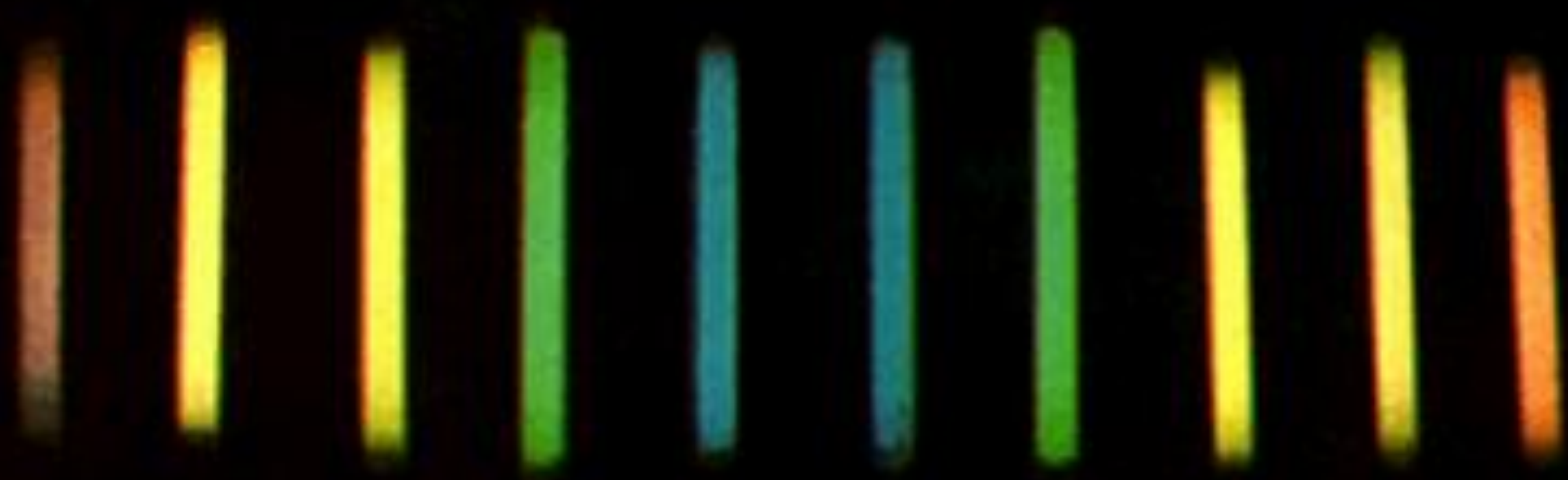


第十四章　　光 的 衍 射

第十四章

光的衍射

第十四章　光的衍射

- § 14.1 光的衍射现象 惠更斯–菲涅耳原理
- § 14.2 单缝的夫琅禾费衍射
- § 14.3 圆孔的夫琅禾费衍射　光学仪器分辨本领
- § 14.4 光栅衍射

教学基本要求

1 了解惠更斯—菲涅耳原理及它对光的衍射现象的定性解释.

2 理解用波带法来分析单缝的夫琅禾费衍射条纹分布规律的方法，会分析缝宽及波长对衍射条纹分布的影响.

3 理解光栅衍射公式，会确定光栅衍射谱线的位置，会分析光栅常数及波长对光栅衍射谱线分布的影响.

4 了解衍射对光学仪器分辨率的影响.

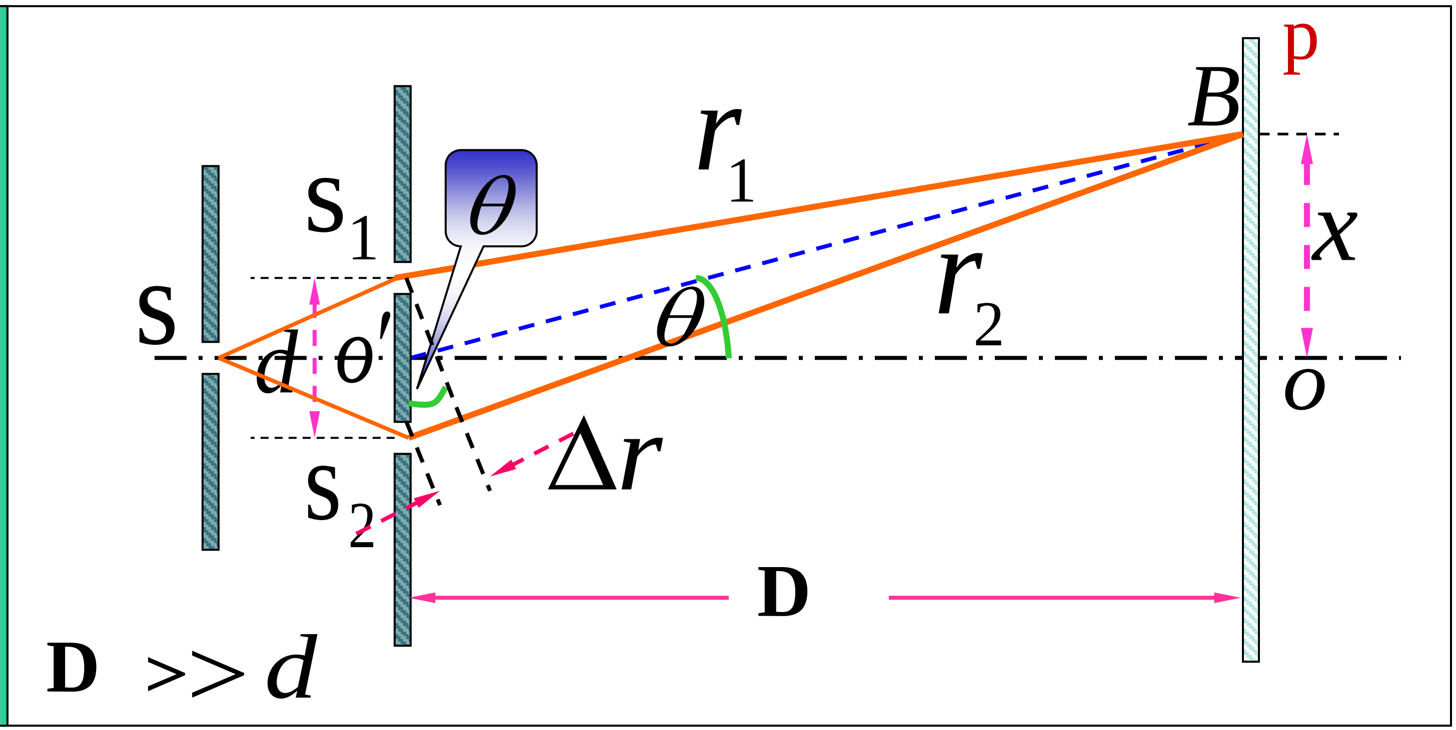
5 了解x射线的衍射现象和布拉格公式的物理意义.

第十四章　光的衍射

- § 14.1 光的衍射现象 惠更斯–菲涅耳原理
- § 14.2 单缝的夫琅禾费衍射
- § 14.3 圆孔的夫琅禾费衍射　光学仪器分辨本领
- § 14.4 光栅衍射

杨氏双缝干涉实验

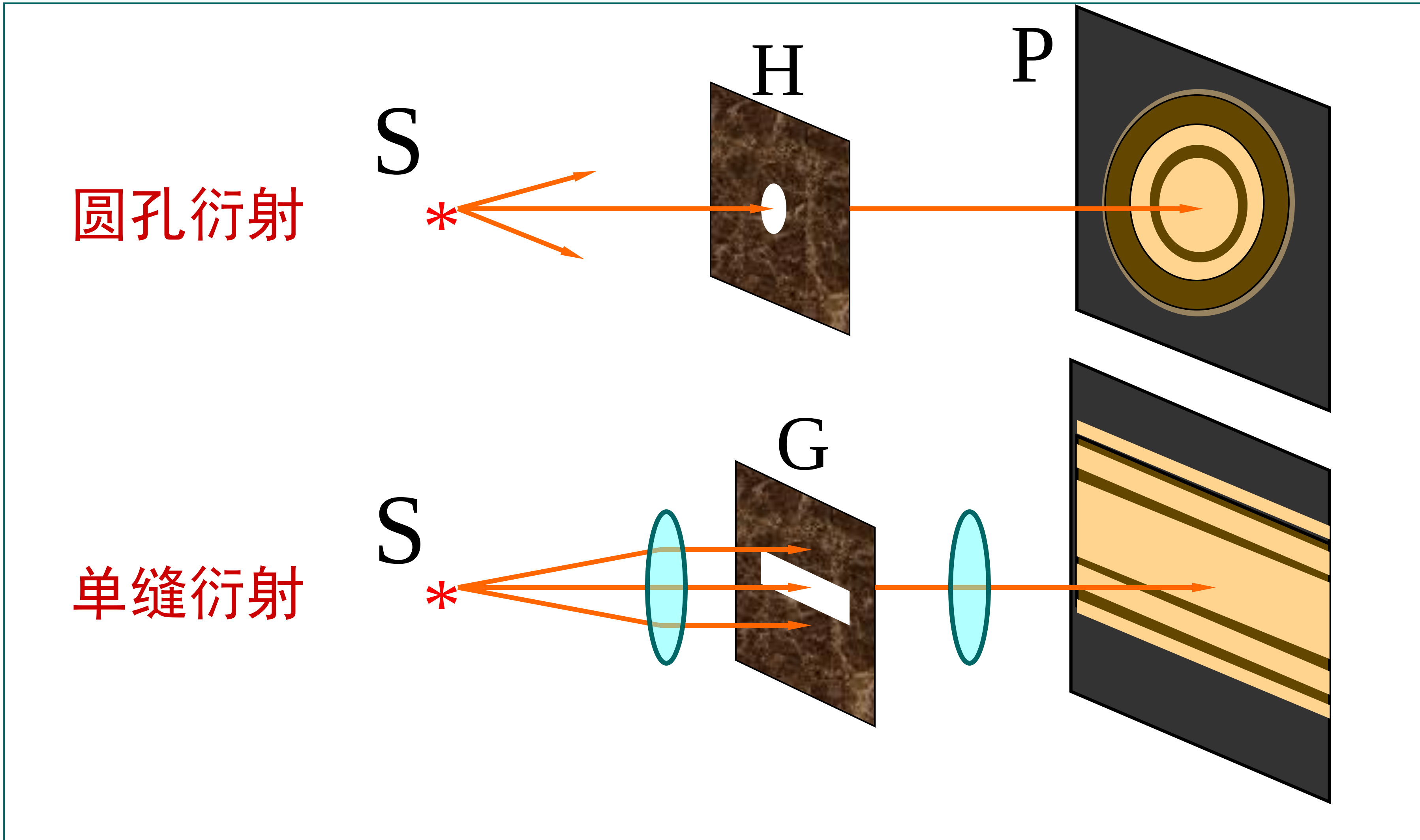
实验装置



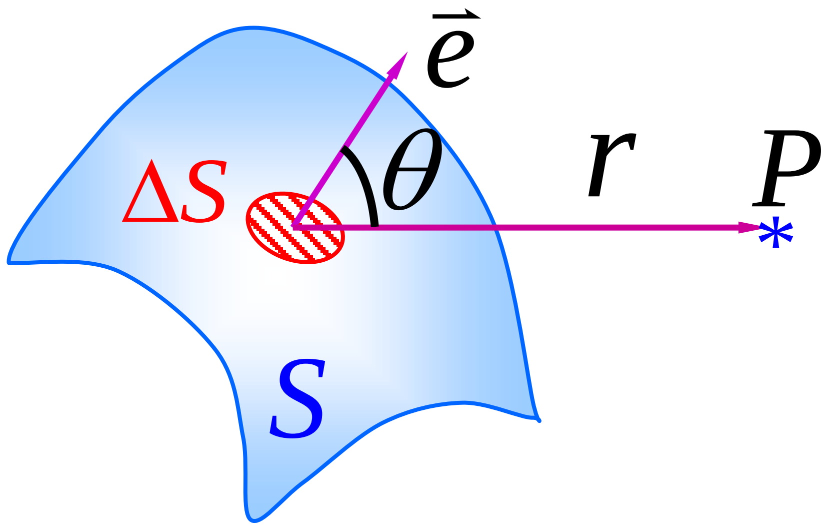
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

§ 14. 1　光的衍射现象　惠更斯–菲涅耳原理

一、光的衍射现象



二、惠更斯 — 菲涅尔原理



S： t 时刻波阵面

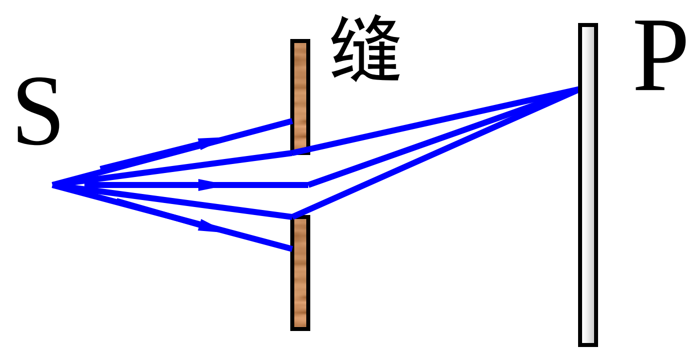
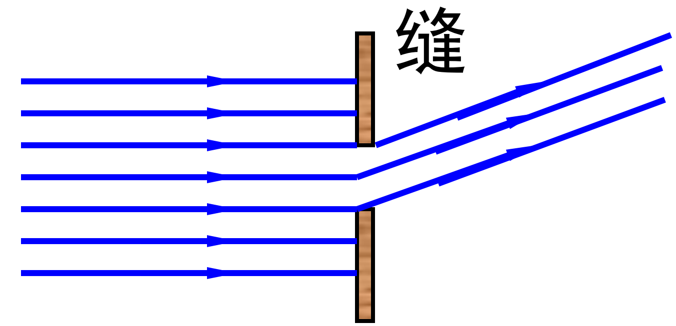
ΔS： 波阵面上面元

(子波波源)

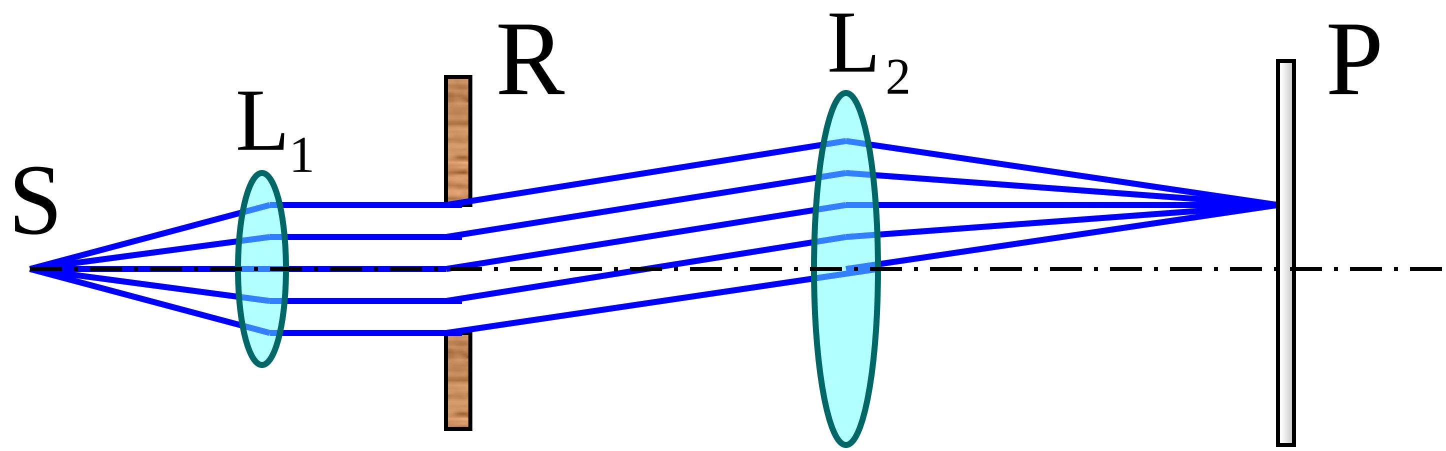
子波在 P 点引起的振动振幅 $\propto \dfrac{\Delta s}{r}$ 并与 θ 有关 .

菲涅尔指出 衍射图中的强度分布是因为衍射时，波场中各点的强度由各子波在该点的相干叠加决定. P 点振动是各子波在此产生的振动的叠加 .

三、菲涅尔衍射和夫琅禾费衍射

菲 涅 尔 衍 射	夫 琅 禾 费 衍 射
	
光源、屏与缝相距有限远	光源、屏与缝相距无限远

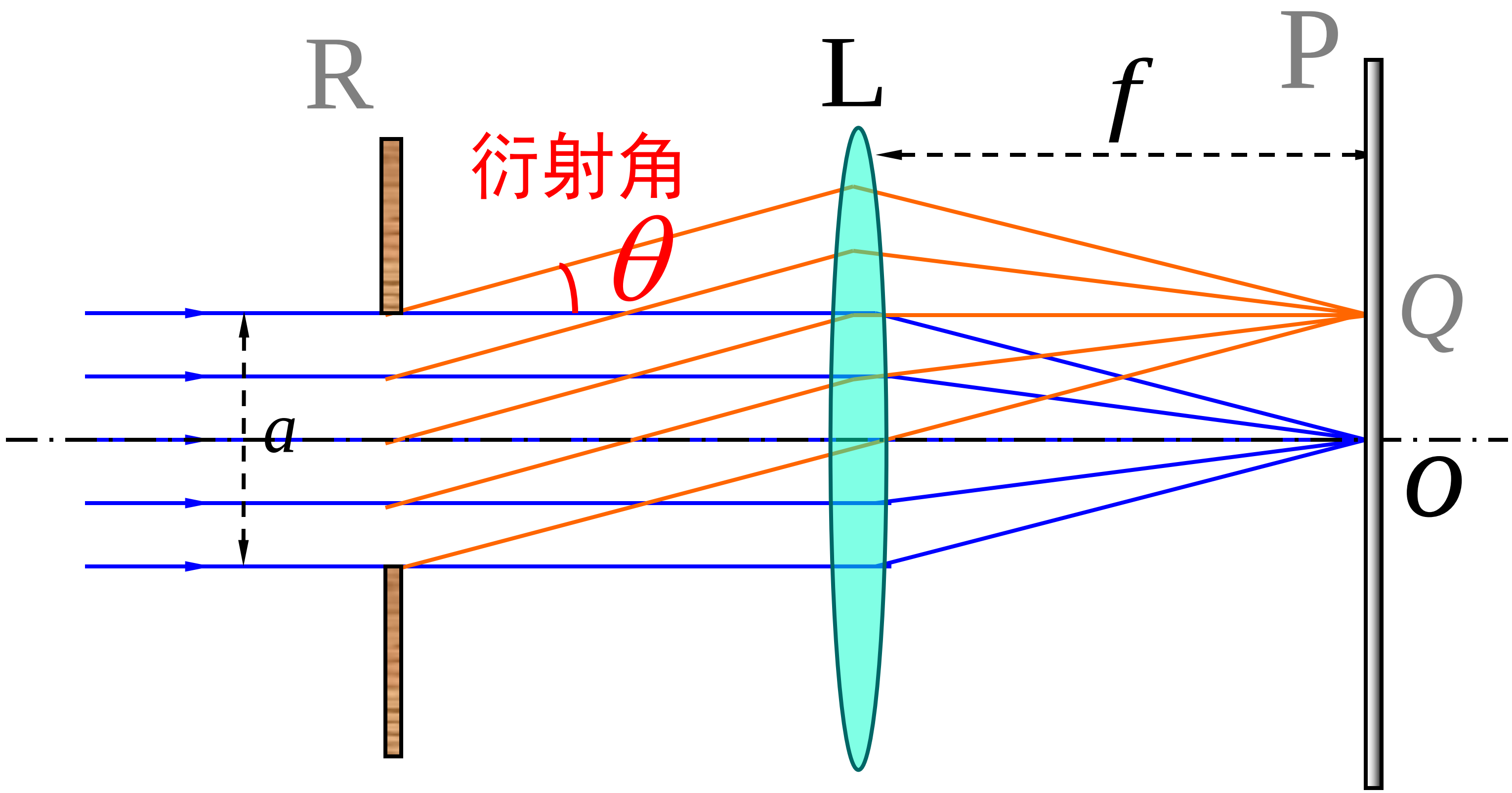
夫琅禾费衍射在实验中实现



14.2　单缝和圆孔的夫琅和费衍射

一、单缝衍射

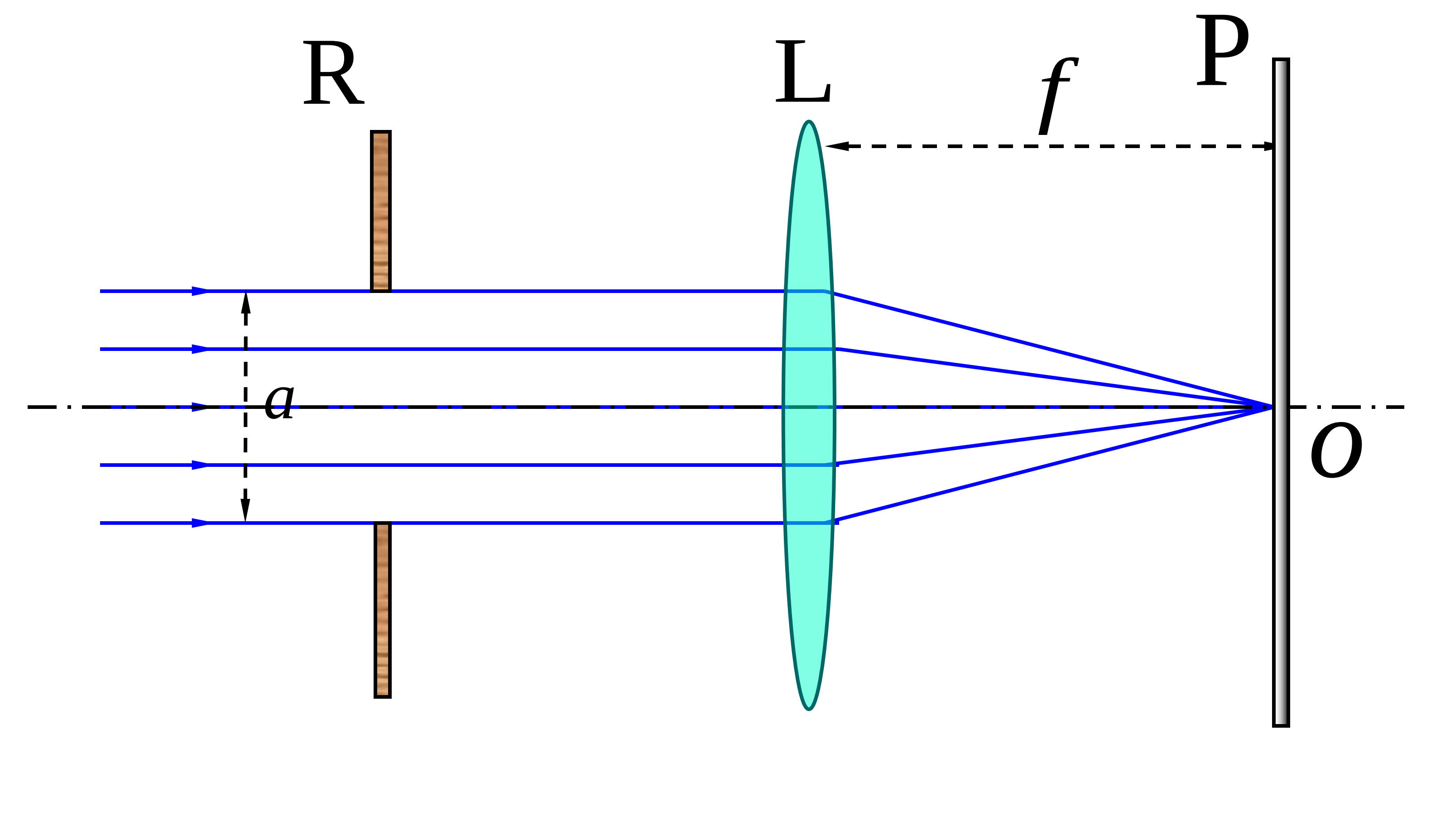
夫琅禾费单缝衍射



（衍射角 θ 向上为正，向下为负 .）

1. 对沿入射方向传播的各子波射线　无光程差，因此相互加强。所以O处出现亮纹——中央明纹

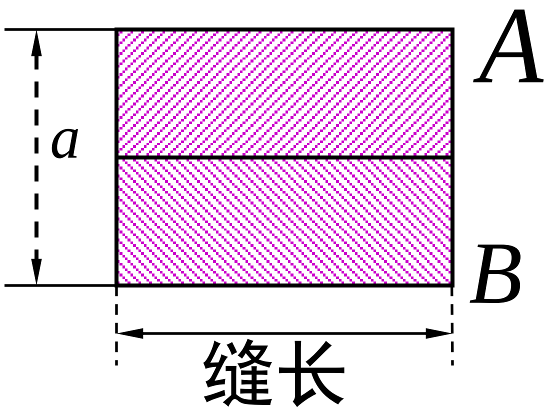
夫琅禾费单缝衍射



2. 对与入射方向成 θ 角传播的子波射线

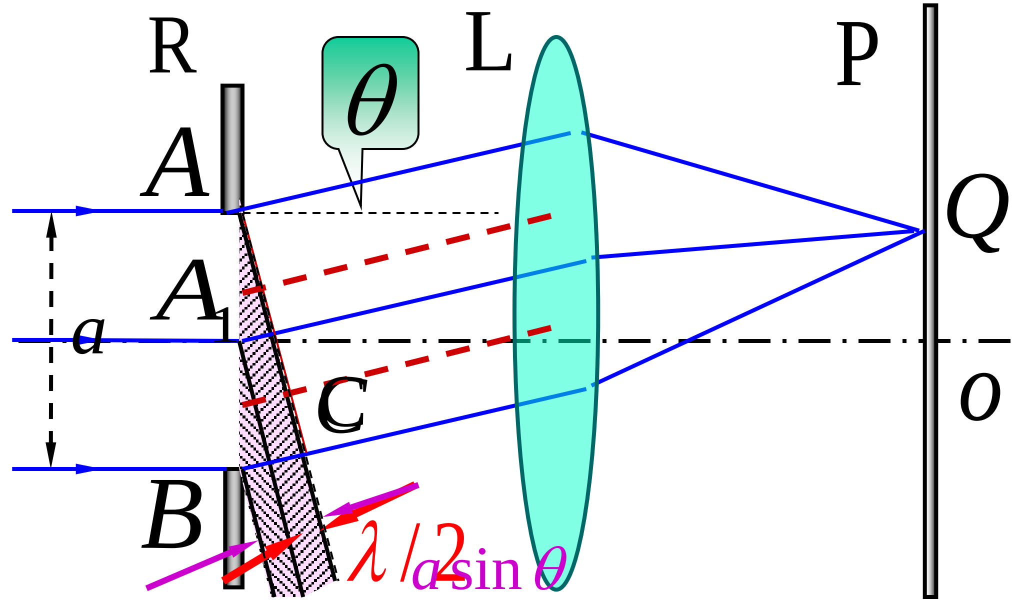
用菲涅尔半波带法,若

$$BC = a\sin\theta = \pm\lambda$$



设想分为2个半波带,

即将缝两等分



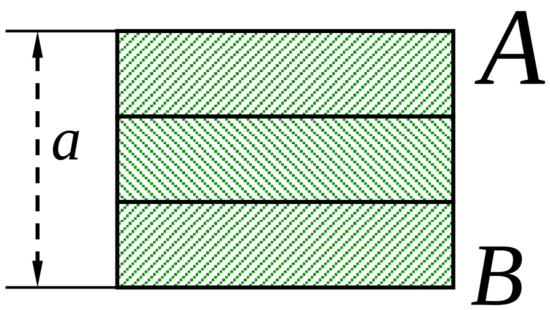
两带中各对应点发出的子波总是两两之间光程差为 $\frac{\lambda}{2}$

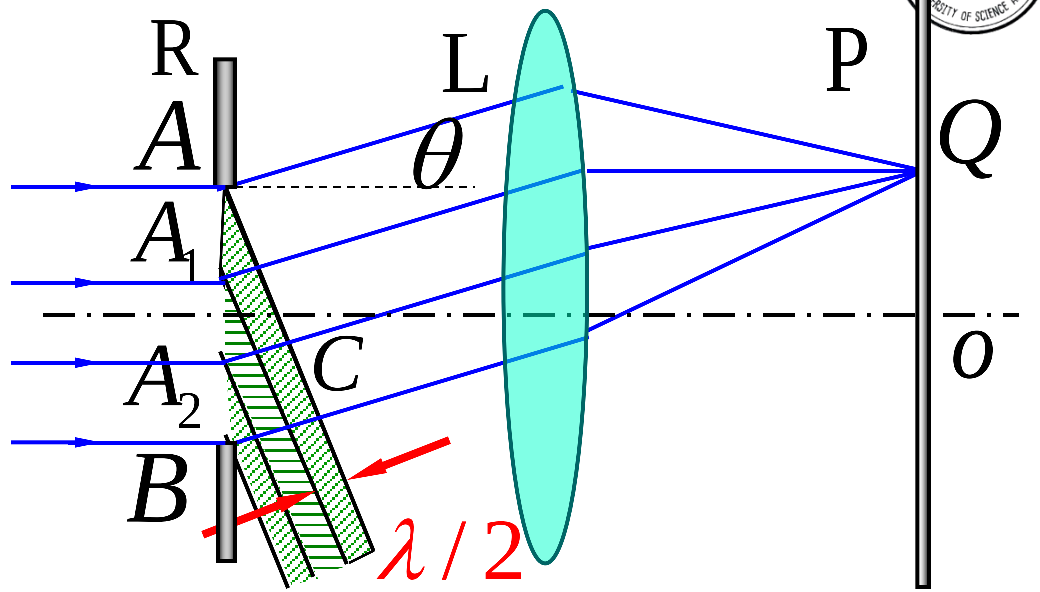
故Q点合成振幅为零

若 $a\sin\theta=\pm 3\lambda/2$

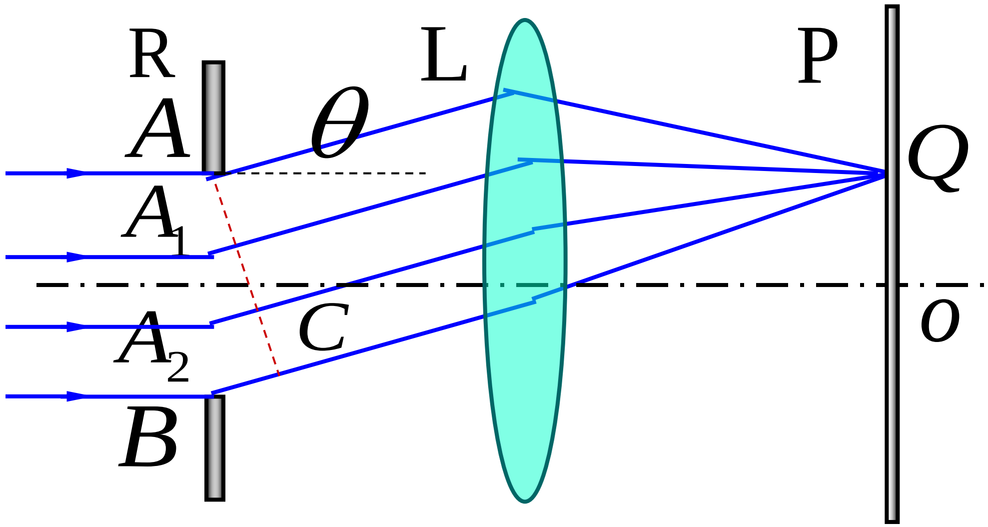
设想将缝三等分，即

分为三个半波带





其中两个相邻半波带在Q处合成相消，乘下一个带的合成加强——一级次最大



$$BC = a\sin\theta = \pm k\frac{\lambda}{2}$$

（k 个半波带）

$$a\sin\theta = 0$$ 中央明纹中心

$$a\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda$$ 干涉相消（暗纹） 偶数个半波带

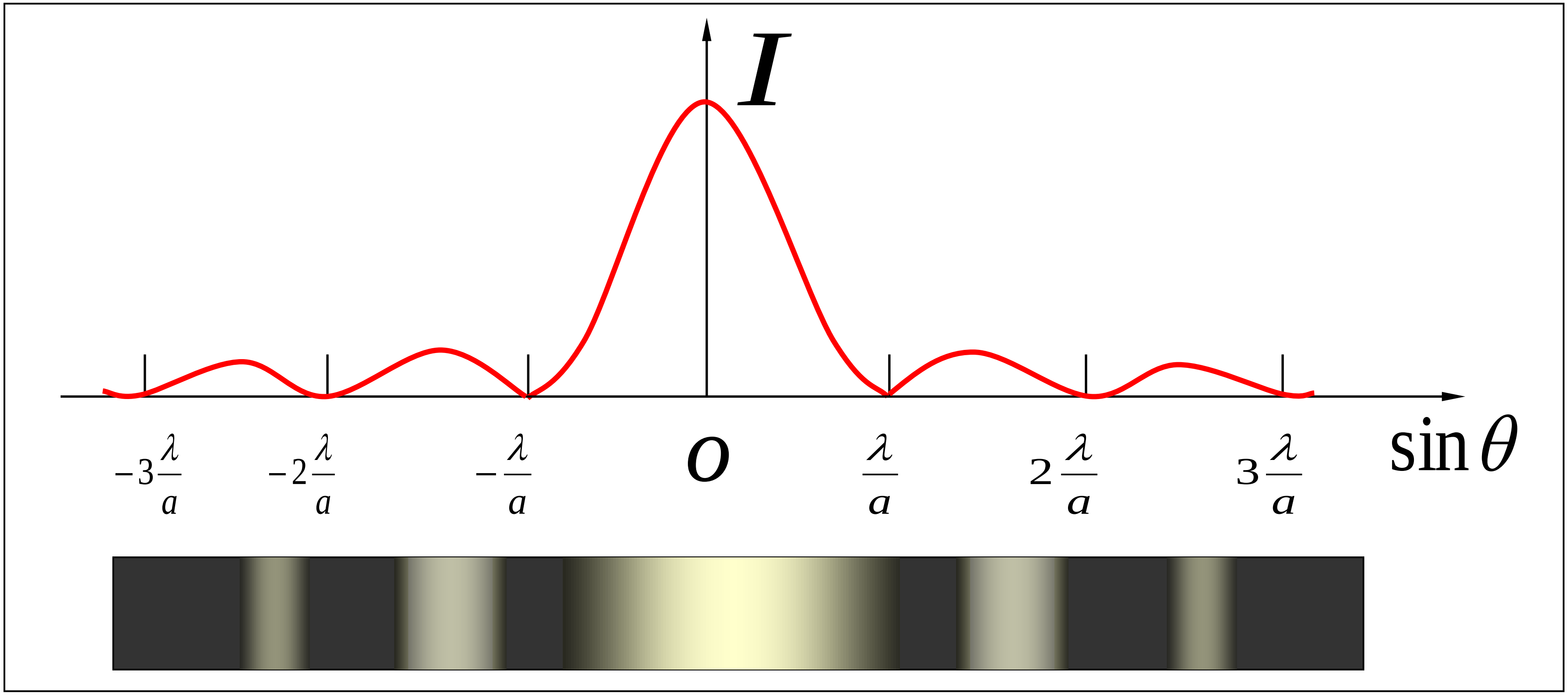
$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$ 干涉加强（明纹） 奇数个半波带

$$a\sin\theta \neq k\frac{\lambda}{2}$$ （介于明暗之间）$(k = 1,2,3,\cdots)$

二、单缝衍射的光强分布

$$a\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda \quad \text{干涉相消（暗纹）}$$

$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{干涉加强（明纹）}$$



讨 论

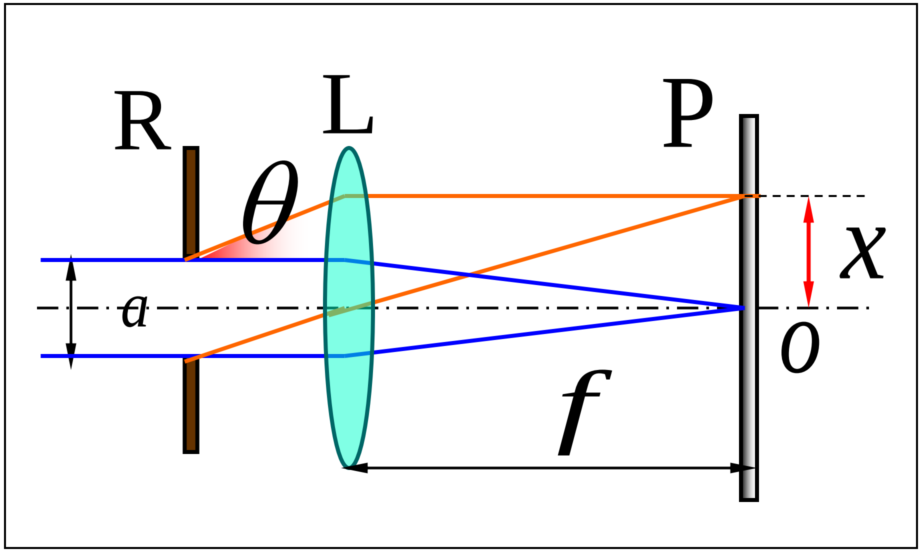
$$
\begin{cases}
a\sin\theta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} = \pm k\lambda & \text{干涉相消（暗纹）} \\
a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{干涉加强（明纹）}
\end{cases}
$$

条纹位置：当 θ 较小时，$x = \theta f$，一般 $x = f\,\mathrm{tg}\,\theta$，

（1）第一暗纹距中心的距离

第一暗纹的衍射角

$$\theta_1 = \arcsin\frac{\lambda}{a}$$



$$x_1 = \theta_1 f = \frac{\lambda}{a} f$$

第一暗纹的衍射角 $\theta_1 = \arcsin\frac{\lambda}{a}$ 半角宽度

◆ λ 一定 $\begin{cases} a \text{ 增大}, \theta_1 \text{ 减小} \quad \frac{\lambda}{a} \Rightarrow 0, \theta_1 \Rightarrow 0 \\ a \text{ 减小}, \theta_1 \text{ 增大} \quad a \Rightarrow \lambda, \theta_1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$

光直线传播

衍射最大

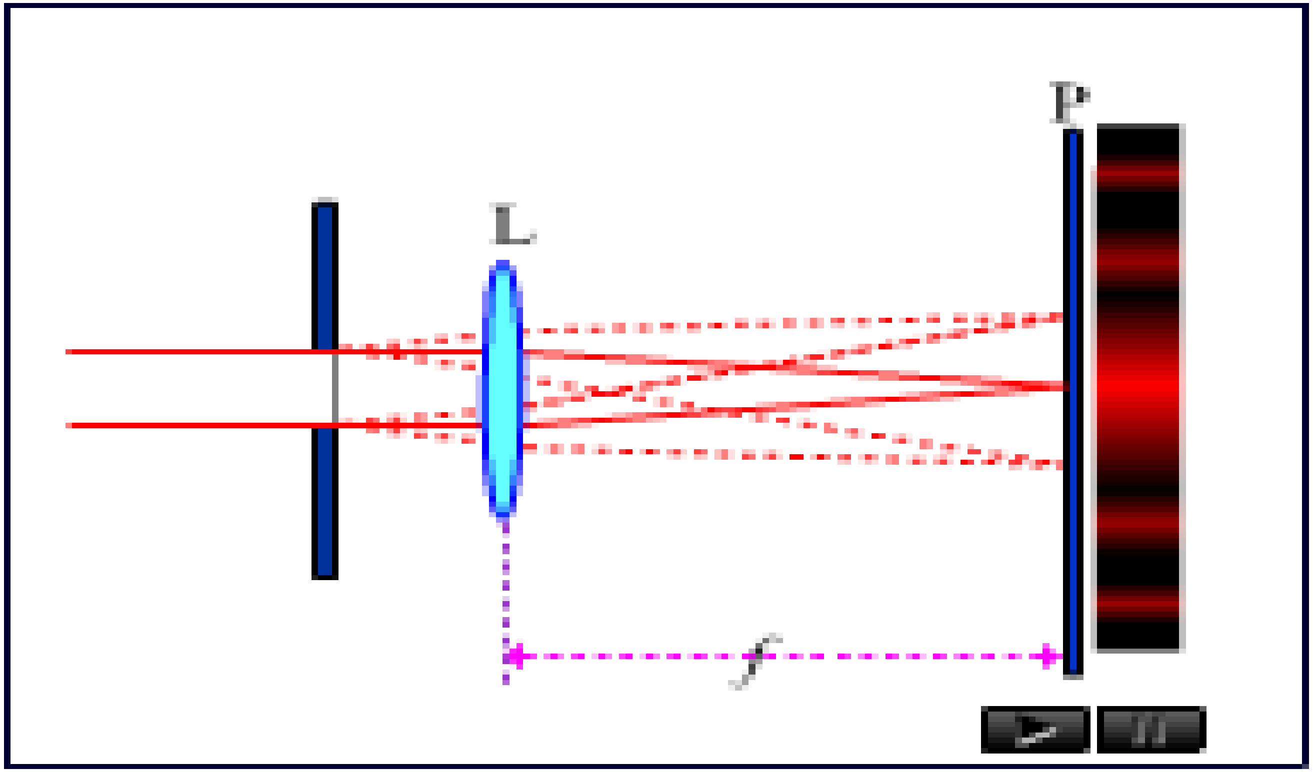
◆ a 一定, λ 越大, θ_1 越大，衍射效应越明显.

（2）中央明纹 （$k=1$ 的两暗纹间）

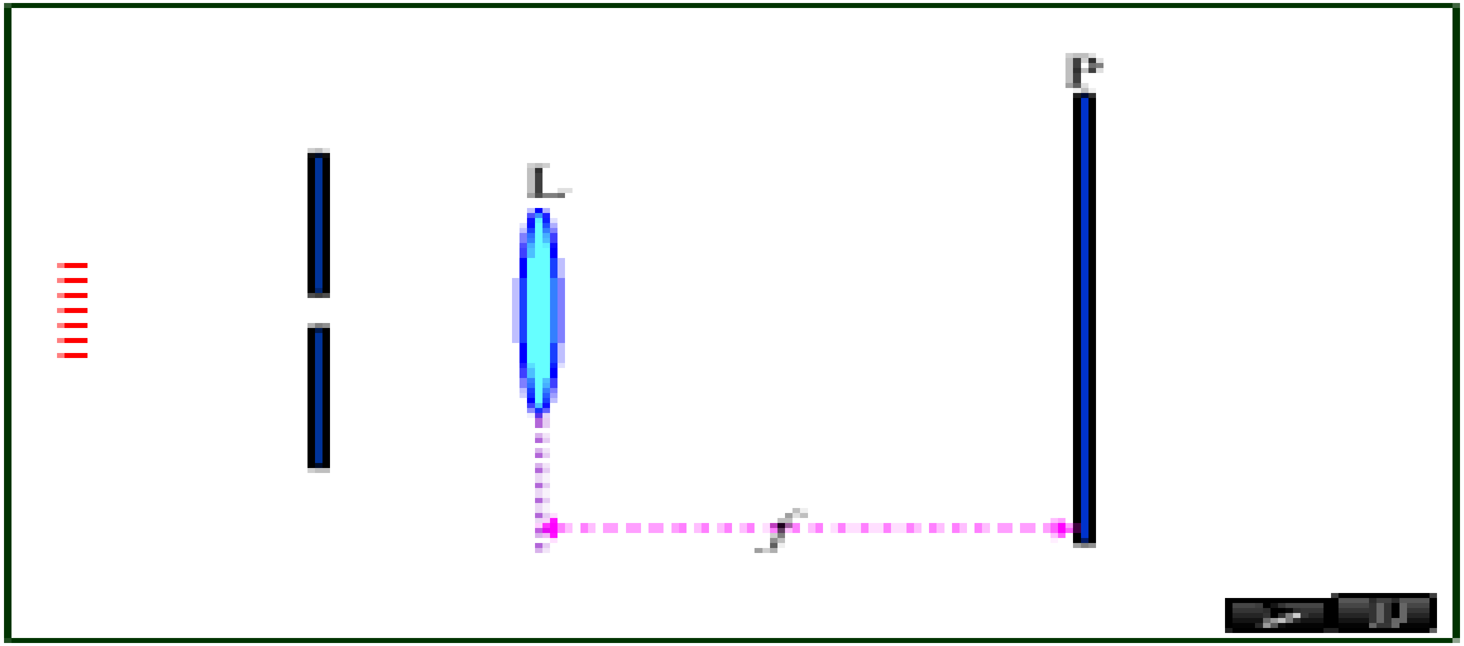
角范围 $-\frac{\lambda}{a} < \sin\theta < \frac{\lambda}{a}$ 线范围 $-\frac{\lambda}{a}f < x < \frac{\lambda}{a}f$

中央明纹的宽度 $l_0 = 2x_1 \approx 2\frac{\lambda}{a}f$

◆ 单缝宽度变化，中央明纹宽度如何变化？



◆ 入射波长变化，衍射效应如何变化？



λ越大，θ_1 越大，衍射效应越明显.

（3）条纹宽度（相邻条纹间距）

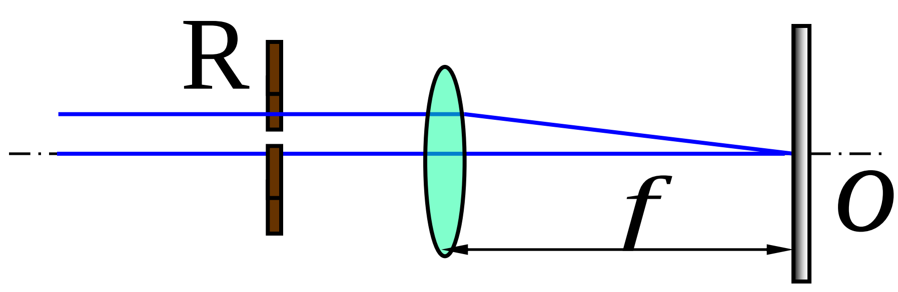
$$\begin{cases} a\sin\theta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} = \pm k\lambda & \text{干涉相消（暗纹）} \\ a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{干涉加强（明纹）} \end{cases}$$

$$l = \theta_{k+1} f - \theta_k f = \frac{\lambda f}{a}$$

除了中央明纹外的其它明纹、暗纹的宽度

（4）单缝衍射的动态变化

◆ 单缝上下移动，根据透镜成像原理衍射图不变 .



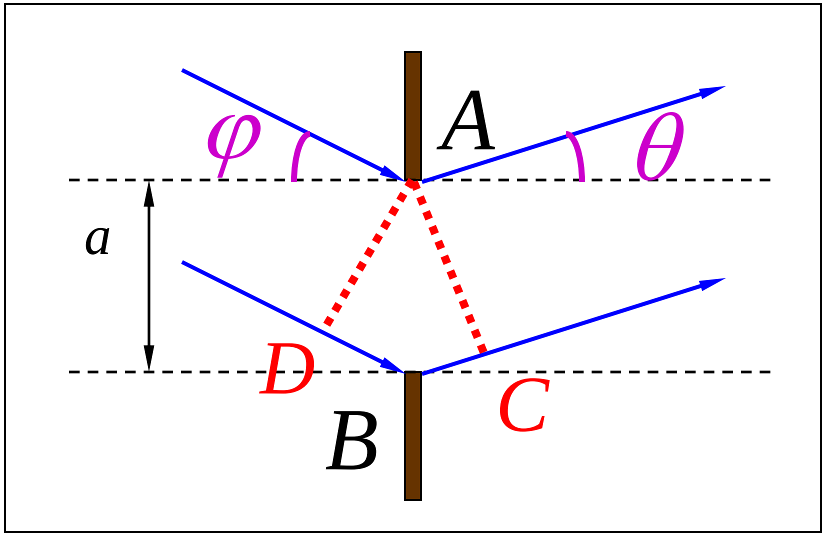
单缝上移，零级明纹仍在透镜光轴上.

（5）入射光非垂直入射时光程差的计算

$$\varDelta = DB + BC$$

$$= a(\sin\theta + \sin\varphi)$$

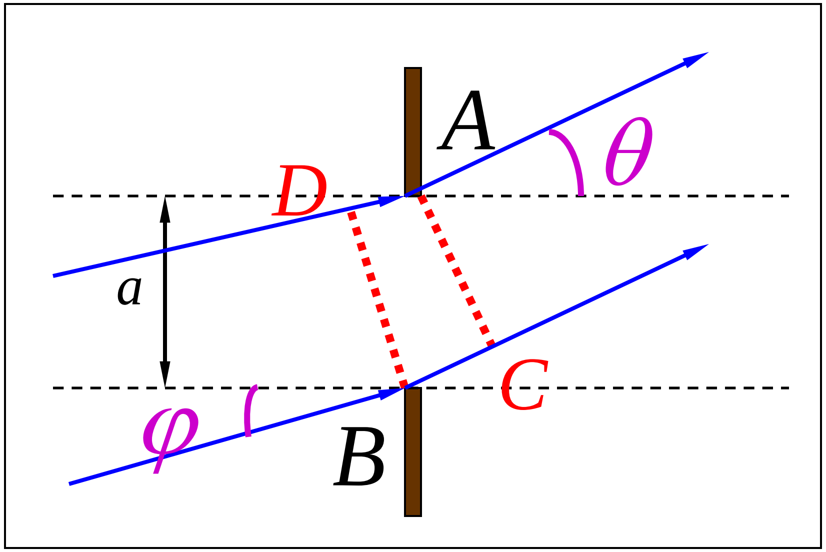
（中央明纹向下移动）



$$\varDelta = BC - DA$$

$$= a(\sin\theta - \sin\varphi)$$

（中央明纹向上移动）



【例 1】平行单色光垂直照射狭缝，$a=0.5\ mm$，$f=100\ cm$，离中央明纹中心$x=1.5\ mm$的P点处为一亮纹

求（1）入射光波长？

（2）P点条纹级数和该条纹对应的衍射角？

（3）对应 x 处，狭缝波面可分几个半波带？

（4）中央明纹宽度

[解]（1）单缝衍射明纹条件：$a\sin\varphi \approx a\dfrac{x}{f} = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

$$\therefore \lambda = \frac{2ax}{(2k+1)f} = \frac{1.5\times 10^{-4}}{2k+1}cm \qquad \begin{cases} k=1, \lambda = 500nm \\ k=2, \lambda = 300nm \end{cases}$$

可见光范围：$390nm \le \lambda \le 760nm \longrightarrow$ 入射光波长500nm

（2）P点明纹对应$k=1$：$\sin\varphi=\dfrac{3\lambda}{2a}=1.5\times10^{-3}$

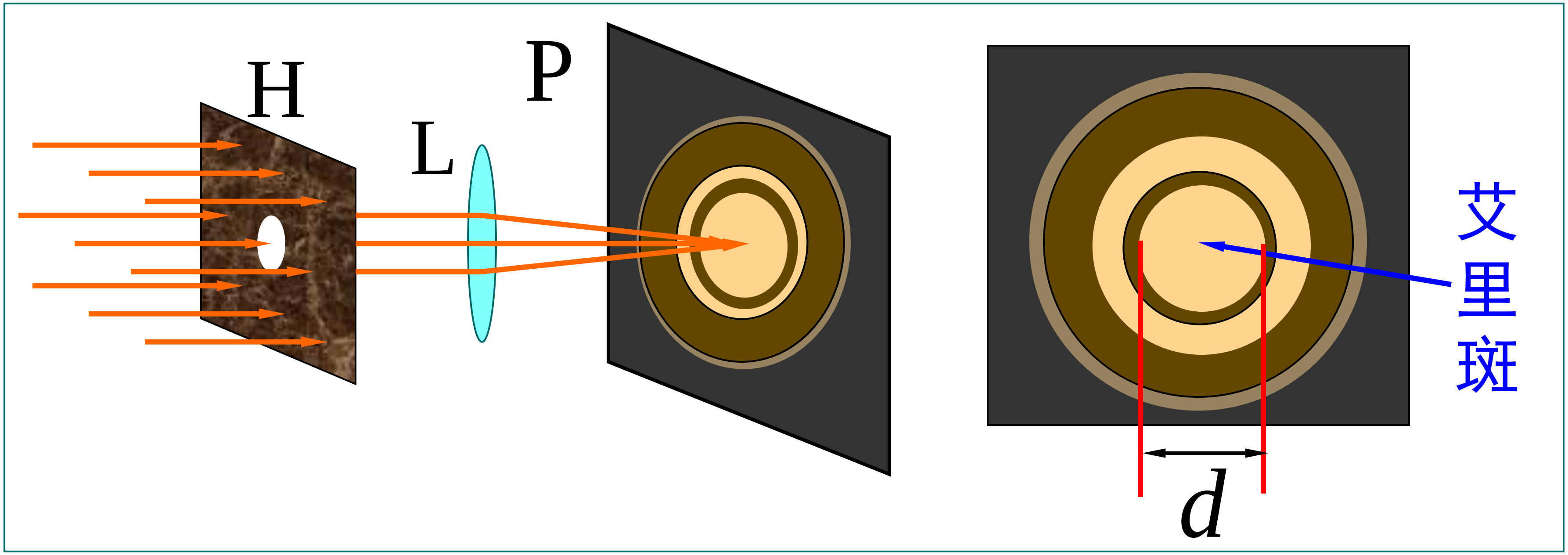
$\therefore\varphi=0.086^{0}$

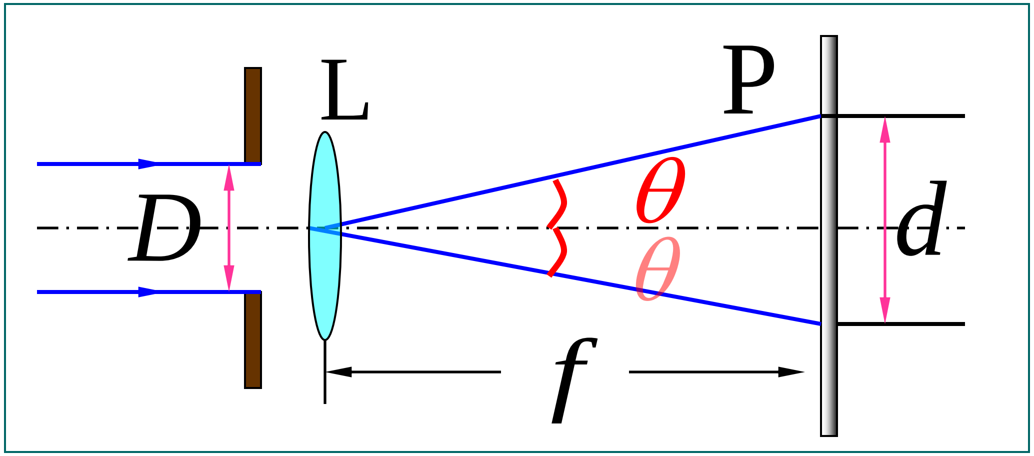
（3）波带数 = (2k+1)

k=1，单缝处波面可分3个半波带

（4）中央明纹宽度： $\Delta x_0=2\dfrac{\lambda f}{a}=2\times10^{-3}m=2mm$

三、圆孔衍射

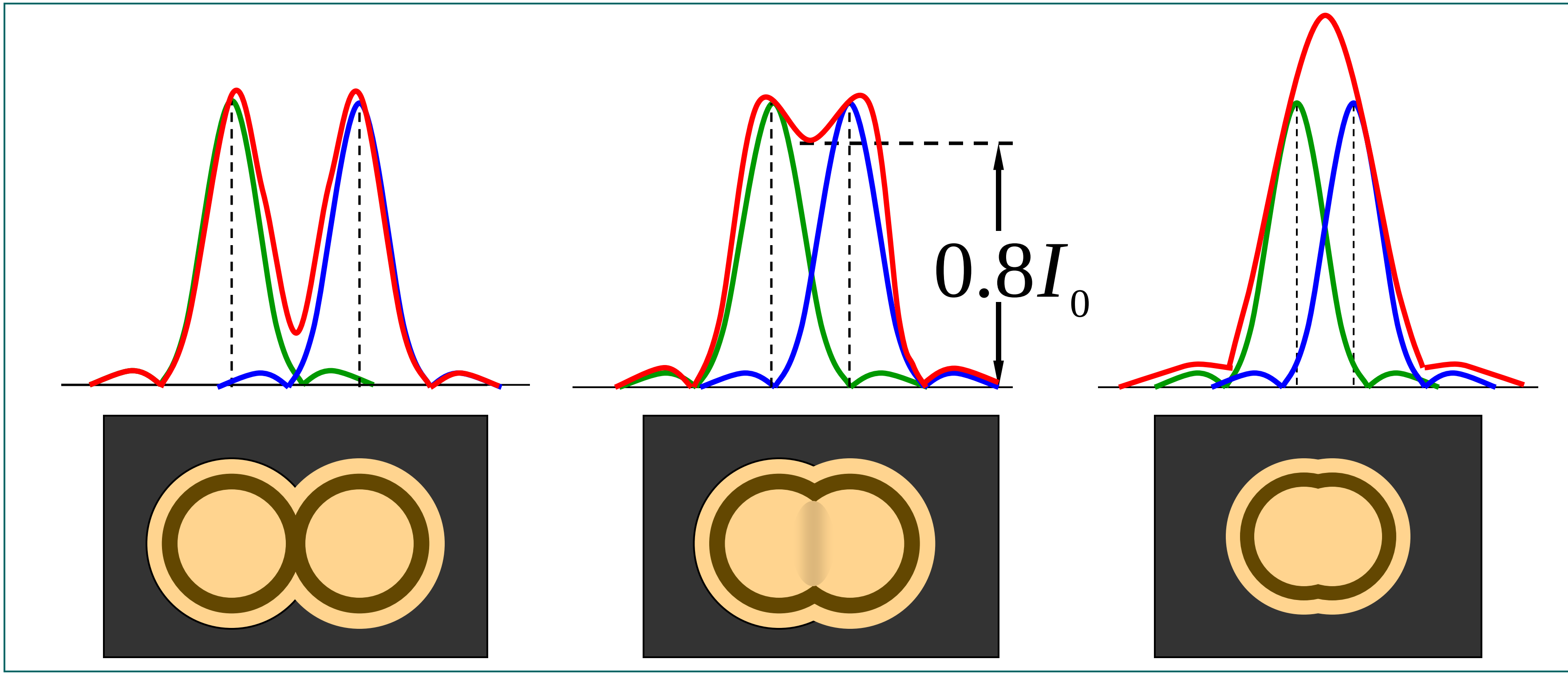




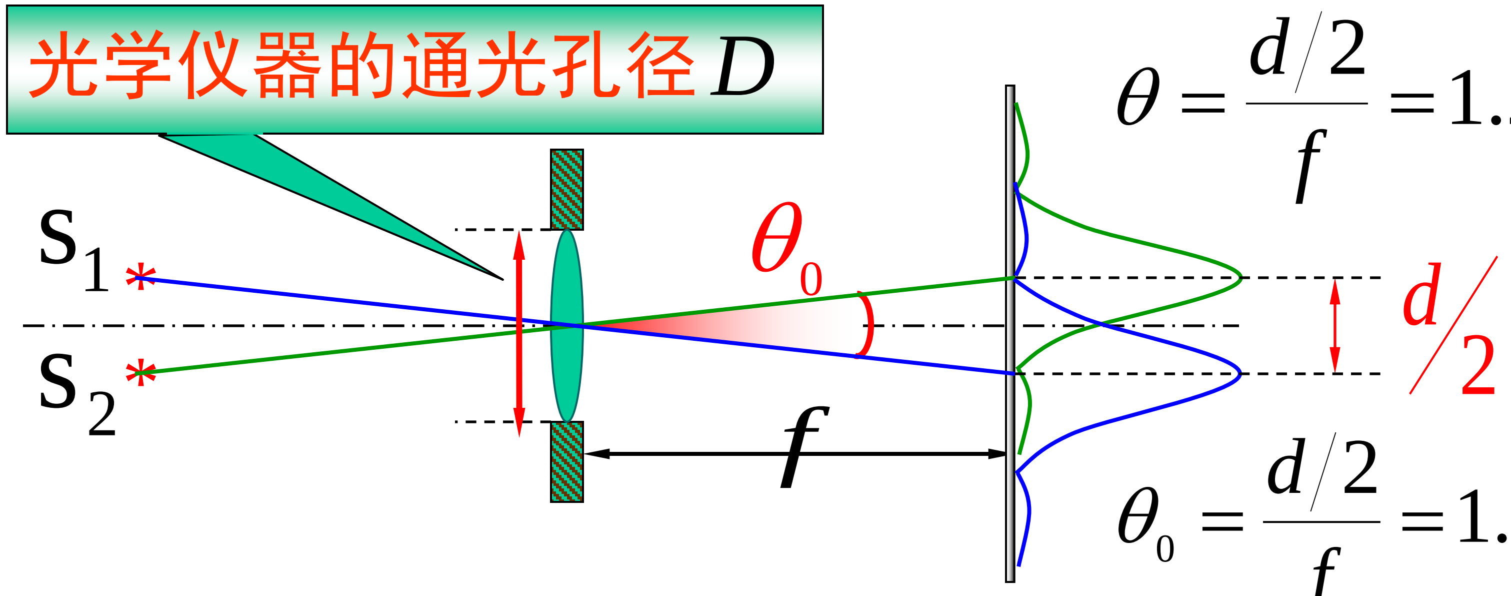
d ：艾里斑直径

$$\theta = \frac{d/2}{f} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

四、光学仪器的分辨率



对于两个强度相等的不相干的点光源（物点），一个点光源的衍射图样的主极大刚好和另一点光源衍射图样的第一极小相重合，这时两个点光源（或物点）恰为这一光学仪器所分辨.——瑞利判据



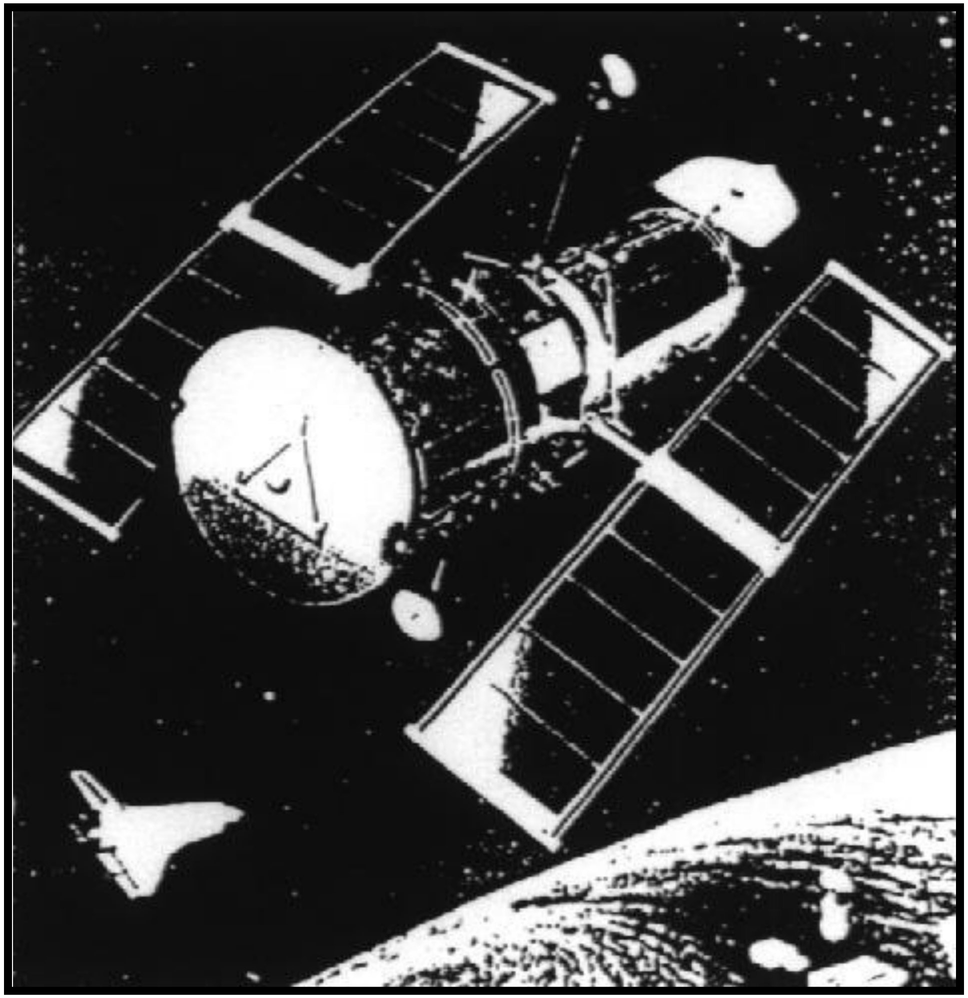
$$\theta = \frac{d/2}{f} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

$$\theta_0 = \frac{d/2}{f} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

最小分辨角 $\theta_0 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

光学仪器分辨率 $= \dfrac{1}{\theta_0} = \dfrac{D}{1.22\lambda} \propto D, \dfrac{1}{\lambda}$

1990 年发射的哈勃太空望远镜的凹面物镜的直径为2.4m， 最小分辨角 $\theta_0 = 0.1''$，在大气层外 615km 高空绕地运行，可观察130亿光年远的太空深处，发现了500 亿个星系 .



【例 2】设人眼在正常照度下的瞳孔直径约为3 mm，而在可见光中，人眼最敏感的波长为550nm，问

（1）人眼的最小分辨角有多大？

（2）若物体放在距人眼25cm（明视距离）处，则两物点间距为多大时才能被分辨？

解（1）

$$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D} = \frac{1.22\times 5.5\times 10^{-7}\,\mathrm{m}}{3\times 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

$$= 2.2\times 10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

（2）

$$d = l\theta_0 = 25\mathrm{cm}\times 2.2\times 10^{-4}$$

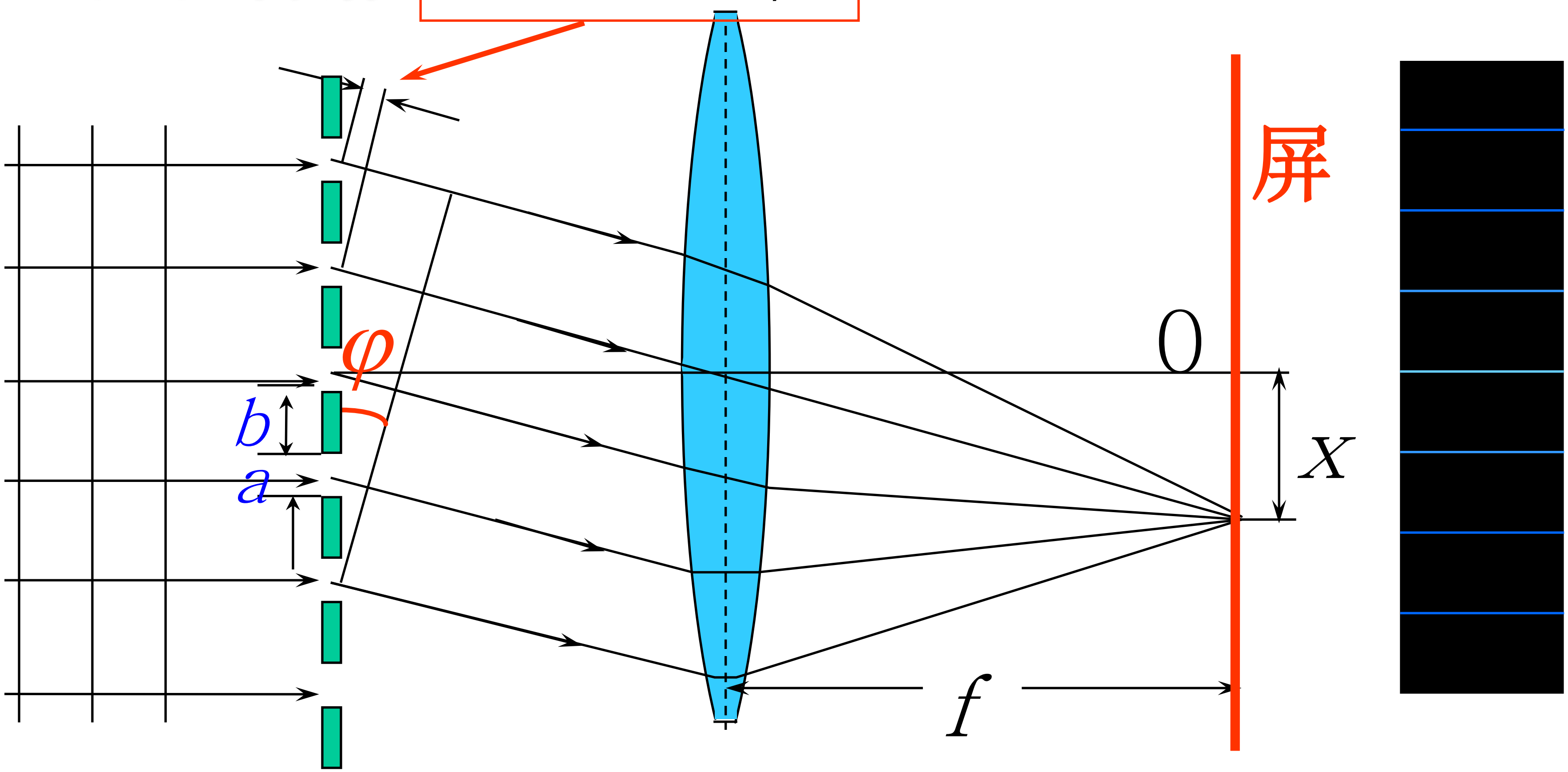
$$= 0.0055\mathrm{cm} = 0.055\mathrm{mm}$$

§ 14. 4 光 栅 衍 射

光栅:等宽*a*、等间距*b*,平行排列的狭缝所组成的光学器件.

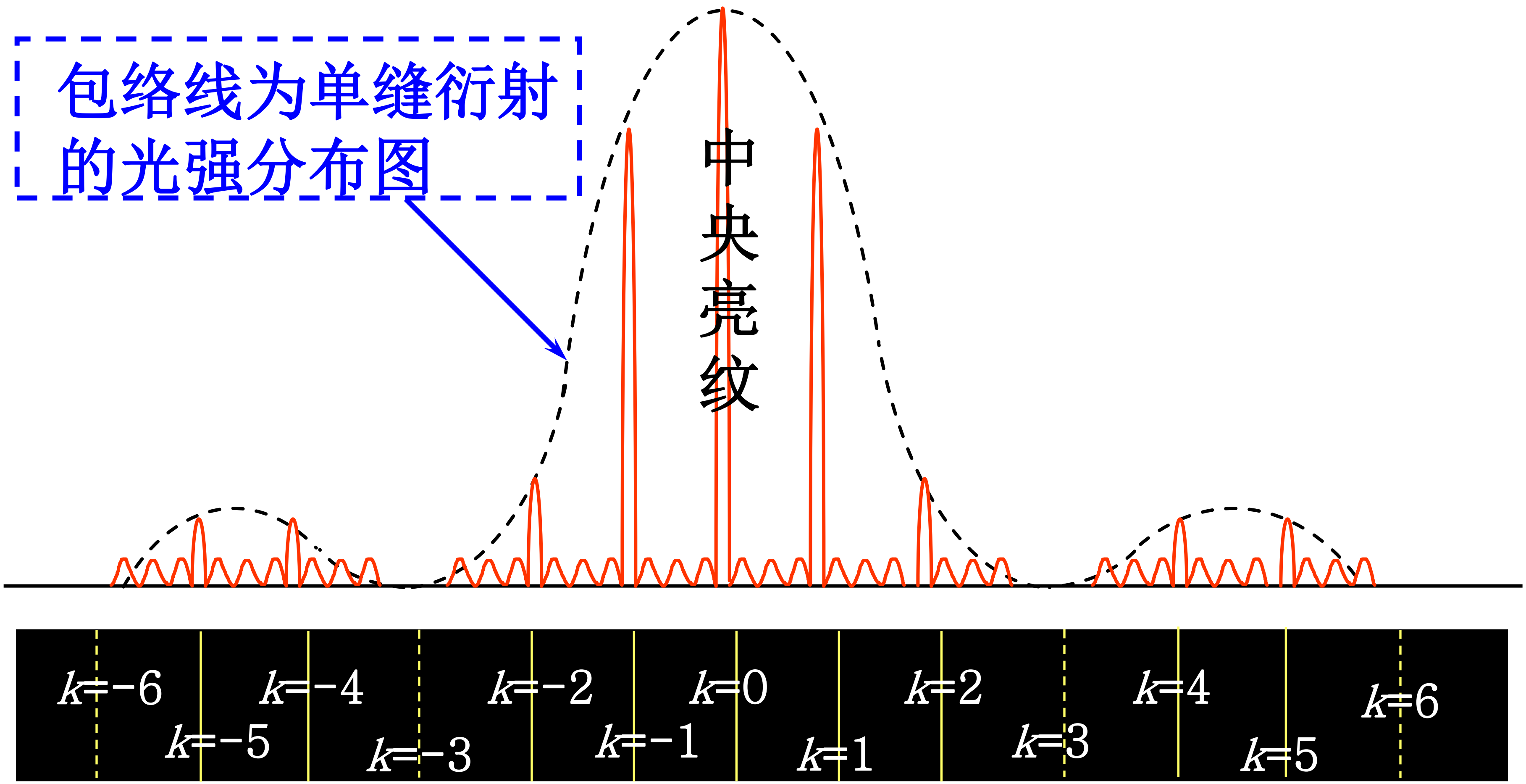
一、光栅衍射

$(a+b)\sin\varphi$ → 相邻两缝光线的光程差



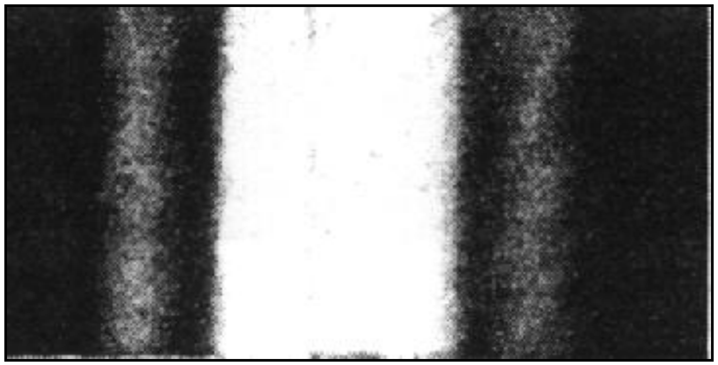
$d = a+b$ ——光栅常数

光栅衍射是单缝衍射和缝间光线干涉两种效应的叠加.

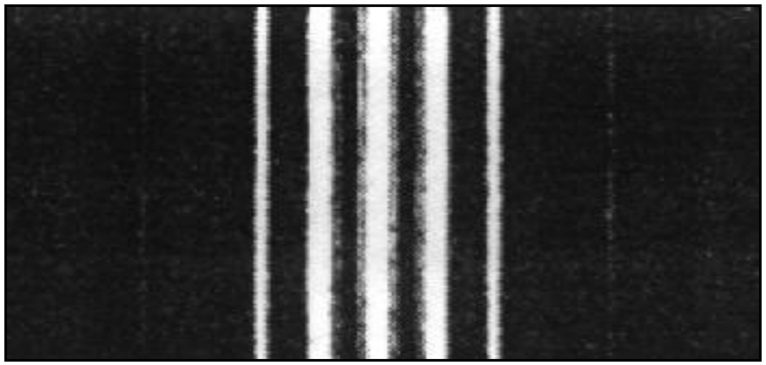


◆ 光栅中狭缝条数越多，明纹越亮.

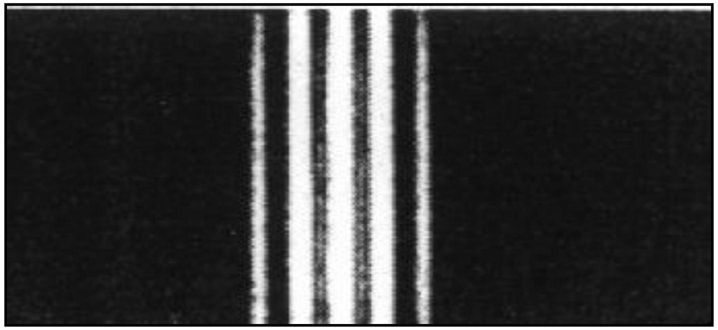
亮纹的光强 $I = N^2 I_0$ （N：狭缝数，I_0：单缝光强）



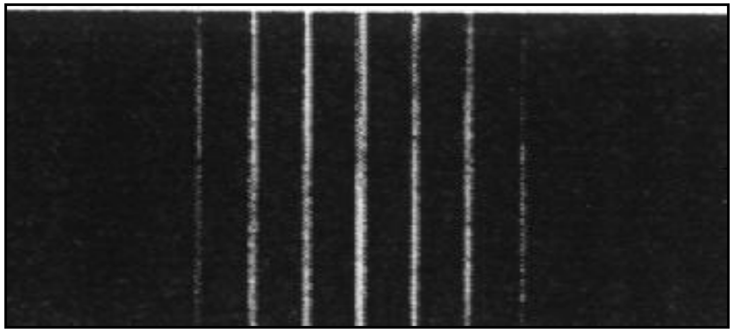
1 条 缝



5 条 缝

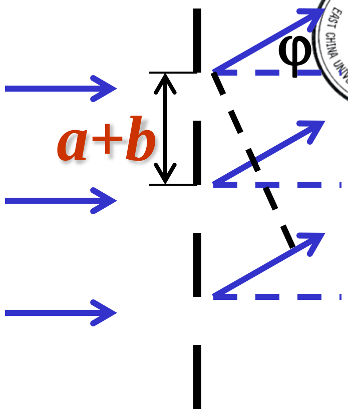


3 条 缝



20 条 缝

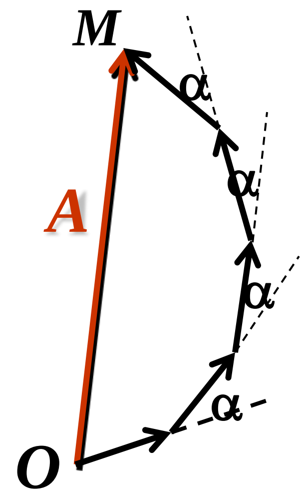
1. 多缝干涉效应：



相邻两束光之间的光程差

$$\perp\text{入射时}\begin{cases}\text{光程差：}\delta=(a+b)\sin\varphi \\ \text{位相差：}\alpha=\dfrac{2\pi}{\lambda}\delta=\dfrac{2\pi}{\lambda}(a+b)\sin\varphi\end{cases}$$

N束光：合振幅：$A=\left|\overrightarrow{OM}\right|$



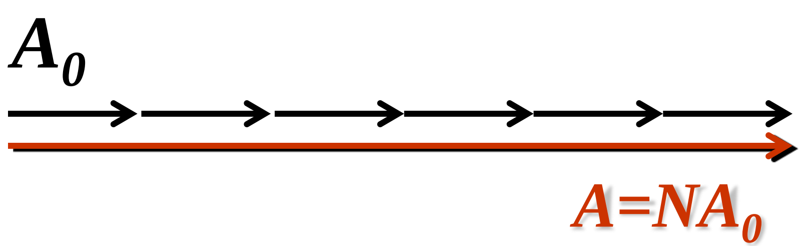
光栅方程

明纹条件：

$$\alpha=\pm 2k\pi\rightarrow(a+b)\sin\varphi=\pm k\lambda$$

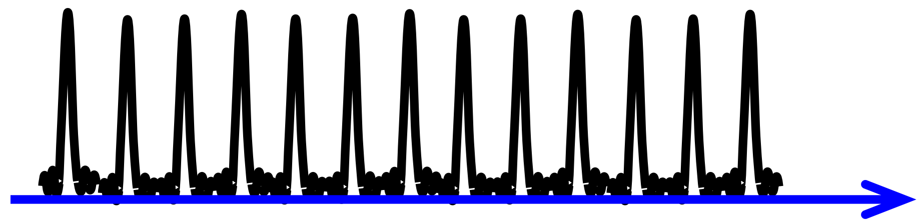
k=0, 1, 2, …

$$\left.\begin{aligned}A&=NA_0\\ I&\propto N^2A^2\end{aligned}\right\}\text{干涉极大（亮）}$$



明纹位置： $(a+b)\sin\varphi=(a+b)\dfrac{x_k}{f}=\pm k\lambda \rightarrow x_k=\pm\dfrac{kf\lambda}{(a+b)}$

明纹间距： $\Delta x=\dfrac{f\lambda}{a+b}$



暗纹和次明纹：

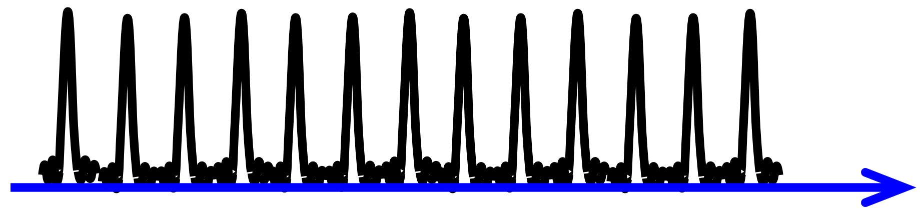
$$(a+b)\sin\varphi=(a+b)\frac{x_k}{f}=\pm k\lambda \rightarrow x_k=\pm\frac{kf\lambda}{(a+b)}$$

$$d\sin\varphi=\pm k\lambda \rightarrow \sin\varphi=\pm\frac{k\lambda}{d}$$

$$x_k=f\tan\varphi=f\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=f\frac{\frac{k\lambda}{d}}{\sqrt{1-\frac{k^2\lambda^2}{d^2}}}=f\frac{k\lambda}{\sqrt{d^2-k^2\lambda^2}}$$

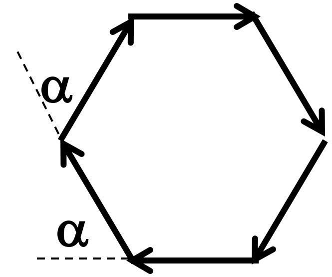
明纹位置： $(a+b)\sin\varphi=(a+b)\dfrac{x_k}{f}=\pm k\lambda \rightarrow x_k=\pm\dfrac{kf\lambda}{(a+b)}$

明纹间距： $\Delta x=\dfrac{f\lambda}{a+b}$



暗纹和次明纹：

$N\alpha=\pm 2m\pi \rightarrow (a+b)\sin\varphi=\pm\dfrac{m}{N}\lambda$ $(m\neq Nk)$



$A=0\rightarrow$ 干涉极小（暗）

$$m=\underbrace{1,2,3,\cdots(N-1)}_{(N-1)\text{个极小}},N,\underbrace{(N+1),(N+2),\cdots,(2N-1)}_{(N-1)\text{个极小}},2N,(2N+1),\cdots$$

一级极大

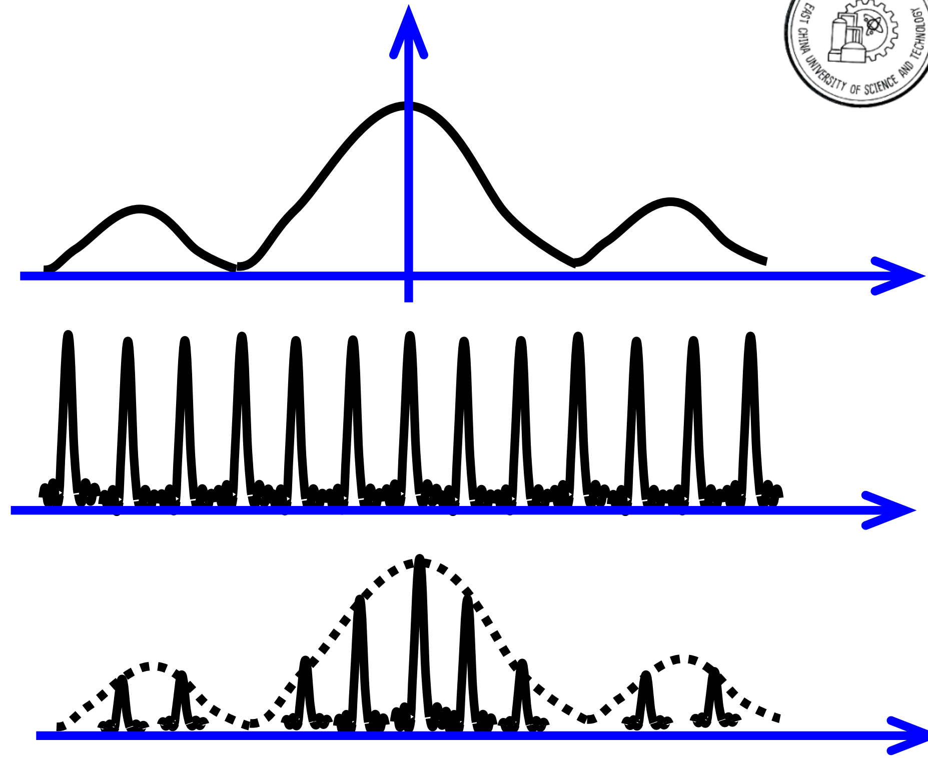
二级极大

相邻主极大（明纹）间： **N-1条暗纹, N-2条次级大**

缝数 N 越多，暗区越宽，亮纹越窄。

2. 单缝衍射效应：

***光强分布**：



各狭缝衍射光相干叠加形成的主极大（明纹）光强要受单缝衍射光强分布的调制——各明纹包络线就是单缝衍射光强分布曲线

***缺极现象**：

当多缝干涉的主极大正好符合单缝衍射极小时——主极大消失（缺级）

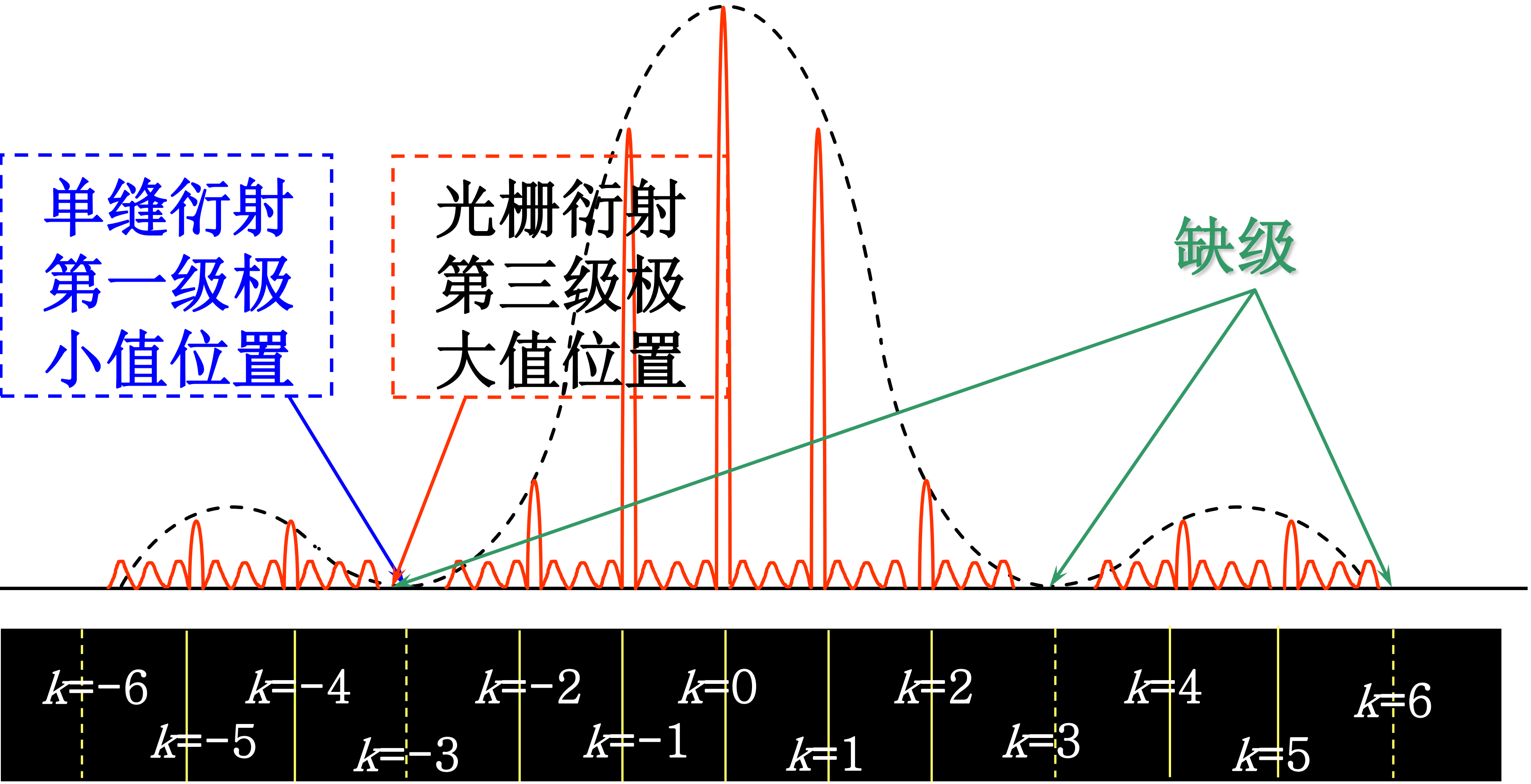
光栅方程：$(a+b)\sin\varphi=\pm k\lambda$

单缝衍射极小：$a\sin\varphi=\pm k'\lambda$

$$k=\frac{a+b}{a}k'$$

缺 级！

缝数 $N=5$ 时光栅衍射的光强分布图



若 $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{3}{1}\rightarrow$ 缺级 :3,6,9,……

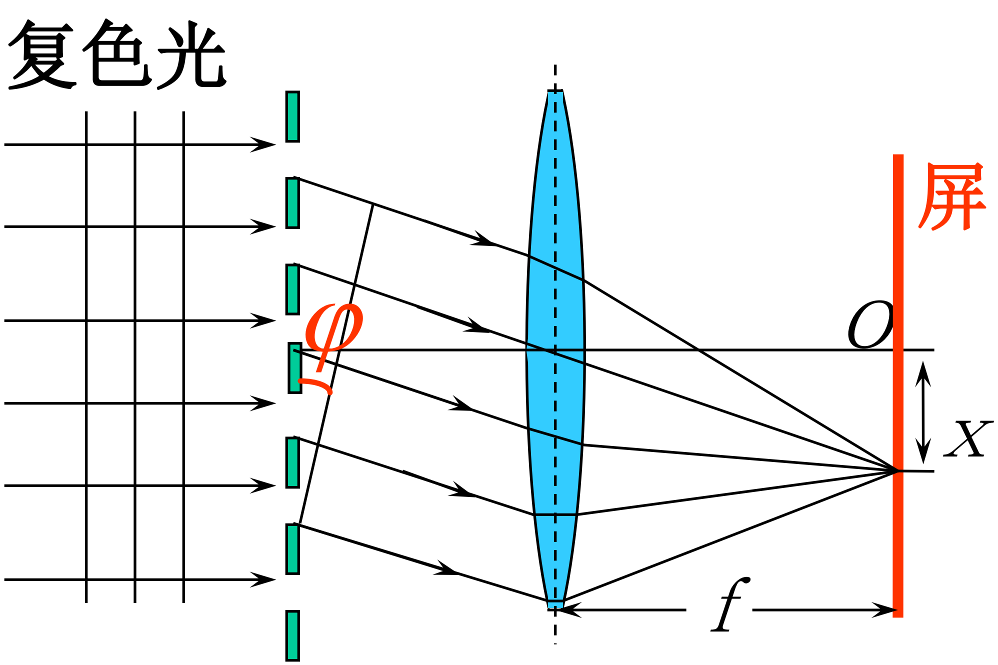
二、光栅光谱

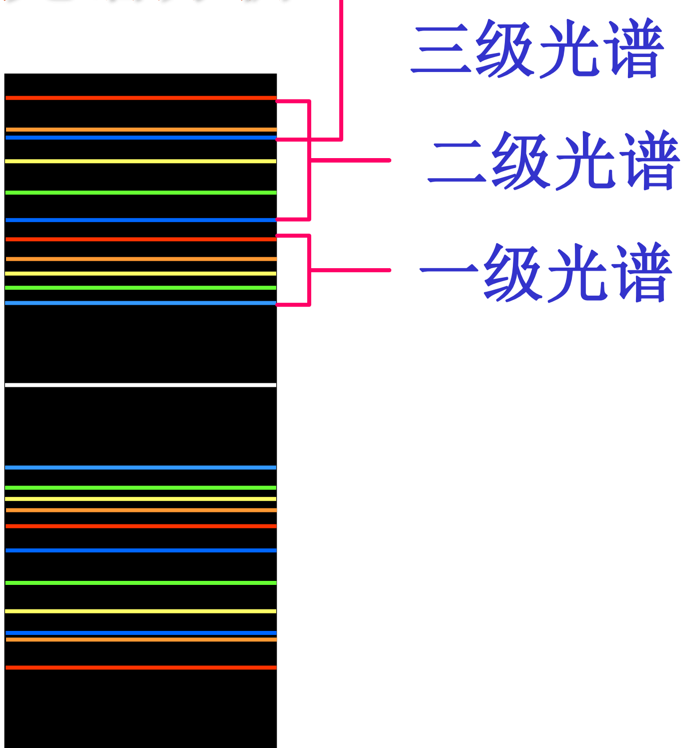
$$(a+b)\sin\varphi = \pm k\lambda$$

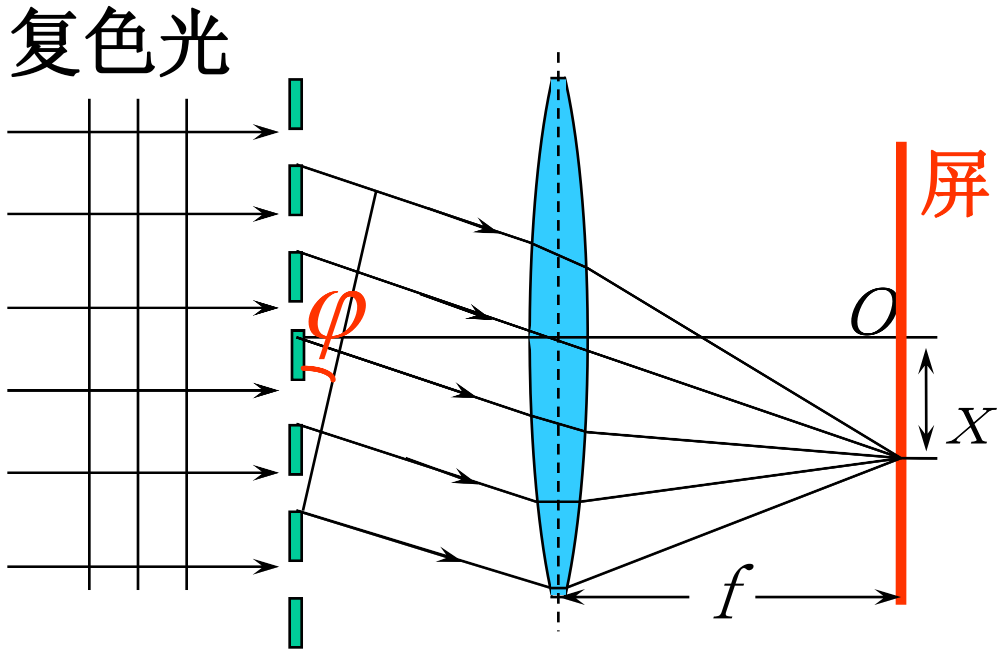
光栅——分光元件

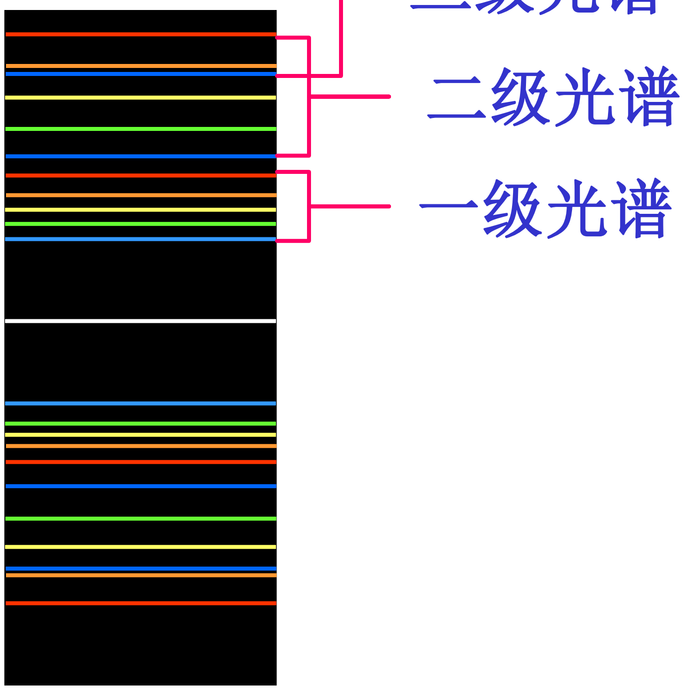
$a+b$ 确定，λ 不同：同一级 k 对应 φ 不同
谱线位置 x_k 不同 ——色散现象

各种波长的同级谱线集合起来，就构成了光源的一套光谱——光栅光谱——光谱分析









当φ满足$\begin{cases}(a+b)\cdot\sin\varphi = k_1\lambda_1 \\ (a+b)\cdot\sin\varphi = k_2\lambda_2\end{cases}$

在该衍射方向上两波长对应的 k_1 和 k_2 级谱线重叠，称为**重级现象**。

【例 3】用波长589.3*nm*的钠黄光垂直照射在每毫米500条刻痕的光栅上，在光栅后放一*f*=20*cm*的凸透镜，求：

（1）第1和第3级光谱线之间的距离；

（2）最多能看到几条光谱线；

（3）若光线以30°斜入射时，最多能看到第几级谱线？

[解] （1）

$$\Delta x = x_3 - x_1$$

$$x = k\frac{f\lambda}{a+b}$$

光栅常数 $(a+b) = \frac{L}{N} = \frac{1\times10^{-3}}{500}$

$$\Delta x = 0.12(m)$$

（2）最大级次*k*对应 $\theta = \frac{\pi}{2}$，则 $k = \frac{a+b}{\lambda} = 3.4$

最多看到中央明纹两侧第3级谱线，共7条光谱线。

（3）斜入射时，θ衍射角对应的明纹条件：

$$(a+b)(\sin\theta'+\sin\theta)=\pm k\lambda$$

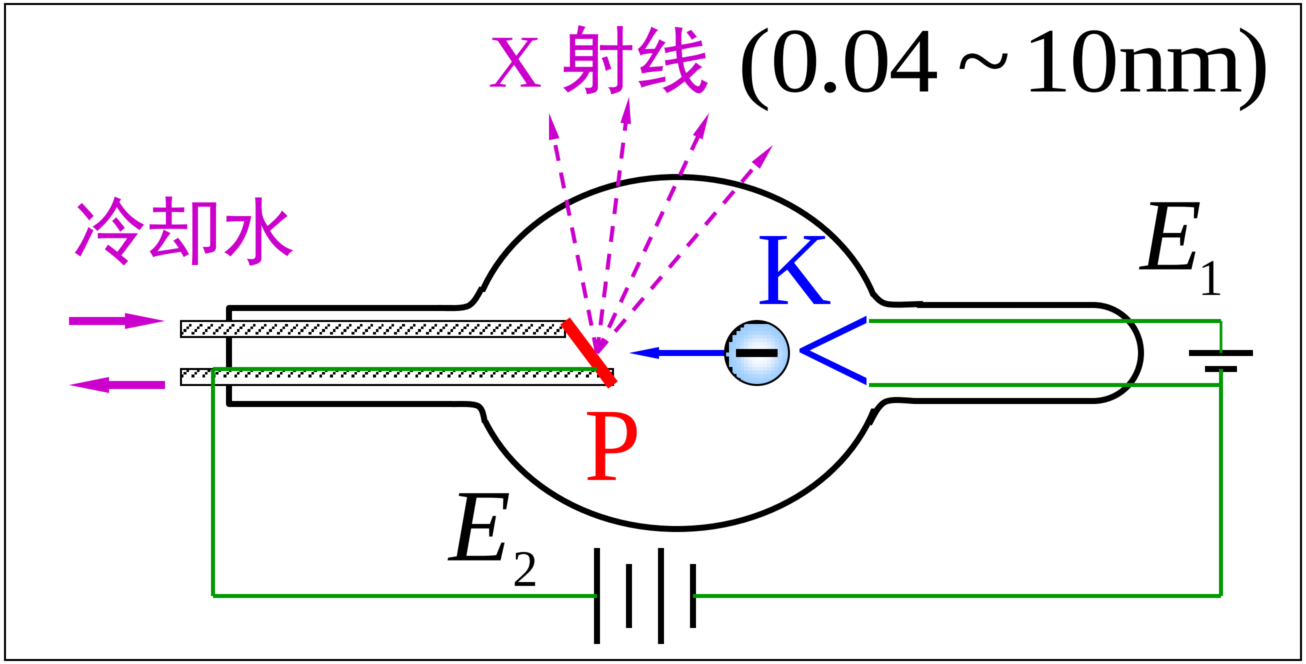
最大级次k对应 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，则

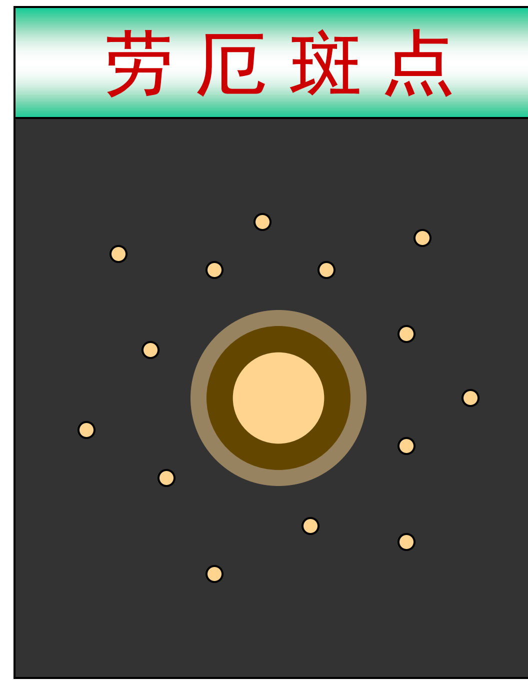
$$k=\frac{(a+b)(\sin\theta'+\sin\theta)}{\lambda}=\frac{2\times10^{-6}(0.5+1)}{589.3\times10^{-9}}=5.09$$

30°斜入射时，最多能看到第5级谱线

14.5 X 射线的衍射

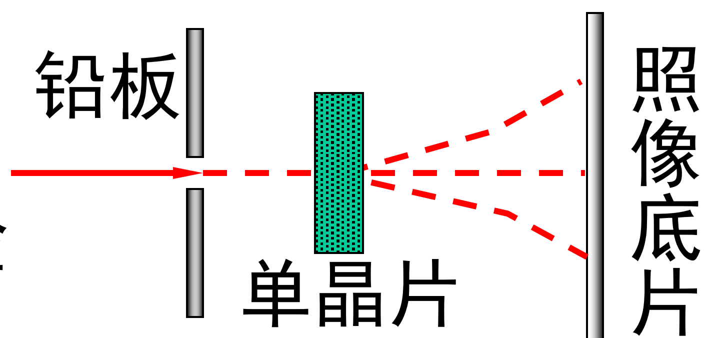
1885年伦琴发现，受高速电子撞击的金属会发射一种穿透性很强的射线称 X 射线.



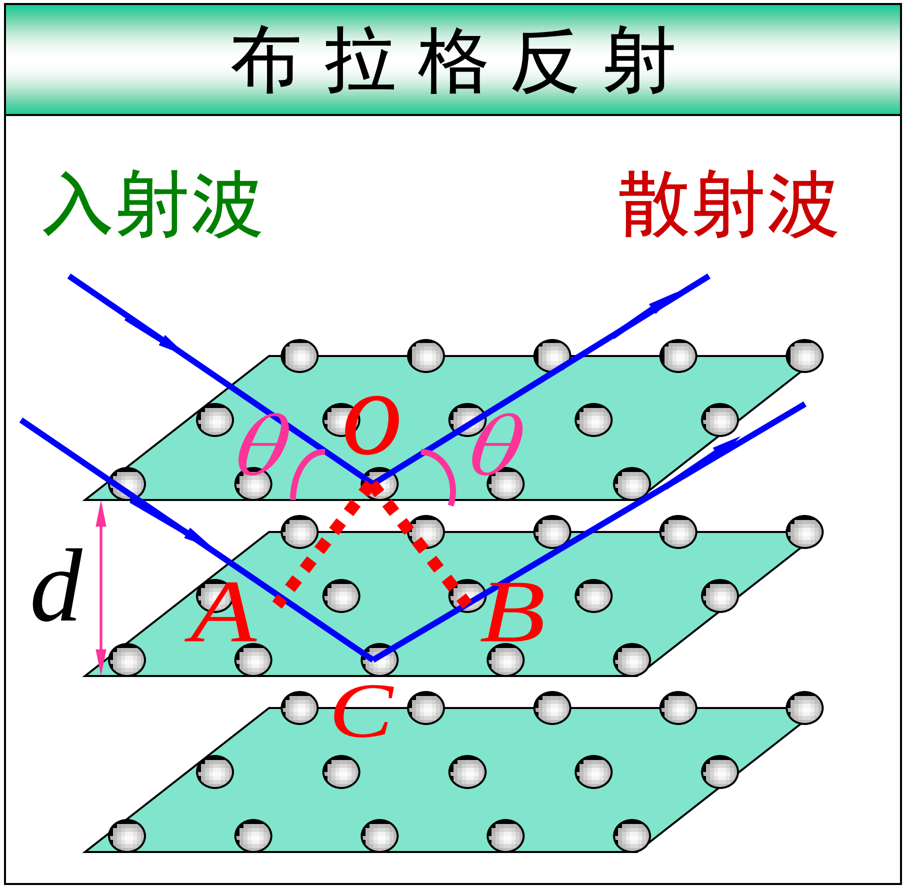


单晶片的衍射

1912年劳厄实验



1913年英国布拉格父子提出了一种解释X射线衍射的方法，给出了定量结果，并于1915年荣获物理学诺贝尔奖.



晶格常数 d　掠射角 θ

$$\Delta = AC + CB$$
$$= 2d\sin\theta$$

相邻两个晶面反射的两X射线干涉加强的条件

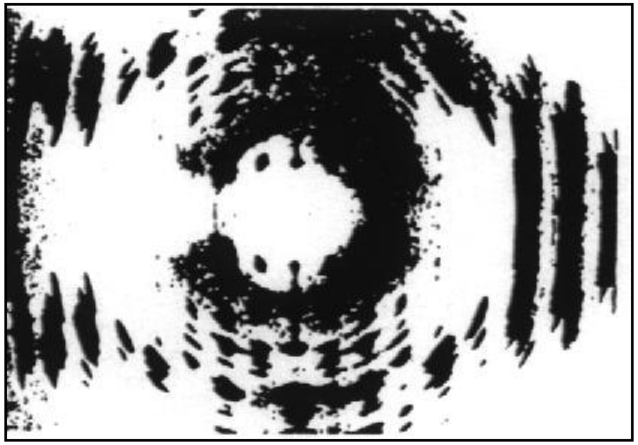
◆ 布拉格公式

$$\boxed{2d\sin\theta = k\lambda}$$

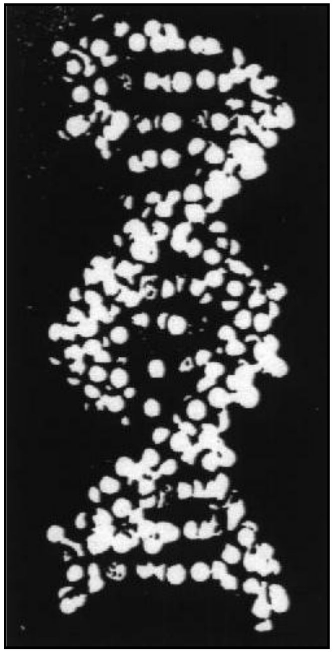
$$k = 0,1,2,\cdots$$

◆ 布拉格公式 $\boxed{2d\sin\theta = k\lambda}$ $k = 0,1,2,\cdots$

用途 测量射线的波长研究X射线谱，进而研究原子结构；研究晶体的结构，进一步研究材料性能.例如对大分子 DNA 晶体的成千张的X射线衍射照片的分析，显示出DNA分子的双螺旋结构.



DNA 晶体的X衍射照片



DNA 分子的双螺旋结构

【例 4】设有一单色平面波斜射到宽度为 b 的单缝上（如图），求各级暗纹的衍射角 θ .

解 $\Delta = AD - BC$

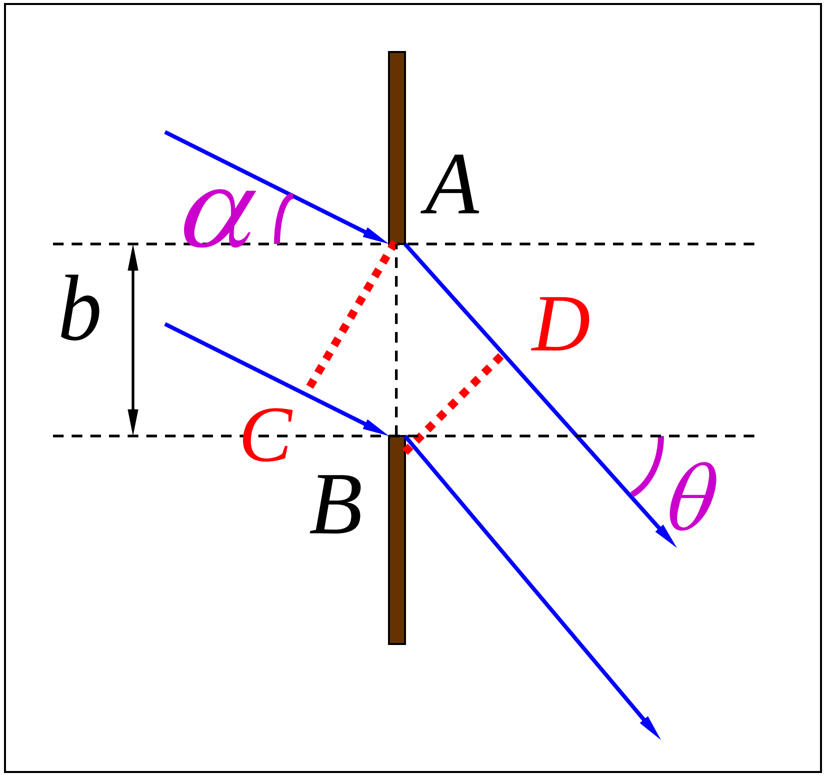
$$= b(\sin\theta - \sin\alpha)$$

由暗纹条件

$$b(\sin\theta - \sin\alpha) = \pm k\lambda$$

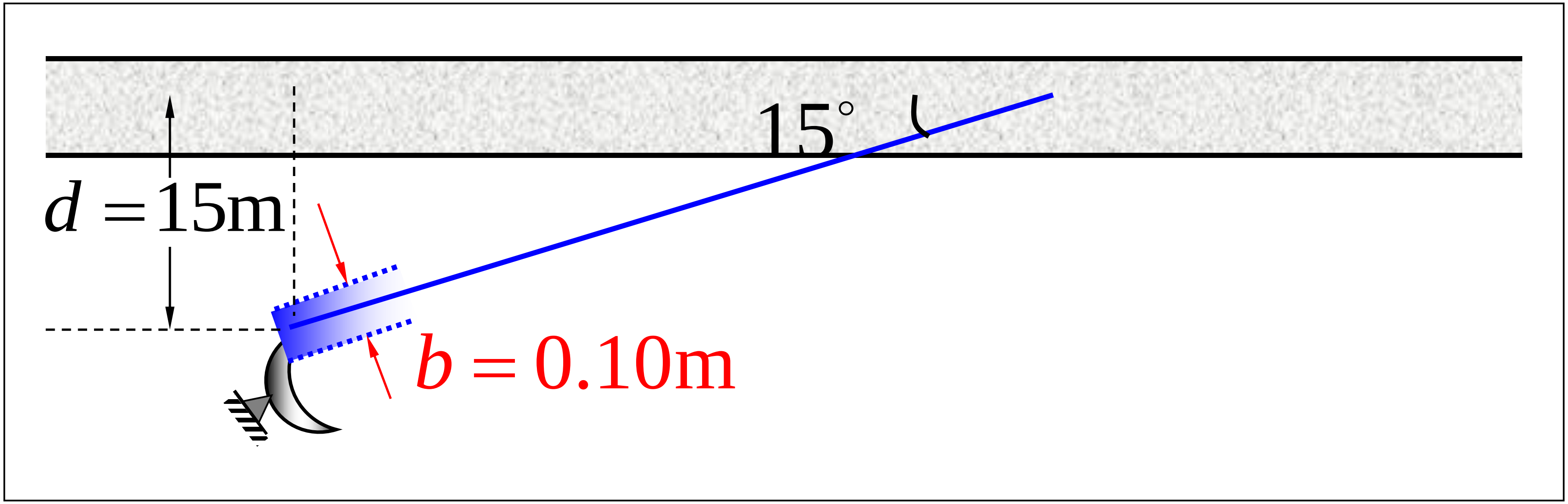
$$(k = 1, 2, 3, \cdots)$$

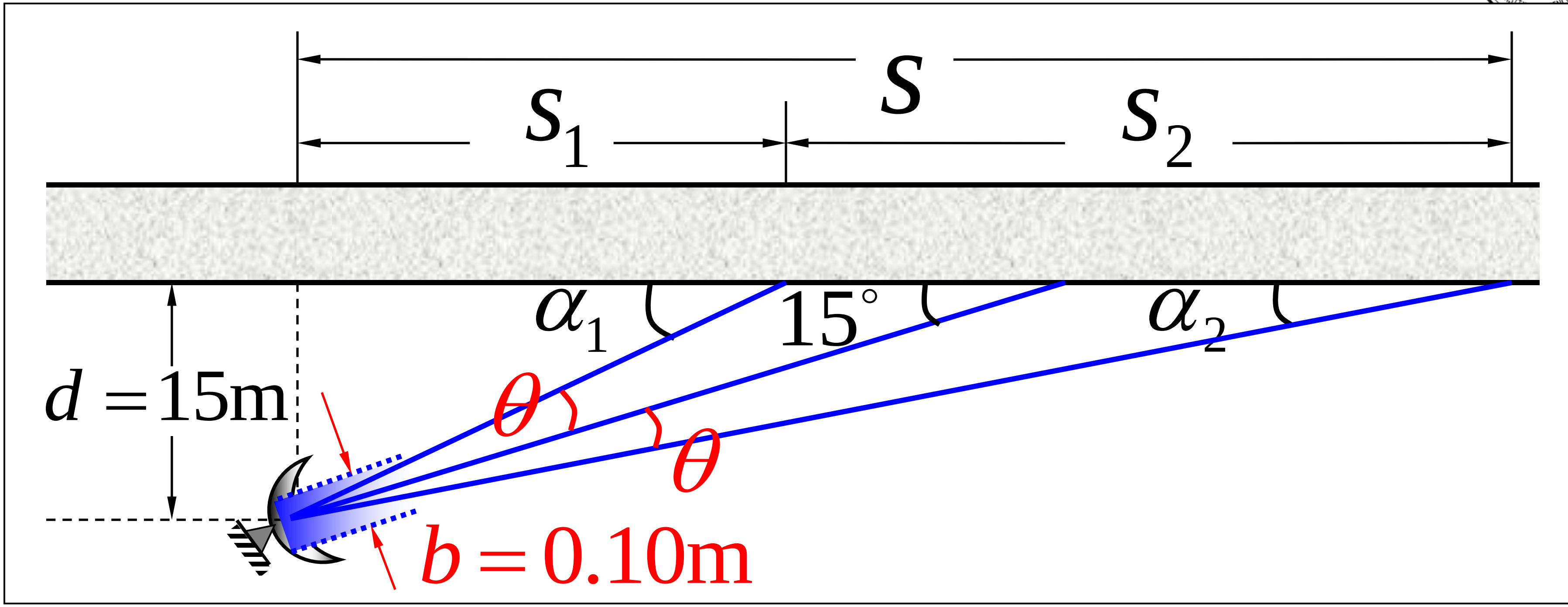
$$\theta = \arcsin\left(\frac{\pm k\lambda}{b} + \sin\alpha\right)$$



例2 如图，一雷达位于路边 15m 处，它的射束与公路成 15° 角. 假如发射天线的输出口宽度 $b=0.10\text{m}$，发射的微波波长是 18mm，则在它监视范围内的公路长度大约是多少？

解 将雷达天线输出口看成是发出衍射波的单缝，衍射波能量主要集中在中央明纹范围内.





根据暗纹条件 $b\sin\theta = \lambda$, $\theta = \arcsin\dfrac{\lambda}{b} = 10.37^\circ$

$$s_2 = s - s_1 = d(\cot\alpha_2 - \cot\alpha_1)$$

$$= d[\cot(15^\circ - \theta) - \cot(15^\circ + \theta)] = 153\text{m}$$