

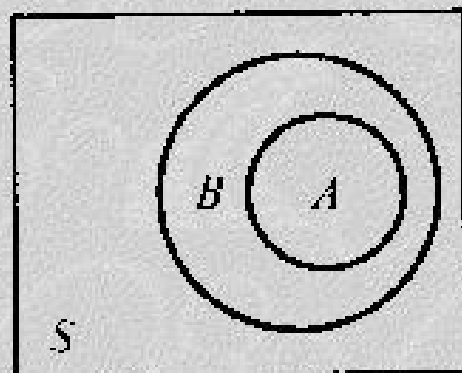
概率论与数理统计总复习

事件间的关系与事件的运算

1. 事件间的关系

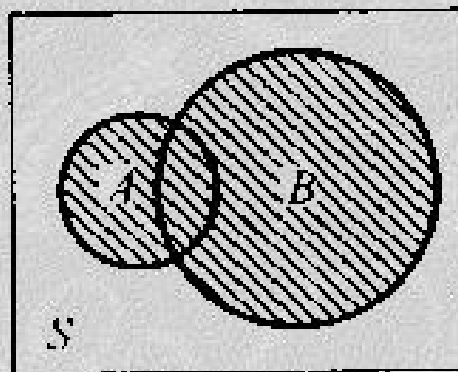
- ① **包含关系**: 事件 A 发生必然导致 B 发生, 记为 $A \subset B$
- ② **相等关系**: $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 记为 $A=B$ 。
- ③ **积事件**: 事件 A 与 B 同时发生, 记为 AB 。
- ④ **和事件**: 事件 A 或 B 至少有一个发生, 记为 $A \cup B$
- ⑤ **差事件**: 事件 A 发生而 B 不发生, 记为 $A-B$ 。
- ⑥ **互斥事件**: 事件 A 、 B 不能同时发生, 即 $AB = \phi$, 又称 A 、 B 为**互不相容事件**。
- ⑦ **逆事件**: “ A 不发生”这一事件称为 A 的逆事件, 记为 \bar{A} , A 与 \bar{A} 又称为**对立事件**。

$$\bar{A}\bar{A} = \phi, A \cup \bar{A} = S \Rightarrow \bar{A} = S - A$$



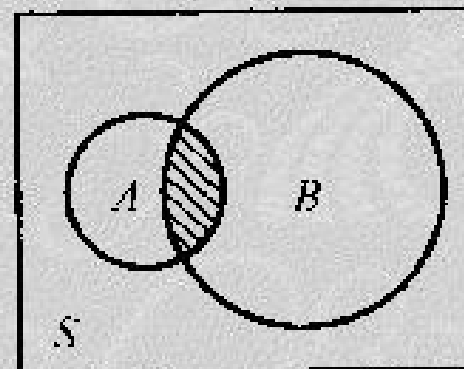
$$A \subset B$$

图 1-1



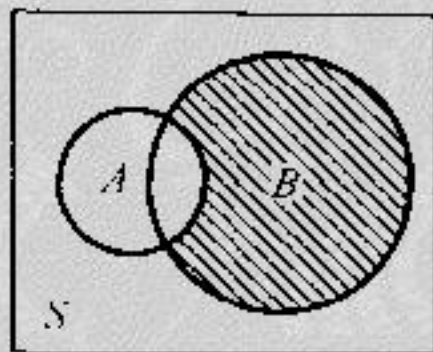
$$A \cup B$$

图 1-2



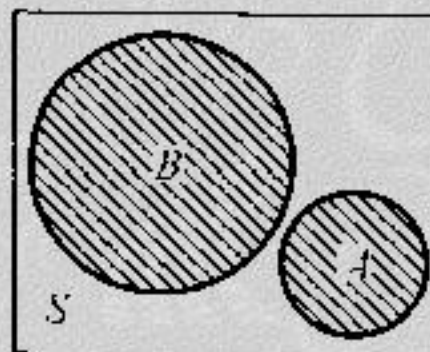
$$A \cap B$$

图 1-3



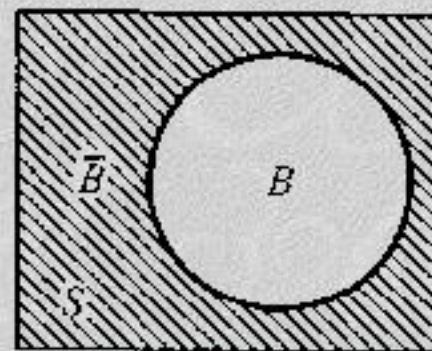
$$B - A$$

图 1-4



$$A \cap B = \emptyset$$

图 1-5



$$B \cup \bar{B} = S, B \cap \bar{B} = \emptyset$$

图 1-6

2. 事件的运算律

- ① 交换律: $A \cup B = B \cup A; AB = BA$
- ② 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$
 $(AB)C = A(BC)$
- ③ 分配律: $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC);$
 $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$
- ④ 对偶律 (De Morgan 德摩根律):
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \overline{B}; \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B};$$
- ⑤ 减法: $A - B = A \overline{B}$

概率：做 n 次重复试验，事件 A 发生的次数记为 n_A ，当 n 很大时，若频率 n_A / n 稳定在常数 P 附近，则称 P 为随机事件 A 发生的概率，记作 $P(A)=P$ 。

$$f_n(A) \rightarrow P(A) (n \rightarrow \infty)$$

- **概率的公理化定义**：设 E 是随机试验， S 是样本空间，对 E 的每个随机事件 A ，赋予一个实数 $P(A)$ ，若它满足：

① **非负性**： $0 \leq P(A) \leq 1$

② **规范性**： $P(S)=1$ ， S 为样本空间（必然事件）

③ **可列可加性**：若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中 $A_i A_j = \phi, i \neq j$
则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的发生**概率**。

概率的性质

1. 有限可加性：有限个两两互斥的事件 A_1, A_2, \dots, A_n
则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$
 2. \bar{A} 是 A 的对立事件，则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 3. $A \subset B$ 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$
 4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ，当 A, B 互斥即 $AB = \phi$
时 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 5. $P(\phi) = 0, P(S) = 1$
 6. $P(A) \leq 1$
- 推广：
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(AB) - P(AC) - P(BC) \\ + P(ABC)$$

等可能概型（古典概型）

预备知识：排列、组合

1. **分类计数原理(加法原理)**：设完成一件事有 k 类方法，每类分别有 m_1, m_2, \dots, m_k 种方法，则完成这件事情共有 $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ 种方法.
2. **分步计数原理(乘法原理)**：设完成一件事有 k 个步骤，第一步有 m_1 种方法， \dots ，第 k 步有 m_k 种方法，则完成这件事情共有 $m_1 m_2 \dots m_k$ 种方法.
3. **排列**：从 n 个不同元素中取出 m 个元素，按一定次序排成一行.

排列数：从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列的个数记为 A_n^m ， $A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

○ **注**： $A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$ ， $0! = 1$

4. **组合：**从 n 个不同元素中取出 m 个元素并成一组(与顺序无关).

组合数：从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有组合的个数，记为 C_n^m ，

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

等可能概型（古典概型）

1. 定义：具有以下性质的随机试验称为等可能概型

① 试验的样本空间的元素只有有限个

② 试验中每个基本事件发生的可能性相同

2. 等可能概型中事件概率的计算公式：

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

n 为随机试验的总的结果数，即样本点的总数， k 为事件 A 包含的结果数。

条件概率

1. 定义：事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的概率，称为**条件概率**，记为 $P(B|A)$ 。

例 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正面的情况，设
 $A = \{\text{至少有一次为正面}H\}$ ， $B = \{\text{两次掷出同一面}\}$ ，
求 $P(B|A)$

解：样本空间 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ ， $A = \{HH, HT, TH\}$ ，
 $B = \{HH, TT\}$ 。则可得：

$$P(B|A) = 1/3$$

条件概率的计算公式：

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{AB \text{中包含的基本事件}}{A \text{中包含的基本事件}}$$

乘法定理： 设 $P(A)>0$ ， 则有 $P(AB)=P(B|A)P(A)$

推广： $P(AB)>0$ ， 则有 $P(ABC)=P(C|AB)P(AB)$
 $= P(C|AB) P(B|A)P(A)$

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个事件 ($n \geq 2$) ， 且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \cdots A_n) &= P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \\ &= P(A_n | A_1, A_2, \dots, A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1, A_2, \dots, A_{n-2}) \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1) \end{aligned}$$

全概率公式

- **划分**：设 S 为试验 E 的样本空间， B_1, B_2, \dots, B_n 为 E 的一组事件，若

① $B_i B_j = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$

② $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$

则称 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 S 的一个划分.

- **例 E ：掷骰子观察点数**

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$B_1 = \{1, 2, 3\}, B_2 = \{4, 5\}, B_3 = \{6\}$ 是 S 的一个划分

$C_1 = \{1, 2, 3\}, C_2 = \{3, 4\}, C_3 = \{5, 6\}$ 不是 S 的一个划分

全概率公式

- **定理：** 设随机试验 E 的样本空间为 S ， A 为 E 的事件
· B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$
则 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$
，称之为**全概率公式**。
- **注：** 全概率公式给出我们一个用来计算在众多原因 B_1, B_2, \dots, B_n 的作用下事件 A 发生概率的方法。
(**由因得果**)

贝叶斯公式（由果溯因）

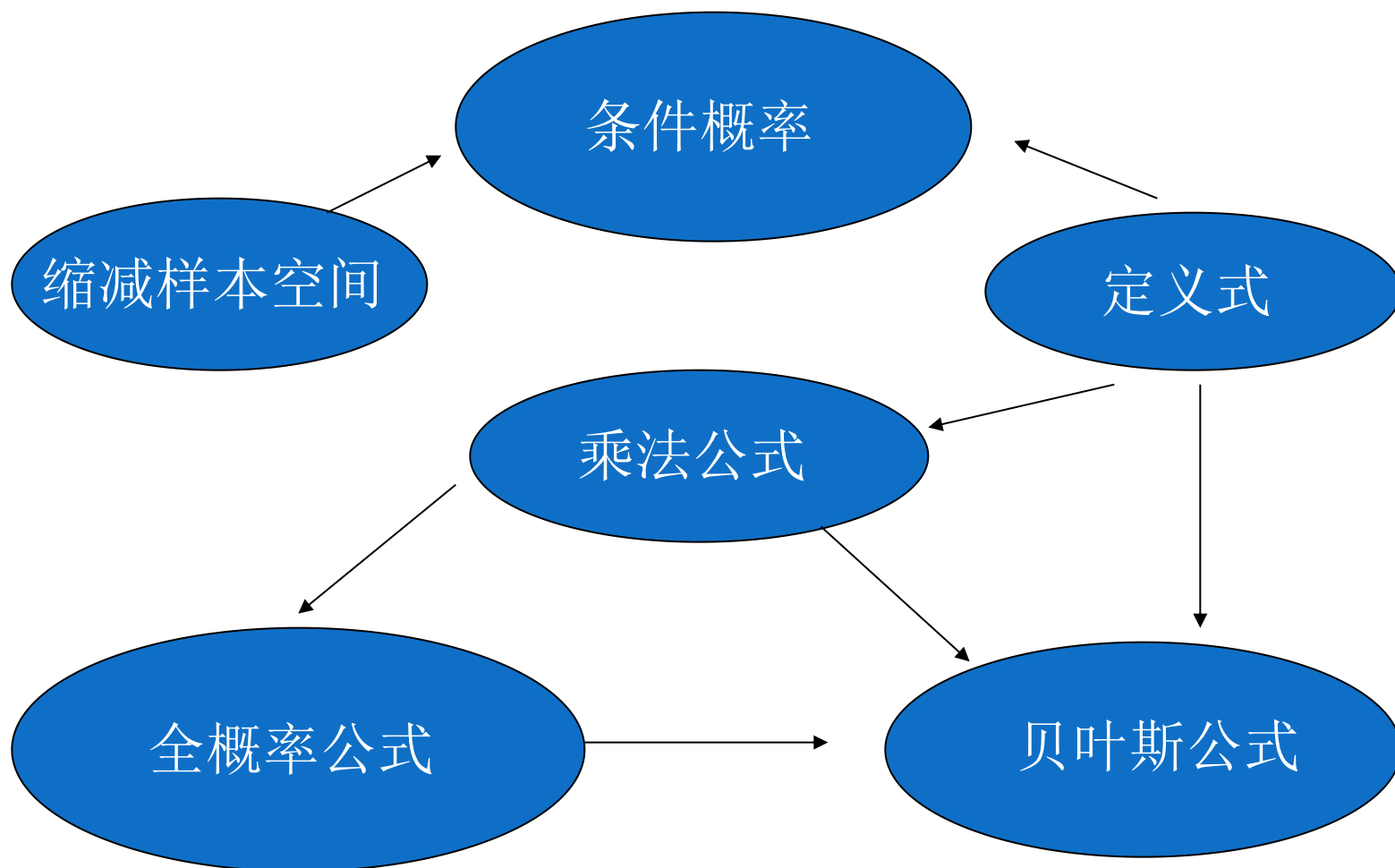
- 设 E 的样本空间为 S , A 为 E 的事件. B_1, B_2, \dots, B_n 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

为贝叶斯（Bayes）公式.

- 称 $P(B_i)$ 为先验概率;
- 称 $P(B_i|A)$ 为后验概率.

条件概率小结



独立性

- **独立事件**：两事件 A 、 B ， A 发生对 B 发生没有影响， B 发生也对 A 没有影响，则称两事件相互独立. 即 $P(A|B)=P(A)$ 且 $P(B|A)=P(B)$ ， 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$
- 例 抛甲，乙两枚硬币， $A=\{\text{甲出现正面}H\}$ ， $B=\{\text{乙出现正面}H\}$ ，问 A ， B 同时发生的概率.
- **定理** 四对事件 A,B ; \bar{A},B ; A,\bar{B} ; \bar{A},\bar{B} ; 中有一对相互独立，则另外三对也相互独立.
- **独立与互斥的区别**：
 A ， B 相互独立： $P(AB)=P(A)P(B)$ ；
 A ， B 互斥： $P(AB)=0$ 。

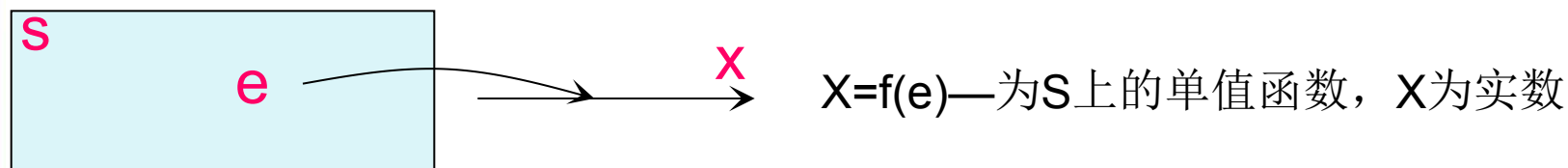
多个事件的独立

定义：设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个随机事件，若对 $2 \leq k \leq n$,

$$\text{均有： } P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立

- **定义** 随机试验的结果可以用一个实值变量表示，这个变量的取值是随机的，但又服从一定的统计规律性，这种变量称为随机变量，通常用 X , Y , Z 表示。
- **中心问题**：将试验结果数量化



- 随机变量分为离散型和连续型：
 1. **离散型**： X 的取值是有限个或可列无限个。
 2. **连续型**： X 的取值是连续的。

分布律

$P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$ 称为离散型随机变量 X 的分布律，分布律可用列表的方式直观的表示出来

X	x_1	x_2	\cdots	x_n	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_n	\cdots

分布律（概率分布）

- 1、写出可能取值——即写出了样本点
- 2、写出相应的概率——即写出了每一个样本点出现的概率

三种重要的离散型随机变量

1. 两点分布，又称为(0-1)分布

- (0-1)分布的分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

- 也可以写为 $P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, k = 0, 1$

- 对随机实验，若样本空间只包括两个元素，即

$S = \{e_1, e_2\}$ ，则一定能在 S 上定义一个服从(0-1)分布的随机变量，令
$$X = \begin{cases} 0 & e = e_1 \\ 1 & e = e_2 \end{cases}$$

- 例 抛硬币一次，定义随机变量 X 为出现正面的次数，则

$$X = \begin{cases} 0 & \text{反面} \\ 1 & \text{正面} \end{cases}$$

X	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. 二项分布

- 随机试验 E 只有两个可能结果： A 和 \bar{A} ，则称 E 为伯努利试验。设 $P(A)=p$ ($0 < p < 1$)，则 $P(\bar{A})=1-p$
- 将伯努利试验独立地重复进行 n 次，称为 n 重伯努利试验。
- X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数， X 所有可能取值 $k=0, 1, 2, \dots, n$ 。求 $P\{X=k\}$
- $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0, 1, 2, \dots, n$
- 记 $q=1-p$, $\sum_{k=0}^n P(X=k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (q+p)^n = 1$
- 随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布，记为 $X \sim b(n, p)$
- 当 $n=1$ 时，即为(0-1)分布。

3. 泊松分布 (Poisson分布)

若随机变量 X 的概率分布律为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$$

称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记 $X \sim \pi(\lambda)$

Poisson定理

设 $\lambda > 0$ 是一个常数, n 是任意正整数, 设 $np_n = \lambda$, 则对于任一固定的非负整数 k , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

二项分布与泊松分布有以下近似公式：

当 $n \geq 20, p \leq 0.05$ 时,

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ 其中 } \lambda = np$$

当 $n \geq 100, np \leq 10$ 时近似公式近似效果更佳。

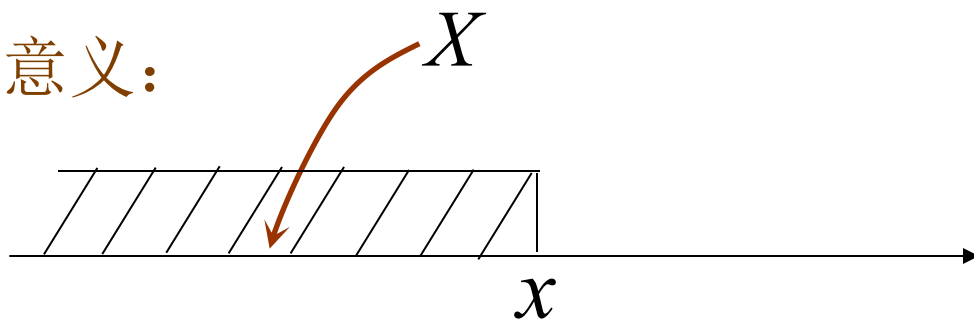
分布函数

定义： 设 X 为一个随机变量， x 是任意实数，函数 $F(x) = P\{X \leq x\}$ 称为随机变量 X 的概率分布函数，简称**分布函数**。

由分布函数的定义，有

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$F(x)$ 的几何意义：



注： 分布函数 $F(x)$ 在 x 处的函数值表示 x 落在区间 $(-\infty, x]$ 上的概率。

分布函数

$F(x)$ 的性质:

(1) $0 \leq F(x) \leq 1, F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

(2) $F(x)$ 是一个不减函数

$$\because 0 \leq P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

(3) 对于离散型随机变量, 若分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$

则其分布函数 $F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\}$

概率密度

定义：对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ ，若存在非负的函数 $f(x)$ ，使对于**任意**实数 x ，有：

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

则称 X 为**连续型随机变量**，

其中 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称**概率密度**。

$f(x)$ 的性质:

1) $f(x) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

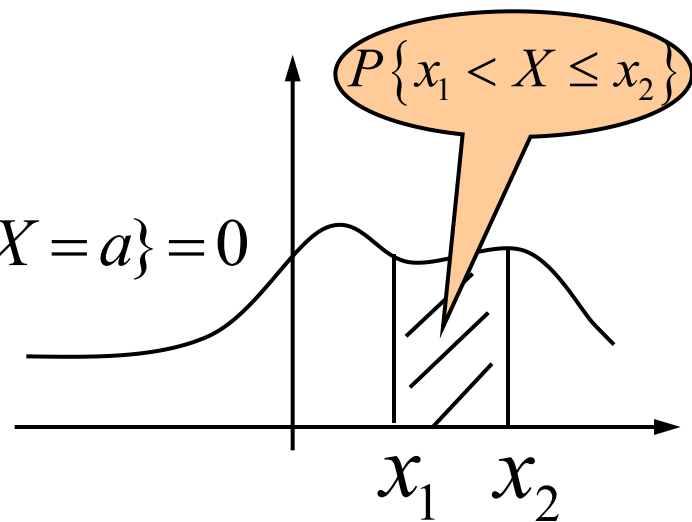
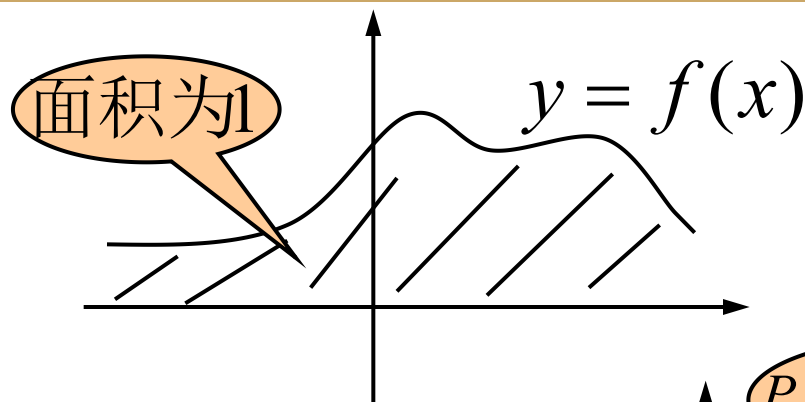
3) 对于任意的实数 $x_1, x_2 (x_2 > x_1)$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \Rightarrow P\{X = a\} = 0$$

4) 在 $f(x)$ 连续点 x , $F'(x) = f(x)$

即在 $f(x)$ 的连续点

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$$



三种重要的连续型随机变量

1. 均匀分布

○ **定义：** 设连续型随机变量 X 具有概率密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

则称 X 在区间 (a, b) 上服从**均匀分布**。记为 $X \sim U(a, b)$

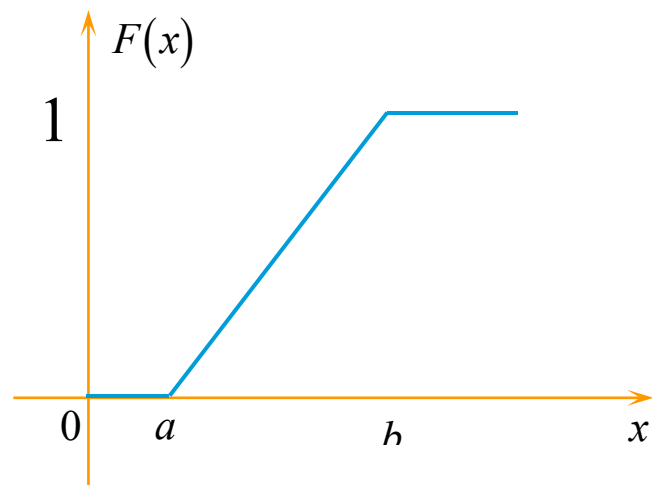
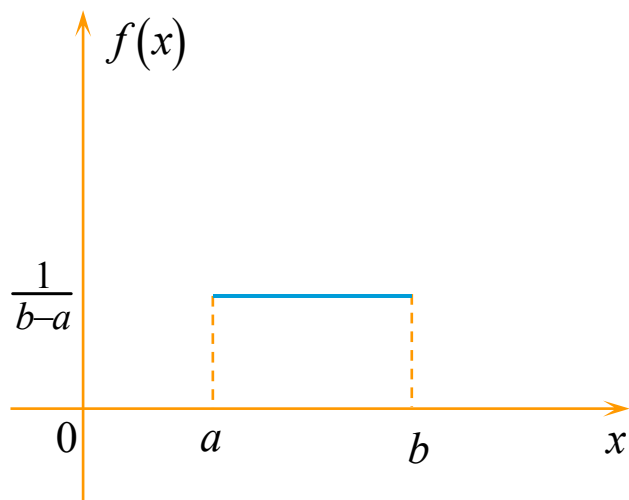
○ **注：** X 落在 (a, b) 上任一子区间内的概率只依赖于子区间的长度，而与位置无关。

设 $a \leq c < c+l \leq b$

$$\Rightarrow P\{c < X < c+l\} = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dt = \frac{l}{b-a} \quad \text{----与} c \text{ 无关}$$

◉ 均匀分布的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$



2. 指数分布

- 定义：连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (\theta > 0)$$

称 X 服从参数为 θ 的指数分布，记为 $X \sim EP(\theta)$

- 指数分布的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \end{cases} \quad (\theta > 0)$$

三种重要的连续型随机变量

3. 正态分布

1. **定义：** 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为常数，则称 X 服从参数为 μ, σ 的**正态分布**（也称为**Gauss分布**），记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

2. $f(x)$ 图形的性质:

① 关于 $x = \mu$ 对称

结论: $\forall h > 0, P\{\mu - h < x \leq \mu\} = P\{\mu < x \leq \mu + h\}$

② 当 $x = \mu$ 时, 取得最大值 $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

③ σ 固定, 改变 μ , $f(x)$ 的图形不变, 沿 x 轴平移
 μ 固定, 改变 σ , 由最大值 $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 知, σ 越小, 图形越尖, X 落在 μ 附近的概率越大。

④ $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 即曲线以 X 轴为渐近线。

3. 分布函数 $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

4. 标准正态分布

$\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 称 X 服从标准正态分布, $X \sim N(0, 1)$

概率密度函数 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

分布函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

结论: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$\Phi(x)$ 的函数值见标准正态分布表

例 $X \sim N(0, 1)$, 求 $P\{-2.01 < X \leq 3.25\}$

5. 正态分布转变为标准正态分布

引理 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

结论:

I. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则它的分布函数, 可写成:

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{II. } P\{x_1 < X \leq x_2\} &= P\left\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

III. 正态分布的问题都可以通过线性变换转化为标准正态分布, 然后查书中标准正态分布表得解

○ 例 $X \sim N(1, 4)$, 求 $P\{0 < X \leq 1.6\}$

随机变量的函数的分布

问题提出： 已知随机变量 X 的概率分布，且已知 $Y=g(X)$ ，求 Y 的概率分布。

1. 离散型

离散型随机变量的函数分布律的求法：

1. 找出 $Y=g(X)$ 的所有可能取值
2. 找出每个值对应的 X 取值，将对应概率相加

例 设随机变量 X 具有分布律

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

求 $Y = X^2$ 的分布律。

✦ 关键是找出 Y 的等价事件。

2. 连续型

连续型随机变量的函数分布的求法：

1. 求 $Y=g(X)$ 的取值范围
2. 分段讨论

① 在取值范围外的 y , $f_Y(y) = 0$

② 在取值范围内的 y ,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \leq g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = (F_X(g^{-1}(y)))' = f_X(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1}(y))'$$

定理： 设 $X \sim f_X(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $g'(x) > 0$ (或 $g'(x) < 0$)。
 $Y = g(X)$, 则 Y 具有概率密度为：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$,
 $h(y) = x \Leftrightarrow y = g(x)$

随机变量的数字特征

- 1. 期望的定义、定理、性质及求解
- 2. 方差的定义、性质及求解
- 3. 六个重要分布的数学期望和方差
- 4. 切比雪夫不等式

数学期望的定义

定义: 设离散型随机变量 X 的分布律为: $P(X = x_k) = p_k \quad k = 1, 2, \dots$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X

的数学期望, 记为 $E(X)$, 即 $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

定义: 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛 (即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$)

则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$

即 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

数学期望简称期望, 又称均值。

定理

定理：设 Y 是随机变量 X 的函数： $Y = g(X)$ （ g 是连续函数），

④ X 是离散型随机变量，它的分布律为：

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则有 $E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$

④ X 是连续型随机变量，它的概率密度为 $f(x)$

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛

则有 $E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

定理的**重要意义**在于我们求 $E(Y)$ 时，不必算出 Y 的分布律或概率密度，而只要利用 X 的分布律或概率密度就可以了。

$E(X)$ 的性质

1. 设 C 是常数，则有 $E(C) = C$
2. 设 X 是一个随机变量， C 是常数，则有 $E(CX) = CE(X)$
3. 设 X, Y 是两个随机变量，则有 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
将上面三项合起来就是： $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$
4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量，则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$

方差

定义:

设 X 是一个随机变量, 若 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在, 则称其为 X 的方差, 记为 $D(X)$ 或 $Var(X)$, 即 $D(X) = Var(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$

将 $\sqrt{D(X)}$ 记为 $\sigma(X)$, 称为 X 的标准差或均方差, 它是与随机变量 X 具有相同量纲的量。

方差 $D(X)$ 刻画了 X 取值的分散程度, 它是衡量 X 取值分散程度的一个尺度。若 X 取值比较集中, 则 $D(X)$ 较小, 反之, 若 X 取值比较分散, 则 $D(X)$ 较大。

对于离散型随机变量 X , 其分布律为: $P(X=x_k)=p_k \quad k=1,2,\cdots$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k$$

对于连续型随机变量 X , 其概率密度为 $f(x)$,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

此外, 利用数学期望的性质, 可得方差得计算公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned} \text{事实上, } D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} = E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

方差的性质

1. 设 C 是常数, 则 $D(C) = 0$
2. 设 X 是随机变量, C 是常数, 则有 $D(CX) = C^2 D(X)$
3. 设 X, Y 是两个随机变量,
则有 $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$
特别, 若 X, Y 相互独立, 则有 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$
综合上述三项, 设 X, Y 相互独立, a, b, c 是常数,
则 $D(aX + bY + c) = a^2 D(X) + b^2 D(Y)$
4. $D(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = C) = 1$ 且 $C = E(X)$
 $\Leftrightarrow X$ 以概率1取常数 $C = E(X)$

独立的 n 个正态变量的线性组合仍服从正态分布：

若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i=1, 2, \dots, n$ 且它们相互独立

则它们的线性组合：

$$C_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \\ \sim N(C_0 + C_1\mu_1 + \dots + C_n\mu_n, C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \dots + C_n^2\sigma_n^2)$$

$C_1, C_2 \dots C_n$ 是不全为0的常数

如： $X \sim N(1, 3)$, $Y \sim N(2, 4)$ 且 X, Y 相互独立，

则 $Z = 2X - 3Y \sim N(-4, 48)$

一般若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

6种常见分布的期望与方差

分布	分布律或密度函数	数学期望	方差
0—1分布	$P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}$ $k = 0, 1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $b(n, p)$	$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $\pi(\lambda)$	$P(X = k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$ $k = 0, 1, \dots,$	λ	λ
均匀分布 $U(a, b)$	$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $EP(\theta)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	θ	θ^2
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$	μ	σ^2

定理 (切比雪夫不等式)

设 X 是随机变量, 若 $D(X)$ 存在, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

切比雪夫不等式的等价形式

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

注:

1. 切比雪夫不等式可用来估计不是服从正态分布的随机变量落在 $E(X)$ 附近的概率。
2. 切比雪夫不等式的主要作用是进行概率论的理论研究。

样本及抽样分布

- 1. 样本的定义（独立同分布）
- 2. 统计量的定义和判别
- 3. 统计学三大分布的定义和图形轮廓
- 4. 三大分布的分位点定义

样本

- ▶ **总体**：试验中全部可能的观察值（研究对象的全体，如一批灯泡），一个总体对应于一个随机变量 X 。
- ▶ **个体**：每个可能观察值称为个体（组成总体的每个元素，如某个灯泡）
- ▶ **抽样**：从总体 X 中抽取有限个个体对总体进行观察的取值过程。
- ▶ **随机样本**：随机抽取的 n 个个体的集合 (X_1, X_2, \dots, X_n) , n 为样本容量。
- ▶ **简单随机样本**：满足以下两个条件的随机样本 (X_1, X_2, \dots, X_n)
 1. 每个 X_i 与 X 同分布
 2. X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的随机变量

[说明]：后面提到的样本均指简单随机样本。

统计量

► **统计量：** 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 X 的样本，则函数 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 如果不包含任何未知参数则称为样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的一个统计量。

简言之，样本的不含任何未知参数的函数。

思考题：

设在总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取样本 (X_1, X_2, X_3) ，其中 μ 已知， σ^2 未知
指出在 (1) $X_1 + X_2 + X_3$ (2) $X_2 + 2\mu$ (3) $\max(X_1, X_2, X_3)$

$$(4) \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^3 X_i^2 \quad (5) |X_3 - X_1|$$

哪些是统计量，哪些不是统计量，为什么？

答：只有 (4) 不是统计量。

常用的统计量

1. 样本平均值: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
2. 样本方差: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$
3. 样本均方差: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$
4. 样本 k 阶(原点)矩: $A_k = \overline{X^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1, 2, \dots$
5. 样本 k 阶中心矩: $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k = 2, 3, \dots$

统计学三大分布

定义： 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立， $X_i \sim N(0, 1)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

则称 $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ (1)

服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

自由度指(1)式右端包含的独立变量的个数

定义： 设 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 并且 X, Y 相互独立，

则称随机变量 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $t \sim t(n)$

定义： 设 $U \sim \chi^2(n_1)$, $V \sim \chi^2(n_2)$, 且 U, V 独立，

则称随机变量 $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度 (n_1, n_2) 的 F 分布，记为 $F \sim F(n_1, n_2)$

其中 n_1 称为第一自由度， n_2 称为第二自由度

■ χ^2 分布的一些重要性质:

1. 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则有 $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$
2. 设 $Y_1 \sim \chi^2(n_1), Y_2 \sim \chi^2(n_2)$, 且 Y_1, Y_2 相互独立, 则有 $Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$

性质2称为 χ^2 分布的可加性, 可推广到有限个的情形:

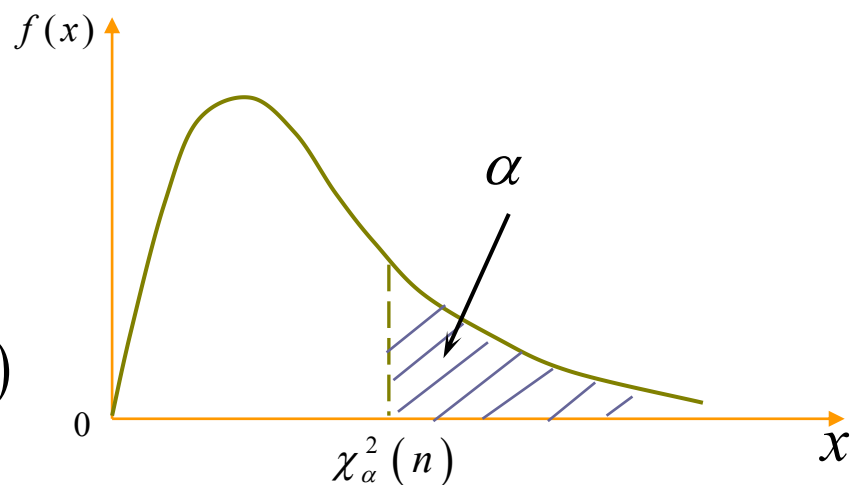
设 $Y_i \sim \chi^2(n_i)$, 且 Y_1, Y_2, \dots, Y_m 相互独立, 则 $\sum_{i=1}^m Y_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^m n_i\right)$

对给定的概率 $\alpha, 0 < \alpha < 1$,

称满足条件 $\int_{\chi_{\alpha}^2(n)}^{\infty} f(y) dy = \alpha$

的点 $\chi_{\alpha}^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的
上 α 分位点, 上 α 分位点 $\chi_{\alpha}^2(n)$

的值可查 χ^2 分布表.



χ^2 分布的分位点

例: $\alpha = 0.1, n = 25 \quad \chi_{0.1}^2(25) = 34.381$

★ t 分布

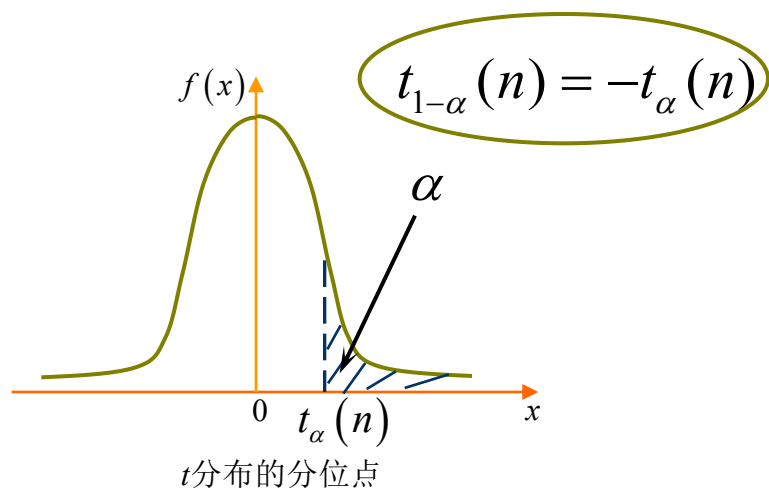
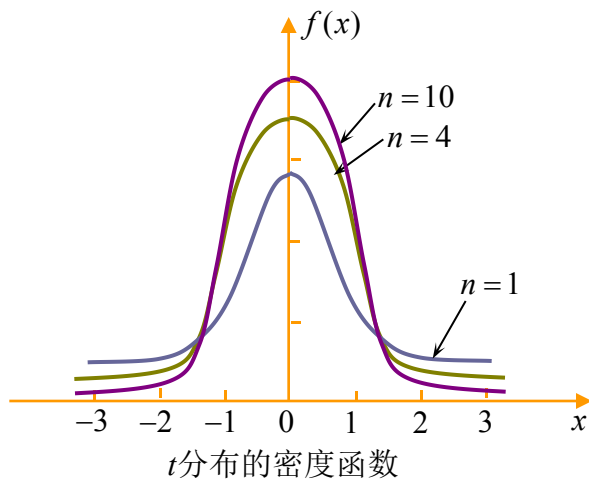
★ **定义：** 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 并且 X, Y 相互独立,

则称随机变量 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记为 $t \sim t(n)$

$t(n)$ 分布的概率密度为:
$$h(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, -\infty < t < +\infty$$

对给定的 α , $0 < \alpha < 1$, 称满足条件 $\int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t) dt = \alpha$ 的点 $t_\alpha(n)$

为 $t(n)$ 分布的 **上 α 分位点**。 t 分布的上 α 分位点可查分布表



★ F 分布

★ 定义：设 $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$, 且 U, V 独立,

则称随机变量 $F = \frac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$

其中 n_1 称为第一自由度, n_2 称为第二自由度

性质： $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $F^{-1} \sim F(n_2, n_1)$

$F(n_1, n_2)$ 分布的概率密度为:

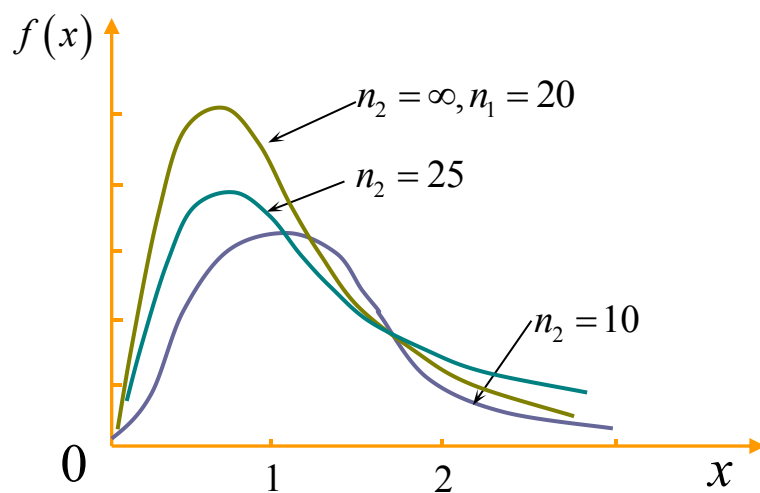
$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma[(n_1 + n_2)/2] (n_1/n_2)^{n_1/2} y^{(n_1/2)-1}}{\Gamma(n_1/2) \Gamma(n_2/2) [1 + (n_1 y/n_2)]^{(n_1+n_2)/2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对于给定的 α , $0 < \alpha < 1$, 称满足条件 $\int_{F_\alpha(n_1, n_2)}^{\infty} f(x, n_1, n_2) dx = \alpha$ 的点 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 为 $F(n_1, n_2)$ 分布的上 α 分位点。 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 的值可查 F 分布表

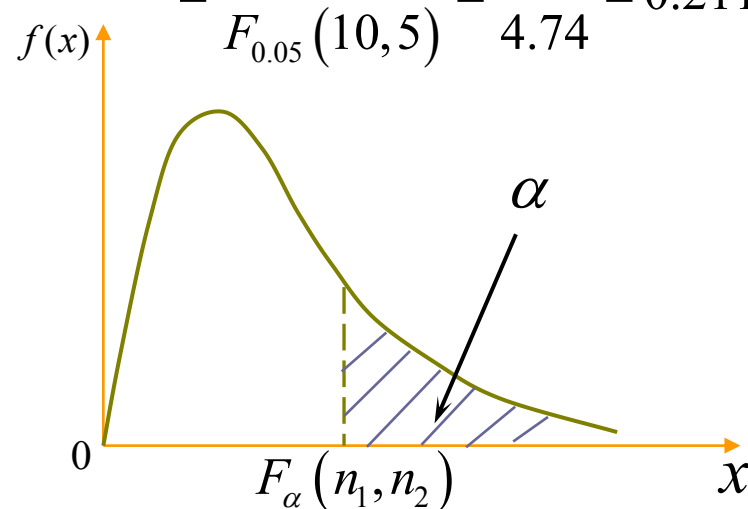
$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = [F_\alpha(n_2, n_1)]^{-1}$$

例如: $F_{0.95}(5, 10)$

$$= \frac{1}{F_{0.05}(10, 5)} = \frac{1}{4.74} = 0.211.$$

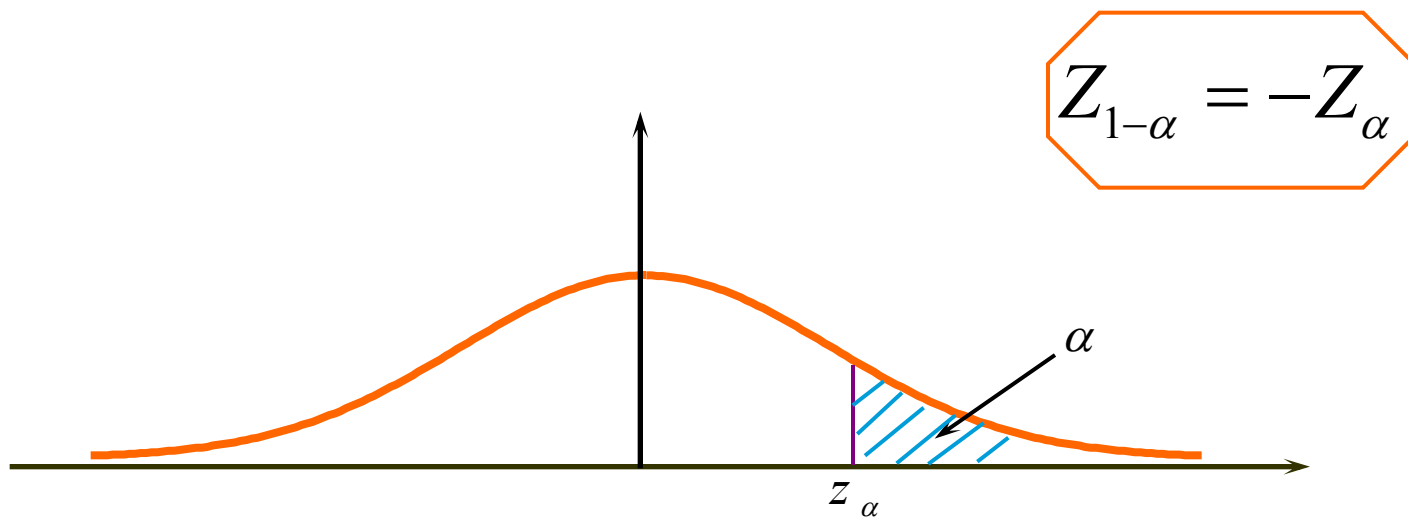


F 分布的密度函数



F 分布的分位点

此外, 设 $X \sim N(0,1)$, 若 Z_α 满足条件 $P\{X > Z_\alpha\} = \alpha, 0 < \alpha < 1$
则称点 Z_α 为标准正态分布的上 α 分位点。



参数估计

- 1. 矩估计法（三步法）
- 2. 最大似然估计法（三步法）
- 3. 估计量三大评选标准的定义及证明
（无偏性、有效性、相合性）
- 4. 单个正态总体均值和方差的区间估计

矩估计法

设总体 X 的分布函数为 $F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 是待估计的未知参数, 假定总体 X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)$ 存在, 则有: $E(X^v) = \mu_v(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad v = 1, 2, \dots, k$, 对于样本 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$,

其 v 阶样本矩是: $A_v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^v \quad v = 1, 2, \dots, k$

用样本矩作为总体矩的估计, 即令:

$$\begin{cases} \mu_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = A_1 \\ \mu_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = A_2 \\ \vdots \\ \mu_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = A_k \end{cases}$$

解此方程即得 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 的一个矩估计量 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k)$

最大似然估计的求法

1. 单参数

① 写出似然函数 $L(\theta)$

② 求 $\hat{\theta}$ ，使得 $L(\hat{\theta})$ 为 $L(\theta)$ 的最大值，求法如下：

求使得方程 $L'(\theta) = 0$ 的 θ

又 $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$ 在同一 θ 处取得极值，因此， θ 的最大似然估计值可从方程 $(\ln L(\theta))' = 0$ 中求得

称 $(\ln L(\theta))' = 0$ 为似然方程

最大似然估计法

2. 双参数

○ 似然函数

$$L(\theta_1, \theta_2) = p(x_1; \theta_1, \theta_2) \cdot p(x_2; \theta_1, \theta_2) \cdots p(x_n; \theta_1, \theta_2)$$

○ 似然方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

估计量的评选标准

对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价好坏？

通常用三条标准检验：无偏性，有效性，相合性

➡ 无偏性

定义：若参数 θ 的估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，满足 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ，
则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计量。

若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$ ，那么 $|E(\hat{\theta}) - \theta|$ 称为估计量 $\hat{\theta}$ 的偏差

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ ，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的渐近无偏估计量

➡ 有效性

- ☀ 定义：设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计，
如果 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$ ，对一切 $\theta \in \Theta$ 成立，
且至少对某一个 $\theta \in \Theta$ 上式中的不等式成立，
则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效。

➡ 相合性

★定义：设 $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 为参数 θ 的估计量，
若对于任意 $\theta \in \Theta$ ，当 $n \rightarrow +\infty$ 时， $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ ，
即 $\forall \varepsilon > 0$ ，有： $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$ 成立，
则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量或一致估计量

正态总体均值与方差的区间估计

单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情形

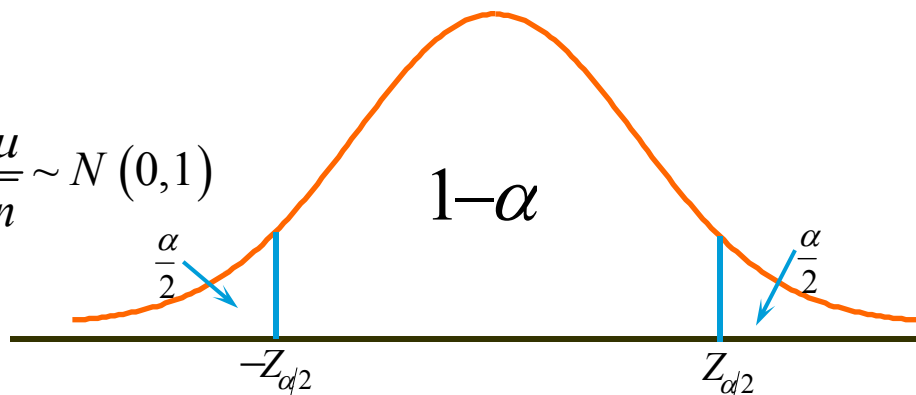
X_1, X_2, \dots, X_n 来自 $N(\mu, \sigma^2)$, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和方差, 置信度为 $1 - \alpha$

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2 已知时

\bar{X} 是 μ 的无偏估计, 由 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

$$\text{有 } P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$



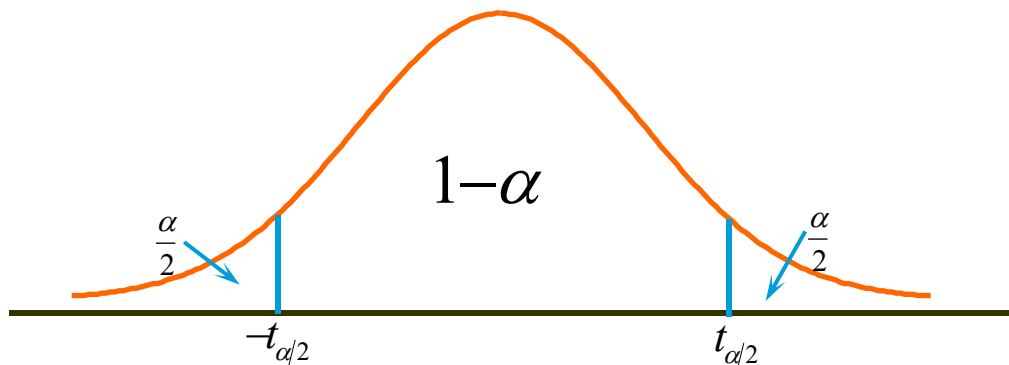
$$\text{即 } P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

置信区间为: $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right)$

(2) σ^2 未知时

有：

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



$$\text{有 } P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

$$\text{即 } P\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

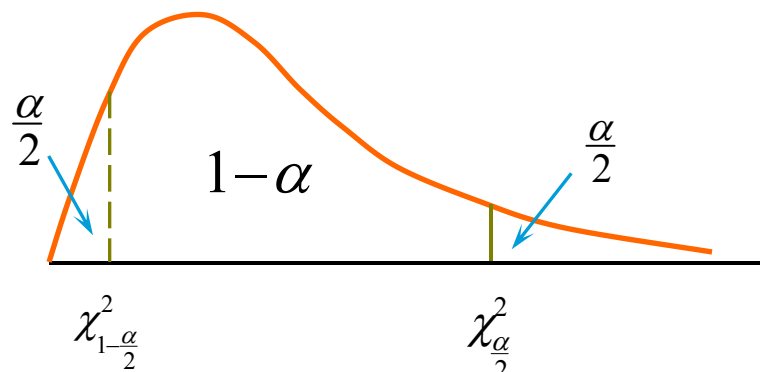
置信区间为：

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

2. 方差 σ^2 的置信区间

设 μ 未知

有:



$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

思考题:

均方差 σ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是什么?

置信区间为:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right)$$

正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限 (置信度 $1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	W 的分布	置信区间	单侧置信限
一个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2} \right)$	$\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha}$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha}$
	μ	σ^2 未知	$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right)$	$\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right)$	$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}$ $\underline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$	$\overline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} - Z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1 - \mu_2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知	$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$	$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$	$\overline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ $\underline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1, μ_2 未知	$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right)$	$\overline{\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right)} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)}$ $\underline{\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right)} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)}$

假设检验

- 1. 假设检验的定义
- 2. 假设检验的三步法
- 3. 单个正态总体均值和方差的假设检验统计量和拒绝域

问题： 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ 已知, μ 未知。给定 μ_0 , 问 $\mu = \mu_0$?

假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$.

H_0 称为**原假设**(零假设), H_1 称为**备择假设**(对立假设)。

通过某种方式确定常数 k 。若 $|\bar{x} - \mu_0| < k$, 则接受 H_0 , 若 $|\bar{x} - \mu_0| \geq k$, 则拒绝 H_0 (接受 H_1)。

犯两类错误的概率:

若 H_0 为真而被拒绝, 我们称为犯**第一类错误**(又称犯“**弃真**”错误, 其概率记为 α 。一般, $\alpha \leq 0.1$ 。

若 H_0 为假而被接受, 我们称为犯**第二类错误**(又称犯“**取伪**”错误, 其概率记为 β 。

记 $P(\text{拒绝}H_0 | H_0 \text{为真}) = \alpha = P_{\mu_0}(\text{拒绝}H_0)$.

取检验统计量为 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$\alpha = P(|\bar{X} - \mu_0| \geq k) = P\left(|Z| \geq \frac{k}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = 2P\left(Z \geq \frac{k}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

即
$$P\left(Z \geq \frac{k}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

我们称拒绝 H_0 的区域 W 为拒绝域，将接受 H_0 的区域称为接受域。

H_0 的拒绝域为 $W = \{ |Z| \geq z_{\alpha/2} \}$,

H_0 的接受域为 $\bar{W} = \{ |Z| < z_{\alpha/2} \}$ 。

Z检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ $\sim N(0, 1)$	$ Z \geq z_{\alpha/2}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$Z \leq -z_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$Z \geq z_{\alpha}$

t 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ $\sim t(n-1)$	$ t \geq t_{\frac{\alpha}{2}}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t \leq -t_{\alpha}$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \geq t_{\alpha}$

关于 σ^2 的检验（ χ^2 检验法）

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\sim \chi^2(n-1)$ <p>(μ 未知)</p>	$\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$

基本初等函数导数公式表1

函数 $y=f(x)$	导函数 $y'=f'(x)$
$y=c$	$y'=0$
$y=x^{\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
$y=a^x$ ($a>0, a \neq 0$)	$y'=a^x \ln a$
$y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1, x>0$)	$y'=\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$

基本初等函数导数公式表2

函数 $y=f(x)$	导函数 $y' = f'(x)$
$y=\sin x$	$y' = \cos x$
$y=\cos x$	$y' = -\sin x$
$y=\tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y=\cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

基本求导公式

$$1. c' = 0$$

$$2. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$3. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$5. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$7. (\sin x)' = \cos x$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x$$

$$9. (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$10. (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$13. (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$14. (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$15. (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$16. (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

函数的和、差、积、商的求导法则

设函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 在点 x 可导, 则 $u \pm v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ ($v \neq 0$) 在点 x 处也可导, 且

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 可以推广到有限个

2. $(uv)' = u'v + uv'$

特别地, $(Cu)' = Cu'$. C 为常数.

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$