Correction - Mécanique 2 - Cinématique du point

2.1 - Exercices d'application :

2.1.1 - Choix d'un repère :

1. Le système présente une symétrie de révolution autour d'un axe → on choisit le repère cylindrique $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\varphi}, \vec{u_z})$

2. Le problème ne présente pas de symétrie particulière → on choisit le repère cartésien $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$.

3. On va avoir un mouvement de rotation dans un plan, on utilise les coordonnées polaires $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.

4. Il n'y a pas de symétrie particulière → repère cartésien $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$.

5. Même réponse que précédemment.

6. On a un mouvement à symétrie de révolution contenu dans un plan → coordonnées polaires $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.

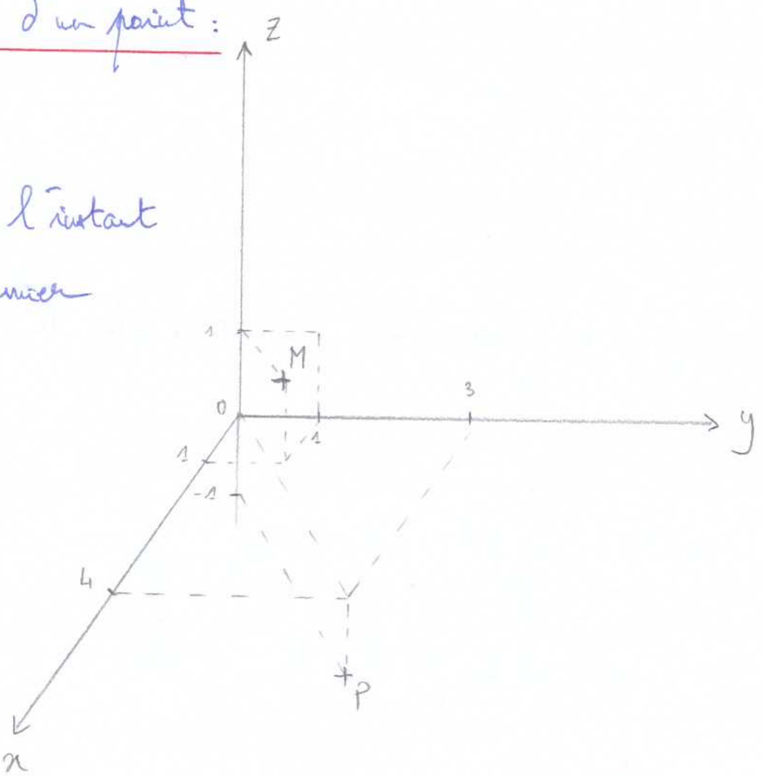
7. On a un problème à symétrie sphérique → on utilise le repère sphérique $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$.

8. De même que précédemment, la base la plus adaptée est la base sphérique

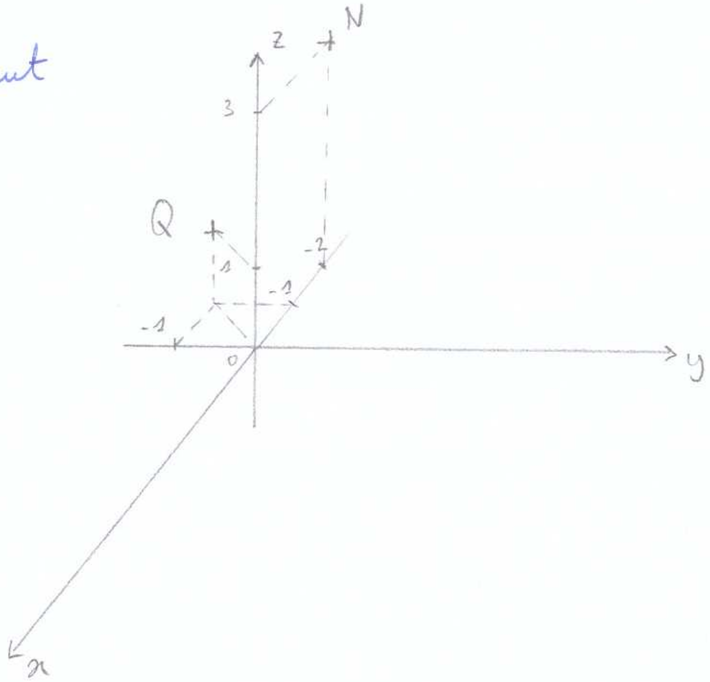
2.1.2 - Repérage d'un point :

1.

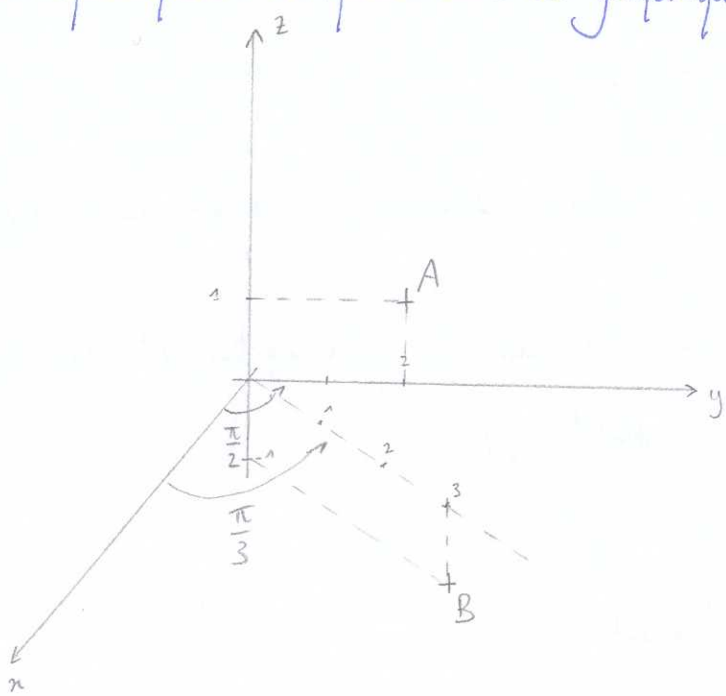
On représente pour l'instant M et P sur le premier graphique.



On représente maintenant N et Q.



2. Commençons par placer ces points sur un graphique.



Grâce à la construction graphique, il est simple de déterminer les coordonnées de A : $\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \\ z_A = 1 \end{cases}$

Pour B, on a : $x_B = \rho_B \cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

$y_B = \rho_B \sin\varphi = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$z_B = -1$

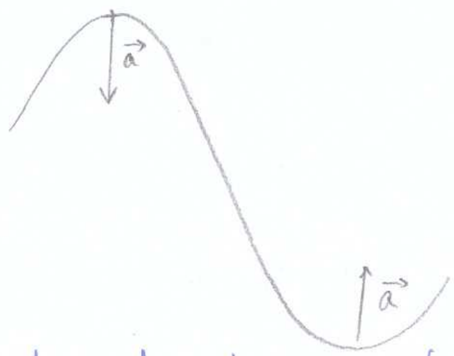
2.1.3- Virages :

1. Pour que le vecteur soit constant, il faut que sa norme, sa direction et son

sens soient constants. Ce n'est clairement pas le cas ici.

$\Rightarrow$ Le vecteur vitesse n'est pas constant.

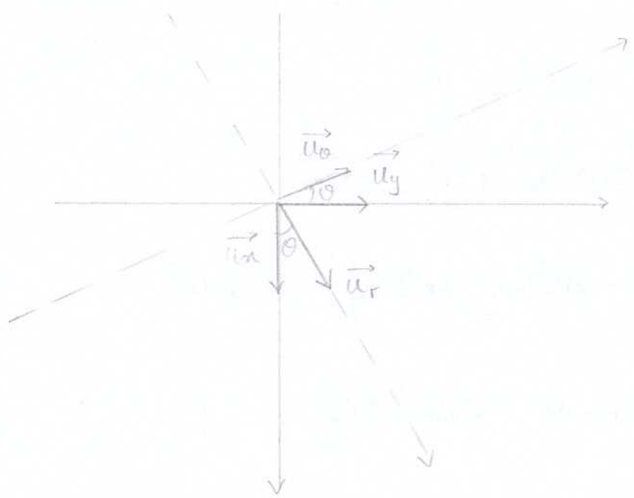
2.



3. Plus les variations de vitesse sont brutales, plus l'accélération sera grande. L'accélération est donc plus importante en a) que en b).

2.1.4 - Projection de vecteurs :

1. Commençons par représenter les différents vecteurs.



$\vec{P} = P\vec{u_x}$ et $\vec{u_x} = \cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_y}$ $\Rightarrow$ $\vec{P} = P\cos\theta\,\vec{u_r} - P\sin\theta\,\vec{u_y}$

$\vec{T} = -T\vec{u_r}$ et $\vec{u_r} = \cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y}$ $\Rightarrow$ $\vec{T} = -T\cos\theta\,\vec{u_x} - T\sin\theta\,\vec{u_y}$

$\vec{f} = -f\vec{u_\theta}$ et $\vec{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\vec{u_y}$ $\Rightarrow$ $\vec{f} = f\sin\theta\,\vec{u_x} - f\cos\theta\,\vec{u_y}$

2. $\vec{P} = -P\vec{u_{x_0}}$ et $\vec{u_{x_0}} = \cos\alpha\,\vec{u_{x_0^*}} + \sin\alpha\,\vec{u_{z_0^*}}$

$\Rightarrow \vec{P} = -P\cos\alpha\,\vec{u_{x_0^*}} - P\sin\alpha\,\vec{u_{z_0^*}}$

$\vec{R} = R\,\vec{u_{x_0^*}}$ et $\vec{u_{x_0^*}} = \cos\alpha\,\vec{u_{x_0}} - \sin\alpha\,\vec{u_{z_0}}$

$\Rightarrow \vec{R} = R\cos\alpha\,\vec{u_{x_0}} - R\sin\alpha\,\vec{u_{z_0}}$

$\vec{F} = F\,\vec{u_{z_0^*}}$ et $\vec{u_{z_0^*}} = \sin\alpha\,\vec{u_{x_0}} + \cos\alpha\,\vec{u_{z_0}}$ $\Rightarrow$ $\vec{F} = F\sin\alpha\,\vec{u_{x_0}} + F\cos\alpha\,\vec{u_{z_0}}$

2.1.5 - Trajectoire et manège :

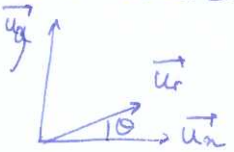
1. On a les équations horaires du mouvement : $r(t) = v_0 t$ et $\theta(t) = \omega_0 t$.

Le rayon r augmente linéairement avec le temps et on tourne à vitesse constante. La trajectoire, dans le référentiel de l'hélicoptère, sera une spirale.

2. Exprimons le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} = v_0 t\,\overrightarrow{u_r}$

On dérive pour obtenir la vitesse ; où $\mathcal{R}$ est le référentiel lié à l'hélicoptère.

$$\vec{v} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}} = v_0\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}}$$



Et $\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$

$$\dot{\overrightarrow{u_r}} = \frac{d\overrightarrow{u_r}}{d\theta}\,\dot{\theta} = \left(-\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y}\right)\dot{\theta} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = v_0\,\overrightarrow{u_r} + r\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta} = v_0\,\overrightarrow{u_r} + v_0\omega_0 t\,\overrightarrow{u_\theta}$$

3. L'accélération est ensuite donnée par :

$$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = v_0\,\dot{\overrightarrow{u_r}} + v_0\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta} + v_0\omega_0 t\,\dot{\overrightarrow{u_\theta}}$$

Et $\dot{\overrightarrow{u_\theta}} = \dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}\,\dot{\theta} = \omega_0\left(-\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}\right) = -\omega_0\,\overrightarrow{u_r}$

$$\Rightarrow \vec{a} = v_0\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta} + v_0\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta} - v_0\omega_0^2 t\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -v_0\omega_0^2 t\,\overrightarrow{u_r} + 2v_0\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta}$$

2.1.6 - Test d'accélération d'une voiture :

1. Déterminons les équations du mouvement. Le mouvement étant unidimensionnel, on n'utilisera pas de vecteurs.

$$a = a_0 \quad \Rightarrow \quad v = \int a_0\,dt = a_0 t + v_0$$

Comme la voiture est initialement immobile, on a $v_0 = 0$ et $v = a_0 t$.

Puis la position est ensuite donnée par : $x = \int v\,dt = \int a_0 t\,dt = \dfrac{a_0 t^2}{2} + x_0$.

On choisit l'origine des x telle que $x_0 = 0$.

$$\Rightarrow x(t) = \frac{a_0 t^2}{2}$$

On en déduit la vitesse et l'accélération à la distance D ; pour cela, on doit déterminer la valeur de a_0 : on sait que :

$$x(t_1 = 26{,}6s) = \frac{a_0 t_1^2}{2} = D \rightarrow a_0 = \frac{2D}{t_1^2} = 0{,}509 \, m.s^{-2}$$

On en déduit $a(D) = a_0 = 0{,}509 \, m.s^{-2}$

$v(D) = a_0 t = 13{,}5 \, m.s^{-1}$.

2. On détermine les nouvelles équations du mouvement : $a(t) = -a_0'$

$v(t) = v(D) - a_0 t$.

On calcule le temps nécessaire à l'arrêt du véhicule :

$$v(t_F) = v(D) - a_0 t_F = 0 \Rightarrow t_F = \frac{v(D)}{a_0} = 1{,}93s.$$

Et $x(t) = v(D)t - \frac{a_0 t^2}{2}$ d'où une distance d'arrêt :

$$D_A = v(D)t_F - \frac{a_0 t_F^2}{2} = 13{,}0 \, m$$

2.1.7 - Mouvement hélicoïdal :

1. Le vecteur position en coordonnées cylindriques est donné par :

$\vec{OM} = R\vec{u_r} + z\vec{u_z}$. On dérive pour obtenir le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \dot{R}\vec{u_r} + R\dot{\vec{u_r}} + \dot{z}\vec{u_z} + z\dot{\vec{u_z}} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z} = R\omega\vec{u_\theta} + h\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = R\omega\vec{u_\theta} + h\vec{u_z}$$

2. Calculons le module de la vitesse :

$||\vec{v}|| = \sqrt{(R\omega)^2 + h^2} = cte \Rightarrow$ le module de la vitesse est bien constant.

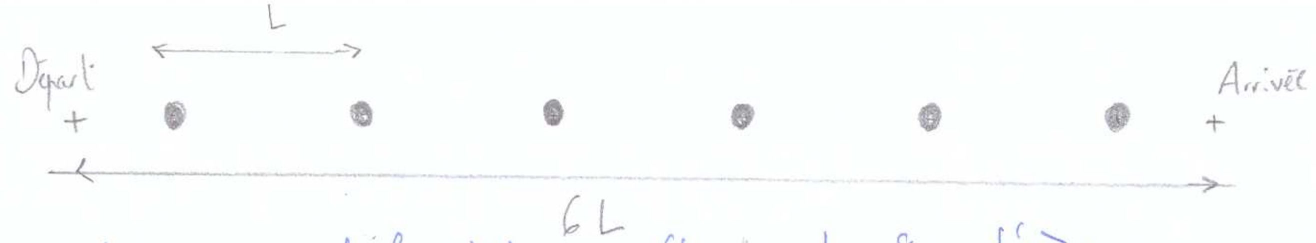
3. On dérive la vitesse pour obtenir le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R = R\omega\dot{\vec{u_\theta}} = -R\omega^2\vec{u_r} \Rightarrow \vec{a} = -R\omega^2\vec{u_r}$$

2.2 - Exercices de réflexion :

2.2.1 - Un peu de science-fiction :

1. Représentons la situation considérée :



Le speeder parcourt la distance 6L en $t_t = 8$ s d'où :

$$v_0 = \frac{6L}{t_t} = \frac{6 \times 200}{8,0} = 150 \text{ m.s}^{-1}$$

2) a) La solution est une sinusoïde de variable x donc la période spatiale sera déterminée par l'espace entre les cheminées d'où :

$y(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$.

D'après le graphique, on a $y(0) = 0$ d'où $y(x) = A \sin(kx)$.

Ensuite on doit avoir :

$$y(nL) = 0 \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow y(nL) = A \sin(knL) = 0 \Rightarrow knL = n\pi \Rightarrow k = \frac{\pi}{L}$$

On a bien : $\boxed{y(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}$

La longueur d'onde λ doit vérifier :

$$y(x+\lambda) = y(x) \Rightarrow A \sin\left(\frac{\pi x}{L} + \frac{\pi \lambda}{L}\right) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi \lambda}{L} = 2\pi \Rightarrow \boxed{\lambda = 2L}$$

Puis le vecteur d'onde k est donné par : $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\pi}{L}}$

b) On a : $x = v_0 t$ et $y(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = A \sin\left(\frac{\pi v_0 t}{L}\right)}$$

3) Le vecteur position s'exprime en coordonnées cartésiennes comme :

$$\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{u_x} + y \overrightarrow{u_y} = v_0 t \overrightarrow{u_x} + A \sin\left(\frac{\pi v_0 t}{L}\right) \overrightarrow{u_y}$$

On dérive pour obtenir la vitesse :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = v_0 \overrightarrow{u_x} + \frac{A\pi v_0}{L} \cos\left(\frac{\pi v_0 t}{L}\right) \overrightarrow{u_y}}$$

4) On dérive une nouvelle fois pour obtenir l'accélération :

$$\boxed{\vec{a} = -A\left(\frac{\pi v_0}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi v_0 t}{L}\right)\vec{u_y}}$$

5.) Pour avoir $\|\vec{a}\| < 10g \ \forall t$, on doit avoir

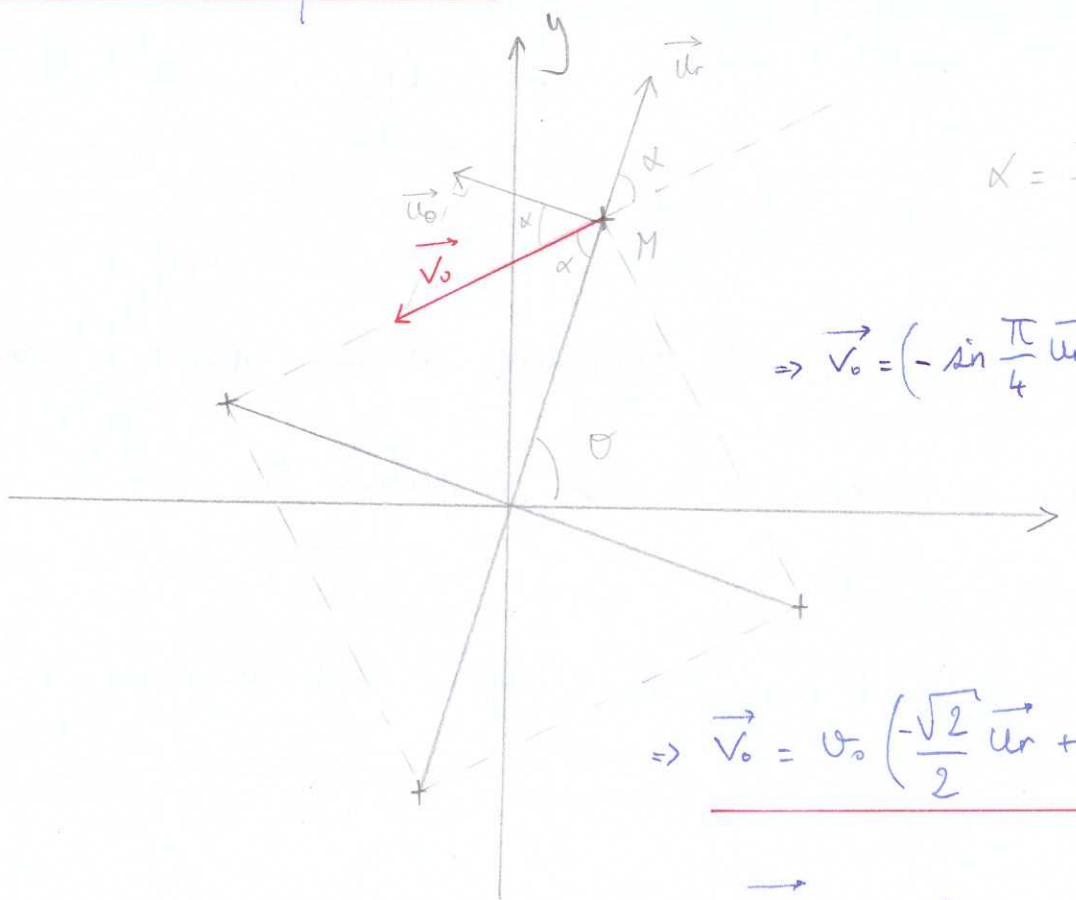
$$A\left(\frac{\pi v_0}{L}\right)^2 < 10g \Rightarrow \boxed{A < \frac{10gL^2}{\pi^2 v_0^2}}$$

AN: $\boxed{A < 17,6 \text{ m}}$

6) 10 g est une accélération insoutenable pour le corps humain. Le maximum supportable (avec entraînement) est plutôt de l'ordre de 5g, soit $A < 8,8$ m, ce qui paraît relativement peu.
Ceci est à mettre en relation avec v_0 qui vaut 540 km.h^{-1}, vitesse assez inconcevable !

2.2.2 - Course poursuite :

1.



$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \vec{v_0} = \left(-\sin\frac{\pi}{4}\vec{u_r} + \cos\frac{\pi}{4}\vec{u_\theta}\right)v_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v_0} = v_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u_r} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u_\theta}\right)}$$

2. Le vecteur position est donné par : $\vec{OM} = r\vec{u_r}$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\vec{u_r}} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

D'où :

$$\boxed{-\frac{v_0\sqrt{2}}{2} = \frac{dr}{dt} \text{ et } \frac{v_0\sqrt{2}}{2} = r\dot{\theta}}$$

3. On a : $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{-v_0\sqrt{2}}{2} \Rightarrow dr = \dfrac{-v_0\sqrt{2}}{2}\,dt$

$$\int_a^{r(t)} dr = -\frac{v_0\sqrt{2}}{2}\int_0^t dt' \Rightarrow \boxed{r(t) = a - \frac{v_0\sqrt{2}}{2}t}$$

On a ensuite :

$$r(t)\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d\theta = \frac{v_0\sqrt{2}}{2}\times\frac{dt}{r(t)} = \frac{v_0\sqrt{2}}{2}\times\frac{dt}{a-\frac{v_0\sqrt{2}}{2}t}$$

$$\int_0^{\theta(t)} d\theta = \frac{v_0\sqrt{2}}{2}\times\int_0^t \frac{dt'}{a-\frac{v_0\sqrt{2}}{2}t'} \Rightarrow \theta(t) = \frac{v_0\sqrt{2}}{2}\times\left[\ln\left(a-\frac{v_0\sqrt{2}}{2}t'\right)\times\frac{-2}{\sqrt{2}\,v_0}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \left[-\ln\left(a-\frac{v_0\sqrt{2}}{2}t\right)\right]_0^t = -\ln\left(\frac{a-v_0\sqrt{2}/2\;t}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \ln\left(\frac{a}{a-\frac{v_0\sqrt{2}}{2}t}\right)}$$

4. Les quatres individus se rejoignent pour $r=0$, soit :

$$r(t_F) = a - \frac{v_0\sqrt{2}}{2}t_F = 0 \Rightarrow t_F = \frac{2a}{v_0\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{t_F = \frac{\sqrt{2}\,a}{v_0}}$$

5. On remarque : $\theta(t) = \ln\left(\dfrac{a}{r(t)}\right)$ soit : $e^{\theta(t)} = \dfrac{a}{r(t)}$

$$\Rightarrow \boxed{r(t) = a\,e^{-\theta(t)}}$$ La trajectoire est une spirale logarithmique.

6. Les individus se déplacent à la vitesse v_0 pendant t_F, d'où une distance L :

$$L = v_0 t_F = \frac{a\sqrt{2}}{v_0}\times v_0 \longrightarrow \boxed{L = a\sqrt{2}}$$

Les individus parcourent une distance égale à la diagonale du carré.