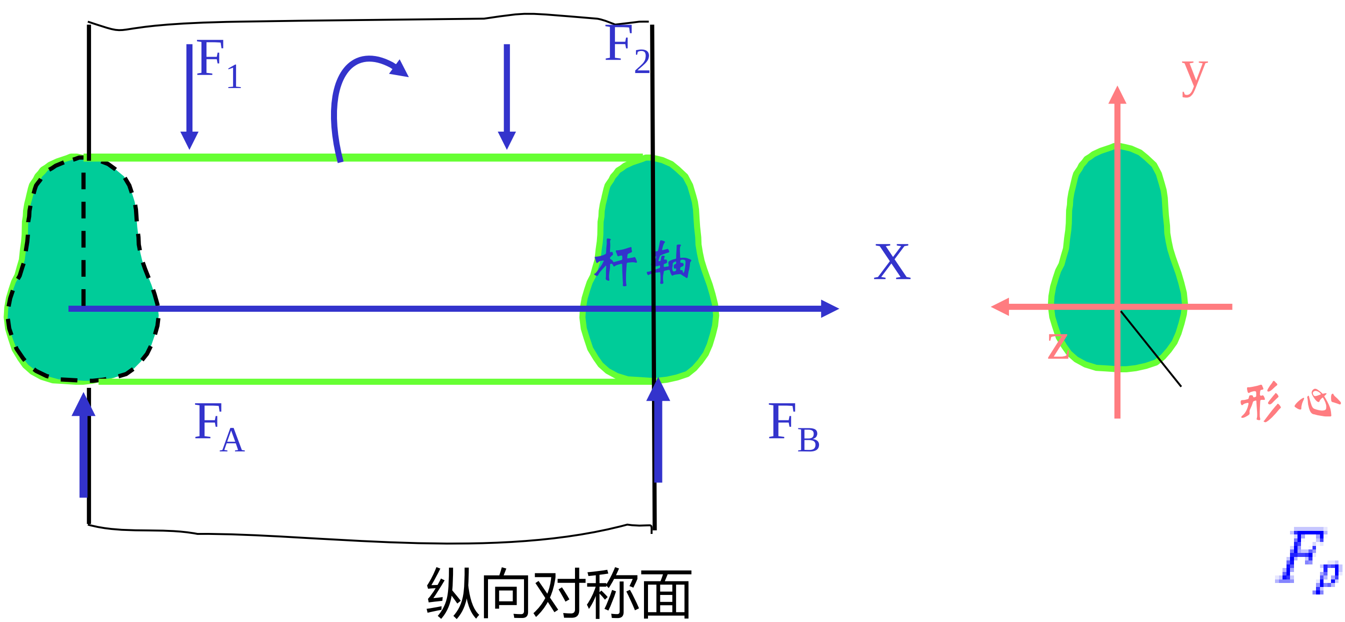
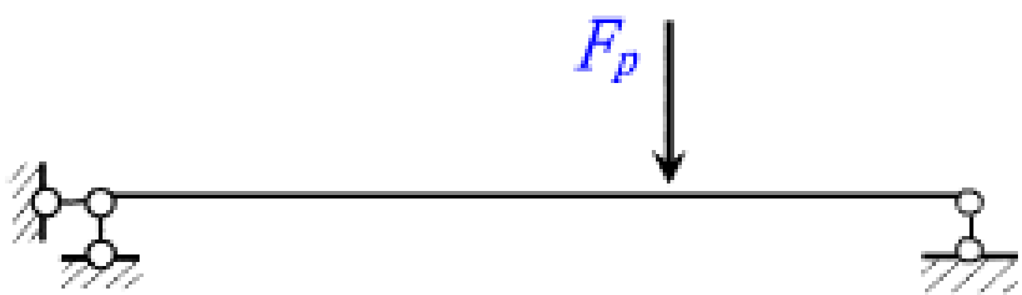
第五节 梁的弯曲强度

杆件承受垂直于其轴线方向的外力,或在其轴线平面内作用有外力偶时, 杆的轴线变为曲线.以轴线变弯为主要特征的变形称为弯曲。





一、梁的内力分析

1. 剪力与弯矩

梁的内力有两个：剪力和弯矩

利用**截面法**，列**力的平衡方程**

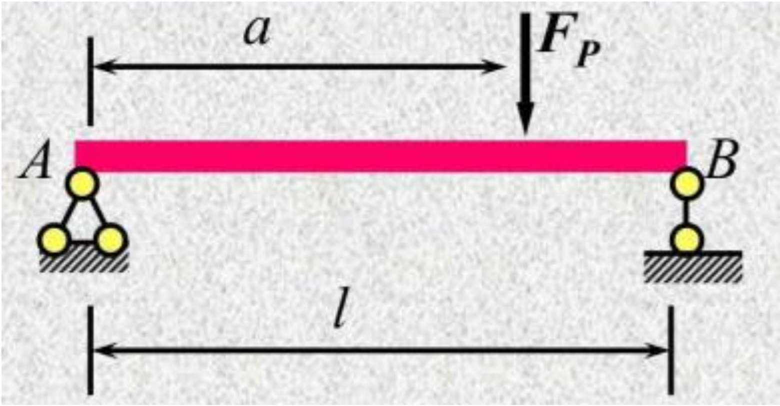
$$\sum F_y = 0,\ \ \mathrm{F}_{Ay} - V = 0$$

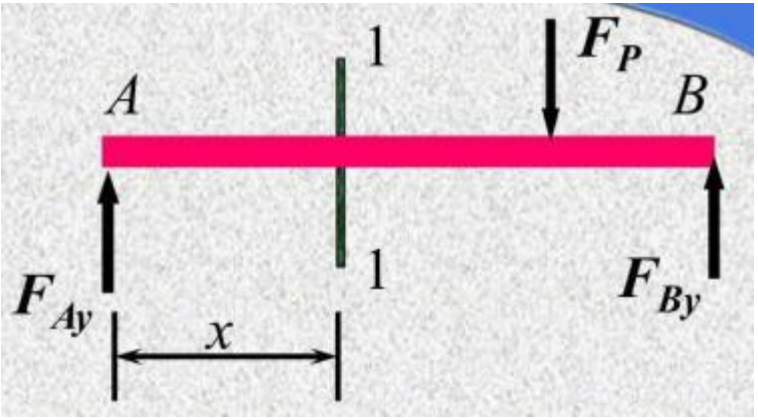
$$\mathrm{V=F}_{Ay}$$

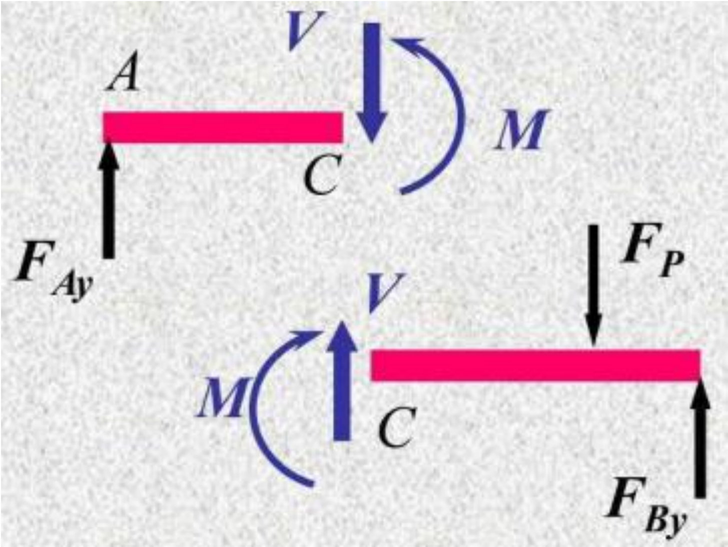
$$\sum M_C(F) = 0,\ \ \mathrm{M} - F_{Ay}x = 0$$

$$\mathrm{M=F}_{Ay}x$$

若以**右段梁**为研究对象，得到**数值相等的剪力和弯矩**，但**剪力方向、弯矩转向**与**左段梁横截面上**的剪力方向、弯矩转向**相反。**

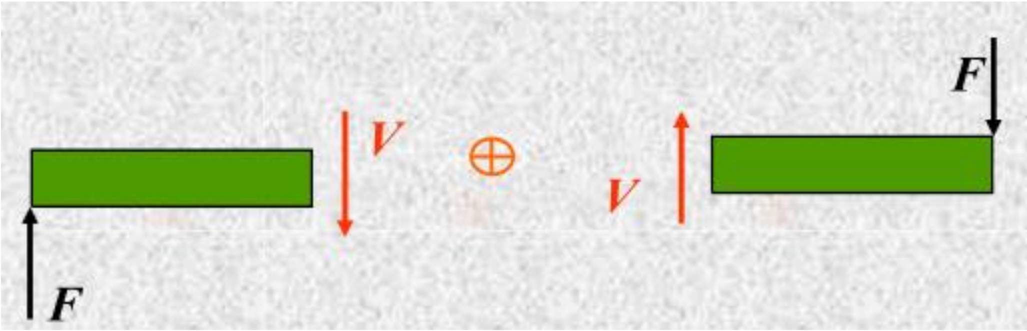






剪力与弯矩的正、负号规定

剪力绕分离体产生**顺时针**转动趋势时为**正**



剪力绕分离体产生**逆时针**转动趋势时为**负**

弯矩使分离体**凹面向上（上凹）或下凸为正**

弯矩使分离体**凹面向下（下凹）或上凸为负**

2. 剪力图和弯矩图

以横坐标x表示梁各横截面的位置，则梁横截面上的剪力和弯矩都可以为坐标x的函数，即

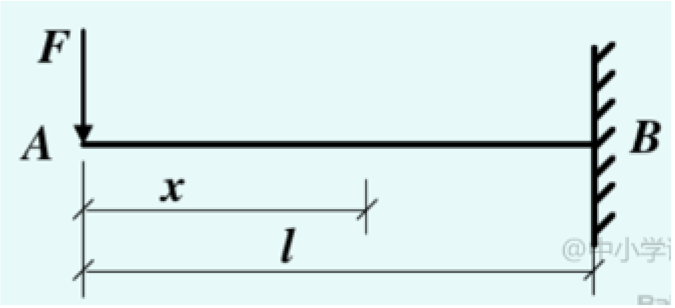
剪力方程 $\mathrm{F_S} = F_S(x)$

弯矩方程 $\mathrm{M} = M(x)$

为了形象地表示剪力和弯矩沿梁轴线的变化规律，可以根据剪力方程和弯矩方程分别画出**剪力图**和**弯矩图**。即以沿梁轴的横坐标x表示梁横截面的位置，以纵坐标表示相应截面的剪力和弯矩。

[例1] 如图所示，悬臂梁AB的跨度为l，其自由端A受到集中力F的作用，试画出该梁的剪力图和弯矩图。

解：（1）分段



由于AB段上无载荷变化，只有AB 段一段；

（2）列剪力方程和弯矩方程

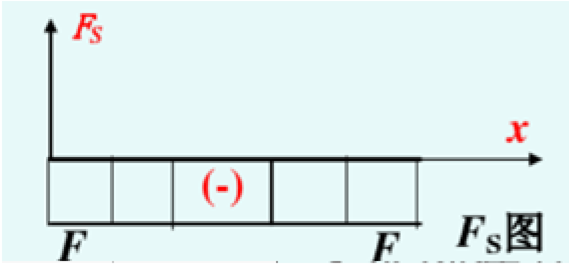
取距原点为x的任一截面，计算该截面上的剪力和弯矩，并把它们表示为x的函数，则有

剪力方程 $F_S(x) = -F \qquad (0<x<l)$

弯矩方程 $M(x) = -Fx \qquad (0 \leq x<l)$

(3）画剪力图和弯矩图

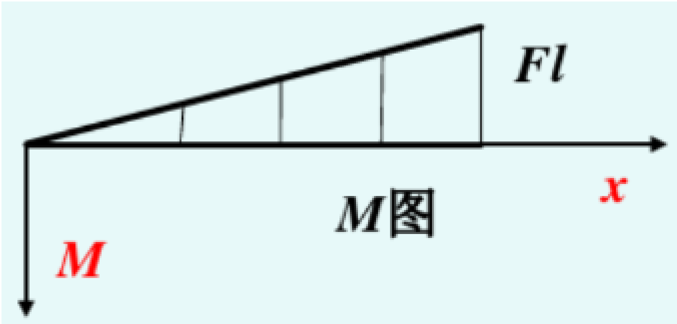
由剪力方程可知，$F_S(x)$ 是一常数，不随梁内横截面位置的变化而变化，所以F_S图是一条平行于x轴的直线，且位于x轴的下方。



由弯矩方程可知，M(x) 是一次函数，弯矩沿梁轴按直线规律变化，弯矩图是一条斜直线。

$$x=0,\ M_A = 0$$

$$x=l,\ M_B = -Fl$$



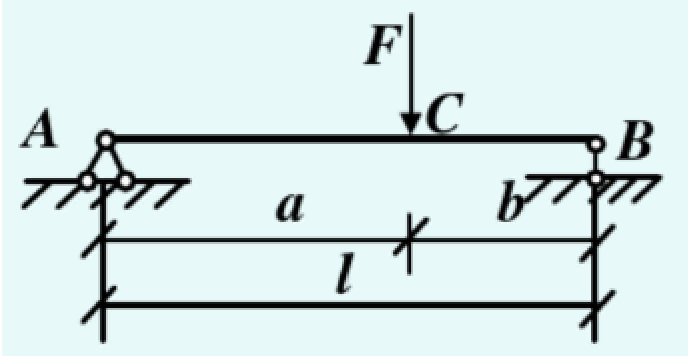
由剪力图和弯矩图可知：

$$\left|F_S\right|_{\max} = F$$

$$\left|M\right|_{\max} = Fl$$

由于在剪力图和弯矩图中的坐标比较明确，习惯上可将坐标轴略去。

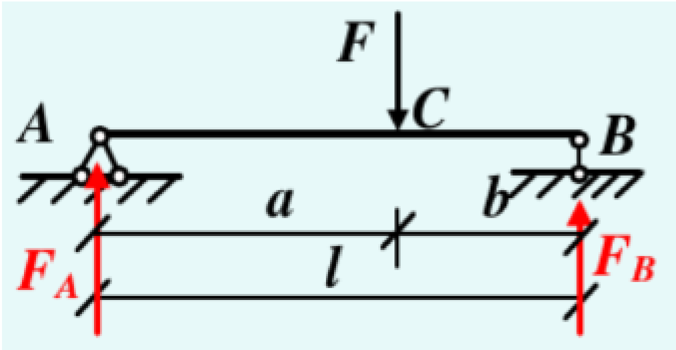
[例2] 如图所示，简支梁受集中力F的作用，试画出该梁的剪力图和弯矩图。



解: (1)求支座反力。以整体为研究对象，列平衡方程。

由$\sum M_A(F)=0$，得：$F_B\times l-F\times a=0$

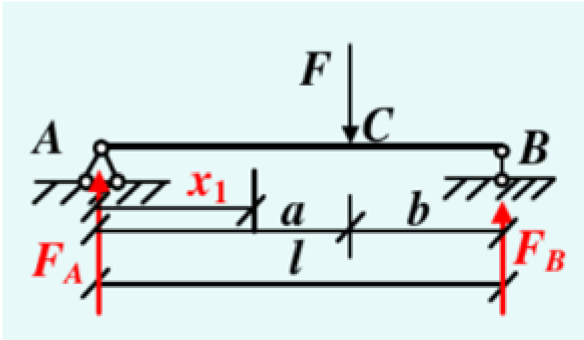
$$F_B=\frac{Fa}{l}\ (\uparrow)$$



由$\sum F_y=0$，得：$F_A-F+F_B=0$

$$F_A=\frac{Fb}{l}\ (\uparrow)$$

(2)列剪力方程和弯矩方程。梁在C处有集中力作用，故AC段和CB段的剪力方程和弯矩方程不同，要分段列出。

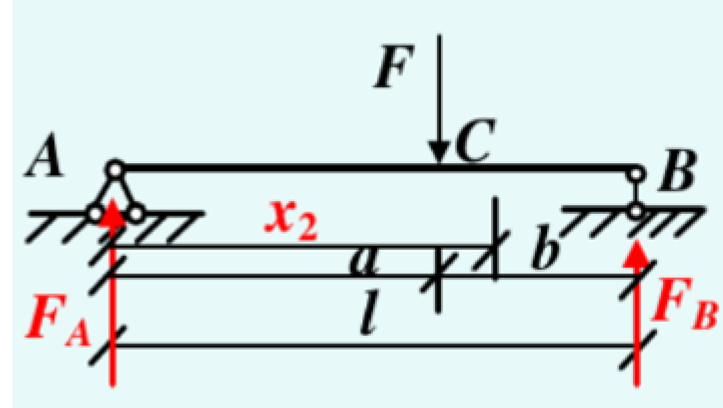


AC段：取距A为x_1的任意截面

$$F_S(x_1)=F_A=\frac{Fb}{l}\quad (0<x_1<a)$$

$$M(x_1)=F_A\bullet x_1=\frac{Fb}{l}x_1\quad (0\le x_1\le a)$$

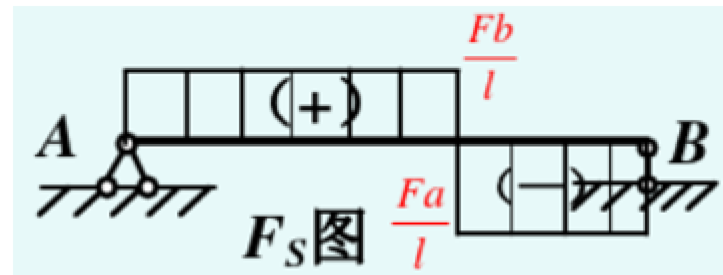
CB段：取距A为x_2的任意截面



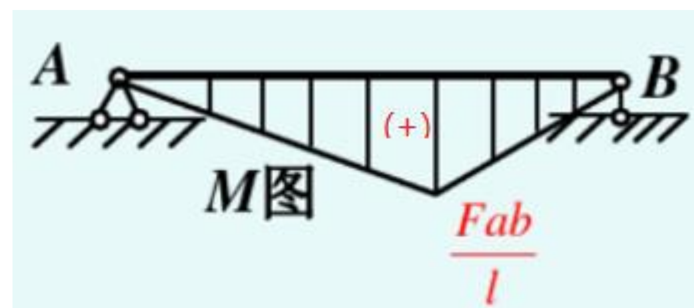
$$F_S(x_2) = -F_B = -\frac{Fa}{l} \quad (a<x_2<l)$$

$$M(x_2) = F_B(l-x_2) = \frac{Fa}{l}(l-x_2) \quad (a \le x_2 \le l)$$

(3)画剪力图和弯矩图。由剪力方程可知，AC段和CB段梁的剪力图均为水平线。AC段剪力图在x轴上方，CB段剪力图在x轴下方。在集中力F作用的C截面上，剪力图出现向下的突变，突变值等于集中力的大小。



由弯矩方程可知，两段梁的弯矩图均为斜直线

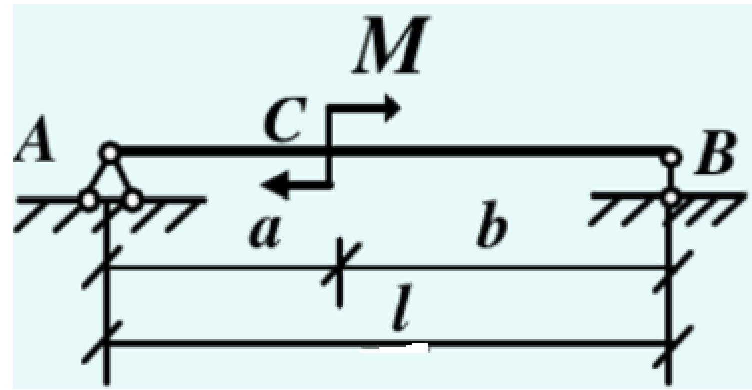


$x_1=0,\ M_A = 0$ $\quad$ $x_1=a,\ M_C = \frac{Fab}{l}$

$x_2=a,\ M_C = \frac{Fab}{l}$ $\quad$ $x_2=l,\ M_B = 0$

最大弯矩 $M_{max} = \frac{Fab}{l}$，发生在集中力作用处的**C截面上。**

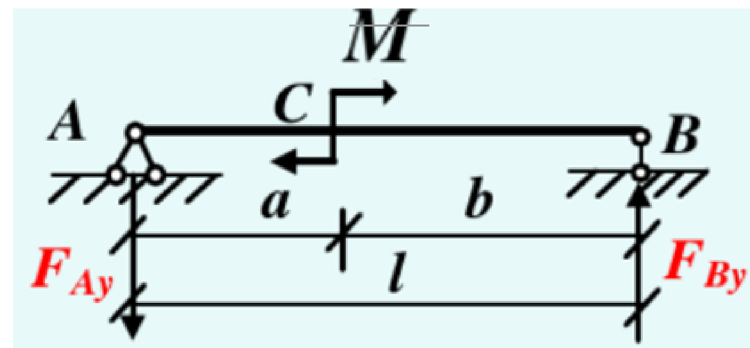
[例3] 如图所示，简支梁AB, 在C处作用有集中力偶M。试画出该梁的剪力图和弯矩图。



解: (1)求支座反力。以整体为研究对象，列平衡方程求出。

$$F_{Ay}=-\frac{M}{l}\ (\downarrow)$$

$$F_{By}=\frac{M}{l}\ (\uparrow)$$

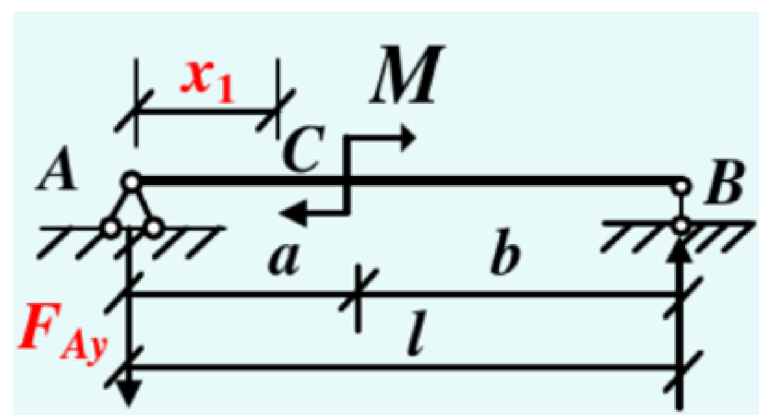


(2)分段列剪力方程和弯矩方程。

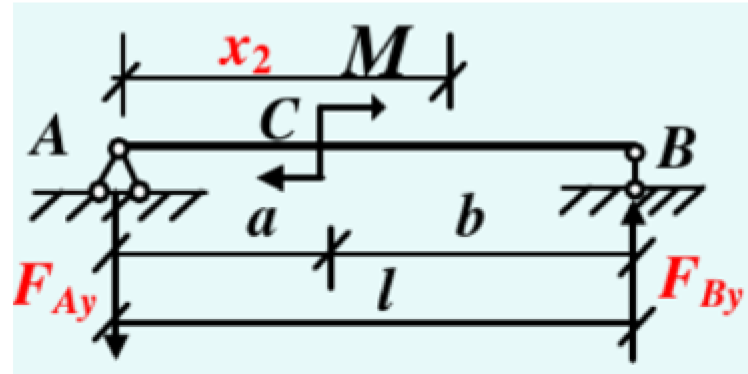
AC段：取距A为x_1的任意截面

$$F_S(x_1)=-\frac{M}{l}\quad (0<x_1\le a)$$

$$M(x_1)=-\frac{M}{l}x_1\quad (0\le x_1<a)$$



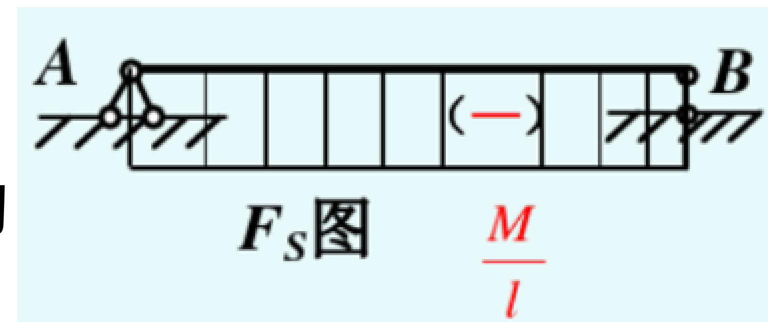
CB段：取距A为x_2的任意截面



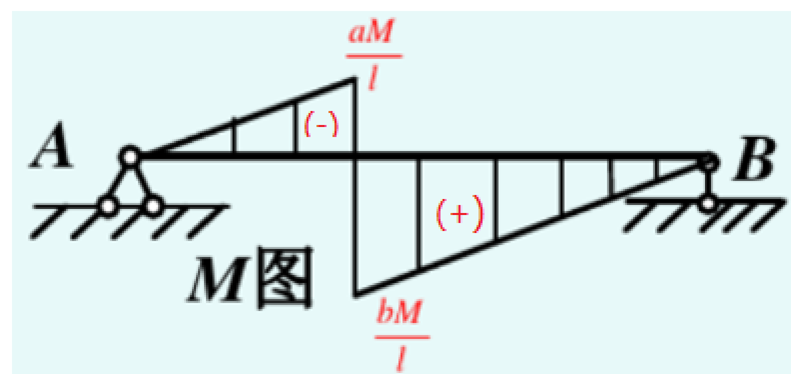
$$F_S(x_2) = -\frac{M}{l} \quad (a \le x_1 < l)$$

$$M(x_2) = \frac{M}{l}(l - x_2) \quad (a<x_2 \le l)$$

(3)画剪力图和弯矩图。由剪力方程可知，AC段和CB段梁的剪力图是同一条平行于x轴的直线，且在x轴下方。由弯矩方程可知，两段梁的弯矩图均为斜直线，要分段求值取点作图。



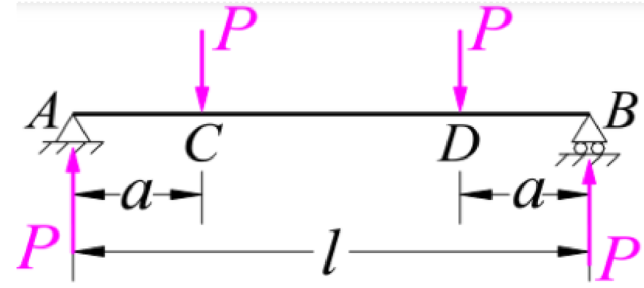
当b>a时，在**集中力偶作用处的C截面上弯矩最大**，$|M|_{max} = \frac{Mb}{l}$，在集中力偶作用处弯矩值有**突变**，突变量等于集中力偶矩M。



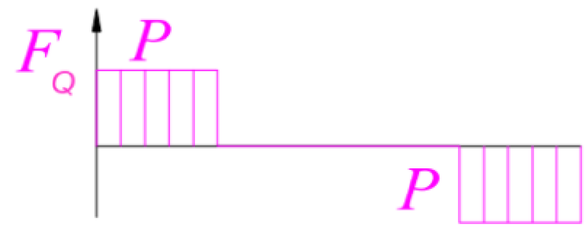
二、弯曲正应力及正应力强度条件

剪切弯曲（AC和BD段）：梁的横截面上剪力和弯矩同时存在

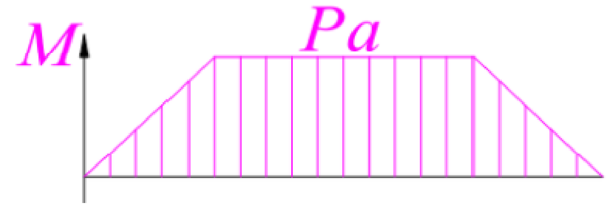
纯弯曲（CD段）：梁的各截面上剪力为零，且弯矩为常数。与截面垂直的分布内力系合成为弯矩，纯弯曲梁的横截面上只可能存在正应力。



(a)



(b)



(c)

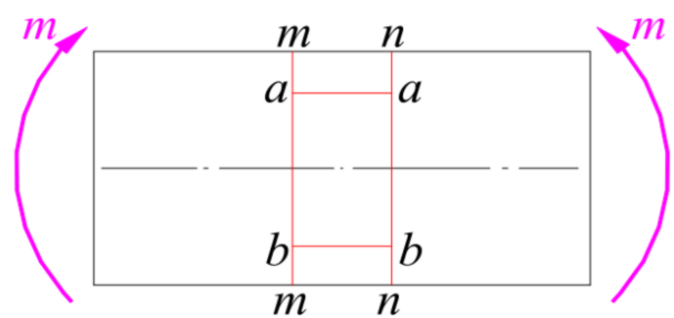
1. 弯曲时的正应力--以纯弯曲为例

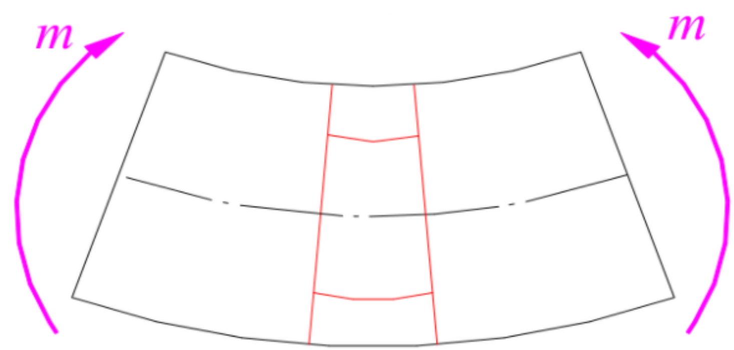
(1) 变形的几何关系

加外力偶矩，产生弯曲变形：

(1) 与梁轴线平行的纵线aa、bb变为弧线，aa缩短，bb伸长。

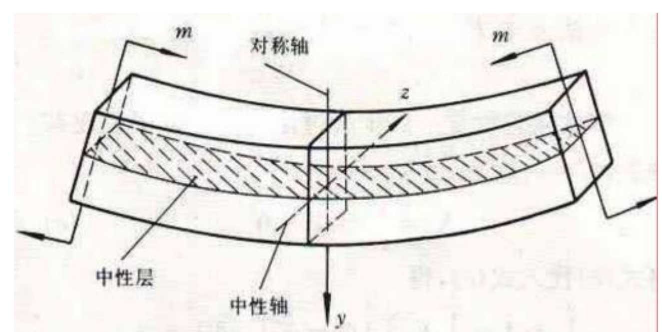
(2) 与梁轴线相垂直的横线mm、nn仍保持为直线，但仍与变为弧线的aa、bb垂直。





梁在纯弯曲时的平面假设：

梁的所有横截面，变形后仍为平面，但相互之间有相对转动，且这种转动后的横截面仍垂直于变形后梁的轴线。

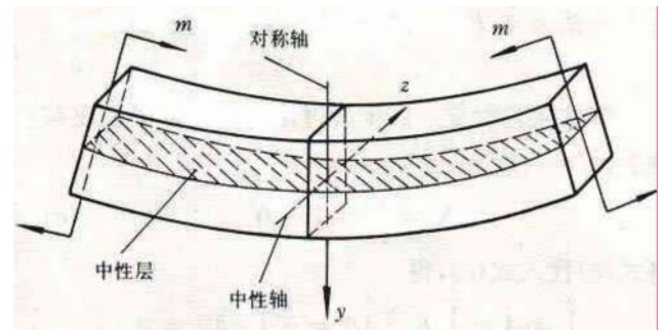


单向受力假设：

梁的所有与轴线平行的各纵向纤维间互不挤压，其变形为轴向拉伸或压缩。

推论：

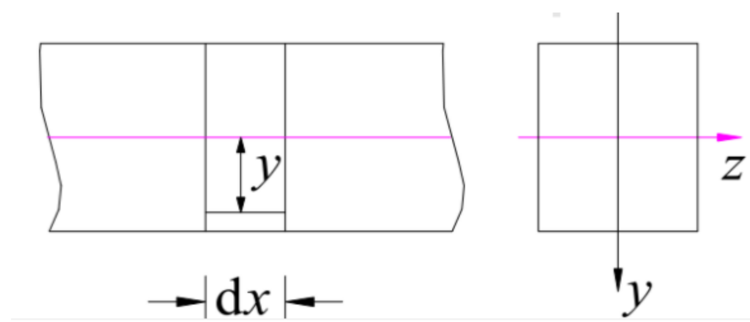
中性层—梁在弯曲变形时，靠近梁底部的各层纵向纤维伸长，靠近顶部的各层纵向纤维缩短，必有一层纵向纤维既不伸长也不缩短

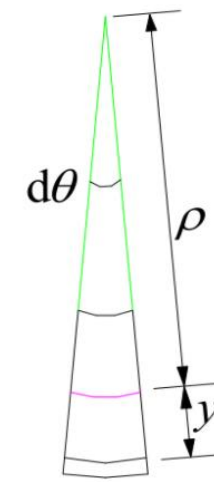


中性轴—中性层与横截面的交线

某纵向纤维段纵向线应变

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$





（2）应力-应变间的关系

应用胡克定律得 $$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$$

结论：梁横截面上任意点的正应力与该点距中性轴的距离y成正比。应力在中性轴上为零，离中性轴越远应力越大。

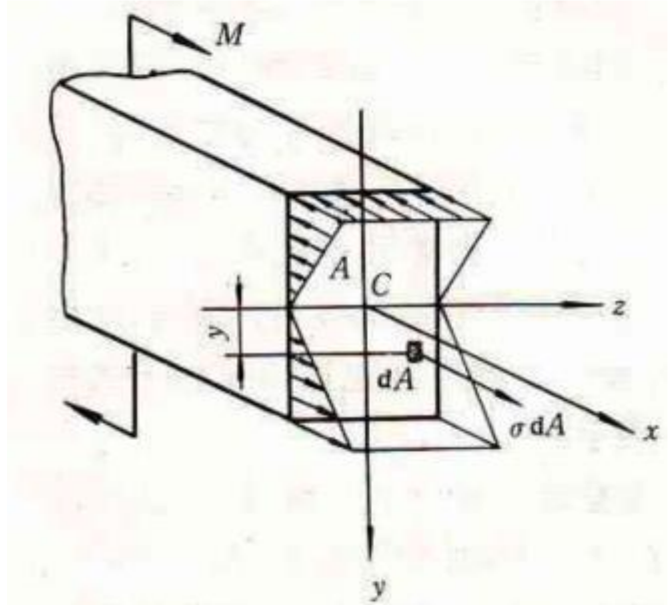
上式只能用于定性分析，不能用于定量计算：

（1）ρ 未知;

（2）中性轴的位置未确定，y无法标定。

(3）静力关系

纯弯曲梁，根据应力与内力的静力关系



$$\int_A \sigma dA = 0$$

$$\Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_A y dA = 0$$ **中心轴通过截面形心**

$$M = \int_A (\sigma dA) y$$

$$\Rightarrow M = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA \qquad I = \int_A y^2 dA$$ ——截面对于z轴的惯性矩

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$ EI-梁的抗弯刚度

$$\Rightarrow \sigma = \frac{My}{I}$$ ——梁截面上任意点的弯曲正应力公式

当y为最大值时，正应力最大：

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I} = \frac{M}{W}$$

其中 $W = \dfrac{I}{y_{\max}}$ ——抗弯截面系数

2. 弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \left|\frac{M}{W}\right|_{\max} \leq [\sigma]$$

对于等截面直梁：

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W} \leq [\sigma]$$

（1）塑性材料

以碳钢为代表 抗拉压强度相等

一般采用关于中性轴对称的截面形状：

圆形、圆环形、矩形和工字形

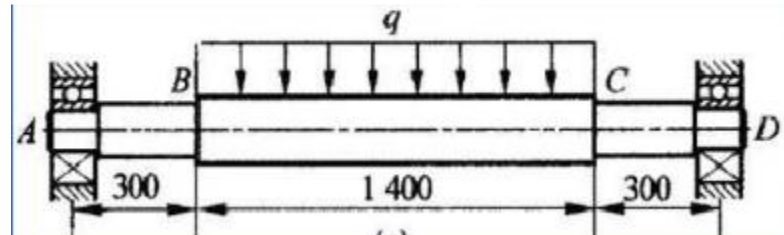
（2）脆性材料

以铸铁为代表 抗拉压强度不相等

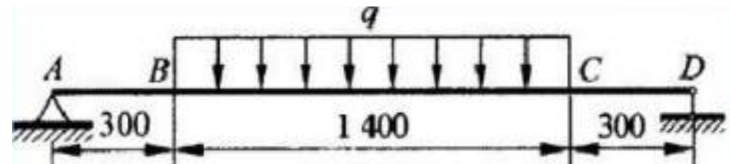
$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{\max+} \leq [\sigma_+] \\ \\ \sigma_{\max-} \leq [\sigma_-]\end{array}\right\}$$

$[\sigma_+],[\sigma_-]$分别表示材料的**许可拉应力**与**许可压应力**

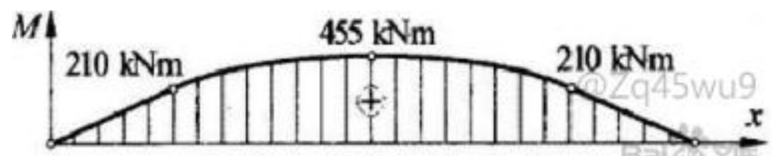
[例1]如图所示的辊轴，中段BC受均布载荷作用。已知载荷集度q=1kN/mm，许用应力$[\sigma]=140MPa$。试确定辊轴的直径。图中尺寸单位为mm。



(a)



(b)



(c)

解: 轴的计算简图和弯矩图分别如图(b)和(c)所示，图中

$$M_{\max}=455kN$$

$$M_B=M_C=210kN\bullet m$$

将圆截面的抗弯截面系数 $W_P=\dfrac{\pi d^3}{32}$ 代入弯曲正应力强度条件式，得 $\dfrac{M}{\pi d^3/32}\le[\sigma]$

因此，辊轴中段和AB段（或CD段）的截面直径分别为

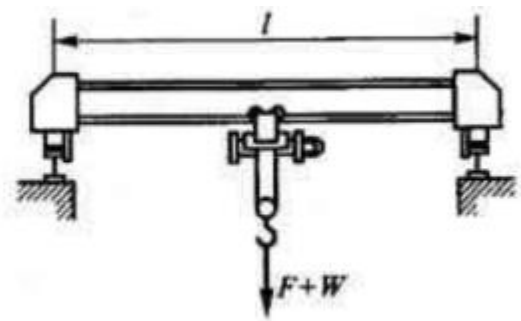
$$d_1\ge\sqrt[3]{\frac{32\times455\times10^3}{\pi\times140}}=321(mm),\ \text{取}\mathrm{d}_1=320mm$$

$$d_2\ge\sqrt[3]{\frac{32\times210\times10^3}{\pi\times140}}=248(mm),\ \text{取}\mathrm{d}_2=250mm$$

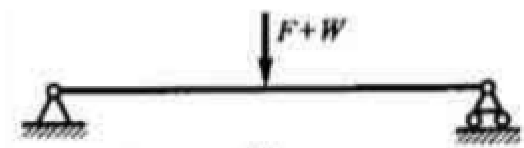
[例2] 如图(a)为一用工字钢制成的吊车梁，其跨度l=10.5m，许用应力$[\sigma]=140MPa$，工字钢的抗弯截面系数$W_z=1430cm^3$，小车自重W=15kN，起重量为F，梁的自重不计。求许可载荷[F]。

解: (1)作弯矩图。吊车梁可简化为简支梁，如图(b)。当小车行驶到梁中点C时引起的弯矩最大，弯矩图如图（c）所示。

$$M_{\max}=\frac{(F+W)}{4}l$$



(a)

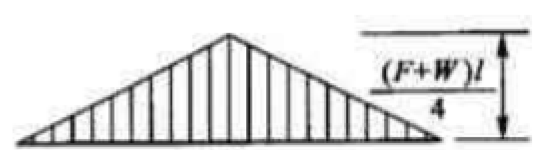


(b)

(2)计算许可载荷。

$$\sigma_{\max}\le[\sigma]W=140\times10^{6}\times1430\times10^{-6}=200(kN\bullet m)$$

$$F=\frac{4M_{\max}}{l}-W\le\frac{4\times200}{10.5}-15\le61.3kN$$



(c)

故许可载荷[F] =61.3kN。

第六节 提高梁的承载能力的合理途径

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W} \le [\sigma] \qquad \sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I} \le [\sigma]$$

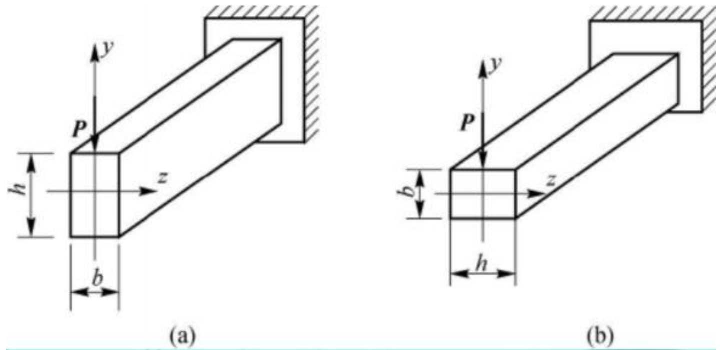
弯曲正应力是控制梁强度的主要因素，提高梁强度的措施是，降低M_{max}的数值，提高W和I的数值并充分利用材料的性能。

（1）采用合理的截面形状。

从弯曲正应力的分布规律来看，中性轴上的正应力为零，离中性轴越远正应力越大。为了能够充分利用材料，工程上将梁的截面设计成**工字形、箱型和圆管形**等。

经济的截面形状应该是截面上的最大拉应力和最大压应力同时达到材料的许用应力。对于抗拉和抗压强度相等的**塑性材料**，宜采用**对称于中性轴的截面形状，如空心圆形、工字形**等；对于抗压强度大于抗拉强度的脆性材料，应采用**中性轴靠近受拉一边的截面形状。**

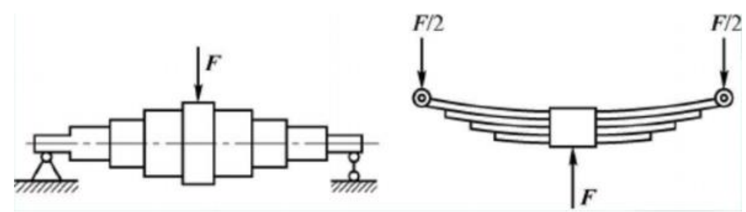
当截面的尺寸及材料相同时，截面放置的方式不同，抗弯截面系数W也不同。**矩形截面长边立放比平放合理。**



（2）采用变截面梁。

变截面梁—从弯矩方面考虑，梁内不同截面弯矩不同，为使材料强度得到充分利用，**梁截面亦应沿轴线变化。**

从弯曲强度考虑，理想的变截面梁是使所有横截面上的最大弯曲正应力均相同，并等于许用应力。



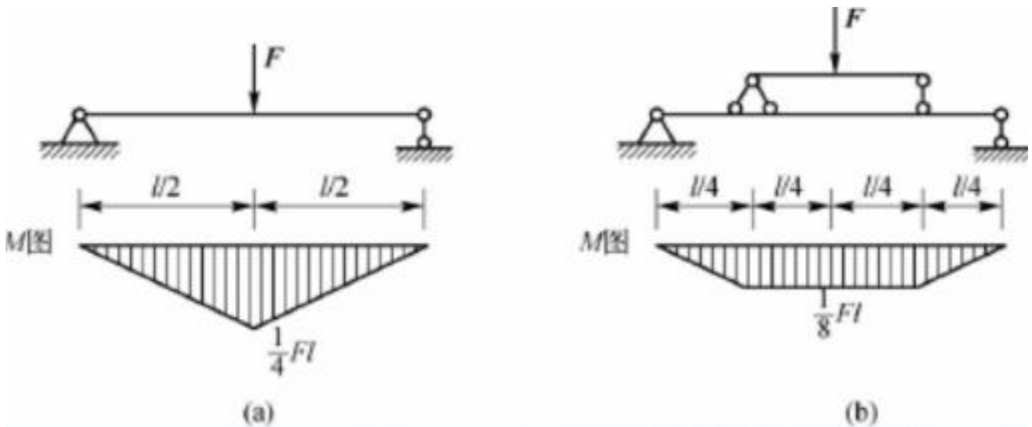
即

$$\sigma_{\max}=\frac{M(x)}{W(x)}=[\sigma]$$

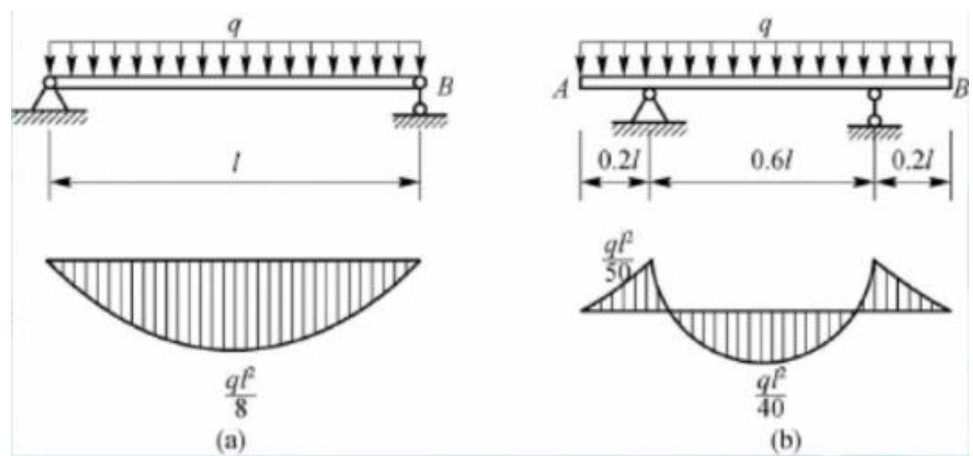
等强度梁：各个横截面具有相同强度的梁。

（3）合理地布置载荷和支承。

简支梁在跨中受到集中载荷F作用，若在梁地中部增设一辅助梁，使F通过辅助梁作用到简支梁上，可使梁的最大弯矩降低一半。



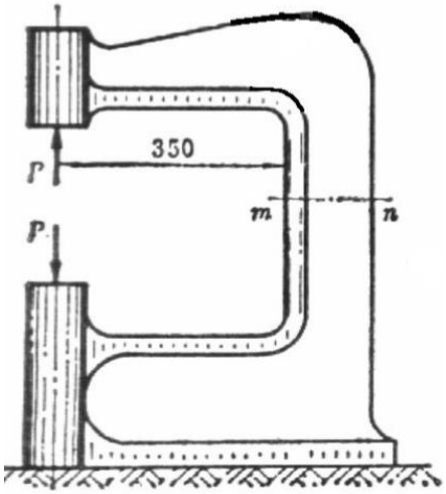
简支梁受均布载荷作用，最大弯矩在跨中，若将两端支座向内移动0.2l，最大弯矩值，仅为原来的20%，这样在设计时可以相应地降低梁地截面尺寸。



第七节 组合变形时杆件的强度计算

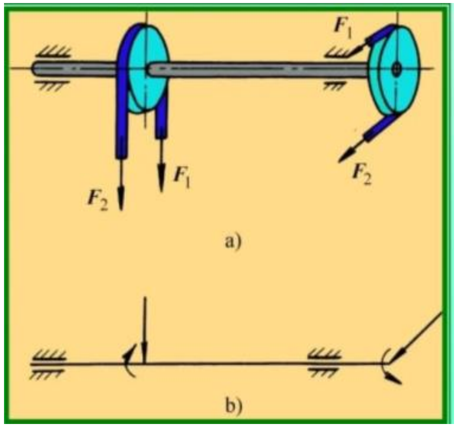
➢ 组合变形的概念

在外力的作用下，构件若同时产生两种或两种以上基本变形的情况就是组合变形。



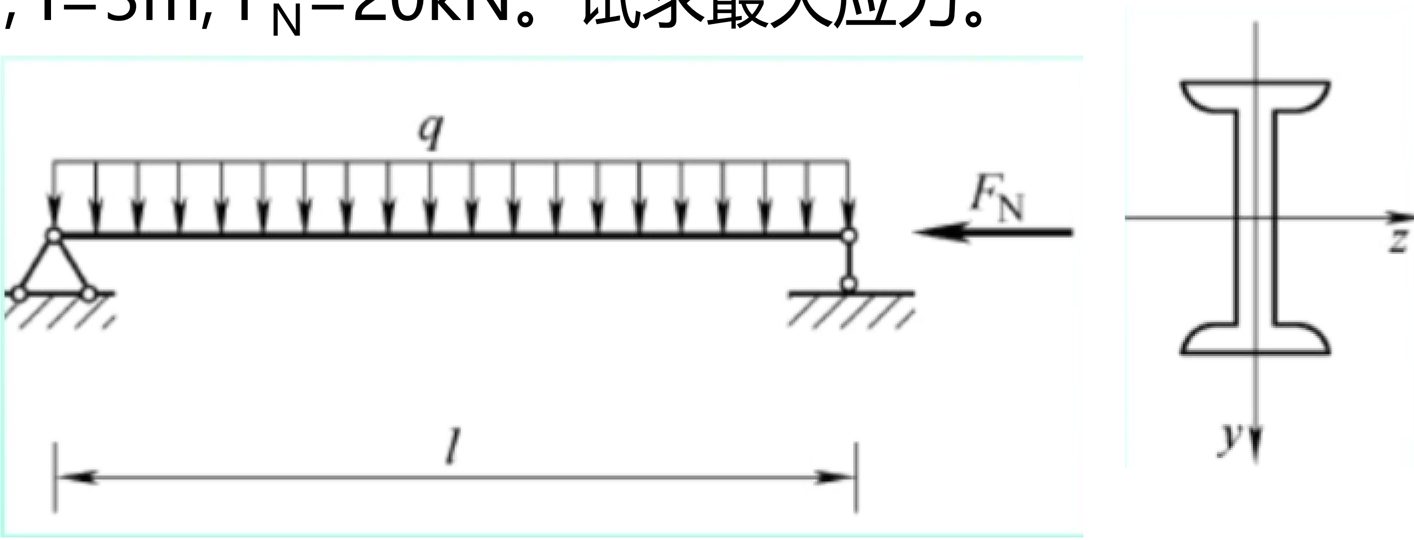
叠加原理

构件在服从胡克定律和小变形的条件下，力的独立性原理是成立的，计算杆件在组合变形下的应力，可以应用叠加原理。即所有载荷作用下的内力、应力、应变等是各个单独载荷作用下的值的叠加。



1、弯曲与拉伸或弯曲与压缩的联合作用

[例1] 图示为25a工字钢简支梁。受均布载荷q及轴向压力F_N作用。已知q=10kN/m, l=3m, F_N=20kN。试求最大应力。



解：（1）外力分析。梁受q和F_N作用，将产生轴向拉伸和弯曲。

（2）内力分析

$$\mathrm{N} = F_N \qquad \mathrm{M} = \frac{qx}{2}(l-x)$$

（3）应力分析

最大弯矩 $\mathrm{M}_{\max} = \dfrac{ql^2}{8} = 11250\,N\cdot m$

由弯矩引起的最大正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = 28MPa$$

由轴力引起的压应力

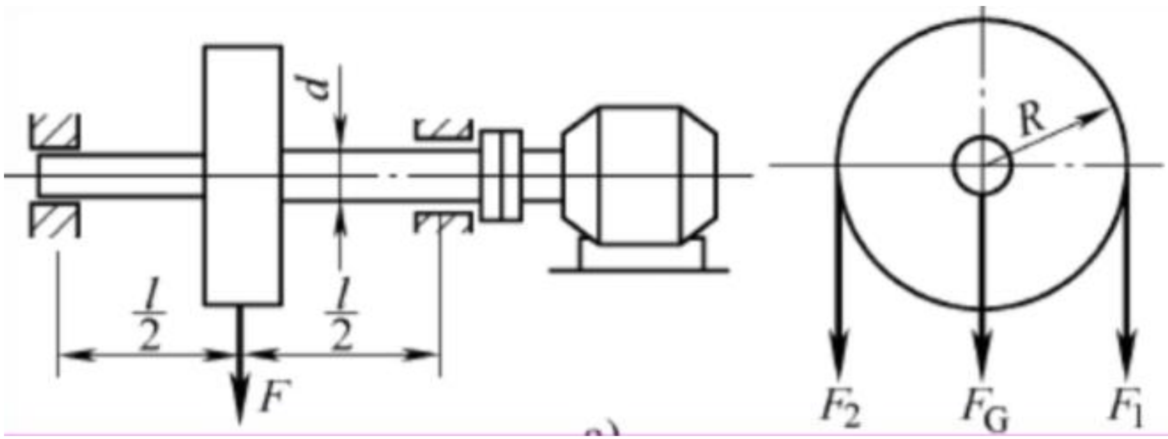
$$\sigma_c = \frac{F_N}{A} = -4.12MPa$$

最大总压应力

$$\sigma_{\max} = -32.12MPa$$

2、扭转与弯曲的联合作用

[例2] 如图所示的传动轴是由电动机带动，轴长l=1.2m，中间安装一带轮，重力G=5kN，半径R=0.6m，平带紧边张力F_1=6kN，松边张力F_2=3kN。如轴直径d=100mm，材料许用应力 $[\sigma]=50MPa$ 试按第三强度理论校核轴的强度。

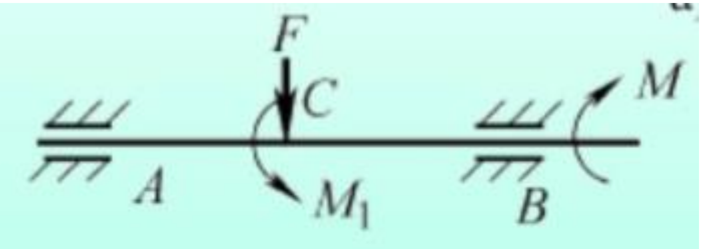


(a)

解：（1）外力分析。将作用在带轮上的平带拉力F_1和F_1向传动轴轴心简化。

铅垂力 $F_C = F_1 + F_2 + G = 14kN$

转矩 $M_1 = (F_1 - F_2)R = 1.8kN \cdot m$



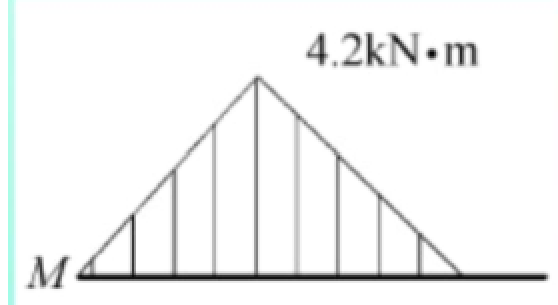
(b)

(2）内力分析。传动轴在铅垂力F_C作用下，将发生弯曲变形，其弯矩图如图(c)所示；在转矩M_1作用下，将产生扭转变形，其扭矩图如图(d)所示。

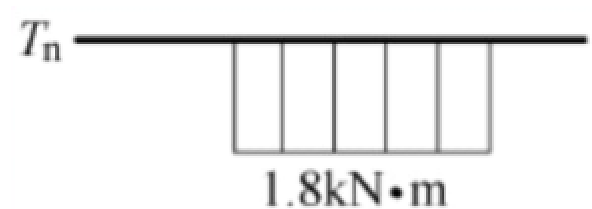
由此可以判断C截面为危险截面。C截面上的M_{max}和T分别为：

$$M_{max} = 4.2kN \cdot m$$

$$T = 1.8kN \cdot m$$



(c)



(d)

(3）应力分析

由弯矩引起的最大正应力

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$$

由扭矩引起的最大切应力

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_P}$$

(4）强度校核

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{max}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_P}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{max}{}^2 + T^2}}{W}$$

根据第三强度理论

$$\frac{\sqrt{M_{max}{}^2 + T^2}}{W} = 46.6MPa < [\sigma]$$