

## 第二节 离散型随机变量及其分布律

一、离散型随机变量的分布律

二、常见离散型随机变量的概率分布

三、小结



# 一、离散型随机变量的分布律

**定义** 设离散型随机变量  $X$  所有可能取的值为  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $X$  取各个可能值的概率, 即事件  $\{X = x_k\}$  的概率, 为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

称此为离散型随机变量  $X$  的分布律.

**说明** (1)  $p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots;$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$



离散型随机变量的分布律也可表示为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

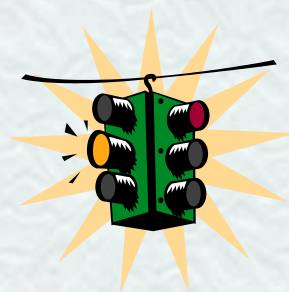
$X$	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$	$\cdots$
$p_k$	$p_1$	$p_2$	$\cdots$	$p_n$	$\cdots$





**例1** 设一汽车在开往目的地 的道路上需经过四组信号灯,每组信号灯以  $1/2$  的概率允许或禁止汽车通过.以  $X$  表示汽车首次停下时,它已通过的信号灯的组数(设各组信号灯的工作是相互独立的),求  $X$  的分布律.

**解**



设  $p$  为每组信号灯禁止汽车 通过的概率,则有

$X$	0	1	2	3	4
$p_k$	$p$	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	$(1-p)^3 p$	$(1-p)^4$



将  $p = \frac{1}{2}$  代入得

$X$	0	1	2	3	4
$p_k$	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625



## 二、常见离散型随机变量的概率分布

### 1. 两点分布

设随机变量  $X$  只可能取0与1两个值, 它的分布律为

$X$	0	1
$p_k$	$1-p$	$p$

则称  $X$  服从 (0—1) 分布或两点分布.





**实例1** “抛硬币” 试验,观察正、反两面情况.

$$X = X(e) = \begin{cases} 0, & \text{当 } e = \text{正面}, \\ 1, & \text{当 } e = \text{反面}. \end{cases}$$

随机变量  $X$  服从 (0—1) 分布.

其分布律为

$X$	0	1
$p_k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



**实例2** 200件产品中,有190件合格品,10件不合格品,现从中随机抽取一件,那末,若规定

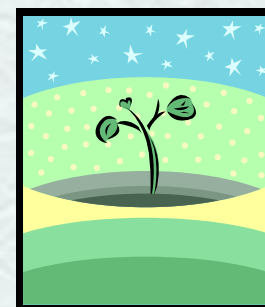
$$X = \begin{cases} 1, & \text{取得不合格品,} \\ 0, & \text{取得合格品.} \end{cases}$$

$X$	0	1
$p_k$	$\frac{190}{200}$	$\frac{10}{200}$

则随机变量  $X$  服从(0—1)分布.







## 说明

两点分布是最简单的一种分布,任何一个只有两种可能结果的随机现象,比如新生婴儿是男还是女、明天是否下雨、种籽是否发芽等,都属于两点分布.



## 2.等可能分布

如果随机变量  $X$  的分布律为

$X$	$a_1$	$a_2$	$\cdots$	$a_n$
$p_k$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

其中  $(a_i \neq a_j), (i \neq j)$ , 则称  $X$  服从等可能分布.

**实例** 抛掷骰子并记出现的点数为随机变量  $X$ ,

则有

$X$	1	2	3	4	5	6
$p_k$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



## 3.二项分布

### (1) 重复独立试验

将试验  $E$  重复进行  $n$  次, 若各次试验的结果互不影响, 即每次试验结果出现的概率都不依赖于其它各次试验的结果, 则称这  $n$  次试验是**相互独立的**, 或称为  **$n$  次重复独立试验**.





## (2) $n$ 重伯努利试验

设试验  $E$  只有两个可能结果： $A$  及  $\bar{A}$ , 则称  $E$  为伯努利试验.

设  $P(A) = p$  ( $0 < p < 1$ ), 此时  $P(\bar{A}) = 1 - p$ .

将  $E$  独立地重复地进行  $n$  次, 则称这一串重复的独立试验为  $n$  重伯努利试验.



**实例1** 抛一枚硬币观察得到正面或反面. 若将硬币抛  $n$  次, 就是  $n$  重伯努利试验.

**实例2** 抛一颗骰子  $n$  次, 观察是否 “出现 1 点”, 就是  $n$  重伯努利试验.

### (3) 二项概率公式

若  $X$  表示  $n$  重伯努利试验中事件  $A$  发生的次数, 则  $X$  所有可能取的值为

$$0, 1, 2, \dots, n.$$



当  $X = k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) 时,  
即  $A$  在  $n$  次试验中发生了  $k$  次.

$$\underbrace{A A \cdots A}_{k \text{ 次}} \underbrace{\overline{A} \overline{A} \cdots \overline{A}}_{n-k \text{ 次}},$$

$$\underbrace{A A \cdots A}_{k-1 \text{ 次}} \overline{A} \underbrace{A \overline{A} \cdots \overline{A}}_{n-k-1 \text{ 次}} \cdots \cdots$$

得  $A$  在  $n$  次试验中发生  $k$  次的方式共有  $\binom{n}{k}$  种,  
且两两互不相容.





因此  $A$  在  $n$  次试验中发生  $k$  次的概率为

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{\text{记 } q = 1-p} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

得  $X$  的分布律为

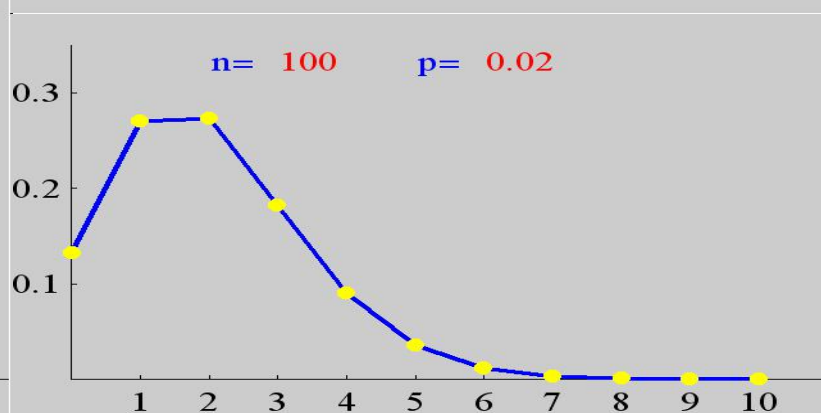
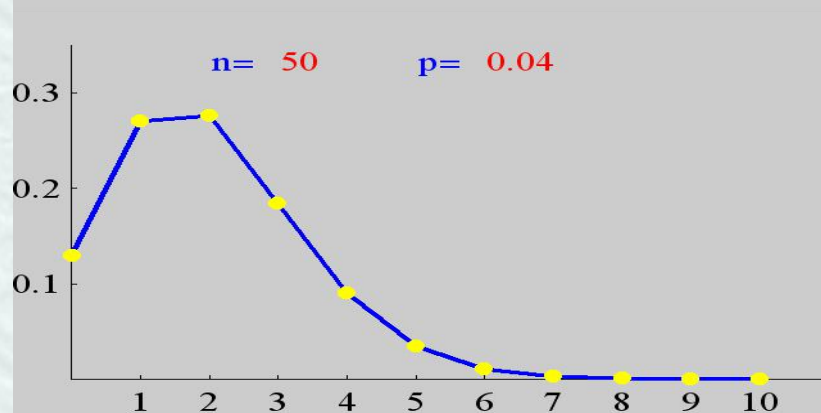
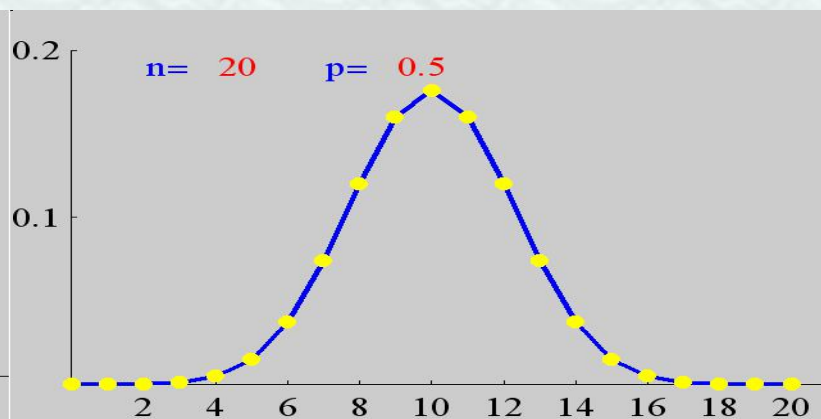
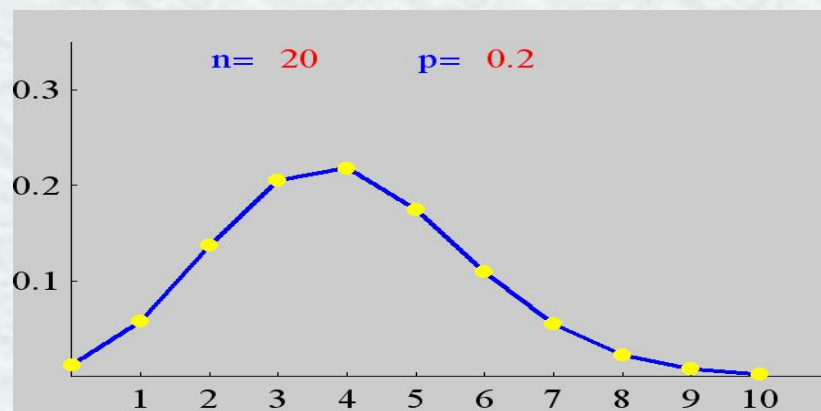
$X$	0	1	...	$k$	...	$n$
$p_k$	$q^n$	$\binom{n}{1} p q^{n-1}$	...	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	...	$p^n$

称这样的分布为二项分布. 记为  $X \sim b(n, p)$ .

二项分布  $\xrightarrow{n=1}$  两点分布



## 二项分布的图形



**例如** 在相同条件下相互独立地进行 5 次射击,每次射击时击中目标的概率为 0.6 ,则击中目标的次数  $X$  服从  $b(5,0.6)$  的二项分布.

$X$	0	1	2	3	4	5
$p_k$	$(0.4)^5$	$\binom{5}{1} 0.6 \cdot 0.4^4$	$\binom{5}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^3$	$\binom{5}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^2$	$\binom{5}{4} 0.6^4 \cdot 0.4$	$0.6^5$





**例2** 按规定,某种型号电子元件的使用寿命超过1500 小时的为一级品 .已知某一大批产品的一级品率为0.2,现在从中随机地抽查 20只.问20只元件中恰有  $k$  只( $k = 0,1,\cdots,20$ ) 一级品的概率是多少?

**分析** 这是不放回抽样.但由于这批元件的总数很大,且抽查元件的数量相对于元件的总数来说又很小,因而此抽样可近似当作放回抽样来处理.

把检查一只元件是否为 一级品看成是一次试验,检查 20 只元件相当于做 20 重伯努利试验 .

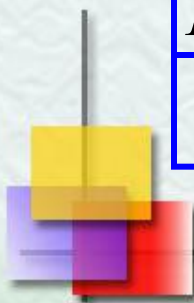


解 以  $X$  记 20 只元件中一级品的只数 ,

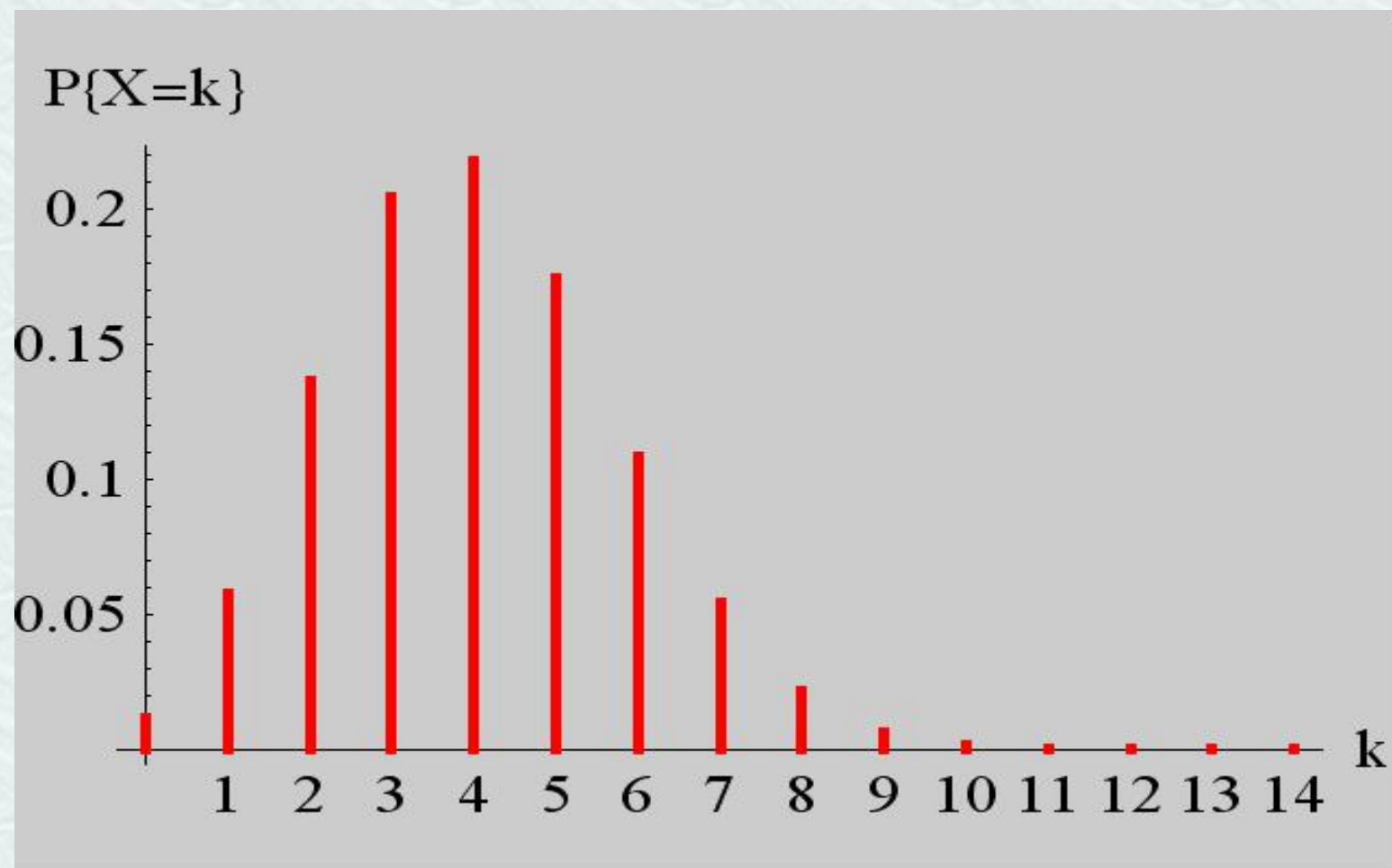
则  $X \sim b(20, 0.2)$ , 因此所求概率为

$$P\{X = k\} = \binom{20}{k} (0.2)^k (0.8)^{20-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 20.$$

$P\{X = 0\} = 0.012$	$P\{X = 4\} = 0.218$	$P\{X = 8\} = 0.022$
$P\{X = 1\} = 0.058$	$P\{X = 5\} = 0.175$	$P\{X = 9\} = 0.007$
$P\{X = 2\} = 0.137$	$P\{X = 6\} = 0.109$	$P\{X = 10\} = 0.002$
$P\{X = 3\} = 0.205$	$P\{X = 7\} = 0.055$	
$P\{X = k\} < 0.001, \text{ 当 } k \geq 11 \text{ 时}$		



# 图示概率分布





**例3** 某人进行射击,设每次射击的命中率为 0.02, 独立射击 400 次,试求至少击中两次的概率.

**解** 设击中的次数为  $X$ ,

则  $X \sim b(400, 0.02)$ .

$X$  的分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{400}{k} (0.02)^k (0.98)^{400-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 400.$$

因此

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} \\ &= 1 - (0.98)^{400} - 400(0.02)(0.98)^{399} = 0.9972. \end{aligned}$$



例3  $X \sim b(2, p)$ .  $Y \sim b(3, p)$ .

$$P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9} \quad \text{求} \quad P\{Y \geq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$$

解 
$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - \binom{2}{0}(p)^0(1-p)^2 = \frac{5}{9}$$

$$\binom{2}{0}(p)^0(1-p)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$Y \sim b(3, \frac{1}{3}).$$

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - \binom{3}{0}p^0(1-p)^3 = \frac{19}{27}$$



例3 已知 $X$ 的分布律，如下，现对 $X$ 进行三次独立观测，求至少有两观测值大于1的概率

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

解

$$P\{X > 1\} = \frac{1}{2}$$

$$Y \sim b(3, \frac{1}{2}).$$

$$P\{Y \geq 2\} = P\{Y = 2\} + P\{Y = 3\} = \frac{1}{2}$$

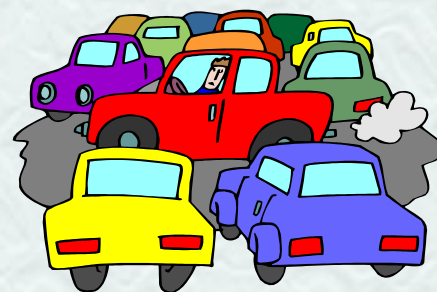




**例4** 有一繁忙的汽车站,每天有大量汽车通过,设每辆汽车在一天的某段时间内,出事故的概率为0.0001,在每天的该段时间内有1000 辆汽车通过,问出事故的次数不小于2的概率是多少?

**解** 设 1000 辆车通过,  
出事故的次数为  $X$ , 则

$$X \sim b(1000, 0.0001),$$



故所求概率为  $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - 0.9999^{1000} - \binom{1000}{1} \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999}$$

二项分布  $\xrightarrow{np \rightarrow \lambda (n \rightarrow +\infty)}$  泊松分布



## 4. 泊松分布

设随机变量所有可能取的值为  $0, 1, 2, \dots$ , 而取各个值的概率为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中  $\lambda > 0$  是常数. 则称  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 记为  $X \sim \pi(\lambda)$ .



## 泊松分布的背景及应用

二十世纪初卢瑟福和盖克两位科学家在观察与分析放射性物质放出的粒子个数的情况时, 他们做了2608次观察(每次时间为7.5秒)发现放射性物质在规定的一段时间内, 其放射的粒子数 $X$ 服从泊松分布.





泊松分布的产生机制：交通路口事故数

设观察时间段 $[0,1)$ ， $n$  为很大的自然数，把其分成等长的  $n$  段： $l_1 = [0, \frac{1}{n}]$ ,  $l_2 = [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ , ...,  $l_n = [\frac{n-1}{n}, 1]$

假设：1. 每段时间段内恰发生一个事故的概率与时间段长度成正比，设为  $\frac{\lambda}{n}$ ，当  $n$  很大时， $\frac{1}{n}$  很小，则在任意时间段内发生两次及以上事故是不可能的，故不发生事故的概率为  $1 - \frac{\lambda}{n}$



2.各时间段内是否发生事件是独立的，那么在  $[0,1)$  时间段内事故发生数  $X$  看成有事故发生的时段数，所以  $X$  服从二项分布  $X \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$

于是有：
$$P(X = i) = C_n^i \left( \frac{\lambda}{n} \right)^i \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-i}$$

当  $n \rightarrow \infty$  取极限时，则有

$$\frac{C_n^i}{n^i} \rightarrow \frac{1}{i!}, \quad \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \rightarrow e^{-\lambda}$$

则可得：

$$P(X = i) = C_n^i \left( \frac{\lambda}{n} \right)^i \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-i} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$$

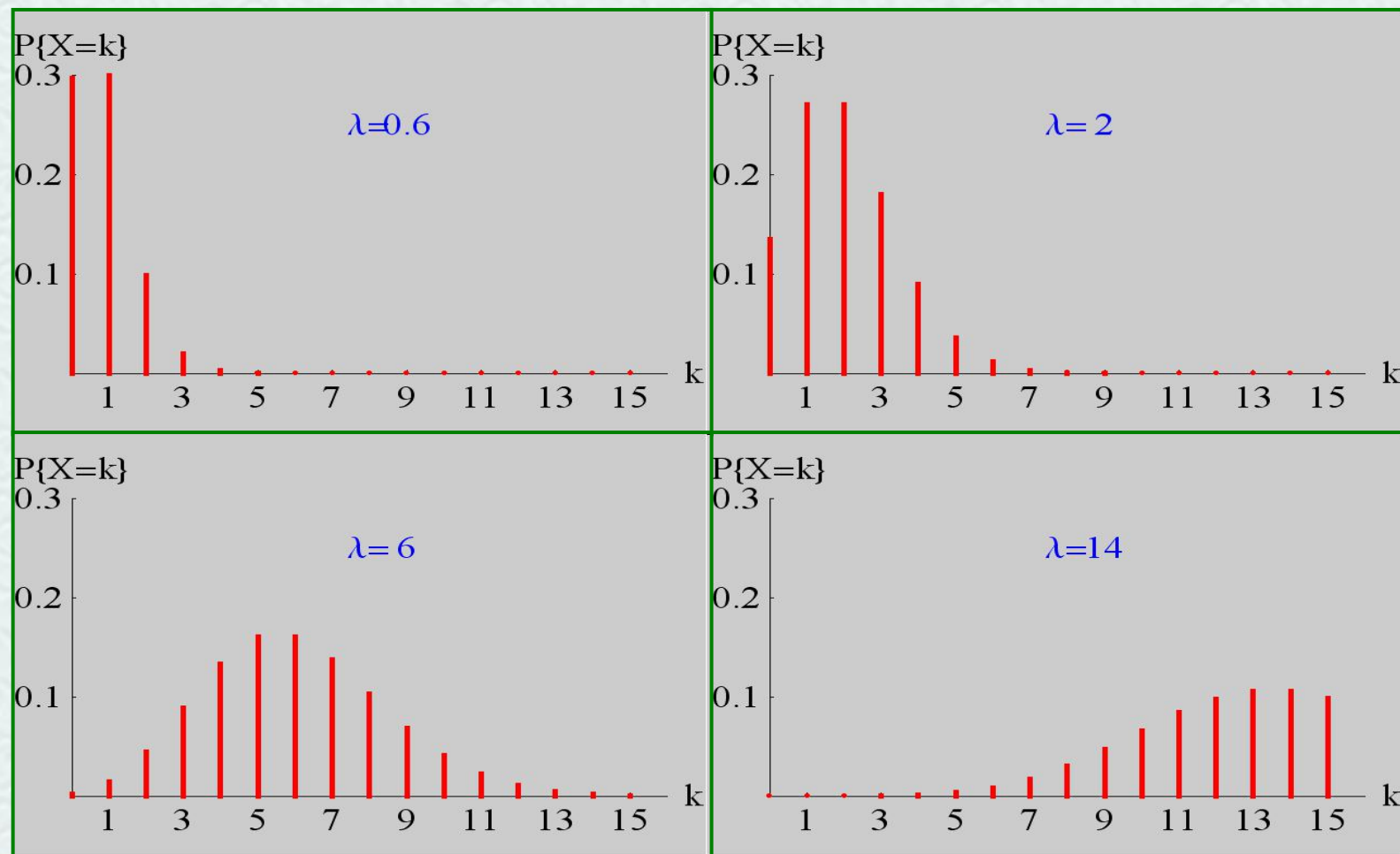


可见泊松分布是二项分布的极限分布，当  $n$  很大， $p$  很小时， $np=\lambda$  不太大时，二项分布就可近似地看成是参数  $\lambda=np$  的泊松分布





# 泊松分布的图形



在生物学、医学、工业统计、保险科学及公用事业的排队等问题中，泊松分布是常见的。例如地震、火山爆发、特大洪水、交换台的电话呼唤次数等，都服从泊松分布。



地震



火山爆发



特大洪水



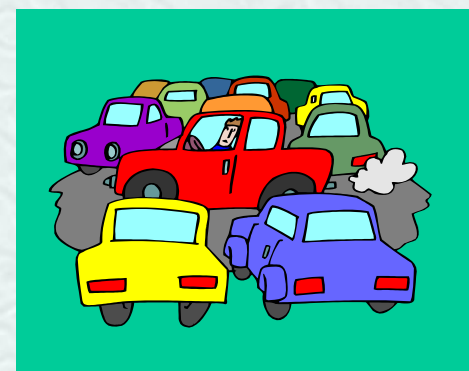
商场接待的顾客数



电话呼唤次数



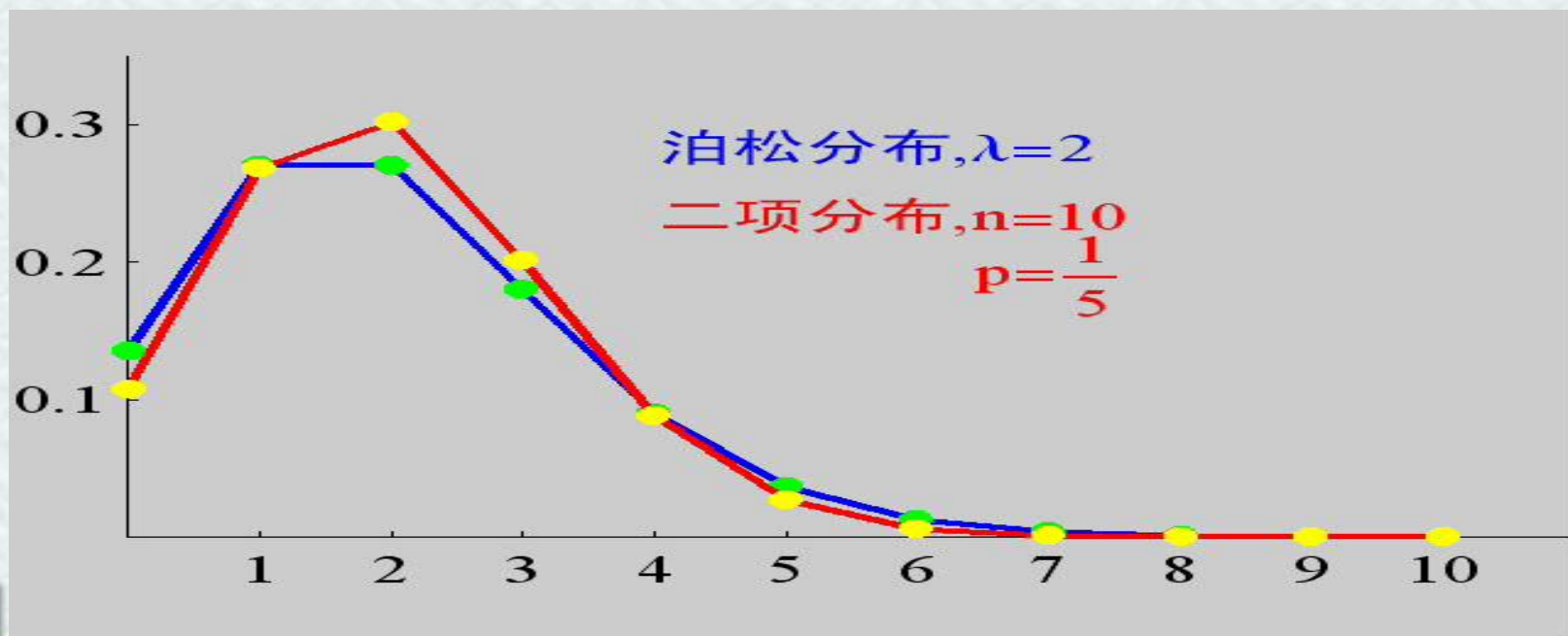
交通事故次数





**泊松定理**表明，泊松分布是二项分布的极限分布，  
当  $n$  很大， $p$  很小时，二项分布就可近似地看成是  
参数  $\lambda=np$  的泊松分布

二项分布  $\xrightarrow{np \rightarrow \lambda (n \rightarrow +\infty)}$  泊松分布



**例4** 有一繁忙的汽车站, 每天有大量汽车通过, 设每辆汽车, 在一天的某段时间内出事故的概率为0.0001, 在每天的该段时间内有1000 辆汽车通过, 问出事故的次数不小于2的概率是多少?

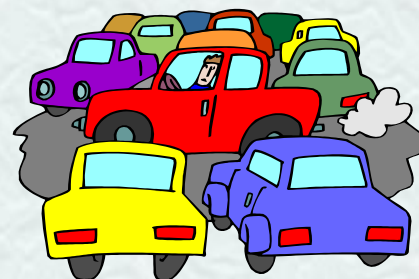
**解** 设1000 辆车通过, 出事故的次数为  $X$ , 则

$$X \sim b(1000, 0.0001),$$

所求概率为  $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

可利用泊松定理计算  $\left( \frac{1000}{1} \right) \cdot 0.0001 \times 0.9999 = 0.1,$

$$P\{X \geq 2\} \approx 1 - \frac{e^{-0.1}}{0!} - \frac{0.1 \cdot e^{-0.1}}{1!} = 0.0047.$$



## 合理配备维修工人问题

**例5** 为了保证设备正常工作,需配备适量的维修工人(工人配备多了就浪费,配备少了又要影响生产),现有同类型设备300台,各台工作是相互独立的,发生故障的概率都是0.01.在通常情况下一台设备的故障可由一个人来处理(我们也只考虑这种情况),问至少需配备多少工人,才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01?

**解** 设需配备  $N$  人. 记同一时刻发生故障的设备台数为  $X$ , 那么,  $X \sim b(300, 0.01)$ . 所需解决的问题是确定最小的  $N$ , 使得





$P\{X \leq N\} \geq 0.99.$  由泊松定理

$$P\{X \leq N\} \approx \sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!},$$

故有 
$$\sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!} \geq 0.99,$$

即 
$$1 - \sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!} \leq 0.01,$$

查表可求得满足此式最小的  $N$  是 8. 故至少需配备 8 个工人, 才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于 0.01.

## 5. 几何分布

若随机变量  $X$  的分布律为

$$\begin{array}{c|cccccc}
 X & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\
 \hline
 p_k & p & qp & \cdots & q^{k-1}p & \cdots
 \end{array}
 , p + q = 1,$$

则称  $X$  服从**几何分布**.

概率数列是一个几何数列，且概率之和为几何级数，和为1（性质）.



**例6** 设某批产品的次品率为  $p$ , 对该批产品做有放回的抽样检查, 直到第一次抽到一只次品为止 (在此之前抽到的全是正品), 那么所抽到的产品数  $X$  是一个随机变量, 求  $X$  的分布律.





解  $X$  所取的可能值是  $1, 2, 3, \dots$ .

设  $A_i$  表示“抽到的第  $i$  个产品是正品”，

$$\begin{aligned} P\{X = k\} &= P(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} \overline{A_k}) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_{k-1}) \cdot P(\overline{A_k}) \\ &= \underbrace{(1-p)(1-p) \cdots (1-p)}_{(k-1)} \cdot p = q^{k-1} p. \end{aligned}$$

所以  $X$  服从几何分布.  $(k = 1, 2, \dots)$

**说明** 几何分布可作为描述某个试验“首次成功”的概率模型.



# 三、小结

离散型随机变量的分布

- 两点分布
- 均匀分布
- 二项分布
- 泊松分布
- 几何分布

两点分布

$$n = 1$$

二项分布

$$n > 10, p < 0.1$$

泊松分布



## 2. 二项分布与 (0-1) 分布、泊松分布之间的关系.

二项分布是 (0-1) 分布的推广, 对于  $n$  次独立重复伯努里试验, 每次试验成功的概率为  $p$ , 设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 次试验成功} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 次试验失败} \end{cases}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

它们都服从 (0-1) 分布并且相互独立, 那末

$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  服从二项分布, 参数为  $(n, p)$ .





以  $n, p$  ( $np = \lambda$ ) 为参数的二项分布, 当  $n \rightarrow \infty$  时趋于以  $\lambda$  为参数的泊松分布, 即

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np},$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

