非线性泛函分析

姬超
理学院

华东理工大学

2020 年 3 月 3 日

第一章：预备知识

§1 度量空间

§1 有界线性算子的基本理论

定义1.1 (度量空间的基本概念)

设 X 是非空集合，d 是 $X \times X$ 上的实函数，如果它满足下面的条件：

定义1.1 (度量空间的基本概念)

设 X 是非空集合，d 是 $X \times X$ 上的实函数，如果它满足下面的条件：

（*1*）对任意 $x, y \in X$，$d(x, y) \geq 0$，并且 $d(x, y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$;

定义1.1 (度量空间的基本概念)

设 X 是非空集合，d 是 $X \times X$ 上的实函数，如果它满足下面的条件：

（*1*）对任意 $x, y \in X$，$d(x, y) \geq 0$，并且 $d(x, y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$;

（*2*）$d(x, y) = d(y, x)$，$\forall x, y \in X$;

定义1.1 (度量空间的基本概念)

设 X 是非空集合，d 是 $X \times X$ 上的实函数，如果它满足下面的条件：

（1）对任意 $x, y \in X$，$d(x, y) \geq 0$，并且 $d(x, y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$;

（2）$d(x, y) = d(y, x)$，$\forall x, y \in X$;

（3）$d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y)$，$\forall x, y, z \in X$.

§1.1 度量空间

定义1.1 (度量空间的基本概念)

设 X 是非空集合，d 是 $X \times X$ 上的实函数，如果它满足下面的条件：

（1）对任意 $x, y \in X$，$d(x, y) \geq 0$，并且 $d(x, y) = 0$ 的充分必要条件是 $x = y$；

（2）$d(x, y) = d(y, x)$，$\forall x, y \in X$；

（3）$d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y)$，$\forall x, y, z \in X$.

则称 d 是 X 上的距离函数，而称 $d(x, y)$ 为 x 与 y 之间的距离。又称 (X, d) 为距离空间或度量空间。

定义1.2 (Cauchy 列的定义)

设 x_n 是度量空间 X 中的点列，如果对任何 $\epsilon > 0$ ，存在正整数 N ，使得当 $n, m \geq N$ 时，有

$$d(x_n, x_m) < \epsilon,$$

定义1.2 (Cauchy 列的定义)

设 x_n 是度量空间 X 中的点列，如果对任何 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n, m \geq N$ 时，有

$$d(x_n, x_m) < \epsilon,$$

则称 x_n 是 X 中的 *Cauchy* 列。

定义1.2 (Cauchy 列的定义)

设 x_n 是度量空间 X 中的点列，如果对任何 $\epsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n, m \geq N$ 时，有

$$d(x_n, x_m) < \epsilon,$$

则称 x_n 是 X 中的 *Cauchy* 列。

如果度量空间 X 中每个 Cauchy 列都有极限则称 X 是完备的。

定义1.3 (紧性)

设 A 是度量空间 X 的子集，如果对于 A 的任何一族开覆盖，都有有限子覆盖，则称 A 是紧的；如果 A 的闭包 $\overline{A}$ 是紧的，则称是相对紧的或者致密的。

定义1.3 (紧性)

设 A 是度量空间 X 的子集，如果对于 A 的任何一族开覆盖，都有有限子覆盖，则称 A 是紧的；如果 A 的闭包 $\overline{A}$ 是紧的，则称是相对紧的或者致密的。

定理1.1

A 是度量空间 X 中紧集的充分必要条件是对 A 中的每个点列 $\{x_n\}$，存在子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\{x_{n_k}\}$ 在 A 中有极限。

定义1.4 (线性赋范空间)

设 X 是实数域或复数域上 F 上的线性空间，如果 X 上的实值函数 $\|\cdot\|$ 满足下面的条件：

定义1.4 (线性赋范空间)

设 X 是实数域或复数域上 F 上的线性空间，如果 X 上的实值函数 $\|\cdot\|$ 满足下面的条件：

(1) 对任何 $x \in X$，$\|x\| \geq 0$，并且 $\|x\| = 0$ 的充分必要条件是 $x = 0$；

定义1.4 (线性赋范空间)

设 X 是实数域或复数域上 F 上的线性空间，如果 X 上的实值函数 $\|\cdot\|$ 满足下面的条件：

(1) 对任何 $x \in X$，$\|x\| \geq 0$，并且 $\|x\| = 0$ 的充分必要条件是 $x = 0$；

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$，$\forall \alpha \in F, \forall x \in X$；

定义1.4 (线性赋范空间)

设 X 是实数域或复数域上 F 上的线性空间，如果 X 上的实值函数 $\|\cdot\|$ 满足下面的条件：

(1) 对任何 $x \in X$，$\|x\| \geq 0$，并且 $\|x\| = 0$ 的充分必要条件是 $x = 0$；

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$，$\forall \alpha \in F, \forall x \in X;$

(3) $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$，$\forall x, y \in X.$

定义1.4 (线性赋范空间)

设 X 是实数域或复数域上 F 上的线性空间，如果 X 上的实值函数 $\|\cdot\|$ 满足下面的条件：

(1) 对任何 $x \in X$，$\|x\| \geq 0$，并且 $\|x\| = 0$ 的充分必要条件是 $x = 0$；

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$，$\forall \alpha \in F, \forall x \in X$;

(3) $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$，$\forall x, y \in X$.

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 为的范数，而称 $(X, \|\cdot\|)$ 为线性赋范空间。

定义1.4 (线性赋范空间)

设 X 是实数域或复数域上 F 上的线性空间，如果 X 上的实值函数 $\|\cdot\|$ 满足下面的条件：

(1) 对任何 $x \in X$，$\|x\| \geq 0$，并且 $\|x\| = 0$ 的充分必要条件是 $x = 0$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$，$\forall \alpha \in F, \forall x \in X$;

(3) $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$，$\forall x, y \in X$.

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 为的范数，而称 $(X, \|\cdot\|)$ 为线性赋范空间。

定义1.5 (Banach空间)

完备的线性赋范空间称为 *Banach* 空间。

定义1.7 (弱收敛与弱 $*$ 收敛)

设 X 是线性赋范空间， X^* 是它的共轭空间，$\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$, 如果对每个 $f \in X^*$ ， 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 ， 记为 $x_n \rightharpoonup x_0$.

定义1.7 (弱收敛与弱 $*$ 收敛)

设 X 是线性赋范空间， X^* 是它的共轭空间，$\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$, 如果对每个 $f \in X^*$ ，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 ，记为 $x_n \rightharpoonup x_0$.

设$\{f_n\} \subset X^*$, $f_0 \in X^*$, 如果对每个 $x \in X$ ，都有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x),$$

则称 $\{f_n\}$ 弱 $*$ 收敛于 f_0 .

定义1.8 (自反空间)

设 X 是线性赋范空间，如果 $X = X^{**}$，则称 X 是自反的。

定义1.8 (自反空间)

设 X 是线性赋范空间，如果 $X = X^{**}$，则称 X 是自反的。

定理1.2

设 X 是自反的 $Banach$ 空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的有界点列，则 $\{x_n\}$ 有弱收敛的子列。

定义1.9

设 X, Y 是两个线性赋范空间， $T: X \to Y$ 是线性算子，如果 T 的值域 $R(T) = Y$ ， T 的逆算子 T^{-1} 存在并且有界，则称 T 是正则算子。

定义1.9

设 X, Y 是两个线性赋范空间， $T: X \to Y$ 是线性算子，如果 T 的值域 $R(T) = Y$ ， T 的逆算子 T^{-1} 存在并且有界，则称 T 是正则算子。

定理1.3

设 X, Y 是 $Banach$ 空间， $T: X \to Y$ 是一一到上的有界线性算子，则 T^{-1} 有界。因此， T 是正则算子。

Thank you!