II - Calcul matriciel

Dans la partie précédente, nous avons vu comment utiliser les matrices pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. En vérité, les matrices sont des outils bien plus puissants que ça, et qui interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques, de la physique et de la chimie. Afin de pouvoir nous en servir plus efficacement, nous allons développer dans cette partie un certain nombre d'outils et de techniques mathématiques à propos des matrices.

1- Généralités

Définition 14. Pour un corps $\mathbb{K}$, et deux entiers n et $p \geqslant 1$, on définit les **ensembles de matrices suivants** :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à n *lignes et* p *colonnes*, dites matrices $n \times p$.
- $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à 1 ligne et p colonnes, dites *matrices ligne à* p *éléments*.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne, dites *matrices colonne à* n *éléments*.
- $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, les matrices à n lignes et n colonnes, dites *matrices carrées de taille* n.

On notera

$$M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i,1} & \cdots & m_{i,j} & \cdots & m_{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes}$$

Définition 15. On donne la notation pour les matrices particulières suivantes :

- $\mathbf{0}_{n,p}$, (parfois $\tilde{\mathbf{0}}$, ou $\mathbf{0}_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, ou 0), la matrice **nulle**, l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $(a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$ tel que $\forall i \in [\![1;n]\!], \forall j \in [\![1;p]\!], a_{i,j} = 0$. On la note aussi : $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- I_n, la matrice **identité** (de taille n), l'élément de l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $(a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$ tel que $\forall i \in [\![1;n]\!], a_{i,i} = 1, \forall j \in [\![1;n]\!], i \neq j \implies a_{i,j} = 0$. On la note aussi : $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 10. La matrice nulle n'est pas forcément carrée. Par contre, la matrice identité l'est nécessairement !

Exemple 12.

- $\mathbf{0}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{0}_{21,30} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{30 \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}}\right\} 21 \text{ lignes}$
- $I_{746} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{746 \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}}\right\} 746 \text{ lignes}$

Définition 16. Soit n un entier supérieur à 1. On définit les sous-ensembles des matrices carrées suivant (on prendra, chaque fois que nécessaire, une matrice $A = (a_{i,j})$ dans cet ensemble) :

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **diagonales** : tous les termes en dehors de la diagonale sont nuls.
  Mathématiquement, on a $\forall i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!], i \neq j \implies a_{i,j} = 0$.
  On peut noter $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **triangulaires supérieures** : tous les termes en-dessous de la diagonale (exclue) sont nuls.
  Mathématiquement, on a $\forall i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!], i \geqslant j \implies a_{i,j} = 0$.
  On peut noter $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{i,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$
- $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **triangulaires inférieures** : tous les termes au-dessus de la diagonale (exclue) sont nuls.
  Mathématiquement, on a $\forall i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!], i \leqslant j \implies a_{i,j} = 0$.
  On peut noter $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,j} & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & \\ & a_{2,2} & 0 & \\ & & \ddots & \\ a_{n,1} & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$

Proposition 5. On a $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

Exemple 13.

2- Transposition

Définition 17. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de la matrice M, notée ${}^{\mathrm{t}}M$ et qui appartient à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$ {}^{\mathrm{t}}M = (m_{j,i})_{j,i \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!]} .$$

Remarque 11. Une approche plus visuelle est de considérer la transposée d'une matrice

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & \cdots & m_{i,j} & \cdots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

comme la matrice "retournée par rapport à la diagonale" :

$${}^{\mathrm{t}}M = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1,j} & m_{i,j} & m_{n,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1,p} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} p \text{ lignes}$$

Attention cependant, écrit ainsi, il faut bien réaliser que le coefficient $m_{i,j}$ est à la $j-$ème ligne et à la $i-$ème colonne !

Remarque 12. Dans les oeuvres anglophones vous trouverez écrit : M^{T}, et plus rarement M^T. Il faut donc veiller à ne pas confondre : $A{}^{\mathrm{t}}B = A({}^{\mathrm{t}}B)$, tandis que $A^{\mathsf{T}}B = (A^{\mathsf{T}})B$ (dont on éclaircira le sens quand on parlera du produit de matrices juste après). Historiquement en français, la transposition est un opérateur qui se note *avant* la matrice, en raison du lien de celles-ci avec les applications linéaires et les formes quadratiques.

Proposition 6. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) = A$.

Proposition 7. On a :

- $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow {}^{\mathrm{t}}A \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$
- $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \implies A = {}^{\mathrm{t}}A$

Exemple 14.

Exemple 14, suite

Définition 18. Soit n un entier supérieur à 1. On définit les sous-ensembles des matrices carrées suivant (on prendra, chaque fois que nécessaire, une matrice $A = (a_{i,j})$ dans cet ensemble) :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **symétriques** : les matrices A telles que ${}^{\mathrm{t}}A = A$.
  Mathématiquement, on a $\forall i, j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!], a_{j,i} = a_{i,j}$.
  On peut noter $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{j,n} \\ a_{1,n} & \cdots & a_{j,n} & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a & & b \\ a & a_{2,2} & d & \\ & d & \ddots & c \\ b & & c & a_{n,n} \end{pmatrix}$
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **antisymétriques** : les matrices A telles que « ${}^{\mathrm{t}}A = -A$ ».
  Mathématiquement, on a $\forall i, j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!], a_{j,i} = -a_{i,j}$.
  On peut noter $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{j,n} \\ -a_{1,n} & \cdots & -a_{j,n} & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & & b \\ -a & 0 & d & \\ & -d & \ddots & c \\ -b & & -c & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 8. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $a_{i,i} = 0$.
Les matrices antisymétriques ont leurs coefficients sur la diagonale nuls.

Proposition 9. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{\mathbf{0}_{n,n}\}$

Démonstration 2.

Exemple 15.

3- Opération sur les matrices

3.a) Addition

Définition 19. On peut définir une **addition** sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, M = (m_{i,j}), N = (n_{i,j})$, on pose :

$$(M + N) = (m_{i,j} + n_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque 13. Les deux matrices ont la même forme, et on additionne simplement chaque coefficient de l'une avec le coefficient qui partage la même position dans l'autre matrice. On part donc avec deux matrice de taille $n \times p$ pour obtenir une matrice de taille $n \times p$.

Proposition 10. L'addition ainsi définie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

- est **associative** : $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3 : (A + B) + C = A + (B + C)$
- est **commutative** : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 : A + B = B + A$
- possède un **élement neutre** : $\forall A, \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : A + \mathbf{0}_{n,p} = A$
- chaque élément possède un inverse par l'addition, appelé l'**opposé** : $\forall A, \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \exists B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \ / \ A + B = \mathbf{0}_{n,p}$. On note $B = -A$

Remarque 14. L'associativité nous permet d'écrire sans abiguïté $A + B + C$, ou $\sum_i A_i$ pour des sommes finies par exemple. Chacune de ces propriétés découle naturellement des propriétés de l'addition sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple 16.

3.b) Produit externe

Définition 20. On peut définir un **produit externe** sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\mathbb{K}$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), M = (m_{i,j})$, on pose :

$$\lambda M = (\lambda.m_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque 15. Très simplement, on multiplie chaque coefficient par $\lambda \in \mathbb{K}$, et la matrice garde la même taille. Attention, les deux éléments dont on prend le produit n'appartiennent pas au même ensemble ! Parler de *commutativité* n'aura pas de sens. Parler d'*élément neutre* demandera un peu plus de précision !

Proposition 11. Le produit externe ainsi défini sur $\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

- est **associatif à gauche** : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2 \forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : \lambda(\mu M) = (\lambda\mu)M$
- possède un **élement neutre à gauche** : $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : 1M = M$
- possède un **élement absorbant à gauche** : $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : 0M = \mathbf{0}_{n,p}$

Proposition 12. L'addition sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et le produit externe sont **co-distributif** :

- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) : (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 : \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Exemple 17.

Théorème 4. *Les ensembles* $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}), \mathcal{S}_n(\mathbb{K}), \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ *sont stables par addition, et produit externe.*

Théorème 5. *La transposition est linéaire :* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, {}^{t}(\lambda A + B) = \lambda {}^{t}A + {}^{t}B$.

Théorème 6. *Toute matrice carrée peut se décomposer de manière unique en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists!(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \;/\; M = S + A$$

Et alors $S = \frac{1}{2}(M + {}^{t}M)$ *et* $A = \frac{1}{2}(M - {}^{t}M)$

Démonstration 3.

4- Multiplication

Définition 21. On peut définir une **multiplication matricielle** : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit alors le produit $A \times B$ (souvent noté AB) par :

$$A \times B = C = (c_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!] \times [\![1;q]\!]} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}),$$

avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 16. Attention, le plus souvent les deux matrices du produit appartiennent à des ensembles différents. Ce n'est donc pas un produit interne. Par ailleurs, on ne peut pas prendre le produit de n'importe quelle paire de matrices : il faut que le nombre de ligne de celle de gauche soit égale au nombre de colonne de celle de droite.
On peut définir un produit interne en multipliant les coefficients deux-à-deux, comme on l'avait fait pour l'addition. Il se trouve que ce produit n'a quasiment aucune utilité, ni aucune propriété intéressante...

Remarque 17. Afin de se souvenir de la formule du produit, ainsi que pour calculer efficacement un produit de matrice, il peut-être utile de placer les matrices comme dans la figure suivante :

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{B : \underline{p} \text{ lignes}, q \text{ colonnes}} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \boxed{b_{1,j}} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,j} & \cdots & b_{k,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & c_{i,j} & \cdots & c_{i,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,k} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix} & \text{Avec } c_{i,j} = \\
\boxed{A : n \text{ lignes}, \underline{p} \text{ colonnes}} & \boxed{\underline{C = A \times B} : n \text{ lignes}, q \text{ colonnes}} &
\end{array}$$

Remarque 18. Attention, en général, le produit matriciel n'est pas commutatif (même sur deux ensembles de matrices carrées de même taille !) : le plus souvent, $AB \neq BA$.

Proposition 13. Lorsque défini, le produit matriciel est :

- **associatif** : $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), A(BC) = (AB)C$.
- **bilinéaire** : $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \forall \lambda \in \mathbb{K}$:
  - $(\lambda A_1 + A_2)B = \lambda A_1 B + \lambda A_2 B$
  - $B(\lambda A_1 + A_2) = \lambda B A_1 + \lambda B A_2$

Remarque 19. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$I_n A = A$ $\qquad$ $\mathbf{0}_{p,n} A = \mathbf{0}_{q,p} \forall q \in \mathbb{N}^*$ $\qquad$ $A I_p = A$ $\qquad$ $A\mathbf{0}_{p,q} = \mathbf{0}_{n,q} \forall q \in \mathbb{N}^*$

Exemple 18.

Remarque 20. Les matrices diagonales, triangulaires (supérieures et inférieures), et symétriques sont stables par produit matriciel. Pas les matrices antisymétriques cependant, attention !

Théorème 7. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^{\mathrm{t}}(\lambda AB) = \lambda {}^{\mathrm{t}}B {}^{\mathrm{t}}A$

Définition 22. On définit naturellement les *puissances k-ème* d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- $A^0 = I_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = A \times A^n$

Théorème 8. *Soient A et B deux matrices carrée qui commutent (c'est à dire que $AB = BA$). Alors :*

- $(A+B)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$. *(formule de Newton)*
- $A^n - B^n = (A-B)\left(\sum_{k=1}^{n} A^{n-k}B^k\right)$.

Démonstration 4. Exactement de la même manière que pour les réels où les complexes : par récurrence avec un changement d'indice à faire dans la démonstration d'hérédité, qui part de $(A+B)^{n+1} = (A+B)^n(A+B)$. Il faut bien justifier, par contre, quand et où on utilise l'hypothèse de commutativité. De même pour la factorisation de $A^n - B^n$.

Application 1. On cherche à calculer A^n, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche aussi une matrice B telle que $AB = BA = I_3$.

1- Posons $N = A - I_3$. Calculer N^2, N^3 et N^4.

2- En déduire N^k pour $k \geqslant 4$.

3- Avec la formule de Newton, en déduire un forme simple de A^n.

4- Avec la formule de factorisation, en déduire la matrice B.

définition du produit matriciel : formule, exemples, insister sur les ensembles de base et d'arrivée. propriété d'icelui : associatif, bilinéaire sur +. Pas systématiquement commutatif/neutre/opposé par les ensembles, et même pas le cas sur les matrices carrées. théorèmes : stabilité des diagonales, triangulaires,