离散数学

Discrete Mathematics

虞慧群
yhq@ecust.edu.cn

主讲老师：杨海
yanghai@ecust.edu.cn

数理逻辑体系

数理逻辑是采用数学的方法，研究思维形式及其规律的一门学科。

- ✓ 对思维的研究转变为对符号的演算。
- ✓ 避免了自然语言的歧义性。
- ✓ 奠定了自动推理的理论基础。

语法（Syntax）：语言符号及表达规则 。

语义（Semantics）：语言符号及表达规则的含义。

形式系统（Formal System）：利用逻辑语言的形式结构（即从语法的角度）来表达逻辑语句之间的关系。

内容提要

1. 命题公式
2. 公式的真值
3. 范式
4. 联结词的完备集
5. 推理理论

1、命题公式

概念：

命题， 联结词(¬， ∧， ∨， →， ↔)，合式公式，子公式

命题：具有确定真值的陈述句。

命题的定义中包含二层含义：
(1)在语法上．命题必须是陈述句。而疑问句、祈使句和感叹句等无所谓真假，所以不是命题。
(2)命题具有惟一的真值，这与我们是否知道它的真假是两回事。

- **真值：1(或T)表示“真”；0(或 F)表示“假”**

命题判断举例

下列句子中那些是命题?

(1) $\sqrt{2}$是有理数. 假命题

(2) $2 + 5 = 7$. 真命题

(3) $x + 5 > 3$. 不是命题

(4) 你去教室吗? 不是命题

(5) 这个苹果真大呀! 不是命题

(6) 请不要讲话! 不是命题

(7) 2050年元旦下大雪. 命题，但真值现在不知道

(8) 理发师Richard专门为那些不给自己理发的人理发。 不是命题，悖论

命题符号： 用来表示命题符号。

- 通常用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ $(i\geq 1)$表示命题。

例如，令

p：$\sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为0，

q：$2 + 5 = 7$，则 q 的真值为1

- 命题符号分类：
  - **命题常元**（命题常项）： $\perp$ (bottom)， $\top$（top）
  - **命题变元**（命题变项）： $p, q, r, \ldots$

命题分类

- 简单命题（也称原子命题）：再分解为更简单的命题。
- 复合命题：若干简单命题通过**联结词**(connectives)而构成的新命题。

常见的5个联结词

$\neg$ **否定 (negation)**

$\wedge$ **合取(conjunction)**

$\vee$ **析取(disjunction)**

$\rightarrow$ **蕴含(implication)**

$\leftrightarrow$ **等价(equailvalence)**

♥这些联结词有明确的含义，注意与自然语言对应词的联系与区别！

否定词符号 ¬

设p是一个命题，¬p称为p的否定式。

¬p是真的当且仅当p是假的。

p	¬p
1	0
0	1

例、 p： 上海是一个大城市。

¬p：上海不是一个大城市。

合取词符号 $\wedge$

设p，q是两个命题，命题 “p并且q”称为p，q的合取，记以$p \wedge q$，读作p且q。

$p \wedge q$是真的当且仅当p和q都是真的。

例、 p：$2\times2=5$，

q：雪是黑的

$p \wedge q$：$2\times2=5$并且雪是黑的

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

析取词符号 ∨

设p，q是两个命题，命题“p或者q”称为p，q的析取，记以$p \vee q$，读作p或q。

$p \vee q$是真的当且仅当p，q中至少有一个是真的。

例如，p：今天下雨，q：今天刮风

$p \vee q$：今天下雨或者刮风。

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

"∨"所表示的"或"是"可兼或"

自然语言中的"或者"一词有不可兼的意思。

例、他是跳远冠军或是百米冠军。

我今天到北京出差或者到广州去度假

表示的是二者只能居其一，不会同时成立。

- 按照联结词"∨"的定义，当p，q都为真时，p∨q也为真。因此，对于"不可兼或"，我们不可以用∨来表示。

p：我今天到北京出差，
q：我到广州去度假

p q	命题
1 1	0
1 0	1
0 1	1
0 0	0

蕴含词符号 $\rightarrow$

设p，q是两个命题，命题 “如果p，则q”称为p蕴含q，记以$p\rightarrow q$。

$p\rightarrow q$是假的当且仅当p是真的而q是假的。

例、 p：f(x)是可微的，

q：f(x)是连续的

$p\rightarrow q$： 若f(x)是可微的，则f(x)是连续的。

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

“善意的推定”：

如果p是假命题，则不管q是什么命题，命题“如果p，则q”($p \to q$)在命题逻辑中都被认为是真命题。

例、p： 2×2=5，q： 雪是黑的，

命题“如果2×2=5，则雪是黑的”是真命题。

等价词符号 $\leftrightarrow$

设p，q是两个命题，命题“p当且仅当q”称为p等价q，记以$p\leftrightarrow q$。

$p\leftrightarrow q$是真的当且仅当p，q或者都是真的，或者都是假的。

例、 p： $a^2+b^2=a^2$， q： $b=0$

$p\leftrightarrow q$： $a^2+b^2=a^2$当且仅当$b=0$

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

命题语言的语法

命题语言的基本符号

- 命题变元符号： p、q、r
- 命题常元符号： $\perp$，$\top$
- 连接词符号： $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
- 辅助符号： ），（

合式公式(Well-Formed Formulas): 递归定义如下:

(1) 命题常元和变元符号是合式公式;
(2) 若A是合式公式，则($\neg$A)是合式公式，称为A的否定式;
(3) 若A，B是合式公式，则 (A$\vee$B)， (A$\wedge$B)， (A$\rightarrow$B)， (A$\leftrightarrow$B)是合式公式;
(4) 所有合式公式都是有限次使用(1)，(2)，(3)、(4)得到的符号串。

子公式 **(subformulas):** 如果X是合式公式**A**的一部分，且X本身也是一个合式公式，则称X为公式**A**的子公式。

公式举例：

(1) $(((\neg p) \vee q) \rightarrow p)$;

(2) $((p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee q))$;

(3) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$;

(4) $(((\neg p) \rightarrow p) \leftrightarrow p)$;

(5) $(p \rightarrow (\perp \rightarrow r))$.

例、如下符号串不是公式：

$$(1)\quad ((p \vee \top;$$

$$(2)\quad \neg r;$$

$$(3)\quad ((r \vee X) \rightarrow q);$$

约定：（1）最外层的括号可以省略；

（2）联结词运算的优先次序（由高到底）为：

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$， $\leftrightarrow$

目的为减少括号的数量。

例、 $\neg p \wedge \neg q$ 表示$((\neg p) \wedge (\neg q))$;

$\neg p \vee q$ 表示$((\neg p) \vee q)$;

- $(A \to B)$不是合式公式，是一个公式模式，代表一类具体的公式

$$(p \longrightarrow q)$$

$$((p \longrightarrow q) \longrightarrow (s \longrightarrow r))$$

$$((p \vee r) \longrightarrow (\neg q))$$