# 第四章　振 动

- §1.1 简谐振动
- §1.2 同方向同频率谐振动的合成

- 机械振动
  - 简谐振动
    - 振动特征
      - 动力学方程
      - 运动学方程
    - 描述简谐振动的物理量
      - 频率 $\nu$
      - 圆频率 $\omega$
      - 振幅 $A$
      - 周期 $T$
      - 相位 $\omega t+\varphi$
      - 初相 $\varphi$
    - 描述简谐振动的方法
      - 解析法
      - 矢量法
    - 谐振动的能量
      - 动能
      - 势能
      - 总能量
  - 阻尼振动 ⟶ 振幅随时间减小的振动
  - 受迫振动 ⟶ 在周期外力作用下的振动

谐振动的合成

同方向同频率

分振动方程
$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

合振动方程
$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi) \\ A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \varphi=\tan^{-1}\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

同频率振动方向垂直 ⟶ 合振动轨迹为 椭圆或圆

不同频率振动方向垂直 ⟶ 当频率比为整数比时为利萨如图形

# 第四章　振　动

任何一个物理量在某一定值附近作周期性变化——振动

物体在一定位置附近作来回往复运动——机械振动

# 第四章 振动（Vibration）

# §4.1 简谐振动

## 一、简谐振动模型

- 振动：任一物理量在某一定值附近往复变化

- 机械振动 物体围绕一固定位置往复运动

  可分为直线、平面和空间振动.

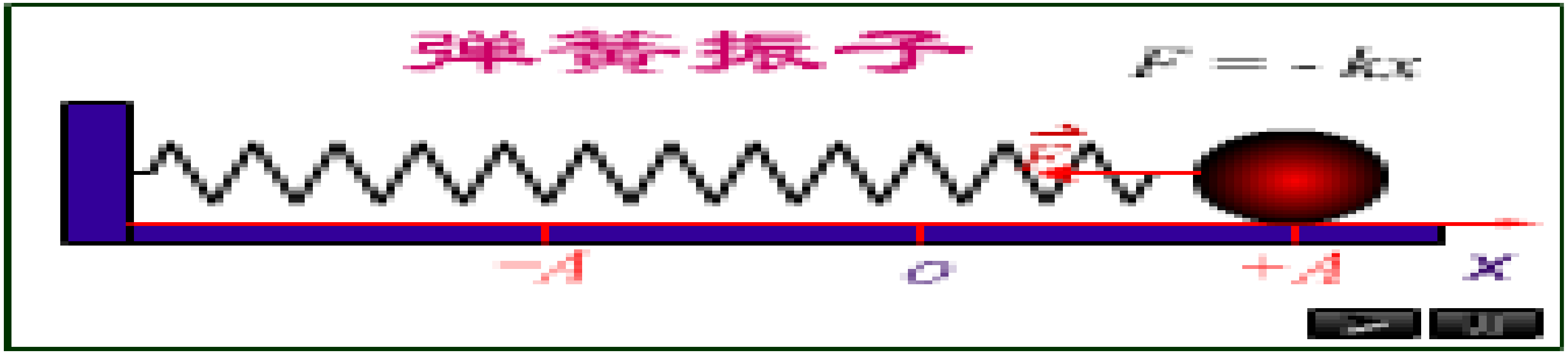
- 简谐运动 最简单、最基本的线性回复振动.

简谐运动

合成 / 分解

复杂振动

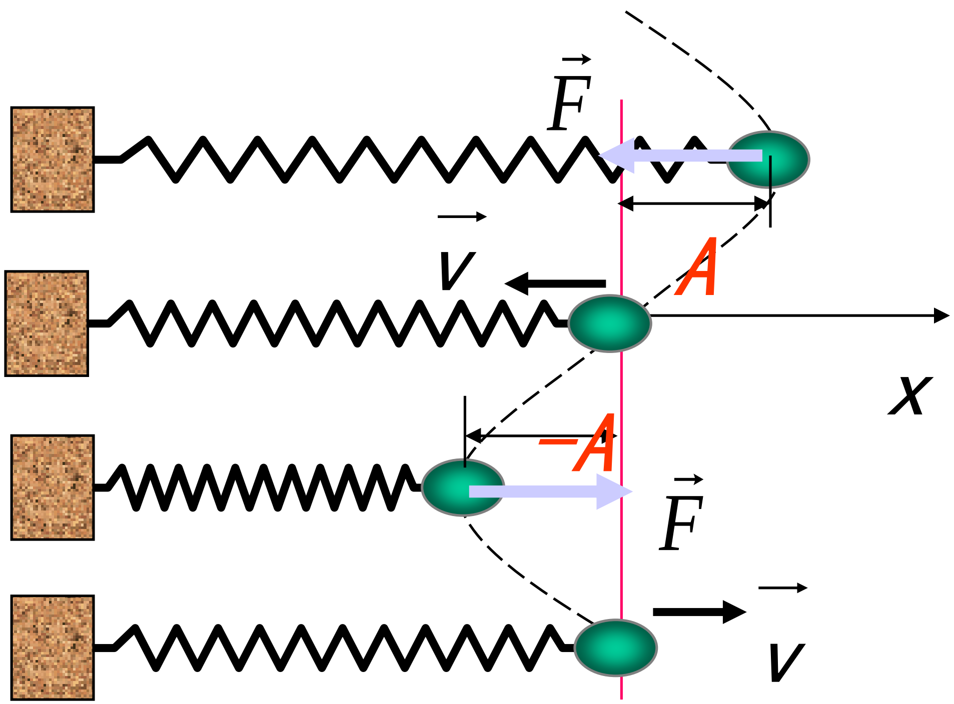
# 理想模型之一：弹簧振子



# 一、谐振动动力学方程

## 1、弹簧振子：由物体和轻质弹簧组成系统

弹簧振子



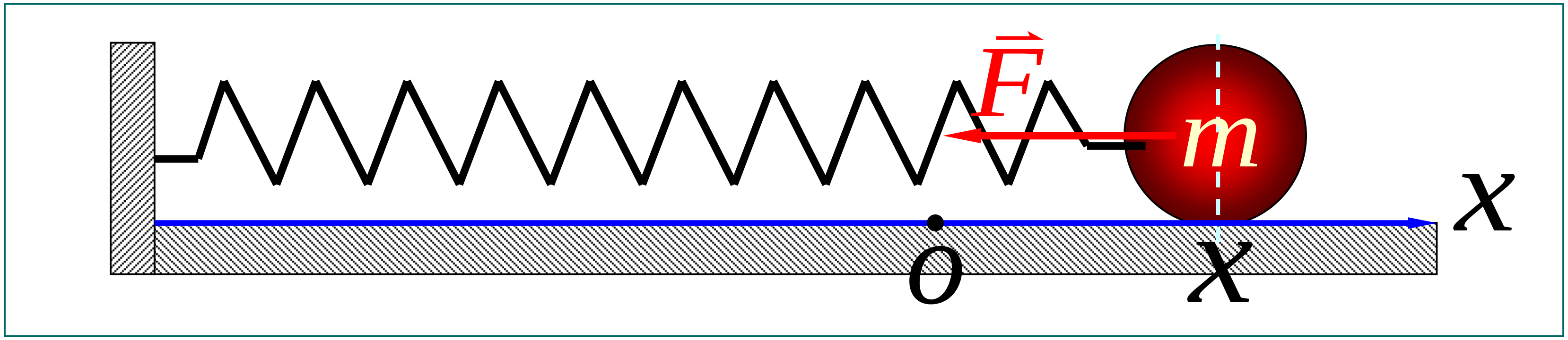

受力: $f=-kx$

$$-kx=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0}$$

——动力学方程

# 二、简谐振动的动力学分析及三种形式




受力分析 $\boxed{F = -kx = ma}$　　令 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

可得 $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x}$$ （动力学方程）

解方程得运动方程 $$x = \boxed{A}\cos(\omega t + \boxed{\varphi})$$

积分常数，根据初始条件确定

## 三、简谐振动位移、速度、加速度方程

1、运动方程 $$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

2、速度方程 $$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

3、加速度方程 $$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

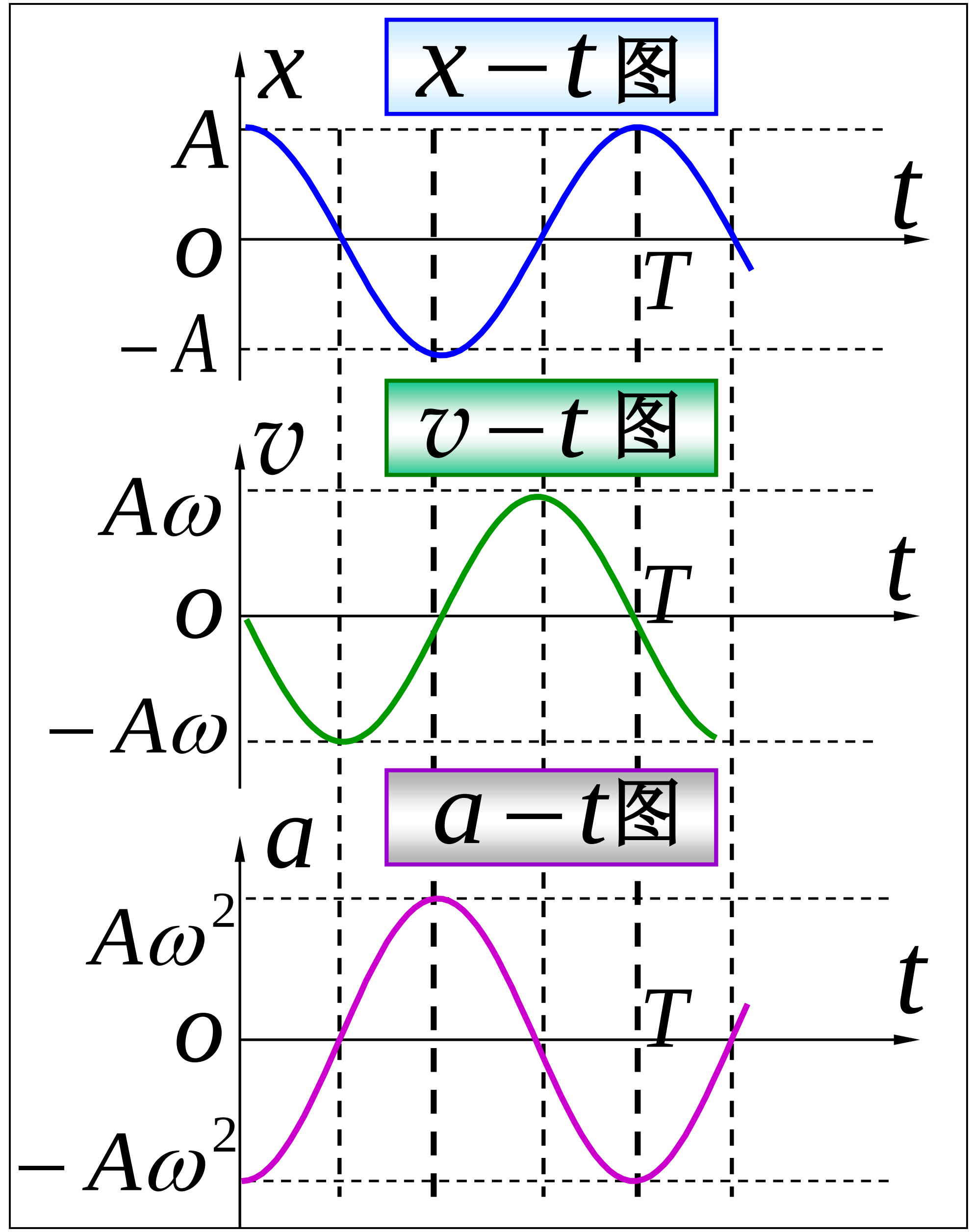
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ 取 $$\varphi = 0$$

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

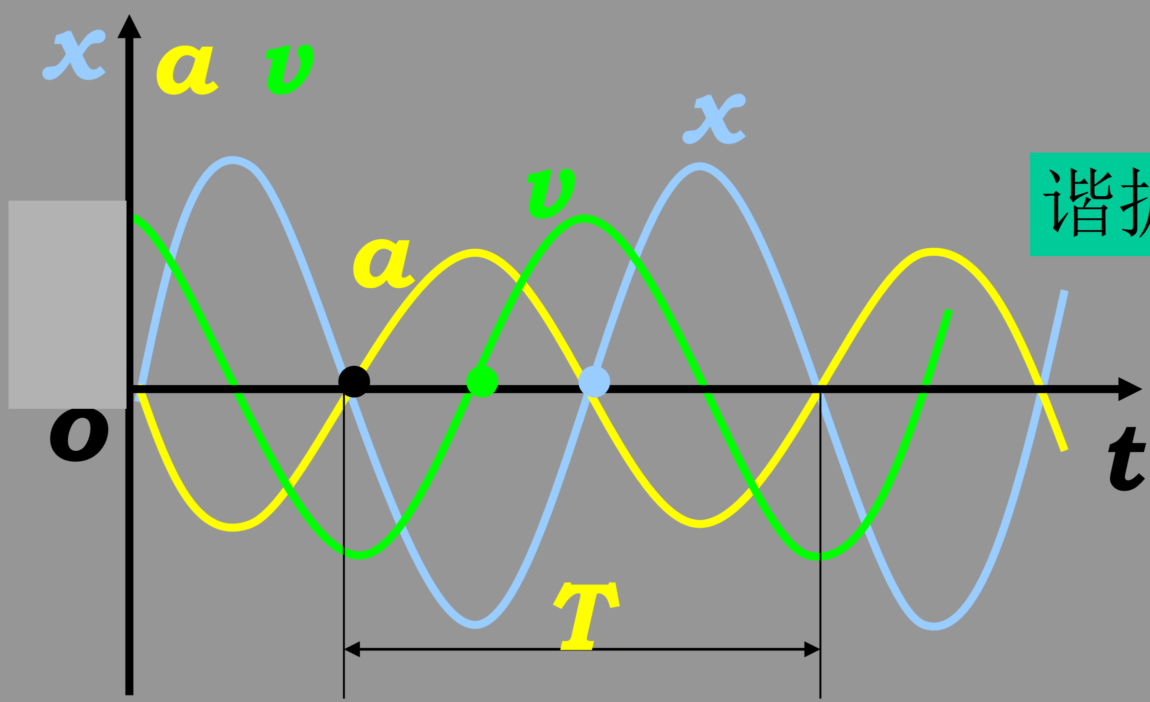


# 谐振动的位移、速度及加速度位相关系

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$\boxed{v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi) = \omega A\cos(\omega t+\varphi+\pi/2)}$$

$$\boxed{a = -\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t+\varphi+\pi)}$$




谐振动：$v$比$x$超前$\pi/2$

$a$比$v$超前$\pi/2$

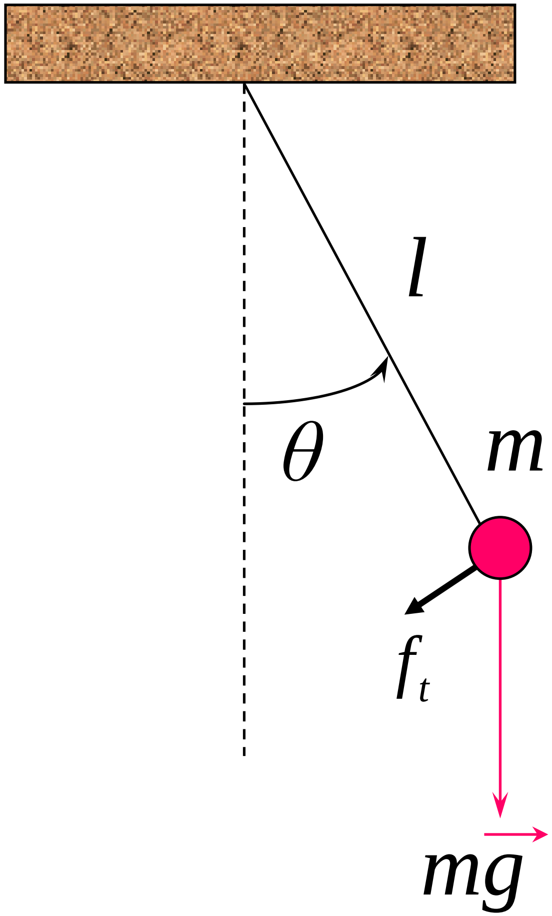
$a$与$x$反相

# 四、单摆（数学摆）

不可伸长的轻质细线下悬挂一质点，在平衡位置附近 (θ<5 °的) 小角摆动的装置。

$$f_t = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

$$= ma_t = ml\alpha = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$




$$\boxed{\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

-----动力学方程

# 五、复摆（物理摆）

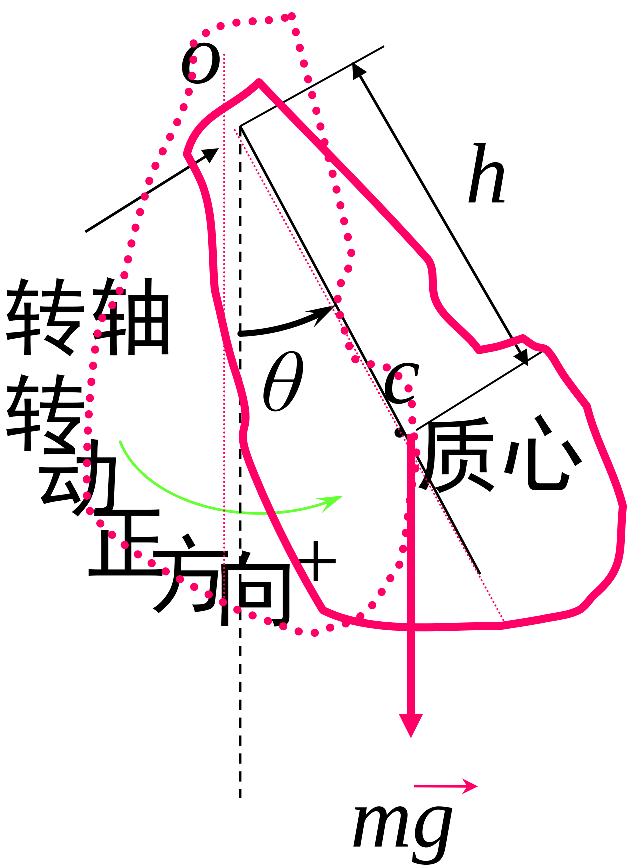
一个可绕水平固定轴自由小角摆动的刚体装置。

$$M = -mgh\sin\theta \approx -mgh\theta$$

$$= J\alpha = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{J_0}\theta = 0$$

-----动力学方程



# 六、简谐振动的运动学、动力学基本特征

$\boxed{f=-kx}$ $\boxed{f=-mg\theta}$ $\boxed{M=-mgh\theta}$

线性恢复力(矩)：具有大小与(相对于平衡位置)位移成正比，方向始终指向平衡位置性质的力(矩)

谐振动共同特征：物体在线性恢复力(矩)作用下的运动

弹簧振子 $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$

单　　摆 $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$

复　摆 $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgh}{J}\theta=0$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0}$$

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

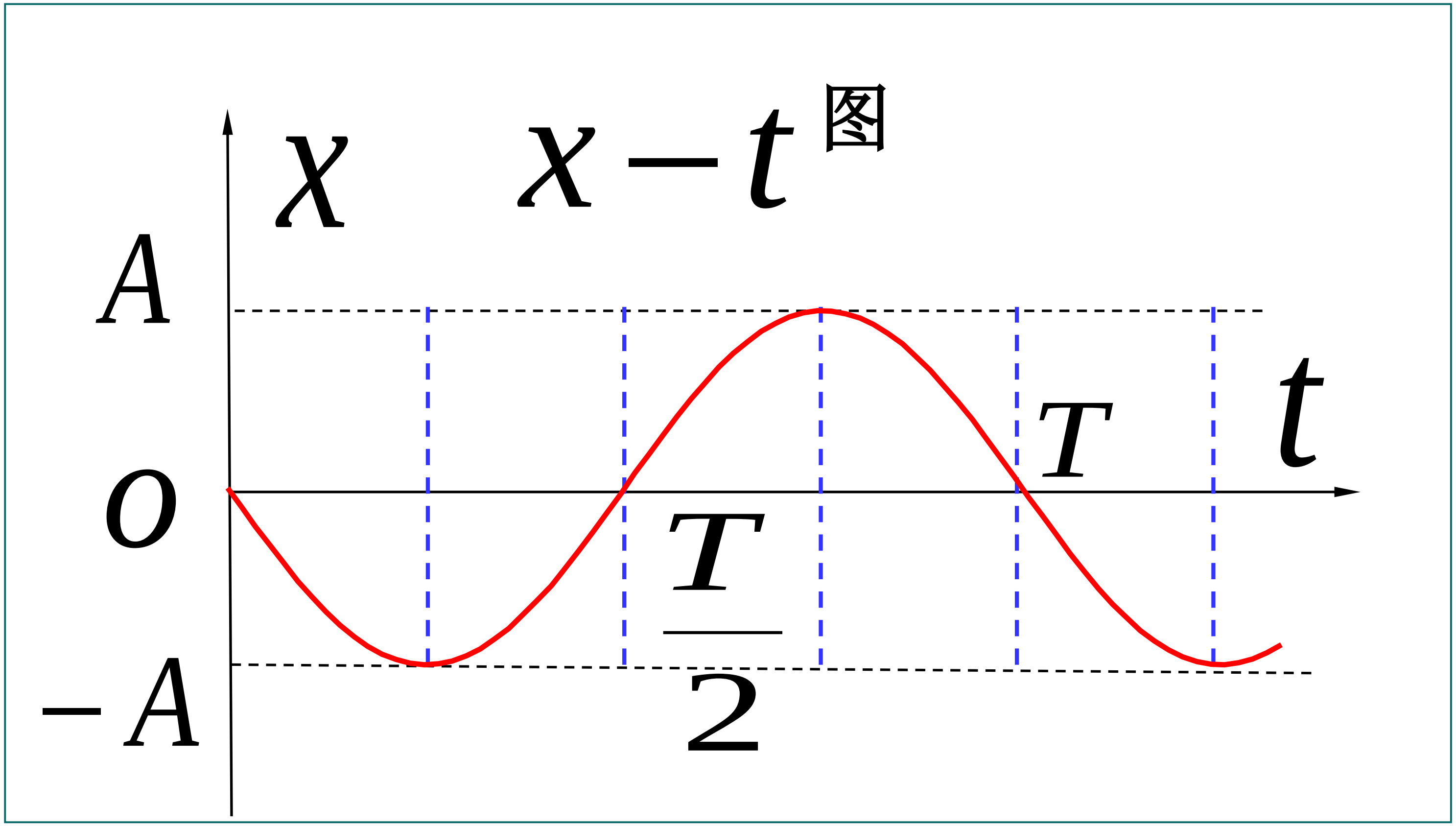
$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}}$

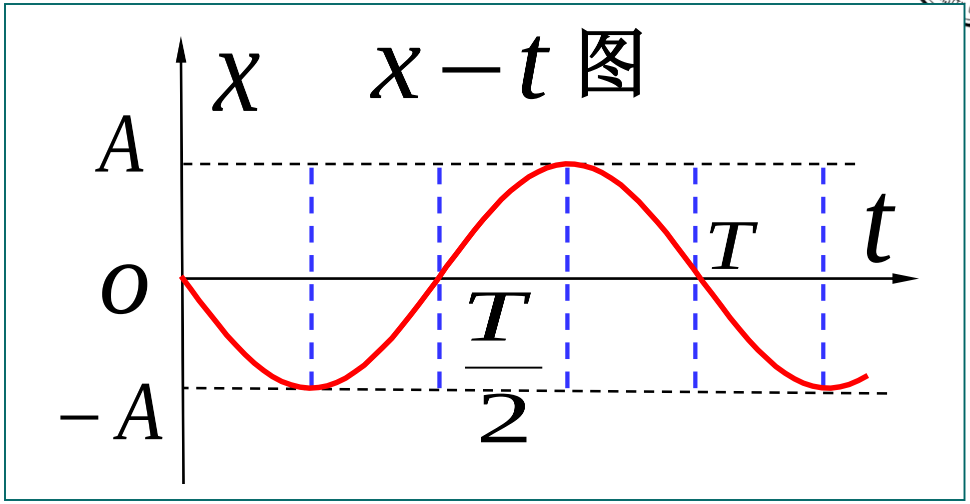
角频率只与系统本身有关

# §4. 2 简谐振动中的振幅、周期、频率和相位

运动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$



## 一 振幅 $\boxed{A=|x_{max}|}$




表示振动的强弱（范围），由初始条件确定。

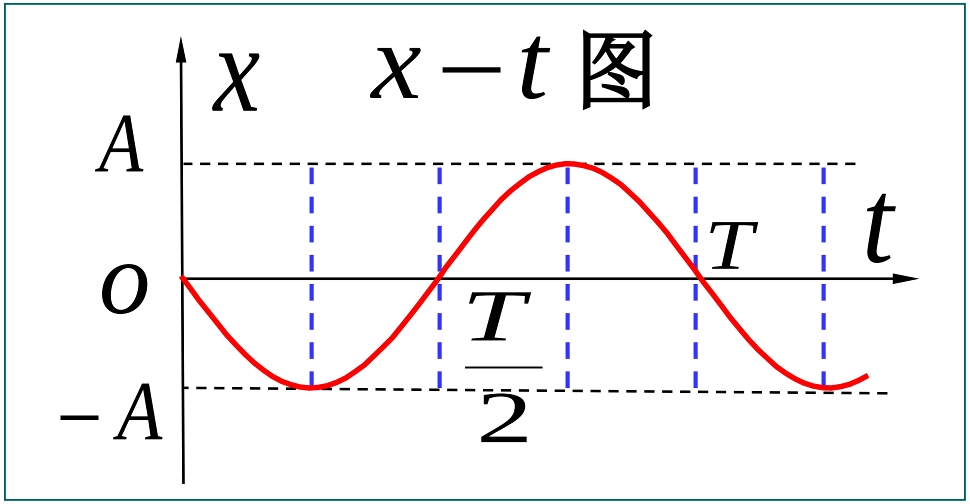
## 二 周期、频率

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)\boxed{=A\cos[\omega(t+T)+\varphi]}$$

1、角频率 $\boxed{\omega}$

2、周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$

3、频率 $\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$



注意

角频率、周期和频率仅与振动系统本身的物理性质有关，与初始条件无关。

弹簧振子：$\omega = \sqrt{k/m}$ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$

三 相位 $\boxed{\omega t + \varphi}$ （描述振动状态的物理量）

1）$\omega t + \varphi \rightarrow (x, v)$ 存在一一对应的关系;

$$\begin{cases} \boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)} \\ \boxed{v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

例：当 $\boxed{\omega t + \varphi = \dfrac{\pi}{3}}$ 时：$x = \dfrac{A}{2}$, $\boxed{v = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}A\omega}$

质点在$x = A/2$处以速率$v$向$-x$方向运动

当 $\boxed{\omega t + \varphi = \dfrac{5}{3}\pi}$ 时：$x = \dfrac{A}{2}$, $\boxed{v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A\omega}$

质点在$x = A/2$处以速率$v$向$+x$方向运动

2）相位在 $0\sim2\pi$ 内变化，质点无相同的运动状态；

相差 $2n\pi$ ($n$为整数)质点运动状态全同.（周期性）

3）初相位 $\boxed{\varphi_0\ (t=0)}$ 描述质点初始时刻的运动状态。

由初始条件决定

$\varphi$(取 $[-\pi\rightarrow\pi]$或 $[0\rightarrow2\pi]$)

## 四 常数$A$和$\varphi$的确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

初始条件 $t=0 \quad x=x_0 \quad v=v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定.

**讨论**

已知$t=0, x=0, v<0$求$\varphi$

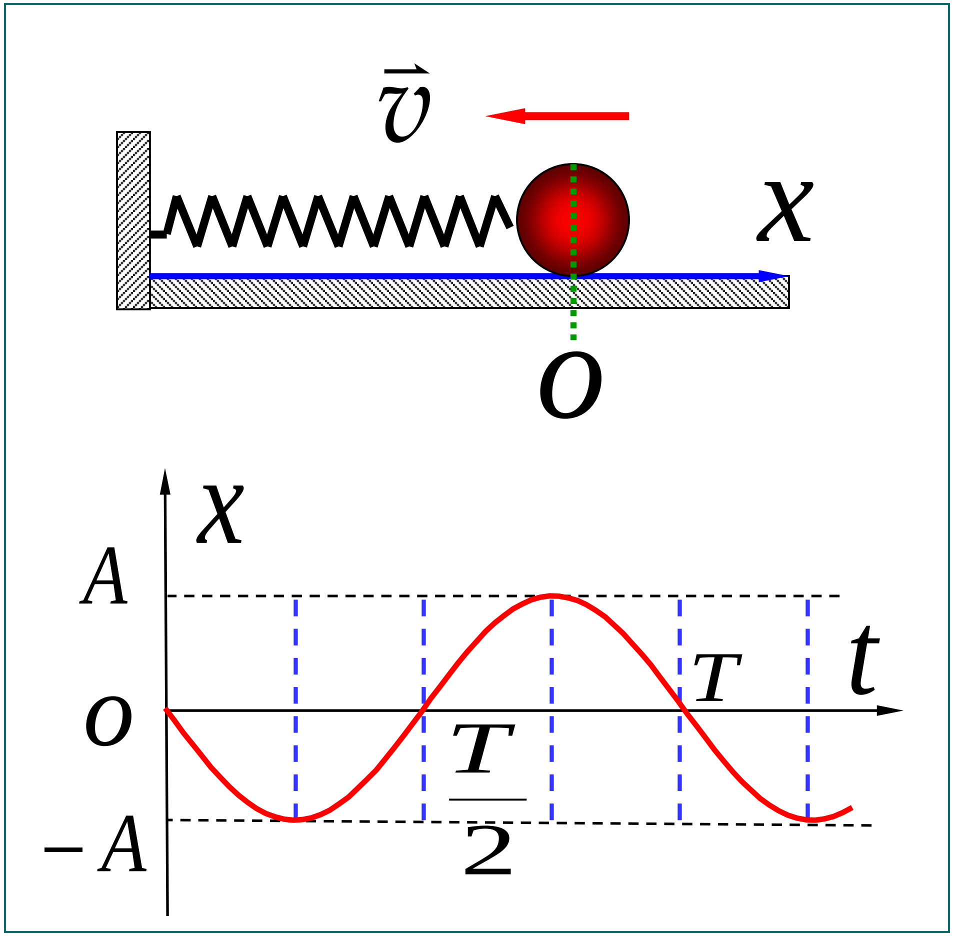
$$0=A\cos\varphi$$

$$\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$$

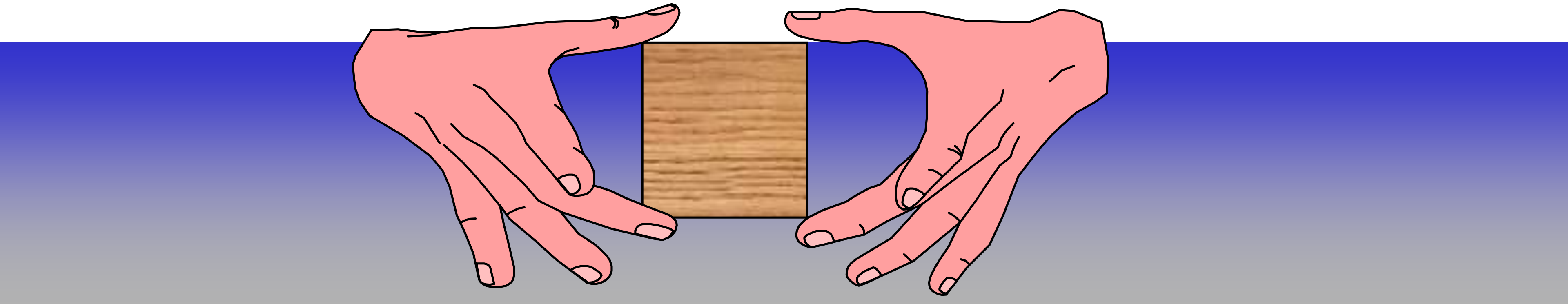
$$\because v_0=-A\omega\sin\varphi<0$$

$\therefore \sin\varphi>0$ 取 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

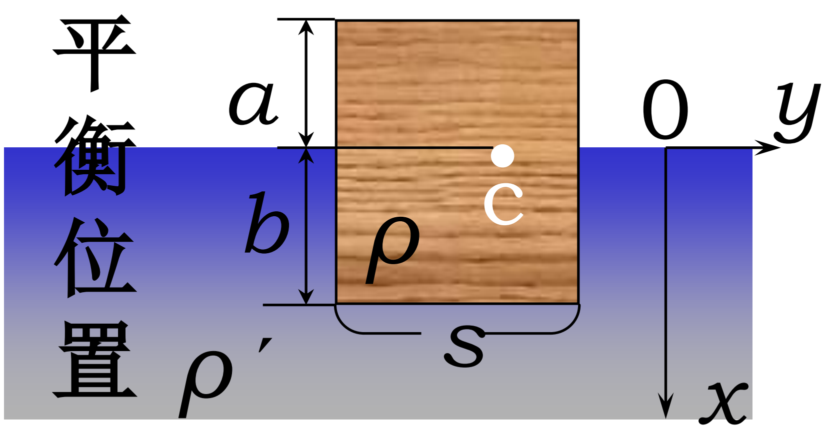
$$x=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

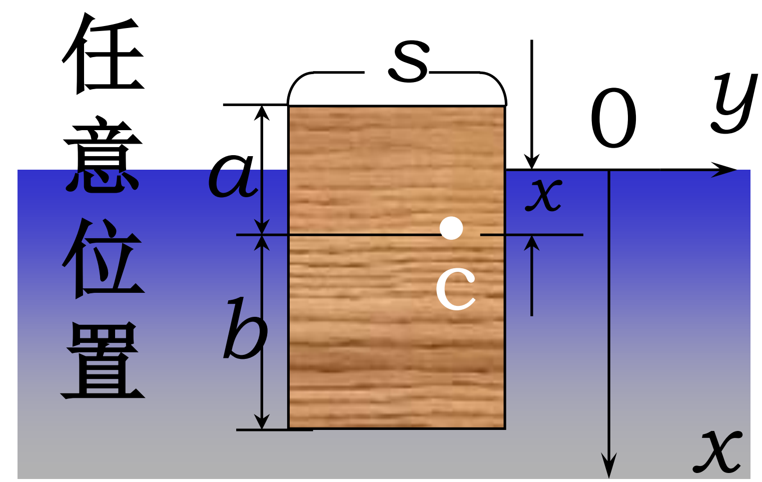


【例 1】水面上浮有一方形木块，静止时水面以上高度为 $a$，以下高度为 $b$。水密度为 $\rho'$，木块密度为$\rho$，不计水的阻力。现用外力将木块压入水中，使木块上表面与水面平齐。求证：放手后木块将作谐振动，并写出谐振动方程。



解：(1). 确定平衡位置　　平衡时$(a+b)s\rho g-bs\rho' g=0$




(2). 任意位置木块受力分析：$\sum F=(a+b)s\rho g-(b+x)s\rho' g=-s\rho' gx$

——线性恢复力　所以木块作谐振动: x = A cos (ωt+φ)

由牛顿定律: $-s\rho' g x=(a+b)s\rho\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\rho' g}{(a+b)\rho}x=0$$

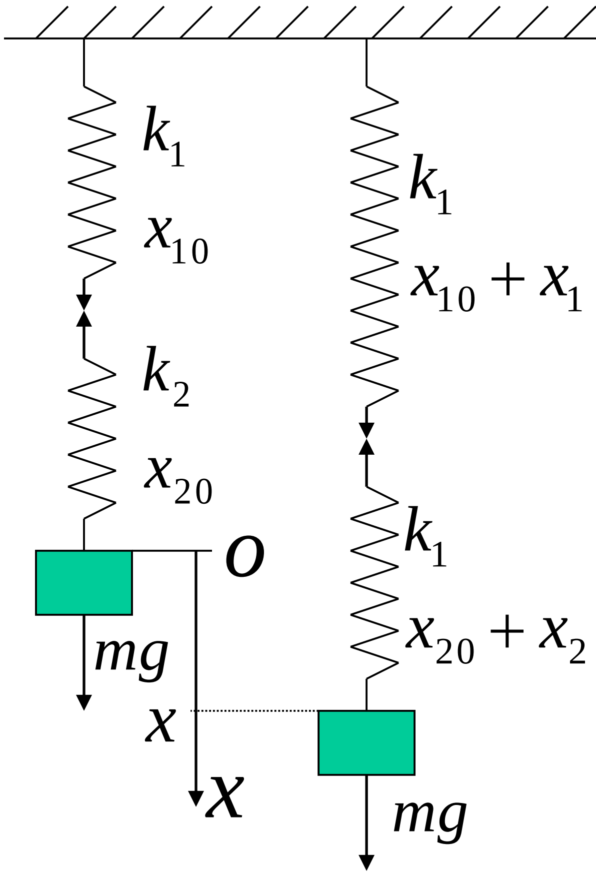
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{\rho' g}{(a+b)\rho}}$$

$$\because t=0\begin{cases} x_0=a \\ v_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+v_0^2/\omega^2}=a \\ \varphi=tg^{-1}(-v_0/\omega\, x_0)=0,\pi \end{cases}$$

$(\because x_0=A\cos\varphi>0 \therefore \pi$舍去）

$$\therefore x=a\cos\sqrt{\rho' g/[(a+b)\rho]}\,t$$

【例 2】竖直悬挂的两个串联的轻弹簧振子,物块质量m,两个弹簧的弹性系数$k_1$和$k_2$，问是否简谐振动，如是，圆频率是多少？




证明： 平衡位置处

$$mg = k_1 x_{10} = k_2 x_{20} \cdots\cdots(1)$$

$$x = x_1 + x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$k_1(x_{10}+x_1) = k_2(x_{20}+x_2)\cdots(3)$$

由（1）（3）得：$k_1 x_1 = k_2 x_2 \cdots(4)$

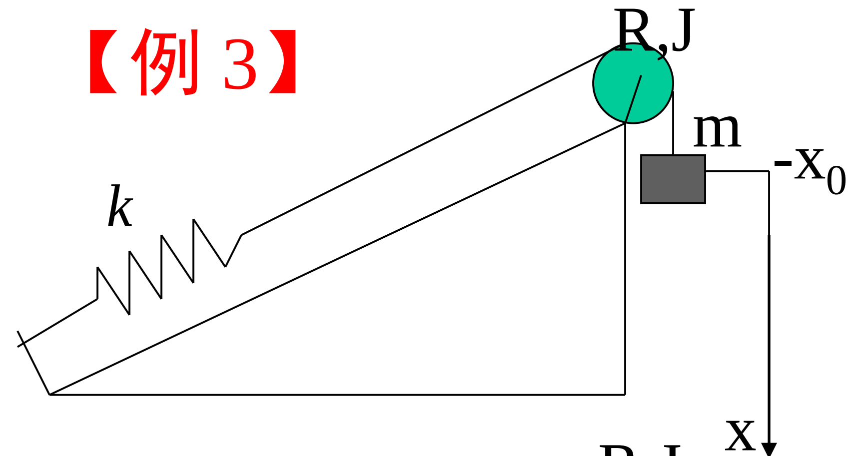
由（2）（4）得：$x_2 = \dfrac{k_1}{k_1+k_2}x$

$\{m\}$：$F_{合} = mg - k_2(x_{20}+x_2) = -k_2 x_2$

$$F_{合} = -\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}x = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \therefore K = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$$

是简谐振动，圆频率为：$\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = \sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{m(k_1+k_2)}}$

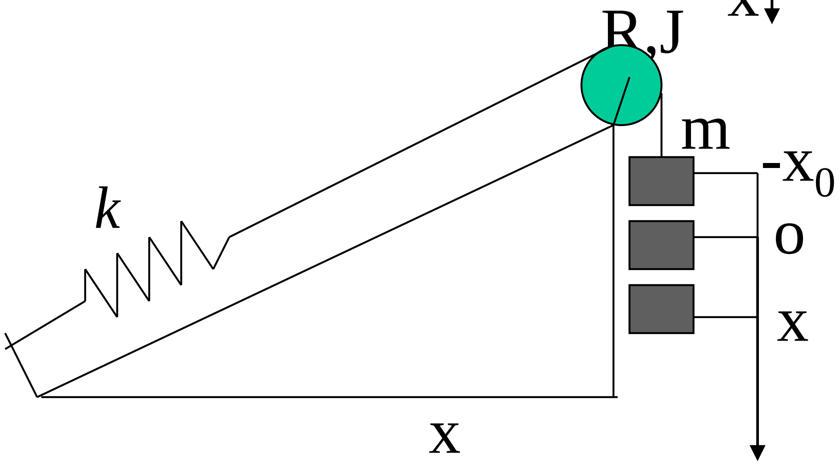
【例 3】




已知：初态时弹簧处于原长

（1）．证明物块作谐振动，

（2） 写出振动表达式。




解:（1）. 确定平衡位置

$$mg = kx_0$$

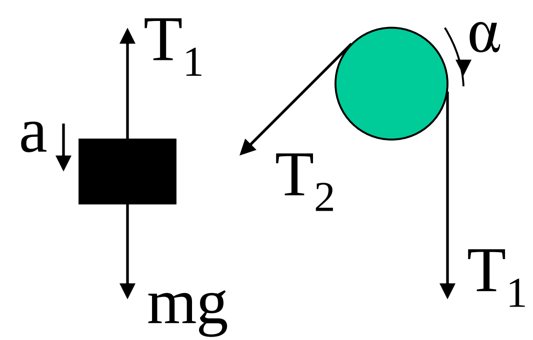
$$\Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k} \cdots\cdots(1)$$

（2）. 写出任意位置处物块的加速度

$$mg - T_1 = ma \cdots\cdots(2)$$

$$(T_1 - T_2)R = J\alpha = J\frac{a}{R} \cdots(3)$$

$$T_2 = k(x_1 + x_2) \cdots\cdots(4)$$

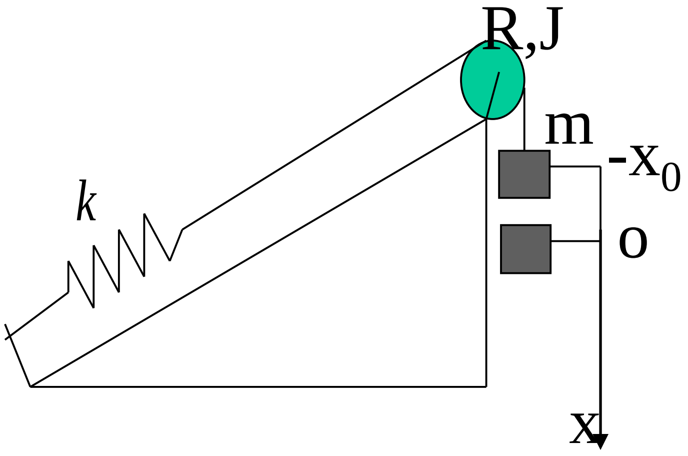


$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{matrix}\right\} \Rightarrow a = -\frac{kR^2}{J+mR^2}x \quad \text{——谐振动}$$

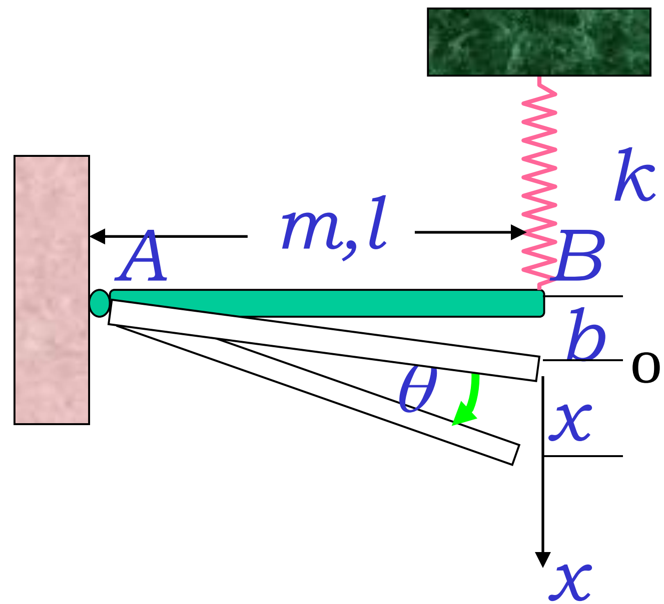
$$\left.\begin{matrix} a = -\dfrac{kR^2}{J+mR^2}x \\ a = -\omega^2 x \end{matrix}\right\} \omega = R\sqrt{\frac{k}{J+mR^2}}$$

$$*\text{初态为}t = 0\begin{cases} x_0 = -{mg}/{k} \\ v_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = {mg}/{k} \\ \varphi = \pi \end{cases}$$

$$x = \frac{mg}{k}\cos(R\sqrt{\frac{k}{J+mR^2}}t + \pi)$$

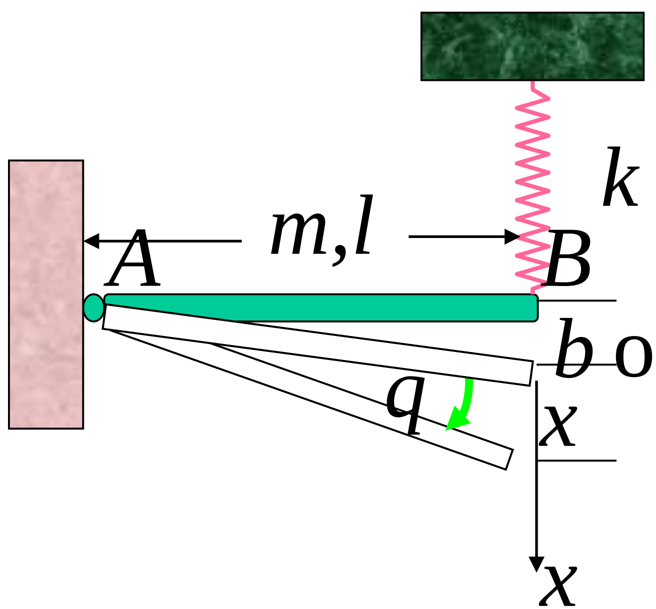


【例 4】$m, l$ 均质细杆$AB$可绕水平轴 $A$ 旋转,其 $B$ 端固定一轻质弹簧 $k$, 弹簧另一端固定于天花板.开始时,将 $B$ 端抬起使弹簧无变形,然后从静止释放. 求证:细杆作简谐振动,并求振动周期及谐振方程




解：静平衡时 $-kbl + mgl/2 = 0$

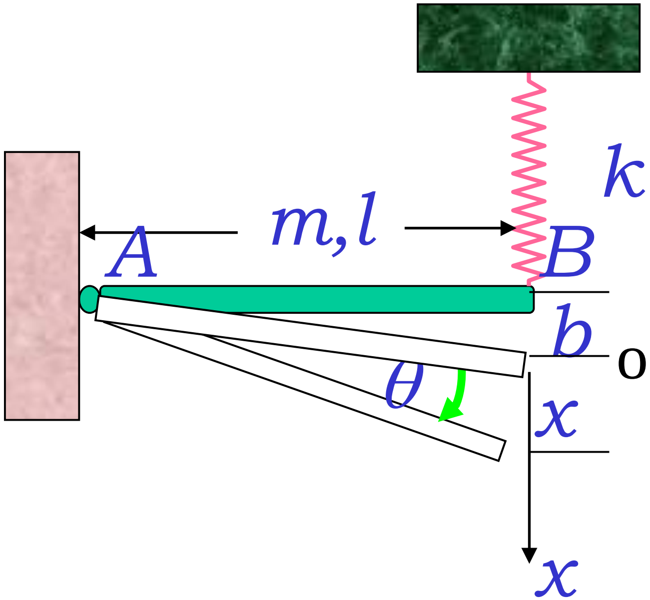
任意位置 $mg\dfrac{l}{2} - k(x+b)l = J\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$



$$\Rightarrow -kl(l\theta) = (\frac{1}{3}ml^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{固} = \sqrt{3k/m}$$ ——谐振动




$$\because t = 0 \begin{cases} \theta_0 = -b/l \\ \Omega_0 = 0 \end{cases}$$

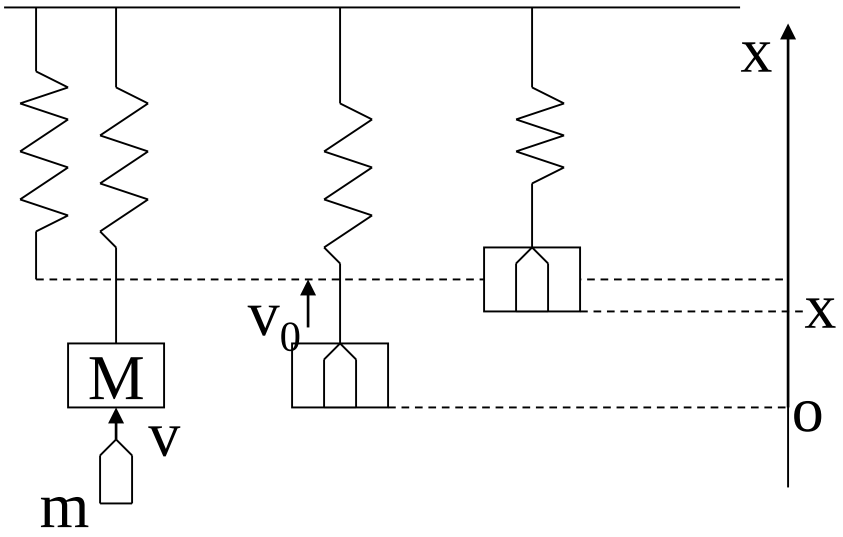
$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_m = \sqrt{\theta_0^2 + \Omega_0^2/\omega_{固}^2} = |\theta_0| \\ \varphi = tg^{-1}(\frac{-\Omega_0}{\omega_{固}\theta_0}) = 0, \pi \end{cases}$$

$$\because \begin{cases} \theta_0 = \theta_m \cos\varphi \quad < 0 \\ \Omega_0 = -\omega_{固}\theta_m \sin\varphi = 0 \end{cases}$$ （∴j=0舍去）

$$\therefore \theta = (b/l)\cos[\sqrt{3k/m}\,t + \pi]$$

【例 5】弹簧振子（M，k）竖直悬挂，处于平衡，子弹（m）以速度 v 由下而上射入物块并嵌入其内。求：(1). 物块振动的 T 和 A; (2). 物块从开始运动到最远处所需的时间。

解：(1). x 处物块动力学方程

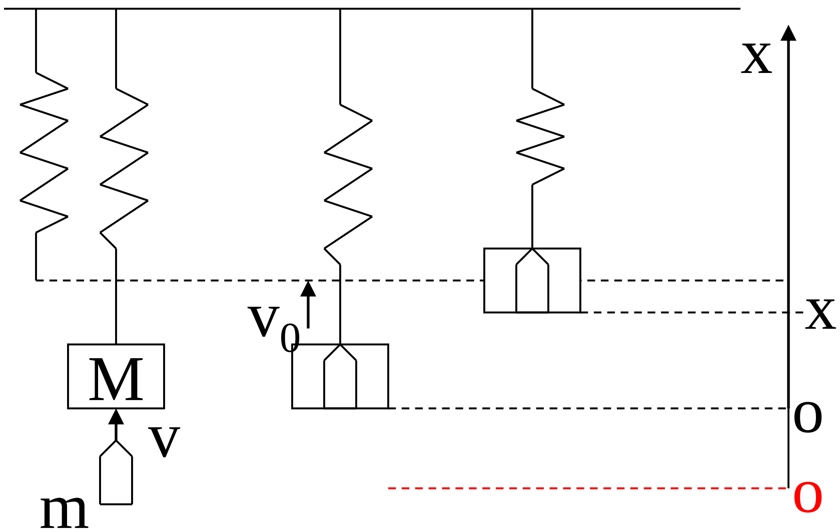



$$(m+M)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$=-(m+M)g+k(\frac{Mg}{k}-x)$$

$$=-mg-kx$$

正确解：

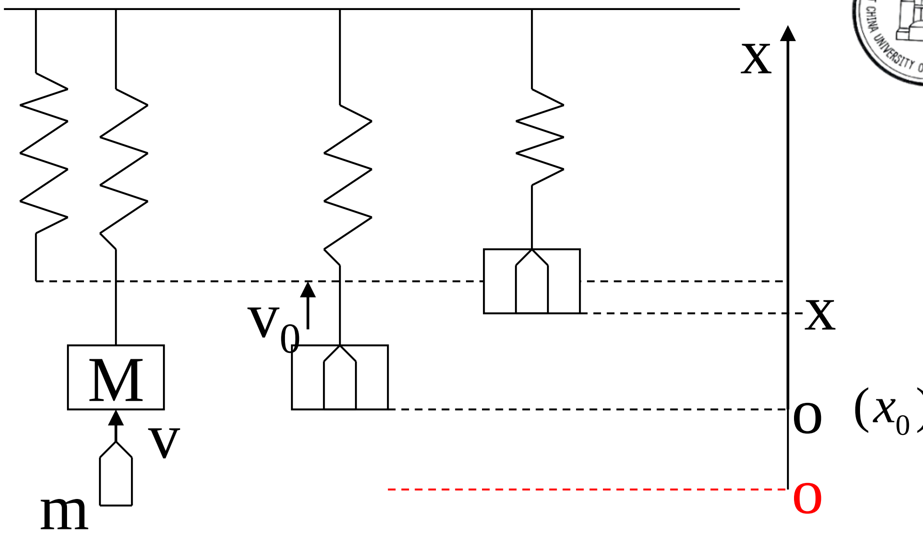



$$(m+M)\frac{d^2x}{dt^2}=-(m+M)g+k\left[\frac{(m+M)g}{k}-x\right]=-kx$$

$$\therefore \omega=\sqrt{\frac{k}{m+M}} \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

$$*\text{初态为}t=0\begin{cases}x_0=mg/k\\ v_0=\dfrac{mv}{m+M}\end{cases}$$

可由动量守恒得




$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

$$A=\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{kv_0{}^2}{(m+M)g^2}}$$

(2). $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$*\text{初态为}t=0\begin{cases}x_0=mg/k\\ v_0=\dfrac{mv}{m+M}\end{cases}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

最远点：$x=A$，

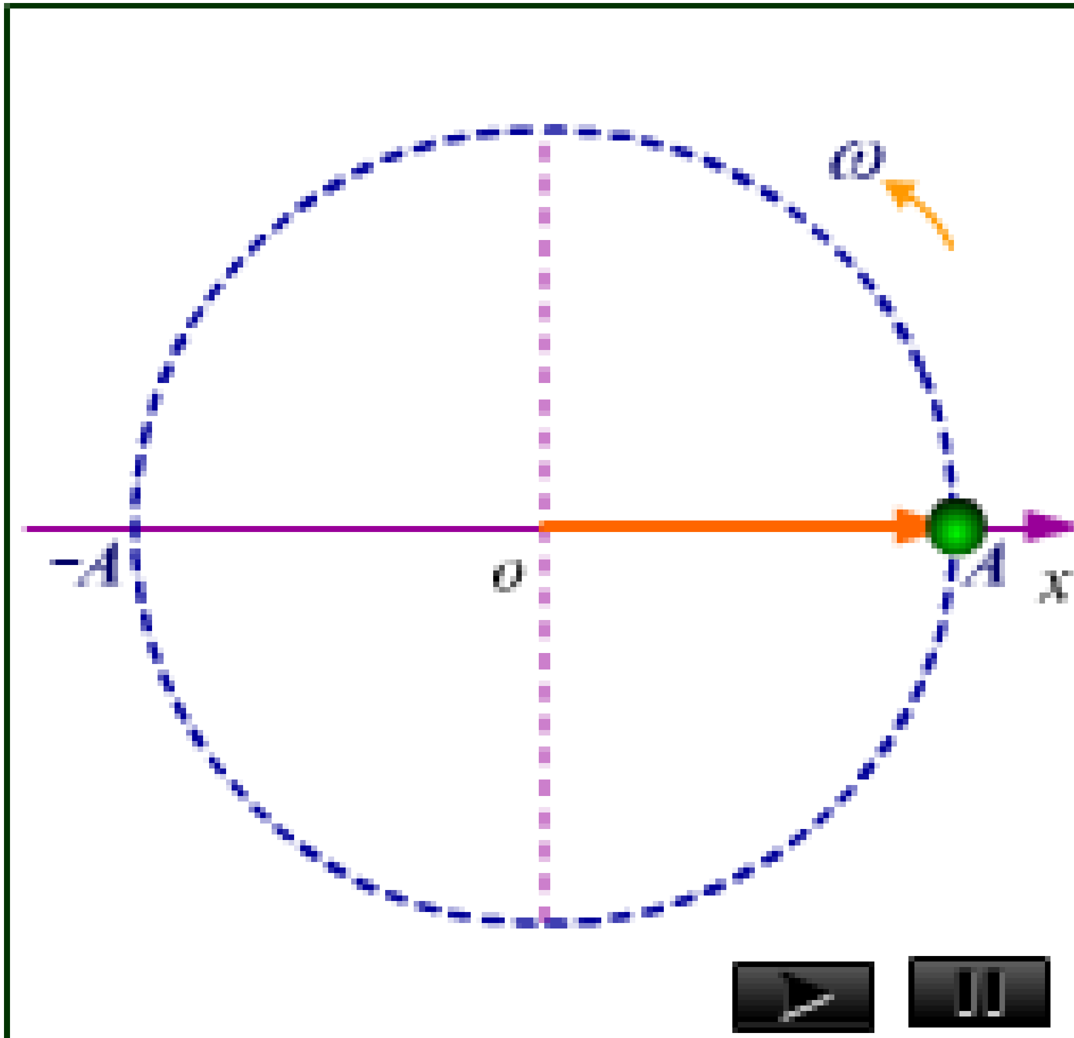
即 $\omega t+\varphi=0\Rightarrow t=-\dfrac{\varphi}{\omega}$

$$\because\varphi=tg^{-1}\left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)=-tg^{-1}\left(\frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{k}{m+m}}\right)\qquad\therefore t=\sqrt{\frac{m+M}{k}}tg^{-1}\left(\frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{k}{m+m}}\right)$$

# §4.3 简谐振动的旋转矢量表示

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量$\vec{A}$的端点在$X$轴上的投影点的运动为简谐运动.



## 谐振动的旋转矢量表示法

### （1）旋转矢量的特性与各物理量的对应关系

① $\vec{A}$ 的长度：振幅 $A$

② $\vec{A}$ 的旋转角速度：圆频率 $\omega$

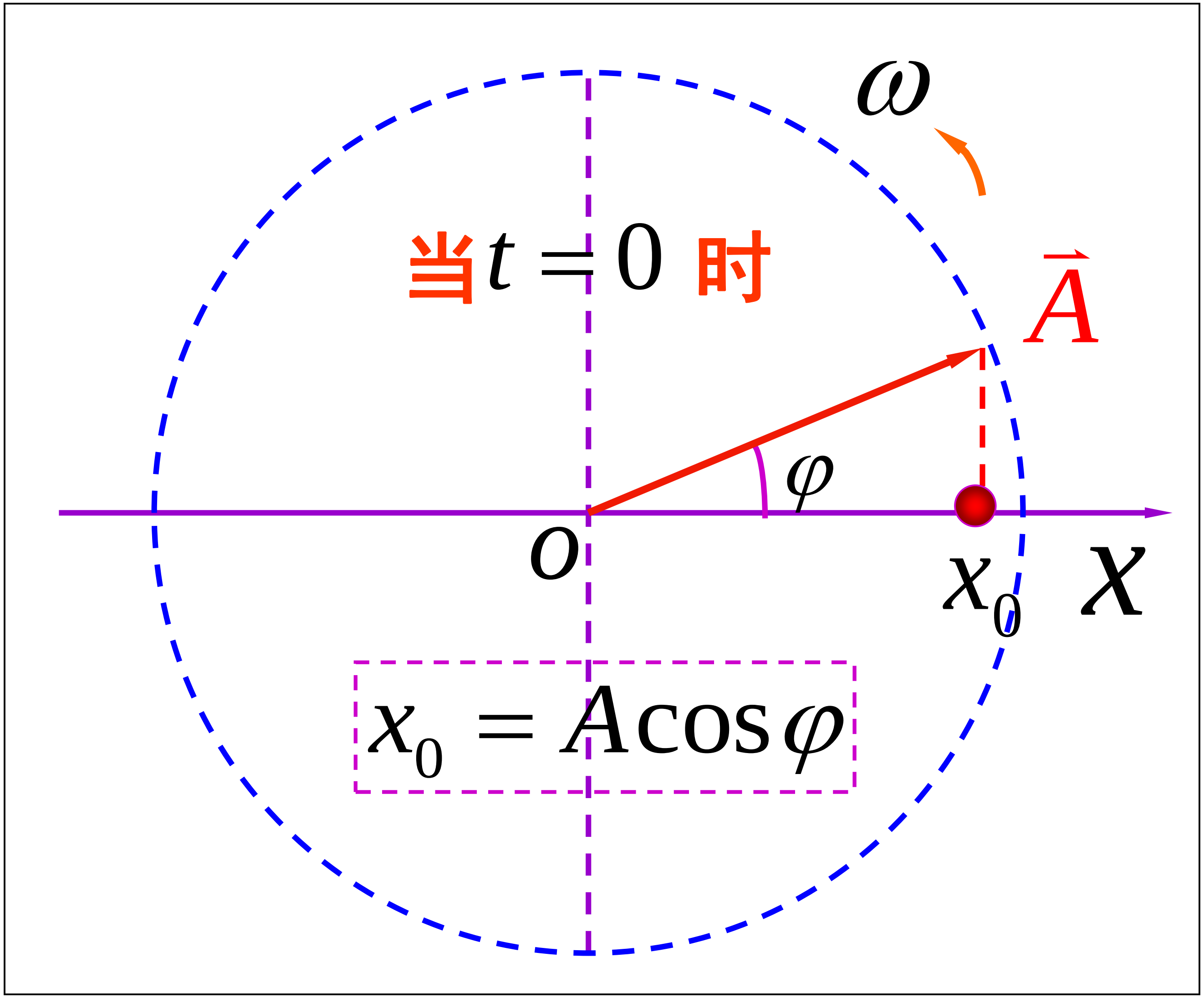
③ $\vec{A}$ 的旋转的方向：逆时针向

④ 旋转矢量 $\vec{A}$ 与参考方向 x 的夹角：相位 $\omega t+\varphi$

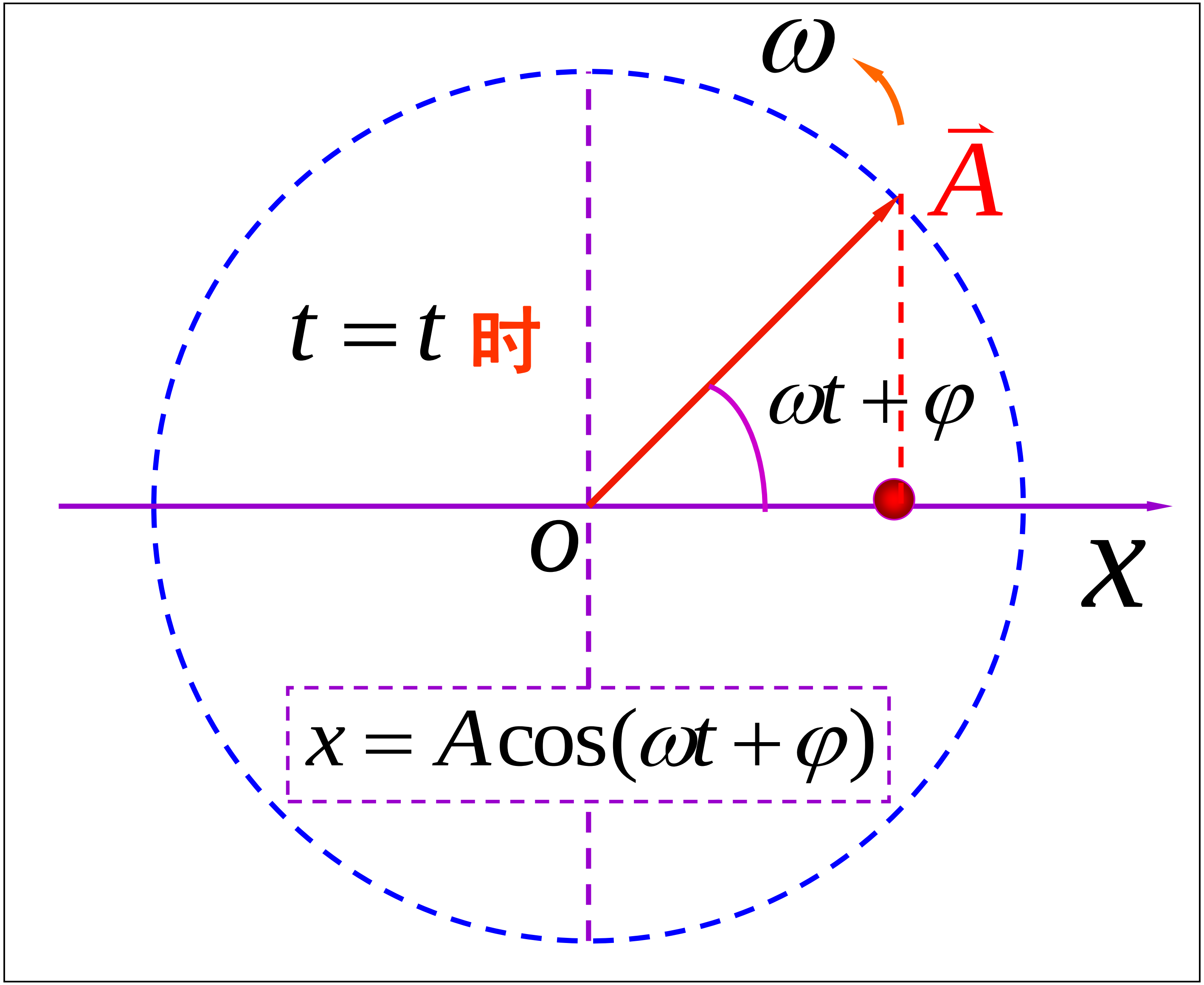
⑤ $t=0$ 时旋转矢量 $\vec{A}$ 与参考方向 x 的夹角：初相位 $\varphi$

⑥ M 点在x 轴上投影点P 的运动规律：

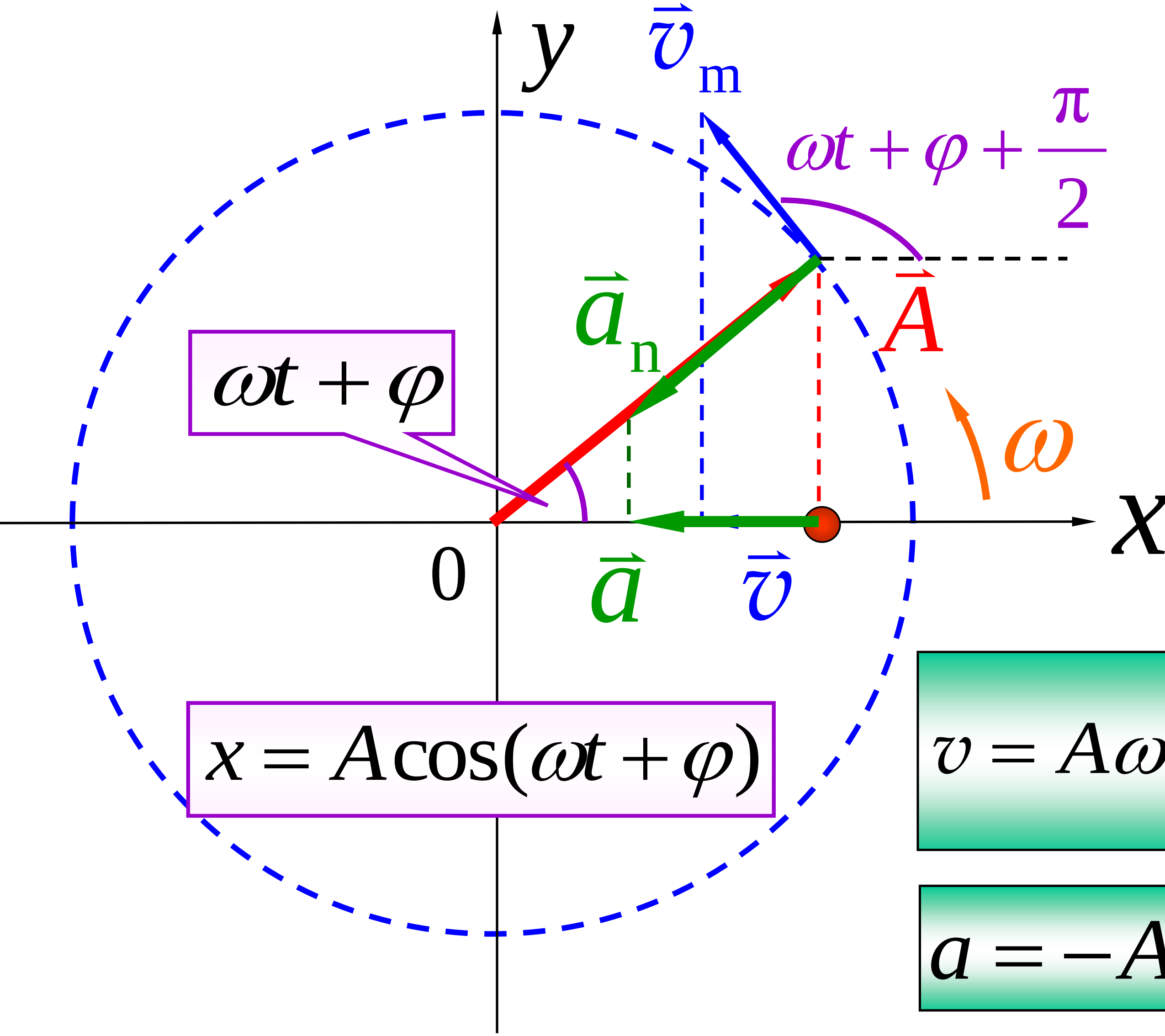
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$




以 $O$ 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 $X$ 轴上的投影点的运动为简谐运动.




以 $O$为原点旋转矢量$\vec{A}$的端点在$X$轴上的投影点的运动为简谐运动.




$$v_{\mathrm{m}}=A\omega$$

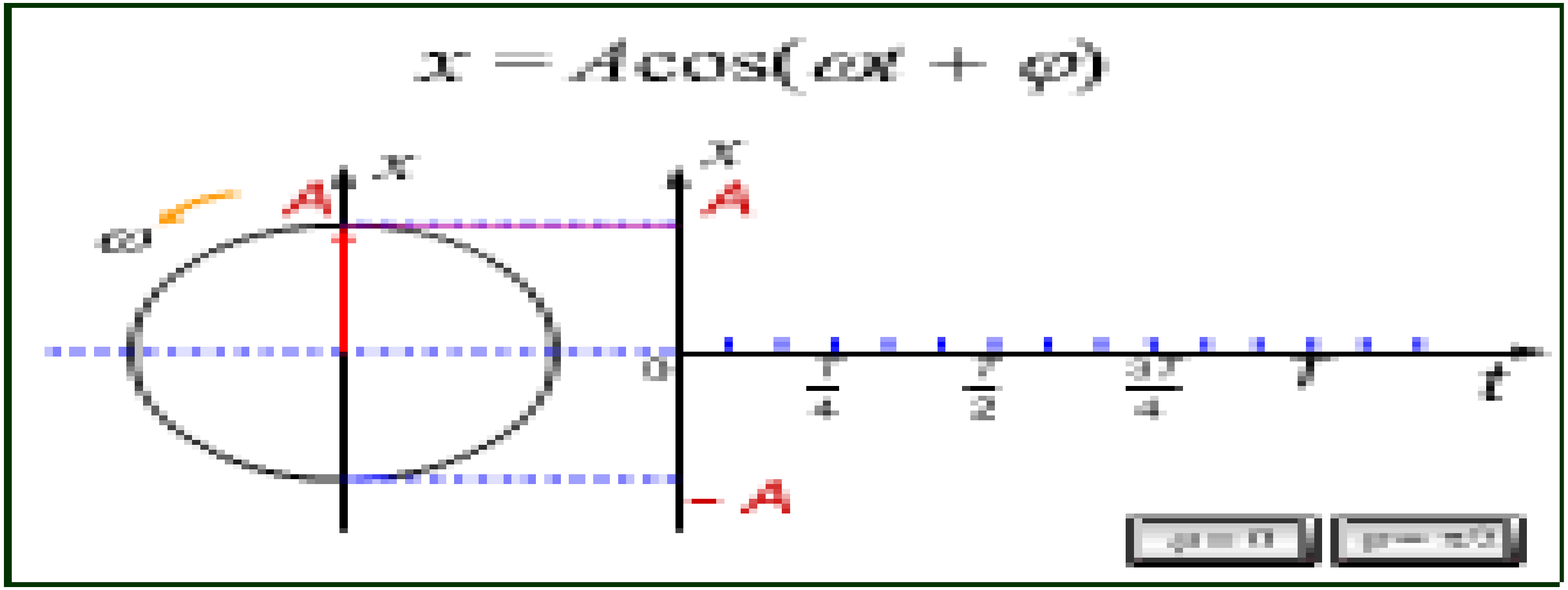
$$a_{\mathrm{n}}=A\omega^2$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v=A\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

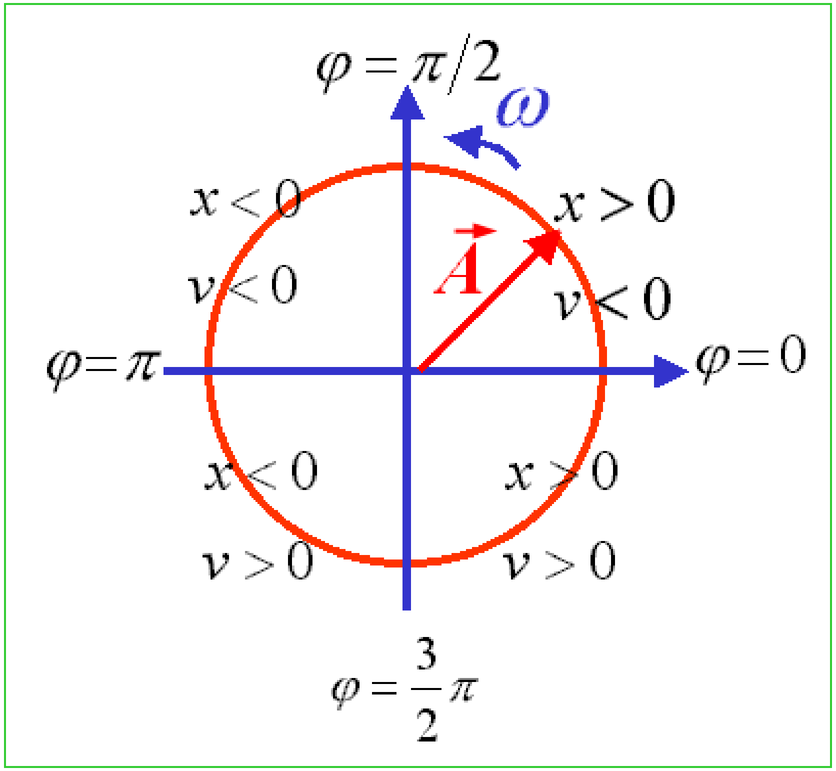
# 用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图

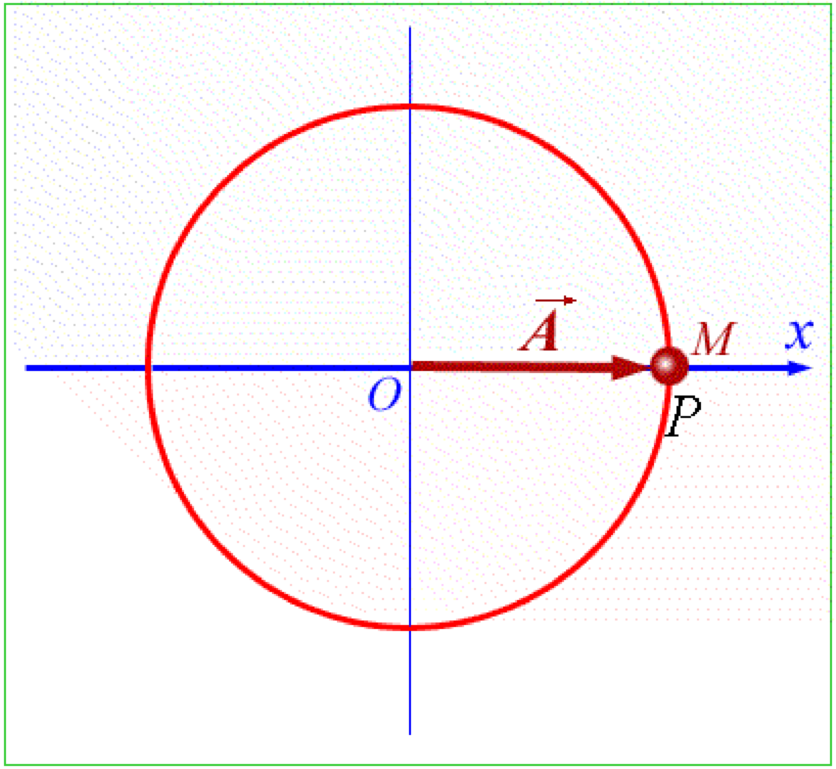



$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

旋转矢量法优点：
- 直观地表达谐振动的各特征量
- 便于解题，特别是确定初相位
- 便于振动合成

由$x$、$v$的符号确定$\vec{A}$所在的象限：



# 旋转矢量 $\vec{A}$ 与谐振动的对应关系

| 旋转矢量 $\vec{A}$ | 简谐振动 | 符号或表达式 |
|---|---|---|
| 模 | 振幅 | $A$ |
| 角速度 | 角频率 | $\omega$ |
| $t=0$ 时，$\vec{A}$与$ox$夹角 | 初相 | $\varphi_0$ |
| 旋转周期 | 振动周期 | $T=2\pi/\omega$ |
| $t$ 时刻，$\vec{A}$ 与$ox$夹角 | 相位 | $\omega t+\varphi_0$ |
| $A$ 在 $ox$ 上的投影 | 位移 | $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ |
| $A$ 端点速度在 $ox$ 上的投影 | 速度 | $v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)$ |
| $A$ 端点加速度在 $ox$ 上的投影 | 加速度 | $a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi_0)$ |

讨论

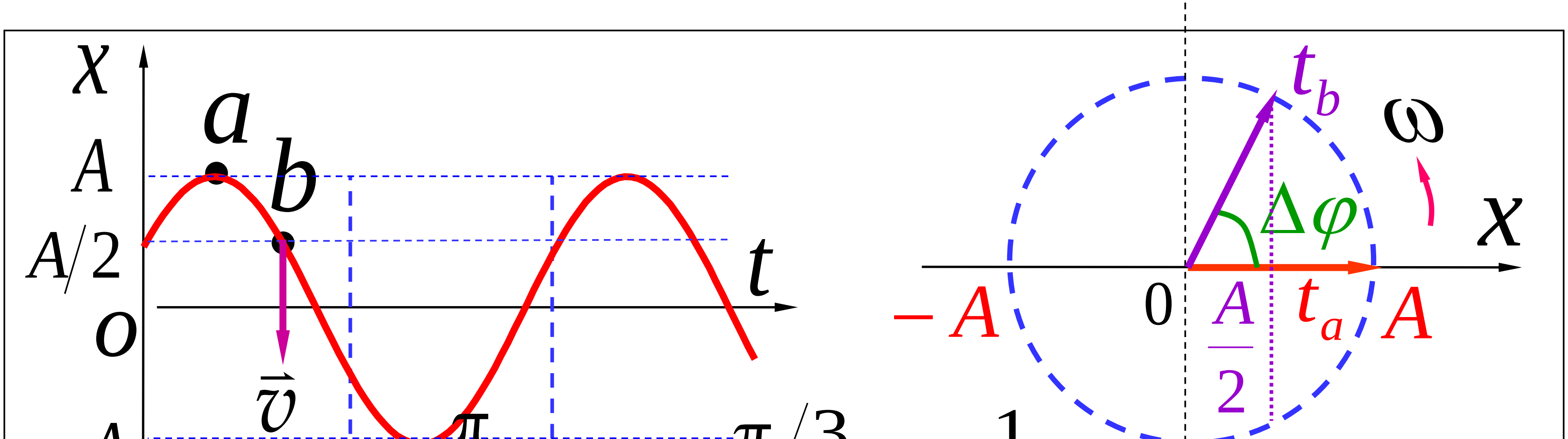
➢ 相位差：表示两个相位之差．

1）对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间．$\boxed{\Delta\varphi=(\omega t_2+\varphi)-(\omega t_1+\varphi)}$

$$x = A\cos(\omega t_1+\varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t_2+\varphi)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

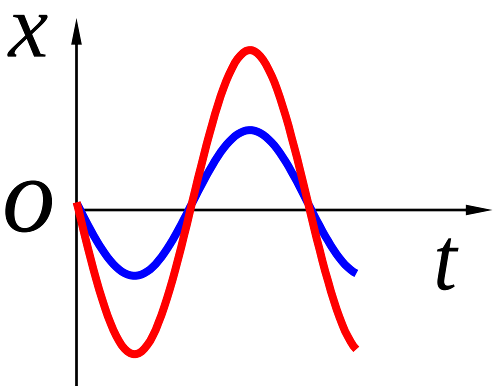
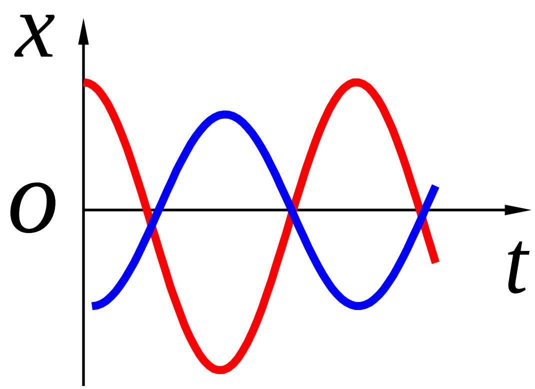
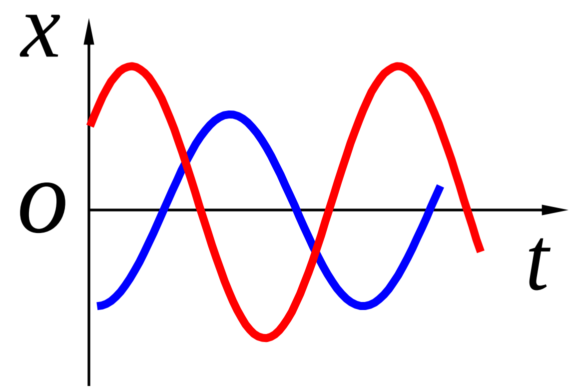



$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} \qquad \Delta t = \frac{\pi/3}{2\pi}T = \frac{1}{6}T$$

2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异.（解决振动合成问题）

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\boxed{\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)}\ \boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$$

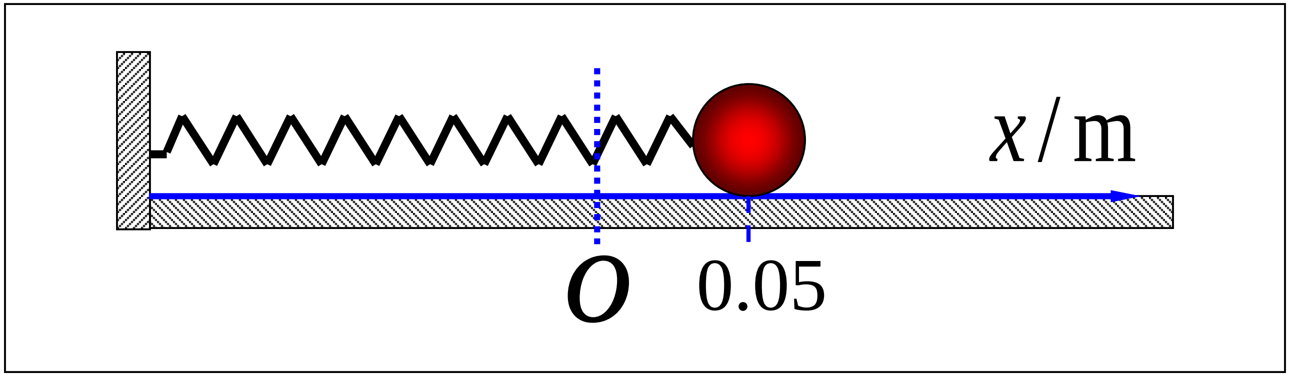
| | | |
|---|---|---|
| $\Delta\varphi = 0$ 同步 | $\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相 | $\Delta\varphi$ 为其它 $\begin{cases}\text{超前}\\ \text{落后}\end{cases}$ |
|  |  |  |

【例6】 如图所示，一轻弹簧的右端连着一物体，弹簧的劲度系数 $k=0.72\mathrm{N\cdot m^{-1}}$，物体的质量 $m=20\mathrm{g}$ .

（1）把物体从平衡位置向右拉到 $x=0.05\mathrm{m}$ 处停下后再释放，求简谐运动方程；

（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

（3）如果物体在 $x=0.05\mathrm{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0=0.30\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 求其运动方程.

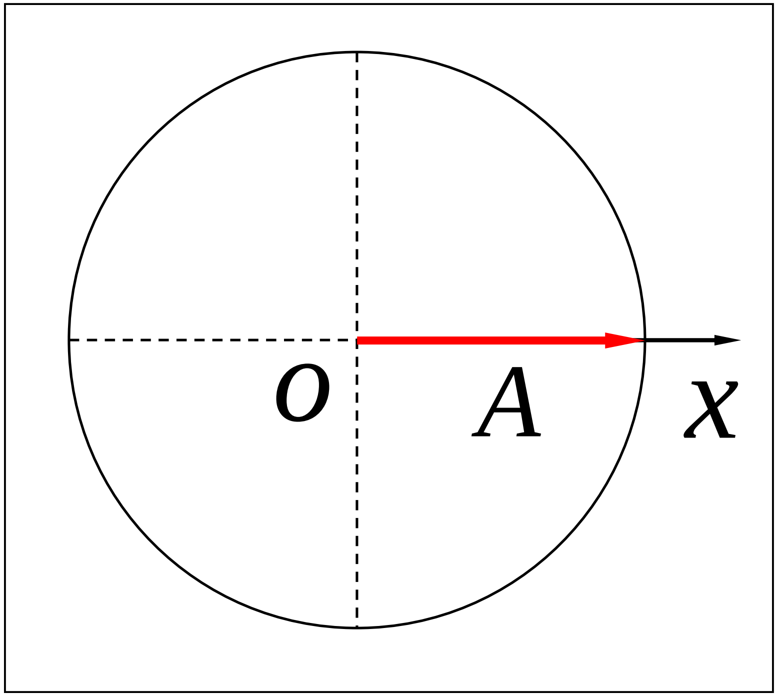


解（1） $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{0.72\mathrm{N\cdot m^{-1}}}{0.02\mathrm{kg}}}=6.0\mathrm{s^{-1}}$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=x_0=0.05\mathrm{m}$$

$$\tan\varphi=\frac{-v_0}{\omega x_0}=0$$

$$\varphi=0\ \text{或}\ \pi$$




由旋转矢量图可知 $\varphi=0$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=(0.05\mathrm{m})\cos[(6.0\mathrm{s^{-1}})t]$$

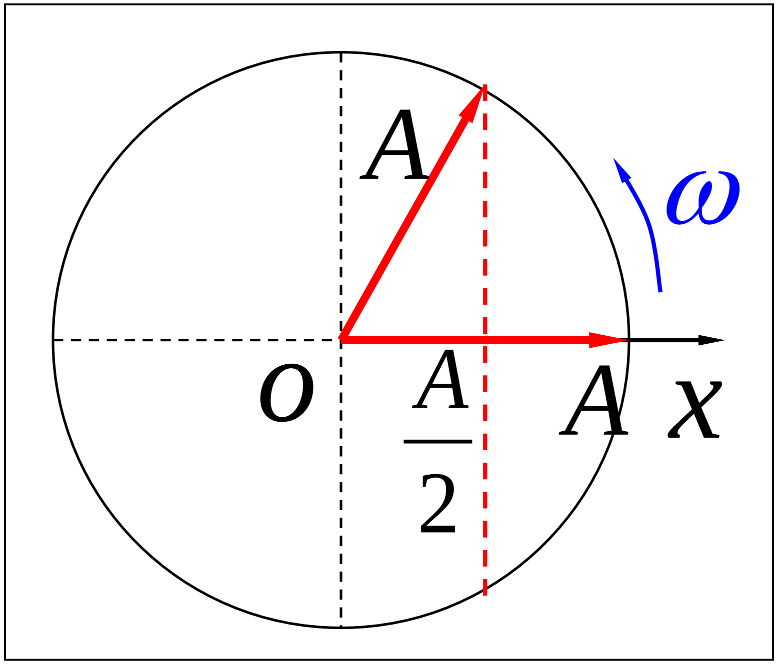
（2）求物体从初位置运动到第一次经过 $\frac{A}{2}$ 处时的速度；

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A} = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$

由旋转矢量图可知 $\omega t = \frac{\pi}{3}$




$$v = -A\omega \sin \omega t$$

$$= -0.26\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

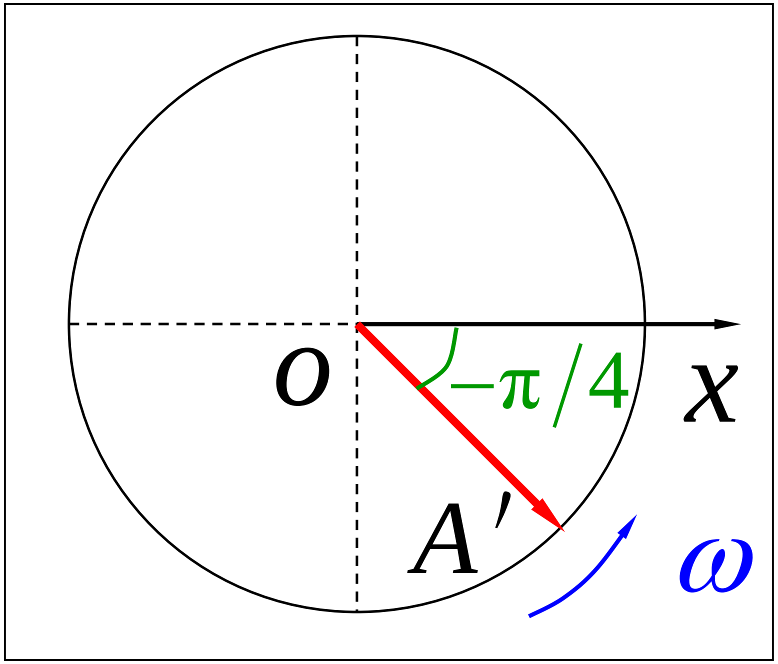
（负号表示速度沿 $Ox$ 轴负方向）

（3）如果物体在 $x=0.05\mathrm{m}$ 处时速度不等于零，而是具有向右的初速度 $v_0=0.30\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求其运动方程.

$$A'=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=0.0707\mathrm{m}$$

$$\tan\varphi'=\frac{-v_0}{\omega x_0}=-1$$

$$\varphi'=-\frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4}$$




因为 $v_0>0$，由旋转矢量图可知

$$\varphi'=-\pi/4$$

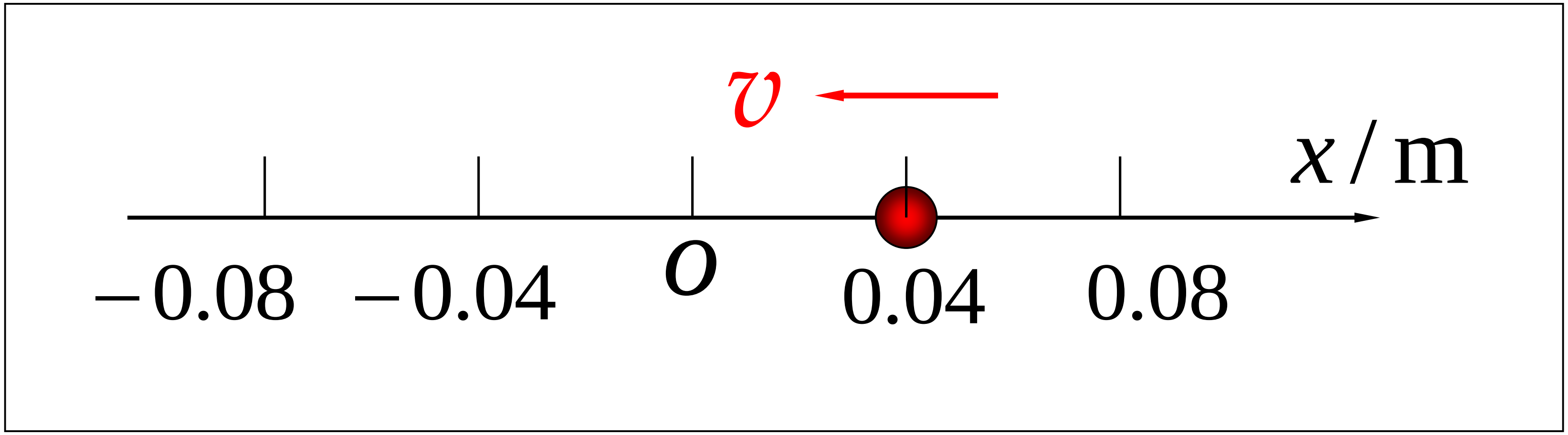
$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=(0.0707\mathrm{m})\cos[(6.0\mathrm{s}^{-1})t-\frac{\pi}{4}]$$

【例 7】 一质量为 0.01kg 的物体作简谐运动，其振幅为 0.08m，周期为 4s，起始时刻物体在 $x = 0.04\text{m}$ 处，向 $Ox$ 轴负方向运动（如图）.试求

（1） $t = 1.0\text{s}$ 时，物体所处的位置和所受的力；

（2）由起始位置运动到 $x = -0.04\text{m}$ 处所需要的最短时间.




解 $A = 0.08\text{m}$ $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$

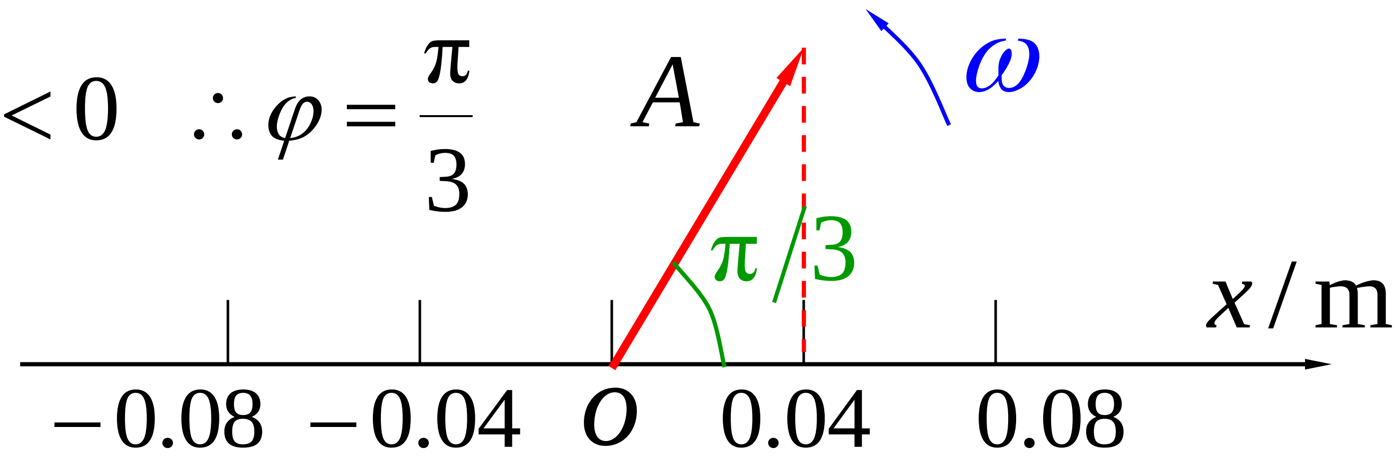
$$t = 0,\ x = 0.04\,\mathrm{m}$$

代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

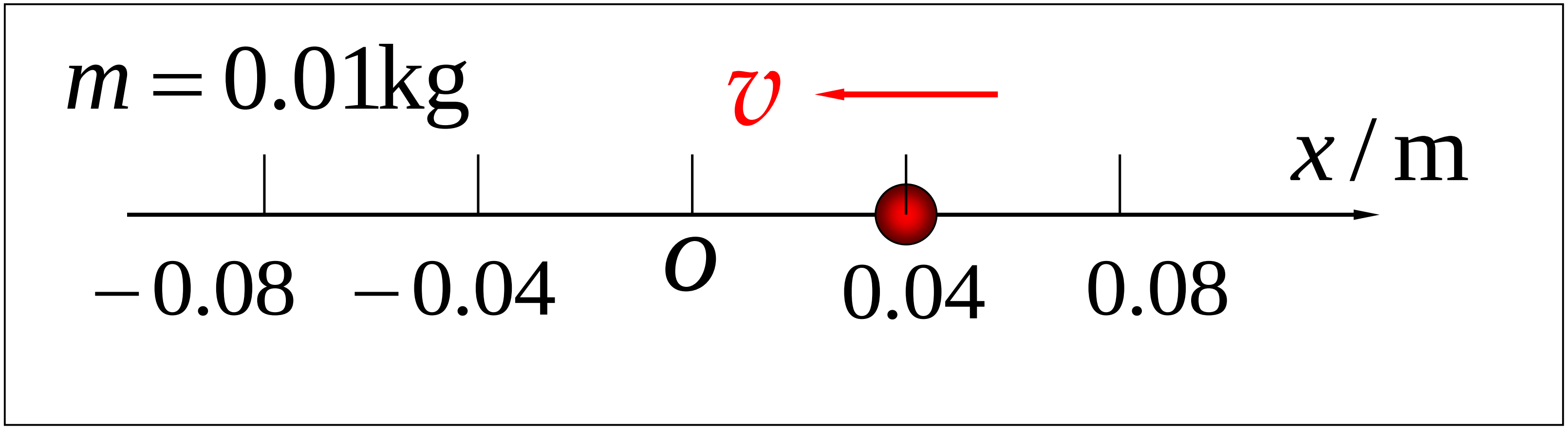
$$0.04\,\mathrm{m} = (0.08\,\mathrm{m})\cos\varphi$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$




$$x = (0.08\,\mathrm{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1})t + \frac{\pi}{3}]$$




$$x=(0.08\text{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1})t+\frac{\pi}{3}]$$

$t=1.0\text{s}$ 代入上式得

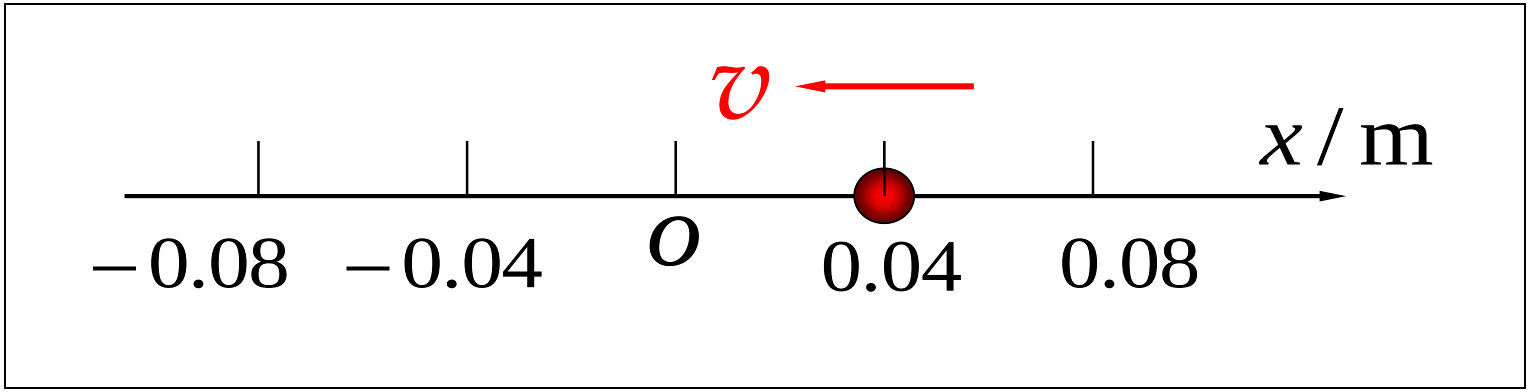
$$x=-0.069\text{m}$$

$$F=-kx=-m\omega^2 x$$

$$=-(0.01\text{kg})(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1})^2(-0.069\text{m})$$

$$=1.70\times10^{-3}\text{N}$$

（2）由起始位置运动到 $x=-0.04\mathrm{m}$ 处所需要的最短时间.



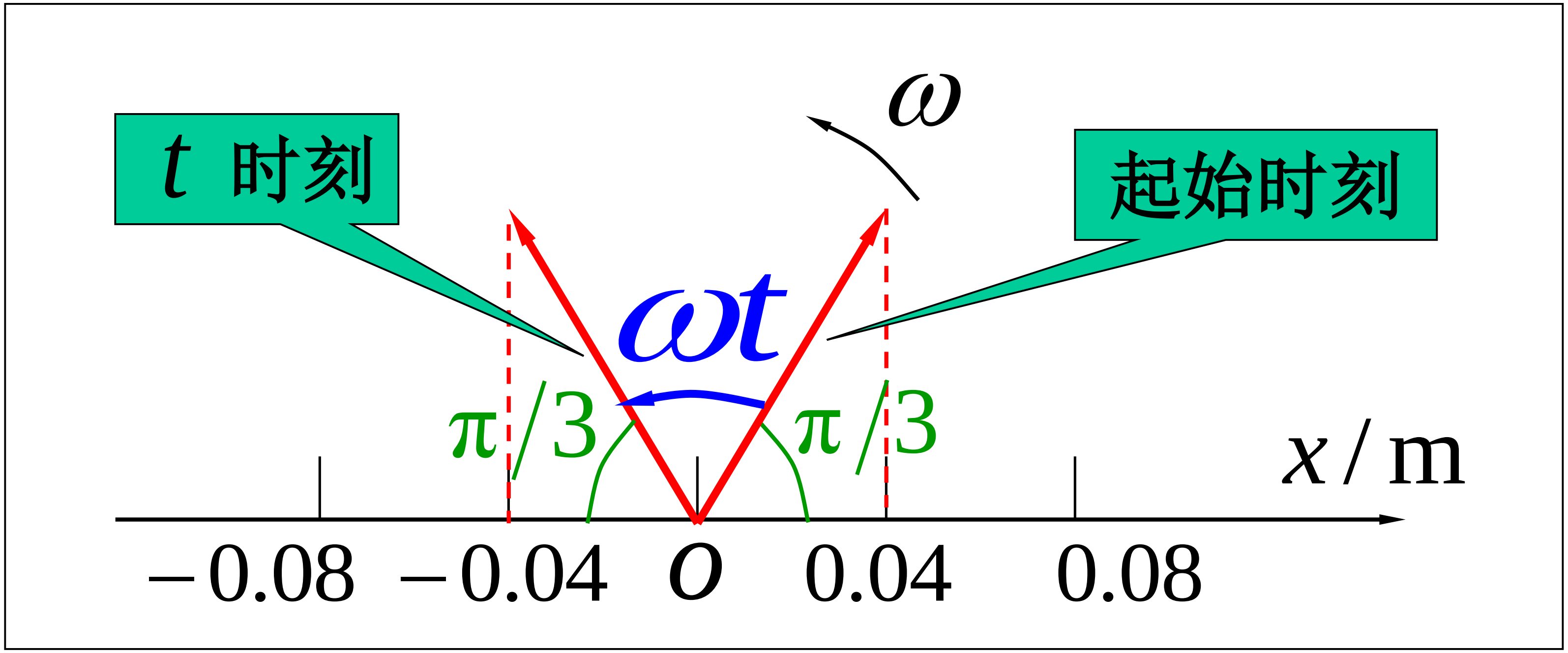

解法一 设由起始位置运动到 $x=-0.04\mathrm{m}$处所需要的最短时间为$t$

$$-0.04\mathrm{m}=(0.08\mathrm{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1})t+\frac{\pi}{3}]$$

$$t=\frac{\arccos(-\frac{1}{2})-\frac{\pi}{3}}{\pi/2}\mathrm{s}$$

$$=\frac{2}{3}\mathrm{s}=0.667\mathrm{s}$$

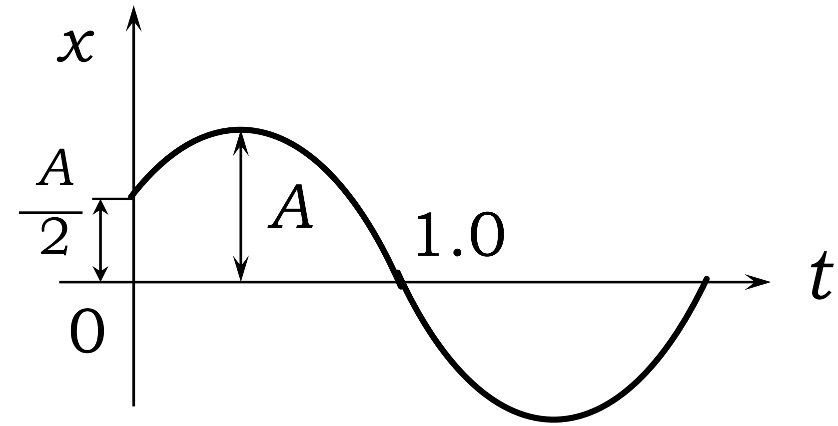
## 解法二




$$\omega t = \frac{\pi}{3} \qquad \omega = \frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1}$$

$$t = \frac{2}{3}\mathrm{s} = 0.667\mathrm{s}$$

【例 8】一谐振动的振动曲线如图，求(1).ω、φ以及振动表达式：x = A cos (ωt+φ); (2).t = 1 秒和 t = 2 秒两时刻的位相差△φ




解：由图形可知：$A$，

$t=0$:　$x_0=\frac{A}{2}$，$v_0>0$

$t=1$:　$x_1=0, v_1<0$

(1) 解析法：

$$\left.\begin{array}{l} t=0: \frac{A}{2}=A\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{3} \\ v_0=-A\omega\sin\varphi>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{3}$$

$$t=1: \quad x_1=0, v_1<0$$

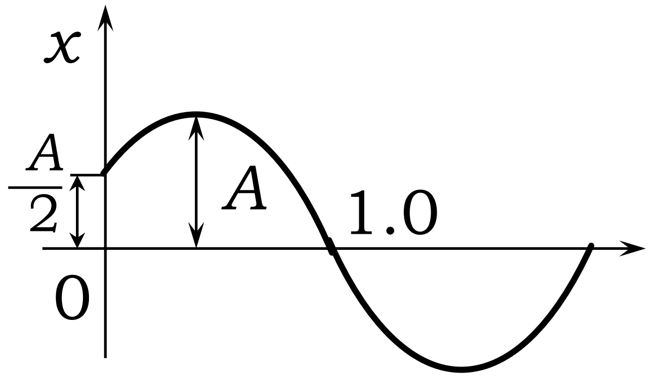
$$\varphi=-\frac{\pi}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} t=1: 0=A\cos(\omega-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \omega-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{2} \\ v_1=-A\omega\sin(\omega-\frac{\pi}{3})<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

$$\omega=\frac{5\pi}{6}$$

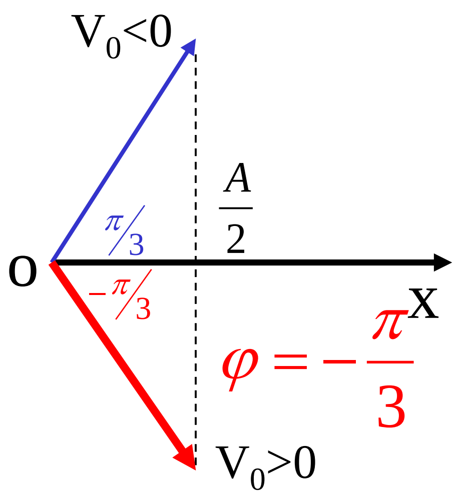
$$(2).\ \frac{\Delta\varphi}{2\pi}=\frac{\Delta t}{T}=\frac{\Delta t}{2\pi/\omega}$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi=\Delta t\cdot\omega=1\times\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

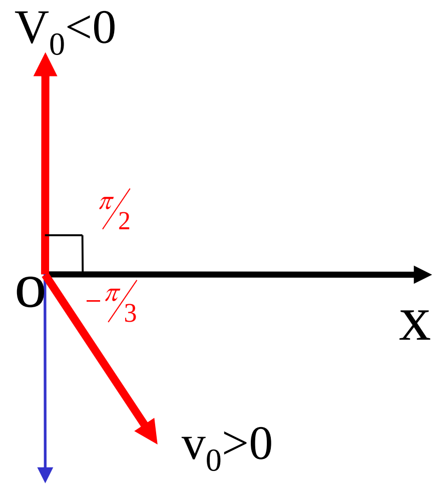



## (2).旋转矢量法

$t=0:$



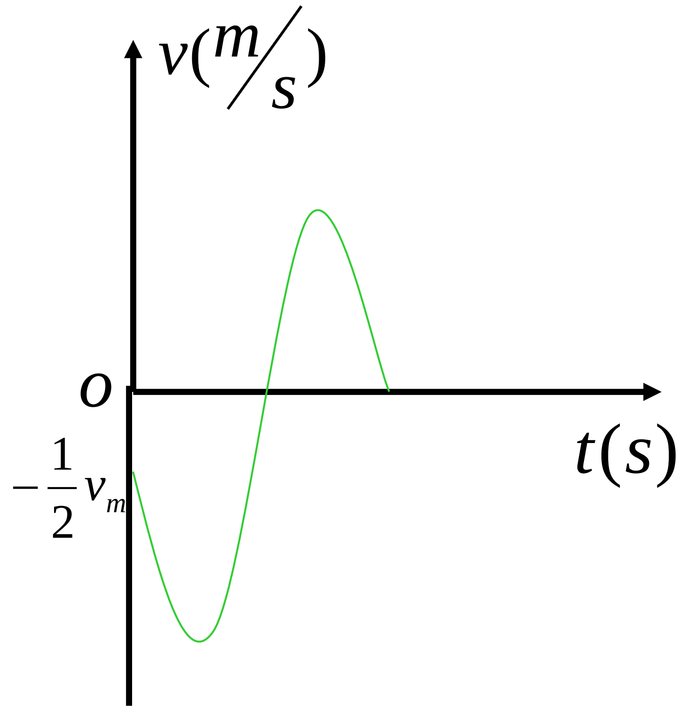

$t=1:$




$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}\\ \Delta\varphi&=\omega t=\omega\end{aligned}\right\}\quad \omega=\frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore x=A\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$$

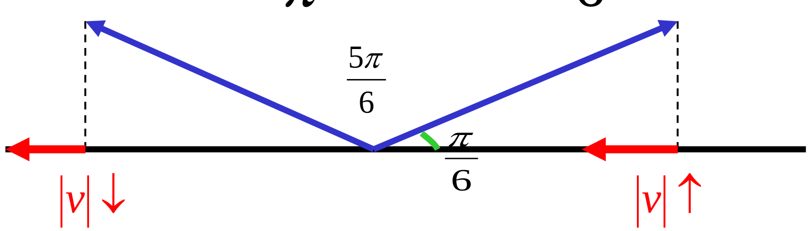
【例 9】质点按余弦规律作谐振动，其 v – t 关系曲线如图所示，周期 T = 2 。试求振动表达式。




解：
$$\left.\begin{aligned} &x=A\cos(\omega t+\varphi) \\ &\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi \\ &v_m=\omega A\Rightarrow A=\frac{v_m}{\omega}=\frac{v_m}{\pi} \end{aligned}\right\}\ \varphi=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$$

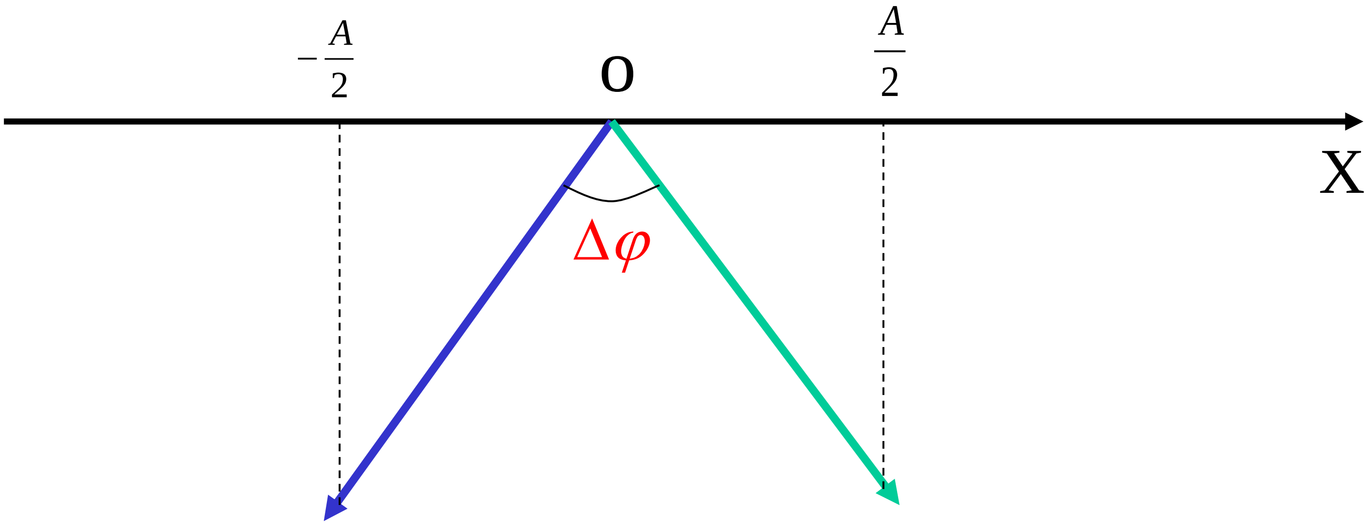
$$t=o:v_0=-A\omega\sin\varphi=-\frac{1}{2}v_m$$

$$\therefore x=\frac{v_m}{\pi}\cos(\pi t+\frac{\pi}{6})$$



【例 10】一弹簧振子由-A处释放，求振子从-A/2处向右运动到A/2处所需的最少时间？（已知振子的周期为2秒

解：旋转矢量法



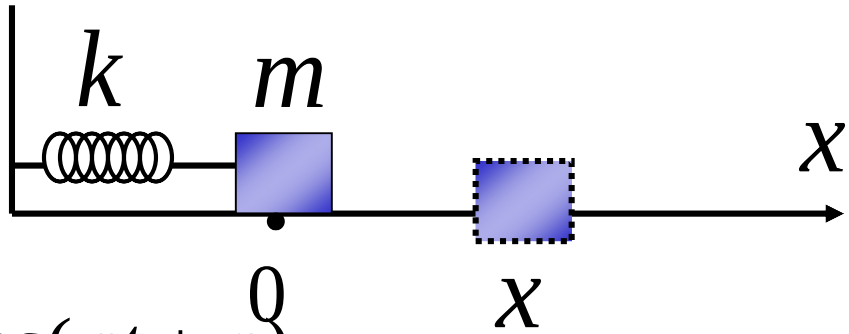

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$\Delta t = \frac{-\frac{\pi}{3} - (-\frac{2}{3}\pi)}{\pi} = \frac{1}{3}(s)$$

# §4.4 简谐振动的能量

以弹簧振子为例




## 一、能量的时间函数

由 $F=-kx\begin{cases} x=A\cos(\omega t+\varphi) \\ v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$

$$\omega^2=k/m$$

可得

$$E_\mathrm{k}(t)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

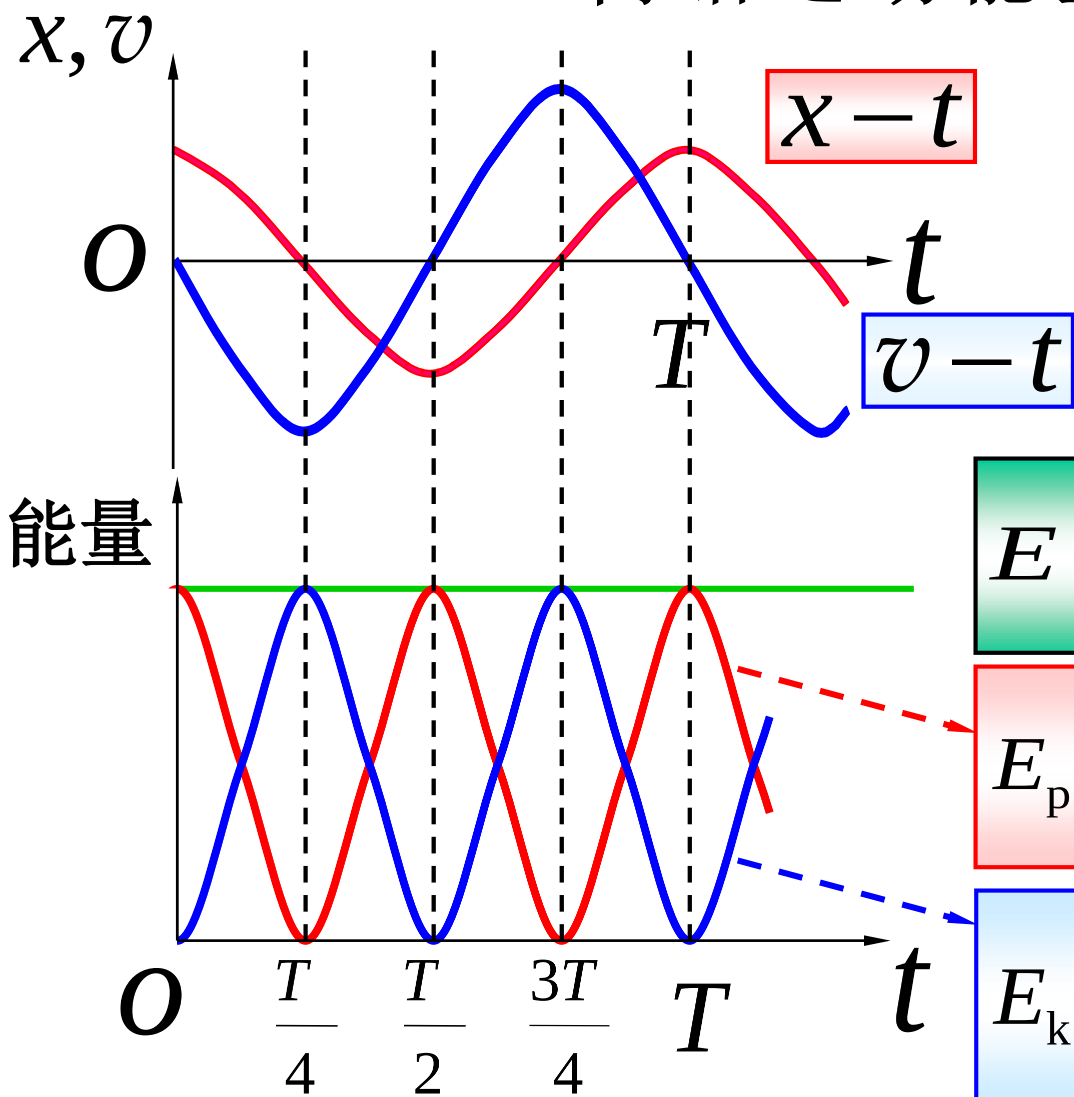
$$E_\mathrm{p}(t)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E=E_\mathrm{k}+E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)=\boxed{\frac{1}{2}kA^2\propto A^2}$$

（振幅的动力学意义）

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

# 简谐运动能量图




$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

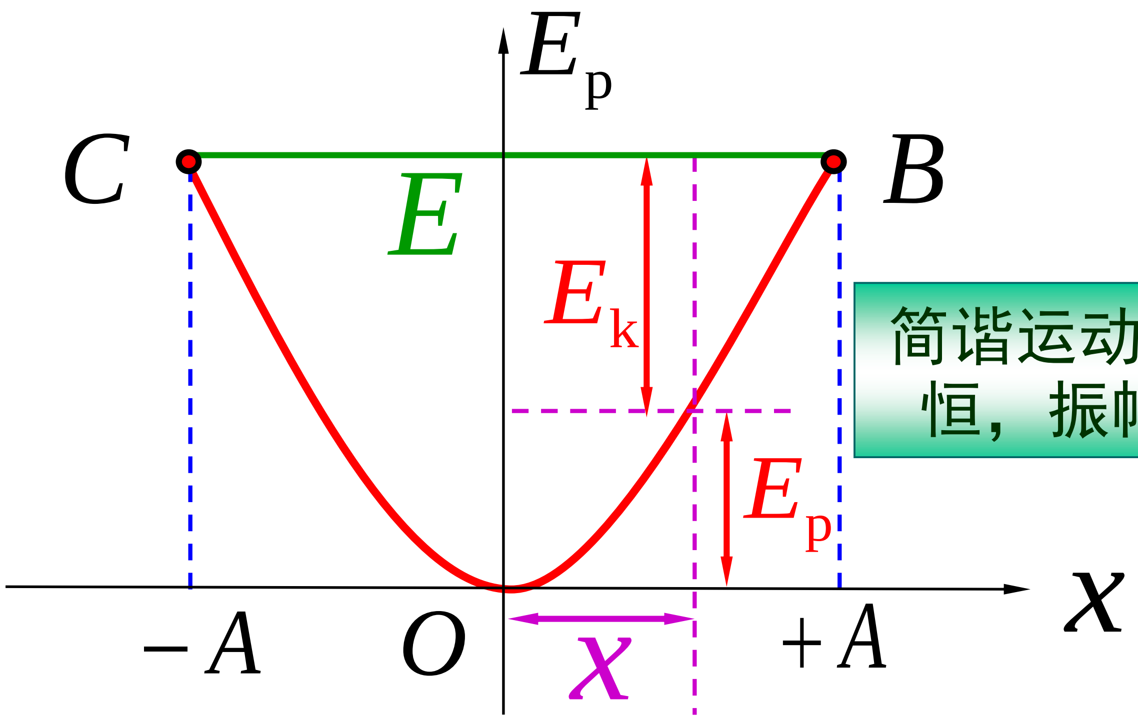
$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

## 二、能量的位置函数

$$E_{\mathrm{p}}(x)=\frac{1}{2}kx^2 \qquad E_{\mathrm{k}}(x)=E-E_p=\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2$$

简谐运动能量曲线




简谐运动能量守恒，振幅不变

### 1、能量在一个周期内对位置的平均值

$$\overline{E_p(x)}=\frac{1}{A}\int_0^A\frac{1}{2}kx^2dx=\frac{1}{6}kA^2 \qquad \overline{E_k(x)}=\frac{1}{A}\int_0^A(\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2)dx=\frac{1}{3}kA^2$$

## 2、能量在一个周期内对时间的平均值

$$\overline{E_k(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t+\varphi)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E_p(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t+\varphi)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\boxed{\overline{E} = \overline{E_k} + \overline{E_p} = \frac{1}{2}kA^2}$$

## 3、能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐运动方程

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常量}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kx\cancel{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

【例11】 已知：$m_1$ = 1.0kg，与轻弹簧固定连接， $m_2$ = 3.0kg，k = 25N/m，现将弹簧压缩 $b$ = 0.2.m 后由静止释放，求：（1）$m_2$ 与$m_1$ 分离后，$m_1$ 做简谐振动的振幅 A;（2）$m_1$ 从释放后到再一次将弹簧压缩到最大位置时所需的时间。

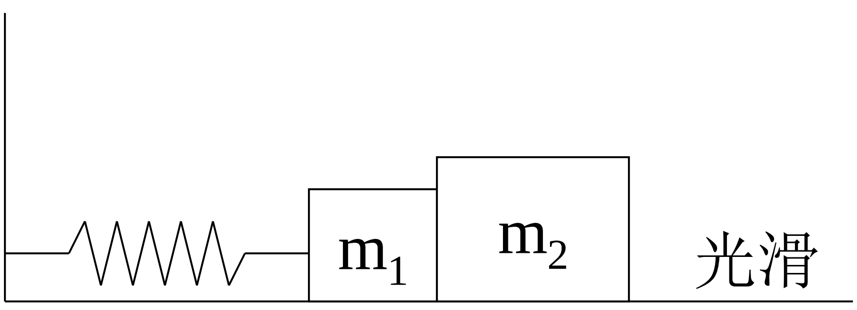
**解：** 分析：平衡位置处 $v = v_m$，且是 $m_1$、$m_2$分离处

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}kb^2 &= \frac{1}{2}(m_1+m_2){v_m}^2 \\ \frac{1}{2}m_1{v_m}^2 &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 0.1m$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}}} = \frac{4}{5}\pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m_1}}} = \frac{2}{5}\pi \end{aligned}\right\}$$

$$t = \frac{1}{4}T_1 + \frac{3}{4}T_2$$

$$\Rightarrow t = 1.57s$$



【例 12】如图所示，弹簧的一端固定在墙上，另一端连接一质量为 M 的容器，容器可在光滑的水平面上运动，当弹簧未变形时容器位于 O 处，今使容器自 O 点左端 $l_0$ 处由静止开始运动，每经过 O点一次时，从上方滴管中滴入一质量为 $m$ 的油滴。求1）滴到容器中 $n$ 滴以后，容器运动到距 O 点的最远距离。2）第（$n$+1）滴与 $n$ 滴的时间间隔。

解（1）$\frac{1}{2}(M+nm)v^2=\frac{1}{2}kA^2\cdots(1)$

$\because o$点处$F_x=0, \therefore P_x=C$

即：（$M+nm$）$v=Mv_0\cdots(2)$

$$\frac{1}{2}Mv_0^{\ 2}=\frac{1}{2}kl_0^2\cdots\cdots\cdots(3)$$

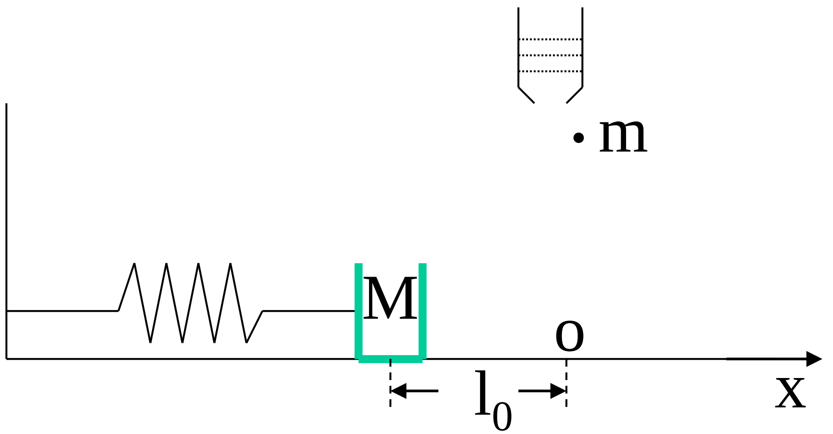
$$A=\sqrt{\frac{M}{M+nm}}l_0$$

$$(2).t=\frac{T_n}{2}$$

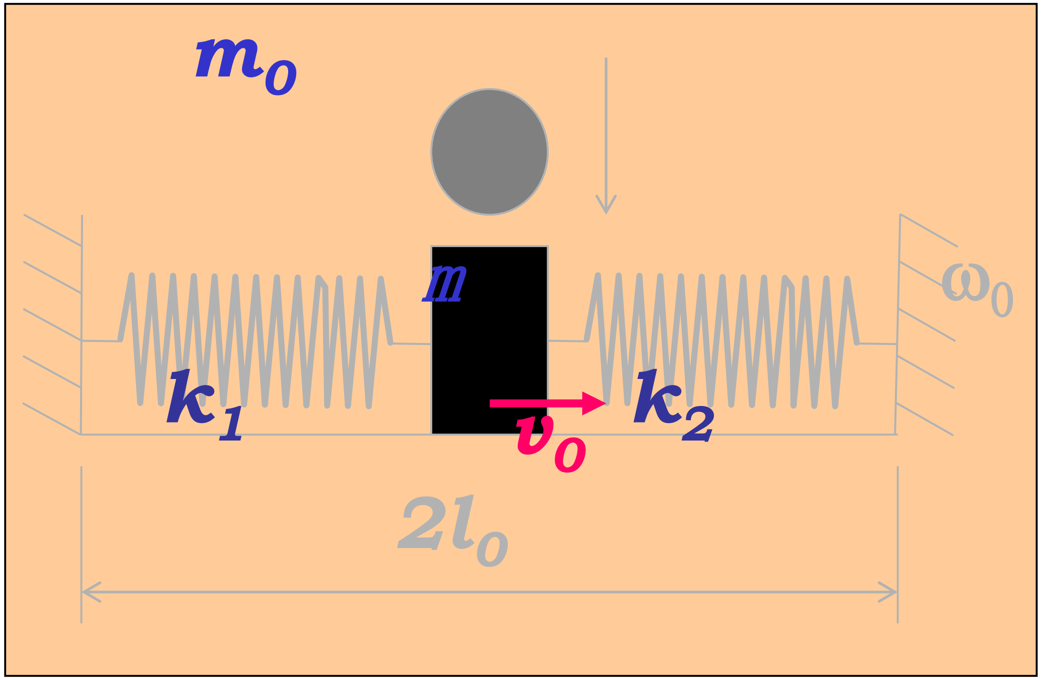
$$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{M+nm}}$$

$$t=\pi\sqrt{\frac{M+nm}{k}}$$



【例 13】两根弹簧(弹性系数分别为 $k_1, k_2$ 自然长度均为 $l_0$)与物体 m 连接后作 $A_0$ 的谐振.当 m 运动到两弹簧处于自然长度时,突然速度为 0 的质点 $m_0$ 轻粘在 m 上,求：$m_0$ 粘上后振动系统周期和振幅。




解：粘上后系统振动周期:

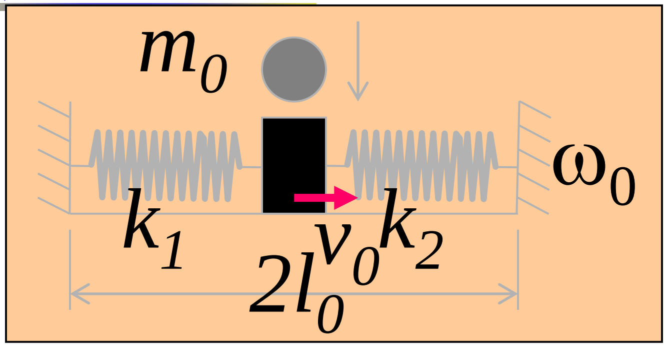
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

设$m_0$与m一起偏离平衡位置x

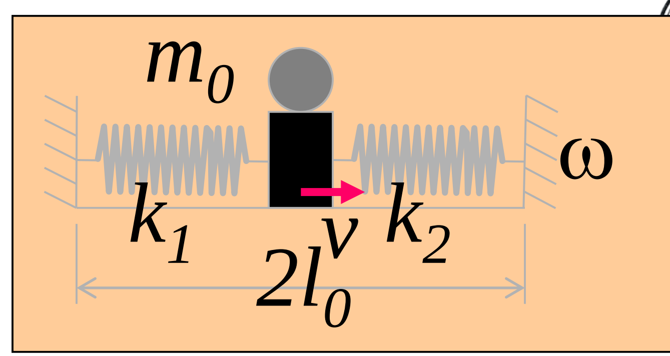
$$-(k_1 + k_2)x = (m + m_0)\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(\frac{k_1 + k_2}{m + m_0})x$$

$$\Rightarrow K = k_1 + k_2 \quad \therefore 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + m}{k_1 + k_2}}$$




粘接过程




（粘接过程系统水平方向动量守恒）

$$v = A\omega = A\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m+m_0}}$$

$$v_0 = A_0\omega_0 = A_0\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

$$mv_0 = (m+m_0)v \quad \Rightarrow v = \frac{mv_0}{m+m_0}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{m+m_0}}A_0$$

由谐振能量求A

粘接前 $E_0 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)A_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$

粘接后 $E = \frac{1}{2}(k_1+k_2)A^2 = \frac{1}{2}(m+m_0)v^2$

$$mv_0 = (m+m_0)v \Rightarrow v = \frac{mv_0}{m+m_0}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{m+m_0}}A_0$$

# §4.5 简谐振动的合成

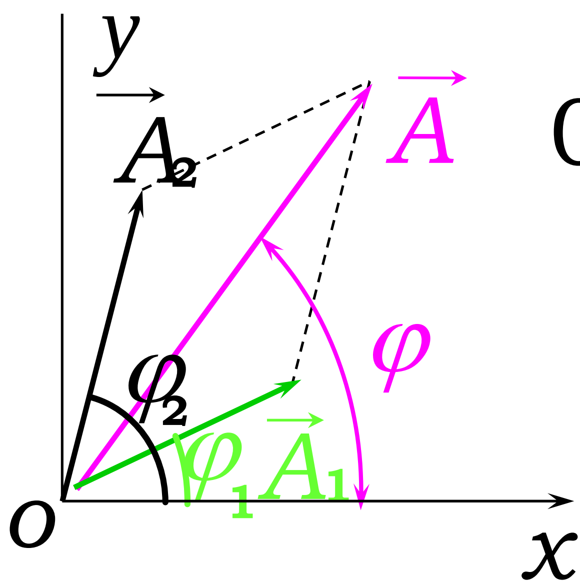
## 一 两个同方向同频率简谐运动的合成

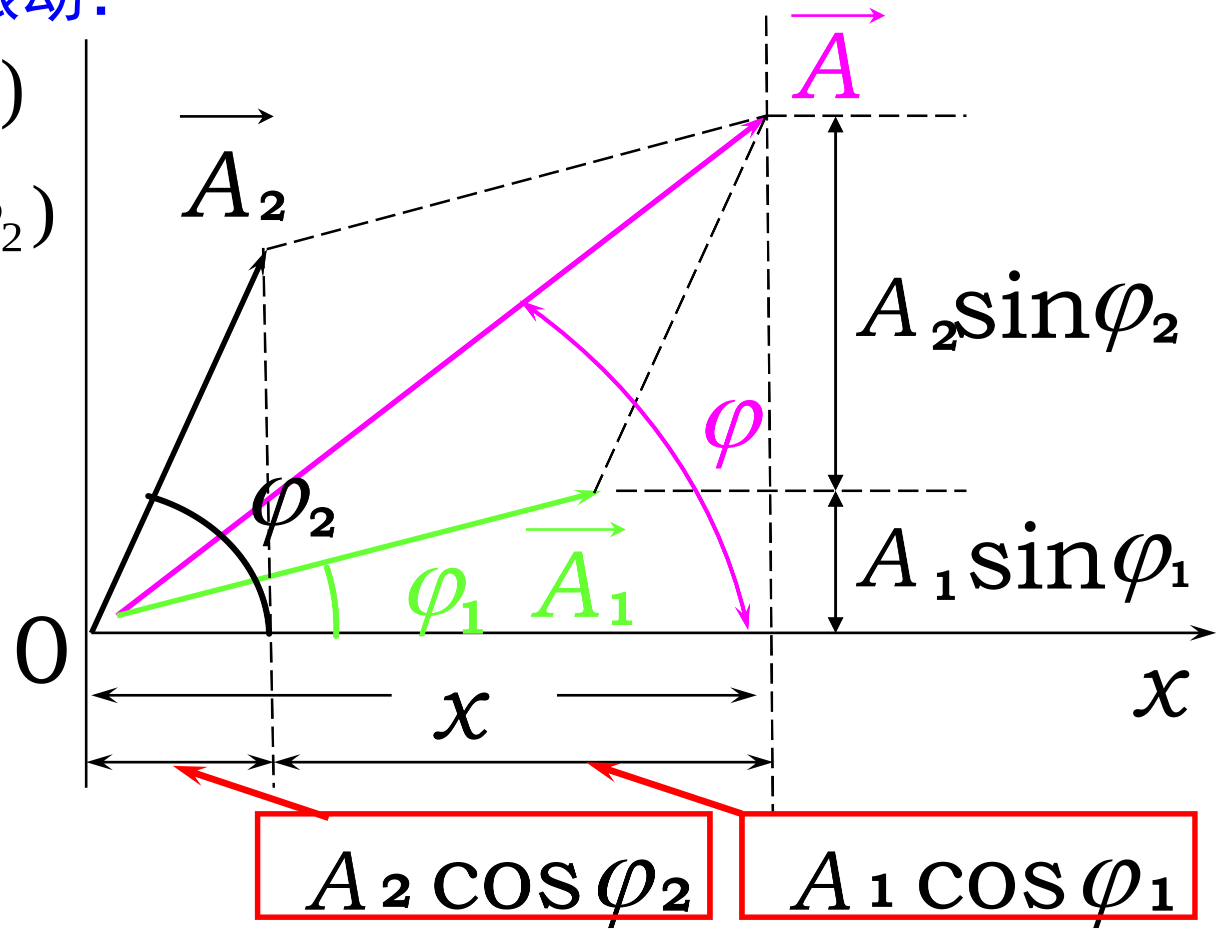
物体同时参与两分振动：

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$

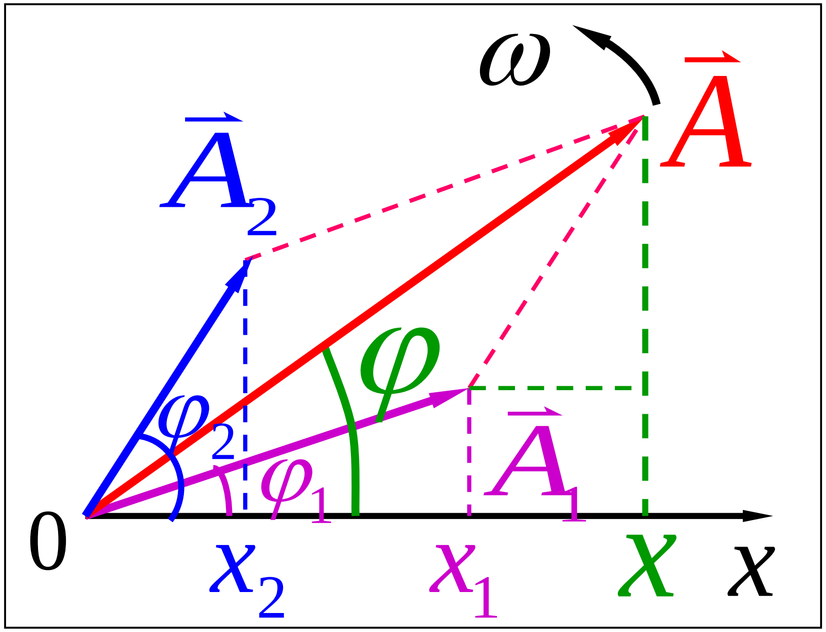
$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$



$$x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



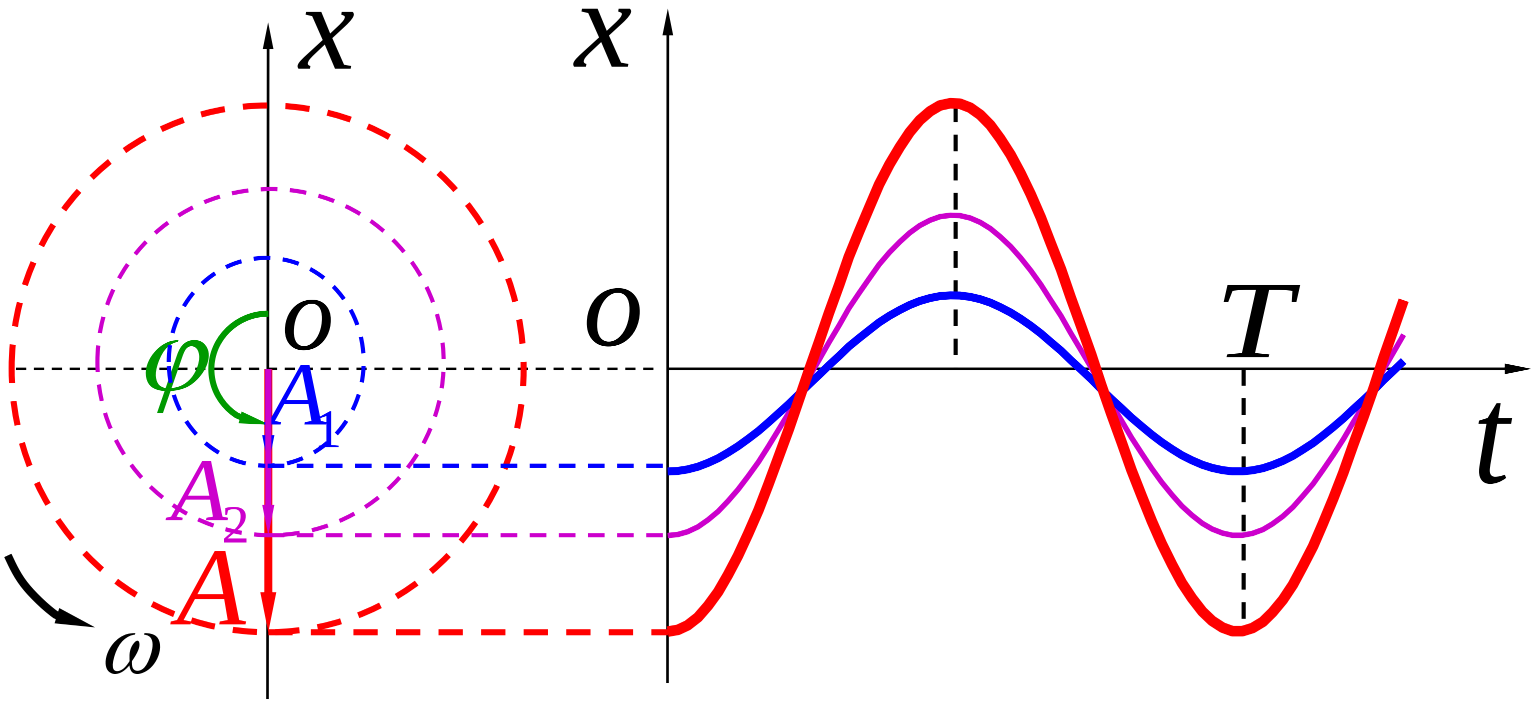

$$\left\{ \begin{aligned} &\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \\ &A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned} \right.$$

两个同方向同频率简谐运动合成后仍为简谐运动

**讨论**

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

1）相位差 $\boxed{\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$




$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$

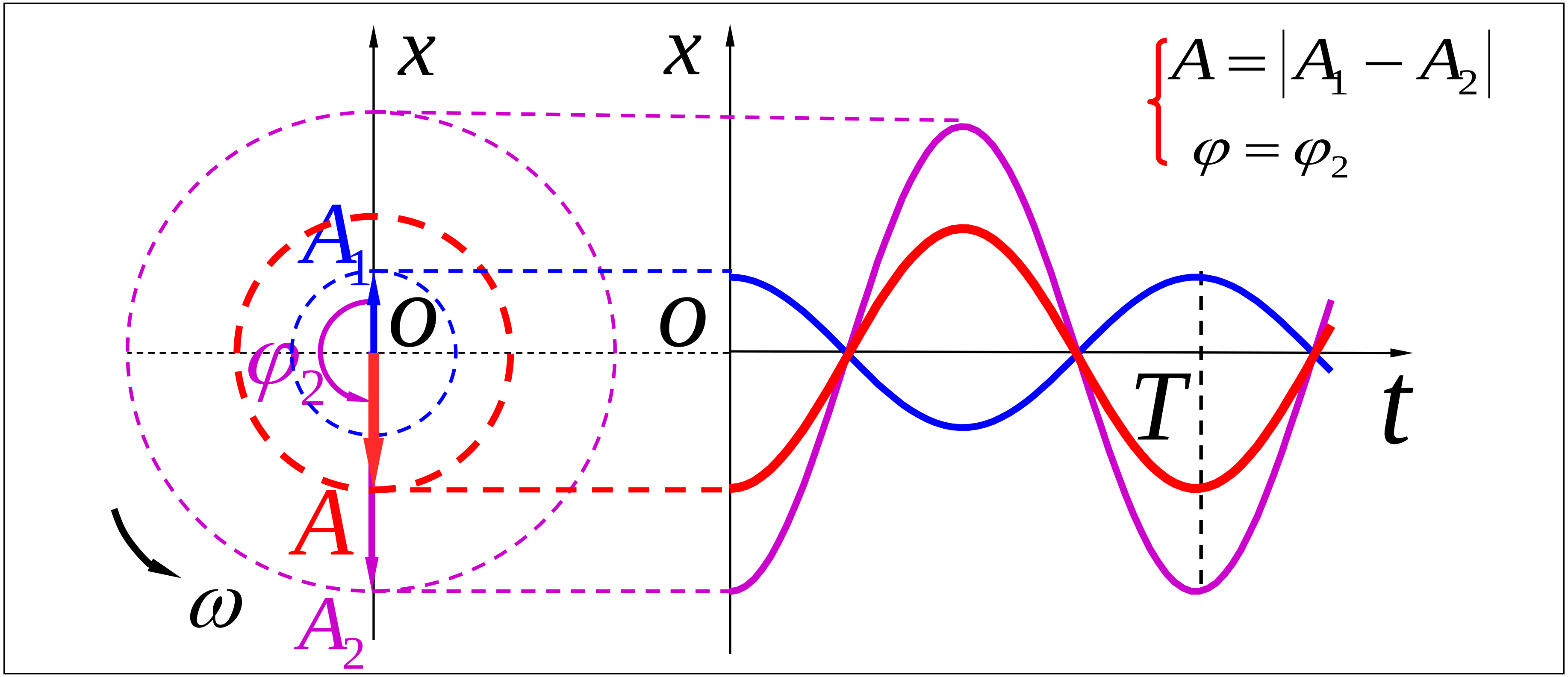
$$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

2）相位差 $\boxed{\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\cdots)$

$$\begin{cases} x_1=A_1\cos\omega t \\ x_2=A_2\cos(\omega t+\pi) \end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\pi)}$$



## 总结

1）相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = A_1 + A_2$$

相互加强

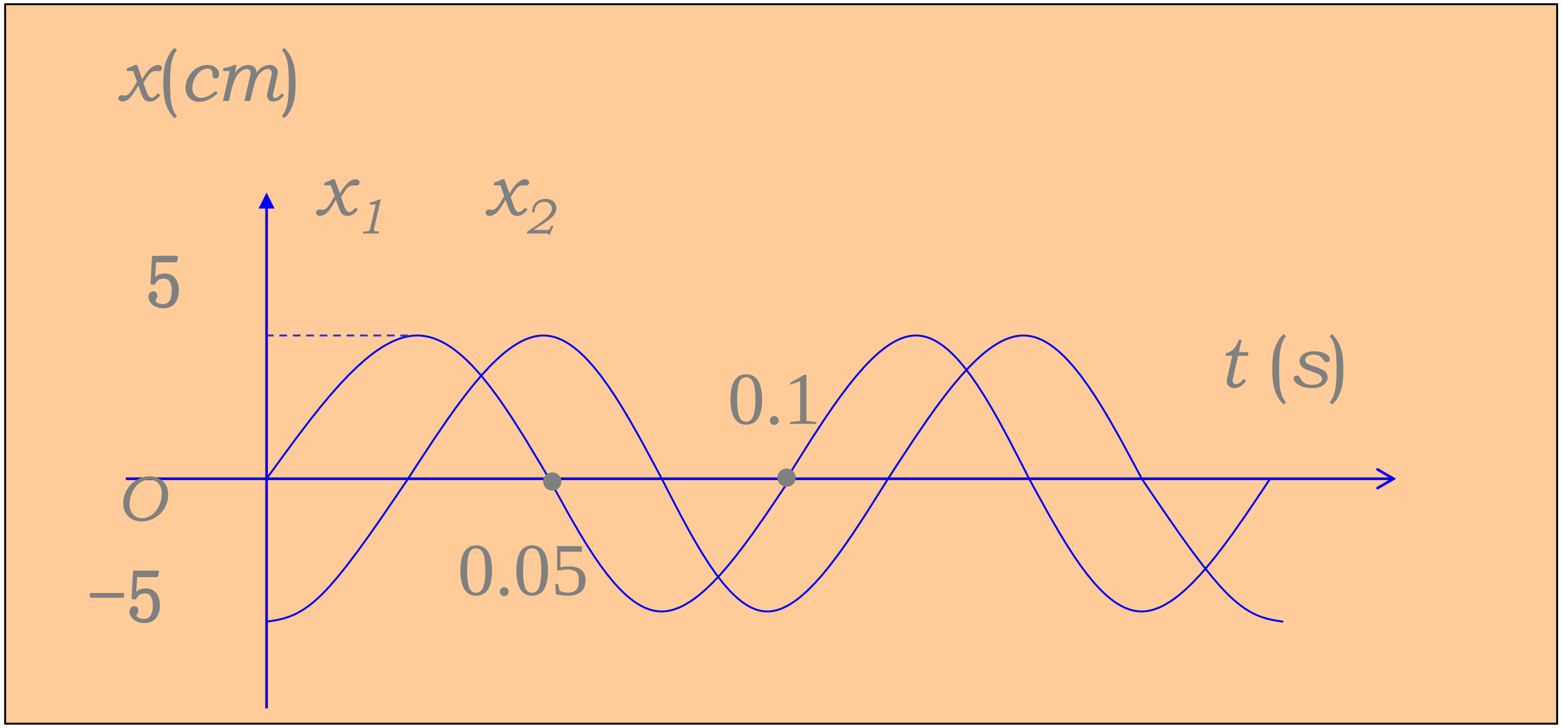
2）相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = |A_1 - A_2|$$

相互削弱

3）一般情况 $A_1 + A_2 > A > |A_1 - A_2|$

【例 14】两谐振曲线如图示，它们是同频率谐动， 求：它们合振动方程。




解: 由谐振曲线图: A= 5 cm, T = 0.1 s

由 $x_1 \sim t$ : $x_0 = 0$, $v_0 > 0$ $\Rightarrow \alpha_1 = -\pi/2$

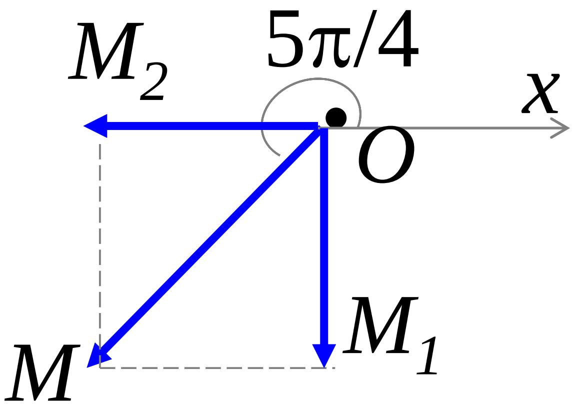
由 $x_2 \sim t$: $x_0 = -A$, $v_0 = 0$ $\Rightarrow \alpha_2 = \pi$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5\cos(20\pi t - \pi/2)cm \\ x_2 = 5\cos(20\pi t + \pi)cm \end{cases}$$

利用矢量图求谐振合成

$$x_1 = 5\cos(20\pi t - \pi/2)cm$$

$$x_2 = 5\cos(20\pi t + \pi)cm$$




$$OM_1 = OM_2 \Rightarrow A = \sqrt{2}\,OM_1 = 5\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$$

$$\alpha = 5\pi/4$$

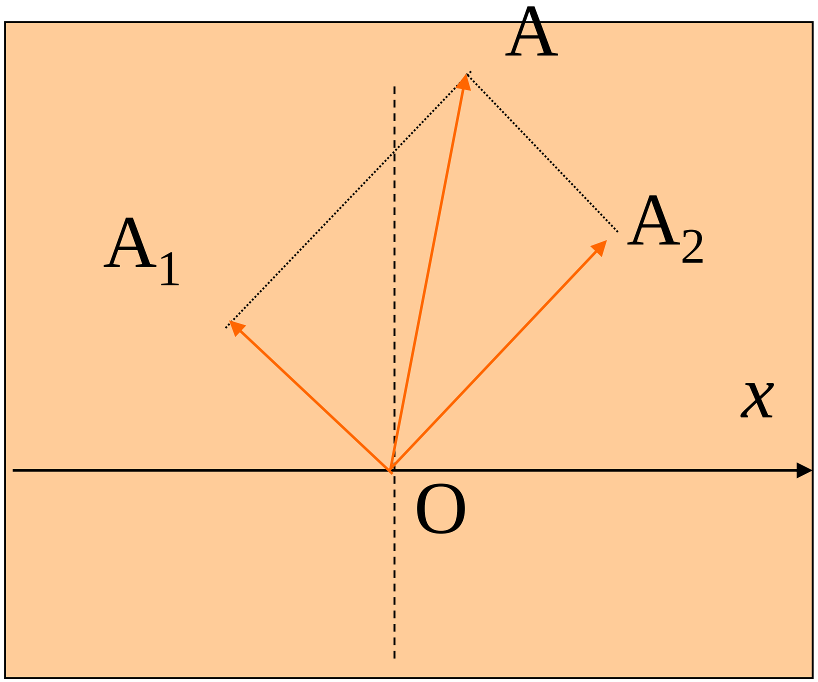
$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 = 5\sqrt{2}\cos(20\pi t + 5\pi/4)cm$$

【例 15】同方向谐振动 $x_1=0.05\cos(10t+3\pi/4)$, $x_2=0.06\cos(10t+\pi/4)$, $x_3=0.07\cos(10t+\varphi_3)$。 求:(1) $x_1$、$x_2$合振动的$A$、$\varphi$ (2) $\varphi_3$为何值, $x_1+x_3$振幅最大? (3) $\varphi_3$为何值, $x_2+x_3$ 振幅最小?

解:（1）$\angle A_1OA_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$

$$\therefore A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=0.078$$

$$\varphi = \pi/4+\mathrm{tg}^{-1}(A_1/A_2)$$




（2）$\Delta\phi_{13}=(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_3)$

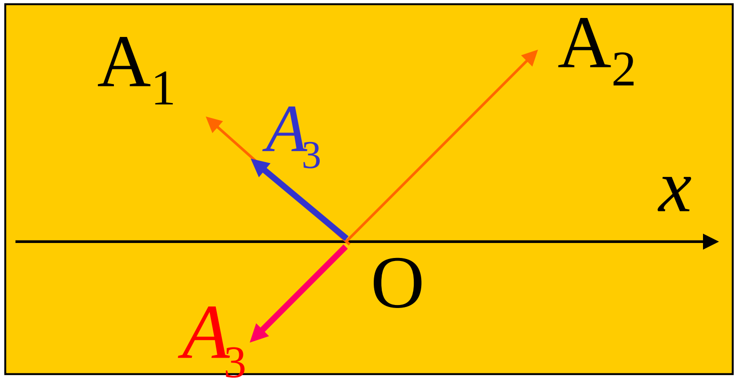
$$\boxed{=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2\ldots)}$$

$\therefore \varphi_3 = \varphi_1 - 2k\pi = 3\pi/4 - 2k\pi \in(-\pi,\pi]$;

$\Rightarrow \varphi_3=3\pi/4$

3) $\Delta\phi_{23}= (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_3)$

$= (2k + 1)\pi$, $(k=0,\pm1, \pm2\ldots)$




$\therefore \varphi_3 = \varphi_2 - (2k+1)\pi$

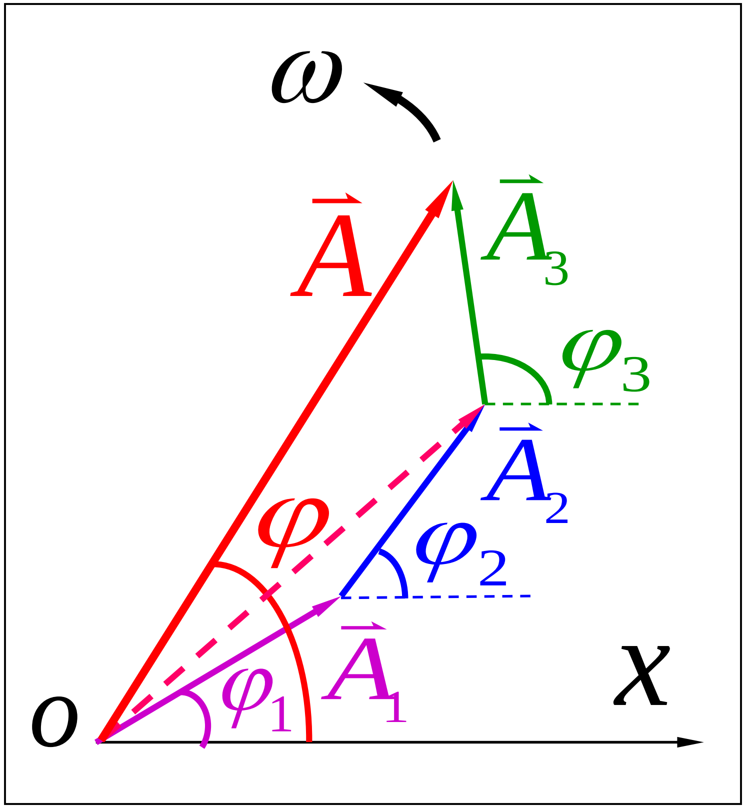
$= \pi/4 - (2k+1)\pi \in(-\pi,\pi] \Rightarrow \varphi_3 =-3\pi/4$

## 二 多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t+\varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$




多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cos \omega t \\ x_2 = A_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\ x_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\ \cdots\cdots \\ x_N = A_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi] \end{cases}$$

讨论

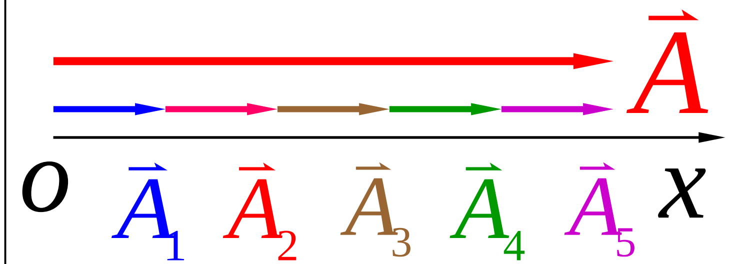
1） $\Delta\varphi = 2k\pi$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

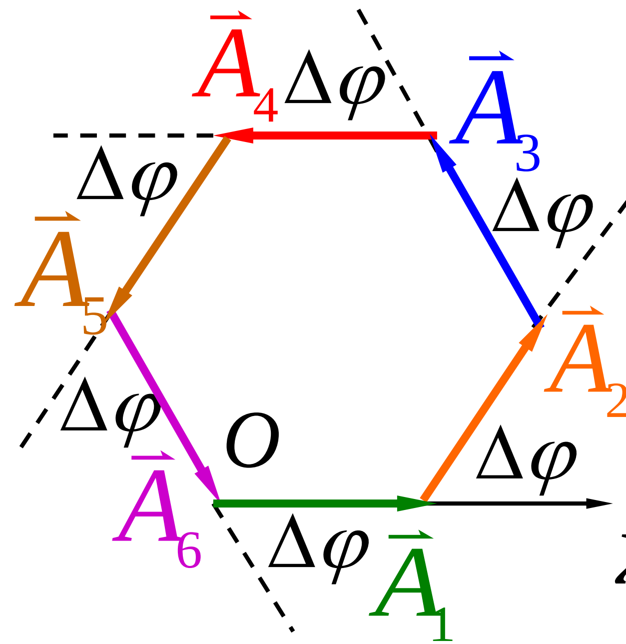
2） $N\Delta\varphi = 2k'\pi$

$(k' \neq kN, k' = \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$N$个矢量依次相接构成一个闭合多边形

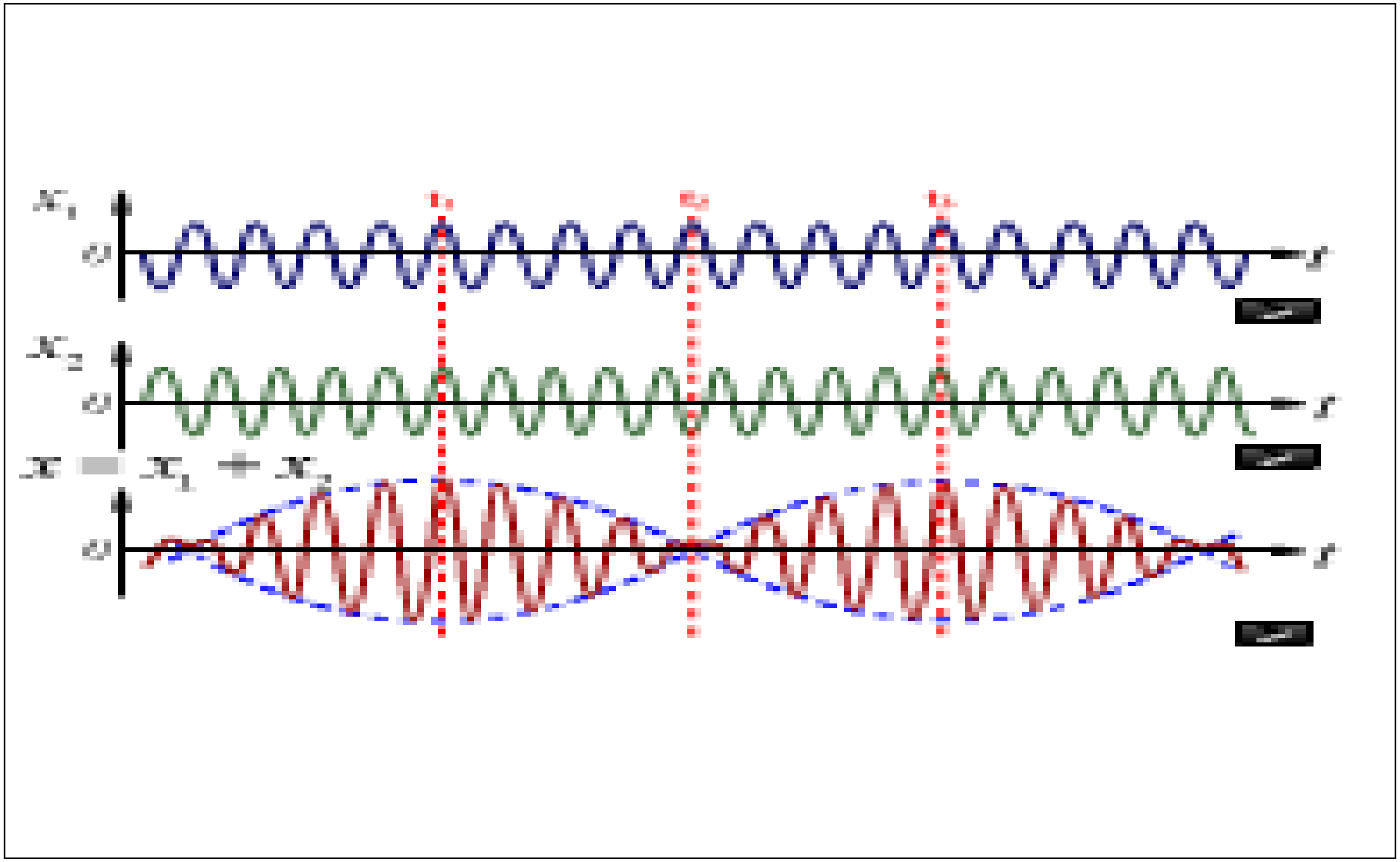



$$\boxed{A = \sum_i A_i = NA_0}$$



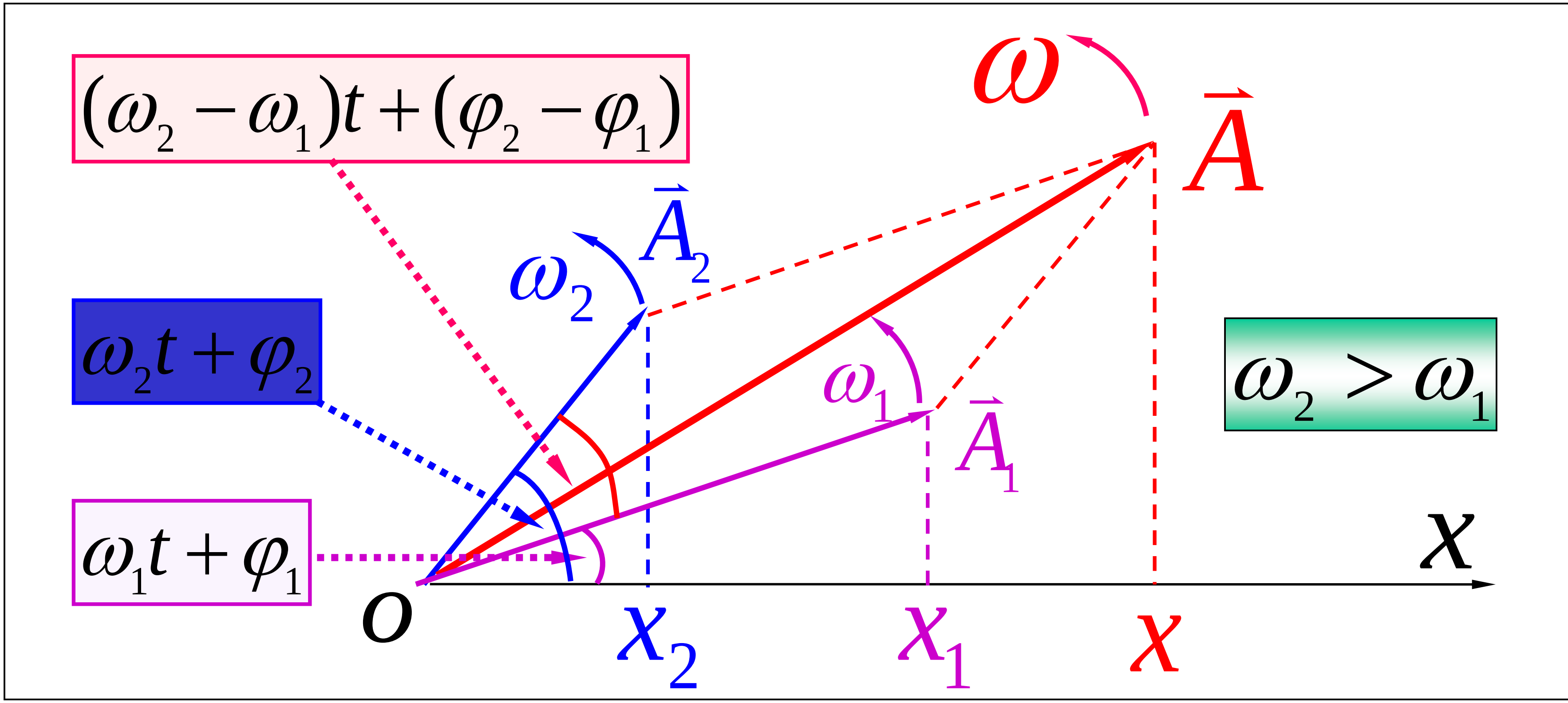

$$\boxed{A = 0}$$

# 三 两个同方向不同频率简谐运动的合成




频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍.

## ◆ 旋转矢量合成法




$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\varphi_1=\varphi_2=0$$

$$\Delta\varphi=(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$\Delta\varphi=2\pi(\nu_2-\nu_1)t$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega_1 t = A_1 \cos 2\pi\, \nu_1 t \\ x_2 = A_2 \cos \omega_2 t = A_2 \cos 2\pi\, \nu_2 t \end{cases}$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

讨论 $A_1 = A_2$ $\quad |\nu_2 - \nu_1| << \nu_1 + \nu_2$ 的情况

◆ 解析方法 $x = x_1 + x_2 = A_1 \cos 2\pi\, \nu_1 t + A_2 \cos 2\pi\, \nu_2 t$

$$x = \left(2A_1 \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t\right) \cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t$$

振幅部分 合振动频率

$$\begin{cases} \text{振动频率} \quad \nu = (\nu_1 + \nu_2)/2 \\ \text{振幅} \quad A = \left| 2A_1 \cos 2\pi \dfrac{\nu_2 - \nu_1}{2} t \right| \end{cases}$$

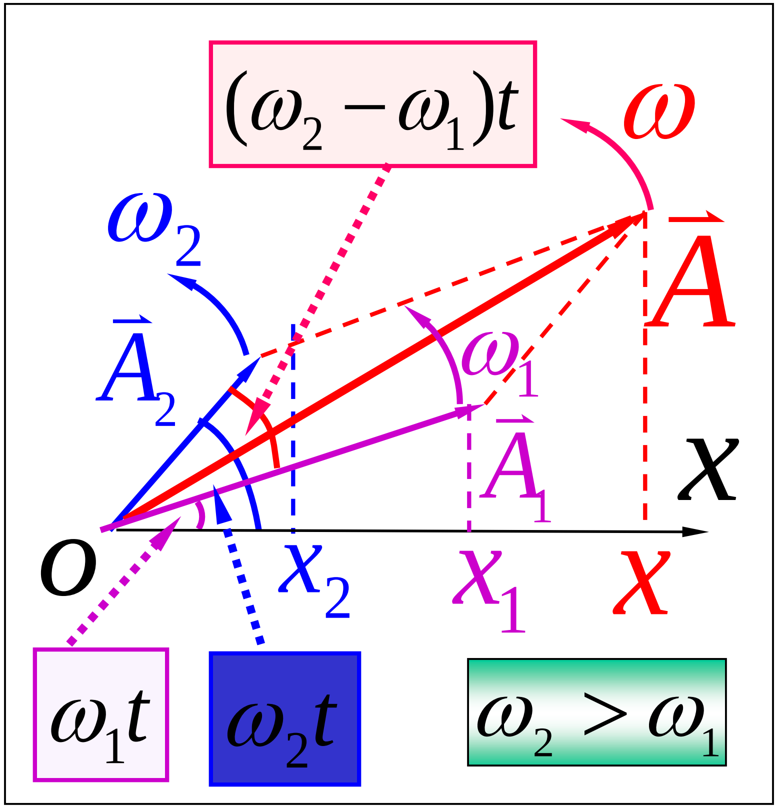
$$\begin{cases} A_{\max} = 2A_1 \\ A_{\min} = 0 \end{cases}$$

$$2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} T = \pi \qquad T = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$$

$$\boxed{\nu = \nu_2 - \nu_1}$$ ⇐ 拍频（振幅变化的频率）

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi=(\omega_2-\omega_1)t$$




振幅 $A=A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}$

$$=\left|2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right|$$

拍频 ⇨ $\nu=\nu_2-\nu_1$

（拍在声学和无线电技术中的应用）

振动圆频率 $\cos\omega t=\dfrac{x_1+x_2}{A}$ $\qquad \omega=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$

# 四 两个相互垂直的同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

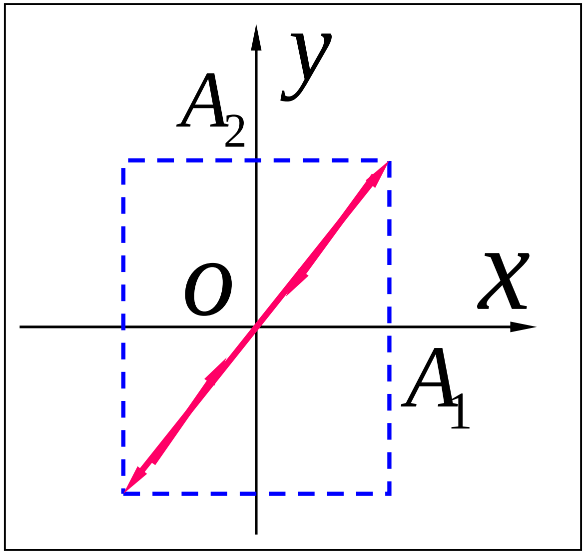
质点运动轨迹 （椭圆方程）

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

讨论

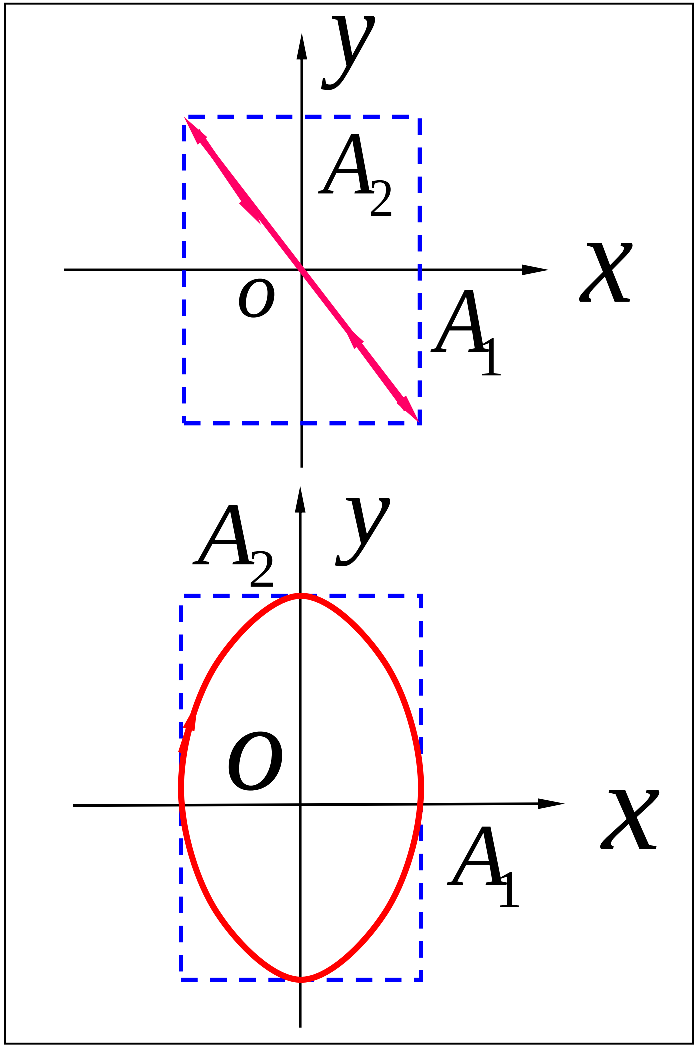
1）$\varphi_2-\varphi_1=0$ 或 $2\pi$

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$



$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)}$$

2） $\varphi_2-\varphi_1=\pi$ $\qquad y=-\frac{A_2}{A_1}x$

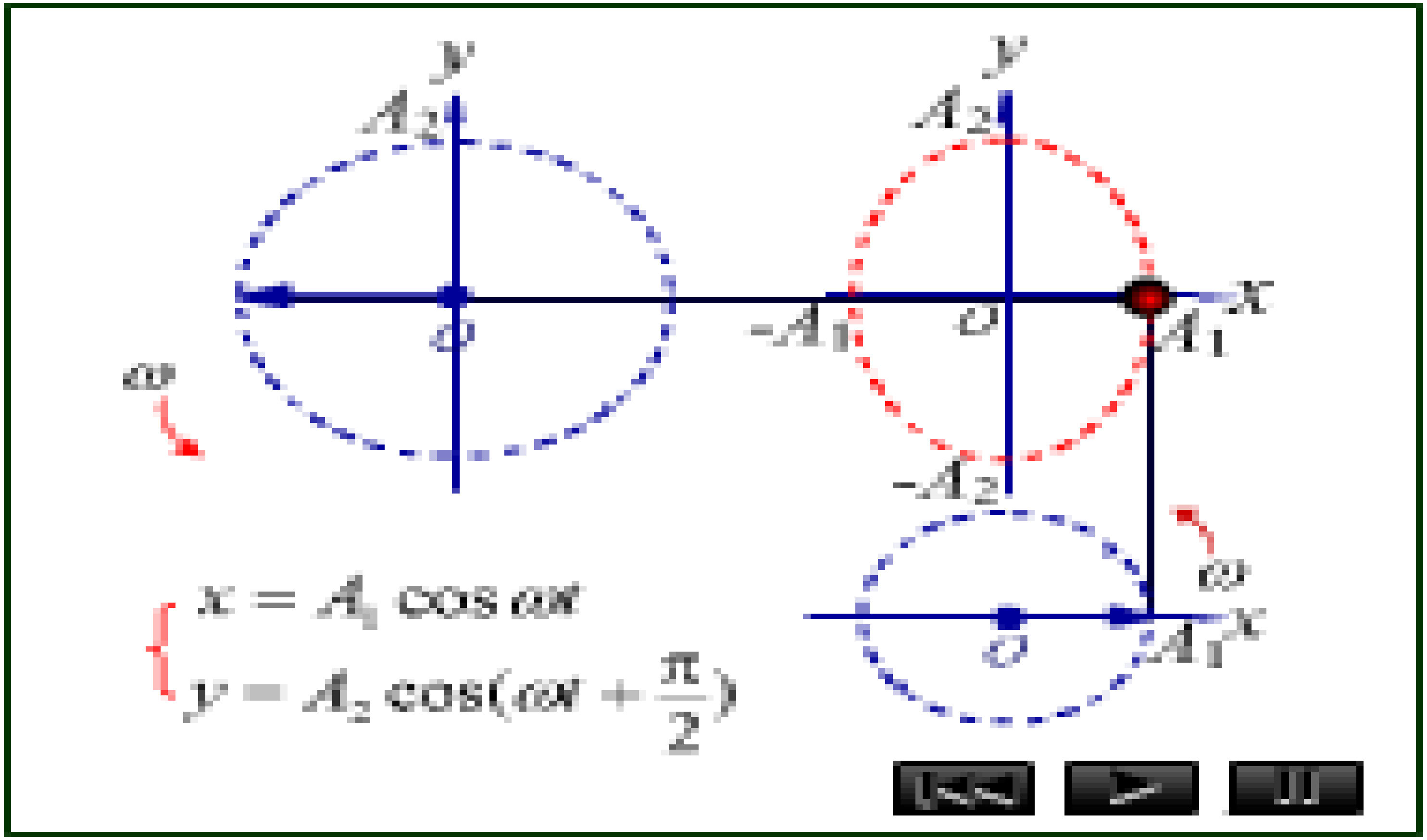



3） $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi/2$

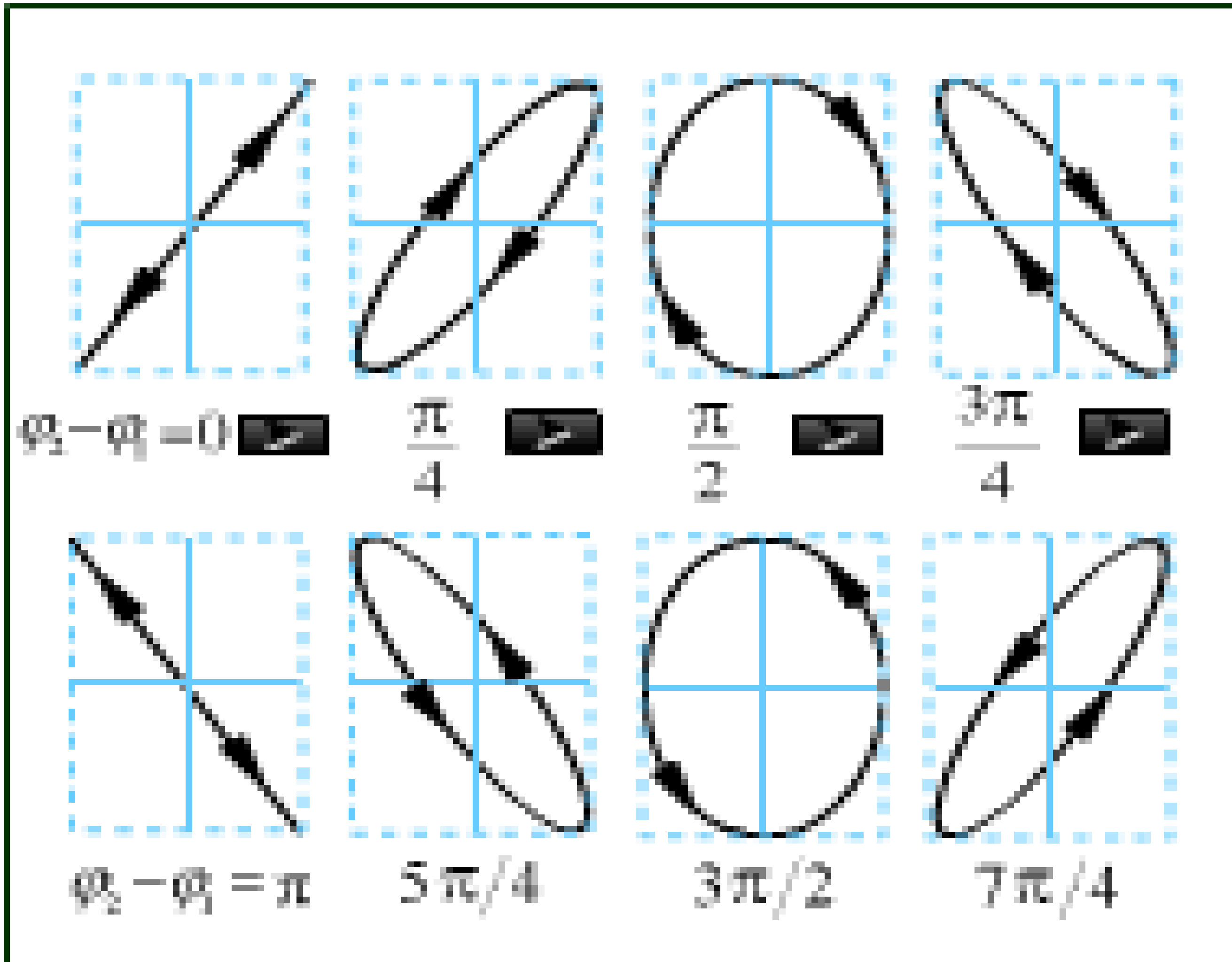
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

$$\begin{cases} x=A_1\cos\omega t \\ y=A_2\cos(\omega t+\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

用旋转矢量描绘振动合成图



两相互**垂直同频率**不同**相位差**简谐运动的合成图



# 五 两相互垂直不同频率的简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

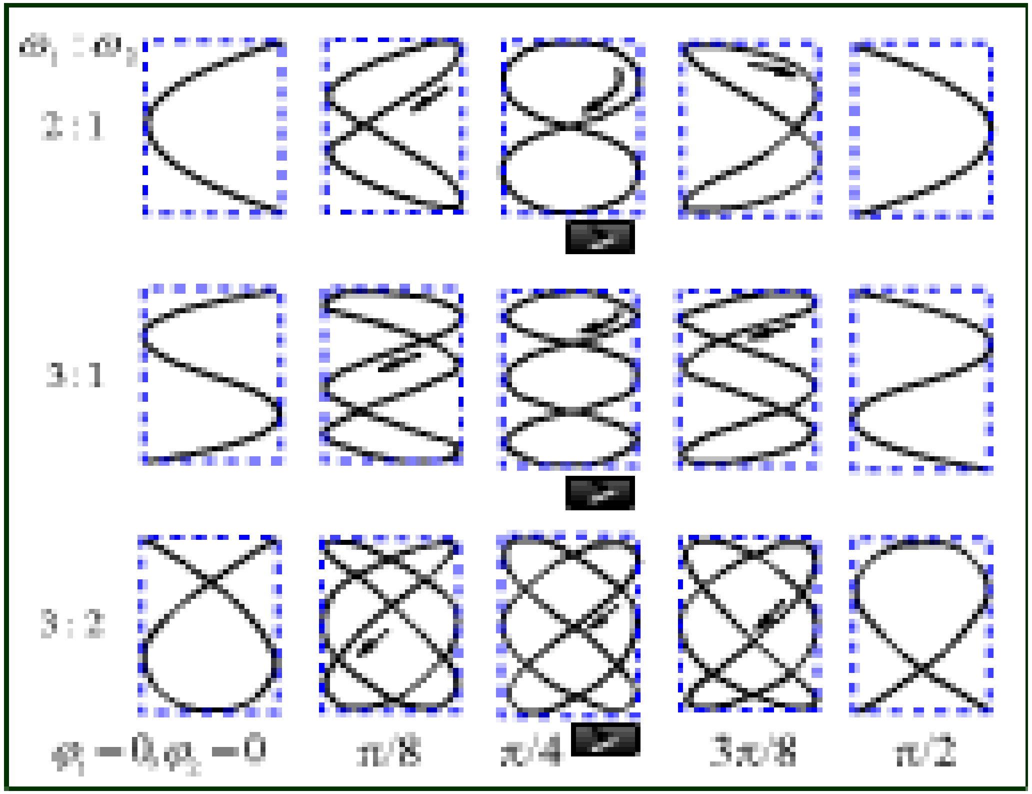
李 萨 如 图

$$\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2 = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

测量振动频率和相位的方法



# §4.6 阻尼振动 受迫振动 共振

## 一 阻尼振动

受力分析： 回复力 $F=-kx$

阻尼力 $F_r=-Cv$ 阻力系数

$$-kx-Cv=ma$$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+kx=0}$$

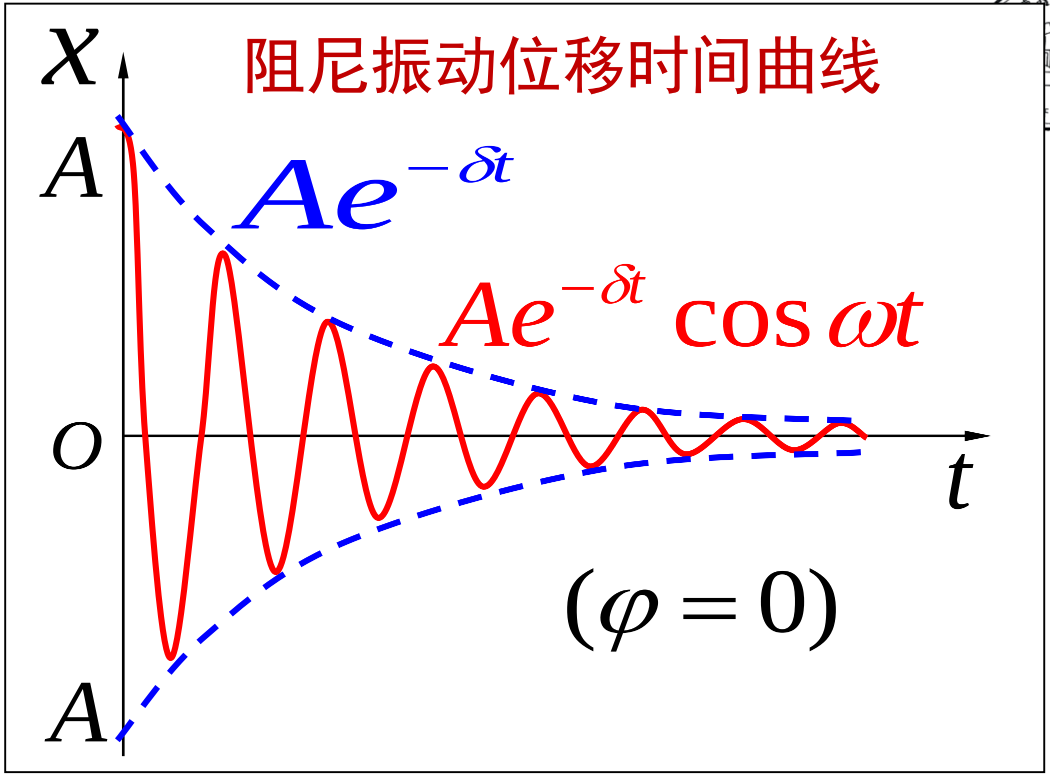
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}\quad\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}} & \text{固有角频率}\\ \delta=C/2m & \text{阻尼系数}\end{cases}$$

$$x = \boxed{Ae^{-\delta t}}\cos(\boxed{\omega} t + \varphi)$$

振幅　　角频率

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \Big/ \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

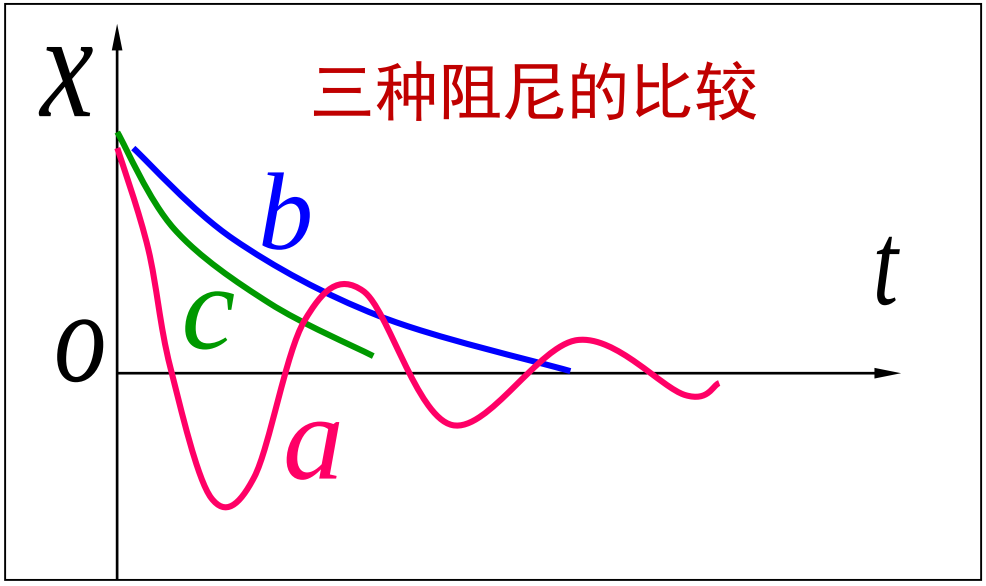



讨论：$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

a）欠阻尼 $\omega_0^2 > \delta^2$

b）过阻尼 $\omega_0^2 < \delta^2$

c）临界阻尼 $\omega_0^2 = \delta^2$



## 二 受迫振动

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+kx=\boxed{F\cos\omega_p t}$$

驱动力

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\omega_p t}$$

$$\begin{cases}\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\\ 2\delta=C/m\\ f=F/m\end{cases}$$

驱动力的角频率

$$x=\cancel{A_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)}+A\cos(\omega_p t+\psi)$$

$$\boxed{A=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_p^2)+4\delta^2\omega_p^2}}}$$

$$\boxed{tg\,\psi=\frac{-2\delta\omega_p}{\omega_0^2-\omega_p^2}}$$

# 三 共振

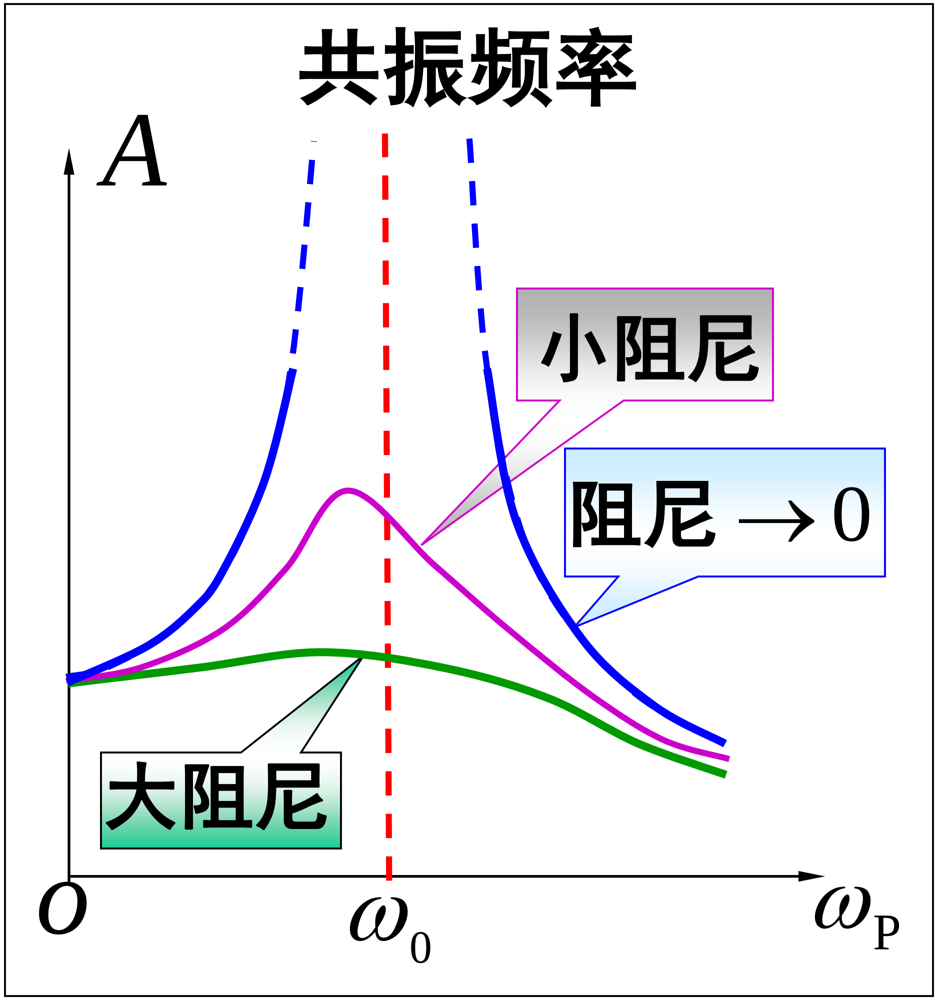
$$x = A\cos(\omega_p t + \psi)$$

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2) + 4\delta^2\omega_p^2}}$$

$$\frac{dA}{d\omega_p} = 0$$

共振频率 $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

共振振幅 $A_r = \dfrac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$



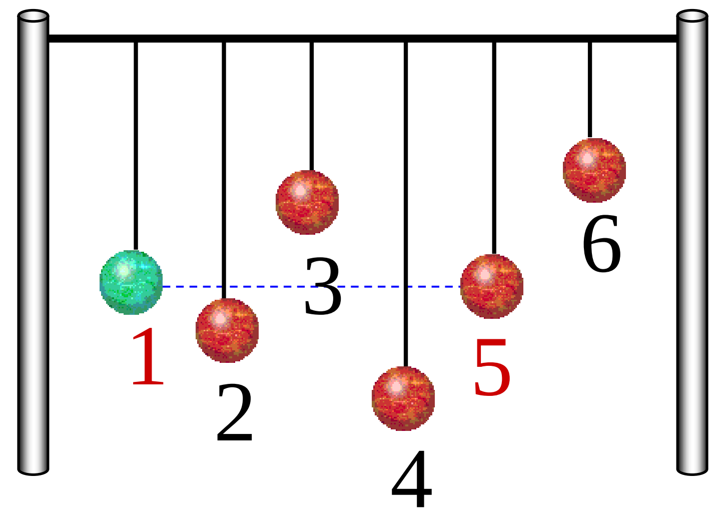
◆ 共振频率

$$\omega_{\mathrm{r}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

◆ 共振振幅

$$A_{\mathrm{r}} = \frac{f}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

共振演示实验




单摆1作垂直于纸面的简谐运动时，单摆5将作相同周期的简谐运动，其它单摆基本不动.

◆ 共振现象在实际中的应用

乐器、收音机 ……

【例 16】有一单摆在空气（室温为 $20^\circ\mathrm{C}$ ）中来回摆动．其摆线长 $l=1.0\mathrm{m}$，摆锤是一半径 $r=5.0\times10^{-3}\mathrm{m}$ 的铅球．求(1)摆动周期；(2)振幅减小10%所需的时间；(3)能量减小10%所需的时间；(4)从以上所得结果说明空气的粘性对单摆周期、振幅和能量的影响.

（已知铅球密度为 $\rho=2.65\times10^{3}\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，）

$20^\circ\mathrm{C}$ 时空气的粘度 $\eta=1.78\times10^{-5}\mathrm{Pa\cdot s}$

**解 （1）** $\omega_0=\sqrt{g/l}=3.13\mathrm{s}^{-1}$

$$F_{\mathrm{r}}=-6\pi r\eta v=-Cv$$

$$\delta=C/2m=9\eta/4r^2\rho=6.04\times10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$$

$$\because \delta<<\omega_0$$

$$\therefore T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}\approx\frac{2\pi}{\omega_0}\approx2\mathrm{s}$$

（2）有阻尼时 $A' = A\mathrm{e}^{-\delta t}$

$$0.9A = A\mathrm{e}^{-\delta t_1}$$

$$t_1 = \frac{\ln \frac{1}{0.9}}{\delta} = 174\mathrm{s} \approx 3\,\mathrm{min}$$

（3） $\frac{E'}{E} = \left(\frac{A'}{A}\right)^2 = \mathrm{e}^{-2\delta t}$

$$0.9 = \mathrm{e}^{-2\delta t_2}$$

$$t_2 = \frac{\ln \frac{1}{0.9}}{2\delta} = 87\mathrm{s} \approx 1.5\,\mathrm{min}$$