极小元(Minimal Element)/极大元(Maximal Element)

设<A,≤>为偏序集, B⊆ A

(1) 对b∈B，若B中不存在x满足:

$b \neq x$且 $x \leq b$

则称b为B的极小元.

(2) 对b∈B，若B中不存在x满足:

$b \neq x$且 $b \leq x$

则称b为B的极大元.

最小元(The Smallest Element) / 最大元 (The Greatest Element)

设<A,≤>为偏序集,B⊆ A,若有某个b∈B

(1) 对于B中每一个元素x都有b≤x，则称b为B的**最小元.**

(2) 对于B中每一个元素x都有x≤b，则称b为B的**最大元.**

下界(Lower Bound) / 上界(Upper bound)

设$<A,\leq>$为偏序集, $B\subseteq A$

(1) 若有$a\in A$,且对$\forall x\in B$ 满足 $a\leq x$，则称a为B的下界。

进一步:设a为B的下界,若B的所有下界y均有$y\leq a$,

则称a为B的下确界， 记为glb B。

(2) 若有$a\in A$,且对$\forall x\in B$ 满足 $x\leq a$，则称a为B的上界。

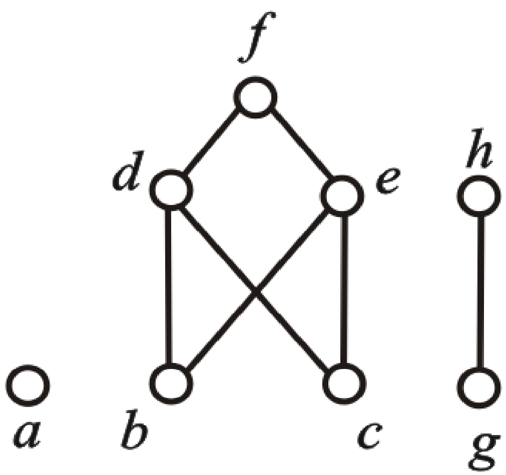
进一步:设a为B的上界,若B的所有上界y均有$a\leq y$,

则称a为B的上确界，记为lub B。

▪

实例

设偏序集<A,≼>，求A的极小元、最小元、极大元、最大元，设B＝{ b,c,d }, 求B的下界、上界、下确界、上确界.



解

极小元：*a*, *b*, *c*, *g*；

极大元：*a*, *f*, *h*；

没有最小元与最大元.

*B*的下界和最大下界都不存在；

上界有 *d* 和 *f*,

最小上界为 *d*.

六、函数

概念：

函数，常函数，恒等函数，满射，入射，双射，

复合函数，反函数

函数

设X,Y为两个集合,$f \subseteq X \times Y$, 若对$\forall x \in X$,$\exists ! y \in Y$,满足:

$$\langle x,y\rangle \in f,$$

则称f为**函数**.记为:$f:X \to Y$

- **定义域**: domf=X
- **值域**: ranf (有时记为f(X))=$\{f(x)|x \in X\}$

例: 判别下列关系能否构成函数.

$f1 = \{\langle y_1,y_2\rangle \mid y_1,y_2 \in R$ 且$y_2^2=y_1\}$
$f2 = \{\langle y_1,y_2\rangle \mid y_1,y_2 \in R$ 且 $y_2 = y_1^2\}$
$f3 = \{\langle y_2,y_1\rangle \mid y_1,y_2 \in R$ 且$y_2^2 =y_1\}$
$f4 = \{\langle y_1,y_2\rangle \mid y_1,y_2 \in N$ 且$y_1 + y_2<10\}$

函数相等

设f和g都是从A到B的函数, 若对任意$x\in A$,有$f(x)=g(x)$,则称**f和g相等**.记为**$f=g$**

函数的个数

设$f:A\to B$,$|A|=m$, $|B|=n$.记 $B^A=\{f|f: A\to B\}$, 则$|B^A|= n^m$

实例

设$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求B^A.

解：$B^A=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0 = \{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_1 = \{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2 = \{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_3 = \{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4 = \{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_5 = \{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6 = \{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_7 = \{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

满射(Surjective) (到上映射)

设 f: X →Y, 若 ranf = Y, 则称 f 为**满射的**.

入射(Injective) (一对一映射)

设f: X→Y, 对 $\forall\ x_1, x_2 \in X$, 满足:

若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$,

称 f 为**入射的**.

双射(bijective) (一一对应映射)

设f:X→Y, 若f既是满射的, 又是入射的. 则称f是**双射的**.

例：判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f:R→R, $f(x) = -x^2+2x-1$

(2) f:Z^+→R, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集

(3) f:R→Z, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) f:R→R, $f(x)=2x+1$

(5) f:R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

	单射	满射	双射
（1）	×	×	×
（2）	√	×	×
（3）	×	√	×
（4）	√	√	√
（5）	×	×	×

几个特殊函数

(1)设 $f:A\to B$, 如果存在$c\in B$使得对所有的 $x\in A$都有 $f(x)=c$, 则称 $f:A\to B$是**常函数**.

(2) 称 A上的恒等关系I_A为A上的**恒等函数**, 对所有的$x\in A$都有$I_A(x)=x$.

(3) 设$<A, \preccurlyeq>$, $<B, \preccurlyeq>$为偏序集，$f:A\to B$，如果对任意的 x_1, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为**单调递增的**；如果对任意的x_1, $x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有$f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 f 为**严格单调递增的**. 类似的也可以定义**单调递减**和**严格单调递减的**函数

几个特殊函数（续）

(4) 设A为集合, 对于任意的$A'\subseteq A$, A'的特征函数

$\chi_{A'}:A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_{A'}(a)=1,\ a\in A'$$

$$\chi_{A'}(a)=0,\ a\in A-A'$$

(5) 设R是A上的等价关系, 令

$$g:A\to A/R$$

$$g(a)=[a],\ \forall a\in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射

复合函数

设 $f:X\rightarrow Y, g:Y\rightarrow Z$, 定义:

$fog = \{\langle x,z\rangle | x\in X$且$z\in Z$且可找到$y\in Y$使$y=f(x), z=g(y)\}$

称fog为**f与 g 的复合函数**.

注:

(1) 课本中关系、函数均使用“右复合”。函数复合在习惯上也常采用“左复合”，$g\circ f(a)=g(f(a))$。读文献时须留意。

(2) 函数的复合运算可结合.

函数复合与函数性质

定理 设$f:A\to B$, $g:B\to C$

(1) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是满射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是满射的

(2) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的

(3) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的

反函数（逆函数）

设f:X→Y是一个双射函数，那么f^{-1}是Y→X的双射函数.

称f^{-1}为f的反函数.

注:

（1）互逆 $(f^{-1})^{-1}=f$

（2）设 f:A→B是双射的, 则 $f^{-1}\circ f = I_B$, $f\circ f^{-1} = I_A$

七、集合基数

概念：

基数，等势，有限集/无限集，可数集，不可数集

- 1638年，意大利天文学家Galieo比较集合大小的困惑：

  "部分"等于"整体"？

  $N=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

  $N^{(2)}=\{0, 1, 4, 9, \cdots\}$

- 1874-1897年，德国数学家Cantor

  冲破传统观念，采用数"数"的方法观察集合大小。

基数(Cardinality)

用来衡量集合大小的一个概念. 对于有限集合集来说，集合的基数就是其中所含元素的个数.

等势的（基数相同）

设A, B是集合, 如果存在着从A到B的双射函数, 就称

A和B是等势的, 记作$A \approx B$. 如果A不与B 等势, 则记作$A \not\approx B$.

注：通常将A的基数记为 $|A|$.

重要等势结果

- $\mathbf{N} \approx \mathbf{Z} \approx \mathbf{Q} \approx \mathbf{N} \times \mathbf{N}$
- 任何实数区间都与实数集合R等势
- $\{0,1\}^{\mathbf{N}} \approx R$

（1）证明： Z≈N.

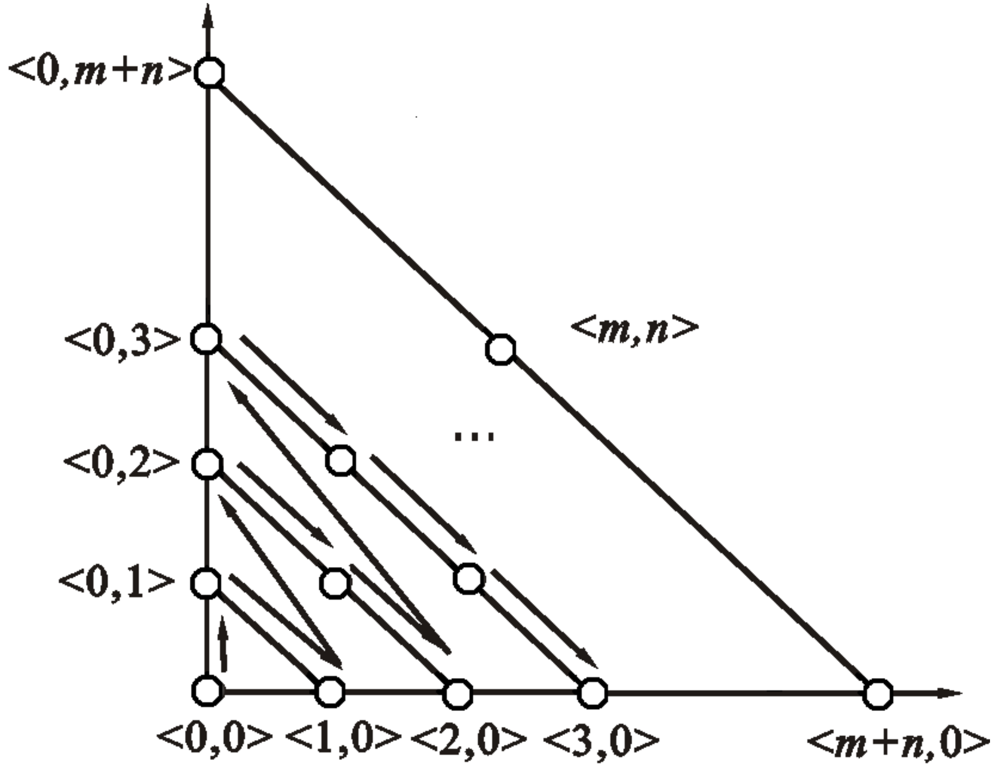
证：

$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \ge 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

则 f 是Z到N的双射函数. 从而证明了Z≈N.

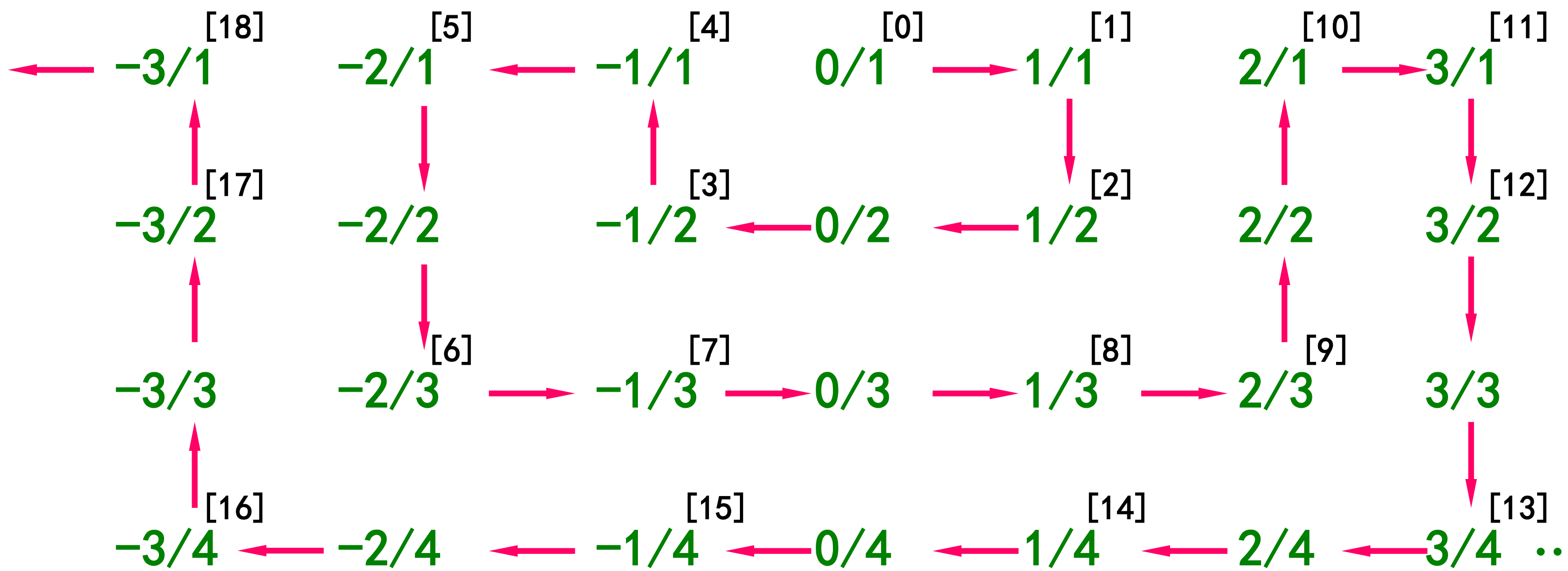
（2）N≈Q

① N×N≈N.　N×N中所有的元素排成有序图形



$$f: \mathrm{N} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}, \quad f(<m,n>) = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + m$$

② N≈Q. 双射函数 f:N→Q, 其中$f(n)$是$[n]$下方的有理数.



PLAY

(3) (0,1)≈R. 其中实数区间 (0,1)={*x*| *x*∈*R*∧0<*x*<1}. 令

$$f:(0,1)\to \mathrm{R},\quad f(x)=\tan\pi\frac{2x-1}{2}$$

(4) [0,1]≈(0,1). 其中(0,1)和[0,1]分别为实数开区间和闭区间. 令 *f* : [0,1]→(0,1)

$$f(x)=\begin{cases}1/2 & x=0\\ 1/2^2 & x=1\\ 1/2^{n+2} & x=1/2^n, n=1,2,\ldots\\ x & \text{其它}x\end{cases}$$

(5) 对任何*a*, *b*∈R, *a*<*b*, [0,1]≈[*a*,*b*]，双射函数 *f*:[0,1]→[*a*,*b*],

f*(*x*)=(*b*−*a*)*x*+*a

类似地可以证明, 对任何*a*, *b*∈*R*, *a*<*b*, 有(0,1)≈(*a*,*b*).

(6) 设A为任意集合, 则$P(A)\approx\{0,1\}^A$.

证　如下构造从$P(A)$ 到 $\{0,1\}^A$ 的函数

$$f:P(A)\to\{0,1\}^A,\quad f(A')=\chi_{A'},\ \forall A'\in P(A).$$

其中$\chi_{A'}$是集合A'的特征函数. 易证 f 是单射的.

对于任意的 $g\in\{0,1\}^A$, 那么有 $g:A\to\{0,1\}$. 令

$$B=\{\,x\mid x\in A\wedge g(x)=1\}$$

则$B\subseteq A$, 且$\chi_B=g$, 即$\exists B\in P(A)$, $f(B)=g$. 从而证明了f 是满射的.

由等势定义得　$P(A)\approx\{0,1\}^A$.

康托定理

(1) $\mathbf{N} \not\approx \mathbf{R}$;

(2) 对任意集合A都有$A \not\approx P(A)$.

证明思路（对角线方法 **Diagonal method**）：

(1) 只需证明任何函数 f:N→[0,1]都不是满射的.

任取函数 f:N→[0,1], 列出 f 的所有函数值，然后构造一个[0,1]区间的小数b，使得b与所有的函数值都不相等.

(2) 任取函数 f:A→$P(A)$，构造$B \in P(A)$，使得B与 f 的任何函数值都不等.

有限集(Finite set)/无限集 (Infinite set)

设A为一个集合. 若存在某个自然数n, 使得A与集合 {0,1,…,n-1}等势, 则称A是有限的. 若集合A不是有限的, 则称A是无限的.

注：有限集也称为有穷集；无限集也称为无穷集。

结论

(1) 自然数集合N是无限的.

(2) 无限集必与它的一个真子集为等势.

推论:凡不能与自身的任一真子集等势的集合为有限集.

可数集(可列集) (Countable Set, Enumereable Set)

与自然数集N等势的任意集合称为可数的. 其基数为$\aleph_0$

结论

(1) A为可数的iff 可排列成$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$的形式.

(2) 任一无限集必含有可数子集.

(3) 可数集的任何无限子集是可数的.

(4) 可数个两两不相交的可数集合的并集,仍是一个可数集.

(5) $N\times N$是可数集.

(6) 有理数的全体组成的集合是可数集.

(7) 全体实数构成的集合R是不可数的.

基数的常识

① 对于有穷集合A, 基数是其元素个数n，$|A| = n$;

② 自然数集合N的基数记作$\aleph_0$;

③ 实数集R的基数记作$\aleph$, 即$\mathrm{card}R = \aleph$;

④ 没有最大的基数。将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到：

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

连续统猜想（Continuum Hypothesis）

不存在这样的有限集,基数严格介于$\aleph_0$与$\aleph$之间.

(1900年Hilbert在巴黎第二届世界数学家大会上提出的23个数学问题中的第一个问题.)

集合论总结

1. 集合：集合，外延性原理，∈，⊆ ，⊂，空集，全集，幂集，文氏图，交，并，差，补，对称差
2. 关系：序偶, 笛卡尔积, 关系, **domR, ranR,** 关系图, 空关系, 全域关系, 恒等关系
3. 关系性质与闭包:自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的, 传递的,自反闭包 **r(R)**,对称闭包 **s(R)**, 传递闭包 **t(R)**

集合论总结 (续)

4. 等价关系：等价关系，等价类，商集，划分
5. 偏序关系:偏序，哈斯图，全序(线序)，
   极大元/极小元，最大元/最小元，上界/下界
6. 函数：函数，常函数，恒等函数，满射，入射，双射，反函数，复合函数
7. 集合基数:基数，等势，有限集/无限集，可数集，不可数集