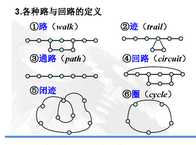
离散数学考点梳理

ch7图论

大题

证明题

3.各种路与回路的定义



计算题

- 基本概念
  - 所有顶点的度之和为边的两倍
  - 设$V'=V$，且$E'\subseteq E$，则称G'为G的支撑子图（spanning）.
  - 记$G=<V,E>$的连通分支的数目为$W(G)$.
  - 对简单无向连通图G，必成立$k(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$.
    - 图G的点连通度 $k(G)\triangleq\min\{|V'|\,|\,V'$是$G$的点割集$\}$；
    - 图G的边连通度 $\lambda(G)\triangleq\min\{|E'|\,|\,E'$是$G$的边割集$\}$；
    - 4.最大（小）度（点）．分别记作$\Delta(G)$、$\delta(G)$.
  - 无向图是弱连通图　强连通图有一条通过所有节点的有向回路
- 平面图
  - v-e+r=W(G)+1
    - v-e+r=2
  - e<=3v-6
  - 所有顶点的度之和为边的两倍
  - 面的次$\deg(f)$：围成一个面经过的边的次数.
    - $\sum_{f\in F}\deg(f)=2|E|$.
- 树
  - $e=v-1$;
  - 练习：T是一棵树，若最大度$\Delta(T)\ge k$，则T中至少有k个一度点.
    证明：设T中至多有$k-1$个一度点，则必有：
    $2(v-1)=2e=\sum d(u)\ge 1\cdot(k-1)+\Delta(T)\cdot 1+2\cdot(v-k)$
    $\ge k-1+k+2v-2k$
    $=2v-1$.
    得出矛盾，所以至少有k个一度点.
  - 7.定理：对完全m叉树，若其树叶数为t，分支点数为i，则有：
    $(m-1)\,i=t-1$.
- E-图
- H-图
- 前缀码的应用
  - 最高频对应的二进制码最短

小题

- 作图题(满足特定的要求)
  - （1）结点数为偶数，边数为奇数的E—图；
    （2）结点数为奇数，边数为偶数的E—图；
    - 请画出4个结点的所有不同构的简单 Hamilton 图，
      与，画图如下：
    - （1）只是E—图，不是H—图；
    - （2）只是H—图，不是E—图；
    - （3）既是E—图，又是H—图；
    - （4）既不是H—图，又不是E—图；
- 互不同构的生成树有几种？
- 平面图的性质
- E-图 H-图充分必要条件的判别
  - 定理1 G无孤立点，那么G是E-图 $\Leftrightarrow$ G连通且无奇点。
  - 3、定理（必要条件）：G是H-图，则$\forall\phi\ne S\subseteq V(G)$，有 $W(G-S)\le|S|$.
  - (2) 定理：简单无向图G,它有n个点，且对于任意的u、v，总成立$d(u)+d(v)\ge n$，则G中必含H-图。

小题

- 大题
  - <A,*>特定元素的求解
    - eg 幺元 零元 逆元
    - $a*a=a$（幂等元）
  - 群的证明
    - eg 群 独异点 半群 广群的关系
    - 4.群的性质（群<G, *>）
      ①每个元素的逆元唯一！
      $\forall x\in G$，设x_0为x_0的逆元，则：
      $b=b*e=b*(x*c)=(b*x)*c=e*c=c$.
      ②若$|G|>1$,则G中无零元.
      （因为零元无逆元）
      ③群中的消去律
      $a*b=a*c\Rightarrow b=c$;
      $b*a=c*a\Rightarrow b=c$.
    - (1)运算$*$在G上是封闭的，
      (2)运算$*$在G上满足可结合性，
      (3)G中存在幺元e，
      (4)G中每个元素x的逆元x^{-1}存在于G中，
- 小题
  - 运算*的性质（的判别）
    - eg 5-2的5)

*	+	−	×	max	min	|x−y|
可结合性	是	否	是	是	是	否
可交换性	是	否	是	是	是	是
存在幺元	是	否	是	否	否	否
存在零元	否	否	是	否	否	否

  - 特殊代数系统之间的关系及判定
    - 定理1.设群<G, *>，H是G的一个非空子集,若满足：
      ① H是有限（元素）集；
      ② *在H中满足封闭性.
    - 循环群都是阿贝尔群，但阿贝尔群不一定都是循环群。

ch3-4集合与关系与函数

大题

- 偏序关系，子集中的特殊元素及哈斯图
  - eg完全排错公式
    - 包含排斥原理
  - 等价关系的证明与应用
    - 划分与等价关系一一对应
      - 4 有15
      - 5有52
    - 为了图的美观的0123456789重复没有关系
      现只要用一种方式来表达10个元素，用一个哈斯图表示。
      则必须 <a,b> 为 a 支配一条路，得到 b
      则有 <B,G> <B,D> <B,A>
      和C斯图
    - eg 在数字1 2 3 4 5 6 7 8 9 0中找到关系画一个哈斯图
  - eg 在数字1 2 3 4 5 6 7 8 9 10中找到关系画一个哈斯图
  - 关系矩阵对角线都是0
    - 反自反关系
  - 关系矩阵为对称阵
    - 对称关系
    - 反对称
  - 关系矩阵对角线都是1
    - 自反关系
    - 反对称
    - 传递
    - 复合
    - 逆
  - 3、集合X满足$|X|=n$，则X上有$3^{\frac{n^2-n}{2}}\cdot 2^n$个不同的反对称关系。
- 差 - 与对称差⊕运算性质

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
$R_1\cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1\cup R_2$	✓	✓	✓	✗	✗
R_1-R_2	✗	✓	✓	✓	✗
$R_1\oplus R_2$	✗	✓	✓	✗	✗
$R_1\circ R_2$	✓	✗	✗	✗	✗

  - 五大性质的判别

小题

- 闭包
  - eg p127的5)
  - 定理2. R是X上的关系，则有：
    $r(R)=R\cup I_X$.
  - 定理3. R是X上的关系，则有：
    $s(R)=R\cup R^c$.
  - 定理4. R是X上的关系，则有：
    $t(R)=\begin{cases}\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i & 若X是无穷集合；\\ \bigcup_{i=1}^{n}R^i & 若|X|=n.\end{cases}$
- 关系的复合
  - 复合之后是否保持性质
    - ① R_1、R_2均自反，那么$R_1\circ R_2$自反；✓
    - ② R_1、R_2均反自反，那么$R_1\circ R_2$反自反；✗
    - ③ R_1、R_2均对称，那么$R_1\circ R_2$对称；✗
    - ④ R_1、R_2均反对称，那么$R_1\circ R_2$反对称；✗
    - ⑤ R_1、R_2均传递，那么$R_1\circ R_2$传递。✗
    - 举例子验证
  - 复合函数g°f与f，g之间入射满射关系
    - eg:$f\circ g$是个复合函数且为满射，f为入射,试证g为满射.
      证法二（反证）：
      f入射 $\Rightarrow f\circ g$不是满射，
      $f\circ g$是满射 $\Rightarrow f$不是入射.（证）
      设$g:X\to Y, f:Y\to Z$,则$f\circ g$：$X\to Z$;
      若g不是满射，即$\exists y_0\in Y,\forall x\in X, y_0\ne g(x)$，且$f(y_0)\in Z$
      结合$f\circ g$是$X\to Z$的满射，故$\exists x\in X, s.t.\ f(y_0)=f[g(x)]$，
      与f为入射矛盾！
      证毕——
- etc

基本信息

- 分数比例
  - 按章节
    - ch1 — 18
    - ch2 — 3-5
    - ch3&ch4 — 35
    - ch5 — 15-18
    - ch7 — the rest
- 后续课程与答疑
  - 一月三日 9:00-12:00 A教2楼教室休息室答疑
  - 本周六12月29日不上课
- 推荐顺序
  - 按照赋分与章节内容量的比值构造最优二叉树
- 例子的页码与章节以左孝凌的《离散数学》与老师上课课件pdf为准（在理学院17级数学系的离散数学/2016级pdf课件.rar内）
- 有符号 ★ — 重点

ch1命题与逻辑

- 大题
  - 化主析(合)取范式
    - 要么要么 — 不可兼或
    - 没有 没有
    - 只要P就Q
    - 只有Q才P
    - 仅当Q才P
    - 除非Q否则非P
    - P->Q
      - e.g.除非下雨否则进城 — 不进城->下雨 — 非下雨->进城
      - eg6. P：天下雨。Q：看电影。R：我看书。
        翻译：如果天不下雨，那么我去看电影，否则我在寝室看书。
        选择：
        i $(\neg P\to Q)\vee(P\to R)$;
        ii $(\neg P\to Q)\wedge(P\to R)$.
  - 蕴含式的证明
    - 连接词
      - 内容
        - 否定
        - 合取
        - 析取
        - 排斥析取
        - 单条件 — 当且仅当前真后否为假
        - 双条件 — 当且仅当前后真值相同时真
      - 优先级 — ¬ ∧ ∨ → ↔ 高——>低
- 小题
  - 等价式的判别
  - 翻译命题

ch2谓词逻辑

- 小题
  - 等价式（蕴含式）的判别
  - 谓词的翻译
  - 换名代入

ch5代数结构

大题

- 偏序关系
  - 盖住
  - 全序关系
    - 在偏序集$<A,\preceq>$中，如果对任意的 $x,y\in A$，$x\preceq y$和$y\preceq x$必有一个成立，则称$<A,\preceq>$为全序集
  - 良序关系
    - 1.偏序集$<A,\preceq>$,若$\forall\varnothing\ne B\subseteq A$，$B$中总有最小元，则称$<A,\preceq>$是良序集.
      - 良序集一定是全序集.
      - 有限元素的全序集一定是良序集.
        - 无限的不行,会有开集