔。

则瞬时参数$u(x,y,z,t)$分解为时均值与脉动值之和:

$$u(x,y,z,t)=\bar{u}(x,y,z,t)+u'(x,y,z,t)$$

简记为： $u=\bar{u}+u'$

--这一分解称作雷诺分解。



所有的湍流参数都可作雷诺分解 ！

脉动值的时均值等于零 (上式等号两边再时均):

$$\overline{u'}=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}u'(x,y,z,t)dt=0$$

一个非常重要的名词: 湍流强度 $I=\sqrt{\overline{u'^2}}$ **相对湍流强度:** $I_r=\sqrt{\overline{u'^2}}/\bar{u}$

9

9.2.1 雷诺方程

雷诺分解: $\boxed{u=\bar{u}+u'}$

$$\begin{cases}\bar{u}=\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}u(x,y,z,t)dt\\ \overline{u'}=\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}u'(x,y,z,t)dt=0\end{cases}$$

时均运算的基本法则:

① $\overline{u_1+u_2}=\bar{u}_1+\bar{u}_2$ ② $\bar{\bar{u}}=\overline{u-u'}=\bar{u}-\overline{u'}=\bar{u}$

③ $\overline{\bar{u}_1\bar{u}_2}=\bar{u}_1\bar{u}_2$ ④ $\overline{u_1'u_2'}\neq 0$

⑤ $\overline{\dfrac{\partial u}{\partial x}}=\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}t=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}u\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x}$

$\overline{\dfrac{\partial u}{\partial t}}=\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t}$

流体流动的微分方程(第6章, 不可压N-S方程):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad =\frac{\partial(uu)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}+\frac{\partial(uw)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

v...

w...

4个未知数 4个方程

雷诺分解代入, 然后再取时均 …

$$\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\bar{v}+v')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\bar{w}+w')}}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w'}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\overline{u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w'}}{\partial z}=0 \quad 0=0$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(\bar{u}+u')(\bar{w}+w')}}{\partial z}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{(\bar{p}+p')}}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial^2\overline{(\bar{u}+u')}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{(\bar{u}+u')}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{(\bar{u}+u')}}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}+\frac{\partial\overline{(u')^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(u'v')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(u'w')}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}\right)$$

移项整理, $u\ v\ w$写作$v_x\ v_y\ v_z$

雷诺方程:

9新未知数(6独立分量), 量纲与黏性应力相同, 称: 雷诺应力

$$\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z}=0$$

$$\rho\frac{D\bar{v}_x}{Dt}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar{v}_x+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'v_y'})}{\partial y}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'v_z'})}{\partial z}$$

$$\rho\frac{D\bar{v}_y}{Dt}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\mu\nabla^2\bar{v}_y+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'v_y'})}{\partial x}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_y'^2})}{\partial y}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_y'v_z'})}{\partial z}$$

$$\rho\frac{D\bar{v}_z}{Dt}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+\mu\nabla^2\bar{v}_z+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'v_z'})}{\partial x}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_y'v_z'})}{\partial y}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_z'^2})}{\partial z}$$

9.2.2 湍流假说——普朗特混合长度理论

雷诺应力: $\boxed{-\rho\overline{u_i'u_j'}}$

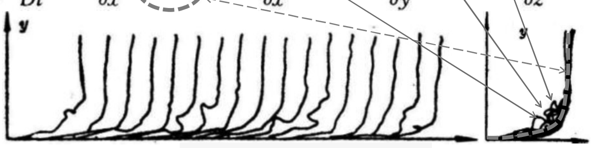
$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_x)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_x)}{\partial z}=f_x\rho+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\frac{D\bar{v}_x}{Dt}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar{v}_x+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'v_y'})}{\partial y}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'v_z'})}{\partial z}$$

从时均流动看湍流, 除了由流体粘性作用引起的应力(9个分量/6独立分量), 还有湍流脉动引起的附加应力: 雷诺应力 (亦9个分量/6独立分量).

$$\rho\frac{D\bar{v}_x}{Dt}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar{v}_x+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'v_y'})}{\partial y}+\frac{\partial(-\rho\overline{v_x'v_z'})}{\partial z}$$



时均的流体层

切应力τ_{yx}为例, 湍流时均流动的切应力:

$$\left(\tau_{yx}\right)_e=\tau_{yxL}+\left(\tau_{yx}\right)_T\approx\left(\tau_{yx}\right)_T$$

有效切应力 黏性切应力 << 雷诺切应力

$\left(\tau_{yx}\right)_T=-\rho\overline{u'v'}$, u'、v'分别为x、y方向脉动速度

黏性切应力: 流体分子扩散产生的动量传递引起

牛顿流体: 由牛顿流体的本构方程(第6章广义的牛顿剪切定理) 将 黏性应力~速度(变形速率/应变率) 联系起来 (用到Stokes三条假设 (?), 第6章):

$$\sigma_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

y- 方向 … 、z-方向…

一维, 退化为牛顿剪切定理: $\tau_{yx}=\mu\dfrac{dv_x}{dy}=\mu\dfrac{du}{dy}$

雷诺应力: 流体微团脉动产生的动量传递引起.

工程中通过Boussinesq涡黏假设将雷诺应力与时均参数联系起来:

Boussinesq涡黏性(eddy-viscosity)假设

雷诺切应力$-\rho\overline{u'v'}$为例, 假设可仿牛顿剪切定理计算:

$$(\tau_{yx})_T = -\rho\overline{u'v'} = \mu_T \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho\nu_T \frac{d\bar{u}}{dy} \qquad \tau_{yx} = \mu\frac{dv_x}{dy} = \mu\frac{du}{dy}$$

ν_T在教科书中用符号 ε (P193, 式9-18b).

μ_T: 湍流动力涡粘系数; $\nu_T=\mu_T/\rho$: 湍流运动涡粘系数
μ和ν :流体的物性参数,与流动无关! 时空变化一般较小!
μ_T和ν_T:流动的参数, 与流体无关! 时空变化可能很大!

注: 根据Boussinesq假设,雷诺应力的所有9个分量都能表示成时均速度($\bar{u},\bar{v},\bar{w}$)的具体函数,从略。

一旦时均速度被求出, 立刻可由Boussinesq假设求出雷诺应力! 时均方程组又回到了4个方程4个未知数！ 但是 … ν_T?

16

时均速度($\bar{u},\bar{v},\bar{w}$), 理论上由雷诺方程可求,因此原来的雷诺应力未知量现转化成了涡黏系数ν_T未知.

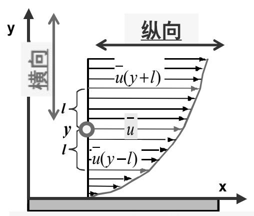
如何求涡黏系数ν_T, 是求解湍流雷诺方程的关键！

普朗特(Prandtl)混合长度理论(1925)

基本思想：湍流中流体微团的不规则运动，假设与气体分子的热运动相似，因此可借用分子运动论的方法(流体粘性是分子碰撞与吸引的结果)，来确定湍流的涡黏系数ν_T。

普朗特引入一个与气体分子自由程相对应的概念：混合长度(l)，得出涡黏系数ν_T的一种计算公式，这种计算公式称湍流模型, 其作用就是计算ν_T。

17



混合长和时均速度分布

设流场中y点处一流体微团, 因湍流的横向脉动v', 迁移到$y+l$点。

设到达$y+l$点时仍保持原有的纵向时均速度u, 则流体微团的到达使$y+l$点处的动量发生突变, 结果使($y+l$点)产生x方向的脉动u'。

l (普朗特混合长度): 流体质点因脉动由某一层移动到另一层的横向距离, 相当于分子运动的平均自由程。
(为何叫混合长度?)

u'与v'的符号相反：

$$u' = \bar{u}(y) - \bar{u}(y+l) = -(\frac{d\bar{u}}{dy})_y l$$ (Taylor展开, 略去高阶小量)

18

Prandtl: 假设u'和v'的数量级相同，这意味着横向脉动速度为v'所能够迁移的横向(y向)距离l与脉动速度u'在纵向(x向)混合所需要的距离相当，所以l也就是流体质点在纵向混合的长度（混合长名称的来历）。

因此有： $v' = -k_1 u' = -k_1 l(\frac{d\bar{u}}{dy})_y$

u'和v'相乘，作时均：

【从时均流动看，湍流脉动导致流体质点从y点迁移到$y+l$点, 对 $y+l$点的流体微元(位置)造成干扰，就是相当于附加了一个湍流的应力(即雷诺切应力)】

$$(\tau_{yx})_T = -\rho\overline{v'u'} = \rho k_1 l^2 (\frac{d\bar{u}}{dy})^2$$

19

将常数k_1归并到尚未确定的混合长度l中, 可得:

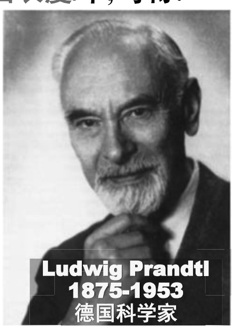
$$(\tau_{yx})_T = -\rho\overline{v'u'} = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

比对 Boussinesq涡黏假设

$$(\tau_{yx})_T = -\rho\overline{u'v'} = \mu_T \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho\nu_T \frac{d\bar{u}}{dy}$$

可得涡黏系数：

$$\mu_T = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|, \quad 或 \quad \nu_T = l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|$$



近代力学奠基人之一
流体力学巨匠、固体力学重大贡献、塑性力学开创性的研究
边界层理论 / 风洞试验技术 / 机翼理论 / 湍流理论 / 超音速流动
81名博士生: von Kármán, Blasius, Meyer, Busemann, 陆士嘉

20

Prandtl混合长湍流模型的说明： $\nu_T = l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|$

1) 上述推导过程与教科书有所不同，思路更简单清晰。可按这一思路分析湍流脉动从y向$y-l$迁移，其结论ν_T计算相同，有兴趣的同学课后可自行分析。
2) 针对不同类型的问题，混合长模型还须依靠试验给出混合长度l的经验公式，才能算出涡黏系数。普朗特、他的学生冯·卡门(钱学森是冯·卡门指导的博士生)，以及他们众多的同事和学生在这一方面作出了大量的工作，稍后还将介绍。
3) 混合长模型的优点在于简单，计算精度只能满足粗略的工程分析，离揭示流动机理的要求还有很大距离。
4) 学习时，掌握渐进演绎的思路，仅须记住关键公式，不必死记经验公式。

21

圆管：Nikurades公式

$$l/R = 0.14 - 0.08(1 - y/R)^2 - 0.06(1 - y/R)^4$$

其他壁面：van Driest阻尼衰减公式

$$l = \kappa y\left[1 - \exp\left(-\frac{y(\tau_W/\rho)^{1/2}}{A\nu}\right)\right],\ A = 26$$

τ_W 为壁面上的切应力

计算顺序：

针对具体问题，计算 $l \rightarrow \nu_t = l^2\left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \rightarrow$

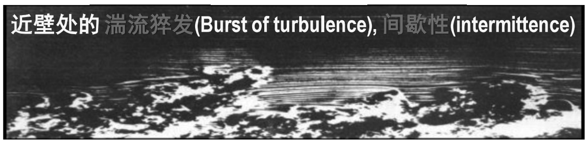
$$\left(\tau_{yx}\right)_T = \rho\overline{u'v'} = \mu_T\frac{d\bar{u}}{dy} = \rho\nu_T\frac{d\bar{u}}{dy}$$ $\rightarrow$ **雷诺平均方程**

9.2.3 通用速度分布——壁面律

1)壁面律的作用是计算壁面上的湍流涡黏系数ν_T

【教材介绍不清,参考西安交大陶文铨院士《数值传热学》9章】

壁面$u=v=w=0$, 物理上不应有湍流脉动, 但壁面却是湍流发生的地方, 按雷诺时均理解, 此处$\nu_T \neq 0$。



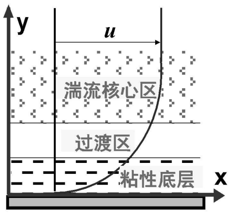
2) 空气动力学和航空科学发展的早期，壁面律作出巨大贡献。主要是普朗特和他的学生们(冯·卡门、Edward Van Driest等人)的工作。

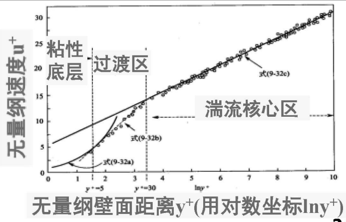
3) 只需记住两个要点：

① 近壁湍流是一种三层结构(名称和顺序要记住 !)

② 无量纲平均速度的Van Driest 型线，即壁面律，也分三段, 书上式(9-32), P195; 因Van Driest型线是对数函数, 故壁面律也叫壁面对数律。

两个特征量, 摩擦速度：$u^* = \sqrt{\tau_0/\rho}$, **摩擦长度：**$y^* = \mu/\sqrt{\tau_0\rho}$





9.3 圆管内充分发展的湍流流动

9.3.1 光滑管内的速度分布与阻力

什么叫光滑管
稍后…

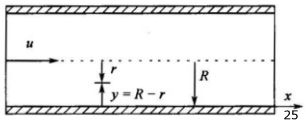
速度分布

管壁到中心, 3区域: 粘性底层 / 过渡区 / 湍流核心区

书P195,式(9-32)给出无量纲的通用速度分布 (不必记…)

圆管湍流还可用幂函数近似公式(根据Re 选用):

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad \begin{cases} Re = 4\times10^4 \sim 1.1\times10^5, n = 6 \\ Re = 1.1\times10^5 \sim 3.2\times10^6, n = 7 \\ Re > 3.2\times10^6, n = 10 \end{cases}$$



平均速度

掌握思路 只记关键公式

工程计算中常用前面的纯经验的幂函数式：积分计算，求出平均速度。 $\frac{u}{u_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$

若 $n = 7,\ u_m = 0.817u_{\max}$ **，可近似取** $u_m = 0.8u_{\max}$

回忆圆管充分发展的层流, $u_m = 0.5u_{\max}$ **，有何体会？**

壁面切应力

掌握思路 只记关键公式

将 $u^* = \sqrt{\tau_0/\rho},\ y^* = \mu/\sqrt{\tau_0\rho}$ **代入** $\frac{u_m}{u^*} = 2.5\ln\frac{R}{y^*} + 1.75$

可得 $\frac{q_V}{\pi R^2\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2.5\ln\frac{R\sqrt{\tau_0\rho}}{\mu} + 1.75$ **。给定** $q_V \rightarrow \tau_0$

上述壁面切应力计算也不方便，可采用1/7次方速度分布近似式求τ_0：

$$u = 8.74u^*\left[\frac{\mu}{\rho u^*(R-r)}\right]^{1/7} \Rightarrow u^* = 0.15u_{\max}^{7/8}\left(\frac{\mu}{\rho R}\right)^{1/8}$$

根据壁面摩擦速度u*的定义，$\tau_0 = \rho(u^*)^2$

$$\Rightarrow \tau_0 = \rho(u^*)^2 = 0.0225\rho u_{\max}^{7/4}\left[\mu/(\rho R)\right]^{1/4}$$

又，据圆管湍流中 $u_m = 0.817u_{\max}$

$$\Rightarrow \tau_0 = 0.03325\rho u_m^2\left[\mu/(u_m\rho R)\right]^{1/4} = \frac{0.3164}{Re^{1/4}}\frac{\rho u_m^2}{8}$$ **其中** $Re = \rho u_m D/\mu$, $D = 2R$

9.3.2 粗糙管内的湍流速度分布

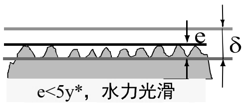
掌握思路 只记关键公式

e: 表面粗糙峰平均高度, 以摩擦长度 y^* 为参照:

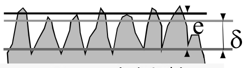
水力光滑管：$e<5y^*$, 粗糙峰都被埋在**粘性底层**内,粗糙度对湍流核心区的速度分布没有影响，核心区速度分布与光滑管相同，服从**半对数律**, $\boxed{u^+ = 1/K \ln y^+ + 5.5}$。

过渡型圆管：$5y^* < e < 70y^*$, 部份粗糙峰埋在粘性底层内, 雷诺数和壁面粗糙度对湍流核心区速度分布都有影响.

水力粗糙管：$e>70y^*$，粗糙峰都高于粘性底层，突出在湍流核心区, 对速度分布有显著影响: $\boxed{\frac{u}{u^*} = 1/K \ln \frac{R-r}{e} + 8.5}$



e<5y*，水力光滑



e>70y*，水力粗糙

28

注意:水力光滑管/过渡管/粗糙管只对**湍流**有概念，**层流**中无此叫法！因为层流中也没有粘性底层这个概念.

29