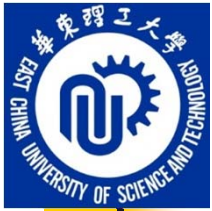


可靠性概述

华东理工大学机械与动力工程学院

主讲：刘长虹



教材:机械可靠性设计(刘混举2009)

参考书:机械可靠性设计(刘惟信**1996**清华版)

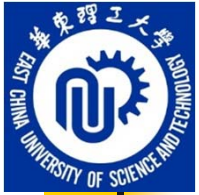
机械可靠性设计与分析(国防版)

机械结构可靠性(航空工业出版社)

可靠性理论与工程应用(国防版**2002**)

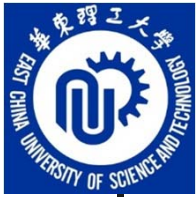
现代可靠性设计(芮延年、国防版)

可靠性工程(金伟娅**2005**化工版)



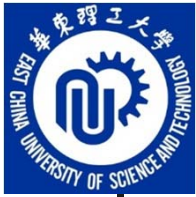
可靠性概述

- **第1章 可靠性设计概论**
- **第2章 机械可靠性设计概述**
- **第3章 机械可靠性设计基本原理**
- **第4章 系统可靠性设计**
- **第5章 机械零部件可靠性设计**
- **第6章 可靠性优化设计与可靠性提高**
- **第8章 可靠性试验**
-



第1章 可靠性设计概论

- 1.1 可靠性设计的发展及重要意义
- 1.2 可靠性基本概念
- 1.3 可靠性定义
- 1.4 可靠性特征量(可靠性指标)



1.1 可靠性设计的发展及其重要意义

1.1.1 可靠性设计的发展（可靠性研究的历史）

- **1952**年美国成立了“电子设备可靠性咨询委员会”
- **1957**年美国发布了“军用电子设备的可靠性”报告
- **1965**年美国宇航局 (*NASA*) 开展了机械可靠性研究



1.1.1 可靠性研究的历史

日本： 1956年从美国引进可靠性技术
1958年成立了“可靠性研究委员会”
1971年召开了第一届可靠性学术讨论会。

英国： 1962年出版了“可靠性与微电子学”杂志

法国： 1963年出版了“可靠性”杂志

苏联： 20世纪50年代开展可靠性研究，1961年发射第一艘载人宇宙飞船时提出可靠度要求为0.999的定量要求。



1.1.1 可靠性研究的历史

中国:


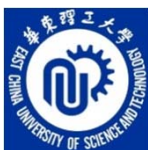
20世纪70年代从国外引进可靠性标准资料
1976年颁布了第一个可靠性标准“可靠性名词术语” **SJ1044-76**;

1979年颁布了第一个可靠性国家标准“电子元器件失效率试验方法” **GB1977-79**;

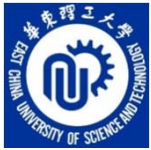
70年代后期: 开展军用产品可靠性研究工作;

80年代: 可靠性研究工作广泛开展;

90年代: 开展机械可靠性设计工作。



可靠性工程起源于军事领域，推广应用于各个工业企业部门，给企业和社会带来巨大的经济效益，使人们更加认识到提高产品可靠性的重要性。

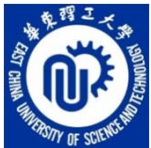


1.1 可靠性设计的发展及其重要意义

1.1.2 可靠性研究的重要性及其意义

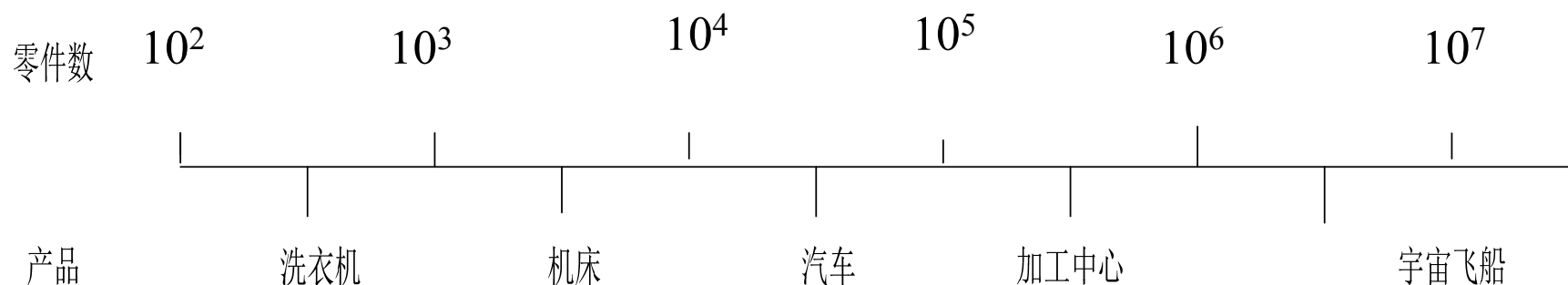
1) 产品的可靠性与企业的生命、国家的安全紧密相关;

- 中国两弹一星成功的经验——可靠性
- 二战中美军空军飞机由于技术故障造成的事故高于被击落的损失
- 1979年3月28日美国三滴岛核电站发生放射性物质泄漏
- 1984年12月美国联合碳化物公司（印度）农药厂毒气泄漏事故
- 1986年4月苏联切尔诺贝里核电站发生爆炸

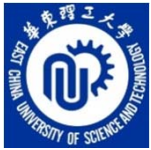


1.1.2可靠性研究的重要性及其意义

2) 产品结构复杂化要求有很高的可靠性



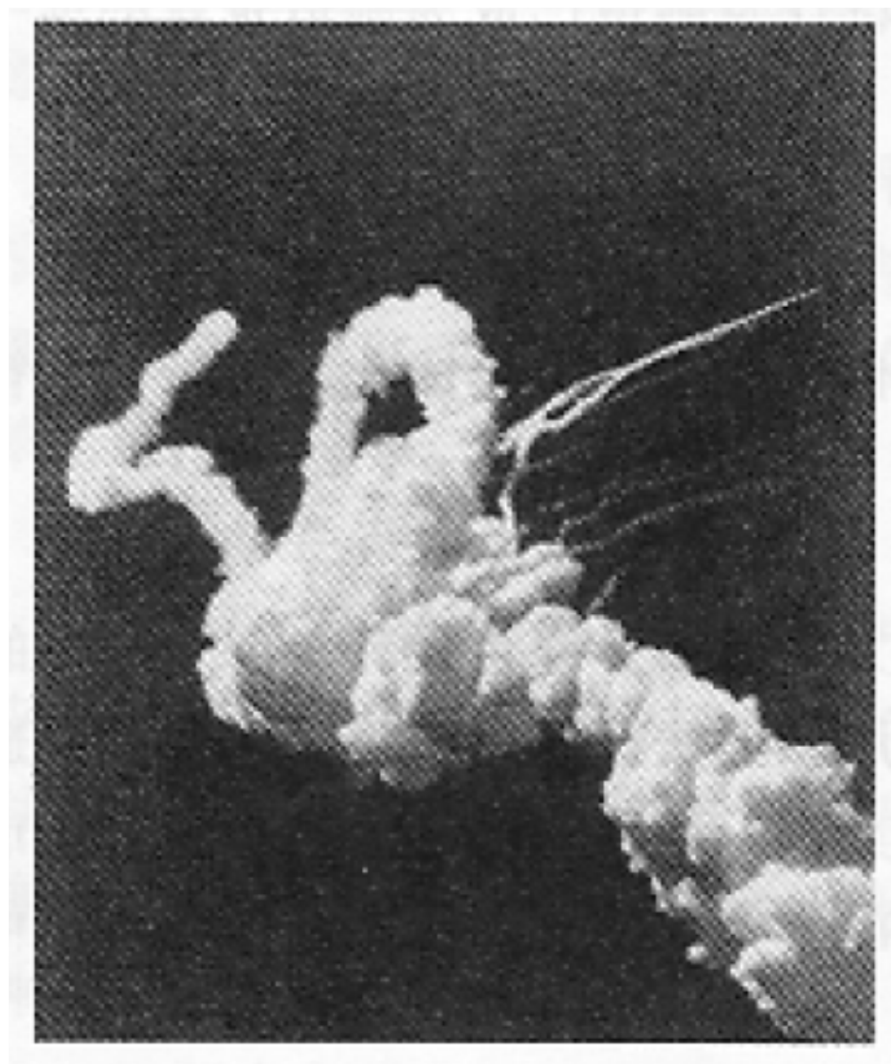
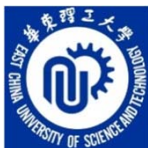
美国：F-105战斗机，投资2500万美元，可靠度从0.7263提高到0.8986，每年节省维修费用5400万美元。



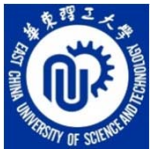
1.1.2可靠性研究的重要性及其意义

3) 产品更新速度的加快，使用场所的广泛性、严酷性要求有很高的可靠性

1986年1月28日美国航天飞机“挑战者”号在发射后进入轨道前，因助推火箭燃料箱密封装置在低温下失效，使燃料溢出发生爆炸——7人死亡，12亿美元损失。



“挑战者”号爆炸情景

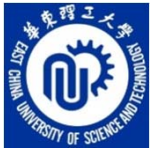


1.1.2 可靠性研究的重要性及其意义

4) 产品竞争的焦点是可靠性

- 日本：将可靠性作为企业的主要奋斗目标
- 美国：认为世界产品竞争的焦点是可靠性
- 苏联：将可靠性纳入25年发展规划
- 某越野车可靠性对比试验：9台国产车，3台奔驰车
无故障运行里程：国产车：380km—880km；
进口车：28000km。

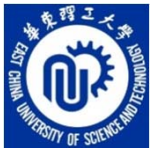
“宁愿牺牲先进性，也要保证可靠性”



1.1.2可靠性研究的重要性及其意义

5) 大型产品的可靠性是一个企业、一个国家科技水平的重要标志

- 1969年美国阿波罗飞船登月成功，美国宇航局将可靠性工程列为三大技术成就之一。
- 三峡工程大坝合拢时，使用的全部车辆为进口产品。
- “神州5号” 飞船成功的关键是解决了可靠性问题，其可靠性指标达到0.97，航天员安全性指标达到0.997.



1.2 可靠性基本概念

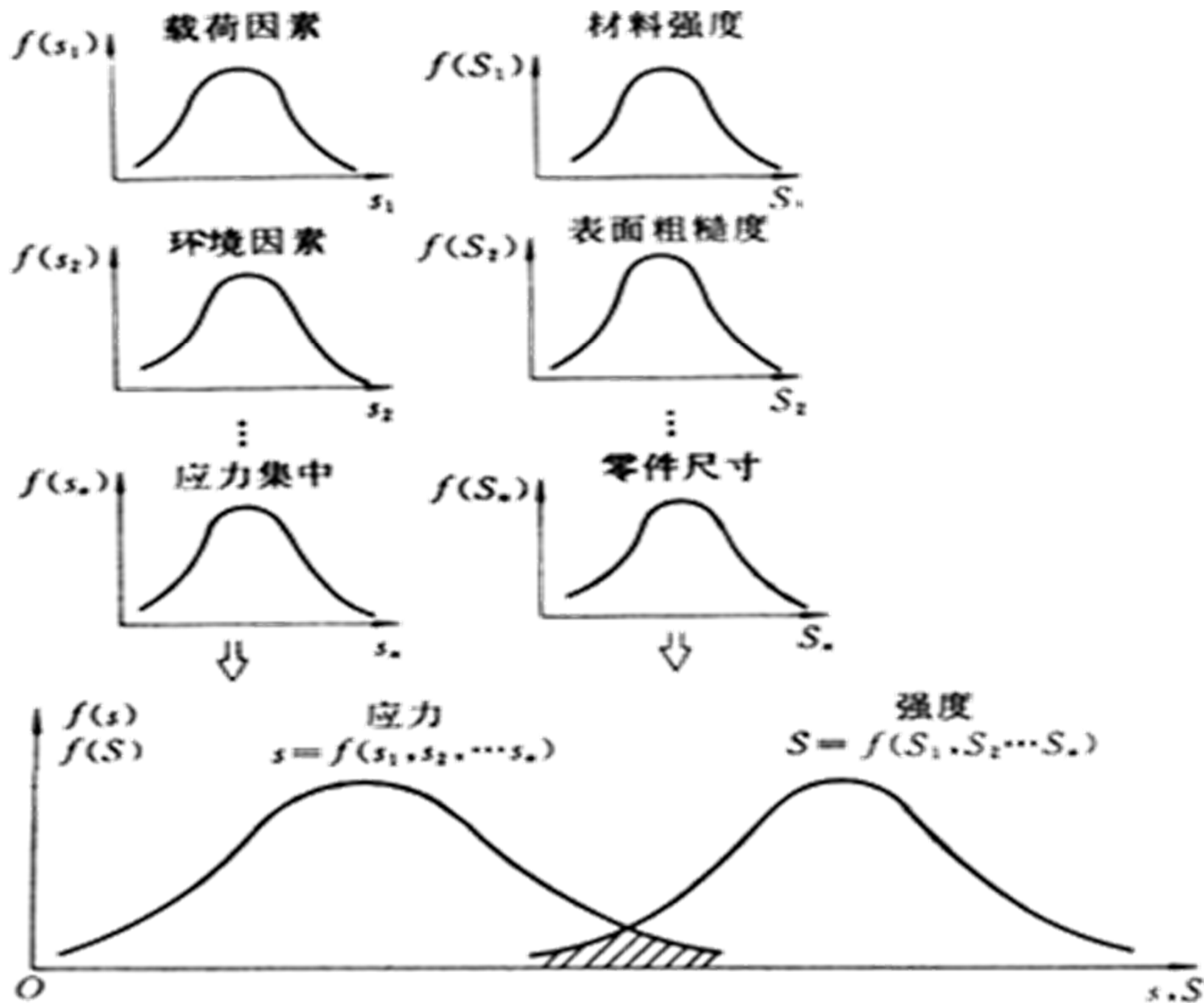
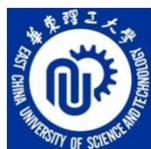
- 可靠性的概念及基本思想

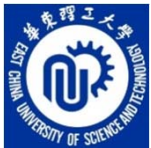
可靠性的经典定义：产品在规定条件下和规定时间内，完成规定功能的能力。

- 可靠性的基本思想

任何参数均为多值的，且呈一定分布。

安全系数大的设备或产品不一定是百分之百的安全。



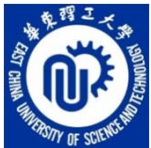


1.3 可靠性定义

■ 可靠性的概念

可靠性的经典定义：产品在规定条件下和规定时间内，完成规定功能的能力。

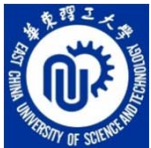
产品：指作为单独研究和分别试验对象的任何元件、设备或系统，可以是零件、部件，也可以是由它们装配而成的机器，或由许多机器组成的机组和成套设备，甚至还把人的作用也包括在内。



规定条件：一般指的是使用条件,环境条件。 包括应力温度、湿度、尘砂、腐蚀等，也包括操作技术、维修方法等条件。

规定时间：是可靠性区别于产品其他质量属性的重要特征，一般也可认为可靠性是产品功能在时间上的稳定程度。

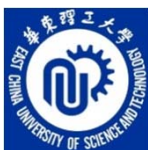
规定功能：要明确具体产品的功能是什么，怎样才算是完成规定功能。产品丧失规定功能称为失效，对可修复产品通常也称为故障。



可靠性的类型

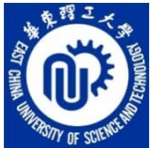
可靠性可分为固有可靠性和使用可靠性

- 固有可靠性是通过设计、制造赋予产品的可靠性；
- 使用可靠性既受设计、制造的影响，又受使用条件的影响。一般使用可靠性总低于固有可靠性。



可靠性的类型及影响因素

可靠性类型	影响因素	影响程度
固有可靠性	零部件材料	30%
	设计技术	40%
	制造技术	10%
使用可靠性	使用、安装、维修	20%

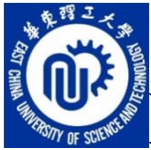


1.4 可靠性特征量(可靠性指标)

■ 可靠度

可靠度是产品在规定条件下和规定时间内，完成规定功能的概率，一般记为 R 。它是时间的函数，故也记为 $R(t)$ ，称为可靠度函数。

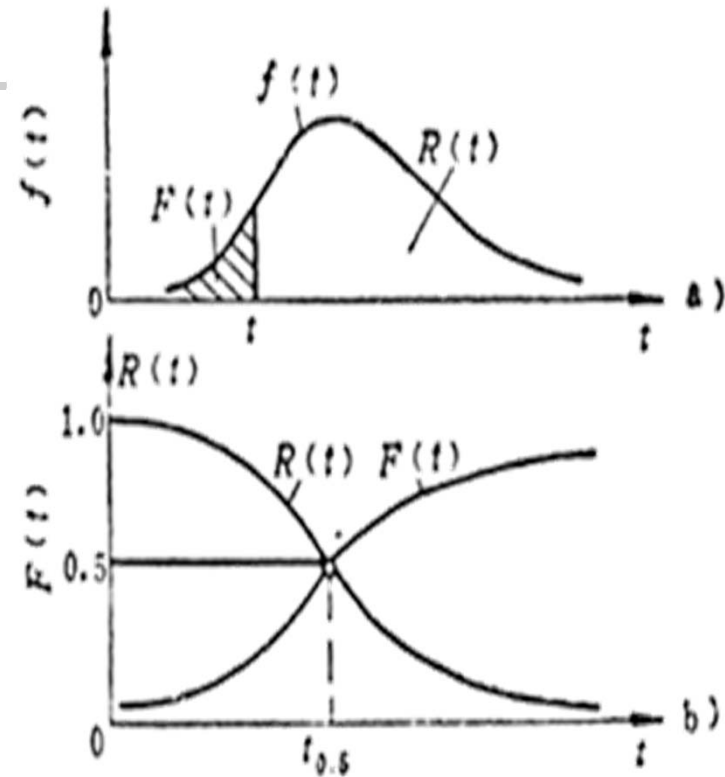




1.4.1 可靠度

如果用随机变量 T 表示产品从开始工作到发生失效或故障的时间，其概率密度为 $f(t)$ 如右图所示，若用 t 表示某一指定时刻，则该产品在该时刻的可靠度。

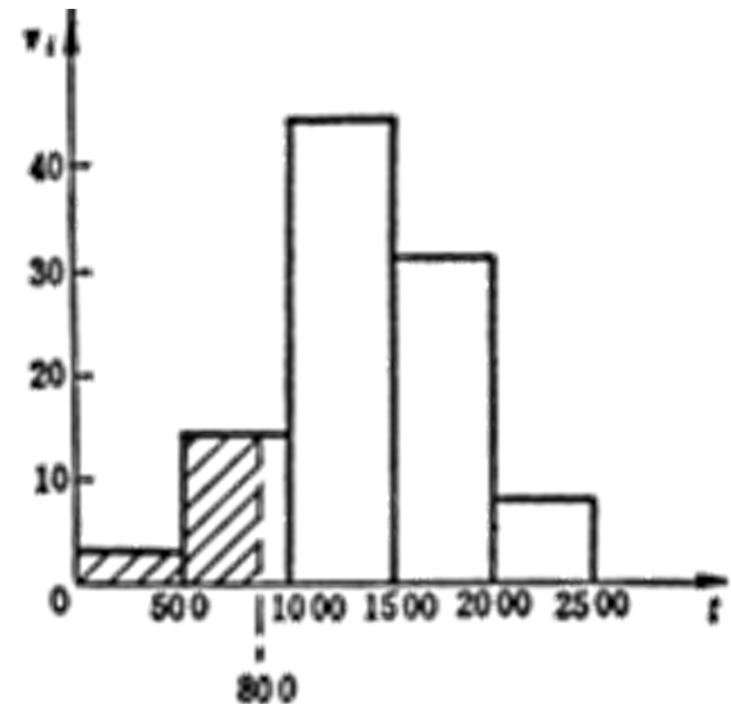
$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(t) dt$$





对于不可修复的产品，可靠度的观测值是指直到规定的时间区间终了为止，能完成规定功能的产品数与在该区间开始时投入工作产品数之比，即：

$$\hat{R}(t) = \frac{N_s(t)}{N} = 1 - \frac{N_F(t)}{N}$$





1.4.2 可靠寿命

可靠寿命是给定的可靠度所对应的时间，一般记为 $t(R)$

一般可靠度随着工作时间 t 的增大而下降，对给定的不同 R ，则有不同的 $t(R)$ ，即

$$t(R) = R^{-1}(R)$$

式中 R^{-1} —— R 的反函数，即由 $R(t) = R$ 反求 t

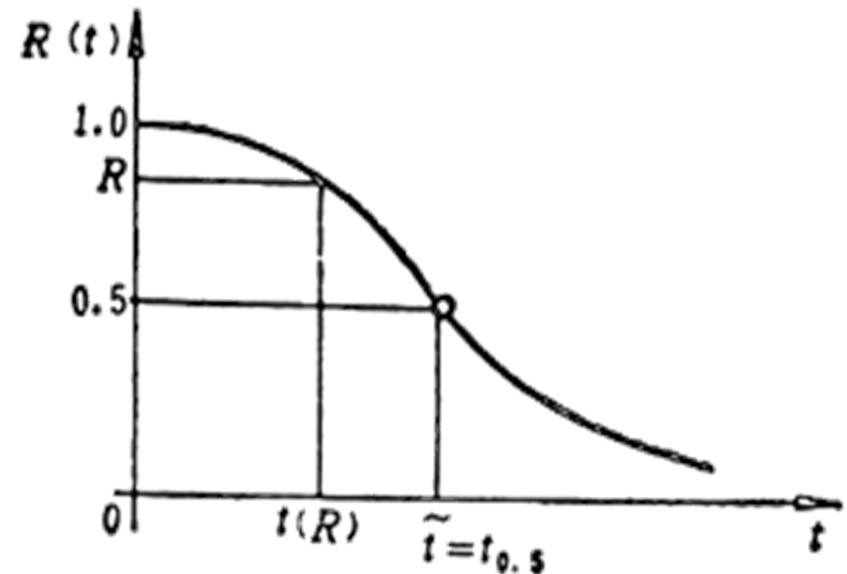
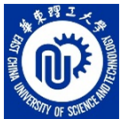


图13·1-5 可靠寿命和中位寿命



1.4.3 累积失效概率

- 累积失效概率：累积失效概率是产品在规定条件下和规定时间内未完成规定功能（即发生失效）的概率，也称为不可靠度。一般记为F或F（t）。

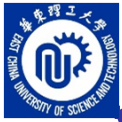
因为完成规定功能与未完成规定功能是对立事件，按概率互补定理可得

$$F(t) = 1 - R(t)$$

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(t)dt$$

- 对于不可修复产品和可修复产品累积失效概率的观测值都可按概率互补定理，取

$$\hat{F}(t) = 1 - \hat{R}(t)$$



1.4.4 平均寿命

- 平均寿命：平均寿命是寿命的平均值，对不可修复产品常用失效前平均时间，一般记为**MTTF**，对可修复产品则常用平均无故障工作时间，一般记为**MTBF**。它们都表示无故障工作时间**T**的期望**E (T)**或简记为**t**。

如已知**T**的概率密度函数**f (t)**，则

$$\bar{t} = E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt$$

-
- 经分部积分后也可求得

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} R(t) dt$$



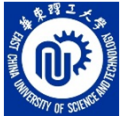
1.4.5 失效率和失效率曲线

- 失效率：失效率是工作到某时刻尚未失效的产品，在该时刻后单位时间内发生失效的概率。一般记为 λ ，它也是时间 t 的函数，故也记为 $\lambda(t)$ ，称为失效率函数，有时也称为故障率函数或风险函数。

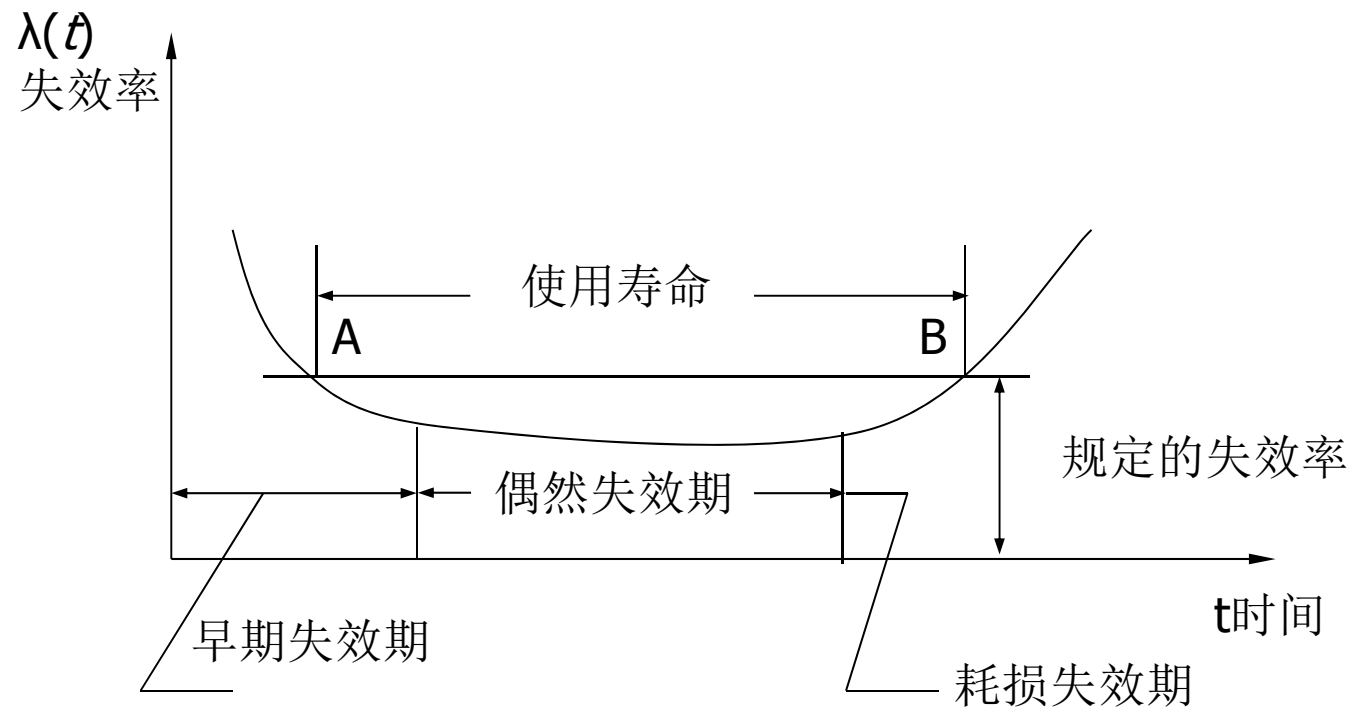
按上述定义，失效率是在时刻 t 尚未失效产品在 $t+\Delta t$ 的单位时间内发生失效的条件概率。即

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(t < T \leq t + \Delta t | T > t)$$

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\Delta N_f(t)}{N_s(t) \Delta t}$$



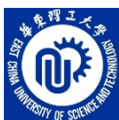
失效率曲线





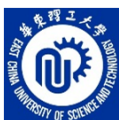
失效期的成因分析:

- 早期失效期:设计、制造、存储缺陷及使用不当;
(DFR——Decreasing Failure Rate)
- 偶然失效期:意外过载、误操作、不可抗拒因素等;
(CFR——Constant Failure Rate)
- 耗损失效期:疲劳、磨损等。
(IFR——Increasing Failure Rate)



可靠性特征量间的关系

可靠性特征量	$R(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$R(t)$ (可靠度)	-	$1-F(t)$	$\int_t^\infty f(t)dt$	$e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$
$F(t)$ (累积失效率)	$1-R(t)$	-	$\int_\infty^t f(t)dt$	$1-e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$
$f(t)$ (概率密度)	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$\frac{dF(t)}{dt}$	-	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$
$\lambda(t)$ (失效率)	$-\frac{d}{dt} \ln R(t)$	$\frac{dF(t)}{dt} \frac{1}{1-F(t)}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(t)dt}$	-



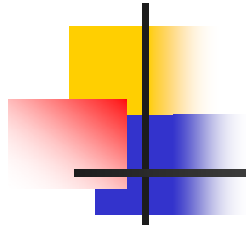
各类产品常用的可靠性指标

使用条件	连续使用				一次使用	
可否修复	可修复		不可修复		可修复	不可修复
维修种类	预防维修	事后维修	用到耗损期	一定时间 后报废	预防维修	
产品示例	电子系统、计算机、通信机、雷达、飞机、生产设备	家用电器、机械装置	电子元器件、机械零件、一般消费品	实行预防维修的零部件、广播设备用电子管	武器、过载荷继电器、救生器具	保险丝、闪光灯管
常用指示	可靠度、有效度、平均无故障工作时间、平均修复时间	平均无故障工作时间、有效寿命、有效度	失效率、平均寿命	失效率、更换寿命	成功率	成功率



第1章复习思考题

- 1.为什么要重视和研究可靠性？
- 2.可靠性、可靠度、失效率、平均寿命的概念。
- 3.画图说明典型产品的失效率曲线，并说明失效率曲线中三个区间的失效率特点及构成曲线段状态的原因。
- 4.某零件工作到**50h**时，还有**100**个仍在工作，工作到**51 h**时，失效了**1**个，在第**52**小时内失效了**3**个，试求这批零件工作满**50h**和**51h**时的失效率 $\bar{\lambda}(50)$ 和 $\bar{\lambda}(51)$ 。



5. 已知某产品的失效率为常数 $\lambda(t) = 0.30 \times 10^{-4} / h$
可靠度函数 $R(t) = e^{-\lambda t}$, 试求可靠度
 $R=0.999$ 的相应可靠寿命 $t_{0.999}$, 中位寿命
 $t_{0.5}$ 。



2.3 常用的概率分布

- 2.3.1 离散型随机变量分布
- 2.3.2 连续型 随机变量分布
- 2.3.3 概率分布的应用



2.3.1 离散型随机变量分布

1 二项分布

记为 $X \sim b(n, p)$.

若事件A在每次试验中发生的概率均为p，则A在n次重复独立试验中恰好发生k次的概率为：

记为， $X \sim B(n, P)$

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, q = 1 - p,$$

当 $n=1$ 时，称 $B(1, p)$ 为 0-1分布.



二项分布 $X \sim b(n, p)$.

它是由贝努里始创的，所以又叫贝努里分布。

例 掷硬币试验。有10个硬币掷一次，或1个硬币掷十次。
问五次正面向上的概率是多少？

解：根据题意 $n = 10$ ， $p = q = 1/2$ ， $x = 5$

$$b(5, 10, 1/2) = C_{10}^5 p^5 q^{10-5}$$

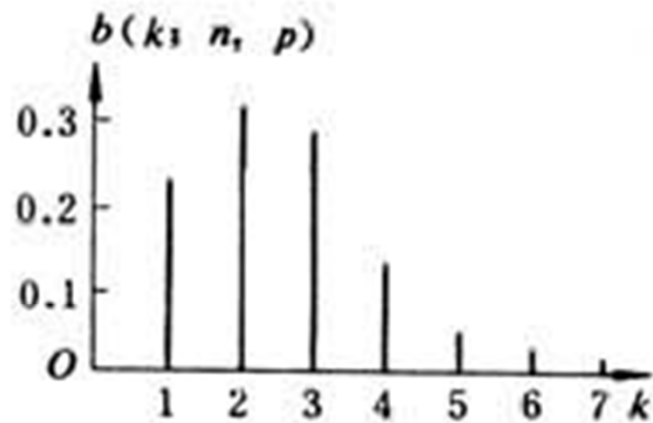
$$= 10! / (5!(10 - 5)!) \times (1/2)^5 \times (1/2)^5$$

$$= 252 \times (1/32) \times (1/32)$$

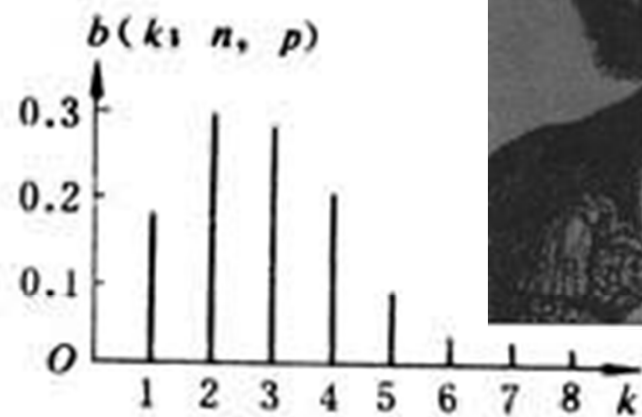
$$= 0.24609$$

所以五次正面向上的概率为0.24609

贝努里



$$B\left(7, \frac{1}{3}\right)$$



$$B\left(8, \frac{1}{3}\right)$$

二项分布 $B(n, p)$ ($n=7, 8; p=1/3$)



离散型随机变量分布

2. 泊松分布

其概率密度函数为：

$$P_{\lambda}(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 1, \dots, n$$



Poisson 分布。

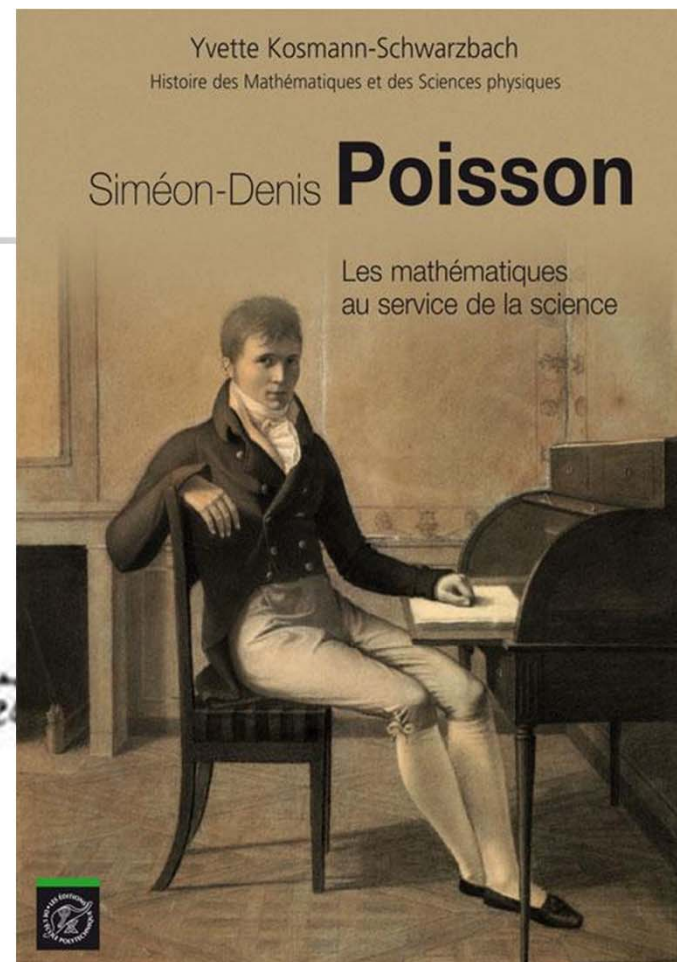
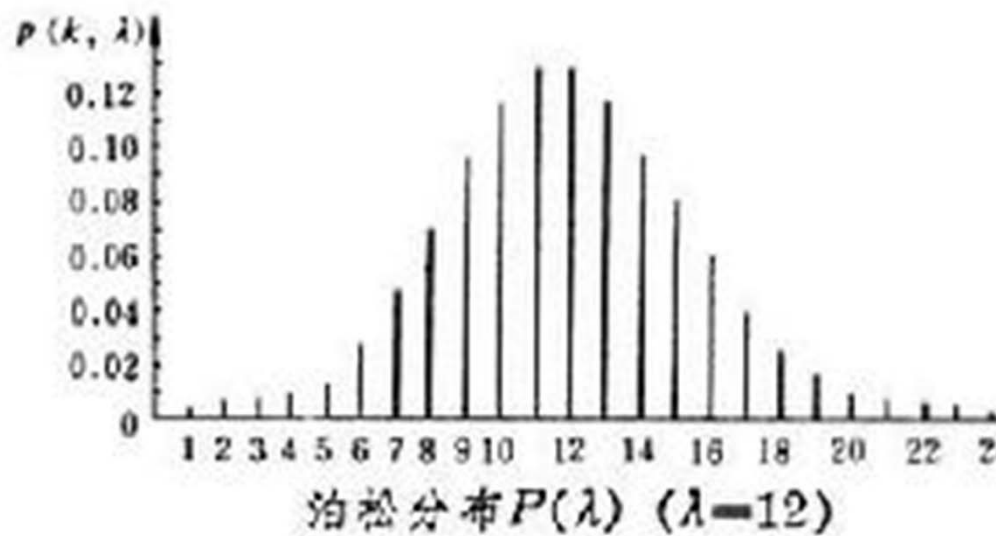
- 泊松分布是一种统计与概率学里常见到的离散概率分布，由法国数学家西莫恩·德尼·泊松（**Siméon-Denis Poisson**）在1838年时发表。
Poisson 雖然得到這樣的機率分布，但他並沒有繼續討論這種分布的性質。
- 直到十九世紀末，**Bortkiewicz** 出生在俄國聖彼得堡的波蘭人。專門研究 **Poisson** 分布。



Poisson 分布。

- 泊松分布适合于描述单位时间（或空间）内随机事件发生的次数。如某一服务设施在一定时间内到达的人数，电话交换机接到呼叫的次数，汽车站台的候客人数，机器出现的故障数，自然灾害发生的次数，一块产品上的缺陷数，显微镜下单位分区内的细菌分布数等等。

泊松分布





2.3.2 连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda, & a \leq x \leq b, \quad \lambda > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布。

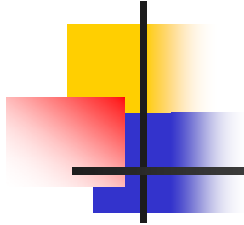
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$



1. 均匀分布

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x \end{cases}$$

记为 $X \sim U(a, b)$



均匀分布 $U(a, b)$ 的均值： $E(X) = (a+b)/2$

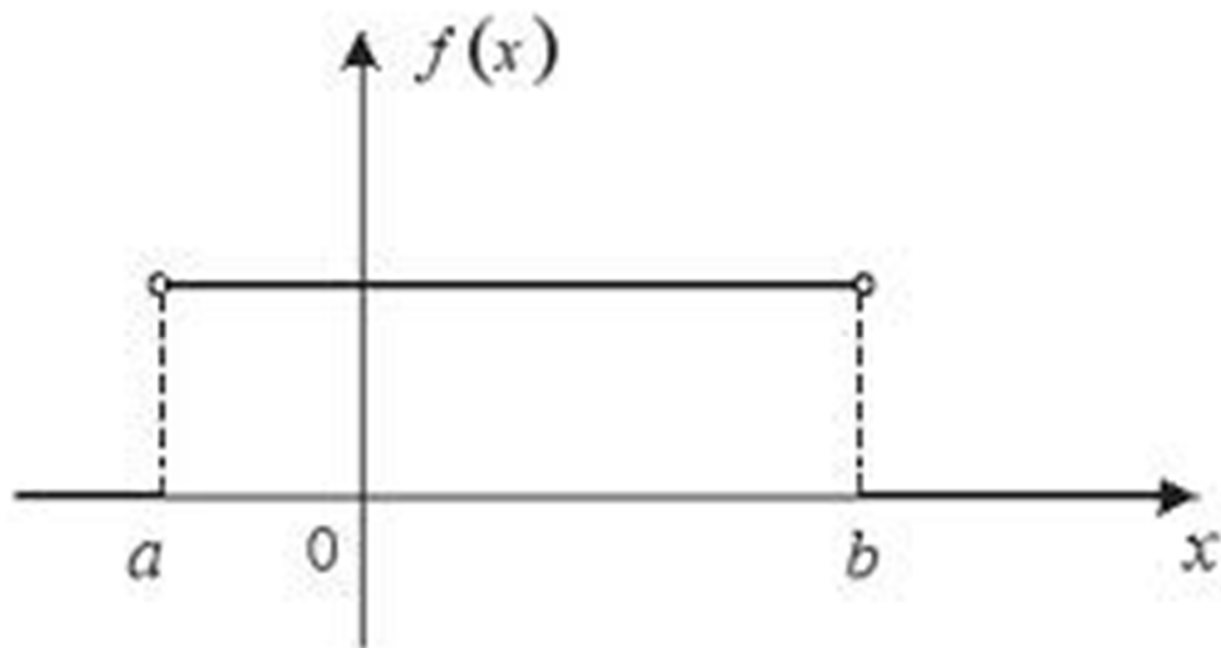
均匀分布 $U(a, b)$ 的方差 $= (b-a)^2/12$



均匀分布在生物学概念

- 均匀分布或称规则分布。植物种群的个体是等距分布，或个体之间保持一定的均匀的间距。均匀分布在自然情况下极为罕见，而人工栽培的有一定株行距的植物群落即是均匀分布。

均匀分布





2.3.2 连续型随机变量的分布

2. 指数分布

- 指数分布在可靠性领域里应用最多，由于它的特殊性，以及在数学上易处理成较直观的曲线，故在许多领域中首先把指数分布讨论清楚。若产品的寿命或某一特征值 t 的故障密度为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0, t \geq 0)$$

- 则称 t 服从参数 λ 的指数分布。



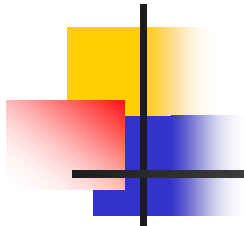
2.指数分布

$$p(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases} \quad F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

记为 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$.

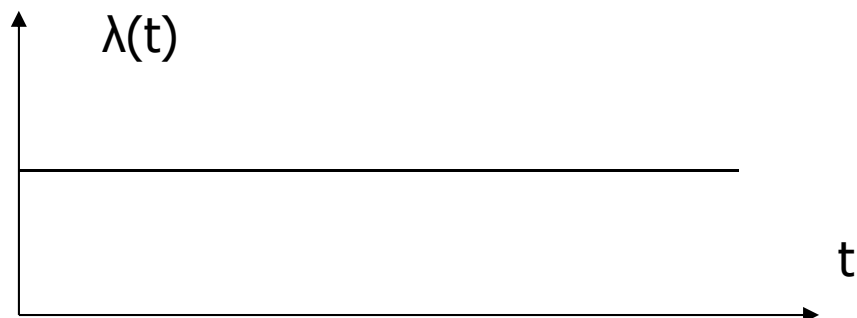
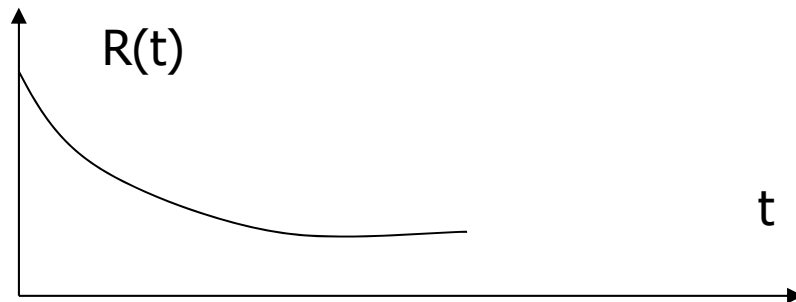
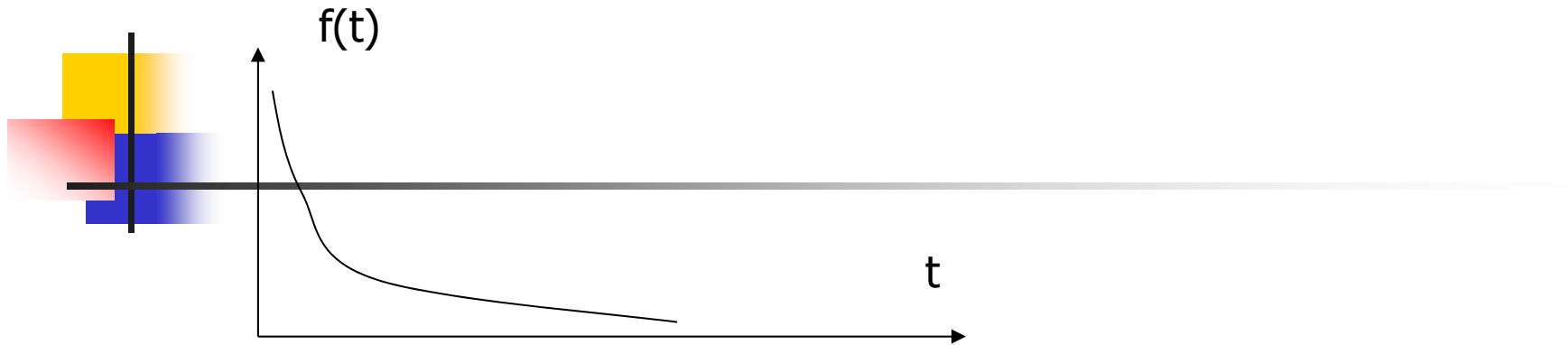
特别: 指数分布具有无忆性, 即:

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$



指数分布 $Exp(\lambda)$ 的均值: $E(X) = 1/\lambda$

指数分布 $Exp(\lambda)$ 的方差= $1/\lambda^2$





指数分布

- 则有：
- 不可靠度 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0)$
- 可靠度 $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0)$
- 故障率 $\lambda(t) = f(t) / R(t) = \lambda$
- 平均故障间隔时间 $MTBF = \frac{1}{\lambda} = \theta$



指数分布例题

- 例7-1：一元件寿命服从指数分布，其平均寿命(θ)为2000小时，求故障率 λ 及求可靠度 $R(100)=?$ $R(1000)=?$

- 解：
$$\lambda = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{2000} = 5 \times 10^{-4} \quad (\text{小时})$$

$$R(100) = e^{-5 \times 10^{-4} \times 100} = e^{-0.05} = 0.95$$

$$R(1000) = e^{-5 \times 10^{-4} \times 1000} = e^{-0.5} = 0.60$$

- 此元件在100小时时的可靠度为0.95，而在1000小时时的可靠度为0.60。



指数分布性质

- 指数分布的一个重要性质是无记忆性。无记忆性是产品在经过一段时间 t_0 工作之后的剩余寿命仍然具有原来工作寿命相同的分布，而与 t 无关(马尔克夫性)。这个性质说明，寿命分布为指数分布的产品，过去工作了多久对现在和将来的寿命分布不发生影响。
- 实际意义？
- 在“浴盆曲线”中，它是属于偶发期这一时段的。



指数分布应用

- 在电子元器件的可靠性研究中，通常用于描述对发生的缺陷数或系统故障数的测量结果。这种分布表现为均值越小，分布偏斜的越厉害。
- 指数分布应用广泛，在日本的工业标准和美国军用标准中，半导体器件的抽验方案都是采用指数分布。此外，指数分布还用来描述大型复杂系统（如计算机）的平均故障间隔时间MTBF的失效分布。



指数分布应用

- 但是，由于指数分布具有缺乏“记忆”的特性。因而限制了它在机械可靠性研究中的应用，所谓缺乏“记忆”，是指某种产品或零件经过一段时间 t_0 的工作后,仍然如同新的产品一样,不影响以后的工作寿命值，或者说，经过一段时间 t_0 的工作之后，该产品的寿命分布与原来还未工作时的寿命分布相同，



指数分布应用

- 显然，指数分布的这种特性，与机械零件的疲劳、磨损、腐蚀、蠕变等损伤过程的实际情况是完全矛盾的，它违背了产品损伤累积和老化这一过程。所以，指数分布不能作为机械零件功能参数的分布形式。



指数分布应用

- 指数分布虽然不能作为机械零件功能参数的分布规律，但是，它可以近似地作为高可靠性的复杂部件、机器或系统的失效分布模型，特别是在部件或机器的整机试验中得到广泛的应用。



常用寿命分布函数

3. 正态分布

- 正态分布在机械可靠性设计中大量应用，如材料强度、磨损寿命、齿轮轮齿弯曲、疲劳强度以及难以判断其分布的场合。

若产品寿命或某特征值有故障密度

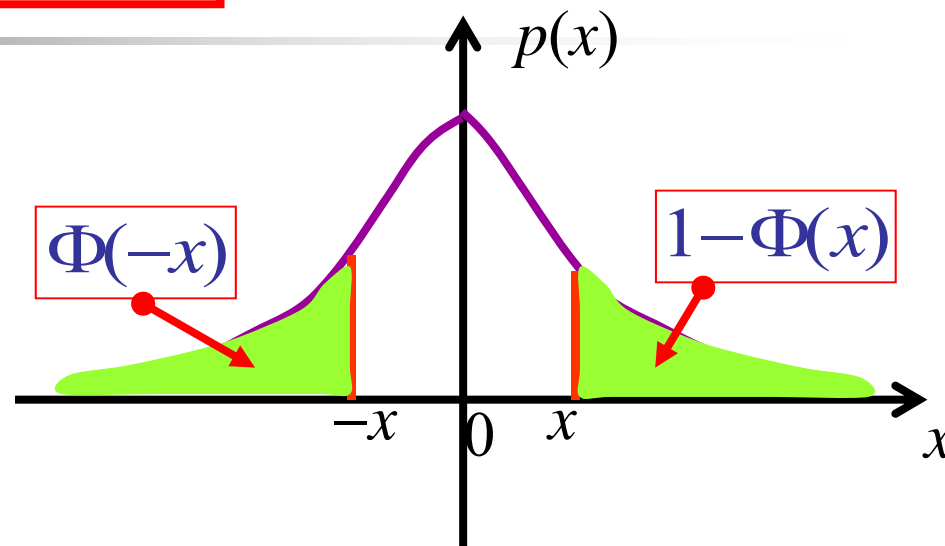
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (t \geq 0, \mu \geq 0, \sigma \geq 0)$$

则称 t 服从正态分布。

标准正态分布 $N(0, 1)$

密度函数记为 $\varphi(x)$,

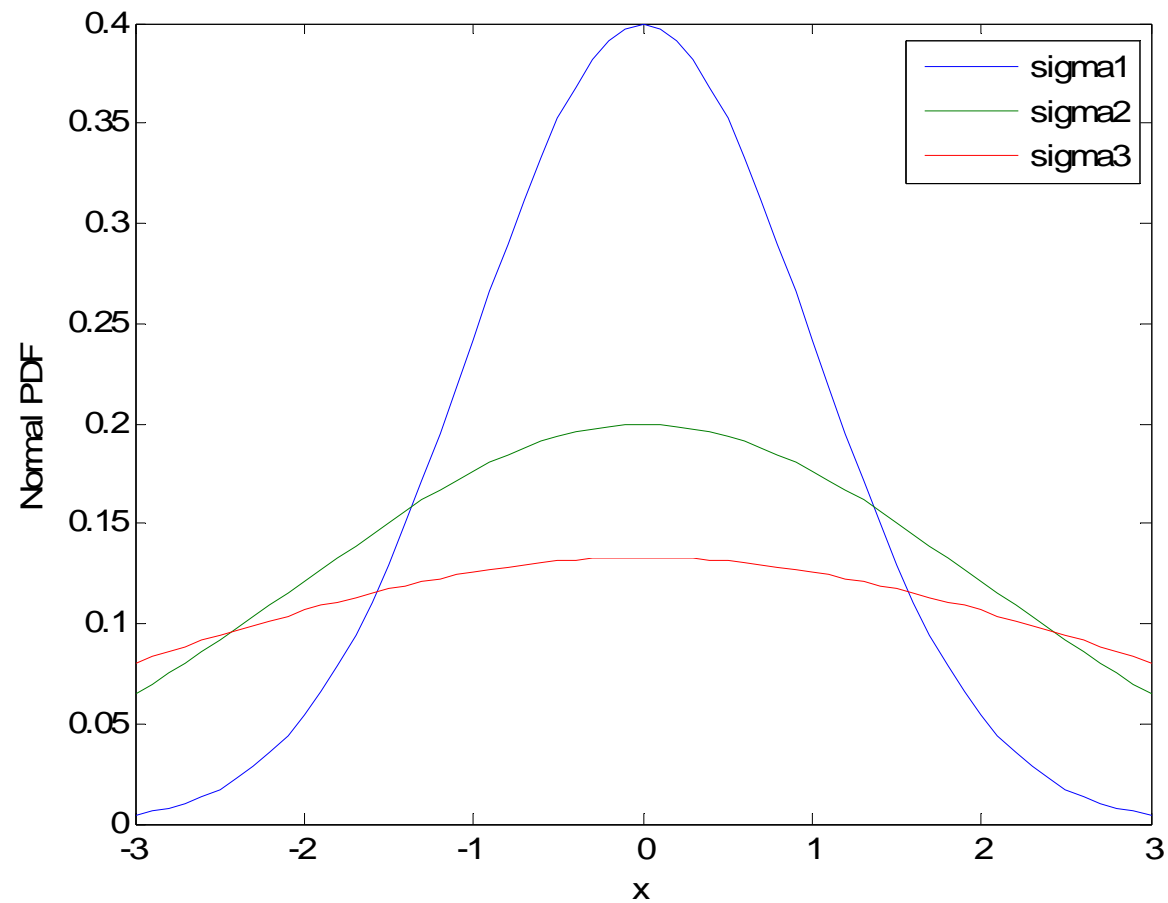
分布函数记为 $\Phi(x)$.



$$(1) \quad \Phi(0) = \frac{1}{2},$$

$$(2) \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

标准差分别为1, 2, 3的正态分布概率密度函数图





$\Phi(x)$ 的计算

(1) $x \geq 0$ 时, 查标准正态分布函数表.

(2) $x < 0$ 时, 用 $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

若 $X \sim N(0, 1)$, 则

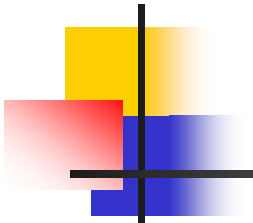
(1) $P(X \leq a) = \Phi(a);$

(2) $P(X > a) = 1 - \Phi(a);$

(3) $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a);$

(4) 若 $a \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} P(|X| < a) &= P(-a < X < a) = \Phi(a) - \Phi(-a) \\ &= \Phi(a) - [1 - \Phi(a)] = 2\Phi(a) - 1 \end{aligned}$$



例题： 设 $X \sim N(0, 1)$, 求
 $P(X > -1.96)$, $P(|X| < 1.96)$

解： $P(X > -1.96) = 1 - \Phi(-1.96)$
 $= 1 - (1 - \Phi(1.96)) = \Phi(1.96)$
 $= 0.975$ (查表得)

$$P(|X| < 1.96) = 2 \Phi(1.96) - 1$$
$$= 2 \times 0.975 - 1 = 0.95$$



例题:

设 $X \sim N(0, 1)$, $P(X \leq b) = 0.9515$,
 $P(X \leq a) = 0.04947$, 求 a, b .

解: $\Phi(b) = 0.9515 > 1/2$,

所以 $b > 0$,

反查表得:

$$\Phi(1.66) = 0.9515,$$

故 $b = 1.66$

而 $\Phi(a) = 0.0495 < 1/2$,

所以 $a < 0$,

$\Phi(-a) = 0.9505$, 反查表得:

$$\Phi(1.65) = 0.9505,$$

故 $a = -1.65$




一般正态分布的标准化

定理: 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

则 $Y \sim N(0, 1)$.

推论: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$



若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P(X < a) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right), \quad P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$



例题:

设 $X \sim N(10, 4)$,

求 $P(10 < X < 13)$, $P(|X - 10| < 2)$.

解:
$$P(10 < X < 13) = \Phi(1.5) - \Phi(0)$$
$$= 0.9332 - 0.5 = 0.4332$$

$$P(|X - 10| < 2) = P(8 < X < 12)$$
$$= 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$$



例题

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $P(X \leq -5) = 0.045$,
 $P(X \leq 3) = 0.618$, 求 μ 及 σ .

解:

$$\begin{cases} \frac{5+\mu}{\sigma} = 1.69 \\ \frac{3-\mu}{\sigma} = 0.3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu = 1.76 \\ \sigma = 4 \end{cases}$$



正态分布的 3σ 原则

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P(|X - \mu| < \sigma) = 0.6828.$$

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.9545.$$

$$P(|X - \mu| < 3\sigma) = 0.9973.$$



正态分布

■ 则有： 不可靠度 $F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

■ 可靠度 $R(t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

■ 故障率 $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$

■ 正态分布计算可用数学代换把上式变换成标准正态分布，查表简单计算，得出各参数值。

高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) 德国10马克





正态分布的前世与今生

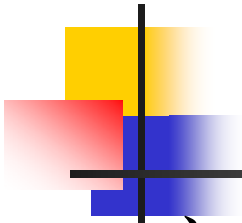
- 神说，要有正态分布，就有了正态分布。
 -
- 神看正态分布是好的，就让随机误差服从了正态分布。
- 创世纪-----数理统计




正态误差分布的赞美词

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY • IT SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE AGRICULTURAL AND ENGINEERING
IT IS AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND EXPERIMENT

【正态误差分布的赞美词】



高尔顿对正态分布非常推崇，
1886年在人类学研究所的就职演
讲中他说过一段著名的话：



“我几乎不曾见过像误差呈正态分布这么美妙而激发人们无穷想象的宇宙秩序。如果古希腊人知道这条曲线，想必会给予人格化乃至神格化。它以一种宁静无形的方式在最野性的混乱中实施严厉的统治。暴民越多，无政府状态越显现，它就统治得越完美。它是无理性世界中的最高法律。当我们从混沌中抽取大量的样本，并按大小加以排列整理时，那么总是有一个始料不及的美妙规律潜伏在其中。”

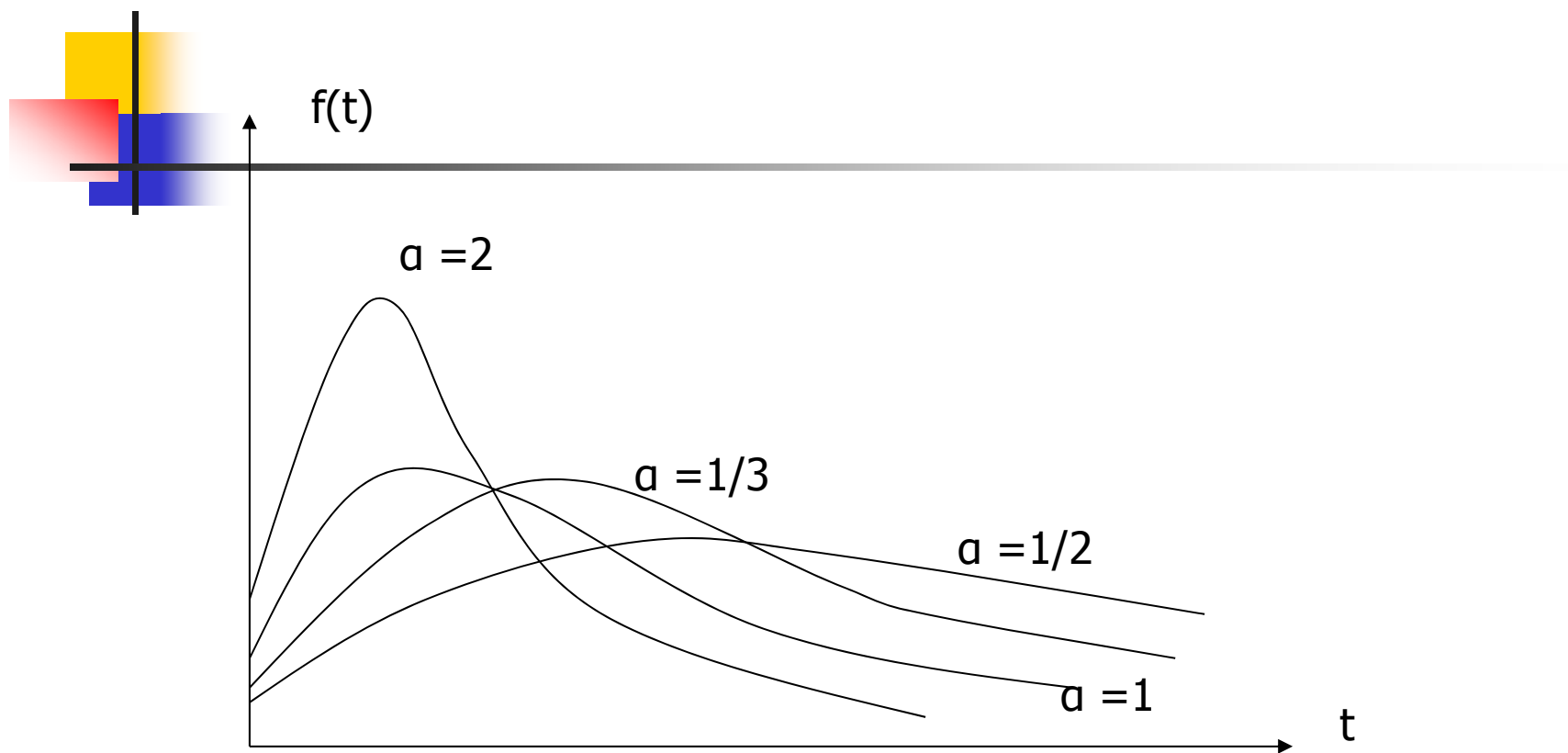


常用寿命分布函数

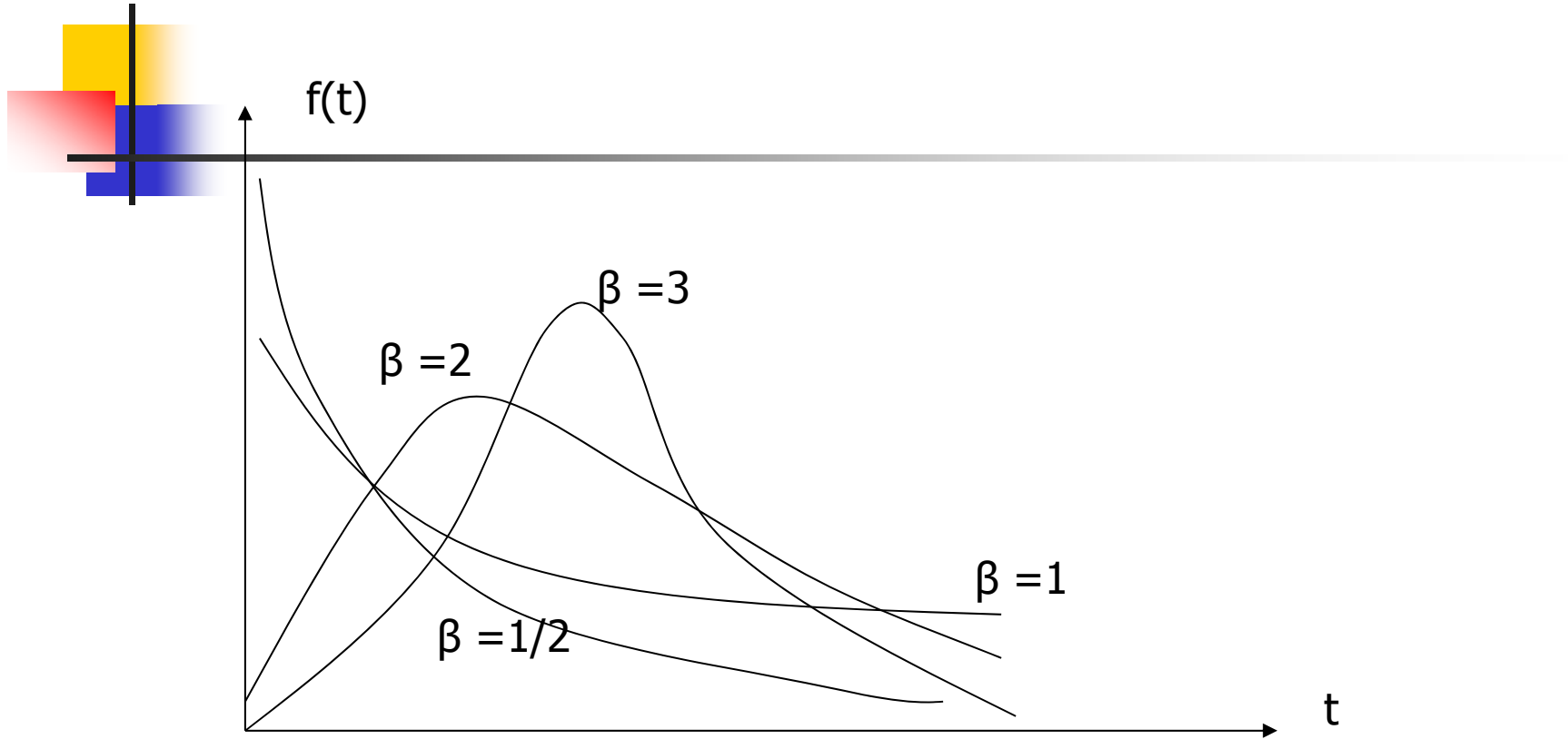
4. 威布尔分布

- 威布尔分布应用比较广泛，常用来描述材料疲劳失效、轴承失效等寿命分布的。
- 威布尔分布是用三个参数来描述，这三个参数分别是尺度参数 α ，形状参数 β 、位置参数 γ ，其概率密度函数为：

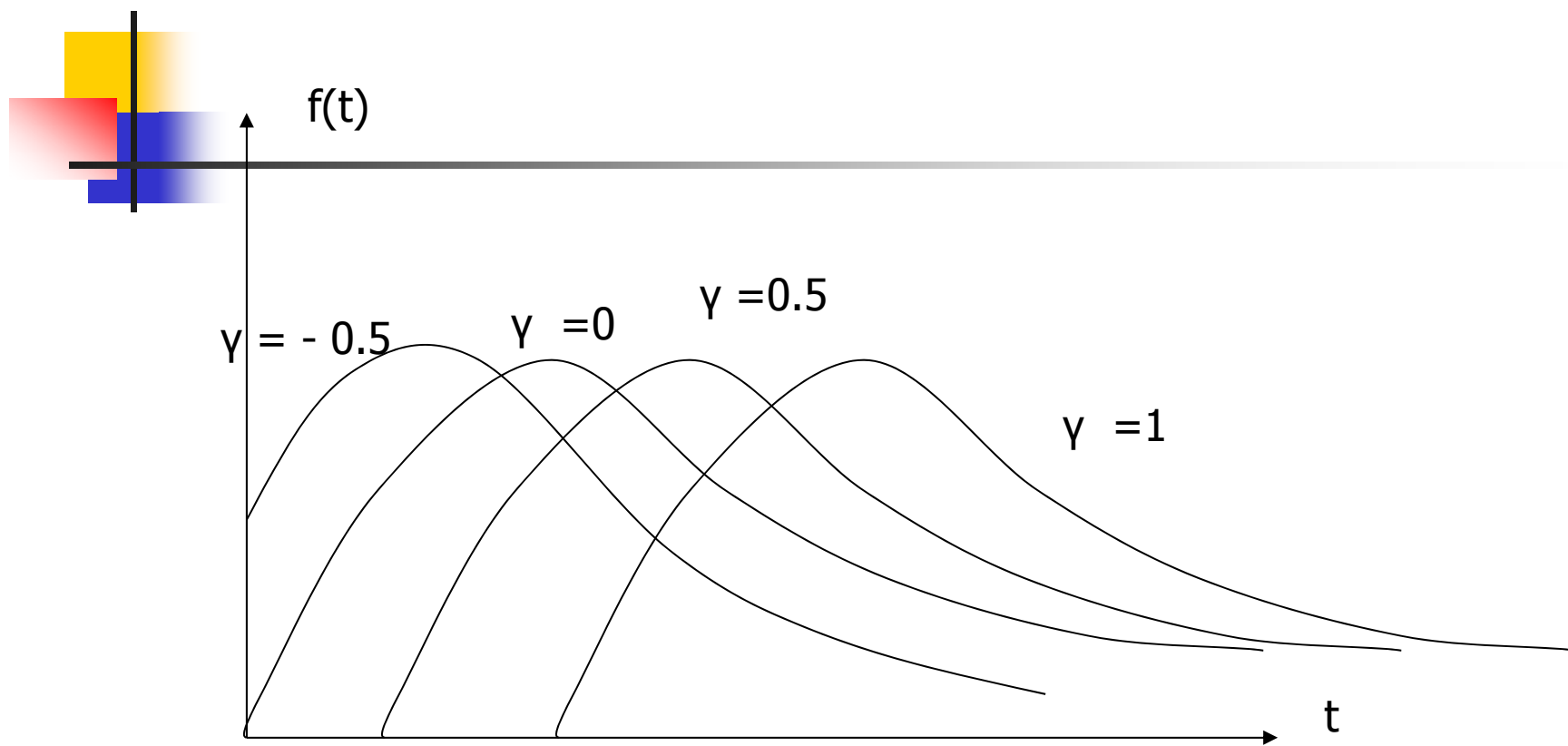
$$f(t) = \alpha\beta(t - \gamma)^{\beta-1} e^{-\alpha(t-\gamma)^\beta}$$
$$(t \geq \gamma, \alpha > 0, \beta > 0)$$



不同 α 值的威布尔分布 ($\beta=2, \gamma=0$)



不同 β 值的威布尔分布 ($\alpha=1$, $\gamma=0$)



不同 γ 值的威布尔分布 ($\alpha = 1$, $\beta = 2$)



威布尔分布

- 则有： 不可靠度 $F(t) = 1 - e^{-\alpha(t-\gamma)^\beta}$
- 可靠度 $R(t) = e^{-\alpha(t-\gamma)^\beta}$
- 故障率 $\lambda(t) = \alpha\beta(t-\gamma)^{\beta-1}$



威布尔分布特点

- 当 β 和 γ 不变，威布尔分布曲线的形状不变。随着 α 的减小，曲线由同一原点向右扩展，最大值减小。
- 当 α 和 γ 不变， β 变化时，曲线形状随 β 而变化。当 β 值约为3.5时，威布尔分布接近正态分布。
- 当 α 和 β 不变时，威布尔分布曲线的形状和尺度都不变，它的位置随 γ 的增加而向右移动。
- 威布尔分布其它一些特点， $\beta > 1$ 时，表示磨损失效； $\beta = 1$ 时，表示恒定的随机失效，这时 λ 为常数； $\beta < 1$ 时，表示早期失效。当 $\beta = 1$ ， $\gamma = 0$ 时， $f(t) = e^{-\alpha t}$ ，为指数分布，式中 $\frac{1}{\alpha}$ 为平均寿命。

Weibull Distribution

- 称韦伯分布、韦氏分布或威布尔分布，由瑞典物理学家 **Wallodi Weibull** 于 **1939** 年引进，是可靠性分析及寿命检验的理论基础。



Wallodi Weibull 1887-1979
Photo by Sam C. Saunders



Weibull Distribution

- Weibull分布能被应用于很多形式，包括1参数、2参数、3参数或混合Weibull。3参数的该分布由形状、尺度（范围）和位置三个参数决定。其中形状参数是最重要的参数，决定分布密度曲线的基本形状，尺度参数起放大或缩小曲线的作用，但不影响分布的形状。



Weibull distribution

- 另外，通过改变形状参数可以表示不同阶段的失效情况；也可以作为许多其他分布的近似，如，可将形状参数设为合适的值近似正态、对数正态、指数等分布。



5、对数正态分布

定理 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = e^X$ 的服从

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad y > 0.$$



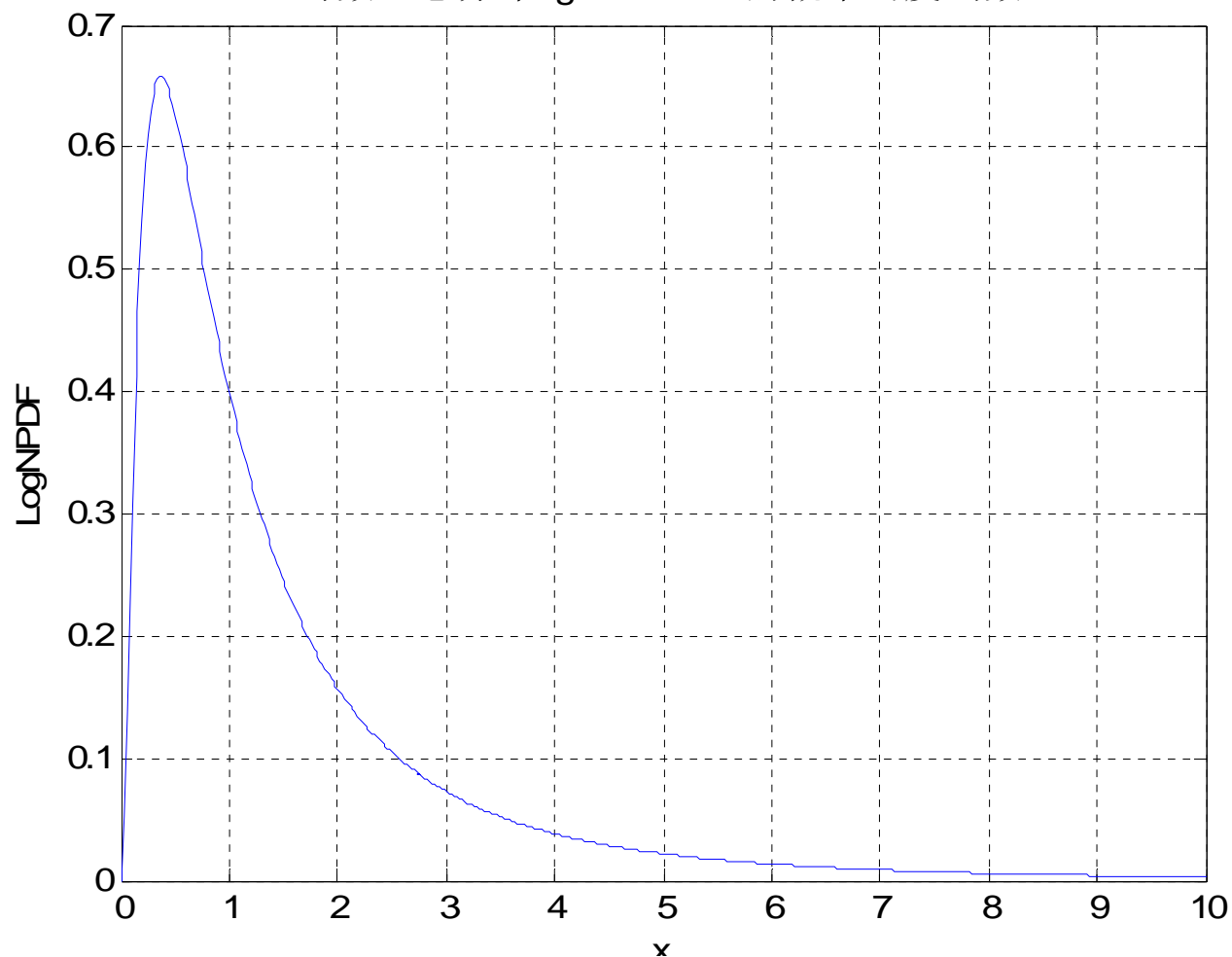
对数正态分布的均值、方差

$$E(X) = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

$$D(X) = \mu^2 (\exp\{\sigma^2\} - 1)$$

对数正态的概率密度分布函数

对数正态分布 $\text{Lgn}(0, 1)$ 的概率密度函数





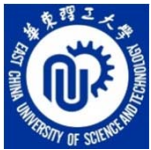
对数正态分布

- 对数正态分布是对数为正态分布的任意随机变量的概率分布。如果 X 是正态分布的随机变量，则 $\exp(X)$ 为对数正态分布；同样，如果 Y 是对数正态分布，则 $\ln(Y)$ 为正态分布。
- 一个典型的例子是股票投资的长期收益率，它可以看作是每天收益率的乘积。



2.3.3 概率分布的应用

- 在对于产品进行可靠性分析和设计中，需要通过**实验数据的统计推断**明确其分布特征，但是在具体应用时究竟采用哪种分布更能够精确反映工程实际情况是一件困难的工作。在本书**P28表2-1**列出各种分布的应用范围，可供大家参考。



2.3.4 随机变量的数字特征

1. 数学期望:

$$P(X = x_k) = p_k, \quad E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

对于连续型概率密度函数, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$



注 意 点

- (1) 数学期望简称为期望.
- (2) 数学期望又称为均值.
- (3) 数学期望是一种加权平均.




数学期望的性质

$$(1) \quad E(c) = c$$

$$(2) \quad E(aX) = aE(X)$$

$$(3) \quad E(g_1(X) + g_2(X)) = E(g_1(X)) + E(g_2(X))$$



2. 方差：方差(variance)与标准差 (standard deviation)

是测定一组数据离散程度的最常用的测度值，它反映了每个数据与其平均数相比平均相差的数值

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

$$D(X) = \sum (x_k - E(X))^2 P(X = x_k); \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - E(X))^2 \varphi(x) dx$$



随机变量的方差与标准差

- 1) 数学期望反映了 X 取值的中心.
- 2) 方差反映了 X 取值的离散程度.



方差与标准差的定义

定义 若 $E(X-E(X))^2$ 存在, 则称
 $E(X-E(X))^2$ 为 X 的方差,
记为

$$\text{Var}(X)=D(X)=E(X-E(X))^2$$



注 意 点

(1) 方差反映了随机变量相对其均值的偏离程度.
方差越大, 则随机变量的取值越分散.

(2) 称 $\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ 为 X 的标准差.

标准差的量纲与随机变量的量纲相同.



方差的性质

(1) $\text{Var}(c)=0$

(2) $\text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X).$

(3) $\text{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$



4、变异系数

定义：

称 $C_V = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)}$ 为 X 的变异系数.

作用： C_V 是无量纲的量，用于比较量纲不同的两个随机变量的波动大小.



习题

- 熟悉指数、正态、对数正态以及威布尔分布函数的基本性质
- 熟悉均值的基本性质
- 熟悉方差的基本性质
- 熟悉变异系数的基本性质



END