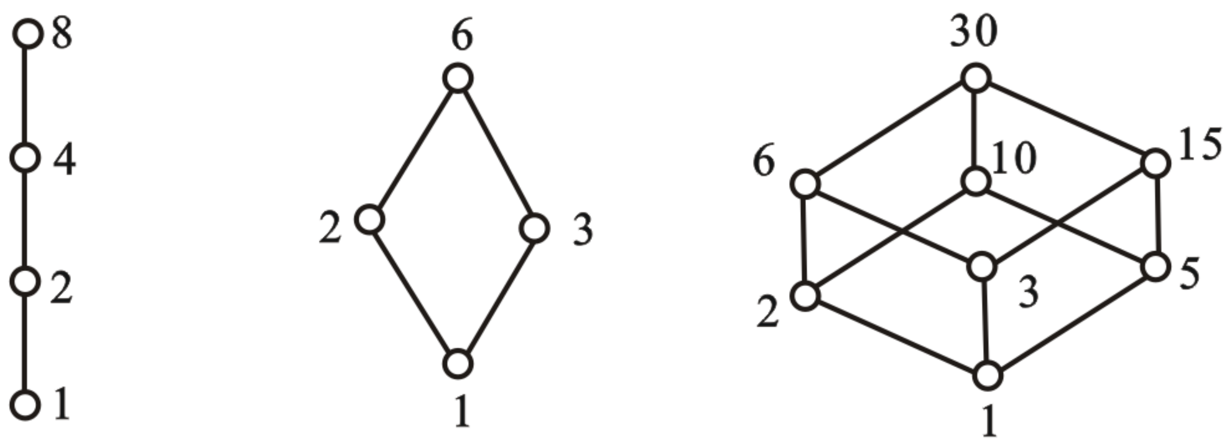
11.1 格的定义与性质

定义11.1 设$<S, \preccurlyeq>$是偏序集，如果$\forall x,y\in S$，$\{x,y\}$都有最小上界和最大下界，则称S关于偏序$\preccurlyeq$作成一个**格**.（偏序关系P126）

求$\{x,y\}$最小上界和最大下界看成x与y的二元运算$\vee$和$\wedge$，

例1 设n是正整数，S_n是n的正因子的集合. D为整除关系，则偏序集$<S_n,D>$构成格. $\forall x,y\in S_n$，$x\vee y$是$\mathrm{lcm}(x,y)$，即x与y的最小公倍数. $x\wedge y$是$\gcd(x,y)$，即x与y的最大公约数.



(S_8,D)　　(S_6,D)　　(S_{30},D)

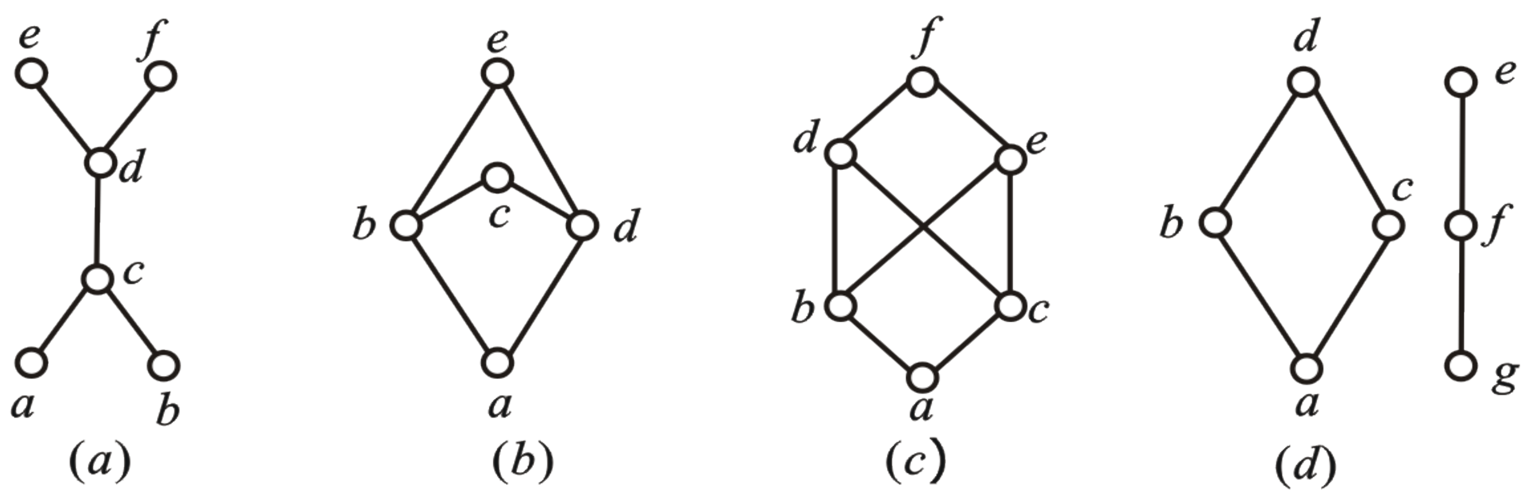
实例

例2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) $<P(B), \subseteq>$，其中$P(B)$是集合B的幂集.

(2) $<Z, \leq>$，其中Z是整数集，$\leq$为小于或等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



(1) 幂集格. $\forall x,y \in P(B)$，$x \vee y$就是$x \cup y$，$x \wedge y$就是$x \cap y$.

(2) 是格. $\forall x,y \in Z$，$x \vee y = \max(x,y)$，$x \wedge y = \min(x,y)$，

(3) 都不是格. 可以找到两个结点缺少最大下界或最小上界

格的性质：算律

定理11.1 设$<L, \preccurlyeq>$是格, 则运算∨和∧适合交换律、结合律、幂等律和吸收律, 即

(1) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee b = b \vee a,\ \ a \wedge b = b \wedge a$$

(2) $\forall a,b,c \in L$ 有

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ \ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

(3) $\forall a \in L$ 有

$$a \vee a = a,\ \ a \wedge a = a$$

(4) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee (a \wedge b) = a,\ \ a \wedge (a \vee b) = a$$

格的性质：序与运算的关系

定理11.3 设L是格, 则$\forall a,b\in L$有

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

可以用集合的例子来验证 幂集格

$<P(B),\subseteq>$，其中$P(B)$是集合B的幂集.

幂集格. $\forall x,y\in P(B)$，$x\vee y$就是$x\cup y$，$x\wedge y$就是$x\cap y$.

格的性质：保序

定理11.4 设L是格, $\forall a,b,c,d\in L$，若$a\preccurlyeq b$ 且 $c\preccurlyeq d$, 则

$$a\wedge c\preccurlyeq b\wedge d,\quad a\vee c\preccurlyeq b\vee d$$

证 $\quad a\wedge c\preccurlyeq a\preccurlyeq b,\ a\wedge c\preccurlyeq c\preccurlyeq d$

因此 $a\wedge c\preccurlyeq b\wedge d$. 同理可证 $a\vee c\preccurlyeq b\vee d$

例4 设L是格, 证明$\forall a,b,c\in L$有

$$a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

证 由 $a\preccurlyeq a$, $b\wedge c\preccurlyeq b$ 得 $a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq a\vee b$

由 $a\preccurlyeq a$, $b\wedge c\preccurlyeq c$ 得 $a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq a\vee c$

从而得到 $a\vee(b\wedge c)\preccurlyeq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ （注意最大下界）

注意：一般说来, 格中的$\vee$和$\wedge$运算不满足分配律.

格作为代数系统的定义

定理11.4 设<S,$*$,$\circ$>是具有两个二元运算的代数系统, 若对于$*$和$\circ$运算适合交换律、结合律、吸收律, 则可以适当定义S中的偏序 $\preccurlyeq$,使得 <S,$\preccurlyeq$> 构成格, 且$\forall a,b\in S$ 有

$$a\wedge b = a*b,\ a\vee b = a\circ b.$$

证明省略. 根据定理11.4, 可以给出格的另一个等价定义.

定义11.3 设<S, $*$, $\circ$ >是代数系统, $*$和$\circ$是二元运算, 如果$*$和$\circ$满足交换律、结合律和吸收律, 则<S, $*$,$\circ$>构成格.

11.2 分配格、有补格与布尔代数

定义11.5 设$<L,\wedge,\vee>$是格, 若$\forall a,b,c\in L$,有

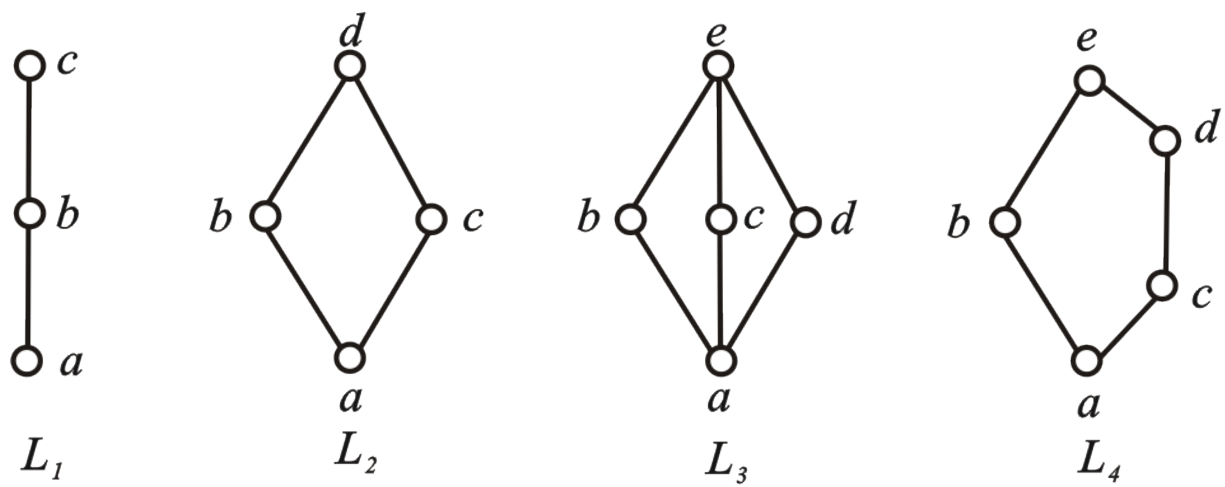
$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称L为分配格.

- 注意：可以证明以上两个条件互为充分必要条件

实例



L_1 和 L_2 是分配格, L_3 和 L_4不是分配格.
称 L_3为钻石格, L_4为五角格.

有界格的定义

定义11.6 设L是格,

(1) 若存在$a\in L$使得$\forall x\in L$有 $a \preccurlyeq x$, 则称a为L的全下界

(2) 若存在$b\in L$使得$\forall x\in L$有 $x \preccurlyeq b$, 则称b为L的全上界

说明:

- 格L若存在全下界或全上界, 一定是惟一的.
- 一般将格L的全下界记为0, 全上界记为1.

定义11.7 设L是格,若L存在全下界和全上界, 则称L 为有界格, 一般将有界格L记为$<L,\wedge,\vee,0,1>$.

有界格的性质

定理11.6 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格, 则$\forall a\in L$有

$$a\wedge 0=0,\ \ a\vee 0=a,\ \ a\wedge 1=a,\ \ a\vee 1=1$$

注意:

- 有限格$L=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$是有界格, $a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n$是$L$的全下界, $a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n$是$L$的全上界.
- 0是关于$\wedge$运算的零元,$\vee$运算的单位元；1是关于$\vee$运算的零元,$\wedge$运算的单位元.

有界格中的补元及实例

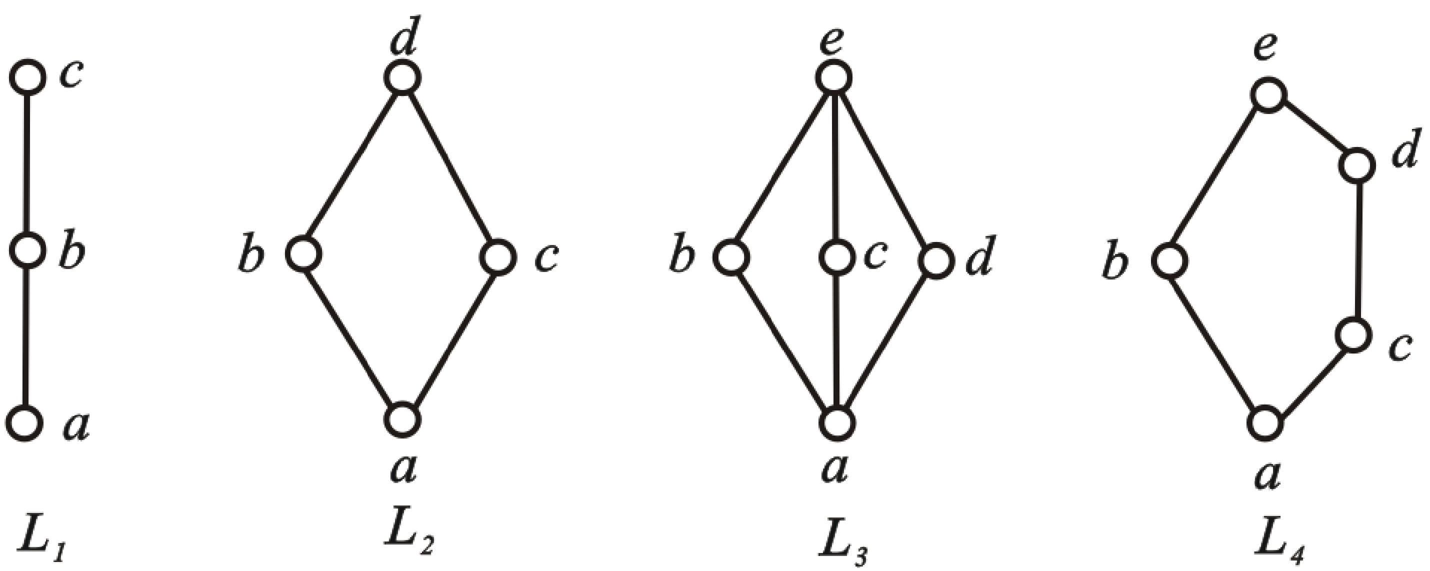
定义11.8 设 $<L,\wedge,\vee,0,1>$ 是有界格, $a\in L$, 若存在 $b\in L$ 使得

$$a\wedge b=0 \text{ 和 } a\vee b=1$$

成立, 则称 b 是 a 的**补元**.

- 注意：若 b 是 a 的补元, 那么 a 也是 b 的补元. a 和 b 互为补元.

例7 考虑下图中的格. 针对不同的元素，求出所有的补元.



解答

(1) L_1中 a 与 c 互为补元, 其中 a 为全下界, c为全上界, b 没有补元.

(2) L_2中 a 与 d 互为补元, 其中 a 为全下界, d 为全上界, b与 c 也互为补元.

(3) L_3中a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b 和 d ; d 的补元是 b 和 c； b, c, d 每个元素都有两个补元.

(4) L_4中 a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b； d 的补元是 b .

有界分配格的补元惟一性

定理11.7 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界分配格. 若L中元素 a 存在补元, 则存在惟一的补元.

证 假设 c 是 a 的补元, 则有

$$a\vee c = 1,\ a\wedge c = 0,$$

又知 b 是 a 的补元, 故

$$a\vee b = 1,\ a\wedge b = 0$$

从而得到 $a\vee c = a\vee b,\ a\wedge c = a\wedge b$, 由于$L$是分配格.

$b=b \wedge (b\vee a) = b \wedge (c\vee a) = (b \wedge c)\vee (b \wedge a) = (a\vee c) \wedge c=c$

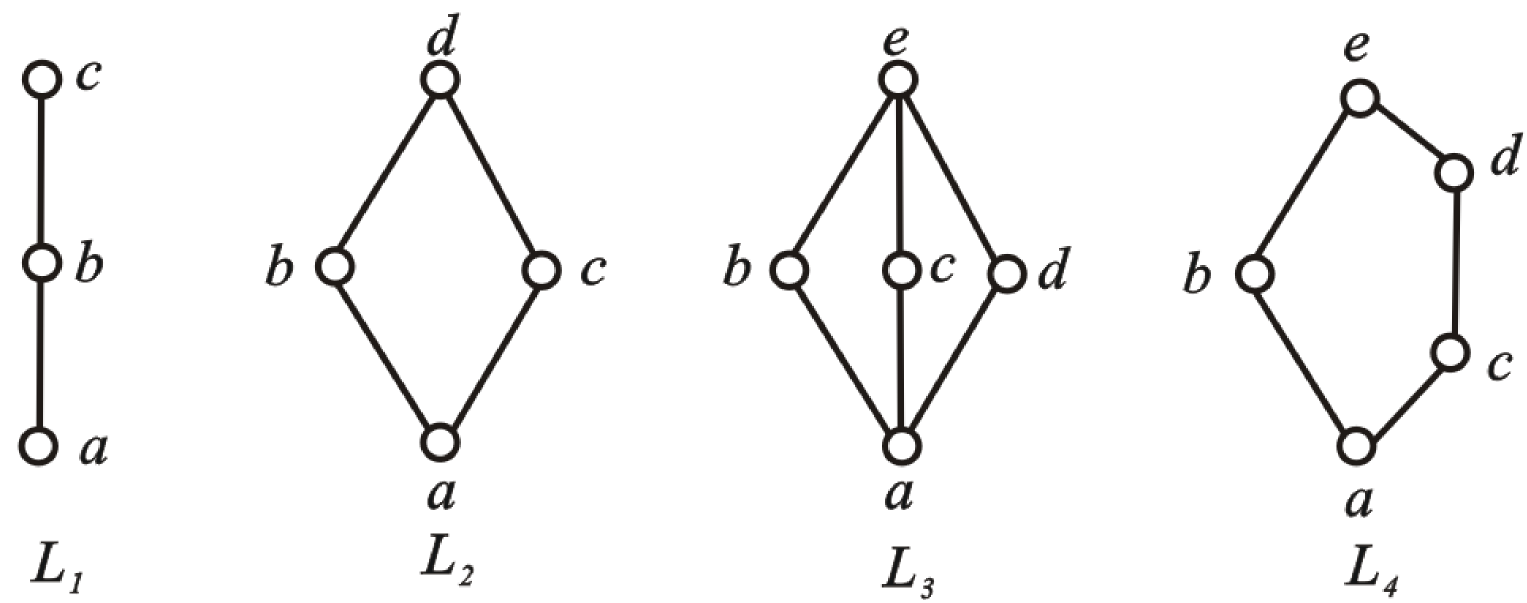
注意:

- 在任何有界格中, 全下界0与全上界1互补.
- 对于一般元素, 可能存在补元, 也可能不存在补元. 如果存在补元, 可能是惟一的, 也可能是多个补元. 对于有界分配格, 如果元素存在补元, 一定是惟一的.

有补格的定义

定义11.9 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格，若L中所有元素都有补元存在, 则称L为有补格.

例如, 图中的L_2, L_3和L_4是有补格, L_1不是有补格.



布尔代数的定义与实例

定义11.10 如果一个格是有补分配格, 则称它为布尔格或布尔代数. 布尔代数标记为$<B,\wedge,\vee,',0,1>$, $'$为求补运算.

例8 设 $S_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$是110的正因子集合，gcd表示求最大公约数的运算，lcm表示求最小公倍数的运算，问$<S110, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}>$是否构成布尔代数？为什么？

解　画出哈斯图?

(1) 不难验证S_{110}关于gcd 和 lcm 运算构成格. (略)

(2) 验证分配律 $\forall x, y, z \in S_{110}$ 有

$$\mathrm{gcd}(x, \mathrm{lcm}(y, z)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{gcd}(x, y), \mathrm{gcd}(x, z))$$

(3) 验证它是有补格，1作为$S110$中的全下界, 110为全上界, 1和110互为补元, 2和55互为补元, 5和22互为补元, 10和11互为补元, 从而证明了$<S110, \mathrm{gcd}, \mathrm{lcm}>$为布尔代数.

布尔代数的性质

定理11.8 设<$B,\wedge,\vee,',0,1$>是布尔代数, 则

(1) $\forall a\in B, (a')' = a$.

(2) $\forall a,b\in B$, $(a\wedge b)' = a'\vee b'$, $(a\vee b)' = a'\wedge b'$ （德摩根律）

证 (1) $(a')'$是a'的补元, a也是a'的补元. 由补元惟一性得$(a')'=a$.

(2) 对任意$a, b\in B$有

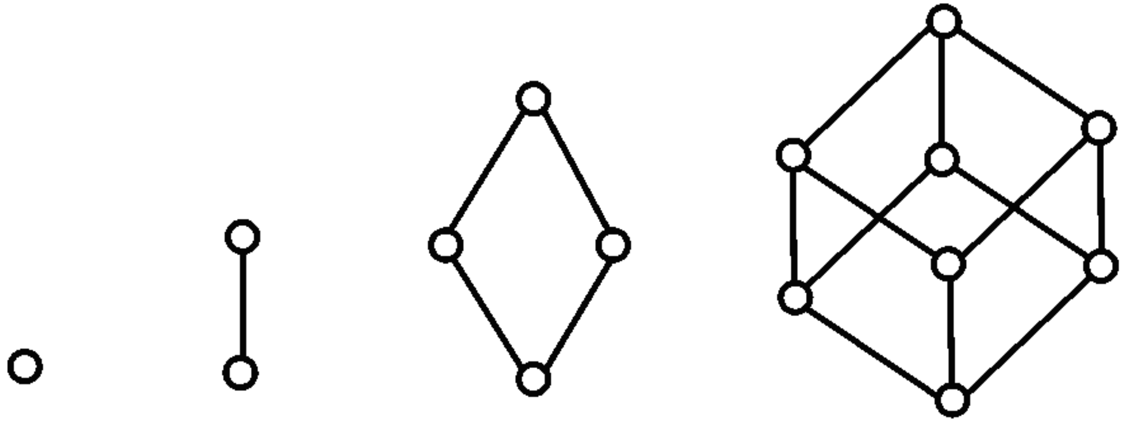
$$
\begin{aligned}
&(a\wedge b)\vee(a'\vee b') = (a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b') \\
&= (1\vee b')\wedge(a'\vee 1) = 1\wedge 1 = 1, \\
&(a\wedge b)\wedge(a'\vee b') = (a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b') \\
&= (0\wedge b)\vee(a\wedge 0) = 0\vee 0 = 0
\end{aligned}
$$

$a'\vee b'$是$a\wedge b$的补元, 根据补元惟一性有$(a\wedge b)' = a'\vee b'$, 同理可证 $(a\vee b)' = a'\wedge b'$.

- 注意：德摩根律对有限个元素也是正确的.

实例

下图给出了 1 元, 2 元, 4 元和 8 元的布尔代数.



第十一章 习题课

主要内容

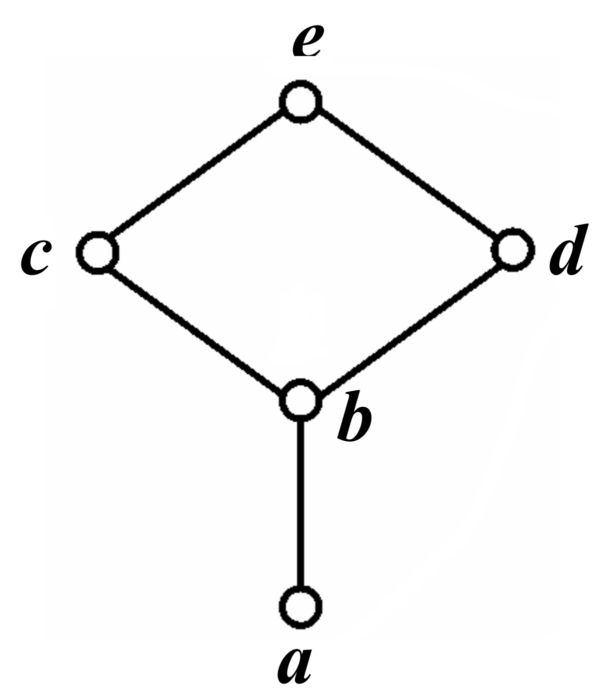
- 格的两个等价定义
- 格的性质
- 子格
- 特殊格：分配格、有界格、有补格、布尔代数

基本要求

- 能够判别给定偏序集或者代数系统是否构成格
- 能够确定一个命题的对偶命题
- 能够证明格中的等式和不等式
- 能判别格L的子集S是否构成子格
- 能够判别给定的格是否为分配格、有补格
- 能够判别布尔代数并证明布尔代数中的等式

练习1

1．求图中格的所有子格.



1元子格：$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\}$;

2元子格：$\{a, b\},\{a, c\},\{a, d\},$
$\{a, e\},\{b, c\},\{b, d\},$
$\{b, e\},\{c, e\},\{d, e\}$;

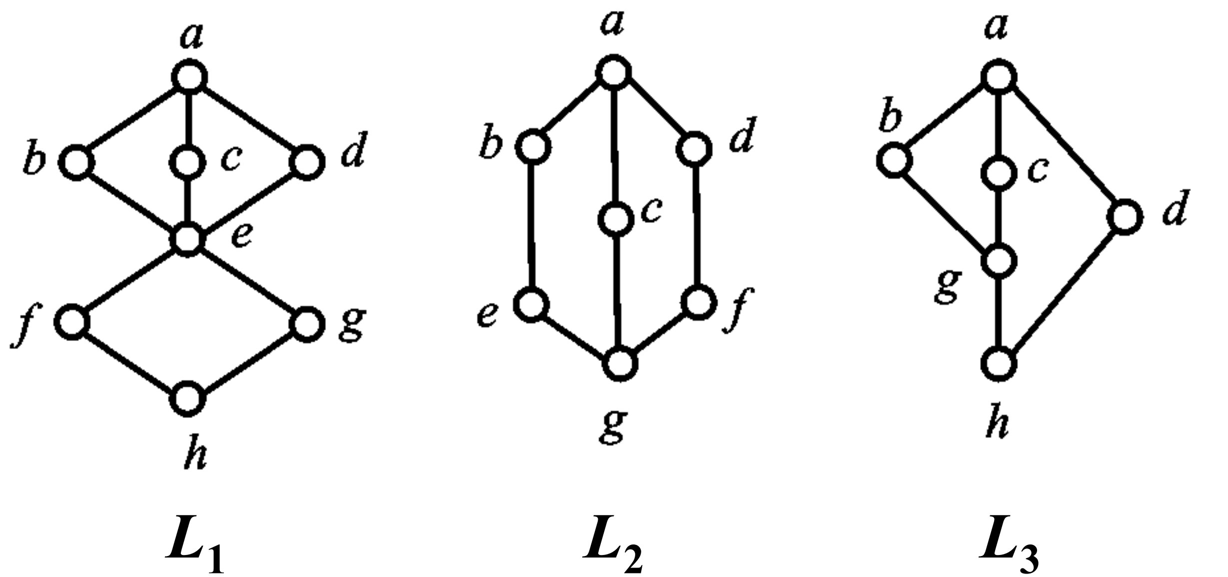
3元子格：$\{a, b, c\},\{a, b, d\},$
$\{a, b, e\},\{a, c, e\},$
$\{a, d, e\},\{b, c, e\},$
$\{b, d, e\}$;

4元子格：$\{a, b, c, e\},\{a, b, d, e\},$
$\{b, c, d, e\}$;

5元子格：$\{a, b, c, d, e\}$

练习2

2．针对下图，求出每个格的补元并说明它们是否为有补格



L_1中, a与h互为补元, 其他元素没补元.
L_2中, a与g互为补元. b的补元为c, d, f； c的补元为b, d, e, f； d的补元为b, c, e； e的补元为c, d, f； f的补元为b, c, e.
L_3中, a与h互为补元, b的补元为d； c的补元为d； d的补元为b, c, g； g的补元为d. L_2与L_3是有补格.