TD 3 - Régime transitoire d'un oscillateur amorti.

1 - Questions de cours :

1. Un oscillateur est un système physique dont l'évolution est périodique.

2. La fréquence f d'un signal harmonique est définie comme l'inverse de la période T : $f = 1/T$. Elle s'exprime en hertz.
La pulsation est définie par $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ et s'exprime en radians par seconde.

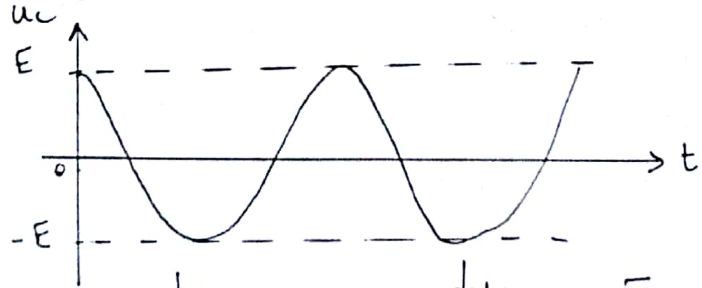
3. On applique la loi des mailles : $u_C - u_L = 0$
et $u_L = L\frac{di}{dt}$; $i = -C\frac{du_C}{dt}$ $\rightarrow$ $u_L = -LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$

$$\Rightarrow u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0}$$

On pose $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la pulsation propre du circuit.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0}$$

4. On reconnaît l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique :
$u_C(t) = u_{C,m}\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Il faut ensuite déterminer $u_{C,m}$ et φ.
Par continuité de l'intensité du courant dans la bobine :
$i(0) = 0$ et $i = -C\frac{du_C}{dt}$ $\Rightarrow$ $\frac{du_C}{dt}(0) = 0$
$\frac{du_C}{dt} = -\omega_0 u_{C,m}\sin(\omega t + \varphi)$; $\frac{du_C}{dt}(0) = -\omega_0 u_{C,m}\sin\varphi = 0$
$\Rightarrow \sin\varphi = 0$, On choisit $\underline{\varphi = 0}$. $\rightarrow u_C(t) = u_{C,m}\cos(\omega_0 t)$
Et $u_C(0) = E$ $\Rightarrow$ $\underline{u_{C,m} = E}$ $\Rightarrow$ $\boxed{u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)}$



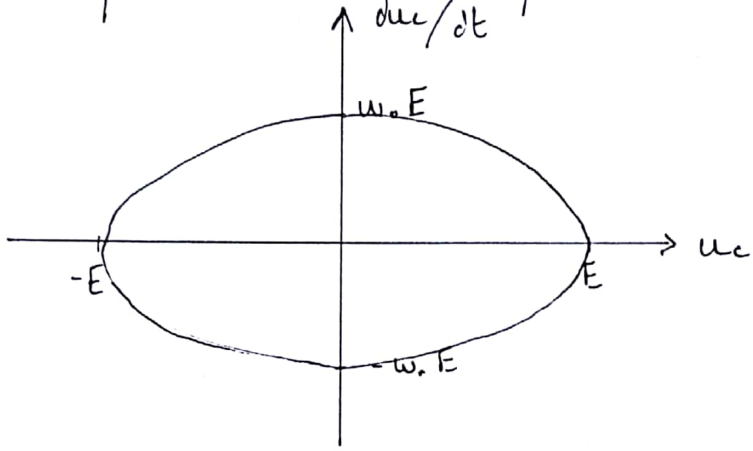
5. $i = -C\frac{du_C}{dt}$. $\frac{du_C}{dt} = -E\omega_0\sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = CE\omega_0\sin(\omega_0 t)}$$

6. On exprime i en fonction de u :

$$\begin{cases} u = E\cos(\omega_0 t) \\ \dfrac{i}{\omega_0 C} = E\sin(\omega_0 t) \end{cases} \Rightarrow u_c^2 + \left(\frac{i}{\omega_0 C}\right)^2 = E^2 \Rightarrow u_c^2 + \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{du_c}{dt}\right)^2 = E^2$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse :



7. * Énergie stockée dans le condensateur : $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{CE^2}{2}\cos^2(\omega_0 t)$

* Énergie stockée dans la bobine : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L \times E^2 C^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$

$\Rightarrow \mathcal{E}_L = \frac{CE^2}{2}\sin^2(\omega_0 t)$

* Énergie stockée dans le circuit : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C = \frac{CE^2}{2}$

$\longrightarrow$ L'énergie totale est constante.

8. On applique la loi des mailles, tous les dipôles orientés en convention récepteur :
$$u_R + u_L + u_C = 0$$
et $u_R = Ri$, $u_L = L\frac{di}{dt}$ et $i = C\frac{du_c}{dt}$

$$\Rightarrow u_R = RC\frac{du_c}{dt} \quad \text{et} \quad u_L = LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$$

$$\Rightarrow RC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + u_c = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0}$$

On introduit la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et le taux d'amortissement ξ avec $\frac{R}{L} = 2\xi\omega_0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0}$$

On préfère parfois utiliser le facteur de qualité Q défini par $Q = \frac{1}{2\xi}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0}$

9. Trois types de régimes sont possibles :
* si l'amortissement est faible ($\xi < 1$), le régime est pseudo-périodique.
* si l'amortissement est fort ($\xi > 1$), le régime est apériodique.
* si $\xi = 1$, on se trouve en régime critique.

10. * Cas du régime pseudo-périodique :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

Polynôme caractéristique :

$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$. Discriminant : $\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2-1)$

L'amortissement est faible, d'où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$

Le polynôme admet deux racines complexes :

$$r_{+/-} = -\xi\omega_0 +/- j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\xi\omega_0 +/- j\omega \quad \text{avec } \omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

Les solutions, réelles ont alors la forme suivante :

$$u_C(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$ avec A et B des constantes réelles

Initialement, on a : $u_C(0) = E$ et $\frac{du_C}{dt} = 0$ (car $i(0) = 0$)

$u_C(0) = A = E \rightarrow \underline{A = E}$

$$\frac{du_C}{dt} = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}\left(E\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) + e^{-\xi\omega_0 t}\left[-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right]$$

$$\frac{du_C}{dt}(0) = -\xi\omega_0 E + B\omega = 0 \longrightarrow B = \frac{\xi\omega_0 E}{\omega} = E\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_C(t) = E e^{-\xi\omega_0 t}\left[\cos(\omega t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega t)\right]}$$

* Cas du régime apériodique :

Cette fois l'amortissement est fort. $\xi > 1$ et

$\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) > 0$. Le polynôme admet donc deux racines réelles :

$r_{+/-} = -\xi\omega_0 +/- \omega_0\sqrt{\xi^2-1}$. On pose $\omega = \omega_0\sqrt{\xi^2-1}$

Les solutions sont alors de la forme :

$$u_C(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}\right].$$ On utilise les conditions initiales.

$u_C(0) = E$ et $\frac{du_C}{dt}(0) = 0$

$u_c(0) = A + B = E$

$$\frac{du_c}{dt} = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}\left[Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right] + e^{-\xi\omega_0 t}\left[A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}\right]$$

$$\frac{du_c}{dt}(0) = -\xi\omega_0(A+B) + \omega(A-B) = -\xi\omega_0 E + \omega(A-B) = 0$$

$\Rightarrow A = B + \xi\frac{\omega_0 E}{\omega} \quad \rightarrow 2B + \xi\frac{\omega_0 E}{\omega} = E \quad \rightarrow 2B = E\left(1 - \xi\frac{\omega_0}{\omega}\right)$

$\Rightarrow B = \frac{E}{2\omega}(\omega - \xi\omega_0)$ et $A = \frac{E}{2\omega}(\omega + \xi\omega_0)$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = \frac{E}{2\omega}e^{-\xi\omega_0 t}\left[(\omega - \xi\omega_0)e^{-\omega t} + (\omega + \xi\omega_0)e^{\omega t}\right]}$$

α Cas du régime critique :

On a cette fois : $\xi = 1$ d'où $\Delta = 0$. On sait que les solutions ont la forme : $u_c(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$

$u_c(0) = A = E$

$\frac{du_c}{dt} = Be^{-\omega_0 t} - \omega_0(A + Bt)e^{-\omega_0 t}$; $\frac{du_c}{dt}(0) = B - \omega_0 A = 0$

$\rightarrow B = \omega_0 A = \omega_0 E$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = E(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}}$$

Voir cours pour les représentations graphiques et les portraits de phase.

11. On met le circuit en équation : $u_L + u_R + u_C = E$

$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E \longrightarrow \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = \frac{E}{LC}$

On introduit : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $2\xi\omega_0 = R/L$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E}$$

Commençons par chercher la solution particulière sous la forme d'une constante $\longrightarrow \omega_0^2 u_{cp} = \omega_0^2 E \longrightarrow \boxed{u_{c,p} = E}$

Il faut ensuite résoudre l'équation différentielle homogène :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$$

Nous l'avons déjà fait précédemment. Plusieurs cas se présentent :

*** $\xi < 1$: régime pseudo-périodique :**

On a alors $u_{c,g}(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

D'où : $u_c(t) = E + e^{-\xi\omega_0 t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$.

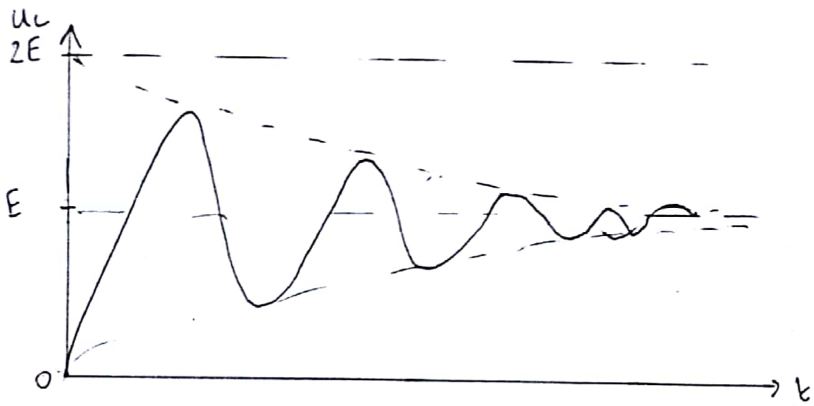
On utilise les conditions initiales : $u_c(0) = 0$ et $\frac{du_c}{dt}(0) = 0$

$u_c(0) = E + A = 0 \Rightarrow \underline{A = -E}$

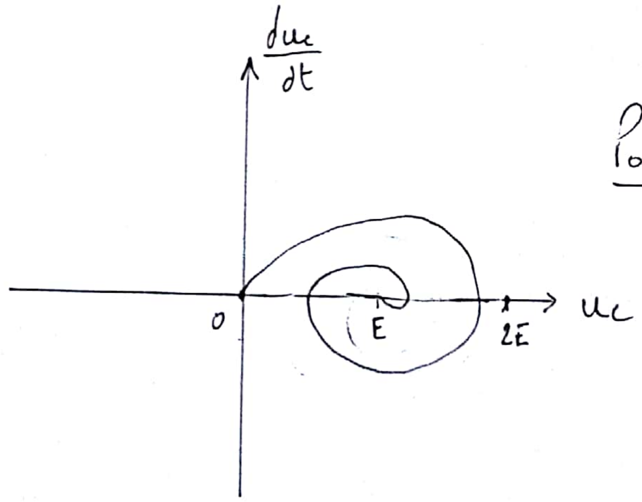
$$\frac{du_c}{dt} = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right) + e^{-\xi\omega_0 t}\left(-A\omega\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)\right)$$

$$\frac{du_c}{dt}(0) = -\xi\omega_0 A + \omega B = 0 \rightarrow B = \frac{\xi\omega_0}{\omega}A = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}E$$

$$\rightarrow \boxed{u_c(t) = E\left[1 - e^{-\xi\omega_0 t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega t)\right)\right]}$$



Représentation graphique



Portrait de phase

*** $\xi > 1$ - régime apériodique :**

Cette fois : $u_{c,g}(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right)$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$

D'où : $u_c(t) = E + e^{-\xi\omega_0 t}\left(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right)$

$u_c(0) = E + A + B = 0$

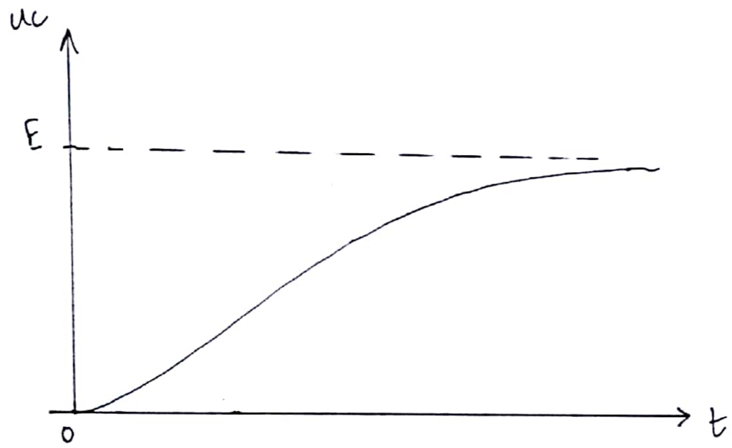
$$\frac{du_c}{dt} = -\xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}\left(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}\right) + e^{-\xi\omega_0 t}\left(\omega A e^{\omega t} - \omega B e^{-\omega t}\right)$$

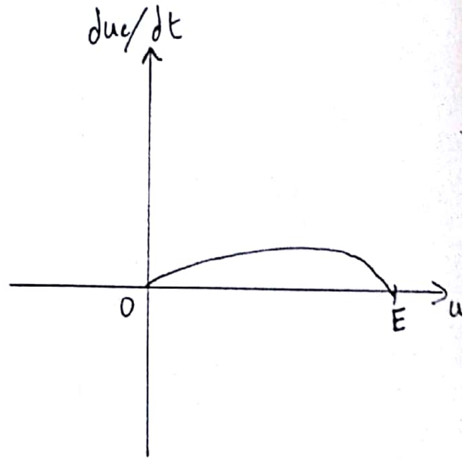
$$\frac{du_c}{dt}(0) = -\xi\omega_0(A+B) + \omega(A-B) = 0 \Rightarrow A(\omega - \xi\omega_0) = B(\omega + \xi\omega_0)$$

$$\Rightarrow B = A\,\frac{\omega - \xi\omega_0}{\omega + \xi\omega_0} \Rightarrow E + A\left(1 + \frac{\omega - \xi\omega_0}{\omega + \xi\omega_0}\right) = 0 \Rightarrow A = \frac{-E(\omega + \xi\omega_0)}{2\omega}$$

Et $B = \dfrac{-E(\omega - \xi\omega_0)}{2\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = E\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{2\omega}\left((\omega + \xi\omega_0)e^{\omega t} + (\omega - \xi\omega_0)e^{-\omega t}\right)\right]}$$





∗ $\xi = 1$ - Régime critique :

Dans ce cas, $u_{c,g}(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$, d'où :

$$u_c(t) = E + (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

$u_c(0) = E + A = 0 \Rightarrow \underline{A = -E}$

$\frac{du_c}{dt} = Be^{-\omega_0 t} - \omega_0(A + Bt)e^{-\omega_0 t}$; $\frac{du_c}{dt}(0) = B - \omega_0 A = 0$

$\Rightarrow B = -\omega_0 E$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = E\left[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right]}$$

Les courbes obtenues ont la même allure que pour le régime apériodique.

12. Le bilan de puissance s'écrit :

$$Ei = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + Cu_c\frac{du_c}{dt}$$

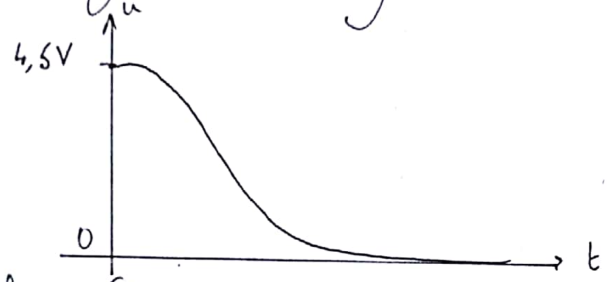
Le premier terme est la puissance fournie par le générateur au reste du circuit, le deuxième est la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance, le troisième est la variation d'énergie dans la bobine et le dernier est la variation d'énergie dans le condensateur

2. Applications directes du cours :

2.1 - Etude de portraits de phase :

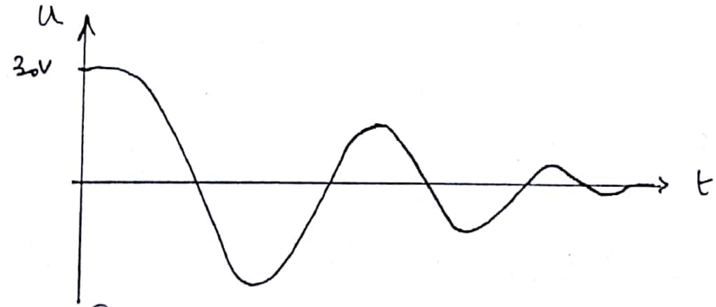
1. Portrait de phase 1 : $u(0) = 4{,}5\,V$, $u(t \to \infty) = 0\,V$ | $\frac{du}{dt}(0) = \frac{du}{dt}(t \to \infty) = 0$

Il s'agit d'un système en régime libre apériodique



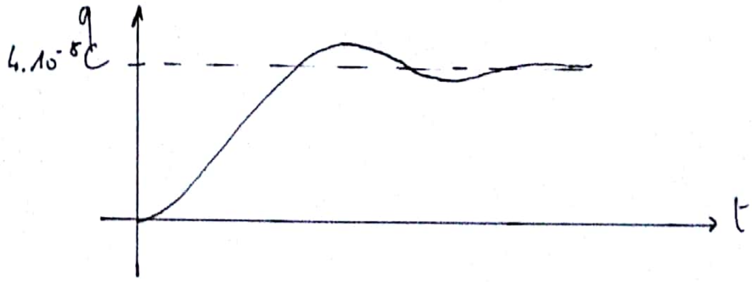
Portrait de phase 2. $u(0) = 30\,V$, $u(\infty) = 0V$ | $\frac{du}{dt}(0) = \frac{du}{dt}(\infty) = 0$

Il s'agit d'un système en régime libre pseudo-périodique. On compte 3 maximums et 3 minimums avant l'amortissement complet



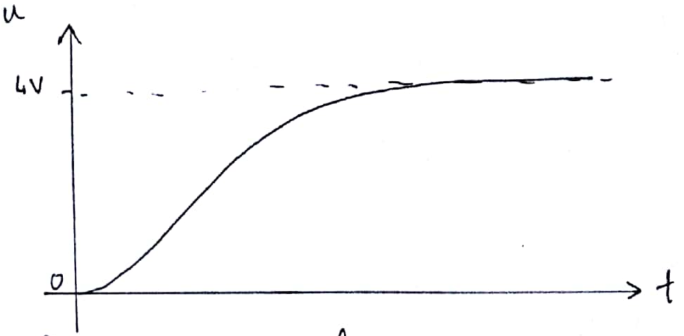
Portrait de phase 3. $q(0) = 0C$, $q(\infty) = 4.10^{-8}C$ | $\frac{dq}{dt}(0) = \frac{dq}{dt}(\infty) = 0$

Il s'agit d'un système soumis à un échelon de tension en régime pseudo périodique.

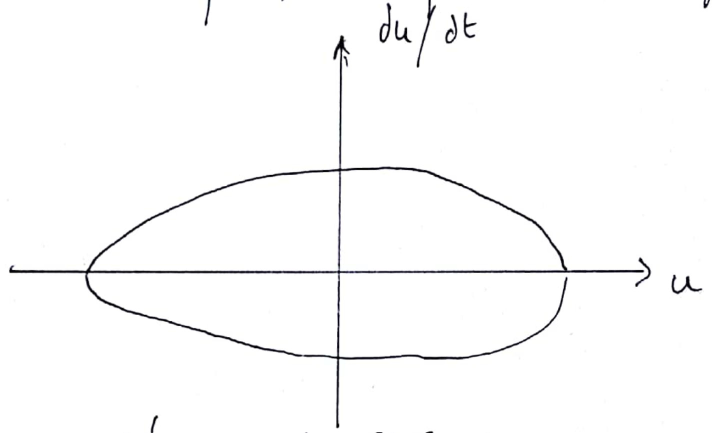


· Portrait de phase (4) : $u(0) = 0\,V$, $u(\infty) = 4\,V$ | $\frac{du}{dt}(0) = \frac{du}{dt}(\infty) = 0$

Il s'agit d'un système soumis à un échelon de tension en régime apériodique.

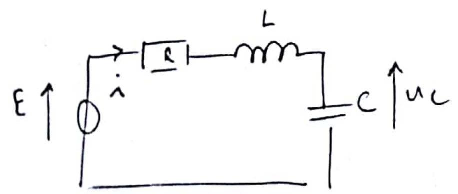


2. Pour un oscillateur harmonique, le portrait de phase est une ellipse.



2.2 - Etude énergétique d'un circuit RLC série :

1. On dessine le circuit considéré :



Le bilan de puissance s'écrit :

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2\right]$$

2. On a $i = C\frac{du_c}{dt}$. Le bilan de puissance se réécrit donc :

$$EC\frac{du_c}{dt} = RC^2\left(\frac{du_c}{dt}\right)^2 + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}LC^2\left(\frac{du_c}{dt}\right)^2\right]$$

$$EC\frac{du_c}{dt} = RC^2\left(\frac{du_c}{dt}\right)^2 + Cu_c\frac{du_c}{dt} + LC^2\frac{du_c}{dt}\frac{d^2u_c}{dt^2}$$

Soit : $E = RC\frac{du_c}{dt} + u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = \frac{E}{LC}}$$

On retrouve bien l'équation différentielle du cours.

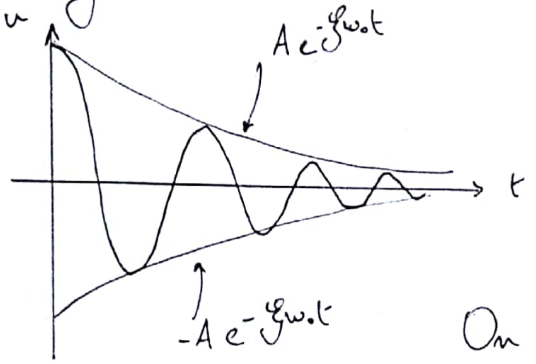
3 - Exercices :

3.1 - Décrément logarithmique :

1. Le facteur de qualité Q est lié au taux d'amortissement ξ par :
$Q = \frac{1}{2\xi}$. Si $Q \gg 1$, alors $\frac{1}{2\xi} \gg 1$ et $\xi \ll \frac{1}{2}$.
Si Q est suffisamment grand ($Q \gg 2$), on aura alors $\xi \ll 1$
Et $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$, si $\xi \ll 1$ alors $1-\xi^2 \simeq 1$ et

$$\omega \simeq \omega_0$$

2. Le signal observé est un cosinus oscillant sous une enveloppe exponentielle



Soit t_{20} le temps au bout duquel l'amplitude vaut $A/20$. On a :

$$A\exp(-\xi\omega_0 t_{20}) = \frac{A}{20}$$

$$\Rightarrow \xi\omega_0 t_{20} = \ln 20 \rightarrow t_{20} = \frac{\ln 20}{\xi\omega_0}$$

On veut le nombre d'oscillations entre $t=0$ et $t=t_{20}$. On divise donc l'expression précédente par la pseudo-période T.

$$N_{20} = \frac{t_{20}}{T} = \frac{\ln 20}{\xi\omega_0 T} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\xi} = 2Q \rightarrow N_{20} = \frac{2}{T}\frac{\ln 20\, Q}{\omega_0}$$

Et $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \frac{2}{T} = \frac{\omega}{\pi}$ $\Rightarrow \boxed{N_{20} = \frac{\omega}{\omega_0}\frac{\ln 20}{\pi}Q}$

Dans le cas $Q \gg 1$, on a $\omega \simeq \omega_0$. De plus, on peut remarquer $\ln 20 \simeq 3 \simeq \pi$ $\longrightarrow \boxed{N_{20} \simeq Q}$ si $Q \gg 1$

Dans le cas d'un régime faiblement amorti, le nombre d'oscillations permet de donner une estimation du facteur de qualité.

3. $E(t) = E_C + E_L = \frac{1}{2}Cu^2(t) + \frac{1}{2}Li^2(t)$.

Pour un extremum t_N, $\frac{du}{dt} = 0$, donc $i(t_N) = C\frac{du}{dt}(t_N) = 0$

$$\Rightarrow E(t_N) = \frac{1}{2}Cu^2(t_N) = \frac{1}{2}CA^2e^{-2\xi\omega_0 t_N}\cos^2(\omega t_N + \phi)$$

De plus, comme $u(t_N)$ est maximal $\rightarrow \cos^2(\omega t_N + \phi) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{E(t_N) = \frac{1}{2}CA^2\exp(-2\xi\omega_0 t_N)}$$

Et, en $T + t_N$ $\Rightarrow E(t_N+T) = \frac{1}{2}CA^2\exp(-2\xi\omega_0(t_N+T))$

A ces deux instants t_N et t_N+T, $i=0$ → l'énergie emmagasinée dans la bobine est nulle.

4. $\Delta E = E(t_N+T) - E(t_N) = \frac{1}{2} C \left[u^2(t_N+T) - u^2(t_N)\right]$

5. On a $u^2(t_N+T) < u^2(t_N)$ d'où $\Delta E < 0$, ΔE correspond à la perte d'énergie par effet Joule dans la résistance. Il est logique de trouver $\Delta E < 0$ car l'énergie stockée dans le circuit diminue.

6. On a : $\frac{\Delta E}{E(t_N)} = \frac{u^2(t_N+T) - u^2(t_N)}{u^2(t_N)} = \left(\frac{u(t_N+T)}{u(t_N)}\right)^2 - 1$

Et, par définition de l'énoncé : $\delta = \ln\left[\frac{u(t_N)}{u(t_N+T)}\right]$

$\Rightarrow \frac{u(t_N+T)}{u(t_N)} = e^{-\delta}$

On a donc bien : $\boxed{\frac{\Delta E}{E(t_N)} = e^{-2\delta} - 1}$

7. On a : $u(t_N) = A e^{-\xi\omega_0 t_N}$ si t_N correspond à un maximum.

$u(t_N+T) = A e^{-\xi\omega_0 (t_N+T)}$

D'où $\frac{u(t_N)}{u(t_N+T)} = \frac{e^{-\xi\omega_0 t_N}}{e^{-\xi\omega_0(t_N+T)}} = e^{\xi\omega_0 T}$ D'où $\delta = \ln\left[\frac{u(t_N)}{u(t_N+T)}\right]$

$\delta = \ln(e^{\xi\omega_0 t})$ → $\boxed{\delta = \xi\omega_0 T}$

8. $\frac{\Delta E}{E(t_N)} = e^{-2\delta} - 1 = e^{-2\xi\omega_0 T} - 1$. Si $Q \gg 1$ alors $\xi \ll 1$

Et on peut supposer : $e^{-2\xi\omega_0 T} \simeq 1 - 2\xi\omega_0 T$

$\Rightarrow \frac{\Delta E}{E(t_N)} \simeq -2\xi\omega_0 T$

Or si $Q \gg 1$ alors $T \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}$ → $\frac{\Delta E}{E(t_N)} \simeq \frac{-2\xi\omega_0}{\omega_0} \cdot 2\pi$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta E}{E(t_N)} \simeq -4\pi\xi \simeq -\frac{2\pi}{Q}}$

On voit que la variation relative d'énergie est proportionnelle au taux d'amortissement.

3. 2 - Circuit RLC parallèle (circuit bouchon) :

1. Il y a continuité de la tension u aux bornes du condensateur. Comme celui-ci est initialement déchargé :

$$u(0^-) = \underline{u(0^+) = 0}$$

Il y a continuité du courant dans la bobine d'où :

$$i_1(0^-) = \underline{i_1(0^+) = 0}$$

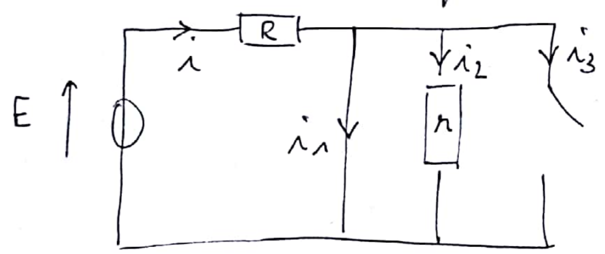
Comme $r\, i_2(0^+) = u(0^+)$, on a $\underline{i_2(0^+) = 0}$

En appliquant la loi des mailles en $t = 0^+$:

$$E = Ri(0^+) + u(0^+) \longrightarrow i(0^+) = \frac{E}{R}$$

Puis $i_3(0^+) = i(0^+) - i_1(0^+) - i_2(0^+) \longrightarrow i_3(0^+) = \dfrac{E}{R}$

2. En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil :



D'où $i_3(\infty) = i_2(\infty) = 0$

$u(\infty) = 0$

$i(\infty) = i_1(\infty) = \dfrac{E}{R}$

3. On applique la loi des mailles : $E = u_R + u = Ri + u$

Et $i = i_1 + i_2 + i_3$.

$$u = L\frac{di_1}{dt}, \quad u = r\, i_2 \text{ et } i_3 = C\frac{du}{dt}.$$

On a : $E = Ri + u \Rightarrow \dfrac{du}{dt} + R\dfrac{di}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + R\frac{di_1}{dt} + R\frac{di_2}{dt} + R\frac{di_3}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{uR}{L} + \frac{R}{r}\frac{du}{dt} + RC\frac{d^2u}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\left(1 + \frac{R}{r}\right)\frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{r+R}{rRC}\frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0}$$

4. Par identification : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{r+R}{rRC} \Rightarrow Q = \frac{rRC\,\omega_0}{r+R} = \frac{rR}{r+R}\sqrt{\frac{C}{L}}$

$$\rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad Q = \frac{rR}{r+R}\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

5. Pour que le régime soit apériodique, on doit avoir $Q < \frac{1}{2}$.
Soit $\frac{rR}{r+L}\sqrt{\frac{C}{L}} < \frac{1}{2}$.
Avec le choix de composants de l'énoncé, on a $Q = 0{,}28 < \frac{1}{2}$.

6. $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$. On écrit le polynôme caractéristique:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad ; \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

D'où deux racines réelles: $r_{+/-} = \frac{-\omega_0}{2Q} +/- \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$

D'où $u(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}$ avec A et B des constantes.

On a $u(0) = 0 \rightarrow \boxed{A + B = 0}$

$\dot{u}(0) = \frac{i_3(0)}{C} = \frac{E}{RC}$

$\dot{u}(t) = Ar_+e^{r_+t} + Br_-e^{r_-t} \rightarrow \dot{u}(0) = Ar_+ + Br_- = A(r_+ - r_-) = \frac{E}{RC}$

$$\rightarrow A = \frac{E}{RC(r_+ - r_-)} \quad \text{et} \quad B = \frac{-E}{RC(r_+ - r_-)}$$

$$\rightarrow \boxed{u(t) = \frac{E}{RC(r_+ - r_-)}\left[e^{r_+t} - e^{r_-t}\right]}$$

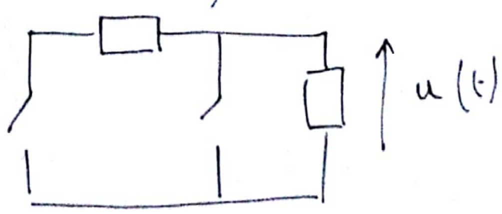
7. On a : $i_2(t) = \frac{u(t)}{r}$ et $i_3(t) = C\frac{du(t)}{dt}$

$u = L\frac{di_1}{dt} \rightarrow i_1 = \int_0^t \frac{u(t')}{L}dt'$

Et $i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$

3.3 - Etude d'un pont de Wien en régime transitoire.

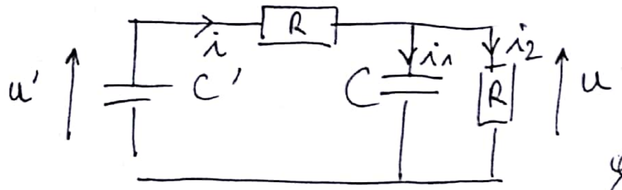
1. Lorsque le régime permanent est atteint, les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts.



Aucun courant ne peut circuler dans le circuit, d'où $\underline{u(t\to\infty)=0}$

Le condensateur C étant initialement déchargé, on a, de plus : $\underline{u_c(0^+)=0}$

2.



Loi des mailles : $u' = u + Ri$

Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$

Et $i = -C'\dfrac{du'}{dt}$ (⚠ convention générateur)

$$i_1 = C\frac{du}{dt} \quad ; \quad i_2 = \frac{u}{R}$$

$$\rightarrow \frac{du'}{dt} = \frac{du}{dt} + R\frac{di}{dt} \iff -\frac{i}{C'} = \frac{du}{dt} + R\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{i}{C} + R\frac{di}{dt} = 0 \iff \frac{du}{dt} + \frac{1}{C}\left[i_1 + i_2\right] + R\frac{d}{dt}\left[i_1 + i_2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} + RC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow RC\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{u}{(RC)^2} = 0$$

Soit, en posant $\tau = RC$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau^2} = 0 \quad , \quad \tau = RC}$$

3. On écrit le polynôme caractéristique :

$$r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0 \quad , \quad \Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2} > 0$$

$\Rightarrow$ Le régime est apériodique. Le polynôme admet deux racines réelles :

$$r_{+/-} = \frac{-3}{2\tau} \pm \frac{1}{2\tau}\sqrt{5} \longrightarrow r_{+/-} = \frac{1}{2\tau}\left[-3 \pm \sqrt{5}\right]$$

$$\longrightarrow \boxed{u(t) = e^{-3t/2\tau}\left[C_1 e^{\sqrt{5}t/2\tau} + C_2 e^{-\sqrt{5}t/2\tau}\right]}$$

Pour trouver les constantes, on utilise les conditions initiales :

$u(0) = 0$ (le condensateur est initialement déchargé)

$$\longrightarrow u(0) = C_1 + C_2 = 0 \longrightarrow \underline{C_1 = -C_2}$$

Et $i(0) = i_1(0) = \frac{U}{R} = C\frac{du}{dt}(0) \longrightarrow \frac{du}{dt}(0) = \frac{U}{RC}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{-3}{2\tau} e^{-3t/2\tau}\left[C_1 e^{\sqrt{5}t/2\tau} + C_2 e^{-\sqrt{5}t/2\tau}\right] + e^{-3t/2\tau}\left[C_1 \frac{\sqrt{5}}{2\tau} e^{\sqrt{5}t/2\tau} - C_2 \frac{\sqrt{5}}{2\tau} e^{-\sqrt{5}t/2\tau}\right]$$

$$\frac{du}{dt}(0) = \frac{-3}{2\tau}\left[C_1 + C_2\right] + \frac{C_1\sqrt{5}}{2\tau} - \frac{C_2\sqrt{5}}{2\tau} = \frac{U}{RC}$$

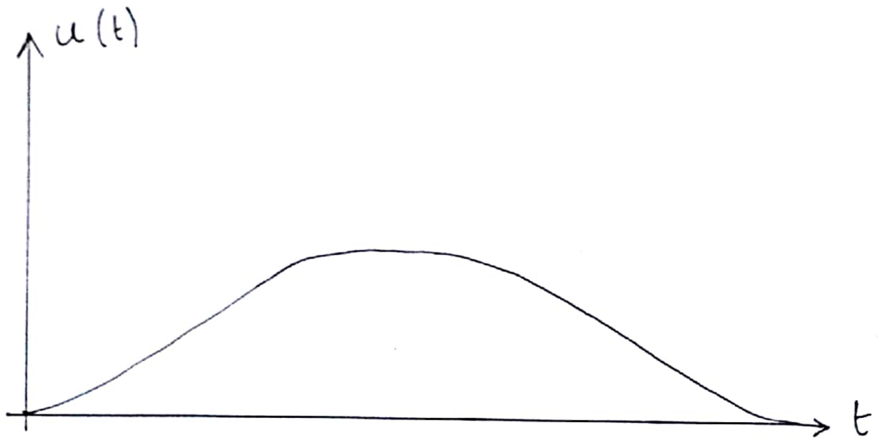
Et $C_1 = -C_2 \longrightarrow \frac{C_1\sqrt{5}}{\tau} = \frac{U}{RC} \longrightarrow C_1 = \frac{U}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{U}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{-U}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{U}{\sqrt{5}} e^{-3t/2\tau}\left[e^{\sqrt{5}t/2\tau} - e^{\sqrt{5}t/2\tau}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{2U}{\sqrt{5}} e^{-3t/2\tau} \sinh\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{2\tau}\right)}$$

4.



On voit que u(t) passe par un maximum.