

第五章 信号的运算和处理

第五章 信号的运算和处理

§ 5.1 集成运放组成的运算电路

§ 5.2 模拟乘法器及其在运算电路中的应用

§ 5.3 有源滤波电路

§ 5.1 集成运放组成的运算电路

一、概述

二、比例运算电路

三、加减运算电路

四、积分运算电路和微分运算电路

五、对数运算电路和指数运算电路

一、概述

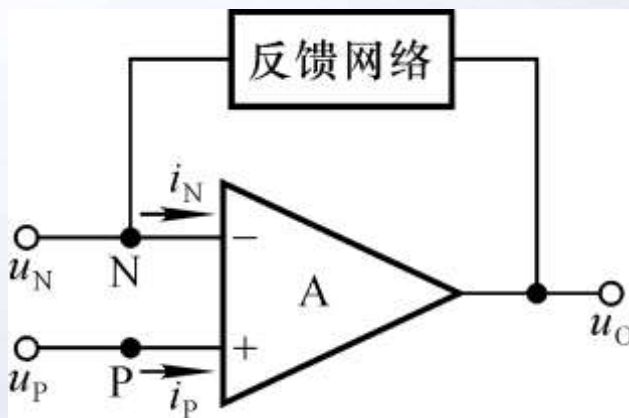
1. 理想运放的参数特点

A_{od} 、 r_{id} 、 f_H 均为无穷大， r_o 、失调电压及其温漂、失调电流及其温漂、噪声均为0。

2. 集成运放的线性工作区： $u_O = A_{od}(u_P - u_N)$

电路特征：引入电压负反馈。

无源网络



因为 u_O 为有限值， $A_{od} = \infty$ ，
所以 $u_N - u_P = 0$ ，即

$u_N = u_P$ 虚短路

因为 $r_{id} = \infty$ ，所以

$i_N = i_P = 0$ 虚断路

3. 研究的问题

(1) 运算电路：运算电路的输出电压是输入电压某种运算的结果，如加、减、乘、除、乘方、开方、积分、微分、对数、指数等。

(2) 描述方法：运算关系式 $u_O = f(u_I)$

(3) 分析方法：“虚短”和“虚断”是基本出发点。

4. 学习运算电路的基本要求

(1) 识别电路；

(2) 掌握输出电压和输入电压运算关系式的求解方法。

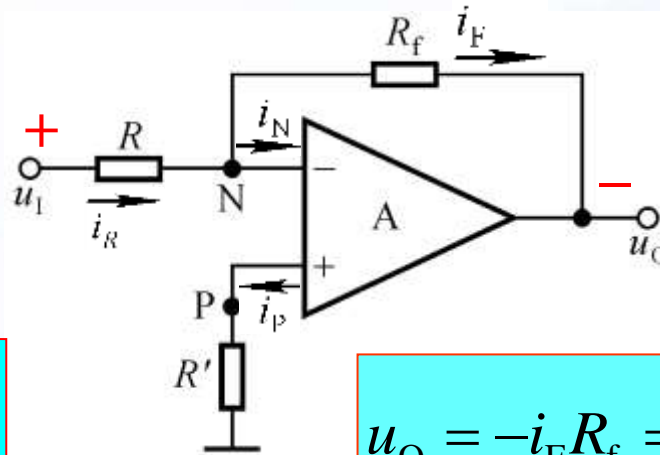
二、比例运算电路

1. 反相输入

$$i_N = i_P = 0,$$

$$u_N = u_P = 0 \text{ --- 虚地}$$

在节点N: $i_F = i_R = \frac{u_I}{R}$



$$u_O = -i_F R_f = -\frac{R_f}{R} \cdot u_I$$

1) 电路的输入电阻为多少?

2) $R' = ?$ 为什么?

$$R' = R // R_f$$

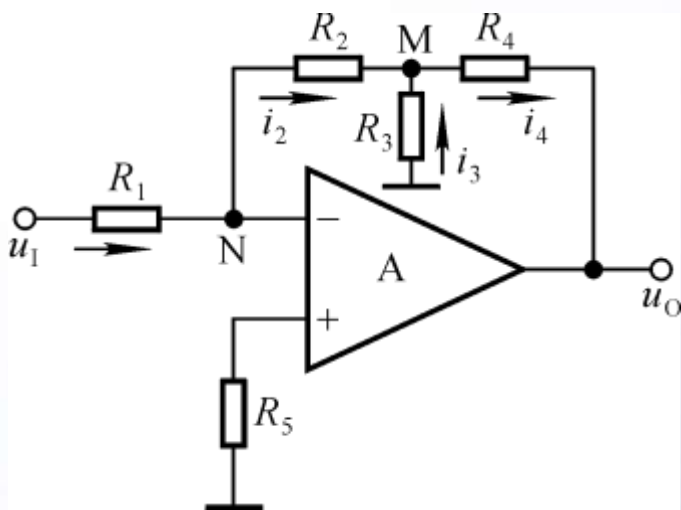
保证输入级的对称性

3) 若要 $R_i = 100\text{k}\Omega$, 比例系数为 -100 , $R_1 = ?$ $R_f = ?$

R_f 太大, 噪声大。如何利用相对小的电阻获得 -100 的比例系数?

T形反馈网络反比例运算电路

利用 R_4 中有较大电流来获得较大数值的比例系数。



$$i_2 = i_1 = \frac{u_I}{R_1} \quad u_M = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_I$$

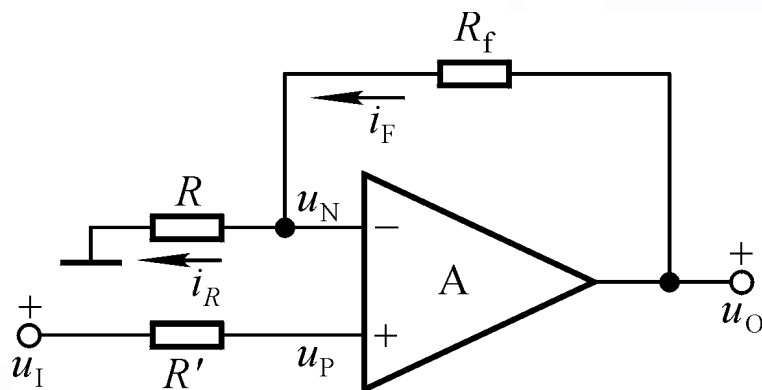
$$u_O = u_M - (i_2 + i_3)R_4 \quad i_3 = -\frac{u_M}{R_3}$$

$$u_O = -\frac{R_2 + R_4}{R_1} \left(1 + \frac{R_2 // R_4}{R_3}\right) \cdot u_I$$

若要求 $R_i = 100\text{k}\Omega$ ，则 $R_1 = ?$

若比例系数为 -100 ， $R_2 = R_4 = 100\text{k}\Omega$ ，则 $R_3 = ?$

2. 同相输入



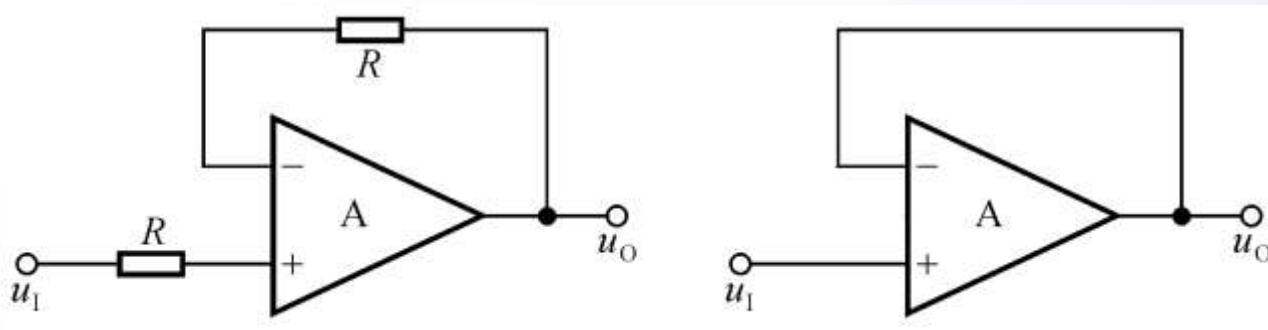
$$u_N = u_P = u_I$$

$$u_O = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right) \cdot u_N$$

$$u_O = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right) \cdot u_I$$

- 1) 输入电阻为多少？
- 2) 电阻 R' =？为什么？

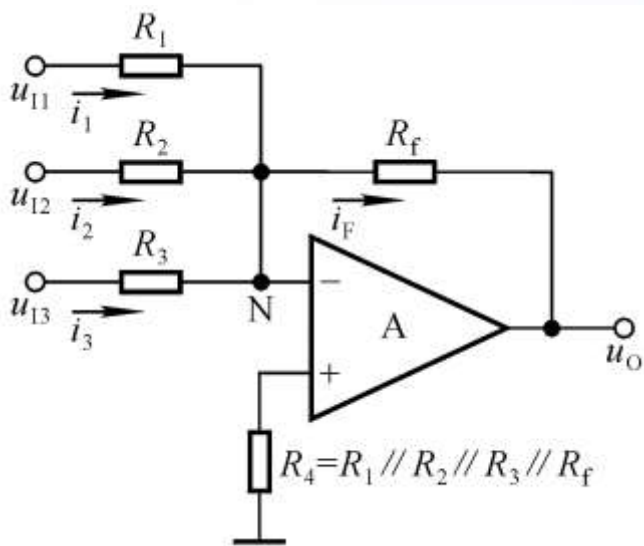
同相输入比例运算电路的特例：电压跟随器



$$u_O = u_N = u_P = u_I$$

三、加减运算电路

1. 反相求和



方法一：节点电流法

$$u_N = u_P = 0$$

$$i_F = i_{R1} + i_{R2} + i_{R3}$$

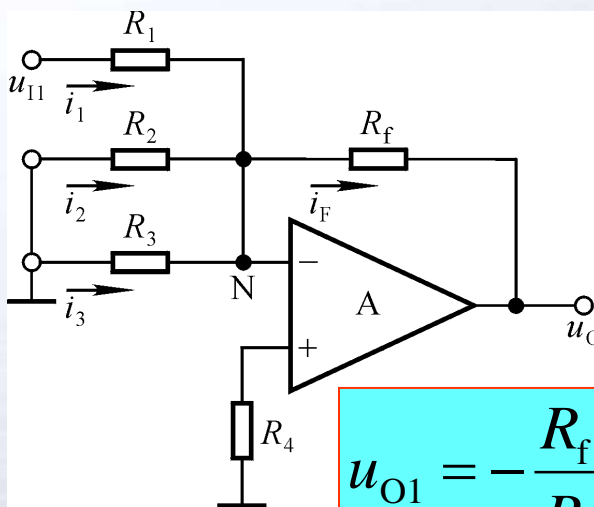
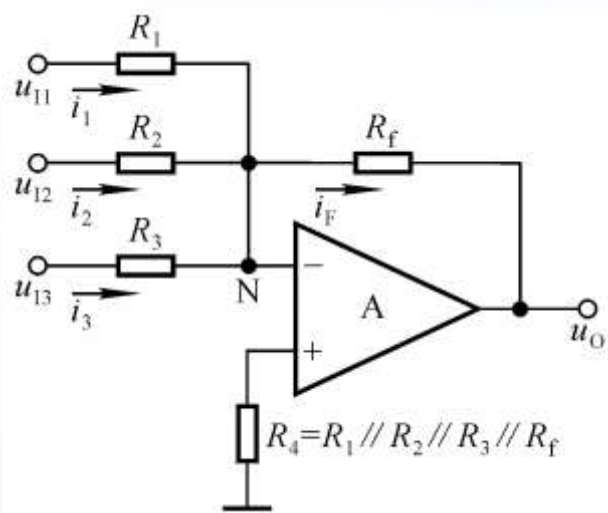
$$= \frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3}$$

$$u_O = -i_F R_f = -R_f \left(\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3} \right)$$

1. 反相求和

方法二：利用叠加原理

首先求解每个输入信号单独作用时的输出电压，然后将所有结果相加，即得到所有输入信号同时作用时的输出电压。



$$u_{O1} = -\frac{R_f}{R_1} \cdot u_{I1}$$

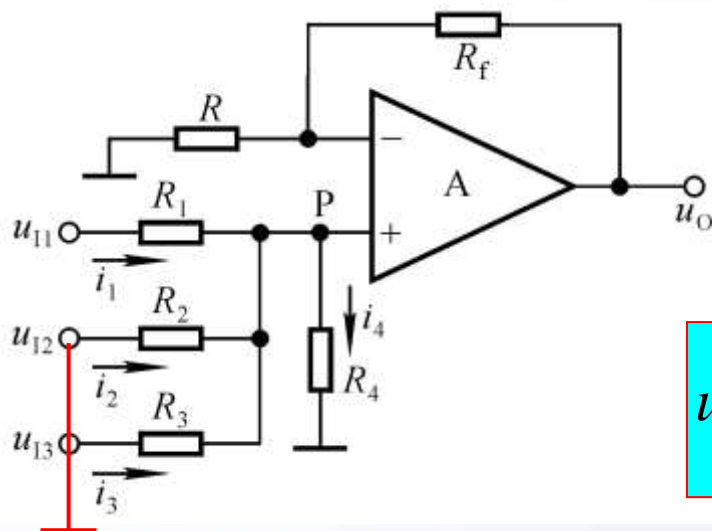
同理可得

$$u_{O2} = -\frac{R_f}{R_2} \cdot u_{I2}$$

$$u_{O3} = -\frac{R_f}{R_3} \cdot u_{I3}$$

$$u_O = u_{O1} + u_{O2} + u_{O3} = -\frac{R_f}{R_1} \cdot u_{I1} - \frac{R_f}{R_2} \cdot u_{I2} - \frac{R_f}{R_3} \cdot u_{I3}$$

2. 同相求和 设 $R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 \parallel R_4 = R \parallel R_f$



利用叠加原理求解:

令 $u_{I2} = u_{I3} = 0$, 求 u_{I1} 单独作用时的输出电压

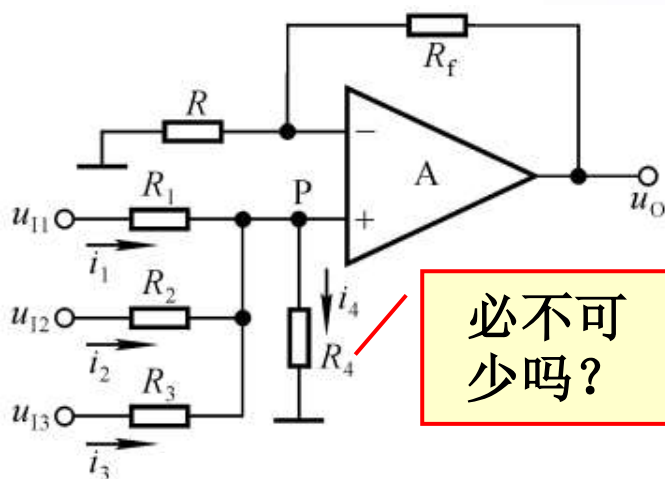
$$u_{O1} = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right) \cdot \frac{R_2 \parallel R_3 \parallel R_4}{R_1 + R_2 \parallel R_3 \parallel R_4} \cdot u_{I1}$$

同理可得, u_{I2} 、 u_{I3} 单独作用时的 u_{O2} 、 u_{O3} , 形式与 u_{O1} 相同, $u_O = u_{O1} + u_{O2} + u_{O3}$ 。

物理意义清楚, 计算麻烦!

在求解运算电路时, 应选择合适的方法, 使运算结果简单明了, 易于计算。

2. 同相求和 设 $R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 \parallel R_4 = R \parallel R_f$



必不可少吗？

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_4$$

$$\frac{u_{I1} - u_P}{R_1} + \frac{u_{I2} - u_P}{R_2} + \frac{u_{I3} - u_P}{R_3} = \frac{u_P}{R_4}$$

$$\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_P$$

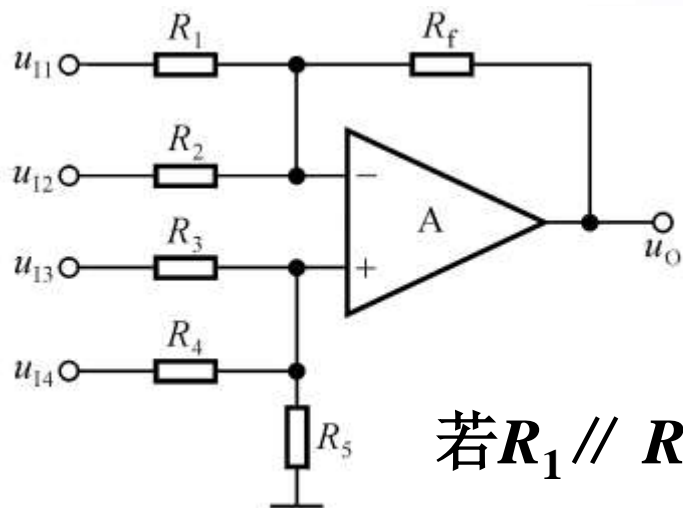
$$u_P = R_P \left(\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3} \right) \quad (R_P = R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 \parallel R_4)$$

$$u_O = \left(1 + \frac{R_f}{R} \right) \cdot u_P = \frac{R + R_f}{R} \cdot R_P \left(\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3} \right) \cdot \frac{R_f}{R_f}$$

$$u_O = R_f \cdot \left(\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3} \right)$$

与反相求和运算电路的结果差一负号

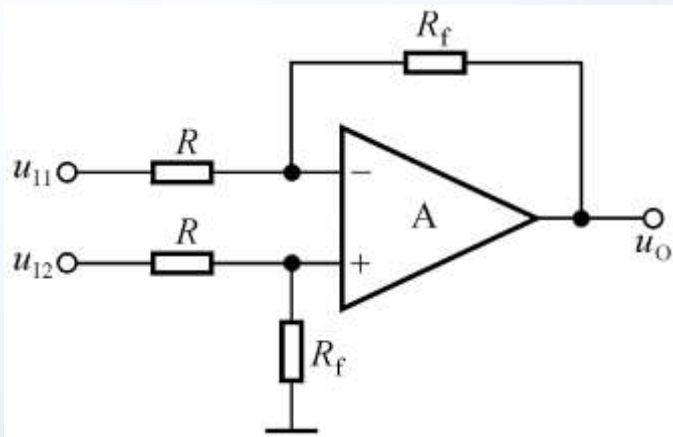
3. 加减运算 利用求和运算电路的分析结果



设 $R_1 // R_2 // R_f = R_3 // R_4 // R_5$

$$u_O = R_f \cdot \left(\frac{u_{I3}}{R_3} + \frac{u_{I4}}{R_4} - \frac{u_{I1}}{R_1} - \frac{u_{I2}}{R_2} \right)$$

若 $R_1 // R_2 // R_f \neq R_3 // R_4 // R_5$, $u_O = ?$

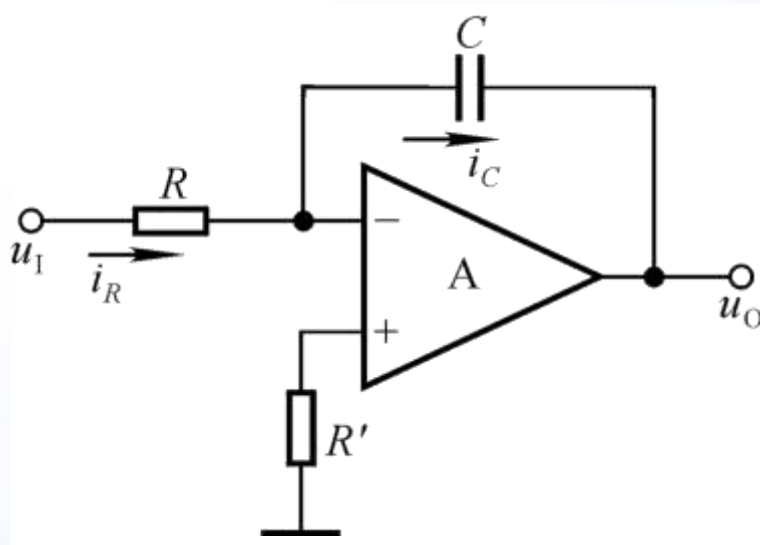


$$u_O = \frac{R_f}{R} \cdot (u_{I2} - u_{I1})$$

实现了差分
放大电路

四、积分运算电路和微分运算电路

1. 积分运算电路



$$i_C = i_R = \frac{u_I}{R}$$

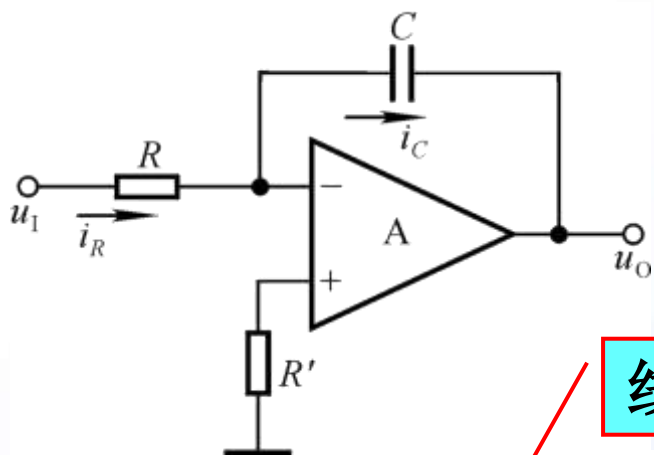
$$u_O = -u_C = -\frac{1}{C} \int \frac{u_I}{R} dt$$

$$u_O = -\frac{1}{RC} \int u_I dt$$

$$u_O = -\frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_2} u_I dt + u_O(t_1)$$

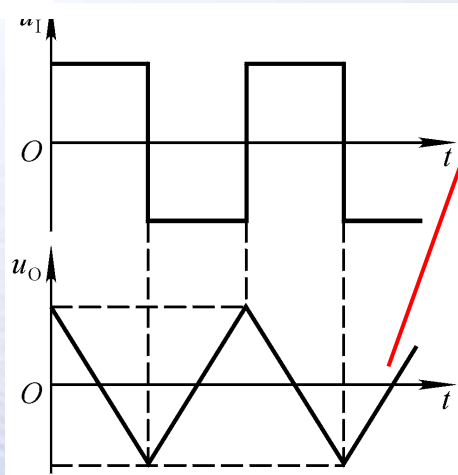
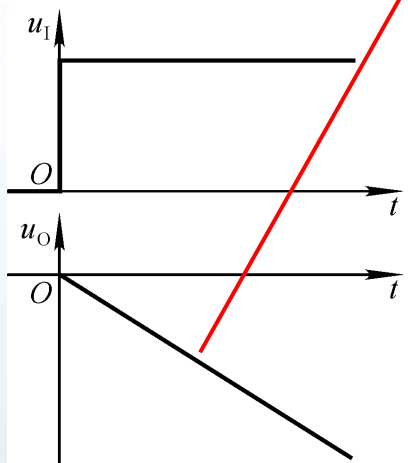
$$\text{若 } u_I \text{ 在 } t_1 \sim t_2 \text{ 为常量, 则 } u_O = -\frac{1}{RC} \cdot u_I(t_2 - t_1) + u_O(t_1)$$

利用积分运算的基本关系实现不同的功能

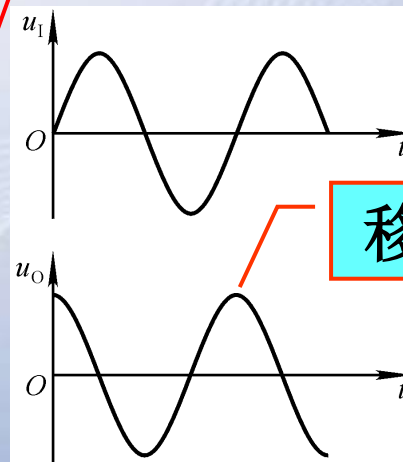


- 1) 输入为阶跃信号时的输出电压波形?
- 2) 输入为方波时的输出电压波形?
- 3) 输入为正弦波时的输出电压波形?

线性积分，延时

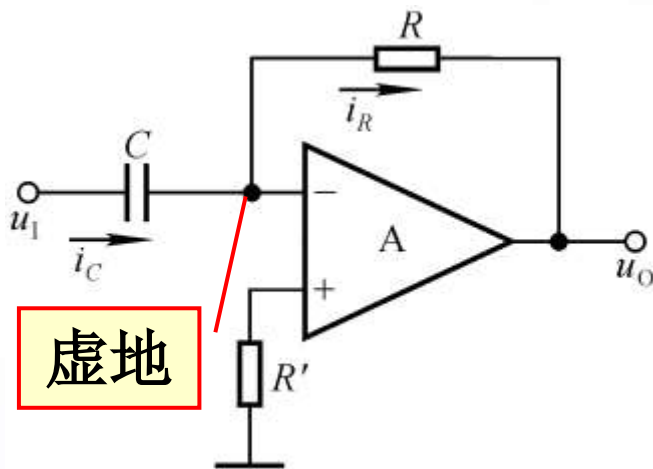


波形变换



移相

2. 微分运算电路



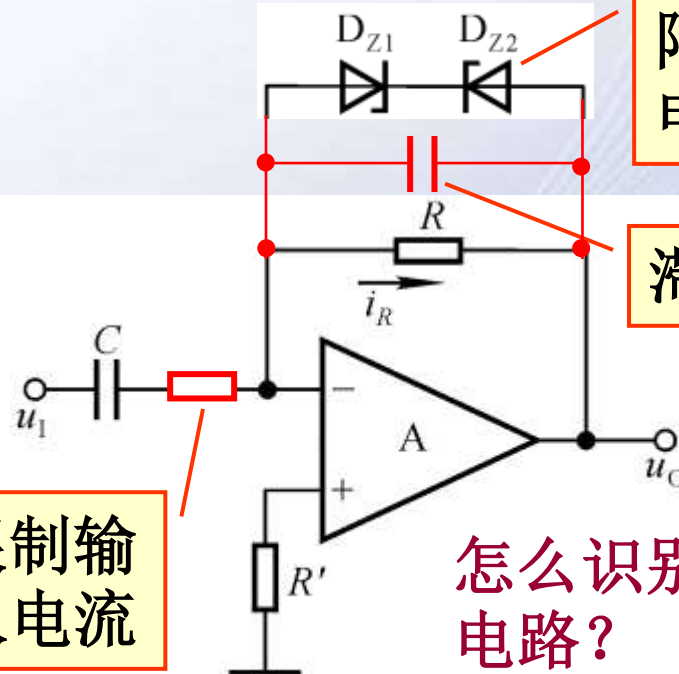
虚地

为了克服集成运放的阻塞现象和自激振荡，实用电路应采取措施。

运放由于某种原因进入非线性区而不能自动恢复的现象

$$i_R = i_C = C \frac{du_I}{dt}$$

$$u_O = -i_R R = -RC \frac{du_I}{dt}$$



限制输出电压幅值

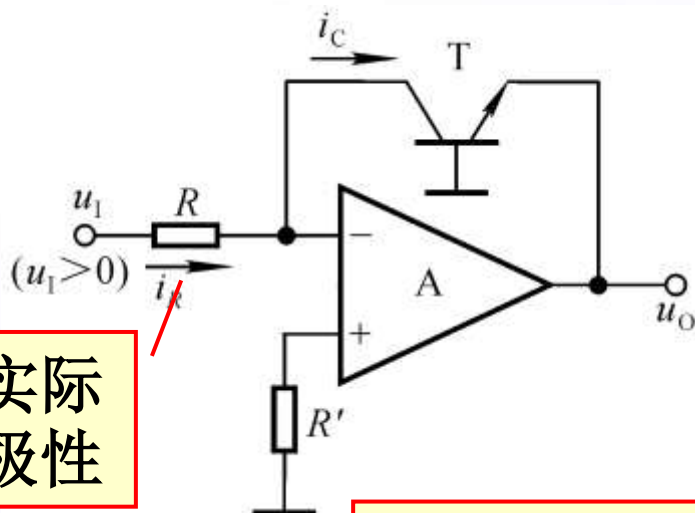
滞后补偿

限制输入电流

怎么识别微分运算电路？

五、对数运算电路和指数运算电路

1. 对数运算



$$i_C = i_R = \frac{u_I}{R}$$

$$i_C \approx I_S e^{\frac{u_{BE}}{U_T}}$$

利用PN结端电压与电流的关系

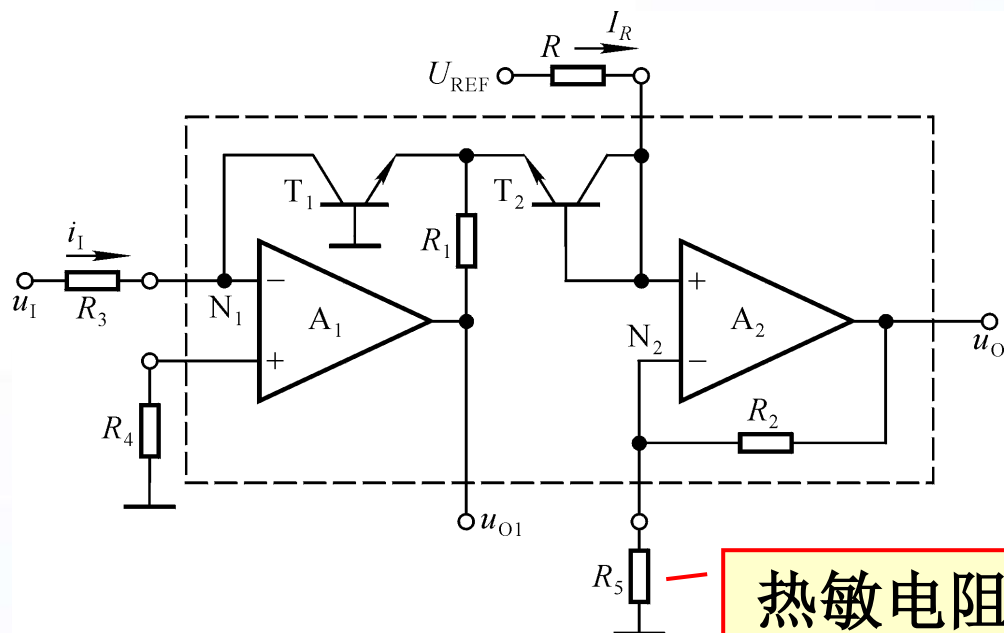
$$u_O = -u_{BE} \approx -U_T \ln \frac{u_I}{I_S R}$$

实用电路中常常采取措施消除 I_S 对运算关系的影响

对输入电压的极性和幅值有何要求？

I_{CM} 限制其值

集成对数运算电路



$$i_{C1} = i_I = \frac{u_I}{R_3} \approx I_S e^{\frac{u_{BE1}}{U_T}}$$

$$u_{BE1} \approx U_T \ln \frac{u_I}{I_S R_3}$$

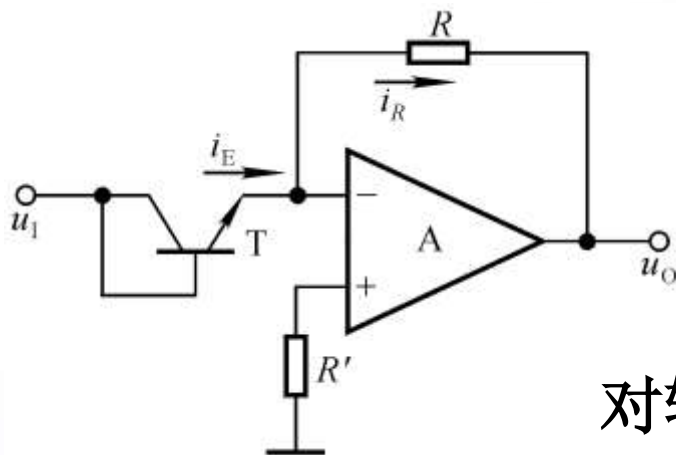
$$\text{同理, } u_{BE2} \approx U_T \ln \frac{I_R}{I_S}$$

热敏电阻？温度系数为正？为负？

$$u_{N2} = u_{P2} = u_{BE2} - u_{BE1} \approx -U_T \ln \frac{u_I}{I_R R_3} \quad U_T = kT/q$$

$$u_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_5}\right) u_{N2} \approx -\left(1 + \frac{R_2}{R_5}\right) U_T \ln \frac{u_I}{I_R R_3}$$

2. 指数运算电路

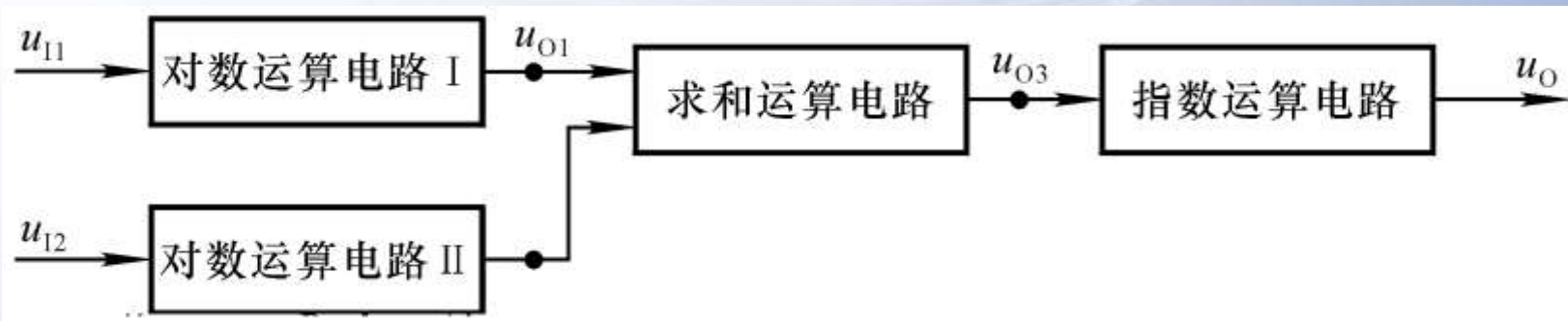


$$u_I = u_{BE} \quad i_R = i_E \approx I_S e^{\frac{u_I}{U_T}}$$

$$u_O = -i_R R \approx -I_S R e^{\frac{u_I}{U_T}}$$

对输入电压的极性和幅值有何要求？

3. 乘法、除法运算电路



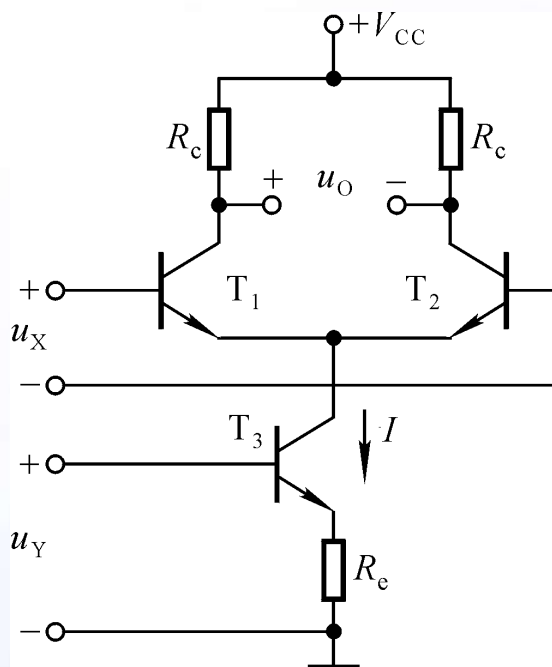
§ 7.2 模拟乘法器及其在 运算电路中的应用

一、模拟乘法器简介

二、在运算电路中的应用

一、模拟乘法器简介

1. 变跨导型模拟乘法器的基本原理



$$u_O = -(i_{C1} - i_{C2})R_c = -g_m R_c u_X$$

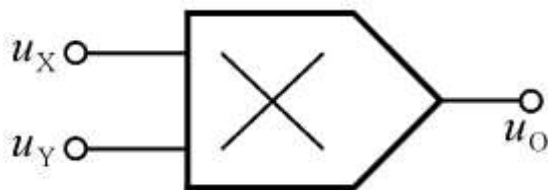
$$g_m \approx \frac{I_{EQ}}{U_T} = \frac{I}{2U_T} \quad I = \frac{u_Y - u_{BE3}}{R_e}$$

$$\text{若 } u_Y \gg u_{BE3}, \text{ 则 } g_m \approx \frac{u_Y}{2U_T R_e}$$

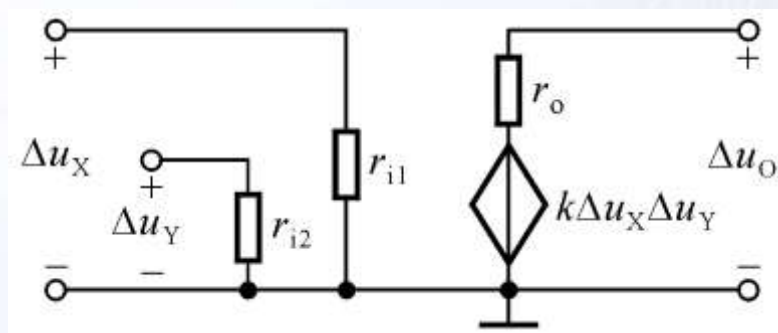
$$u_O \approx \frac{R_c}{2U_T R_e} \cdot u_X u_Y$$

实际电路需在多方面改进，如线性度、温度的影响、输入电压的极性等方面。

2. 模拟乘法器的符号及等效电路

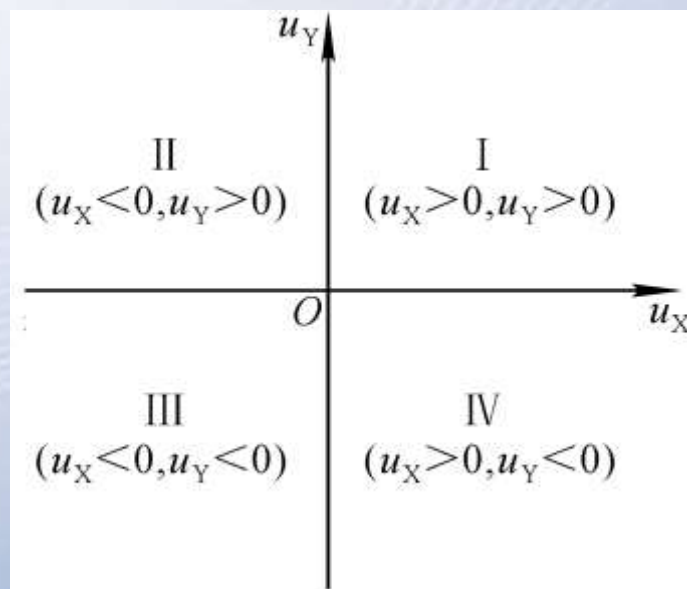


$$u_O = ku_X u_Y$$



理想情况下， r_{i1} 、 r_{i2} 、 f_H 为无穷大，失调电压、电流及其温漂为0， r_o 为0， u_X 、 u_Y 幅值和频率变化时 k 值不变。

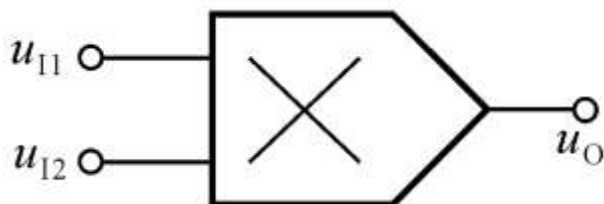
有单象限、两象限和四象限之分。



二、在运算电路中的应用

1. 乘法运算

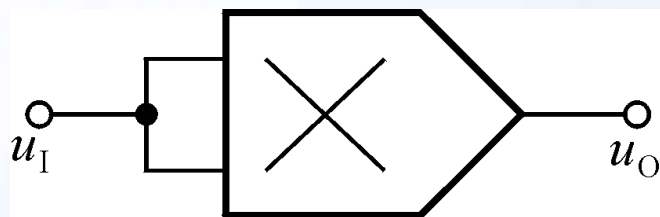
$$u_O = ku_{I1}u_{I2}$$



实际的模拟乘法器 k 常为 $+0.1V^{-1}$ 或 $-0.1V^{-1}$ 。

若 $k = +0.1V^{-1}$, $u_{I1} = u_{I2} = 10V$, 则 $u_O = 10V$ 。

2. 乘方运算



$$u_O = ku_I^2$$

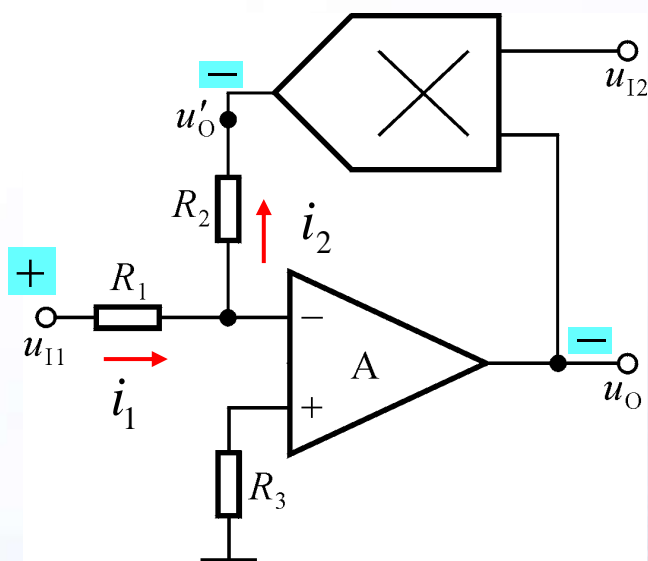
若 $u_I = \sqrt{2}U_i \sin \omega t$

则 $u_O = 2kU_i^2 \sin^2 \omega t = 2kU_i^2 (1 - \cos 2\omega t)$

实现了对正弦波电压的二倍频变换

3. 除法运算

运算电路中集成运放必须引入负反馈！



$$u_O = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{u_{I1}}{k u_{I2}}$$

为使电路引入的是负反馈， k 和 u_{I2} 的极性应如何？

$$i_1 = i_2$$

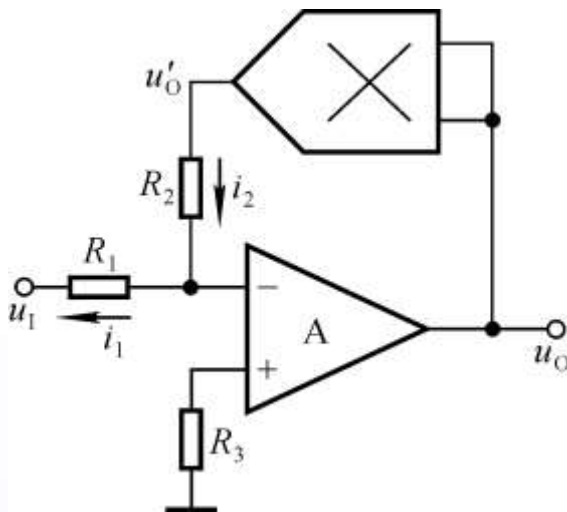
$$\frac{u_{I1}}{R_1} = \frac{-u'_O}{R_2}$$

条件：
同极性

$$u'_O = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_{I1} = k u_{I2} u_O$$

若集成运放的同相输入端与反相输入端互换，则 k 和 u_{I2} 的极性应如何？

4. 开方运算



$$u'_O = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_I = k u_O^2$$

$$u_O = \sqrt{-\frac{R_2}{k R_1} \cdot u_I}$$

为实现上式，电路中 u_I 、 u_O 、 k 的极性是什么？为什么？

若要 $u_O < 0$ ，则有何变化？

若要求 u_I 、 u_O 均大于0，则有何变化？

若集成运放的负反馈通路中为某种运算电路，则整个电路实现其逆运算！

如何实现开三次方运算电路？

§ 7.3 有源滤波电路

一、概述

二、低通滤波器

三、高通、带通、带阻滤波器

四、状态变量型滤波器

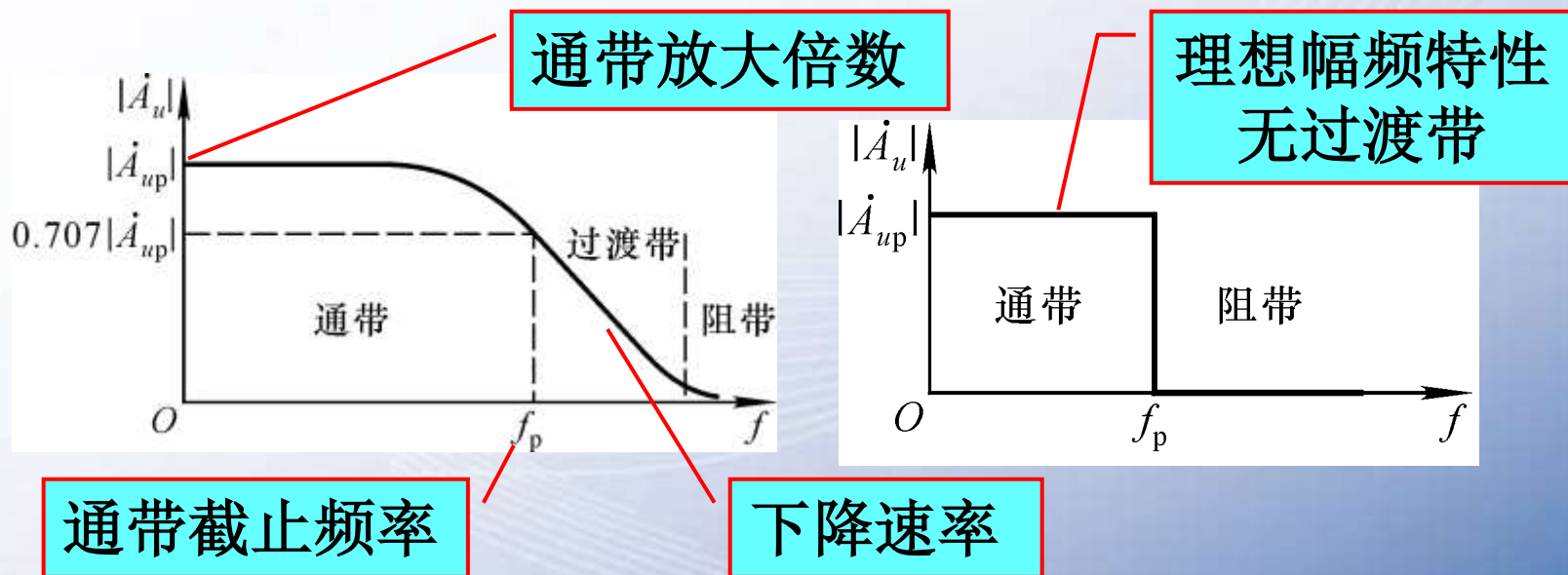
一、概述

1. 滤波电路的功能

使指定频段的信号顺利通过，其它频率的信号被衰减。

2. 滤波电路的种类

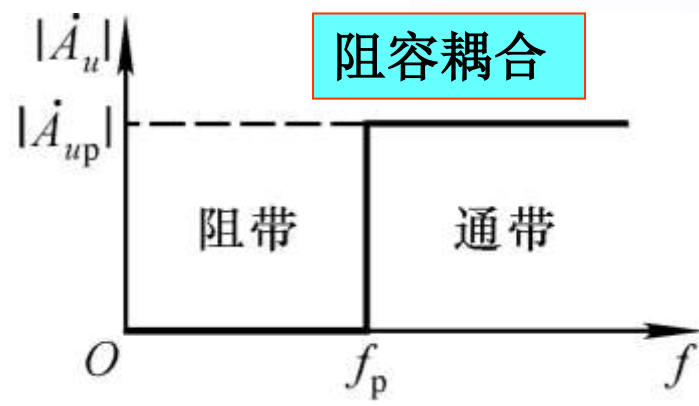
低通滤波器 (LPF)



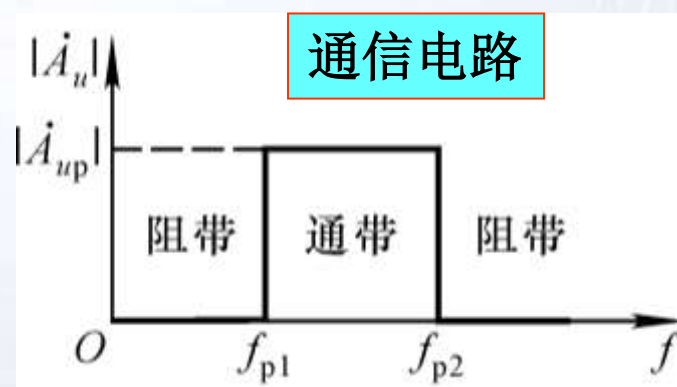
用幅频特性描述滤波特性，要研究 \dot{A}_{up} 、 $\dot{A}_u(f_p)$ 、下降速率。

理想滤波器的幅频特性

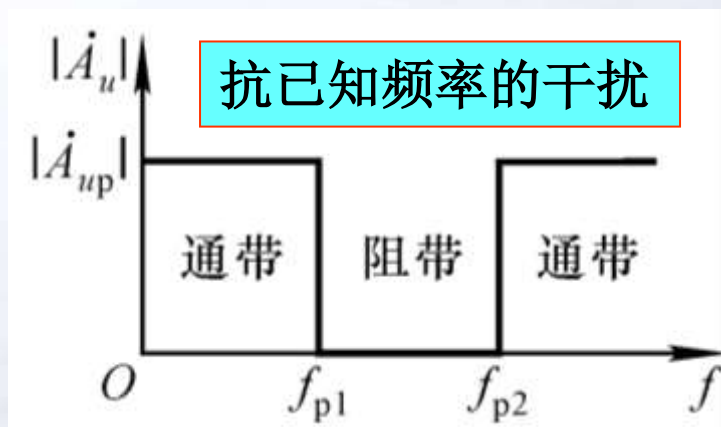
高通滤波器 (HPF)



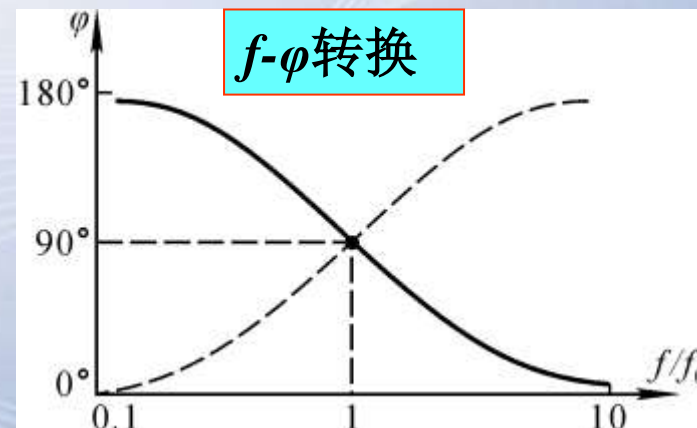
带通滤波器 (BPF)



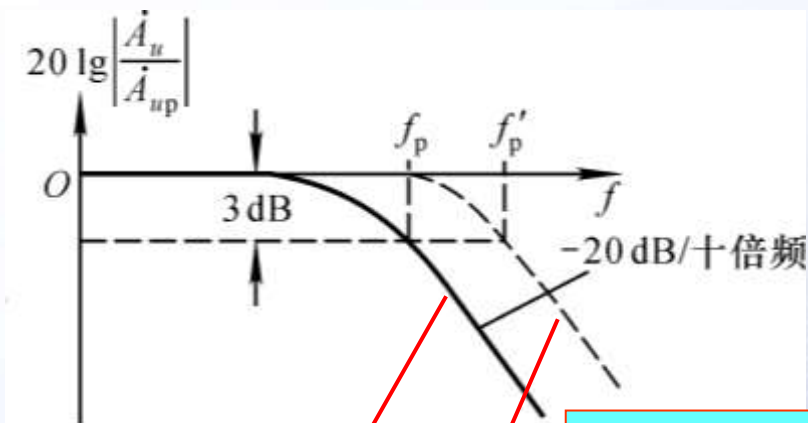
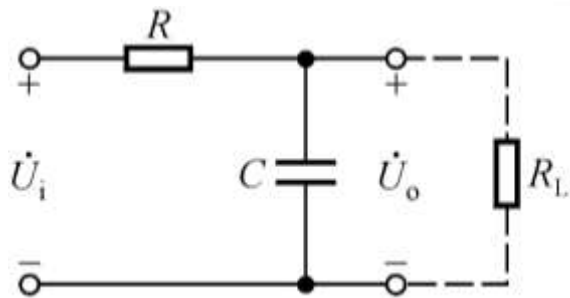
带阻滤波器 (BEF)



全通滤波器 (APF)



3. 无源滤波电路和有源滤波电路



空载时

带负载时

负载变化，通带放大倍数和截止频率均变化。

$$\text{空载: } \dot{A}_{up} = 1 \quad f_p = \frac{1}{2\pi RC}$$

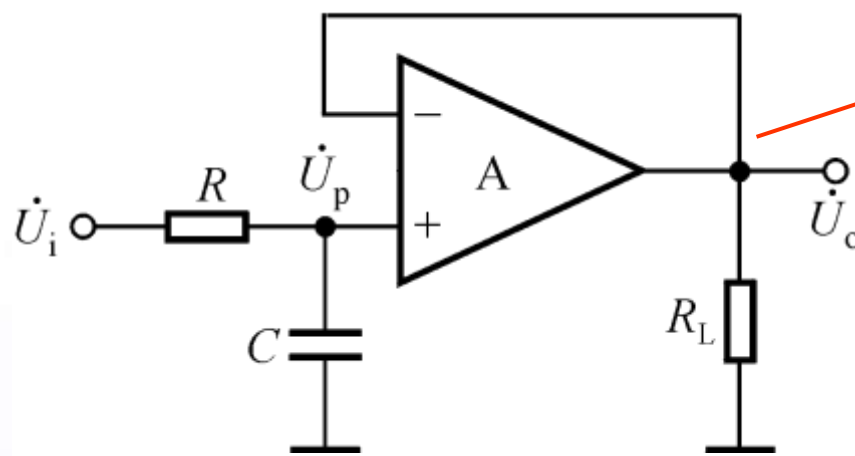
$$\dot{A}_u = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_p}}$$

$$\text{带载: } \dot{A}_{up} = \frac{R_L}{R + R_L}$$

$$f_p = \frac{1}{2\pi (R // R_L) C}$$

$$\dot{A}_u = \frac{\dot{A}_{up}}{1 + j \frac{f}{f_p}}$$

有源滤波电路



用电压跟随器隔离滤波电路与负载电阻

无源滤波电路的滤波参数随负载变化；有源滤波电路的滤波参数不随负载变化，可放大。

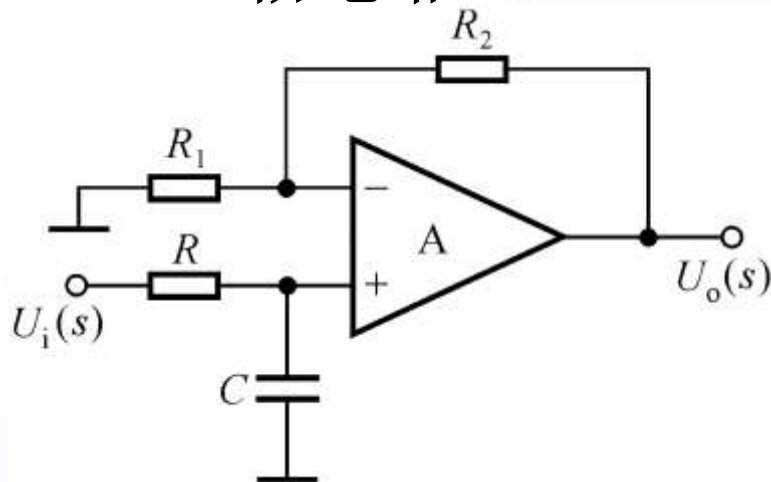
无源滤波电路可用于高电压大电流，如直流电源中的滤波电路；有源滤波电路是信号处理电路，其输出电压和电流的大小受有源元件自身参数和供电电源的限制。

4. 教学基本要求：电路的识别，幅频特性的分析计算

二、低通滤波器

1. 同相输入

(1) 一阶电路



经拉氏变换得
传递函数：

$$A_u(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \frac{1}{1 + sRC}$$

求解传递函数时，只需将放大倍数中的 $j\omega$ 用 s 取代即可；
 s 的方次称为阶数。

$$\dot{A}_{up} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

频率趋于0时的放大
倍数为通带放大倍数

$$f_p = \frac{1}{2\pi RC}$$

决定于RC环节

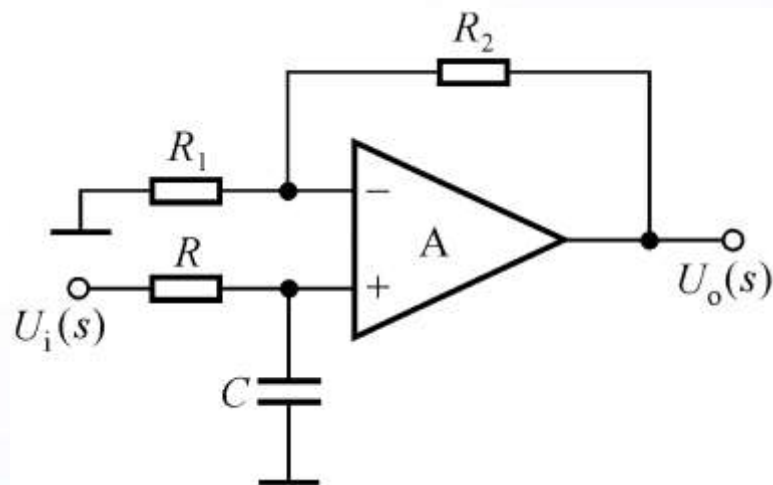
$$\dot{A}_u = \frac{\dot{A}_{up}}{1 + j\frac{f}{f_p}}$$

表明进入高频段
的下降速率为
-20dB/十倍频

一阶电路

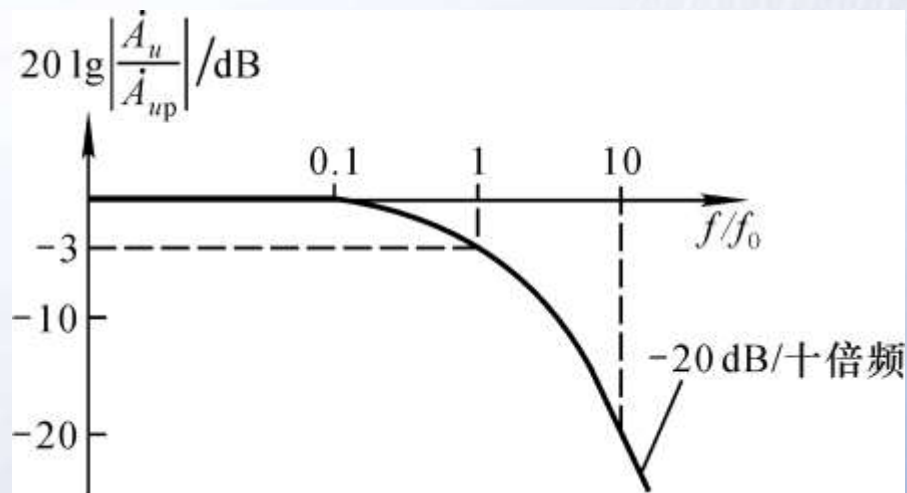
1. 同相输入

(1) 一阶电路：幅频特性



$$\dot{A}_{up} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

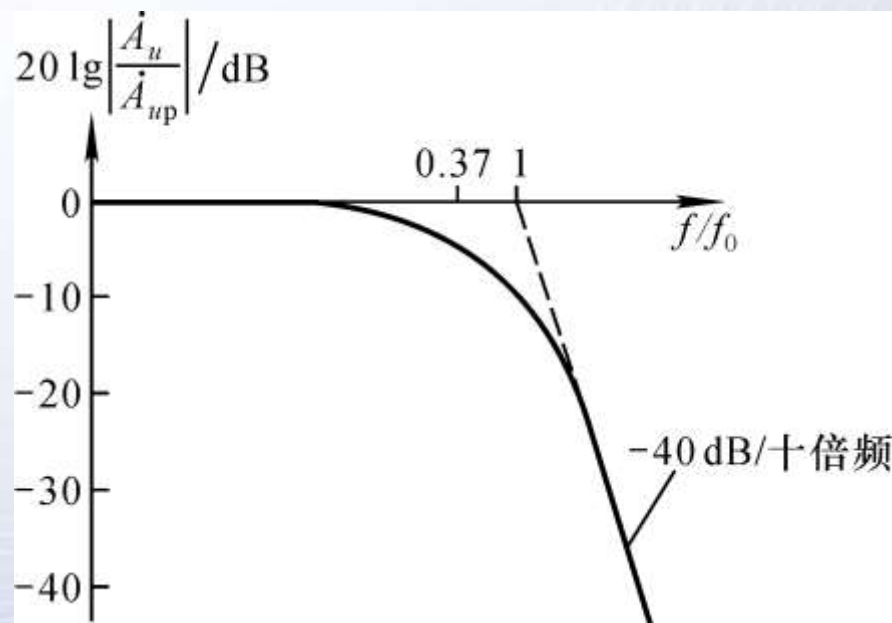
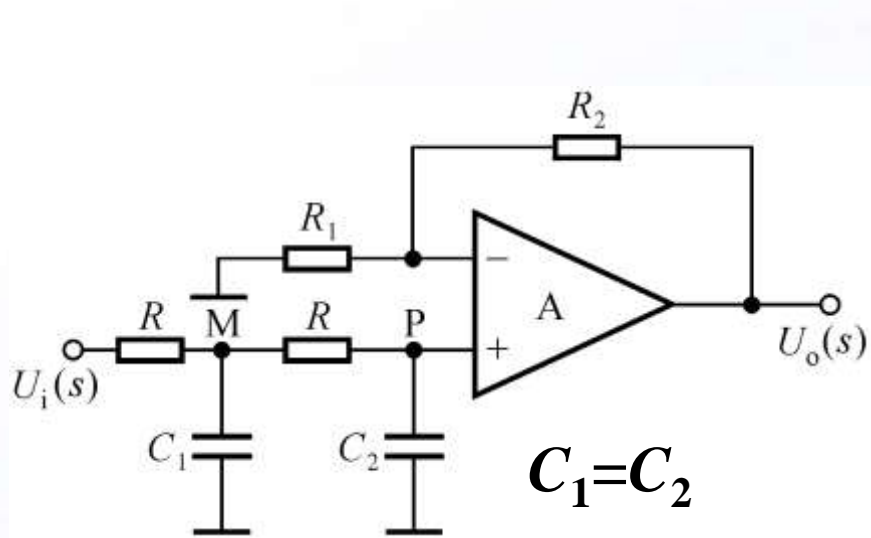
$$\dot{A}_u = \frac{\dot{A}_{up}}{1 + j\frac{f}{f_p}} \quad (f_p = \frac{1}{2\pi RC})$$



为了使过渡带变窄，需采用多阶滤波器，即增加 RC 环节。

(2) 简单二阶LPF

分析方法：电路引入了负反馈，具有“虚短”和“虚断”的特点利用节点电流法求解输出电压与输入电压的关系。



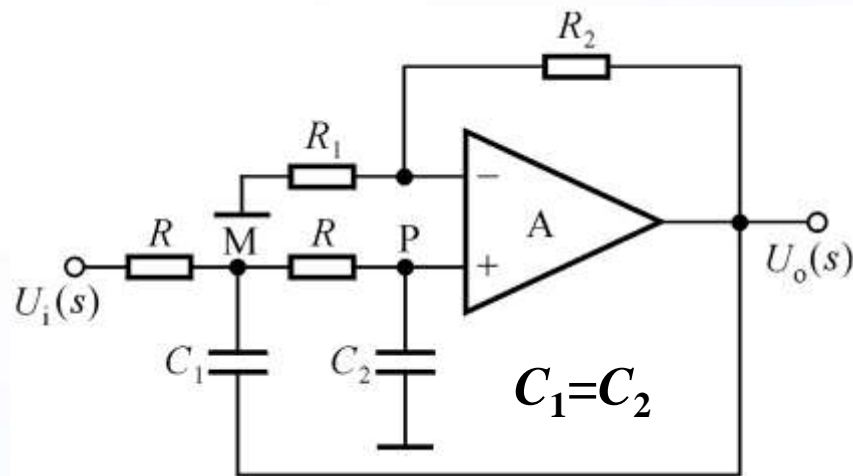
$$\dot{A}_u = (1 + \frac{R_2}{R_1}) \frac{1}{1 - (\frac{f}{f_0})^2 + 3j \frac{f}{f_0}}$$

$$\text{特征频率 } f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\text{截止频率 } f_p \approx 0.37f_0$$

(3) 压控电压源二阶LPF

为使 $f_p = f_0$ ，且在 $f = f_0$ 时幅频特性按 $-40\text{dB}/\text{十倍频}$ 下降。



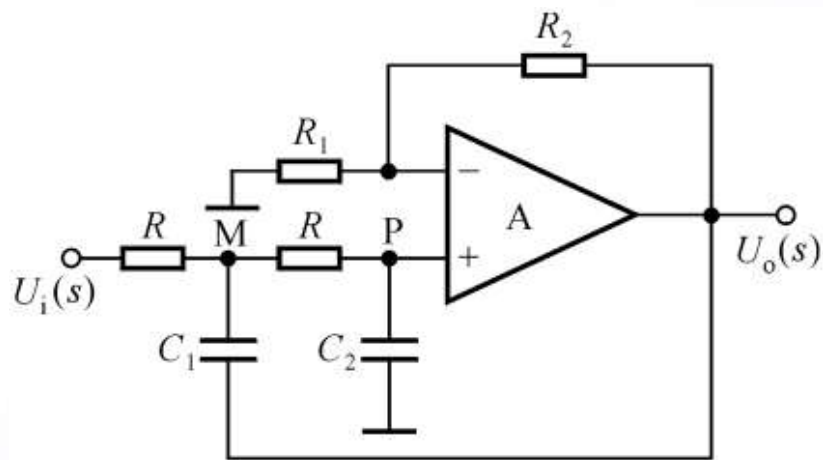
引入正反馈

$f \rightarrow 0$ 时， C_1 断路，正反馈断开，放大倍数为通带放大倍数。

$f \rightarrow \infty$ ， C_2 短路，正反馈不起作用，放大倍数 $\rightarrow 0$ 。

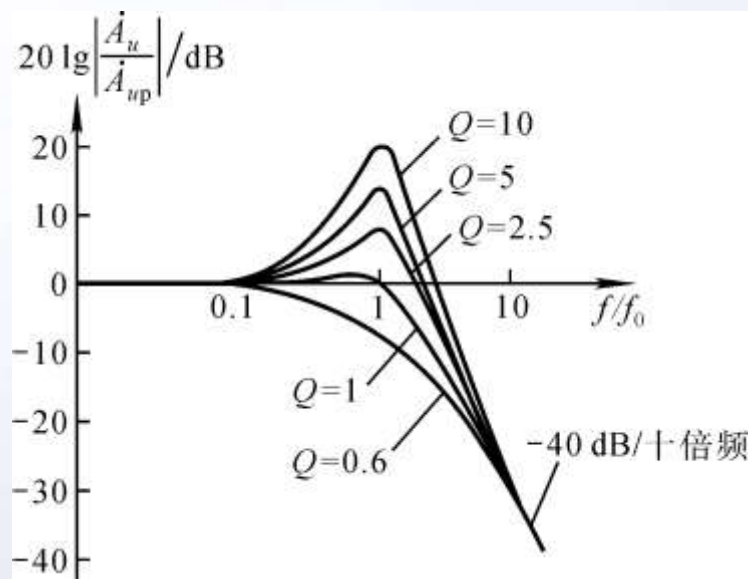
因而有可能在 $f = f_0$ 时放大倍数等于或大于通带放大倍数。
对于不同频率的信号正反馈的强弱不同。

压控电压源二阶LPF的分析



列P、M点的节点电流方程，
整理可得：

$$\dot{A}_u = \frac{\dot{A}_{up}}{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j[3 - \dot{A}_{up}]\frac{f}{f_0}}$$

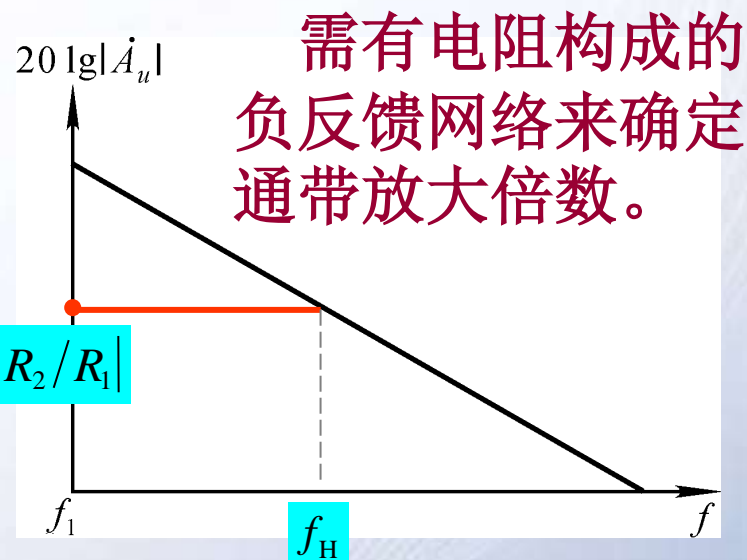
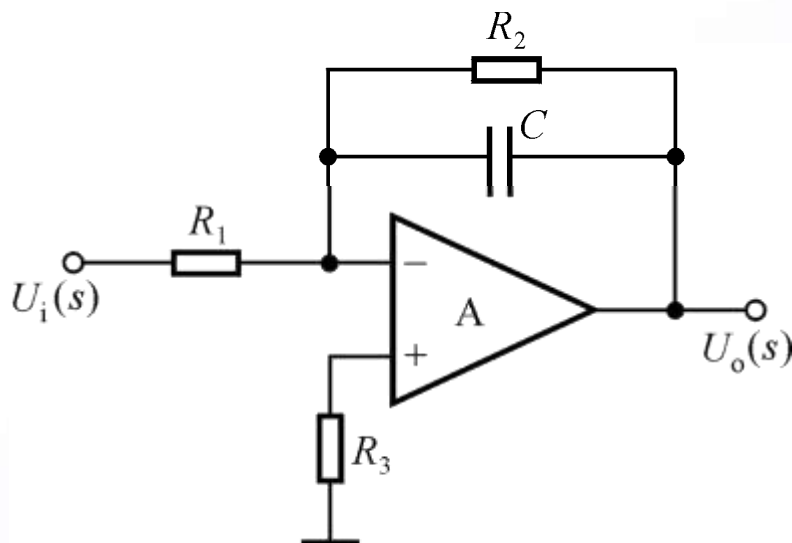


$$|\dot{A}_u|_{f=f_0} = \left| \frac{\dot{A}_{up}}{3 - \dot{A}_{up}} \right| = Q |\dot{A}_{up}|$$

$$Q = |\dot{A}_u|_{f=f_0} / |\dot{A}_{up}|$$

$$\text{当 } 2 \leq |\dot{A}_{up}| < 3 \text{ 时, } |\dot{A}_u|_{f=f_0} \geq |\dot{A}_{up}|$$

2. 反相输入低通滤波器



积分运算电路的电压放大倍数为

$$\dot{A}_u = \frac{1}{j\omega R_1 C}, \quad \text{即 } f \rightarrow 0, |\dot{A}_u| \rightarrow \infty。$$

加 R_2 后

$$\dot{A}_u = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}}, \quad f_p = f_0 = \frac{1}{2\pi R_2 C}$$

$$\dot{A}_{up} = -R_2/R_1$$

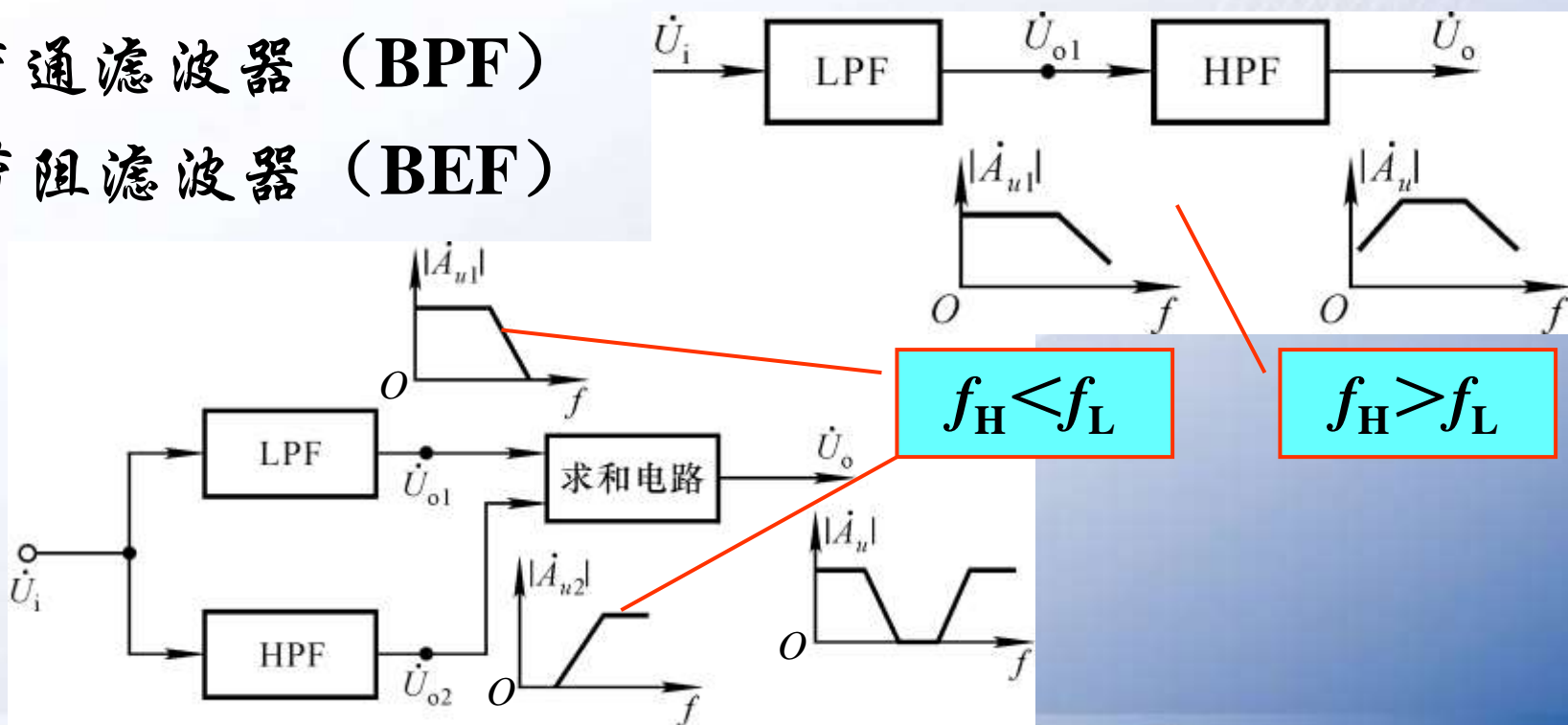
三、高通、带通、带阻有源滤波器

1. 高通滤波器 (HPF)

与LPF有对偶性，将LPF的电阻和电容互换，就可得一阶HPF、简单二阶HPF、压控电压源二阶HPF电路。

2. 带通滤波器 (BPF)

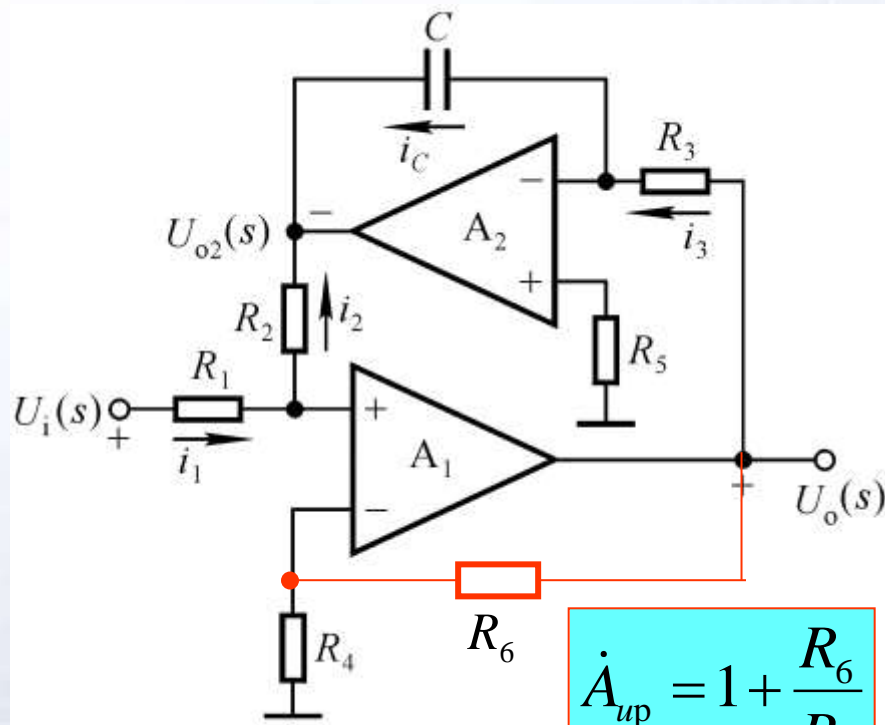
3. 带阻滤波器 (BEF)



四、状态变量型滤波器

要点：

- 将比例、积分、求和等基本运算电路组合成自由设置传递函数、实现各种滤波功能的电路，称为状态变量型滤波器。
- 通带放大倍数决定于电阻组成的负反馈网络。
- 利用“逆运算”方法。

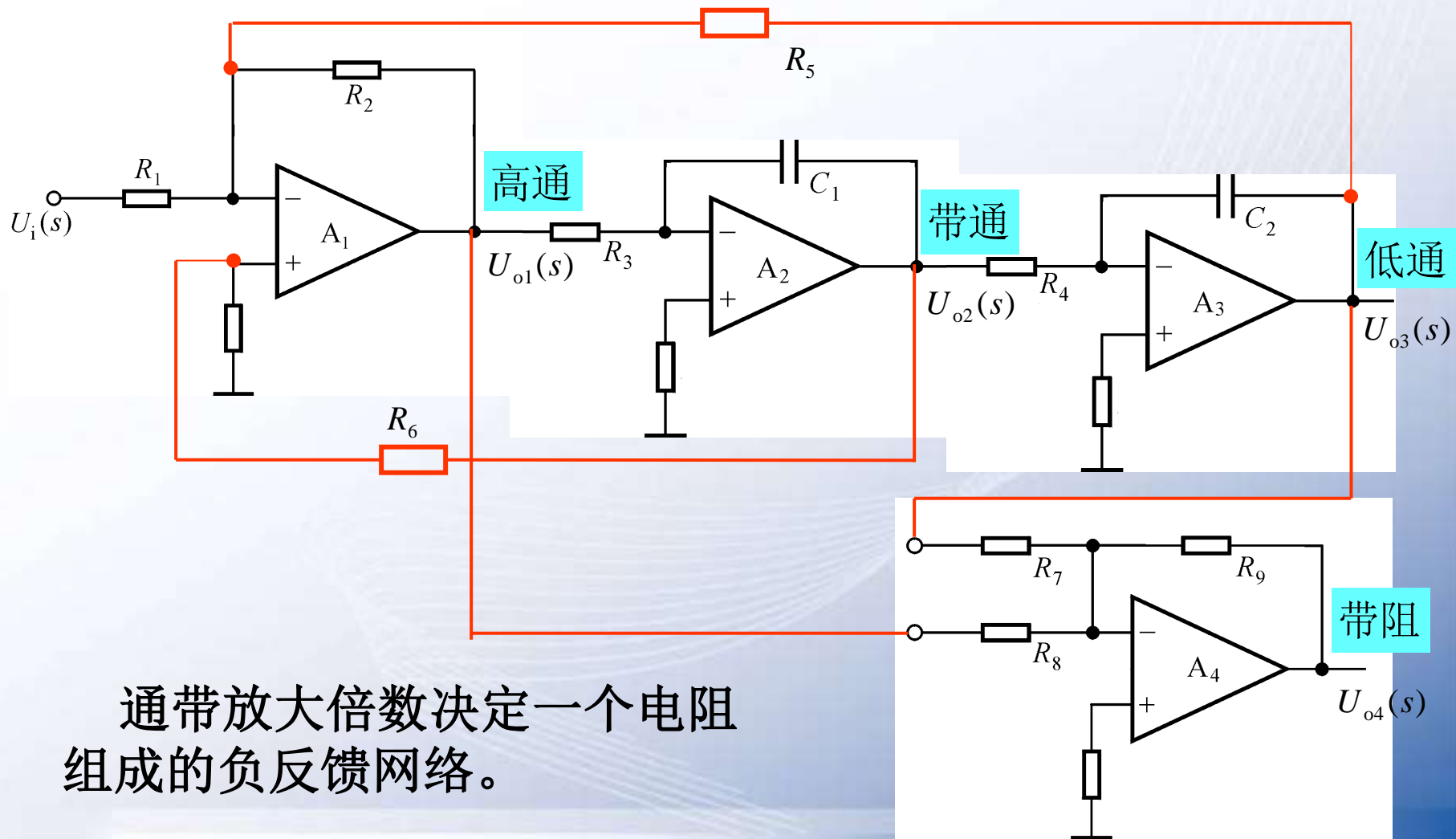


$$\dot{A}_{up} = 1 + \frac{R_6}{R_4}$$

将低通环节加在负反馈通路来实现高通。

$f \rightarrow \infty$ 时 C 相当于短路， A_2 输出电压 $\rightarrow 0$ ，电路开环， A_1 输出电压 $\rightarrow \pm U_{OM}$ ，工作到非线性区；需引入负反馈决定通带放大倍数。

二阶状态变量滤波器的组成



通带放大倍数决定一个电阻组成的负反馈网络。

运算电路与有源滤波器的比较

- 相同之处

- 电路中均引入深度负反馈，因而集成运放均工作在线性区。
- 均具有“虚短”和“虚断”的特点，均可用节点电流法求解电路。

- 不同之处

- 运算电路研究的是时域问题，有源滤波电路研究的是频域问题；测试时，前者是在输入信号频率不变或直流信号下测量输出电压与输入电压有效值或幅值的关系，后者是在输入电压幅值不变的情况下测量输出电压幅值与输入电压频率的关系。
- 运算电路用运算关系式描述输出电压与输入电压的关系，有源滤波器用电压放大倍数的幅频特性描述滤波特性。