过程设备机械设计基础

----压杆稳定

主讲：付 尧

电话：64252096

email：fuyao@ecust.edu.cn

学习资料及论坛：www.chenjj.org

压杆失稳

黄毓晖 副教授
华东理工大学　　机械与动力工程学院
过程设备科学与工程研究室
E-mail：yhhuang@ecust.edu.cn

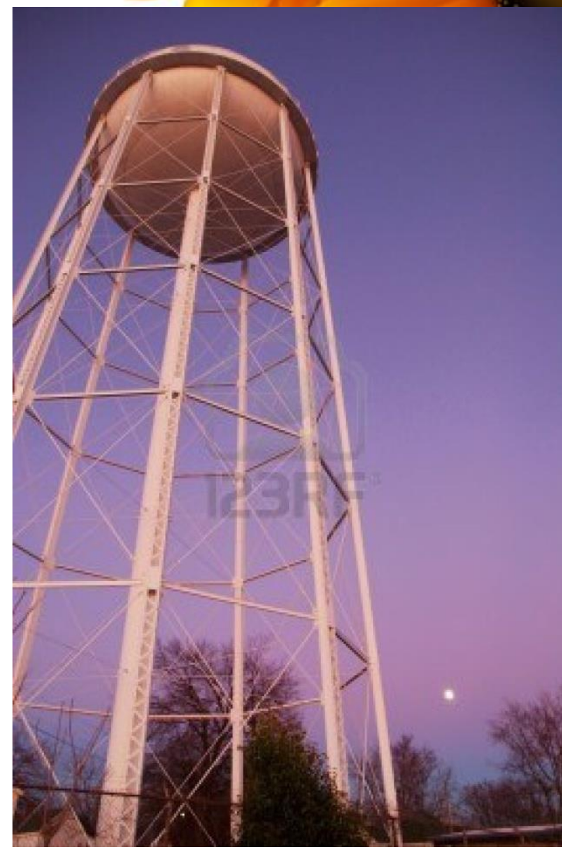
本章内容

- 6.1 压杆失稳的概念
- 6.2 临界压力的确定
- 6.3 欧拉公式的适用范围
- 6.4 压杆稳定性条件/校核
- 6.5 提高压杆稳定性措施

1. 压杆稳定的概念

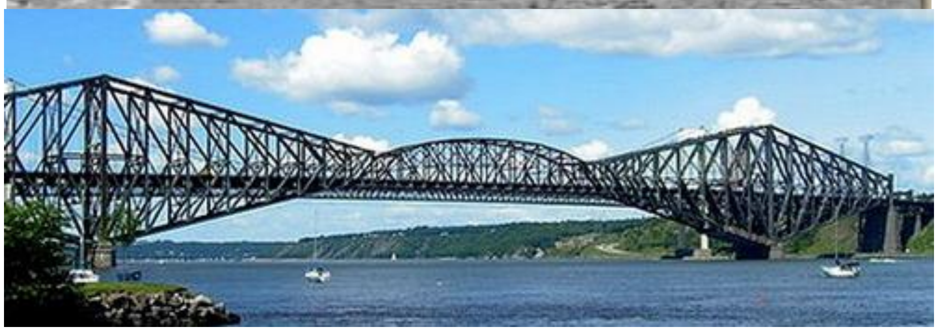
1. 压杆稳定的概念

机场屋顶支撑结构



支柱式水塔

工程师之戒



工程师之戒：在魁北克大桥第三次竣工后，加拿大的七大工程学院一起出钱将建桥过程中倒塌的残骸全部买下，并把这些钢材打造成一枚枚戒指，发给每年从工程系毕业的学生。

1. 压杆稳定的概念

稳定性：指构件或体系保持其原有平衡状态的能力。

失　稳：指构件或体系丧失原始平衡状态的稳定性，由稳定平衡状态转变为不稳定状态。

在工程实际中，为了保证构件或结构物能够安全可靠地工作，构件除了满足强度、刚度条件外，还必须满足稳定性的要求。

1. 压杆稳定的概念

平衡的三种状态：

体系受到微小干扰而稍微偏离它原有的平衡状态，当干扰消除后，它**能够**恢复到原有的平衡状态，则原有平衡状态称为**稳定平衡状态**。

当干扰消除后，它**不能够**恢复到原有的平衡状态，且**趋向于远离原有的平衡状态**，则原有平衡状态称为**不稳定平衡状态**。

当干扰消除后，它**不能够**恢复到原有的平衡状态，但**能够在新的状态维持平衡**，则原有平衡状态称为**随遇平衡状态**。

1. 压杆稳定的概念

临界平衡状态：压杆处于稳定平衡与不稳定平衡之间的临界状态。

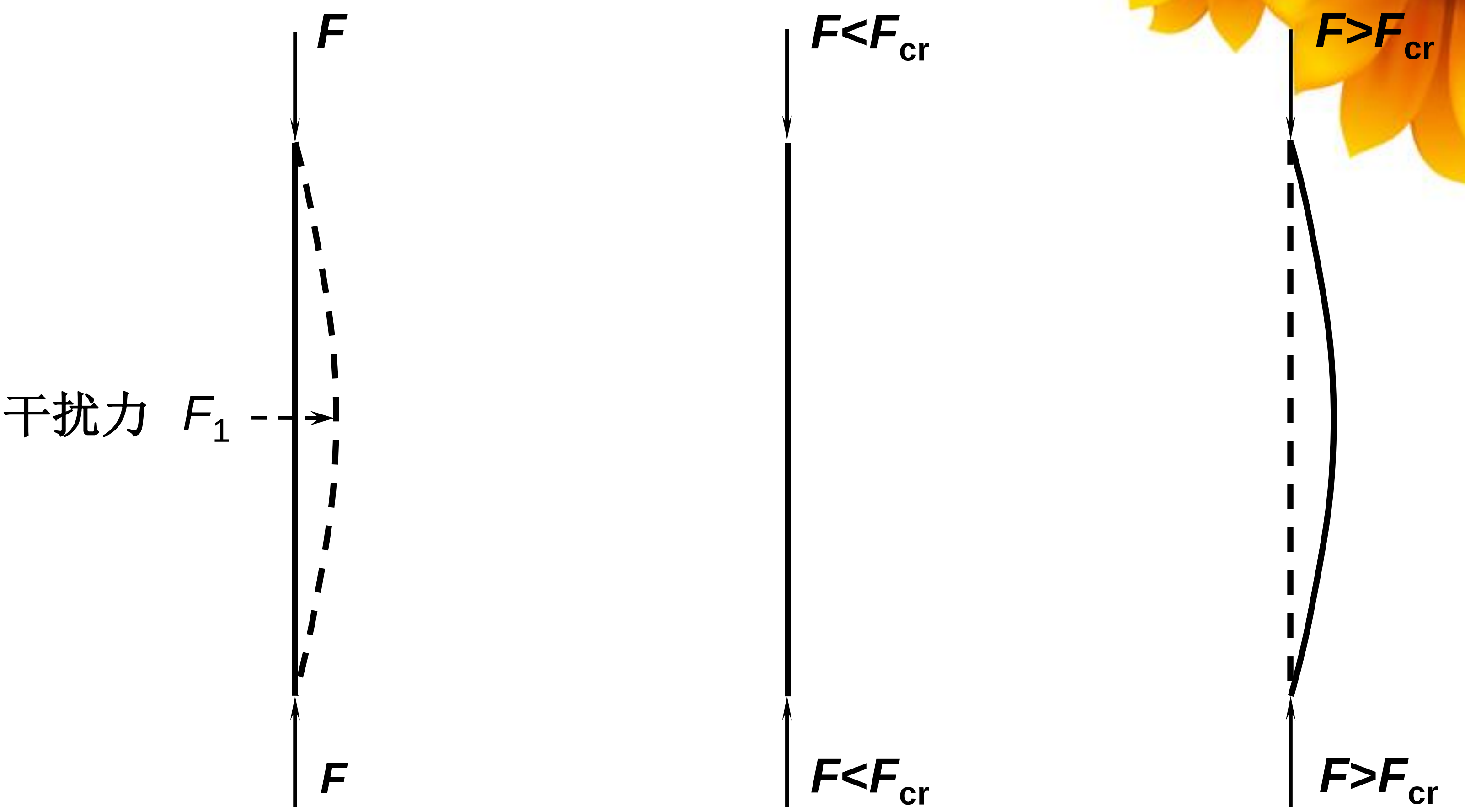
两重性——既可在直线状态保持平衡，又可在微弯状态维持平衡。

临界（压）力：压杆处于临界平衡状态时所受的轴向压力。

F_{cr} 或 使压杆保持直线状态平衡的最大轴向压力。

或 使压杆失稳的最小轴向压力。

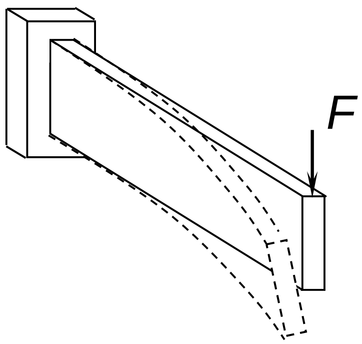
1. 压杆稳定的概念



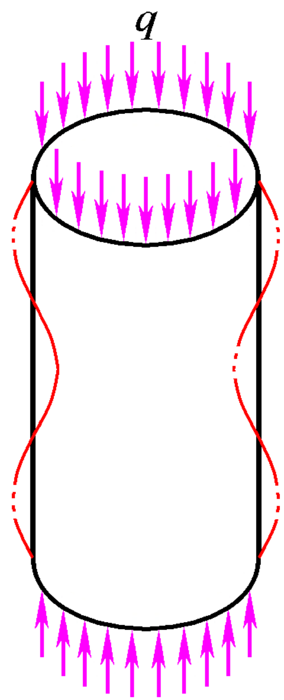
稳定平衡状态　　不稳定平衡状态

1. 压杆稳定的概念

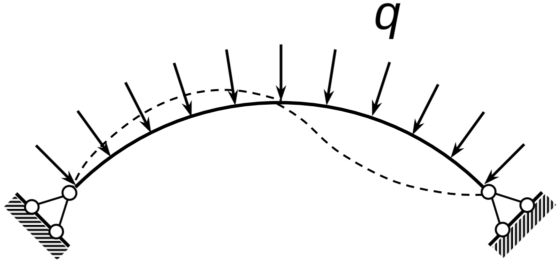
其它形式的构件也存在稳定性问题：



薄壁杆件
弯扭曲屈



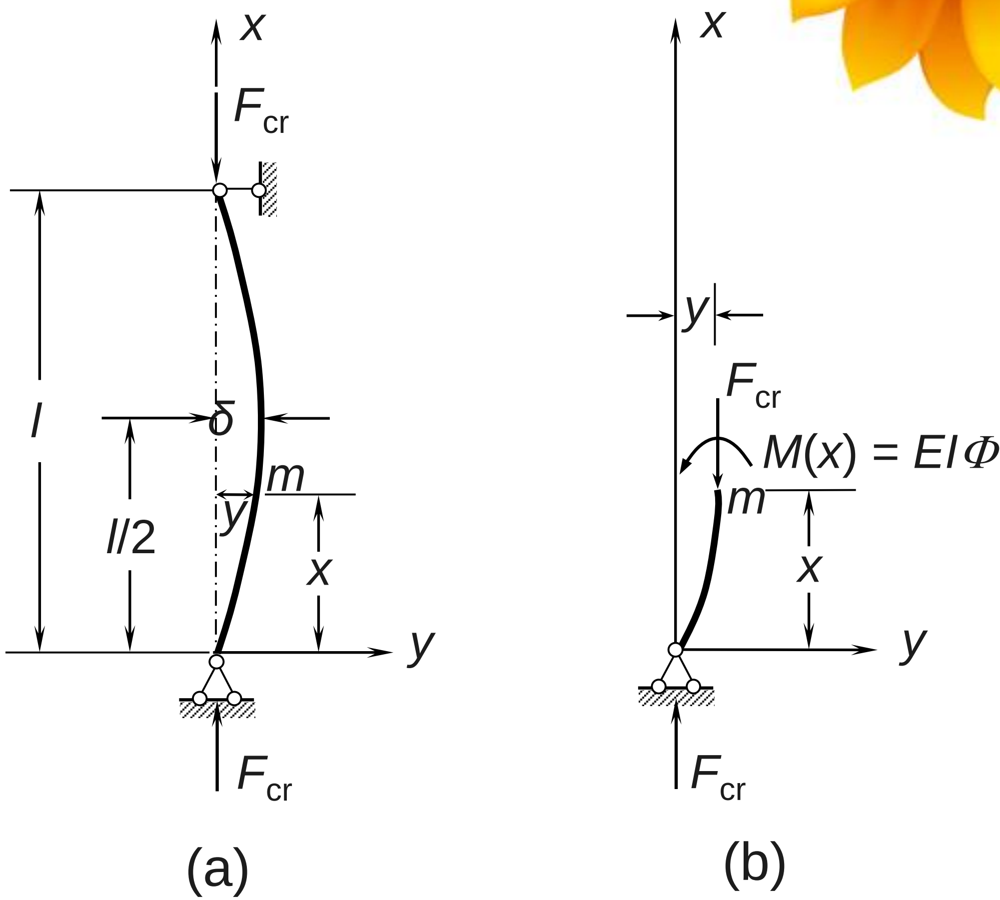
薄壁容器
失稳



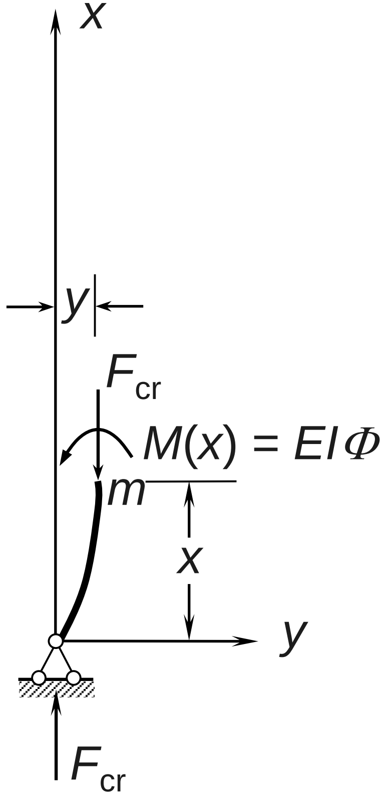
浅拱失稳

2. 临界压力的确定

假设**理想压杆**处于临界平衡状态的微弯状态，**材料**处于**线弹性**范围。距离原点x处截面m的挠度为$y = f(x)$。



2. 临界压力的确定



(b)

由图(b)所示隔离体的平衡可知：

$$M(x) = EI\Phi = F_{cr} y$$

而

$$\Phi \approx -y''$$ 转角逆向为正，顺向为负

则挠曲线近似微分方程为：

$$y'' + \frac{F_{cr}}{EI} y = 0$$

令

$$k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$$

则

$$y'' + k^2 y = 0$$

2. 临界压力的确定

微分方程的解： $y = A\sin kx + B\cos kx$

边界条件： $y(0) = y(l) = 0$

即 $\begin{cases} A\times 0 + B = 0 \\ A\sin kl + B\cos kl = 0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} B = 0 \\ A\sin kl = 0 \end{cases}$

又因 $A \neq 0$ $\therefore \sin kl = 0$

即 $kl = n\pi \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$ $\therefore k^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$

故 $F_{\mathrm{cr}} = \dfrac{n^2\pi^2 EI}{l^2} \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$

2. 临界压力的确定

由于临界力F_{cr}是使压杆失稳的最小压力，故n应取不为零的最小值，即取n=1。

$$\therefore \quad F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$ —— 欧拉公式

l - 杆的长度

EI - 压杆的抗弯刚度

μ - 长度系数

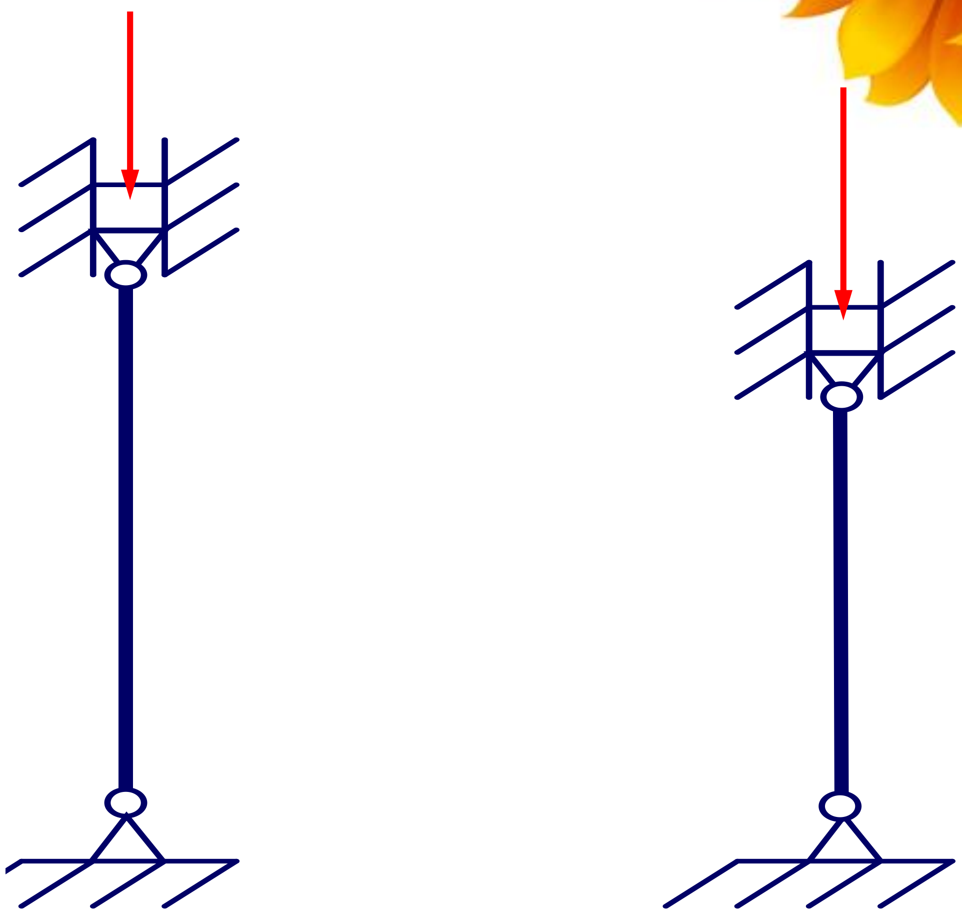
μl -当量长度

I 的计算？

圆截面 $I_z = \dfrac{\pi d^4}{64}$

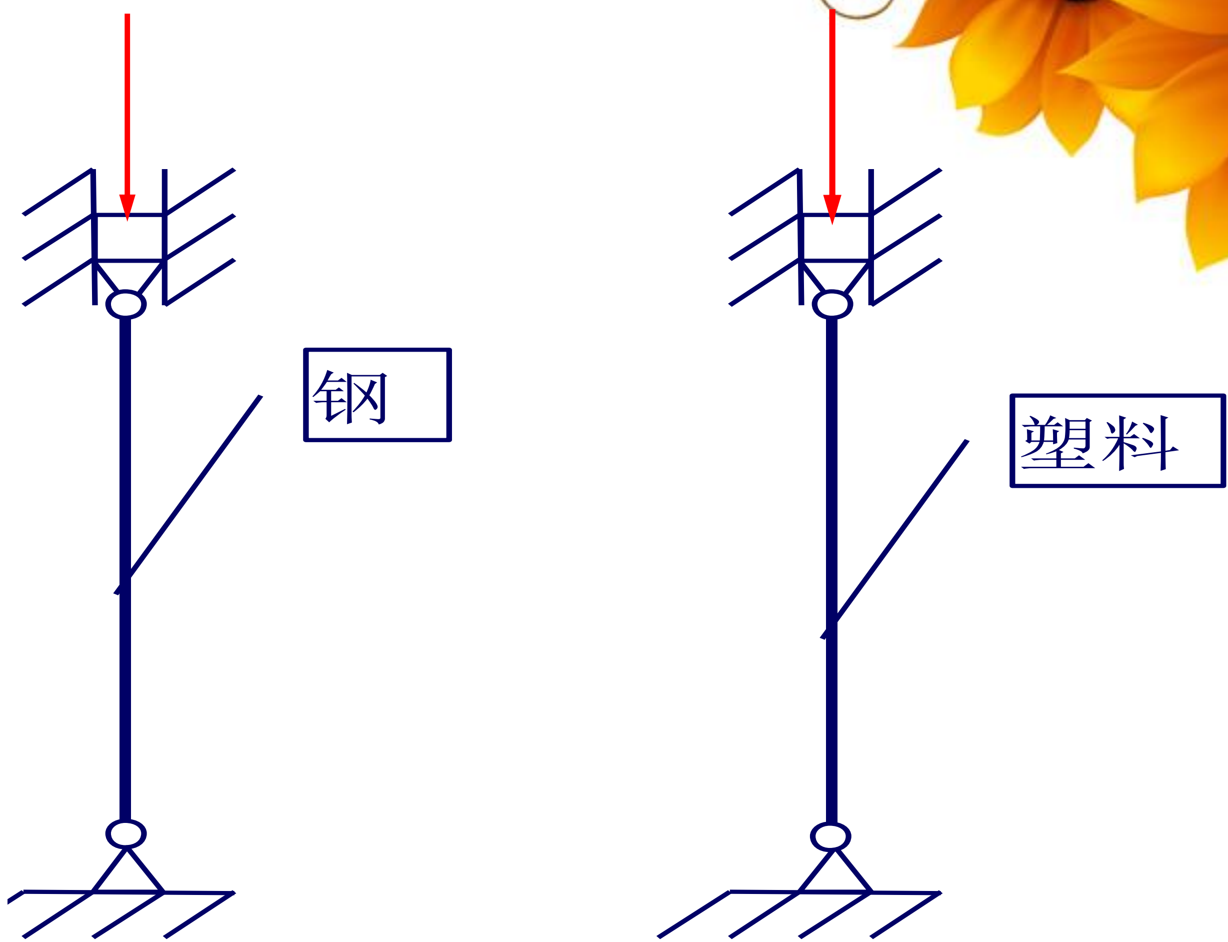
矩形截面 $I_z = \dfrac{bh^3}{12}$

2. 临界压力的确定



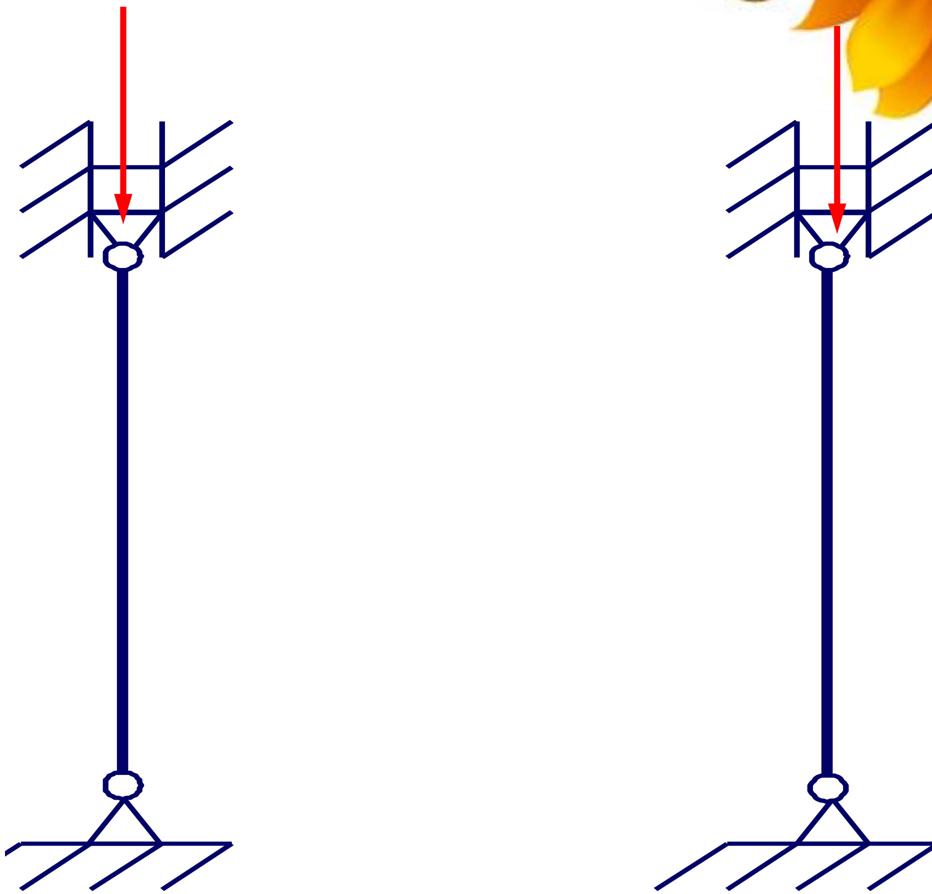
与压杆长度有关 $\Rightarrow F_{cr} \propto 1/l^2$

2. 临界压力的确定



与弹性模量有关⇒$F_{cr} \propto E$

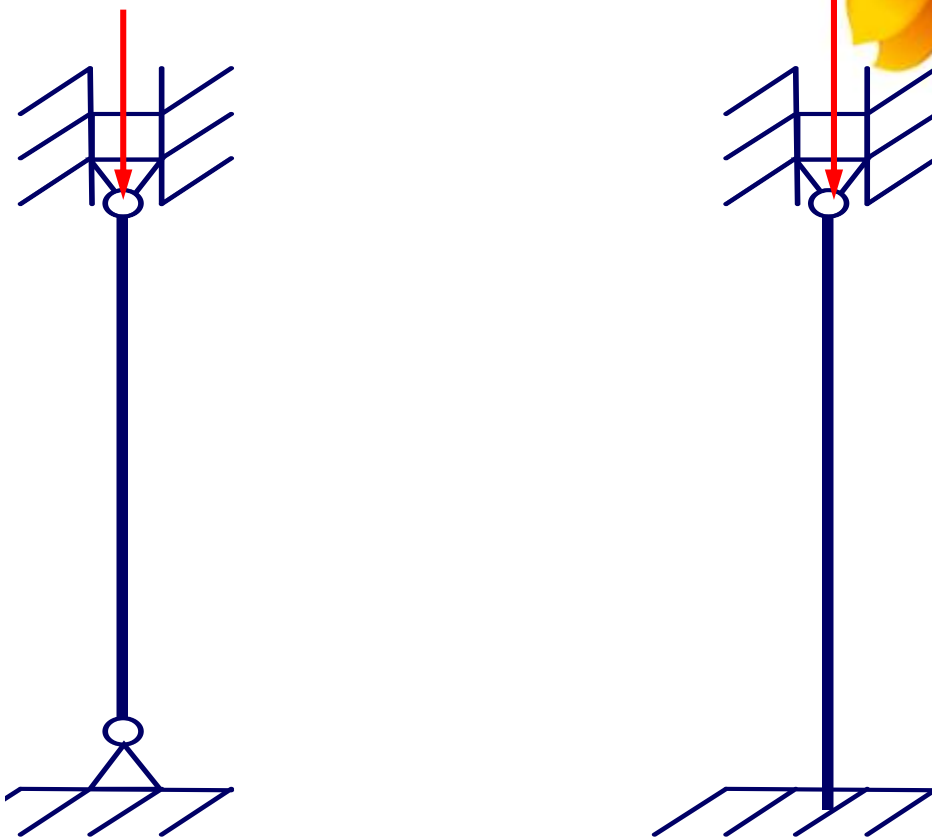
2. 临界压力的确定



与横截面几何形状有关⇒

$F_{cr} \propto I$ (最小轴惯性矩)

2. 临界压力的确定



与支承有关 ⇒ $F_{cr} \propto 1/\mu^2$

(长度系数μ)

欧拉公式

1 与压杆长度有关 $\Rightarrow F_{cr} \propto 1/l^2$

2 与弹性模量有关 $\Rightarrow F_{cr} \propto E$

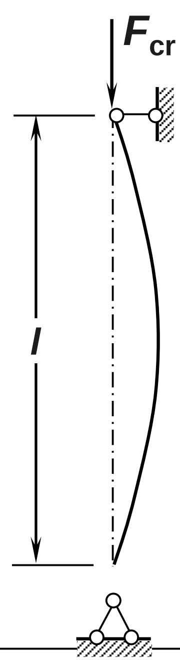
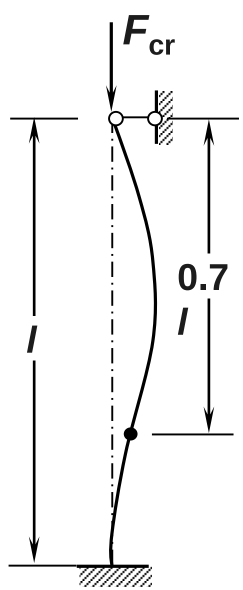
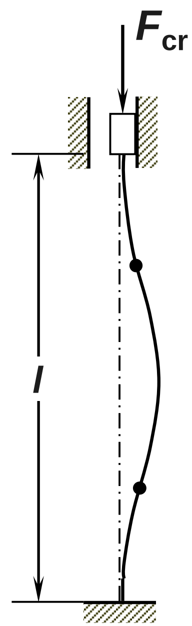
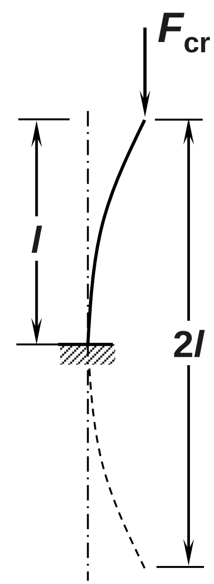
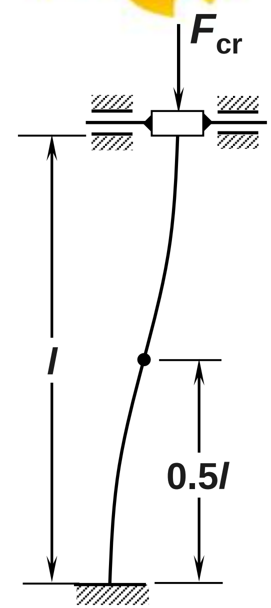
3 与横截面有关 $\Rightarrow F_{cr} \propto I$

4 与支承情况有关 $\Rightarrow F_{cr} \propto 1/\mu^2$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

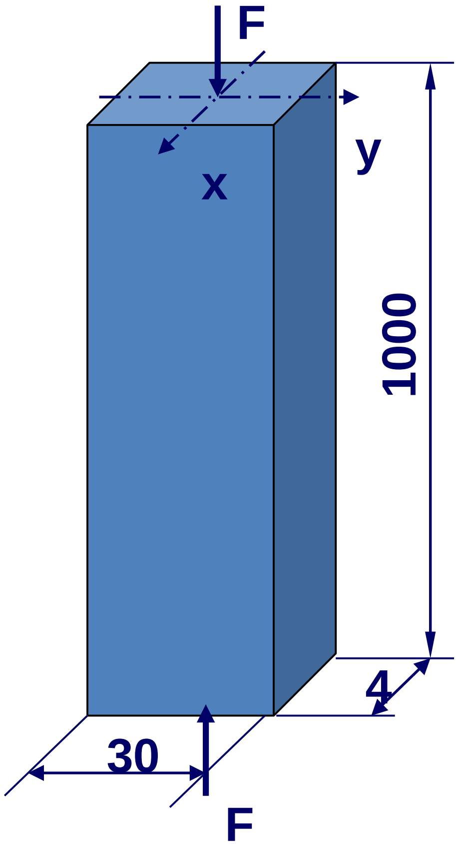
2. 临界压力的确定

各种支承条件下细长压杆的临界力

支承情况	两端铰支	一端固定 一端铰支	两端固定， 但可沿纵向 相对移动	一端固定 一端自由	两端固定， 但可沿横向 相对移动
失稳时挠曲线形状					
临界力	$F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$	$F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$	$F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$	$F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	$F_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$
长度系数	μ= 1	μ= 0.7	μ= 0.5	μ= 2	μ= 1

2. 临界压力的确定

例1　已知：压杆为Q235钢，μ=1, 材料弹性模量 E=2*10⁵MPa，许用应力[σ]=160MPa, 求F_{cr}



解：由稳定性条件得

$$I = bh^3/12 = 30\times 4^3/12 = 160mm^4$$

$$Fcr = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2\times 2\times 10^5\times 160}{(1\times 1000)^2} = 315.5N$$

由强度条件:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \le [\sigma],$$

$$[F] = N \le A\bullet[\sigma] = 4\times 30\times 160 = 19200N$$

因此,F_{cr} =315.5N

3. 欧拉公式的适用范围

临界应力 $$\sigma_{cr}=\frac{F_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}$$

定义：截面惯性半径 $$i=\sqrt{\frac{I}{A}}$$

代入: $$\sigma_{cr}=\frac{F_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}=\frac{\pi^2 E}{(\mu l/i)^2}$$

压杆柔度 $$\lambda=\frac{\mu l}{i}$$

简化后的欧拉公式： $$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

3．欧拉公式的适用范围

假定材料服从虎克定律：

$$\sigma_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_p \longrightarrow \text{材料的比例极限}$$

欧拉公式的适用范围：

$$\lambda \ge \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$

细长杆 (大柔度杆)： λ ≥ λp，是弹性范围内的失稳引起破坏, 由欧拉公式计算

不同材料有不同的λp：Q235， **λp≈100**

3. 欧拉公式的适用范围

- 当压杆λ<λs, 其应力达到材料的屈服极限时，压杆也不失稳，破坏决定于强度，此时：

$$\sigma_{cr} = \sigma_s$$

对应的柔度为λ_s

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_s}}$$

将**λ<λs**的压杆称为小柔度杆（粗短杆）

不存在稳定性问题，而是强度问题。

$$\sigma \le \sigma_{cr} = \sigma_s$$

3.欧拉公式的适用范围

•中长杆：(中柔度杆) λs<λ<λp的压杆, 主要由超过弹性范围的失稳引起破坏

直线公式：计算中长杆的临界应力

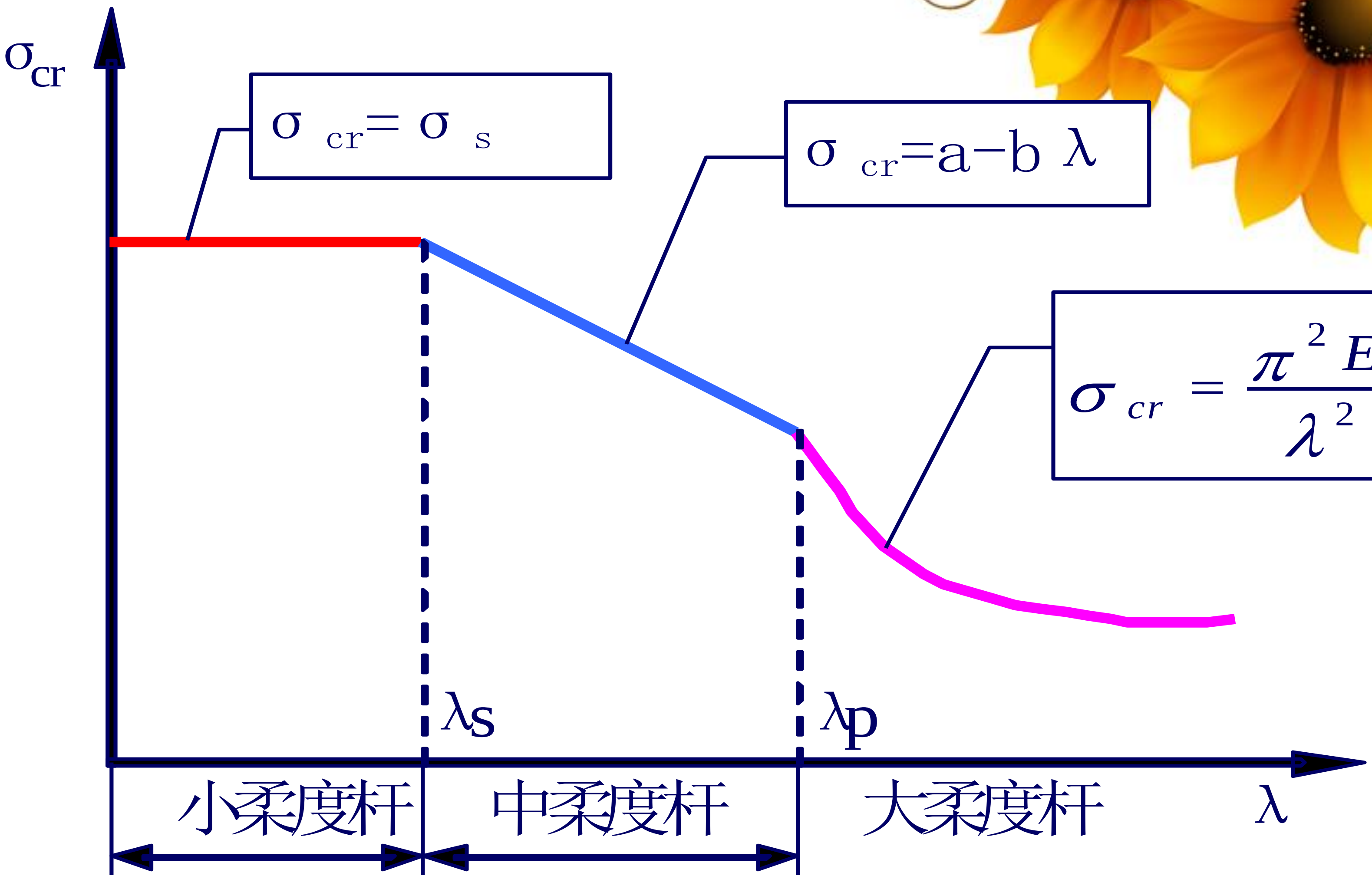
$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, (\lambda_s < \lambda < \lambda_p)$$

（ a,b：是与材料性质有关的常数，见表6-2 ）

由$\sigma_{cr}=\sigma_s$, 可导出柔度适用的下限λs：

$$\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

3.欧拉公式的适用范围



对于Q235钢， $\lambda_p=100$，$\lambda_s=61.4$

4. 压杆的稳定性校核

稳定条件： $F \le \dfrac{F_{cr}}{n_{cr}} = [F]$

n_{cr}的取值：钢$n_{cr}=1.8\sim3.0$

铸铁$n_{cr}=5\sim5.5$

木材$n_{cr}=2.8\sim3.2$

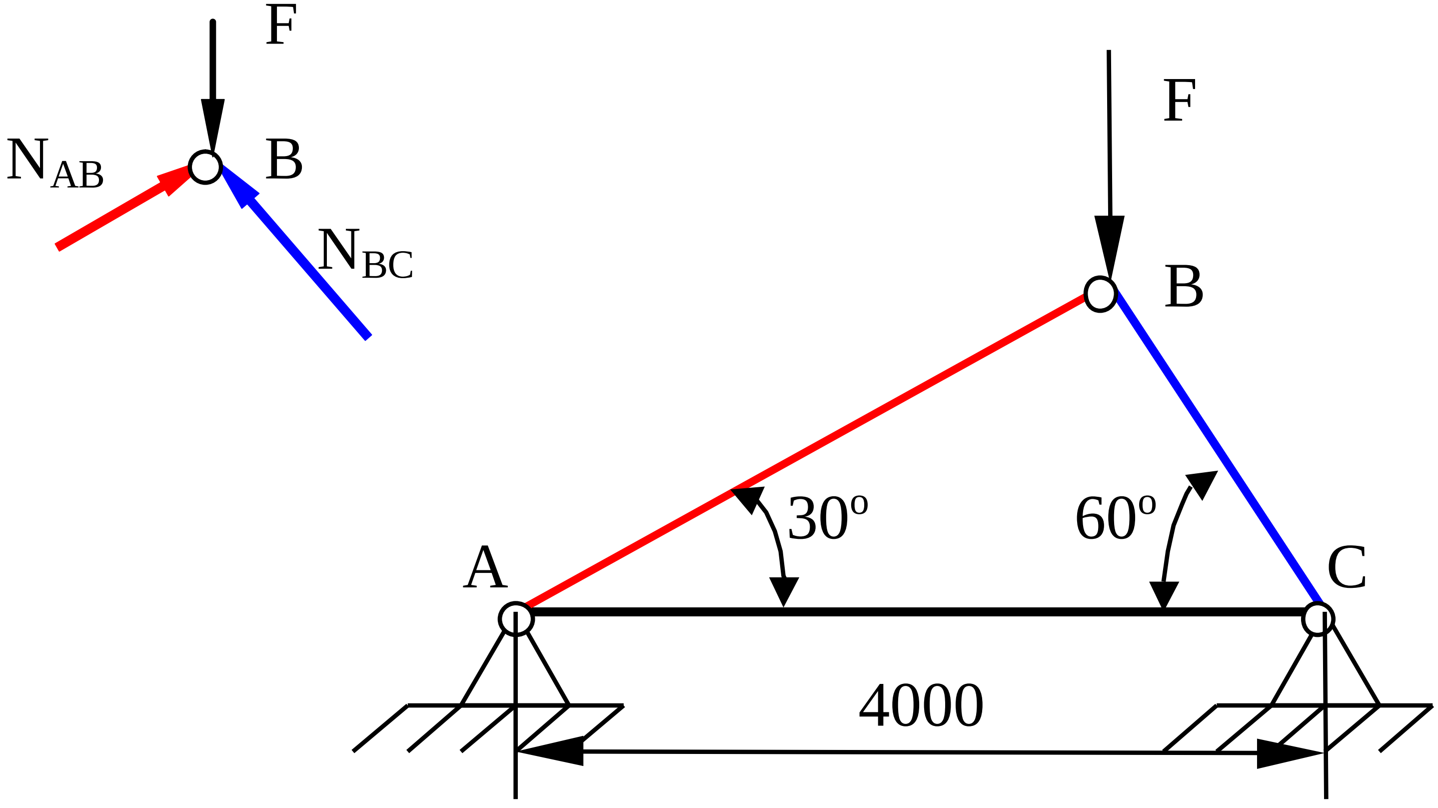
用应力表示：$\sigma = \dfrac{F}{A} < [\sigma_{cr}]$ $\quad [\sigma_{cr}] = \dfrac{\sigma_{cr}}{n_{cr}} \approx \varphi[\sigma]$

ϕ ： 折减系数

用安全系数表示：$n_{cr} = \dfrac{\sigma_{cr}}{\sigma} \ge [n_{cr}]$

4. 压杆的稳定性校核

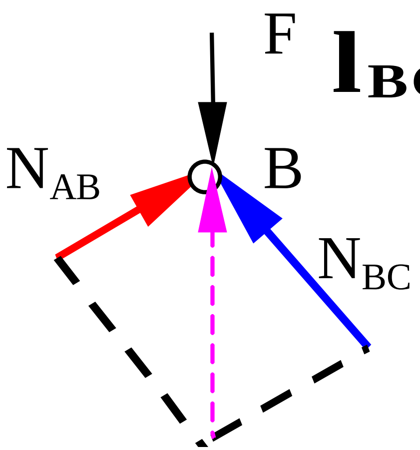
例 2：材料为Q235，[σ]=160MPa，A、B、C为铰链，杆件的直径为80mm，确定杆系的许可载荷。



4. 压杆的稳定性校核

解： $l_{AB} = 4000 \times \cos 30^{o} = 3460mm$

$l_{BC} = 4000 \times \sin 30^{o} = 2000mm$



由静力平衡条件求得：

$N_{AB} = -F\sin30^{\circ}$ ， $N_{BC} = -F\cos30^{\circ}$

惯性半径：

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = 20mm \qquad I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

两端铰支： $\mu = 1$

故各杆的柔度：

$$\lambda_{AB} = \frac{\mu l_{AB}}{i} = \frac{3460}{20} = 173$$

$$\lambda_{BC} = \frac{\mu l_{BC}}{i} = \frac{2000}{20} = 100$$

大柔度杆

4. 压杆的稳定性校核

- 代入欧拉公式：

$$\sigma_{cr}^{AB} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2\times 10^5}{173^2} = 65.89MPa$$

$$\sigma_{cr}^{BC} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2\times 10^5}{100^2} = 197.19MPa$$

AB及BC杆的临界载荷为：

$$\mathbf{F_{cr}^{AB} = 65.89 \times \pi \times 40^2 = 331.03KN}$$

$$\mathbf{F_{cr}^{BC} = 197.19 \times \pi \times 40^2 = 990.68KN}$$

取安全系数n_{cr}=3，则杆系的许可载荷：

$$[F] = \min\left\{F_{cr}^{AB}/n_{cr} \bullet \sin 30^\circ, F_{cr}^{BC}/n_{cr} \bullet \cos 30^\circ\right\}$$

$$= \min\{221, 1144\} = 221KN$$

故杆件的许可载荷为221KN

4. 压杆的稳定性校核

- 查表6-3

$$\phi_{AB}=0.26 \Rightarrow \left[\sigma_{cr}^{AB}\right]=\phi_{AB}[\sigma]=0.26\times160=41.6\,MPa$$

$$\phi_{BC}=0.6 \Rightarrow \left[\sigma_{cr}^{BC}\right]=\phi_{BC}[\sigma]=0.6\times160=96\,MPa$$

AB及BC杆的许可载荷为：

$$F_{cr}^{AB}=\sigma_{cr}^{AB}\times\pi\times40^2=188.9KN$$

$$F_{cr}^{BC}=\sigma_{cr}^{BC}\times\pi\times40^2=485.7KN$$

杆系的许可载荷：

$$[F]=\min\left\{F_{cr}^{AB}/\sin30^{o},F_{cr}^{BC}/\cos30^{o}\right\}$$

$$=\min\{377.8,560.9\}=377.8KN$$

故杆件的许可载荷为377.78KN

4. 压杆的稳定性校核

- 压杆稳定性的校核步骤

1. 解平衡方程
2. 根据压杆的尺寸及支承情况，计算柔度λ
3. 根据柔度，确定计算该压杆的临界应力公式，算出临界应力值
4. 利用压杆的稳定条件对压杆进行稳定校核

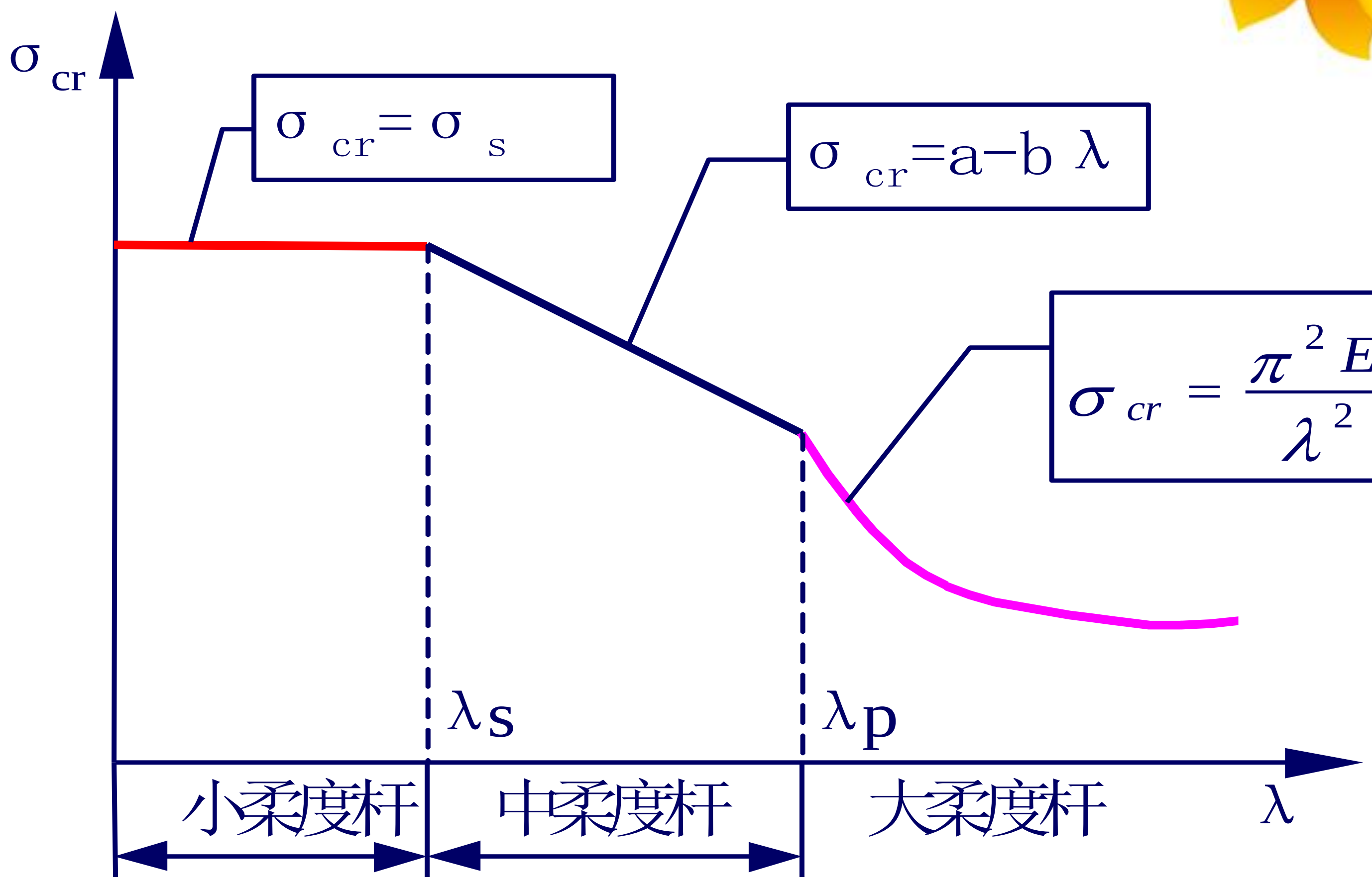
$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\sigma_{cr}] \le \dfrac{\sigma_{cr}}{[n_{cr}]} \\ [\sigma_{cr}] = \phi[\sigma] \end{array} \right.$$

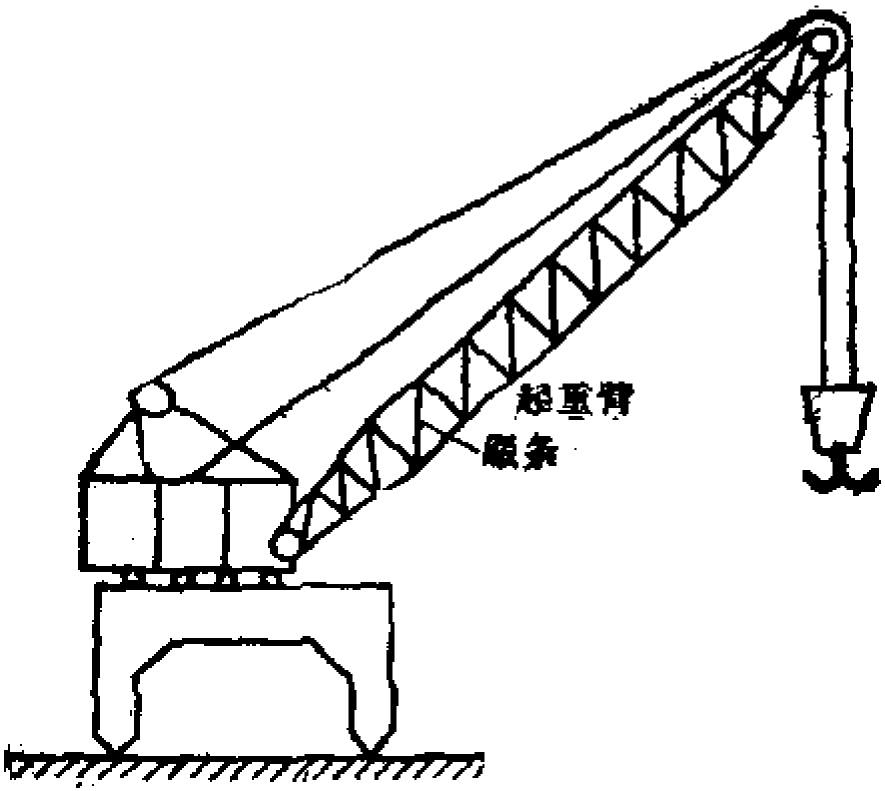
5 提高压杆稳定性的措施

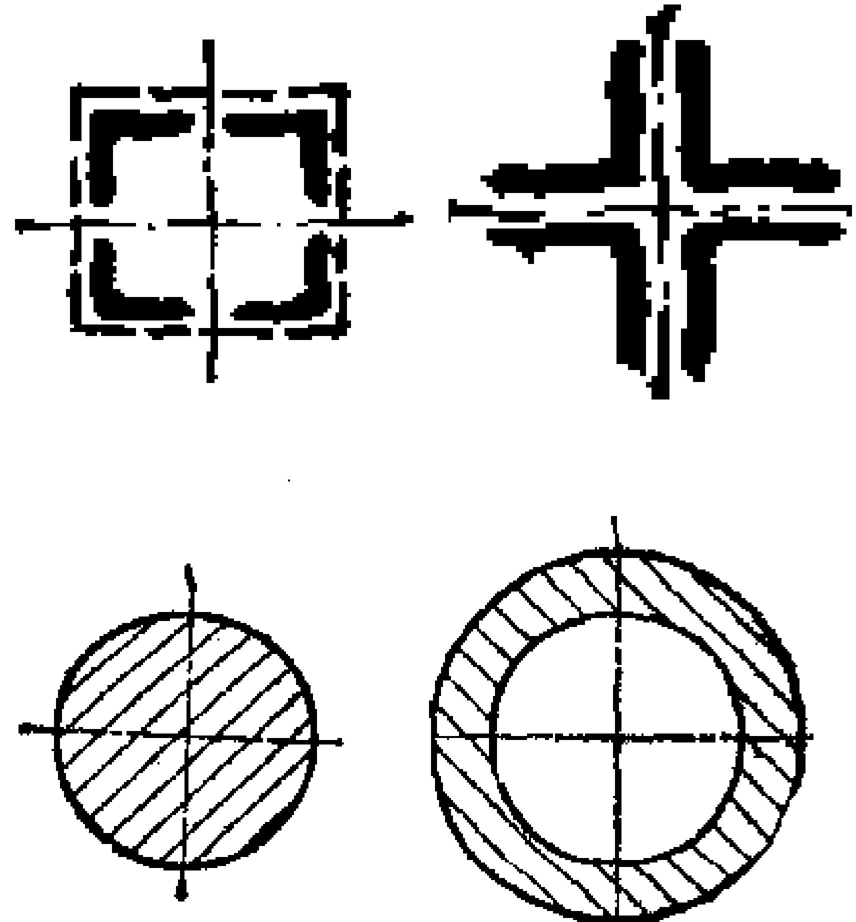
✓ **选用E大的材料**



5 提高压杆稳定性的措施

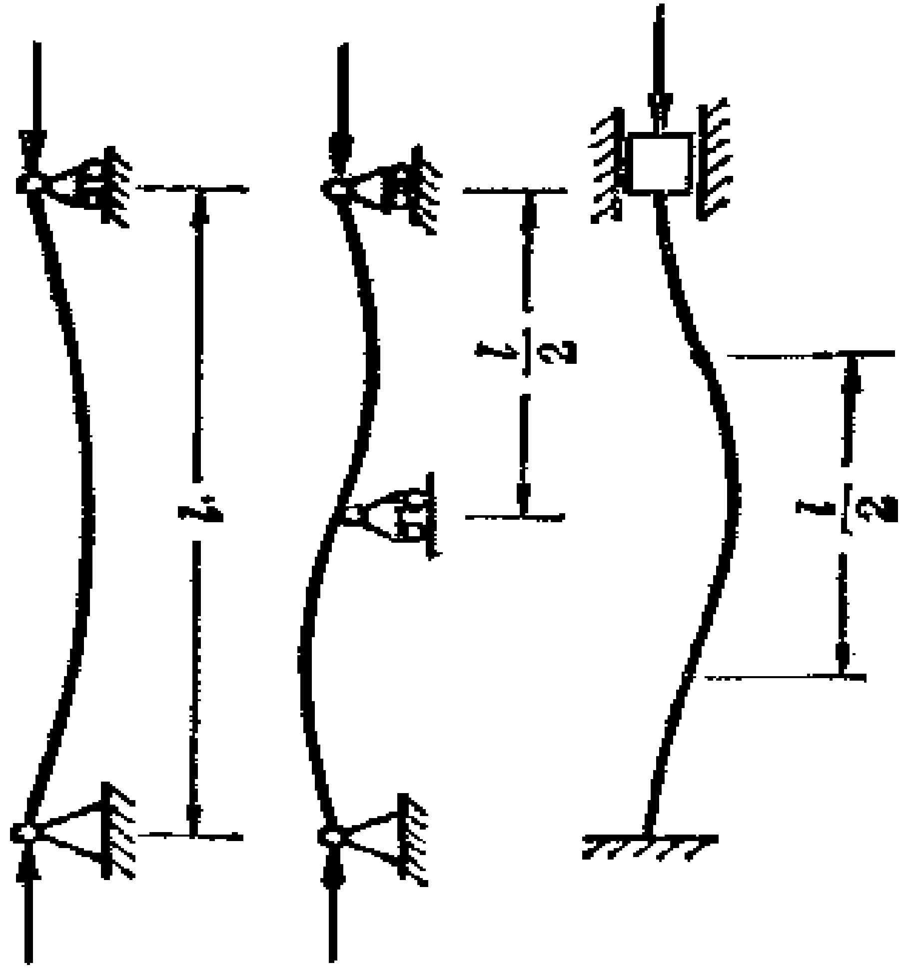
✓ 选择合理的截面形状





5 提高压杆稳定性的措施

✓ 改变压杆的约束条件



本章作业

- 6-4
- 6-6

THANK YOU!