2、关系

概念：

序偶, 笛卡尔积, 关系, domR, ranR, 关系图, 空关系, 全域关系, 恒等关系.

序偶（有序对， Pair）

由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组，记作 $<x,y>$.

有序对性质:

(1) 有序性 $<x,y>\neq<y,x>$ （当 $x\neq y$ 时）

(2) $<x,y>$ 与 $<u,v>$ 相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u\wedge y=v.$$

笛卡儿积 设A,B为集合，A与B的笛卡儿积记作A×B定义为

$$A\times B = \{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

例： $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B= \{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$

$B\times A= \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,3\rangle\}$

- 注意: $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 时，$A\times B=\varnothing$
- “×” 不满足结合律.

当 $A_1\times A_2\times\ldots A_n$时,约定"×"左结合,即

$$A_1\times A_2\times\ldots A_n=(\ldots(A_1\times A_2)\times\ldots A_{n-1})\times A_n$$

$A^n=A\times A\times\ldots A$ (n个 A)

性质证明

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例2

(1) 证明$A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B, C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in C \\
\Leftrightarrow\ & x\in B\wedge y\in D \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in B\times D
\end{aligned}
$$

(2) 不一定.反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

关系(Relation)：两个定义

(1) 序偶的一个集合, 确定了一个二元关系**R**。**R** 中任一序偶 **<x,y>**,可记作 **<x, y>∈R** 或 **xRy**

(2) 笛卡尔积的子集： $R \subseteq A \times B$

对通常的"关系"给出了一种抽象的描述.

例： 令 **A=B={1,2,3} R={<1,2>,<1,3>,<2,3>}**，其实**R**就是通常意义下的 ‘**<**' 关系。

前域 **dom(R)** $= \{x \mid \exists y.\langle x,y\rangle \in R\}$

值域 **ran(R)** $= \{y \mid \exists x.\langle x,y\rangle \in R\}$

域 **fld(*R*)** $= \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

例5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$