随机样本

一、总体与个体

二、随机样本的定义

一、总体与个体

1. 总体

试验的全部可能的观察值称为总体.

2. 个体 总体中的每个可能观察值称为个体.

实例1 在研究2000名学生的年龄时，这些学生的年龄的全体就构成一个总体，每个学生的年龄就是个体.

3. 有限总体和无限总体

实例2 某工厂10月份生产的灯泡寿命所组成的总体中，个体的总数就是10月份生产的灯泡数，这是一个有限总体；而该工厂生产的所有灯泡寿命所组成的总体是一个无限总体，它包括以往生产和今后生产的灯泡寿命.

有限总体包含的个体的总数很大时，可近似地将它看成是无限总体.

4. 总体分布

实例3 在2000名大学一年级学生的年龄中，年龄指标值为“15”，“16”，“17”，“18”，“19”，“20”的依次有9，21，132，1207，588，43名，它们在总体中所占比率依次为

$$\frac{9}{2000},\quad \frac{21}{2000},\quad \frac{132}{2000},\quad \frac{1207}{2000},\quad \frac{588}{2000},\quad \frac{43}{2000},$$

即学生年龄的取值有一定的分布.

一般地，我们所研究的总体，即研究对象的某项数量指标 X，其取值在客观上有一定的分布，X是一个随机变量.

总体分布的定义

我们把数量指标取不同数值的比率叫做总体分布.

如实例3中，总体就是数集 {15, 16, 17, 18, 19, 20}.

总体分布为

年龄	15	16	17	18	19	20
比率	$\frac{9}{2000}$	$\frac{21}{2000}$	$\frac{132}{2000}$	$\frac{1207}{2000}$	$\frac{588}{2000}$	$\frac{43}{2000}$

二、随机样本的定义

1. 样本的定义

设 X 是具有分布函数 F 的随机变量，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是具有同一分布函数 F、相互独立的随机变量，则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为从分布函数 F (或总体 F、或总体 X) 得到的容量为 n 的简单随机样本，简称样本.

它们的观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为样本值，又称为 X 的 n 个独立的观察值.

2. 简单随机抽样的定义

获得简单随机样本的抽样方法称为简单随机抽样.

根据定义得：若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 F 的一个样本，

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的分布函数为

$$F^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i).$$

又若 X 具有概率密度 f，

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的概率密度为

$$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

例4 设总体 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda > 0)$ 的指数分布, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体的样本, 求样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度.

解 总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$

因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且与 X 有相同的分布,

所以 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的概率密度为

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, & x_i > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例5 设总体 X 服从两点分布 $B(1, p)$，其中 $0 < p < 1$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体的样本，求样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律.

解 总体 X 的分布律为

$$P\{X = i\} = p^i (1 - p)^{1-i} \quad (i = 0, 1)$$

因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，

且与 X 有相同的分布，

所以 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

$$= P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\}\cdots P\{X_n = x_n\}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在集合 $\{0, 1\}$中取值.

统计量

1. 统计量的定义

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数，若 g 中不含未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是一个统计量.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本值，则称 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的观察值.

实例1 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ 为已知，σ^2 为未知，判断下列各式哪些是统计量，哪些不是？

$T_1 = X_1,$ $\quad T_2 = X_1 + X_2 e^{X_3},$

$$T_3 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3),$$

$T_4 = \max(X_1, X_2, X_3),$ $\quad T_5 = X_1 + X_2 - 2\mu,$

是

$$T_6 = \frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2).$$

不是

2. 几个常用统计量的定义

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是这一样本的观察值.

(1) 样本平均值 $\quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i;$

其观察值 $\quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$

(2) 样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right).$$

其观察值

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right).$$

(3) 样本标准差

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2};$$

其观察值 $$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}.$$

(4) 样本 k 阶(原点)矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$, $k = 1, 2, \cdots$;

其观察值 $\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$, $k = 1, 2, \cdots$.

(5) 样本 k 阶中心矩

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, \quad k = 2, 3, \cdots;$$

其观察值 $b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k$, $k = 2, 3, \cdots$.

由以上定义得下述结论:

若总体 X 的 k 阶矩 $E(X^k)$ 记成 μ_k 存在, 则当 $n \to \infty$ 时, $A_k \xrightarrow{P} \mu_k, k = 1, 2, \cdots$.

证明 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且与 X 同分布,

所以 $X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k$ 独立且与 X^k 同分布,

故有 $E(X_1^k) = E(X_2^k) = \cdots = E(X_n^k) = \mu_k$.

再根据辛钦定理知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k \ , \quad k = 1, 2, \cdots;$$

由第五章关于依概率收敛的序列的性质知

$$\boxed{g(A_1, A_2, \cdots, A_k) \xrightarrow{P} g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k),}$$

其中g是连续函数.

3. 经验分布函数

总体分布函数 $F(x)$ 相应的统计量称为经验分布函数.

经验分布函数的做法如下:

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 F 的一个样本,

用 $S(x)\ (-\infty < x < +\infty)$ 表示 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中不大于 x 的随机变量的个数,

定义经验分布函数 $F_n(x)$ 为

$$F_n(x) = \frac{1}{n} S(x), \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

对于一个样本值, $F_n(x)$ 的观察值容易求得.

($F_n(x)$ 的观察值仍以 $F_n(x)$ 表示.)

实例2 设总体 F 具有一个样本值 1, 2, 3,

则经验分布函数 $F_3(x)$ 的观察值为

$$F_3(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le x<2,\\ \dfrac{2}{3}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

实例3 设总体 F 具有一个样本值 $1, 1, 2,$

则经验分布函数 $F_3(x)$ 的观察值为

$$F_3(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{2}{3}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是总体 F 的一个容量为 n 样本值,

先将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 按自小到大的次序排列,

并重新编号, $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$,

则经验分布函数 $F_n(x)$ 的观察值为

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)}, \\ \dfrac{k}{n}, & x_{(k)} \le x < x_{(k+1)}, \\ 1, & x \ge x_{(n)}. \end{cases}$$

格里汶科定理

对于任一实数 x,当$n \to \infty$时,$F_n(x)$以概率1 一致收敛于分布函数 $F(x)$,即

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<+\infty} \left|F_n(x) - F(x)\right| = 0\right\} = 1.$$

对于任一实数 x当n充分大时,经验分布函数的任一个观察值 $F_n(x)$与总体分布函数 $F(x)$只有微小的差别,从而在实际上可当作 $F(x)$来使用.

抽样分布

统计量的分布称为抽样分布.

1. χ^2 分布

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则称统计量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

自由度：

指 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 中右端包含独立变量的个数 .

$\chi^2(n)$ 分布的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

证明 因为 $\chi^2(1)$ 分布即为 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 分布,

又因为 $X_i\sim N(0,1)$, 由定义 $X_i^2\sim\chi^2(1)$,

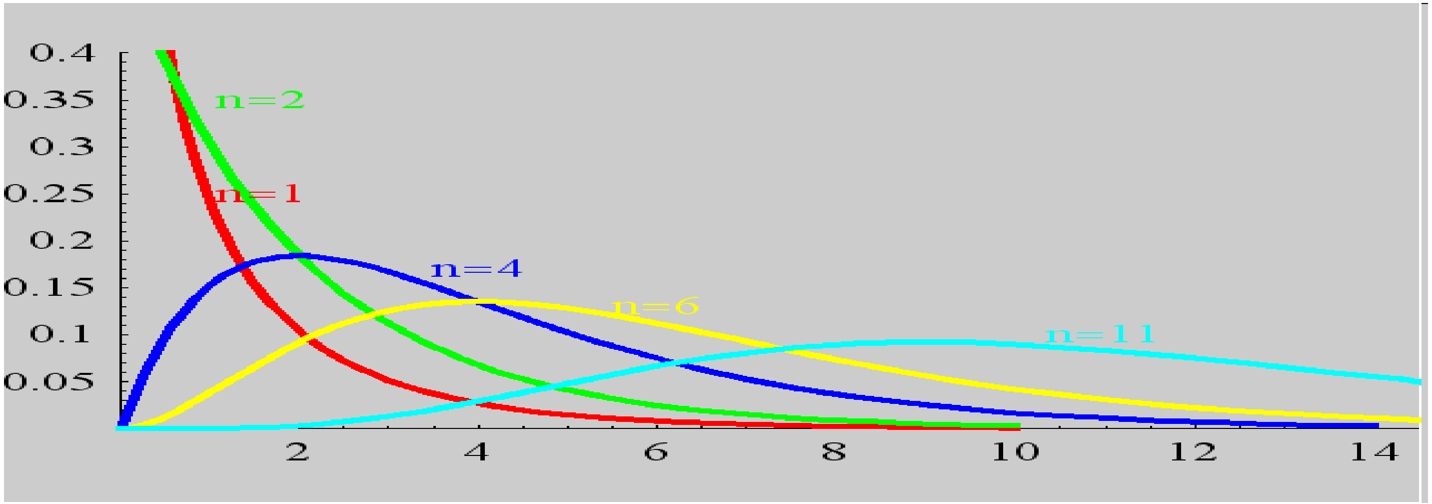
即 $X_i^2\sim\Gamma\left(\dfrac{1}{2},2\right)$, $i=1,2,\cdots,n$.

因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,

所以 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$ 也相互独立,

根据Γ分布的可加性知 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right).$

$\chi^2(n)$分布的概率密度曲线如图.



χ^2 分布的性质

性质1 (χ^2 分布的可加性)

设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且 χ_1^2, χ_2^2 独立, 则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

(此性质可以推广到多个随机变量的情形.)

设 $\chi_i^2 \sim \chi^2(n_i)$, 并且 χ_i^2 $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 相互独立, 则 $\sum_{i=1}^{m} \chi_i^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$.

性质2 (χ^2分布的数学期望和方差)

若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则 $E(\chi^2) = n, \quad D(\chi^2) = 2n.$

证明 因为 $X_i \sim N(0, 1)$, 所以 $E(X_i^2) = D(X_i) = 1,$

$$D(X_i^2) = E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2$$

$$= 3 - 2 = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

故 $E(\chi^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = n,$

$$D(\chi^2) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i^2) = 2n.$$

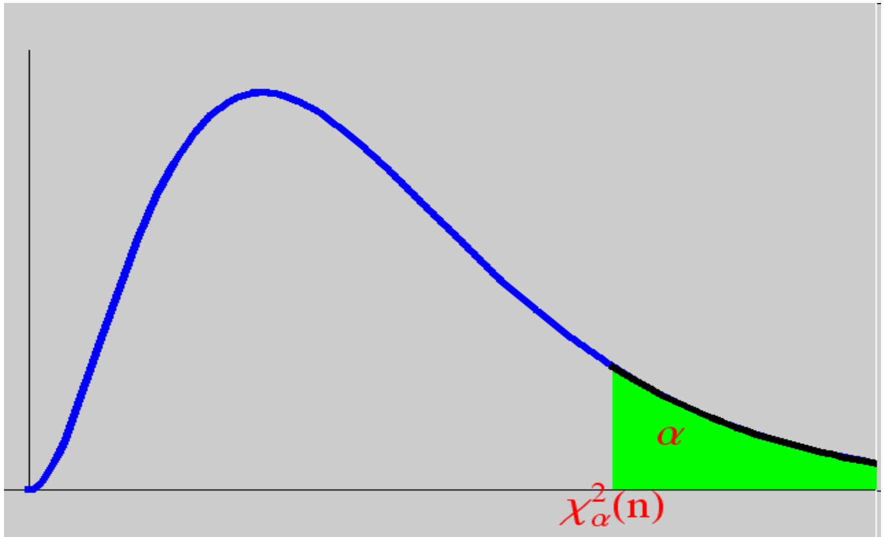
χ^2 分布的分位点

对于给定的正数 α，$0<\alpha<1$，称满足条件

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty} f(y)\mathrm{d}y = \alpha$$

的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点.

对于不同的 α, n，可以通过查表求得上 α 分位点的值.



例1 设 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, $N(0,1)$ 的上 α 分位点 z_α 满足 $P\{X > z_\alpha\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{z_\alpha}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha$,

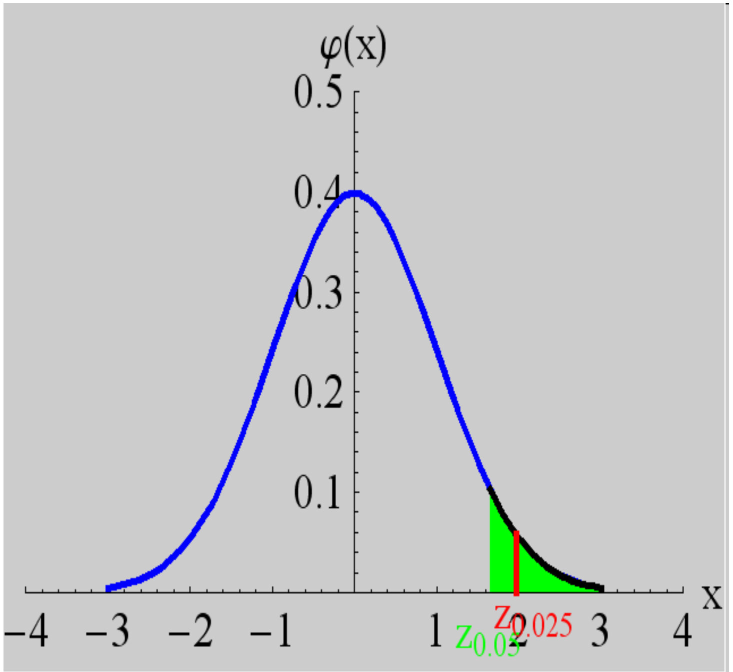
求 z_α 的值, 可通过查表完成.

$z_{0.05} = 1.645$, 附表2-1

$z_{0.025} = 1.96$, 附表2-2

根据正态分布的对称性知

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha.$$



例2 设 $Z \sim \chi^2(n)$, $\chi^2(n)$ 的上 α 分位点满足

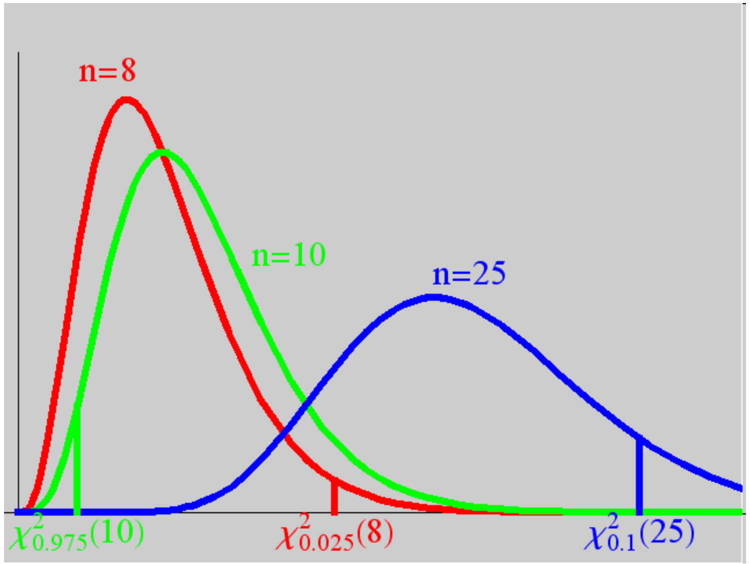
$$P\{Z > \chi^2_\alpha(n)\} = \int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty} \chi^2(y; n)\mathrm{d}y = \alpha,$$

求 $\chi^2_\alpha(n)$ 的值, 可通过查表完成.

$\chi^2_{0.025}(8) = 17.535,$ 附表4-1

$\chi^2_{0.975}(10) = 3.247,$ 附表4-2

$\chi^2_{0.1}(25) = 34.382.$ 附表4-3



附表4只详列到 n=45 为止.

费舍尔(R.A.Fisher)证明:

当n充分大时, $\chi_{\alpha}^2(n) \approx \frac{1}{2}(z_{\alpha} + \sqrt{2n-1})^2$.

其中z_{α}是标准正态分布的上α分位点.

利用上面公式,

可以求得$n > 45$时, 上α分位点的近似值.

例如 $\chi_{0.05}^2(50) \approx \frac{1}{2}(1.645 + \sqrt{99})^2 = 67.221.$

而查详表可得 $\chi_{0.05}^2(50) = 67.505$.

2. t 分布

设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 且 X, Y 独立, 则称随机变量 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布,

记为 $t \sim t(n)$.

t 分布又称学生氏(Student)分布.

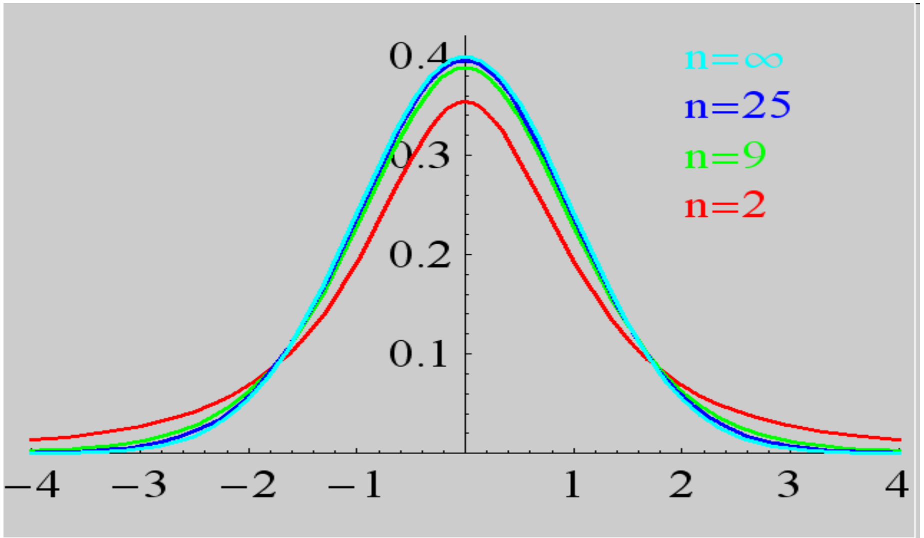
$t(n)$ 分布的概率密度函数为

$$h(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < t < +\infty$$

t 分布的概率密度曲线如图

显然图形是关于

$t=0$对称的.



当 n 充分大时，其图形类似于标准正态变量概率密度的图形.

$$因为\lim_{n\to\infty} h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}},$$

所以当n 足够大时 t 分布近似于 $N(0,1)$ 分布,

但对于较小的n，t分布与$N(0,1)$分布相差很大.

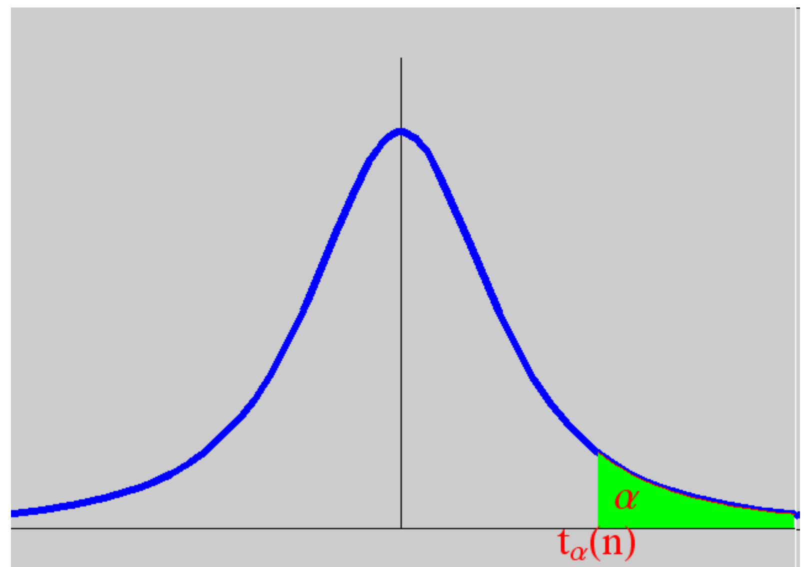
t 分布的分位点

对于给定的α, $0<\alpha<1$, 称满足条件

$$P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{\infty}h(t)\mathrm{d}t=\alpha$$

的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上α分位点.

可以通过查表求得上α分位点的值.



由分布的对称性知

$$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n).$$

当$n>45$时, $t_\alpha(n)\approx z_\alpha$.

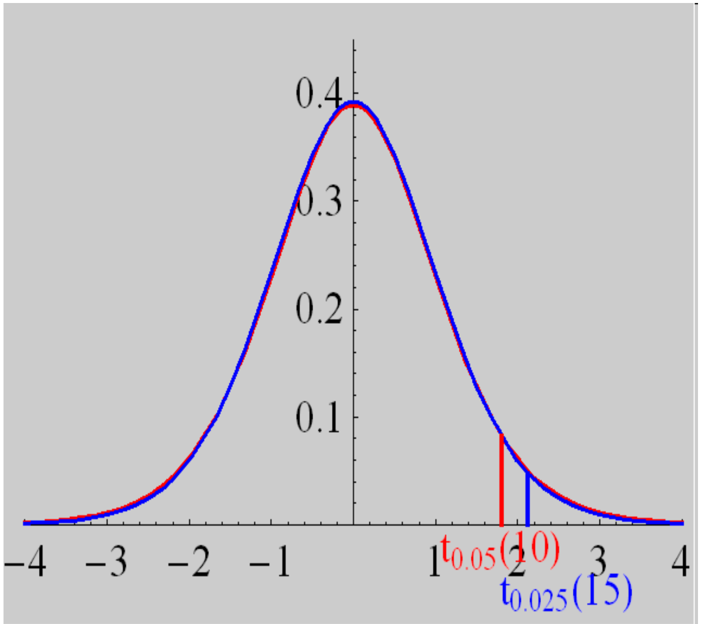
例3 设 $T \sim t(n)$, $t(n)$ 的上 α 分位点满足

$$P\{T > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} t(y;n)\mathrm{d}y = \alpha,$$

求 $t_\alpha(n)$ 的值, 可通过查表完成.

$t_{0.05}(10) = 1.8125,$ 附表3-1

$t_{0.025}(15) = 2.1315.$ 附表3-2



3. F 分布

设 $U \sim \chi^2(n_1)$, $V \sim \chi^2(n_2)$, 且 U, V 独立, 则称随机变量 $F = \dfrac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$.

$F(n_1, n_2)$分布的概率密度为

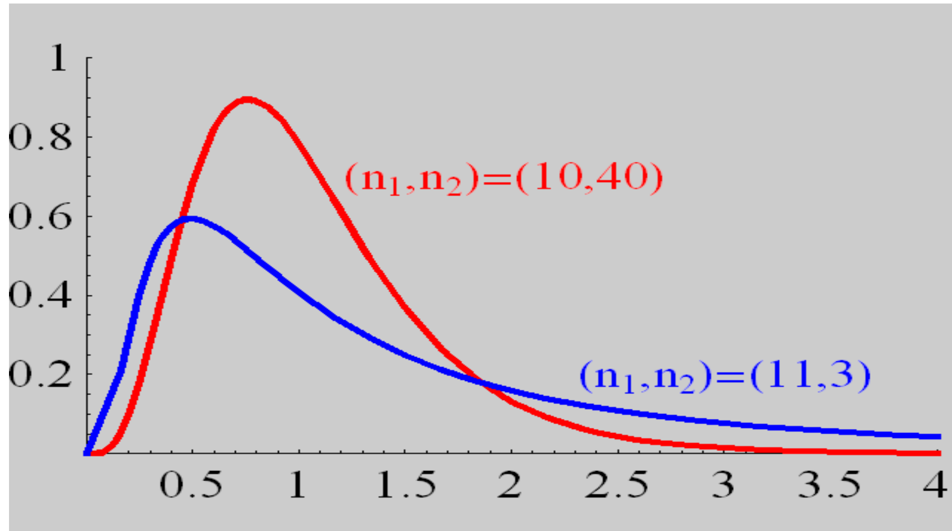
$$\psi(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} y^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)\left[1+\left(\dfrac{n_1 y}{n_2}\right)\right]^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

F分布的概率密度曲线如图

根据定义可知,

若$F \sim F(n_1, n_2)$,

则$\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$.



F 分布的分位点

对于给定的α，$0<\alpha<1$，称满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} \psi(y)\mathrm{d}y = \alpha$$

的点$F_\alpha(n_1, n_2)$为$F(n_1, n_2)$分布的上α分位点.

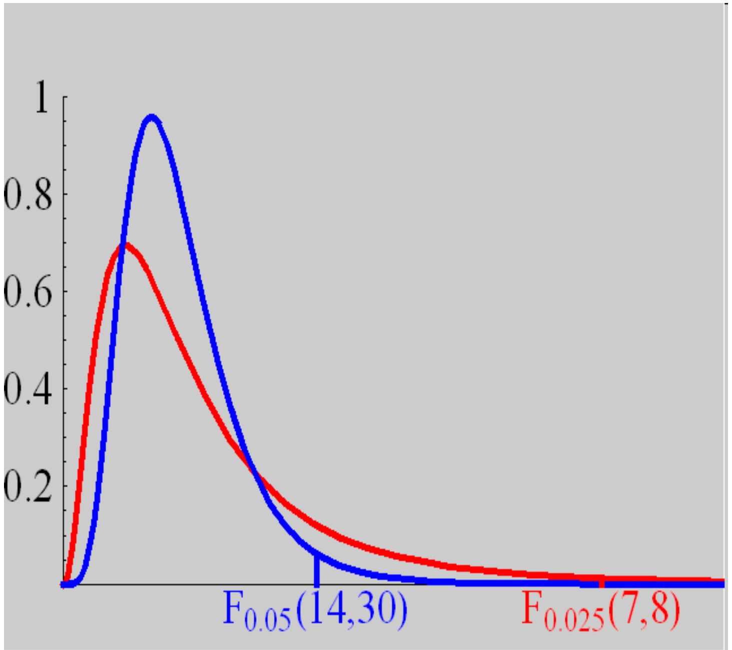
例4　设 $F(n_1, n_2)$ 分布的上 α 分位点满足

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1, n_2)}^{+\infty} \psi(y)\mathrm{d}y = \alpha,$$

求 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 的值, 可通过查表完成.

$F_{0.025}(7,8) = 4.90,$ 附表5-1

$F_{0.05}(14,30) = 2.31.$ 附表5-2



F 分布的上α分位点具有如下性质:

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}.$$

证明 因为$F \sim F(n_1, n_2)$,

所以 $1-\alpha = P\{F > F_{1-\alpha}(n_1, n_2)\}$

$$= P\left\{\frac{1}{F} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right\} = 1 - P\left\{\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right\},$$

故 $P\left\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right\} = \alpha,$

因为$\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$，所以$P\left\{\dfrac{1}{F} > F_\alpha(n_2, n_1)\right\} = \alpha$,

比较后得 $\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)} = F_\alpha(n_2, n_1)$,

即$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$.

用来求分布表中未列出的一些上α分位点.

例 $F_{0.95}(12,9) = \dfrac{1}{F_{0.05}(9, 12)}$

$$= \frac{1}{0.28} = 0.357 .$$

4. 正态总体的样本均值与样本方差的分布

定理一

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则有 $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$.

正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本均值和样本方差有以下两个重要定理.

定理二

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$，S^2 分别是样本均值和样本方差，则有

(1) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

(2) $\overline{X}$ 与 S^2 独立.

定理三 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本, $\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差, 则有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

证明 因为 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

且两者独立, 由 t 分布的定义知

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}} \sim t(n-1).$$

定理四 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是具有相同方差的两正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本,且这两个样本互相独立,

设 $\overline{X} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \overline{Y} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ 分别是这两个样本的均值; $S_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2, S_2^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2$ 分别是这两个样本的方差,则有

(1) $$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1);$$

(2) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时，

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$，　$S_w=\sqrt{S_w^2}$.

证明 （1）由定理二

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1),\quad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1),$$

由假设S_1^2,S_2^2独立，　则由F分布的定义知

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{(n_1-1)\sigma_1^2}\Bigg/\frac{(n_2-1)S_2^2}{(n_2-1)\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

即 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1).$

(2) 因为 $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma^2}{n_1}+\dfrac{\sigma^2}{n_2}\right)$

所以 $U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim N(0,1),$

由 $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1), \quad \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1),$

且它们相互独立，故由 χ^2 分布的可加性知

$$V=\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2),$$

由于 U 与 V 相互独立，按 t 分布的定义.

$$\frac{U}{\sqrt{V/(n_1+n_2-2)}}$$

$$=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2).$$