17.1 平面图的基本概念

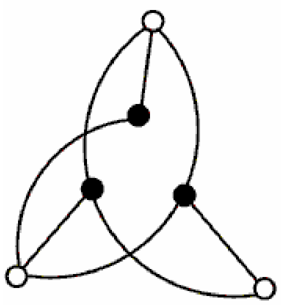
定义17.1

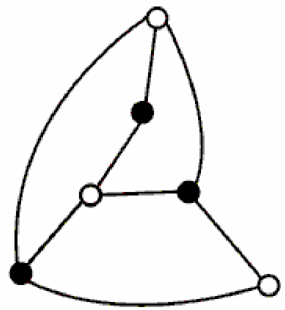
(1) G可嵌入曲面S——若能将G除顶点外无边相交地画在S上

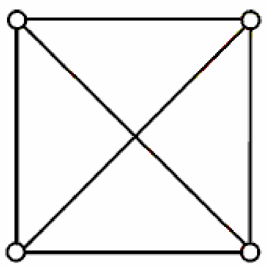
(2) G是可平面图或平面图——G可嵌入平面Π

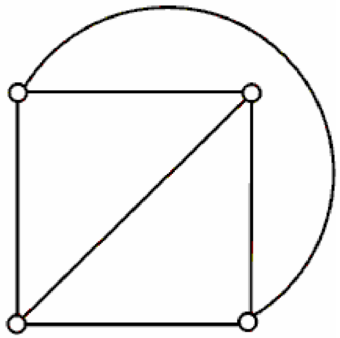
(3) 平面嵌入——画出的无边相交的平面图

(4) 非平面图——无平面嵌入的无向图


(1)


(2)


(3)


(4)

在图中，(2)是(1) 的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入.

几点说明及一些简单结论

一般所谈平面图不一定是指平面嵌入，上图中4个图都是平面图，但讨论某些性质时，一定是指平面嵌入.

结论：

(1) K_5, $K_{3,3}$都不是平面图（待证）

(2) 设$G'\subseteq G$，若G为平面图，则G'也是平面图（定理17.1）

(3) 设$G'\subseteq G$，若G'为非平面图，则G也是非平面图（定理17.2），由此可知，$K_n(n\geq 6)$，$K_{3,n}(n\geq 4)$ 都是非平面图.

(4) 平行边与环不影响平面性.

平面图(平面嵌入)的面与次数

定义17.2

(1) G的面——由G的平面嵌入的边将平面化分成的区域

(2) 无限面或外部面——（可用R_0表示）——面积无限的面

(3) 有限面或内部面（可用$R_1, R_2, \ldots, R_k$等表示）——面积有限的面

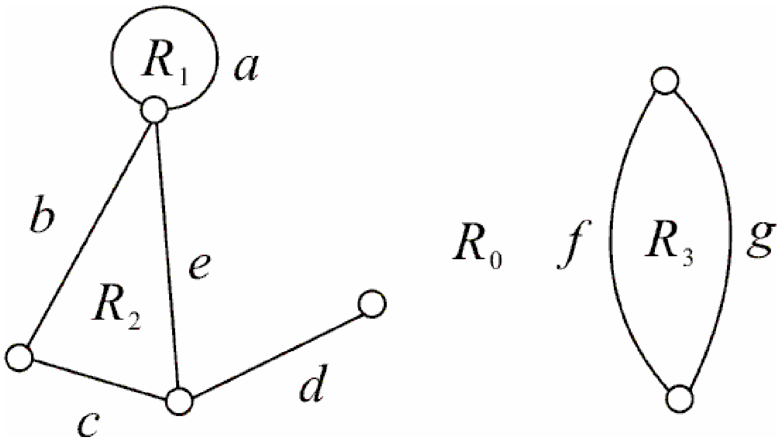
(4) 面 R_i 的边界——包围R_i的回路组

(5) 面 R_i 的次数——R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示

几点说明

- 若平面图G有k个面，可笼统地用$R_1, R_2, \ldots, R_k$表示，不需要指出外部面.
- 定义17.2(4) 中回路组是指：边界可能是初级回路(圈)，可能是简单回路，也可能是复杂回路. 特别地，还可能是非连通的回路之并.

平面图有4个面，
$\deg(R_1)=1$, $\deg(R_2)=3$,
$\deg(R_3)=2$, $\deg(R_0)=8$.
请写各面的边界.



定理17.4 平面图各面次数之和等于边数的两倍.

极大平面图

定义17.3 若在简单平面图*G*中的任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称*G*为**极大平面图**.

注意：若简单平面图*G*中已无不相邻顶点，*G*显然是极大平面图，如K_1(平凡图), K_2, K_3, K_4都是极大平面图.

极大平面图的主要性质

定理17.5 极大平面图是连通的.

证明线索：否则，加新边不破坏平面性

定理17.6 n（$n\geq3$）阶极大平面图中不可能有割点和桥.
证明线索：由定理17.5及$n\geq3$可知，*G*中若有桥，则一定有割点，因而只需证无割点即可. 方法还是反证法.

极大平面图的性质

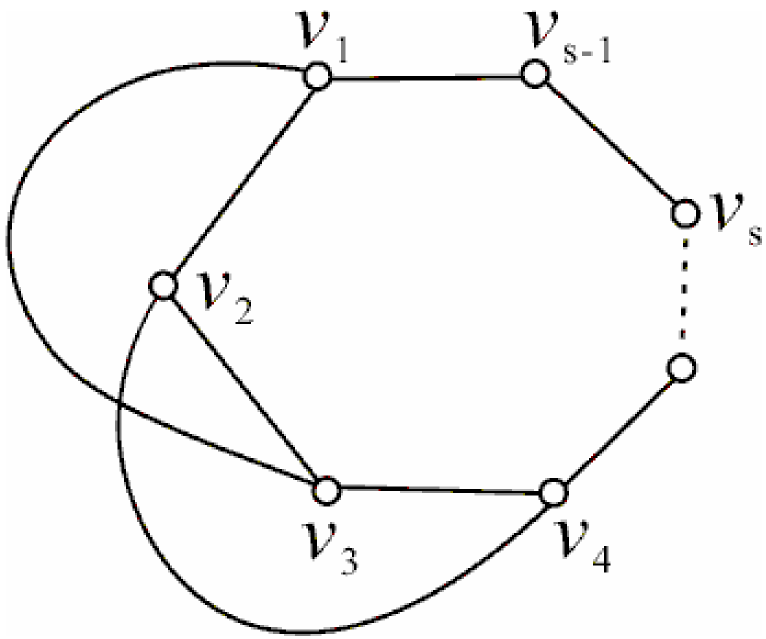
定理17.7 设G为n（$n\geq3$）阶极大平面图，则G的每个面的次数均为3.

证明线索：

(1) 由于$n\geq3$, 又G必为简单平面图可知，G每个面的次数均≥3.

(2) 因为G为平面图，又为极大平面图. 可证G不可能存在次数>3的面.

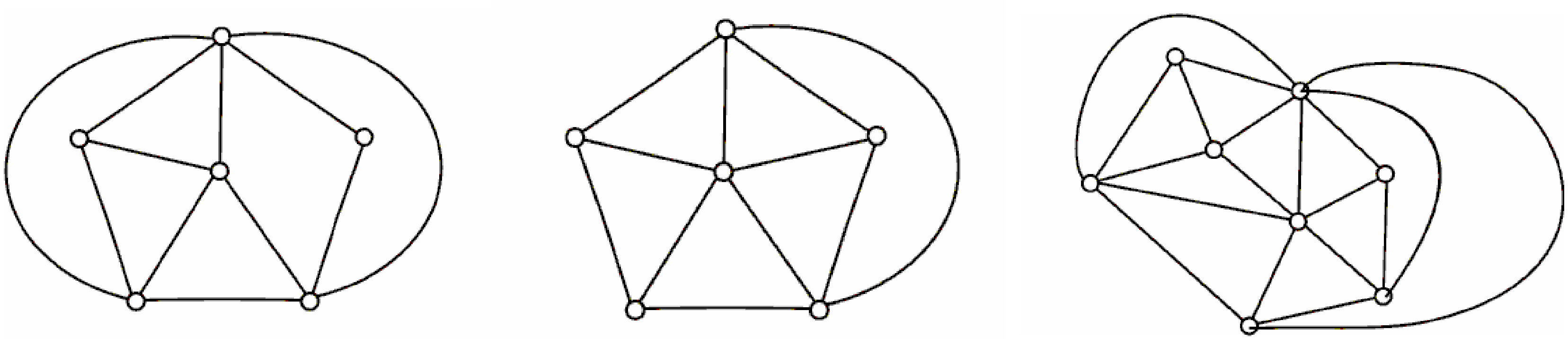
就给出的图讨论即可.



定理的应用

定理17.7中的条件也是极大平面图的充分条件.

定理17.7′ 设G为n ($n \geq 3$) 阶平面图，且每个面的次数均为3，则G为极大平面图.



(1)　　(2)　　(3)

上图中，只有(3)为极大平面图

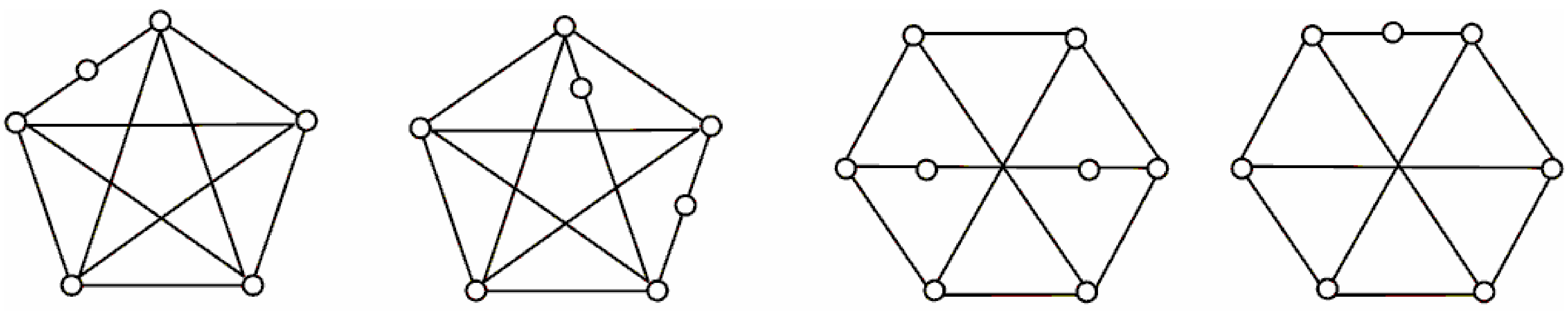
极小非平面图

定义17.4 若在非平面图G中任意删除一条边，所得图G'为平面图，则称G为**极小非平面图**.

由定义不难看出：

(1) K_5, $K_{3,3}$都是极小非平面图

(2) 极小非平面图必为简单图



图中所示各图都是极小非平面图.

17.2 欧拉公式

定理17.8 设G为n阶m条边r个面的连通平面图，则$n-m+r=2$（此公式称为欧拉公式）

证 对边数m做归纳法

$m=0$，G为平凡图，结论为真.

设$m=k$（$k\geq 1$）结论为真，$m=k+1$时分情况讨论.

(1) G中无圈，则G为树，删除一片树叶，用归纳假设.

(2) 否则，在某一个圈上删除一条边，进行讨论.

定理17.9（欧拉公式的推广）设G是具有k（$k\geq 2$）个连通分支的平面图，则$n-m+r=k+1$

证明中对各连通分支用欧拉公式，并注意 $r=\sum_{i=1}^{k} r_i-(k-1)$ 即可.

与欧拉公式有关的定理

定理17.10 设G为连通的平面图，且$\deg(R_i)\geq l$, $l\geq 3$，则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

证 由定理17.4及欧拉公式得

$$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \geq l \cdot r = l(2+m-n)$$

解得 $m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-2)$

推论 K_5, $K_{3,3}$不是平面图.

定理17.11 在具有k（$k\geq 2$）个连通分支的平面图中，

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-k-1)$$

与欧拉公式有关的定理

定理17.12 设G为n（$n\geq 3$）阶m条边的简单平面图，则$m\leq 3n-6$.
证 设G有k（$k\geq 1$）个连通分支，若G为树或森林，当$n\geq 3$时，$m\leq 3n-6$为真. 否则G中含圈，每个面至少由l（$l\geq 3$）条边围成，又

$$\frac{l}{l-2}=1+\frac{2}{l-2}$$

在$l=3$达到最大值，由定理17.11可知$m\leq 3n-6$.

定理17.13 设G为n（$n\geq 3$）阶m条边的极大平面图，则$m=3n-6$.

证 由定理17.4, 欧拉公式及定理17.7所证.

定理17.14 设G为简单平面图，则$\delta(G)\leq 5$.
证 阶数$n\leq 6$，结论为真. 当$n\geq 7$时，用反证法. 否则会推出$2m\geq 6n \Rightarrow m\geq 3n$，这与定理17.12矛盾.

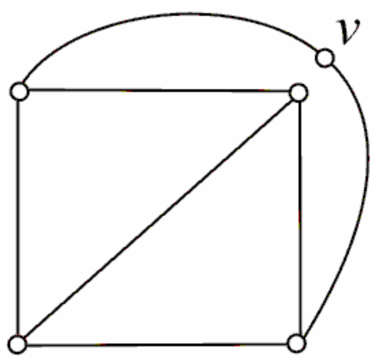
17.3 平面图的判断

1. 插入2度顶点和消去2度顶点

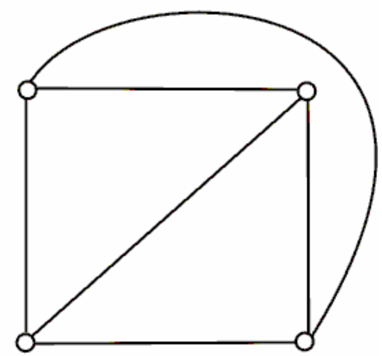
定义17.5

(1) 消去2度顶点v，见下图中，由(1) 到(2)

(2) 插入2度顶点v，见下图中，从(2) 到(1) .



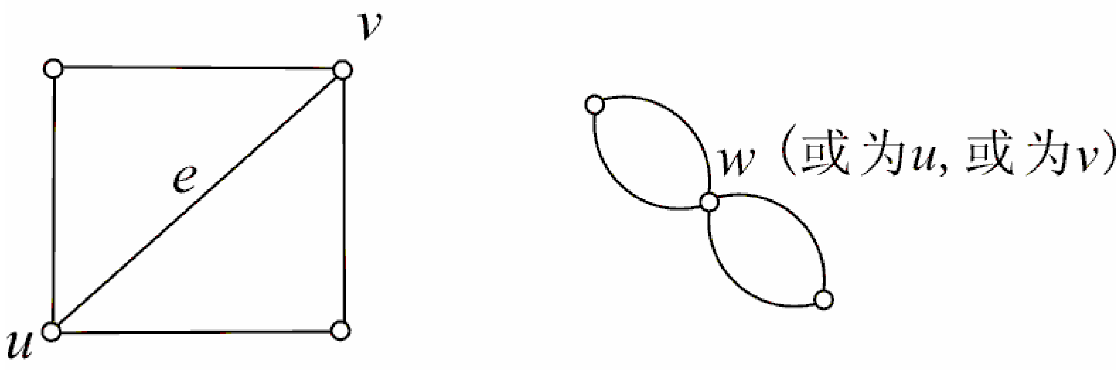
(1)



(2)

图的同胚

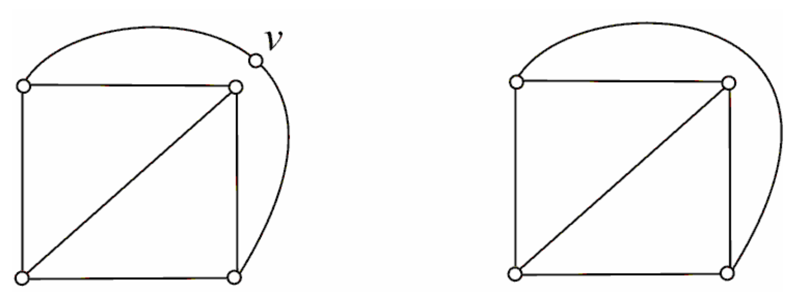
2. 收缩边e，见下图所示.



3. 图之间的同胚

定义17.6 若$G_1 \cong G_2$，或经过反复插入或消去2度顶点后所得$G'_1 \cong G'_2$，则称G_1与G_2**同胚**.

右边两个图同胚

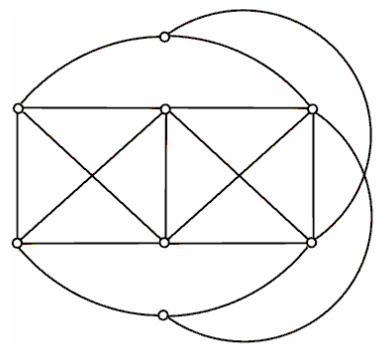


平面图判定定理

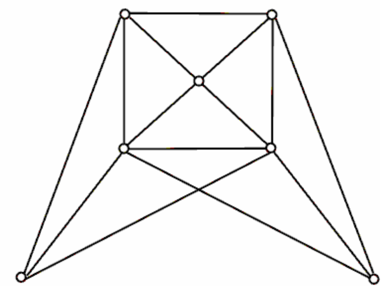
定理17.15 G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中不含与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图.

定理17.16 G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中无可收缩为K_5或$K_{3,3}$的子图

例1 证明所示图(1)与(2)均为非平面图.

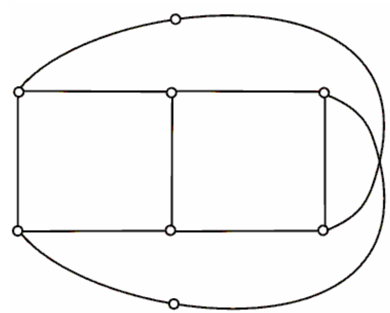


(1)

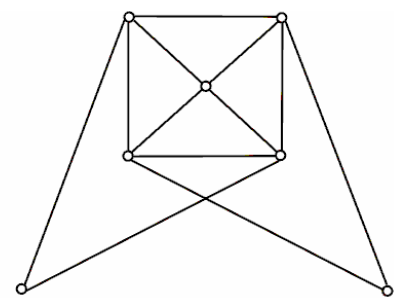


(2)

右图(1),(2)分别为原图(1), (2)的子图与$K_{3,3}$, K_5同胚.



子图 (1)



(2)

17.4 平面图的对偶图

定义17.7 设G是某平面图的某个平面嵌入，构造G的对偶图G^*如下：

(1) 在G的面R_i中放置G^*的顶点v^*_i.

(2) 设e为G的任意一条边.

若e在G的面 R_i与 R_j 的公共边界上，做G^*的边e^*与e相交，且e^*关联G^*的位于R_i与R_j中的顶点v^*_i与v^*_j，即

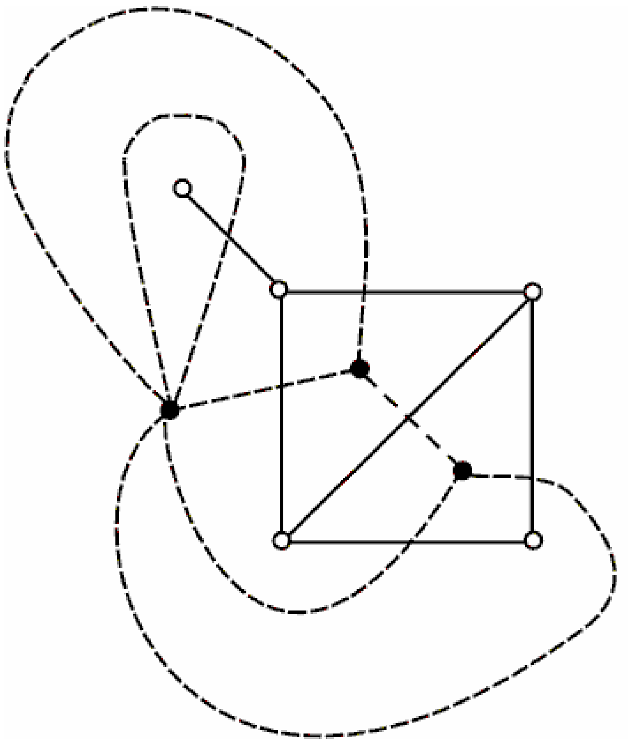
$$e^*=(v^*_i,v^*_j),$$

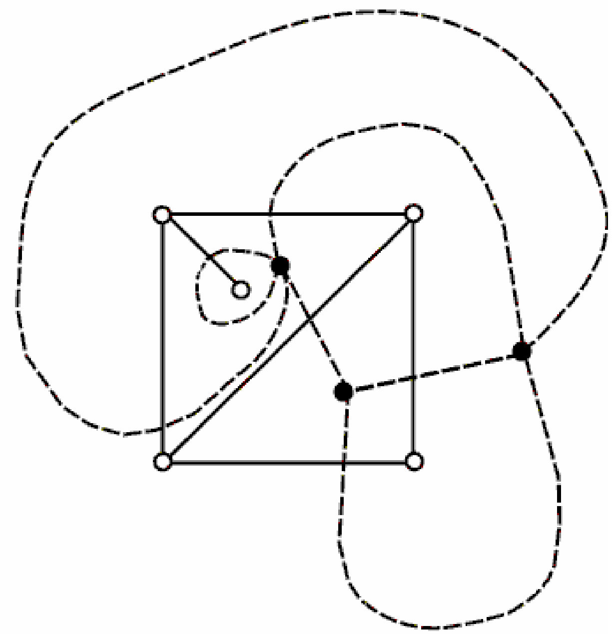
e^*不与其它任何边相交.

若e为G中的桥且在面R_i的边界上，则e^*是以R_i中G^*的顶点v^*_i为端点的环，即$e^*=(v^*_i,v^*_i)$.

实例

下面两图中，实线边图为平面图，虚线边图为其对偶图.





对偶图的性质

G 的对偶图G^*有以下性质：

(1) G^*是平面图，而且是平面嵌入.

(2) G^*是连通图

(3) 若边e为G中的环，则G^*与e对应的边e^*为桥，若e为桥，则G^*中与e对应的边e^*为环.

(4) 在多数情况下，G^*为多重图（含平行边的图）.

(5) 同构的平面图（平面嵌入）的对偶图不一定是同构的.
如上面的例子.

平面图与对偶图的
阶数、边数与面数之间的关系

定理17.17 设G^*是连通平面图G的对偶图，n^*, m^*, r^*和n, m, r分别为G^*和G的顶点数、边数和面数，则

(1) $n^*= r$

(2) $m^*=m$

(3) $r^*=n$

(4) 设G^*的顶点v^*i位于G的面Ri中，则$dG^*(v^*i)=\deg(Ri)$

证明线索

(1)、(2)平凡.

(3) 应用欧拉公式.

(4) 的证明中注意，桥只能在某个面的边界中，非桥边在两个面的边界上.

平面图与对偶图的
阶数、边数与面数之间的关系

定理17.18 设G^*是具有k（$k\geq 2$）个连通分支的平面图G的对偶图，则

(1) $n^*= r$

(2) $m^*=m$

(3) $r^*=n-k+1$

(4) 设G^*的顶点v^*i位于G的面Ri中，则$d_{G^*}(v^*i)=\deg(Ri)$

其中n^*, m^*, r^*, n, m, r同定理17.17.

证明(3) 时应同时应用欧拉公式及欧拉公式的推广.

自对偶图

定义17.8 设G^*是平面图G的对偶图，若$G^* \cong G$，则称G为自对偶图.

轮图定义如下：

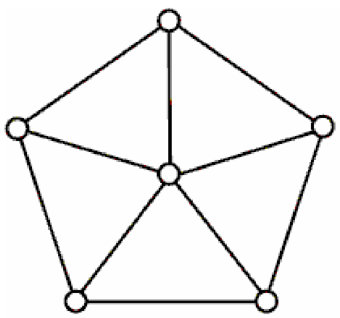
在$n-1$（$n\geq 4$）边形C_{n-1}内放置1个顶点，使这个顶点与C_{n-1}上的所有的顶点均相邻. 所得n 阶简单图称为n阶轮图. n为奇数的轮图称为奇阶轮图，n为偶数的轮图称为偶阶轮图，常将 n 阶轮图记为W_n.

轮图都是自对偶图.

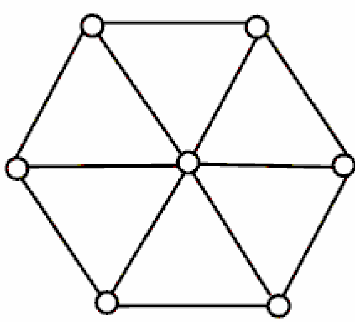
图中给出了W_6和W_7.

请画出它们的对偶图，

从而说明它们都是自对偶图.



W_6



W_7

第十七章 习题课

主要内容

- 平面图的基本概念
- 欧拉公式
- 平面图的判断
- 平面图的对偶图

基本要求

- 深刻理解本部分的基本概念：平面图、平面嵌入、面、次数、极大平面图、极小非平面图、对偶图
- 牢记极大平面图的主要性质和判别方法
- 熟记欧拉公式及推广形式，并能用欧拉公式及推广形式证明有关定理与命题
- 会用库拉图斯基定理证明某些图不是平面图
- 记住平面图与它的对偶图阶数、边数、面数之间的关系

练习1

1. 设G是连通的简单的平面图，面数$r<12$，$\delta(G)\geq 3$.

(1) 证明G中存在次数≤4的面

(2) 举例说明当$r=12$时，(1) 中结论不真.

解　设G的阶数、边数、面数分别为n, m, r.

(1) 否则，由欧拉公式得

$$2m > 5r = 5\,(2+m-n) \qquad ①$$

由于$\delta(G)\geq 3$及握手定理又有　$2m \geq 3n$　②

由①与②得　$m\geq 30$　③

又有　$r=2+m-n<12$　④

由④及②又可得　$m<30$　⑤

③,⑤是矛盾的.

(2) 正十二面体是一个反例

练习2

2. 设G是阶数$n\geq 11$的无向平面图，证明G和 $\overline{G}$不可能全是平面图.

证　只需证明G和$\overline{G}$中至少有一个是非平面图. 采用反证法.

否则$\overline{G}$ 与G 都是平面图，下面来推出矛盾.

G与 $\overline{G}$ 的边数m, m'应满足$m+m'=\dfrac{n(n-1)}{2}$ (K_n的边数) ①

由鸽巢原理知m或m'，不妨设m，$m\geq\dfrac{n(n-1)}{4}$ ②

又由定理17.12 知　$m\leq 3n-6$ ③

由②与③得　$n^2-13n+24\leq 0$ ④

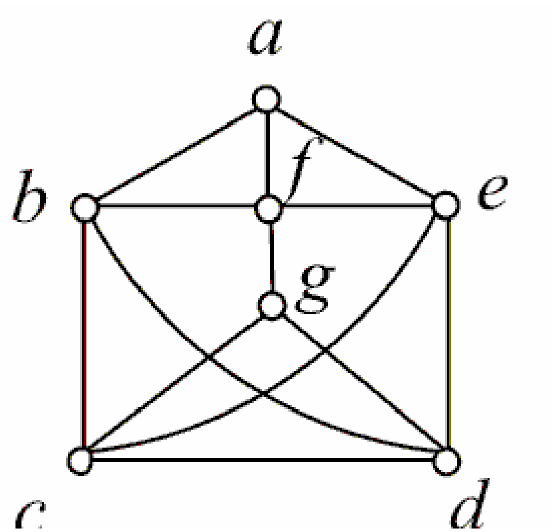
由④解得　$2\leq n\leq 10$ ⑤

⑤与$n\geq 11$矛盾.

其实，当n=9,10时，命题结论已真.

练习3

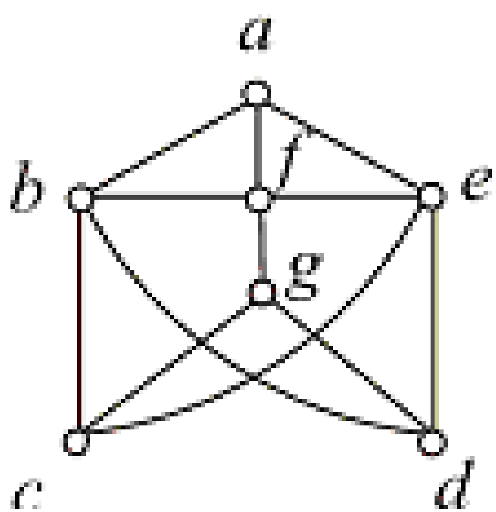
3. 证明下图为非平面图



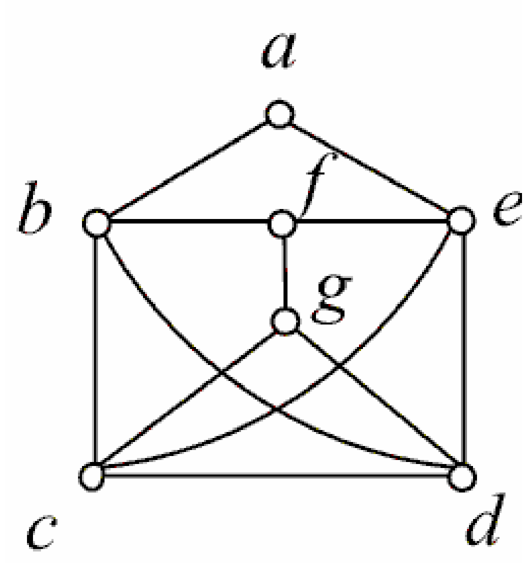
证明

证 用库拉图斯基定理证明

方法一. 下图为原图的子图，它是$K_{3,3}$，由库拉图斯基定理得证命题.



方法二. 下图为原图的子图（删除边(a,f)），收缩本图中的(a,e)和(f,g)所得图为K_5, 由库拉图斯基定理得证命题.



练习4

4. 设G为n（n≥3）阶极大平面图，证明G的对偶图G^*是2-边连通的3-正则图.

证 证明中用上n≥3的极大平面图的性质，以及平面图与对偶图的关系，对偶图的连通性等.

(1) 证G^*是2-边连通的.

由G^*的连通性可知，$\lambda(G^*)\geq 1$，又因为G为极大平面图，故G为简单图，所以G^*中无桥（因为G中无环），所以，$\lambda(G^*)\geq 2$. 故G^*为2-边连通的.

(2) 证G^*是3-正则图.

易知G^*为简单图，且每个顶点的度数均为3（由定理17.7决定），故G^*为3-正则图.