可靠性概述

华东理工大学机械与动力工程学院

主讲：刘长虹

可靠性概述

第2章 可靠性数学基础

2.1随机事件与概率

随机现象：自然界中的有两类现象

1. 确定性现象
   - 每天早晨太阳从东方升起；
   - 水在标准大气压下加温到100°C沸腾；
2. 随机现象
   - 掷一枚硬币，正面朝上？反面朝上？
   - 一天内进入某超市的顾客数；
   - 某种型号电视机的寿命；

- 随机现象：在一定的条件下，并不总出现相同结果的现象称为随机现象.
- 特点：1. 结果不止一个;
  2. 事先不知道哪一个会出现.
- 随机现象的统计规律性：随机现象的各种结果会表现出一定的规律性，这种规律性称之为统计规律性.

2.1随机事件与概率

2.1.1 随机事件及其运算

随机事件：随机试验的可能结果。

1.随机试验：对随机现象进行的实验与观察。

它具有两个特点：随机性、重复性。

（1）试验在相同条件下可以重复进行；

（2）每次试验至少有两个可能结果，且在试验结束前可以明确知道所有可能结果；

（3）每次试验结束前不能确定将会出现哪一种结果。

2.1随机事件与概率

2、随机事件

在单次试验中不能确定是否发生，而在大量重复试验中具有某种规律性的事件。

事件的分类：

（1）基本事件：实验的最基本结果，不能再分解。

（2）复合事件：由若干基本事件符合而成的事件。

（3）必然事件：在每次事件中必定发生的事件。（Ω）

（4）不可能事件：每次试验中一定不会发生的事件。（ф）

2. 随机事件

1. 随机事件 —— 某些样本点组成的集合，Ω的子集，常用A、B、C…表示.

2. 基本事件 —— Ω的单点集.

3. 必然事件 (Ω)

4. 不可能事件 (φ) —— 空集.

5. 随机变量 表示随机现象结果的变量.

常用大写字母 X、Y、Z …表示.

3、事件的表示

样本点（ω）：每一个基本事件所对应的一个元素。
样本空间（Ω）：全体样本点构成的集合。

两类样本空间：
离散样本空间　样本点的个数为有限个或可列个。
连续样本空间　样本点的个数为无限不可列个。

2.1.2 概率及其特点

1. 概率：

在试验中发生事件A的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件}}{\text{基本事件总数}}=\frac{m}{n} \qquad (2\text{-}1)$$

在一可测空间S上，事件 A发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{的测度}}{S\text{的测度}}=\frac{L(A)}{L(S)} \qquad (2\text{-}2)$$

2.1.2 - 2.概率的基本特点

(1) $0 \le P(A) \le 1;$

(2) 对于必然事件*Ω*，有*P(Ω)=1*。

(3) 对于不可能事件*φ*，有*P(φ)=0*。

2.2 随机变量

2.2.1 随机变量的定义和分类

定义：对于随机试验的每一个基本可能结果ω，都对应着一个实数X(ω)，则称X为定义在样本空间的随机变量。

表示随机现象结果的变量。常用大写字母 *X*、*Y*、*Z*…表示。

种类：（1）离散型随机变量：若随机变量 *X* 可能取值的个数为有限个或可列个。

（2）连续型随机变量：若随机变量 *X* 的可能取值充满某个区间 [*a*, *b*] 。

随机变量的分布函数

定义2.1.2 设X为一个随机变量，对任意实数 x，称 $F(x)=P(X\le x)$ 为 X 的分布函数.

基本性质：

(1) $F(x)$ 单调不降；

(2) 有界：$0\le F(x)\le 1$，$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$；

(3) 右连续.

离散随机变量的分布列

设离散随机变量 X 的可能取值为：

x_1，x_2，……，x_n，……

称 $p_i=P(X=x_i)$，$i=1, 2,$ …… 为 X 的分布列.

分布列也可用表格形式表示：

X	x_1	x_2	……	x_n	……
P	p_1	p_2	……	p_n	……

分布列的基本性质

(1) $p_i\ge 0$，(非负性)

(2) $\sum_i p_i=1$ (正则性)

注 意 点 (1)

求离散随机变量的分布列应注意：

(1) 确定随机变量的所有可能取值；

(2) 计算每个取值点的概率.

注 意 点 (2)

对离散随机变量的<u>分布函数</u>应注意：

(1) $F(x)$是递增的<u>阶梯函数</u>；

(2) 其间断点均为右连续的；

(3) 其间断点即为X的可能取值点；

(4) 其间断点的<u>跳跃高度</u>是对应的概率值.

算例

已知 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	1/3	1/6	1/2

求 X 的分布函数.

解：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1/3, & 0\le x<1\\ 1/2, & 1\le x<2\\ 1, & 2\le x\end{cases}$$

连续随机变量的密度函数

（1）连续随机变量X的可能取值充满某个区间 (a, b).

（2）因为对连续随机变量X，有$P(X=x)=0$，所以<u>无法</u>仿离散随机变量用 $P(X=x)$ 来描述连续随机变量X的分布.

（3）注意离散随机变量与连续随机变量的差别.

<u>定义</u>

设随机变量X的分布函数为$F(x)$,

若存在非负可积函数 $p(x)$，满足：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

则称 X 为<u>**连续随机变量**</u>，

称 $p(x)$为<u>概率密度函数</u>，简称<u>密度函数</u>.

密度函数的基本性质

(1) $p(x) \ge 0$; (非负性)

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (正则性)

满足(1) (2)的函数都可以看成某个连续随机变量的概率密度函数.

注意点(1)

(1) $P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)dx$.

(2) $F(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数;

(3) $P(X=x) = F(x) - F(x-0) = 0$;

注意点(2)

(4) $P\{a<X\le b\} = P\{a<X<b\}$
$= P\{a\le X<b\}$
$= P\{a\le X\le b\}$
$= F(b)-F(a)$.

(5) 当$F(x)$ 在x点可导时, $p(x) = F'(x)$

当$F(x)$ 在x点不可导时, 可令$p(x) = 0$.

离散型	连续型
1. 分布列: $p_n = P(X=x_n)$ (唯一)	1. 密度函数 $X \sim p(x)$ (不唯一)
2. $F(x) = \sum_{x_i \le x} P(X=x_i)$	2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$
3. $F(a+0) = F(a)$; $P(a<X\le b) = F(b)-F(a)$.	
4. 点点计较	4. $P(X=a) = 0$
5. $F(x)$为阶梯函数。 $F(a-0) \ne F(a)$.	5. $F(x)$为连续函数。 $F(a-0) = F(a)$.

例

设 $X \sim p(x)=\begin{cases} ke^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$

求 (1) 常数 k. (2) $F(x)$.

解：

(1) $k=3$.

(2) $F(x)=\begin{cases} 1-e^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$

例

设 $X \sim p(x)=\begin{cases} 1+x, & -1\le x<0 \\ 1-x, & 0\le x<1 \\ 0, & \text{其 它} \end{cases}$ 求 $F(x)$.

解：

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & -1\le x<0 \\ -\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$$

2.2 随机变量的数字特征

1. 数学期望：

$P(X=x_k)=p_k$， $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

对于连续型概率密度函数， $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$

注 意 点

（1）数学期望简称为期望.

（2）数学期望又称为均值.

（3）数学期望是一种加权平均.

数学期望的性质

(1) $E(c) = c$

(2) $E(aX) = aE(X)$

(3) $E(g_1(X)+g_2(X)) = E(g_1(X))+E(g_2(X))$

例题

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

则

$$E(X) = -1\times 0.2+0\times 0.1+1\times 0.4+2\times 0.3 = 0.8.$$

2. 方差：方差(variance)与标准差(standard deviation)

是测定一组数据离散程度的最常用的测度值，它反映了每个数据与其平均数相比平均相差的数值

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

$$D(X) = \sum (x_k - E(X))^2 P(X = x_k); \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - E(X))^2 \varphi(x) dx$$

随机变量的方差与标准差

1）数学期望反映了X取值的中心.

2）方差反映了X取值的离散程度.

方差与标准差的定义

定义　若 $E(X-E(X))^2$ 存在，则称 $E(X-E(X))^2$ 为 X 的方差，记为

$$\mathrm{Var}(X)=D(X)=E(X-E(X))^2$$

注 意 点

(1) 方差反映了随机变量相对其均值的偏离程度. 方差越大，则随机变量的取值越分散.

(2) 称 $\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ 为 X 的标准差.
标准差的量纲与随机变量的量纲相同.

方差的性质

(1) $\mathrm{Var}(c)=0$

(2) $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

(3) $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

例题

设 $X\sim\ p(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \\ 0 & \text{其 它} \end{cases}$，求 $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

解：(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot x\mathrm{d}x+\int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+(x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_1^2=1$$

(2) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\mathrm{d}x$

$=7/6$

所以，$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)^2]=7/6-1=1/6$

随机变量的标准化

设 $\mathrm{Var}(X)>0$, 令 $Y=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$

则有 $E(Y)=0$, $\mathrm{Var}(Y)=1$.

称 Y 为 X 的标准化.

3、协方差、相关系数

1）协方差

$$Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)],$$

$$Cov(X,Y)=\sum_i\sum_j[(x_i-EX)(y_j-EY)]P(X=x_i,Y=y_j);$$

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)(y-EY)\varphi(x,y)dxdy$$

2）相关系数

$$\rho_{xy}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

4、变异系数

定义：

称 $C_V=\dfrac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E(X)}$ 为 X 的变异系数.

作用：C_V 是无量纲的量，用于比较量纲不同的两个随机变量的波动大小.

2.3 常用的概率分布

- 2.3.1 离散型随机变量分布
- 2.3.2 连续型 随机变量分布
- 2.3.3 概率分布的应用

2.3.1 离散型随机变量分布

1. 二项分布

若事件A在每次试验中发生的概率均为p，则A在n次重复独立试验中恰好发生k次的概率为：

记为，X~B(n,P)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, q = 1-p,$$

当n=1时，称 $B(1,p)$ 为 0–1分布.

离散型随机变量分布

2. 泊松分布

其概率密度函数为：

$$P_\lambda(k) = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 1,\cdots,n$$

常用离散分布的数学期望

- 0–1 分布的数学期望 $= p$
- 二项分布 $b(n,p)$的数学期望 $= np$
- 几何分布$Ge(p)$ 的数学期望 $= 1/p$
- 泊松分布 $P(\lambda)$ 的数学期望 $= \lambda$

常用离散分布的方差

- 0–1 分布的方差 $= p(1-p)$
- 二项分布 $b(n,p)$的方差 $= np(1-p)$
- 几何分布$Ge(p)$ 的方差 $= (1-p)/p^2$
- 泊松分布 $P(\lambda)$ 的方差$= \lambda$

2.3.2 连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

若随机变量X的概率密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda, & a\le x\le b,\quad \lambda>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

则称X服从区间[a,b]上的均匀分布。

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

1. 均匀分布

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & b\le x\end{cases}$$

记为$X\sim U(a,b)$

均匀分布 $U(a,b)$的均值： $E(X)=(a+b)/2$

均匀分布 $U(a,b)$ 的方差 $=(b-a)^2/12$

2.3.2 连续型随机变量的分布

2. **指数分布**

- 指数分布在可靠性领域里应用最多，由于它的特殊性，以及在数学上易处理成较直观的曲线，故在许多领域中首先把指数分布讨论清楚。若产品的寿命或某一特征值t的故障密度为

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}\qquad (\lambda>0，t\ge 0)$$

- 则称t服从参数λ的指数分布。

2.指数分布

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

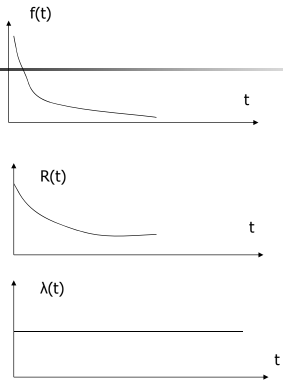
记为 $X\sim Exp(\lambda)$， 其中$\lambda>0$.

特别：指数分布具有无忆性，即：

$$P(X>s+t\mid X>s)=P(X>t)$$

指数分布 $Exp(\lambda)$ 的均值: $E(X)=1/\lambda$

指数分布 $Exp(\lambda)$ 的方差= $1/\lambda^2$



指数分布

- 则有：
- 不可靠度 $F(t)=1-e^{-\lambda t}$ ($t\geq 0$)
- 可靠度 $R(t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}$ ($t\geq 0$)
- 故障率 $\lambda(t)=f(t)/R(t)=\lambda$
- 平均故障间隔时间 $MTBF=\dfrac{1}{\lambda}=\theta$

指数分布例题

- 例7-1：一元件寿命服从指数分布，其平均寿命(θ)为2000小时，求故障率λ及求可靠度R(100)=? R(1000)=?
- 解：$\lambda = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{2000} = 5 \times 10^{-4}$ (小时)

$$R(100) = e^{-5\times10^{-4}\times100} = e^{-0.05} = 0.95$$

$$R(1000) = e^{-5\times10^{-4}\times1000} = e^{-0.5} = 0.60$$

- 此元件在100小时时的可靠度为0.95，而在1000小时时的可靠度为0.60。

指数分布性质

- 指数分布的一个重要性质是无记忆性。无记忆性是产品在经过一段时间t_0工作之后的剩余寿命仍然具有原来工作寿命相同的分布，而与t无关(马尔克夫性)。这个性质说明，寿命分布为指数分布的产品，过去工作了多久对现在和将来的寿命分布不发生影响。
- 实际意义?
- 在“浴盆曲线”中，它是属于偶发期这一时段的。

常用寿命分布函数

3. 正态分布

- 正态分布在机械可靠性设计中大量应用，如材料强度、磨损寿命、齿轮轮齿弯曲、疲劳强度以及难以判断其分布的场合。

若产品寿命或某特征值有故障密度

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(t≥0，μ≥0，σ≥0)

则称t服从正态分布。

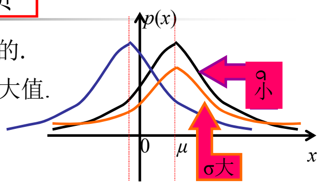
正态分布

- 则有： 不可靠度 $F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$
- 可靠度 $R(t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$
- 故障率 $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$
- 正态分布计算可用数学代换把上式变换成标准正态分布，查表简单计算，得出各参数值。

正态分布的性质

(1) $p(x)$ 关于μ 是对称的.

在μ 点 $p(x)$ 取得最大值.



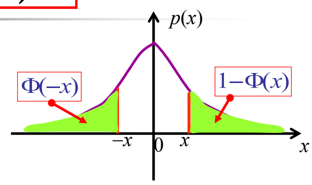
(2) 若σ固定, μ 改变,
$p(x)$左右移动,
形状保持不变.

(3) 若μ固定, σ改变,
σ越大曲线越平坦; σ越小曲线越陡峭.

标准正态分布$N(0, 1)$

密度函数记为 $\varphi(x)$,

分布函数记为 $\Phi(x)$.



(1) $\Phi(0)=\frac{1}{2}$,

(2) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

$\Phi(x)$ 的计算

(1) $x\geq 0$时, 查标准正态分布函数表.

(2) $x<0$时, 用 $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$.

若 $X\sim N(0, 1)$, 则

(1) $P(X\leq a)=\Phi(a)$;

(2) $P(X>a)=1-\Phi(a)$;

(3) $P(a<X<b)=\Phi(b)-\Phi(a)$;

(4) 若$a\geq 0$, 则

$$P(|X|<a)=P(-a<X<a)=\Phi(a)-\Phi(-a)$$
$$=\Phi(a)-[1-\Phi(a)]=2\Phi(a)-1$$

例题: 设 $X\sim N(0, 1)$, 求 $P(X>-1.96)$, $P(|X|<1.96)$

解: $P(X>-1.96)=1-\Phi(-1.96)$

$=1-(1-\Phi(1.96))=\Phi(1.96)$

$=0.975$ (查表得)

$P(|X|<1.96)=2\Phi(1.96)-1$

$=2\times 0.975-1=0.95$

例题：

设 $X\sim N(0,1)$, $P(X\le b)=0.9515$,
$P(X\le a)=0.04947$, 求 a, b.

解: $\Phi(b)=0.9515>1/2$,
所以 $b>0$,
反查表得:
$\Phi(1.66)=0.9515$,
故 $b=1.66$

而 $\Phi(a)=0.0495<1/2$,
所以 $a<0$,
$\Phi(-a)=0.9505$, 反查表得:
$\Phi(1.65)=0.9505$,
故 $a=-1.65$

一般正态分布的标准化

定理: 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,
则 $Y\sim N(0,1)$.

推论: 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则

$$P(X<a)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),\quad P(X>a)=1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

例题：

设 $X\sim N(10,4)$,
求 $P(10<X<13)$, $P(|X-10|<2)$.

解: $P(10<X<13)=\Phi(1.5)-\Phi(0)$
$=0.9332-0.5=0.4332$

$P(|X-10|<2)=P(8<X<12)$
$=2\Phi(1)-1=0.6826$

例题

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $P(X\le -5)=0.045$, $P(X\le 3)=0.618$, 求 μ 及 σ.

解:

$$\begin{cases}\dfrac{5+\mu}{\sigma}=1.69\\ \dfrac{3-\mu}{\sigma}=0.3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu=1.76\\ \sigma=4\end{cases}$$

正态分布的 3σ 原则

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则

$P(|X-\mu|<\sigma)=0.6828.$

$P(|X-\mu|<2\sigma)=0.9545.$

$P(|X-\mu|<3\sigma)=0.9973.$

正态变量的线性不变性

定理　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则当 $a\neq 0$ 时，

$Y=aX+b\sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2).$

由此得：　若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

则 $Y=(X-\mu)/\sigma\sim N(0,1).$

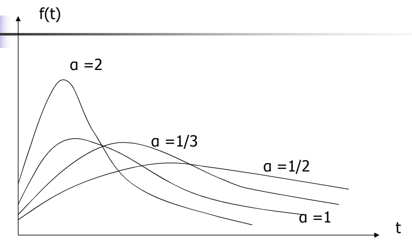
常用寿命分布函数

4.　威布尔分布

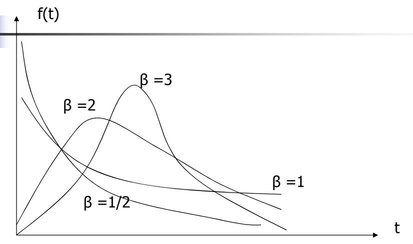
- 威布尔分布应用比较广泛，常用来描述材料疲劳失效、轴承失效等寿命分布的。
- 威布尔分布是用三个参数来描述，这三个参数分别是尺度参数α，形状参数β、位置参数γ，其概率密度函数为：

$$f(t)=\alpha\beta(t-\gamma)^{\beta-1}e^{-\alpha(t-\gamma)^{\beta}}$$

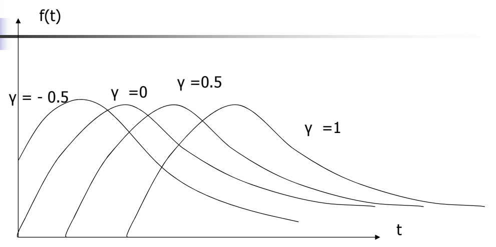
（$t\ge\gamma$，$\alpha>0$，$\beta>0$）



不同α值的威布尔分布 （β=2，γ=0）



不同β 值的威布尔分布 （ α =1，γ=0）



不同 γ值的威布尔分布 （ α =1， β =2）

威布尔分布

- 则有： 不可靠度 $F(t)=1-e^{-\alpha(t-\gamma)^{\beta}}$
- 可靠度 $R(t)=e^{-\alpha(t-\gamma)^{\beta}}$
- 故障率 $\lambda(t)=\alpha\beta(t-\gamma)^{\beta-1}$

4 威布尔分布特点

- 当β和γ不变，威布尔分布曲线的形状不变。随着α的减小，曲线由同一原点向右扩展，最大值减小。
- 当α和γ不变，β变化时，曲线形状随β而变化。当β值约为3.5时，威布尔分布接近正态分布。
- 当α和β不变时，威布尔分布曲线的形状和尺度都不变，它的位置随γ的增加而向右移动。
- 威布尔分布其它一些特点，$\beta>1$时，表示磨损失效；$\beta=1$时，表示恒定的随机失效，这时λ为常数；$\beta<1$时，表示早期失效。当$\beta=1$，$\gamma=0$时，$f(t)=e^{-\alpha t}$，为指数分布，式中$\frac{1}{\alpha}$为平均寿命。

5、对数正态分布

定理　设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Y=e^X$的服从

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma}\exp\left\{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},\quad y>0.$$

2.3.3 概率分布的应用

- 在对于产品进行可靠性分析和设计中，需要通过**实验数据的统计推断**明确其**分布特征**，但是在具体应用时究竟采用哪种分布更能够精确反映工程实际情况是一件困难的工作。在本书P28表2-1列出各种分布的应用范围，可供大家参考。

2.4 数理统计

2.4.1 分布参数估计

2.4.2 假设检验

- 一般常用θ表示参数，参数θ所有可能取值组成的集合称为参数空间，常用Θ表示。参数估计问题就是根据样本对上述各种未知参数作出估计。
- 参数估计的形式有两种：点估计与区间估计。

- 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的一个样本，我们用一个统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ 的取值作为θ的估计值， 称为θ的点估计（量），简称估计。在这里如何构造统计量$\hat{\theta}$并没有明确的规定，只要它满足一定的合理性即可。这就涉及到两个问题：
  - 其一 是如何给出估计，即估计的方法问题；
  - 其二 是如何对不同的估计进行评价，即估计的好坏判断标准。

1 点估计的几种方法

替换原理和矩法估计

一、矩法估计

替换原理是指用样本矩及其函数去替换相应的总体矩及其函数，譬如：

- 用样本均值估计总体均值$E(X)$，即 ；
- 用样本方差估计总体方差$\mathrm{Var}(X)$，即
- 用样本的 p 分位数估计总体的 p 分位数，
- 用样本中位数估计总体中位数。

例6.1.1 对某型号的20辆汽车记录其每加仑汽油的行驶里程(km)，观测数据如下：

29.8	27.6	28.3	27.9	30.1	28.7	29.9	28.0
27.9	28.7	28.4	27.2	29.5	28.5	28.0	30.0
29.1	29.8	29.6	26.9				

经计算有

$$\bar{x} = 28.695, \qquad s_n^2 = 0.9185, \qquad m_{0.5} = 28.6$$

由此给出总体均值、方差和中位数的估计分别为： 28.695, 0.9185 和 28.6。

矩法估计的实质是用经验分布函数去替换总体分布，其理论基础是格里纹科定理。

概率函数$P(x,\theta)$已知时未知参数的矩法估计

设总体具有已知的概率函数 $P(x, \theta_1, \dots, \theta_k)$，$x_1, x_2, \dots, x_n$是样本，假定总体的$k$阶原点矩$\mu_k$存在，若$\theta_1, \dots, \theta_k$能够表示成 $\mu_1, \dots, \mu_k$的函数$\theta_j = \theta_j(\mu_1, \dots, \mu_k)$，则可给出诸$\theta_j$的矩法估计为

$$\hat{\theta}_j = \theta_j(a_1, \cdots, a_k), \quad j = 1, \cdots, k,$$

其中 $a_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j$

μ 的极大似然估计为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

σ^2的极大似然估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = s_*^2$$

1、参数的点估计

用一组样本去估计总体的某一未知参数。

1 总体期望值估计

用样本的平均值来估计总体的平均值是可行的，样本容量n越大，估计值精度越高。

2 总体方差估计

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}$$

离差：样本中每个观测值x_i平均值x_m之差。

无偏性

定义： 设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ 是θ的一个估计，θ的参数空间为Θ，若对任意的$\theta \in \Theta$，有 $E(\hat{\theta}) = \theta$

则称 $\hat{\theta}$ 是θ的无偏估计，否则称为有偏估计。

例题： 对任一总体而言，样本均值是总体均值的无偏估计。当总体k阶矩存在时，样本k阶原点矩a_k是总体k阶原点矩μ_k的无偏估计。但对中心矩则不一样，譬如，由于$E(s^{*2})=\frac{n-1}{n}\sigma^2$，样本方差$s^{*2}$不是总体方差$\sigma^2$的无偏估计，对此，有如下两点说明：

(1) 当样本量趋于无穷时，有$E(s^{*2})\to\sigma^2$，我们称 s^{*2}为σ^2的渐近无偏估计。

(2) 若对s^{*2}作如下修正：$s^2=\frac{ns^{*2}}{n-1}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

则 s^2是总体方差的无偏估计。

3. 参数的区间估计

区间估计的概念

定义： 设θ是总体的一个参数，其参数空间为Θ，$x_1, x_2, \ldots, x_n$是来自该总体的样本，对给定的一个α $(0<\alpha<1)$，若有两个统计量 $\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(x_1,\cdots,x_n)$，若对任意的$\theta\in\Theta$，有

$$P_\theta(\hat{\theta}_L\le\theta\le\hat{\theta}_U)\ge 1-\alpha,$$

则称随机区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间，或简称$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$是$\theta$的$1-\alpha$置信区间.

$\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$分别称为θ的（双侧）置信下限和置信上限.

这里置信水平$1-\alpha$的含义是指在大量使用该置信区间时，至少有$100(1-\alpha)\%$的区间含有θ。

3、参数的区间估计

区间估计：在给定概率100（1-α）%的条件下，对未知参数θ的范围估计。

α：风险度（显著水平）；

1-α：置信水平；

具有百分数100（1-α）%：置信度；

θ_l：置信下限；

θ_u：置信上限。

正态分布均值的区间估计

对于正态分布的母体X，即X---N(μ,σ²), 其样本(x_1, x_2, …., x_N)

1) 正态分布的σ²已知，求均值的μ置信区间

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}\sim N(0,1)$$

σ 已知时 μ 的置信区间

把Z作为统计量来进行区间估计，其概率

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\le\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}\le Z_{\frac{\alpha}{2}})=\int_{-Z_{\alpha/2}}^{Z_{\alpha/2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{Z^2}{2})dz=1-\alpha$$

经过整理后得到参数μ的区间估计：

$$[\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}},\quad \overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}]$$

置信区间为

$$P_\mu\left(\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma\Big/\sqrt{N}\le\mu\le\bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma\Big/\sqrt{N}\right)=1-\alpha$$

$$[\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}},\quad \overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}]$$ 。

这是一个以$\overline{x}$ 为中心，半径为 $Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{N}$ 的对称区间，常将之表示为 $\bar{x}\pm Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$ 。

例题：用天平秤某物体的重量9次，得平均值为 $\overline{x}=15.4$（克），已知天平秤量结果为正态分布，其标准差为0.1克。试求该物体重量的0.95置信区间。

解：此处$1-\alpha$ =0.95，α =0.05，查表知$u_{0.975}$=1.96，于是该物体重量μ 的0.95置信区间为

$$\bar{x}\pm u_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}=15.4\pm1.96\times0.1/\sqrt{9}=15.4\pm0.0653$$

从而该物体重量的0.95置信区间为

[15.3347，15.4653]。

例题：设总体为正态分布$N(\mu,1)$，为得到μ的置信水平为0.95的置信区间长度不超过1.2，样本容量应为多大？

解：由题设条件知μ的0.95置信区间为

$$\left[\bar{x}-u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n},\quad \bar{x}+u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\right]$$

其区间长度为$2u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}$，它仅依赖于样本容量n而与样本具体取值无关。现要求 $2u_{1-\alpha/2}/\sqrt{n}\le 1.2$ 立即有$n\ge(2/1.2)^2 u^2_{1-\alpha/2}$. 现$1-\alpha = 0.95$，故$u_{1-\alpha/2}$=1.96，从而$n\ge(5/3)^2 1.96^2 = 10.67\approx 11$。即样本容量至少为11时才能使得$\mu$的置信水平为0.95的置信区间长度不超过1.2。

正态分布的σ^2未知，求均值的μ置信区间

$$T=\frac{\bar{N}-\mu}{S/\sqrt{N}}$$

$$\left[\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)\bullet\frac{S}{\sqrt{N}}\quad,\quad \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)\bullet\frac{S}{\sqrt{N}}\right]$$

例题： 假设轮胎的寿命服从正态分布。为估计某种轮胎的平均寿命，现随机地抽12只轮胎试用，测得它们的寿命（单位：万公里）如下：

4.68	4.85	4.32	4.85	4.61	5.02
5.20	4.60	4.58	4.72	4.38	4.70

此处正态总体标准差未知，可使用t分布求均值的置信区间。经计算有 =4.7092，s^2=0.0615。取α =0.05，查表知$t_{0.975}(11)$=2.2010，于是平均寿命的0.95置信区间为（单位：万公里）

$$4.7092\pm 2.2010\cdot\sqrt{0.0615}/\sqrt{12}=[4.5516,\ 4.8668]$$

在实际问题中，由于轮胎的寿命越长越好，因此可以只求平均寿命的置信下限，也即构造单边的置信下限。由于

$$P(t_\alpha(n-1)<\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s})=1-\alpha$$

由不等式变形可知μ的$1-\alpha$置信下限为

$$\bar{x}-t_{1-\alpha}(n-1)s/\sqrt{n}$$

将$t_{0.95}(11)$=1.7959代入计算可得平均寿命μ的0.95置信下限为4.5806（万公里）。

正态分布方差σ²的区间估计

$$\kappa^2 = \frac{(N-1)S^2}{\sigma^2} \sim \kappa^2(N-1)$$

$$\left[\frac{(N-1)S^2}{\kappa^2(1-\frac{\alpha}{2}, N-1)}, \quad \frac{(N-1)S^2}{\kappa^2(\frac{\alpha}{2}, N-1)}\right]$$

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

例6.5.6 某厂生产的零件重量服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现从该厂生产的零件中抽取9个，测得其重量为（单位：克）

45.3 45.4 45.1 45.3 45.5 45.7 45.4 45.3 45.6

试求总体标准差σ的0.95置信区间。

解：由数据可算得 s^2 =0.0325，$(n-1)s^2$=8×0325=0.26.

查表知$\chi^2_{0.025}(8)$ =2.1797，$\chi^2_{0.975}(8)$=17.5345，

代入可得σ^2的0.95置信区间为

$$\left[\frac{0.26}{17.5345}, \quad \frac{0.26}{2.1797}\right] = [0.0148, \quad 0.1193]$$

从而σ的0.95置信区间为：[0.1218，0.3454]。

2.4.2 假设检验

假设检验的基本步骤

一、建立假设

在假设检验中，常把一个被检验的假设称为原假设，用H_0表示，通常将**不应轻易加以否定的假设**作为原假设。当H_0被拒绝时而接收的假设称为**备择假设**，用H_1表示，它们常常成对出现。

我们可建立如下两个假设：

二、选择检验统计量，给出拒绝域形式

由样本对原假设进行判断总是通过一个统计量完成的，该统计量称为**检验统计量**。使原假设被拒绝的样本观测值所在区域称为**拒绝域**，一般用W表示，样本均值$\bar{x}$愈大，意味着总体均值θ也大，因此，合理的拒绝域形如

$$W = \{(x_1,\cdots,x_n): \bar{x} \le c\} = \{\bar{x} \le c\}$$

正如在数学上我们不能用一个例子去证明一个结论一样，用一个样本（例子）不能证明一个命题（假设）是成立的，但可以用一个例子（样本）推翻一个命题。因此，从逻辑上看，注重拒绝域是适当的。事实上，在“拒绝原假设”和“拒绝备择假设（从而接收原假设）”之间还有一个模糊域，如今我们把它并入接收域，所以接收域是复杂的，将之称为保留域也许更恰当，但习惯上已把它称为接收域，没有必要再进行改变，只是应注意它的含义。

三、选择显著性水平

检验可能犯以下两类错误：

- 其一是 H_0为真但样本观测值落在拒绝域中，从而拒绝原假设 H_0，这种错误称为**第一类错误**，其发生的概率称为犯第一类错误的概率，或称**拒真概率**，通常记为α.
- 其二是 H_0不真（即 H_1为真）但样本观测值落在接受域中，从而接受原假设H_0，这种错误称为**第二类错误**，其发生的概率称为犯**第二类错误**的概率，或称**受伪概率**，通常记为 。

观测数据情况	总体情况	
	为真	为真
$(x_1,\cdots,x_n)\in W$	犯第一类错误	正确
$(x_1,\cdots,x_n)\in W^c$	正确	犯第二类错误

说明：在样本量一定的条件下不可能找到一个使α和β都小的检验。（犯两种错误都小）

英国统计学家 Neyman 和 Pearson 提出水平为α的**显著性检验**的概念。

定义： 对检验问题

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \quad \text{对} \quad H_1:\theta\in\Theta_1$$

如果一个检验满足对任意的 $\theta\in\Theta_0$，

都有 $g(\theta)\le\alpha$,

则称该检验是**显著性水平为 α 的显著性检验**，简称**水平为 α 的检验。**

四、给出拒绝域

确定显著性水平后，可以定出检验的拒绝域 W。

五、作出判断

在有了明确的拒绝域后，根据样本观测值我们可以做出判断。

2.4.2 假设检验

1 Z检验------ 已知母体方差σ²值的均值检验

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}\right| > Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\alpha}{2}$$

例题： 从甲地发送一个讯号到乙地。设乙地接受到的讯号值服从正态分布 $N(\mu,0.2^2)$, 其中 μ 为甲地发送的真实讯号值。现甲地重复发送同一讯号5次，乙地接收到的讯号值为

8.05 8.15 8.2 8.1 8.25

设接受方有理由猜测甲地发送的讯号值为8，问能否接受这猜测？

解：这是一个假设检验的问题，总体$X \sim N(\mu, 0.2^2)$，

检验假设：$H_0: \mu = 8 \quad v.s. \quad H_1: \mu \neq 8$

这个双侧检验问题的拒绝域为

$$\{|u| \geq u_{1-\alpha/2}\}$$

取置信水平α=0.05，则查表知 $u_{0.975}$=1.96。

用观测值可计算得

$$\bar{x} = 8015, \quad u = \sqrt{5}\left(8.15 - 8\right)/0.2 = 1.6771$$

u 值未落入拒绝域内，故不能拒绝原假设，即接受原假设，可认为猜测成立。

2、t检验-----未知母体方差σ²值的均值检验

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}\right| > t_{\frac{\alpha}{2}}(N-1)\right) = \alpha$$

例7.2.2 某厂生产的某种铝材的长度服从正态分布，其均值设定为240厘米。现从该厂抽取5件产品，测得其长度为（单位：厘米）

239.7　239.6　239　240　239.2

试判断该厂此类铝材的长度是否满足设定要求？

解：这是一个关于正态均值的双侧假设检验问题。采用t 检验，拒绝域为：

$$\{|t| \geq t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$$

若取α=0.05，则 $t_{0.975}(4)$= 2.776.

现由样本计算得到：$\bar{x} = 239.5, \quad s = 0.4,$

故

$$t = \sqrt{5} \cdot |239.5 - 240|/0.4 = 2.7951$$

由于2.7951>2.776，故拒绝原假设，认为该厂生产的铝材的长度不满足设定要求。

3. χ^2检验------未知母体μ的方差σ^2的检验

$$P\left[\frac{(N-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad < \quad \kappa^2(1-\tfrac{\alpha}{2}, N-1)\right] = \frac{\alpha}{2}$$

$$P\left[\frac{(N-1)S^2}{\sigma_0^2} \quad > \quad \kappa^2(\tfrac{\alpha}{2}, N-1)\right] = \frac{\alpha}{2}$$

例题： 某类钢板每块的重量X服从正态分布，其一项质量指标是钢板重量的方差不得超过0.016 (kg²)。现从某天生产的钢板中随机抽取25块，得其样本方差S^2=0.025(kg²)，问该天生产的钢板重量的方差是否满足要求。

解：原假设为 $H_0: \sigma^2 \le 0.016,$

备择假设为 $H_1: \sigma^2 > 0.016,$

此处$n=25$，若取α=0.05，则查表知

$$\chi^2_{0.95}(24) = 36.415$$

现计算可得

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \times 0.025}{0.016} = 37.5 > 36.415$$

由此，在显著性水平0.05下，我们拒绝原假设，认为该天生产的钢板重量不符合要求。

无偏估计量的定义：

设θ_g是未知参数θ的估计量，若

$$E(\theta_g) = \theta \qquad (1)$$

则称θ_g为θ的无偏估计量。

1 求证平均值X_m是数学期望E（X）的无偏估计量。

证明：因为

$$E(S^2)=E(\frac{1}{n-1}\sum_1^n(x_i-\overline{X})^2)$$
$$=\frac{1}{n-1}E[\sum_1^n(x_i-\mu)^2-2\sum_1^n(x_i-\mu)(\overline{X}-\mu)+n(\overline{X}-\mu)^2]$$
$$=\frac{1}{n-1}\{\sum_1^n E[(x_i-\mu)^2]-nE[(\overline{X}-\mu)^2]\}$$
$$=\frac{1}{n-1}(n\sigma^2-n\cdot\frac{\sigma^2}{n})$$
$$=\sigma^2$$

习题课

1 设总体X～N（μ，0.09），随机抽得4个独立观察值 x_1, x_2, x_3, x_4，求总体均值μ的95%置信区间。

2 为了确定某种溶液中的甲醛浓度，取样得到4个独立测定值的平均值x_m=8.34%，样本标准离差s=0.03%。并设被测总体近似服从正态分布，求总体均值μ的95%置信区间。

3 为了确定某种溶液中的甲醛浓度，取样得到4个独立测定值的平均值x_m=8.34%，样本标准离差s=0.03%。并设被测总体近似服从正态分布。求：总体方差σ^2的100(1-α)%置信区间，及σ的100(1-α)%置信区间。

4 某批灯泡中随机取5只做寿命试验，其寿命（小时）如下：
1050，1100，1120，1250，1280
设寿命服从正态分布，求95%置信下限。

证明题

5 求证平均值X_m是数学期望E（X）的无偏估计量。

6 设有一批产品，为估计其废品率p，随机取一样本X_i，（i=1，2，…）。其中

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{取废品，}\\ 0, & \text{取合格品，}\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

求：$\hat{p}$是p的无偏估计量。

例题：样本方差S2是总体方差的无偏估计量

证明：

$$E(S^2)=D(X)$$

因为：$E(S^2)$

$$=E[\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]$$

$$=E[\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}X_i^{\,2}-\frac{n}{n-1}\overline{X}^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum E(X_i^2)-\frac{n}{n-1}E[(\overline{X})^2]$$

$$=\frac{n}{n-1}\{D(X)-D(\overline{X})\}$$

由于，

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X)$$

$$=\frac{1}{n}D(X)$$

所以上式得：

$$E(S^2)=\frac{n}{n-1}\{D(X)-D(\overline{X})\}$$

$$=\frac{n}{n-1}\{D(X)-\frac{1}{n}D(X)\}=D(X)$$

命题得证。

本章参考书

- 华东师范大学茆诗松《概率论与数理统计教程》
- 我校使用的概率统计教材