学风朋辈引领行动中心

期中复习资料-大物

编写：
王晓宇、董杰、李语婷、王苏佳
臧济北、严啸、刘子萌、杨威威
谢婷婷、陈朋
汇总：李语婷、王苏佳

学风朋辈的全称为：北京化工大学学风朋辈引领行动中心，英文名称为：Student Peer Center of Beijing University of Chemical Technology（简称“SPC”）。

学风朋辈隶属于北京化工大学学生工作办公室，接受指导教师管理。对所辖二级学生组织进行管理，对院级学业辅导组织进行指导。学风朋辈的二级学生组织包括化学工程学院学业指导中心、信息科学与技术学院学业指导中心、生命学院学业指导中心、理学院学业指导中心、英国皇家化学会北京化工大学分会等，共同为全体学生服务。

学风朋辈的主要工作是按照学校学风建设的总体要求，开展包括朋辈学业辅导、学业咨询、资源共享、难点解答、学风营造等与学生学业发展相关的工作。

学风朋辈的宗旨是服务我校学生学业发展，致力于营造积极向上、你争我赶、公平竞争的校园学习文化氛围，定时更新学习资源和有效信息，秉承我校校训“宏德博学，化育天工”，用热情及责任进一步推动我校学风建设工作。

按照学习学风建设的总体目标，学风朋辈在发展过程中不断寻求自身的改革创新，根据自身发展需求，现下设朋辈辅导部、发展咨询部、推广宣传部、秘书处、人事部、事务拓展部共六大职能部门。

学风朋辈自成立已开展了多项精品活动：“朋辈学业辅导”、“学业咨询工作坊”、“学习资料发放”、“学霸答疑”、“学霸经验分享会”。同时，本着强化我校学生专业知识技能，提高学生学习主动性和积极性的服务宗旨，学风朋辈已承办了多次学业发展辅导中心“团体工作坊”活动、“学业·职业规划大赛”等特色活动。学风朋辈正以更加积极的姿态协助我校不断完善教学过程中教与学的环节。

为了及时有效地为我校学子进行学业辅导，分享学习资源。学风朋辈创建了学委网，并拥有自己的微信公众平台（friendsbuct），定时更新学习资源和有效信息，方便广大学生的学习和生活。

一、质点运动学

1、质点运动的描述

【必备知识点】

（1）位矢

从坐标原点指向质点所在位置的有向线段，称为位置矢量，简称位矢（径矢）。

位置矢量可表为：$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

（2）质点的运动方程

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

（3）位移：$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$

(4) 速度: $\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{\vec{v}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

(5) 加速度: $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$

【常见题型与详解】

在离水面高度为 h 的岸上，有人用绳子拉船靠岸，收绳速率为v_0. 求：当船距离岸边时，船靠岸的速率.

答案：

$$\because s=\sqrt{l^2-h^2}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0$$

注意：第一节主要是基础概念的介绍，同学们要区分好概念间的联系

2、圆周运动

【必备知识点】

（1） 圆周运动中的加速度

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta\vec{v})_{\mathrm{n}}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta\vec{v})_{\tau}}{\Delta t}=\vec{a}_{\mathrm{n}}+\vec{a}_{\tau}$$

法向加速度：$\vec{a}_{\mathrm{n}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{(\Delta\vec{v})_{\mathrm{n}}}{\Delta t}$

切向加速度：$\vec{a}_{\tau}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{(\Delta\vec{v})_{\tau}}{\Delta t}$

（2） 法向加速度只反映速度方向的变化。

切向加速度只反映速度大小的变化。

（3） 圆周运动的角量描述

（2）法向加速度只反映速度方向的变化。

切向加速度只反映速度大小的变化。

（3）圆周运动的角量描述

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

（4）角量与线量的关系

$$v = r\omega \qquad a_\tau = r\alpha \qquad a_n = r\omega^2$$

【常见题型与详解】

一飞轮边缘上一点所经过的路程与时间的关系 $s = v_0 t - bt^2/2$，v_0 b 都是正的常量。求该点在时刻 t 的加速度。已知飞轮的半径为 R。

答案：由题意，可得该点的速率为 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_0 t - \frac{1}{2}bt^2\right) = v_0 - bt$

为求该点的加速度，应从求切向加速度和法向加速度入手，即

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0 - bt) = -b,\ a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

3、相对运动

【必备知识点】

（1）在低速运动时（在牛顿力学范围内），两个作相对直线运动的参考系中，时间的测量是绝对的，空间（长度）的测量也是绝对的，与参考系无关。

（2）在牛顿力学范围内，运动质点的位移、速度和运动轨迹与参考系的选取有关。

（3）设有两个参考系，一个为 S 系（Oxy 坐标系），另一个为 S' 系（$O'x'y'$ 坐标系）。取两个参考系重合的时间记为 $t=0$。一个质点在 S 系中位置以 P 表示，在 S' 系中的位置以 P' 表示。$t=0$ 时，P 与 P' 点位置重合。

Δt 时间内，S' 系沿 x 轴正方向以速度 u 相对 S 系运动的同时，质点运动到 Q 点。

则 S' 系沿 x 轴相对 S 系的位移 $\Delta D = u\Delta t$。同时，在 S 系中，质点从 P 运动到点 Q，位移为 Δr；在 S' 系中，质点从 P' 运动到点 Q，位移为 $\Delta r'$。

需要掌握的公式：

① $\Delta r = \Delta r' + \Delta D = \Delta r' + u\Delta t$（此式表明，若 S' 系相对于 S 系处于静止状态，即 $u=0$，那质点在两参考系的位移应相等，即 $\Delta r = \Delta r'$）

② $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r'}{\Delta t} + u$（将①式两边同时除以 Δt，即可由位移的相对性推出速度的相对性）

③ $\Delta t \to 0$，$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} + u$，即 $v = v' + u$

（4）质点相对基本参考系（S 系）的绝对速度 v，等于运动参考系（S' 系）相对于基本参考系的牵连速度 u 与质点相对运动参考系的相对速度 v' 之和。这个速度变换式叫伽利略

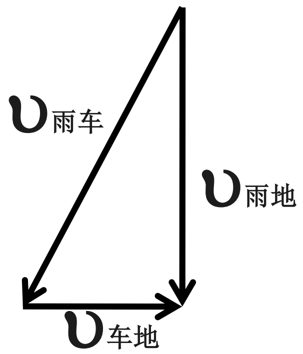
速度变换式。当质点的速度接近光速时，伽利略速度变换式就不适用了，此时的速度变换应当遵循洛伦兹速度变换式。

【例题】

（1）当一列火车以 10m/s 的速率向东行驶时，若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的雨迹偏离竖直方向 30°，则雨滴相对于地面的速率是（），相对于列车的速率是（）.

解析：

根据题意画速度矢量图，如右图所示。



$$\therefore \frac{v_{车对地}}{v_{雨对地}} = \tan 30^{\circ}$$

$$\therefore v_{雨对地} = \frac{v_{车对地}}{\tan 30^{\circ}}$$

$$\because v_{雨对车} \sin 30^{\circ} = v_{车对地}$$

$$\therefore v_{雨对车} = \frac{v_{车对地}}{\sin 30^{\circ}} = 20m/s$$

（2）一只质量为 m 的猴，原来抓住一根用绳吊在天花板上的质量为 M 的直杆，悬线突然断开，小猴则沿杆竖直向上爬以保持它离地面的高度不变，此时直杆下落的加速度为多少？

解析：

因为小猴保持离地面高度不变，所以小猴此时处于平衡状态，

$$\therefore mg = f$$

则直杆受到的力：$Mg - f = Ma$

$$Mg - mg = Ma$$

$$\therefore a = \frac{Mg - mg}{M}$$

二、牛顿定律

1、 牛顿定律

【必备知识点】

（1） 牛顿第一定律

任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，除非作用在它上面的力迫使它改变这种状态。

（2） 牛顿第二定律

物体的动量对时间的变化率与所加的外力成正比，并且发生在这外力的方向上。

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \quad 即 \quad \vec{F}=m\vec{a}$$

（3） 牛顿第三定律

两个物体对各自对方的作用总是大小相等，方向相反。

3、几种常见力

【必备知识点】

（1）万有引力：星体之间，地球与地球表面附近的物体之间，以及所有物体与物体之间都存在着一种相互吸引的力，所有这些力都遵循同一规律，这种相互吸引的力叫做万有引力。

万有引力定律：在两个相距为r，质量分别为m_1、m_2的质点间有万有引力，其方向沿着它们的连线，其大小与它们的质量乘积成正比，与它们之间距离的二次方成反比，即$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$，（G为一普适常量，叫做引力常量，$G=6.67\times10^{-11}N\,m^2\,kg^{-2}$）

用矢量形式表示，万有引力定律可写成$F=-G\frac{m_1m_2}{r^2}e_r$

（2）重力：地球对地面附近物体的万有引力叫重力。方向指向地心，在重力作用下，物体具有的加速度叫做重力加速度g，即$g=\frac{G}{m}$（$g=9.80m\,s^{-2}$，月球上的重力加速度$g_{月}\approx\frac{1}{6}g_{地}=1.62m\,s^{-2}$）

（3）弹性力：弹性力是由物体形变产生的。（压力，弹簧弹性力，绳张力等）$F=-kx$

（4）摩擦力：阻碍物体相对运动或相对运动趋势的力。

最大静摩擦力：（物体即将滑动）与物体的正压力F_N成正比，即$F_{fom}=\mu_0F_N$（μ_0是静摩擦因数，与两接触物体的材料性质以及接触面的情况有关，与接触面大小无关）。静摩擦力一般情况下满足$F_{f0}\le F_{f0m}$。

滑动摩擦力：$F_f=\mu F_N$，与物体相对平面的运动方向相反，与正压力F_N成正比。（μ叫滑动摩擦因数，与两接触物体的材料性质、接触表面的情况、温度、干湿度等有关，还与两接触物体的相对速度有关。）

在相对速度不太大时，通常认为滑动摩擦因数μ略小于静摩擦因数μ_0，一般计算时，

$\mu \approx \mu_0$

三、动量守恒定律和能量守恒定律

1、质点和质点系的动量定理

【必备知识点】

（1）冲量：力对时间的积分称为冲量，是矢量，也是过程量，方向与Δp相同，一般用符号I表示。

①当F为恒矢量，$I = F\Delta t$

②当F为变力，采用微元法，$I = F_1\Delta t_1 + F_2\Delta t_2 + \ldots + F_n\Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} F_i\Delta t_i$

③若F是连续变化的，用积分代替求和，$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1$

直角坐标系中，还可用分量式表示：$I = I_x i + I_y j + I_z k$ $\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$

（2）$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1$ 的物理意义引出质点的动量定理：在给定时间间隔内，外力作用在支点上的冲量，等于致电在此时间内动量的增量。（一般来说，冲量的方向不与动量的方向相同，与动量增量的方向相同）

（3）质点系：由相互作用的若干个质点所组成的系统。

内力：系统内各质点之间的相互作用力。

外力：系统以外其它物体对系统内任意质点的作用力。

（4）质点系动量定理：作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。（注意：内力不改变质点系的动量；动量定理常用于碰撞问题求力，$F = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} Fdt}{t_2 - t_1} = \dfrac{mv_2 - mv_1}{t_2 - t_1}$）

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F^{ex} dt = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i - \sum_{i=1}^{n} m_i v_{i0} = p - p_0$$

（5）求解变质量物体的运动过程：①确定研究系统②写出系统动量的表达式③求出系统动量变化率④分析受力⑤应用动量定理求解。

【例题】一长为l，密度均匀的柔软链条，其单位长度的质量为λ，将其卷成一堆放在地面上。若用手握住链条的一端，以加速度a从静止加速上升。当链条端点离地面的高度为x时，求手提力的大小。

解析：① 系统：包含两部分，地面上的链条和空中的链条

② t 时刻，系统的总动量：$P = \lambda xv$

③动量的变化率：$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt}=\dfrac{d(\lambda xv)}{dt}=\lambda x\dfrac{dv}{dt}+\lambda v\dfrac{dx}{dt}=\lambda xa+\lambda v^2 \\ \text{链条做匀加速运动：} v^2=v_0{}^2+2ax \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dP}{dt}=3\lambda ax$

④分析受力：

空中链条：$F-\lambda xg$

地面链条：$N-\lambda(l-x)g$

$\Rightarrow F^{'}=F-\lambda xg=\dfrac{dP}{dt}=3\lambda ax$

$\Rightarrow F=3\lambda ax+\lambda xg$

2、动量守恒定律

【必备知识点】

（1） 动量守恒定律的表述：当系统所受合外力为零时，系统的总动量将保持不变。
矢量式：

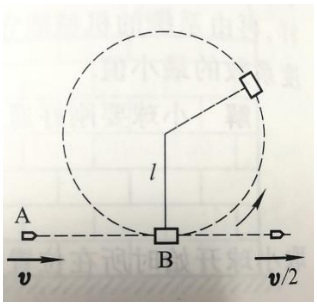
$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{m}_i\boldsymbol{v}_i$$

(2)系统的总动量不变是指系统内各物体动量的矢量和不变，各物体的动量还必须都相对于同一惯性参考系。

（3）如果系统所受外力的矢量和并不为零，但合外力在某个坐标轴上的分矢量为零，此时，系统的总动量虽不守恒，但在该坐标轴的分动量却是守恒的。

【常见题型与详解】

质量为 m 的子弹 A，穿过如图所示的摆锤 B 后，速率由 v 减少到 v/2，已知摆锤的质量为 m'，摆线长度为 l，如果摆锤能在竖直平面内完成一个完全的圆周运动，子弹速度的最小值应为多少？



【分析】

该题可分为两个过程。首先是子弹穿越摆锤的过程。就子弹与摆锤所组成的系统而言，由于穿越过程的时间很短，重力和摆线的张力在水平方向的冲量远小于冲击力的冲量，因此，可认为系统在水平方向不受外力的冲量作用，系统在该方向上满足动量守恒。第二个过程为摆锤做圆周运动，此过程中摆锤与地球组成的系统满足机械能守恒定律。此题用水平方向上的动量守恒，机械能守恒定律即可。

解：由水平方向的动量守恒定律

$$mv = m\frac{v}{2} + m'v'$$

为使摆锤恰好能在竖直平面内作圆周运动，在最高点时，摆线中的张力应为零，则

$$m'g = \frac{m'v_h^2}{l}$$

由机械能守恒定律$\frac{1}{2}m'v'^2 = 2m'gl + \frac{1}{2}m'v_h^2$

解得$v = \frac{2m'}{m}\sqrt{5gl}$

4、动能定理

【必备知识点】

1、功：力对质点所做的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积。

2、恒力做功：一恒力$\vec{F}$作用在物体上，发生一段位移$\vec{r}$，$\vec{F}$和$\vec{r}$的夹角为ϕ，则力对物体所作的功为：$W = Fr\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{r}$。即恒力的功等于力和位移的点积。

3、变力的功：质点在由 A 到 B 的路径上受到变力$\vec{F}$的作用。将整个路径分为无数个位移元，则力$\vec{F}$在任意位移元$d\vec{r}$上做的元功为：$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$故变力做的功即为两边的积分

$$W = \int dA = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\,|d\vec{r}|$$

4、合力的功：对质点来说合力的功等于各力做功之和；对质点系来说，合力做功不一定等于各力做功之和。

5、一对力做功之和：一对力做功之和等于其中一个质点受的力沿着该质点相对于另一质点移动的路径所做的功。

注意：（1）功是力作用于物体的空间积累效应，是过程量。

（2）功是标量，只有大小没有方向，但有正负。

6、功率：单位时间内完成的功，用 P 表示，是反映做功快慢的物理量。

$$\boldsymbol{P} = \frac{d\boldsymbol{W}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}}{d\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}$$

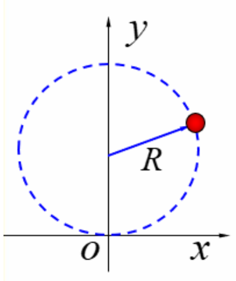
7、功计算的一般方法：

(1)分析质点受力情况，确定力随位置变化的关系；

(2)写出元功的表达式，选定积分变量；

(3)确定积分限进行积分，求出总功。

【例题】. 一质点在如图所示的坐标平面内作圆运动，力$\vec{F} = F_0(x\vec{i} + y\vec{j})$ 作用在质点上，求质点从原点运动到（0，2R）位置过程中，力所作的功.



解：$\vec{F} = F_0(x\vec{i} + y\vec{j})$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$W_x = \int_0^0 F_x\,dx = \int_0^0 F_0\,x dx = 0$$

$$W_y = \int_0^{2R} F_0\,y dy = 2F_0R^2$$

$$W = W_x + W_y = 2F_0R^2$$

8、动能定义：$E_k=\frac{1}{2}mv^2$

9、质点质量为m, 在合外力$\vec{F}$作用下，由 A→B 合外力在位移元上的元功为

$$dW=\bar{F}\cdot d\bar{r}=F\cos\theta\left|d\bar{r}\right|=m\frac{d\upsilon}{dt}ds$$

10、质点的动能定理：合外力对质点所做的功，等于质点动能的增量。

$$\mathrm{W}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=E_{k2}-E_{k2}$$

注意：(1）功是能量变化的量度，是过程量；动能是状态量；动能定理将某一过程的始，末状态与这过程的功联系起来了。

(2）质点所受合力做功是动能变化的手段。合力做正功动能增加，做负功，动能减小。

(3）动能定理只适用于惯性系，但对不同的惯性系动能定理的形式相同。功和能的计算必须统一到统一惯性系。

5、质点和质点系的动量定理

【必备知识点】

1、万有引力、重力、弹性力的功及其特点

万有引力只与物体始末二位置有关，而与物体所经路程无关。

重力功只与物体始末二位置有关，而与其运动路径无关。

弹性力功仅与物体始末位置有关而与过程无关。

2、保守力和非保守力

如果力对物体做的功只与物体始末二位置有关而与物体所经路径无关，则该力称为保守力，否则称为非保守力。保守力的数学表达为：$\oint_l \bar{F}\cdot \mathrm{d}\bar{l}=0$

3、势能

对任何保守力，则它的功都可以用相应的势能增量的负值来表示

$$W=-(E_{P1}-E_{p2})-\Delta \mathrm{E_p}$$

万有引力势能：$E_p=-G\dfrac{mM}{r}$(势能零点取在无限远处）

重力势能：$E_p=mgh$(势能零点取在某一水平 面上）

弹性势能：$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$(势能零点取在弹簧原长处）

4、说明：

(1）保守力场中才能引进势能的概念

(2）势能是属于系统的

(3）势能是相对的

6、功能原理 机械能守恒定律

【必备知识点】

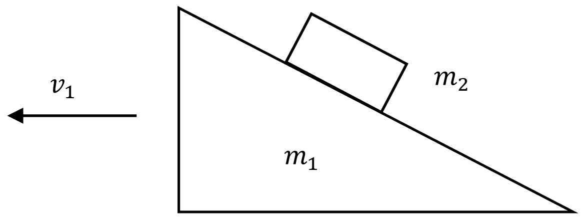
1、质点系的动能定理：质点系的动能的增量等于作用于质点系的一切外力做的功与一切内力做的功之和

2、质点系的功能原理：质点系的机械能的增量等于外力与非保守内力做功之和

3、机械能守恒定律：当作用于质点系的外力和非保守力均不做功，此时质点系的动能和势能可以相互转化，但质点系的总机械能总是守恒的

【常见题型与详解】

1、一个表面光滑的楔形物体，斜面长 l 倾角为θ 质量为m_1，静止于一光滑水平桌面上，将一质量为m_2的物体放在斜面的顶端，自由下滑，计算当物体滑到桌面是楔形物体移动的速率



解：楔形物体m_1和物体m_2组成的系统在水平方向上不受外力，故水平方向上动量守恒，则

$$m_1v_1 = m_2v_{2x}$$

$$v_{2x} = ucos\theta - v_1$$

以楔形物体物体m_1和物体m_2和地球为研究系统，系统的机械能守恒则，

$$m_2glsin\theta = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2$$

联立三式解得楔形物体m_1向左移动的速率为

$$v_1 = \sqrt{\frac{2{m_2}^2glsin\theta cos^2\theta}{(m_1+m_2)(m_1+m_2sin^2\theta)}}$$

7、完全弹性碰撞 完全非弹性碰撞

【必备知识点】

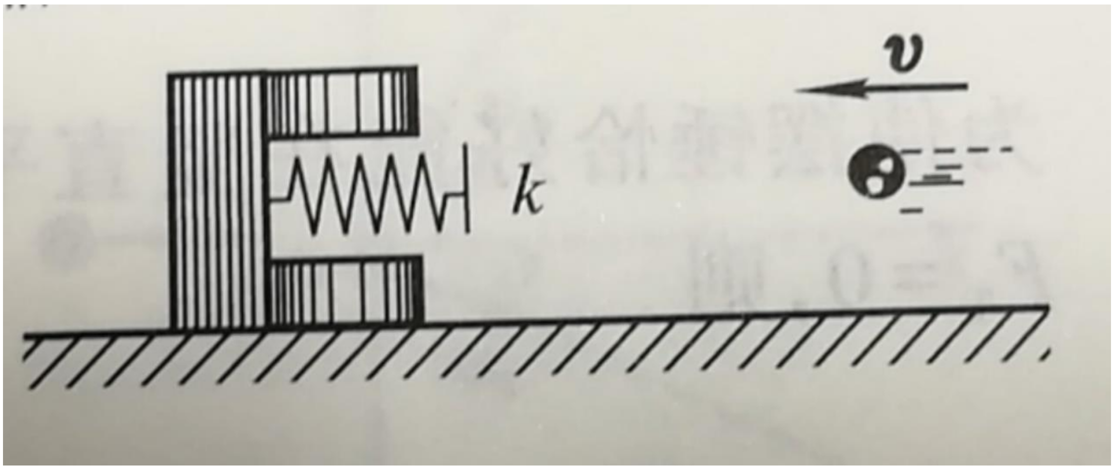
（1）、完全弹性碰撞：在碰撞后，两物体的动能之和完全没有损失

非弹性碰撞：在两物体碰撞时，由于保守力作用，致使机械能转化为热能、声能、化学能等其他形式的能量，或者其他形式的能量转化为机械能，这种碰撞叫做非弹性碰撞。

完全非弹性碰撞：两物体在非弹性碰撞后以同一速度运动

【常见题型与详解】

如图所示，质量为 m、速度为 v 的钢球，射向质量为m'的靶，靶中心有一小孔，内有劲度系数为 k 的弹簧，此靶最初处于静止状态，但可在水平面上作无摩擦滑动，求子弹射入靶内弹簧后，弹簧的最大压缩距离。



【分析】

这也是一中碰撞问题。碰撞的全过程是指小球刚与弹簧接触直至弹簧被压缩到最大，小球与靶刚好到达共同速度为止，在这过程中，小球与靶组成的系统在水平方向不受外力的作用，外力的冲量为零，因此，在此方向上动量守恒。考虑到系统无非保守内力做功，故系统的机械能守恒

解：设弹簧的最大压缩量为x_0,小球与靶的共同运动的速度为v_1，由动量守恒

$$\mathrm{mv} = (\mathrm{m} + m')v_1$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m + m')v_1'^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

解得$x_0 = \sqrt{\frac{mm'}{k(m+m')}}v$

8、能量守恒定理

【必备知识点】

（1）、内容：对于一个与自然界无任何联系的系统来说，系统内各种形式的能量是可以相互转换的，但是不论任何转换，能量既不能产生，也不能消灭，能量的总和是不变的。这就是能量守恒定律。

（2）、意义：a、自然界一切已经实现的过程都遵守能量守恒定律。

b、凡是违反能量守恒定律的过程都是不可能实现的，例如“永动机”只能以失败而告终。

9、质心 质心运动定律

【必备知识点】

（1）、质心位置的确定：有 n 个质点组成的质点系，其质心位置由下式确定：

$$\mathrm{r}_c = \frac{m_1r_1 + m_2r_2 + \cdots + m_ir_i + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ir_i}{m'}$$

其中m'为质点系内各质点的质量总和；r_i为第 i 个质点对原点 o 的位矢，r_c为质心对原点 o 的位矢，它在 ox 轴、oy 轴和 oz 轴上的分量即质心在 ox 轴、oy 轴和 oz 轴上的坐标，分别为

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{m'}, y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{m'}, z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iz_i}{m'} \qquad ①$$

(2)、对于质量连续分布的物体，可把物体分成许多质量元 dm，①中的求和$\sum m_ix_i$，可用积分$\int xdm$来代替。于是，质心的坐标为

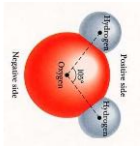
$$x_c = \frac{1}{m'}\int xdm, y_c = \frac{1}{m'}\int ydm, z_c = \frac{1}{m'}\int zdm$$

(3)、对于密度均匀、形状对称分布的物体，其质心都在他的几何中心处，例如圆环的质心在圆环中心，球的质心在球心等。

【常见题型与详解】

这一部分知识点的题型较为单一，就是通过建立坐标系以及合理套用知识点中的公式来确定质心的位置。

1. 水分子由两个氢原子和一个氧原子构成，他们的结构如图所示，每个氢原子与氧原子之间的距离均为$d=1.0\times10^{-10}m$, 氢原子与氧原子两条连线之间的夹角为θ $=104.6°$ 。求水分子的质心。



解：选择氧原子中心为原点 o，水平向左为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向建立坐标系，因为两个氢原子关于 x 轴对称，所以质心在 y 轴上的坐标为 0，之后带入公式①来求质心在 x 轴上的坐标

$$x_c=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}=\frac{m_H d\sin 37.7^\circ+m_0\times0+m_H d\sin 37.7^\circ}{m_H+m_o+m_H}$$

代入$m_H=1.0u, m_o=16u$(u为原子计量单位)得，

$$x_c=6.8\times10^{-12}m$$

即质心位于坐标系中$y=0, x=6.8\times10^{-12}m$处

【必备知识点】

质心运动定律的推导：

$$\mathrm{r}_c=\frac{m_1r_1+m_2r_2+\cdots+m_ir_i+\cdots}{m_1+m_2+\cdots+m_i+\cdots}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ir_i}{m'}$$

上式可写成 $$m'\boldsymbol{r}_c=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i,$$

又因为质点系内各质点的质量总和m'是一定的，因此，上式对时间的一阶导数为

$$m'\frac{dr_c}{dt}=\sum_{i=1}^{n}m_i\frac{dr_i}{dt}$$

式中$\frac{dr_c}{dt}$是质心的速度，用v_c表示，$\frac{dr_i}{dt}$是第 i 个质点的 1 速度，用v_i表示，故上式为

$$m'v_c=\sum_{i=1}^{n}m_i v_i=\sum_{i=1}^{n}p_i ②$$

上式表明，系统内各质点的动量的矢量和等于系统质心的速度乘以系统的质量。

（2）在质点系的动量定理中可知，系统内各质点间相互作用的内力的矢量和为零，即$\sum_{i=1}^{n}F_i^{in}=0$. 因此，作用在系统上的合力就等于合外力，即$F^{ex}=\sum_{i=1}^{n}F_i^{ex}$, 于是由②可得

$$F^{ex}=m'\frac{dv_c}{dt}=m'a_c$$

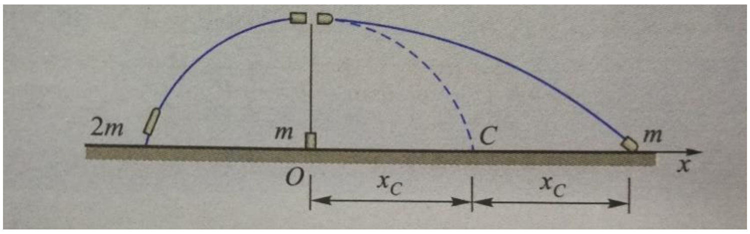
上式表明，作用在合力系统上的合外力等于系统的总质量乘以系统质心的加速度，上式即为质心运动定律的数学表达式。

【常见题型与详解】

质心运动定律为我们解决运动学问题又提供了一个新的方法，在有些题目中运用质心运动定律来思考能变的非常容易。

例、设有质量为 2m 的弹丸，从地面斜抛出去，它在最高点处爆炸成质量相等的两个碎片，其中一个碎片竖直自由下落，另一个碎片水平抛出，它们同时落地，试问第二个碎片落地点

何处？



解　因为弹丸为一系统，空气阻力忽略不计，爆炸前和爆炸后弹丸质心的运动轨迹都在同一抛物线上（爆炸以后两碎片质心的运动轨迹仍沿爆炸前弹丸的抛物线运动轨迹）。取第一碎片的落地点为坐标原点 o，水平向右为 x 轴正方向。设m_1和m_2为第一和第二碎片的质量，且$m_1 = m_2 = m$；x_1、x_2为两碎片同时落地时距原点 o 的距离，x_c为两碎片同时落地时它们的质心离原点 o 的距离，由图：$x_1 = 0$, 由公式①可得

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

由于$m_1 = m_2 = m$, 由上式可得

$$x_2 = 2x_c$$

即第二个碎片与第一个碎片落地点的水平距离为碎片的质心与第一个碎片的落地点水平距离的两倍。

通过定理和例题不难得出以下推论，方便大家以后做题时直接运用

① 质点系的内力不能影响它的质心的运动；例如跳水运动员自跳板起跳后，不论他在空中再做何种动作，采取何种姿势，由于外力(重力)并未改变，所以运动员的质心在入水前仍沿抛物线轨迹运动；

② 如果作用于质点系上外力的矢量和始终为零，则质点系的质心作匀速直线运动或保持静止；

③ 若作用于质点系上外力的矢量和在某轴上的投影始终为零，则质点系质心在该轴上的坐标匀速变化或保持不变。

四、刚体转动和流体运动

1、刚体的定轴转动

【必备知识点】

（1）、刚体

刚体的定义：物体内任意二点距离不变的物体称为刚体。

说明：

（1）刚体是理想模型

（2）刚体模型是为简化问题引进的。

（2）刚体运动

刚体运动：（1）平动：刚体内任一直线方位不变。

特点：各点运动状态一样，如：$\vec{a}$、$\vec{v}$等都相同，故可用一个点来代表刚体运动。

（2）转动：1）绕点转动

2）绕轴转动：刚体中所有点都绕一直线作圆周运动

说明：刚体的任何运动都可看作平动与转动的合成。

（3）、刚体的定轴转动

定义：转轴固定时称为定轴转动。

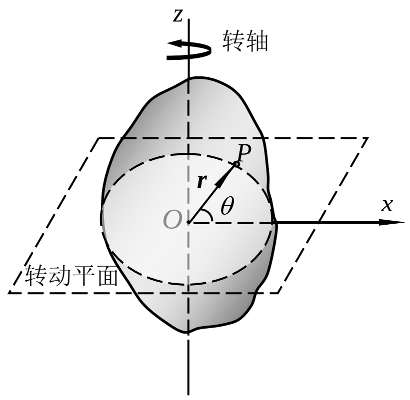


图 1-1 刚体绕定轴转动

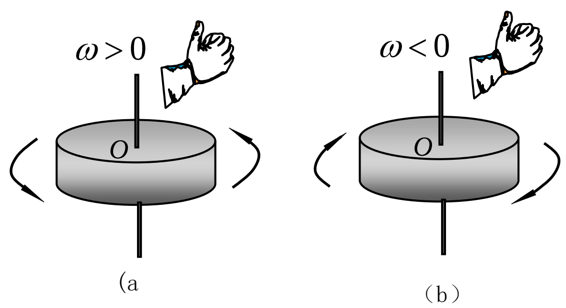


图 1-2 角速度的正负

如图 1-1 所示，有一刚体绕固定轴Oz轴转动，刚体上不同位置的质元都绕固定轴Oz轴作圆周运动。为描述刚体绕定轴的转动，我们在刚体内选取一个垂直于Oz轴的平面作为参考平面，叫做**转动平面**。在此平面上取一参考线，且把这参考线作为坐标轴Ox，把转轴与平面的交点作为原点O。虽然刚体内各质元所在位置不同，各点的轨迹是在各自的转动平面上的半径大小不一的圆周，其线速度和线加速度都是不一样的。但由于刚体内各点的相对位置不变，所以各点对应的半径在相同的时间内扫过的角度是相同的。这样，可用刚体的方位来表示刚体绕定轴转动的规律。由原点O到参考平面上的任一点P的径矢$\boldsymbol{r}$与Ox轴的夹角θ确定，角θ也叫角坐标。当刚体绕固定轴Oz轴转动时，角坐标θ要随时间t改变。也就是说，角坐标θ是时间t的函数，即$\theta=\theta(t)$。因此，有关

质点圆周运动的所有角量描述，如角位移$\Delta\theta$、角速度ω和角加速度α等概念以及有关公式，在刚体的定轴转动中全部适用。至于刚体内各质元的位移、速度和加速度，则因各点到转轴的距离不同而各不相同，可用**角量**与质元的位移、速度和加速度等所谓**线量**的关系求得。

在图 1-1 中，t时刻刚体上的点P对x轴的径矢$\boldsymbol{r}$的角坐标为θ。若刚体在$\mathrm{d}t$的时间内转过$\mathrm{d}\theta$的角位移，则刚体的角速度

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

受固定转轴的约束，刚体的转动只有两种可能的方向。因此，角速度可以用标量定义，用右手螺旋定则确定的正负号表示其方向：将右手拇指伸直，其余四指弯曲，若弯曲方向与刚体转动方向一致，角速度为正，否则为负，如图 1-2 所示。

角速度的单位为s^{-1}或$\mathrm{rad}\cdot s^{-1}$。

刚体绕定轴转动时，如果其角速度发生了变化，刚体就具有了角加速度，刚体的角加速度为

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

角加速度的单位是s^{-2}或$\mathrm{rad}\cdot s^{-2}$。。

离转轴的距离为r的质元的线速度和加速度与刚体的角速度和角加速度的关系为

$$v=r\omega$$

$$\begin{cases}a_\tau=r\alpha\\a_n=r\omega^2\end{cases}$$

定轴转动的一种简单情况就是匀加速转动。在这一转动过程中，刚体的角加速度α保持不变，以ω_0表示$t=0$时刻的角速度，以ω表示在任意时刻t的角速度，以θ表示$0\sim t$时段内的角位移，则有

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha t\\\theta=\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2\\\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\theta\end{cases}$$

【例题】

飞轮的半径为0.2m，转速为$150\mathrm{r}\cdot min^{-1}$，因受到制动而均匀减速，经30s停止转动。试求：(1)角加速度以及在此时间内飞轮所转的圈数；

(2) 制动开始后$\mathrm{t}=6\mathrm{s}$时飞轮的角速度；

(3)$t = 6s$时飞轮边缘上一点的线速度、切向加速度和法向加速度。

解 (1) 由题意，$\omega_0 = 5\pi\ rad \cdot s^{-1}$；$t = 30s$时，$\omega = 0$。

设$t=0$时，$\theta_0=0$，则飞轮的角加速度

$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=-\frac{\pi}{6}\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

“-”号表示α的方向与ω_0的方向相反。而飞轮在$30\mathrm{s}$转过的角度为

$$\theta=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\alpha}=75\pi\,\mathrm{rad}$$

于是，飞轮共转的圈数为

$$N=\frac{\theta}{2\pi}=37.5$$

(2) 在$t=6\mathrm{s}$时，飞轮的角速度为

$$\omega=\omega_0+\alpha t=4\pi\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

(3) 在$t=6\mathrm{s}$时，飞轮边缘上一点的线速度的大小为

$$v=\omega r=2.5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$a_\tau=\alpha r=-0.105\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a_n=r\omega^2=31.6\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

2、力矩 转动定律 转动惯量

【必备知识点】

（1）、力矩：$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{M}$的大小为$Frsin\theta$，方向为$\boldsymbol{r}$指向$\boldsymbol{F}$

（2）、转动定律：$M=J\alpha$

（3）、转动惯量

a、对于形状简单，质量连续且均匀分布的物体，可用下式计算转动惯量

$$J=\int r^2dm$$

即刚体上各质点的质量与各质点到转轴的距离二次方的乘积之和

b、常考的刚体转动惯量

1、细棒（转轴通过中心与棒垂直）：$J=\frac{ml^2}{12}$

2、细棒（转轴通过棒一段与棒垂直）：$J=\frac{ml^2}{3}$

3、圆柱体（转轴通过中心轴）：$J=\frac{ml^2}{2}$

4、薄圆环（转轴通过中心轴）：$J=ml^2$

3、角动量及角动量守恒定律

【必备知识点】

（1）、质点的角动量：

$L=r\times p=mr\times v$或$L=rmvsin\theta$（θ为r与v或p之间的夹角）

若质点在半径为r的圆周上运动时，以圆心O为参考系，那么质点对圆心O的角动量L的大小为$rmv=mr^2\omega$

（2）、质点的角动量定理：

$r\times F=r\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{m}v)$或$M=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\times\mathrm{m}v)=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$

冲量矩：$M\mathrm{d}t=\mathrm{d}L$

取积分：$\int_{t_1}^{t_2}Mdt=L_2-L_1$

对同一参考点O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量即为质点的角动量定理

（3）、质点的角动量守恒定律：

若质点所受合力矩为零，即$M=0$，则有$L=r\times\mathrm{m}v=$常矢量

当质点所受对参考点O的合力矩为零时，质点对该参考点O的角动量为一常矢量，即为角动量守恒定律。

注：$M=0$有两种情况，一是合力为零；另一种是合力虽不为零，但合力通过参考点O，质点作匀速圆周运动就是这种例子。

角动量的单位名称为千克二次方米每秒，符号为$\mathrm{kg}\cdot m^2\cdot s^{-1}$，量纲为$\mathrm{ML^2T^{-1}}$。

（4）、刚体定轴转动的角动量：

$L=\sum_i\Delta m_ir_i^2\,\omega=\left(\sum_i\Delta m_ir_i^2\right)\omega=\boldsymbol{J}\omega$

（5）、刚体定轴转动的角动量定理:

对绕定轴Oz转动的刚体来说，刚体内各质元的内力矩之和应为零，即$\sum M_i^{in}=0$。故其合外力对转轴的力矩$M=M_i^{ex}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum L_i\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i\Delta m_ir_i^2\,\omega\right)=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{J}\omega)$

上述表明刚体绕某定轴转动时，作用于刚体的合外力矩等于刚体绕此定轴的角动量随时间的变化率。

$$\int_{t_1}^{t_2}M\mathrm{d}t=\int_{L_1}^{L_2}\mathrm{d}L=L_2-L_1=J\omega_2-J\omega_1$$

若在Δt时间内，转动惯量由J_1变为J_2，则式中的$J\omega_1$应改为$J_1\omega_1$，$J\omega_2$改为$J_2\omega_2$。内力矩不改变角动量。

当转轴给定时，作用在物体上的冲量矩等于角动量的增量。

（6）、刚体定轴转动的角动量守恒定律：

当合外力矩为零时：$J\omega=$常量。即如果物体所受合外力矩为零时，或者不受外力矩的作用，物体的角动量保持不变。

【常见题型与详解】

（1）、圆盘绕通过盘心且垂直于盘面的水平轴转动，轴承间摩擦不计。射来两个质量相同，速度大小相同，方向相反并在一条直线上的子弹，他们同时射入圆盘并且留在盘内，在子弹射入后的瞬间，对于圆盘和子弹系统的角动量L以及圆盘的角速度ω则有（　　）

（A）L 不变，ω 增大

（B）两者均不变

（C）L 不变，ω 减小

（D）两者均不确定

答案：C

解析：由题意可知，圆盘-子弹系统无外力矩的作用，故角动量守恒。

又因为$mvd - mvd + J_0\omega_0 = J\omega$ 且$J_0 < J$

所以$\omega_0 > \omega$，即 ω 减小

（2）、如果质点在$r = (-3.5i + 1.4j)\mathrm{m}$ 的位置时的速度为$v = (-2.5i - 6.3j)\mathrm{m} \cdot s^{-1}$，求此质点对坐标原点的角动量。已知质点质量为4.1kg

解析：$L = \mathrm{m}vd = 4.1 \cdot [(-3.5i + 1.4j) \times (-2.5i - 6.3j)] = 104.8k\mathrm{kg} \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

角动量方向沿z轴正方向，质点在XoY平面作逆时针运动（俯视）。

注：在计算完结果后，一定要记得写方向。

（3）、一质量为1.12kg，长为 1.0m的均匀细棒，支点在棒的上端，开始时棒自由悬挂。当以100N的力打击它的下端点，打击时间为0.02s时，（1）若打击前棒是静止的，求打击时其角动量的变化；（2）求棒的最大偏转角。

解析：（1）$\Delta \mathrm{L} = \mathrm{M} \cdot \Delta \mathrm{t} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{l} \cdot \Delta \mathrm{t} = 2\ \ \mathrm{kg} \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

$$\left.\begin{aligned} &（2）J = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1.12}{3}\mathrm{kg} \cdot m^2 \\ &\omega_0 = \frac{\Delta L}{J} = \frac{6}{1.12} rad \cdot s^{-1} \\ &\frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}mgl(1 - cos\theta) \end{aligned}\right\} \theta = \arccos\left(1 - \frac{3F^2\Delta t^2}{m^2gl}\right) = 88°38'$$

【例题】

（1）、一质量为m′、半径为 R的均匀圆盘，绕通过其中心且与盘面垂直的水平轴以角速度ω转动，若在某时刻一质量为m的小碎块从盘边缘裂开，且恰好沿竖直方向上抛，问它可能达到的高度是多少？破裂后圆盘的角动量为多大？

答案：（1）$\frac{\omega^2R^2}{2g}$；（2）$(\frac{1}{2}\mathrm{m}' - \mathrm{m})R^2\omega$

（2）、一转台绕其中心的竖直轴以角速度$\omega_0 = \pi\ \ rad \cdot s^{-1}$转动，转台对转轴的转动惯量为$J_0 = 4.0 \times 10^{-3}\mathrm{kg} \cdot m^2$。今有沙粒以Q = 2(Q 的单位是 $\mathrm{g} \cdot s^{-1}$,t 的单位是 s)的流量竖直落至转台，并粘附于台面形成一圆环，若环的半径为r = 0.10m，求沙粒下落t = 10s时，转台的角速度。

答案：$0.8\pi\ \ \mathrm{rad} \cdot s^{-1}$

4、力矩做功 刚体绕定轴转动的动能定理

【必备知识点】

（1）、力矩做功(下式 M 为合外力矩)

$$W=\int_0^\theta dW=M\int_0^\theta d\theta=M\theta$$

$$W=\int_0^\theta M d\theta$$

（2）、力矩功率

$$P=\frac{dW}{dt}=M\frac{d\theta}{dt}=M\omega$$

（3）、转动动能

$$E_k=\sum_i\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2=\frac{1}{2}\left(\sum_i\Delta m_i r_i^2\right)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

（4）、刚体绕定轴转动的动能定理

$$W=\int dW=J\int_{\omega_1}^{\omega_2}\omega d\omega=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

【常见题型与详解】

如图所示，一质量为 m 的小球由一绳索系着，以角速度ω_0在无摩擦的水平面上，绕以半径为r_0的圆周运动。如果在绳的另一端作用下用一竖直向下的拉力，使小球作半径为$\frac{r_0}{2}$的圆周运动。试求：（1）小球新的角速度 （2）拉力所做的功

解：（1）根据分析，小球在转动过程中，角动量保持守恒，故有：

$$J_0\omega_0=J_1\omega_1$$

式中J_0和J_1分别是小球在半径为r_0和$\frac{1}{2}r_0$时对轴的转动惯量，即$J_0=mr_0^2$和$J_1=\frac{1}{4}mr_0^2$,则

$$\omega_1=\frac{J_0}{J_1}\omega_0=4\omega_0$$

（2）随着小球转动角速度的增加，其转动动能也增加，这正是拉力做功的结果。由转动的动能定理可得拉力的功为

$$W=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2-\frac{1}{2}J_0\omega_0^2=\frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2$$

十二、气体动理论

1、平衡态 理想气体物态方程 热力学第零定律

【必备知识点】

(1).气体平衡态的特点

a.单一性（P T 处处相等）

b.物质的稳定性与时间无关

c.自发过程的终点

(2).理想气体物态方程

a. $\mathrm{pV}=\mathrm{NkT}$

N 是体积 V 中的气体分子数，k 称为玻尔兹曼常量，一般$\mathrm{k}=1.38\times10^{-23}J\cdot K^{-1}$

b. $\mathrm{pV}=\mathrm{v}N_AkT$　$\mathrm{pV}=\mathrm{v}RT$

$\mathrm{v}=\frac{N}{N_A}$　v为物质的量　R 叫做摩尔气体常量　v 还可换为$\frac{m'}{M}$

c. $\mathrm{p}=\mathrm{nkT}$

$\mathrm{n}=\frac{N}{V}$ 为气体的分子数密度，一般计算时取$\mathrm{n}=2.69\times10^{25}m^{-3}$

(3).热力学第零定律

如果物体 A 和 B 分别与处于确定状态的物体 C 处于热平衡状态，那么 A 和 B 之间也就处于热平衡

【常见题型与详解】

在湖面下 50.0m 深处（温度为4℃），有一个体积为$1.0\times10^{-5}m^3$的空气泡升到湖面上来，若湖面的温度为17.0℃，求气泡到达湖面的体积（取大气压强为$p_0=1.013\times10^5Pa$）

注意：在湖面上其压强为大气压强$p_0=1.013\times10^5Pa$，但在湖面下 50.0m 深处，其压强为p_0+pgh

解：由 $\mathrm{pV}=\mathrm{v}RT$得$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}$

$$V_2=\frac{p_1V_1T_2}{p_2T_1}=\frac{(p_0+pgh)V_1T_2}{p_0T_1}=6.11\times10^{-5}m^3$$

3、理想气体的压强公式

【必备知识点】

（1）、理想气体的微观模型：

理想气体和质点一样，都是一种理想化的模型，它可以总结为一下几点：

a. 分子本身大小比起分子之间距离小得多而可忽略不计；

b. 除碰撞瞬间外,分子间互作用力可忽略不计,分子在两次碰撞之间作自由的匀速直线运动；

c. 处于平衡态的理想气体,分子之间及分子与器壁间的碰撞是完全弹性碰撞，即气体分子动能不因碰撞而损失，在各类碰撞中动量守恒、动能守恒

（2）、理想气体的压强公式：

$$\mathrm{p}=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_k=\frac{1}{3}\rho\overline{v^2}\text{（推导见课本 p193）}$$

其中，p 为气体作用于气壁的压强，n 为分子的数密度，m 为容器中分子的质量，v 为分子运

动的速度，$\bar{\varepsilon}_k$为分子的平均平动动能，ρ 为气体的密度

【常见题型与详解】

在考试中单独考察这类知识点的题很少，而且以难度较低的选择题和解答题的前几问为主，只要熟记压强公式的几个不同的表示方法，就能根据已知的几个量代入算出所求的量。

例1、 三个容器 A、B、C 中装有同种理想气体，其分子数密度 n 相同，而方均根速率之比为$(\bar{v}_A^2)^{\frac{1}{2}}$：$(\bar{v}_B^2)^{\frac{1}{2}}$：$(\bar{v}_C^2)^{\frac{1}{2}} = 1:2:4$则其压强比$p_A:p_B:p_C$为？

由理想气体压强公式$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$可知同种气体当分子数密度相同时$p_A:p_B:p_C = \bar{v}_A^2$：$\bar{v}_B^2$：$\bar{v}_C^2 = 1$：$4$：$16$

5、能量均分定理 理想气体的内能

【必备知识点】

(1)、自由度：

a. 单原子分子的平均能量有三个速度二次方项。

$$\overline{\varepsilon_{kt}} = \frac{1}{2}m\overline{v_{Cx}^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_{Cy}^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_{Cz}^2}$$

自由度$i = 3$

b. 刚性双原子分子的平均能量共有五个速度二次方项，其中三项属于平均动能，两项属于平均转动动能。

$$\bar{\varepsilon} = \overline{\varepsilon_{kt}} + \overline{\varepsilon_{kr}} = \frac{1}{2}m\overline{v_{Cx}^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_{Cy}^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_{Cz}^2} + \frac{1}{2}J_z\overline{\omega_y^2} + \frac{1}{2}J_z\overline{\omega_z^2}$$

自由度$i = 5$

c. 非刚性双原子分子的平均能量共有七个能量二次方项，其中三项属于平动的，两项属于转动的，两项属于振动的。

$$\bar{\varepsilon} = \overline{\varepsilon_{kt}} + \overline{\varepsilon_{kr}} + \overline{\varepsilon_{v}} = \frac{1}{2}m\overline{v_{Cx}^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_{Cy}^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_{Cz}^2} + \frac{1}{2}J\overline{\omega_y^2} + \frac{1}{2}J\overline{\omega_z^2} + \frac{1}{2}\mu\overline{v_{Cx}^2} + \frac{1}{2}k\overline{x^2}$$

其中，$\frac{1}{2}\mu\overline{v_{Cx}^2}$是平均振动动能，μ是双原子分子的约化质量；$x$是两原子振动的相对位移，$\frac{1}{2}k\overline{x^2}$是平均振动势能。

自由度$i = 7$

d. 同理，三原子以上的多原子刚性分子的自由度$i = 6$。

(2)、能量均分定理

气体处于平衡态时，分子任何一个自由度的平均能量都相等，均为$\frac{kT}{2}$，这就是能量均分定理。

分子的平均能量一般表示为： $\bar{\varepsilon} = (t + r + v)\frac{kT}{2} = i\frac{kT}{2}$

单原子分子的$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT$；刚性双原子分子的$\bar{\varepsilon} = \frac{5}{2}kT$；非刚性双原子分子的$\bar{\varepsilon} = \frac{7}{2}kT$；刚性多原子分子的$\bar{\varepsilon} = 3kT$。

(3)、理想气体的内能

理想气体的内能只是气体内所有分子的动能和分子内原子间的势能之和。

1mol理想气体的内能$E_m = N_A\bar{\varepsilon} = N_A i\frac{kT}{2} = \frac{i}{2}N_AkT = \frac{i}{2}RT$

物质的量为v的理想气体的内能则为$E=v\frac{i}{2}RT$

【常见题型与详解】

1、1mol氦气和1mol氧气（视为刚性双原子分子理想气体），当温度为T时，其内能分别为：（　　　　）

A、$\frac{3}{2}RT$，$\frac{5}{2}kT$

B、$\frac{3}{2}kT$，$\frac{5}{2}kT$

8、分子的平均碰撞频率和平均自由程

【必备知识点】

1、 自由程

分子两次相邻碰撞之间自由通过的路程，叫做自由程。

2、平均自由程

$\bar{\lambda}=\frac{\bar{v}}{\bar{Z}}$

其中$\bar{Z}$为在单位时间内分子α与其他分子碰撞的平均次数，即平均碰撞频率；$\bar{\lambda}$为平均自由程；$\bar{v}$为平均速率。

$\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$

其中，d一般为分子的有效直径；上式表明，平均自由程和分子碰撞截面、分子数密度成反比，但是与分子平均速率无关。

又因为$p=nkT$，$\bar{\lambda}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$

上式表明，当气体的温度一定时，气体的压强越大，分子的平均自由程越短。

3、 平均碰撞速率

$\bar{Z}=\pi d^2\bar{v}n$

此式为α分子在在1s内和其他分子发生碰撞的平均次数。

【常见题型与详解】

1、 在压强为1.01×10^5Pa下，氮气分子的平均自由程为6.0×10^{-6}cm。当温度不变时，在多大压强下，其平均自由程为1.0mm。

解析：$\begin{cases}\overline{\lambda_1}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p_1}\\ \overline{\lambda_2}=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p_2}\end{cases}$　　解得$p_2=6.06$pa

【例题】

1、 若氖气分子的有效直径为2.59×10^{-8}cm，问在温度为600K，压强为1.33×10^2pa时氖气分子1s内的平均碰撞次数为多少？

答案：3.81×10^6

十三、热力学基础

1、静准态过程 功 热量

【必备知识点】

（1）、静准态过程

热力学系统（工作物质）：研究的宏观物体

外界：与热力学系统相互作用的环境

静准态过程：系统在始末两平衡态之间经历的过程无限缓慢以致系统经历每一中间态都可近似看成平衡态

非静准态过程：系统在始末两平衡之间的中间状态为非平衡态过程

（2）、功　　$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV$

（3）、热量

热量：系统与外界由于存在温度差而传递的能量

只要有能量传递无论系统温度是否变化都是热量传递

热量和功都是过程量

2、热力学第一定律 内能

【必备知识点】

$$Q = W + E - E_0 = W + \Delta E$$

$$dQ = dW + dE$$

热力学第一定律（包括热现象在内的能量守恒定律）：系统从外界吸收的热量一部分用于系统对外做功，另一部分用来增加系统的内能。

系统内能增量只与系统起始和终了状态有关，与系统所经历的过程无关，是系统状态单值函数

3、理想气体的等体过程和等压过程 摩尔热容

【必备知识点】

（1）、等体过程与等压过程的比较：

等体过程：

过程中，理想气体的体积保持不变，因此气体不对外做功，气体吸收的热量全部用来增加气体的内能。

即　　$\mathrm{d}W_v = pdV = 0$

由热力学第一定律　　$\mathrm{d}Q_v = dE$　　①

对有限的等体定律有　　$Q_v = E_2 - E_1$

等压过程：

过程中，理想气体的压强保持不变，理想气体吸收的热量一部分用来增加气体的内能，另一部分使气体对外做功。

热力学第一定律可写成

$$\mathrm{d}Q_p = dE + pdV$$

（2）、摩尔定容热容与摩尔定压热容：

摩尔定容热容：

$$C_{V、m}=\frac{dQ_{V、m}}{dT} \qquad 其中dQ_v=dE$$

摩尔定压热容：

$$C_{p、m}=\frac{dQ_{p、m}}{dT} \qquad 其中dQ_p=dE+pdV$$

所以可得$C_{p、m}=C_{V、m}+R$ 其中 R 为摩尔气体常量，约为 8.31 $\mathrm{J}\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}$

再联系前面章节的公式$dE=v\frac{i}{2}RdT$可得：

$$C_{V、m}=\frac{i}{2}R，C_{p、m}=C_{V、m}+R=\frac{i+2}{2}R$$

（3）、实际中常常用到$C_{p、m}$和$C_{V、m}$的比值，这个比值通常用 γ 表示，有 $\gamma=\frac{C_{p、m}}{C_{V、m}}$

（4）、比热容：与$C_{p、m}$、$C_{V、m}$类似，前两者是针对理想气体来说的，而比热容是对于液体、固体、电介质、磁介质来说的。当其在某一微小的过程中吸收热量dQ, 温度升高dT，则定义：

$$\mathrm{C}=\frac{dQ}{dT}$$

为系统在该过程中的热容，其单位为$\mathrm{J}\cdot K^{-1}$。由于热容的值与系统的质量有关，因此把单位质量的热容称为比热容 c，其单位为$\mathrm{J}\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}$。

4、理想气体的等温过程和绝热过程

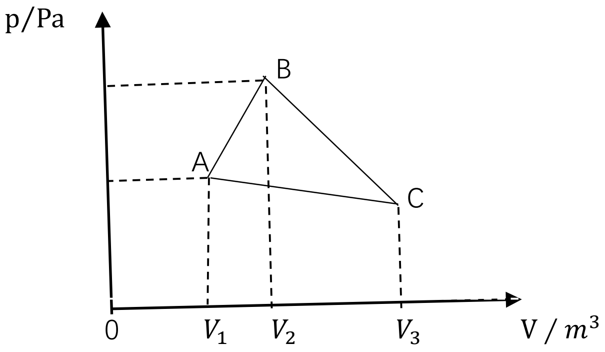
【必备知识点】

过程	等温	绝热
特征	$T=C$	$Q=0$
过程方程	$pV=C$	$pV^{\gamma}=C_1$ $V^{\gamma-1}T=C_2$ $p^{\gamma-1}T^{-\gamma}=C_3$
吸收热量 Q	$\nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}$	0
对外做功 W	$\nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}$	$-\nu C_{V,m}(T_2-T_1)$ $\frac{p_1V_1-p_2V_2}{\gamma-1}$
内能增加量ΔE	0	$\nu C_{V,m}(T_2-T_1)$
说明	系统从外界吸收的能量，全部对外做功，系统的内能不变	系统与外界无热量交换，系统消耗的内能对外做功

【常见题型与详解】

1mol 氮气(刚性理想气体)经历如图的三个状态变化过程回到初态A，其中BC为绝热过程，CA为等温过程，若已知$T_1 = 300K$，$T_2 = 2T_1$，$V_3 = 8V_1, \theta = \frac{\pi}{4}$

求分别在三个状态变化过程中的功W，热量Q和内能的变化ΔE



解：由 A 到 B 过程，氮气对外界所做的功W_1等于直线 AB 与 V 轴围成的面积值，即

$$W_{AB} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(V_2 - V_1)$$

由图可知$\frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{V_2}$则$W_{AB} = \frac{1}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{1}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{1}{2} \times 8.31 \times 300J = 1247J$

$$\Delta E_{AB} = \nu \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) = 6233J$$

由热力学第一定律可得系统吸收的热量为

$$Q_{AB} = \Delta E_{AB} + W_{AB} = 7480J$$

由 B 到 C 过程为绝热过程

$\Delta E_{BC} = \nu \frac{i}{2} R(T_3 - T_2) = \nu \frac{i}{2} R(T_1 - T_2) = -6233J$

此过程系统对外所做的功为$W_{BC} = -\Delta E_{BC} = 6233J$

由 C 到 A 为等温过程

此过程系统对外所作的功为$W_{CA} = \nu R l T_1 n \frac{V_1}{V_3} = -8.31 \times 300 \times ln8 \ J = -5184 \ J$

则此过程系统吸收的热量为$Q_{CA} = W_{CA} = -5184 \ J$

5、 循环过程 卡诺循环

【必备知识点】

（1）、循环：系统经过一系列状态变化过程又回到原状态。

①特点：每循环一次

⑴ $\Delta E = 0$

⑵净功=$W = W_{abc} + W_{cda}$=循环曲线围成图形面积

②种类：
①正循环（顺时针）：$W > 0$吸热做功—热机
②逆循环（逆时针）：$W < 0$放热对外做功—致冷机

（2）、热机、致冷机工作原理

a. 热机：如图循环

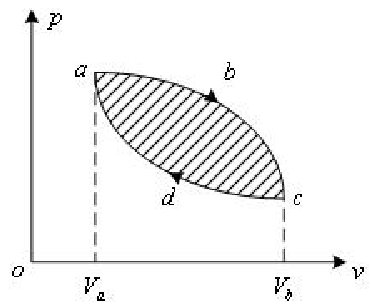


图 6-16

净功 $W = W_{abc}(\text{吸热}) + W_{cda}(\text{放热})$

即 $W = Q_1(\text{吸}) + Q_2(\text{放})$

热机效率：定义 $\boxed{\eta = \dfrac{W}{Q_1} = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}}$

b. 制冷机：如上图作逆循环

外界对系统做功 $W = Q_1 - Q_2$

即 $W = Q_1 - Q_2$ 或 $Q_1 = W + Q_2$

制冷系数：定义 $\omega = \dfrac{Q_2}{W} = \dfrac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$

循环特征：$\Delta E = 0$

功：$W =$ 循环面积

热机效率：$\eta = W / Q_{吸}$ （$Q_{吸}$ 指吸热，不是净吸热）（一般热机）

(3)、卡诺循环

循环过程中类别很多，但是理论上有实际意义的是卡诺循环。

正循环（热机）

a、循环的分过程：

四个分过程：

$A \rightarrow B$：等温膨胀

$B \rightarrow C$：绝热膨胀

$C \rightarrow D$：等温压缩

$D \rightarrow A$：绝热压缩

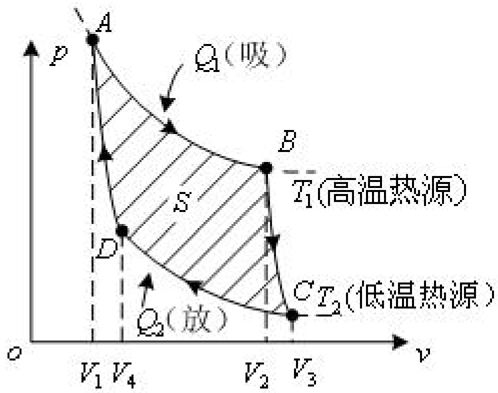


图 6-17

b、热机效率：

$$\boxed{\eta_{卡} = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

说明：⑴ $\eta_{卡}$ 只与 T_1、T_2 有关，T_1 越大，T_2 越小，则 $\eta_{卡}$ 越大。也就是说，当两热源温差越大，从高温热源吸取的热量 Q_1 的利用价值就越大。

⑵ $\eta_{卡} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$ 是 $\eta = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}$ 的特例，前者仅适用于卡诺循环，后者适用于一般过程的循环。

⑶卡诺循环的工作物质不一定为理想气体，可以是弹性体、磁性物质等（卡诺定理已经证明

了$\eta_{卡}$与工作物质无关，只与T_1、T_2有关。

逆循环（制冷机）

a、循环一次结果：

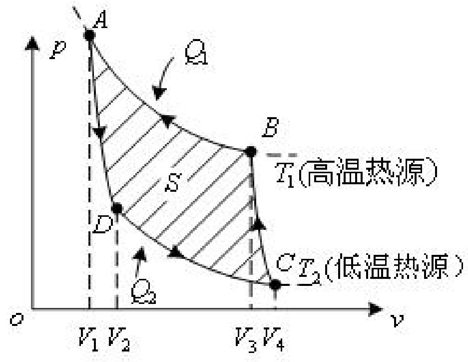


图 6-19

$\Delta E = 0$

$Q =$ 从T_2吸热Q_2-向T_1 放热Q_1

$W_{外} = S$（面积）净功$\Rightarrow Q_2 - Q_1 = -W$

即　　$Q_1 = W + Q_2$

结论：逆循环中，工作物质从低温热源吸热Q_2，接受外界做功为W，向高温热源放热为$Q_1 = W + Q_2$。从低温热源吸取热量的结果，使低温热源温度降低，这就是制冷机原理。

b、制冷系数

定义：制冷系数=工作物质从低温热源吸取的热量

$$\boxed{\omega_{卡} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}}$$（ω可大于 1）

由上可知，T_2越小，$\omega_{卡}$就越小，说明从温度越低的热源吸热所消耗的外界功就越大。

6、热力学第二定律的表述　卡诺定理

【必备知识点】

（1）、热力学第二定律的两种表述：

开尔文表述：不可能制造出这样一种循环工作的热机，它只使单一热源冷却来做功，而不放出热量给其他物体，或者说不使外界发生任何变化。

克劳修斯表述：不可能把热量从低温物体自动传到高温物体而不引起外界的变化

（2）、可逆过程：逆过程能重复正过程的每一状态，而且不引起其他变化

不可逆过程;在不引起其他变化的条件下，不能使逆过程重复正过程的每一状态，或虽然重复但必然会引起其他变化

(3)、卡诺定理：

a、相同的高温热源和低温热源之间工作的任意工作物质的可逆机，都具有相同的效率。

b、工作在相同的高温热源和低温热源之间的一切不可逆机的效率都不可能大于可逆机的效率

十四、相对论

1、伽利略变换 经典力学的绝对时空观、力学的相对性原理

【必备知识点】

(1).伽利略变换式：正变换$x' = x - ut \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$

负变换：$x = x' + ut \quad y = y' \; z = z' \quad t = t'$

伽利略变换的矢量形式表示为：

$\begin{cases} r' = r - ut \\ t' = t \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r = r' + ut \\ t = t' \end{cases}$

(2).经典力学的时空观：时间：用以表征物质存在的持续性，物质运动、变化的阶段性和顺序性。

注意：对不同的惯性系中，伽利略变换中我们默认了$t = t'$,时间测量与惯性系选择无关

(3)、绝对时空观：经典力学和时间空间都是绝对的，它们互不相关，相对独立，这就是绝对时空观。

(4)、力学相对性性原理：牛顿运动方程对伽利略变换式来讲是不变式。

3、狭义相对论时空观

【必备知识点】

(1)、爱因斯坦相对性原理：物理定律在所有的惯性系中都具有相同的表达形式，即所有的惯性参考系对运动的描述都是等效的。

(2)、光速不变原理：真空中光速是常量，它与光源或观测者的运动无关，即不依赖于惯性系的选择。

(3)、洛伦兹坐标变换式$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$

注意：洛伦兹变换式中，t和t'都依赖于空间坐标，即t是t'和x'的函数。

(4)、洛伦兹速度变换式：$\begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_y = \dfrac{u_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \\ u'_z = \dfrac{u_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x} \end{cases}$

【例题】一列 0.5 公里长（按列车上的观察者测量）的火车，以 0.6c 的速度行驶。地上的观察者测得有两个闪电同时击中火车的前后端，则火车上的观察者看，这两个闪电是否同时击中火车两端？

解：设闪电击中车头为 A 事件，击中车尾为 B 事件。则在地上（S 系）看：

A 事件发生的时间为：　　B 事件发生的时间为：

$$t_A=\frac{t'_A+\frac{u}{c^2}x'_A}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad t_B=\frac{t'_B+\frac{u}{c^2}x'_B}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t_B-t_A=\frac{t'_B-t'_A+\frac{u}{c^2}(x'_B-x'_A)}{\sqrt{1-\beta^2}}=0$$

（在 S 系中同时发生）

$$t_B-t_A=\frac{t'_B-t'_A+\frac{u}{c^2}(x'_B-x'_A)}{\sqrt{1-\beta^2}}=0$$

$$\therefore t'_B-t'_A=-\frac{u}{c^2}(x'_B-x'_A)$$

$$=-\frac{0.6c}{c^2}\times0.5\times10^3=-10^{-6}(s)$$

在 S′ 系中不同时发生，负号表示 A 事件发生在 B 事件之后。

4、狭义相对论的时空观

【必备知识点】

（1）. 长度收缩

$$l=\frac{l_0}{r}=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c}}$$

相对观察者静止时物体的长度称为静止长度或固有长度（这里 l_0 为固有长度）。

相对于观察者运动的物体，在运动方向的长度比相对观察者静止时物体的长度短了。

说明：

a. 长度缩短是纯粹的相对论效应，并非物体发生了形变或者发生了结构性质的变化。

b. 在狭义相对论中，所有惯性系都是等价的，所以，在 S 系中 x 轴上静止的杆，在 S' 上测得的长度也短了。

c. 相对论长度收缩只发生在物体运动方向上（因为 $y'=y$，$z'=z$）。

d. $v<<c$ 时，$l=l_0$，即为经典情况。

(2)．时间延缓

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

相对观察者静止时测得的时间间隔为静时间间隔或固有时间。由上可知，相对于事件发生地点做相对运动的惯性系 S 中测得的时间比相对于事件发生地点为静止的惯性系 S' 中测得的

时间要长。换句话说，一时钟由一个与它作相对运动的观察者来观察时，就比由与它相对静止的观察者观察时走得慢。

说明：

a. 时间延缓纯粹是一种相对论效应，时间本身的固有规律（例如钟的结构）并没有改变。

b. 在 S 上测得 S' 上的钟慢了，同样在 S' 上测得 S 上的钟也慢了。它是相对论的结果。

c. $v << c$ 时，$\Delta t = \Delta t'$，为经典结果。

（3）. 同时的相对性

按牛顿力学，时间是绝对的，因而同时性也是绝对的，这就是说，在同一个惯性系 S 中观察的两个事件是同时发生的，在惯性系 S' 看来也是同时发生的。但按相对论，正如长度和时间不是绝对的一样，同时性也不是绝对的。下面讨论此问题。

如前面所取的坐标系 S，S'，在 S' 系中发生二事件，时空坐标为 (x_1',t_1')，(x_2',t_2')，此二事件在 S 系中时空坐标为 (x_1,t_1)，(x_2,t_2)，当 $t_1'=t_2'=t_0'$，则在 S' 中是同时发生的，在 S 系看来此二事件发生的时间间隔为：

$$\Delta t = t_2 - t_1 = r(t_2' + \frac{v}{c^2}x_2') - r(t_1' + \frac{v}{c^2}x_1') = r[(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')],$$

若 $t_2' = t_1'$，$x_1' \neq x_2'$，则 $\Delta t = r\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1') \neq 0$，即 S 上测得此二事件一定不是同时发生的。

6、相对性动量和能量

【必备知识点】

（1） 动量与速度的关系：在狭义相对论中，惯性系间的速度变换是遵循洛伦兹变换的，质点的动量表达式应为 $\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \gamma m_0\mathbf{v}$

为了不改变动量的基本定义（质量 x 速度）人们把上式改写成

$$p = mv$$

其中 $\mathrm{m} = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

在狭义相对论中，质量 m 是与速度有关的，称为相对论性质量，而 m_0 称为静质量。

（2） 质量与能量的关系

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

上式为相对论性动能表达式，它是质点运动时的能量与静止质量之差。$\mathrm{m}c^2$ 是质点运动时具有的总能量，m_0c^2 为质点静止时具有的静质量，上式表明质点的总能量等于质点的动能和其静质量之和

（3） 动量与能量的关系

$\mathrm{E} = \mathrm{m}c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$　　　$\mathrm{p} = \mathrm{mv} = \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

由上面两个公式消去速度 v 后，可得到动量和能量之间的关系

$$E^2 = E_0^2 + P^2C^2$$

【常见题型与详解】

若一电子的总能量为 5.0Mev，求该电子的静能、动能、动量和速率

【分析】

粒子静能E_0是指粒子在相对静止的参考系中的能量，$E_0 = m_0c^2$, 式中m_0为粒子在相对静止的参考系中的质量。就确定粒子来说，E_0和m_0均为常量（对于电子, 有$m_0 = 9.1 \times 10^{-31}kg, E_0 = 0.512MeV$)本题中由于电子总能量$\mathrm{E} > E_0$, 因此，该电子相对观察者所在的参考系还应具有动能，也就具有相应的动量和速率

解：电子静能为$E_0 = m_0c^2 = 0.512MeV$

电子动能为$E_k = E - E_0 = 4.488MeV$

电子动量为$\mathrm{p} = \frac{1}{c}(E^2 - E_0^2)^{1/2} = 2.66 \times 10^{-21}kg \cdot m \cdot s^{-1}$

由$\mathrm{E} = E_0(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$可得电子速率为$\mathrm{v} = \mathrm{c}(\frac{E^2 - E_0^2}{E^2})^{1/2} = 0.995c$

若$t_2' = t_1'$，$x_1' = x_2'$，则$\Delta t = 0$，即 S 上测得此二事件一定是同时发生的。

若$t_2' \neq t_1'$，$x_1' \neq x_2'$，则Δt是否为零不一定，即 S 上测得此二事件是否同时发生不一定。

从以上讨论中看到了“同时”是相对的。这与经典力学截然不同。