### 2.b) Caractérisation des bases en dimension finie

**Remarque 22.** Regroupant plusieurs points vu précédement pour les reformuler, on peut dire la chose suivante :
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ :

- Toute famille génératrice a *au moins* $n$ éléments
- Toute famille libre a *au plus* $n$ éléments
- Tout base a *exactement* $n$ éléments

**Théorème 4.** *Soit* $\mathbb{E}$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \neq 0$*. On a :*

- *Toute famille libre de* $\mathbb{E}$ *avec* $n$ *éléments est une base.*
- *Toute famille génératrice de* $\mathbb{E}$ *avec* $n$ *éléments est une base.*

**Démonstration 13.**

**Remarque 23.** Autrement dit, en dimension finie, une famille est une base dès que :

- Elle a la bonne taille (son cardinal est la dimension de l'espace considéré)
- Elle est libre **ou** génératrice

Souvent, pour démontrer qu'une famille est une base, on se contentera du "plus facile" entre libre et génératrice suivant les cas, et de remarquer qu'on a le bon nombre de vecteurs.

**Exemple 19.** Dans $\mathbb{R}^3$, considérons la famille $(u, v, w)$ formée des vecteurs : $u = (1, 1, 1), v = (1, 2, 1), w = (0, 1, 1)$. Montrons que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Comme la famille $(u, v, w)$ contient 3 vecteurs et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, alors il suffit de montrer que la famille est libre.
Supposons que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Alors on a

$$(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \beta + \gamma) = (0, 0, 0)$$

En résolvant le système on trouve $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, donc la famille $(u, v, w)$ est libre. C'est donc une base en vertu du théorème précédent.
Pour trouver les coordonnées d'un vecteur $x$ (qui a pour coordonnées dans la base canonique $(x_1, x_2, x_3)$) dans cette base, il suffit déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = x$. On trouve par exemple pour $x = (1, 2, 3)$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -1, 2)$.

**Exemple 20.** Montrons que $(e^{i\pi/4}, e^{-i\pi/4})$ est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-esapce vectoriel. Pour cela, on va montrer qu'elle est génératrice.

**Exemple 21.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Considérons $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la famille formée des vecteurs :

$$f_1 = e_2 + e_3 + e_4, \quad f_2 = e_1 + e_3 + e_4, \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_4, \quad f_4 = e_1 + e_2 + e_3$$

Montrons que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{E}$ puis exprimons les coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{B}'$ à partir de celles de la base $\mathcal{B}$

### 2.c) Théorème de la base incomplète

**Théorème 5.** *Théorème de la base incomplète*
*Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. Soient $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_p)$ une famille libre de $\mathbb{E}$, et $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$ une famille génératrice de $\mathbb{E}$. Alors il existe $n - p$ vecteurs de $\mathcal{G}$ : $(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_{n-p}})$ tels que :*

$$(l_1, \dots, l_p, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_{n-p}}) \text{ est une base de } \mathbb{E}$$

*De manière équivalente, on peut dire :*

*Toute famille libre non génératrice de $\mathbb{E}$ peut être* ***complétée*** *en une base de $\mathbb{E}$.*

**Corollaire 1.** De toute famille génératrice de $\mathbb{E}$, on peut extraire une base de $\mathbb{E}$.

**Démonstration 14.**

**Exemple 22.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, complétons la famille formée par $u = (1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, -1)$ en une base.

**Exemple 23.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ de base canonique $(e_1, e_2, e_3)$, complétons la famille formée par $u = e_1 + e_2$ en une base.

### 2.d) Produit Cartésien

**Proposition 13.** Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Le produit cartésien $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ est de dimension finie si et seulement si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ le sont.
On a alors dans ce cas : $\dim(\mathbb{E} \times \mathbb{F}) = \dim(\mathbb{E}) + \dim(\mathbb{F})$.
Si de plus $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{E}$, et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de $\mathbb{F}$, alors :

$$\{(e_1, 0), (e_2, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), (0, f_2), \dots, (0, f_p)\} \text{ est une base de } \mathbb{E} \times \mathbb{F}$$

### 2.e) Dimension des sous-espaces vectoriels

**Proposition 14.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Alors :

- $\mathbb{F}$ est de dimension finie
- $\dim(\mathbb{F}) \leqslant \dim(\mathbb{E})$
- $\mathbb{F}$ admet un supplémentaire de dimension finie dont la dimension est $\dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F})$.

**Proposition 15.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\begin{cases} \dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathbb{G}) \\ \mathbb{F} \subset \mathbb{G} \end{cases} \implies \mathbb{F} = \mathbb{G}$$

**Théorème 6.** *Formules de Grassman*
*Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Alors :*

- *Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe :*

$$\dim(\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$$

- *Dans le cas général :*

$$\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) - \dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G})$$

**Corollaire 2.** Si $\dim(\mathbb{F} + \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G})$, alors $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont en somme directe.
Spécifiquement :

$$\begin{cases} \mathbb{F} + \mathbb{G} = \mathbb{E} \\ \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) = \dim(\mathbb{E}) \end{cases} \implies \mathbb{F} \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

**Démonstration 15.**

### 2.f) Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 25.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. On appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ engendré par $\mathcal{F}$ :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_p)) \leqslant p$$

**Proposition 16.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

- $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est libre
- Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie $n$, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont les *colonnes* sont les matrices des vecteurs de $\mathcal{F}$. Alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rang}(A)$.

**Remarque 24.** Le deuxième point de la proposition précédente ne dépend pas du choix de la base…

**Exemple 24.** Calculons le rang de la famille $(e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^4$ avec :

$$e_1 = (1, 0, 2, 3), \quad e_2 = (3, 2, 1, 0), \quad e_3 = (6, 2, 7, 9)$$