

# Лекция 2

## Линейная регрессия

Е. А. Соколов  
ФКН ВШЭ

14 сентября 2021 г.

### 1 Линейные модели

На предыдущей лекции мы уже упоминали линейные регрессионные модели. Такие модели сводятся к суммированию значений признаков с некоторыми весами:

$$a(x) = w_0 + \sum_{j=1}^d w_j x_j. \quad (1.1)$$

Параметрами модели являются *веса* или *коэффициенты*  $w_j$ . Вес  $w_0$  также называется свободным коэффициентом или *сдвигом* (bias). Заметим, что сумма в формуле (1.1) является скалярным произведением вектора признаков на вектор весов. Воспользуемся этим и запишем линейную модель в более компактном виде:

$$a(x) = w_0 + \langle w, x \rangle, \quad (1.2)$$

где  $w = (w_1, \dots, w_d)$  — вектор весов.

Достаточно часто используется следующий приём, позволяющий упростить запись ещё сильнее. Добавим к признаковому описанию каждого объекта  $(d+1)$ -й признак, равный единице. Вес при этом признаке как раз будет иметь смысл свободного коэффициента, и необходимость в слагаемом  $w_0$  отпадёт:

$$a(x) = \langle w, x \rangle.$$

Тем не менее, при такой форме следует соблюдать осторожность и помнить о наличии в выборке специального признака. Например, мы столкнёмся со сложностями, связанными с этим, когда будем говорить о регуляризации.

За счёт простой формы линейные модели достаточно быстро и легко обучаются, и поэтому популярны при работе с большими объёмами данных. Также у них мало параметров, благодаря чему удаётся контролировать риск переобучения и использовать их для работы с зашумлёнными данными и с небольшими выборками.

## 2 Области применимости линейных моделей

Сложно представить себе ситуацию, в которой мы берём данные, обучаем линейную модель и получаем хорошее качество работы. В линейной модели предполагается конкретный вид зависимости — а именно, что каждый признак линейно влияет на целевую переменную, и что целевая переменная не зависит от каких-либо комбинаций признаков. Вряд ли это будет выполнено по умолчанию, поэтому обычно данные требуют специальной подготовки, чтобы линейные модели оказались адекватными задаче. Приведём несколько примеров.

**Категориальные признаки.** Представим себе задачу определения стоимости квартиры по её характеристикам. Одним из важных признаков является район, в котором находится квартира. Этот признак является категориальным — его значения нельзя сравнивать между собой на больше/меньше, их нельзя складывать или вычитать. Непосредственно такие признаки нельзя использовать в линейных моделях, но есть достаточно распространённый способ их преобразования.

Допустим, категориальный признак  $f_j(x)$  принимает значения из множества  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ . Заменим его на  $m$  бинарных признаков  $b_1(x), \dots, b_m(x)$ , каждый из которых является индикатором одного из возможных категориальных значений:

$$b_i(x) = [f_j(x) = c_i].$$

Такой подход называется one-hot кодированием.

Отметим, что признаки  $b_1(x), \dots, b_m(x)$  являются линейно зависимыми: для любого объекта выполнено

$$b_1(x) + \dots + b_m(x) = 1.$$

Чтобы избежать этого, можно выбрасывать один из бинарных признаков. Впрочем, такое решение имеет и недостатки — например, если на тестовой выборке появится новая категория, то её как раз можно закодировать с помощью нулевых бинарных признаков; при удалении одного из них это потеряет смысл.

Вернёмся к задаче про стоимость квартиры. Если мы применим линейную модель к данным после one-hot кодирования признака о районе (допустим, это  $f(x)$ ), то получится такая формула:

$$a(x) = w_1[f(x) = c_1] + \dots + w_m[f(x) = c_m] + \{\text{взаимодействие с другими признаками}\}.$$

Такая зависимость кажется логичной — каждый район задаёт некоторый базовый уровень стоимости (например, для района  $c_1$  имеем базовую цену  $w_1$ ), а остальные факторы корректируют его.

**Работа с текстами.** Перейдём к предсказанию стоимости квартиры по её текстовому описанию. Есть простой способ кодирования, который называется *мешок слов* (*bag of words*).

Найдём все слова, которые есть в нашей выборке текстов, и пронумеруем их:  $\{c_1, \dots, c_m\}$ . Будем кодировать текст  $m$  признаками  $b_1(x), \dots, b_m(x)$ , где  $b_j(x)$  равен количеству вхождений слова  $c_j$  в текст. Линейная модель над такими признаками

будет иметь вид

$$a(x) = w_1 b_1(x) + \dots + w_m b_m(x) + \dots,$$

и такой вид тоже кажется разумным. Каждое вхождение слова  $c_j$  меняет прогноз стоимости на  $w_j$ . В самом деле, можно ожидать, что слово «престижный» скорее говорит о том, что квартира дорогая, а слово «плохой» вряд ли будут использовать при описании приличной квартиры.

**Бинаризация числовых признаков.** Наконец, подумаем о предсказании стоимости квартиры по расстоянию до ближайшей станции метро  $x_j$ . Может оказаться, что самые дорогие квартиры расположены где-то в 5-10 минутах ходьбы от метро, а те, что ближе или дальше, стоят не так дорого. В этом случае зависимость целевой переменной от признака не будет линейной. Чтобы сделать линейную модель подходящей, мы можем бинаризовать признак. Для этого выберем некоторую сетку точек  $\{t_1, \dots, t_m\}$ . Это может быть равномерная сетка между минимальным и максимальным значением признака или, например, сетка из эмпирических квантилей. Добавим сюда точки  $t_0 = -\infty$  и  $t_{m+1} = +\infty$ . Новые признаки зададим как

$$b_i(x) = [t_{i-1} < x_j \leq t_i], \quad i = 1, \dots, m+1.$$

Линейная модель над этими признаками будет выглядеть как

$$a(x) = w_1 [t_0 < x_j \leq t_1] + \dots + w_{m+1} [t_m < x_j \leq t_{m+1}] + \dots,$$

то есть мы найдём свой прогноз стоимости квартиры для каждого интервала расстояния до метро. Такой подход позволит учесть нелинейную зависимость между признаком и целевой переменной.

### 3 Измерение ошибки в задачах регрессии

Чтобы обучать регрессионные модели, нужно определиться, как именно измеряется качество предсказаний. Будем обозначать через  $y$  значение целевой переменной, через  $a$  — прогноз модели. Рассмотрим несколько способов оценить отклонение  $L(y, a)$  прогноза от истинного ответа.

**MSE и  $R^2$ .** Основной способ измерить отклонение — посчитать квадрат разности:

$$L(y, a) = (a - y)^2$$

Благодаря своей дифференцируемости эта функция наиболее часто используется в задачах регрессии. Основанный на ней функционал называется среднеквадратичным отклонением (mean squared error, MSE):

$$\text{MSE}(a, X) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2.$$

Отметим, что величина среднеквадратичного отклонения плохо интерпретируется, поскольку не сохраняет единицы измерения — так, если мы предсказываем цену

в рублях, то MSE будет измеряться в квадратах рублей. Чтобы избежать этого, используют корень из среднеквадратичной ошибки (root mean squared error, RMSE):

$$\text{RMSE}(a, X) = \sqrt{\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2}.$$

Среднеквадратичная ошибка подходит для сравнения двух моделей или для контроля качества во время обучения, но не позволяет сделать выводы о том, насколько хорошо данная модель решает задачу. Например,  $\text{MSE} = 10$  является очень плохим показателем, если целевая переменная принимает значения от 0 до 1, и очень хорошим, если целевая переменная лежит в интервале  $(10000, 100000)$ . В таких ситуациях вместо среднеквадратичной ошибки полезно использовать *коэффициент детерминации* (или коэффициент  $R^2$ ):

$$R^2(a, X) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\ell} (a(x_i) - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{\ell} (y_i - \bar{y})^2},$$

где  $\bar{y} = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} y_i$  — среднее значение целевой переменной. Коэффициент детерминации измеряет долю дисперсии, объяснённую моделью, в общей дисперсии целевой переменной. Фактически, данная мера качества — это нормированная среднеквадратичная ошибка. Если она близка к единице, то модель хорошо объясняет данные, если же она близка к нулю, то прогнозы сопоставимы по качеству с константным предсказанием.

**MAE.** Заменяем квадрат отклонения на модуль:

$$L(y, a) = |a - y|$$

Соответствующий функционал называется средним абсолютным отклонением (mean absolute error, MAE):

$$\text{MAE}(a, X) = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} |a(x_i) - y_i|.$$

Модуль отклонения не является дифференцируемым, но при этом менее чувствителен к выбросам. Квадрат отклонения, по сути, делает особый акцент на объектах с сильной ошибкой, и метод обучения будет в первую очередь стараться уменьшить отклонения на таких объектах. Если же эти объекты являются выбросами (то есть значение целевой переменной на них либо ошибочно, либо относится к другому распределению и должно быть проигнорировано), то такая расстановка акцентов приведёт к плохому качеству модели. Модуль отклонения в этом смысле гораздо более терпим к сильным ошибкам.

Рассмотрим для примера данные из таблицы 3. Один из объектов — выброс, значение целевой переменной на нём радикально отличается от остальных объектов. Модель  $a_1(x)$  почти не ошибается на «нормальных» объектах, но сильно ошибается на выбросе. Модель  $a_2(x)$  подгоняется под выброс ценой ухудшения прогнозов на остальных объектах. Видно, что первая модель оказывается лучше с точки зрения

| $y$ | $a_1(x)$ | $(a_1(x) - y)^2$ | $ a_1(x) - y $ | $a_2(x)$ | $(a_2(x) - y)^2$ | $ a_2(x) - y $ |
|-----|----------|------------------|----------------|----------|------------------|----------------|
| 1   | 2        | 1                | 1              | 4        | 9                | 3              |
| 2   | 1        | 1                | 1              | 5        | 9                | 3              |
| 3   | 2        | 1                | 1              | 6        | 9                | 3              |
| 4   | 5        | 1                | 1              | 7        | 9                | 3              |
| 5   | 6        | 1                | 1              | 8        | 9                | 3              |
| 100 | 7        | 8649             | 93             | 10       | 8100             | 90             |
| 7   | 6        | 1                | 1              | 10       | 9                | 3              |
|     |          | MSE = 1236       | MAE = 14.14    |          | MSE = 1164       | MAE = 15.43    |

Таблица 1. Поведение MSE и MAE при наличии выбросов.

MAE, но хуже с точки зрения MSE. Это логично — у квадратичной функции потерь штраф за ошибку растёт нелинейно с ростом отклонения прогноза от ответа, а для абсолютной функции потерь равносильно снижению отклонения на одну и ту же величину для нормального объекта и для выброса. Заметим, что такая особенность MAE пропадёт, если в выборке будет много выбросов. Скажем, если будет около половины объектов с аномальными значениями целевой переменной, то вполне может стать выгоднее оптимизировать отклонение именно на них.

Приведём ещё одно объяснение того, почему модуль отклонения устойчив к выбросам, на простом примере. Допустим, все  $\ell$  объектов выборки имеют одинаковые признаковые описания, но разные значения целевой переменной  $y_1, \dots, y_\ell$ . В этом случае модель должна на всех этих объектах выдать один и тот же ответ. Если мы выбрали MSE в качестве функционала ошибки, то получаем следующую задачу:

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (a - y_i)^2 \rightarrow \min_a$$

Легко показать, что минимум достигается на среднем значении всех ответов:

$$a_{\text{MSE}}^* = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} y_i.$$

Если один из ответов на порядки отличается от всех остальных (то есть является выбросом), то среднее будет существенно отклоняться в его сторону.

Рассмотрим теперь ту же ситуацию, но с функционалом MAE:

$$\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} |a - y_i| \rightarrow \min_a$$

Теперь решением будет медиана ответов:

$$a_{\text{MAE}}^* = \text{median}\{y_i\}_{i=1}^{\ell}.$$

Небольшое количество выбросов никак не повлияет на медиану — она существенно более устойчива к величинам, выбивающимся из общего распределения.

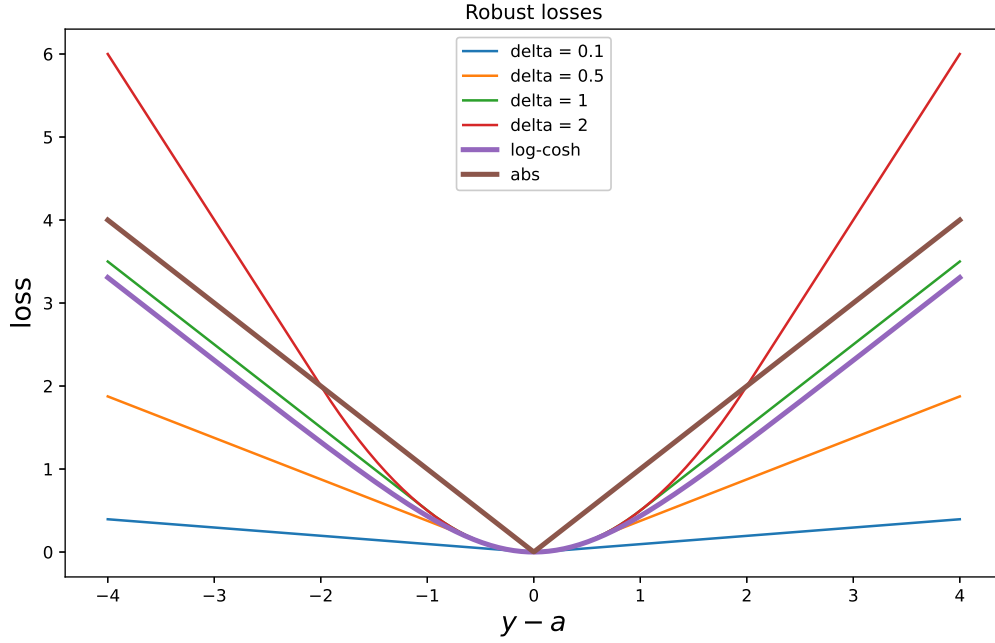


Рис. 1. Функция потерь Хубера и Log-Cosh.

В заключение отметим одну проблему, связанную с абсолютной функцией потерь. Рассмотрим производные для неё и квадратичной функции:

$$\frac{\partial}{\partial a}|a - y| = \text{sign}(a - y), \quad a \neq y;$$

$$\frac{\partial}{\partial a}(a - y)^2 = (a - y).$$

Дальше в курсе мы будем изучать градиентные методы обучения, где параметры модели постепенно изменяются на основе значений производных функции потерь. Видно, что производная абсолютной функции потерь не зависит от близости прогноза к правильному ответу, по её значению нельзя понять, насколько мы близки к оптимальному прогнозу. Из-за этого при оптимизации MAE можно легко «перескочить» экстремум. Поэтому, как правило, использование этой функции потерь приводит к более долгой и сложной процедуре обучения.

**Huber loss.** Выше мы обсудили, что абсолютная функция потерь более устойчива к выбросам, а квадратичная функция лучше с точки зрения оптимизации. Почему бы не попробовать их объединить? Для прогнозов, близких к ответу, нам быгодились свойства гладкой квадратичной функции, а для плохих прогнозов важнее свойства абсолютного отклонения. Одним из вариантов такого объединения является функция потерь Хубера:

$$L_{\delta}(y, a) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y - a)^2, & |y - a| < \delta \\ \delta \left( |y - a| - \frac{1}{2}\delta \right), & |y - a| \geq \delta \end{cases}$$

У этой функции потерь есть параметр  $\delta$ , который регулирует, что мы считаем за выбросы. Если сделать этот параметр маленьким, то функция будет вести себя квадратично только в маленькой окрестности нуля. Если же увеличивать  $\delta$ , то даже для значительных отклонений  $(a - y)$  штраф будет вести себя квадратично, и при обучении мы будем делать большой акцент на их уменьшение. Данный параметр надо подбирать, поскольку он может сильно повлиять на решение.

Также легко, что при  $\delta \rightarrow 0$  функция потерь Хубера вырождается в абсолютную функцию потерь, а при  $\delta \rightarrow \infty$  — в квадратичную.

**Log-Cosh** У функции потерь Хубера есть недостаток: её вторая производная имеет разрывы. Такого недостатка нет у функции потерь log-cosh:

$$L(y, a) = \log \cosh(a - y).$$

Как и в случае с функцией потерь Хубера, для маленьких отклонений здесь имеет место квадратичное поведение, а для больших — линейное.

Обсужденные нами «гибридные» функции потерь изображены на рис. 1. Отметим, что существуют достаточно широкие обобщения этих функций потерь [1].

**MSLE.** Перейдём теперь к логарифмам ответов и прогнозов:

$$L(y, a) = (\log(a + 1) - \log(y + 1))^2$$

Соответствующий функционал называется среднеквадратичной логарифмической ошибкой (mean squared logarithmic error, MSLE). Данная метрика подходит для задач с неотрицательной целевой переменной и неотрицательными прогнозами модели. За счёт логарифмирования ответов и прогнозов мы скорее штрафует за отклонения в порядке величин, чем за отклонения в их значениях. Также следует помнить, что логарифм не является симметричной функцией, и поэтому данная функция потерь штрафует заниженные прогнозы сильнее, чем завышенные.

**MAPE и SMAPE.** В задачах прогнозирования нередко измеряется относительная ошибка. Во-первых, это удобно для интерпретации — легко понять, что «ошибка 50%» соответствует отклонению в полтора раза от целевой переменной. Во-вторых, это позволяет работать с разными масштабами. Например, мы можем решать задачу прогнозирования спроса на товары в магазине, и какие-то товары могут продаваться штуками, а какие-то — тысячами. Чтобы при усреднении ошибок более популярные товары не оказывали большее влияние на результат, следует использовать функции потерь, не зависящие от масштаба. Типичный пример относительной функции потерь:

$$L(y, a) = \left| \frac{y - a}{y} \right|$$

Соответствующий функционал называется средней абсолютной процентной ошибкой (mean absolute percentage error, MAPE).

У MAPE есть проблем с несимметричностью: скажем, если  $y = 1$  и все прогнозы неотрицательные, то максимальная ошибка при занижении прогноза ( $a < y$ ) равна

единице, а ошибка при завышении прогноза ( $a > y$ ) никак не ограничена сверху. Это исправляется в симметричной модификации (symmetric mean absolute percentage error, SMAPE):

$$L(y, a) = \frac{|y - a|}{(|y| + |a|)/2}$$

**Квантильная функция потерь.** В некоторых задачах цены занижения и завышения прогнозов могут отличаться друг от друга. Например, при прогнозировании спроса на товары интернет-магазина гораздо опаснее заниженные предсказания, поскольку они могут привести к потере клиентов. Завышенные же прогнозы приводят лишь к издержкам на хранение товара на складе. Функционал в этом случае можно записать как

$$Q(a, X^\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \rho_\tau(y_i - a(x_i)),$$

где

$$\rho_\tau(z) = (\tau - 1)[z < 0]z + \tau[z \geq 0]z = (\tau - \frac{1}{2})z + \frac{1}{2}|z|,$$

а параметр  $\tau$  лежит на отрезке  $[0, 1]$  и определяет соотношение важности занижения и завышения прогноза. Чем больше здесь  $\tau$ , тем выше штраф за занижение прогноза.

Обсудим вероятностный смысл данного функционала. Будем считать, что в каждой точке  $x \in \mathbb{X}$  пространства объектов задано вероятностное распределение  $p(y | x)$  на возможных ответах для данного объекта. Такое распределение может возникать, например, в задаче предсказания кликов по рекламным баннерам: один и тот же пользователь может много раз заходить на один и тот же сайт и видеть данный баннер; при этом некоторые посещения закончатся кликом, а некоторые — нет.

Известно, что при оптимизации квадратичного функционала алгоритм  $a(x)$  будет приближать условное математическое ожидание ответа в каждой точке пространства объектов:  $a(x) \approx \mathbb{E}[y | x]$ ; если же оптимизировать среднее абсолютное отклонение, то итоговый алгоритм будет приближать медиану распределения:  $a(x) \approx \text{median}[p(y | x)]$ . Рассмотрим теперь некоторый объект  $x$  и условное распределение  $p(y | x)$ . Найдем число  $q$ , которое будет оптимальным с точки зрения нашего функционала:

$$Q = \int_{\mathbb{Y}} \rho_\tau(y - q) p(y | x) dy.$$

Продифференцируем его (при этом необходимо воспользоваться правилами дифференцирования интегралов, зависящих от параметра):

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = (1 - \tau) \int_{-\infty}^q p(y | x) dy - \tau \int_q^{\infty} p(y | x) dy = 0.$$

Получаем, что

$$\frac{\tau}{1 - \tau} = \frac{\int_{-\infty}^q p(y | x) dy}{\int_q^{\infty} p(y | x) dy}.$$



Данное уравнение будет верно, если  $q$  будет равно  $\tau$ -квантили распределения  $p(y | x)$ . Таким образом, использование функции потерь  $\rho_\tau(z)$  приводит к тому, что алгоритм  $a(x)$  будет приближать  $\tau$ -квантиль распределения ответов в каждой точке пространства объектов.

## Список литературы

- [1] *Jonathan T. Barron* (2019). A General and Adaptive Robust Loss Function. // <https://arxiv.org/pdf/1701.03077.pdf>.