Rappels et Méthodologie

I - Rappels de notions connues

Basé sur le syllabus de la 1ère année, voici un ensemble de concepts et d'outils mathématiques, et leurs notations, que vous devriez connaître. Si ce n'est pas le cas, il est urgent de les réviser. Nous les utiliserons comme base dans les exemples qui suivent.

1. Raisonnements (équivalence, récurrence, disjonction de cas, analyse/synthèse, ...)
2. Ensembles (A, $x \in A$, $\varnothing$, $\{x \in A \ / \ \dots\}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A}$, $E \backslash A$, $A \subset B$, $\#A = |A| = \text{Card}(A)$, ...)
3. Logique ($\forall$, $\exists$, $\neg$, $\implies$, $\Leftrightarrow$, contraposée, ET, OU, ...)
4. Fonctions sur les ensembles ($f : E \to F$, $f \in E^F$, $f\big|_A$, $\mathbb{1}_E$,$f(A)$, $f^{-1}(B)$,$f \circ g$, injection, surjection, bijection, relation d'équivalence $\sim$, ...)
5. Nombres complexes ($z, \bar{z}, |z|, \arg(z), \rho e^{i\theta}$,$\Re e(z) + i\Im m(z)$, $\mathbb{U}$, formules d'Euler et de Moivre,e^z, $z^{1/2}$, $1^{1/n}$, résolution d'équations du second degré ...)
6. Trigonométrie (cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan, $\cos(a + b)$, $\cos(p) + \cos(q)$, etc ...)
7. Calcul algébrique ($\prod\limits_{n \in A}$, $\sum\limits_{n \in A}$, $a^n - b^n$, techniques de calculs, $\binom{n}{p}$, $(a + b)^n$, ...)
8. Inégalités ($[a; b]$, $]a; +\infty[$, $\leqslant, \geqslant, <, >$, $|a|$, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, bornes, sup, inf, ...)
9. Fonctions réeles ($f : x \mapsto f(x)$,parité, périodicité, monotonie, inverse, borne, transformation géométriques, ...)
10. Dérivation ($f'(x)$, $f''(x)$, continuité, dérivabilité, classe $\mathcal{C}^1$,$\mathcal{C}^n$,$\mathcal{C}^\infty$, $(f \circ g)'(x)$, $(f \times g)'$, ...)
11. Étude de fonction (tableaux de variations, asymptotes, branches infinies, ...)
12. Fonctions de base (exponentielle, sh, ch, th, sin, cos, tan, ln, inverse, polynômes, ...)
13. Intégrales ($\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, intégration par partie, primitives, ...)
14. Équations différentielles ($y' + a(x)y = b(x)$, $ay'' + by' + cy = f(x)$, problème de Cauchy, principe de superposition, variation de la constante, ...)
15. Construction de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, approximation décimale et relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.
16. Suites de réels ($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suites arithmétiques, géométriques, récurrentes d'ordre 1, récurrentes linéaires d'ordre 2, monotonie, borne, sup, inf, ...)
17. Limites ($u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, $\lim u_n$, convergence, divergence, calculs sur les limites, formes indeterminées, démonstration d'existence, sous-suites, ...)
18. Liens entre limites de suites et fonctions continues ($\lim\limits_{x \to a} f(x)$, limites à droite/gauche, ...), continuité en un point, sur un intervalle, fonctions continues sur un intervalle, théorème des valeurs intérmédiaires, ...)
19. Différentiabilité (Taylor à l'ordre 1, théorèmes de Rolle, des accroissement finis, fonctions k-lipschitzienne, point fixe d'une contraction, raccordements continus, dérivées d'ordre n...)
20. Analyse asymptotique ($\underset{n \to \infty}{=}$, $o(u_n)$, $O(u_n)$, $\underset{n \to \infty}{\sim}$, relations de comparaison, extension aux fonctions, polynômes de Taylor des fonctions usuelles, formules de Taylor et utilisations, ...)
21. ...

II - Présentation d'un calcul

Savoir présenter un calcul ou un raisonnement est un travail essentiel en mathématique. Il vous permet d'être lu et compris, et vous force à être clair et rigoureux dans vos démonstrations.

1- Développement et factorisation

Remarque 1. Lorsqu'il est demandé **d'évaluer** ou **d'exprimer** une quantité, ou de **développer** ou **factoriser** un terme algébrique, il convient de :

- n'utiliser qu'une égalité par ligne
- garder un nombre raisonnables d'opérations par ligne (rester concis et succint, tout en étant clair et facile à suivre)
- mettre en évidence le résultat final

Exemple 1. Voici quelques exemples de calculs biens présentés (✓), et mal présentés (☒) :

Dérivation

☒ $f(x) = (1 + e^x + x\sqrt{3x})$ donc $f'(x) = (1)' + (e^x)' + (x\sqrt{3x}))' = e^x + \dfrac{5}{2}\sqrt{3x}$
Tout les calculs sont sur une ligne, et la dernière étape n'est pas très compréhensible.

✓ $f(x) = 1 + e^x + x\sqrt{x}$ donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1 + e^x + x\sqrt{3x})' \\
&= 0 + e^x + (x\sqrt{3x})' \\
&= e^x + 1 \times \sqrt{x} + x\frac{3}{2\sqrt{3x}} \\
&= e^x + \sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} \\
&= e^x + \frac{5}{2}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{f'(x) = e^x + \frac{5}{2}\sqrt{x}}$$

☒ $(1 + \cos(x))(1 + \sin(x) - (\cos(x) + \sin(x)) = (1 + \cos(x))(1) + (1 + \cos(x))(\sin(x)) - (\cos(x) + \sin(x)) = 1 + \cos(x) + \sin(x) + \cos(x)\sin(x) - (\cos(x) + \sin(x)) = 1 + \cos(x) + \sin(x) + \cos(x)\sin(x) - \cos(x) - \sin(x) = 1 + \cos(x) - \cos(x) + \sin(x) - \sin(x) + \cos(x)\sin(x) = 1 + 0 + \sin(x) - \cos(x) + \sin(x)\cos(x) = 1 + 0 + \sin(x)\cos(x) = 1 + (1/2)2\sin(x)\cos(x) = 1 + 1/2\sin(2x)$
Ce n'est absolument pas clair : c'est bien trop long et on se perd dans les calculs, qui pour la plupart son absolument évidents.

✓ Commençons par distribuer le premier terme :

$$\begin{aligned}
(1 + \cos(x))(1 + \sin(x)) - (\cos(x) + \sin(x)) &= 1 + \cos(x) + \sin(x) + \cos(x)\sin(x) - (\cos(x) + \sin(x)) \\
&= 1 + \cancel{\cos(x)} + \cancel{\sin(x)} + (1/2)2\sin(x)\cos(x) - \cancel{\cos(x)} - \cancel{\sin(x)} \\
&= 1 + 1/2\sin(2x)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{(1 + \cos(x))(1 + \sin(x)) - (\cos(x) + \sin(x)) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2x)}$$

2- Résolution d'équations

Remarque 2. Certaines tâches nécessitent, outre le calcul, un effort supplémentaire de mise en forme afin qu'un lecteur puisse comprendre la logique interne du raisonnement.

Exemple 2.

☒ $(x+3)(2x-1)=0 \rightarrow x=3, \dfrac{1}{2}$

Cet exemple est peut-être facile à suivre, mais il faut prendre l'habitude de rédiger aussi ces parties :

✓ "On veut résoudre : $(E) : (x+3)(2x-1)=0$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } (x+3)(2x-1)=0 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+3 &=& 0 \\ 2x-1 &=& 0\end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow x=-3 \text{ ou } x=\frac{1}{2} \\ \text{Donc } \mathcal{S}_{(E)} &= \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}\end{aligned}$$

3- Inégalités

Lors de longs calculs, il peut être utile de détailler la justification des étapes intermédiaires.

Exemple 3. Soit $a \in [-1;1]$ et $b \leqslant 0$, $|b| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $\dfrac{|a^{n+1}-b^{n+1}|}{|a-b|} \leqslant \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

☒

$$\begin{aligned}\frac{(a^{n+1}-b^{n+1})}{|a-b|} &= \frac{1}{|a-b|}(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n) \\ \Longrightarrow \frac{|a^{n+1}-b^{n+1}|}{|a-b|} &= |a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n| \\ &\leqslant (|a^n|+|a^{n-1}b|+\cdots+|ab^{n-1}|+|b^n|) \\ &\leqslant (1+|b|+\cdots+|b^n|) \\ &\leqslant (1+b+\cdots+b^n) \\ &\leqslant \frac{1-b^{n+1}}{1-b}\end{aligned}$$

✓ Soit $a \in [-1;1]$ et $b \leqslant 0$, $|b| \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}(a^{n+1}-b^{n+1}) &= (a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n) \text{ factorisation de } (a^n-b^n) \\ \Longrightarrow |a^{n+1}-b^{n+1}| &= |a-b||a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n| \\ &\leqslant |a-b|(|a^n|+|a^{n-1}b|+\cdots+|ab^{n-1}|+|b^n|) \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant |a-b|(1+|b|+\cdots+|b^n|) \text{ car } |a| \leqslant 1 \\ &\leqslant |a-b|(1+b+\cdots+b^n) \text{ car } b \geqslant 0 \\ &\leqslant |a-b|\frac{1-b^{n+1}}{1-b} \quad \text{(somme des termes d'une suite géométrique)} \\ \Longrightarrow \frac{|a^{n+1}-b^{n+1}|}{|a-b|} &\leqslant \frac{1-b^{n+1}}{1-b} \text{ car } |a-b| \geqslant 0\end{aligned}$$

III - Rédaction d'une démonstration

1- Qu'est-ce qu'une démonstration ?

Une démonstration est un raisonnement **logique**, qui a partir d'**hypothèses**, de **défintions**, et de **théorèmes**, aboutit à une nouvelle propriété, considérée alors comme vraie. Il est donc important d'être *rigoureux* et *clair*, sans quoi la démonstration ne peut être valide. On fera donc bon usage des connecteurs de raisonnement : **si...alors**, **donc**, **de plus**, ... Et l'on fera attention a introduire nos variables ("Soit $a \in \mathbb{R}$ ", ...) et nos calculs (en essayant d'expliquer ce que l'on cherche à faire). De plus, les propriétés que l'on utilise devront être explicitement mentionnées, ainsi que leur origine : ("*par énoncé*", "*par hypothèse*", "*d'après le théorème de ...*", "*par définition*", "*par la propriété montrée dans la question 1.B.a*", ...). Attention, ces termes ne sont pas interchangeables. Enfin, il est bon de mettre en valeur (souligner, encadrer) le résultat final ainsi montré.

2- Premier exemple

Exemple 4. Soient deux suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$ et l_1, l_2 deux réels. Montrez que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 + l_2$.

✓ Par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geqslant n_1, |u_n - l_1| \leqslant \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geqslant n_2, |v_n - l_2| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, et prenons $n_3 = \max(n_1, n_2)$. alors :

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| &= |u_n - l_1 + v_n - l_2| \\ &\leqslant |u_n - l_1| + |v_n - l_2| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \text{ car } n_3 \geqslant n_1 \text{ et } n_3 \geqslant n_2 \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geqslant n_3, |u_n - l_1| \leqslant 2\varepsilon$

Or, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2\varepsilon = 0$, donc par propriété, $\underline{u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 + l_2}$. □

3- Rédaction d'une récurrence

La récurrence se compose de 4 étapes, il est important de bien les rédiger et les expliquer :

Exemple 5. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, soit $a \in \mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(n+1)(t)\mathrm{d}t$$

✓ ***Initialisation***

Montrons la propriété pour le cas $n = 0$:

Par le théorème fondamental de l'intégration : $\displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$ Donc $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ et la propriété est vraie au rang 0.

Hypothèse de récurrence :
Supposons que $\exists n \in \mathbb{N}$ / $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(n+1)(t)\mathrm{d}t$. Appelons cette propriété (H_n).
Démonstration de la récurrence :
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'hypothèse de récurrence : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(n+1)(t)\mathrm{d}t(1)$
La fonction $f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ car c'est un polynôme en t. On peut donc appliquer une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(n+1)(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \text{ car le premier terme est nul}\end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans (1), on obtient :

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f(n+2)(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f(n+2)(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On a donc (H_{n+1}).
Conclusion :
D'après l'initialisation, (H_0) est vraie. De plus, on a montré la récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : (H_{n+1} \implies (H_n)$. On peut donc en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, (H_n)$, soit $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(n+1)(t)\mathrm{d}t}$

4- Un dernier exemple

Exemple 6. Montrer que toute fonction réelle se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
✓ Il faut commencer par traduire l'énoncé en termes mathématiques. Cela donne :
Soit $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que $\exists! f_p, f_i$ / $\forall x \in \mathbb{R} f_p(-x) = f_p(x)$, $f_i(-x) = -f_i(x)$, et $f(x) = f_p(x) + f_i(x) \quad (P)$.
Analyse :
Supposons que la propriété (P) soit vérifiée. Alors on a :

$$\begin{aligned}f(-x) &= f_p(-x) + f_i(-x) \\ &= f_p(x) - f_i(x) \\ \text{Alors } f(x) + f(-x) &= f_p(x) + f_i(x) + f_p(x) - f_i(x) \\ &= 2f_p(x)\end{aligned}$$

Donc $f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et de même, $f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Synthèse : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. Posons :

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
$$f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

f_p est une fonction paire. En effet, son ensemble de définition $\mathbb{R}$ est centré en 0, et $\forall x \in \mathbb{R}, f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_p(x)$. On vérifie de même que la fonction f_i est impaire. Nous avons donc l'existence d'une décomposition. De plus, le raisonnement de l'analyse nous apporte l'unicité
Donc, il existe une unique décomposition de la fonction f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

IV - Exercices

Afin de vous remettre en forme en mathématiques, et d'évaluer ce qui est retenu du cours de première année, voici quelques exercices.

Exercice 1. Montrer que $\bigcup_{n \in N} [-n; n] = \mathbb{R}$
Indication : se ramener aux définitions.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles finis. On suppose qu'il existe une injection $i : E \to F$ et une surjection $s : E \to F$. Montrer qu'il existe une bijection de E dans F.
Indication : trouver des inégalités sur les cardinaux des ensembles.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Soit $z = \prod_{x \in \mathbb{U}_n \setminus \{-1\}} (x - 1)$.

1. Montrer que $z = (2i)^n \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k\pi/n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
2. Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k\pi/n} = 1$
3. En déduire $|z| \leqslant 2^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor}$
4. Proposer une amélioration encore plus fine de ce résultat.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T-$périodique. Montrer que $\exists x \in [0; T] \;/\; f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f(x)$.

Exercice 5. Après avoir justifié son existence, donnez la dérivée de la fonction $\begin{cases} f & : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)} \frac{\sqrt{1+x}}{x^2+1} \end{cases}$

Exercice 6. Faire une étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

Exercice 7. Résoudre l'équation différentielle $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$

Exercice 8. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re\mathrm{e}(\alpha) > 0$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + \alpha f \xrightarrow[\to +\infty]{} 0$. Montrer que $f \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite : $\begin{cases} u_0 & = 1, u_1 = -1 \\ u_{n+2} & = 2u_{n+1} - u_n \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Expliciter la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 10. Montrer que $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{n^2}$.
Ind : Utiliser le théorème des accroissements finis