Électrocinétique 2
Circuits linéaires du premier ordre

Introduction

Nous avons dans le premier chapitre défini ce qu'était un régime stationnaire, c'est à dire indépendant du temps. Lorsqu'un circuit est soumis à une variation brutale, par exemple lorsqu'on allume un générateur, il met un certain temps pour atteindre le régime permanent. Nous nous proposons dans ce chapitre de décrire le fonctionnement de réseaux dans cette situation, ce qui correspond à l'étude des régimes transitoires. Nous nous limiterons pour l'instant aux circuits du premier ordre, qui sont régis par une équation différentielle linéaire du premier ordre. En physique, cela limitera notre étude aux circuits RC et RL série. Nous nous placerons dans ce chapitre entier dans le cadre de l'ARQS, ce qui nous permettra d'utiliser les lois de Kirchhoff.

1 Échelon de tension et régime transitoire

1.1 Échelon de tension

1.1.1 Définition

Définition 1. ***Échelon de tension***

....

....

....

....

....

....

....

On représente en figure 1 l'allure de deux échelons de tension différents.

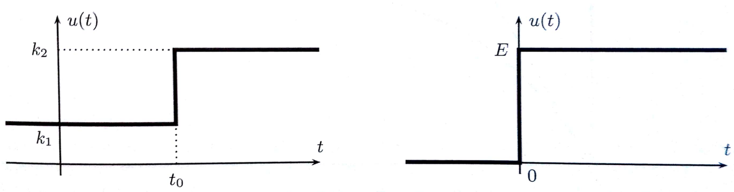


FIGURE 1 – Échelons de tension

1.1.2 Modélisation mathématique

On utilise souvent pour décrire un échelon de tension une fonction mathématique appelée *fonction d'Heaviside*.

Définition 2. ***Fonction d'Heaviside***

....

....

....

....

....

On voit que, de manière générale, l'échelon de tension s'exprime grâce à la fonction de Heaviside sous la forme suivante (partie gauche de la figure 1) :

$$u(t) = (k_2 - k_1)\Upsilon(t) + k_1$$

Pour la partie droite de la figure 1, on a $k_1 = 0$ et $k_2 = E$, d'où, plus simplement :

$$u(t) = E\Upsilon(t)$$

C'est ce dernier cas que nous rencontrerons le plus souvent.

❖ **Remarque :** Nous n'avons pas défini la valeur de la fonction de Heaviside en $t = 0$. Certains auteurs choisissent $\Upsilon(0) = 0$, d'autres $\Upsilon(0) = 1$ ou même $\Upsilon(0) = 1/2$. Ce choix ne présente aucune importance en physique.

1.1.3 Réalisation expérimentale d'un échelon de tension

On peut réaliser expérimentalement un échelon de tension de deux manières différentes :

- En fermant un interrupteur relié à une source de tension idéale.
- En utilisant un générateur basse fréquence pour délivrer un signal carré (voir TP).

Si on observe expérimentalement l'échelon de tension ainsi créé, il présente l'allure de la figure 2.

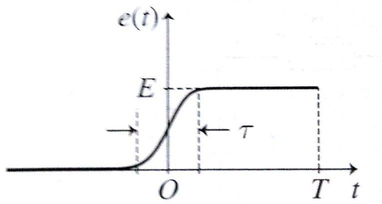


FIGURE 2 – Échelon de tension réel

On observe qu'il faut en réalité un certain temps pour que la tension bascule de la valeur basse à la valeur haute. La modélisation d'un échelon de tension par la fonction de Heaviside est donc imparfaite, elle peut parfois s'avérer insuffisante si le temps de montée de l'échelon est trop long.

1.2 Étude qualitative d'un circuit RC - Régime transitoire

Considérons le circuit électrique représenté en figure 3 ou l'association en série d'une résistance R et d'un condensateur C est soumise à un échelon de tension réalisé grâce à un interrupteur relié à une source de tension idéale de force électromotrice E. A l'instant initial, l'interrupteur est ouvert et le condensateur est déchargé. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur, la tension e passe alors de 0 à E et on a réalisé un échelon de tension.

On s'intéresse à l'évolution de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur au cours du temps. On observe qu'elle présente l'allure donnée en figure 4.

On réalise les observations suivantes :

- La tension aux bornes du condensateur est initialement nulle. Ceci est logique, puisque celui-ci est initialement déchargé, on a donc :

$$u(0) = \frac{q(0)}{C} = 0$$

Où $q(t)$ est la charge portée par l'armature positive du condensateur à l'instant t.

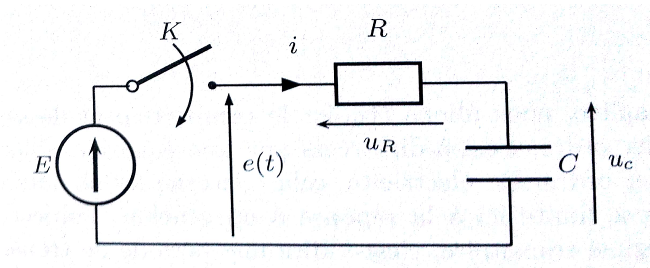


FIGURE 3 – Circuit RC soumis à un échelon de tension

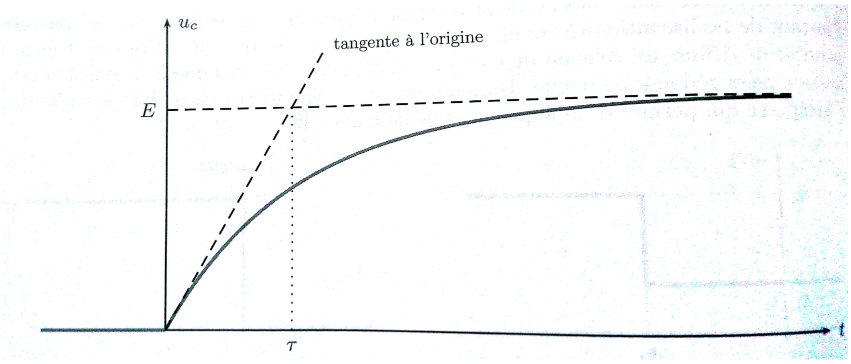


FIGURE 4 – Évolution de la tension aux bornes du condensateur

- Au bout d'un certain temps, la tension aux bornes du condensateur vaut E. On a alors chargé le condensateur au maximum, et il n'y a plus de courant dans le circuit. Le système cesse alors d'évoluer, on a atteint le régime stationnaire.
- Entre ces deux instants, la tension augmente progressivement aux bornes du condensateur (les charges s'accumulent au fur et à mesure sur les armatures du condensateur). Ce régime, auquel nous allons nous intéresser dans la suite du chapitre, est appelé *régime transitoire*.

Définition 3. ***Régime transitoire***

....

....

....

....

....

❖ **Remarque :** Nous avons introduit sur la figure 4 un temps caractéristique τ. Nous reviendrons plus tard sur sa signification. Signalons simplement qu'il donne un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. Au bout de quelques τ, le régime permanent est établi.

2 Étude analytique d'un circuit RC

2.1 Expression de la tension aux bornes du condensateur

2.1.1 Mise en équation

Reprenons le circuit électrique représenté en figure 3 et exprimons la tension aux bornes du condensateur grâce à la loi des mailles. On suppose une nouvelle fois que le condensateur est initialement déchargé.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Définition 4. ***Constante de temps du circuit RC***

....

....

....

....

Forme canonique de l'équation d'évolution du circuit

....

....

....

....

2.1.2 Rappel - Résolution d'une équation différentielle du premier ordre

⚠Toutes les démonstrations et méthodes de résolution abordées dans cette partie le sont du point de vue d'un physicien. En conséquence, les conditions nécessaires à une résolution mathématique rigoureuse ne sont pas toujours respectées, dans un souci d'efficacité et de simplification.

Équation différentielle homogène du premier ordre On considère une fonction $f(t)$ obéissant à une équation du type :

$$\frac{df}{dt} + \frac{f}{\tau} = 0$$

où τ est une constante homogène à un temps. En physique, on s'autorise à séparer les variables de la manière suivante.

....

....

....

....

....

....

....

Il ne reste plus qu'à déterminer l'expression de la constante grâce aux conditions initiales du problème.

Équation différentielle du premier ordre avec second membre Considérons maintenant une fonction f obéissant à une équation différentielle du type :

$$\frac{df}{dt} + \frac{f}{\tau} = g(t)$$

où $g(t)$ est une fonction quelconque du temps. La méthode pour obtenir la solution générale de l'équation précédente est la suivante :

1. On détermine la solution de l'équation différentielle homogène (sans second membre), notée $f_g(t)$, telle que :

$$\frac{df_g}{dt} + \frac{f_g}{\tau} = 0$$

2. On détermine ensuite une solution particulière f_p de l'équation différentielle avec second membre, sous la forme du second membre $g(t)$. Par exemple, si $g(t)$ est une constante, on cherchera f_p sous la forme d'une constante.
3. La solution générale s'exprime ensuite comme la somme de $f_g(t)$ et de $f_p(t)$:

$$f(t) = f_g(t) + f_p(t)$$

4. Il ne reste plus qu'à déterminer les constantes éventuelles grâce aux conditions aux limites du problème.

2.1.3 Expression de u_c(t)

On rappelle l'équation vérifiée par $u_c(t)$:

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec $\tau = RC$. On applique la méthode de résolution précédente pour déterminer $u_c(t)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Si on trace l'allure de cette courbe, on obtient le résultat déjà rencontré en première partie, correspondant à une charge du condensateur. Le condensateur, initialement déchargé, va se charger jusqu'à ce qu'on atteigne $u_c = E$.

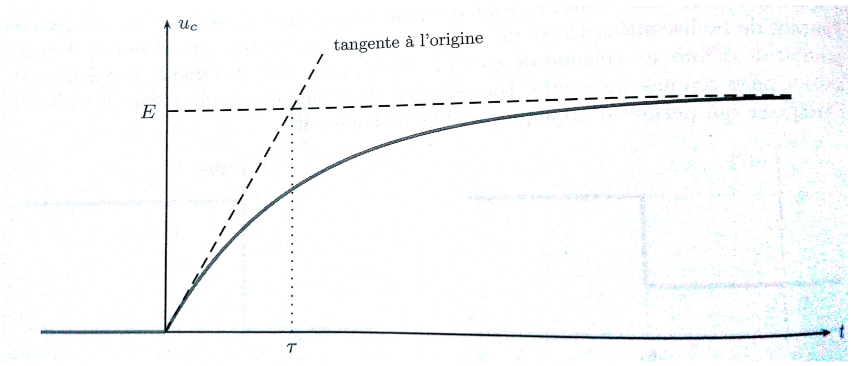


FIGURE 5 – Évolution de $u_c(t)$

2.1.4 Constante de temps et durée du régime transitoire

❖ **Détermination graphique de τ :** On peut déterminer facilement le temps caractéristique τ graphiquement. La tangente à la courbe $u_c(t)$ en $t = 0$ coupe la droite d'équation $u_c = E$ en $t = \tau$. Le condensateur a alors atteint 63 % de sa charge totale.

❖ **Durée du régime transitoire :** On peut considérer que le régime permanent est atteint lorsque le condensateur a atteint 99 % de sa charge totale. Cela nous permet d'exprimer en fonction de τ la durée du régime transitoire.

....

....

....

....

....

....

....

Durée du régime transitoire

....

....

❖ **Remarques :**

- On observe que, plus C est grand, plus il faudra de temps pour charger le condensateur. Ceci est logique, plus le condensateur a une grande capacité, plus il peut emmagasiner de charges, et plus il faut de temps pour le charger.
- Plus R est petit, et plus le condensateur est chargé rapidement. Ceci est une nouvelle fois logique, puisque si toute l'énergie fournie par le générateur est dissipée dans la résistance, il faudra plus de temps pour charger le condensateur.

2.2 Expression de l'intensité du courant électrique dans le circuit

Exprimons l'intensité du courant électrique circulant dans le circuit grâce à l'expression de $u_c(t)$ déterminée précédemment.

....

....

....

....

....

....

....

....

On représente l'allure graphique de $i(t)$ en figure 6.

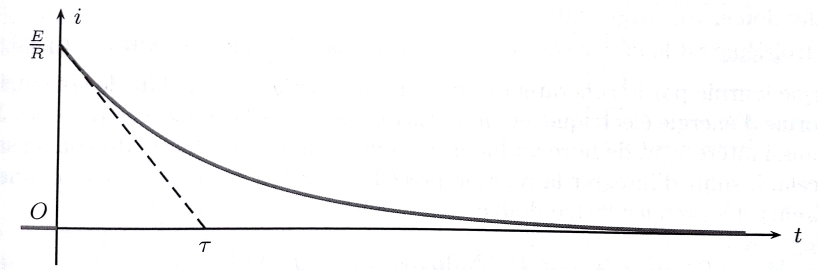


FIGURE 6 – Courant lors de la charge du condensateur

On observe que, contrairement à la tension $u_c(t)$, l'intensité i présente une discontinuité en $t = 0$, où le courant passe instantanément d'une valeur nulle à la valeur E/R. On retrouve une nouvelle fois le temps caractéristique τ, lorsque i vaut 37 % de sa valeur maximale (on a alors observé 63 % du phénomène). On retrouve le résultat connu que, en régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert ($i = 0$ quand $t \to \infty$).

2.3 Étude énergétique

Pour obtenir le bilan de puissance de la charge, multiplions la loi des mailles par l'intensité i du courant.

....

....

....

....

....

- Le premier terme est la puissance fournie par le générateur au circuit.
- Le second terme est la puissance électrique reçue par la résistance, dissipée par effet Joule.
- Le dernier terme correspond à la variation de l'énergie stockée dans le condensateur.

Cherchons à effectuer un bilan énergétique sur toute le durée de la charge du condensateur. Il faut pour cela intégrer l'équation précédente entre $t = 0$ et $t \to \infty$ (puisque c'est quand $t \to \infty$ que le condensateur est complètement chargé) :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Énergie stockée dans le condensateur
Pour des durées grandes devant la constante de temps τ, la moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule dans la résistance, l'autre moitié est stockée dans le condensateur.

2.4 Cas du régime libre

Dans l'étude précédente, le condensateur se comportait comme un *récepteur* (il recevait de l'énergie de la part de la source de tension), mais nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il pouvait parfois se comporter en *générateur*. On est alors dans le cadre d'un *régime libre*.

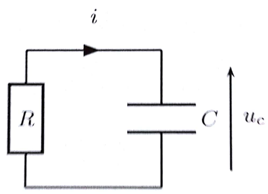
Définition 5. ***Régime libre***

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Exemple 1. ***Étude de la décharge d'un condensateur***

On considère un condensateur chargé avec une tension E grâce au dispositif précédent. On le déconnecte alors du circuit et on le branche aux bornes d'une résistance R, à un instant t pris comme origine des temps.



1. *Donner l'expression de $u_c(t)$.*
2. *Donner l'expression de $i(t)$.*
3. *Effectuer un bilan de puissance.*
4. *Calculer l'énergie dissipée dans la résistance.*

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3 Étude analytique d'un circuit RL

On considère maintenant le circuit électrique représenté en figure 7, constitué de l'association en série d'une résistance R et d'une bobine d'inductance L. Le tout est branché aux bornes d'un générateur. Un interrupteur K permet de fermer le circuit à un instant t pris comme origine des temps.

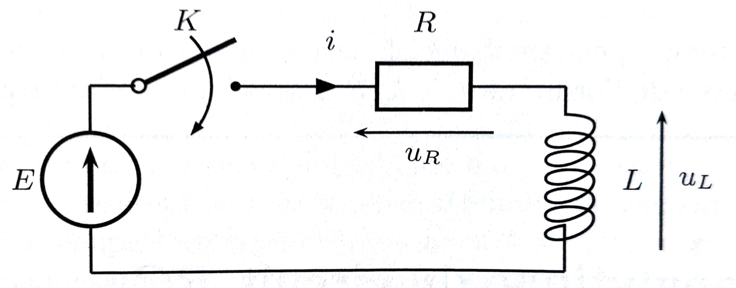


FIGURE 7 – Circuit RL soumis à un échelon de tension

3.1 Expression du courant i et de la tension aux bornes de la bobine u_L

3.1.1 Mise en équation

L'application de la loi des mailles au circuit donne, une fois l'interrupteur fermé.

....
....

....
....
....
....

Définition 6. ***Constante de temps du circuit RL***

....
....
....

Forme canonique de l'équation d'évolution du circuit

....
....
....
....

3.1.2 Expression de l'intensité du courant électrique

On résout l'équation précédente de la même manière que pour le circuit RC.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....

L'allure de l'intensité dans le circuit est présentée sur la figure 8.

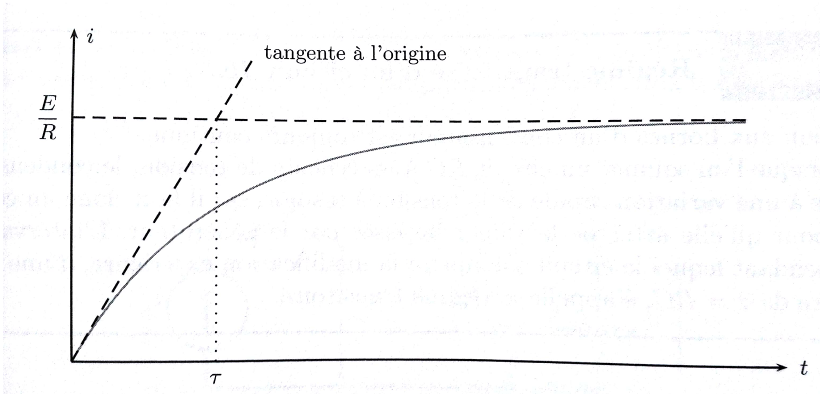


Figure 8 – Intensité du courant dans un circuit RL

On observe que l'intensité augmente progressivement dans le circuit. La bobine s'oppose à l'établissement d'un courant dans le circuit, ceci est lié au phénomène d'induction électromagnétique que vous verrez plus tard dans votre cursus. Comme pour le circuit RC, on détermine graphiquement la constante de temps τ en relevant l'abscisse de l'intersection de la tangente à l'origine et de la droite d'équation $i = E/R$. Lorsque $t = \tau$, l'intensité a atteint 63 % de sa valeur maximale.

3.1.3 Expression de la tension aux bornes de la bobine

....

....

....

....

....

La tension aux bornes de la bobine décroît exponentiellement, comme présenté en figure 9.

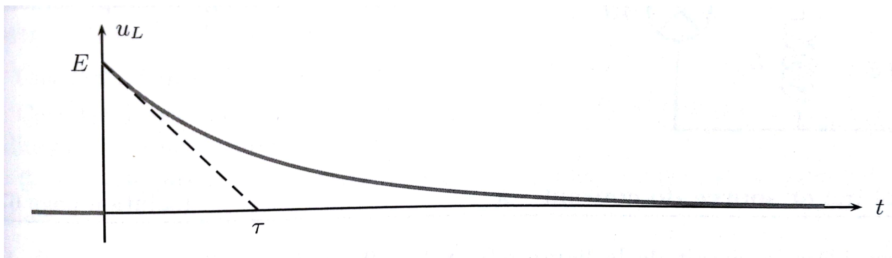


Figure 9 – Évolution de la tension aux bornes de la bobine

On retrouve un résultat connu : la bobine se comporte comme un fil conducteur en régime stationnaire ($u_L = 0$ quand $t \to \infty$).

3.2 Aspects énergétiques

Comme précédemment, multiplions l'équation obtenue par application de la loi des mailles par l'intensité i du courant dans le circuit pour obtenir le bilan de puissance.

....

....

....

....

....

- Le premier terme correspond à la puissance fournie par le générateur.
- Le deuxième terme est la puissance reçue par la résistance, dissipée par effet Joule.
- Enfin, le troisième terme correspond à la variation d'énergie stockée dans la bobine.

Comme précédemment, on peut intégrer ce troisième terme entre $t = 0$ et $t \to \infty$ pour obtenir l'expression de l'énergie totale stockée dans la bobine.

....

....

....

....

....

Concernant les deux autres termes, nous ne les intégrerons pas, car l'intensité ne tendant pas vers 0, l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance n'est pas une grandeur finie si t tend vers l'infini. Il en va de même pour l'énergie cédée par la source de tension.

Conclusion

Nous avons pu au cours de ce chapitre, via l'étude de deux cas simples, à savoir ceux des circuits RL et RC, observer la méthode générale d'étude des circuits linéaires du premier ordre. Nous approfondirons en exercices ces connaissances, en nous intéressant à des circuits plus complexes. Enfin, dans le chapitre suivant, à travers l'étude des circuits RC et RLC, nous pourrons découvrir et décrire des phénomènes plus complexes, et aborder les notions d'oscillateur et de dissipation.