第二章 守恒定律

（ law of conservation ）

第二章　　守恒定律

动能定理

动量定理　　　　三定理

角动量定理

能量守恒定律

动量守恒定律　　　　三守恒定律

角动量守恒定律

守恒定律（law of conservation）

- 力与力矩
  - 空间积累
    - 功 → 质点动能定理 → 质点系动能定理
    - 机械能
      - 动能
      - 势能
        - 弹性势能
        - 重力势能
        - 引力势能
    - 功能原理
    - 机械能守恒
  - 时间积累
    - 冲量
    - 动量
      - → 质点动量定理
        - 质点系动量定理
        - 动量守恒
    - 冲量矩
    - 角动量
      - → 质点角动量定理
        - 质点系角动量定理
        - 角动量守恒

守恒定律（law of conservation）

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

- **空间积累**
  - $A = \int_a^b \mathbf{F}.d\mathbf{r} \longrightarrow A = E_k - E_{k0} \longrightarrow A_o + A_i + A_{ia} = E_k - E_{k0}$
    - $\downarrow$
      - $A_o + A_{ia} = E - E_0$
      - $\sum_i E_i = C$
  - $\mathbf{E}$
    - $\frac{1}{2}mv^2$
    - $E_p = \int_a^0 \mathbf{F}_b.d\mathbf{r}$
      - $\frac{1}{2}kx^2$
      - mgh
      - $-G\frac{Mm}{r}$
    - $A_b = -(E_p - E_{p0})$
- **时间积累**
  - $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}dt$, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ $\longrightarrow \mathbf{I} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$
    - $\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_{tot}dt = \sum_i m_i\mathbf{v}_{i2} - \sum_i m_i\mathbf{v}_{i1}$
    - $\sum_i m_i\mathbf{v}_i = \mathbf{C}$
  - $\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}dt$, $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ $\longrightarrow \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}dt = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0$
    - $\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_{tot}dt = \sum_i \mathbf{L}_i - \sum_i \mathbf{L}_{i0}$
    - $\sum_i \mathbf{L}_i = \mathbf{C}$

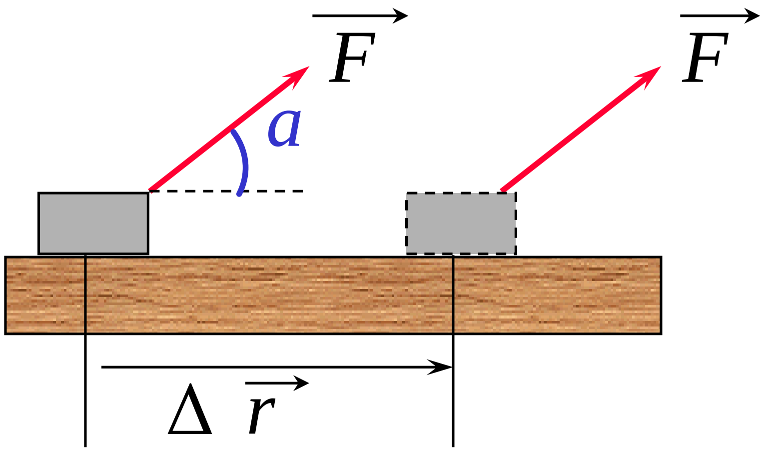
§2.1 功 动能定理

$\vec{F}=m\vec{a}$ 力与运动状态变化间的关系（瞬时）

力的累积作用（作用空间与时间）$\begin{cases}\text{空间累积}\\\text{时间累积}\end{cases}$

一、功

1. 恒力的功



$$\boxed{A = F\Delta r\cos a} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

提示：

（1）.功是标量，有正负之分。

$\varphi<\pi/2$，$A > 0$，外力对物体作功；

$\varphi>\pi/2$，$A < 0$，物体反抗外力作功。

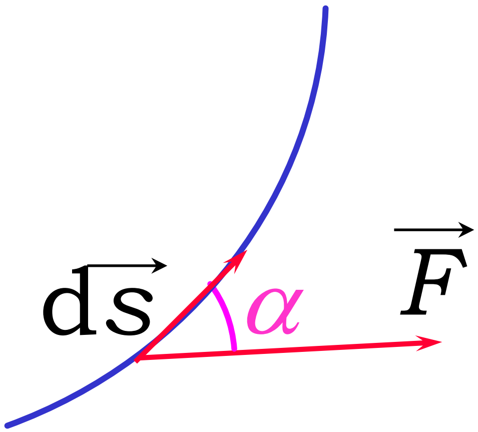
（2）.功的大小一般与路径有关，
只有一些特殊力的功例外。

（3）.合力功等于各分力功之代数和。

$$A_{合} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} (\sum_i \vec{F}_i) \cdot d\vec{s}$$

$$= \sum_i (\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_i \cdot d\vec{s}) = \sum_i A_i$$

2. 变力的功



元位移： $d\vec{r} \equiv d\vec{s}$

元功： $\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}r\cos a$

$= \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\cdot d\vec{s}$

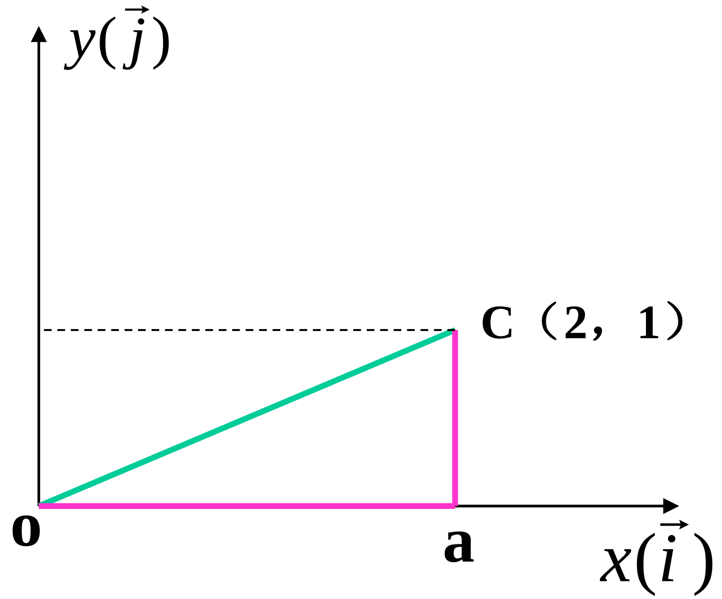
$$\boxed{A = \int dA = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int F\cos\alpha\, ds}$$

【例 1】作用在质点的力 **F** = (2y**i** +4x^2**j**) (N)，质点从原点运动到坐标为 x = 2(m)，y =1(m)的点，如图所示，计算力 **F** 分别沿下列路径所作的功（1）沿路径oac；（2）沿路径oc。

解：$(1).A = A_{oa} + A_{ac} \quad = 16(J)$

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{i} = 1\times1\times\cos0^0 = 1}$$

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{j} = 1\times1\times\cos90^0 = 0}$$



$$A_{oa} = \int \vec{F}\cdot dx\vec{i} = \int (2y\vec{i} + 4x^2\vec{j})\cdot dx\vec{i}$$

$$= \int_0^2 2y dx = 0$$

$$A_{ac} = \int \vec{F}\cdot dy\vec{j} = \int (2y\vec{i} + 4x^2\vec{j})\cdot dy\vec{j}$$

$$= \int_0^1 4x^2 dy = 16\int_0^1 dy = 16(J)$$

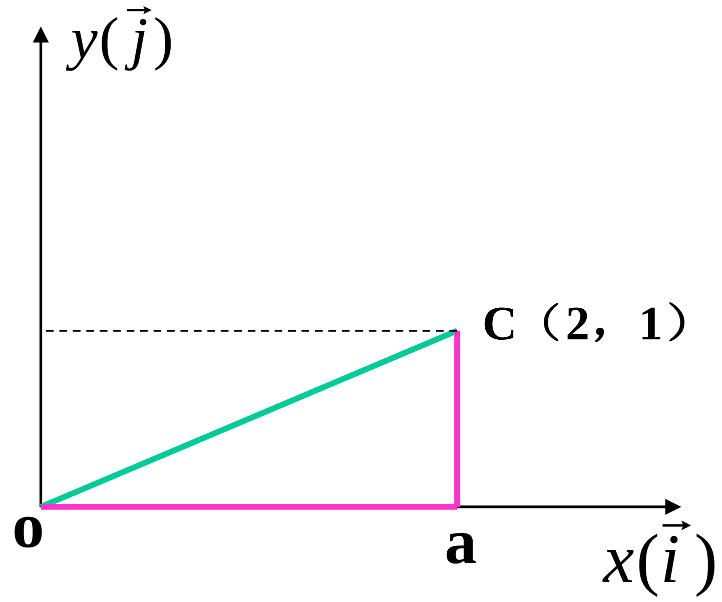
$$(2).A_{oc}=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int(2y\vec{i}+4x^2\vec{j})\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j})$$

$$=\int 2ydx+\int 4x^2dy$$

$$\because \frac{x}{y}=2$$

$$=\int_0^2 2(\frac{x}{2})dx+\int_0^1 4(2y)^2dy$$

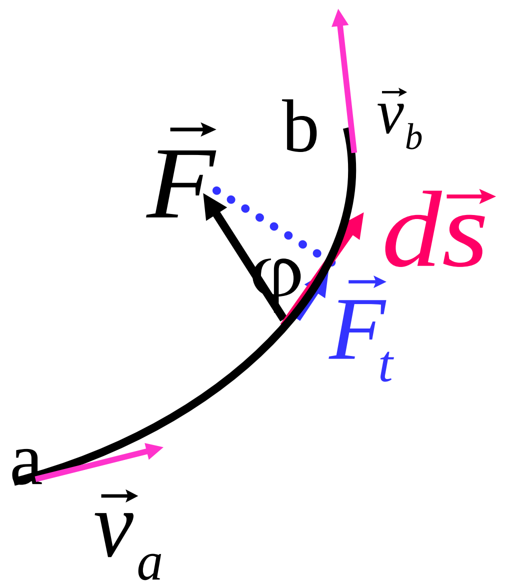
$$=7.3(J)$$



二、动能定理

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cos\varphi ds = F_t ds$$

$$= ma_t ds = m\frac{dv}{dt}ds = mvdv$$



$$\boxed{\int_0^A dA = \int_{v_a}^{v_b} mvdv}$$

$$\boxed{\Rightarrow A = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \vec{E}_{Kb} - \vec{E}_{Ka}}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$$

E_k是状态量，称为质点的平动动能。

合力对物体所做的功等于物体动能的增量

注意

功和动能都与参考系有关；动能定理仅适用于惯性系。

【例 2】质点 m = 0.5 Kg , 运动方程 x= 5t, y = 0.5t^2 (SI) ,求从 t = 2s 到 t = 4s 这段时间内外力所作的功.

解法1: 用功的定义式

$$\vec{r} = 5t\vec{i} + 0.5t^2\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = 5\vec{i} + t\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \vec{j}$$

$$\vec{f} = m\vec{a} = 0.5\vec{j}$$

$$\boxed{d\vec{r} = 5dt\vec{i} + tdt\vec{j}}$$

$$\Rightarrow dA = \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0.5\vec{j} \cdot (5dt\vec{i} + tdt\vec{j}) = 0.5tdt$$

$$\Rightarrow A = \int_2^4 0.5tdt = 0.25t^2\Big|_2^4 = 3J$$

解法2：用动能定理

$$\vec{r}=5t\vec{i}+0.5t^2\vec{j}\Rightarrow\vec{v}=5\vec{i}+t\vec{j}$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{25+t^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} v_2=\sqrt{25+4}=\sqrt{29} \\ v_4=\sqrt{25+16}=\sqrt{41} \end{cases}$$

$$A=\Delta E_k=\frac{1}{2}m(v_4^2-v_2^2)=\frac{1}{2}\times 0.5\times(41-29)$$

$$=3J$$

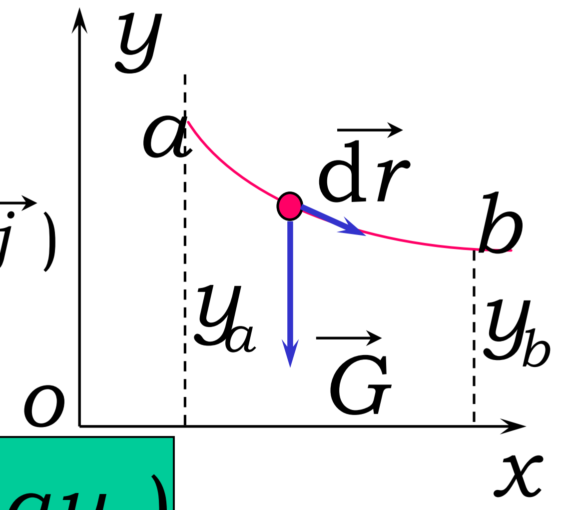
§2.2 保守力　势能

一、保守力的功

1. 重力的功

$$\mathrm{d}A = \vec{G}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = (-mg\vec{j}).(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j})$$

$$= -mg\ \mathrm{d}y$$

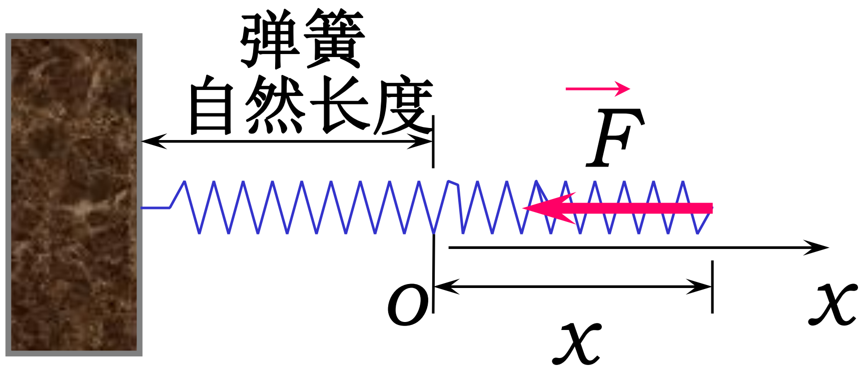


$$\boxed{A = -mg\int \mathrm{d}y = -(mgy_b - mgy_a)}$$

2. 弹性力的功

$$F = -kx$$

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\,\mathrm{d}x$$



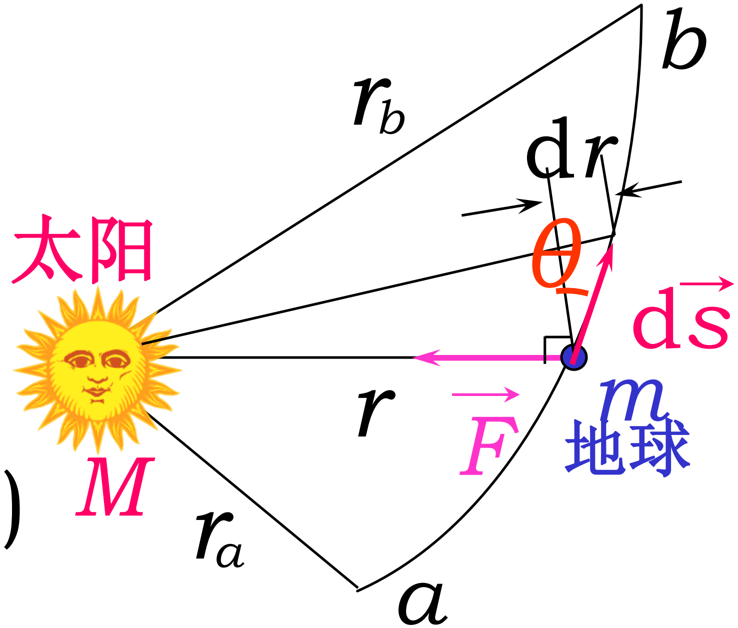
$$\boxed{A = \int_{x_a}^{x_b} -kx\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right)}$$

3. 万有引力的功

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= F\,\mathrm{d}s\cos(90^{\circ}+\theta)$$



$$\boxed{= -G\frac{Mm}{r^2}\sin\theta\,\mathrm{d}s = -G\frac{Mm}{r^2}\,\mathrm{d}r}$$

$$A = -GMm\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \quad \boxed{= -\left[\left(-\frac{GMm}{r_b}\right)-\left(-\frac{GMm}{r_a}\right)\right]}$$

保守力的定义：

如果 有一力 F， 它对物体所作的功决定于作功的起点和终点而与作功的路径无关，称此力为保守力或有势力。

$$A_{重力} = mg（h_a - h_b）$$

$$A_{弹力} = \frac{1}{2}kx_a - \frac{1}{2}kx_b$$

保守力的定义数学表达式：

若有一个力能满足条件 $\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$ 则此力为保守力。

常见的保守力： 重力、弹性力、万有引力

静电场力、分子间作用力

非保守力:力所作的功与路径有关.（例如摩擦力）

二、势能

$$A_{保} = -\left[E_{P2}(r) - E_{P1}(r)\right]$$

$E_P(r)$—势能（相对位置的函数）

保守力的功等于系统势能增量的负值。

保守力作(正)功，势能减少；反之，势能增加。

提示：

1. 势能属于具有保守力作用的系统
2. 势能同零点选择有关，但势能的增量与之无关。

$A_{ab} = E_{Pa} - E_{Pb}$ 若令$E_{Pb} = 0$ 则：$E_{Pa} = A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$

物体在 a 点所具有的势能在数值上等于将物体从该点移到势能为零处保守力所作的功。

若令弹簧无形变时的弹性势能为零点； 则：$E_{P弹} = \frac{1}{2}kx^2$

若令无穷远为引力势能零点； 则：$E_{P引} = -\frac{GMm}{r}$

3. 功是能量变化的量度：

$$\boxed{\begin{aligned} A_{外} &= E_{k2} - E_{k1} \\ A_{保} &= E_{P1} - E_{P2} \end{aligned}}$$

提示

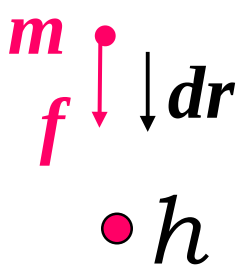
4. 已知势能函数可得到相应的保守力

质点在保守力 F 的作用下，通过 dr，则力 F 所作之功

$$\left.\begin{aligned} dA &= Fdr \\ dA &= -dE_P \end{aligned}\right\} F = -\frac{dE_p}{dr}$$

“—”表示保守力的方向总是指向势能减少的方向

【例 3】地球 M , R ,质点 m 距地面高 h , 取地球面为 0 势能，求质点地球在此相对位置的引力势能。



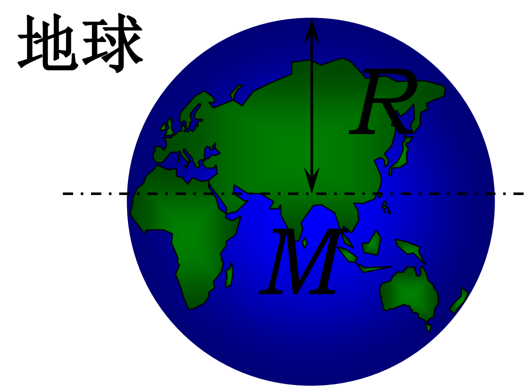
解：

$$E_p = A = \int_{h+R}^{R} -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$= G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R+h} = GMm\frac{h}{R(R+h)}$$

$\because h << R$

$\therefore R（R+h）\approx R^2$



则：$E_P = GMm\dfrac{h}{R^2}$

又：$mg = \dfrac{MGm}{R^2}$

$\Rightarrow E_P = mgh$

可见重力势能是万有引力势能在地球表面附近的一个特例

§2.3 机械能守恒定律

一、功能原理

设：n 个质点组成质点系

$$A_i = \frac{1}{2}m_i v_{i2}^{\ 2} - \frac{1}{2}m_i v_{i1}^{\ 2}$$

系统：作用力 $\begin{cases} \text{外力} \\ \text{内力} \begin{cases} \text{保守力} \\ \text{非保守力} \end{cases} \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v_{i2}^{\ 2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v_{i1}^{\ 2} = E_{k2} - E_{k1}$$

$$\boxed{A = A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = E_{k2} - E_{k1}}$$

——系统的动能定理

$$\because A_{保内} = E_{P1} - E_{P2} = -(E_{P2} - E_{P1})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \therefore A_{外} + A_{非保内} &= (E_{k2} - E_{k1}) + (E_{P2} - E_{P1}) \\ &= (E_{k2} + E_{P2}) - (E_{k1} + E_{P1}) = E_2 - E_1 \end{aligned}}$$

——系统的功能原理

$$当 A_{外} + A_{非保内} = 0$$

$$\boxed{则：E_{k2} + E_{P2} = E_{k1} + E_{P1} = C — 机械能守恒}$$

讨论：

1. 在非惯性系中应用动能定理、功能原理时须考虑惯性力作功。

2.封闭系统（$A_{外}=0$）$\begin{cases} A_{非保内} = 0 — 机械能守恒 \\ A_{非保内} \neq 0 — 机械能不守恒 \end{cases}$

若：$A_{非保内} > 0 —$ 其它能量 $\rightarrow$ 机械能

$A_{非保内} < 0 —$ 机械能 $\rightarrow$ 其它能量

但一个封闭系统经历任何变化时，该系统的所有能量的总和是不变的——能量守恒定律。

【例 4】在光滑的水平台面上放有质量为 M 的沙箱,一颗从左方飞来质量为 m 的弹丸从箱左侧洞口击入,在沙中前进 l 距离后停止.在这段时间中沙箱向右运动的距离为 s, 此后沙箱带着弹丸以匀速 v 运动.

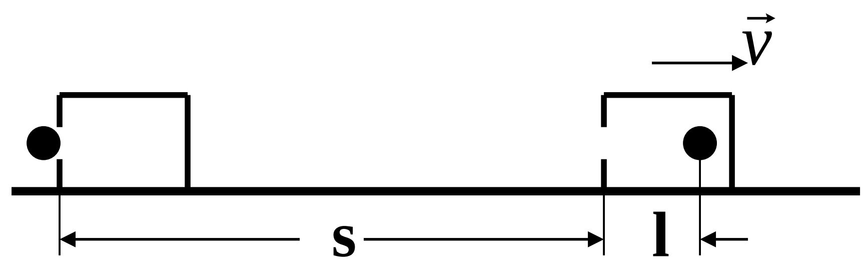
求（1）沙箱对弹丸的平均阻力 F; （2）弹丸的初速 v_0;

（3）沙箱一弹丸系统损失的机械能。

解 (1). 沙箱

$$F\cdot s=\frac{1}{2}Mv^2-0$$

$$\Rightarrow F=\frac{M}{2s}v^2$$



(2). 弹丸

$$\left.\begin{aligned}-F'(s+l)&=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}\\ F'=F&=\frac{M}{2s}v^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow v_0=\left[\frac{M}{ms}(s+l)+1\right]^{\frac{1}{2}}v$$

$$(3).\quad \Delta E=(\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}mv^2)-\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

$$=\frac{1}{2}Mv^2+(\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0{}^2)$$

$$=F\cdot s-F'(s+l)$$

$$=-F\cdot l=-\frac{1}{2}\frac{M}{s}lv^2$$

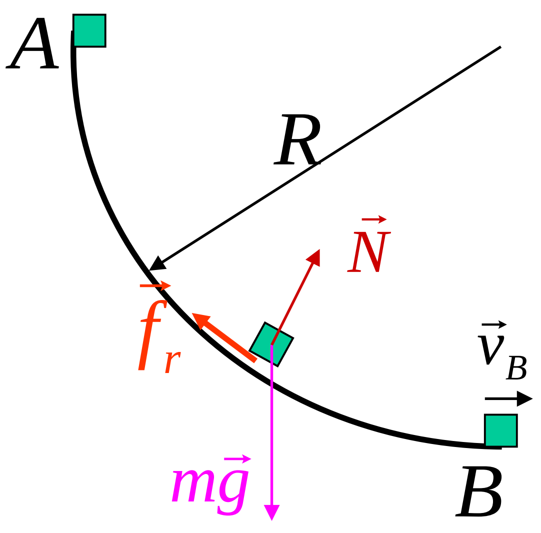
两质点间的“一对力”所做功之和等于其中一个质点受的力沿着该质点相对于另一质点所移动的路径所做的功

【例 5】一质量为 m 的物体,由静止开始沿着四分之一的圆周,从 A 滑到 B ,在 B 处速度的大小为 v_B , 圆半径为 R. 求: 物体从 A 到 B，摩擦力所做之功.

已知: m, v_{B}, R, $v_A=0$ 求: A_{fr}

解: (1). 由功的定义:

$$A_{f_r} = \int f_r \cdot \cos\alpha \cdot ds$$



切向: $mg\cos\theta - f_r = ma_t = m\dfrac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow f_r = mg\cos\theta - m\frac{dv}{dt}$$

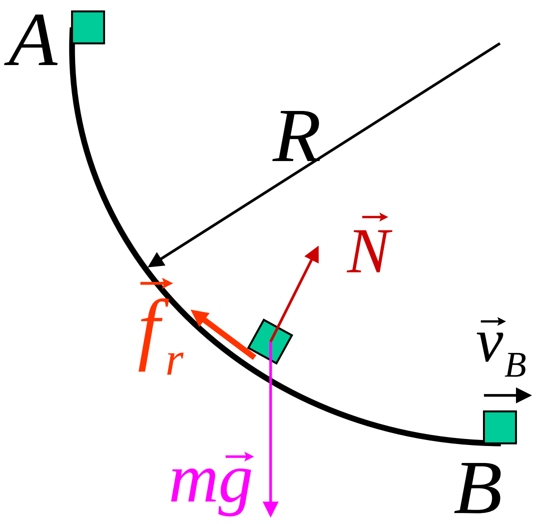
$$dA = f_r \cdot \cos\pi \cdot ds \qquad ds = Rd\theta$$

$$dA = m\frac{ds}{dt}dv - mgR\cos\theta \cdot d\theta$$

$$= mvdv - mgR\cos\theta \cdot d\theta$$

$$A_{f_r} = \int dA = \int_0^{v_B} mvdv - \int_0^{\frac{\pi}{2}} mgR\cos\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2}mv_B{}^2 - mgR$$



(2). 应用动能定理解

以 m 为研究对象：$A_{外} = E_{k2} - E_{k1}$

外力
- mg
  - micosθ——做功
  - mgsinθ——不做功
- N——不做功
- f_r——做功

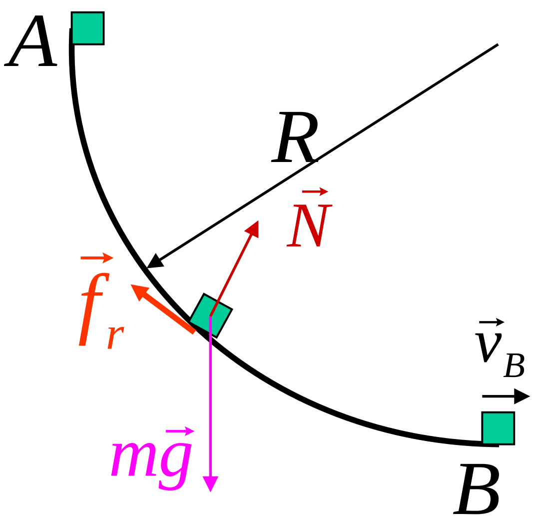
$$A = A_{mg\cos\theta} + A_{f_r}$$

$$= \int mg\cos\theta \cdot ds + A_{f_r}$$

$$= mgR + A_{f_r}$$

$$= \frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2 = \frac{1}{2}mv_B{}^2$$

$$\therefore A_{f_r} = \frac{1}{2}mv_B{}^2 - mgR$$



(3). 应用功能原理解　　以 m 和地球为研究系统:

$$A_{外} + A_{非保内} = E_2 - E_1$$

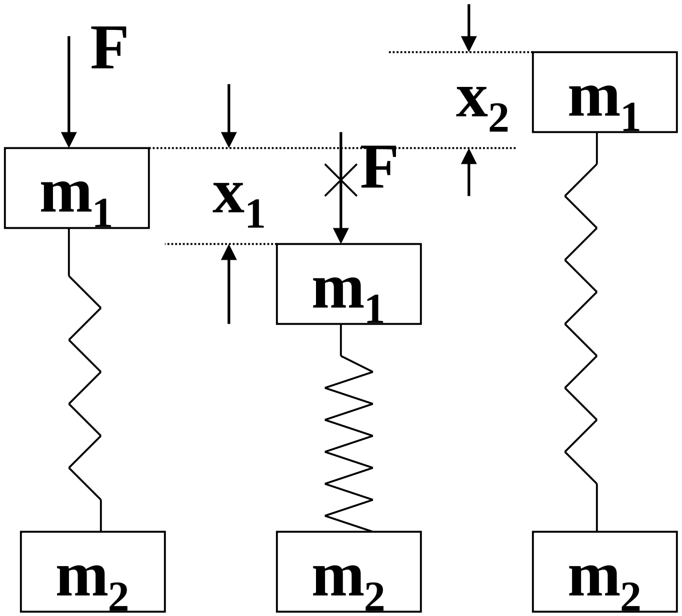
(以 B 点为重力势能零点)

$$= (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})$$

$$\therefore A_{f_r} = (\frac{1}{2}mv_B{}^2 + 0) - (0 + mgR)$$

$$= \frac{1}{2}mv_B{}^2 - mgR$$

受力分析
- 外力: 无
- 保守内力: mg
- 非保守内力
  - N: 不做功
  - F_r: 做功

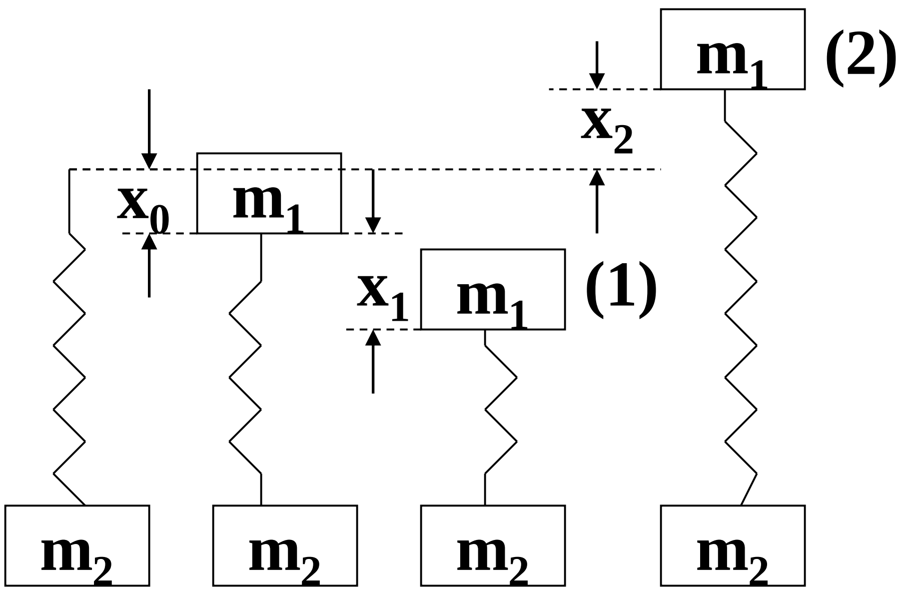


【例 6】问：F 力为多大，才能使力突然撤除时，上面板跳起，并能使下面的板刚好被提起？

$$\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}=\frac{1}{2}kx_2^{\ 2}+m_1g(x_1+x_2)$$

$$F=kx_1$$

$$kx_2=m_2g$$



$$\frac{1}{2}k(x_1+x_0)^2=\frac{1}{2}kx_2^{\ 2}+m_1g(x_1+x_2+x_0)$$

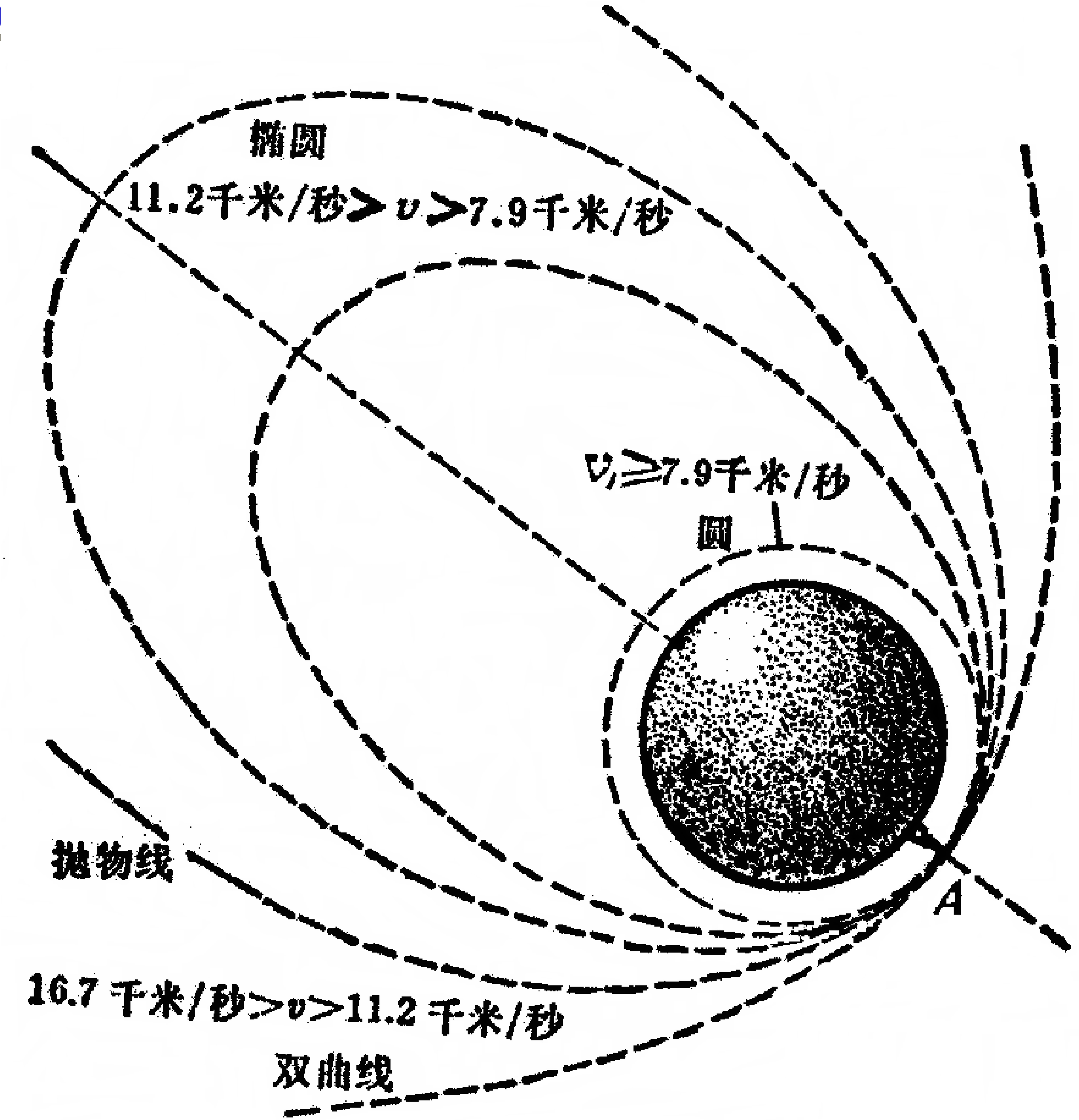
$$m_1g=kx_0$$

$$F+m_1g=k(x_1+x_0)$$

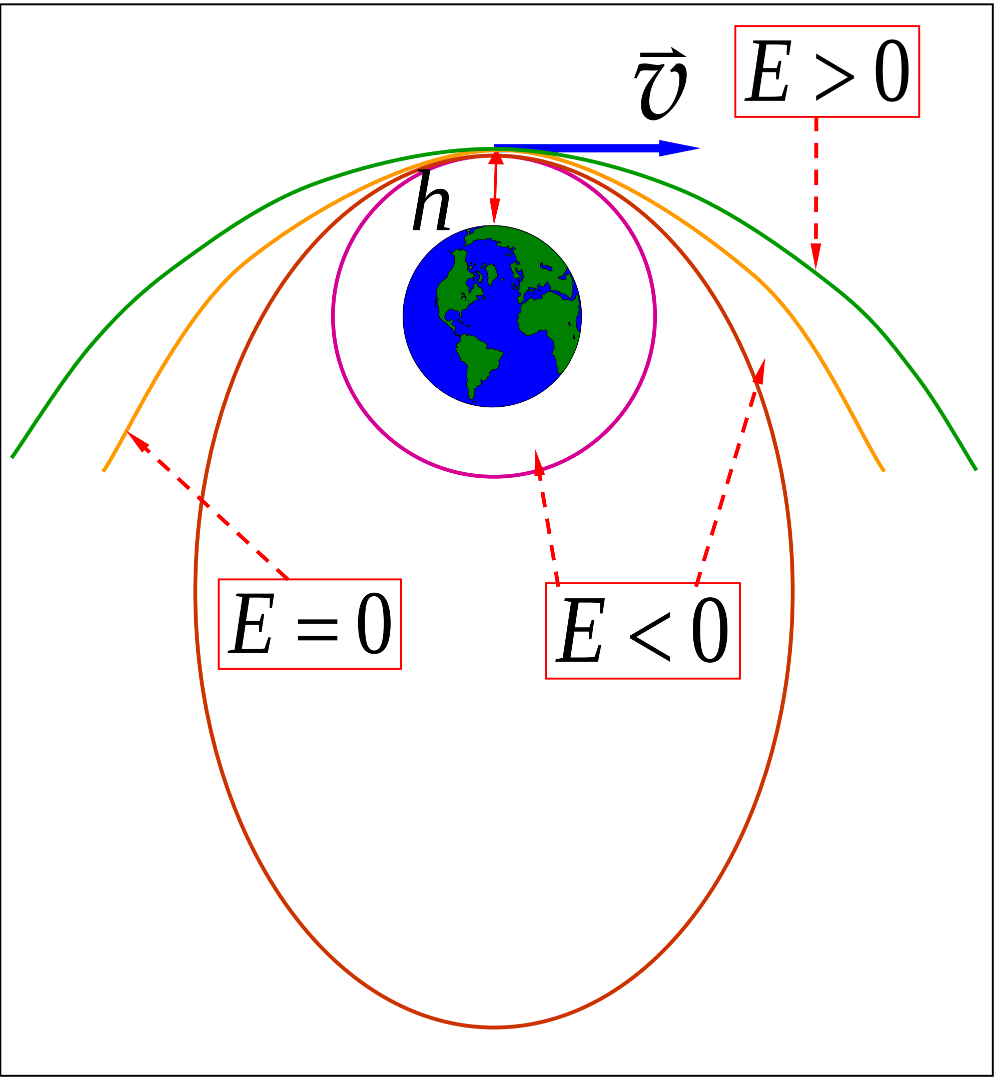
$$kx_2=m_2g$$

$$F=(m_1+m_2)\ g$$

守恒定律（law of conserva



抛 体 的 轨 迹 与 能 量 的 关 系



- $E<0$ 椭 圆(包括圆)

  $v_1 = 7.9\text{km/s}$

- $E=0$ 抛物线

  $v_2 = 11.2\text{km/s}$

- $E>0$ 双曲线

  $v_3 = 16.4\text{km/s}$

1）人造地球卫星，第一宇宙速度

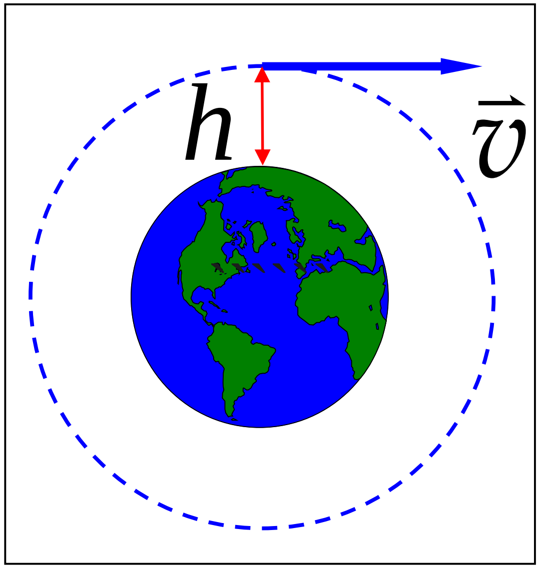
第一宇宙速度 v_1，是在地面上发射人造地球卫星所需的最小速度。

设 地球质量 m_E，抛体质量 m，地球半径 R_E .

解 取抛体和地球为一系统，系统的机械能 E 守恒 .

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + (-G\frac{mm_E}{R_E})$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + (-G\frac{mm_E}{R_E + h})$$



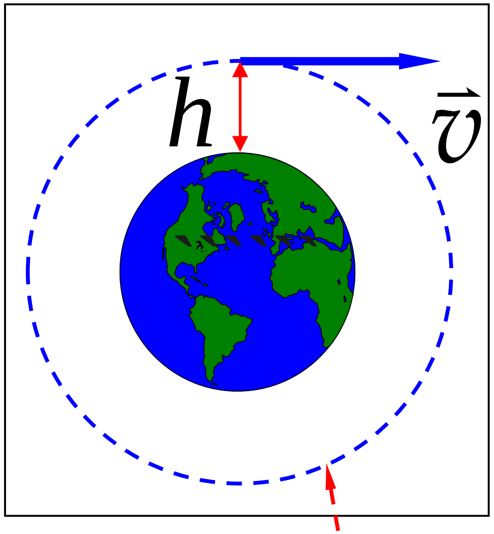
由牛顿第二定律和万有引力定律得

$$m\frac{v^2}{R_E + h} = G\frac{mm_E}{(R_E + h)^2}$$

解得 $v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E} - \frac{Gm_E}{R_E + h}}$

$$v_1=\sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}-\frac{Gm_E}{R_E+h}}$$

$$\because g=\frac{Gm_E}{R_E^2} \qquad \therefore v_1=\sqrt{gR_E\left(2-\frac{R_E}{R_E+h}\right)}$$



地球表面附近 $R_E>>h$ 故 $v_1=\sqrt{gR_E}$

计算得 $v_1=7.9\times10^3\,\mathrm{m/s}$ 第一宇宙速度

$$E=-\frac{Gmm_E}{2(R_E+h)}<0$$

2） 人造行星，第二宇宙速度

第二宇宙速度v_2 ，是抛体脱离地球引力所需最小发射速度。

设 地球质量 m_E，抛体质量 m，地球半径 R_E 。

取抛体和地球为一系统 系统机械能 E 守恒。

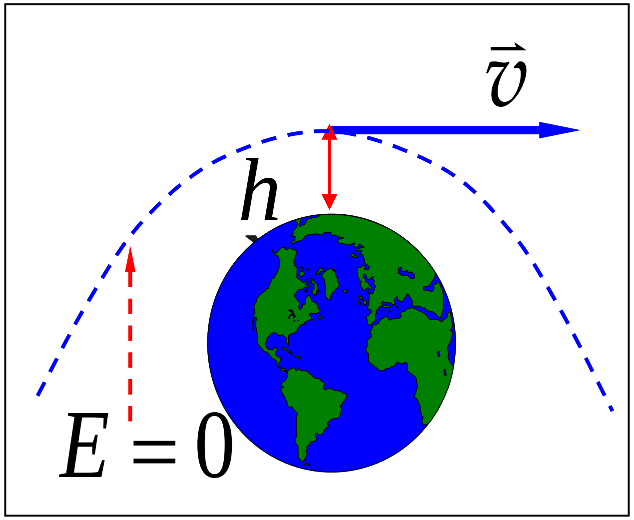
当 $r \to \infty$， $F \to 0$; 若此时 $\upsilon \to 0$ 则 E

$$E = \frac{1}{2} m \upsilon_2^2 + \left(-G \frac{m_{\mathrm{E}} m}{R_{\mathrm{E}}}\right)$$

$$= E_{\mathrm{k}\infty} + E_{\mathrm{p}\infty} = 0$$

$$E = \frac{1}{2} m \upsilon_2^2 + \left(-G \frac{m_{\mathrm{E}} m}{R_{\mathrm{E}}}\right) = 0$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2Gm_{\mathrm{E}}}{R_{\mathrm{E}}}} = \sqrt{2gR_{\mathrm{E}}}$$

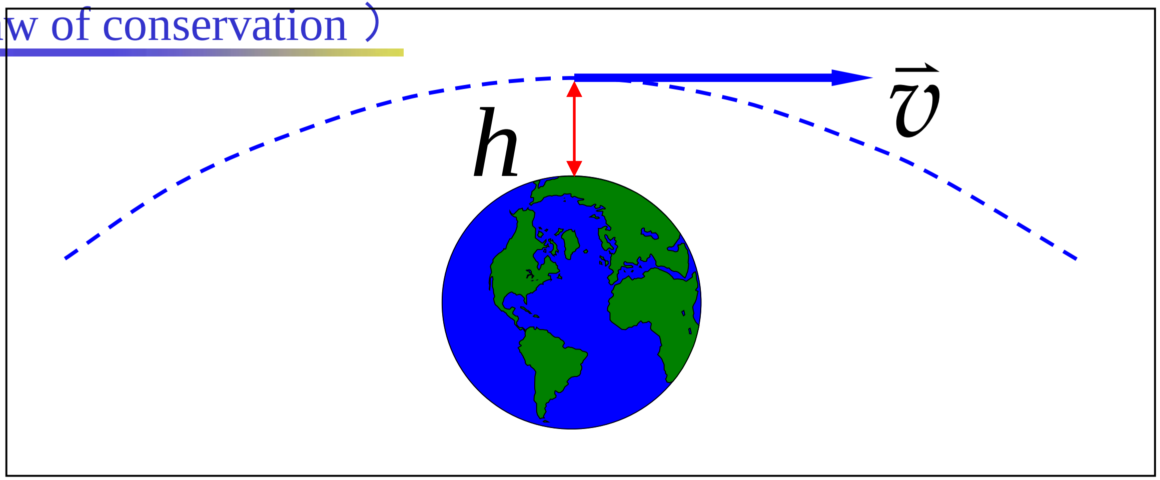


计算得 $\upsilon_2 = 11.2\mathrm{km/s}$

第二宇宙速度

3） 飞出太阳系，第三宇宙速度

第三宇宙速度 υ_3，是抛体脱离太阳引力所需的最小发射速度。



设　地球质量 m_{E}，抛体质量 m，地球半径 R_{E}，

太阳质量 m_{S}，抛体与太阳相距 R_{S}。

取抛体和地球为一系统，抛体首先要脱离地球引力的束缚，其相对于地球的速率为 v'.

取地球为参考系，由机械能守恒得 $\frac{1}{2}mv_3^2+(-G\frac{m_{\mathrm{E}}m}{R_{\mathrm{E}}})=\frac{1}{2}mv'^2$

则 $\vec{v}'_3=\vec{v}'+\vec{v}_{\mathrm{E}}$

地球相对于太阳的速度

如 $\vec{v}'$ 与 $\vec{v}_{\mathrm{E}}$ 同向，有 $v'_3=v'+v_{\mathrm{E}}$

要脱离太阳引力，机械能至少为零

$$E=\frac{1}{2}mv_3'^2+(-G\frac{m_S m}{R_S})=E_{k\infty}+E_{p\infty}=0$$ 则 $$\boxed{v_3'=(\frac{2Gm_S}{R_S})^{1/2}}$$

设地球绕太阳轨道近似为一圆，由于 $\vec{v}_3'$ 与 $\vec{v}_E$ 同向,

则抛体与太阳的距离 R_S 即为地球轨道半径

则 $$m_E\frac{v_E^2}{R_S}=G\frac{m_E m_S}{R_S^{\ 2}} \Longrightarrow \boxed{v_E=(G\frac{m_S}{R_S})^{1/2}}$$

$v'=v_3'-v_E$ 计算得 $v'=(\sqrt{2}-1)(\frac{Gm_S}{R_S})^{1/2}$

取地球为参照系 $$\boxed{\frac{1}{2}mv_3^2+(-G\frac{m_E m}{R_E})=\frac{1}{2}mv'^2}$$

计算得 $$v_3=(v'^2+2G\frac{m_E}{R_E})^{1/2}=16.4\mathrm{km\cdot s^{-1}}$$

第三宇宙速度

§2.4 冲量 动量定理

一、冲量

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}\Rightarrow \vec{F}dt=d\vec{P}$$

t_1-t_2: $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt=\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2}d\vec{P}$ 其中: $\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot dt=\vec{I}}$

冲量的几何意义：冲量 I 在数值上等于 F ~ t 图线与坐标轴所围的面积。

说明：1）冲量是表征力持续作用一段时间的累积效应；

2）冲量是矢量：大小和方向；

3）冲量是过程量， 改变物体机械运动状态的原因。

冲量的分量式： $I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt$ $I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt$

二、质点动量定理： $\vec{P}=m\vec{v}$

（动量）：表征质点运动状态的量

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}\Rightarrow \vec{F}dt=d\vec{P} \qquad \boxed{\vec{I}=\vec{P}_2-\vec{P}_1}$$

冲量是物体动量（运动状态）变化的量度。

动量定理的分量式： $I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt=mv_{2x}-mv_{1x}$

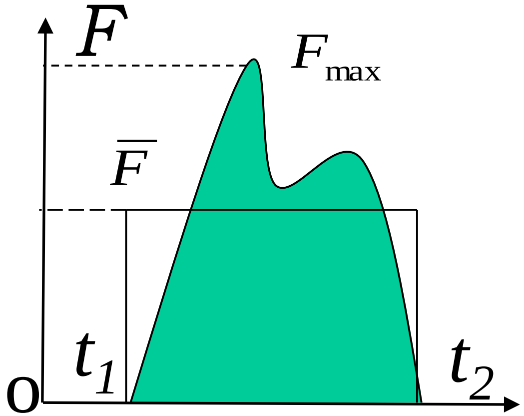
$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt=mv_{2y}-mv_{1y}$$

冲力：作用时间极短，变化极大。

用平均冲力表示动量原理：

碰撞期间与变力具有相同冲量的恒力

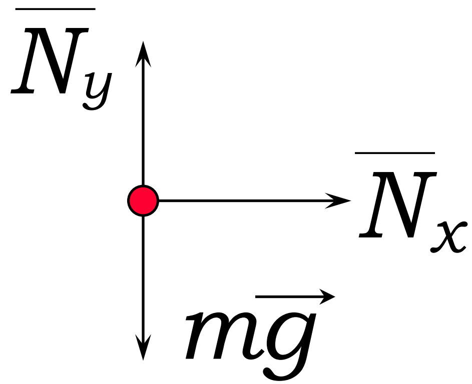
$$\bar{\vec{F}}(t_2-t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt \quad \begin{cases}\bar{F}_x(t_2-t_1)=mv_{2x}-mv_{1x}\\ \bar{F}_y(t_2-t_1)=mv_{2y}-mv_{1y}\end{cases}$$

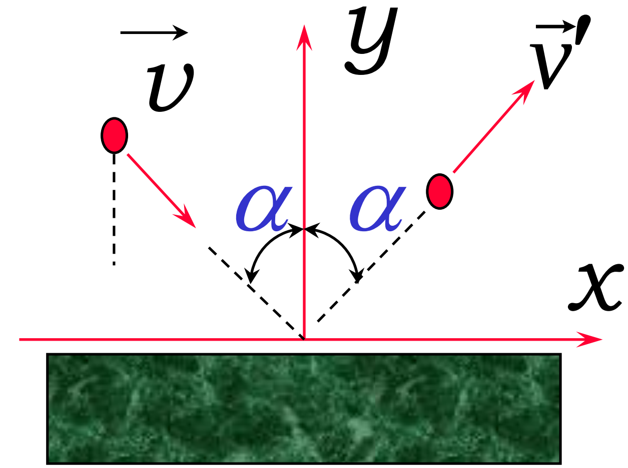


【例 7】一小球与地面碰撞 $m = 2\times10^{-3}$kg，$\alpha = 60^0$，

$v = v' = 5.0$ m.s^{-1}，碰撞时间 $t = 0.05$s　求:平均冲力。

解：





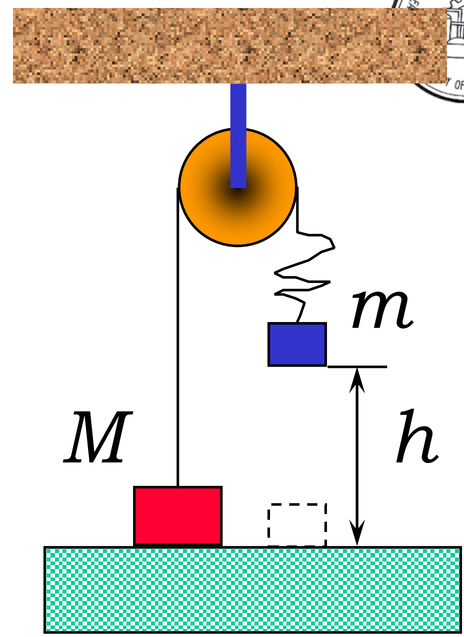
$$\overline{N}_x \Delta t = mv\sin\alpha - mv\sin\alpha$$

$$(\overline{N}_y - mg)\Delta t = mv\cos\alpha - (\quad mv\cos\alpha)$$

解得：$\overline{N}_x = 0$　$\overline{N}_y = \dfrac{2mv\cos\alpha}{\Delta t} + mg = 2.2\ (\mathrm{N})$

$\because mg = 2\times10^{-3}\times10 = 2\times10^{-2} \ll \overline{N}_y$　$\therefore$ 碰撞过程重力可忽略

【例 8】已知 M, m, h 。绳子拉紧瞬间绳子与 m , M 之间的相互作用时间为Δt 。求：绳子拉紧后，M 与 m 的共同速度。

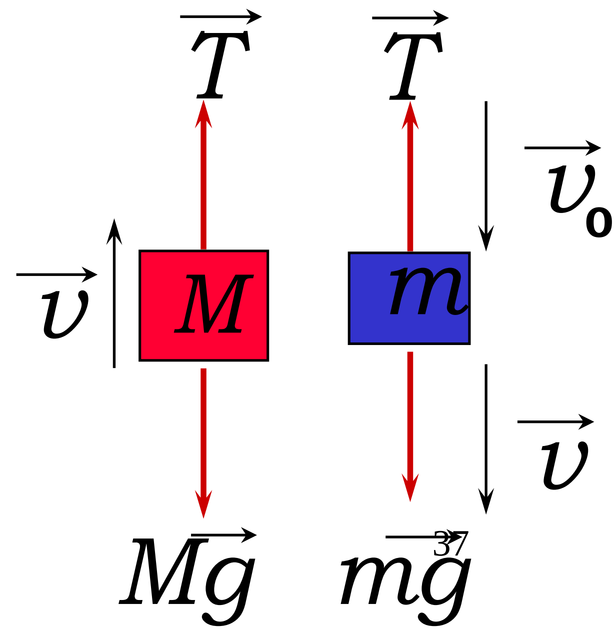


解：分别对 M 及 m 应用动量原理

$$(\overline{T}-Mg)\Delta t = Mv - 0$$

$$(\overline{T}-mg)\Delta t = -mv - (-mv_0)$$

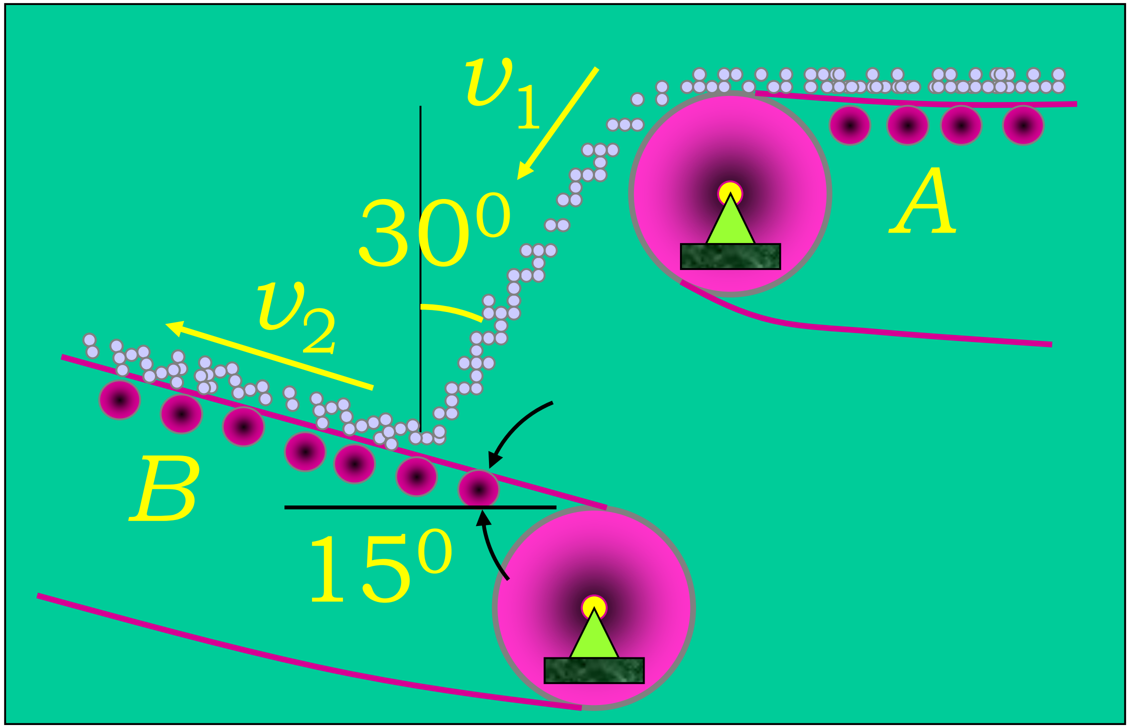
$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

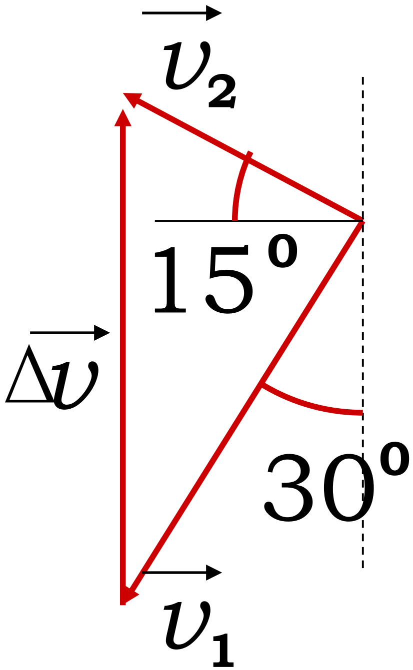


解得：

$$v = \left(\frac{mv_0}{M+m}\right) - \left(\frac{M-m}{M+m}\right) g\Delta t$$

【例 8】矿砂从传送带 A 落入传送带 B，其速度 $v_1 = 4\text{m/s}$,方向与竖直方向成 30^0 角，而传送带 B 与水平方向成15^0 角，其速度 $v_2=2\text{m/s}$。传送带的运送量为 $k = 20\text{kg/s}$. 求：落到传送带 B 上的矿砂所受到的力。





解： 在 Δt 内落在传送带上的矿砂质量为： $m=k\Delta t$，
这些矿砂的动量增量为：

$$\Delta(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$|\Delta(m\vec{v})| = m\sqrt{4^2+2^2-2\times4\times\cos 75^{o}}$$

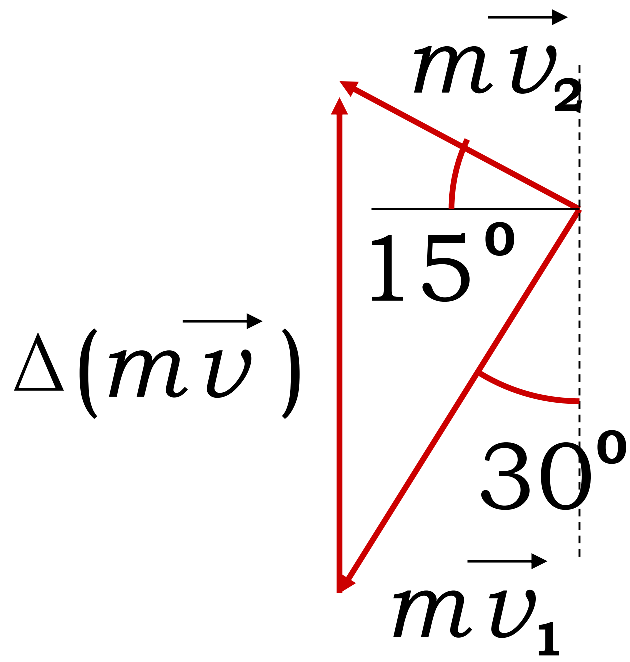
$$= 3.98m = 3.98k\Delta t\,(\mathrm{m/s})$$

由**动量原理**：$\overline{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v})$

$$\overline{F} = \frac{|\Delta(m\vec{v})|}{\Delta t}$$

$$= \frac{3.98k\Delta t}{\Delta t}$$

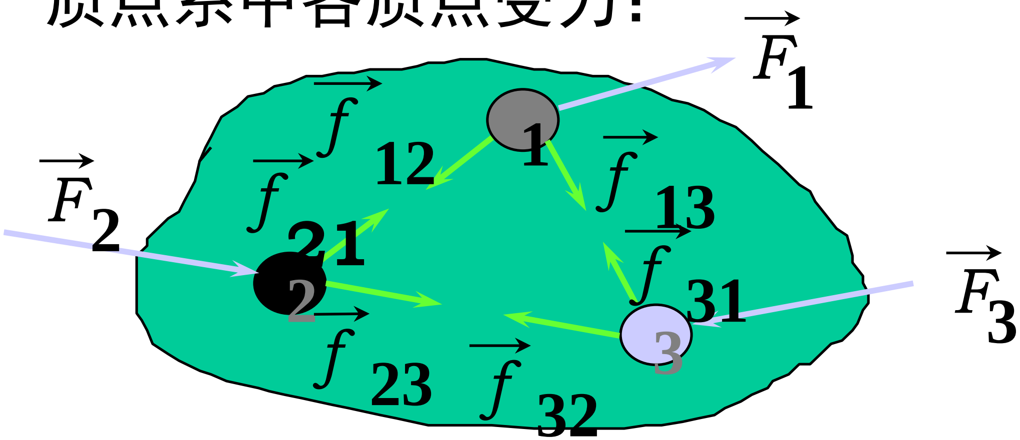
$$= 3.98k = 79.6\mathrm{N}$$

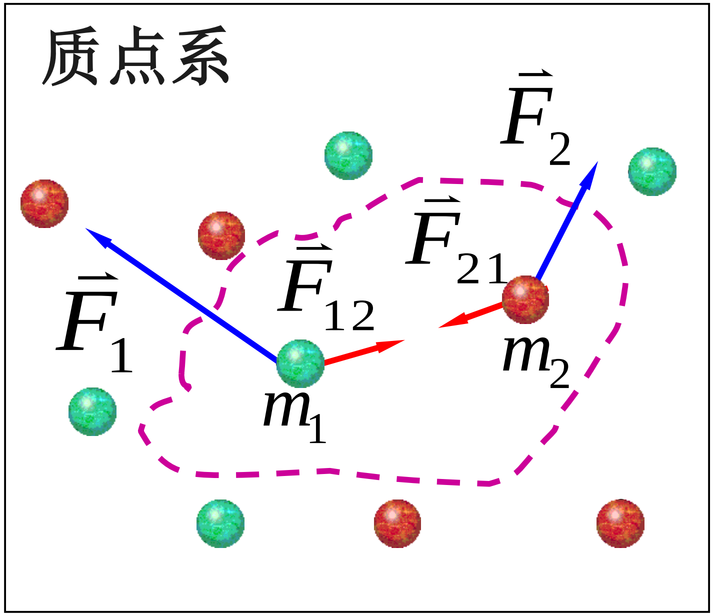


§2.5 动量守恒定理

一、质点系动量定理

质点系中各质点受力：





内力：$\vec{f}_{12}, \vec{f}_{21}, \vec{f}_{13} \cdots\cdots$ 外力：$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

对三个质点分别应用质点动量定理：

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10} = \int_{t_0}^{t} (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1) \cdot dt \\ m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20} = \int_{t_0}^{t} (\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2) \cdot dt \\ m_3\vec{v}_3 - m_3\vec{v}_{30} = \int_{t_0}^{t} (\vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3) \cdot dt \\ \because \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \end{cases}$$

质点系动量定理

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0} = \int_{t_0}^{t} (\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i) dt}$$

作用在系统上合外力的冲量等于系统总动量的变化量。

对三个质点分别应用质点动量定理

$$m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10} = \int_{t_0}^{t}(\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1)\cdot dt$$

$$m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20} = \int_{t_0}^{t}(\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2)\cdot dt$$

$$m_3\vec{v}_3 - m_3\vec{v}_{30} = \int_{t_0}^{t}(\vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3)\cdot dt$$

$$\because \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0} = \int_{t_0}^{t}(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i)dt$$

质点系动量定理

作用在系统上合外力的冲量等于系统总动量的变化量。

提示： 质点系动量定理是矢量方程

注意

内力不改变质点系的动量

提示：质点系动量定理是矢量方程

若：$\sum \vec{F}_i = 0$ 即外力矢量和为零

则：$\boxed{\sum m_i \vec{v}_i = \vec{c}}$

系统的总动量等于一常矢量，总动量守恒。

$$若:\sum F_{ix} = 0 \quad 则:\sum m_i v_{ix} = c$$

$$若:\sum F_{iy} = 0 \quad 则:\sum m_i v_{iy} = c$$

$$若:\sum F_{iz} = 0 \quad 则:\sum m_i v_{iz} = c$$

如果外力在某方向投影的和为零，则该方向的分动量守恒

讨论：

1. 动量守恒条件 $\begin{cases} \sum \vec{F}_{外} = 0 \\ F_{外} << F_{内} (如:碰撞) \end{cases}$

2．内力的作用虽不能改变系统的总动量,但可改变系统内动量的分配。

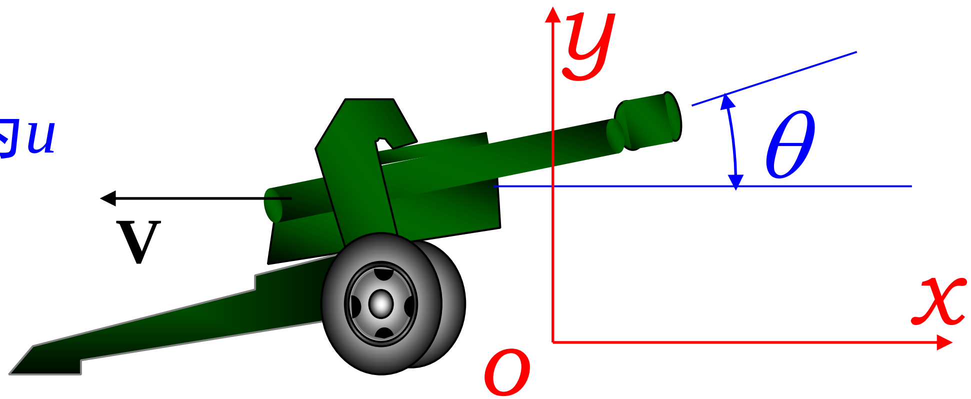
3. 动量定理及动量守恒定律仅适用于惯性系,且定理、定律中各速度都必须对同一个惯性系。

4. 定理、定律中各速度都必须对同一个时刻。

5. 动量守恒是自然界普遍适用的物理定律，它比牛顿定律更为基本。在微观世界中牛顿定律不再适用，但动量守恒定律仍然正确

【例 9】炮车以仰角 q 发射一炮弹，炮车和炮弹的质量分别为 M 和 m，炮弹的出口速度的大小为 v，不计炮车与地面之间的摩擦。试求：炮车的反冲速度 V 及炮弹出口后其速度与水平面的夹角。

解：设炮弹相对地面的速度为u



u在水平方向的投影为

$$u_x = \upsilon\cos\theta - V$$

不计地面的摩擦，水平方向动量守恒

$$-MV + m(\upsilon\cos\theta - V) = 0$$

得：
$$V = \frac{m}{M+m}\upsilon\cos\theta$$

$$V=\frac{m}{M+m}\upsilon\cos\theta$$

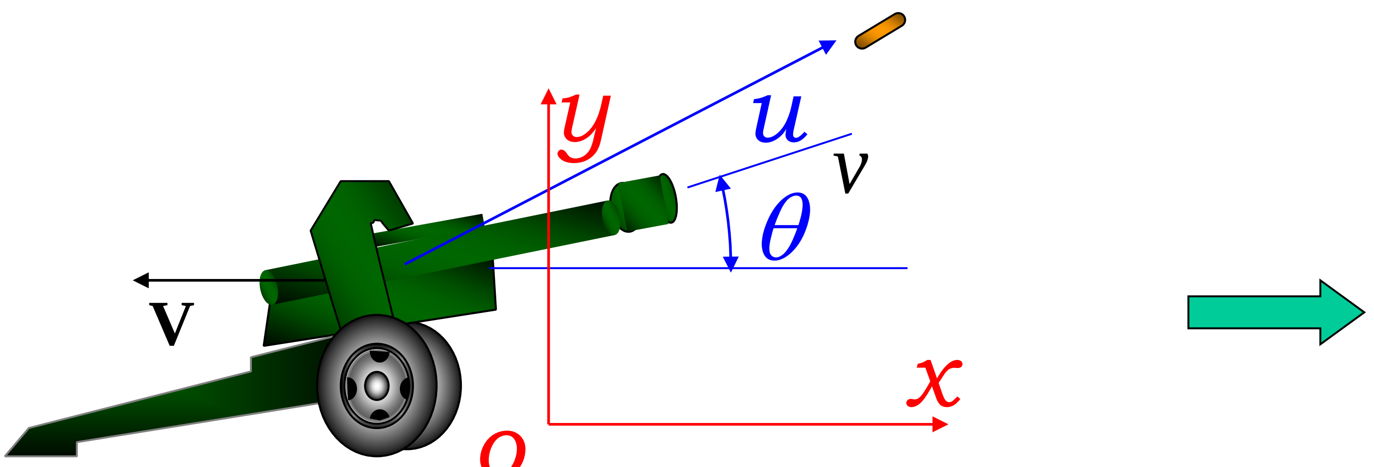
$$u_x=\upsilon\cos\theta-V$$

$$u_y=\upsilon\sin\theta$$

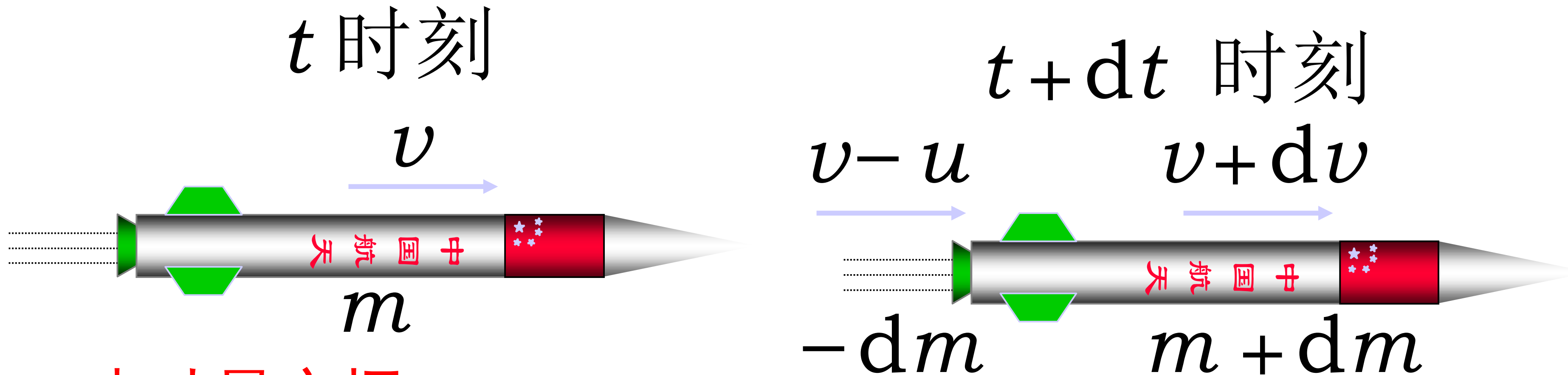
$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{u_y}{u_x}$$

$$\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{M+m}{m}\mathrm{tg}\theta\right)$$

注意 $\alpha\neq\theta$ 并且 $\alpha>\theta$



【例 10】火箭飞行。质量为m 的火箭以速度v 飞行，试求其速度与火箭本体质量之间的关系。



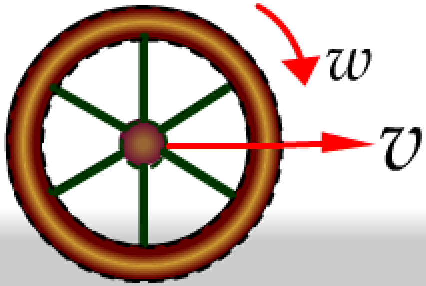
由动量守恒：

$$m v = (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + (-\mathrm{d}m)(v - u)$$

略去二阶无穷小量 $\mathrm{d}v\ \mathrm{d}m$ 经整理可得： $\mathrm{d}v = -u\dfrac{\mathrm{d}m}{m}$

$$\int_{v_2}^{v_1}\mathrm{d}v = \int_{m_2}^{m_1} -u\frac{\mathrm{d}m}{m} \longrightarrow v_1 - v_2 = u\ln\frac{m_1}{m_2}$$

守恒



1、质心：质点系的质量中心，质点系 N 个质点

质量： $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_N$

位矢： $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_i, \ldots, \vec{r}_N$

质心的位矢：(m'为总质量) $\vec{r}_c = \dfrac{\sum\limits_i m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i} = \dfrac{\sum\limits_i m_i \vec{r}_i}{m'}$

质心的位矢随坐标系的选取而变化，但对一个质点系，质心的相对位置是固定的。

质点系的复杂运动通常可分解为：$\begin{cases} \text{质点系整体随质心的运动；} \\ \text{各质点相对于质心的运动；} \end{cases}$

直角坐标系中的分量式为： $x_c = \dfrac{\sum\limits_i m_i x_i}{m'} \quad y_c = \dfrac{\sum\limits_i m_i y_i}{m'} \quad z_c = \dfrac{\sum\limits_i m_i z_i}{m'}$

质量连续分布时： $x_c = \dfrac{1}{m'}\int x\,dm \quad y_c = \dfrac{1}{m'}\int y\,dm \quad z_c = \dfrac{1}{m'}\int z\,dm$

对称物体的质心就是物体的对称中心。由两个质点组成的质点系，常取质心处x_c=0以便于分析和计算。

2、质心运动定律

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m'}$$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m'}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m'}\sum_i m_i \vec{v}_i$$

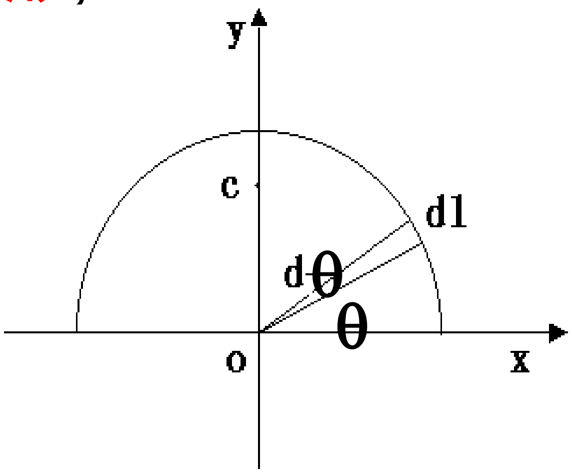
$$\therefore m\vec{v}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P} \qquad \vec{P} = m'\vec{v}_c$$

质点系的总动量等于它的总质量与它的质心的运动速度的乘积

$$\vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m'\frac{d\vec{v}_c}{dt} = m'\vec{a}_c$$

质心运动定律：系统的总质量和质心加速度的乘积等于质点系所受外力的矢量和。

【例 12】一段均匀铁丝弯成半径为R的半圆形，求此半圆形铁丝的质心。



解：选如图坐标系，取长为dl的铁丝，质量为dm，以λ表示线密度，$dm=\lambda dl$.分析得质心应在y轴上。

$$\therefore x_c = \frac{\int \lambda x dl}{m'}, x = R\cos\theta, dl = Rd\theta$$

$$x_c = \frac{1}{m'}\int_0^{\pi} R\cos\theta \lambda R d\theta = \frac{\lambda R^2}{m'}\sin\theta\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\therefore y_c = \frac{\int \lambda y dl}{m'}, y = R\sin\theta$$

$$y_c = \frac{1}{m'}\int_0^{\pi} R\sin\theta \lambda R d\theta = \frac{1}{m'} 2\lambda R^2$$

$$\because m' = \pi R\lambda \qquad \therefore y_c = \frac{2}{\pi}R$$

注意：质心不在铁丝上。

【例 13】设有一质量为$2m$的弹丸，从地面斜抛出去，预计落在 x_0 处，它飞行在最高点出爆炸成质量相等的两个碎片，其中一个碎片垂直自由下落，另一个碎片水平抛出，它们同时落地，试问第二个碎片落地点在何处？

解：考虑弹丸为一系统，空气阻力略去不计。爆炸前和爆炸后弹丸质心的运动轨迹都在同一抛物线上。即，爆炸以后两碎片质心的运动轨迹仍沿爆炸前弹九的抛物线运动轨迹。

$$\because x_1 = 0, x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} x_2$$

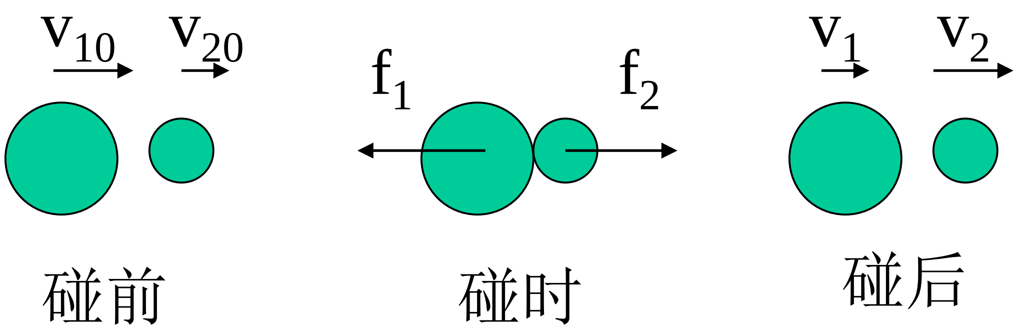
$$x_2 = 2x_C = 2x_0$$

§2.6 碰 撞

一、恢复系数：

$$\boxed{e \overset{def}{=} \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}}$$

正碰—碰撞前后其速度均在同一条直线上



二、三种不同类型碰撞的分析

(1). 完全弹性碰撞

动量守恒： $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_{10} + m_2v_{20}$ (1)

动能守恒：$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2$ （2）

$$\left.\begin{cases} \textbf{(1)}\quad v_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \\ \textbf{(2)}\quad v_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 1}$$

(2). 完全非弹性碰撞

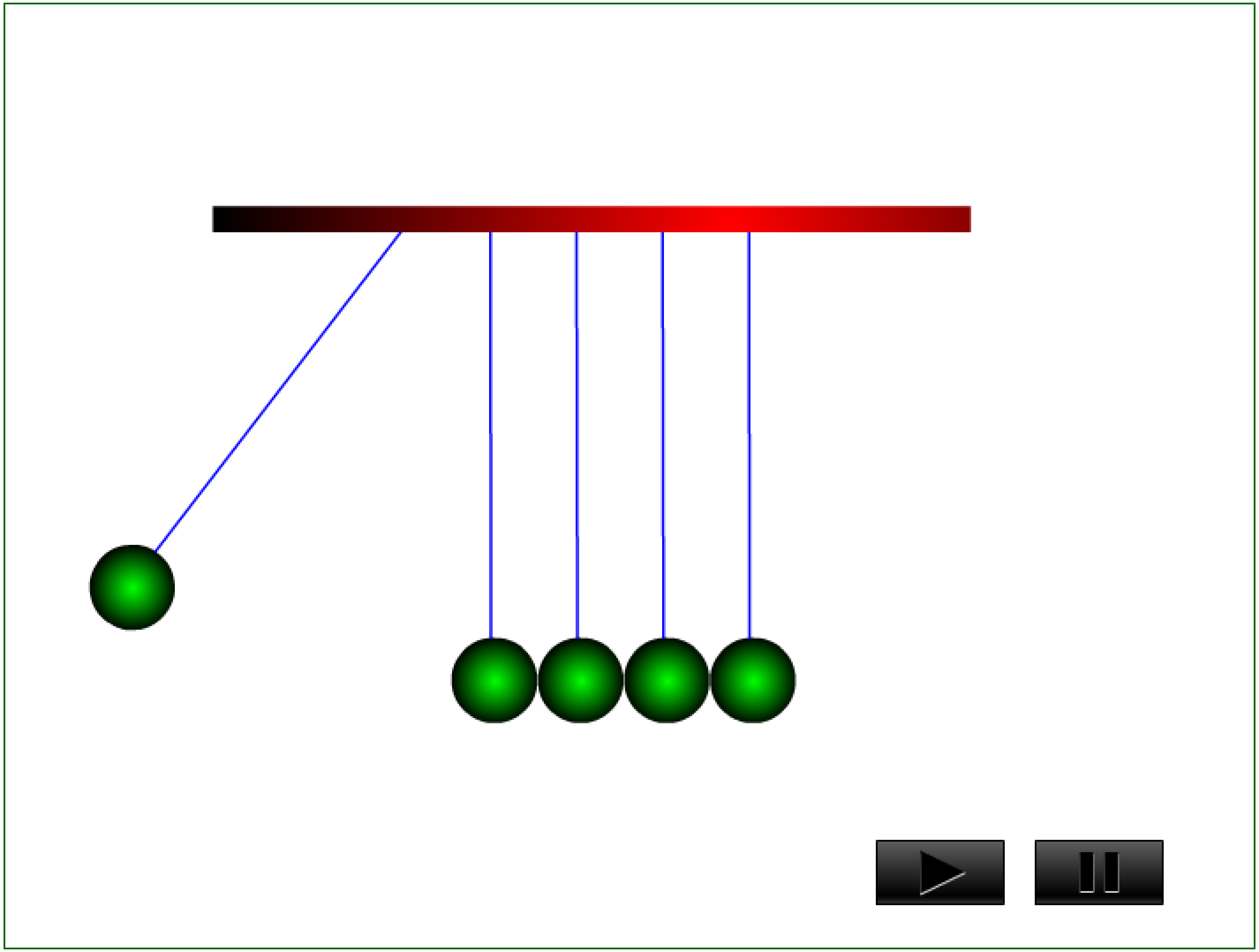
$$\left.\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_{10} + m_2v_{20} \\ v_1 = v_2 &= v \end{aligned}\right\} \quad v = \frac{m_1v_{10} + m_2v_{20}}{m_1 + m_2}, \quad e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 0$$

(3).非完全弹性碰撞

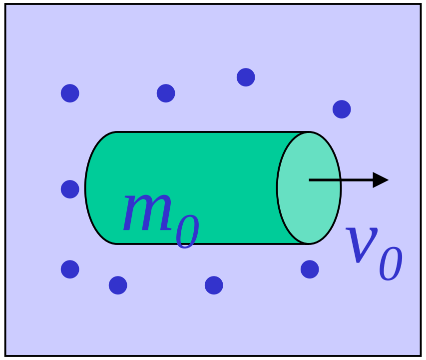
$$\left.\begin{array}{l} m_1v_1+m_2v_2=m_1v_{10}+m_2v_{20} \\ e=\dfrac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}} \Rightarrow v_2-v_1=e(v_{10}-v_{20}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} v_1=v_{10}-\dfrac{(1+e)m_2(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2} \\ v_2=v_{20}+\dfrac{(1+e)m_1(v_{10}-v_{20})}{m_1+m_2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_k-E_{k0} \\ &=(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2)-(\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2) \\ &=-\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})^2 \end{aligned}$$

守恒定律（ law of conservation ）



【例 14】设在宇宙中有密度为 ρ 的尘埃,这些尘埃相对于惯性系是静止的,有一质量为 m_0 的宇宙飞船(设想飞船的外形是面积为 S 的圆柱体)以初速 v_0 穿过尘埃, 由于尘埃粘贴到飞船上, 致使飞船的速度发生变化.



求:1.飞船速度与其在尘埃中飞行时间的关系.

2.若要保持飞船匀速飞行需多大的动力?

解:

1.尘埃、飞船系统作完全非弹性碰撞,系统动量守恒

$$m_0 v_0 = m v$$ 式中m,v为t时刻飞船的速度和质量

$$\left.\begin{aligned} dm &= -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv \\ t\text{-}t+dt:\ dm &= \rho s v dt \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \rho s v dt = -\frac{m_0 v_0}{v^2} dv$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^3} = \frac{\rho s}{m_0 v_0} \int_0^t dt$$

$$\int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^3} = \frac{\rho s}{m_0 v_0}\int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{v_0^2}\right) = \frac{\rho s}{m_0 v_0} t$$

$$\Downarrow$$

$$v = \left(\frac{m_0}{2\rho S v_0 t + m_0}\right)^{1/2} v_0$$

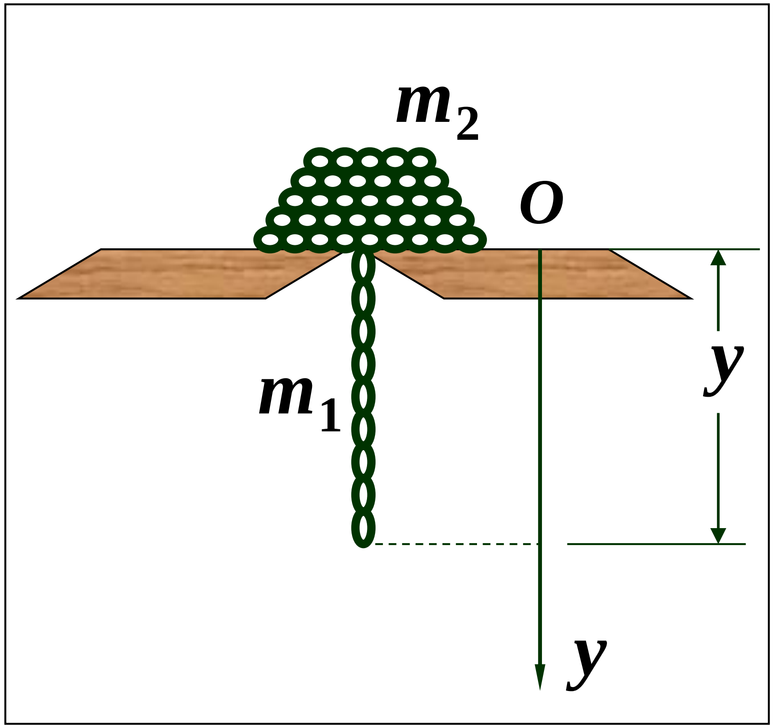
飞船在尘埃中飞行时间越长,速度就越慢

2. $Fdt = mv_0 - m_0 v_0 = (m_0 + dm)\cdot v_0 - m_0 v_0 = dmv_0$

$$F = \frac{dm}{dt} v_0 = \frac{\rho s v_0 dt}{dt} v_0 = \rho s v_0{}^2$$

【例 15】一柔软链条长为 l, 单位长度的质量为 λ. 链条放在桌上, 桌上有一小孔, 链条一端由小孔稍伸下,其余部分堆在小孔周围. 由于某种扰动,链条因自身重量开始落下 .求链条下落速度与落下距离之间的关系 . 设链与各处的摩擦均略去不计,且认为链条软得可以自由伸开 .

解　以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统,建立如图坐标



设链与各处的摩擦均略去不计,且认为链条软得可以自由伸开 . $T=0$

则 $F^{\mathrm{ex}}=m_1 g=\lambda y g$

由质点系动量定理得 $F^{\mathrm{ex}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}p$

又 $\mathrm{d}p=\lambda\,\mathrm{d}(yv)$

$$\therefore\quad \lambda y g\,\mathrm{d}t=\lambda\,\mathrm{d}(yv)$$

则 $yg = \dfrac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$

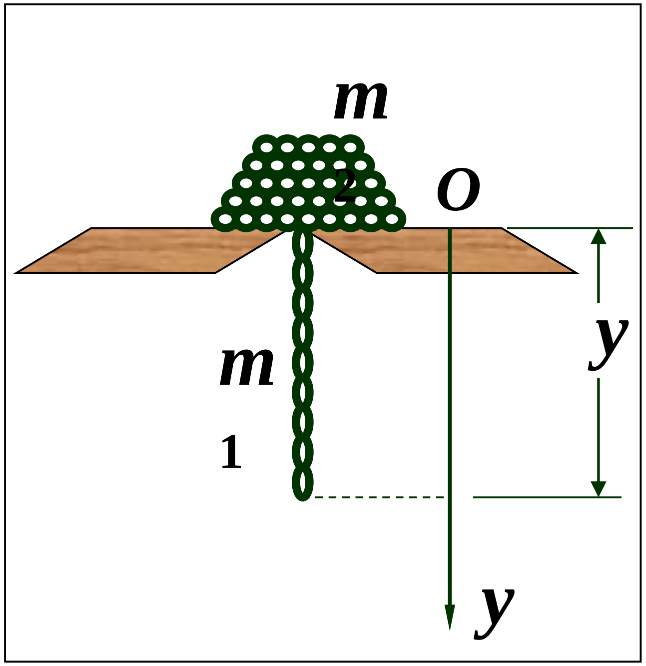
两边同乘以 $y\,\mathrm{d}y$ 则

$$y^2 g\mathrm{d}y = y\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t} = yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$g\int_0^y y^2\,\mathrm{d}y = \int_0^{yv} yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$\frac{1}{3}gy^3 = \frac{1}{2}(yv)^2$$

$$v = \left(\frac{2}{3}gy\right)^{1/2}$$



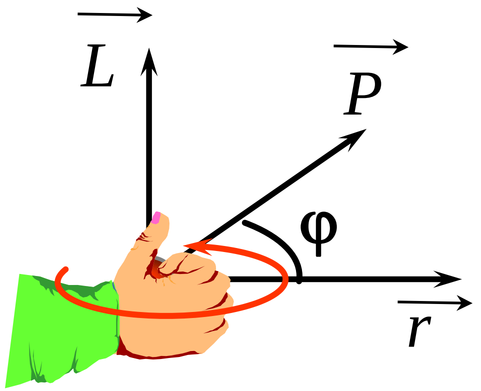
§2.7质点角动量定理和角动量守恒定理

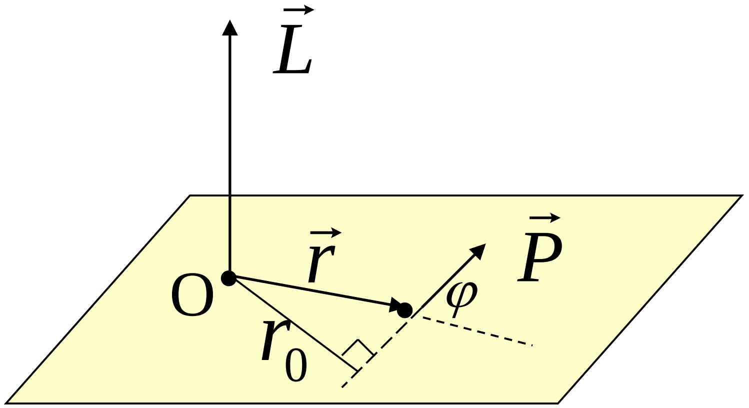
一、质点的角动量（动量矩）

定义：质点对固定点的矢径与动量之矢积

$$\vec{L} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小: $rp\sin\varphi$　方向:(右手)叉乘确定

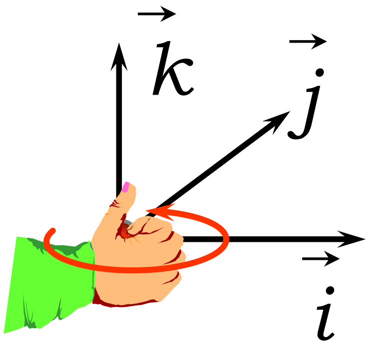




动量矩的本质是动量对某点(通常指定点)取矩,因此必须指明动量矩是相对于那一个定点取矩。

※ 质点作圆周运动：　对圆心的角动量：$L=mvR$

【例 16】$m=2Kg$ 的质点,位矢 $\vec{r}=t\vec{i}+2t^2\vec{j}\ (m)$,试确定$t=2$时,质点对坐标原点的动量矩



解: $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

$$\vec{r}=t\vec{i}+2t^2\vec{j}\quad\Rightarrow\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{i}+4t\vec{j}$$

$$\Rightarrow\vec{p}=m\vec{v}=2\vec{i}+8t\vec{j}$$

$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{cases}$$

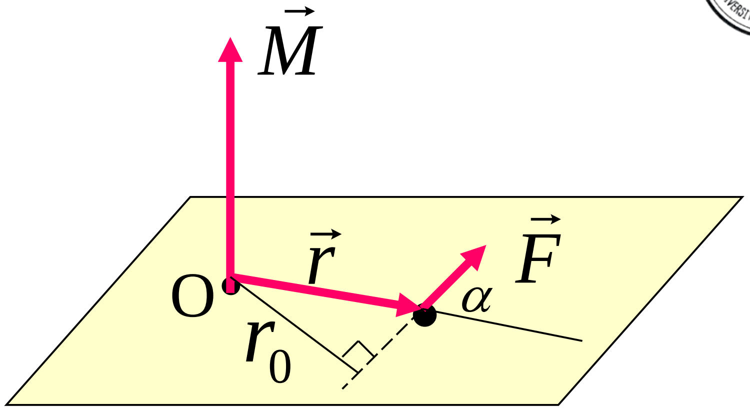
$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=(t\vec{i}+2t^2\vec{j})\times(2\vec{i}+8t\vec{j})$$

$$=2t\vec{i}\times\vec{i}+8t^2\vec{i}\times\vec{j}+4t^2\vec{j}\times\vec{i}+16t^3\vec{j}\times\vec{j}$$

$$=4t^2\vec{k}$$

$$\Rightarrow\vec{L}\Big|_{t=2}=4\times2^2\vec{k}=16\vec{k}\,(Kgm^2/s)$$

二、质点的角动量定理



（1）定理的微分式

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}=\vec{r}\times\vec{F}+\vec{v}\times(m\vec{v})$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}}=\vec{M}\text{ --力矩}$$

质点所受合外力矩等于其角动量矩对时间变化率

$$\vec{r}\times\vec{F}\left\{\begin{array}{l}\text{大小:}rF\sin\alpha=Fd=M\\ \text{方向:由(右手)叉乘确定}\end{array}\right.$$

（2）动量矩定理积分式

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}\Rightarrow \boxed{\int_0^t \vec{M}dt=\int_{\vec{L}_0}^{\vec{L}} d\vec{L}=\vec{L}-\vec{L}_0}\ (\text{其中：}\vec{J}_{\text{冲量矩}}\overset{def}{=}\int_0^t \vec{M}dt)$$

质点所受合外力冲量矩等于其动量矩的变化

力矩(冲量矩)是动量矩改变的原因!!!

三、质点角动量守恒定律

条件：$\vec{M}=0\begin{cases}\text{①质点不受外力或所受合外力为0}\\ \text{②外力通过固定点}\end{cases}$

则：$\vec{L}=\vec{L}_0$ ——恒矢量

若合外力矩为零，则质点的角动量守恒。