目 录

2016-2017 学年第二学期期末考试 A 卷 4

2016-2017 学年第一学期期末考试 A 卷 6

2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷 9

2014-2015 学年第一学期期末考试 A 卷 12

2013-2014 学年第二学期期末考试 A 卷 16

2016-2017 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案 18

2016-2017 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案 21

2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案 26

2014-2015 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案 32

2013-2014 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案 37

北京化工大学 2016-2017 学年第二学期

《线性代数》期末考试 A 卷 答案 P18

一、 填空题。（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, C=(2,-1)^T$，则$C^T(A-B)=$ ______。

2. 设三阶方阵A,B满足$|A|=1,|B|=-2$，则$|A^{-1}B^*+A^*B^{-1}|=$ ______。

3. 若向量组β_1,β_2与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以互相线性表示，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性______。

4. 设三阶方阵A的特征值分别为$1,2,3$，则A的伴随矩阵A^*的迹为______。

5. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_3^2$的秩为______。

二、 计算题（每小题 15 分，共 75 分）

6. 设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix}$，且$|A|X=A^*X+3|A|E$，其中$E$为四阶单位矩阵。

（1） 求$|A|$。 （2）求矩阵X。

7. 求向量组$\alpha_1=(2,4,2)^T,\alpha_2=(1,1,0)^T,\alpha_3=(2,3,1)^T,\alpha_4=(3,5,2)^T$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示。

8. 已知线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$，试讨论当$\lambda$取何值时，方程组

（1）有唯一解？　（2）无解？　（3）有无穷多解，并在此时求出通解。

9. 已知A为三阶实对称矩阵，秩$R(A)=2,\alpha_1=(0,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$是$A$的属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=3$的特征向量。

（1）求$|A|$；（2）求A的另一个特征值λ_3及其对应的特征向量；（3）求矩阵A。

10. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$，经过正交线性变换$X=QY$化为标准形$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，其中$X=(x_1,x_2,x_3)^T,Y=(y_1,y_2,y_3)^T$。求参数$a$的值及所用的正交变换。

三、　证明题（共12分）

11. 设$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$为线性方程组$AX=0$的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,,$ $...,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$，其中$t_1,t_2$为实常数。证明当$t_1^s+(-1)^{1+s}t_2^s\neq 0$时，向量组$\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$线性无关。

北京化工大学 2016-2017 学年第一学期

《线性代数》期末考试 A 卷 答案 P21

一、　填空题。（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$A^T$为$A$的转置矩阵，则行列式$|A^TA|=$______。

2. 矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}=$______。

3. 设$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，并且$PA=B$，则$P=$______。

4. 设三阶矩阵A的秩$r(A)=1, \eta_1=(-1,3,0)^T, \eta_2=(2,-1,1)^T, \eta_3=(5,0,k)^T$是方程组$AX=0$的 3 个解向量，则常数$k=$______。

5. 设 4 阶矩阵A满足$|2E+A|=0, AA^T=4E, |A|<0$，其中E为 4 阶单位矩阵，则伴随矩阵A^*必有一个特征值为__________。

6. **(注：仅 3.0 学分的专业做此题)**若实对称矩阵A与$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$合同，则二次型$X^TAX$的规范形为______。

6*. **(注：仅 3.5 学分的专业做此题)**设$ax^2+2bxy+cy^2=1(a>0)$为一椭圆的方程，则a,b,c满足关系式______。

四、　计算题（每小题 14 分，共 70 分）

7. 设矩阵X满足方程$AX=2X+B$，其中$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 9\\ 1 & 8\\ 1 & 5\end{pmatrix}$，求$X$。

8. 讨论当参数a,b取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1. \end{cases}$，

（1）无解；
（2）有唯一解；
（3）有无穷多解，并在此时用导出组的基础解系表示其通解。

9. 设$f(x)=x^2+3x-5, A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$。

（1） 求A的特征值和特征向量；

（2） 求$f(A)$的特征值和特征向量。

10. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$有二重特征值。

（1） 求a；

（2） 判断A是否能对角化？

11. 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+2ax_2x_3+4x_1x_3$，$(a>0)$经过正交变换化为标准形$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$。

（1） 求a,b的值及所用的正交变换$x=Qy$。

（2）*(注：仅 3.0 学分的专业做此问)确定该二次型的正定性。

五、 证明题（共 12 分）

12. **(注：仅 3.0 学分的专业做此题)**设向量组$B:\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$能由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$，线性表示为$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)K$，其中$K$为$s\times t$矩阵，且$A$组线性无关。证明$B$组线性无关的充分必要条件是矩阵$K$的秩$r(K)=t$。

12*. **(注：仅 3.5 学分的专业做此题)**设A,B是两个n阶非零矩阵，满足$AB=0,A^*\neq0$。若$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$是齐次线性方程组$BX=0$的一个基础解系，$\alpha$是任意一个$n$维列向量。证明$B\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$，$\alpha$线性表示，并问何时线性表示是唯一的。

北京化工大学 2015-2016 学年第一学期

《线性代数》期末考试 A 卷 答案 P27

一、 填空题。(每小题 4 分，共 20 分)

1. 已知矩形$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$A_{ij}$为$|A|$中元素$a_{ij}$的代数余子式。则$A_{21}+2A_{22}+3A_{23}=$______。

2. 设有多项式$f(x)=x^3+1$，矩阵$A=(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T\left(1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\right)$，则$f(A)=$______。

3. 设x_1,x_2,x_3是方程$x^3+px+q=0$的三个根，则行列式$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_3 & x_1 & x_2\\ x_2 & x_3 & x_1\end{vmatrix}=$______。

4. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$线性______。

5. 齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ 2x_2+2x_3=0\end{cases}$的一个基础解系为______。

6. 设三阶矩阵A的特征值互不相同，若行列式$|A|=0$，则A的秩为______。

7. 设三阶矩阵A的特征多项式为$|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，则$\left|E+\frac{1}{6}A^*\right|=$______。

8. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$，则$f$的秩为______；规范形为______；符号差为______。

二、 计算题（每小题 16 分，共 64 分）

9. 设三阶方阵A,B满足$A^2B-A-B=E$，其中E为三阶单位矩阵，若$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求$|B|$。

10. 设$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T,\beta=(1,3,-3)^T$

试讨论当a,b为何值时，

（Ⅰ）β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

（Ⅱ）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地线性表示；

（Ⅲ）β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

11. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$。方程组$AX=\beta$有解但不唯一，试求：

（1） a的值；

（2） 求正交矩阵Q，使Q^TAQ为对角矩阵。

（3） 写出$f=X^TAX$的标准形以及使用的正交变换。

12. **(注：仅 3.0 学分的专业做此题，3.5 学分的专业不做此题)**设向量组

$\alpha_1=(1,3,2,0)^T,\alpha_2=(7,0,14,3)^T,\alpha_3=(2,-1,0,1)^T,\alpha_4=(2,-1,4,1)^T$

（1） 求向量组的秩；

（2） 求向量组的一个极大无关组，并把其余向量由极大无关组线性表示。

12*. **(注：仅 3.5 学分的专业做此题，3.0 学分的专业不做此题)** 已知 R^3 中取两个基 $\begin{cases}\alpha_1=(a,1,1)^T\\ \alpha_2=(0,b,1)^T\\ \alpha_3=(0,0,c)^T\end{cases}$,和 $\begin{cases}\beta_1=(-1,-1,x)^T\\ \beta_2=(y,-1,1)^T\\ \beta_3=(-1,z,1)^T\end{cases}$，并且由前一个基到后一个基的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&2\\0&2&0\end{pmatrix}$。试求 a,b,c 与 x,y,z 的值。

三、 证明题（共 12 分）

13. **(注：仅 3.0 学分的专业做此题，3.5 学分的专业不做此题)** 已知 n 阶矩阵 A^* 为 A 的伴随矩阵。

（1）证明 $AA^*=A^*A=|A|E$；

（2）证明 $|A^*|=|A|^{n-1}$。

13*. **(注：仅 3.5 学分的专业做此题，3.0 学分的专业不做此题)** 设 $f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 是正定二次型。证明：椭圆域 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2\leqslant 1$ 的面积等于 $\dfrac{\pi}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}$。

北京化工大学 2014-2015 学年第一学期

《线性代数》期末考试 A 卷 答案 P32

一、　填空题。（每小题 4 分，共 20 分）

1. 方程$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & x^2 \end{vmatrix}$的全部根为______。

2. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，则$AA^T=$______，其中$A^T$为矩形$A$的转置矩阵。

3. 已知向量组$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,2,5)^T,\alpha_3=(2,4,7)^T$，那么该向量组的秩为______；一个极大线性无关组为______。

4. 若$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$是可逆矩阵$A_{n\times n}$的特征值，则矩阵$A^T$的特征值为______；$A^*$的特征值为______；$A^{-1}$的特征值为______。其中$A^*$和$A^{-1}$分别表示矩阵$A$的伴随矩阵和逆矩阵。

5. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-4x_1x_2+ax_2^2+2x_3^2+2x_3x_4+bx_4^2$是正定的，则参数$a$和$b$的取值范围分别为______。

二、　计算题（每小题 12 分，共 24 分）

1. 计算下列行列式$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & a_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & a_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}$，其中$a_i\neq x_i,i=1,2,\dots,n$。

2. 已知矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，求矩阵方程$A^{*}X=2X+A^{-1}$，其中$A^{*}$和$A^{-1}$分别表示矩阵$A$的伴随矩阵和逆矩阵。

讨论题（每小题12分，共24分）

1. 设有线性方程组$\begin{cases} x-3y-z=0 \\ x-4y+az=b \\ 2x-y+3z=5 \end{cases}$，试问当$a,b$取何值时，此方程组

（1） 有唯一值；（2）无穷解；（3）无解？并在有穷多解时求其通解。

2. 已知一般方阵$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -x & -1 & x \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$，试问当变量$x$取何值时，该方阵可以对角化？并求出可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=\Lambda$，其中$\Lambda$为对角矩阵。

四、　证明题（共 12 分，其中 3.0 学分班级只做第 1 小题，3.5 学分班级只做第 2 小题）

1. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，线性无关，且$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3-\alpha_4,\beta_4=\alpha_4-\alpha_1$，试证向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是线性无关的。

2. 已知三维向量空间　中的两个基为

（Ⅰ）$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$

（Ⅱ）$\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(1,1,0)^T,\beta_3=(0,1,1)^T$

求由基（Ⅰ）到（Ⅱ）的过渡矩阵P。

五、　探索题（共20分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$可通过正交变换$X=PY$化为标准型$y_1^2+y_2^2+by_3^2$。

（1）　写出二次型的矩阵A；

（2）　求参数a和b的值；

（3）　求出满足条件的正交矩阵P；

（4）　求矩阵A^k，其中k为正整数。

北京化工大学 2013-2014 学年第二学期

《线性代数》期末考试 A 卷 答案 P38

一、填空题（每小题 3 分，共 12 分）

1、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&3\end{pmatrix}$，则 $|(2E+A)^T(2E-A)^{-1}(4E-A^2)|=$______.

2、若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-2&0\\3&6&9\end{pmatrix}$，$|B|\neq 0$，则秩 $r(3AB)=$______.

3、若向量 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 为六元线性方程组 $Ax=0$ 的六个解，且 $r(A)=3$，则 a_1,a_2,a_3,a_4 一定线性______关.

4、已知 n 阶矩阵 A 满足 $|aE+bA|=0$，$|A|=c\neq 0$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则伴随矩阵 A^* 必有一个特征值为______.

二、选择题（每小题 3 分，共 6 分）

5、n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的（　）

A. 充分必要条件　　B. 必要而非充分条件

C. 充分不必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2-(x_3+x_1)^2$ 的负惯性指数为（　）

A　0　　B　1　　C　2　　D　3

三、计算题（每小题 18 分，共 72 分）

7、设 4 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，若 A_{4j}，$j=1,2,3,4$ 是行列式 $|A|$ 中第四行各元素的代数余子式，试求 $bA_{41}+bA_{42}+bA_{43}+bA_{44}$

8、讨论λ在不同的取值条件下非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$解的情况并在有无穷多的解的时候用导出组的基础解系表示其通解。

9、已知4阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$均为4维列向量，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组$Ax=\beta$的通解。

10、已知二次型$f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$, 可以经过正交变换$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$,化为$f=v^2+4w^2$, 试求$a,b$的值和正交矩阵$P$。

四、证明题（10分）

11、设$A=(a_{ij})_{m\times n}$是正定矩阵，试证明：

（1）$a_{jj}>0(j=1,2,\cdots,n)$；（2）A^{-1}为正定矩阵。

2016-2017 学年第二学期期末考试 A 卷

参考答案

一、 填空题

1、【正解】$(-5,-4)$

【解析】$(A-B)=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ $C^T=(2,-1)$，$C^T(A-B)=(2,-1)\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}=(-5,-4)$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】——4.基本运算

2、【正解】$\frac{1}{2}$

【解析】$A(A^{-1}B^*+A^*B^{-1})B=AA^*+B^*B=(|A|+|B|)E=-E$

$|A(A^{-1}B^*+A^*B^{-1})B|=|A|\cdot|A^{-1}B^*+A^*B^{-1}|\cdot|B|=-2|A^{-1}B^*+A^*B^{-1}|$ ①

$|-E|_{(3阶)}=-1$ ②

①② 两式相等，$\therefore |A^{-1}B^*+A^*B^{-1}|=\frac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】——矩阵的概率和基本运算

3、【正解】相关

【解析】由题干得$r(\beta_1,\beta_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$ 故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】——向量组的线性相关和线性表示

4、【正解】11

【解析】A的特征值λ为 1，2，3 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1\times2\times3=6$

由$AP=\lambda P$得$A^*P=\frac{|A|}{\lambda}P\Rightarrow A^*$的特征值为 6，3，2，$A^*$的迹为：$6+3+2=11$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19】——由A的特征值求A^*的特征值，A^*的迹与特征值的关系

5、【正解】2

【解析】二次型矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\therefore r(A)=2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 8】——初等变换不改变矩阵的秩

二、 计算题

6、【解析】（1）$|A^*|=|A|^3=8$ $\therefore |A|=2$

（2）$2X=A^*X+6E \quad (2E-A^*)X=6E \quad X=(2E-A^*)^{-1}\cdot 6E$

$$(2E-A^*)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix} \quad (2E-A^*)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$故X=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】——矩阵的逆，$|A^*|=|A|^{n-1}$；矩阵方程的求解

7、【解析】令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&1&2\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \quad r(A)=2$

一个极大线性无关组α_1,α_2，且有$\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2$；$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$（答案不唯一）

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 12】——求向量组的秩；极大线性无关组的概念，并用其表示其余向量

8、【解析】增广矩阵$B=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&\lambda-3\\1&\lambda&1&-2\\1&1&\lambda&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&\lambda&-2\\0&\lambda-1&1-\lambda&0\\0&0&(\lambda+2)(1-\lambda)&3(\lambda-1)\end{pmatrix}$

（1）当$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq1$时，有唯一解

（2）当$\lambda=-2$时，无解

（3）当$\lambda=1$时，有无穷多解，此时$B\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

基础解系$\varepsilon_1=(1,-1,0)^T \quad \varepsilon_2=(1,0,-1)^T$ 特解$(-2,0,0)^T$

故通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$（$c_1,c_2$为任意常数）

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 17】——非齐次线性无关方程组的求解

9、【解析】（1）$\because R(A)=2 \quad \therefore |A|=0$

（2）$\lambda_3=0 \quad \lambda_3$的特征向量满足$\alpha_1\perp\alpha_3$，$\alpha_2\perp\alpha_3$

有$\begin{cases}y=0\\-x+z=0\end{cases}$ 故α_3为$(1,0,1)^T$

（3）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&0\end{pmatrix}$ 即A

$$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\Lambda(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&-\frac{3}{2}\\0&3&0\\-\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 21】——实对称矩阵的特性之一：不同特征值的特征向量相互正交；由$A=P\Lambda P^{-1}$求A

10、【解析】二次型矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$ $(a>0)$

$|A|=2(9-a^2)=1\times2\times5$ 得$a=2$，$a=-2$（舍）

$\therefore A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ $\quad(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-2\\0&-2&\lambda-3\end{pmatrix}$

当$\lambda=1$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad P_1=(0,1,-1)^T$

当$\lambda=2$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad P_2=(1,0,0)^T$

当$\lambda=5$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad P_3=(0,1,1)^T$

$\therefore$有$Q=\begin{pmatrix}0&1&1\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ 经$X=QY$化为$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=y_1{}^2+2y_2{}^2+5y_3{}^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 22】——化二次型为标准形，并求正交矩阵

三、 证明题

11、【证明】令$B=(\beta_1,\ \beta_2,\cdots\beta_s)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots\alpha_s)\begin{pmatrix}t_1&0&0&\cdots&t_2\\t_2&t_1&0&&\\0&t_2&t_1&&\\\vdots&&&\ddots&\\0&&&&t_1\end{pmatrix}=A\cdot C$

其中C为s阶方阵，$|C|=\begin{vmatrix}t_1&0&0&\cdots&t_2\\t_2&t_1&0&&\\0&t_2&t_1&&\\\vdots&&&\ddots&\\0&&&&t_1\end{vmatrix}_{s\times s}$

$$=t_1\times\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_2 & t_1 & 0 & & \\ 0 & t_2 & t_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & t_1 \end{vmatrix}_{(s-1)\times(s-1)}+(-1)^{s+1}t_2\begin{vmatrix} t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & & \\ 0 & 0 & t_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & t_2 \end{vmatrix}_{(s-1)\times(s-1)}$$

$=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s$

当$t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq 0$时，$C$为可逆矩阵　$r(C)=s$

则$A\cdot C$就表现为C矩阵对A的列向量做线性变换，也即多次初等变换

又$\because$初等变换不改变矩阵或向量组的秩

$\therefore r(B)=r(A)=s$

又$\because B$由s个列向量构成，列向量的元素大于等于s（可由A向量组得出）

$\therefore \beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$线性无关

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 10-15 重要题型】题型 1——利用矩阵的秩证明线性相关性

2016-2017 学年第一学期期末考试 A 卷

参考答案

一、　填空题

1、【正解】0

【解析】$A^TA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$，$|A^TA|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{vmatrix}=0$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】——矩阵的概念和基本运算

2、【正解】$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

【解析】分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$，其中$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{|2-1|}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 7】——分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

3、【正解】$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【解析】A左乘方阵的效果是对A进行行变换

A右乘方阵的效果是对A进行列变换

由$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$明显是对$A$行变换，故左乘

变化的效果是：①②两行互换，第①行加至第③行

对$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$也进行同样的变换，有$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，即$P$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 8】——矩阵的初等变换

4、【正解】3

【解析】$\because r(A)=1 \quad \therefore AX=0$有无穷多解，但基础解只有 2 个

通解$=c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2$（$c_1$, c_2为任意常数）

又$\because \eta_1\cdot\eta_2\neq 0 \quad \therefore \eta_1$, η_2线性无关，且都是$AX=0$的解，

故可将η_1, η_2看作自由解系

容易看出：$\eta_3=\eta_1+3\eta_2=(-1,3,0)^T+3(2,-1,1)^T=(5,0,3)^T$，故$k=3$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16】——齐次线性方程组的解

5、【正解】8

【解析】由$|A+2E|=0$，得A有个特征值$\lambda=-2$，由$AA^T=4E$，得$|A||A^T|=|4E|$, $|A|^2=4^4$

又$\because |A|<0 \quad \therefore |A|=-16$，由$AP=\lambda P$，可推出$A^*P=\dfrac{|A|}{\lambda}P$

故A^*必有特征值为$\dfrac{|A|}{\lambda}=\dfrac{-16}{-2}=8$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19】——特征值定义；求相乘矩阵的行列式；A的特征值和A^*特征值的关系

6、【正解】${y_1}^2+{y_2}^2-{y_3}^2$

【解析】$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-1)=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$

$\therefore B$有特征值$\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$

$\because A\simeq B \quad \therefore A$, B有相同的正负惯性指数，故X^TAX的规范形为${y_1}^2+{y_2}^2-{y_3}^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 23】——两矩阵合同的充分必要条件

6*、【正解】$ac>b^2$

【解析】二次型矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ -b & \lambda-c \end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-c)-b^2=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2$$

A的特征值：$\lambda_1=\dfrac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$　　$\lambda_2=\dfrac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$

标准形$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=1$

若为椭圆方程，则$\begin{cases} \lambda_1>0 \\ \lambda_2>0 \\ (a-c)^2+4b^2\geqslant 0 \text{(有等号，这里把圆当成一种特殊的椭圆处理)} \end{cases}$

得到$a+c>\sqrt{(a-c)^2+4b^2}$　即$ac>b^2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 22】——二次型化为标准形

二、　计算题

7、【解析】$AX=2X+B$　$(A-2E)X=B$　$X=(A-2E)^{-1}B$

$$(A-2E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】——矩阵方程的化简

8、【解析】增广矩阵$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$

（1）当$a=1$且$b\neq-1$时，无解

（2）当$a\neq1$时，有唯一解

（3）当$a=1$且$b=-1$时，有无穷多解　$B\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

基础解系$\varepsilon_1=(1,-2,0,1)^T$　$\varepsilon_2=(1,-2,1,0)^T$

有特解：$(-1,1,0,0)^T$

故方程组的通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$（$c_1$，$c_2$为任意常数）

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 17】——非齐次线性方程组的求解

9、【解析】（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda+2 & -2\\ 1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+2)$

$\therefore A$有特征值$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=0$

当$\lambda=-2$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$　$P_1=(1,2,-1)^T$

当$\lambda=0$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$　$P_2=(1,1,0)^T$　$P_3=(0,1,1)^T$

有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$　令$\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$　有$A=P\Lambda P^{-1}$

（2）$f(A)=A^2+3A-5E=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})+3P\Lambda P^{-1}-5E$

$=P(\Lambda^2+3\Lambda)P^{-1}-5E=P\Lambda P^{-1}-5E=A-5E$

$\lambda_1=-2-5=-7$　$\lambda_2=\lambda_3=0-5=-5$

$\therefore f(A)$有特征值$-7,-5,-5$，分别对应特征向量$(1,2,-1)^T$　$(1,1,0)^T$　$(0,1,1)^T$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点20】——求解特征值，特征向量；利用$A=P\Lambda P^{-1}$化简矩阵

10、【解析】（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 3\\ 0 & \lambda-4-a & \lambda-2\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$

$\because A$有二重特征值，其中有$\lambda_1=2$

情况一：$(\lambda^2-8\lambda+18+3a)\big|_{\lambda=2}=0$　得$a=-2$

此时$\lambda_1=2$　$\lambda_2=2$　$\lambda_3=6$

情况二：$\lambda^2-8\lambda+18+3a=0$有2重根$\Rightarrow\Delta=64-4(18+3a)=0\Longrightarrow a=-\dfrac{2}{3}$

此时$\lambda_1=2$　$\lambda_2=\lambda_3=4$

$\therefore a=-2$或$-\dfrac{2}{3}$

（2）当$a=-2$时，$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$　有特征值$2,2,6$

① 当$\lambda=2$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$P_1=(2,1,0)^T$　$P_2=(3,0,-1)^T$

$\lambda=2$为重根时，有2个线性无关的特征向量，故A可对角化

② 当$a=-\dfrac{2}{3}$时，$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & -\dfrac{2}{3} & 5\end{pmatrix}$

当$\lambda=4$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & \dfrac{2}{3} & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $P_1=(3,3,-1)^T$

$\lambda=4$为重根时，有1个特征向量，故A不可对角化

【考点延伸】《考试宝典》【知识点20】——可相似对角化的充分必要条件

11、【解析】（1）二次型矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & a\\ 2 & a & b\end{pmatrix}(a>0)$

$\because \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$

$\therefore \begin{cases}2+2-7=1-2+b\\ 2\times2\times(-7)=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & a\\ 2 & a & b\end{vmatrix}\end{cases}$ 得$\begin{cases}a=4\\ b=-2\end{cases}$ 有$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$

当$\lambda=2$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$P_1=(2,0,1)^T\quad P_2=(2,-1,0)^T$

当$\lambda=-7$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$P_3=(1,2,-2)^T$

$\because P_3\perp P_1\quad P_3\perp P_2\quad P_1,P_2$不垂直，$\therefore$用施密特正交化，使$\beta_1\perp\beta_2$

令$\beta_1=P_1=(2,0,1)^T$

$\beta_2=P_2-\dfrac{(P_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(2,-1,0)^T-\dfrac{4}{5}(2,0,1)^T=\dfrac{1}{5}(2,-5,-4)^T$

$\beta_3=P_3=(1,2,-2)^T\qquad \beta_1,\beta_2,\beta_3$相互垂直

故有$Q=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt5} & \dfrac{2}{\sqrt{45}} & \dfrac{1}{3}\\ 0 & \dfrac{-5}{\sqrt{45}} & \dfrac{2}{3}\\ \dfrac{1}{\sqrt5} & \dfrac{-4}{\sqrt{45}} & \dfrac{-2}{3}\end{pmatrix}$ 所用正交变换为$X=QY$

（2）*二次型正定的充分必要条件之一：

n元二次型X^TAX正定$\Leftrightarrow A$的所有特征值全大于0

$\because A$的特征值为$2,2,-7$有$-7<0$，$\therefore$该二次型不是正定矩阵

【考点延伸】《考试宝典》【知识点22】、【知识点24】——二次型正交变换化为标准形的求解，以及二次型正定的充分必要条件

三、 证明题

12、【证明】充分性：若$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_t)$线性无关，则$r(B)=t$

又$\because B=A\cdot K$，其中$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s)$线性无关，$r(A)=s$

$r(B)\leqslant\min\{r(A),r(K)\}$，$\therefore s\geqslant t\quad r(K)\geqslant t$

又$\because K$为$s\times t$阶矩阵 $\therefore r(K)\leqslant t\quad r(K)\leqslant s$

综上有$t\leqslant r(K)\leqslant t$，故$r(K)=t$

必要性：$\because B=A\cdot K\quad r(A)=s\quad r(K)=t$，$\therefore r(B)\leqslant\min\{s,t\}$

又$\because K$为$s\times t$矩阵，$r(K)=t$，$\therefore s\geqslant t$，有$r(B)\leqslant t$

又$\because A$右乘K相当于K对A进行列变换，

且向量组K的行秩$=K$的列秩$=K$的秩$=t$

$\therefore AK$至少有t列线性无关的向量，$r(AK)\geqslant t$

综上有$r(B)=r(A\cdot K)=t$ 证毕

【考点延伸】《考试宝典》【知识点10-15重要题型】题型1——充分利用矩阵相乘的性质，矩阵相乘的秩的性质

12*、【证明】$\because A^*\neq 0\quad\therefore r(A)\geqslant n-1$

又$\because AB=0$，$r(A)+r(B)\leqslant n\quad\therefore r(B)\leqslant 1$

又$\because B$为n阶非零矩阵 $\therefore r(B)=1$ 有$n-1$个基础解系$k=n-1$

且$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k$是$BX=0$的基础解系 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k)=n-1$

① 若$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k,\alpha)=n-1$，则$\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k$线性表示，$B\alpha=0$

$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k,\alpha,B\alpha)=n-1$，$B\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k,\alpha$线性表示，且表示法不唯一

② 若$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k,\alpha)=n$，则$\alpha$不可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k$线性表示，$B\alpha\neq 0$

$n\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k,\alpha,B\alpha)\leqslant n$得$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k,\alpha,B\alpha)=n$

$B\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k,\alpha$线性表示，且表示法唯一

综上，$B\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k,\alpha$线性表示，但只有在$\alpha$和$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k$线性无关时，$B\alpha$才可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_k,\alpha$唯一线性表示

【考点延伸】《考试宝典》【知识点11】——线性表示的充要条件

2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷

参考答案

一、 填空题

1、【正解】0

【解析】$A_{21}+2A_{22}+3A_{23}=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\-1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&2&2\end{vmatrix}=0$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 2】——行列式的展开，由于A_{ij}与a_{ij}无关，可构造一个新的行列式。即将第二行元素置换成一个代数余子式$A_{21}+2A_{22}+3A_{23}$的系数。

2、【正解】$\begin{pmatrix}17&8&\frac{16}{3}&4\\32&17&\frac{32}{3}&8\\48&24&17&12\\64&32&\frac{64}{3}&17\end{pmatrix}$

【解析】$f(A)=A\cdot A\cdot A+E$

$$=(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T\left(1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\right)(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T\left(1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\right)(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T\left(1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\right)+E$$

$$=16\cdot(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T\cdot\left(1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\right)+E=\begin{pmatrix}17&8&\frac{16}{3}&4\\32&17&\frac{32}{3}&8\\48&24&17&12\\64&32&\frac{64}{3}&17\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】——矩阵的概念和基本公式

3、【正解】0

【解析】$\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_3&x_1&x_2\\x_2&x_3&x_1\end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\x_3&x_1&x_2\\x_2&x_3&x_1\end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\cdot\begin{vmatrix}1&0&0\\x_3&x_1-x_3&x_2-x_3\\x_2&x_3-x_2&x_1-x_2\end{vmatrix}$

由根与系数的关系有$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{p}{q}\\x_1x_2x_3=-q\end{cases}$ $\therefore$行列式$\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_3&x_1&x_2\\x_2&x_3&x_1\end{vmatrix}=0$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 3】——几种特殊的行列式

4、【正解】相关

【解析】$(\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$

其中$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$秩为 3，$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$秩为 2

$\because r(AB)\leqslant\min(r(A),\ r(B))$

$\therefore r(\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)\leqslant 2$　故线性相关

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】——向量组线性相关，线性无关的充分必要条件；矩阵秩的重要公式之一：$r(AB)\leqslant\min(r(A),\ r(B))$

5、【正解】$(0,\ 1,\ -1)^T$

【解析】系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，得：$A$有一个基础解系为$(0,\ 1,\ -1)^T$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 16】——齐次线性方程组的基础解系

6、【正解】2

【解析】矩阵A与其特征值为对角线的对角矩阵相似，因为后者秩为 2，则A的秩也为 2

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 20】——矩阵相似对角化

7、【正解】$\dfrac{2}{3}$

【解析】由$|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ 得A的特征值为$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$

$\because$特征值的乘积等于矩阵A行列式的值　$\therefore |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-6$

$$\left|E+\frac{1}{6}A^*\right|=\left|\frac{A^*A}{|A|}+\frac{1}{6}A^*\right|=\left|\frac{1}{6}(A^*-A^*A)\right|=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot|A^*|\cdot|(E-A)|$$

$\because A$的特征值为-1，　2，3　　$\therefore E-A$的特征值为 2，-1，-2　　$|E-A|=4$

故$\left|E+\dfrac{1}{6}A^*\right|=\dfrac{1}{6^3}\times(-6)^2\times4=\dfrac{2}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19】——特征值与特征向量

8、【正解】2；$y_1^2-y_2^2$；0

【解析】二次型矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-3&2\\0&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-4&2\\0&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$r(A)=2$，即二次型f的秩

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2-(2x_2-x_3)^2=y_1^2-y_2^2$

$\therefore$规范形为$y_1^2-y_2^2$　　符号差$1-1=0$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 22】——二次型的秩

二、 计算题

9、【解析】$(A^2-E)B-(A+E)=0$，$(A+E)(A-E)B=A+E$

$$(A+E)=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\text{可逆}\quad (A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\Longrightarrow B=(A-E)^{-1}$$

$$(A-E)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix}\text{可逆}\quad (A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$B=(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 5】——矩阵的逆

10、【解析】令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{pmatrix}$$

（I）当$a=0$时，$R(A)<R(B)$ β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

（II）当$a\neq b$且$a\neq 0$时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地线性表示

（III）当$a=b\neq 0$时，β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示且表示式不唯一

此时，非齐次线性方程有通解：$c(0,1,1)^T+\left(1-\frac{1}{a},\frac{1}{a},0\right)^T$（$c$为任意常数）

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 17】——非齐次线性方程组

11、【解析】增广矩阵$B=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\a-1&0&1-a&-3\end{pmatrix}$

当$a=1$时，无解

当$a\neq1$时，$B\sim\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\a-1&0&1-a&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(1-a)(a+2)&-a-2\end{pmatrix}$

（1） 当$a=-2$时，$B\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$AX=\beta$ 有解但不唯一　　$\therefore a=-2$

（2）$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$　$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$

$\lambda=3$ 或-3 或 0

当$\lambda_1=3$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　$P_1=(1,0,-1)^T$

当$\lambda_2=-3$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-4&-1&2\\-1&-1&-1\\2&-1&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$　$P_2=(1,-2,1)^T$

当$\lambda_3=0$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$　$P_3=(1,1,1)^T$

有正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ 使$Q^TAQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

（3）$f=X^TAX$标准形为$3y_1{}^2-3y_2{}^2$，

使用的正交变换为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 17】——非齐次线性方程组、【知识点 22】——二次型

12、【解析】（1）令向量组$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&7&2&2\\3&0&-1&-1\\2&14&0&4\\0&3&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&3&1&1\\0&3&1&1\\0&12&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&3&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\because$初等变换不改变向量组的秩，$\therefore r(A)=3$，向量组的秩为 3

（2）极大线性无关组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，其余向量$\alpha_4=-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2$（答案不唯一）

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 12】——极大线性无关组的概念

12*、【解析】令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}a&0&0\\1&b&0\\1&1&c\end{pmatrix}$　$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-1&y&-1\\-1&-1&z\\x&1&1\end{pmatrix}$

$B=AP\Rightarrow\begin{pmatrix}a&0&0\\1&b&0\\1&1&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&1&2\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&y&-1\\-1&-1&z\\x&1&1\end{pmatrix}$

即$\begin{pmatrix} -a & a & -a \\ -1 & 1+b & -1+2b \\ -1 & 2+2c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & y & -1 \\ -1 & -1 & z \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

得：$a=1$, $b=-2$, $c=-\frac{1}{2}$, $x=-1$, $y=1$, $z=-5$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 15】——向量空间

三、 证明题

13、【证明】（1）A伴随矩阵=A的每个元素a_{ij}的代数余子式的转置

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E \quad \text{证毕}$$

（2）$\because AA^* = |A|E$，$\therefore |AA^*| = ||A|E|$，$|A||A^*| = |A|^n|E|$，$|A^*| = |A|^{n-1}$ 得证

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】——伴随矩阵的概念；行列式按行或列的展开式
两 n 阶方阵相乘的行列式和各个 n 阶方阵行列式的关系

13*、【证明】 $f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$的二次型矩阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2$$

当$|\lambda E - A| = 0$时，有$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4{a_{12}}^2}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}-a_{12})^2 + 4{a_{12}}^2}}{2} \end{cases}$

λ_1, λ_2为A特征值，且有$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$ $\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2$

A为实对称矩阵，必可相似对角化，$f(x,y)$可化成标准型$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$

由于正交变换不改变线段的长度，故$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \leqslant 1$可表示为$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \leqslant 1$

即$\left(\dfrac{x'}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}}\right)^2 + \left(\dfrac{y'}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}}\right)^2 \leqslant 1$ 又$\because$椭圆$\left(\dfrac{x}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{B}\right)^2 = 1$的面积为$\pi AB$

$\therefore \left(\dfrac{x'}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}}\right)^2 + \left(\dfrac{y'}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}}\right)^2 \leqslant 1$的面积为$\pi\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{a_{11}a_{22} - {a_{12}}^2}}$ 得证

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 22】——二次型化为标准型，在新坐标系下求面积

2014-2015 学年第一学期期末考试 A 卷

参考答案

一、填空题。

1、【正解】$x_1=-3,x_2=3$

【解析】$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&5&x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&4&x^2-1\end{vmatrix}=x^2-1-8=x^2-9$

令$x^2-9=0$，得$x_1=-3,x_2=3$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 1】——行列式的展开，行列式的性质。

2、【正解】$\begin{pmatrix}14&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

【解析】：$AA^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 4】——矩阵的乘法

3、【正解】2；α_1,α_2或α_1,α_3或α_2,α_3

【解析】：向量组$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&3&3\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore$向量组的秩为 2；一个极大线性无关组为α_1,α_2或α_1,α_3或α_2,α_3

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 12】——极大线性无关组

4、【正解】①$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；② $\frac{|A|}{\lambda_1},\frac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$；③ $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$

【解析】A的特征值矩阵为λ，特征向量矩阵为P，满足$AP=\lambda P\Longrightarrow P^{-1}AP=\lambda E$

① $\because P^{-1}AP=\lambda E\quad\therefore(P^{-1}AP)^T=\lambda E\quad\therefore P^TA^T(P^{-1})^T=\lambda E$

$\because(P^{-1})^T=(P^T)^{-1}$，$\therefore P^TA^T(P^T)^{-1}=\lambda E$，$A^T$的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

② $\because AP=\lambda P$，两边同乘A^*，$A^*AP=\lambda A^*P$，且$A^*A=AA^*=|A|E$，

$\therefore|A|P=\lambda A^*P,A^*P=\frac{|A|}{\lambda}P$，$A^*$的特征值为$\frac{|A|}{\lambda_1},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}$

③ $\because AP=\lambda P$，两边同乘A^{-1}：$A^{-1}AP=\lambda A^{-1}P$，且$A^{-1}A=AA^{-1}=E$

$\therefore P=\lambda A^{-1}P$，$A^{-1}P=\frac{1}{\lambda}P$，$A^{-1}$的特征值为$\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19】——特征值，特征向量的概念，以及公式$A^*A=AA^*=|A|E$，

$A^{-1}A=AA^{-1}=E$

5、【正解】 $a>4$且$b>\dfrac{1}{2}$

【解析】 正定矩阵:$\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&a&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&b\end{pmatrix}$,一阶顺序余子式：$1>0$；

二阶顺序余子式：$a-4>0\Rightarrow a>4$

三阶顺序余子式;$2(a-4)>0\Rightarrow a>4$

四阶顺序余子式;$\begin{cases}(a-4)(2b-1)>0\\a>4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>4\\b>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 24】——二次型正定的充分必要条件

二、计算题。

1、【正解】 $\left[1+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{a_i-x_i}\right]\cdot\prod_{i=1}^{n}(a_i-x_i)$

【解析】 $D_n=\begin{vmatrix}a_1&x_2&x_3&\dots&x_n\\x_1&a_2&x_3&\dots&x_n\\x_1&x_2&a_3&\dots&x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&x_3&\dots&a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&x_2&x_3&\dots&x_n\\x_1-a_1&a_2-x_2&0&\dots&0\\x_1-a_1&0&a_3-x_3&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1-a_1&0&0&\dots&a_n-x_n\end{vmatrix}$

$$=(a_1-x_1)\begin{vmatrix}\dfrac{a_1}{a_1-x_1}&x_2&x_3&\dots&x_n\\-1&a_2-x_2&0&\dots&0\\-1&0&a_3-x_3&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\dots&a_n-x_n\end{vmatrix}$$

$$=(a_1-x_1)\begin{vmatrix}\dfrac{a_1}{a_1-x_1}+\dfrac{x_2}{a_2-x_2}+\dots+\dfrac{x_n}{a_n-x_n}&x_2&x_3&\dots&x_n\\0&a_2-x_2&0&\dots&0\\0&0&a_3-x_3&\dots&0\\\vdots&\vdots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&a_n-x_n\end{vmatrix}$$

$$=(a_1-x_1)\left[\frac{a_1}{a_1-x_1}+\frac{x_2}{a_2-x_2}+\dots+\frac{x_n}{a_n-x_n}\right]\cdot(a_2-x_2)\dots.(a_n-x_n)$$

$$=\left[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i-x_i}\right]\cdot\prod_{i=1}^{n}(a_i-x_i)$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 3】——几种特殊的行列式，“爪”型行列式的化简，尽量化成上三角或下三角行列式，方便计算。

2、【解析】$A^*X=2X+A^{-1}$　两边同乘A

$$|A|X=2AX+E,\ (|A|E-2A)X=E\text{，其中}; (|A|E-2A)=2\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\text{可逆}$$

$$\therefore X=(|A|E-2A)^{-1}=\left[2\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\text{又}\because\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\-1&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\0&2&-2&-1&1&0\\0&0&2&1&0&1\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&-1&1&1&0&0\\0&1&-1&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\backsim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \therefore\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\text{故}X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点5】——矩阵的逆，若A为方阵，$A^*A=AA^*=|A|E$，这两个公式的运用；可逆矩阵求逆的化简，若A可逆$A^{-1}A=AA^{-1}=E$，

三、讨论题：

1、【正解】(1) $a\neq2$　(2) $a=-2$且$b=-1$

(3) $a=-2$且$b\neq-1$，(2) 情况下有通解$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中$k$为任意常数

【解析】线性方程组的增广矩阵；

$$(A|B)=\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\1&-4&a&b\\2&-1&3&5\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\0&-1&a+1&b\\0&5&5&5\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&-3&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&a+2&b+1\end{pmatrix}$$

(1) 唯一解$\Longleftrightarrow r(A)=3$，得$a+2\neq0$,即$a\neq-2$

(2) 无穷解$\Longleftrightarrow r(A)=r(A|B)=2$，$(A|B)=\begin{pmatrix}1&-3&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

得$\begin{cases}a+2=0\\b+1=0\end{cases}$ 即$\begin{cases}a=-2\\b=-1\end{cases}$，特解为$(-1\ \ 0\ \ 1)^T$，

非齐次方程组通解为$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数

（3）无解$\Longleftrightarrow r(A)=2$，且$r(A|B)=3$，得$\begin{cases}a+2=0\\b+1\neq 0\end{cases}$ 即$\begin{cases}a=-2\\b\neq -1\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 17】——非齐次线性方程组

2、【正解】$x=0$时，$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，（答案不唯一）

【解析】$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\x&\lambda+1&-x\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-x\\\lambda-1&-2&\lambda+3\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-x\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

当$\lambda=-1$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\x&0&-x\\-4&-2&2\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}2&1&-1\\x&0&-x\\0&0&0\end{pmatrix}$

若 A 可相似对角化，则当$\lambda=-1$时（二重根），应有 2 个特征向量，

即要求$r(\lambda E-A)|_{\lambda=-1}=3-2=1$，

此时$x=0$，故当$x=0$时，方阵 A 可对角化。此时$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\0&-1&0\\4&2&-3\end{pmatrix}$.

当$\lambda=-1$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\x&0&-x\\-4&-2&2\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$P_1=(1\ \ -2\ \ 0)^T, P_2=(1\ \ 0\ \ 2)^T$

当$\lambda=1$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\0&2&0\\-4&-2&4\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$P_3=(1\ \ 0\ \ 1)^T$

有可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$**（$P$ 并没有要求是正交的）**

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 20】——矩阵 A 可相似对角化的条件：A 有 n 个线性无关的特征向量；可逆矩阵 P 的求解

四、证明题。

1、【证明】（1）向量组$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$

$$\text{其中}C=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \text{秩为}4$$

有：向量组$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$线性无关$\Longleftrightarrow r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$，

$r(C)=4$，C可逆 $\therefore r(AC)\xlongequal{C\text{可逆}}r(A)=4$

故$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=4\Longleftrightarrow$同向量组$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$线性无关

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 11】——向量组线性无关的充要条件：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$$\Longleftrightarrow \text{齐次方程组}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0\text{只有零解，}\Longleftrightarrow\text{向量组的秩}r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n$$

$\Longleftrightarrow$每一个向量α_i都不能用其余$n-1$个向量线性表示

2、【正解】$\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

【解析】基变换公式：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot P$

即：$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}P$，于是有过渡矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 15】——向量空间、【知识点 10-15 重要题型】题型 4——向量坐标与坐标变换

五、【解析】

（1）二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&a\end{pmatrix}$，

（2）由相似矩阵的性质

$$(A\backsim B)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ii}\ (A,B\text{有相同的迹})\Rightarrow 2+5+a=1+1+b,\text{即}b=a+5\ ①\\ |A|=|B|\quad (A,B\text{行列式相同})\qquad\Rightarrow 6a-20=b②\end{cases}$$

有①②，得$\begin{cases}a=5\\b=10\end{cases}$

（3）当$a=5$时，$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

当$\lambda=1$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$P_1=(2,-1,0)^T,P_2=(2,0,1)^T$

当$\lambda=10$时，$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$　$P_3=(1,2,-2)^T$

施密特正交化：令$\beta_1=P_1=(2,-1,0)^T$

$\beta_2=P_2-\frac{(P_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(2,0,1)^T-\frac{4}{5}(2,-1,0)^T=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^T$

$\beta_3=P_3-\frac{(P_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(P_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(1,2,-2)^T-0-0=(1,2,-2)^T$

再单位化，有$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)^T$，$\gamma_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^T$，$\gamma_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^T$

故正交矩阵$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{-1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&\frac{-2}{3}\end{pmatrix}$，有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$

（4）$[P^{-1}AP]^k=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}\right]^k=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10^k\end{pmatrix}$，$P^{-1}A^kP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10^k\end{pmatrix}$，$\therefore A^k=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10^k\end{pmatrix}P^{-1}$

又正交矩阵$P^{-1}=P^T$，

$$\therefore A^k=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10^k\end{pmatrix}P^T=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{-1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&\frac{-2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-1}{\sqrt{5}}&0\\\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{5}{3\sqrt{5}}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{-2}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}8+10^k&-2+2\times10^k&2-2\times10^k\\-2+2\times10^k&5+4\times10^k&4-4\times10^k\\2-2\times10^k&4-4\times10^k&5+4\times10^k\end{pmatrix}$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 19】——特征值与特诊向量、【知识点 22】——二次型、【知识点 19-24 重要题型】题型 4——求矩阵的高次幂

2013-2014学年第二学期期末考试A卷

参考答案

一、填空题（每小题3分，共12分）

1、【正解】2025

【解析】原式=

$$\left|(2E+A)^T(2E-A)^{-1}(2E-A)(2E+A)\right| = \left|(2E+A)^T(2E+A)\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & 0 \\ -9 & 0 & 34 \end{vmatrix} = 9\times9\times34-9\times9\times9=2025$$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点1】——行列式的概念及其性质

《考试宝典》【知识点4】——矩阵的概念和基本性质

2、【正解】2

【解析】因为$|B|\neq 0$，$\therefore r(3AB)=r(A)=2$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点9】——矩阵的秩和矩阵等价

3、【正解】相

【解析】因为$r(A)=3$，所以方程组有$n-r(A)=3$个线性无关的解向量，所以a_1,a_2,a_3,a_4一定线性相关.

【考点延伸】《考试宝典》【知识点16】——齐次线性方程组

4、【正解】$-\dfrac{bc}{a}$，

【解析】因为$|aE+bA|=0$，所以A有一个特征值为$-\dfrac{a}{b}$，因为$A\times A^*=|A|E=cE$;所以A^*的特征值为$\dfrac{|A|}{\lambda}=\dfrac{c}{\left(-\frac{a}{b}\right)}=-\dfrac{bc}{a}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点19】——特征值与特征向量

二、选择题（每小题3分，共6分）

5、【正解】C

【解析】记住以下结论：

1.A有n个相异的特征值$\Rightarrow A$相似于对角阵

2.A有n个线性无关的特征向量$\Leftrightarrow A$相似于对角阵

3.属于A的每一个特征值的线性无关的特征向量的个数等于它的重数$\Leftrightarrow A$相似于对角阵

4.A为实对称阵$\Rightarrow A$相似于对角阵

【考点延伸】《考试宝典》【知识点20】——矩阵可相似对角化、【知识点21】——实对称矩阵的

对角化

6、【正解】B

【解析】$y_1=x_1+x_2, y_2=x_2-x_3, y_3=x_3+x_1 \Rightarrow f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$，标准型中只有一项系数为负的，所以负惯性指数为 1；

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 22】——二次型

三、计算题（每小题 18 分，共 72 分）

7、【解析】$bA_{41}+bA_{42}+bA_{43}+bA_{44}=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=b(a-b)^3$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 3】——几种特殊的行列式

8、【解析】对增广矩阵 $\overline{A}$ 做行初等边行，化为最简阶梯形

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

（1）当 $\lambda \neq 5$ 时，$r(A) \neq r\left(\overline{A}\right)$，所以方程组无解；

（2）当 $\lambda=5$ 时，$r(A)=r\left(\overline{A}\right)=2<4$，所以方程组有无穷多组解

先求非齐次方程组的一个特解 $X=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

再求齐次方程组的通解：方程组有 $n-r(A)=2$ 个线性无关的解向量，所以取

$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 34/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，得 $\alpha_2=\begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

所以非齐次方程组的通解为 $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2, k_1, k_2$ 为任意常数

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 17】——非齐次线性方程组求解(齐次通解+特解)。

9、【解析】由已知，$R(A)=3$

所以 $Ax=0$ 的基础解系含有 1 个向量

因为 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$.

所以 $(1,-2,1,0)^T$ 是 $Ax=0$ 的基础解系

又因为 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

所以$(1,1,1,1)^T$是$Ax=\beta$的解

所以通解为$(1,1,1,1)^T+k(1,-2,1,0)^T$,$k$为任意常数

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 17】——非齐次线性方程组求解(齐次通解+特解)。

10、【解析】解:(知识回顾:二次型$f=x'Ax$通过正交变换化成标准型$y'By$,B是对角矩阵,则存在正交矩阵C,使得$C'AC=B$此时对称矩阵A与B合同。因为C是正交矩阵,C'与C的逆矩阵是一样的,所以A与B也还是相似的.相似矩阵有相同的特征值,所以A的特征值就是对角矩阵B的对角线元素。所以只要n元二次型通过正交变换化成了标准型,那么标准型里面的那些平方项的系数就是二次型的矩阵的特征值)

由于二次型$f(x,y,z)=x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz$,可以经过正交变换$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$,化为

$f=v^2+4w^2$,二次型矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$。所以$A$的特征值为1,4,0,行列式$|A|$等于特征值之积,$A$的对角线元素之和等于特征值之和.这样得到

$|A|=2b-b^2-1=0,1+a+1=1+4+0$,所以$a=3,b=1$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix},\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=1,E-A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{特征向量为}(1,-1,1)^T$$

$$\lambda=4,4E-A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{特征向量为}(1,2,1)^T$$

$$\lambda=0,-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-3&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow \text{特征向量为}(-1,0,1)^T$$

标准化这三个特征向量可得:$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 22】——二次型标准化;正交矩阵。

11、【解析】(1)因为A为正定矩阵,$x_j=(0,\cdots,1,\cdots,0)$,1出现在第$j$个位置,$xAx^T=a_{jj}>0$

(2)设A的特征值为λ,因为A为正定矩阵,所以A的所有的特征值均大于零,

又因为A^{-1}的特征值是$1/\lambda$,全部大于零,所以A^{-1}为正定矩阵。

【考点延伸】《考试宝典》【知识点 24】——正定二次型和正定矩阵、【知识点 19-24 重要题型】题型 7——正定矩阵的性质和证明