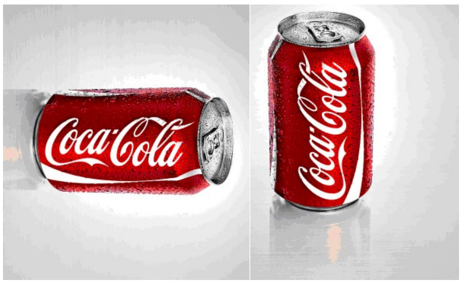
第五章教学案例



问题提出：

炎热的夏天，冰爽的饮品可以降温解暑，对于一瓶饮料，图中哪种方式放于冰箱中冷却快呢？

问题分析：

只考虑饮料与周围冷空气的对流传热，不计辐射与导热，在冰箱中物品不十分密集的情况下，饮料的冷却视为大空间稳态自然对流问题，圆柱体两端面的散热忽略不计，可通过计算单位时间散热量来获得最优的放置方式。

数学建模：

从市场上不同规格尺寸的饮品中选取三种具有代表性的模型，讨论模型的放置方式对冷却速率的影响。模型一为 350ml 的罐装啤酒可近似为高度 h=125mm，直径 d=68mm 的圆柱体，模型二为 550ml 的瓶装矿泉水可近似为高度 h=180mm，直径 d=55mm 的圆柱体，模型三为 1.5L 的瓶装橙汁可近似为高度 h=280mm，直径 d=90mm 的圆柱体。将三种模型从环境温度 t_w=25°C，放入温度 t_∞=5°C的冰箱中冷却。

定量计算：

定性温度：$t_m = \frac{1}{2}(t_\infty + t_w) = \frac{1}{2}\times(5+25) = 15$ ℃

由附录查得，15°C时空气的物性 $\rho = 1.226$ kg/m³, $c_p = 1.005$ kJ/(kg·K), $\nu = 14.61\times10^{-6}$ m²/s, $\mathrm{Pr} = 0.704$, $\lambda = 0.0255$ W/(m·k)。

模型一：垂直放置时单位时间散热量：

$$G_r = \frac{g\alpha_v \Delta t l^3}{\nu^2} = \frac{9.8\times(25-5)\times0.125^3}{(14.61\times10^{-6})^2\times(273+15)} = 6.227\times10^6$$

由 $1.43\times10^4 < G_r < 3\times10^9$ 可知，流态为层流，则：

$$Nu_m = 0.59(Gr\cdot Pr)^{1/4} = 0.59\times(6.227\times10^6\times0.704)^{1/4} = 26.997$$

$$h = Nu\frac{\lambda}{l} = 26.997\times\frac{0.0255}{0.125} = 5.51 \text{ W/(m}^2\text{·K)}$$

$$\Phi_1 = \pi d l h(t_w - t_\infty) = 3.14\times0.068\times0.125\times5.51\times20 = 2.94 \text{ W}$$

水平放置时单位时间散热量：

$$G_r = \frac{g\alpha_v \Delta t l^3}{\nu^2} = \frac{9.8\times(25-5)\times0.068^3}{(14.61\times10^{-6})^2\times(273+15)} = 1.003\times10^6$$

由$1.43\times10^4 < G_{r2} < 5.75\times10^8$可知，流态为层流，则:

$$Nu_m = 0.59(Gr\cdot Pr)^{1/4} = 0.48\times(1.003\times10^6\times0.704)^{1/4} = 13.913$$

$$h = Nu\frac{\lambda}{l} = 13.913\times\frac{0.0255}{0.068} = 5.22\ \mathrm{W/(m^2\cdot K)}$$

$$\Phi_2 = \pi dlh(t_w - t_\infty) = 3.14\times0.068\times0.125\times5.22\times20 = 2.78\ \mathrm{W}$$

$\Phi_1 > \Phi_2$，模型一垂直放置时冷却更快。

模型二：垂直放置时单位时间散热量：

$$G_r = \frac{g\alpha_v \Delta t l^3}{\nu^2} = \frac{9.8\times(25-5)\times0.18^3}{(14.61\times10^{-6})^2\times(273+15)} = 1.859\times10^7$$

由$1.43\times10^4 < G_r < 3\times10^9$可知，流态为层流，则

$$Nu_m = 0.59(Gr\cdot Pr)^{1/4} = 0.59\times(1.859\times10^7\times0.704)^{1/4} = 35.487$$

$$h = Nu\frac{\lambda}{l} = 35.487\times\frac{0.0255}{0.18} = 5.03\ \mathrm{W/(m^2\cdot K)}$$

$$\Phi_1 = \pi dlh(t_w - t_\infty) = 3.14\times0.055\times0.18\times5.03\times20 = 3.13\ \mathrm{W}$$

水平放置时单位时间散热量：

$$G_r = \frac{g\alpha_v \Delta t l^3}{\nu^2} = \frac{9.8\times(25-5)\times0.055^3}{(14.61\times10^{-6})^2\times(273+15)} = 5.305\times10^5$$

由$1.43\times10^4 < G_{r2} < 5.75\times10^8$可知，流态为层流，则:

$$Nu_m = 0.59(Gr\cdot Pr)^{1/4} = 0.48\times(5.305\times10^5\times0.704)^{1/4} = 11.866$$

$$h = Nu\frac{\lambda}{l} = 11.866\times\frac{0.0255}{0.055} = 5.50\ \mathrm{W/(m^2\cdot K)}$$

$$\Phi_2 = \pi dlh(t_w - t_\infty) = 3.14\times0.055\times0.18\times5.50\times20 = 3.42\ \mathrm{W}$$

$\Phi_1 < \Phi_2$，模型二水平放置时冷却更快。

模型三：垂直放置时单位时间散热量：

$$G_r = \frac{g\alpha_v \Delta t l^3}{\nu^2} = \frac{9.8\times(25-5)\times0.28^3}{(14.61\times10^{-6})^2\times(273+15)} = 6.999\times10^7$$

由$1.43\times10^4 < G_r < 3\times10^9$可知，流态为层流，则

$$Nu_m = 0.59(Gr\cdot Pr)^{1/4} = 0.59\times(6.99\times10^7\times0.704)^{1/4} = 49.432$$

$$h = Nu\frac{\lambda}{l} = 49.432\times\frac{0.0255}{0.28} = 4.502\ \mathrm{W/(m^2{\cdot}K)}$$

$$\Phi_1 = \pi dlh(t_w - t_\infty) = 3.14\times0.28\times0.09\times4.502\times20 = 7.12\ \mathrm{W}$$

水平放置时单位时间散热量：

$$G_r = \frac{g\alpha_v\Delta tl^3}{\nu^2} = \frac{9.8\times(25-5)\times0.09^3}{(14.61\times10^{-6})^2\times(273+15)} = 2.324\times10^6$$

由$1.43\times10^4 < G_{r2} < 5.75\times10^8$可知，流态为层流，则：

$$Nu_m = 0.59(Gr\cdot Pr)^{1/4} = 0.48\times(2.324\times10^6\times0.704)^{1/4} = 17.168$$

$$h = Nu\frac{\lambda}{l} = 17.168\times\frac{0.0255}{0.09} = 4.864\ \mathrm{W/(m^2{\cdot}K)}$$

$$\Phi_2 = \pi dlh(t_w - t_\infty) = 3.14\times0.09\times0.28\times4.864\times20 = 7.70\ \mathrm{W}$$

$\Phi_1 < \Phi_2$，模型三水平放置时冷却更快。

讨论：（1）三种模型具有相同的初始温度并处于相同的冷却环境中，仅模型一垂直放置时单位时间的散热量多于水平放置时单位时间的散热量，而模型二、模型三在水平放置时单位时间内散热多。

假设：模型垂直放置与水平放置时流态均为层流，模型高度直径比为$a = \dfrac{l}{d}$。

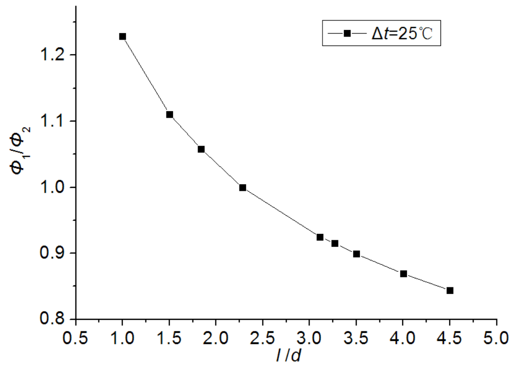
$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\pi dlh_1(t_w - t_\infty)}{\pi dlh_2(t_w - t_\infty)} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{Nu_1\dfrac{\lambda}{l}}{Nu_2\dfrac{\lambda}{d}} = \frac{Nu_1}{aNu_2} = \frac{0.59(Gr_1\cdot Pr)^{1/4}}{0.48a(Gr_2\cdot Pr)^{1/4}} = \frac{0.59Gr_1^{1/4}}{0.48aGr_2^{1/4}}$$

其中 $\dfrac{G_{r1}}{G_{r2}} = \dfrac{g\alpha_v\Delta tl^3}{\nu^2}\times\dfrac{\nu^2}{g\alpha_v\Delta td^3} = a^3$ 将其带入上式得：

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{0.59}{0.48a^{1/4}}$$

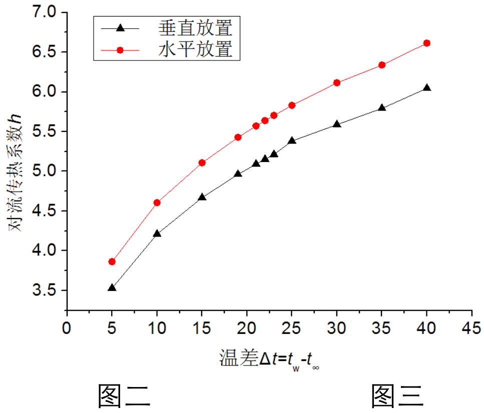
通过计算多种不同比例下模型垂直放置时散热量与水平放置时散热量的比值$\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2}$，拟合成曲线（如图一）。散热量比值$\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2}$随着$\dfrac{l}{d}$的增大而减小，曲线通过点（2.28，1.00），

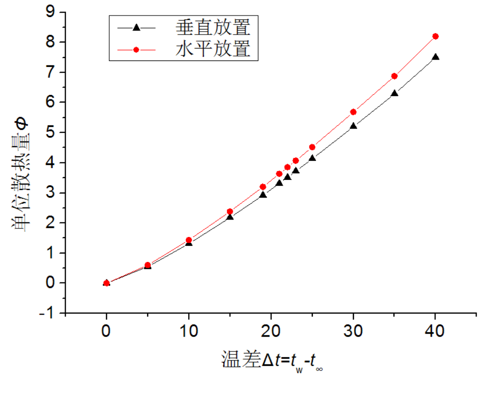
在该比值处物体垂直放置和水平放置的冷却效果是一样的，当时 $\frac{l}{d}<2.28$，垂直放置冷却效果优于水平放置，并且随着比值的减小，垂直放置的优越性越大；当 $\frac{l}{d}>2.28$ 时，水平放置冷却效果优于垂直放置，并且随比值的增大，水平放置的优越性越大。模型一高度直径比 $\frac{l}{d}=\frac{125}{68}\square 1.84$；模型二高度直径比 $\frac{l}{d}=\frac{180}{55}\square 3.27$；模型三高度直径比 $\frac{l}{d}=\frac{280}{90}\square 3.11$。符合上述分析。



图一

（2）以上主要讨论了模型的高度直径比对于单位时间内散热量的影响，以下内容主要讨论冰箱不同温度设置对于散热量的影响。现以模型二为例计算不同温差下物体的单位时间散热量。假设冰箱的温度分别调节成-15℃、-10℃、-5℃、0℃、2℃、3℃、4℃、6℃、10℃、15℃和 20℃，模型二的初温为 t_w=25℃，计算定性温度 $t_m=\frac{1}{2}(t_{\square}+t_w)$ 确定物性。通过上述大空间自然对流传热的实验关联式研究模型二两种放置方式的表面传热系数 h_1、h_2 及单位时间散热量 Φ_1、Φ_2 与温差 Δt 的关系，如下图所示。从图像中我们可以发现随着温差的增大，传热系数 h 的增加速度减缓，而单位时间散热量增加速度增大，说明传热系数 h 可以表征对流传热的强度，但是散热量取决于 $Ah\Delta t$。水平放置时单位时间散热量总是高于垂直放置时单位时间散热量。





图二　　　　图三