第四节 轴的扭转

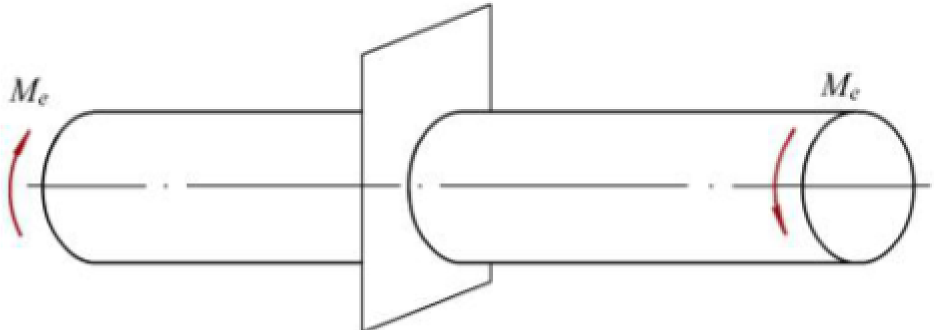
一、扭矩和扭矩图

作用于受扭轴上的外力偶矩M，根据轴所传递的功率P和转速n求得：

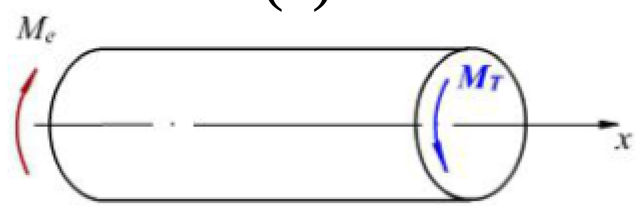
$$M = 9550\frac{P}{n}$$

截面法求横截面的内力:

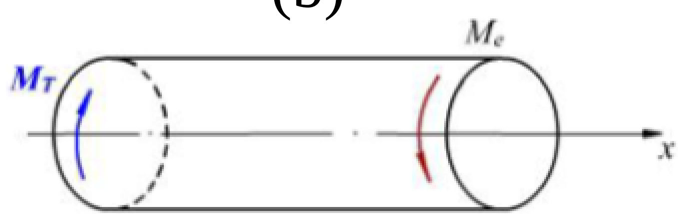
$$\sum M = 0 \Longrightarrow M_e = M_T$$



(a)



(b)



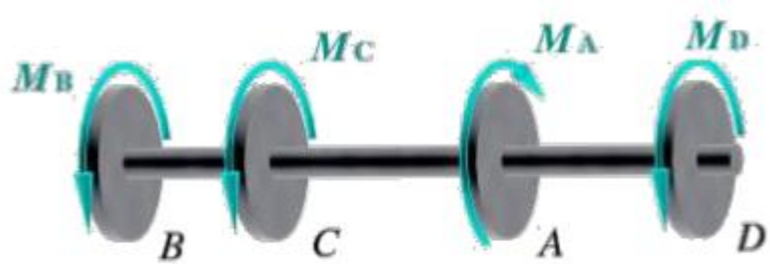
(c)

扭矩符号规定(右手螺旋法则)：

以右手的四指表示扭矩转向，当拇指指向离开横截面时扭矩取正，拇指指向横截面时扭矩为负。

[例1]

一传动轴，已知转速n=750r/min, 主动轮A输入功率P_A=50kW, 三个从动轮输出功率分别为P_B=15kW, P_C=15kW, P_D=20kW。不计轴承摩擦，计算轴的扭矩，并作扭矩图。



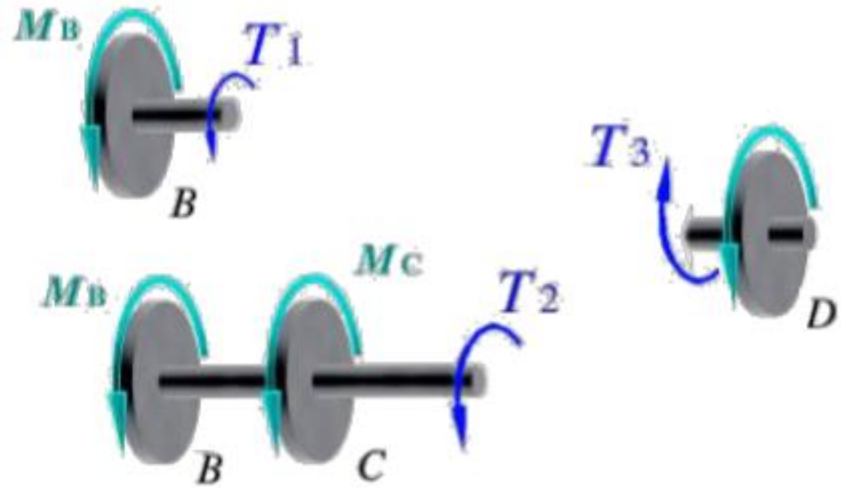
解：（1）计算外力偶矩。

$$M_A = 9550\frac{P_A}{n} = 636N \bullet m$$

$$M_B = M_C = 9550\frac{P_B}{n} = 191N \bullet m$$

$$M_D = 9550\frac{P_D}{n} = 254N \bullet m$$

(2) 计算扭矩。

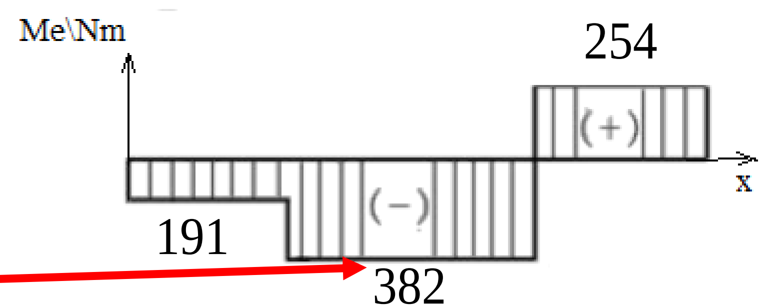


$$T_1 = -M_B = -191 N \bullet m$$

$$T_2 = -M_B - M_C = -382 N \bullet m$$

$$T_3 = M_D = 254 N \bullet m$$

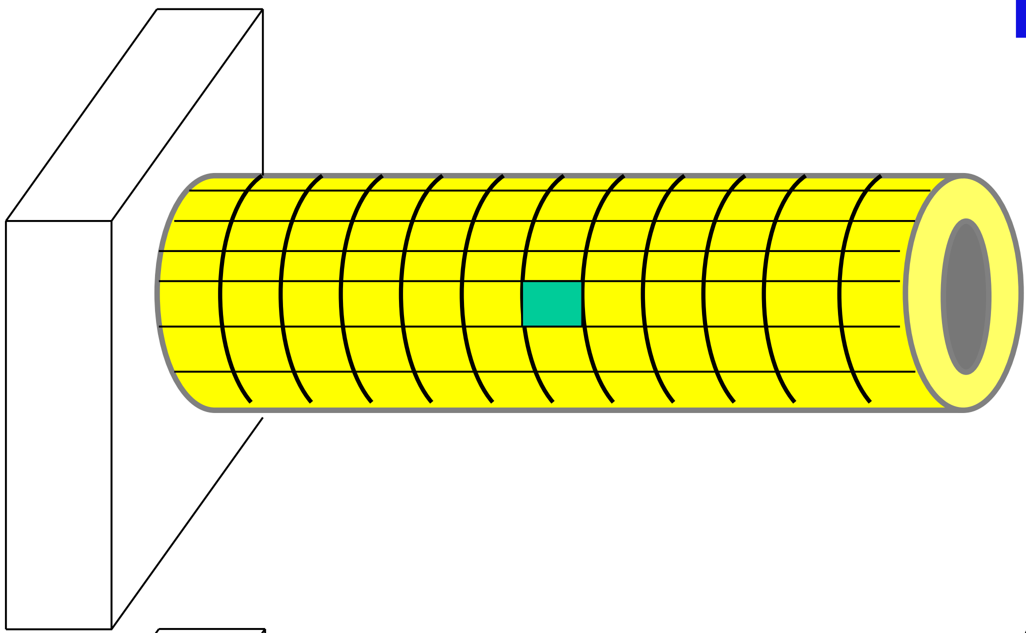
(3) 绘扭矩图。



最大扭矩值382N·m

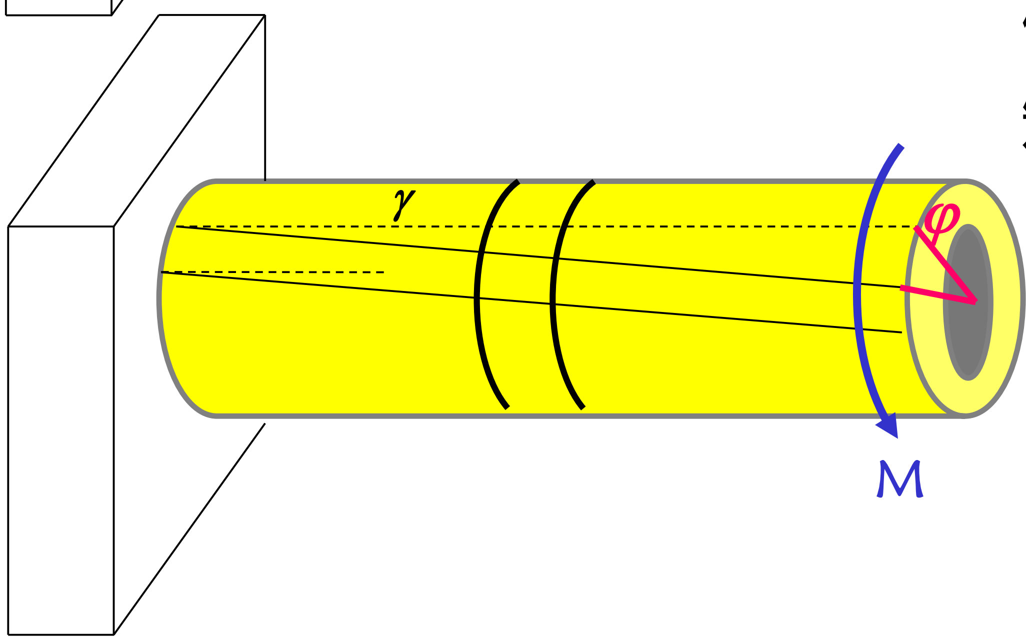
二、圆轴扭转时的应力

1、变形的几何关系



(1)各圆周线绕轴有相对转动，但形状、大小及两圆周线间的距离不变。

(2)各纵向线仍为直线，但都倾斜了同一角度γ，原来的小矩形变成平行四边形。



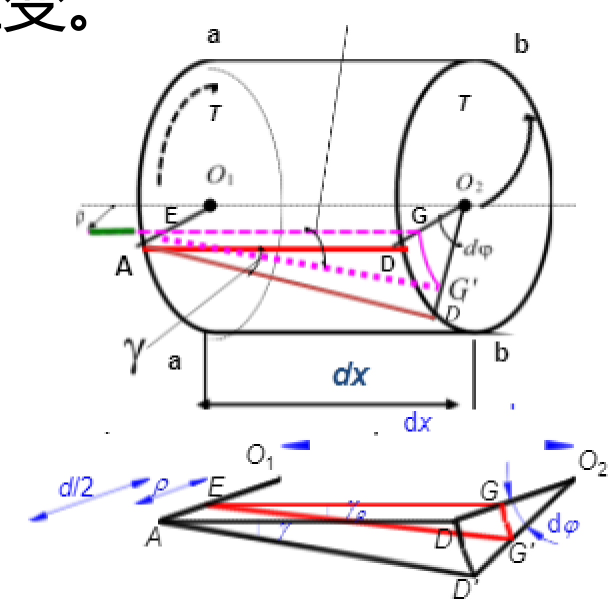
圆轴扭转的平面假设：

圆轴扭转前的横截面，变形后仍保持为平面；其半径仍保持为直线。

倾角γ是横截面圆周上任一点A处的切应变， $d\varphi$ 是b-b截面相对于a-a截面的扭转角。

经过半径O_2D上任一点G的纵向线EG也倾斜了一个角度γ_ρ，它就是横截面半径上任一点E处的切应变。

$$\gamma_\rho \approx \mathrm{tg}\gamma_\rho = \frac{\overline{GG'}}{EG} = \frac{\rho \mathrm{d}\varphi}{dx}$$

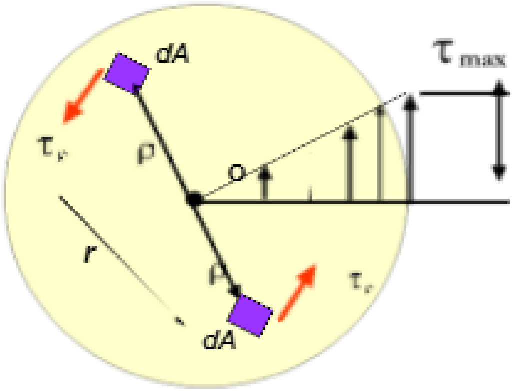


$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{dx}$ --扭转角沿杆轴线的变化率，对于给定的横截面为**常量**。

结论：横截面上任意点的切应变与该点到圆心的距离成正比。

2、应力与应变间的关系

由剪切胡克定律 $\tau = G\gamma$ 知:



$$\tau_\rho = G\rho\frac{d\varphi}{dx}$$

τ_ρ -- 横截面上半径为 ρ 处的切应力

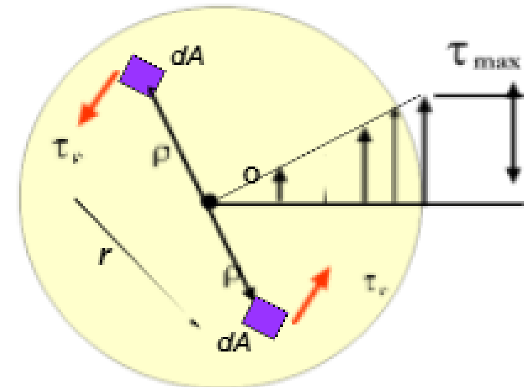
结论：圆轴横截面上任意点的切应力 τ_ρ 与该点到圆心的距离 ρ 成正比，其方向垂直于半径。

3、静力关系

取微面积dA, 则内力合力为 $\tau_\rho dA$

合力对圆心的微力矩为（$\tau_\rho dA$）ρ

横截面上的扭矩：



$$M_n=\int_A \rho\tau_\rho dA$$

即：

$$M_n=G\frac{d\varphi}{dx}\int_A \rho^2 dA$$

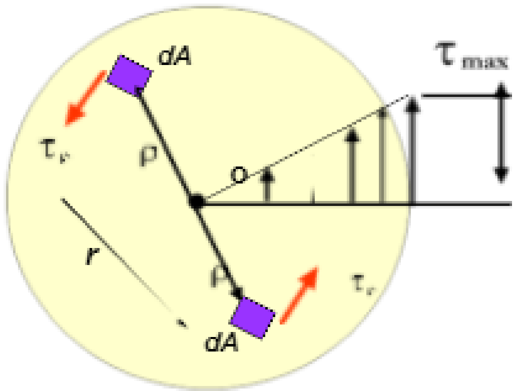
其中$\int_A \rho^2 dA$ 称为横截面上的极惯性矩I_P, 它是横截面的几何性质。

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{M_n}{GI_P}$$

得横截面上的切应力计算公式：$$\tau_\rho=\rho\frac{M_n}{I_P}$$

当 ρ 达到最大值R时，切应力为最大切应力，即：

$$\tau_{\max} = R\frac{M_n}{I_P} = \frac{M_n}{W_P}$$

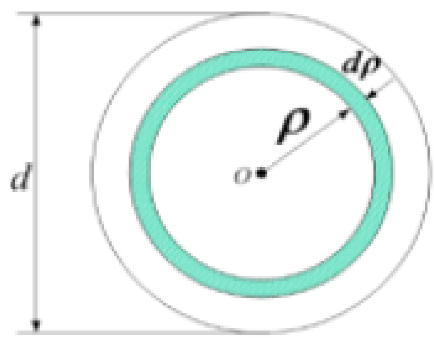


式中W_P称为抗扭截面系数（m^3）

$$W_P = \frac{I_P}{R}$$

实心圆截面：

$$I_P = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$



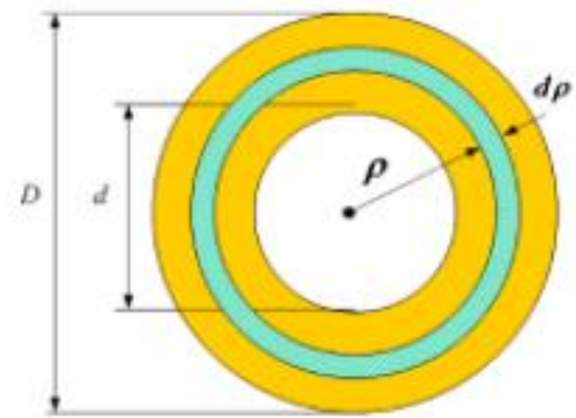
$$W_P = \frac{I_P}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

空心圆截面：

$$I_P=\int_A \rho^2 dA=\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)=\frac{\pi D^4}{32}(1-a^4)$$

$$W_P=\frac{I_P}{D/2}=\frac{\pi(D^4-d^4)}{16D}=\frac{\pi D^3}{16}(1-a^4)$$

式中 $a=d/D$



三、圆轴扭转时的变形

由 $\dfrac{d\varphi}{dx}=\dfrac{M_n}{GI_P}$　　得 $d\varphi=\dfrac{M_n}{GI_P}dx$

$$\varphi=\int_0^{\varphi}d\varphi=\int_0^{l}\frac{M_n}{GI_P}dx$$

若在长度为l的一段轴内，各横截面上的扭矩相同，则这段轴两端横截面间的相对扭转角为：

$$\varphi=\frac{M_n}{GI_P}l$$

GI_P 圆轴的扭转刚度，反映圆轴抵抗扭转变形的能力。

四、圆轴扭转时的强度与刚度计算

1. 强度计算

$$\tau_{\max} = \left|\frac{M_n}{W_P}\right| \le [\tau]$$

静载扭转时：

塑性材料：$[\tau] = (0.5 \sim 0.6)[\sigma]$

脆性材料：$[\tau] = (0.8 \sim 1.0)[\sigma]$

2. 刚度计算

$$\theta_{\max} = \left|\frac{M_n}{GI_P}\right|_{\max} \le [\theta]\,(rad/m)$$

或

$$\theta_{\max} = \left|\frac{M_n}{GI_P}\right|_{\max} \times \frac{180}{\pi} \le [\theta]\,(^\circ/m)$$

精密机械的轴： $[\theta] = 0.25 \sim 0.50(^\circ/m)$

一般传动轴： $[\theta] = 0.5 \sim 1.0(^\circ/m)$

精密度较低的轴： $[\theta] = 1 \sim 2.5(^\circ/m)$

[例2] 已知例1所示传动轴材料的许用切应力 $[\tau] = 50MPa$。(1)试求选用实心轴时的最小直径 D_{min}；(2)选用外径为60mm，壁厚为4mm的空心轴时强度是否够?

解：（1）由例1可见， $|M_n|_{\max} = 382N \bullet m;$

由强度条件可得抗扭截面系数为：

$$W_P \geq \frac{|M_n|_{\max}}{[\tau]} = \frac{382}{50 \times 10^6} = 7.64 \times 10^{-6} m^3$$

实心轴 $W_P = \frac{\pi D^3}{16}$，代入上式，得 $D \geq 33.9mm \longrightarrow D_{\min} = 33.9mm$

（2）若选外径D=60mm，内径d=52mm的空心轴

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16}(1 - a^4) = 18484mm^3$$

$$\tau_{\max} = \left|\frac{M_n}{W_P}\right| = 20.6MPa < [\tau]$$

故强度足够。

若实心圆轴采用直径D_1=40mm，则截面积A_1=1256.6mm^2。

若采用D=60mm，d=52mm的空心圆轴，则截面积A_2=703.7mm^2。

由于两轴的长度与材料相同，故其重量之比就等于横截面积之比，

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{703.7}{1256.6}=0.56=56\%$$

可见，采用空心圆轴较采用实心圆轴减轻了机器的重量，具有重要的工程应用价值。

[例3] 空心圆轴以n=180r/min匀速转动，传递功率为5kW，外径D=42mm，内径d=32mm。已知材料的 $[\tau]=50MPa$，切变模量G=80GPa。要求 $[\theta]=1^\circ/m$。试对此轴进行强度与刚度校核。

解：（1）刚度条件校核。

$$M_n = M = 9550\frac{P}{n} = 9550\times\frac{5}{180} = 265.3(N\bullet m)$$

$$I_P = \frac{\pi}{32}(D^4-d^4) = \frac{\pi}{32}(42^4-32^4)\times10^{-3\times4} = 202.5\times10^{-9}(m^4)$$

$$\theta_{\max} = \left|\frac{M_n}{GI_P}\right|_{\max}\times\frac{180}{\pi} = \frac{265.3\times180/\pi}{80\times10^9\times202.5\times10^{-9}} = 0.94^\circ/m\le[\theta]$$

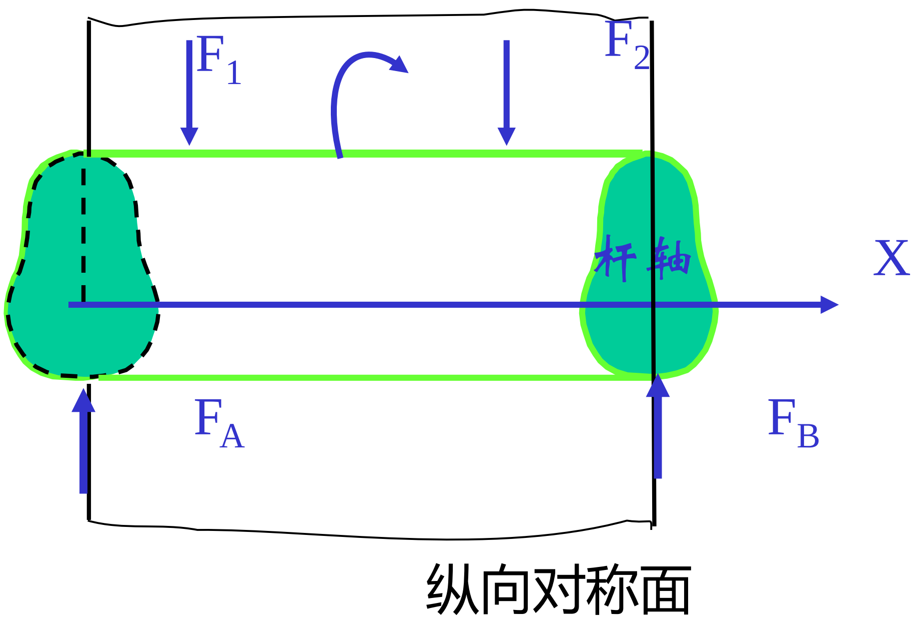
（2）强度条件校核。

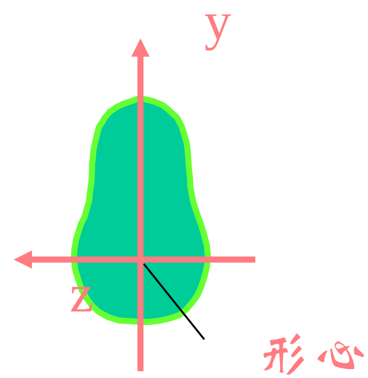
$$\tau_{\max} = \left|\frac{M_n}{W_P}\right| = 27.5MPa<[\tau]$$

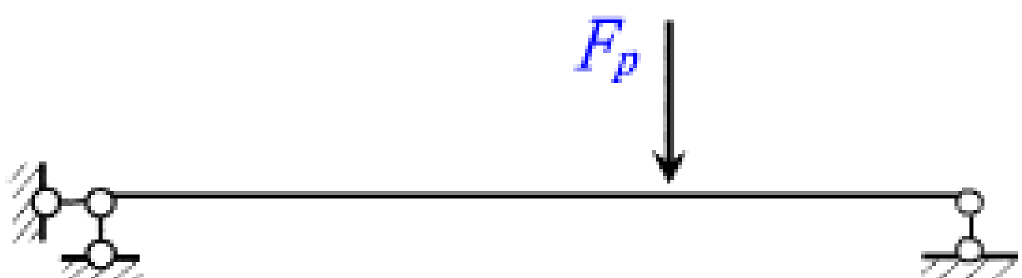
所以，此轴的强度、刚度均符合要求。

第五节 梁的弯曲强度

杆件承受垂直于其轴线方向的外力,或在其轴线平面内作用有外力偶时, 杆的轴线变为曲线.以轴线变弯为主要特征的变形称为弯曲。







一、梁的内力分析

1. 剪力与弯矩

梁的内力有两个：剪力和弯矩

利用**截面法**，列**力的平衡方程**

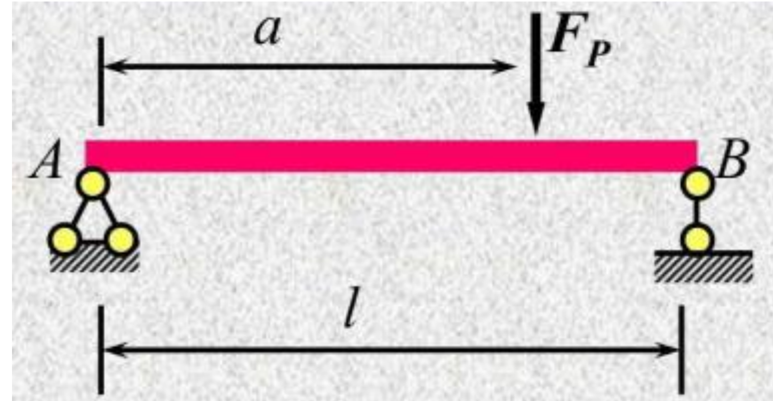
$$\sum F_y = 0,\ \ \mathrm{F}_{Ay} - V = 0$$

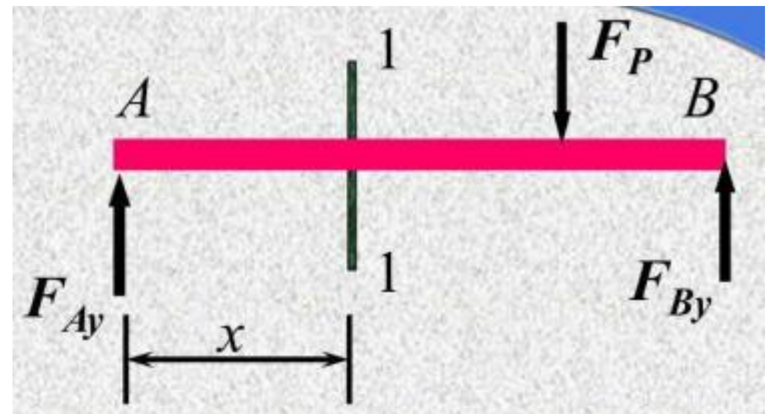
$$\mathrm{V}=\mathrm{F}_{Ay}$$

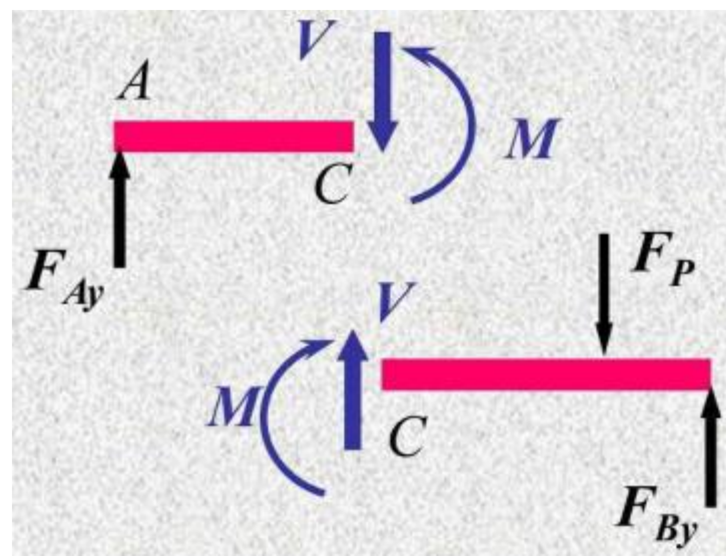
$$\sum M_C(F) = 0,\ \ \mathrm{M} - F_{Ay}x = 0$$

$$\mathrm{M}=\mathrm{F}_{Ay}x$$

若以**右段梁**为研究对象，得到**数值相等的剪力和弯矩**，但**剪力方向、弯矩转向**与**左段梁横截面上**的剪力方向、弯矩转向**相反**。

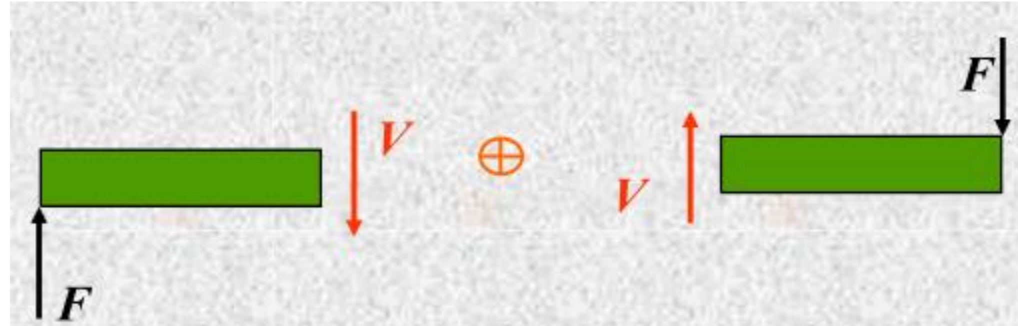






剪力与弯矩的正、负号规定

剪力绕分离体产生**顺时针**转动趋势时为**正**



剪力绕分离体产生**逆时针**转动趋势时为**负**

弯矩使分离体**凹面向上（上凹）或下凸**为**正**

弯矩使分离体**凹面向下（下凹）或上凸**为**负**

2. 剪力图和弯矩图

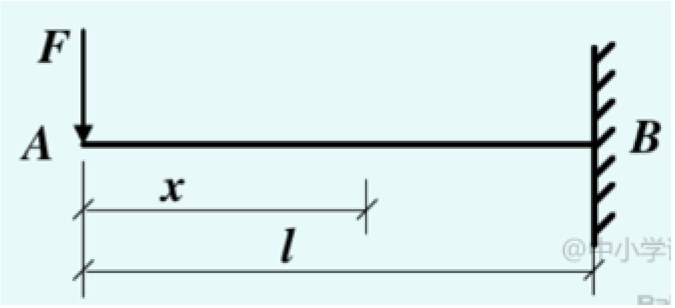
以横坐标x表示梁各横截面的位置，则梁横截面上的剪力和弯矩都可以为坐标x的函数，即

剪力方程 $\mathrm{F}_S = F_S(x)$

弯矩方程 $\mathrm{M} = M(x)$

为了形象地表示剪力和弯矩沿梁轴线的变化规律，可以根据剪力方程和弯矩方程分别画出**剪力图**和**弯矩图**。即以沿梁轴的横坐标x表示梁横截面的位置，以纵坐标表示相应截面的剪力和弯矩。

[例1] 如图所示，悬臂梁AB的跨度为l，其自由端A受到集中力F的作用，试画出该梁的剪力图和弯矩图。



解：（1）分段

由于AB段上无载荷变化，只有AB 段一段；

（2）列剪力方程和弯矩方程

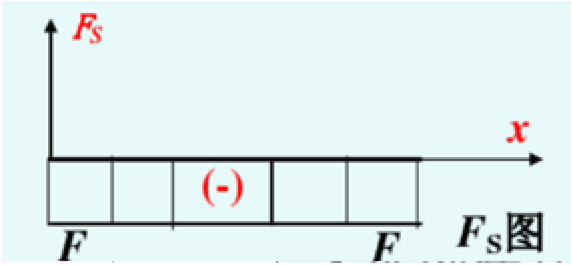
取距原点为x的任一截面，计算该截面上的剪力和弯矩，并把它们表示为x的函数，则有

剪力方程 $F_S(x) = -F \quad (0<x<l)$

弯矩方程 $M(x) = -Fx \quad (0 \le x<l)$

(3) 画剪力图和弯矩图

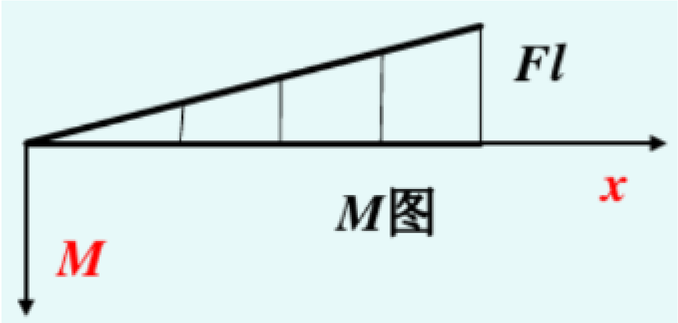
由剪力方程可知，$F_S(x)$ 是一常数，不随梁内横截面位置的变化而变化，所以F_S图是一条平行于x轴的直线，且位于x轴的下方。



由弯矩方程可知，M(x) 是一次函数，弯矩沿梁轴按直线规律变化，弯矩图是一条斜直线。

$$x=0,\ M_A=0$$

$$x=l,\ M_B=-Fl$$



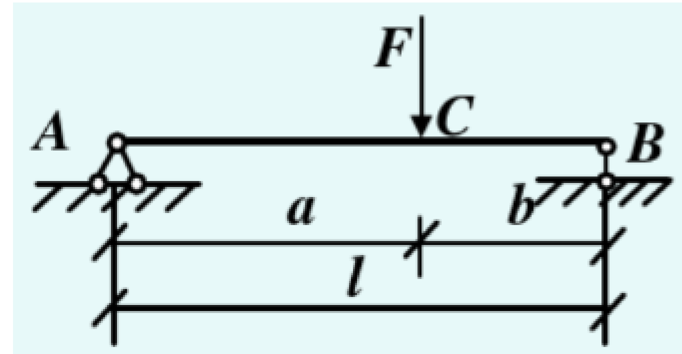
由剪力图和弯矩图可知：

$$\left|F_S\right|_{\max}=F$$

$$\left|M\right|_{\max}=Fl$$

由于在剪力图和弯矩图中的坐标比较明确，习惯上可将坐标轴略去。

[例2] 如图所示，简支梁受集中力F的作用，试画出该梁的剪力图和弯矩图。



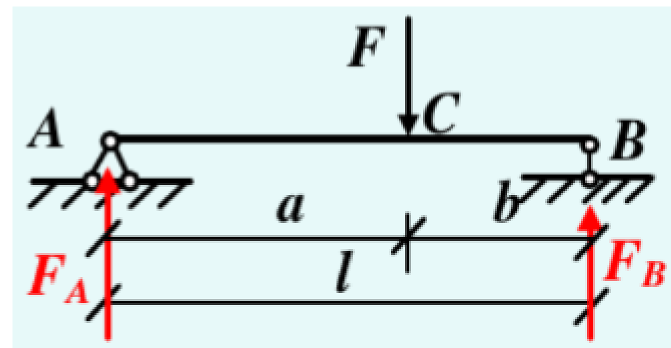
解: (1)求支座反力。以整体为研究对象，列平衡方程。

由$\sum M_A(F)=0$，得：$F_B \times l - F \times a = 0$

$$F_B = \frac{Fa}{l} \ (\uparrow)$$

由$\sum F_y = 0$，得：$F_A - F + F_B = 0$

$$F_A = \frac{Fb}{l} \ (\uparrow)$$

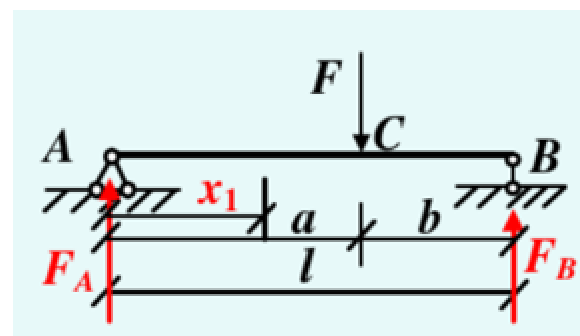


(2)列剪力方程和弯矩方程。梁在C处有集中力作用，故AC段和CB段的剪力方程和弯矩方程不同，要分段列出。

AC段：取距A为x_1的任意截面

$$F_S(x_1) = F_A = \frac{Fb}{l} \quad (0<x_1<a)$$

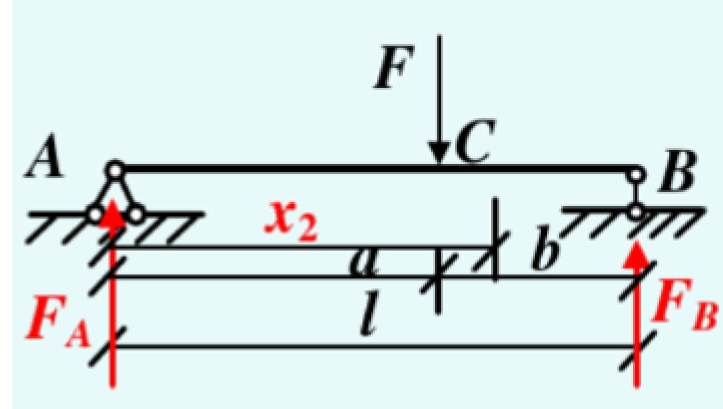
$$M(x_1) = F_A \bullet x_1 = \frac{Fb}{l} x_1 \quad (0 \le x_1 \le a)$$



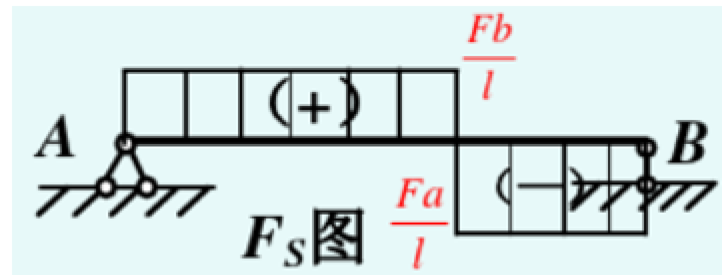
CB段：取距A为x_2的任意截面

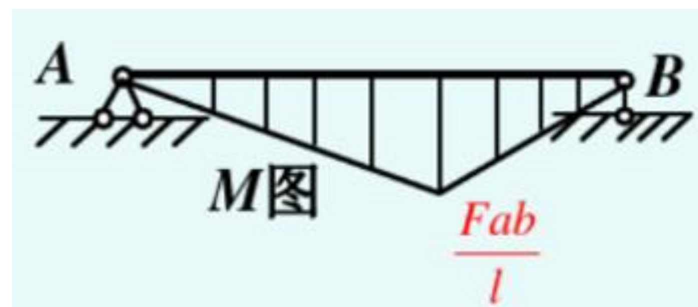
$$F_S(x_2)=-F_B=-\frac{Fa}{l}\quad(a<x_2<l)$$

$$M(x_2)=F_B(l-x_2)=\frac{Fa}{l}(l-x_2)\quad(a\le x_2\le l)$$



(3)画剪力图和弯矩图。由剪力方程可知，AC段和CB段梁的剪力图均为水平线。AC段剪力图在x轴上方，CB段剪力图在x轴下方。在集中力F作用的C截面上，剪力图出现向下的突变，突变值等于集中力的大小。





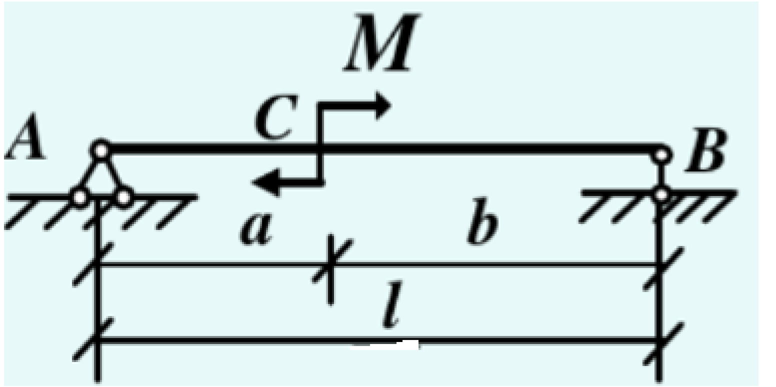
由弯矩方程可知，两段梁的弯矩图均为斜直线

$x_1=0,\ M_A=0$　　$x_1=a,\ M_C=\frac{Fab}{l}$

$x_2=a,\ M_C=\frac{Fab}{l}$　　$x_2=l,\ M_B=0$

最大弯矩 $M_{max}=\frac{Fab}{l}$，发生在集中力作用处的**C截面上。**

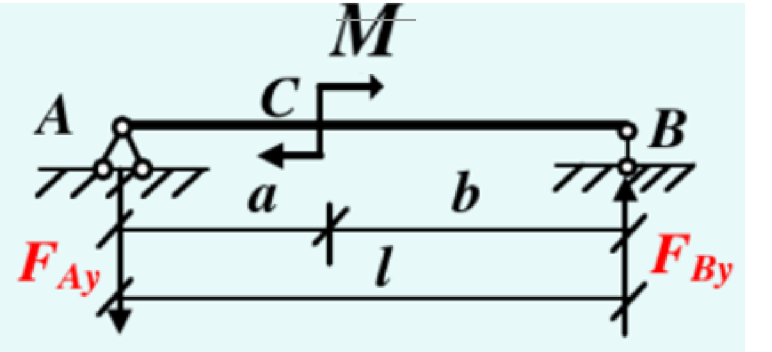
[例3] 如图所示，简支梁AB, 在C处作用有集中力偶M。试画出该梁的剪力图和弯矩图。



解: (1)求支座反力。以整体为研究对象，列平衡方程求出。

$$F_{Ay}=-\frac{M}{l}\ (\downarrow)$$

$$F_{By}=\frac{M}{l}\ (\uparrow)$$

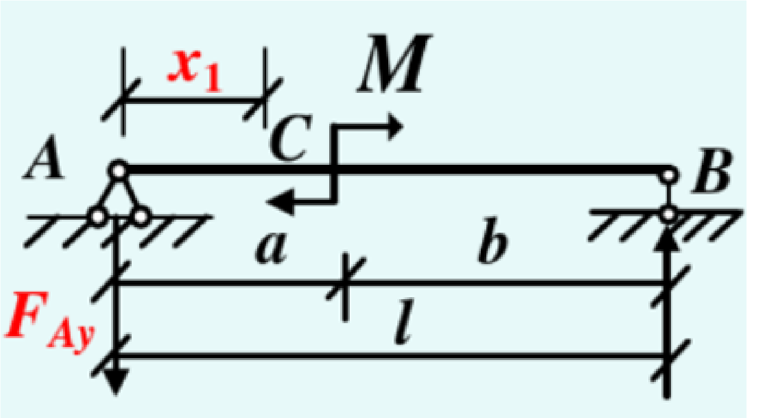


(2)分段列剪力方程和弯矩方程。

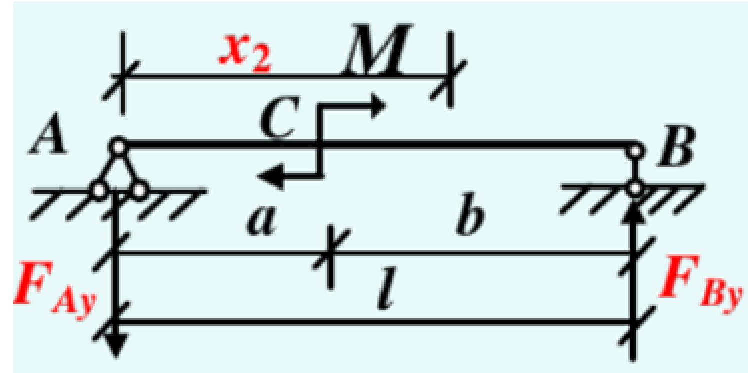
AC段：取距A为x_1的任意截面

$$F_S(x_1)=-\frac{M}{l}\quad (0<x_1\le a)$$

$$M(x_1)=-\frac{M}{l}x_1\quad (0\le x_1<a)$$



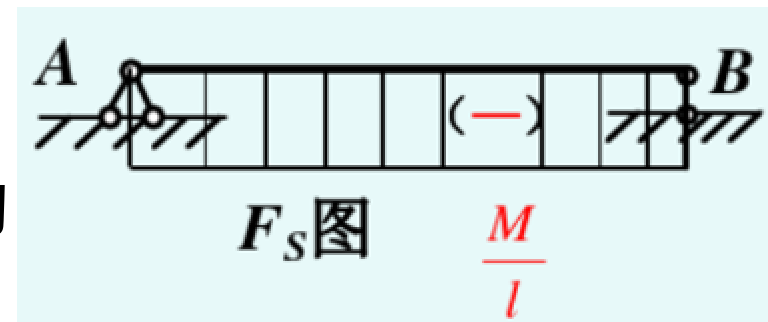
CB段：取距A为x_2的任意截面



$$F_S(x_2) = -\frac{M}{l} \quad (a \le x_1 < l)$$

$$M(x_2) = \frac{M}{l}(l - x_2) \quad (a < x_2 \le l)$$

(3)画剪力图和弯矩图。由剪力方程可知，AC段和CB段梁的剪力图是同一条平行于x轴的直线，且在x轴下方。由弯矩方程可知，两段梁的弯矩图均为斜直线，要分段求值取点作图。



当b>a时，在**集中力偶作用处的C截面上弯矩最大**，$|M|_{\max} = \frac{Mb}{l}$，在集中力偶作用处弯矩值有**突变**，突变量等于集中力偶矩M。