关系(Relation) : 两个定义

(1) 序偶的一个集合, 确定了一个二元关系R。R 中任一序偶 <x,y>,可记作 <x, y>∈R 或 xRy

(2) 笛卡尔积的子集： $R \subseteq A \times B$

对通常的"关系"给出了一种抽象的描述.

例： 令 A=B={1,2,3} R={<1,2>,<1,3>,<2,3>}，其实R就是通常意义下的 ‘<' 关系。

前域 **dom(R)** $= \{x \mid \exists y.\langle x,y\rangle \in R\}$

值域 **ran(R)** $= \{y \mid \exists x.\langle x,y\rangle \in R\}$

域 **fld(*R*)** $= \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

例5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的限制记作 $R\restriction A$, 其中

$$R\restriction A = \{ \langle x,y\rangle \mid xRy \wedge x\in A \}$$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\restriction A)$$

例： 设$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$, 则

$R\restriction\{1\} = \{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

$R\restriction\varnothing = \varnothing$

$R\restriction\{2,3\} = \{\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

$R[\{1\}] = \{2,3\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$

R⊆ A×B,则称R是从A到B的关系.

当 A=B 时称 R 为 A 上的二元关系.

全域关系 $A \times B$

空关系 $\varnothing$

恒等关系 $I_A = \{<x,x> \mid x \in A\}$

关系的表示

关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\ r_{ij}\ ]_{m \times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow <x_i, y_j> \in R.$$

关系图

若$A= \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$, 其中$A$为结点集，$R$为边集. 如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

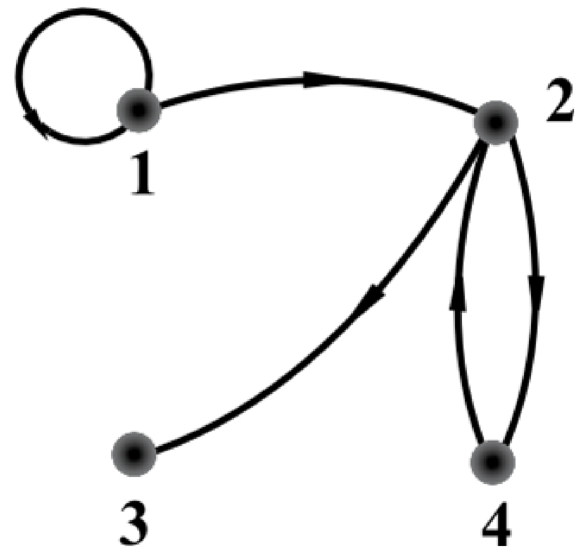
注意：

- 关系矩阵适合表示从A到B的关系或A上的关系（A,B为有穷集）
- 关系图适合表示有穷集A上的关系

实例

$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,
R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



复合关系 (Composition)

$$R \circ S = \{ \langle x, z\rangle \mid \exists\, y\, (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S) \}$$

例： $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^{-1} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R \circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$S \circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

- $(R\circ S)\circ P = R\circ (S\circ P)$

  (设 $R \in X\times Y$, $S\in Y\times Z$, $P\in Z\times W$)

- $R^m = R\circ R\circ \ldots \circ R$

  (m个R)

逆关系 (Inverse)

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$

- 互逆 $(R^{-1})^{-1} = R$

定理1: 设R , S都是从A到B的二元关系,则

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(A \times B)^{-1} = B \times A$$

$$(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$$

定理2: 设$R \subseteq X \times Y$,$S \subseteq Y \times Z$,则 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

3、关系性质与闭包

概念:

自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的, 传递的

自反闭包 r(R),对称闭包 s(R), 传递闭包 t(R)

注意：讨论关系性质时，均假定R为某个集合A上的二元关系，即$R \subseteq A\times A$.

自反的 Reflexive

若 $\forall x\in A$，都有$<x,x>\in R$, 则称 R 是自反的.

反自反的 Anti-Reflexive

若 $\forall x\in A$，都有$<x,x> \notin R$, 则称 R 是反自反的.

实例：$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

R_2 自反，R_3 反自反，R_1既不是自反的也不是反自反的.

对称的 Symmetric

对任意$x,y\in A$,满足，若 $<x,y>\in R$,则$<y,x>\in R$

反对称的 Anti-symmetric

对任意$x,y\in A$,满足，若 $<x,y>\in R$ 且 $<y,x>\in R$,则$x=y$

例：设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$，$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1：对称和反对称； R_2：只有对称；R_3：只有反对称；
R_4：不对称、不反对称

传递的 Transitive

对任意的 $x,y,z \in A$, 满足:

若 $<x,y> \in R$ 且 $<y,z> \in R$, 则 $<x,z> \in R$,

则称R是传递的.

例： 设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

自反闭包 (Reflexive closure)

设**R**是**A**上的二元关系,如果有另一个关系**R'**满足:

①**R'**是自反的;

② **R'**$\supseteq$**R**;

③对于任何自反的关系**R''**,若**R''**$\supseteq$**R**, 则有**R''**$\supseteq$**R'**.

则称关系**R'为R的自反闭包. 记为 r(R).**

注: 类似地可定义对称闭包 **s(R)** 和传递闭包 **t(R)**。

定理：设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup I_A$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

特殊地，若$|A|=n$，则 $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$

例: 设A={1,2,3}, 在A上定义表示 R ={< 1,2> ,< 2,3>}.
求 r(R), s(R), t(R).

4、等价关系

概念：

等价关系，等价类，商集，划分.

等价关系 (Equivalence relation)

设 R 为集合 A 上的一个二元关系。若 R 是自反的, 对称的, 传递的，则称 R 为 A 上的等价关系.

例: 令A={1,2,3,4}

R={< 1,1> ,< 1,4> ,< 4,1> ,< 4,4> , < 2,2> ,< 2,3> ,
< 3,2> ,< 3,3>}

等价类 (Equivalence class)

设R为集合A上的等价关系, 对$\forall a \in A$, 定义:

$$[a]_R = \{x | x \in A \text{ 且 } <a,x> \in R\}$$

称之为**元素a关于R的等价类**。

例(续上): $[1]_R=[4]_R=\{1,4\}$

$[2]_R=[3]_R=\{2,3\}$

定理1: 给定A上的等价关系R,对于$a,b \in A$有

aRb iff $[a]_R=[b]_R$

商集 (Quatient set)

设**R**是**A**上的等价关系，定义 $A/R=\{[a]_R|a\in A\}$

称之为**A关于R的商集.**

例: (见上例)中商集为: $\{[1]_R,[2]_R\}$

或更详细写成 $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$

划分（Partition）

设 A 为非空集合, 若 A 的子集族 $\pi(\pi \subseteq P(A))$ 满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个划分, 称 π 中的元素为 A 的划分块.

定理2: 给定集合 A 上的等价关系 R, 则商集 A/R 是 A 的一个划分.

例(见上例): A/R={{1,4},{2,3}}是一个划分.

定理3: 集合A的一个划分π诱导出A上的一个等价关系R. R定义为R= {<x,y>| x,y $\in$A 且x,y在π的同一分块中}

例: 设A={a,b,c,d,e}的一个划分为S={ {a,b},{c},{d,e} }. 求由划分S诱导的A上的一个等价关系R.

定理 4: 设R_1和R_2为非空集合A上的一个等价关系,

则 $R_1 = R_2$ iff $A/R_1 = A/R_2$.

5、偏序关系

概念：

偏序，哈斯图，全序(线序)，极大元/极小元，最大元/最小元，上界/下界.

偏序 (Partial Ordering)

设A是一个集合. 如果 A 上的二元关系 R 是自反的,反对称的和传递的, 则称R是A上的一个偏序关系. 记R为“$\leq$”, 且称序偶$<A,\leq>$ 为偏序集。

例: 设A={a,b},在 P(A)上的二元关系R为包含关系, 即

$$R=\{ <x,y> \mid x,y\in P(A) \text{ 且 } x\subseteq y \}$$

证明: < P(A), R>是偏序集.

全序/线序(Total Ordering/ Linear Ordering)

设 <A,≤>为偏序集, 若对任 意的$x,y\in A$满足:

$x\le y$或 $y\le x$

则称 ≤ 为全序关系. <A,≤>为全序集.

例: (1) Z为整数集，<Z, ≤ >为全序集。

(2) 设A={a,b}，则< P(A), ⊆ >是偏序集，但不是全序集。

覆盖（Covering）

设$<A,\leq>$为偏序集,若$x,y\in A$,

$x\leq y, x\neq y$且没有其它元素z满足$x\leq z, z\leq y$,

则称**y覆盖x**. 记**covA**$=\{ <x,y> | x,y\in A$且y覆盖$x\}$

例:$cov(P(A))=\{ <\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,< \{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{a,b\}>\}$

哈斯图(Hasse Diagram)

作图规则

① 用小元圈∘代表元素;

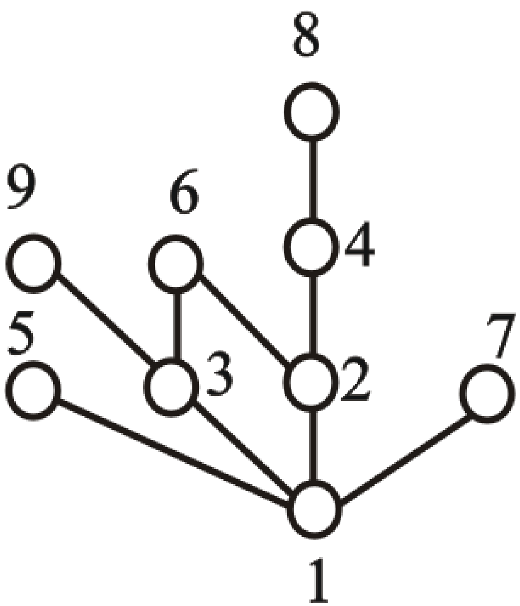
② 若$x \le y$且$x \ne y$,则将代表y的小元圈画在代表x的小元圈之上;

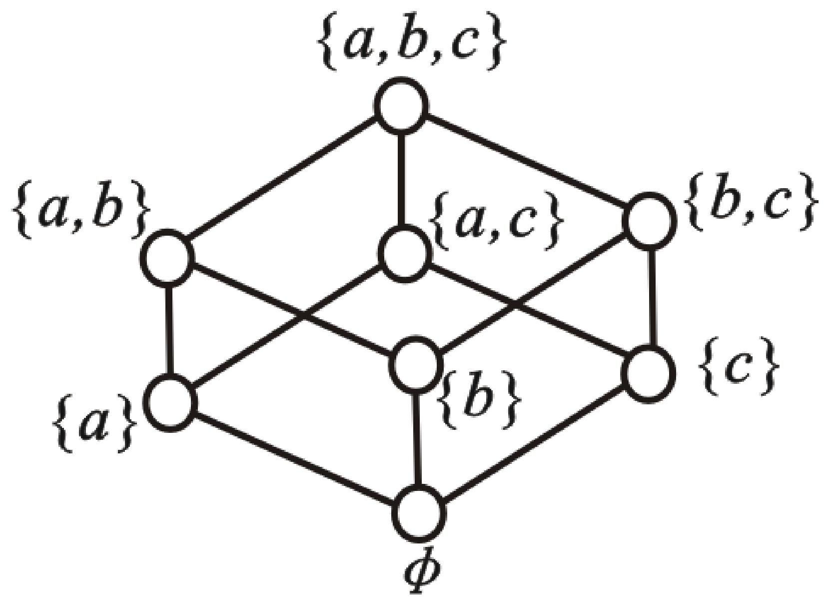
③ 若$\langle x,y\rangle \in covA$, 则在x,y之间用直线连接。

例: 画出 <P(A),R> 的哈斯图.

其他例子

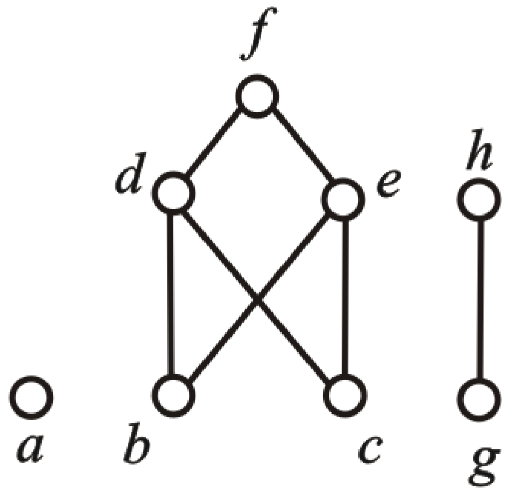
偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, *R*整除>和<*P*({*a*,*b*,*c*}),*R*$_\subseteq$>的哈斯图.





实例

已知偏序集**<*A*,*R*>**的哈斯图如下图所示, 试求出集合***A***和关系***R***的表达式.



解 $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R=\{\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle,\langle g,h\rangle\}\cup I_A$

极小元(Minimal Element)/极大元(Maximal Element)

设$<A,\leq>$为偏序集, $B\subseteq A$

(1) 对$b\in B$，若B中不存在x满足:

$$b\neq x 且 x\leq b$$

则称b为B的极小元.

(2) 对$b\in B$，若B中不存在x满足:

$$b\neq x 且 b\leq x$$

则称b为B的极大元.

最小元(The Smallest Element) / 最大元 (The Greatest Element)

设$\langle A,\leq\rangle$为偏序集,$B\subseteq A$,若有某个$b\in B$

(1) 对于B中每一个元素x都有$b\leq x$，则称b为B的最小元.

(2) 对于B中每一个元素x都有$x\leq b$，则称b为B的最大元.

下界(Lower Bound) / 上界(Upper bound)

设<A,≤>为偏序集, B⊆ A

(1) 若有a∈A,且对∀x∈B 满足 a≤x，则称a为B的下界。

进一步:设a为B的下界,若B的所有下界y均有y≤a,

则称a为B的下确界，记为glb B。

(2) 若有a∈A,且对∀x∈B 满足 x≤a，则称a为B的上界。

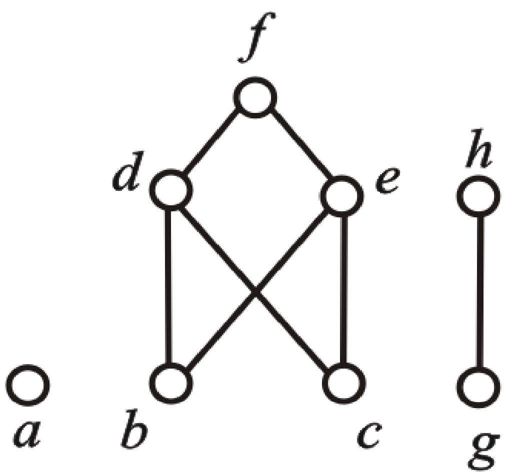
进一步:设a为B的上界,若B的所有上界y均有a≤y,

则称a为B的上确界，记为lub B。

▪

实例

设偏序集<A,≼>，求A的极小元、最小元、极大元、最大元，设B＝{ b,c,d }, 求B的下界、上界、下确界、上确界.



解

极小元：a, b, c, g;

极大元：a, f, h;

没有最小元与最大元.

B的下界和最大下界都不存在;

上界有 d 和 f,

最小上界为 d.