华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业（第5册）

班级____________学号_____________姓名_____________任课教师_____________

第九次作业

教学内容：5.1 孤立奇点　　5.2.1 留数的定义　　5.2.2 极点处留数的计算

1．填空题：

（1）函数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-(1+i)}$ 的全部孤立奇点是 $\underline{\dfrac{1}{2}\ln 2+i(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi),k=0,\pm1,\ldots\ldots}$

（2）$z=0$ 是 $\dfrac{1}{\sin z-z}$ 的___三____级极点.

（3）$z=-2$ 是 $\dfrac{z^3-8}{(z^2-4)^3}$ 的____三_级极点.

（4）若 $f(z)$ 在 z_0 点解析，z_0 是 $g(z)$ 的本性极点，z_0 是 $f(z)\cdot g(z)$ 的_本性_奇点,

是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的__本性__奇点.

（5）$\mathrm{Res}[z\cos\dfrac{1}{z},0]=\dfrac{1}{2}$

2．指出下列函数的奇点及其类型（不考虑∞点），若是极点，指出它的级.

(1) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$；

解：由 $z^n+1=0, z^n=-1,$ 得 $z_k=e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}(k=0,1,\cdots,n-1)$ 为原式一级极点。

(2) $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$

解 1：$\ln(1+z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{n+1}}{n+1}, 0<|z|<1$，$\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n+1}$ 无负幂项，故 $z=0$

为其可去奇点。

解 2：$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{(1+z)}=1$，故 $z=0$ 为可去奇点。

(3) $e^{\frac{z}{1-z}}$

解：由于 $e^{\frac{z}{1-z}}=e^{\frac{z-1+1}{1-z}}=e^{-1}e^{\frac{1}{1-z}}=\dfrac{1}{e}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-1)^n}$，所以 $z=1$ 为本性奇点。

(4) $\dfrac{\sin z}{z^3}$；

解：$z=0$ 为 $\sin z$ 的一级零点，而 $z=0$ 为 z^3 的三级零点，故 $z=0$ 为 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点。

$\lim\limits_{z\to 0}z^2\dfrac{\sin z}{z^3}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1\neq 0$，故 $z=0$ 为 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点。

(5) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$；

解：因 $e^z-1=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(n+1)!}=z(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots)$, 故 $z=0$ 为 $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$ 的三级极点，而

$z=2k\pi i, k=\pm1,\pm2,\cdots$ 均为一级极点。

(6) $\dfrac{e^z\sin z}{z^2}$

解：由于 $\dfrac{e^z\sin z}{z^2}=\dfrac{e^z(z-\frac{z^3}{3!}+\ldots.)}{z^2}=\dfrac{e^z(1-\frac{z^2}{3!}+\ldots)}{z}$

所以 $\lim\limits_{z\to 0}z\cdot\dfrac{e^z\sin z}{z^2}=1$，因此 $z=0$ 是一级极点

3 证明：如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 级零点，那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

证明：z_0 是 $f\left(z\right)$ 的 $m\left(m>1\right)$ 级零点，可设 $f\left(z\right)=\left(z-z_0\right)^m\varphi\left(z\right)$，

其中 $\varphi\left(z\right)$ 在 z_0 点解析，且 $\varphi'\left(z_0\right)\neq 0$，

$$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)$$

令 $\phi(z)=m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)$，

则 $f'(z)=(z-z_0)^{m-1}\phi(z)$，

因为 $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，所以 $\phi(z)$ 也在 z_0 点解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$，所以

$\phi(z_0)=m\varphi(z_0)\neq 0$，即 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

4 求下列函数在各有限奇点的留数.

(1) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$；

解：$\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}=\dfrac{1}{z^4}\left(-2z-\dfrac{4z^2}{2!}-\dfrac{8z^3}{3!}-\cdots\right)$

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),0\right]=c_{-1}=-\frac{4}{3}；$$

(2) $\dfrac{\cos z}{z-i}$；

解：$\mathrm{z}=\mathrm{i}$ 为一级极点

$$\mathrm{Res}[\frac{\cos z}{z-i},i]=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\cos z}{z-i}=\cos i=\cosh 1$$

(3) $\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$；

解：$\mathrm{z}=\pm\mathrm{i}$ 为三级极点

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{(1+z^2)^3},i]=\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}[(z-i)^3\frac{1}{(1+z^2)^3}]=\frac{-3i}{16}$$

$$\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{(1+z^2)^3},-i]=\lim_{z\to -i}\frac{d^2}{dz^2}[(z+i)^3\frac{1}{(1+z^2)^3}]=\frac{3i}{16}$$

(4) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$；

解：$z^2\sin\dfrac{1}{z}=z^2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,z^{2n+1}}$，

$$\mathrm{Re}\,s\left[z^2\sin\frac{1}{z},0\right]=c_{-1}=-\frac{1}{6}$$

5. 判断$e^{z+\frac{1}{z}}$.的孤立奇点的类型，并求其留数.

解：函数$e^{z+\frac{1}{z}}$有孤立奇点$0,\infty$，而且在$0<|z|<+\infty$内有如下展开式：

$$e^{z+\frac{1}{z}}=e^z e^{\frac{1}{z}}=(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots)$$
$$=\cdots+\{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}+\cdots\}\frac{1}{z}+\cdots$$

所以$\mathrm{Re}\,s[e^{z+\frac{1}{z}},0]=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$

$$\mathrm{Re}\,s[e^{z+\frac{1}{z}},\infty]=-\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$$

6. 设$\varphi(z)$在z_0解析，z_0为$f(z)$的一级极点，且$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),z_0\right]=A$，证明：

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z)\varphi(z),z_0\right]=A\varphi(z_0)$$

证明：因为z_0为$f(z)$的一级极点，设$f(z)=\dfrac{g(z)}{z-z_0}$，$g(z)$在z_0解析，$g(z_0)\neq 0$

所以$\mathrm{Re}\,s\left[f(z),z_0\right]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\dfrac{g(z)}{z-z_0}=g(z_0)=A$

又由于$\varphi(z)$在z_0解析所以z_0为$f(z)\varphi(z)$的一级极点。

$$\mathrm{Re}\,s\left[f(z)\varphi(z),z_0\right]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)\varphi(z)}{z-z_0}=A\varphi(z_0)$$

7．已知$z=0$是函数$f(z)$的n级极点，证明$\mathrm{Re}\,s[\dfrac{f'(z)}{f(z)},0]=-n.$

证明：设$f(z)=z^{-n}g(z)$, $g(z)$在$z=0$解析，且$g(0)\neq 0$，于是

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-nz^{-n-1}g(z)+z^{-n}g'(z)}{z^{-n}g(z)}=\frac{-n}{z}+\frac{g'(z)}{g(z)}$$

$\frac{g'(z)}{g(z)}$在 $z=0$解析，故 $\mathrm{Re}\,s[\frac{f'(z)}{f(z)},0]=-n.$

第十次作业

教学内容　5.2.3 留数定理；5.2.4 函数在无穷远点的留数

1．填空题

（1） $\cos z-\sin z$ 在 $z=\infty$ 的留数为_0__.

(2) $\frac{2z}{3+z^2}$ 在 $z=\infty$ 的留数为__-2____.

(3) $e^{\frac{1}{z^2}}$ 在 $z=\infty$ 的留数为__0____.

(4) $\frac{e^z}{z^2-1}$ 在 $z=\infty$ 的留数为 $i\sin i$.

2 利用留数定理计算下列积分.

(1) $\oint_C \frac{1}{1+z^4}dz,\quad C: x^2+y^2=2x;$

解：被积函数有四个一级极点，$z_k=e^{\frac{2k\pi+\pi}{4}i}(k=0,1,2,3)$ 其中只有 $z_0=e^{\frac{\pi}{4}i},z_3=e^{\frac{7}{4}\pi i}$ 在 C 内

$$\oint_C \frac{1}{1+z^4}dz=2\pi i[\mathrm{Re}\,s(\frac{1}{1+z^4},e^{\frac{\pi}{4}i})+\mathrm{Re}\,s(\frac{1}{1+z^4},e^{\frac{7}{4}\pi i})];$$

$$\begin{aligned}&=2\pi i[\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}}+\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{7}{4}\pi i}}]\\&=2\pi i[-\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)+\frac{\sqrt{2}}{8}(i-1)]\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.\end{aligned}$$

(2) $\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz,\quad C:|z|=4;$

解：被积函数有三个一级极点，$z=1, z=\pm 3i$，且都在 C 内

$$\oint_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz, \quad = 2\pi i[\mathrm{Res}(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)},1)+\mathrm{Res}(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)},3i)$$

$$+\mathrm{Res}(\frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)},-3i)]$$

$$=2\pi i[\lim_{z\to 1}\frac{3z^3+2}{z^2+9}+\lim_{z\to 3i}\frac{3z^3+2}{(z-1)(z+3i)}+\lim_{z\to -3i}\frac{3z^3+2}{(z-1)(z-3i)}]$$

$$=2\pi i[\frac{1}{2}+\frac{2-81i}{-18-6i}+\frac{2+18i}{-18+6i}]=6\pi i$$

(3) $\oint_C \frac{\sin z}{z}dz, \quad C:|z|=\frac{3}{2}$;

解：$f(z)=\frac{\sin z}{z}$，$\lim_{z\to 0} f(z)=1$，所以 $z=0$ 是 $\frac{\sin z}{z}$ 的可去奇点，则

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z},0\right]=0，\oint_C \frac{\sin z}{z}dz=0$$

（4）$\oint_C \frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}dz, \quad C:|z-i|=1$;

解：被积函数在 C 内有一个三级极点 $z=i$。由留数定理

$$\oint_C \frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}dz = 2\pi i[\frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3},i]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz}[\frac{2}{(e+e^{-1})}\cdot(z-i)^3\cdot\frac{\cos z}{(z-i)^3}]$$

$$=\frac{2\pi i}{e+e^{-1}}[-\cos i]=-\pi i.$$

3 计算下列积分，C 为正向圆周：

(1) $\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}dz, \quad C:|z|=3$;

解：函数 $\frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}$ 在 $|z|=3$ 的外部，除 ∞ 点外没有其他奇点，故

$$\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}dz = -2\pi i \operatorname{Re}s\left[f(z),\infty\right] = 2\pi i \operatorname{Re}s\left[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$= 2\pi i \operatorname{Re}s\left[\frac{1}{z(1+5z^2)^3(1+z^4)^2},0\right] = 2\pi i$$

（2）$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{1+z} e^{\frac{1}{z}} dz.$

$$f(z) = \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} = z^2 \frac{1}{1+\frac{1}{z}} e^{\frac{1}{z}}$$

$$= z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right)$$

$$= z^2 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3z} + \frac{5}{24z^2} + \cdots \quad (1<|z|<\infty)$$

所以$\operatorname{Re}s\left[f(z),\infty\right] = -\frac{1}{3}$，

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz = -\frac{2}{3}\pi i$$

（3）$\oint_C \frac{2i}{z^2+2az-1}dz, a>1, C:|z|=1$

解：$|z|=1$内只有一个一级极点：$-a+\sqrt{a^2+1}$，

$$\oint_C \frac{2i}{z^2+2az-1}dz = 2\pi i \operatorname{Re}s\left[\frac{2i}{z^2+2az-1}, -a+\sqrt{a^2+1}\right]$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -a+\sqrt{a^2+1}} \frac{2i}{2z+2a}$$

$$= -\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}$$