华东理工大学2019—2020学年第 2 学期   
《计算方法》课程论文 2020.6

班级\_\_\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_\_\_\_

开课学院 信息学院 任课教师 成绩\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

|  |
| --- |
| 论文内容：  查找利用“计算方法”的相关方法、算法或技术解决科学与工程中  实际问题的具体应用实例。要求首先对相关问题进行简介，然后阐述如 何具体运用计算方法的相关理论解决这些实际问题，最后分析上述方法 存在的不足，提出可行的方案。 |
| 论文要求：  1． 字数>3000字；  2． A4纸，左、右、下边距为2.5厘米，上边距为2.8厘米，页码位于页面底端中间；  3． 题名：题名能概括反映论文的主旨和主要内容，小二号，黑体；  4． 摘要：精练说明论文的目的、方法、结果和结论，100～200字。五号、楷体；  5． 关键词：3到5个。注意中英文关键词的内容、顺序一致。五号、楷体；  6． 正文：小四号、宋体，正文中所有非汉字均用Times New Roman体；  7． 符号：文中所有符号及英文缩写符号第一次出现时，请写出中文全称,下文中即可直接引用；  数学符号要用斜体表示，矢量与矩阵用黑斜体表示。符号的大小写、黑斜体注意全文统一；  8． 图、表：图号图名标在图的正下方，居中。表号、表名标在表格的正上方，居中；  9． 参考文献著录要求：  期刊：作者.题名[J].刊名（刊名英文的要用全称，不能简写），年，卷号(期号)：起-止页.  书籍**:** 作者.书名[M].出版地：出版商，年：起-止页.  学位论文：作者.题名[D].保存地：单位,年份.  论文集析出文献**:** 作者.题名[C]//编者.论文集名.出版地：出版者,出版年：起-止页.  **10.** 严禁抄袭。 |
| 教师评语：  教师签字：  年 月 日 |

用计算方法解决变化问题

摘要

本论文的目的是通过探究实际生活中的数学模型，来研究计算方法在研究实际生活问题中的作用，举了两个例子，一个是储蓄问题的研究，一个是机车启动问题。使用了欧拉解微分方程的方法，最终得出的结论是欧拉方法是一种计算简便，编程容易的方法，但是计算误差比较大。

关键词

常微分方程，欧拉方法，物理建模

正文

在实际生活中，我们会发现描述一个物体的变化比描述一个物体从0开始的整体情况要容易得多，于是我们就可以尝试对变化进行建模，这就是微分方程。

我们经常能遇到一个因变量相对于一个或多个自变量变化率的有关信息，并且对发现这些相关变量的函数很有兴趣，比如，若*P*代表一大群居民在某个时刻的人数，那么有理由假设人数随时间的变化率依赖于当前量的大小，由于生态学、经济学和其他重要原因，我们希望确定和之间的关系，从而用来预测.如果用表示当前的人口数量，时刻的人口数量为，那么在期间人数的变化由下式给出。

现在，我们设想有一个简单的比例关系： . 比如，迁入、迁出、年龄和性别因素都被忽略，我们可以假设在单位时期内，出生人数和死亡人数都有一定的百分比.设比例常数表示单位时间的百分比，则上述比例假设给出

是一个差分方程，我们用它来处理离散时间组情况，而没有让在某个区间内连续变化.此时离散时间组能给出未来几年内在不同时刻的种群数量.

假设时间是连续改变的，以便我们可利用微积分，对方程两边除以，得到

我们可以把/从物理上解释成P在时间段上的平均变化率，例如，/可以表示预算的日平均增长， /t可以从几何上解释为连结点和点的线段的斜率，然后让趋于零，由导数的定义得到下面的微分方程

其中表示瞬时变化率，在很多情况下瞬时变化率有着确定的物理意义，比如太空船进入海洋后的热流，或者把汽车速度计上的读数作为汽车的加速度，但是，对于有着离散财政周期的预算过程，瞬时变化就没有什么意义，在这些场合下用差分方程建模更合适，但有时用微分方程去逼近差分方程会很有利.在上述式子中，导数起着两种不同的作用：

1）在连续问题中表示瞬时变化率.

2）在离散问题中逼近平均变化率.

用导数去逼近平均变化率的好处在于，常能利用微积分来揭示所求变量之间的函数关系.

比如，模型的解是，其中是时刻的种群数量，但是，很多微分方程不容易用解析方法来求解，此时就用离散的方法去逼近解，这就是数值方法.

下面介绍的模型中,我们看到的方程、导数都与自变量和因变量的某个函数相连,即

其中*g*是某函数,和可以不同时出现在右侧,此外,我们给定某个初值,即.

最后,我们关注的*y*值是对*x*值所在的一个特定区间而言的,即,总之,所确定的模型有下面的一般形式

我们把具有上述条件的一阶常微分方程称为一阶初值问题，从模型可以看到，一阶初值问题是一类很重要的问题，我们现在来讨论该模型的三个方面.

一阶初值问题

微分方程

如该模型中所讨论的,我们感兴趣的是寻求其导数满足微分方程的函数*y=f(x)*,虽然我们还不知道是怎么样的,但是我们可以根据给定的x和y值计算其导数,这样,我们就能求得解曲线*y=f(x)*在一些特殊点处的切线斜率.

初值

初值式表明在初始点处我们知道的值是.从几何上说,这表示点位于解曲线上,所以,我们就知道了解曲线从哪里开始,此外,由微分方程我们知道解曲线上在点处的切线斜率为数.

区间

条件给出了 x轴上我们所关注的特别区间,于是,我们通过寻找过点且斜率为解函数,来确定区间上的x和y的关系,注意到函数y=f(x)在区间上是连续的,因为它的导数存在.

初值问题的近似解

如果不需要求初值问题的精确解,那么我们大致可用计算机在一个适当的区间上对一些值作出一个近似数值的表,这样的表我们称之为问题的数值解,而生成这种表的方法称为数值方法,其中有一种称为Euler法,介绍如下.

给定微分方程及其初值条件我们可以用它的切线

来逼近解

值是解曲线及其切线在该点处的斜率,函数给出了解在附近一个小区间上很好的近似,Euler法的基础就是用这样一段段的切线来逼近解曲线.具体方法介绍如下:我们知道点位于解曲线上,设我们对自变量指定一个新值,为.如果增量很小,那么

是精确解的一个很好的近似,所以,从恰位于解曲线上的点开始,我们得到了点,它非常接近于解曲线上的点

利用点和过该点的解曲线的斜率,我们进行第二步.设.

我们利用解曲线过的切线计算

这给出了沿解曲线值的下一个近似,继续这样做,我们进行第三步:从点和斜率得到第三次逼近

以此类推

Euler法很容易在计算机或程序计算器上编程实现.只要我们输入.和、步数和步长,程序就会生成初值问题数值解的表,然后,像刚才所说的,用迭代方式来逼近解值..

研究实际问题

我们讨论作为离散动力系统的储蓄模型,这里,我们设初期存款数为元,以年利率为计算积累的复利。我们想知道年的存款的金额,如果代表任一时刻存款的金额,则模型为

设

(a)年(b)月(c)周

用Euler法近似10年的值.对于情形,把结果与解析解做比较.

解:

我们先求出解析解,然后对上述三种情况分别使用Euler法,并就每年的结果进行比较,我们可以对初值问题

分离变量和积分,得到

我们利用初值条件求得,则精确解为

我们用计算机对下面三种情况生成Euler近似解:(a),(b),(c),各项均用百分近似,注意到随着 减小,Euler逼近的精度越来越高.当(表示按周计算)时,Euler逼近给出10年后的存款值为Q(10)=3315.53,离解析解值的误差为4.59,下面给出Euler逼近的点与精确解曲线.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 精确解 |  |  |  |
| 0 | 1000. | 1000 | 1000., | 1000. |
| 1 | 1127.5 | 1120 | 1126.83, | 1127.34, |
| 2 | 1271.25 | 1254.4 | 1269.73, | 1270.9, |
| 3 | 1433.33 | 1404.93 | 1430.77, | 1432.74, |
| 4 | 1616.07 | 1573.52 | 1612.23, | 1615.18, |
| 5 | 1822.12 | 1762.34 | 1816.7, | 1820.86, |
| 6 | 2054.43 | 1973.82 | 2047.1, | 2052.73, |
| 7 | 2316.37 | 2210.68 | 2306.72 | 2314.13, |
| 8 | 2611.7 | 2475.96 | 2599.27, | 2608.81, |
| 9 | 2944.68 | 2773.08 | 2928.93, | 2941.02, |
| 10 | 3320.12 | 3105.85 | 3300.39 | 3315.53 |







把步长变小似乎会使结果更精确.但是，每一次增加的计算不仅要求增加计算机机时，更重要的是还出现截断误差.由于这些误差积累，一个理想的方法是改进逼近的精度并减少计算量，因此，Euler法是不能够令人满意的.

下面再探究一个实际问题

在高中的物理题中有这么一类题叫做机车启动问题，在高中阶段我们只需要掌握t在趋向于无穷大的时候，是近似匀速状态，这就是高中老师让我们掌握的. 要真正求解这个问题，需要涉及到微分方程的知识，而这个是我们在高中所不具备的，到了大学经过了高等数学课程的洗礼，我们学会了简单的微分方程求解，于是我们可以开始解决这道题了.

常量：功率 ,阻力 ,质量

变量：牵引力,速度 ,加速度

两个方程:

初始条件:

由方程可得

一个简单的换元可得

根据初始条件得

我们已经有了 的解析式，求其反函数即可得 然而 并不是一个初等函数

这时我们就遇到了一个矛盾,在求解微分方程的时候，解未必是我们可以表示出来的，所以我们就需要通过数值的方法来近似模拟解，这时我们就可以使用最简单的欧拉方法来进行描绘微分方程解的图像.

结语

在探究这种数学问题的时候，我们需要想到事物的本质究竟为何？只有探究到了数学问题的本质，我们才能更好了解到事情为什么会是这样发生的。而这些并不是完全重要，更加重要的问题是，我们一般认为，抓住了问题的关键，其他一切则会迎刃而解。了解清楚计算方法到底是一种怎么样的存在，是解决一切问题的关键。生活中，若计算方法出现了，我们就不得不考虑它出现了的事实。这种事实对本人来说意义重大，相信对这个世界也是有一定意义的。那么，现在，解决计算方法的问题，是非常非常重要的。所以，我们一般认为，抓住了问题的关键，其他一切则会迎刃而解。可是，即使是这样，计算方法的出现仍然代表了一定的意义。一般来讲，我们都必须务必慎重的考虑考虑。总结的来说，带着这些问题，我们来审视一下计算方法。计算方法，到底应该如何实现。既然如何，现在，解决计算方法的问题，是非常非常重要的。所以，问题的关键究竟为何。所以说对于我们来说求解这个精确解并不是最重要的事，而研究这个微分方程所带来的函数的趋势才是我们在解决这个问题的时候应当去着重解决的点，而这个就是数值解微分方程所能带给我们的。这也启发了我们，在解决问题的时候，不需要一条路走到黑，如果初等解不能够得到的话，我们就可以转而使用数值解来求解对应的实际问题，这样也能够获得很好的效果，而不用使用特殊函数，既费力又难以计算，这就是我们在计算方法这门课上所学到的，解决实际生活问题的思路以及其中所富含的哲学道理。

【参考文献】

[1]Frank R.Giordano, Maurice D.Weir, William P.Fox .数学建模[M].机械工业出版社，2005

[2]王能超.计算方法——算法设计及其MATLAB实现[M].中国.武汉.华中科技大学出版社，2011