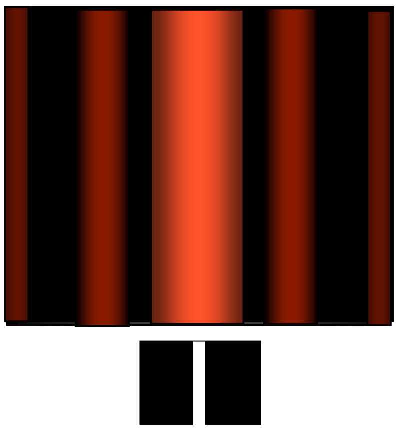
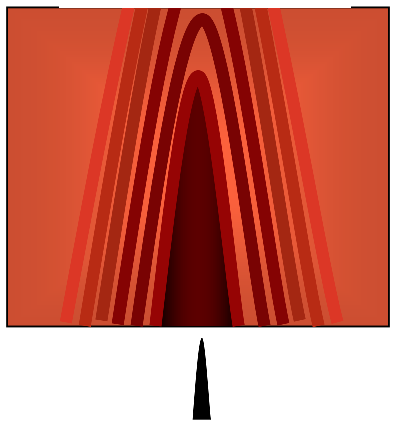
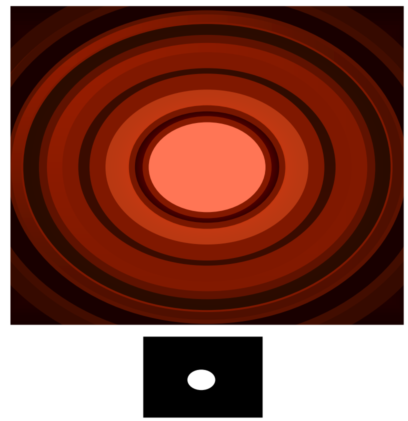
第22章 光的衍射



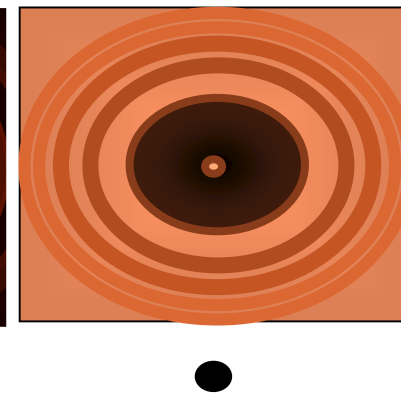
狭缝



针尖



圆孔

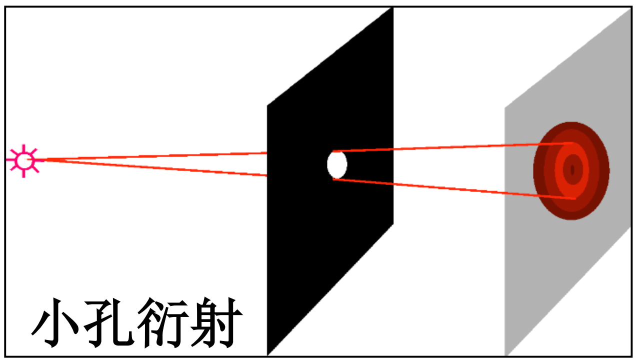


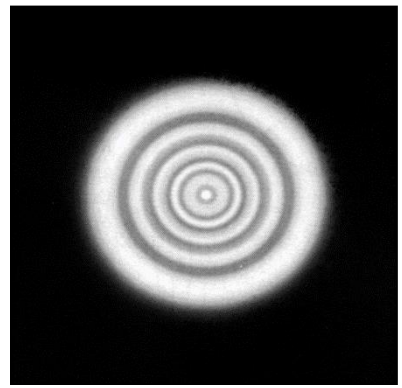
圆屏

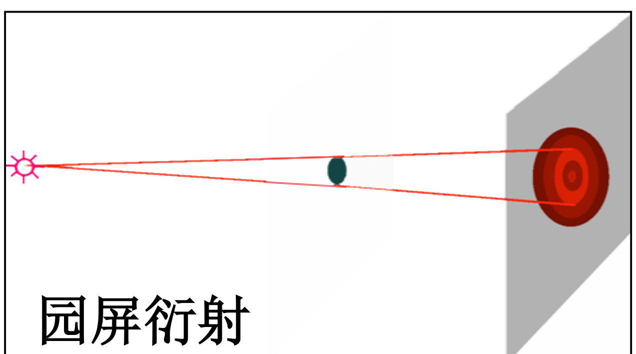
§1 衍射现象 惠更斯–菲涅尔原理

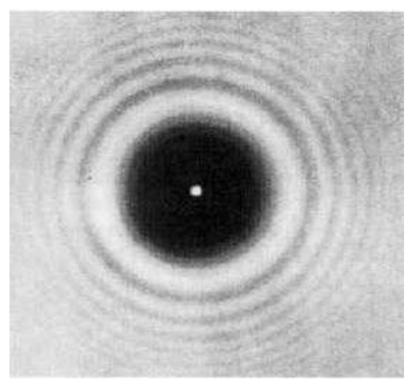
一、光的衍射现象

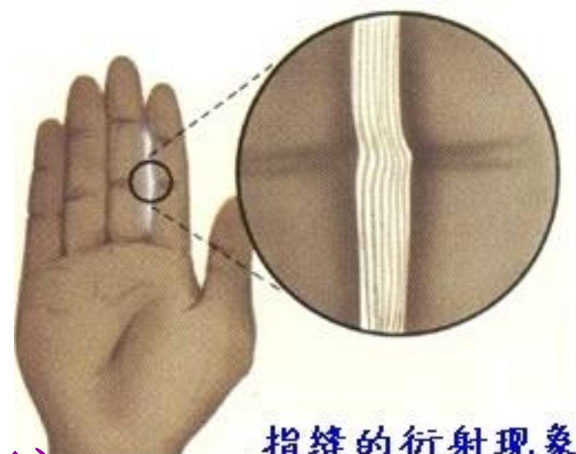
1、定义：光在传播过程中能绕过障碍物的边缘而偏离直线传播，进入几何阴影区的现象叫光的衍射。





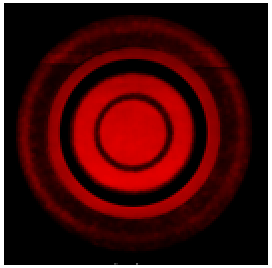




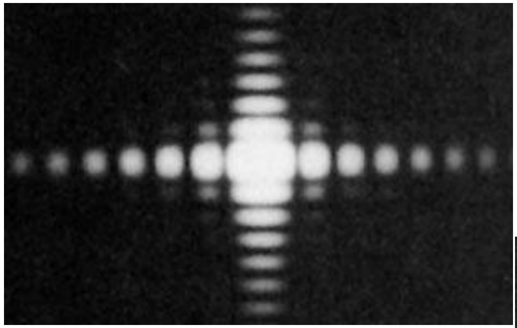


（注意中心有一亮点）

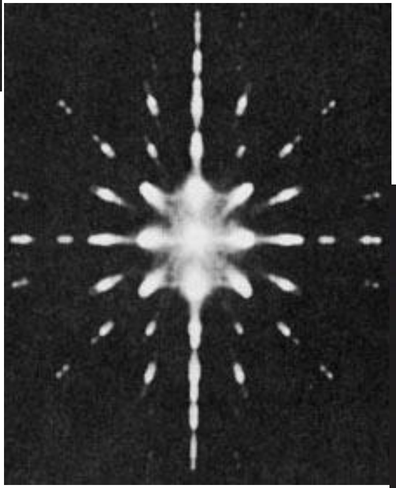
圆孔衍射



方孔衍射



网格衍射

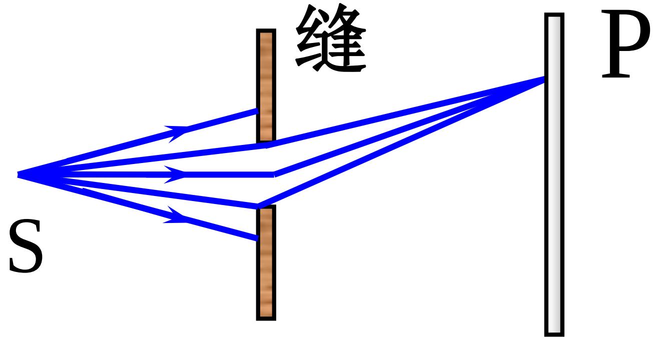


单缝衍射

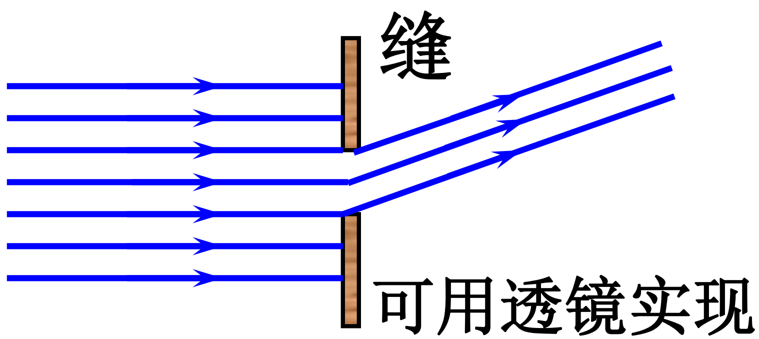
2、衍射的分类

根据光源、衍射缝（孔）、屏三者位置，把衍射分为

菲涅耳衍射（近场衍射）	夫琅禾费衍射（远场衍射）

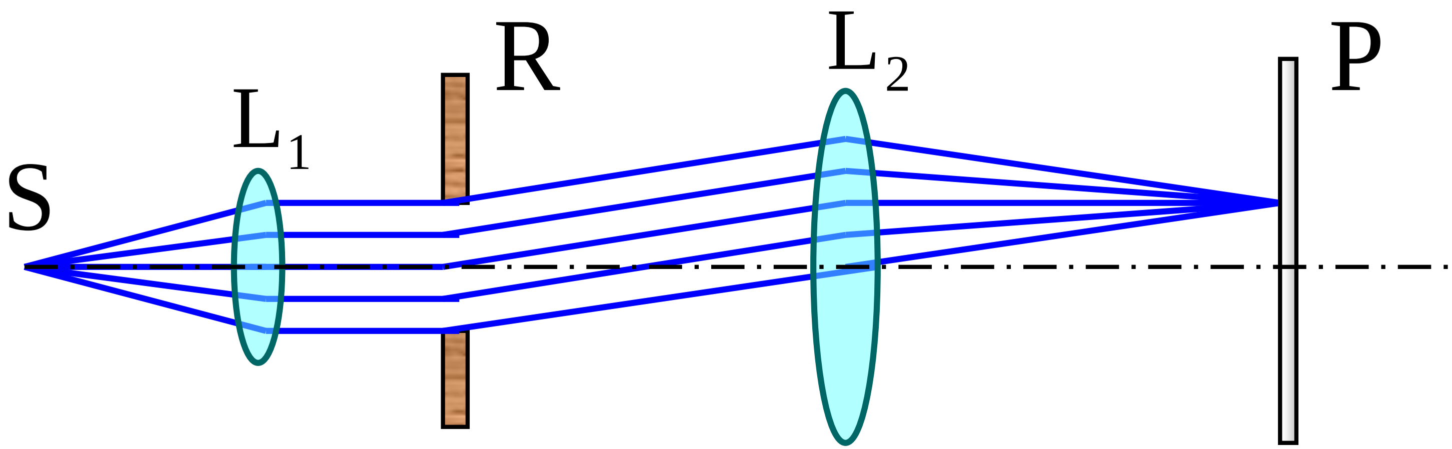


光源、屏与缝相距有限远



光源、屏与缝相距无限远

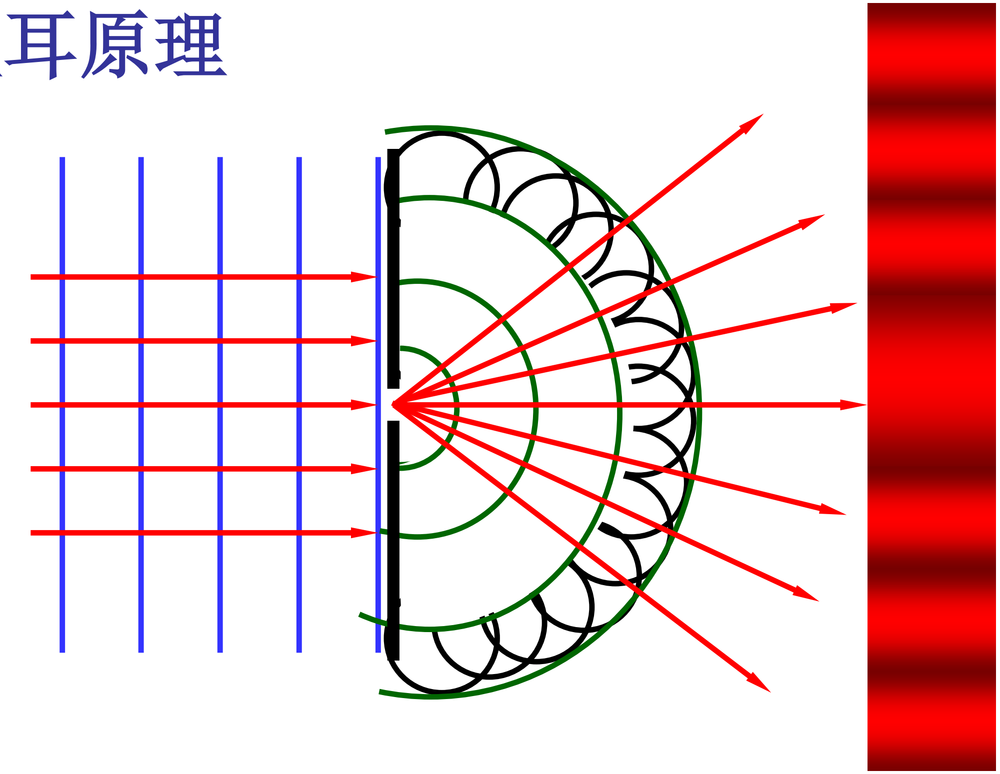
夫琅禾费衍射在实验中实现



二、惠更斯——菲涅耳原理

惠更斯原理：波阵面上每一点都可以看作新的子波源，以后任意时刻，这些子波的包络就是该时刻的波阵面

——1690年



解释不了光强明暗分布！

菲涅耳补充：从同一波阵面上各点发出的子波是相干波。

——1818年

惠 - 菲原理：

1）波传到的任意点都是子波的波源

2) 同一波阵面上发出的各子波在空间进行相干叠加

菲涅耳发展了惠更斯原理，从而深入认识了衍射现象。

- 干涉和衍射的联系与区别：

  本质上讲干涉和衍射都是波的相干叠加。

▲干涉：有限多光束的相干叠加，如 双光束干涉；

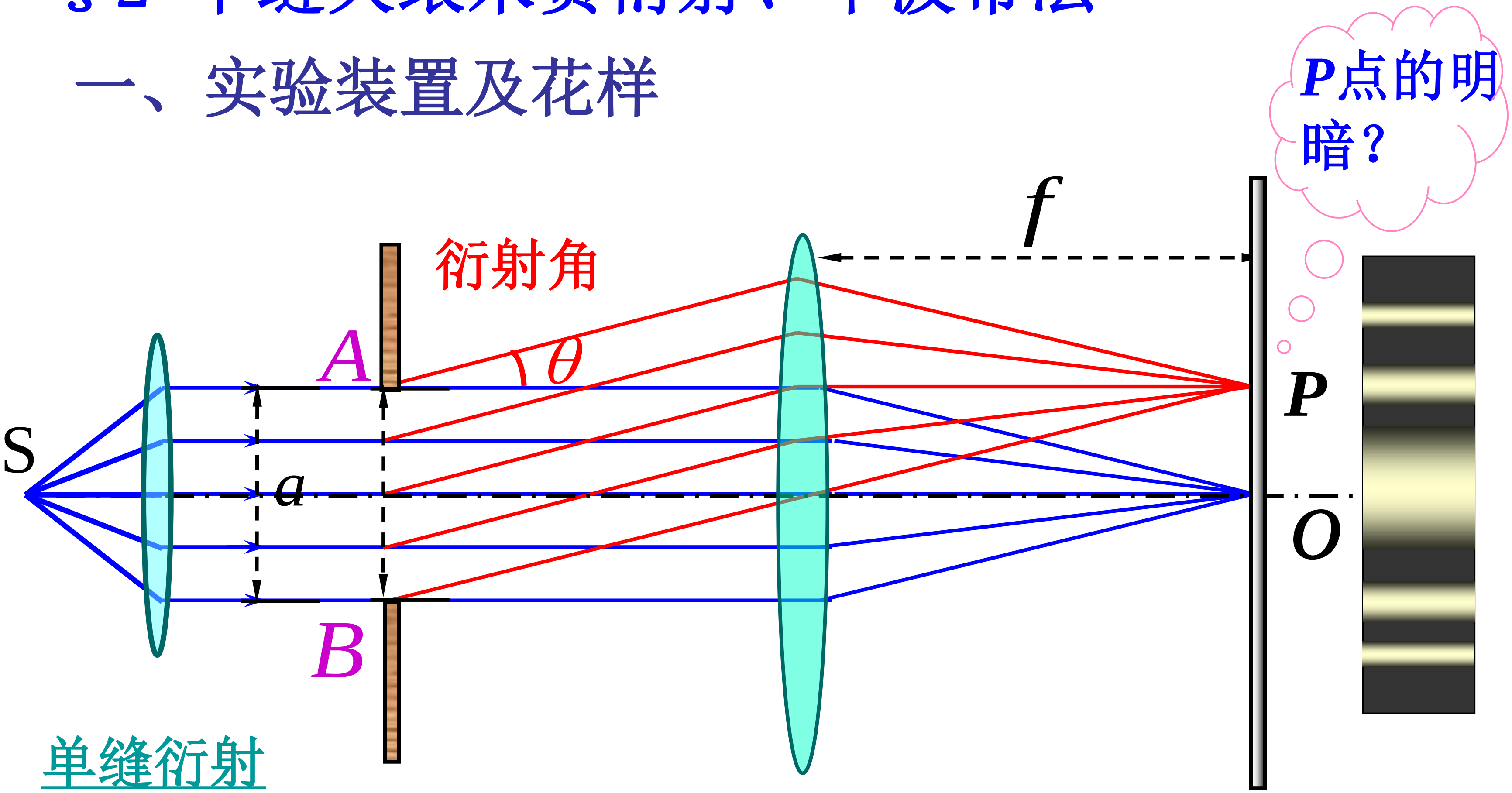
▲衍射：无限多光束的相干叠加。

干涉、衍射问题讨论方法：

1.数学积分; 2. 定性半定量的办法

§2 单缝夫琅禾费衍射、半波带法

一、实验装置及花样



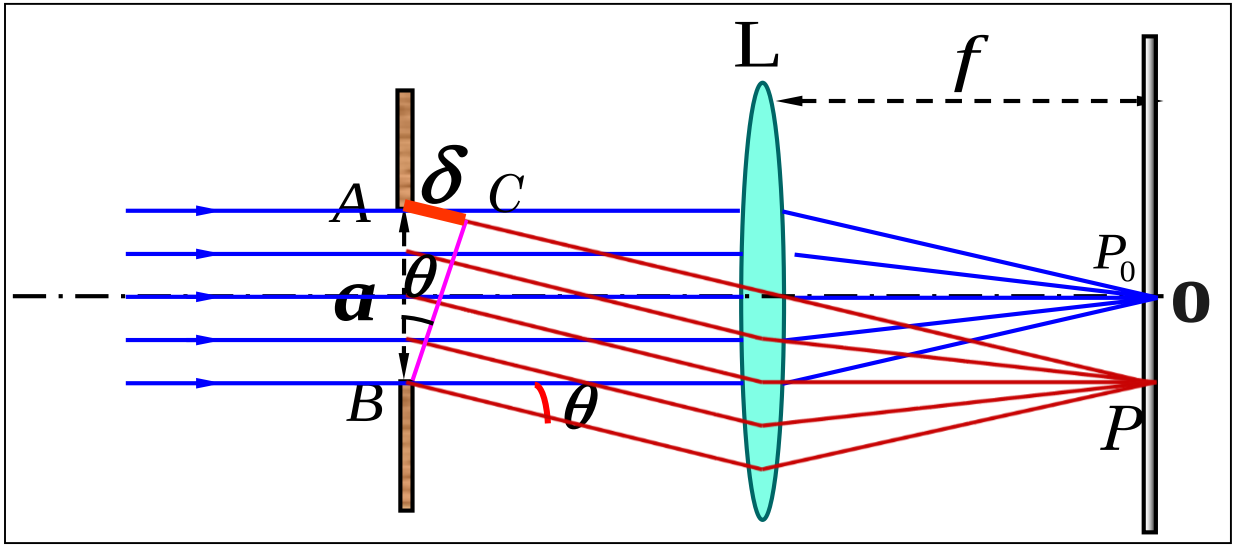
单缝衍射

（衍射角θ ：向上为正，向下为负）

将单缝处波面看作无穷多个相干(子) 波源

P点的明暗是 (无穷) 多光束干涉的结果

二、菲涅耳半波带法—屏上的强度分布的分析



$A, B \rightarrow P$ 的光程差

$$\delta = a\sin\theta$$

1. $\theta = 0$ 中央明纹中心

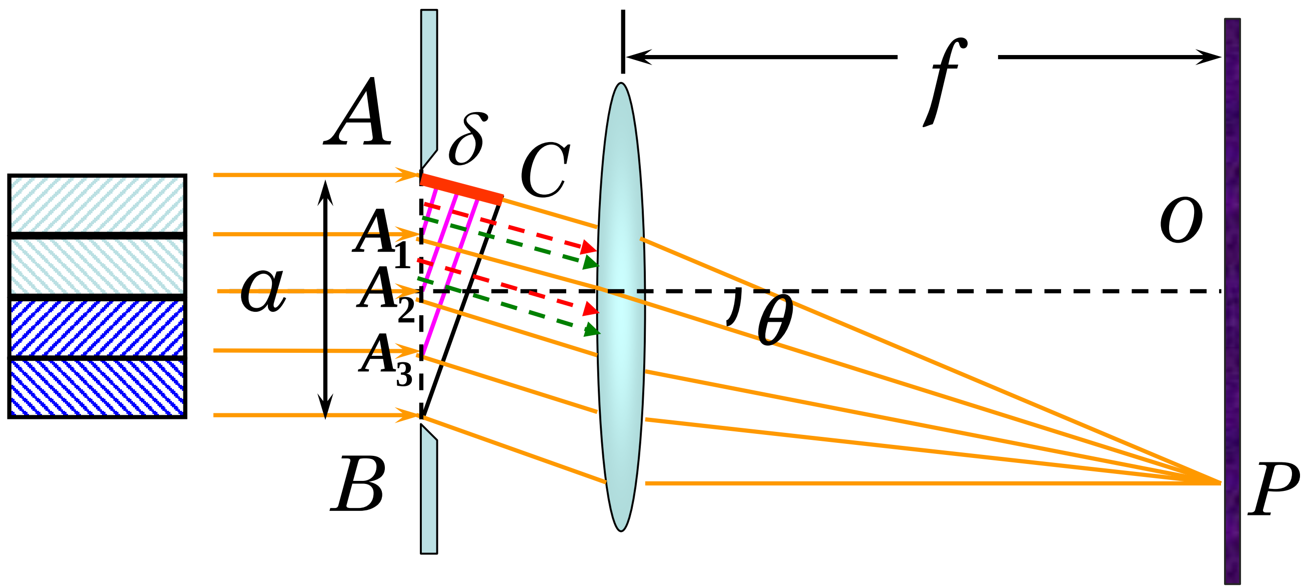
2. $\theta \neq 0$

衍射角为θ的光束在屏上汇聚于P点时的总光强?

菲涅耳半波带法

✹ 菲涅耳半波带法

将波面AB分成许多等宽度的纵长条带，并使相邻两条带上对应点发出的光的光程差为半个波长，这样的条带称为半波带。

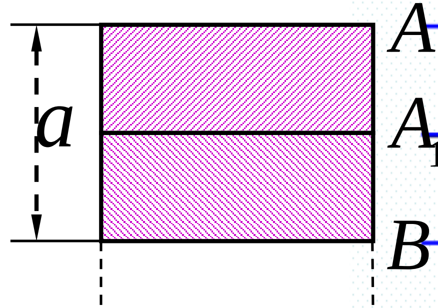


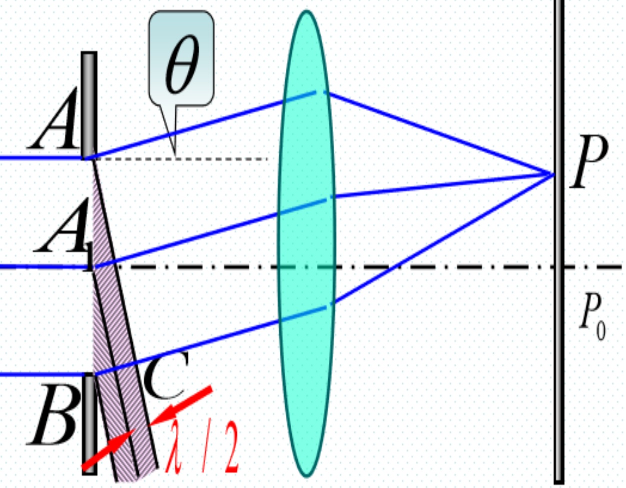
☆各半波带面积相等, 子波数目相等,发射的光强相等

☆相邻两个半波带上对应点所发出的各子波光程差$\lambda/2$，在P点叠加上时干涉相消

$$a\ \sin\theta = 2\cdot\frac{\lambda}{2}$$

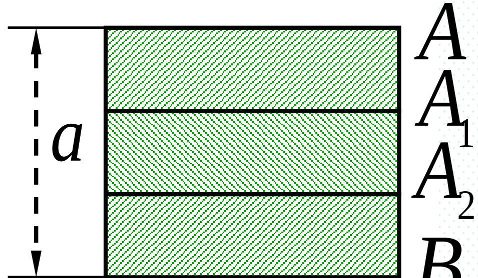
AB分为两个半波带，其对应点发出的光的光程差为λ/2，互相干涉抵消，因而在P处出现暗条纹中心。

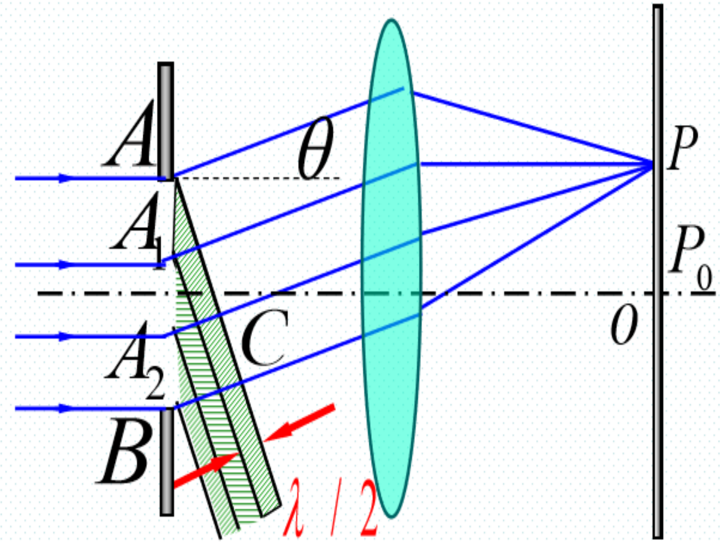




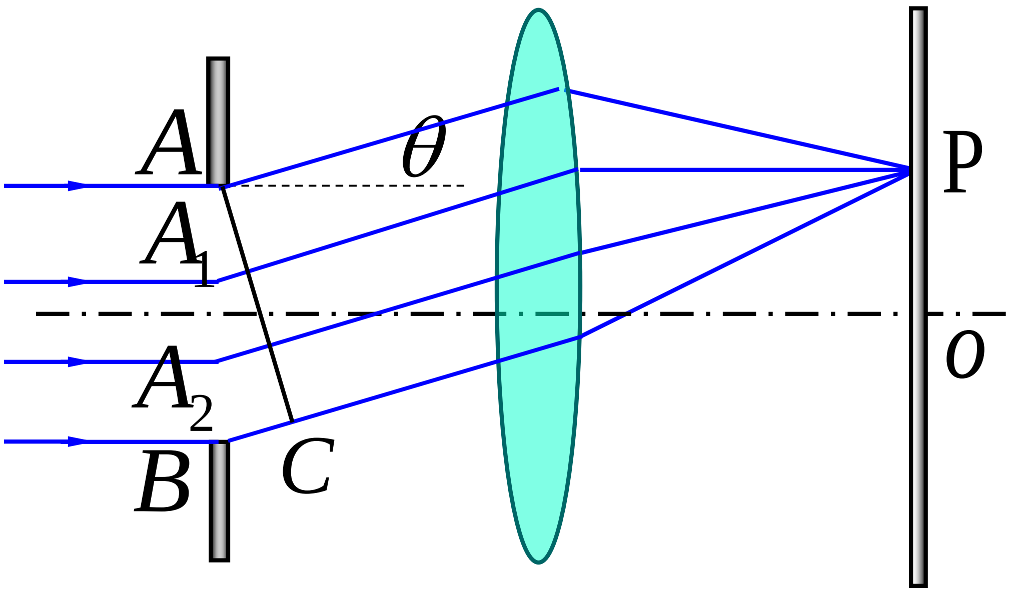
$$a\ \sin\theta = 2\cdot\frac{\lambda}{2}$$

AB分为三个半波带，两个相邻波带发出的光互相干涉抵消，剩一个波带发出的光未被抵消，因而在P处出现明条纹中心。





总　结



$$BC = a\sin\theta = \pm n\frac{\lambda}{2}$$

（ n 个半波带）

$$\begin{cases} a\sin\theta = 0, \quad \theta = 0 & \text{中央明纹中心} \\ a\sin\theta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} = \pm k\lambda & \text{干涉相消（暗纹）} \\ a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{干涉加强（明纹）} \\ a\sin\theta \neq k\dfrac{\lambda}{2} & \text{（介于明暗之间）} \end{cases}$$

$2k$个半波带

$(2k+1)$个半波带

$(k = 1,2,3,\cdots)$

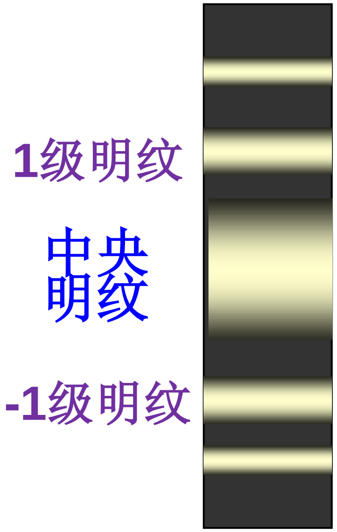
条纹分布：

中央明纹中心：$\theta = 0$ 零级明纹

暗纹中心：$a\sin\theta = 2k\dfrac{\lambda}{2}$

$k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

其它明纹中心：$a\ \sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$
（近似）



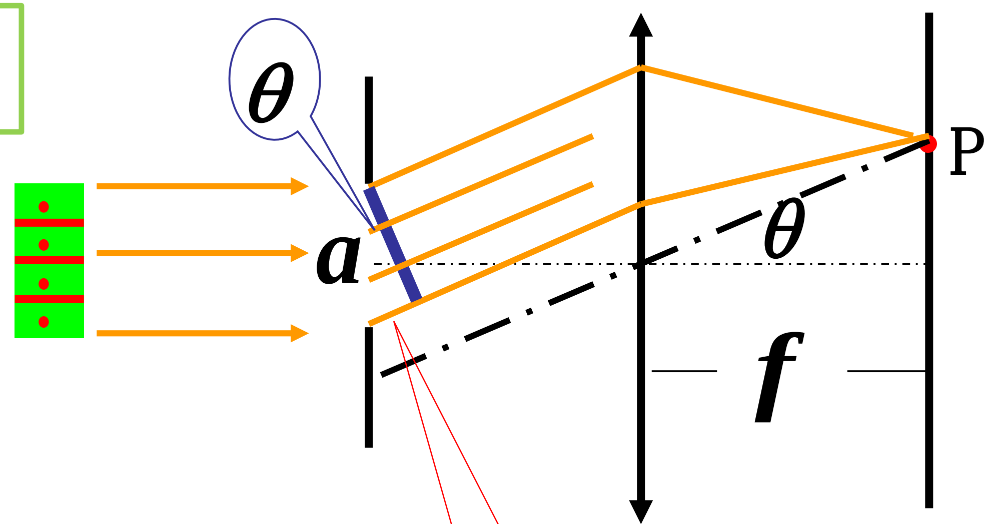
各处光强多大？半波带法不能给出

※ 用旋转矢量法求解强度分布

设每个波带内能量集中于图中所示光线

将缝等分成 N条波带

每条波带发出的波引起的振动用一个小的旋转矢量表示



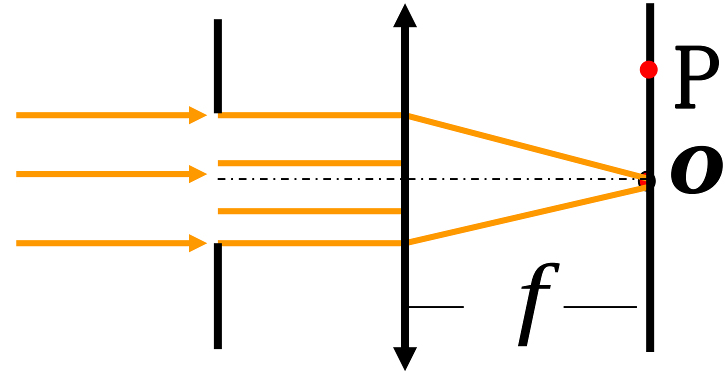
缝边缘两光线的相位差：$\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta$

相邻波带发的子波的相位差为：$\delta = \dfrac{\Delta\varphi}{N}$

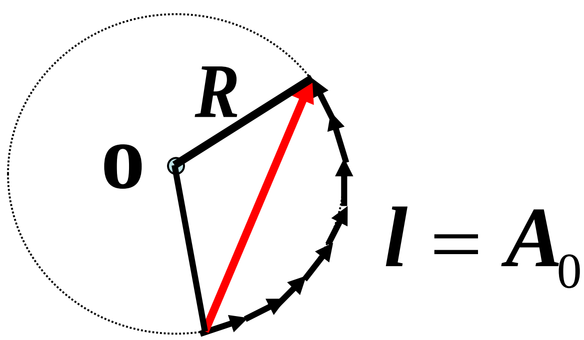
对于：$\theta = 0 \qquad \delta = 0$

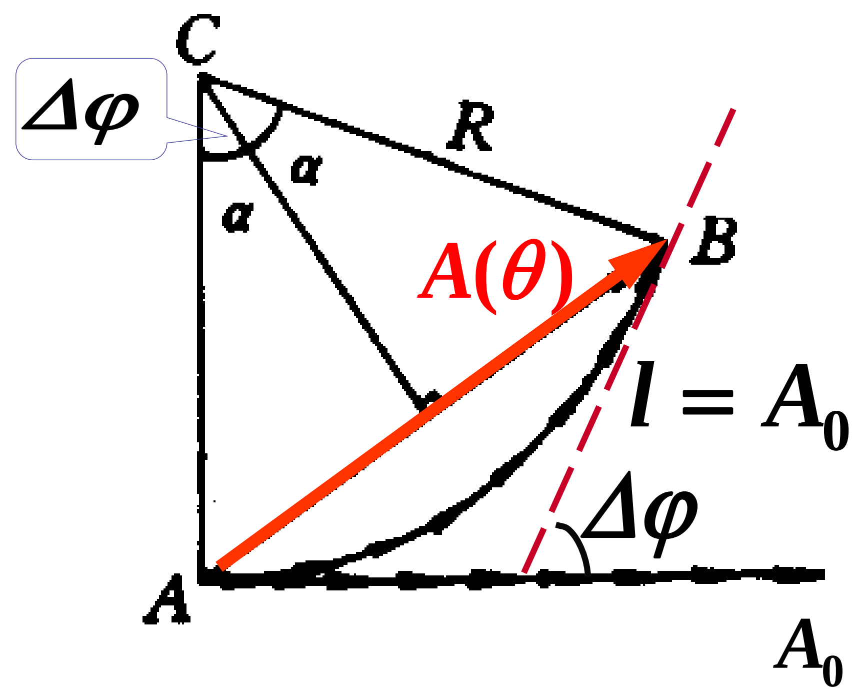
$$\theta = 0 \quad \delta = 0$$

中央亮纹



$$\theta \neq 0 \quad \delta = \frac{\Delta\varphi}{N}$$



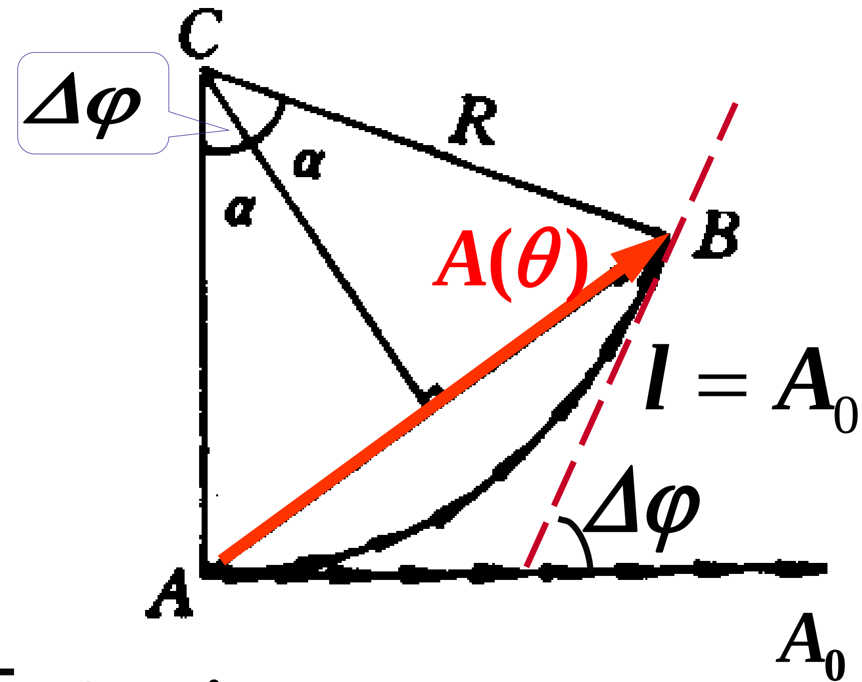


圆心角是

$$N\delta = \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta$$

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \boxed{\alpha = \frac{\pi}{\lambda} a\sin\theta}$$



合振幅 $\begin{cases} \text{P点：} A(\theta) = \overline{AB} = 2R\sin\alpha \\ \text{O点：} A_0 = \overset{\frown}{AB} = R\cdot 2\alpha \end{cases}$

$$\therefore \quad A(\theta) = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad \boxed{I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}}$$

任一衍射角θ处的强度可用中央亮纹强度来表示

三、光强分布

$$\boxed{I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$ 其中 $$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

1） 主极强: $\theta = 0$ 处, $I = I_0 = I_{max}$ 中央明纹

2） 暗纹中心: 当 $\alpha = k\pi$（$k = \pm1, \pm2, \pm3\cdots$）时,

$$I = 0 \quad a\sin\theta = k\lambda \quad (k = \pm1, \pm2\cdots)$$

3） 次极强: 当 $\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$

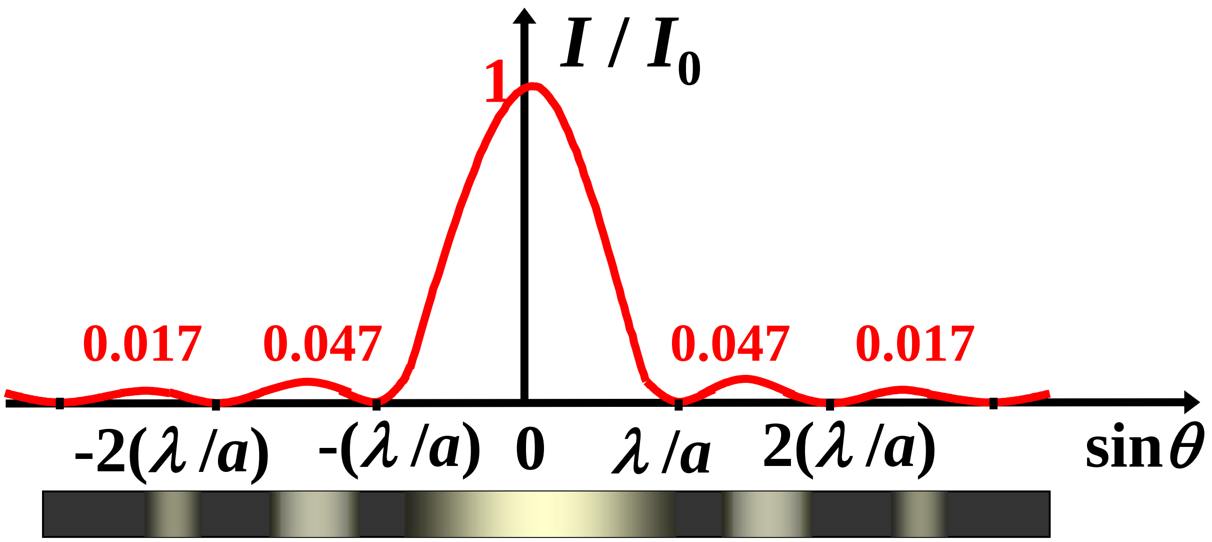
两相邻暗纹间有一个次极大

$$\alpha = \pm 1.43\pi,\ \pm 2.46\pi, \ldots$$

$$a\sin\theta = \pm 1.43\lambda,\ \pm 2.46\lambda, \ldots$$

比较: $a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$

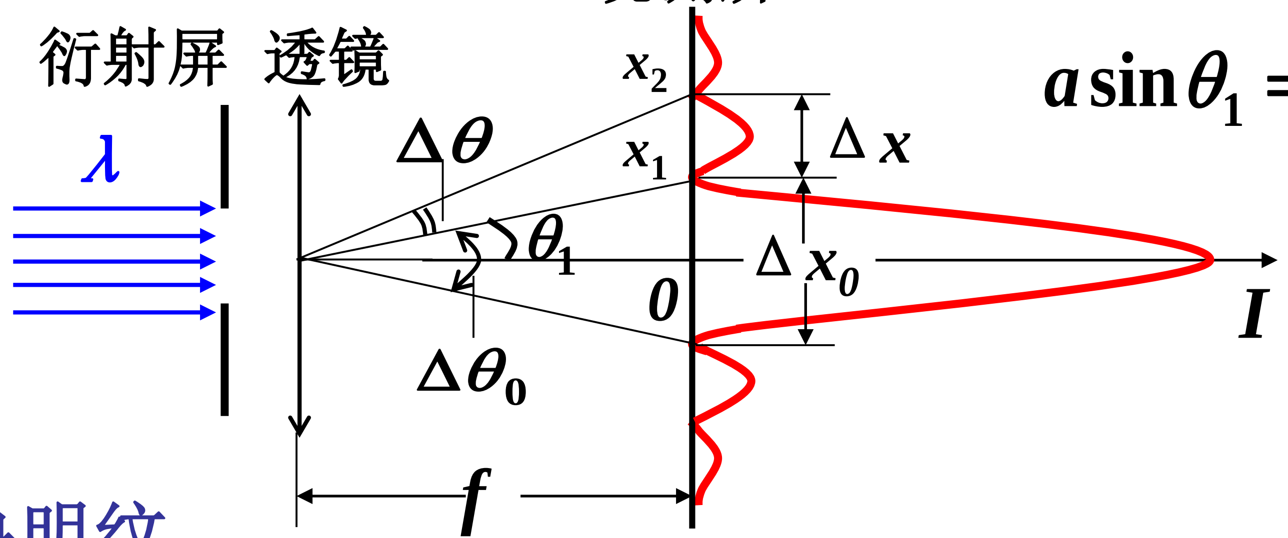
相对光强分布曲线



☞中央明纹的光强占总光强的绝大部分；级次增加明纹光强减弱。

原因： $\theta\uparrow$, $k\uparrow$，半波带数↑, 每个半波带的面积↓, 未被抵消的半波带在P点引起的光强越弱.

四、条纹宽度



$$\sin\theta_1 \approx \theta_1 \approx \tan\theta_1$$

$$a\sin\theta_1 = \lambda$$

1） 中央明纹

线宽度 $\Delta x_0 = 2x_1 = 2f\cdot\tan\theta_1 \approx 2f\theta_1 = 2f\dfrac{\lambda}{a} \propto \dfrac{\lambda}{a}$

半角宽: $\theta \approx \sin\theta = \dfrac{\lambda}{a}$

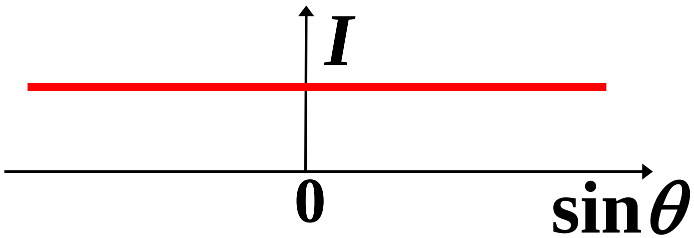
2）其他明纹 $\Delta x \approx f\dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{1}{2}\Delta x_0$

讨论： $\Delta x \propto \dfrac{\lambda}{a}$

1）波长对条纹宽度的影响　波长越长，条纹宽度越宽

2）缝宽变化对条纹的影响　缝宽越小，条纹宽度越宽

3）当 $a << \lambda$ 时，$\Rightarrow \Delta x \rightarrow \infty$



屏幕是一片亮

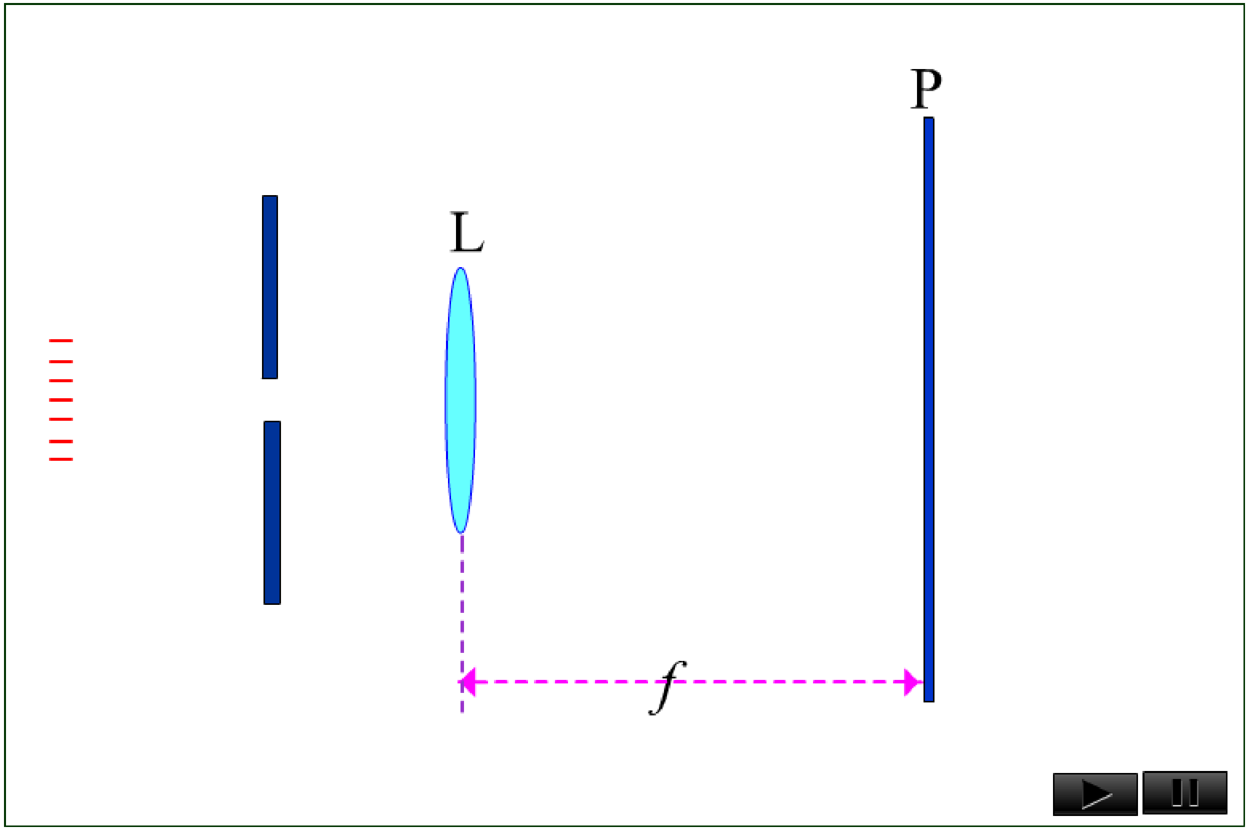
4）当 $a >> \lambda$ 时，$\Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$

衍射消失，光直线传播

只有中央一条亮带（缝的几何光学像）

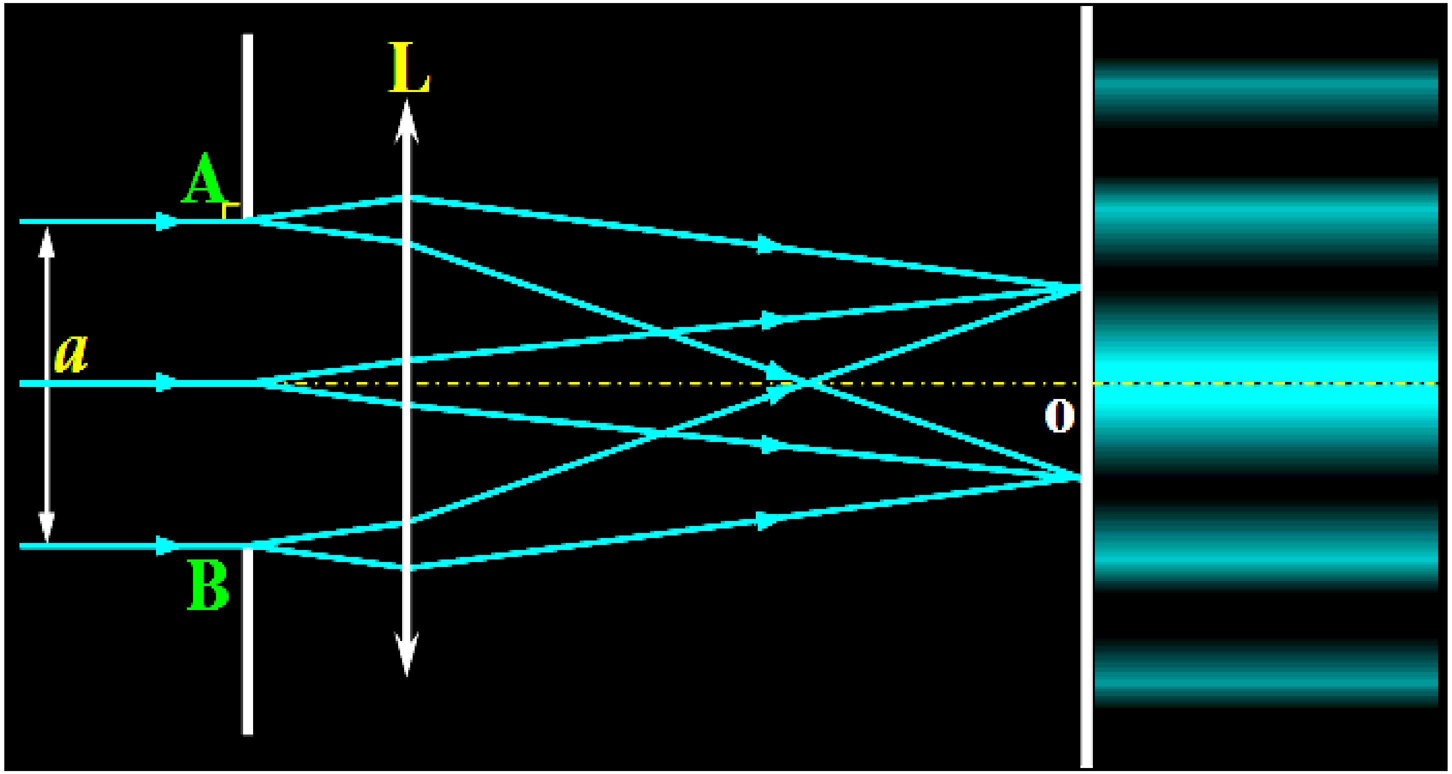
几何光学是波动光学在 $a >> \lambda$ 时的极限情形

◈ 入射波长变化，衍射效应如何变化 ？



λ 越大，衍射效应越明显

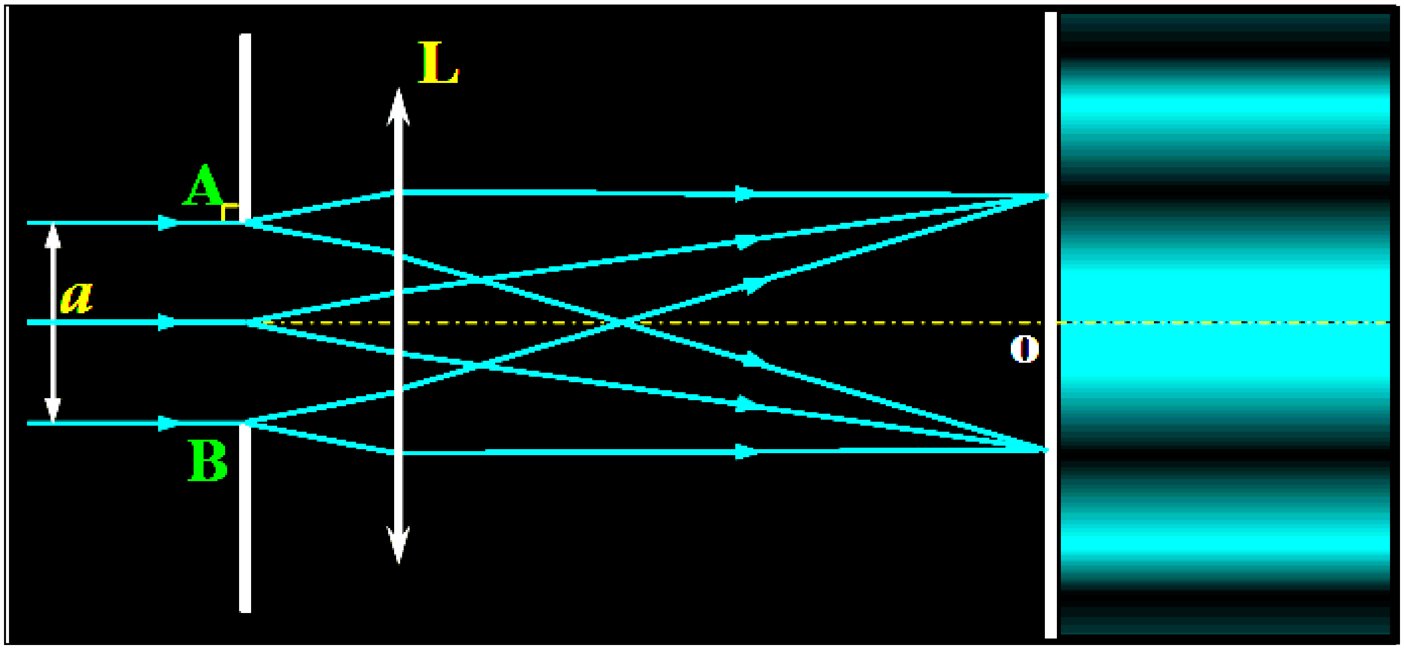
◈缝宽变化时，中央明纹宽度的改变



缝宽越小，条纹宽度越宽

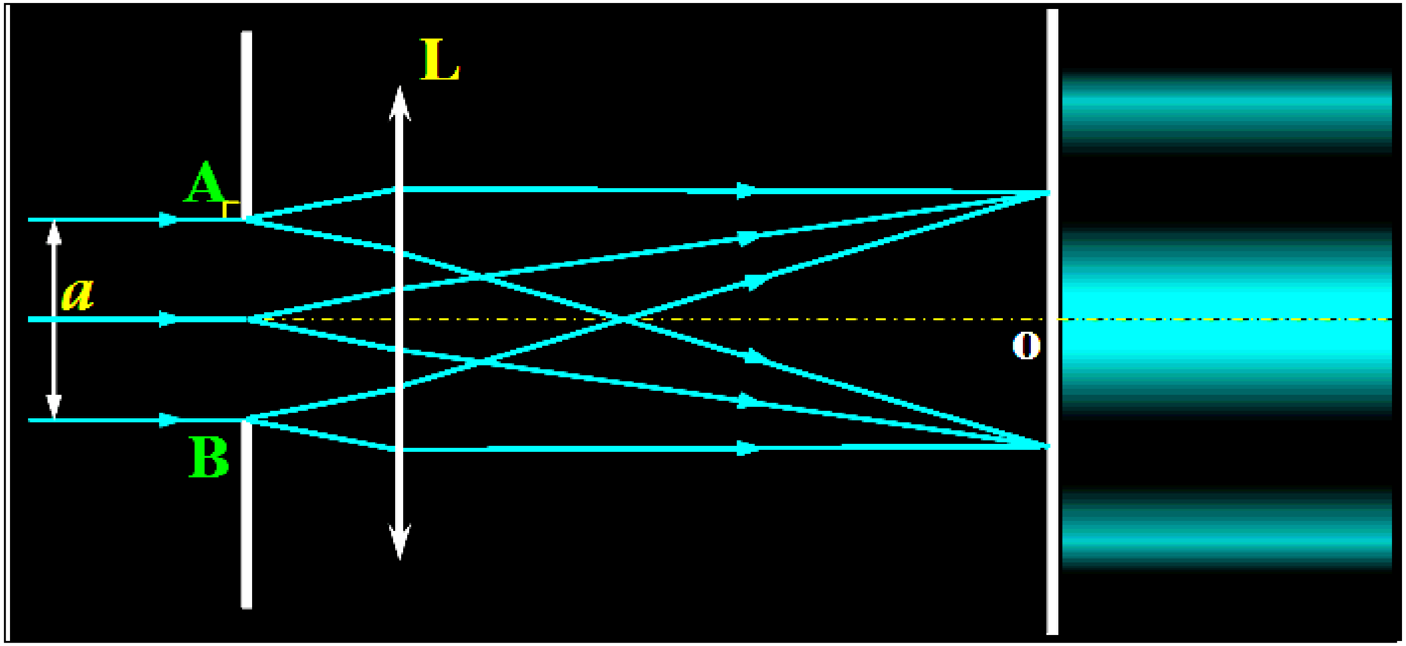
其它讨论：

（1）透镜上下平移时　条纹随之上下移动！



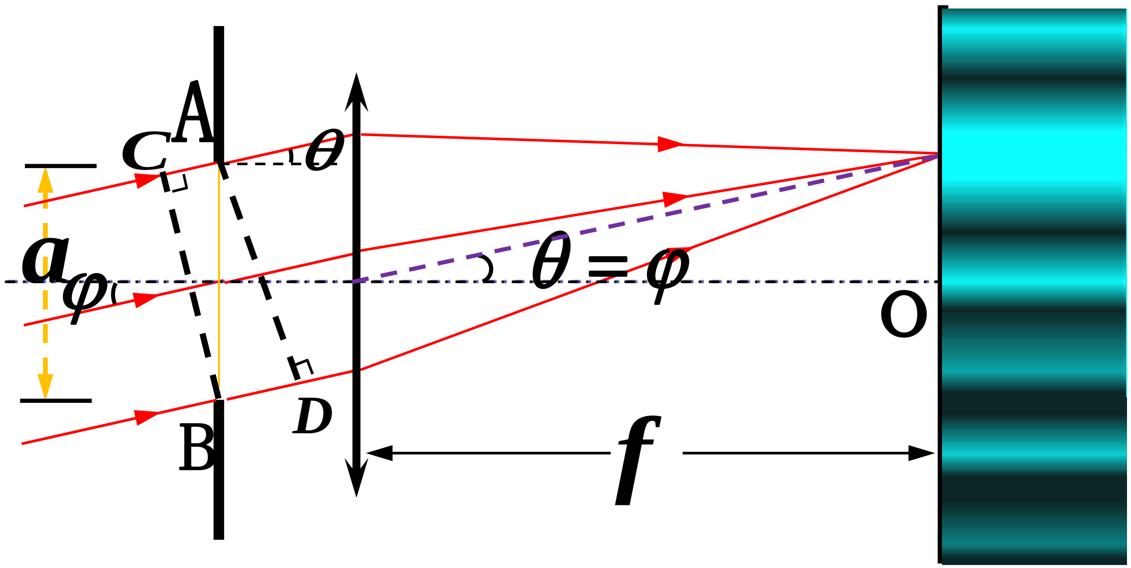
对$\theta = 0$的一组衍射光之间$\delta = 0$，会聚在焦点O处!

（2）缝平面上下平移时 条纹位置不变



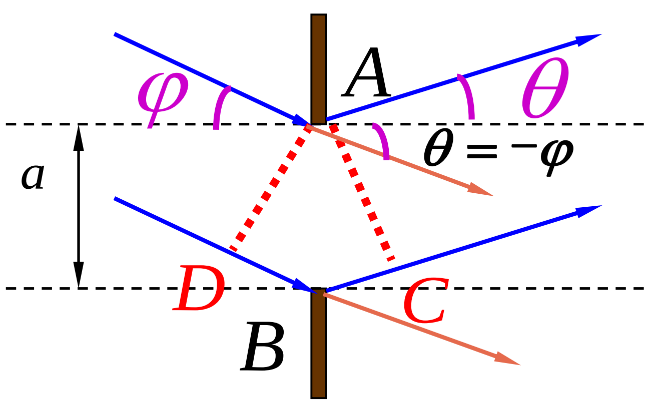
对$\theta = 0$的一组衍射光之间$\delta = 0$，会聚在焦点O处!

（3）非垂直入射，中央明纹的位置是否移动？



中央明纹
（条纹整体）
向上平移

$$\delta = BD - AC = a(\sin\theta - \sin\varphi) = 0$$ 中央明纹



中央明纹向下移动

$$\delta = DB + BC = a(\sin\theta + \sin\varphi) = 0$$ 中央明纹

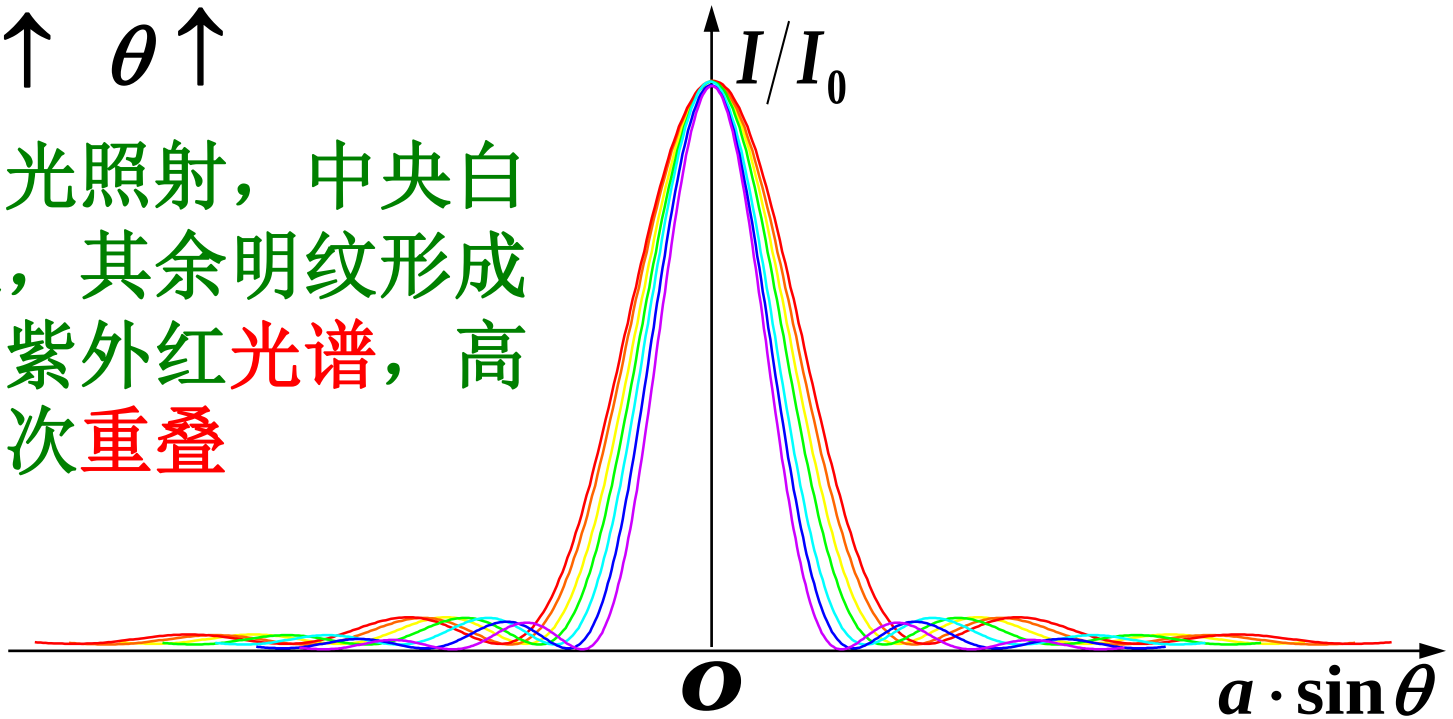
（4）白光入射

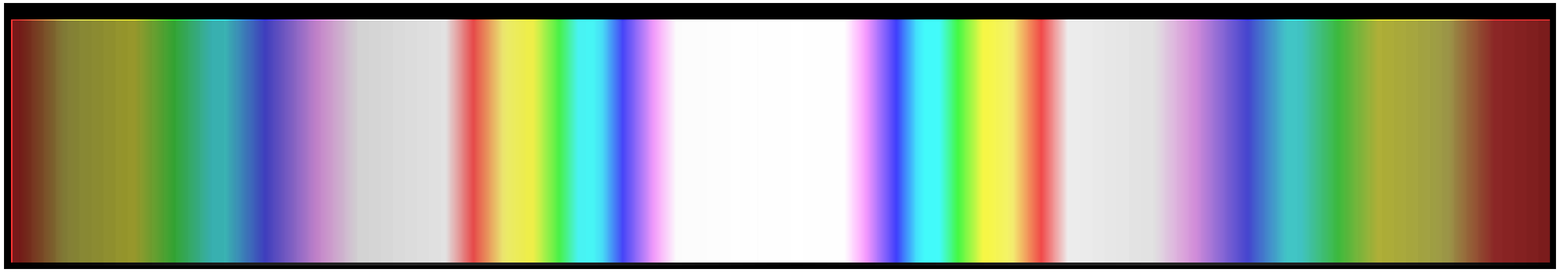
$$a\ \sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\theta \propto \frac{\lambda}{a}$$

$\lambda\uparrow \quad \theta\uparrow$

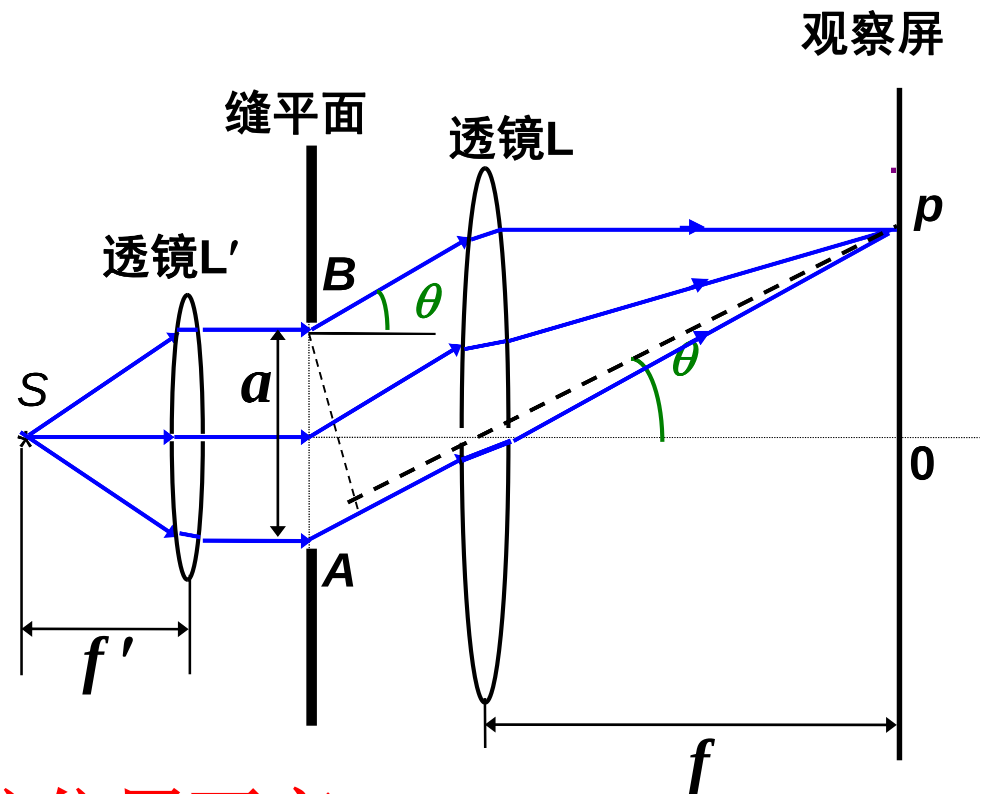
白光照射，中央白色，其余明纹形成内紫外红光谱，高级次重叠





例. 惠—菲原理的基本内容是: 波阵面上各面积元所发出的子波在观察点P的 相干叠加 ,决定了P点的合振动及光强。

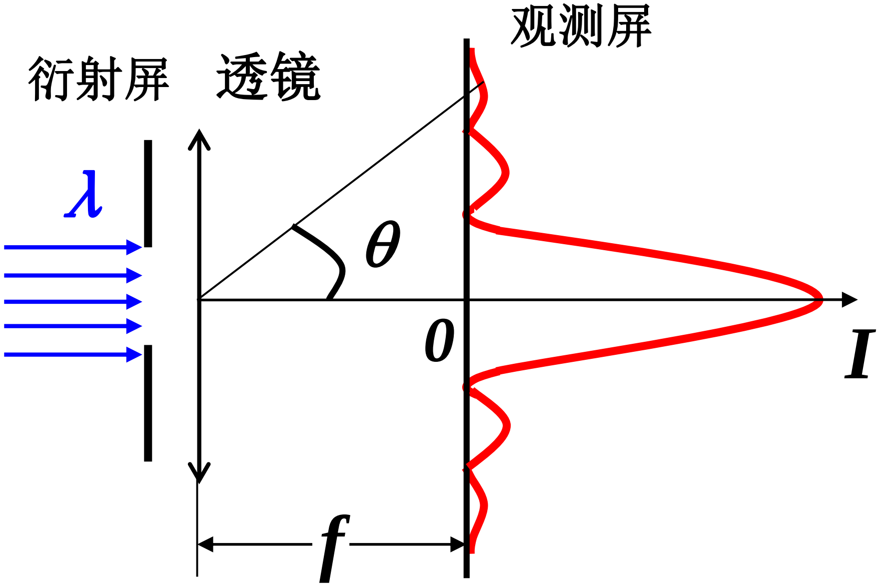
例.单缝衍射中, 单缝和透镜分别稍向上移, 衍射条纹如何变化?



答: (1)单缝上移→条纹位置不变.

(2)透镜上移→条纹向上平移.

例：在单缝夫琅和费衍射实验中，垂直入射的光有两种波长，λ_1=400nm，λ_2=760nm。已知单缝宽度a=1.0×10^{-2}cm，透镜焦距f=50cm。求两种光第二级衍射明纹中心之间的距离。



解：由明纹条件

$$a\sin\theta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} = \frac{5}{2}\lambda$$

$$x_1 \approx f\sin\theta_1 = f\frac{5\lambda_1}{2a},$$

$$x_2 \approx f\sin\theta_2 = f\frac{5\lambda_2}{2a}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{5f}{2a}(\lambda_2 - \lambda_1) = 0.45cm$$

例：白光垂直照射单缝,在x=1.5mm处看到明纹极大,已知a=0.5mm，f =50cm，求:入射光的波长及衍射级数；单缝所在处的波阵面被分成的波带数目。

解：•明纹位置：$x_k \approx f\sin\theta_k = f(2k+1)\dfrac{\lambda}{2a}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2ax_k / f}{2k+1} = \frac{2\times 0.5\times 10^{-3}\times 1.5\times 10^{-3}}{(2k+1)\times 50\times 10^{-2}} = \frac{3\times 10^{3}}{2k+1}nm$$

满足上式的波长值为白光（400—700nm）即为所求：

- K=1时,λ_1=1000nm；
- K=2时,λ_2=600nm 符合题意；
- K=3时,λ_3=428.6nm 符合题意；
- K=4时,λ_4=333.3nm。

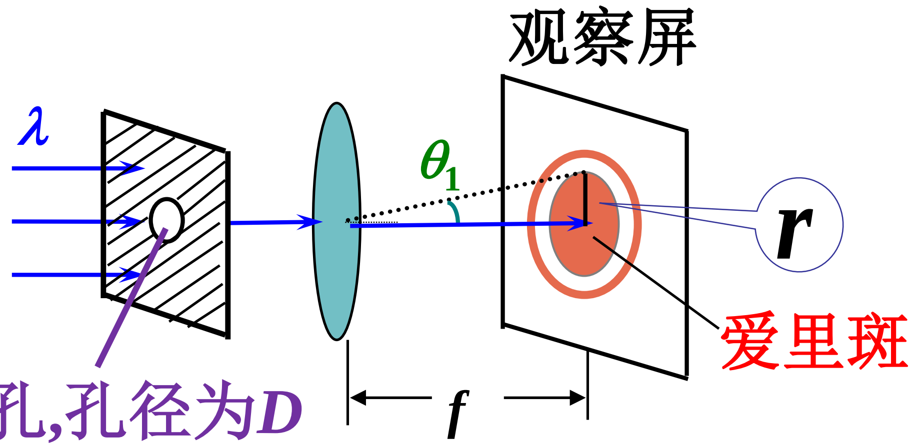
•可分成的半波带数

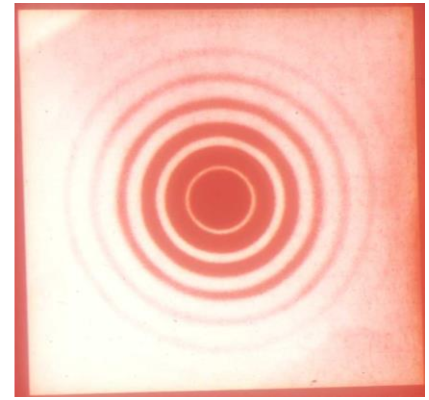
N=（2K+1）

- N =5
- N=7

§ 3 圆孔夫琅禾费衍射 光学仪器的分辨本领

一、圆孔的夫琅禾费衍射

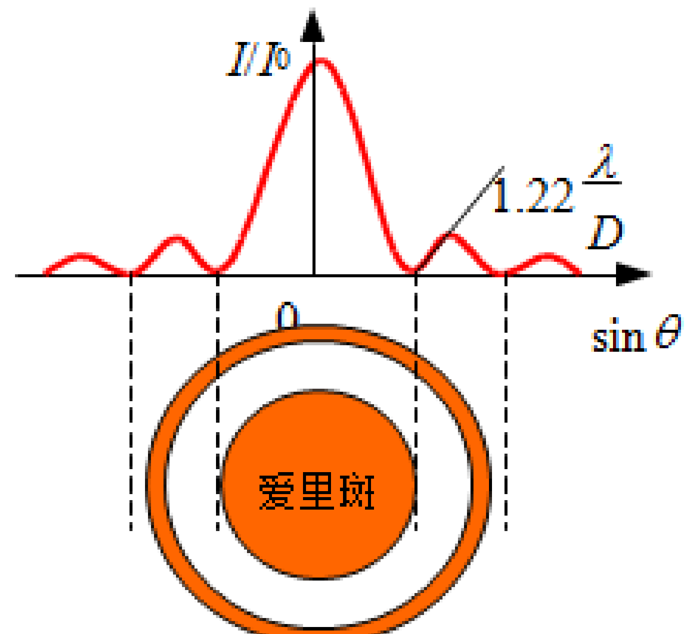




用波带法（环形波带）分析可得：

$$\sin\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D} \quad \text{角半径}$$

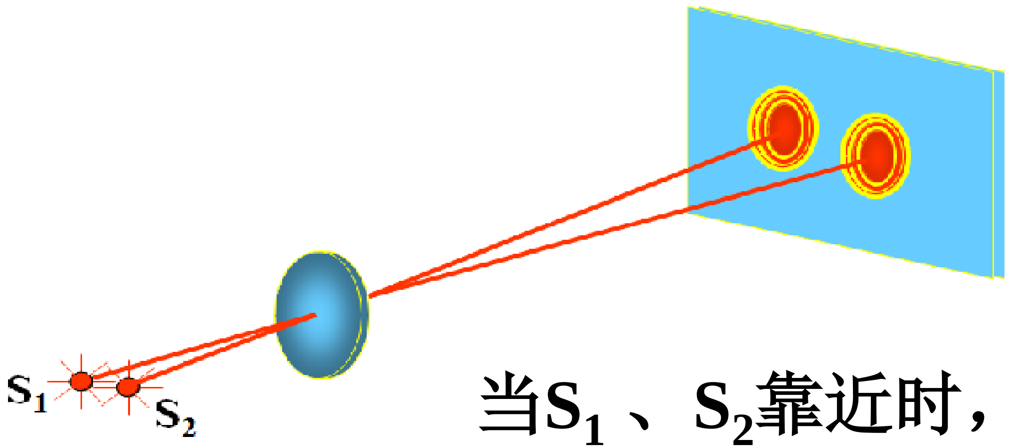
$$r = f\ tg\theta \approx 1.22\frac{\lambda}{D}f \quad \text{线半径}$$



由第一暗环围成的爱里斑占整个入射光束总光强的84%。

二、成像光学仪器的分辨本领

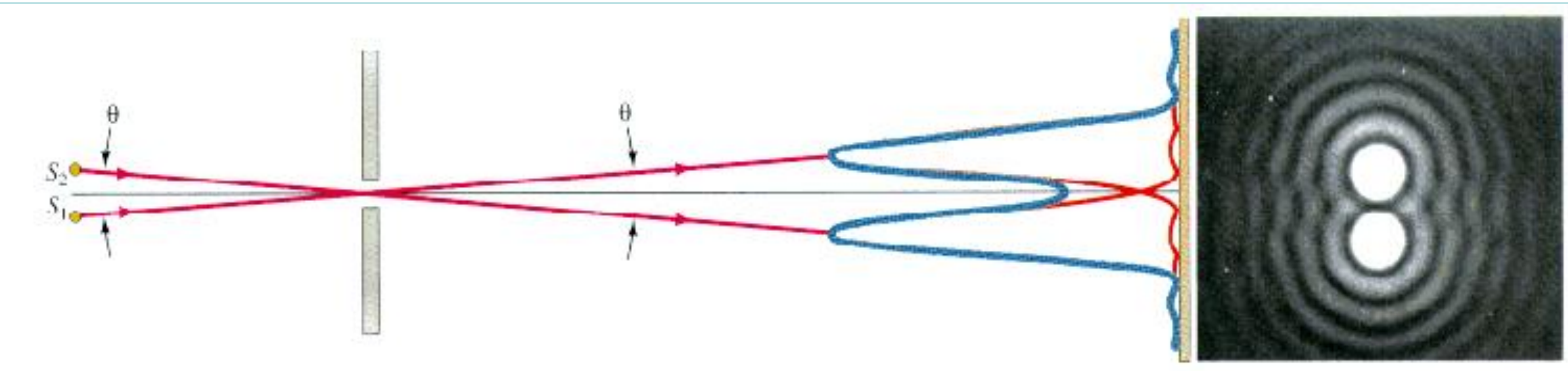
光学仪器均有口径，对光来说都是衍射孔物点经<u>光学仪器成像</u>实际是成一个衍射斑每个<u>物点</u>成像均是圆孔的夫琅和费<u>衍射斑</u>。



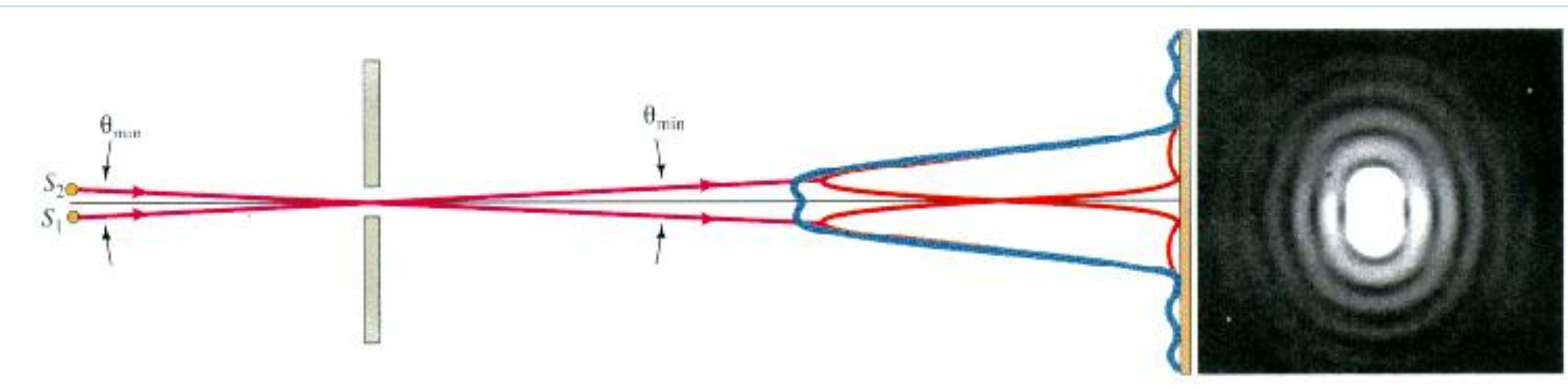
当S_1、S_2靠近时，两个衍射斑（像）将重叠而变得分辨不清。

问：两个物点的像怎样才算能分辨呢？

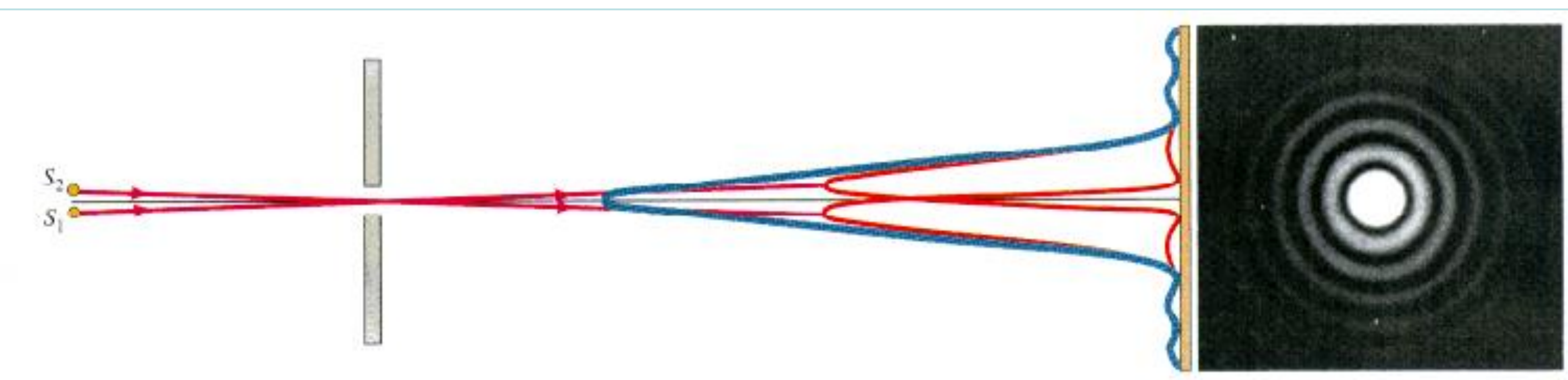
小孔（直径d）对远处两个靠近的点光源的分辨



可分辨



刚能分辨

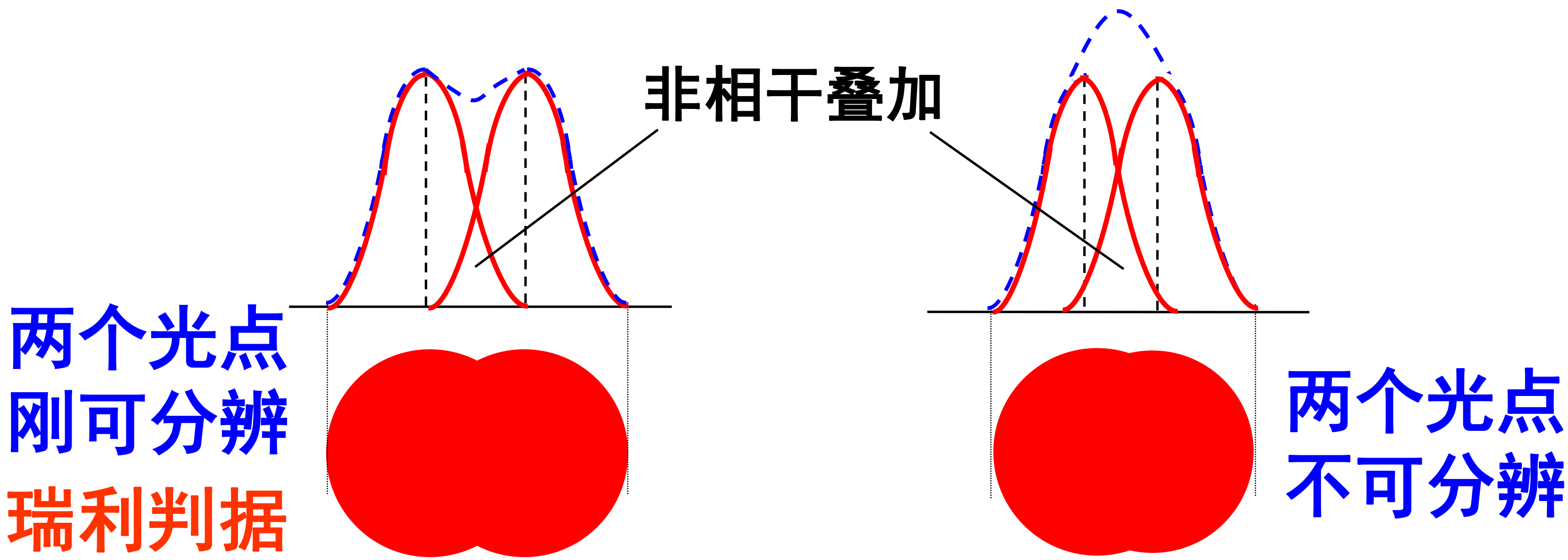


不能分辨

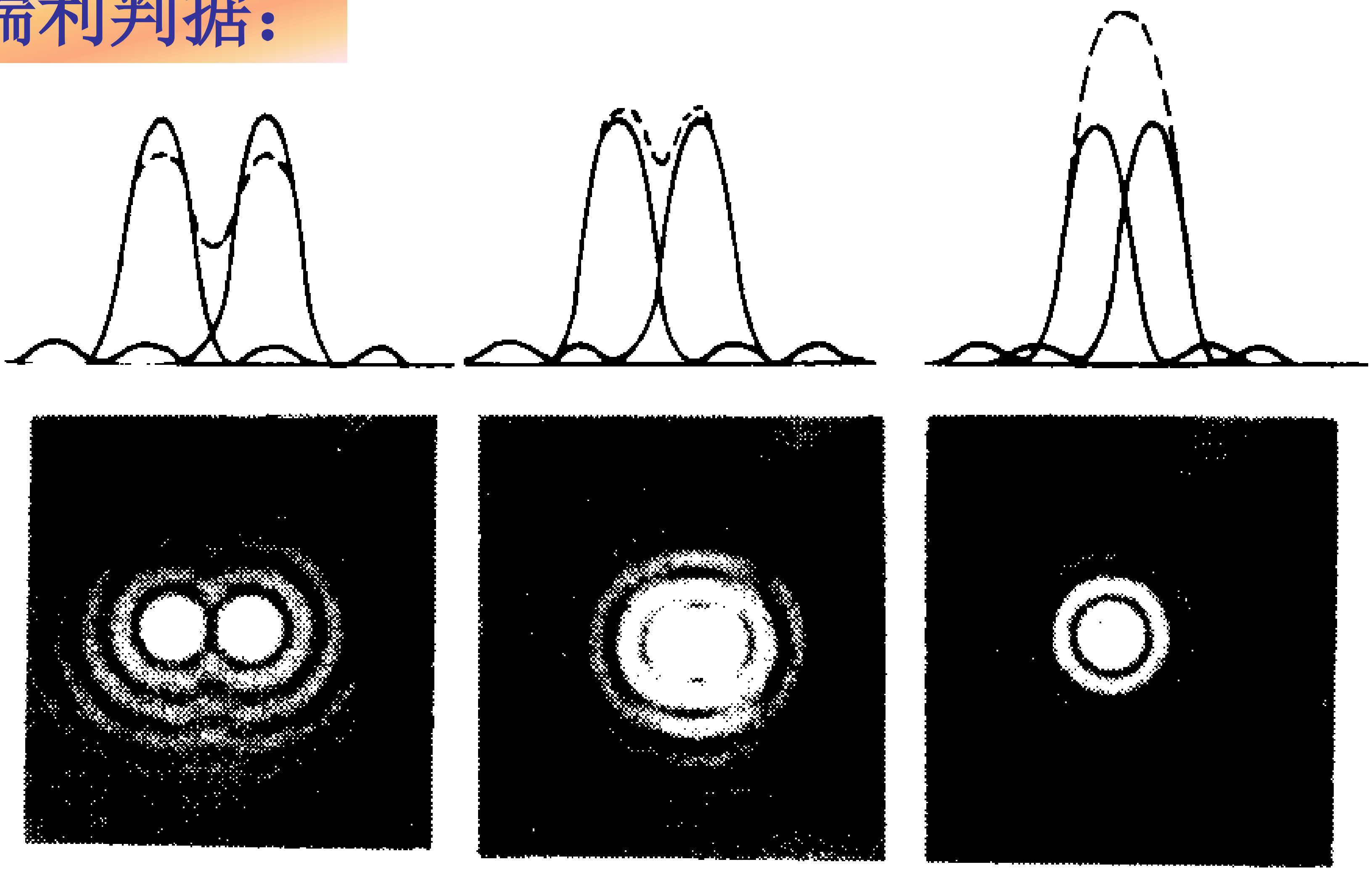
瑞利判据（Rayleigh criterion）：

对于两个等光强的非相干的物点，如果一个像斑的中心恰好落在另一像斑的边缘（第一暗纹处），则此两物点被认为是刚刚可以分辨的。

像斑再近就不能分辨了



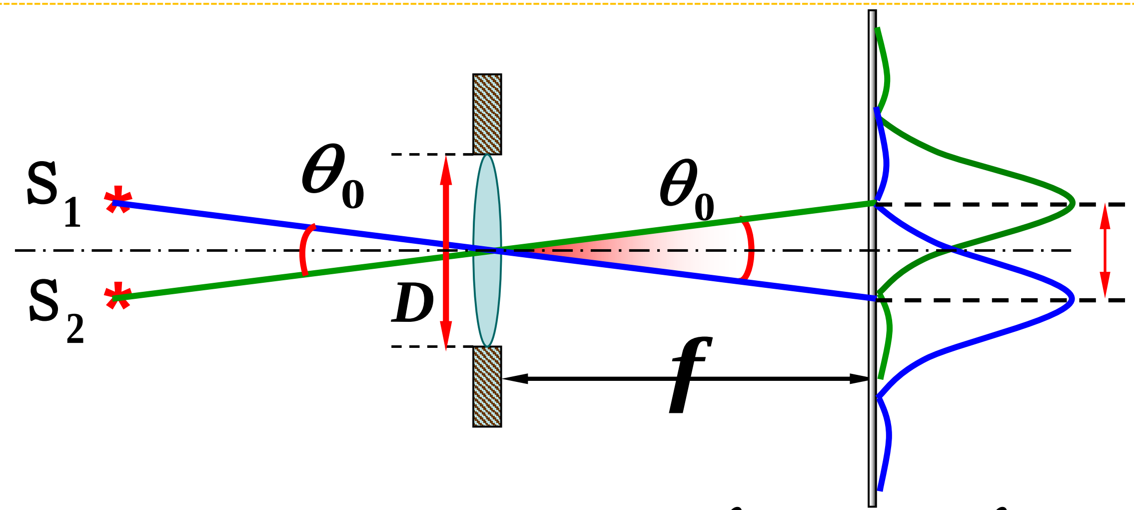
瑞利判据：



(a) (b) (c)

恰能分辨

光学仪器的**最小分辨角**：当两个物点刚好被分辨时，它们对透镜中心的张角。



据瑞利判据，当两个爱里斑的角距离等于衍射斑的角半径时，两个相应的物点恰能分辨。

$$\theta_0 = \theta_1 = \arcsin\left(1.22\frac{\lambda}{D}\right) \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$

最小分辨角 $\boxed{\theta_0 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}}$

分辨率本领 $\boxed{R = \frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda}}$

$$\left.\begin{array}{l} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{array}\right\} \rightarrow R\uparrow$$

望远镜： 不可选择λ，但可$\uparrow D \rightarrow \uparrow R$

世界上最大的射电望远镜---“中国天眼”
D=500m

美国波多黎各岛的**Arecibo**射电望远镜，
D=305m
任务：寻找银河系边缘智能生命的踪迹

显微镜：D不会太大，可使 $\lambda\downarrow\rightarrow R\uparrow$

光学显微镜： 最大分辨本领的极限--紫光显微镜

电子显微镜：电子的波长很小：0. 1 Å～ 1Å,
分辨本领 R 很高，可观观察物质结构。

▲人眼:在正常照明下，人眼瞳孔直径约 3mm ，
对波长为5500Å 的光，可以得出

最小分辨角：$\theta_0 = 1.22\dfrac{\lambda}{D} = 1.22\times\dfrac{5500\times10^{-10}}{3\times10^{-3}} = 2.24\times10^{-4}(rad)\approx 1'$

可分辨约 9m 远处的相距 2mm 的两个点

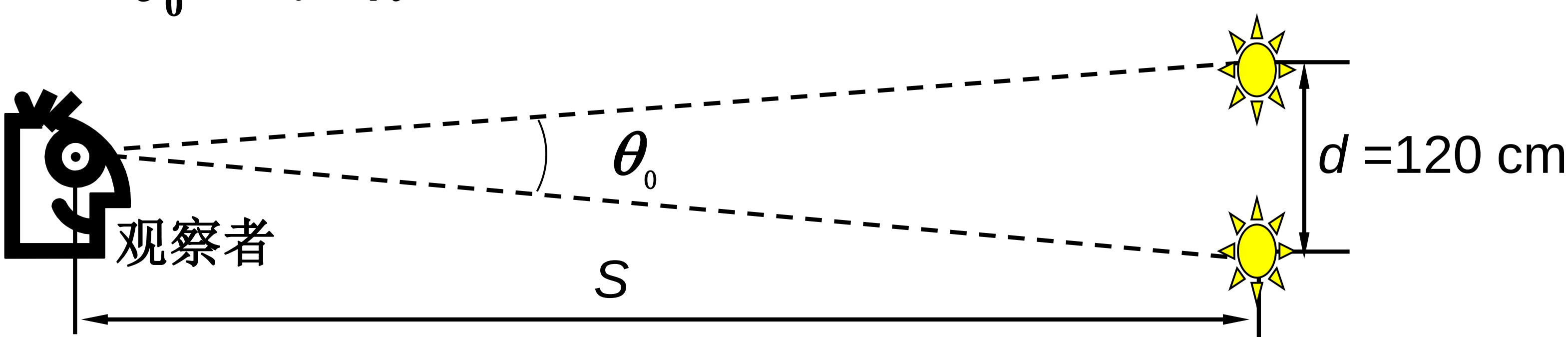
▲ 夜间观看汽车灯，远看是一个亮点，逐渐移近才看出是两个灯。Why?

例：在迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距120 cm，设夜间人眼瞳孔直径为5.0 mm，入射光波为 550 nm。问：对迎面而来的汽车，离多远能分辨出两盏亮灯？

解:设人离车的距离为 S 时，恰能分辨这两盏灯。

$$\left.\begin{aligned} &\text{眼睛的最小分辨角为 } \theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D} \\ &d \approx S\cdot\theta_0 \end{aligned}\right\}$$

$$S \approx \frac{d}{\theta_0} = \frac{Dd}{1.22\lambda} = \frac{5.0\times10^{-3}\times1.20}{1.22\times550\times10^{-9}} = 8.94\times10^{3}\ \text{m}$$



例：已知月球和地面的距离为3.84×10⁵km,设来自月球的光的波长为600nm,若在地球上用物镜直径为1m的天文望远镜观察时，刚好将月球正面一座环形山的两点分辨开，则该两点的距离为多少？

解:

$$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22 \times \frac{600\times10^{-9}}{1} = 7.32\times10^{-7}$$

$$\Delta y = 3.84\times10^{8}\times7.32\times10^{-7} = 281m$$