第二章　整数规划

§1　整数规划问题的数学模型

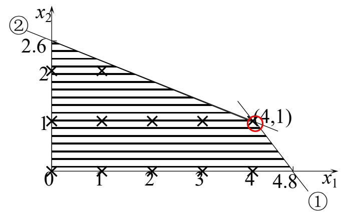
例：用集装箱托运货物，问：甲乙货物托运多少箱，使总利润最大？

货物	m^3/箱	百斤/箱	百元/箱
甲	5	2	20
乙	4	5	10
限制	24	13	

$$\max z = 20x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{ 取整数} \end{cases}$$

图解法：



$x_1^* = 4 \quad x_2^* = 1 \quad z^* = 90$

例：选址问题的决策表(单位：百万元)

序号	是或否	净收益	资本需求
1	工厂在甲地	9	6
2	工厂在已地	5	3
3	仓库在甲地	6	5
4	仓库在已地	4	2

至少建一个新工厂，至多建一个仓库，且仓库位置随工厂地点而定，总资本量为10。

两个0–1决策变量 x_1, x_2 之间的逻辑关系（1为发生）：

“或”关系：　x_1或x_2　等价于　$x_1 + x_2 \ge 0$

“与”关系：　x_1与x_2　等价于　$x_1 = 1,\ x_2 = 1$

“非”关系：　非x_1　等价于　$x_1 = 0$

“蕴含”关系：　$x_1 \to x_2$　等价于　$x_1 - x_2 \le 0$

“当且仅当”关系：

$x_1 \leftrightarrow x_2$　等价于　$x_1 - x_2 = 0$

整数规划的最优解不会优于相应线性规划的最优解。

数学模型：$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

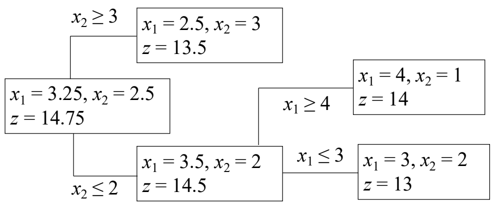
$$s.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i & i = 1, \cdots, m \\ x_j \ge 0 & j = 1, \cdots, n \\ x_j \text{取整数} \end{cases}$$

§2　分支定界法

设有最大化的整数规划问题 A，与它相应的伴随规划问题为 B，求解问题 B，若 B的最优解不符合 A 的整数条件，则 B 的最优值一定为A最优值 Z* 的上界，而 A 的任意可行解的目标函数值将是 Z* 的下界，分支定界法就是将 B 的可行域分成子区域（称为分支方法）的方法，通过减小最优值的上界和下界最终得到最优值。

例： $\max z = 3x_1 + 2x_2$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \le 4.5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \text{且均为整数} \end{cases}$$



求解步骤：

将要求解的整数规划问题称为问题 A，将其伴随规划问题称为问题 B，若

(1) B 没有可行解，这时 A 也没有可行解，停止;

(2) B有最优解，并符合问题 A的整数条件，B的最优解即为 A 的最优解;

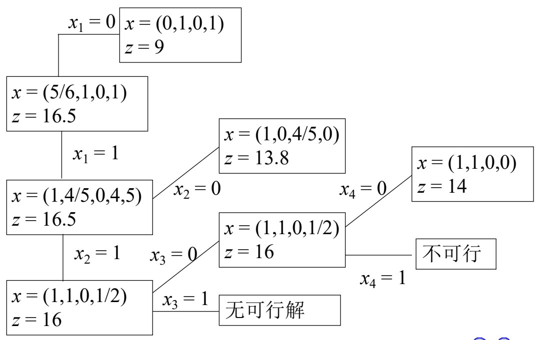
(3) B有最优解，但不符合 A的整数条件，记它目标函数值为最优值上界，观察一个下界值。

第一步：分枝，在 B 中选择一个不符合整数条件的变量 x_j，构造两个约束条件。将此两个约束条件加入 B，在不考虑整数条件的情况下，求解两个后继问题 B_1和B_2。

第二步：定界，以每个后继问题为一分枝标明求解结果，与其他问题解的结果中，找出目标函数最大者作为新的上界，从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值最大者作为新的下界，若无，下界不变。

第三步：比较与剪枝，各分枝的最优目标函数中若有小于下界者，则剪掉这枝，此后无需再考虑。若大于下界，且不符合整数条件，则重复第一步，直至找到最优解为止。

例：用分支定界法求解选址问题。



§3 割平面法

用割平面法求解整数规划的基本思路是：先不考虑整数约束条件，求松弛问题的最优解，如果获得整数最优解，即为所求，运算停止。如果所得到最优解不满足整数约束条件，则在此非整数解的基础上增加新的约束条件重新求解。

例：用割平面法求解

$\max\ z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \\ x_1,\ x_2\ \text{是整数} \end{cases}$$

$\max\ z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$x^* = (\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, 0, 0)^T$$

			1	1	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
1	x_2	7/4	0	1	3/4	1/4	
1	x_1	3/4	1	0	–1/4	1/4	
	$-z$	–5/2	0	0	–1/2	–1/2	

§4　0－1 整数规划

1. 特殊约束的处理：

(1) m 个约束只有 k 个起作用

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad (i=1,\cdots,m)$$

定义　$y_i=\begin{cases}1, & 第i个约束不起作用\\ 0, & 第i个约束起作用\end{cases}$

M 为任意大的正数, 则

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + My_i \quad (i=1,\cdots,m)\\ y_1+y_2+\cdots+y_m=m-k\end{cases}$$

(2) 右端项可能是 N 个的某一个

$$f(x_1,\ldots,x_n)\le b_1, 或\ b_2, \ldots, b_N$$

定义　$y_i=\begin{cases}1, & 右端项为b_i\\ 0, & 否则\end{cases}$

则　$\begin{cases}f(x_1,\cdots,x_n)\le \sum_{i=1}^{N} b_i y_i\\ y_1+y_2+\cdots+y_N=1\end{cases}$

(3) 含固定生产费用

生产费用函数通常为　$C_j(x_j)=\begin{cases}k_j+c_jx_j, & x_j>0\\ 0, & x_j=0\end{cases}$

目标函数为　$\min z=\sum_{j=1}^{n} C_j(x_j)$

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}(c_jx_j+k_jy_j)$$

$$s.t\begin{cases}其它原始限制条件\\ x_j-My_j\le 0\\ x_j\ge 0, y_j=0或1\end{cases}$$

2. 隐枚举法：

例：求解如下0-1规划

$$\max z=3x_1-2x_2+5x_3$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3\le 2 & ①\\ x_1+4x_2+x_3\le 4 & ②\\ x_1+x_2\le 3 & ③\\ 4x_2+x_3\le 6 & ④\\ x_1,x_2,x_3=0 或 1\end{cases}$$

解：(1) 观察一个可行解

$x_1=1, x_2=x_3=0$，此时 $z=3.$

(2) 增加一个过滤条件　$3x_1-2x_2+5x_3\ge 3$　*

(3) 列表计算

x_1	x_2	x_3	*	①	②	③	④	可行	z
0	0	0	0					×	
0	0	1	5	−1	1	0	1	√	5
0	1	0	−2					×	
0	1	1	3					×	
1	0	0	3					×	
1	0	1	8	0	2	1	1	√	8
1	1	0	1					×	
1	1	1	6	2	6			×	

最优解：$x_1^*=1$　$x_2^*=0$　$x_3^*=1$　此时，$z^*=8$

§5　指派问题

指派问题是整数规划的一类重要问题。也是在实际生活中经常遇到的一种问题：由 n 项不同的工作或任务，需要 n 个人去完成（每人只能完成一项工作）。由于每人的知识、能力、经验等不同，故各人完成不同任务所需的时间（或其它资源）不同。问应只排哪个人完成何项工作所消耗的总资源最少？

一、指派问题的数学模型

引进 0–1 变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & 表示按排第\ i\ 个人完成第\ j\ 项工作\\ 0 & 表示不安排第\ i\ 个人完成第\ j\ 项工作\end{cases}$$

则决策变量矩阵可表示为：

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

用 c_{ij} 表示第 i 个人完成第 j 项工作所需的资源数，称之为效率系数（或价值系数），表示为

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

则指派问题的数学模型为

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & i=1,2,\cdots n \\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 & j=1,2,\cdots n \\ x_{ij}=0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

注：指派问题是一种特殊的LP问题，是一种特殊的运输问题。

下用目前认为最简洁的方法—匈牙利法求解。

例1：某商业公司计划开办五家新商店。为了尽早建成营业，商业公司决定由5家建筑公司分别承建。已知建筑公司 $A_i\,(i=1,\ldots,5)$ 对新商店 $B_j\,(j=1,\ldots,5)$ 的建造报价（万元）为 $c_{ij}\,(i,j=1,\ldots,5)$ 。商业公司应当对5家建筑公司怎样分配建筑任务，才能使总的建筑费用最少？

$$C=\begin{array}{c}\\ A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5\end{array}\\ \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{pmatrix}\end{array}$$

这是一个标准的指派问题。若设 0–1 变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } A_i \text{ 承建 } B_j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } A_i \text{ 不承建 } B_j \text{ 时}\end{cases}$$

则问题的数学模型为

$$\min z=4x_{11}+8x_{12}+\cdots+10x_{54}+6x_{55}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{5}x_{ij}=1 & i=1,2,\cdots 5 \\ \sum_{i=1}^{5}x_{ij}=1 & j=1,2,\cdots 5 \\ x_{ij}=0\text{或}1 \end{cases}$$

$$C=\begin{array}{c}\\ A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5\end{array}\\ \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 7 \\ 6 & 9 & 12 & 6 & 10 \\ 6 & 7 & 14 & 8 & 10 \\ 6 & 9 & 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$X^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{array}{c}\\ A_1\\A_2\\A_3\\A_4\\A_5\\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5\end{array}\\ \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 7 \\ 6 & 9 & 12 & 6 & 10 \\ 6 & 7 & 14 & 8 & 10 \\ 6 & 9 & 6 & 10 & 8 \end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -4 & -7 & -6 & -6 & -7 \end{array}\end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 11 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而导出匈牙利解法的思想：

二、匈牙利解法

匈牙利法是1955年由库恩 (W.W.Kuhn) 根据匈牙利数学家狄·考尼格 (d.konig) 关于矩阵中独立零元素的定理发明的。

匈牙利法的基本原理：

定理1 将效率矩阵的某一行（或某一列）的各个元素都减去同一个常数t (t可正可负)，得到新的矩阵，则以新矩阵为效率矩阵的指派问题与原指派问题的最优解相同。但其最优值比原最优值减少 t 。

解：设效率矩阵 C 为

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad C'=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1}-t & c_{k2}-t & \cdots & c_{kn}-t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

记新指派问题的目标函数为z'，则有

$$z'=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n}c'_{ij}x_{ij}+\sum_{j=1}^{n}c'_{kj}x_{kj}$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{j=1}^{n}(c_{kj}-t)x_{kj}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_{kj}-t\sum_{j=1}^{n}x_{kj}$$

注意到 $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1$

所以原式 $=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}-t=z-t$

因此有 $\min z'=\min(z-t)=\min z-t$

推论：若将指派问题的效率矩阵每一行及每一列分别减去各行各列的最小元素，则得到的新的指派问题与原指派问题有相同的最优解。

注：当 x_{ij}=1 时，从第i行看，它表示第 i人去干第 j 项工作效率(相对)最好，而从第 j 列来看，它表示第 j 项工作让第 i人来干效率（相对）最高。

问题是：能否找到位于不同行、不同列的 n 个 0 元素？

定义 在效率矩阵 C 中，有一组处于不同行、不同列的零元素，称为独立零元素组，此时其中每个元素称为独立零元素。

例 已知 $C=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

则 $\{c_{12}=0, c_{24}=0, c_{31}=0, c_{43}=0\}$是一个独立零元素组.

$c_{12}=0, c_{24}=0, c_{31}=0, c_{43}=0$ 分别称为独立零元素。

$C=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 也是一个独立零元素组。

$C=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不是一个独立零元素组。

但有的效率矩阵独立零元素的个数不到 n, 很难找到最优指派方案。

已知效率矩阵

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

怎么办？

定理 效率矩阵 C 中独立零元素的最多个数等于能覆盖所有零元素的最少直线数。

本定理由匈牙利数学家狄·考尼格证明的。证明的内容已超出所需学的范围。

下面通过例子说明上述定理的内容

例 已知矩阵

$$C=\begin{pmatrix}5&0&2&0\\2&3&0&0\\0&5&6&7\\4&8&0&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}5&0&2&0\\2&3&0&7\\0&5&6&0\\4&8&0&3\end{pmatrix}$$

至于如何找覆盖零元素的最少直线，通过例子来说明。

例2 现有一个4×4的指派问题，其效率矩阵为：

$$C=\begin{pmatrix}2&15&13&4\\10&4&14&15\\9&14&16&13\\7&8&11&9\end{pmatrix}$$

求解该指派问题。

步骤1：变换系数矩阵，使得每行及每列至少产生一个零元素。

$$C=\begin{pmatrix}2&15&13&4\\10&4&14&15\\9&14&16&13\\7&8&11&9\end{pmatrix}\begin{matrix}\to -2\\\to -4\\\to -9\\\to -7\end{matrix}\to\begin{pmatrix}0&13&11&2\\6&0&10&11\\0&5&7&4\\0&1&4&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}&&\downarrow&\downarrow\\&&-4&-2\end{matrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}\cancel{0}&13&7&0\\6&0&6&9\\0&5&3&2\\\cancel{0}&1&0&\cancel{0}\end{pmatrix}=C_1\qquad x_{14}=1,x_{22}=1,x_{31}=1,x_{43}=1$$

其余全为0。

步骤2：用圈 0 法确定 C_1中的独立0元素。若独立零元素个数有 n 个，则已得最优解。若独立零元素的个数 $<n$，则转入步骤3。

在只有一个0元素的行（或列）加圈，表示此人只能做该事（或此事只能由该人来做），每圈一个“0”，同时把位于同列（或同行）的其他零元素划去。表示此时已不能再由他人来做（或此人已不能做其它事）。如此反复，直到矩阵中所有零元素都被圈去或划去为至。

在遇到所有行和列中，零元素都不止一个时，可任选其中一个加圈，然后划去同行、同列其他未被标记的零元素。

例

$$C=\begin{pmatrix}5&0&2&\cancel{0}\\2&3&0&\cancel{0}\\0&\cancel{0}&6&7\\\cancel{0}&8&\cancel{0}&0\end{pmatrix}$$

步骤3： 若矩阵已不存在未被标记的零元素，但圈零的个数 $m<n$，作最少直线覆盖当前零元素。

已知例1中的系数矩阵为

1. 变换系数矩阵

$$C=\begin{pmatrix}4&8&7&15&12\\7&9&17&14&7\\6&9&12&6&10\\6&7&14&8&10\\6&9&6&10&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\to -4\\\to -7\\\to -6\\\to -6\\\to -6\end{matrix}\to\begin{pmatrix}0&4&3&11&8\\0&2&10&7&3\\0&3&6&2&1\\0&1&8&0&4\\0&3&6&4&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}&\downarrow&\downarrow&&\\&-1&-3&&\end{matrix}$$

$$\to C_1=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\checkmark&&&&\end{array}\\\begin{pmatrix}\cancel{0}&3&0&11&8\\0&1&7&7&3\\\cancel{0}&2&3&2&1\\\cancel{0}&0&5&\cancel{0}&4\\\cancel{0}&2&3&4&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix}\\\\\checkmark\\\checkmark\\\\\\\end{matrix}$$

2. 确定独立零元素． 由于独立零元素个数$4<5$.

3. 作最少直线覆盖当前所有零元素。

(1) 对没有圈0的行打“✓ ”。

(2) 在已打“✓ ”的行中，对零元素所在的列打✓ ”。

(3) 在已打“✓ ”的列中，对圈0元素所在的行打✓ ”。

$$\rightarrow C_1=\begin{array}{c}\checkmark\\ \begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 11 & 8\\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ \checkmark\\ \checkmark\\ \\ \\ \end{array}\quad \rightarrow C_2=\begin{array}{c}\checkmark\\ \begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 11 & 8\\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ \checkmark\\ \checkmark\\ \\ \\ \end{array}$$

(4) 重复(2)和(3)，直到再也找不到可以打“✓”的行或列为止。

(5) 对没有打“✓”的行画一横线，对已打“✓”的列画一纵线，即得覆盖当前0元素的最少直线数目的集合。

$$\rightarrow C_1=\begin{array}{c}\checkmark\\ \begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 11 & 8\\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ \checkmark\\ \checkmark\\ \\ \\ \end{array}\quad \rightarrow C_2=\begin{array}{c}\checkmark\\ \begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 11 & 8\\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\ \\ \checkmark\\ \checkmark\\ \\ \\ \end{array}$$

4. 继续变换系数矩阵，以增加 0 元素。

在未被直线覆盖的元素中找出一个最小的元素。对未被直线覆盖的元素所在的行（或列）中各元素都减去这一元素。这样，在未被直线覆盖的元素中势必会出现0元素，但同时却又使已覆盖的元素中出现负元素。为了消除负元素，只要对它们所在的列（或行）中各元素都加上这一最小元素。返回(2)。

$$\rightarrow C_2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 11 & 8\\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3\\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \rightarrow -1\\ \rightarrow -1\\ \\ \\ \end{array}\rightarrow \begin{array}{c}\begin{pmatrix}0 & 3 & 0 & 11 & 8\\ -1 & 0 & 6 & 6 & 2\\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\uparrow & & & & \\ +1 & & & & \end{array}\end{array}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 11 & 8\\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}=C_3$$

C_3中已有5个独立0元素，故可确定指派问题的最优方案。

$x_{13}=1, x_{22}=1, x_{31}=1, x_{44}=1, x_{55}=1,$ 其余全为0。

也就是说，最优指派方案是：让 A_1 承建 B_3, A_2 承建 B_1 , A_4 承建 B_4，A_5 承建 B_5。这样安排能使总的建造费用最少，总的建造费用为 $7+9+6+6+6=34$（万元）。

三、非标准形式的指派问题

在实际应用中，经常遇到非标准形式的指派问题。处理方法：化标准，再按匈牙利访法求解。

1. 最大化指派问题

例3 有4种机械要分别安装在4个工地，它们在4个工地工作效率（见下表）不同。问应如何指派安排，才能使4台机械发挥总的效率最大？

工地 / 机器	甲	乙	丙	丁
I	30	25	40	32
II	32	35	30	36
III	35	40	34	27
IV	28	43	32	38

解：设最大化的指派问题系数矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$，其中最大元素为 m（本例种 $m=43$），令矩阵

$$B=(b_{ij})_{n\times n}=(m-c_{ij})_{n\times n}$$

本例中 $C=\begin{pmatrix}30 & 25 & 40 & 32\\ 32 & 35 & 30 & 36\\ 35 & 40 & 34 & 27\\ 28 & 43 & 32 & 38\end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}13 & 18 & 3 & 11\\ 11 & 8 & 13 & 7\\ 8 & 3 & 9 & 16\\ 15 & 0 & 11 & 5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\rightarrow -3\\ \rightarrow -7\\ \rightarrow -3\\ \rightarrow -0\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\begin{pmatrix}10 & 15 & 0 & 8\\ 4 & 1 & 6 & 0\\ 5 & 0 & 6 & 13\\ 15 & 0 & 11 & 5\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}\downarrow & & & \\ -4 & & & \end{array}\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{圈}0}\begin{pmatrix}6 & 15 & 0 & 8\\ 0 & 1 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 6 & 13\\ 11 & 0 & 11 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{覆盖}]{\text{打}\checkmark}$$

$$B_1=\begin{pmatrix}6 & 15 & 0 & 8\\ 0 & 1 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 6 & 13\\ 11 & 0 & 11 & 5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \checkmark \longrightarrow -1\\ \checkmark \longrightarrow -1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\uparrow\\ +1\end{matrix}$$

$$\text{圈0}\ \rightarrow\begin{pmatrix}6 & 16 & 0 & 8\\ 0 & 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 12\\ 10 & 0 & 10 & 4\end{pmatrix}=B_2$$

此时$m=n=4$,因此决策变量矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}30 & 25 & 40 & 32\\ 32 & 35 & 30 & 36\\ 35 & 40 & 34 & 27\\ 28 & 43 & 32 & 38\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

即指派机械I安装在工地丙，机械II安装在工地丁，机械III安装在工地甲，机械IV安装在工地乙，才能使4台机器发挥总的效率最大。其总效率为

$$z=40+36+35+43=154$$

2. 人数和事数不等的指派问题

若人少事多，则添上一些虚拟的“人”。这些虚拟的“人”做各事的费用系数可取0，理解为这些费用实际上不会发生。若人多事少，则添上一些虚拟的“事”。这些虚拟的“事”被各人做的费用系数同样也取0。

3. 一个人可做几件时的指派问题

若某个人可做几件时，则可将该人化作相同的几个“人”来接受指派。这几个“人”做同一件时的费用系数当然都一样。

4. 某事一定不能由某人做的指派问题

若某事一定不能由某个人做，则可将相应的费用系数取作足够大的数M.

例4 对于例1的指派问题，为了保证工程质量，经研究决定，舍弃建筑公司A_4和A_5，而让技术力量较强的建筑公司A_1、A_2和A_3来承建。根据实际情况，可以允许每家建筑公司承建一家或两家商店。求使总费用最少的指派方案。

反映投标费用的系数矩阵为

$$\begin{array}{c|ccccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5\\ \hline A_1 & 4 & 8 & 7 & 15 & 12\\ A_2 & 7 & 9 & 17 & 14 & 10\\ A_3 & 6 & 9 & 12 & 8 & 7\end{array}$$

由于每家建筑公司最多可承建两家新商店，因此，把每家建筑公司化作相同的两家建筑公司 (A_i 和 $A_i', i=1,2,3$) 这样，系数矩阵变为：

$$\begin{array}{c|ccccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5\\ \hline A_1 & 4 & 8 & 7 & 15 & 12\\ A_1' & 4 & 8 & 7 & 15 & 12\\ A_2 & 7 & 9 & 17 & 14 & 10\\ A_2' & 7 & 9 & 17 & 14 & 10\\ A_3 & 6 & 9 & 12 & 8 & 7\\ A_3' & 6 & 9 & 12 & 8 & 7\end{array}$$

上面的系数矩阵有 6 行 5 列，为了使“人”和“事”的数目相同，

引入一件虚事B_6，使之成为标准指派问题的系数矩阵：

$$C=\begin{array}{cccccc|c} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & \\ \hline 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 & A_1\\ 4 & 8 & 7 & 15 & 12 & 0 & A_1'\\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 & A_2\\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 & 0 & A_2'\\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 & A_3\\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 & 0 & A_3'\end{array}$$

再利用匈牙利法求解。

$$C=\begin{pmatrix}4&8&7&15&12&0\\4&8&7&15&12&0\\7&9&17&14&10&0\\7&9&17&14&10&0\\6&9&12&8&7&0\\6&9&12&8&7&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{圈0}\ \text{打✓}]{\text{覆盖}\ \text{列变换}}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}&&&&&✓\end{array}\\\begin{pmatrix}0&0&0&7&5&0\\0&0&0&7&5&0\\3&1&10&6&3&0\\3&1&10&6&3&0\\2&1&5&0&0&0\\2&1&5&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\\\✓\\✓\\\\\\\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{再变换}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0&7&5&0\\0&0&0&7&5&0\\3&1&10&6&3&0\\3&1&10&6&3&0\\2&1&5&0&0&0\\2&1&5&0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{array}{cccccc}&&&&&+1\end{array}\end{array}\begin{array}{l}\\\\\longrightarrow\ -1\\\longrightarrow\ -1\\\\\\\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{圈0}}\begin{pmatrix}0&0&0&7&5&1\\0&0&0&7&5&1\\2&0&9&5&2&0\\2&0&9&5&2&0\\2&1&5&0&0&1\\2&1&5&0&0&1\end{pmatrix}\qquad X=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}B_1&B_2&B_3&B_4&B_5&B_6\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\\\\end{array}\right\}A_1\\\left.\begin{array}{c}\\\\\end{array}\right\}A_2\\\left.\begin{array}{c}\\\\\end{array}\right\}A_3\end{array}$$

最优解：

A_1 承建 B_1 和 B_3，A_2 承建 B_2，A_3 承建 B_4 和 B_5。

$$C=\begin{pmatrix}4&8&7&15&12\\4&8&7&15&12\\7&9&17&14&10\\7&9&17&14&10\\6&9&12&8&7\\6&9&12&8&7\end{pmatrix}\qquad X=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}B_1&B_2&B_3&B_4&B_5&B_6\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\\\\end{array}\right\}A_1\\\left.\begin{array}{c}\\\\\end{array}\right\}A_2\\\left.\begin{array}{c}\\\\\end{array}\right\}A_3\end{array}$$

总建筑费用为:

$z=4+7+9+8+7=35$（万元）