华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 1 册）

班级___________学号____________姓名____________任课教师____________

第一次作业

教学内容：1.1 复数及其运算　　1.2 平面点集的一般概念

1．填空题：

（1）$\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$, $\frac{\sqrt{34}}{2}$, $2k\pi-\arctan\frac{5}{3}$

(2) $1,\quad -3,\quad 1+3i,\quad \sqrt{10},\quad 2k\pi-\arctan 3$

（3）$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$

(4) $x=-1, y=13$。

2．将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

(1) $1+i\sqrt{3}$；

解：$1+i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2e^{\frac{i\pi}{3}}$

(2) $1-\cos\varphi+i\sin\varphi\quad(0\le\varphi\le\pi)$

解：$1-\cos\varphi+i\sin\varphi\quad=2\sin\frac{\varphi}{2}[\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})]=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})}$

(3) $\dfrac{(\cos 5\phi+i\sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi-i\sin 3\phi)^3}$.

解：$\dfrac{(\cos 5\phi+i\sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi-i\sin 3\phi)^3}=(e^{i5\phi})^2/(e^{-i3\phi})^3=\dfrac{e^{i10\phi}}{e^{-i9\phi}}=e^{i19\phi}$

$\cos 19\varepsilon+i\sin 19\phi$

3．求复数 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部

解：$w=\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{(z-1)(\overline{z+1})}{(z+1)(\overline{z+1})}=\dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}$

$$=\frac{(z\bar{z}+z-\bar{z}-1)}{|z+1|^2}=\frac{z\bar{z}-1}{|z+1|^2}+i\frac{2\operatorname{Im} z}{|z+1|^2}$$

所以， $\operatorname{Re} w=\dfrac{z\bar{z}-1}{|z+1|^2}$， $\operatorname{Im} w=\dfrac{2\operatorname{Im} z}{|z+1|^2}$

4. 求方程 $z^3+8=0$ 的所有的根.

解：$z=(-8)^{\frac{1}{3}}=2e^{i\frac{\pi}{3}(1+2k)}, k=0,1,2.$

即原方程有如下三个解：

$$1+i\sqrt{3},-2,1-i\sqrt{3}$$

5. 若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ 且 $z_1+z_2+z_3=0$，证明：以 z_1,z_2,z_3 为顶点的三角形是正三角形.

证明：记 $|z_1|=a$，则

$$|z_1|^2=|z_2+z_3|^2=2(|z_2|^2+|z_3|^2-|z_2-z_3|^2$$

得 $|z_2-z_3|^2=3a^2=(|z_1|-|z_2|)^2$，同样，

$|z_2-z_1|^2=|z_1-z_2|^2=3a^2$

所以 $|z_1-z_2|=|z_3-z_2|=|z_1-z_2|$.

6. 设 $z_{1,}z_2$ 是两个复数，试证明.

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

并说明此等式的几何意义.

证明： 左式=$(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1+z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1+z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$=z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}+z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2+z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}-z_1\cdot\overline{z_2}-\overline{z_1}\cdot z_2$

$=2(z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_2})=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

7．求下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3}-i)^5$；

解：$(\sqrt{3}-i)^5=\left[2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})\right]^5=(2e^{\frac{-i\pi}{6}})^5=32e^{-i5\pi/6}$

$=32\left[\cos(-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{5\pi}{6})\right]=-16\sqrt{3}-16i$

(2) $(1-i)^{\frac{1}{3}}$；

解: $(1-i)^{\frac{1}{3}}=\left[\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})\right]^{\frac{1}{3}}=(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{-\pi}{4}+2k\pi)/3},k=0,1,2.$

可知$(1-i)^{\frac{1}{3}}$的 3 个值分别是

$\sqrt[6]{2}e^{\frac{-i\pi}{2}}=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12})$；

$\sqrt[6]{2}e^{\frac{i7\pi}{2}}=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$

$\sqrt[6]{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}=\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

（3）求$\sqrt[6]{-1}$

解：$\sqrt[6]{-1}=(e^{i\pi+2k\pi})^{\frac{1}{6}}=e^{i\pi(1+2k)/6},k-0,1,2,3,4,5.$可知$\sqrt[6]{-1}$的 6 个值分别是

$$e^{i\pi 6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\quad e^{2i\pi}=1,\quad ei^{\frac{i5\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

$$e^{\frac{i7\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},\quad e^{\frac{i3\pi}{2}}=-i,\quad e^{\frac{i11\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{100}+(1-\mathrm{i})^{100}&=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{100}+\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{100}\\&=2^{50}\left(\cos 25\pi+\mathrm{i}\sin 25\pi\right)+2^{50}\left(\cos 25\pi-\mathrm{i}\sin 25\pi\right)\\&=-2^{51}\end{aligned}$$

8．化简 $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$

解：原式 $=(1-i)^2\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=-2ie^{\frac{n\pi}{2}i}=-2i^{n+1}$

第二次作业

教学内容：1.2　平面点集的一般概念　　1.3 复变函数

1.　填空题

(1)连接点 $1+i$ 与 $-1-4i$ 的直线断的参数方程为 $\underline{z=1+i+(-2-5i)t\quad 0\le t\le 1}$

(2) 以原点为中心，焦点在实轴上，长轴为 a，短轴为 b 的椭圆的参数方程为 $\underline{z=a\cos t+ib\sin t\quad 0\le t\le 2\pi}$

2．指出下列各题中点 z 的轨迹，并作图.

(1) $|z-2i|\ge 1$;

中心在 $-2i$ 半径为 1 的圆周及其外部。

(2） $\mathrm{Re}(z+2)=-1$.

直线 $x=-3$

(3) $|z+3|+|z+1|=4$

以-3 与-1 为焦点，长轴为 4 的椭圆

(4) $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$

以 i 为起点的射线 $y=x+1$

(5) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geq 1$

直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 及其右半平面

3．指出下列不等式所确定的区域或闭区域，并指出是有界区域还是无界区域，多连通还是单连通的。

(1) $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|<1$;

解：$\left|z-a^2\right|<\left|1-\bar{a}z\right|$

$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})<(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})$

$(\left|z\right|^2-1)(1-\left|a\right|^2)<0$

$\left|a\right|<1$ 时，表示单位圆的内部，有界单连通域。

$\left|a\right|>1$ 时，表示单位圆的外部，无界单连通域，$\left|a\right|=1$ 不表示任何区域。

(2) $z\bar{z}-(2+i)z-(2-i)\bar{z}\leq 4$

圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 及其内部区域，有界，单连通区域。

(3) $\left|z-1\right|<4\left|z+1\right|$

中心在 $z=-\dfrac{17}{15}$，半径为 $\dfrac{8}{15}$ 的圆外部区域，无界，多连通

(4) $\dfrac{\pi}{6}<\arg(z+2i)<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\left|z\right|>2.$

解：$z+2i=x+(y+2)i\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{y+2}{x}\Rightarrow \arg(z+2i)=\arctan\dfrac{y+2}{x}$

$$\Rightarrow\begin{cases} x>0, & \dfrac{\pi}{6}<\arctan\dfrac{y+2}{x}<\dfrac{\pi}{2} \\ x<0,y>0, & \dfrac{\pi}{6}<\arctan\dfrac{y+2}{x}+\pi<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{y+2}{x}>\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x<0,y<0, & \dfrac{\pi}{6}<\arctan\dfrac{y+2}{x}-\pi<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

且有 $\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}>2\Rightarrow x^2+y^2>4$ 以 $-2i$ 为顶点，两边分别与正实轴成角度 $\dfrac{\pi}{6}$ 与 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角形域内部，且以原点为圆心，半径为 2 的圆外部分，无界单连通区域。

4．设 t 是实参数，指出下列曲线表示什么图形

(1) $z=t+\frac{i}{t}$;

$$z=x+iy=t+\frac{i}{t}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\ y=\frac{1}{t}\end{cases},\text{即为双曲线}xy=1;$$

(2) $z=ae^{it}+be^{-it}$ 。

$\frac{x^2}{(a+b)^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1$，为椭圆。

5．已知函 数 $w=\frac{1}{z}$ ，求以下曲线的像曲线.

（1）$x^2+y^2=4$；

解：$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2},u=\frac{x}{x^2+y^2},v=\frac{-y}{x^2+y^2}$,

$$u^2+v^2=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}\text{，是 }w\text{ 平面上一圆周。}$$

（2）$x=1$；

解：由 $x=1$, 知 $u=\frac{1}{1+y^2},v=\frac{-y}{1+y^2}$, 从而 $u^2+v^2=\frac{1}{1+y^2}=u$

此为 $(u-\frac{1}{2})^2+v^2=(\frac{1}{2})^2$，是平面上一圆周。

（3） $y=x$；

$w=\frac{1}{x(1+i)}=\frac{1-i}{2x}$，则，$u=\frac{1}{2x},v=-\frac{1}{2x}$，像曲线为 $u=-v$ 。