



主要内容

- 代数系统----二元运算及其性质、代数系统和子代数
- 半群与群----半群、独异点、群
- 环与域-----环、整环、域
- 格与布尔代数----格、布尔代数



主要内容

二元运算及其性质

- 一元和二元运算定义及其实例
- 二元运算的性质

代数系统

- 代数系统定义及其实例
- 子代数
- 积代数

代数系统的同态与同构



定义9.1 设 S 为集合，函数 $f: S \times S \rightarrow S$ 称为 S 上的**二元运算**，简称为二元运算。

- S 中任何两个元素都可以进行运算，且运算的结果惟一。
- S 中任何两个元素的运算结果都属于 S ，即 S 对该运算封闭。

例1 (1) 自然数集合 \mathbb{N} 上的加法和乘法是 \mathbb{N} 上的二元运算，但减法和除法不是。

(2) 整数集合 \mathbb{Z} 上的加法、减法和乘法都是 \mathbb{Z} 上的二元运算，而除法不是。

(3) 非零实数集 \mathbb{R}^* 上的乘法和除法都是 \mathbb{R}^* 上的二元运算，而加法和减法不是。



(4) 设 $M_n(\mathbf{R})$ 表示所有 n 阶($n \geq 2$)实矩阵的集合, 即

$$M_n(R) = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \mid a_{ij} \in R, i, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

则矩阵加法和乘法都是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的二元运算.

(5) S 为任意集合, 则 \cup 、 \cap 、 $-$ 、 \oplus 为 $P(S)$ 上二元运算.

(6) S^S 为 S 上的所有函数的集合, 则合成运算 \circ 为 S^S 上二元运算.



定义9.2 设 S 为集合, 函数 $f:S \rightarrow S$ 称为 S 上的一元运算, 简称一元运算.

例2 (1) 求相反数是整数集合 \mathbb{Z} , 有理数集合 \mathbb{Q} 和实数集合 \mathbb{R} 上的一元运算

(2) 求倒数是非零有理数集合 \mathbb{Q}^* , 非零实数集合 \mathbb{R}^* 上一元运算

(3) 求共轭复数是复数集合 \mathbb{C} 上的一元运算

(4) 在幂集 $P(S)$ 上规定全集为 S , 则求绝对补运算 \sim 是 $P(S)$ 上的一元运算.

(5) 设 S 为集合, 令 A 为 S 上所有双射函数的集合, $A \subseteq S^S$, 求一个双射函数的反函数为 A 上的一元运算.

(6) 在 $n(n \geq 2)$ 阶实矩阵的集合 $M_n(\mathbb{R})$ 上, 求转置矩阵是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的一元运算.



1. 算符

可以用 $\circ, *, \cdot, \oplus, \otimes, \Delta$ 等符号表示二元或一元运算, 称为算符.

对二元运算 \circ , 如果 x 与 y 运算得到 z , 记做 $x \circ y = z$

对一元运算 Δ , x 的运算结果记作 Δx .

2. 表示二元或一元运算的方法: 解析公式和运算表

公式表示

例 设 \mathbf{R} 为实数集合, 如下定义 \mathbf{R} 上的二元运算 $*$:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, x * y = x.$$

那么 $3 * 4 = 3$, $0.5 * (-3) = 0.5$



运算表：表示有穷集上的一元和二元运算

\circ	a_1	a_2	\dots	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	\dots	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	\dots	$a_2 \circ a_n$
\vdots		\dots		
\vdots		\dots		
\vdots		\dots		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	\dots	$a_n \circ a_n$

二元运算的运算表

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
a_n	$\circ a_n$

一元运算的运算表



例3 设 $S=P(\{a,b\})$, S 上的 \oplus 和 \sim 运算的运算表如下

\oplus	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
\emptyset	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	\emptyset	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	\emptyset	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	\emptyset

x	$\sim x$
\emptyset	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	\emptyset



定义9.3 设 \circ 为 S 上的二元运算,

- (1) 若对任意 $x, y \in S$ 有 $x \circ y = y \circ x$, 则称运算在 S 上满足**交换律**.
- (2) 若对任意 $x, y, z \in S$ 有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, 则称运算在 S 上满足**结合律**.
- (3) 若对任意 $x \in S$ 有 $x \circ x = x$, 则称运算在 S 上满足**幂等律**.

定义9.4 设 \circ 和 $*$ 为 S 上两个不同的二元运算,

- (1) 若对任意 $x, y, z \in S$ 有 $(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$,
 $z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$, 则称 \circ 运算对 $*$ 运算满足**分配律**.
- (2) 若 \circ 和 $*$ 都可交换, 且对任意 $x, y \in S$ 有 $x \circ (x * y) = x$, $x * (x \circ y) = x$,
则称 \circ 和 $*$ 运算满足**吸收律**.



$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 分别为整数、有理数、实数集； $M_n(\mathbf{R})$ 为 n 阶实矩阵集合, $n \geq 2$ ； $P(B)$ 为幂集； A^A 为从 A 到 A 的函数集, $|A| \geq 2$

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$	普通加法+ 普通乘法×	有 有	有 有	无 无
$M_n(\mathbf{R})$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	有 无	有 有	无 无
$P(B)$	并 \cup 交 \cap 相对补— 对称差 \oplus	有 有 无 有	有 有 无 有	有 有 无 无
A^A	函数复合 \circ	无	有	无



$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 分别为整数、有理数、实数集； $M_n(\mathbb{R})$ 为 n 阶实矩阵集合, $n \geq 2$ ； $P(B)$ 为幂集； A^A 为从 A 到 A 的函数集, $|A| \geq 2$

集合	运算	分配律	吸收律
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	普通加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$M_n(\mathbb{R})$	矩阵加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$P(B)$	并 \cup 与交 \cap	\cup 对 \cap 可分配 \cap 对 \cup 可分配	有
	交 \cap 与对称差 \oplus	\cap 对 \oplus 可分配	无



定义9.5 设 \circ 为 S 上的二元运算,

(1) 如果存在 e_l (或 e_r) $\in S$, 使得对任意 $x \in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \text{ (或 } x \circ e_r = x),$$

则称 e_l (或 e_r)是 S 中关于 \circ 运算的左(或右)单位元.

若 $e \in S$ 关于 \circ 运算既是左单位元又是右单位元, 则称 e 为 S 上关于 \circ 运算的单位元. 单位元也叫做幺元.

(2) 如果存在 θ_l (或 θ_r) $\in S$, 使得对任意 $x \in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \text{ (或 } x \circ \theta_r = \theta_r),$$

则称 θ_l (或 θ_r)是 S 中关于 \circ 运算的左(或右)零元.

若 $\theta \in S$ 关于 \circ 运算既是左零元又是右零元, 则称 θ 为 S 上关于运算 \circ 的零元.



(3) 设 \circ 为 S 上的二元运算, 令 e 为 S 中关于运算 \circ 的单位元.

对于 $x \in S$, 如果存在 y_l (或 y_r) $\in S$ 使得

$$y_l \circ x = e \quad (\text{或} \quad x \circ y_r = e)$$

则称 y_l (或 y_r) 是 x 的左逆元 (或右逆元).

关于 \circ 运算, 若 $y \in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元, 则称 y 为 x 的逆元. 如果 x 的逆元存在, 就称 x 是可逆的.



集合	运算	单位元	零元	逆元
$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$	普通加法+ 普通乘法×	$\mathbf{0}$ $\mathbf{1}$	无 $\mathbf{0}$	x 逆元 $-x$ x 逆元 x^{-1} ($x^{-1} \in$ 给定集合)
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	n 阶全 $\mathbf{0}$ 矩阵 n 阶单位矩阵	无 n 阶全 $\mathbf{0}$ 矩阵	X 逆元 $-X$ X 的逆元 X^{-1} (X 可逆)
$P(B)$	并 \cup 交 \cap 对称差 \oplus	\emptyset B \emptyset	B \emptyset 无	\emptyset 的逆元为 \emptyset B 的逆元为 B X 的逆元为 X



定理9.1 设 \circ 为 S 上的二元运算, e_l 和 e_r 分别为 S 中关于运算的左和右单位元, 则 $e_l = e_r = e$ 为 S 上关于 \circ 运算的惟一的单位元.

证:
$$e_l = e_l \circ e_r \quad (e_r \text{ 为右单位元})$$
$$e_l \circ e_r = e_r \quad (e_l \text{ 为左单位元})$$

所以 $e_l = e_r$, 将这个单位元记作 e .

假设 e' 也是 S 中的单位元, 则有 $e' = e \circ e' = e$. 惟一性得证.

类似地可以证明关于零元的惟一性定理.

注意:

- 当 $|S| \geq 2$, 单位元与零元是不同的;
- 当 $|S| = 1$ 时, 这个元素既是单位元也是零元.



定理9.2 设 \circ 为 S 上可结合的二元运算, e 为该运算的单位元, 对于 $x \in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r , 则有 $y_l = y_r = y$, 且 y 是 x 的惟一的逆元.

证: 由 $y_l \circ x = e$ 和 $x \circ y_r = e$ 得

$$y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$$

令 $y_l = y_r = y$, 则 y 是 x 的逆元.

假若 $y' \in S$ 也是 x 的逆元, 则

$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$

所以 y 是 x 惟一的逆元.

- 说明: 对于可结合的二元运算, 可逆元素 x 只有惟一的逆元, 记作 x^{-1}



定义9.6 非空集合 S 和 S 上 k 个一元或二元运算 f_1, f_2, \dots, f_k 组成的系统称为**代数系统**, 简称代数, 记做 $\langle S, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$.

实例:

- (1) $\langle \mathbf{N}, + \rangle, \langle \mathbf{Z}, +, \cdot \rangle, \langle \mathbf{R}, +, \cdot \rangle$ 是代数系统, $+$ 和 \cdot 分别表示普通加法和乘法.
- (2) $\langle M_n(\mathbf{R}), +, \cdot \rangle$ 是代数系统, $+$ 和 \cdot 分别表示 n 阶($n \geq 2$)实矩阵的加法和乘法.
- (3) $\langle \mathbf{Z}_n, \oplus, \otimes \rangle$ 是代数系统, $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, \oplus 和 \otimes 分别表示模 n 的加法和乘法, 对于 $x, y \in \mathbf{Z}_n$, $x \oplus y = (x + y) \bmod n$,
 $x \otimes y = (xy) \bmod n$
- (4) $\langle P(S), \cup, \cap, \sim \rangle$ 是代数系统, \cup 和 \cap 为并和交, \sim 为绝对补



构成代数系统的成分：

- 集合（也叫载体，规定了参与运算的元素）
- 运算（这里只讨论有限个二元和一元运算）
- 代数常数（通常是与运算相关的特异元素：如单位元等）

研究代数系统时，如果把运算具有它的特异元素也作为系统的性质之一，那么这些特异元素可以作为系统的成分，叫做代数常数。

例如：代数系统 $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ ：集合 \mathbb{Z} , 运算 $+$, 代数常数 0

代数系统 $\langle P(S), \cup, \cap \rangle$ ：集合 $P(S)$, 运算 \cup 和 \cap , 无代数常数



- (1) 列出所有的成分：集合、运算、代数常数（如果存在）
如 $\langle \mathbf{Z}, +, 0 \rangle$, $\langle P(S), \cup, \cap \rangle$
- (2) 列出集合和运算，在规定系统性质时不涉及具有单位元的性质（无代数常数）
如 $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$, $\langle P(S), \cup, \cap \rangle$
- (3) 用集合名称简单标记代数系统
在前面已经对代数系统作了说明的前提下使用
如代数系统 \mathbf{Z} , $P(B)$



定义9.7

- (1) 如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们是**同类型的**代数系统.
- (2) 如果两个同类型的代数系统规定的运算性质也相同，则称为**同种的**代数系统.

例如 $V_1 = \langle \mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, $V_2 = \langle M_n(\mathbf{R}), +, \cdot, \theta, E \rangle$, θ 为 n 阶全0矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, $V_3 = \langle P(B), \cup, \cap, \emptyset, B \rangle$

- V_1, V_2, V_3 是同类型的代数系统，它们都含有2个二元运算，2个代数常数.
- V_1, V_2 是同种的代数系统， V_1, V_2 与 V_3 不是同种的代数系统



V_1	V_2	V_3
+ 可交换、可结合 · 可交换、可结合 + 满足消去律 · 不满足消去律 · 对 + 可分配 + 对 · 不可分配 + 与 · 没有吸收律	+ 可交换、可结合 · 可交换、可结合 + 满足消去律 · 不满足消去律 · 对 + 可分配 + 对 · 不可分配 + 与 · 没有吸收律	\cup 可交换、可结合 \cap 可交换、可结合 \cup 不满足消去律 \cap 不满足消去律 \cap 对 \cup 可分配 \cup 对 \cap 可分配 \cup 与 \cap 满足吸收律



定义9.8 设 $V=\langle S, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 是代数系统, B 是 S 的非空子集, 如果 B 对 f_1, f_2, \dots, f_k 都是封闭的, 且 B 和 S 含有相同的代数常数, 则称 $\langle B, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ 是 V 的**子代数系统**, 简称子代数. 有时将子代数系统简记为 B .

实例

\mathbf{N} 是 $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ 的子代数, \mathbf{N} 也是 $\langle \mathbf{Z}, +, 0 \rangle$ 的子代数

$\mathbf{N}-\{0\}$ 是 $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ 的子代数, 但不是 $\langle \mathbf{Z}, +, 0 \rangle$ 的子代数

说明:

- 子代数和原代数是同种的代数系统
- 对于任何代数系统 $V=\langle S, f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$, 其子代数一定存在.



- (1) **最大的子代数**: 就是 V 本身
- (2) **最小的子代数**: 如果令 V 中所有代数常数构成的集合是 B , 且 B 对 V 中所有的运算都是封闭的, 则 B 就构成了 V 的最小的子代数
- (3) 最大和最小的子代数称为 V 的**平凡子代数**
- (4) 若 B 是 S 的真子集, 则 B 构成的子代数称为 V 的**真子代数**.

例 设 $V=\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, 令 $n\mathbb{Z}=\{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$, n 为自然数, 则 $n\mathbb{Z}$ 是 V 的子代数

当 $n=1$ 和 0 时, $n\mathbb{Z}$ 是 V 的平凡子代数, 其他的都是 V 的非平凡的真子代数.



定义9.9 设 $V_1=\langle A, \circ \rangle$ 和 $V_2=\langle B, * \rangle$ 是同类型的代数系统， \circ 和 $*$ 为二元运算，在集合 $A \times B$ 上如下定义二元运算 \blacksquare ，

$\forall \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in A \times B$ ，有

$$\langle a_1, b_1 \rangle \blacksquare \langle a_2, b_2 \rangle = \langle a_1 \circ a_2, b_1 * b_2 \rangle$$

称 $V=\langle A \times B, \blacksquare \rangle$ 为 V_1 与 V_2 的**积代数**，记作 $V_1 \times V_2$. 这时也称 V_1 和

V_2 为 V 的**因子代数**.

注意：积代数的定义可以推广到具有多个运算的同类型的代数系统



定理9.3 设 $V_1 = \langle A, \circ \rangle$ 和 $V_2 = \langle B, * \rangle$ 是同类型的代数系统,

$V_1 \times V_2 = \langle A \times B, \blacksquare \rangle$ 是它们的积代数.

- (1) 如果 \circ 和 $*$ 运算是可交换（可结合、幂等）的，那么 \blacksquare 运算也是可交换（可结合、幂等）的
- (2) 如果 e_1 和 e_2 (θ_1 和 θ_2) 分别为 \circ 和 $*$ 运算的单位元（零元），那么 $\langle e_1, e_2 \rangle$ ($\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$) 也是 \blacksquare 运算的单位元（零元）
- (3) 如果 x 和 y 分别为 \circ 和 $*$ 运算的可逆元素，那么 $\langle x, y \rangle$ 也是 \blacksquare 运算的可逆元素，其逆元就是 $\langle x^{-1}, y^{-1} \rangle$



定义9.10 设 $V_1 = \langle A, \circ \rangle$ 和 $V_2 = \langle B, * \rangle$ 是同类型的代数系统, $f: A \rightarrow B$, 且 $\forall x, y \in A$ 有 $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$, 则称 f 是 V_1 到 V_2 的 **同态映射**, 简称**同态**.

同态分类:

- (1) f 如果是单射, 则称为**单同态**
- (2) 如果是满射, 则称为**满同态**, 这时称 V_2 是 V_1 的**同态像**, 记作 $V_1 \sim V_2$
- (3) 如果是双射, 则称为**同构**, 也称代数系统 V_1 **同构** 于 V_2 , 记作 $V_1 \cong V_2$
- (4) 如果 $V_1 = V_2$, 则称作**自同态**



- (1) 设 $V_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $V_2 = \langle \mathbb{Z}_n, \oplus \rangle$. 其中 \mathbb{Z} 为整数集, $+$ 为普通加法;
 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, \oplus 为模 n 加. 令

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, f(x) = (x) \bmod n$$

那么 f 是 V_1 到 V_2 的满同态.

- (2) 设 $V_1 = \langle \mathbb{R}, + \rangle$, $V_2 = \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$, 其中 \mathbb{R} 和 \mathbb{R}^* 分别为实数集与非零实数集, $+$ 和 \cdot 分别表示普通加法与乘法. 令

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = e^x$$

则 f 是 V_1 到 V_2 的单同态.



主要内容

- 代数系统的构成：非空集合、封闭的二元和一元运算、代数常数
- 二元运算性质和特异元素：交换律、结合律、幂等律、分配律、吸收律、单位元、零元、可逆元和逆元
- 同类型的与同种的代数系统
- 子代数的定义与实例
- 积代数的定义与性质
- 代数系统的同态与同构



- 判断给定集合和运算能否构成代数系统
- 判断给定二元运算的性质
- 求而二元运算的特异元素
- 了解同类型和同种代数系统的概念
- 了解子代数的基本概念
- 计算积代数
- 判断函数是否为同态映射和同构映射



1. 设 \circ 运算为 Q 上的二元运算,

$$\forall x, y \in Q, x \circ y = x + y + 2xy,$$

(1) 判断 \circ 运算是否满足交换律和结合律, 并说明理由.

(2) 求出 \circ 运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

(1) \circ 运算可交换, 可结合.

任取 $x, y \in Q$,

$$x \circ y = x + y + 2xy = y + x + 2yx = y \circ x,$$

任取 $x, y, z \in Q$,

$$\begin{aligned}(x \circ y) \circ z &= (x + y + 2xy) + z + 2(x + y + 2xy)z \\&= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz \\x \circ (y \circ z) &= x + (y + z + 2yz) + 2x(y + z + 2yz) \\&= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz\end{aligned}$$



(2) 设 \circ 运算的单位元和零元分别为 e 和 θ ，则对于任意 x 有 $x \circ e = x$ 成立，即

$$x + e + 2xe = x \Rightarrow e = 0$$

由于 \circ 运算可交换，所以 0 是么元.

对于任意 x 有 $x \circ \theta = \theta$ 成立，即

$$x + \theta + 2x\theta = \theta \Rightarrow x + 2x\theta = 0 \Rightarrow \theta = -1/2$$

给定 x ，设 x 的逆元为 y ，则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x + y + 2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x} \quad (x \neq -1/2)$$

因此当 $x \neq -1/2$ 时， $-\frac{x}{1+2x}$ 是 x 的逆元.



2. 下面是三个运算表

(1) 说明那些运算是可交换的、可结合的、幂等的.

(2) 求出每个运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

\circ	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

\cdot	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c



- (1) * 满足交换律, 满足结合律, 不满足幂等律.
- 不满足交换律, 满足结合律, 满足幂等律.
 - 满足交换律, 满足结合律, 不满足幂等律.
- (2) * 的单位元为 b , 没有零元, $a^{-1}=c, b^{-1}=b, c^{-1}=a$
- 的单位元和零元都不存在, 没有可逆元素.
 - 的单位元为 a , 零元为 c , $a^{-1}=a$, b, c 不是可逆元素.

说明: 关于结合律的判断

需要针对运算元素的每种选择进行验证, 若 $|A|=n$, 一般需要验证 n^3 个等式.

单位元和零元不必参与验证.

通过对具体运算性质的分析也可能简化验证的复杂性.



3. 设 G 为非0实数集 R^* 关于普通乘法构成的代数系统，判断下述函数是否为 G 的自同态？如果不是，说明理由。如果是，判别它们是否为单同态、满同态、同构。

(1) $f(x) = |x| + 1$

(2) $f(x) = |x|$

(3) $f(x) = 0$

(4) $f(x) = 2$



解 (1) 不是同态, 因为 $f(2 \times 2) = f(4) = 5$, $f(2) \times f(2) = 3 \times 3 = 9$

(2) 是同态, 不是单同态, 也不是满同态, 因为 $f(1) = f(-1)$, 且 $\text{ran } f$ 中没有负数.

(3) 不是 G 的自同态, 因为 f 不是 G 到 G 的函数

(4) 不是 G 的自同态, 因为 $f(2 \times 2) = 2$, $f(2) \times f(2) = 2 \times 2 = 4$

说明: 判别或证明同态映射的方法

(1) 先判断 (或证明) f 是 G_1 到 G_2 的映射 $f: G_1 \rightarrow G_2$. 如果已知 $f: G_1 \rightarrow G_2$, 则这步判断可以省去.

(2) $\forall x, y \in G_1$, 验证 $f(xy) = f(x)f(y)$

(3) 判断同态性质只需判断函数的单射、满射、双射性即可.