北京化工大学 2013-2014 学年第一学期

《矩阵论》试题

一、 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 2 & -5 & 1\\ 6 & -15 & 3\end{pmatrix}$,

1. 求 A 的特征多项式和全部特征值;
2. 求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式;
3. 求 A 的 Jordan 标准型 J;
4. 求 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$;
5. 计算 e^{At}
6. 求微分方程组 $\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$ 满足初值 $x(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 的解.

解:

1. $$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 5 & -1\\ -2 & \lambda+5 & -1\\ -6 & 15 & \lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 5 & \lambda-2\\ -1 & \lambda+5 & -2\\ \lambda-3 & 15 & -6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 5 & \lambda-2\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 5\lambda & \lambda^2-5\lambda\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 5\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

特征多项式为 λ^3，特征值为 $\lambda=0$(三重).

2. 不变因子为 $d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda^2$. 初等因子为 λ,λ^2，最小多项式为 $m(\lambda)=\lambda^2$.

3. Jordan 标准型为 $J=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & 1\\ & & 0\end{bmatrix}$ 或者 $\begin{bmatrix}0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}$.

4. 由于 $\rho(A)$=0<1$\Rightarrow$ $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k=0$.

5. 取多项式 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$，由带余除法设 $f(\lambda)=q(\lambda,t)(\lambda)m(\lambda)+b_1(t)\lambda+b_0$，代入 $f(0)=b_0$，$f'(0)=b_1(t)$ 得

$$\begin{cases} 1=b_0 \\ t=b_1(t) \end{cases}，所以\ e^{At}=f(A)=tA+I=\begin{pmatrix} 1+2t & -5t & t \\ 2t & 1-5t & t \\ 6t & -15t & 1+3t \end{pmatrix}。$$

6. 微分方程组的解为 $x(t)=e^{At}x(0)=\begin{pmatrix} 1+2t & -5t & t \\ 2t & 1-5t & t \\ 6t & -15t & 1+3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-2t \\ 1-6t \end{pmatrix}$.

二、 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

1. 求 $\|A\|_{m_1},\|A\|_{m_\infty},\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_F$；

2. 设 $x,y\in C^n, B=xy^H$，试比较 $\|B\|_F$ 与 $\|x\|_2\|y\|_2$ 的大小，给出理由.

解：1. $\|A\|_{m_1}=6+\sqrt{2},\ \|A\|_{m_\infty}=6,\ \|A\|_1=2+\sqrt{2},\ \|A\|_\infty=4,\ \|A\|_F=\sqrt{10}$

2. 相等，直接计算或者

$$\|B\|_F=\sqrt{tr(B^HB)}=\sqrt{tr(yx^Hxy^H)}=\sqrt{x^Hx}\cdot\sqrt{tr(yy^H)}$$
$$=\sqrt{x^Hx}\cdot\sqrt{tr(y^Hy)}=\sqrt{x^Hx}\cdot\sqrt{y^Hy}=\|x\|_2\|y\|_2.$$

三、用 Householder 变换求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的 QR 分解.

解 记 $x=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，则 $\alpha=\|x\|_2=2$，$x-\alpha e_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，取 $u=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

得 $H_1 = I_4 - 2uu^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$， $H_1A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

对 $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$，记 $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $\alpha_1 = \|x_1\|_2 = 2$，$x_1 - \alpha_1 e_1' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，取 $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

得 $H_2 = I_3 - 2u_1u_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， $H_2A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

令 $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} H_1$，则有 $Q = H_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，

$R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， 使得 $A = QR$.

四、已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$， $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. 求 A 的满秩分解；

2. 求 A^+；

3. 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax = b$ 是否有解；

4. 求线性方程组 $Ax = b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解解，并说明是哪种解.

解 1. $A \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， $A = FG = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $F^+ = \left(F^TF\right)^{-1}F^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$， $G^+ = G^T\left(GG^T\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$$A^{+}=G^{+}F^{+}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & -2 & -1\\ -2 & -1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

3. $A^{+}b=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$， $AA^{+}b=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\3\end{pmatrix}=b$，所以方程组 $Ax=b$ 有解.

4. $x_0=A^{+}b=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，是 $Ax=b$ 的极小范数解.

五、已知矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的一个基为 $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，

线性变换 T 满足 $T(A_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, T(A_2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, T(A_3)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, T(A_4)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

1. 求 T 在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的矩阵；

2. 判断是否存在 $R^{2\times 2}$ 的基，使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵，并证明你的结论；

3. 求 $N(T)$ 的一个基；

4. 求 $R^{2\times 2}$ 的一个基，使得 T 在该基下的矩阵为 Jordan 矩阵，并写出这个 Jordan 矩阵.

解 $(A_1, A_2, A_3, A_4)=(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})C_1$， $C_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

记 $B_i=T(A_i)$，$1\le i\le 4$，则 $(B_1, B_2, B_3, B_4)=(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})C_2$，

$$C_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$T(A_1, A_2, A_3, A_4)=(B_1, B_2, B_3, B_4)=(A_1, A_2, A_3, A_4)C_1^{-1}C_2$，所以 T 在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的

矩阵为 $A=C_1^{-1}C_2=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\0&0&0&0\\-1&1&0&-2\\1&0&1&1\end{pmatrix}$.

2. $\det(\lambda I-A)=\lambda^2(\lambda-1)^2$，$A$ 有两个二重特征值 $0,1$。$rank(I-A)=3$，1的几何重数 $4-rank(I-A)=1$ 小于代数重数 2，所以 T 不可对角化，即不存在 $R^{2\times 2}$ 的基，使得 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

3. $N(T)=\{X\,|\,T(X)=O\}=\{X\,|\,X=(A_1,A_2,A_3,A_4)\alpha, A\alpha=0\}$。$Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，所以 $N(T)$ 的一个基为 $X_i=(A_1,A_2,A_3,A_4)\alpha_i$，$i=1,2$，即

$\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

4. $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&0&-2\\0&\lambda&0&0\\1&-1&\lambda&2\\-1&0&-1&\lambda-1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\lambda&\\&&&\lambda(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$,

对 $\lambda=1$, 解线性方程组

$$(I-A)x=0,\quad \begin{pmatrix}0&-1&0&-2\\0&1&0&0\\1&-1&1&2\\-1&0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&-2\\0&1&0&0\\1&-1&1&2\\0&-1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

取 $p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$.

求 $(I-A)x=-p_3$ 的解.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，取 $p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

求出可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$，使得 $P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$，取基为

$(A_1, A_2, A_3, A_4)P$，即为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$，则在此基下

的矩阵为 Jordan 矩阵 J.