



1. Oscillateurs mécaniques

Introduction

Nous avons pu, au cours du semestre précédent, nous familiariser avec la notion d'*oscillateur*, lors notamment de l'étude du circuit RLC série. L'étude de ce montage, d'abord en régime libre puis en régime sinusoïdal forcé nous a permis de mettre en évidence de nombreux phénomènes physiques tels que la *résonance*. Nous allons pouvoir dans ce premier chapitre constater la généralité des équations caractéristiques des oscillateurs obtenues en électrocinétique en les mettant en application dans le cadre de la mécanique. Nous en profiterons également pour effectuer quelques rappels de base sur les notions de mécanique vues au lycée ainsi que sur les outils mathématiques nécessaires à la description des phénomènes physiques mis en jeu. Nous nous placerons ici uniquement dans le cadre de la mécanique newtonienne¹ et supposons implicitement que le référentiel d'étude, à savoir le référentiel terrestre, est galiléen².

1.1 Oscillateur harmonique mécanique élastique

1.1.1 Définitions

Avant de nous lancer dans la description de l'oscillateur mécanique étudié, commençons par effectuer quelques rappels concernant l'oscillateur harmonique.

Définition 1.1.1 — Oscillateur.

.....
.....
.....

■ **Exemple 1.1.1** Le pendule d'une horloge, dont le balancement est périodique, constitue un exemple d'oscillateur. De la même manière, le générateur basse fréquence utilisé en travaux pratiques, permettant de générer des signaux alternatifs périodiques, en est un autre. ■

R Notons bien que la définition précédente ne donne aucune information sur la dépendance temporelle de l'évolution du système. La seule condition concerne la périodicité de celui-ci.

1. Les vitesses des objets considérés sont faibles devant la célérité c de la lumière, de sorte que l'on peut négliger tout phénomène relativiste.

2. Nous reviendrons plus en détail sur cette notion dans les chapitres suivants.

Définition 1.1.2 — Oscillateur harmonique.

Le signal délivré par un oscillateur harmonique est donc de la forme $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$ où s_m est l'amplitude du signal et φ sa phase à l'origine.

Aucun système physique réel ne correspond rigoureusement à un oscillateur harmonique. Cette notion est un *modèle* dont l'on se rapproche plus ou moins suivant l'harmonicité des oscillateurs considérés. Cependant, de nombreux systèmes physiques peuvent être assimilés de manière valable à un oscillateur harmonique. Parmi ceux-ci, on peut par exemple citer :

- le diapason, utilisé par les musiciens pour accorder leur instrument, qui produit ce que l'on qualifie de « son pur » ;
- le cristal de quartz, utilisé dans les montres à quartz, et qui vibre à une fréquence bien déterminée ;
- les molécules diatomiques, dont le mouvement de vibration peut être décrit à l'aide du modèle de l'oscillateur harmonique.

On retiendra donc que l'étude menée ici dans le cadre de la mécanique présentera un intérêt important, dans la mesure où les résultats obtenus seront transposables à un grand nombre de systèmes dans tous les domaines de la physique.

1.1.2 Présentation du dispositif

Le dispositif étudié dans cette partie est constitué d'une petite masselotte de masse m , que l'on assimile à un point matériel³ M . Cette masselotte est reliée à l'extrémité d'un ressort et peut se déplacer *sans frottements* le long d'une glissière orientée suivant un axe horizontal noté x . L'autre extrémité du ressort est fixe au point A . On munit de plus l'espace d'une base directe orthonormée $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$, comme présenté sur la figure 1.1. Comme ces vecteurs sont unitaires⁴, on choisit de les noter avec la lettre u .

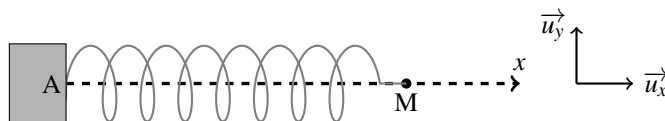


FIGURE 1.1 – Oscillateur mécanique élastique horizontal

Notre but sera ensuite de mettre en équation le système précédent. Il nous faudra pour cela modéliser les différentes actions mécaniques s'effectuant sur la masselotte. Il nous faudra notamment décrire l'effet du ressort sur celle-ci, ce qui fera l'objet de la partie suivante.

1.1.3 Modélisation de l'action du ressort - Loi de Hooke**Modélisation d'une action mécanique****Définition 1.1.3 — Action mécanique.**

■ **Exemple 1.1.2** Nous pouvons citer de nombreux exemples d'actions mécaniques, certaines s'exerçant à distance comme l'attraction gravitationnelle ou l'interaction électromagnétique, d'autres dites de contact comme la poussée exercée par le vent sur la voile d'un bateau. ■

Il nous faut ensuite pouvoir modéliser cette action mécanique par outil mathématique adapté. Pour cela, réfléchissons à ce qui permet de caractériser celle-ci.

- Elle peut être plus ou moins intense (le vent peut souffler plus ou moins fort sur la voile du bateau).
- Elle s'exerce dans une certaine direction (le vent peut souffler suivant un axe est-ouest ou nord-sud).
- Elle s'exerce suivant un certain sens (le vent peut souffler du nord vers le sud ou du sud vers le nord).

3. On néglige toute extension spatiale de la masselotte.

4. Leur norme est égale à 1.

Il nous faut donc, pour modéliser l'action mathématique, ou outil mathématique caractérisé par une intensité, une direction et un sens. Nous connaissons un tel objet : il s'agit d'un vecteur. C'est à cette modélisation vectorielle de l'action mécanique que nous donnerons le nom de *force*.

Définition 1.1.4 — Force.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Exemple 1.1.3** Vous avez déjà au lycée rencontré des exemples de forces, comme le poids d'un objet matériel. Si on note m la masse d'un point matériel M et \vec{g} l'accélération de la pesanteur au point M , on a $\vec{P} = m\vec{g}$. ■



Nous choisissons ici de représenter un vecteur à l'aide d'une flèche placée au dessus de la lettre utilisée, notons que certains ouvrages préfèrent noter les vecteurs en gras.

Loi de Hooke

Connaissant maintenant la notion de force, cherchons à trouver une expression pour la force exercée par le ressort sur la masselotte afin de pouvoir mettre le problème en équation.

Observations expérimentales

Considérons un ressort et notons P et M ses deux extrémités. Nous pouvons distinguer trois situations, comme présenté sur la figure 1.2.

- Si l'on n'exerce aucune action sur le ressort, celui présente une certaine longueur, que nous noterons l_0 . Cette longueur l_0 , caractéristique du ressort, est appelée *longueur à vide*.
- Si l'on comprime le ressort, soit $l < l_0$ avec l la longueur du ressort, ce dernier exerce une poussée qui tend à le rapprocher de sa longueur initiale.
- De la même manière, si l'on étire le ressort, soit $l > l_0$ alors la force exercée par le ressort sur ses extrémités tend à le raccourcir, en rapprochant l de l_0 .

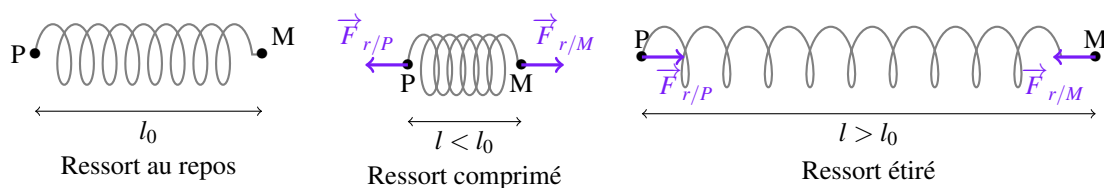


FIGURE 1.2 – Différentes situations d'un ressort

Nous avons de plus, su la figure 1.2, représenté les forces exercées par le ressort sur chacune de ses extrémités. L'expérience nous montre que $\vec{F}_{r/P}$ et $\vec{F}_{r/M}$ sont de mêmes norme et direction, mais de sens opposés. Cette force est généralement appelée *force de rappel*.

Modélisation - Loi de Hooke

Nous allons ici chercher à donner une expression mathématique de la force exercée par un ressort sur l'une de ses extrémités. Notons que, contrairement aux interactions fondamentales, telles que les interactions gravitationnelle ou électromagnétique, cette force ne peut pas faire l'objet d'une détermination théorique exacte. Il ne s'agit donc que d'une *modélisation* mathématique rendant compte de phénomènes plus complexes à l'échelle microscopique, impossibles à décrire rigoureusement.

Lorsqu'on étire ou comprime le ressort, plusieurs domaines de fonctionnement peuvent se présenter.

- Si l'on comprime beaucoup le ressort, les spires se rejoignent et le ressort devient indéformable. Quelle que soit la force exercée sur celui-ci, il ne peut plus être comprimé : sa longueur ne varie plus.
- Si le ressort n'est ni trop comprimé, ni trop étiré, on constate expérimentalement que la force de rappel, exercée par le ressort sur l'une de ses extrémités est proportionnelle à la grandeur $l - l_0$ appelée *allongement* du ressort. Lorsqu'on cesse de comprimer ou d'étirer le ressort, celui-ci reprend sa forme initiale, on dit qu'on est dans une zone de fonctionnement *élastique*. La constante de proportionnalité, notée k , sera appelée *constante de raideur*.
- Enfin, si l'on étire trop le ressort, la force de rappel devient très importante et cesse d'être proportionnelle à l'allongement, on va alors déformer irréversiblement le ressort (on modifie sa longueur à vide), on parle alors de *déformation plastique*.

Loi 1.1.4 — Loi de Hooke.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

R La détermination de la force exercée par un ressort sur l'une de ses extrémités est très souvent source d'erreurs de signe. On prendra toujours garde à vérifier que l'expression obtenue est compatible avec le sens commun (la force exercée doit s'opposer à l'allongement ou à la compression du ressort).

R La constante de raideur k est une grandeur caractéristique du ressort, plus elle sera grande, plus celui-ci sera difficile à déformer. Elle s'exprime en $N.m^{-1}$.

1.1.4 Mise en équation

Connaissant l'expression de la force exercée par le ressort sur la masselotte, il est maintenant possible de mettre en équation le problème. Nous aurons pour cela besoin d'un outil que vous avez déjà vu au lycée, à savoir la seconde loi de Newton, également appelée *loi fondamentale de la dynamique*.

Loi 1.1.5 — Loi fondamentale de la dynamique.

.....

.....

.....

.....

.....

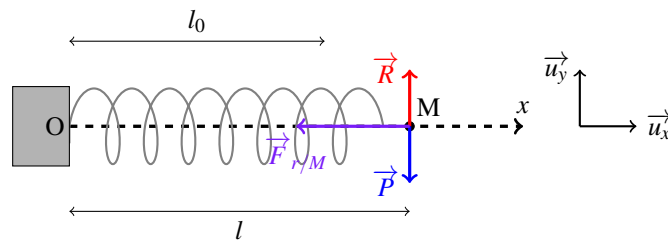
.....

- R** Nous reviendrons plus en détail sur les notions de référentiel, de vitesse, etc dans le chapitre dédié à la dynamique du point matériel (chapitre 3).
- R** Nous nous plaçons pour notre étude hors de tout cadre relativiste, de sorte que la masse pourra être considérée comme une constante et la loi fondamentale de la dynamique se réécrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}. \quad (1.1)$$

Écriture de la loi fondamentale de la mécanique

Afin d'appliquer la loi fondamentale de la dynamique à notre situation, appliquons une démarche qui deviendra systématique pour la suite de notre étude.



Choix de l'origine du repère

Nous avons jusqu'ici noté Ox l'axe horizontal permettant de décrire le mouvement, il nous faut maintenant choisir une origine pour cet axe. Un choix acceptable pourrait être de choisir l'origine O au point A où est attaché le ressort. L'expérience nous montre qu'il est cependant plus judicieux de poser l'origine de telle sorte qu'on ait $x = l - l_0$, ce qui revient à choisir $x = 0$ lorsque $l = l_0$, c'est à dire lorsque le ressort est à l'équilibre. L'équation du mouvement se met alors sous la forme, puisque $\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2}$:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.2)$$

On reconnaît une équation similaire à celle que nous avons obtenu dans le cadre de l'étude du circuit LC en électrocinétique.⁵ Il paraît dès lors logique d'introduire une pulsation caractéristique ω_0 définie par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.3)$$

L'équation du mouvement se met alors sous la forme suivante, appelée *forme canonique* :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.4)$$

Résolution de l'équation

La résolution d'une équation différentielle du second ordre telle que celle établie précédemment a déjà été vue au chapitre précédent, nous ne nous attarderons par conséquent pas trop sur sa résolution. Contentons nous de constater que les fonctions du type $t \rightarrow \cos(\omega_0 t)$ et $t \rightarrow \sin(\omega_0 t)$ sont solution. On a en effet :

On se rappelle ensuite que, pour peu que l'on ait trouvé deux solutions particulières d'une équation différentielle du second ordre, la solution générale est ensuite donnée par une combinaison linéaire des deux solutions particulières. On a donc, en notant C_1 et C_2 deux constantes que nous déterminerons grâce aux conditions initiales :

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t). \quad (1.5)$$



Cette notation est strictement équivalente à la notation $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec x_m et φ des constantes également déterminées grâce aux conditions initiales.

Cas d'un mobile lâché sans vitesse initiale

Considérons que le mobile étudié est initialement écarté de sa position d'équilibre d'une valeur $x(0) = x_m$ et lâché sans vitesse initiale, de sorte que $\dot{x}(0) = 0$. Ces deux conditions vont nous permettre de déterminer les deux constantes C_1 et C_2 . On a en effet :

5. On avait alors, pour la tension aux bornes du condensateur orienté en convention récepteur, une équation du type, $\ddot{u} + \frac{1}{LC}u = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

Représentons l'allure graphique de $x(t)$ en figure 1.3.

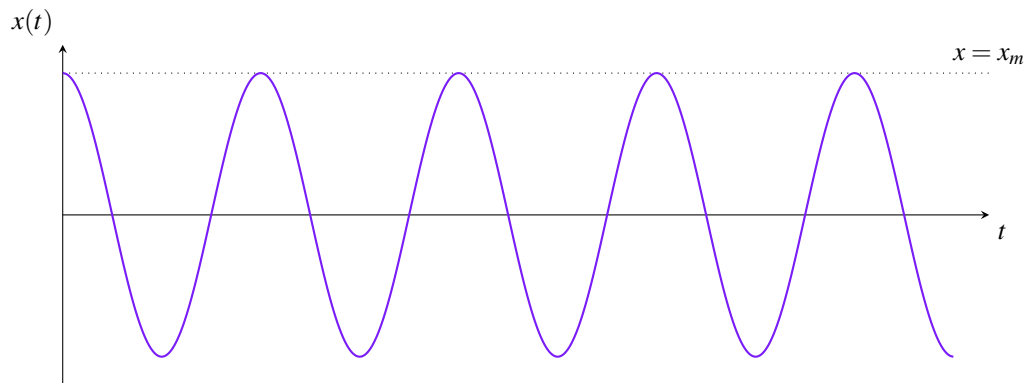


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de $x(t)$

R Nous remarquons que la résolution effectuée ici a été en tous points semblable à celle effectuée lors de l'étude du circuit LC, ce qui s'explique par le fait que les deux systèmes sont décrits par des équations analogues. Ils constituent en cela deux exemples différents d'oscillateurs harmoniques. Nous reviendrons plus en détail sur cette analogie entre électrocinétique et mécanique dans la suite du chapitre.

Portrait de phase

Comme dans le cadre de l'étude des circuits RC et RLC, nous pouvons tracer le portrait de phase de l'oscillateur. Commençons par rappeler sa définition.

Définition 1.1.5 — Portrait de phase d'un oscillateur.

.....

.....

.....

Dans notre exemple, nous avons :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Cette équation correspond à celle d'un cercle de rayon x_m , centré sur l'origine du repère, comme présenté sur la figure 1.4.

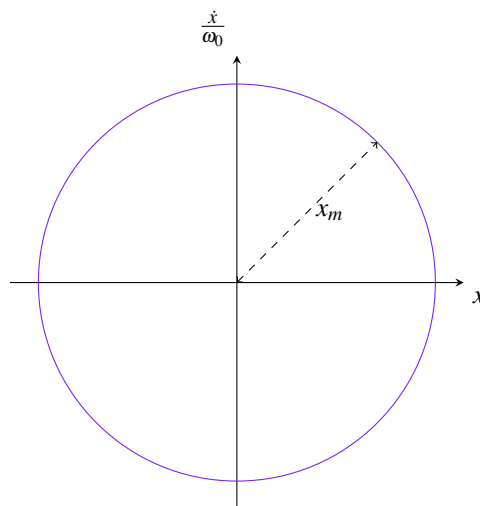


FIGURE 1.4 – Portrait de phase d'un oscillateur harmonique



Le tracé du portrait de phase présente une grande importance pratique comme nous le verrons dans les chapitres suivants, il permet en effet de prévoir le comportement d'un oscillateur à partir d'une simple étude graphique.

Exemple d'application - Oscillateur mécanique élastique vertical

Afin de nous exercer, étudions un autre exemple d'oscillateur, cette fois-ci vertical, comme présenté sur la figure 1.5. Une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m , est liée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . On choisit Oz comme l'axe vertical descendant. L'accélération de la pesanteur, supposée uniforme, est notée \vec{g} . On désigne par l la longueur du ressort à l'instant t .

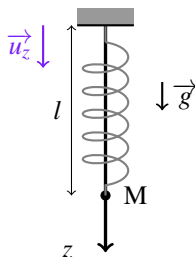


FIGURE 1.5 – Oscillateur élastique vertical

Nous allons chercher dans ce problème à déterminer l'équation du mouvement, puis nous effectuerons un changement de variable afin de la mettre sous forme canonique. Pour ce faire, on applique la même méthode que pour l'oscillateur horizontal.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

R Ce choix revient à prendre $z = 0$ pour $l = l_0 + \frac{mg}{k}$, cela revient une nouvelle fois à prendre $z = 0$ lorsque le ressort est à sa position d'équilibre. Tout se passe comme si le ressort avait une nouvelle longueur à vide $l'_0 = l_0 + \frac{mg}{k}$ « allongée » sous l'effet du poids de la masselotte.

1.1.5 Aspects énergétiques

Les différentes formes d'énergie de l'oscillateur élastique mécanique

Reprenons l'exemple de l'oscillateur élastique horizontal avec lequel nous avons débuté et cherchons à l'étudier à l'aide d'une approche énergétique. Reprenons pour cela l'équation caractéristique $m\ddot{x} + kx = 0$ et multiplions là par \dot{x} , on obtient :

$$m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = 0. \quad (1.6)$$

On remarque que cette expression peut s'écrire comme la dérivée temporelle d'une certaine fonction :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 1.1.6 — Énergie cinétique.

.....

.....

.....

.....

.....

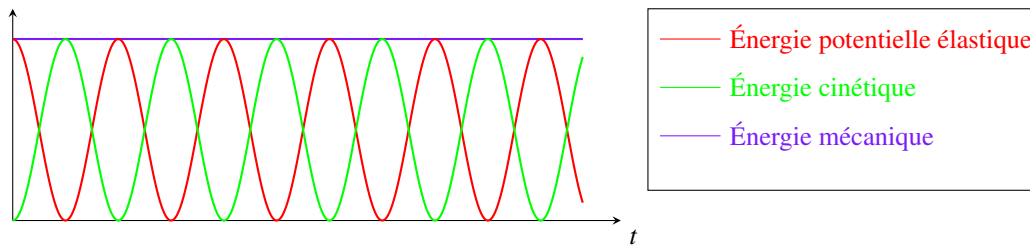


FIGURE 1.6 – Aspect énergétique de l'oscillateur élastique harmonique

Définition 1.1.7 — Énergie potentielle élastique.

.....

.....

.....

.....

.....

Ainsi, l'oscillateur étudié est le siège d'un échange d'énergie : de l'énergie cinétique et convertie en énergie potentielle élastique et vice-versa, de sorte que la somme des deux se conserve, comme présenté sur la figure 1.6.

Observations expérimentales et limites du modèle

On réalise en laboratoire un oscillateur élastique horizontal tel qu'étudié dans cette partie. On relève à l'aide d'un dispositif électronique l'évolution de l'amplitude $x(t)$ des oscillations au cours du temps. On présente le résultat sur la figure 1.7.

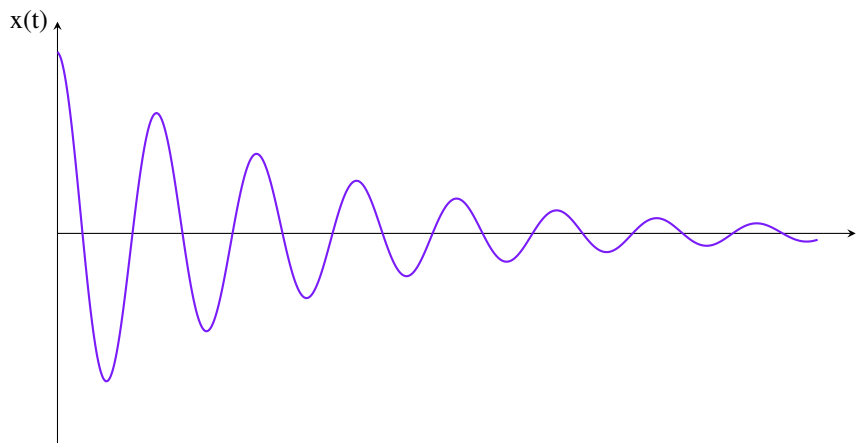


FIGURE 1.7 – Évolution de l'amplitude des oscillations dans le cas réel

On observe cette fois une diminution progressive de l'amplitude des oscillations, jusqu'à arrêt complet du mobile, qui n'est pas prévue dans le modèle développé jusqu'à présent. Ceci vient du fait que nous avons négligé un phénomène physique particulièrement important : les *frottements*, dont nous allons parler dans la partie suivante.

1.2 Oscillateur mécanique élastique amorti**1.2.1 Modélisation mathématiques des frottements visqueux**

Lorsqu'on se déplace à vélo, on peut sentir que l'action de l'air sur notre corps tend à ralentir notre mouvement. Cette action du fluide dans lequel l'objet mobile est immergé est appelée *force de frottements*. Ainsi, tout corps mobile immergé dans un fluide subit une force qui tend à s'opposer à son mouvement

en diminuant sa vitesse. Comme nous le verrons plus en détail dans les chapitres à venir, ces forces de frottements présentent une grande importance physique et interviennent dans de nombreux phénomènes pratiques.

Afin de pouvoir décrire mathématiquement l'action des forces de frottements, il faut développer un modèle mathématique, comme nous l'avons fait pour la loi de Hooke. Nous nous appuierons pour cela sur deux constatations expérimentales :

- les frottements tendent à *s'opposer* au mouvement, leur sens sera donc *opposé* à celui de la vitesse ;
- plus le mobile se déplace vite, plus l'intensité des forces de frottements est importante. On pourra donc supposer que la norme des forces de frottements, est proportionnelle à la norme de la vitesse du mobile. On parle alors de *force de frottements de type Stokes*.

Définition 1.2.1 — Force de frottements visqueux de type Stokes.

R Gardons bien à l'esprit que la force de frottement visqueux de type Stokes est une modélisation, et qu'elle n'est par conséquent valable que dans un certain domaine. Il ne s'agit pas d'une interaction fondamentale de la physique. Parfois, lorsque les vitesses considérées deviennent trop importantes, les forces de frottements deviennent proportionnelles au carré de la vitesse et on parle alors de *frottements de type Venturi*.

1.2.2 Mise en équation

Reprenons l'exemple de l'oscillateur élastique horizontal et cherchons à le mettre en équation en prenant cette fois en compte les forces de frottements. On supposera les vitesses mises en jeu suffisamment faible pour considérer comme pertinent le modèle de Stokes. Comme dans tout problème de mécanique, on applique les mêmes étapes. Les conventions d'orientation choisies sont les mêmes qu'en première partie. On choisit l'origine O du repère à la position d'équilibre du ressort, de sorte que $x = l - l_0$. On désignera par \vec{v} la vitesse du mobile dans le référentiel d'étude.

L'origine du repère a été choisie à la position d'équilibre du ressort, de sorte que $l - l_0 = x$. De plus, le mouvement s'effectuant suivant l'axe horizontal Ox , la vitesse peut s'écrire $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$.⁶ L'équation du mouvement peut alors se mettre sous la forme :

$$m\ddot{x}\vec{u}_x = -mg\vec{u}_y + R\vec{u}_y - kx\vec{u}_x - \alpha\dot{x}\vec{u}_x. \quad (1.7)$$

On projette cette équation sur \vec{u}_x , il vient alors :

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.8)$$

On reconnaît une équation différentielle du second ordre sans second membre, très fortement similaire à celle que nous avons obtenu dans le cadre de l'étude du circuit RLC série. Il paraît dès lors logique de mettre l'équation sous la forme canonique suivante.

Définition 1.2.2 — Forme canonique de l'équation d'évolution d'un oscillateur amorti.

On identifie immédiatement les expressions de ω_0 et ξ dans le cas de l'oscillateur élastique étudié, il vient :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m}. \quad (1.9)$$

On en déduit l'expression détaillée de ξ en fonction des données du problème :

De la même manière qu'en électrocinétique, on préfère souvent, plutôt que le taux d'amortissement ξ , utiliser le facteur de qualité Q dont la définition est rappelée ci-dessous.

Définition 1.2.3 — Facteur de qualité.

L'équation caractéristique de l'oscillateur harmonique peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.10)$$

Dans le cas que nous étudions ici, nous pouvons écrire l'expression de Q en fonction de α , k et m :

Il ne reste alors plus qu'à résoudre l'équation canonique précédente afin d'observer si les résultats obtenus sont conformes aux données expérimentales.

6. On note bien que la vitesse peut être aussi bien suivant $+\vec{u}_x$ que $-\vec{u}_x$ suivant le signe de \dot{x} .

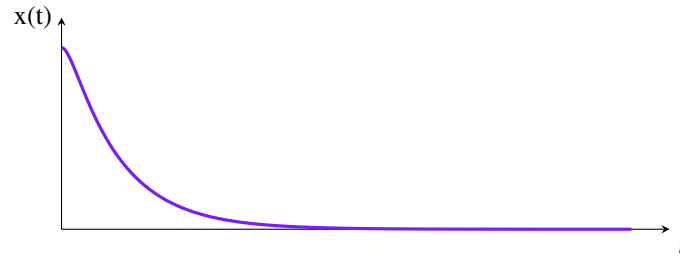


FIGURE 1.9 – Solution en régime apériodique

On représente l'allure de ce résultat sur la figure 1.9.

On observe que les oscillations ont cette fois-ci disparu, le mobile revient directement à sa position d'équilibre sans la dépasser. C'est ce qui se passe si on place le mobile dans un liquide de forte viscosité, les frottements sont tellement importants que le mouvement cesse avant qu'on ait pu dépasser la position d'équilibre.

R On peut, comme précédemment, définir un temps caractéristique τ permettant de caractériser la durée du régime transitoire. On a, dans l'expression de $x(t)$ deux termes exponentiels, le premier étant $\exp((\omega - \xi\omega_0)t)$ et le second $\exp(-(\omega + \xi\omega_0)t)$. Les deux termes correspondent à des exponentielles décroissantes, mais la seconde correspond à un amortissement plus rapide. C'est pourquoi on aura cette fois $\tau = \frac{1}{\omega + \xi\omega_0}$.

R Il est parfois intéressant de se placer en régime apériodique (parfois également appelé régime *surcritique*), lorsque l'on ne souhaite pas observer d'oscillations du système. C'est par exemple le cas dans les systèmes d'amortissement des voitures, afin d'éviter un mouvement de balancement inconfortable de l'habitacle.

Régime critique ($\Delta = 0$)

Le dernier cas à traiter reste celui du régime critique, qui correspond au cas particulier $\Delta = 0$, soit $\xi = 1$ ou encore $Q = \frac{1}{2}$. Le polynôme caractéristique $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ admet alors une racine double :

$$r = -\xi\omega_0 = -\omega_0. \quad (1.19)$$

La solution $x(t)$ se met sous la forme :

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\omega_0 t), \quad (1.20)$$

où les constantes C_1 et C_2 sont une nouvelle fois déterminées par les conditions initiales. Une nouvelle fois, nous ne détaillerons pas le calcul de celles-ci. Nous nous contenterons de donner le résultat pour un mobile lâché sans vitesse initiale à la position $x(0) = x_m$:

$$x(t) = x_m (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t). \quad (1.21)$$

Représentons graphiquement l'allure de la solution (figure 1.10). On observe que cette courbe ressemble à s'y méprendre à celle obtenue pour le régime apériodique. Une nouvelle fois, les oscillations sont absentes et le système revient directement à sa position d'équilibre.

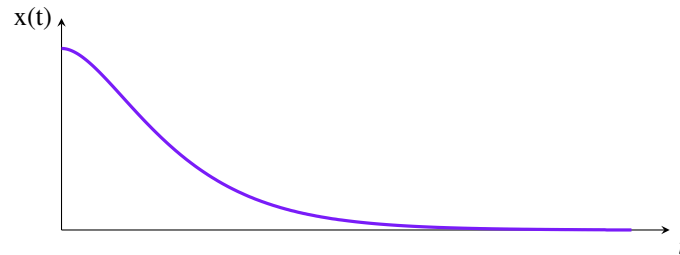


FIGURE 1.10 – Solution en régime critique

R Notons qu'il est impossible expérimentalement d'attendre précisément le régime critique, on se trouve toujours légèrement en régime sur-critique ou sous-critique, l'intérêt de l'étude est donc ici purement théorique.

1.2.4 Portraits de phase

Cherchons, dans chacun des cas abordés précédemment, à tracer le portrait de phase du système, en commençant par le régime pseudo-périodique.

Régime pseudo-périodique

Dans le cas du régime pseudo-périodique, nous allons observer des oscillations du système, le portrait de phase va donc présenter des similitudes avec celui de l'oscillateur harmonique. Cependant, contrairement à ce dernier cas, l'amplitude des oscillations va progressivement diminuer au fil du temps. Lors du tracé du portrait de phase présentant $\frac{\dot{x}}{\omega_0}$ en fonction de x on observera donc des cercles ne se refermant pas et dont le rayon diminue au cours du temps : le portrait de phase sera une spirale se terminant à l'origine du repère, comme présenté en figure 1.11.

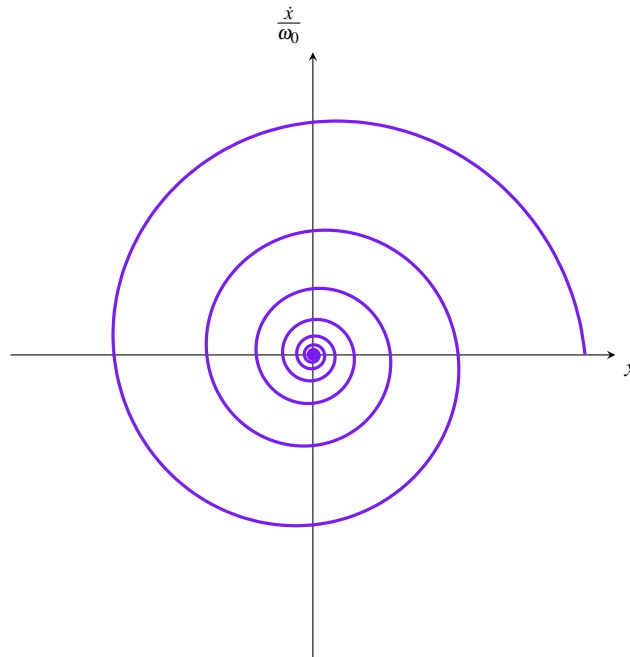


FIGURE 1.11 – Portrait de phase en régime pseudopériodique

Régime apériodique

Dans le cas considéré en régime apériodique, l'amplitude de $x(t)$ reste toujours positive et la vitesse toujours négative (car nous sommes parti avec $x(0) > 0$). La vitesse initialement nulle, va augmenter pour atteindre un maximum, puis diminuer jusqu'à s'annuler de nouveau. L'amplitude, elle, va diminuer continuellement jusqu'à la position d'équilibre. L'allure d'un tel graphique est présentée en figure 1.12.

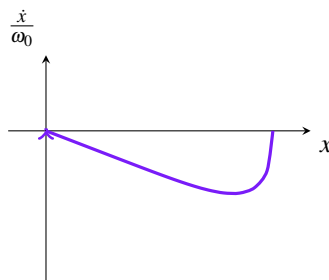


FIGURE 1.12 – Portrait de phase en régime apériodique

Oscillateur élastique amorti	Circuit RLC série
α	R
m	L
k	$\frac{1}{C}$
v	i
x	q (charge stockée sur l'armature positive du condensateur)
\mathcal{E}_c	$\mathcal{E}_{\text{bobine}}$
\mathcal{E}_p	$\mathcal{E}_{\text{condensateur}}$

TABLE 1.1 – Analogies électromécaniques

- Vous verrez plus tard dans le cours d'électromagnétisme que l'inductance L caractérise la capacité d'un dipôle à s'opposer à une variation du courant qui le traverse. La masse inerte m , quant à elle, caractérise la capacité d'un corps à s'opposer à une variation de vitesse. Il est donc normal de faire correspondre la vitesse de la masselotte v avec l'intensité du courant i .
- L'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ devient donc l'équivalent de $\frac{1}{2}Li^2 = \mathcal{E}_{\text{bobine}}$.
- On sait que $x = \int v dt$, x est donc équivalent à $\int i dt = q$, car, on rappelle, $i = \frac{dq}{dt}$. Le déplacement x est équivalent à la charge q stockée sur l'armature positive du condensateur.
- On a ensuite $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2$ qui est équivalent à $\frac{1}{2C}q^2 = \frac{1}{2C}(Cu_c)^2 = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \mathcal{E}_{\text{condensateur}}$. L'énergie potentielle élastique est donc équivalente à l'énergie stockée dans le condensateur.

1.3 Oscillateur mécanique élastique en régime forcé

Nous venons de mettre en évidence un lien étroit entre le circuit RLC série et l'oscillateur élastique amorti. Or, lors de l'étude électrocinétique, nous avons pu mettre en évidence un phénomène de résonance pour le RLC série en régime sinusoïdal forcé. Il paraît donc légitime de supposer qu'un phénomène analogue doit être observable dans le cas de l'oscillateur élastique, donnant lieu à un phénomène de *résonance* mécanique.

1.3.1 Présentation du dispositif

Le système étudié est quasiment le même que dans la partie précédente. Il est constitué d'une masselotte de masse m , assimilée à un point matériel M , liée à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité A du ressort est astreinte à se déplacer grâce à un dispositif externe, de telle sorte que $x_A(t) = A_m \cos(\omega t)$. On prend un compte des frottements visqueux de type Stokes, et on note α le coefficient correspondant. On note $x(t)$ la position du point M de sorte que x soit nul lorsque le ressort est à l'équilibre. La longueur $l(t)$ du ressort est alors donnée par :

$$l(t) = x(t) + l_0 - x_A(t) . \quad (1.26)$$

On représente en figure 1.13 le dispositif utilisé.

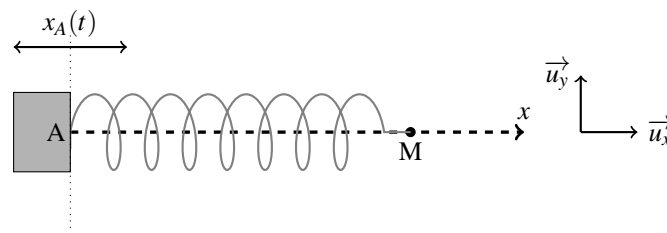


FIGURE 1.13 – Étude d'un oscillateur élastique horizontal en régime sinusoïdal forcé

1.3.2 Mise en équation

La mise en équation du problème se fait de manière tout à fait similaire à précédemment. La seule différence est que la longueur du ressort est maintenant donnée par $x(t) + l_0 - x_A(t)$, d'où, par application de la loi fondamentale de la dynamique :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.3.3 Méthode de résolution

La solution de cette équation sera la somme de deux termes :

- le premier correspond à la solution générale homogène en régime libre $x_h(t)$, c'est à dire à la solution de l'équation sans second membre :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (1.27)$$

- la deuxième terme x_p correspondra à la solution particulière, de la forme du second membre, il s'agira donc d'un cosinus oscillant à la pulsation ω qui, rappelons le, est fixée par l'utilisateur⁷.

La solution homogène présentera dans son expression, comme nous l'avons vu précédemment, un terme exponentiel décroissant (quel que soit le régime considéré), de sorte qu'elle s'amortira au cours du temps. Ainsi, si l'on attend suffisamment longtemps (une durée grande devant le temps caractéristique du régime transitoire), on pourra considérer qu'on a $x_p \gg x_h$ et la résolution de l'équation se limite à la recherche de la solution particulière.

Nous avons vu, dans la partie électrocinétique que la méthode la plus simple pour trouver cette solution particulière est de passer par la méthode complexe. La solution recherchée sera de la forme $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$, on lui associe alors la grandeur complexe \underline{x} donnée par :

$$\underline{x} = x_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{x}_m e^{j\omega t} , \quad (1.28)$$

où $\underline{x}_m = x_m e^{j\varphi}$ est appelée amplitude complexe. On remarque alors deux choses :

- L'amplitude x_m de $x(t)$ est donnée par le module de \underline{x}_m , soit :

$$x_m = |\underline{x}_m| . \quad (1.29)$$

- la phase à l'origine φ de $x(t)$ est donnée par l'argument de \underline{x}_m :

$$\varphi = \arg(\underline{x}_m) . \quad (1.30)$$

De la même manière, on associe à $x_A(t)$ une grandeur complexe \underline{x}_A , $x_A(t)$ ayant été choisi comme origine des phases⁸, on aura simplement :

$$\underline{x}_A = A_m e^{j\omega t} . \quad (1.31)$$

On peut ensuite écrire l'équation caractéristique dans le corps des complexes afin de trouver la solution particulière.

1.3.4 Résonance mécanique

Lors de l'étude du circuit RLC série, nous avons distingué deux types de résonance : la résonance en tension et la résonance en intensité. De la même manière, nous ferons ici la différence entre *résonance en élongation* et *résonance en vitesse*.

7. À ne pas confondre avec la pulsation propre du système !

8. On a posé sa phase à l'origine comme nulle.

Résonance en élongation

Écrivons l'équation caractéristique dans le corps de complexes. Pour cela, on remplace dans l'équation réelle $x(t)$ par \underline{x} , \dot{x} par $j\omega\underline{x}$ et \ddot{x} par $-\omega^2\underline{x}$. Les exponentielle $\exp(j\omega t)$ vont alors se simplifier, de sorte que ne vont subsister que les amplitudes complexes :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dans la partie électrocinétique, nous avons noté x la pulsation réduite, pour des raisons évidentes, nous n'utilisons pas cette notation ici, on confondrait en effet celle-ci avec l'élongation du ressort (également notée x).

.....

.....

.....

Étude du module de \underline{x}_m

Le module de \underline{x}_m , qui correspond à l'amplitude de $x(t)$ est donné par :

.....

.....

.....

Nous avons déjà mené l'étude d'une telle fonction dans la partie précédente⁹. Nous savons que :

- si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, cette fonction admet un maximum pour $w_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$;
- si $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, elle n'admet pas de maximum.

On représente l'allure de l'amplitude de $x(t)$ en fonction de w sur la figure 1.14.

On observe bien, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, un phénomène de *résonance*, puisque la réponse du système devient particulièrement importante pour une pulsation d'excitation donnée. On remarque que la pulsation de résonance n'est pas égale à la pulsation propre du système, et qu'elle dépend du facteur de qualité Q , elle s'en rapproche cependant pour un facteur de qualité élevé ($Q \gg 1$). Plus le facteur de qualité est élevé, plus la résonance est aiguë.



Cette résonance en élongation est bien entendu à mettre en relation avec la résonance en tension du RLC série (même si elle est plus rigoureusement analogue à une résonance en charge). Nous aurions d'ailleurs pu directement trouver l'amplitude de $x(t)$ à partir des résultats du RLC série, en exploitant l'analogie électromécanique.

9. On peut se référer au cours d'électrocinétique

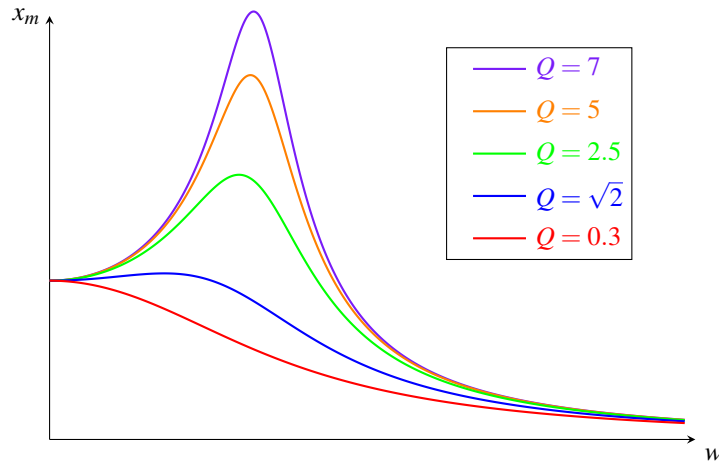


FIGURE 1.14 – Amplitude de l'élongation en fonction de la pulsation réduite

Étude de l'argument

L'étude ne serait pas complète si nous ne menions pas l'étude de l'argument de x_m qui va nous donner l'avance de phase de $x(t)$ par rapport à $x_A(t)$. On utilise pour le calculer les mêmes méthodes qu'en électrocinétique. On obtient :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

On représente l'allure de cet argument en figure 1.15.

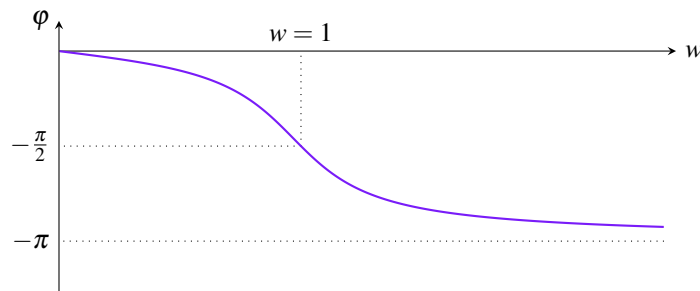


FIGURE 1.15 – Phase à l'origine de l'élongation en fonction de la pulsation réduite

On observe que l'amplitude varie entre 0 et $-\pi$ et vaut $-\frac{\pi}{2}$ pour $w = 1$, ce que nous confirmerait une étude aux limites.

Résonance en vitesse

L'autre type de résonance que nous pouvons rencontrer est celui de la *résonance en vitesse*. La vitesse est liée à l'élongation $x(t)$ par la relation :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} . \quad (1.32)$$

Notons v_m l'amplitude complexe associée à la vitesse. Nous savons qu'une dérivation dans l'espace des réels se traduit en représentation complexe par une multiplication par $j\omega$, on en déduit donc directement l'expression de l'amplitude complexe de la vitesse :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

R On reconnaît ici une formule similaire à celle obtenue pour la résonance en intensité du circuit RLC série.

On peut dès lors calculer l'amplitude et la phase à l'origine de la vitesse $v(t)$. On obtient tout d'abord, pour l'amplitude :

.....

.....

.....

Traçons l'allure de l'amplitude pour différentes valeurs de Q . Le résultat est présenté en figure 1.16.

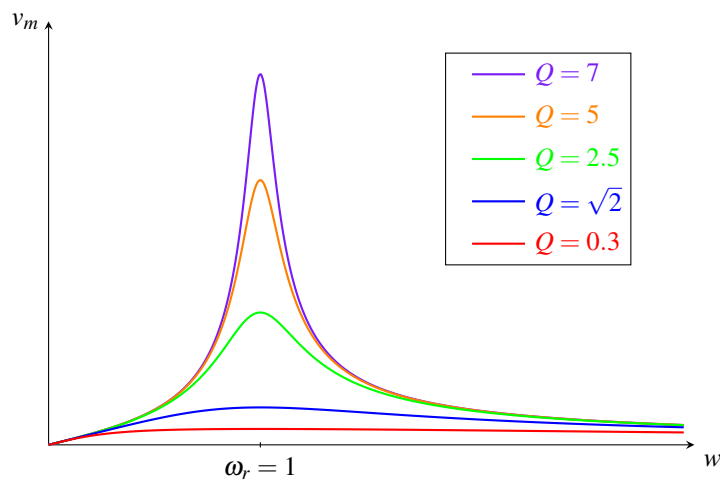


FIGURE 1.16 – Amplitude de la vitesse en régime forcé

On observe que cette fois-ci, il y a résonance quelle que soit la valeur de Q , on est dans un cas en tous points similaire à celui de la résonance en intensité du RLC série. La résonance a cette fois lieu à la pulsation propre du circuit, soit $w_r = 1$, ou encore $\omega = \omega_0$. De même que précédemment, plus le facteur de qualité Q est grand, plus le pic de résonance est marqué, la résonance est *aiguë*.

Présentons maintenant le calcul de la phase à l'origine ϕ_v de la vitesse, elle est donnée par :

.....

.....

.....

.....

On représente l'allure de l'argument en figure 1.17.

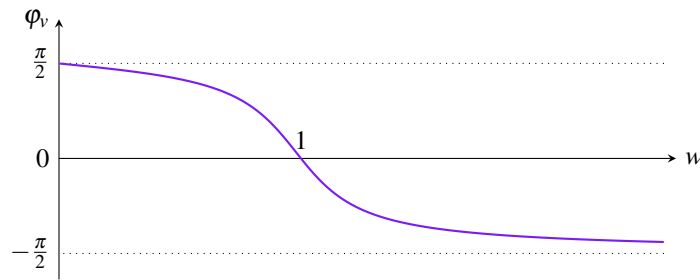


FIGURE 1.17 – Phase à l'origine de la vitesse en régime forcé

La phase à l'origine de la vitesse varie cette fois de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$. Elle est nulle à la résonance, la vitesse est donc en phase avec l'excitation à la résonance.

Conclusion

Nous avons pu dans ce chapitre nous intéresser à un exemple particulier de système mécanique : celui de l'oscillateur élastique. Ceci nous a permis de mettre en évidence la généralité de l'équation d'évolution de l'oscillateur harmonique que nous retrouvons dans divers domaines de la physique, comme nous l'avons vu en électrocinétique et en mécanique. La prise en compte de frottements fluides de type Stokes a mis en évidence une analogie forte entre le circuit RLC série et l'oscillateur élastique, les deux systèmes étant décrits par la même équation : celle d'un oscillateur amorti en régime libre. Comme nous pouvions nous y attendre, nous retrouvons en mécanique le phénomène de résonance, qui présente d'importantes applications pratiques, notamment en génie civil (on peut penser à l'effondrement du pont Tacoma). Enfin, ce chapitre a été pour nous une introduction aux principes fondamentaux de la mécanique du point, que nous allons approfondir dans les leçons à venir, en commençant par étudier la *cinématique du point*.