信号与系统

第二章 连续时间系统的时域分析

主讲教师：张凤元

主要内容 CONTENTS

3

零输入响应和零状态响应

--起始状态与激励源的等效转换

-- 系统完全响应的分解

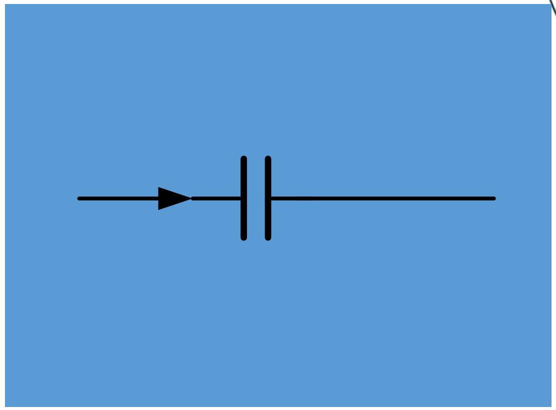
-- 零输入响应

--零状态响应

-- 响应求解举例

3.1 电容器的等效电路

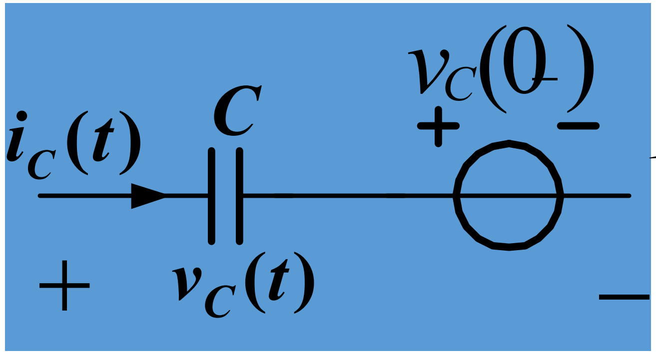
$$v_C(0_-) \neq 0, t \geq 0$$



$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0_-} i_c(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i_c(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

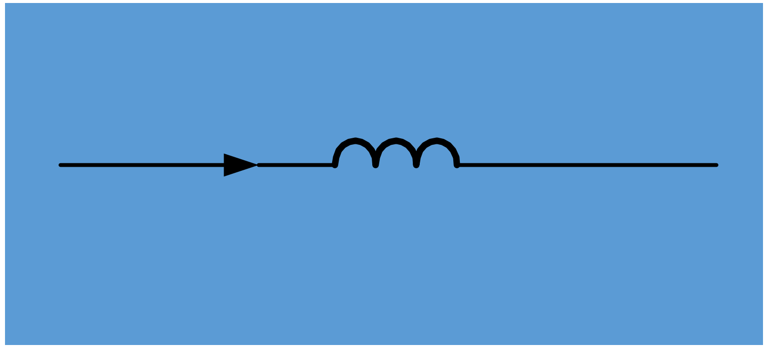
$$= v_c(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i_c(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau \qquad t \geq 0$$

电路等效为起始状态为零的电容器与电压源 $v_c(0_-)u(t)$的**串联**



等效电路中的电容器的起始状态为零

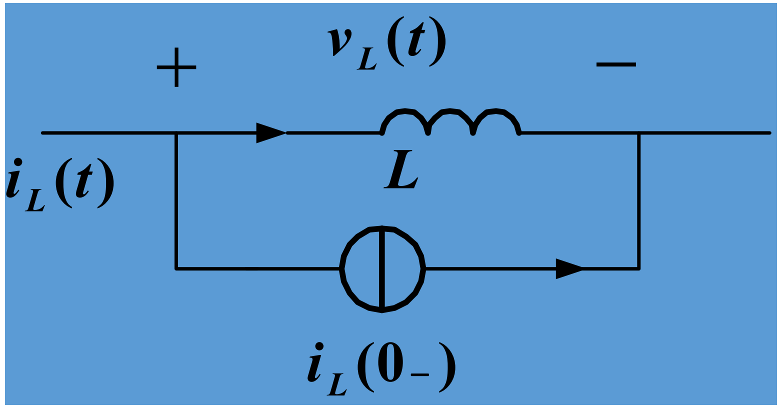
$$i_L(0\_) \neq 0, \quad t \geq 0$$



$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0\_} v_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{L}\int_{0\_}^{t} v_L(\tau)\,\mathrm{d}t$$

$$= i_L(0\_) + \frac{1}{L}\int_{0\_}^{t} v_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad ,(t \geq 0)$$

故电路等效为起始状态为零的电感 L和电流源 $i_L(0\_)u(t)$ 的并联。



在一定条件下，激励源与起始状态之间可以等效转换。即可以将原始储能看作是激励源。

系统的完全响应可以看做由系统**起始状态等效激励源**和**外加激励源**共同作用的结果。

系统的完全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

记为： $r(t) = r_{zi}(t) + r_{zi}(t)$

$$\begin{cases} r_{zi}(t)\text{：} & \text{零输入响应} \\ r_{zs}(t)\text{：} & \text{零状态响应} \end{cases}$$

完全响应=自由响应＋强迫响应

(Natural+forced

完全响应=暂态响应+稳态响应

(Transient+Steady-state)

完全响应=零输入响应＋零状态响应

(Zero-input+Zero-state）

自由响应：也叫固有响应，由系统本身特性决定的，和外加激励形式无关，对应于齐次解。

强迫响应：形式取决于外加激励，对应于特解。

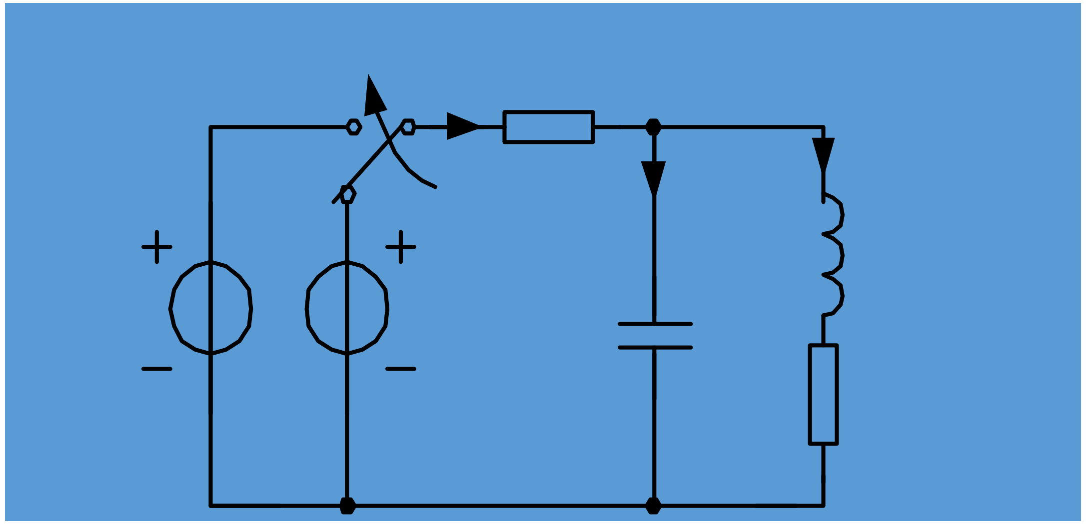
暂态响应：是指激励信号接入一段时间内，完全响应中暂时出现的有关成分，随着时间t 增加，它将消失。

稳态响应：由完全响应中减去暂态响应分量即得稳态响应分量。

例1 系统零输入响应的求解

求系统零输入响应 $r_{zi}(t)$ ，实际上就是求系统方程的齐次解，由非零的系统状态值得到起始条件，再由起始条件和方程确定初始条件值，最后求出通解中的待定系数。

给定如图所示电路， $t<0$ 时开关S位于1的位置而且已经达到稳态；当 $t=0$ 时，S由1转向2。试建立 $i(t)$ 电流的微分方程，并求出系统的零输入响应 $i_{zi}(t)$。



解答

（1）列写电路的微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t) \qquad i(0_-)=\frac{4}{5},\ \frac{d}{dt}i(0_-)=0$$

（2）零输入响应的通解

零输入响应是外加激励信号为0，$t \geq 0_+$时，只由起始状态（起始时刻系统储能）所产生的响应。因此，零输入响应的通解就是方程的齐次解。

系统的特征方程：$\alpha^2 + 7\alpha + 10 = 0$ ， $(\alpha+2)(\alpha+5)=0$

特征根：$\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = -5$

所求系统的零输入响应为：$i_{zi}(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} \quad (t \geq 0_+)$

（3）零输入响应初始条件的确定

零输入响应是外加激励为信号 $e(t)=\begin{cases}2 & t<0\\ 0 & t\geq 0\end{cases}=2-2\Delta u(t)$ ，代入微分方程得：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_{zi}(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{zi}(t)+10i_{zi}(t)=-2\delta'(t)-12\delta(t)-8\Delta u(t)$$

方程右端的冲激函数项最高阶次是 $\delta'(t)$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_{zi}(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{zi}(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)\\ i_{zi}(t)=a\Delta u(t)\end{cases}\qquad (0_-<t<0_+)$$

代入微分方程得：

$$\left[a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\right]+7\left[a\delta(t)+b\Delta u(t)\right]+10a\Delta u(t)=-2\delta'(t)-12\delta(t)-8\Delta u(t)$$

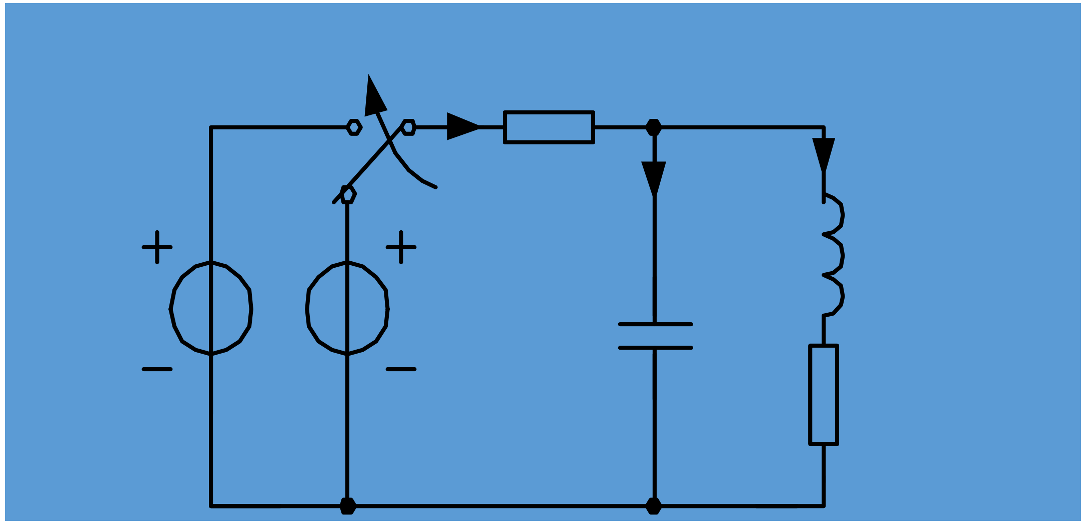
$$\begin{cases} a=-2 \\ b+7a=-12 \\ c+7b+10a=-8 \end{cases} \qquad \begin{cases} i_{zi}(0_+)-i_{zi}(0_-)=a=-2 \\ \dfrac{d}{dt}i_{zi}(0_+)-\dfrac{d}{dt}i_{zi}(0_-)=b=2 \\ \dfrac{d^2}{dt^2}i_{zi}(0_+)-\dfrac{d^2}{dt^2}i_{zi}(0_-)=c=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} i_{zi}(0_+)=-2+i_{zi}(0_-)=-\dfrac{6}{5} \\ \dfrac{d}{dt}i_{zi}(0_+)=2+\dfrac{d}{dt}i_{zi}(0_-)=2 \end{cases}$$

将初始条件代入通解得零输入响应：

$$i_{zi}(t)=-\frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{2}{15}e^{-5t} \quad (t\geq 0_+)$$

求系统零状态响应 $r_{zs}(t)$ ，就是不考虑原始时刻系统储能的作用（设起始状态等于零），只由系统的外加激励信号产生的响应。

给定如图所示电路， $t<0$ 时开关S位于1的位置而且已经达到稳态；当 $t=0$ 时，S由1转向2。试建立 $i(t)$ 电流的微分方程，并求出系统的零状态响应 $i_{zs}(t)$。



解答

（1）列写电路的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+4e(t) \qquad i(0_-)=\frac{4}{5},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_-)=0$$

(2) 求系统零状态响应的通解

系统的特征方程： $\alpha^2+7\alpha+10=0$ ， $(\alpha+2)(\alpha+5)=0$

特征根： $\alpha_1=-2,\ \alpha_2=-5$

齐次通解： $i_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}\quad(t\geq 0_+)$

非齐次特解： 由于$t\geq 0_+$时 $e(t)=4V$

方程右端自由项为 4×4，因此令特解 $i_p(t)=B$,

$$10B=4\times 4\quad \therefore B=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$$

所求系统的零状态完全响应为： $i_{zs}(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}+\frac{8}{5}\quad(t\geq 0_+)$

（3）零状态响应初始条件的确定

零状态响应是外加激励为信号 $e(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 4 & t\geq 0\end{cases}=4\Delta u(t)$ ，代入微分方程得：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_{zs}(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{zs}(t)+10i_{zs}(t)=4\delta'(t)+24\delta(t)+16\Delta u(t)$$

方程右端的冲激函数项最高阶次是 $\delta'(t)$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_{zs}(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{zs}(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)\\ i_{zs}(t)=a\Delta u(t)\end{cases}\qquad(0_-<t<0_+)$$

代入微分方程得：

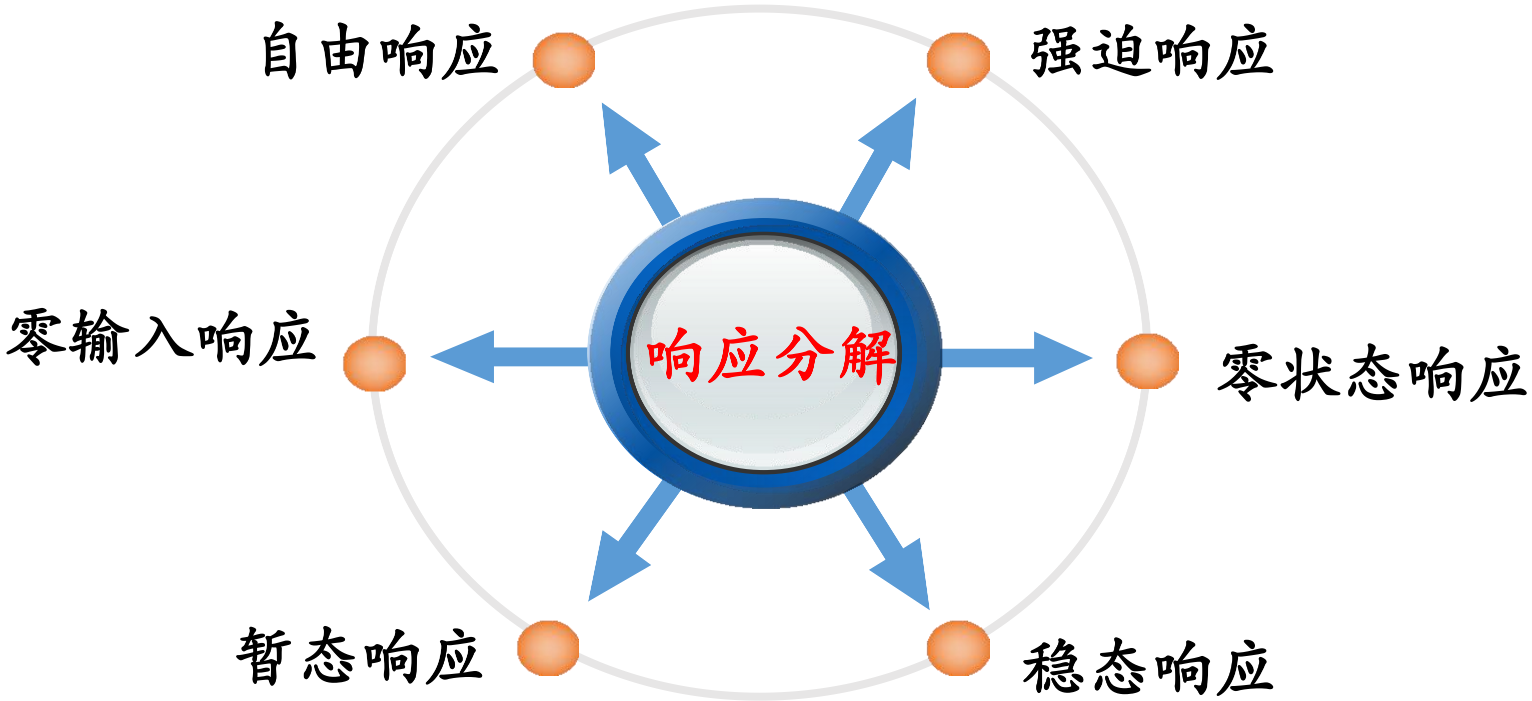
$$\left[a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\right]+7\left[a\delta(t)+b\Delta u(t)\right]+10a\Delta u(t)=4\delta'(t)+24\delta(t)+16\Delta u(t)$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b+7a=24 \\ c+7b+10a=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} i_{zs}(0_+)-i_{zs}(0_-)=a=4 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{zs}(0_+)-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{zs}(0_-)=b=-4 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_{zs}(0_+)-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_{zs}(0_-)=c=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} r(0_+)=4+r(0_-)=4 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(0_+)=-4+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(0_-)=-4 \end{cases}$$

将初始条件代入通解得零状态响应：

$$i_{zs}(t)=\frac{8}{3}e^{-2t}-\frac{4}{15}e^{-5t}+\frac{8}{5}\quad(t\geq 0_+)$$

系统完全响应的分解




谢谢大家，下讲再见！
北京化工大学
新闻网