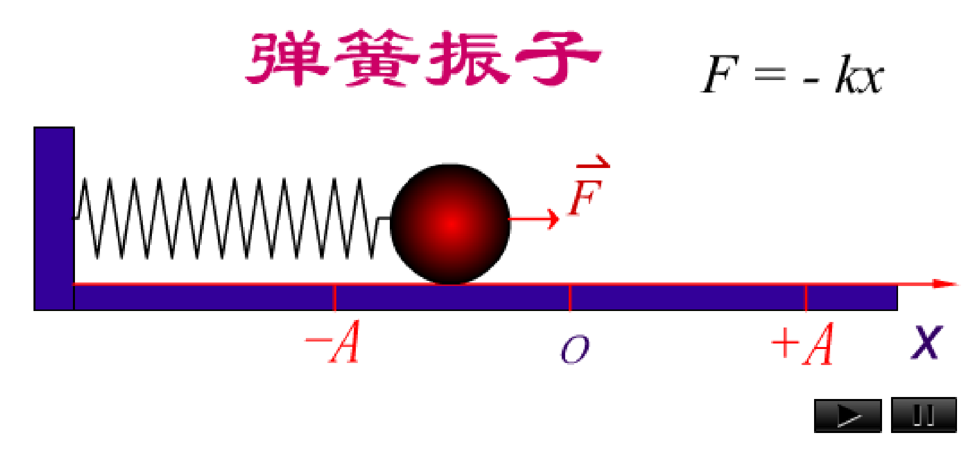
◆ 以弹簧振子为例

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$



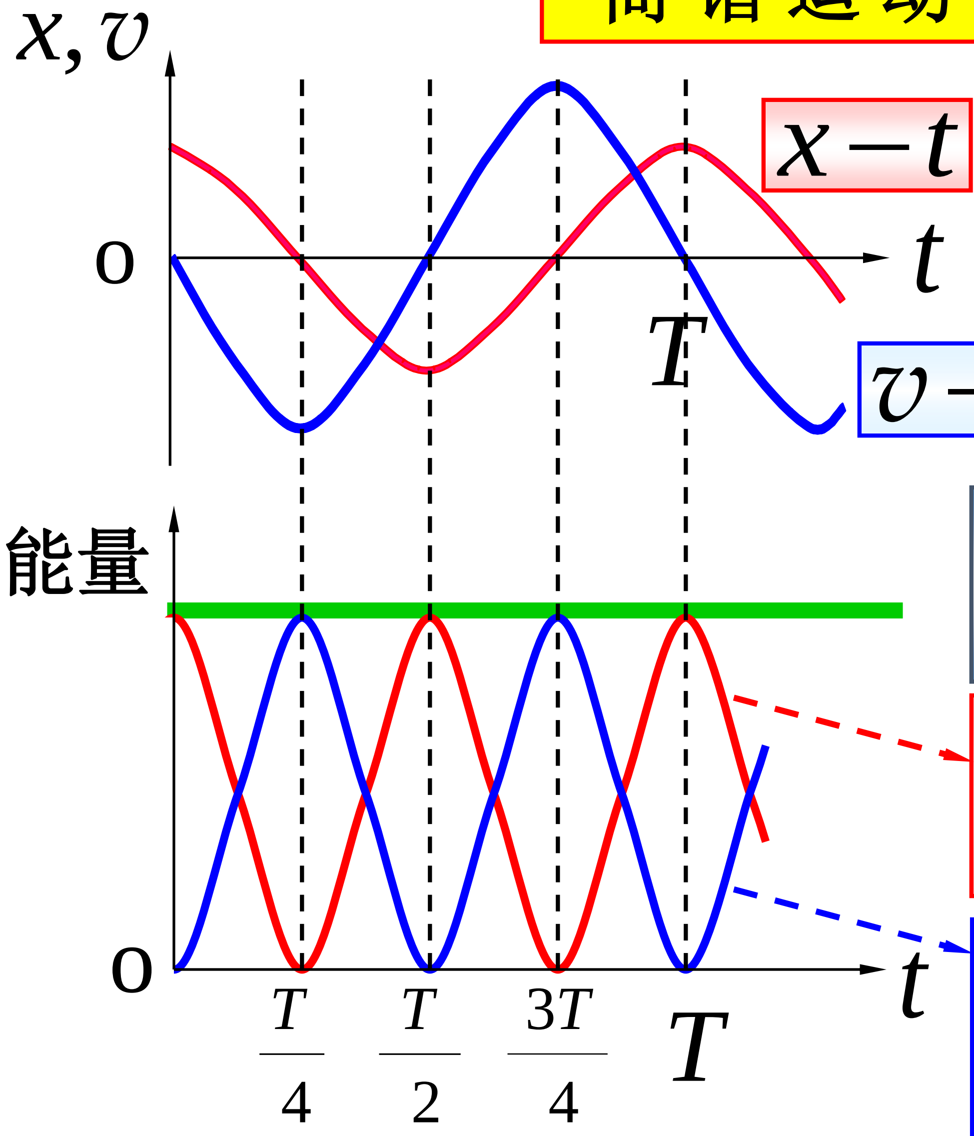
$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\ E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\boxed{\omega^2 = k/m}$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \propto A^2$$ （振幅的动力学意义）

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒。

简谐运动能量图



$\varphi = 0$

$x = A\cos\omega t$

$v = -A\omega\sin\omega t$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐运动方程

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\cancel{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

例： 质量为 0.10kg 的物体，以振幅 $1.0\times10^{-2}\,\text{m}$ 作简谐运动，其最大加速度为 $4.0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，**求：**

（1）振动的周期；

（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；

（4）物体在何处其动能和势能相等？

解：（1）$a_{max} = A\omega^2$　　$\omega = \sqrt{\dfrac{a_{max}}{A}} = 20\,\text{s}^{-1}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.314\,\text{s}$$

（2） $E_{k,\max} = \dfrac{1}{2} m v_{\max}^2 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

（3） $E = E_{k,\max} = 2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

（4） $E_k = E_p$ 时， $E_p = 1.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

由 $E_p = \dfrac{1}{2} k x^2 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$$x^2 = \frac{2E_p}{m\omega^2} = 0.5\times10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \qquad x = \pm 0.707\,\mathrm{cm}$$