

Машинное обучение, ФКН ВШЭ

Теоретическое домашнее задание №5

Задача 1 (1 балл). Рассмотрим двойственное представление задачи гребневой регрессии:

$$Q(a) = \frac{1}{2} \|Ka - y\|^2 + \frac{\lambda}{2} a^T Ka \rightarrow \min_a.$$

Покажите, что решение этой задачи записывается как

$$a = (K + \lambda I)^{-1} y.$$

Задача 2 (1 балл). Покажите, что функция

$$K(x, z) = \cos(x - z)$$

для $x, z \in \mathbb{R}$ является ядром.

Задача 3 (1 балл). Рассмотрим функцию, равную косинусу угла между двумя векторами $x, z \in \mathbb{R}^d$:

$$K(x, z) = \cos(\widehat{x, z}).$$

Покажите, что она является ядром.

Задача 4 (1 балл). Рассмотрим ядра $K_1(x, z) = (xz + 1)^2$ и $K_2(x, z) = (xz - 1)^2$, заданные для $x, z \in \mathbb{R}$. Найдите спрямляющие пространства для K_1 , K_2 и $K_1 + K_2$.

Задача 5 (2 балла). Рассмотрим следующую функцию на пространстве вещественных чисел:

$$K(x, z) = \frac{1}{1 + e^{-xz}}.$$

Покажите, что она не является ядром.

Задача 6 (2 балла). На одном из занятий было рассмотрено all-subsequences kernel. Рассмотрим его модификацию fixed length subsequences kernel, которая учитывает лишь подпоследовательности фиксированной длины p :

$$(\varphi^p(s))_u = |\{i : s(i) = u\}|, \quad u \in \Sigma^p,$$
$$K_p(s, t) = \langle \varphi^p(s), \varphi^p(t) \rangle = \sum_{u \in \Sigma^p} (\varphi^p(s))_u (\varphi^p(t))_u.$$

Выведите рекуррентные формулы для вычисления $K_p(s, t)$ аналогично выведенным на семинаре.