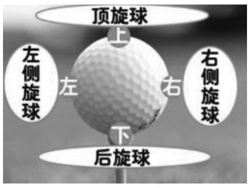
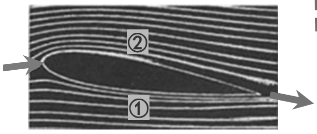
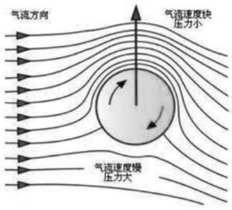






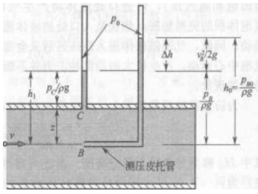
任意两点1和2：

p_1 (< > =) p_2

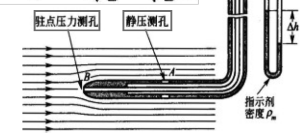
v_1 (< > =) v_2

$$\boxed{\frac{p}{\rho g}+z+\frac{v^2}{2g}=c}$$

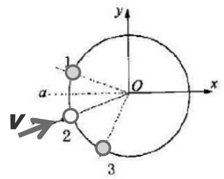
2

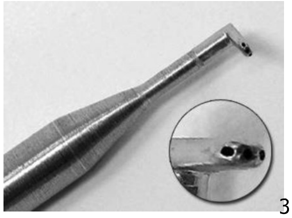


$$v_B=\sqrt{2g\left(\frac{p_{B0}}{\rho g}-\frac{p_B}{\rho g}\right)}$$



皮托管测速(测压皮托管、测速皮托管), 航速仪(空速管)

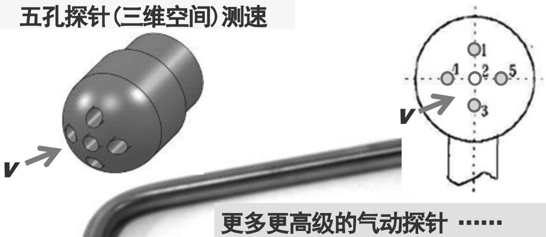




三孔探针(二维平面)测速

3

五孔探针(三维空间)测速



更多更高级的气动探针 ……

交第四章作业！

头部直径1.8mm的高频响5孔探针

4

第5章 不可压缩流体的一维层流流动

本章任务：借助几个典型的一维层流问题，学习掌握对流体微元体进行分析、建立流动的微分方程、求解微分方程并得出流场分布的步骤与方法。主要考察质量守恒(连续性方程)和动量方程(运动微分方程)。

微元体分析方法的核心：将雷诺输运定理应用于微元控制体。

5.1 概述(流动的微分方法)

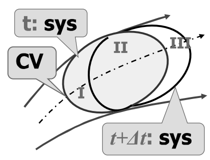
5.2 狭缝流动

5.3 降膜流动

教科书5.3节管内层流的内容将合并到第9章

5

回顾“雷诺输运定理(输运公式)”



β:单位质量流体具有的物理量

B:系统内的物理总量，$B=\int_{Sys}\beta\rho dV$

$$\boxed{\frac{dB}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{Sys}\beta\rho dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\beta\rho dV+\int_{CS}\beta\rho(\vec{V}\bullet\vec{n})dA}$$

系统中物理总量的时间变化率

控制体内物理总量的时间变化率

控制面流出的物理总量的净流量

将拉格朗日体系下系统物理量变化与欧拉体系下控制体内的物理量变化联系起来了。

6

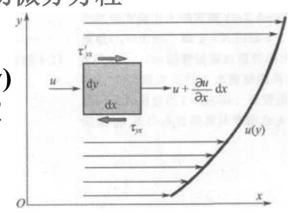
5.1 概述流动的微分描述方法

5.1.1 建立流动微分方程的基本方法

主要考察连续性方程和运动微分方程

连续性方程

如图一维不可压流场u=u(y)取微元体为控制体, 应用质量守恒条件(第4章)：



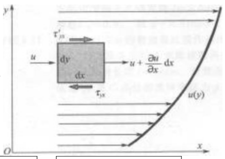
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV+\int_{CS}\rho(\vec{V}\bullet\vec{n})dA=0}$$

可得：$\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz+\left(\rho u+\frac{\partial\rho u}{\partial x}\cdot dx\right)dydz-\rho udydz=0$ ⇨ $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0$

$\rho=const.$, 得一维不可压流的连续性方程：$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=0}$

7

运动微分方程（动量方程）



动量方程(第4章)应用于微元体：

$$\sum \vec{F}_{CV} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \vec{V} dV + \oint_{CS} \rho \vec{V}(\vec{V} \bullet \vec{n}) dA$$

$$\boxed{\text{作用于微元体诸力之和}} = \boxed{\text{微元体内动量的变化率}} + \boxed{\text{输出微元体动量流量}} - \boxed{\text{输入微元体动量流量}} \quad (1)$$

式(1)左边, 具体展开需补充微元体所受各种力的计算式, 主要是流体的黏性应力和压力 (图中未画压力).

一维不可压流场$u=u(y)$, 由牛顿剪切定理(第1章):

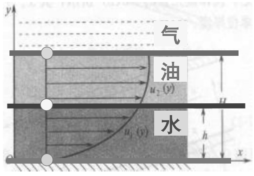
$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \qquad (2)$$

式(2) 代入式(1), 将可获得一维流动的运动微分方程.

稍后例题!

8

5.1.2 常见的边界条件



边界条件的作用：

使微分方程的解唯一确定.

常见三种类型边界条件：

① 固壁—流体边界：由于流体具有粘性，在与壁面接触处流体速度为零。例如图中 $u_1|_{y=0}=0$。

② 液体—液体边界：相界面两侧的速度和切应力都对应相等，$u_1|_{y=h}=u_2|_{y=h}$，$\tau_{yx,1}|_{y=h}=\tau_{yx,2}|_{y=h}$。

③ 液体—气体边界：相界面两侧相对速度虽然为0，但因为两侧流体密度和黏度相差较大，可认为界面上切应力为零(自由表面)，相当于假设液相的速度梯度为零。如图中 $\tau_{yx,2}|_{y=H}=0$，$(du_2/dy)|_{y=H}=0$

9

5.1.3 流动条件的说明

说明流动的条件(状况、状态)，其作用和目的也是使流动微分方程描述的物理对象唯一确定。本章只分析不可压缩的稳态一维 层流(?).

不可压缩：$\rho = const.$ or $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=0}$

稳态：空间任意点处的任一流动参数φ都满足 $\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0}$

一维：流体只在一个坐标方向上流动(x)，且流体速度的变化只与一个空间坐标(y)有关。

层流：流体流动，可看成分成薄层叠积起来的平行流动，层与层之间只有分子作用，牛顿剪切定理成立。

按上述条件，只有一维的速度$u=u(y)$，因此质量守恒（连续性条件）$\partial u/\partial x=0$ 自然满足。这时流动沿着x方向必然是已充分发展，$\partial \varphi/\partial x=0$, $\partial p/\partial x=const.$

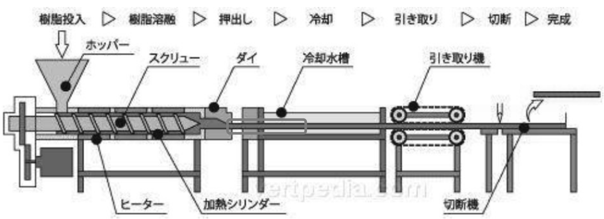
10

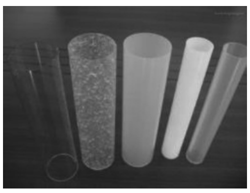
5.2 狭缝流动分析

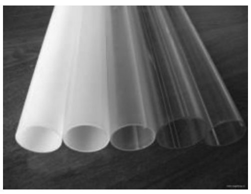
岩石狭缝渗流

11

聚合物挤出成型





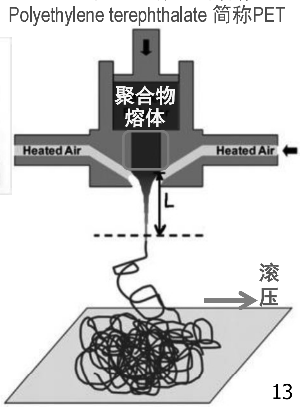


12

无纺布的制备：熔喷 / 纺粘

聚对苯二甲酸乙二醇酯

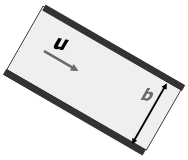
Polyethylene terephthalate 简称PET



13

狭缝流动

狭缝流动通常指的是两块足够大的平行平板（板间距<<板长）之间的流动。



狭缝流动简化

1. 忽略端部效应影响，将流动视为充分发展；
2. 由于狭缝宽度小，流动介质粘度又较大，流动处于层流范围。

产生狭缝流动的因素

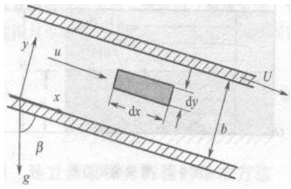
1. 进出口两端的压力差 —— 压差流
2. 两壁面相对运动 —— 剪切流

14

5.2.1 狭缝流动的微分方程

间距 b, 下壁固定, 上壁速度U.

如图坐标系, 取微元控制体



一维、充分发展：$\partial u/\partial x = 0$

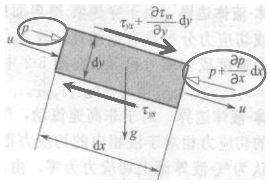
矩形微元体，故有：

输入微元体的动量流量：$\boxed{\rho u^2 dy}$

输出微元体的动量流量：$\boxed{\rho u^2 dy}$

微元体上x方向的诸力之和：

$$-\tau_{yx}dx + (\tau_{yx} + \partial\tau_{yx}/\partial y \, dy)dx + pdy$$
$$-(p + \partial p/\partial x \, dx)dy + \rho g\cos\beta dxdy$$
$$= \boxed{\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g\cos\beta\right)dxdy}$$



两平行壁间的层流

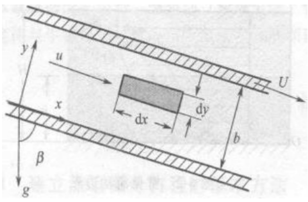
15

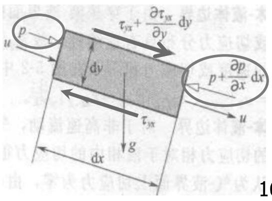
故微元体在x方向的动量方程为：

$$\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g\cos\beta\right)dxdy = \rho u^2 dy - \rho u^2 dy + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{c.Con}\rho u d\cancel{V}}_{稳态，=0} = 0$$

狭缝流动的切应力、压力、重力之间的关系：

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g\cos\beta = \frac{\partial p^*}{\partial x}$$ 其中：$p^* = p - \rho gx\cos\beta$（有效压力）



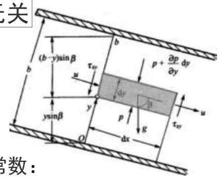


16

另外，微元体在y-方向也处于力平衡：

$\partial p/\partial y + \rho g\sin\beta = 0$ 或 $p + \rho gy\sin\beta = C(x)$ 与y无关

得出3个有一点点意思的结论：



① 同一断流面上 $p + \rho gy\sin\beta = \text{const}$

若$p|_{y=b} = p_b$ ⇒ $p = p_b + \rho g(b-y)\sin\beta$

碰巧仍满足重力场静压分布规律。

② 同一断流面上, 各点 压力势能+位势能=常数：

$\frac{p}{\rho} + gy\sin\beta = \text{const}$

③ $\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g\cos\beta = \frac{\partial p^*}{\partial x}$

因为 $p + \rho gy\sin\beta = C(x)$，所以$\partial p/\partial x$只是 x 的函数

但$u = u(y)$，所以$\partial\tau_{yx}/\partial y = \mu(\partial^2 u/\partial y^2)$只是 y 的函数

等号两边同为常数，即：$\boxed{\partial\tau_{yx}/\partial y = \partial p/\partial x - \rho g\cos\beta = \partial p^*/\partial x = const.}$

17

5.2.2 狭缝流动的切应力与速度分布

切应力分布方程:

$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial p^*}{\partial x} = const.$ ⇒ $\boxed{\tau_{yx} = \frac{\partial p^*}{\partial x}y + C_1}$

应用条件：牛顿流体和非牛顿流体

牛顿流体： $\tau_{yx} = \mu\frac{du}{dy}$ ⇒ $\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p^*}{\partial x}y + C_1\right)$

⇔ **教材中记：** $\frac{\partial p^*}{\partial x} = -\frac{\Delta p^*}{L}$

压升 压降

速度分布方程:

$\boxed{u = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x}\frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{\mu}y + C_2}$

应用条件：只适用牛顿流体

积分常数: 使方程的解唯一. 如何确定积分常数？

18

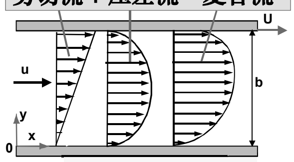
边界条件：$u|_{y=0} = 0, u|_{y=b} = U$ $\xrightarrow{代入}$ $\boxed{\tau_{yx} = \frac{\partial p^*}{\partial x}y + C_1}$ $\boxed{u = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x}\frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{\mu}y + C_2}$

可得：

$$\boxed{\tau_{yx} = -\frac{1}{2}\frac{\partial p^*}{\partial x}(b-2y) + \frac{\mu U}{b}}$$

$$u = \underbrace{-\frac{b^2}{2\mu}\frac{\partial p^*}{\partial x}\left[\frac{y}{b} - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right]}_{压差引起的流动} + \underbrace{U\frac{y}{b}}_{剪切产生的流动}$$

剪切流＋压差流＝复合流



狭缝流速度分布

$\beta = 90°$：$p^* = p - \rho gx\cos\beta = p$, $\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$

上板运动和压力梯度共同作用的平板间流场称为库埃特(Couette)流动；仅压力梯度作用的平板间流场称为泊肃叶(Poiseuille)流动。

19

平均速度： $\boxed{u_m=\frac{1}{b}\int_0^b udy}=\frac{1}{b}\int_0^b\left\{-\frac{b^2}{2\mu}\frac{\partial p*}{\partial x}\left[\frac{y}{b}-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]+U\frac{y}{b}\right\}dy=\boxed{-\frac{b^2}{12\mu}\frac{\partial p*}{\partial x}+\frac{U}{2}}$

流量： $\boxed{q_V=\int_0^b udy=bu_m==-\frac{b^3}{12\mu}\frac{\partial p*}{\partial x}+\frac{Ub}{2}}$

应用说明：

上述应力与速度分布，包括压差、壁面运动、壁面倾角三个外在因素；实际中若只出现其中1~2个因素，这些方程也通用的，只需加入特定的限制条件。例如：

① 两块固定平板间的压差流, 令 U＝0：**Poiseuille 流动**

② 仅有壁面运动产生的剪切流, 令 $\boxed{\frac{\partial p}{\partial x}=\rho g\cos\beta}$, 即 $\boxed{\frac{\partial p^*}{\partial x}=0}$

③ β=0° 垂直狭缝向下流动； β=180° 垂直狭缝向上流
β=90° 水平狭缝中流动。

5.2.3 水平狭缝中压差流动(Poiseuille流动)的阻力

水平狭缝： $\beta=\frac{\pi}{2}$ 且有 $p*=p-\rho gx\cos\beta=p,\ \frac{\partial p*}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}$

压差流，无剪切部份，故 U＝0 代入 $\boxed{u_m=-\frac{b^2}{12\mu}\frac{\partial p*}{\partial x}+\frac{U}{2}}$

平均流速： $u_m=-\frac{b^2}{12\mu}\frac{\partial p*}{\partial x}=\frac{b^2}{12\mu}\frac{\Delta p}{L}$

流动阻力系数λ的定义： $\lambda=\frac{\Delta p}{(L/b)(\rho u_m^2/2)}$

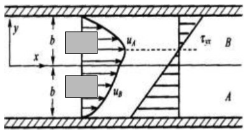
∴水平狭缝压差流的阻力系数 $\boxed{\lambda=\frac{24}{\rho u_m b/\mu}=\frac{24}{\mathrm{Re}}}$

雷诺数（第2章出现过）

压力降：

$$\boxed{\Delta p=\frac{24}{\mathrm{Re}}\frac{L}{b}\rho\frac{u_m^2}{2}=\lambda\cdot\frac{L}{b}\cdot\frac{\rho u_m^2}{2}}$$

例5-1. 平壁间两层不相溶流体的压差流



解：分别在两层流体中取微元控制体，均可由质量守恒和动量守恒有：

$\partial u/\partial x=0 \qquad \partial\tau_{yx}/\partial y=\partial p/\partial x$

记： $\Delta p/L=(p_0-p_L)/L$

仿照前面狭缝流动的分析步骤, 易得：

$\tau_{yx,A}=\frac{p_L-p_0}{L}y+C_{1,A} \qquad \tau_{yx,B}=\frac{p_L-p_0}{L}y+C_{1,B}$

$u_A=\frac{1}{\mu_A}\frac{p_L-p_0}{L}\frac{y^2}{2}+\frac{C_{1,A}}{\mu_A}y+C_{2,A} \qquad u_B=\frac{1}{\mu_B}\frac{p_L-p_0}{L}\frac{y^2}{2}+\frac{C_{1,B}}{\mu_B}y+C_{2,B}$

边界条件：
① 对于流体 A 有 $u_A|_{y=-b}=0$；
② 对于流体 B 有 $u_B|_{y=b}=0$；
③ 由液-液边界连续性有 $u_A|_{y=0}=u_B|_{y=0}$，$\tau_{yx,A}|_{y=0}=\tau_{yx,B}|_{y=0}$

得积分常数为：

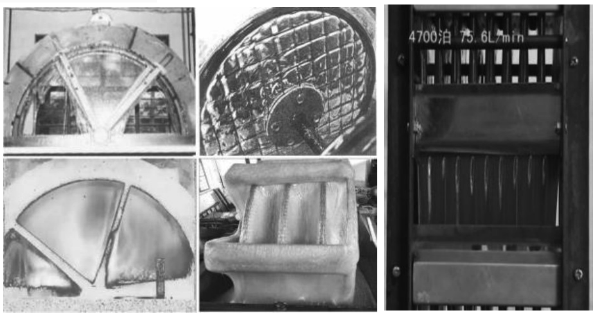
$C_{1,A}=C_{1,B}$； $C_{1,A}=\frac{b}{2}\frac{p_0-p_L}{L}\frac{\mu_A-\mu_B}{\mu_A+\mu_B}$

$C_{2,A}=C_{2,B}$； $C_{2,A}=\frac{b^2}{2}\frac{p_0-p_L}{L}\frac{2}{\mu_A+\mu_B}$

回代后可见其应力和速度分布规律相同，仅速度中黏度不同。

5.3 降膜流动分析

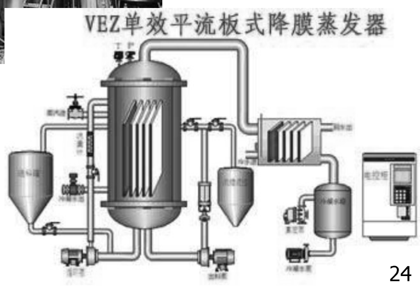
降膜反应器



卧式缩聚反应器　　塔式缩聚降膜反应器

降膜蒸发器

广泛用于医药、食品、化工、轻工等行业的水或有机溶液的蒸发浓缩，如废液处理.



在重力作用下，形成均匀膜状自上而下的流动，产生的蒸汽与液相随后进入分离室分离。

防腐涂层

降膜流动：

①工程应用中十分广泛
②液膜一侧与大气接触，是典型的 液－气 边界条件
③依靠重力产生流动

5.3.1 倾斜平板上的降膜

液膜厚δ, 表面为大气, x方向速度u; y-, z- 速度为0. g与x轴夹角β. δ<<x, 可视为充分发展流动 .

输入微元体的动量流量：$\rho u^2 dy$

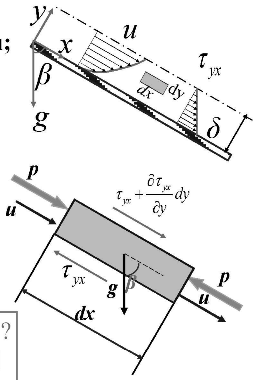
输出微元体的动量流量：$\rho u^2 dy$

微元体上x轴方向的诸力之和：

$$-\tau_{yx}dx+(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy)dx+\boxed{pdy-pdy}$$

$$+\rho g\cos\beta dxdy=\left(\partial\tau_{yx}/\partial y+\rho g\cos\beta\right)dxdy$$

为什么相等? 狭缝流为何差 $\boxed{\partial p/\partial x}$?
因为敞开, 都等于大气压, 在x方向没有形成压力差的外部条件！
应力 τ_{yx} 仍是连续量，y向仍有dy.



倾斜平板上的降膜流动

26

故微元体在x方向的动量方程为：

稳态，=0

$$\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\rho g\cos\beta\right)dxdy=\rho u^2dy-\rho u^2dy+\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho u dV}=0$$

切应力方程：$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}=-\rho g\cos\beta$

$$\boxed{\tau_{yx}=-\rho g y\cos\beta+C_1}$$

牛顿流体：$\tau_{yx}=\mu\frac{du}{dy}$

速度方程：$\frac{du}{dy}=-\frac{\rho g\cos\beta}{\mu}y+\frac{C_1}{\mu}$

$$\boxed{u=-\frac{\rho g\cos\beta}{2\mu}y^2+\frac{C_1}{\mu}y+C_2}$$

如何确定积分常数C_1和C_2?

27

边界条件 $u|_{y=0}=0,\tau_{yx}|_{y=\delta}=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=\delta}=0$ 代入 $\boxed{\tau_{yx}=-\rho g y\cos\beta+C_1}$ $\boxed{u=-\frac{\rho g\cos\beta}{2\mu}y^2+\frac{C_1}{\mu}y+C_2}$

可得：

切应力分布：$\boxed{\tau_{yx}=\rho g\cos\beta(1-\frac{y}{\delta})}$

速度分布：$\boxed{u=-\frac{\rho g\cos\beta}{2\mu}\left[2\frac{y}{\delta}-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]}$

最大速度：$u_{\max}=u|_{y=\delta}=\frac{\rho g\delta^2\cos\beta}{2\mu}$

平均速度：$u_m=\frac{1}{\delta}\int_0^\delta u dy=\frac{\rho g\delta^2\cos\beta}{3\mu}$

体积流量：$q_V=\delta u_m=\frac{\rho g\delta^3\cos\beta}{3\mu}$

液膜厚度：$\delta=\sqrt[3]{\frac{3\mu q_V}{\rho g\cos\beta}}$

28

补充说明：

实验表明，随着平均速度和降膜厚度的增加以及动力粘度的变化, 降膜流动出现三种状态:

1. **直线型的层流；**
2. **呈波纹状起伏的层流(不稳定、过渡)；**
3. **湍流.**

第九章将看到，可以定义一个雷诺数，用来判定降膜的流动状态。

29

例5-6. 变黏度流体的竖直平壁降膜

温度从$T_w\nearrow T_0$，黏度$\mu_w\searrow\mu_0$，$\mu=\mu_0 e^{\alpha(1-y/\delta)}$

求液膜中切应力和速度分布。

解: 在液膜流体中取微元控制体，质量守恒和动量守恒有：

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}=-\rho g \Rightarrow \tau_{yx}=-\rho g y+C_1$$

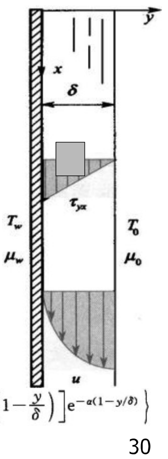
$$\left.\begin{array}{l}\frac{du}{dy}=\frac{\tau_{yx}}{\mu}=\frac{-\rho g y+C_1}{\mu}\\ \mu=\mu_0 e^{\alpha(1-y/\delta)}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$u=-\frac{\rho g\delta^2}{\mu_0}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha(1-y/\delta)}+\frac{C_1}{\mu_0}\frac{\delta}{\alpha}e^{-\alpha(1-y/\delta)}+C_2$$

边界条件：$\boxed{\tau_{yx}|_{y=\delta}=\mu\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=\delta}=0;\ u|_{y=0}=0}$

$$\Rightarrow C_1=\rho g\delta;\ C_2=-\frac{\rho g\delta^2}{\mu_0}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \tau_{yx}=\rho g\delta\left(1-\frac{y}{\delta}\right)\quad u=-\frac{\rho g\delta^2}{\mu_0\alpha^2}\left\{(1+\alpha)e^{-\alpha}-\left[1+\alpha\left(1-\frac{y}{\delta}\right)\right]e^{-\alpha(1-y/\delta)}\right\}$$



例5-7. 油膜降膜，P122

30

第五章 作业

简答题：

1. **建立流体流动微分方程的依据是什么原理？有哪几个基本步骤？**
2. **流体流动有哪几种常见的边界条件？如何确定这些边界条件？**
3. **为什么说流动微分方程表示流动过程的共性，而边界条件才能确定流动过程的个性？**
4. **对于缝隙流动或降膜流动，切应力的微分方程对牛顿流体和非牛顿流体都使用，但速度微分方程却不然，为什么？**

P124，习题 5-1, 5-2, 5-9. **交第四章作业！**

31