Table des matières

Introduction

Pour habiller des espaces vectoriels divers, rien ne vaut une bonne combinaison linéaire bien chaude.

Beaucoup d'objet mathématiques que nous avons étudié jusqu'à présent partagent certaine propriétés fondamentales. On peut les additionner entre eux, et les «grossir »et «rétrécir ». C'est à dire en faire des *combinaisons linéaires*. Les réels et les complexes sont un exemple, les vecteurs aussi, ainsi que les matrices. C'est aussi le cas pour les polynômes, et les fonctions continues par exemple. Ainsi, tous les théorèmes valables pour les familles d'objets avec ces propriétés sera valable dans chaque cas particulier, ce qui nous invite à travailler sur ce concept plus général.

Une famille de tels objets s'appelle un **espace vectoriel**, car ces éléments se comportent «comme des vecteurs ». Nous verrons que cet outil est très général, et très pratique à la fois, et nous permet de démontrer beaucoup de résultats intéressants, aux applications presque infinies. Pratiquement toutes les mathématiques utilisées en physique et en chimie reposent, d'une manière où d'une autre, sur les espaces vectoriels.

De plus, nous verrons que ces espaces possèdent une certaine structure (la *linéarité*), et que l'étude des application d'un espace à l'autre préservant cette structure (les *application linéaires*) constitue un outil extrêmement fertile de l'étude des espaces vectoriels.

I - Espaces Vectoriels

1- Groupes et Corps

Définition 1. *Loi de composition interne*
$*$ est une **loi de composition interne** de l'ensemble G (abrégé en *l.c.i*) si et seulement si c'est une application

$$G \times G \to G$$

Exemple 1.

- L'addition $+$ sur les réels, les complexes, les matrices, les fonctions...
- La multiplication $\times$ sur les réels, les complexes, les matrices, les fonctions ...
- Le produit vectoriel $\wedge$ sur les vecteurs de $\mathbb{R}^3$
- La composition $\circ$ sur les fonctions réelles
- L'application $\perp : (x, y) \mapsto x \perp y = 2xy^3 - y\mathrm{e}^x$ sur les réels
- ...

Le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, par contre, n'est pas une loi de composition interne.

Définition 2. *Groupe*
$(G, *)$ est un **groupe** si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- G est un *ensemble d'éléments*
- $*$ est une *loi de composition interne* de G
- $(G, *)$ vérifient les **axiomes de groupe** :
  1- $*$ est **associative**, c'est-à-dire :

  $$\forall (a, b, c) \in G^3,\ a * (b * c) = (a * b) * c$$

  2- $*$ possède dans G un **élément neutre** e, c'est-à-dire :

  $$\exists e \in G \ / \ \forall g \in G,\ g * e = e * g = g$$

  3- Tout élément de G possède dans G un **symétrique** pour $*$, c'est-à-dire :

  $$\forall g \in G, \exists h \in G \ / \ g * h = h * g = e$$

Définition 3. Si $(G, *)$ est un groupe est que $*$ est **commutative** dans G, c'est-à-dire :

$$\forall (a, b) \in G,\ a * b = b * a$$

on dit alors que $(G, *)$ est un **groupe abélien** (ou parfois *groupe commutatif*)

Exemple 2.

- $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien, mais $(\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe (2 n'a pas de symétrique pour $\times$ dans $\mathbb{Z}$).
- $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes abéliens.
- $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe, mais $\times$ n'est pas commutative. $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{R}), +)$ n'est pas un groupe, $+$ n'étant pas une l.c.i dans ce cas.
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), +)$ est un groupe.
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissantes, est un groupe pour la loi $\circ$. Il n'est pas commutatif.

Remarque 1. Quand il n'y a pas de confusion possibles sur la loi de composition interne, ou bien quand le contexte et clair, on peut noter abusivement G le groupe $(G, *)$, et prononcer de même à l'oral.

Remarque 2. Moralement un groupe est donc un ensemble où l'on peut «combiner »deux éléments pour en obtenir un troisième, qui est encore dans l'ensemble, avec en plus trois conditions : la priorité avec laquel on combine les éléments n'importe pas, il existe un élément qui «ne change rien »quand on le combine avec un autre, et chaque combinaison est «reversible »par combinaison avec un autre élément de l'ensemble.
Encore plus abstraitement, on a un groupe quand, pour une certaine définition de l'addition, on peut additionner, soustraire, en restant dans l'ensemble, et zéro y appartient.

Remarque 3. Quand la l.c.i. est notée $+$, on note souvent l'inverse de g par $-g$, et le neutre 0_G. Quand la loi est noté $\times$ ou ., on note souvent l'inverse de g par g^{-1}, et le neutre 1_G.

Définition 4. *Corps*
$(\mathbb{K}, +, \times)$ est un **corps** si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1- $(\mathbb{K}, +)$ est un *groupe abélien*, dont on notera l'élément neutre 0

2- $(\mathbb{K}\backslash\{0\}, \times)$ est un *groupe*

3- La loi $\times$ est **distributive** par rapport à $+$, c'est-à-dire :

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{K}^3,\ a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \text{et} \quad (b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

Définition 5. Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps et que $(\mathbb{K}\backslash\{0\}, \times)$ est un groupe commutatif, on dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un *corps commutatif.*

Exemple 3. $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps commutatifs. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps.
L'ensemble $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a + b\mathrm{i} & -c - d\mathrm{i} \\ c - d\mathrm{i} & a - b\mathrm{i} \end{pmatrix} \ / \ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$ (sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$), muni des lois $+$ et $\times$ est un corps non-commutatif.

Remarque 4. Moralement, un corps est un ensemble dans lequel on peut additionner, multiplier, soustraire et diviser les éléments entre eux. La plupart des corps que nous utiliserons seront commutatifs. En effet, nous utiliserons principalements $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notés indépendamment $\mathbb{K}$.

Exercice I-1. Démontrer que $(\mathbb{H}, +, \times)$ précédement définit est un corps, et exhiber un exemple de non-commutativité.

Exercice I-2. Démontrer que $(\{0, 1\}, \bar{+}, \bar{\times})$ est un corps, où $\bar{+}$ et $\bar{\times}$ désignent l'addition et la multiplication modulo 2.

2- Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Définition 6. *Espace vectoriel*
Soit $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \times_{\mathbb{K}})$ un corps commutatif, d'éléments neutres pour + et $\times$ respectivement $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$. On appelle **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ (ou aussi $\mathbb{K}$-espace vectoriel) tout triplet $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ tel que :

- $(\mathbb{E}, +_{\mathbb{E}})$ est un groupe abélien, de neutre $0_{\mathbb{E}}$,
- $\cdot$ est une **loi de composition externe** (ou aussi, *loi externe*) :

$$\cdot \,:\, \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{E} & \to & \mathbb{E} \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

  qui vérifie les **axiomes des espaces vectoriels** :
  1- *stabilité par le neutre* : $\forall x \in \mathbb{E},\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$
  2- *distributivité à gauche* : $\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot (x +_{\mathbb{E}} y) = \lambda \cdot x +_{\mathbb{E}} \lambda \cdot y$
  3- *distributivité à droite* : $\forall x \in \mathbb{E},\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu) \cdot x = \lambda \cdot x +_{\mathbb{E}} \mu \cdot x$
  4- *associativité* : $\forall x \in \mathbb{E},\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appellés les **scalaires** de l'espace vectoriel, les éléments de $\mathbb{E}$ sont les **vecteurs**.

Remarque 5. Pour alleger les notations, on se permet de noter : $1_{\mathbb{K}}$ par 1, $\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu$ par $\lambda\mu$, $\lambda \cdot x$ par λx, $+_{\mathbb{K}}, \times_{\mathbb{K}}, +_{\mathbb{E}}$ par $+, \times$, et + également. Enfin, lorsque le contexte est assez clair, on notera $0_{\mathbb{K}}$ et $0_{\mathbb{E}}$ par 0 bien que ce ne soit pas le même objet mathématique. Avec ces notations, les axiomes deviennent :

1- $\forall x \in \mathbb{E},\ 1x = x$
2- $\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
3- $\forall x \in \mathbb{E},\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
4- $\forall x \in \mathbb{E},\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Enfin, bien que ce soit peu recommandé, on se permettera parfois de multiplier par un scalaire à droite et non à gauche.
Enfin, lorsque les lois $+, \cdots$ et le corps des scalaires sont clairs par le contexte, on pourra les omettre dans la notation, et parler de «l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ ».

Remarque 6. Attention, il n'est pas question de multiplier entre eux deux vecteurs. Nous n'avons pas définit de multiplication sur $\mathbb{E}$!

Exemple 4.

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$,$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ avec $n \geqslant 1$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$,$(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ (ensemble des suites de $\mathbb{R}$, et des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) sont aussi des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Mais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- $(\mathscr{C}^0(I), +, \cdot)$, l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes d'indéterminée X à coefficients réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque 7. Un espace vectoriel est, en somme, un groupe où l'on peut en plus «grossir », et «rétrécir » les objets, avec la multiplication par un scalaire, et tous les calculs se comportent comme attendus.

Définition 7. *Combinaison linéaire*
Soit $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_p)$ p vecteurs de $\mathbb{E}$. On appelle **combinaison linéaire** de ces vecteurs tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$$

On dit également que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ est une combinaison linéaire (abrégé CL) des $(x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$.

Exemple 5.

- $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des $(E_{i,j})_{i,j \in [\![1;2]\!]^2}$.
  En effet, $M = 1E_{1,1} + (-1)E_{1,2} + 2E_{2,1}$.

- $P = 2X^2 + X - 3$ est une combinaison linéaire de $(X^2, X, 1)$.

Définition 8. *Sous-espace vectoriel*
Soit $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $\mathbb{F}$ est un **sous-espace vectoriel** de $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ si :

- $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$
- $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Remarque 8. On notera en abrégé que $\mathbb{F}$ est un s.e.v de $\mathbb{E}$. Attention, il faut que les lois (et donc les éléments neutres) soient les mêmes !
Cependant, plutôt que de redépontrer les axiomes d'espace vectoriel pour $\mathbb{F}$, on utilisera le théorème suivant, qui nous permet de tirer directement profit de la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Théorème 1. *Caractérisation des sous-espaces vectoriels*
Soit $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$. *Pour que* $\mathbb{F}$ *soit un sous-espace vectoriel de* $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ *il faut et il suffit que :*

1- $\mathbb{F} \neq \varnothing$

2- $\mathbb{F}$ *soit stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in \mathbb{F}^2,\ \lambda x + y \in \mathbb{F}$$

Démonstration 1.

Exemple 6. Voici quelques exemples de sous-espaces vectoriels. Démontrer les propositions suivantes à l'aide du théorème ci-dessus constitue un bon entraînement.

- $\{0_{\mathbb{E}}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$
- $\{(2a, -3b, a, a + b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes d'indéterminée X à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- L'ensemble des matrice carrées de taille n, à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de trace nulle est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un s.e.v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble des solutions d'un système de n équations à p inconnues homogène est un s.e.v de $\mathbb{R}^p$. *(On pourra se limiter à des cas particuliers)*

Proposition 1. *Règles de calculs dans un espace vectoriel*

- $\forall x \in \mathbb{E},\ 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{E}} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}}$
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E},\ \lambda \cdot x = 0_{\mathbb{E}} \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_{\mathbb{E}}$
- $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E},\ (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda x)$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{E},\ n \cdot x = nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}.$

Proposition 2. *Stabilité par intersection*
Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$. Alors

$$\bigcap_{i\in I} H_i \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{E}$$

Démonstration 2.

Exemple 7. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, repéré par l'espace à trois dimension (x, y, z), les plans d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont deux sous-espace vectoriels. Leur intersection est la droite de vecteur directeur $(0, 0, 1)$, également un espace vectoriel.
L'ensemble de fonctions $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est un sous espace-vectoriel de $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Remarque 9. Attention, ce n'est pas vrai pour l'union. Prenez $\{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\{M \ / \ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ comme sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par exemple...
C'est que la combinaison linéaire n'est pas garantie d'être dans l'union. Il nous faut soit une condition plus forte, comme dans la proposition juste après, soit un outil mathématique plus adapté à la structure linéaire des espaces vectoriels que l'union : la somme.

Proposition 3. Soit $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. Alors $\mathbb{F}_1 \cup \mathbb{F}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ **si et seulement si** $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_1$.

Démonstration 3.

Définition 9. *Sous-espace vectoriel engendré*
Soit $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit A une partie de $\mathbb{E}$. On définit le **sous-espace vectoriel engendré par** A, noté $\mathrm{Vect}(A)$ par :

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset \mathbb{F} \\ \mathbb{F} \text{ sev de } \mathbb{E}}} \mathbb{F}$$

C'est-à-dire l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ contenant A.
C'est, au sens de l'inclusion, *le plus petit* sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ contenant A.

Proposition 4. Soit $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit A une partie de $\mathbb{E}$.

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ x \in E \;/\; \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (a_1, \ldots, a_n) \in A^n,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \;/\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = x \right\}$$

C'est-à-dire que $\mathrm{Vect}(A)$ est formé par toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A. On dit aussi que c'est A *clôt par* (ou saturé par) combinaison linéaire.

Démonstration 4.

Remarque 10. On étend cette définition par $\mathrm{Vect}(A, B) = \mathrm{Vect}(A \cup B)$ quand A et B sont deux parties de $\mathbb{E}$.

Exemple 8. $\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$

Définition 10. *Somme de deux sous-espaces vectoriels*
Soit $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. On définit leur **somme**, notée $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ comme l'espace vectoriel :

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \{x_1 + x_2 \;/\; x_1 \in \mathbb{V}_1,\ x_2 \in \mathbb{V}_2\}$$

Remarque 11. On a donc $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \text{Vect}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$

Exemple 9. La somme de deux droites vectorielles disctinctes est un plan vectoriel.

Remarque 12. Si $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_2$, alors $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_2$.

Définition 11. *Sous-espace vectoriels supplémentaires*
Soit $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$. On dit qu'ils sont **supplémentaires** si :

$$\begin{cases} \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 & = \mathbb{E} \\ \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 & = \{0\} \end{cases}$$

On le note $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 = \mathbb{E}$.

Remarque 13. Attention, un sous-espace vectoriel n'a, en général, pas un supplémentaire *unique*. Ce n'est le cas que pour $\{0\}$ et $\mathbb{E}$.

Proposition 5. Si $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 = \mathbb{E}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{E},\ \exists!(x_1, x_2) \in \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \ / \ x_1 + x_2 = x$$

Démonstration 5.

Remarque 14. Cette décomposition unique en vecteurs de sous-espaces vectoriels peut se généraliser sur des familles plus grandes de sous-espaces vectoriels, par la notion ci-dessous.

Définition 12. *Somme directe de sous-espace vectoriels*
Soient $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n$ n sous-espace vectoriels de $\mathbb{E}$. On dit que $\mathbb{E}$ est **somme directe** des $(\mathbb{V}_i)$ sitôt que :

$$\forall x \in \mathbb{E},\ \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{V}_1 \times \cdots \times \mathbb{V}_n \ / \ x_1 + \cdots + x_n = x$$

On le note $\mathbb{E} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{V}_n = \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{V}_i$

Remarque 15. On dira que les espaces $\mathbb{V}_i$ *sont en somme directe* si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}_i = \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{V}_i$.
Ainsi, deux espaces supplémentaires sont en somme directe.

Proposition 6. Soient $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n$ n sous-espace vectoriels de $\mathbb{E}$. Ces espaces sont en somme directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{V}_1 \times \cdots \times \mathbb{V}_n,\ \ x_1 + \cdots + x_n = 0 \implies \forall i \in [\![1; n]\!], x_i = 0$$

Démonstration 6.

Exemple 10. $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(\{(1,0,0)\}) \oplus \text{Vect}(\{(0,1,0)\}) \oplus \text{Vect}(\{(0,0,1)\})$
$= \text{Vect}(\{(1,0,0)\}) \oplus \text{Vect}(\{(2,-1,0)\}) \oplus \text{Vect}(\{(0,1,3)\})$

Définition 13. Soit $(\mathbb{E}, +_{\mathbb{E}}, \cdot_{\mathbb{E}})$ et $(\mathbb{F}, +_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{F}})$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit **l'espace vectoriel produit** la structure $(\mathbb{E} \times \mathbb{F}, +, \cdots)$ avec les lois $+$ et $\cdot$ définies sur $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ par :

$$\begin{array}{rcl} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_1 +_{\mathbb{E}} x_2, y_1 +_{\mathbb{F}} y_2) \\ \lambda \cdot (x, y) & = & (\lambda \cdot_{\mathbb{E}} x, \lambda \cdot_{\mathbb{F}} y) \end{array}$$

Là aussi, on pourra alleger les notations de $+_{\mathbb{E}}, +_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{E}}, \cdot_{\mathbb{F}}$ quand le contexte le permet (la plupart du temps).

Exemple 11. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, non seulement en tant qu'ensemble, mais également en tant qu'espace vectoriel. On peut aussi définir par exemple l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2 \times R[X]$, constitué des triplets de deux complexes et un polynôme à coefficient réel, si l'on veut...

Proposition 7. Soit X un ensemble, et soit $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors l'ensemble :

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{F}) = \{f : X \to \mathbb{F}\}$$

possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\cdot$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in X,\ (f_1 + f_2)(x) & = & f_1(x) + f_2(x) \\ \forall x \in X,\ (\lambda \cdot f)(x) & = & \lambda f(x) \end{array}$$

(où l'on a directement utilisé des notations «allégées »...)

Exemple 12. L'ensemble des fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. L'ensemble des suites à valeurs complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ...

3- Famille de vecteurs

Dans cette section, on considèrera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ et une famille $(x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ de p vecteurs de $\mathbb{E}$.

Définition 14. On définit l'*espace vectoriel engendré par la famille* $(x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ comme l'espace vectoriel engendré par l'ensemble constitué des vecteurs $(x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$:

$$\text{Vect}((x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}) = \text{Vect}(\{x_1, x_2, \ldots, x_p\})$$

On dit aussi que les $(x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ *engendrent* cet espace vectoriel.

Définition 15. *Famille génératrice*
La famille $(x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est dite **génératrice** de $\mathbb{E}$ sitôt qu'elle engendre $\mathbb{E}$: c'est-à-dire quand

$$\mathbb{E} = \text{Vect}((x_i)_{i \in [\![1;p]\!]})$$

Ce qui est équivalent à :

$$\forall x \in \mathbb{E},\ \exists (\lambda_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^p \ / \ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

Exemple 13.

- $(1, \mathrm{i})$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $(1, 2, \mathrm{i}, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3})$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- (1) est une famille génératrice de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
- $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \mathrm{e})$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
- $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Définition 16. *Famille libre*
La famille $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est dite **libre dans** $\mathbb{E}$ sitôt que ses vecteurs sont **linéairement indépendants**, c'est-à-dire :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1;p]\!],\ x_i = 0$$

(Cela revient à dire que les p espaces $\mathrm{Vect}(x_i)$ sont en somme directe.)

Définition 17. *Famille liée*
La famille $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est dite **liée** sitôt qu'elle *n'est pas libre* (on dit aussi que ses vecteurs sont *linéairement dépendants*), c'est à dire quand

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \ / \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \text{ et } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

Proposition 8.

1- Une famille contenant le vecteur nul $0_{\mathbb{E}}$ est forcément liée.
2- Une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si ils sont colinéaires
3- Une famille de vecteurs est liées si et seulement si l'un des vecteur est combinaison linéaire des autres.

Démonstration 7.

Exemple 14.

- $(1, X, 2X + 3)$ est liée dans $\mathbb{R}_3[X]$
- $(1, X)$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$
- $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$

Remarque 16. Le théorème suivant, que l'on peut déjà citer, est à la base de la théorie sur la dimension des espaces vectoriels, que nous verrons dans la suite.

Théorème. *Si un espace vectoriel possède une famille génératrice à n éléments, alors toute famille libre a au plus n éléments.*