第六节　边缘分布

一、边缘分布函数

二、离散型随机变量的边缘分布律

三、连续型随机变量的边缘分布

四、小结

一、边缘分布函数

问题:已知 (X,Y) 的分布,如何确定 X,Y 的分布?

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},\ F(x)=P\{X\le x\},$$

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)=F_X(x)$$

(X,Y)关于X的边缘分布函数.

定义 设 $F(x,y)$ 为随机变量 (X,Y) 的分布函数，

则 $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$.

令 $y\to\infty$，称 $P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<\infty\}=F(x,\infty)$

为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数.

记为 $F_X(x)=F(x,\infty)$.

同理令 $x\to\infty$，

$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty, Y\le y\}=P\{Y\le y\}$

为随机变量 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数.

二、离散型随机变量的边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$$

记

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij},\ j = 1,2,\cdots.$$

对任意r.v (X,Y)，

X和Y的联合分布函数为

$$F(x,y)$$

则(X,Y)关于X的边缘分布函数为

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

(X,Y)关于Y的边缘分布函数为

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

对连续型 r.v (X,Y),

X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)$$

则(X,Y)关于X的边缘概率函数为

$$f_X(x) = F_X'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

(X,Y)关于Y的边缘概率函数为

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

因此得离散型随机变量关于X和Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

例1 已知下列分布律求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$
0	$\frac{12}{42}$ +	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{42}$ +	$\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布

例2 一整数 N 等可能地在$1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值. 设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F=F(N)$是能整除 N 的素数的个数.试写出 D 和 F 的联合分布律, 并求边缘分布律.

解

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得 D 和 F 的联合分布律与边缘分布律:

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$1/10$	0	0	0	$1/10$
1	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
2	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$P\{D=i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

或将边缘分布律表示为

D	1	2	3	4
p_k	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$

F	0	1	2
p_k	$1/10$	$7/10$	$2/10$

三、连续型随机变量的边缘分布

定义 对于连续型随机变量 (X,Y), 设它的概率密度为 $f(x,y)$, 由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

记

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

称其为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度.

同理可得 Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Y 的边缘概率密度.

例3 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2 \le y \le x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

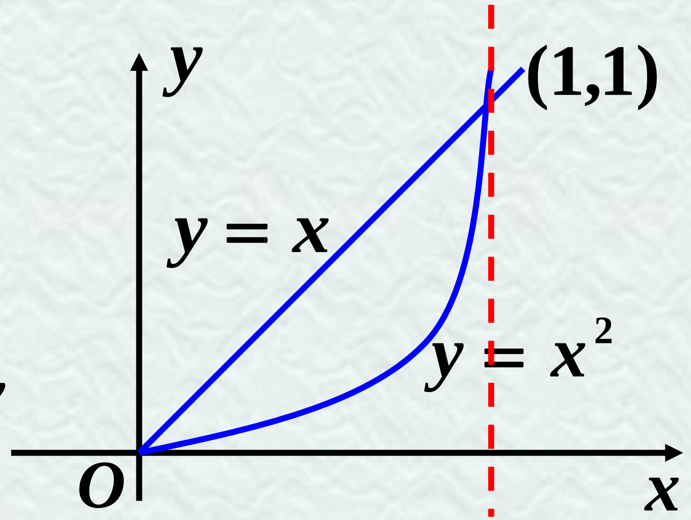
求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

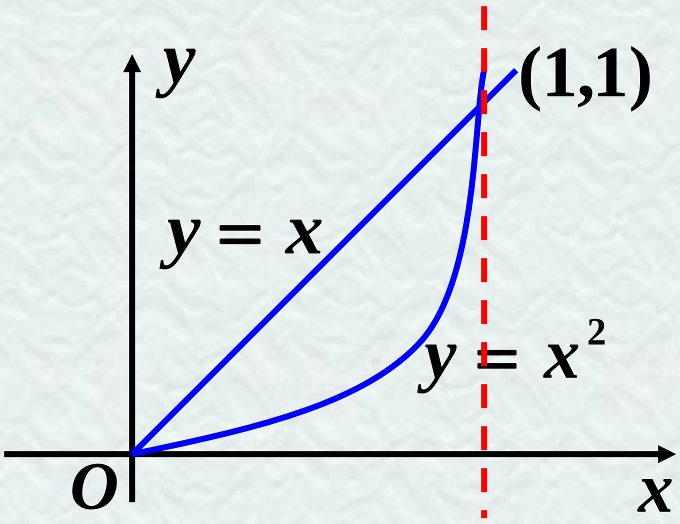
解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

当 $0 \le x \le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}y$$





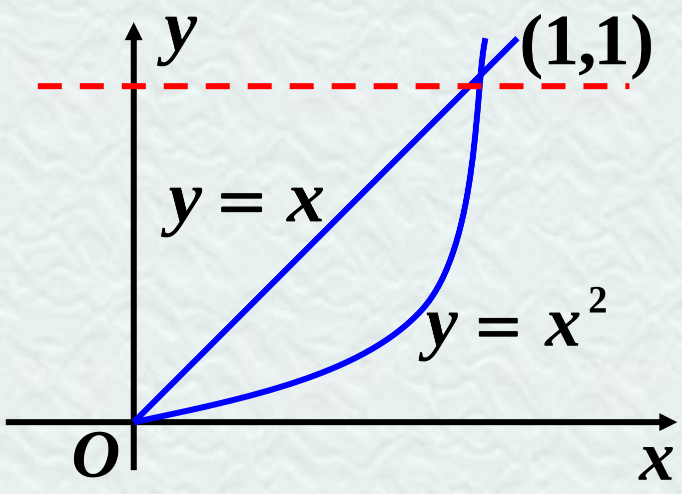
$$= 6(x - x^2).$$

当 $x < 0$ 或 $x > 1$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

因而得 $$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $0 \le y \le 1$ 时,



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x$$

$$= 6(\sqrt{y} - y).$$

当 $y < 0$ 或 $y > 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = 0.$

得 $f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

例4 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数,且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,$

$-1<\rho<1.$

试求二维正态随机变量 的边缘概率密度 .

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$

由于 $$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho_0)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]}\mathrm{d}y,$$

令 $$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$$

则有
$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

即
$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

同理可得
$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且都不依赖于参数ρ.

例5 设随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

其中A,B,C为常数.

(1) 确定A,B,C；

(2) 求X和Y的边缘分布函数;

(3) 求$P(X>2)$

解 (1) $$F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad B=\frac{\pi}{2},C=\frac{\pi}{2},A=\frac{1}{\pi^2}$$

(2) $$F_X(x)=F(x,+\infty)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2},\qquad -\infty<x<+\infty.$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{2}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

(3) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$ $\mathbf{= 1 - F_X(2)}$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{2}{2}\right)$$

$$= 1/4.$$

例6 设(X,Y)的概率密度是

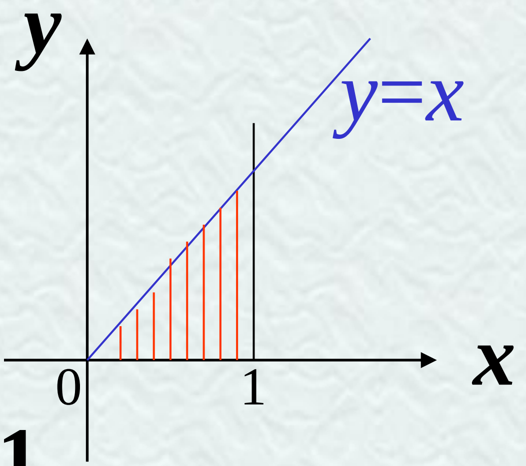
$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad, & 其它 \end{cases}$$

求 (1) c的值；（2）边缘密度cf_x。

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x cy(2-x)dy$$

$$=c\int_0^1 [x^2(2-x)/2]dx \ =5c/24=1,$$

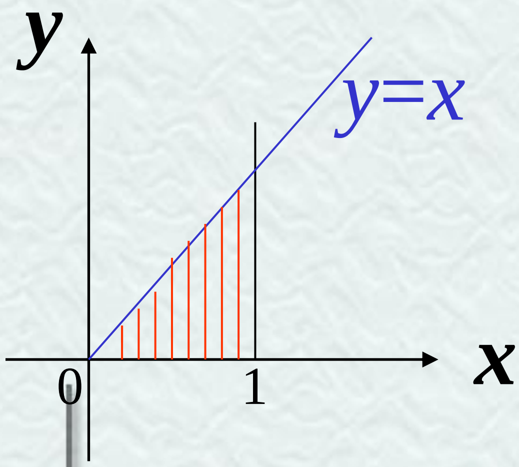


$\Longrightarrow$ c =24/5

解: (2)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0\quad , & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$



$$=\int_0^x \frac{24}{5}y(2-x)dy$$

$$=\frac{12}{5}x^2(2-x),\qquad 0\le x\le 1$$

注意取值范围

即

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

四、小结

$$F_X(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

$$F_Y(x) = F(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布