概率论与数理统计

4.2 方差

北京化工大学数学系

苏贵福

有两批钢筋, 每批各10根, 它们的抗拉强度指标如下:

(I) 115, 120, 120, 120, 120, 125, 130, 130, 135, 135.

(II) 90, 100, 105, 120, 125, 135, 135, 135, 145, 160.

它们的平均值都是125. 但是第II批钢筋的抗拉强度指标较差. 这是因为第II批 钢筋的抗拉强度指标值比较分散, 与其均值的偏差较大.

研究随机变量与其均值的偏离程度是十分必要的. 容易看到

$$E\{|X - E(X)|\}$$

能够度量随机变量与其均值$E(X)$的偏离程度. 但由于上式带有绝对值, 运算不方便, 尤其引入方差的概念.

一. 方差的定义

定义1 设X是一随机变量, 若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在, 则称它为X的方差, 记作

$$D(X)=Var(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

并将$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$为X的标准差.

- ♠ $D(X)$表达了X的取值与其数学期望的偏离程度.
- ♠ $D(X)$是衡量X取值分散程度的一个尺度.
- ♠ $D(X)$是随机变量X的函数$g(X)=[X-E(X)]^2$的数学期望.

♣ 对于离散型随机变量X有

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2p_k,$$

其中$P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\cdots$是$X$的分布律.

♣ 对于连续型随机变量X有

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2f(x)dx,$$

其中$f(x)$是X的概率密度.

定理1 设X是随机变量, 则有

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明 由数学期望的性质

$$\begin{aligned} D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} = E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

例1 设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$, 方差$D(X)=\sigma^2\neq 0$. 试求$X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$的期望与方差.

解 根据期望的定义

$$E(X^*)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0.$$

从而由定理1

$$\begin{aligned}D(X^*)=&E(X^{*2})-[E(X^*)]^2\\=&E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]-0^2\\=&\frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]=1.\end{aligned}$$

- 一般地将X^*称为X的标准化变量.

二. 几类特殊的方差

例2 设随机变量$X \sim \pi(\lambda)$, 求X的方差.

解 随机变量X的分布律为$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0,1,\cdots,\lambda>0.$

解 已知$E(X)=\lambda$, 下面只需计算$E(X^2)$:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) =& E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+E(X) \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda \\
=& \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda.
\end{aligned}
$$

故所求方差为$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda.$

例3 设随机变量$X \sim U(a, b)$, 求X的方差.

解 易知随机变量X的密度函数为:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

已知$E(X) = \frac{a+b}{2}$. 所以方差

$$\begin{aligned} D(X) =& E(X^2) - [E(X)]^2 \\ =& \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

例4 设随机变量X服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中$\theta > 0$, 求$E(X)$和$D(X)$.

解 根据期望定义

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -xe^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = -x^2 e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-\frac{x}{\theta}} dx = 2\theta^2.$$

于是$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$.

三. 方差的性质

定理2 设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$, 方差$D(X)=\sigma^2$. 则对于任意正数ϵ, 有不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\epsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

这一不等式称为切比雪夫不等式.

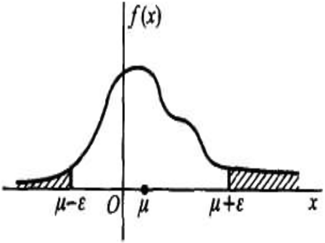
证明 我们只考虑连续型随机变量的情形. 设X的概率密度为$f(x)$, 则

$$P\{|X-\mu|\geq\epsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\epsilon}f(x)dx\leq\int_{|x-\mu|\geq\epsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\epsilon^2}f(x)dx$$

$$\leq\frac{1}{\epsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx=\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

切比雪夫不等式也可以写成如下形式

$$P\{|X-\mu|<\epsilon\} \geq 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$



切比雪夫不等式给出了在随机变量的分布未知, 而只知道$E(X)$和$D(X)$的情况下估计概率$P\{|X-E(X)|<\epsilon\}$的界限.

定理3 设X, Y是随机变量，C为常数，则有

(1) $D(C) = 0$.

(2) $D(CX) = C^2D(X)$且D(X+C)=D(X).

(3) $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$.

(4) 当X, Y相互独立时$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

(5) $D(X) = 0$的充要条件是$P\{X = E(X)\} = 1$.

证明 我们只证明(4)和(5).

$$
\begin{aligned}
D(X+Y) =& E\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\} \\
=& E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\} \\
=& E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\} \\
&+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \\
=& D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.
\end{aligned}
$$

上式右端第三项

$$
\begin{aligned}
2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} =& 2E\{XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)\} \\
=& 2\{E(XY)-2E(Y)E(X)+E(X)E(Y)\} \\
=& 2\{E(XY)-E(X)E(Y)\}.
\end{aligned}
$$

当X与Y相互独立时, 有$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

$(\Leftarrow)$ 设$P\{X = E(X)\} = 1$, 则有$P\{X^2 = [E(X)]^2\} = 1$. 于是

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

$(\Rightarrow)$ 设$D(X) = 0$, 要证$P\{X = E(X)\} = 1$. 采用反证法.
假设$P\{X = E(X)\} < 1$, 则对于某一个数$\epsilon > 0$, 有

$$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} > 0.$$

对于任意$\epsilon > 0$, 在切比雪夫不等式中取$\sigma^2 = 0$时, 有

$$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} = 0.$$

得到矛盾! 因此$P\{X = E(X)\} = 1$.

四. 小节

分布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0 < p < 1$	p	pq
二项分布	$n \geq 1, 0 < p < 1$	np	npq
泊松分布	$\lambda > 0$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$\mu, \sigma > 0$	μ	σ^2