第七章 二元关系

主要内容

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**，记作 $<x,y>$.

有序对性质:

(1) 有序性 $<x,y>\neq<y,x>$ （当 $x\neq y$ 时）

(2) $<x,y>$ 与 $<u,v>$ 相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v.$$

笛卡儿积

定义7.2 设A,B为集合，A与B的**笛卡儿积**记作$A\times B$，且

$$A\times B=\{<x,y>|\ x\in A\wedge y\in B\}.$$

例1 $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$

$A\times B$

$=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A$

$=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}, B=\varnothing$

$P(A)\times A=\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$P(A)\times B=\varnothing$

笛卡儿积的性质

(1) 不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(2) 不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

(3) 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

(4) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(5) $A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$.

(6) 若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

性质证明

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取 $<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times(B\cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in B\cup C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}
$$

所以有 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例2

(1) 证明$A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B, C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C$$
$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$$
$$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in D$$
$$\Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定.反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

7.2 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个**二元关系**, 简称为关系，记作R.

如果$<x,y>\in R$, 可记作xRy；如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x \quad y$

实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb, $a \quad c$等.

A到B的关系与A上的关系

定义7.4

设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**，当$A=B$时则叫做**A上的二元关系**.

例3　$A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 那么

$R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0,1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系，

R_3 和 R_4 也是A上的二元关系.

计数：$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有个. 所以 A上有2^{n^2}个不同的二元关系.

例如 $|A|=3$，则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为空关系

(2) 全域关系 $E_A = \{<x,y>| \, x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$

恒等关系 $I_A = \{<x,x>| \, x \in A\}$

小于等于关系 $L_A = \{<x,y>| \, x,y \in A \wedge x \leq y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_B = \{<x,y>| \, x,y \in B \wedge x整除y\}$, A为非0整数子集

包含关系 $R_{\subseteq} = \{<x,y>| \, x,y \in A \wedge x \subseteq y\}$, A是集合族.

实例

例如, $A=\{1, 2\}$, 则

$E_A = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

$I_A = \{<1,1>,<2,2>\}$

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$, 则

$L_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

例如 $A = P(B) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$R_\subseteq = \{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$
$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

类似的还可以定义:

大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等.

关系的表示

1. 关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = (r_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, x_j\rangle \in R$$

2. 关系图

若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=\langle A, R\rangle$, 其中$A$为结点集，$R$为边集. 如果$\langle x_i,x_j\rangle$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意：

- 关系矩阵适合表示有穷集A上的关系（可推广为从A到B的关系）
- 关系图适合表示有穷集A上的关系

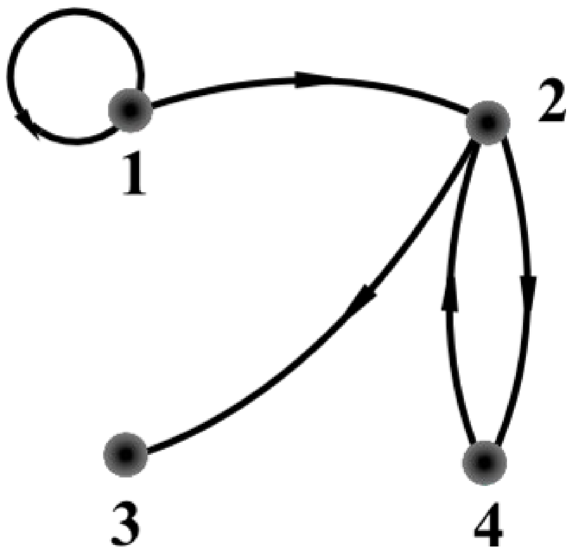
实例

例4

$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$



关系的基本运算

定义7.6 关系的**定义域**、**值域**与**域**分别定义为

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y (<x,y>\in R) \}$$

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x (<x,y>\in R) \}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例5 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系运算(逆与合成)

定义7.7 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ \langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \}$$

定义7.8 关系的合成运算

$$F \circ G = \{ \langle x, y\rangle \mid \exists t (\langle x, t\rangle \in F \wedge \langle t, y\rangle \in G) \}$$

例6 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^{-1} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R \circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

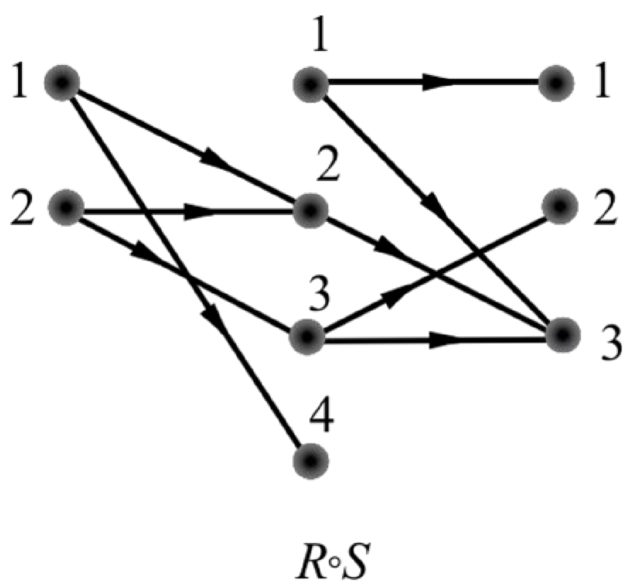
$S \circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

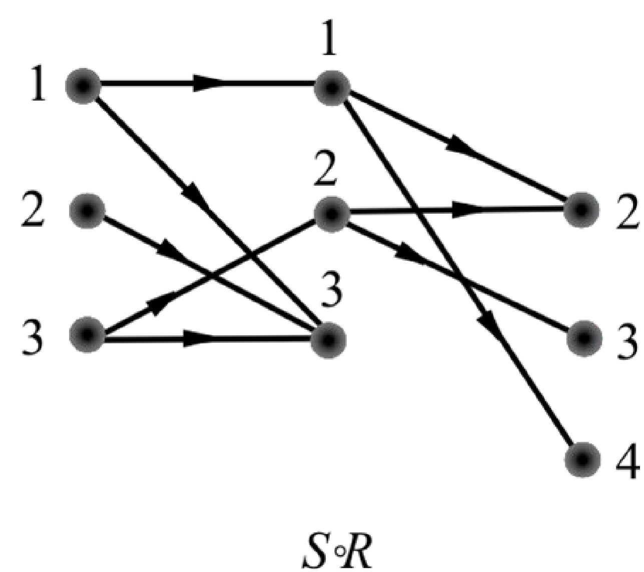
合成的图示法

利用图示（不是关系图）方法求合成

$R\circ S=\{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$S\circ R=\{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$





关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的限制记作 $R\upharpoonright A$, 其中

$$R\upharpoonright A = \{ \langle x,y\rangle \mid xRy \wedge x\in A \}$$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$$

说明:

- R在A上的限制 $R\upharpoonright A$是 R 的子关系，即 $R\upharpoonright A \subseteq R$
- A在R下的像 $R[A]$ 是 ran$R$ 的子集，即 $R[A]\subseteq \mathrm{ran}R$

实例

例7 设R={<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>}, 则

$R\restriction\{1\} = \{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

$R\restriction\varnothing = \varnothing$

$R\restriction\{2,3\} = \{\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$R[\{1\}] = \{2,3\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$

$R[\{3\}] = \{2\}$

关系运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1}\Leftrightarrow<y,x>\in F^{-1}\Leftrightarrow<x,y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取x,

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1}\Leftrightarrow\exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow\exists y(<y,x>\in F)\Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系运算的性质

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in(F\circ G)\circ H \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\circ G \land <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(\exists s\,(<x,s>\in F \land <s,t>\in G) \land <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,\exists s\,(<x,s>\in F \land <s,t>\in G \land <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \land \exists t\,(<s,t>\in G \land <t,y>\in H)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \land <s,y>\in G\circ H) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ(G\circ H)
\end{aligned}
$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

证明

(2) 任取$<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x,y> \in (F \circ G)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & <y,x> \in F \circ G \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<y,t> \in F \wedge <t,x> \in G) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t> \in G^{-1} \wedge <t,y> \in F^{-1}) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y> \in G^{-1} \circ F^{-1}
\end{aligned}
$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理7.3 设R为A上的关系, 则

$$R\circ I_A= I_A\circ R=R$$

证　任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in R\circ I_A \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in I_A) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in R\wedge t=y\wedge y\in A) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in R
\end{aligned}
$$

关系运算的性质

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$ (2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$ (4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证 (3) 任取$<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in F\circ(G\cap H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G\cap H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G\wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,((<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)\wedge(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in H)) \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)\wedge\exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ G\wedge <x,y>\in F\circ H \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ G\cap F\circ H
\end{aligned}
$$

所以有 $F\circ(G\cap H)=F\circ G\cap F\circ H$

推广

定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)=R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\ldots\cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\circ R=R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\ldots\cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\ldots\cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\circ R\subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap\ldots\cap R_n\circ R$$

关系运算的性质

定理7.5 设F为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

(2) $F[A\cup B] = F[A]\cup F[B]$

(3) $F\upharpoonright(A\cap B) = F\upharpoonright A\cap F\upharpoonright B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证明

证 只证 (1) 和 (4).

(1) 任取$<x,y>$

$$<x,y> \in F\restriction(A\cup B)$$
$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \wedge x \in A\cup B$$
$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \wedge (x \in A \vee x \in B)$$
$$\Leftrightarrow (<x,y> \in F \wedge x \in A) \vee (<x,y> \in F \wedge x \in B)$$
$$\Leftrightarrow <x,y> \in F\restriction A \vee <x,y> \in F\restriction B$$
$$\Leftrightarrow <x,y> \in F\restriction A \cup F\restriction B$$

所以有$F\restriction(A\cup B) = F\restriction A \cup F\restriction B$.

证明

(4) 任取y,

$$y \in F[A \cap B]$$
$$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A \wedge x \in B)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\,((\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A) \wedge (\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in B))$$
$$\Rightarrow \exists x\,(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A) \wedge \exists x\,(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in B)$$
$$\Leftrightarrow y \in F[A] \wedge y \in F[B]$$
$$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B]$$

所以有$F[A \cap B] = F[A] \cap F[B]$.

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

幂的求法

例 8 设$A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2的关系矩阵分别是:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法

R^3和R^4的矩阵是：

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

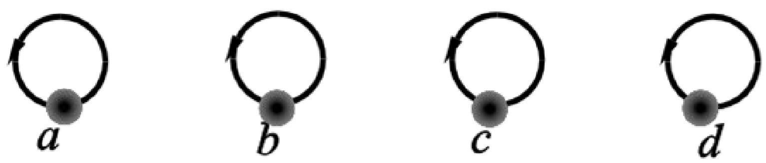
$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

R^0的关系矩阵是

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

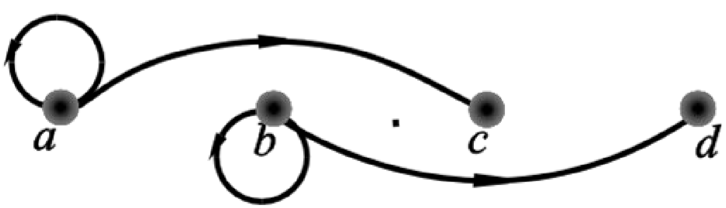
关系图

R^0, R^1, R^2, R^3,…的关系图如下图所示.

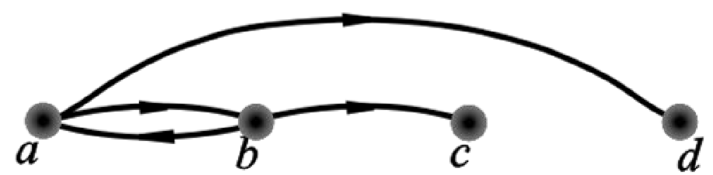


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为A上的关系,
由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2}个.
列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \dots , R^{2^{n^2}}, \dots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A上的关系, $m, n\in$N, 则

(1) $R^m\circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m\in$N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$R^m\circ R^0 = R^m\circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m\circ R^{n+1} = R^m \circ(R^n \circ R) = (R^m \circ R^n)\circ R = R^{m+n+1} ,$$

所以对一切$m,n\in$N 有 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$.

证明

(2) 对于任意给定的m∈N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^n$$

$$= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切m,n∈N 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理7.8 设R是A上的关系，
若存在自然数 $s, t\ (s<t)$ 使得 $R^s=R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in N$有 $R^{s+k}=R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in N$有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$, 其中 $p=t-s$

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in N$ 有$R^q\in S$

证 (1) $R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}$

(2) 对k归纳. 若k=0, 则有 $R^{s+0p+i}=R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$, 其中$p=t-s$, 则

$$R^{s+(k+1)p+i}=R^{s+kp+i+p}=R^{s+kp+i}\circ R^p$$

$$=R^{s+i}\circ R^p=R^{s+p+i}=R^{s+t-s+i}=R^{t+i}=R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

证明

(3) 任取 $q \in \mathrm{N}$,

若 $q < t$, 显然有 $R^q \in S$,

若$q \geq t$, 则存在自然数 k 和 i 使得

$$q = s+kp+i, \text{其中} 0 \leq i \leq p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

从而证明了 $R^q \in S$.

7.4 关系的性质

定义7.11 设 R 为A上的关系,

(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow \langle x,x\rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的.

(2) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow \langle x,x\rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

实例:

自反:全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反:实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$

R_2 自反, R_3 反自反, R_1既不是自反的也不是反自反的.

对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A上的关系,

(1) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\land\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$, 则称 R 为 A上对称的关系.

(2) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\land\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$, 则称 R 为 A上的反对称关系.

实例：对称关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

反对称关系：恒等关系I_A和空关系也是A上的反对称关系.

设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$, $R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$, $R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

R_1：对称和反对称；R_2：只有对称；R_3：只有反对称；

R_4：不对称、不反对称

传递性

定义7.13 设R为A上的关系, 若

$$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R\rightarrow<x,z>\in R),$$

则称 R 是A上的传递关系.

实例： A上的全域关系 E_A,恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$，小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

关系性质成立的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明

证明 只证(1)、(3)、(4)、(5)

(1) 必要性

任取$<x,y>$, 由于R 在A上自反必有

$$<x,y>\in I_A \Rightarrow x,y\in A\wedge x=y \Rightarrow <x,y>\in R$$

从而证明了$I_A\subseteq R$

充分性.

任取x, 有

$$x\in A \Rightarrow <x,x>\in I_A \Rightarrow <x,x>\in R$$

因此 R 在A上是自反的.

证明

(3) 必要性.

任取$<x,y>$,

$$<x,y> \in R \Leftrightarrow <y,x> \in R \Leftrightarrow <x,y> \in R^{-1}$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取$<x,y>$, 由$R = R^{-1}$得

$$<x,y> \in R \Rightarrow <y,x> \in R^{-1} \Rightarrow <y,x> \in R$$

所以R在A上是对称的

证明

(4) 必要性. 任取$<x,y>$, 有

$$<x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <y,x>\in R \Rightarrow x=y \wedge x,y\in A$$

$$\Rightarrow <x,y>\in I_A$$

这就证明了$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

充分性.

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A$$

$$\Rightarrow x=y$$

从而证明了R在A上是反对称的.

证明

(5) 必要性.

任取$<x,y>$有

$$<x,y>\in R\circ R$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R$$

所以 $R\circ R\subseteq R$

充分性.

任取$<x,y>,<y,z>\in R$, 则

$$<x,y>\in R\wedge <y,z>\in R$$

$$\Rightarrow <x,z>\in R\circ R \Rightarrow <x,z>\in R$$

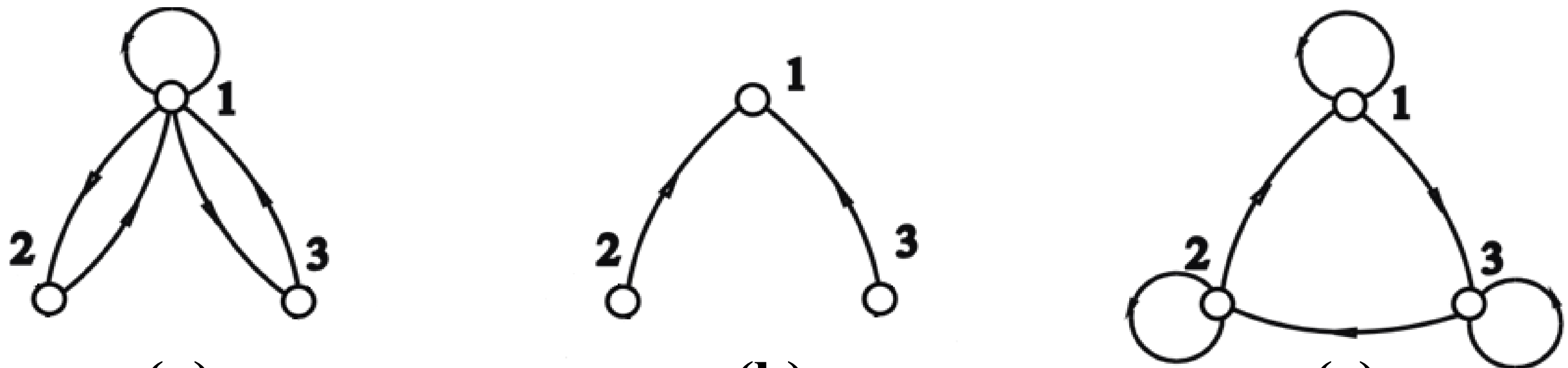
所以 R 在 A上是传递的

关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	M^2中1位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边,是一条有向边	点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则x_i到x_k也有边

关系性质的判别

例9 判断下列各图的性质



(a) (b) (c)

解:

(a) 对称

(b) 反自反、反对称、传递

(c) 自反、反对称

关系的性质和运算之间的联系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

7.5 关系的闭包

主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法

  集合表示

  矩阵表示

  图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R' \subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$, 对称闭包记作$s(R)$, 传递闭包记作$t(R)$.

定理7.10 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R \cup R^0$

(2) $s(R)=R \cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明：对有穷集$A(|A|=n)$上的关系, (3)中的并最多不超过R^n

证明

证 只证(1)和(3).

(1) 由$I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$ 知 $R\cup R^0$是自反的, 且满足$R\subseteq R\cup R^0$

设R''是A上包含R的自反关系, 则有$R\subseteq R''$和$I_A\subseteq R''$. 从而有

$R\cup R^0\subseteq R''$. $R\cup R^0$满足闭包定义, 所以$r(R)=R\cup R^0$.

(1) 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

用归纳法证明对任意正整数n 有$R^n\subseteq t(R)$.

n=1时有$R^1=R\subseteq t(R)$. 假设$R^n\subseteq t(R)$成立, 那么对任意的$<x,y>$

$$<x,y>\in R^{n+1}=R^n\circ R \Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R^n\wedge<t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in t(R)\wedge<t,y>\in t(R)) \Rightarrow <x,y>\in t(R)$$

这就证明了$R^{n+1}\subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.

证明

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$成立, 为此只须证明$R \cup R^2 \cup \ldots$传递.

任取$<x,y>,<y,z>$, 则

$$<x,y> \in R \cup R^2 \cup \ldots \land <y,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,y> \in R^t) \land \exists s(<y,z> \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z> \in R^t \circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z> \in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow <x,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

从而证明了$R \cup R^2 \cup \ldots$是传递的.

闭包的矩阵表示和图表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s和 M_t
则 $M_r=M+E$ $M_s=M+M'$ $M_t=M+M^2+M^3+\ldots$
E 是单位矩阵, M'是 转置矩阵，相加时使用逻辑加.

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则G_r, G_s, G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新的边:

(1) 考察G 的每个顶点, 若没环就加一个环，得到G_r

(2) 考察G 的每条边, 若有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i\neq j$, 则在G 中加一条 x_j 到 x_i 的反向边，得到G_s

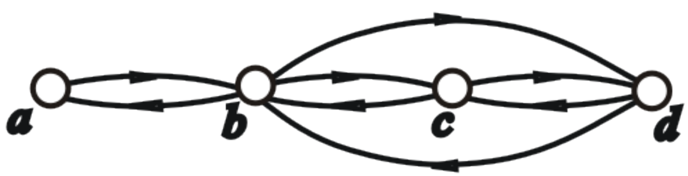
(3) 考察G 的每个顶点 x_i, 找 x_i 可达的所有顶点 x_j (允许$i=j$)，如果没有从 x_i 到 x_j 的边, 就加上这条边, 得到图G_t

实例

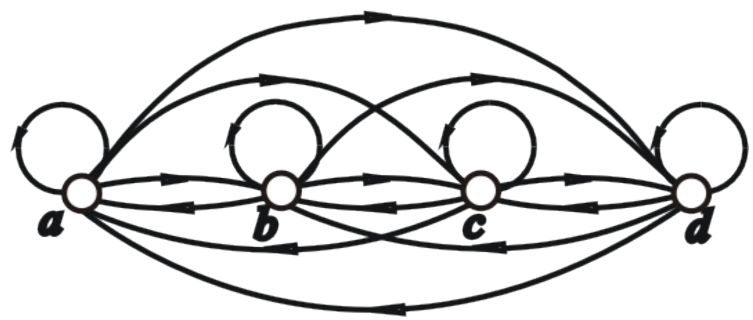
例9 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

求传递闭包的算法

算法 Warshall

输入：M（R的关系矩阵）

输出：M_T（$t(R)$的关系矩阵）

1. $M_T \leftarrow M$
2. for $k \leftarrow 1$ to n do
3. for $i \leftarrow 1$ to n do
4. for $j \leftarrow 1$ to n do
5. $M_T[i,j] \leftarrow M_T[i,j] + M_T[i,k] \cdot M_T[k,j]$

实例

设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$,
R的传递闭包的矩阵如下：

$$M_0=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad M_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad M_2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_3=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\quad M_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

闭包的性质

定理7.11 设R是非空集合A上的关系, 则

(1) R是自反的当且仅当 $r(R)=R$.

(2) R是对称的当且仅当 $s(R)=R$.

(3) R是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 略

闭包的性质

定理7.13 设R是非空集合A上的关系,
(1) 若R是自反的, 则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的
(2) 若R是对称的, 则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的
(3) 若R是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的.

说明：如果需要进行多个闭包运算，比如求R的自反、对称、传递的闭包 $tsr(R)$，运算顺序如下：

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$

证明 略

7.6 等价关系与划分

主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

7.6 等价关系与划分

定义7.15 设R为非空集合上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若$<x,y>\in R$, 称 x等价于y, 记做$x\sim y$.

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$$

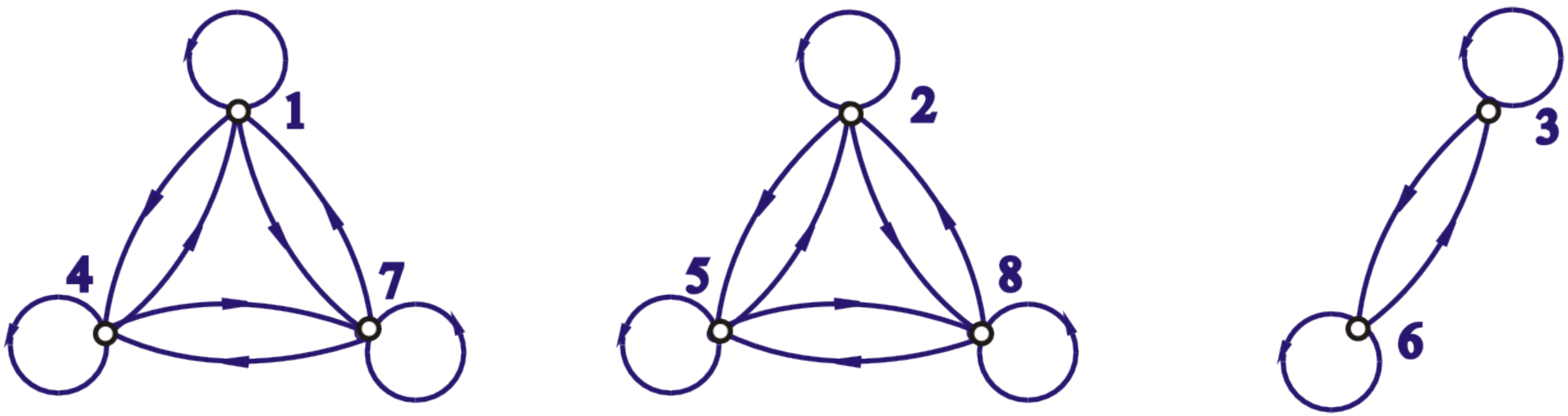
其中$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$叫做 x与 y 模3相等, 即x除以3的余数与y除以3的余数相等. 不难验证 R 为A上的等价关系, 因为

(1) $\forall x\in A$, 有 $x\equiv x\ (\mathrm{mod}\ 3)$

(2) $\forall x,y\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有$y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

(3) $\forall x,y,z\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有$x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$

等价关系的实例



模 3 等价关系的关系图

等价类定义

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称为x的**等价类**, 简记为$[x]$或$\bar{x}$

实例 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模3等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x\in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y\in A$, 如果 xRy, 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y\in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x\in A\}=A$

证 (1) 由定义, $\forall x\in A$有$[x]\subseteq A$. 又$x\in[x]$, 即$[x]$非空.

(2) 任取 z, 则有

$$z\in[x] \Rightarrow \langle x,z\rangle\in R \Rightarrow \langle z,x\rangle\in R$$

$$\langle z,x\rangle\in R \wedge \langle x,y\rangle\in R \Rightarrow \langle z,y\rangle\in R \Rightarrow \langle y,z\rangle\in R$$

从而证明了$z\in[y]$. 综上所述必有 $[x]\subseteq[y]$. 同理可证 $[y]\subseteq[x]$. 这就得到了$[x] = [y]$.

证明

(3) 假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$, 则存在 $z\in[x]\cap[y]$, 从而有$z\in[x]\wedge z\in[y]$, 即$<x,z>\in R\wedge<y,z>\in R$成立. 根据$R$的对称性和传递性必有$<x,y>\in R$, 与 $x\not R y$矛盾

(4) 先证$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$. 任取$y$,

$$y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge y\in[x])$$

$$\Rightarrow y\in[x]\wedge[x]\subseteq A\Rightarrow y\in A$$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

再证$A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$. 任取$y$,

$$y\in A\Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A\Rightarrow y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$成立.

综上所述得$\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

商集与划分

定义7.17 设 R 为非空集合A上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集, 记做A/R,

$$A/R = \{[x]R \mid x \in A\}$$

实例 设 A={1,2,…,8}，A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\},\quad A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

定义7.18 设A为非空集合, 若A的子集族π($\pi \subseteq P(A)$)满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个划分, 称π中的元素为A的划分块.

划分实例

例10 设 $A=\{a, b, c, d\}$, 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$如下：

$\pi_1=\{\{a, b, c\},\{d\}\}$

$\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$

$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{a, b\}, \{c, d\}\}$

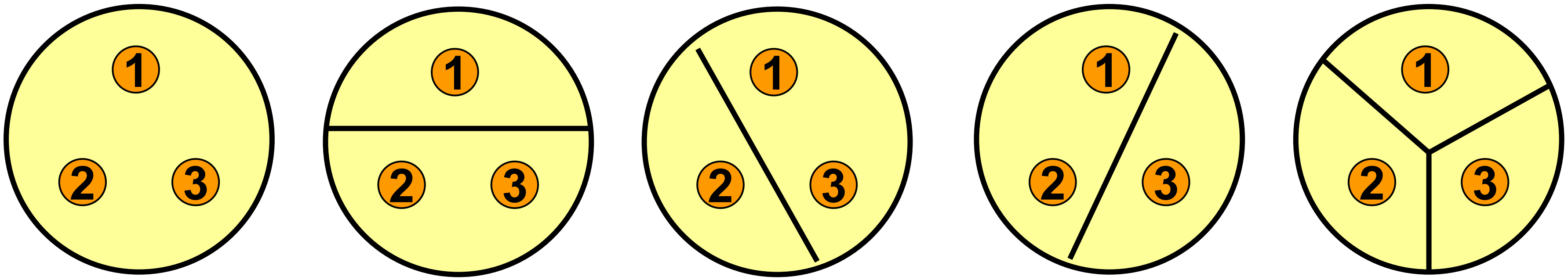
$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

则 π_1和 π_2是A的划分, 其他都不是A的划分.

实例

例11 给出 $A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

解 先做出A的划分, 从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1 π_2 π_3 π_4 π_5

π_1对应 E_A, π_5 对应 I_A, π_2, π_3 和 π_4分别对应 R_2, R_3和 R_4.

$$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup I_A$$
$$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$$
$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$$

7.7 偏序关系

主要内容

- 偏序关系
  - 偏序关系的定义
  - 偏序关系的实例
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素及其性质
  - 极大元、极小元、最大元、最小元
  - 上界、下界、最小上界、最大下界

定义与实例

定义7.19

偏序关系：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$. 设$\preccurlyeq$为偏序关系, 如果 $\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x“小于或等于” y.

实例

集合A上的恒等关系 I_A是 A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

定义7.20 设 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $x, y\in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow$ $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

(2) 任取元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生:

$x \prec y$ (或 $y \prec x$), $x=y$, x与y不是可比的

定义7.21 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $\forall x,y\in A$, x与y都是可比的，则称R为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系,整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 $x,y\in A$, 如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$, 则称 y 覆盖x.

例如{1,2,4,6}集合上整除关系, 2覆盖1, 4和6覆盖2, 4不覆盖1.

偏序集与哈斯图

定义7.23 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集, 记作$<A,\preccurlyeq>$.

实例： $<Z,\leq>$, $<P(A),R_{\subseteq}>$

哈斯图: 利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点：

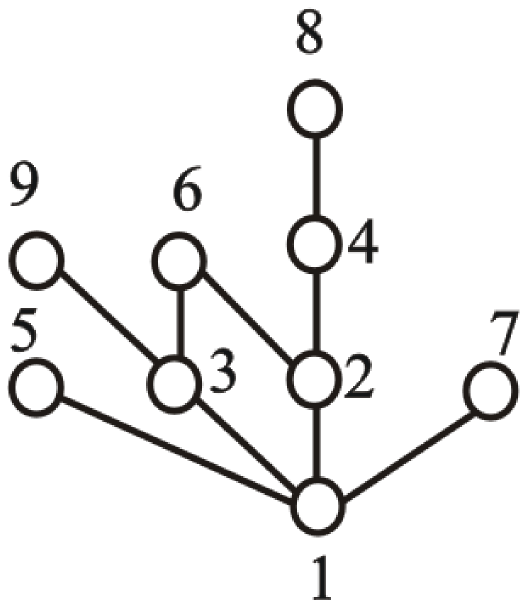
(1) 每个结点没有环

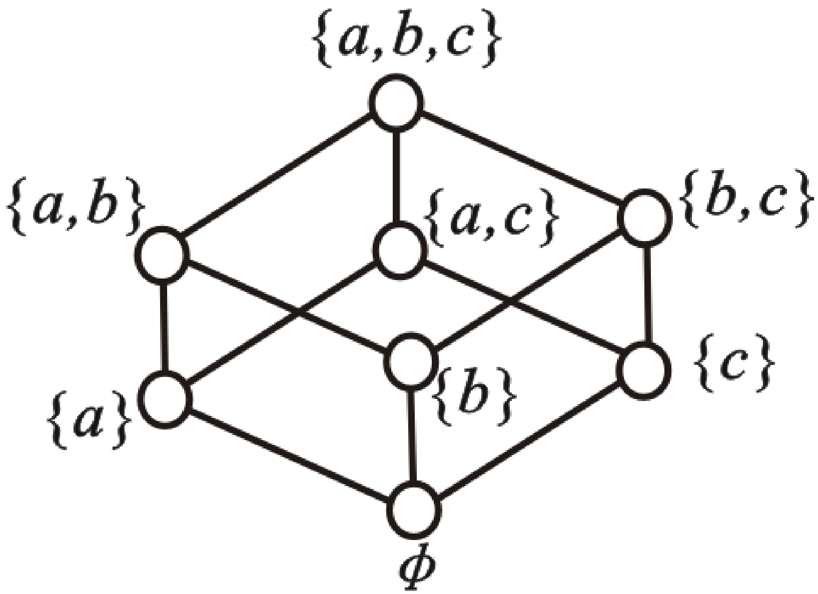
(2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前

(3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边

实例

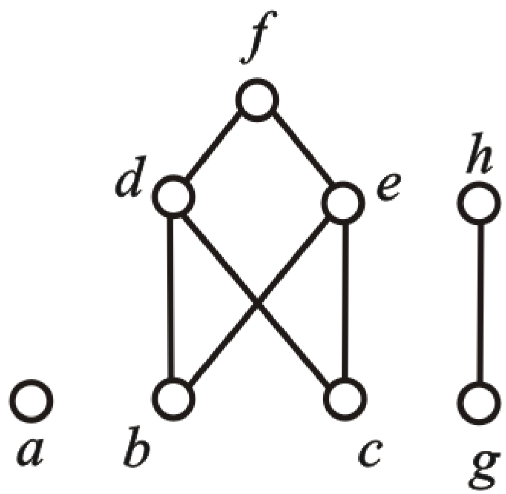
例12 偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, $R_{整除}$>和< $P(\{a,b,c\})$, $R_\subseteq$ >的哈斯图.





实例

例13 已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如下图所示, 试求出集合A和关系R的表达式.



解 $A=\{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

偏序集中的特殊元素

定义7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为B的最小元

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为B的最大元

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极小元

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极大元

性质:

(1) 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，可能存在多个.

(2) 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.

(3) 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.

(4) 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集中的特殊元素

定义7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$

(1) 若$\forall x(x \in B \to x \preccurlyeq y)$成立, 则称$y$为$B$的上界

(2) 若$\forall x(x \in B \to y \preccurlyeq x)$成立, 则称$y$为$B$的下界

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, C的最小元为B的最小上界或上确界

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, D的最大元为B的最大下界或下确界

性质:

(1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在

(2) 下界、上界存在不一定惟一

(3) 下确界、上确界如果存在，则惟一

(4) 集合的最小元是其下确界，最大元是其上确界；反之不对.

实例

例14 设偏序集$<A,\preccurlyeq>$，求A的极小元、最小元、极大元、最大元，设$B=\{b,c,d\}$, 求B的下界、上界、下确界、上确界.

解

极小元：a, b, c, g;

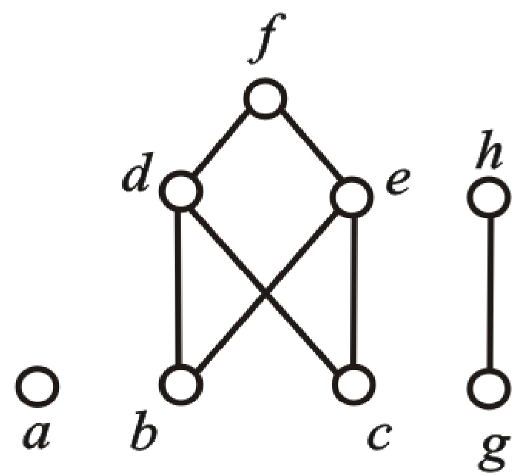
极大元：a, f, h;

没有最小元与最大元.

B的下界和最大下界都不存在;

上界有 d 和 f,

最小上界为 d.



实例

例15 设X为集合, $A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$, 且$A\neq\varnothing$. 若$|X|=n$, $n\geq 2$. 问:

(1) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最大元?

(2) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最小元?

(3) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.

解 (1) $<A, R_{\subseteq}>$ 不存在最小元和最大元, 因为$n\geq 2$.

(2) $<A, R_{\subseteq}>$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即$\{x\}$, $x\in X$.

(3) $<A, R_{\subseteq}>$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即$X-\{x\}$, $x\in X$.

调度问题

有穷任务集T，m台相同的机器，

T上存在偏序$\preccurlyeq$，若 $t_1 \prec t_2$，任务t_1完成后 t_2才能开始.

$\forall t \in T$, $l(t)$是 t 需要的时间，$d(t)$是 t 的截止时间，$l(t), d(t) \in Z^+$

开始时间为0，$\sigma: T \to \{0,1, \ldots\}$表示对任务集 T 的一个调度，

完成所有任务的时间：$D = \max\{\sigma(t)+l(t) \mid t \in T\}$

可行调度 σ 满足：

(1) $\forall t \in T, \sigma(t)+l(t) \le d(t)$ 每个任务都在截止时间之前完成

(2) $\forall i, 0 \le i \le D, |\{t \in T \mid \sigma(t) \le i < \sigma(t)+l(t)\}| \le m$

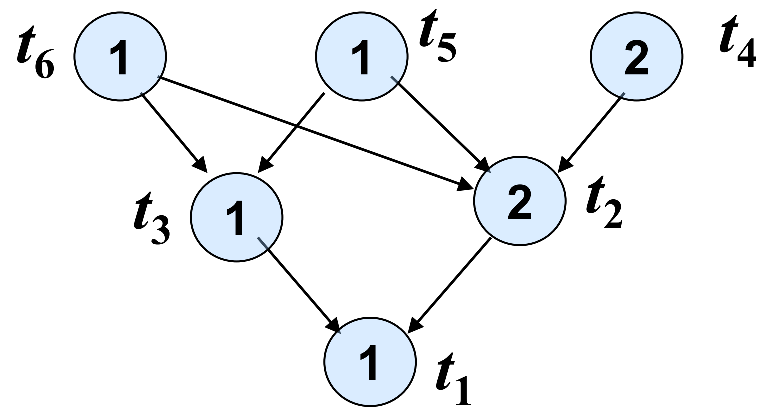
至多m个任务并行

(3) $\forall t, t' \in T, t \prec t' \Rightarrow \sigma(t)+l(t) \le \sigma(t')$ 任务安排满足偏序

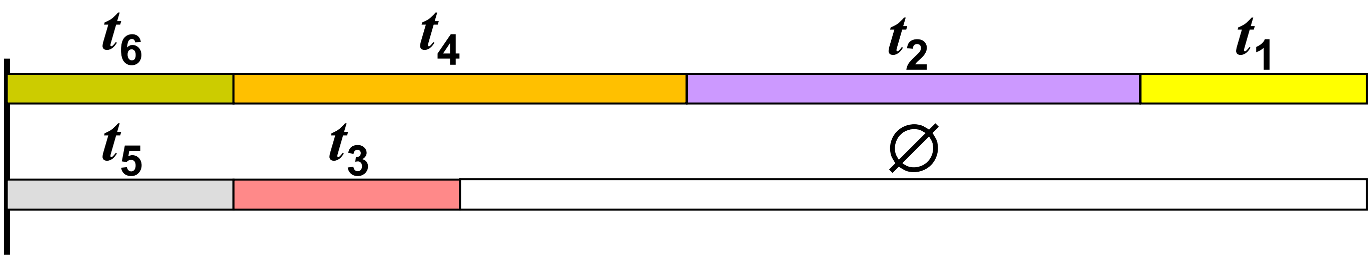
寻找最优调度

例16 m=2, T={ t_1, t_2, … , t_6 }

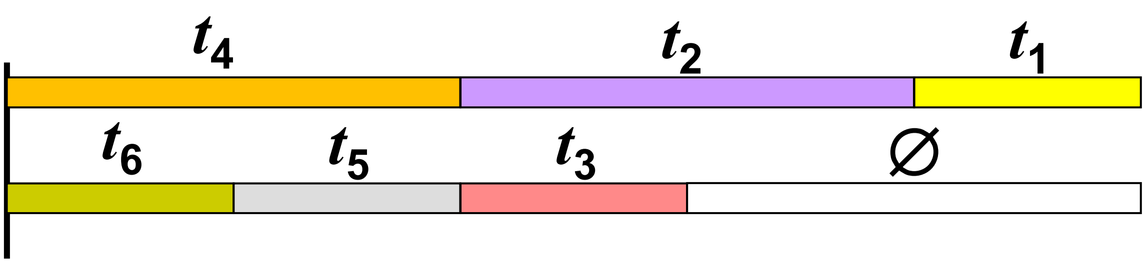
$l(t_i)$ 如图所示，$d(t_i)$=7



拓扑排序： m=1，t_i 都相等



D=6



D=5

第七章 习题课

主要内容

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从A到B的关系、A上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图
- 关系的运算：定义域、值域、域、逆、合成、限制、像、幂
- 关系运算的性质：A上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递的性质
- A上关系的自反、对称、传递闭包
- A上的等价关系、等价类、商集与A的划分
- A上的偏序关系与偏序集

基本要求

- 熟练掌握关系的三种表示法
- 能够判定关系的性质（等价关系或偏序关系）
- 掌握含有关系运算的集合等式
- 掌握等价关系、等价类、商集、划分、哈斯图、偏序集等概念
- 计算$A\times B$, dom R, ran$R$, fld$R$, R^{-1}, $R\circ S$, R^n , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
- 求等价类和商集A/R
- 给定A的划分π，求出π所对应的等价关系
- 求偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界
- 掌握基本的证明方法

  证明涉及关系运算的集合等式

  证明关系的性质、证明关系是等价关系或偏序关系

练习1

1． 设$A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{<x,y> \mid x, y\in A$且$x+2y \le 6 \}$，

$S = \{<1,2>, <1,3>,<2,2>\}$,

求:

(1) R的集合表达式

(2) R^{-1}

(3) dom R, ran R, fld R

(4) $R\circ S$, R^3

(5) $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

解答

(1) $R = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>\}$

(2) $R^{-1} = \{<1,1>, <2,1>, <1,2>, <2,2>, <1,3>\}$

(3) $\mathrm{dom}R = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{ran}R = \{1,2\}$, $\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3\}$

(4) $R \circ S = \{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^3 = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

(5) $r(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,3>\}$

$s(R) = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>, <2,2>, <3,1>, <1,3>\}$

$t(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

练习2

2．设$A=\{1,2,3,4\}$，在$A\times A$上定义二元关系R：

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求R导出的划分.

$$\begin{aligned} A\times A=\{&<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>,\\ &<2,3>, <2,4>,<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>,\\ &<4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>\} \end{aligned}$$

根据 $<x,y>$ 中的 $x+y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 将A划分成等价类：

$$\begin{aligned} A/R=\{&\{<1,1>\}, \{<1,2>,<2,1>\}, \{<1,3>, <2,2>, <3,1>\},\\ &\{<1,4>, <2,3>, <3,2>, <4,1>\},\\ &\{<2,4>, <3,3>, <4,2>\},\\ &\{<3,4>, <4,3>\}, \{<4,4>\}\} \end{aligned}$$

练习3

3．设*R*是Z上的模 *n* 等价关系, 即

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y (\mathrm{mod}\, n),$$

试给出由*R*确定的Z的划分π.

解　设除以 *n* 余数为 *r* 的整数构成等价类 [*r*]，则

$$[r] = \{\, kn + r \mid k \in \mathrm{Z} \,\},\quad r = 0, 1, \ldots, n-1$$

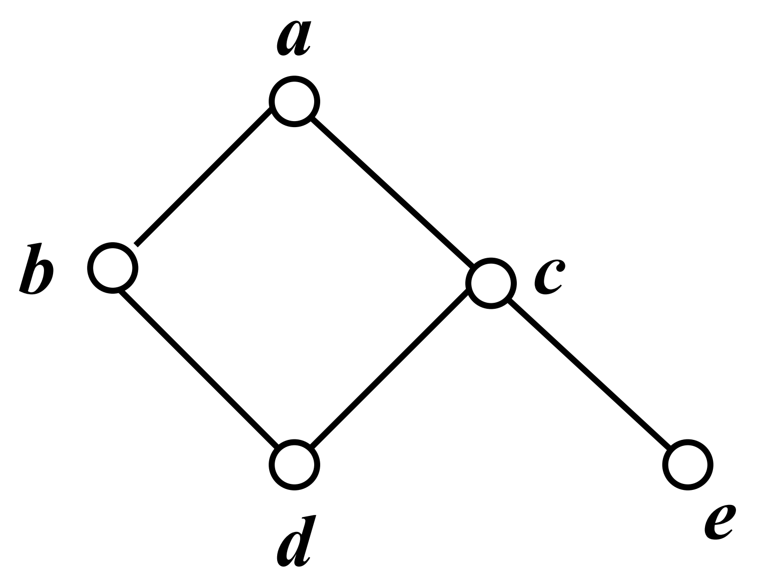
$$\pi = \{\, [r] \mid r = 0, 1, \ldots, n-1 \}$$

练习4

4．设偏序集 $<A, R>$ 的哈斯图如图所示.

(1) 写出A和R的集合表达式

(2) 求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元



解

(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{<d,b>, <d,a>, <d,c>, <e,c>, <e,a>, <b,a>, <c,a>\} \cup I_A$

(2) 极大元和最大元是a,

极小元是d, e;

没有最小元.

练习5

5．设R是A上的二元关系，设

$$S=\{<a,b>\mid \exists c(<a,c>\in R\wedge <c,b>\in R)\}.$$

证明如果R是等价关系，则S也是等价关系。

证 R是A上的等价关系.

(1) 证自反 任取x,

$$x\in A \Rightarrow <x,x>\in R \Rightarrow \exists x\ (<x,x>\in R\wedge <x,x>\in R) \Rightarrow <x,x>\in S$$

(2) 证对称 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in S \Rightarrow \exists c(<x,c>\in R\wedge <c,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists c\ (<c,x>\in R\wedge <y,c>\in R) \Rightarrow <y,x>\in S$$

(3) 证传递 任取$<x,y>$, $<y,z>$,

$$<x,y>\in S \wedge <y,z>\in S$$

$$\Rightarrow \exists c\ (<x,c>\in R\wedge <c,y>\in R) \wedge \exists d\ (<y,d>\in R\wedge <d,z>\in R)$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in S$$

练习6

6．设偏序集$<A,R>$和$<B,S>$，定义$A\times B$上二元关系T:

$$<x,y>T<u,v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明T为偏序关系.

证　(1) 自反性　任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow <x,y>T<x,y>$$

(2) 反对称性　任取$<x,y>,<u,v>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<x,y> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow <x,y>=<u,v>$$

(3) 传递性　任取$<x,y>,<u,v>, <w,t>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$$

关系性质的证明方法

1. 证明R在A上自反

任取x,

$x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$

前提　　　　推理过程　　　　结论

2. 证明R在A上对称

任取$\langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$

前提　　　　推理过程　　　　结论

关系性质的证明方法

3. 证明R在A上反对称

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x = y$$

前提　　　　推理过程　　　　结论

4. 证明R在A上传递

任取$<x,y>$,$<y,z>$,

$$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$$

前提　　　　推理过程　　　　结论

练习7

7．R,S为A上的关系，证明 $R\subseteq S \Rightarrow t(R) \subseteq t(S)$

证　只需证明对于任意正整数n, $R^n \subseteq S^n$. 对n归纳.

$n=1$, 显然为真.

假设对于n，命题为真，任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in R^{n+1} \\
\Rightarrow\ & <x,y>\in R^n\circ R \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in R^n \wedge <t,y>\in R) \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in S^n \wedge <t,y>\in S) \\
\Rightarrow\ & <x,y>\in S^n\circ S \\
\Rightarrow\ & <x,y>\in S^{n+1}
\end{aligned}
$$

关系等式或包含式的证明方法

- 数学归纳法（主要用于幂运算）
- 证明中用到关系运算的定义和公式, 如:

$x \in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in R)$

$y \in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(<x,y> \in R)$

$<x,y> \in R \Leftrightarrow <y,x> \in R^{-1}$

$<x,y> \in R \circ S \Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \wedge <t,y> \in S)$

$<x,y> \in R \upharpoonright A \Leftrightarrow x \in A \wedge <x,y> \in R$

$y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge <x,y> \in R)$

$r(R) = R \cup I_A$

$s(R) = R \cup R^{-1}$

$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$