第15章 波动

引 言

- 波动是自然界常见的、重要的物质运动形式
- 波动 —— 振动在空间的传播过程.

经典波
- 机械波　机械振动在弹性介质中的传播.
  如声波、水波和地震波
- 电磁波　交变电磁场在空间的传播.
  如无线电波、光波和X 射线

两类波的不同之处

- 机械波的传播需有传播振动的弹性介质；如声波的传播要有空气作介质
- 电磁波的传播可不需介质．它可以在真空中传播

两类波的共同特征

- 能量传播
- 反射
- 折射
- 叠加性
- 干涉
- 衍射

除了机械波和电磁波都能发生干涉和衍射现象外，实验中发现，电子、质子和中子这些微观粒子也能发生干涉和衍射现象。因此，微观粒子也具有波动性。——————物质波

简谐振动在空间的传播，称为简谐波，它是最简单的波。我们以机械波中的简谐波为例来介绍波动的普遍性质。

§1 机械波的几个概念

一、机械波的形成机制

当弹性介质中的一部分发生机械振动时，由于介质各个部分之间的弹性力相互作用，振动就由近及远地传播出去。

机械波产生的条件是:

1）波源: 激起波动的振动系统

2）弹性介质:能传播机械振动的媒质

振动方向与传播方向的关系?

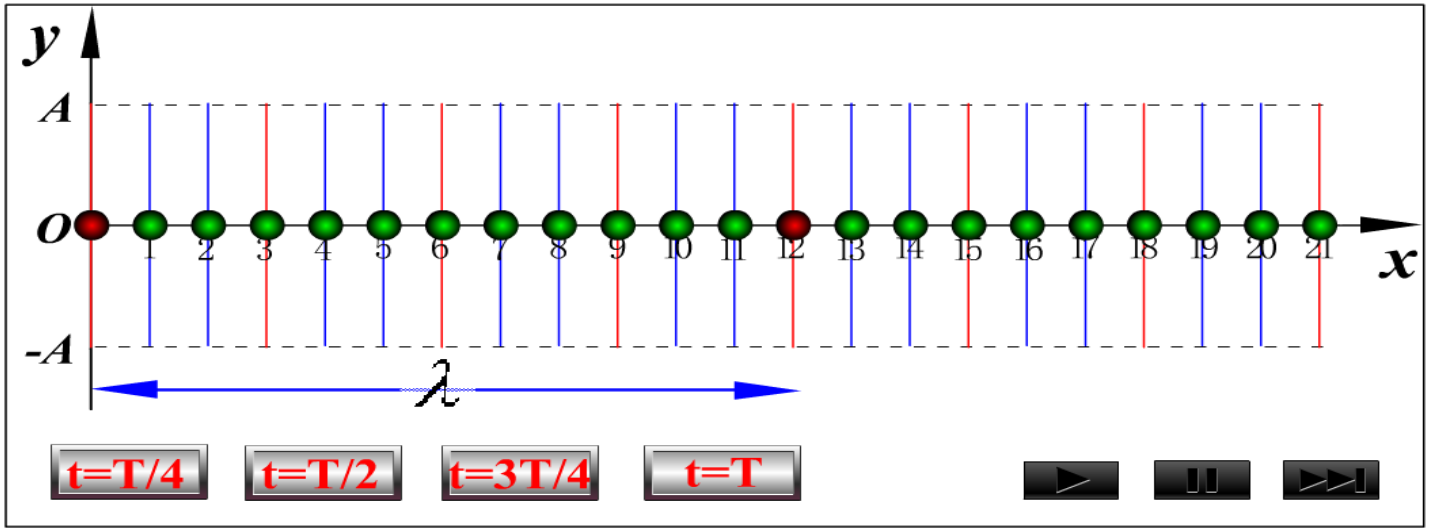
振源的振动通过弹性力传播开去

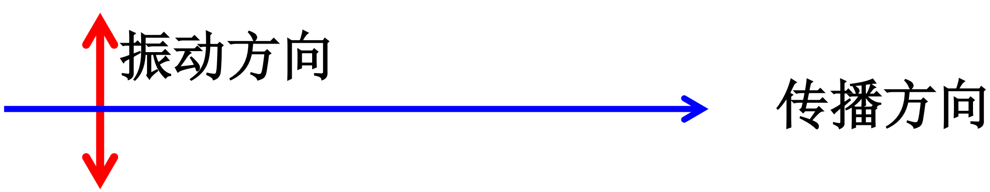
机械波的传播

二、横波与纵波

横波：质点的振动方向和波的传播方向垂直。

只能存在于有剪切应力的（固体、稠液体）介质中。

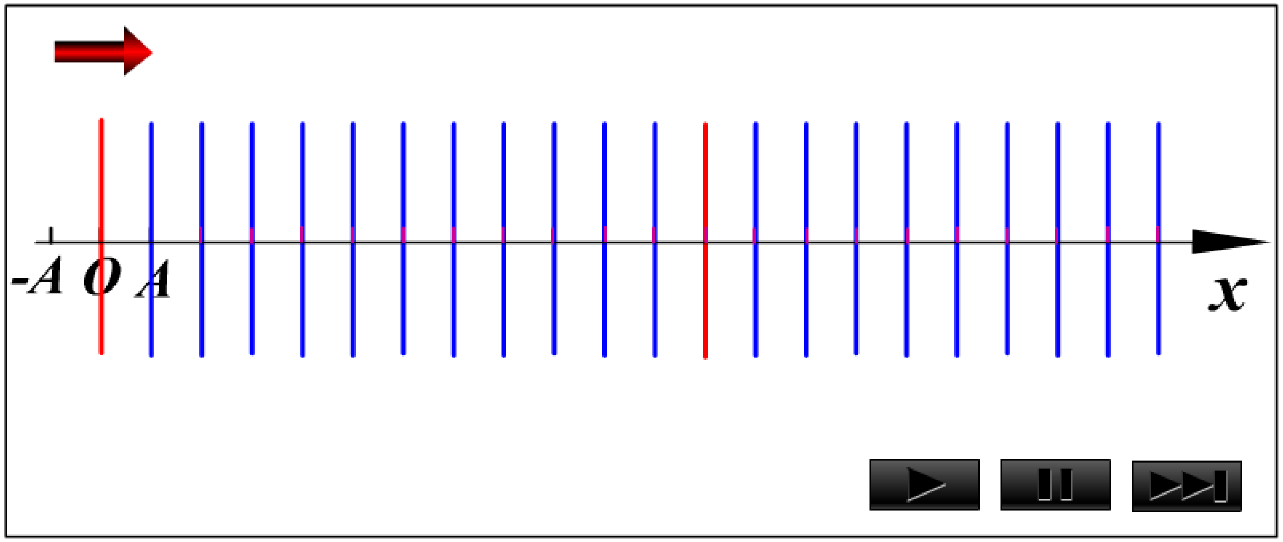




➢ 特征：具有交替出现的波峰和波谷.

纵波：各媒质元的振动方向与波传播方向一致

（可在固体、液体和气体中传播）



机械波实质上是介质中大量质元参与的集体振动，各质点均在自己的平衡位置附近作振动.

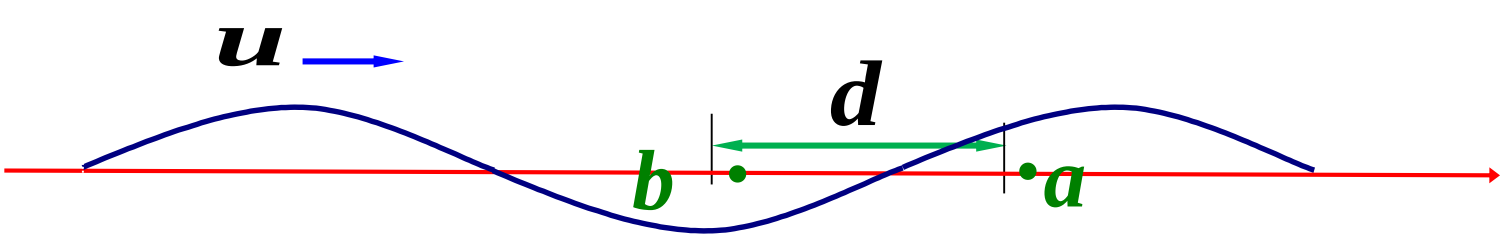
- 特征：具有交替出现的密部和疏部.

波动不是介质的流动,传播（流动）的是什么？

波动传播的是什么？

➢波是振动状态或相位的传播　不是质点的流动（传播）　各媒质元并未“随波逐流”。

➢“上游”的质元依次带动“下游”的质元振动；沿波的传播方向，各质元的振动相位依次落后。



•b比a相位超前:　$\varphi_b - \varphi_a = \Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} d$

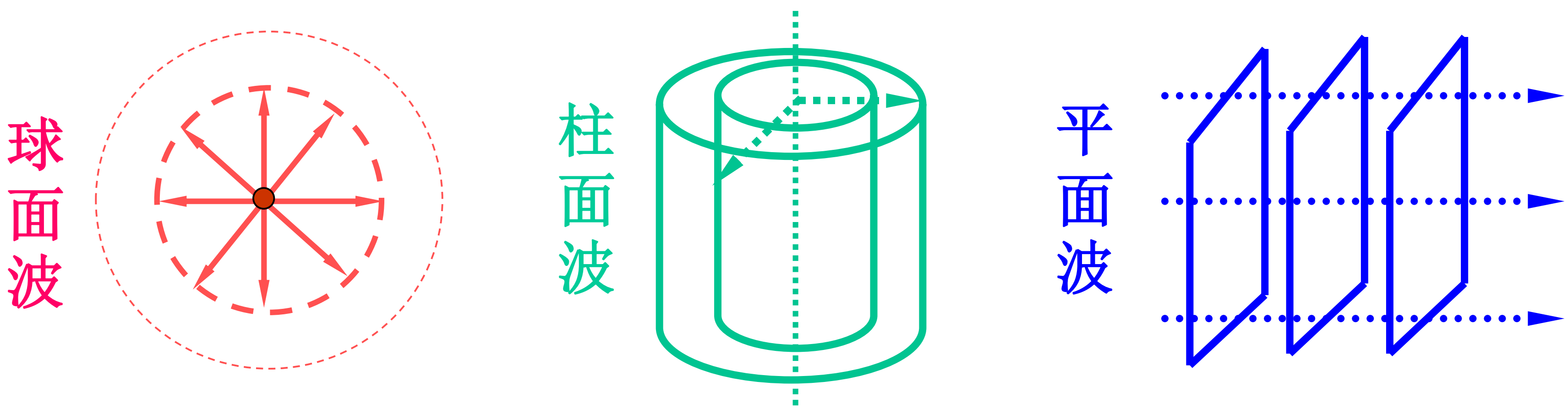
如何描述波的传播方向、介质中各质元的相位分布？

三、波线　波面　波前

- **波线：**沿波的传播方向画一些带有箭头的线，也叫做波射线。
- **波面：**波源在某一时刻的振动相位同时到达的各点所组成的面，称为**波面**，又称为**同相面**。

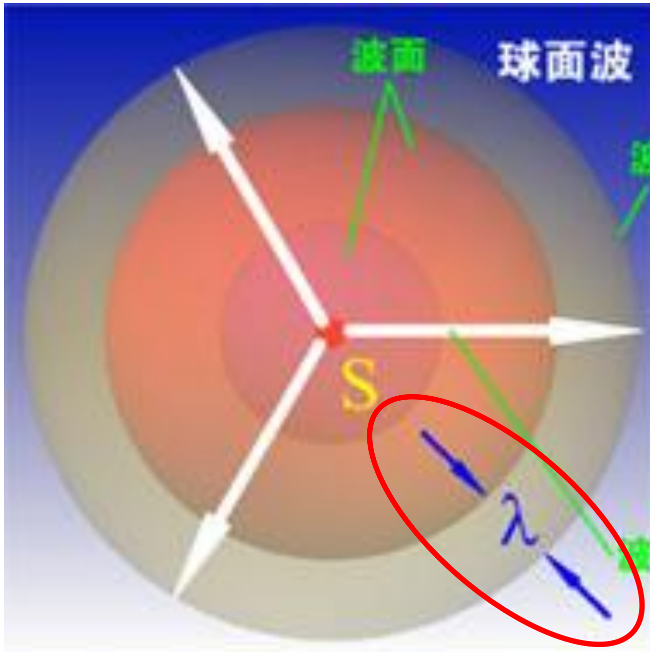
最前面的那个波面称为波前。

各向同性介质中　点源　　　　线源　　　　面源

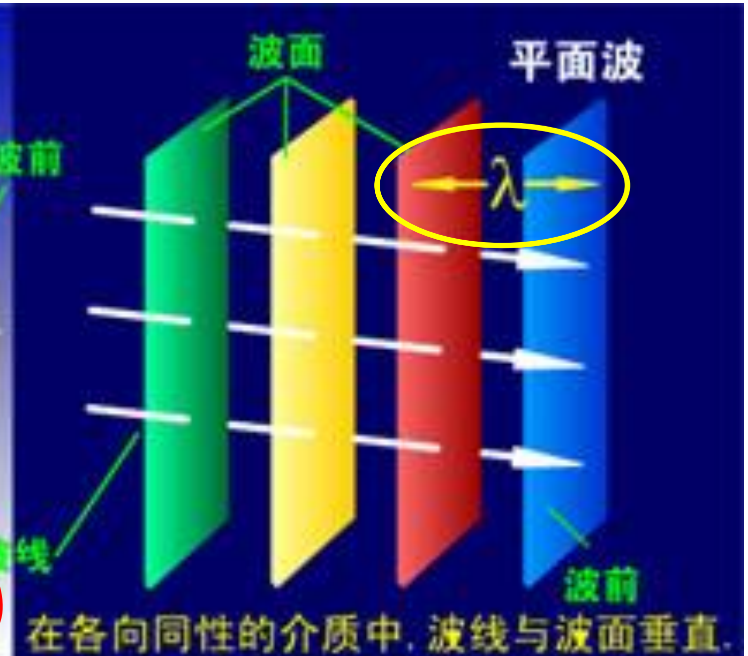


1）波射线垂直波面;　　2）波射线是波的能量传播方向

（1）球面波



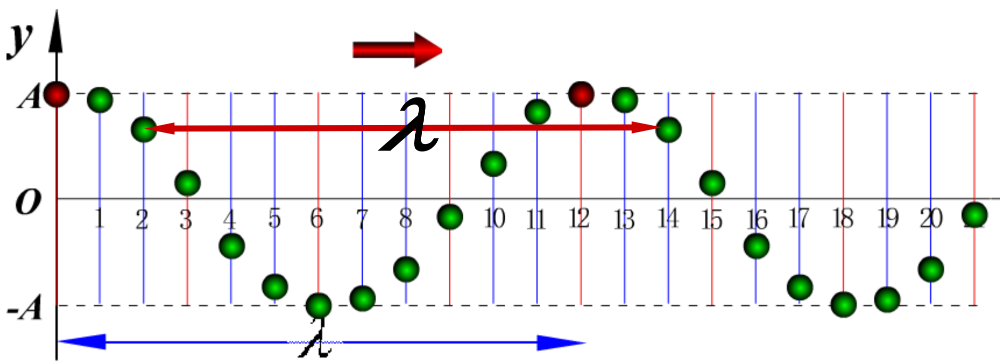
（2）平面波



四、波长、波的周期和频率、波速--描述波动的物理量

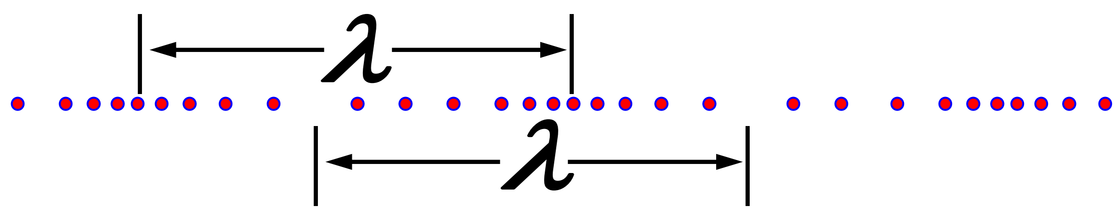
1. **波长 λ:**

沿波的传播方向，相位差为2π 的两媒质元之间的距离。即一个完整波形的长度。



介质中在波传播方向上距离为d的两质元相位差:

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d}$$



相位　距离　时间

$$2\pi \rightarrow \lambda \rightarrow T$$

2. **周期 T：** 波前进一个波长的距离所需要的时间

（传输一个完整波所需要的时间）

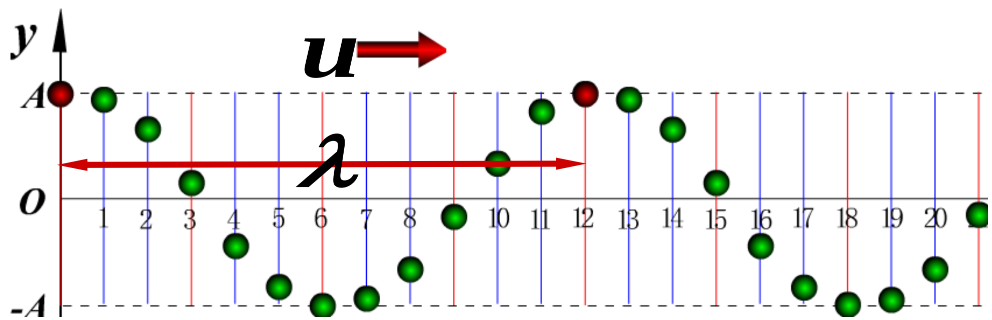
3. 频率ν ：

单位时间内所传播的完整波的数目（单位时间内通过某点的完整波的数目）。

$$\nu = \frac{1}{T}$$

4. 波速 u: 某一振动状态单位时间内所传播的距离。

$$\boxed{u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\omega}{2\pi}\lambda}$$



不是质元的振动速度！

距离$\lambda \rightarrow$ 时间 T

* 波速实质上是相位传播的速度，故称为相速度；

描述波动的物理量:

λ, T, ν, u 与不同的波源、媒质的关系?

* T和ν与媒质无关. 一般与波源振动的周期和频率相同 。

* 波速大小主要决定于媒质的性质，与波源无关。

* 波长 $\lambda = uT$ 与波源和媒质都有关。

同一频率的波，在不同媒质中传播时波长不同!

例. 一声波在空气中的波长是0.25 m， 传播速度为340m/s，当进入另一介质时，波长变为0.37m。求它在此介质中的传播速度 。

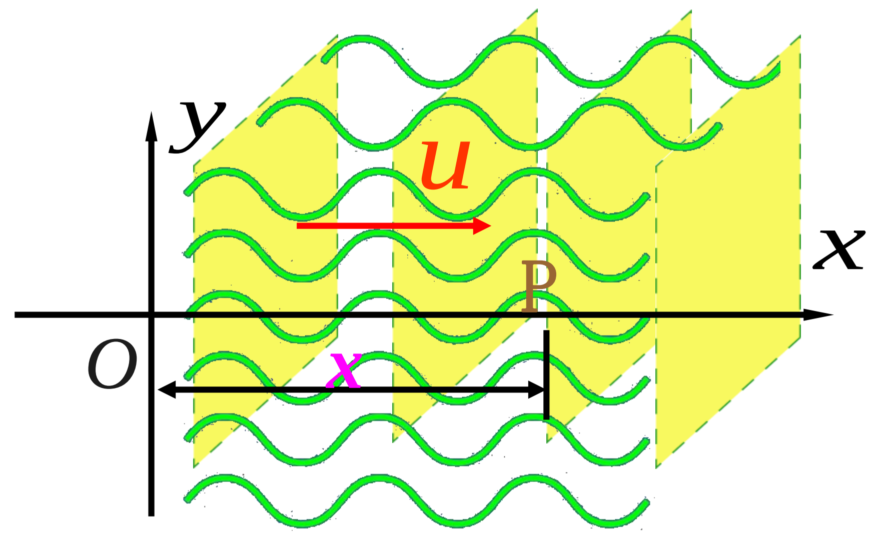
$$u_{介质} = \frac{\lambda_{介质}}{T} = \nu\lambda_{介质} = \frac{u_{空}}{\lambda_{空}}\lambda_{介质} = \frac{340}{0.25}\times 0.37 = 503.2\,(m/s)$$

§2 平面简谐波的波函数（波动方程）

平面波：波面是平面　　（能量不损失　理想波）

简谐波：各点均作相同频率的简谐振动

波函数：介质中任一质点（坐标为x）相对其平衡位置的位移（坐标为y）随时间的变化关系，即 $y(x,t)$



$\boxed{y = y(x,t)}$ 描写坐标为 x处的质点的振动方程

各质点相对平衡位置的位移

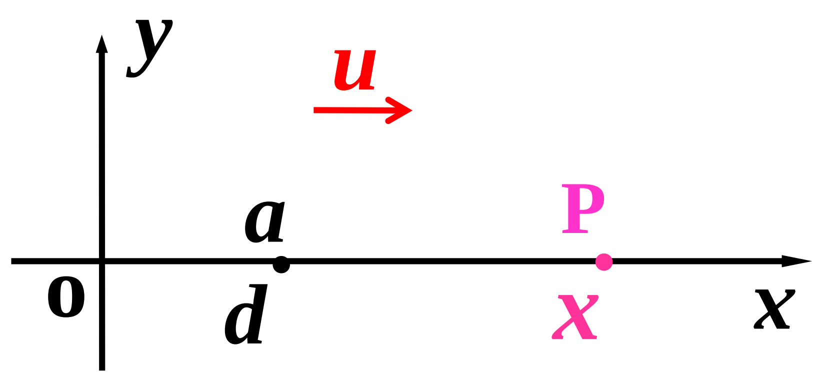
波线上各质点平衡位置

一、沿 x 轴正方向传播的平面简谐波

已知：平面简谐波沿着x轴的正方向传播

某点a 的振动表达式为 $y_a=A\cos(\omega t+\varphi_a)$

写出波的表达式。



设介质无限大、无吸收

解：取任意一点P 坐标为x

P点：A、ω 均与a 点的相同，但相位落后

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}(x-d)$$

相位滞后

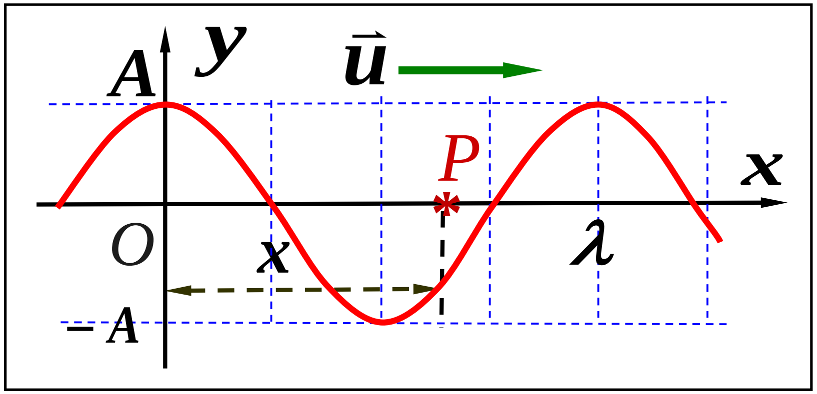
P点的振动表达式为

$$\boxed{y=A\cos[\omega t+\varphi_a-\frac{2\pi}{\lambda}(x-d)]}$$

波动方程

波动方程 $$\boxed{y = A\cos[\omega t + \varphi_a - \frac{2\pi}{\lambda}(x-d)]}$$

若*a*点为原点：



*P*点：比*o*点相位落后 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}x$

波动方程 $$\boxed{y = A\cos[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_o]}$$

φ_o——原点的振动初相

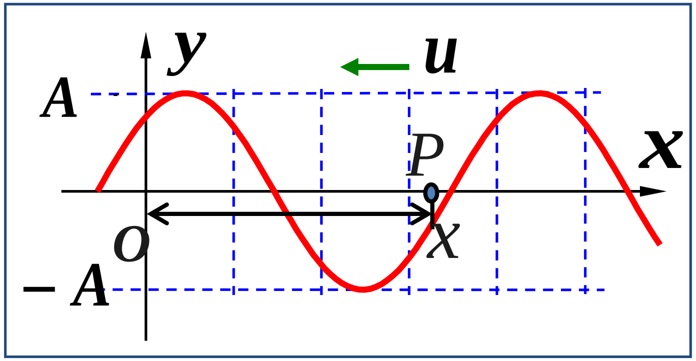
二、沿 x 轴负方向传播的平面简谐波

P点：A、ω 均与o点的相同，但相位超前

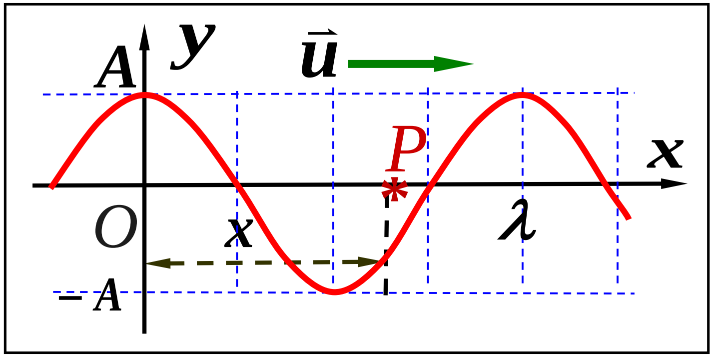
$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}x$$

波动方程

$$y=A\cos[\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_o]$$



$$y=A\cos[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_o]$$



三、波动方程的三种表达式

$$u=\frac{\lambda}{T}=\lambda\nu=\frac{\omega}{2\pi}\lambda$$

一般 $$y=A\cos[\omega t\mp\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi_o]$$ 相位滞后式

或 $$y=A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\varphi_o]$$

或 $$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda})+\varphi_o]$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}x=\omega\frac{x}{u}$$

负(正)号代表向 x 轴正(负)向传播

φ_o——原点的振动初相

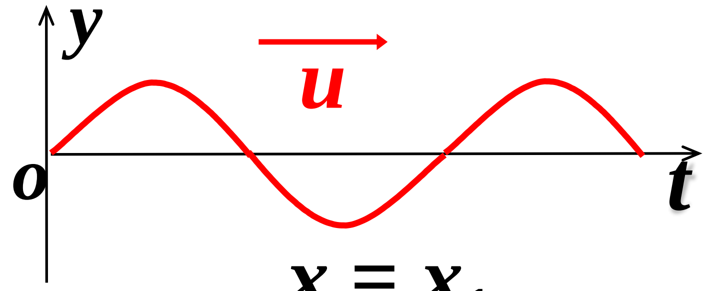
四 、波函数的物理意义

$$y = A\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi\right]$$

1、当坐标确定 $x = x_1$，

$$y = A\cos\left[\omega t - 2\pi\frac{x_1}{\lambda} + \varphi\right]$$

—x_1 点谐振动方程



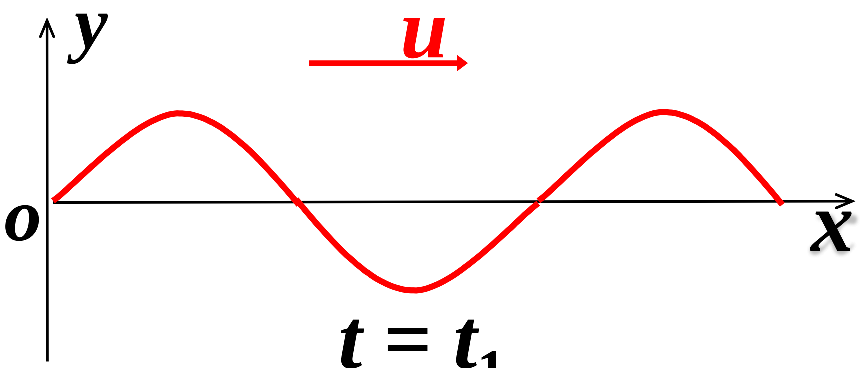
$x = x_1$

— x_1 处振动曲线

2、当时刻确定 $t = t_1$，

$$y = A\cos\left[(\omega t_1 + \varphi) - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right]$$

—t_1时刻的波形方程



$t = t_1$

— t_1 时刻波形曲线

（t_1 时刻空间各点的位移分布）

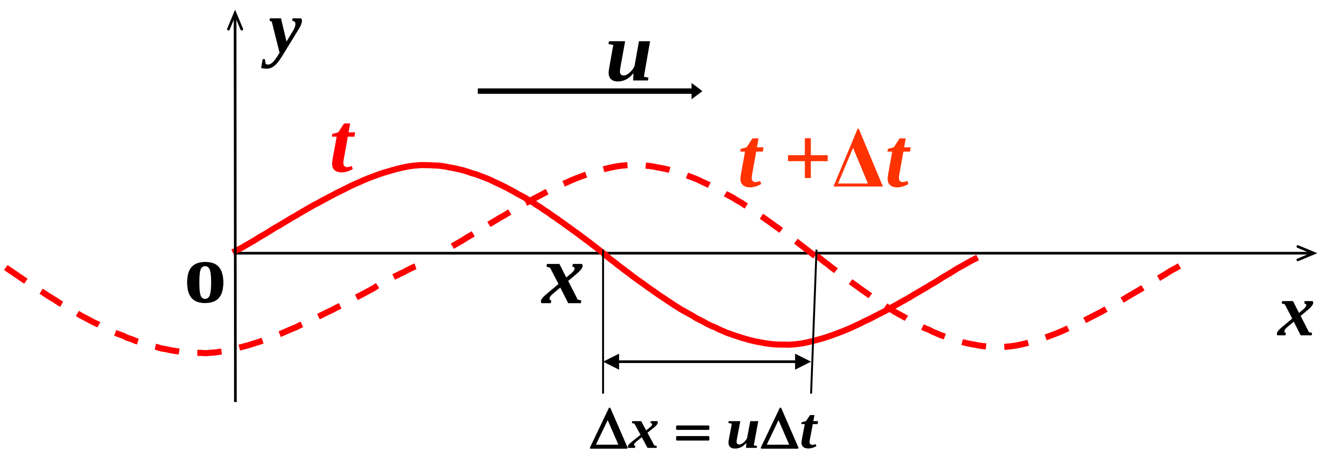
3、 当 x、t 均为变量时 $$\boxed{y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]}$$

$$y(x+\Delta x, t+\Delta t) = A\cos\left[\omega[(t+\Delta t) - \frac{(x+\Delta x)}{u}] + \varphi\right]$$

$$\|$$

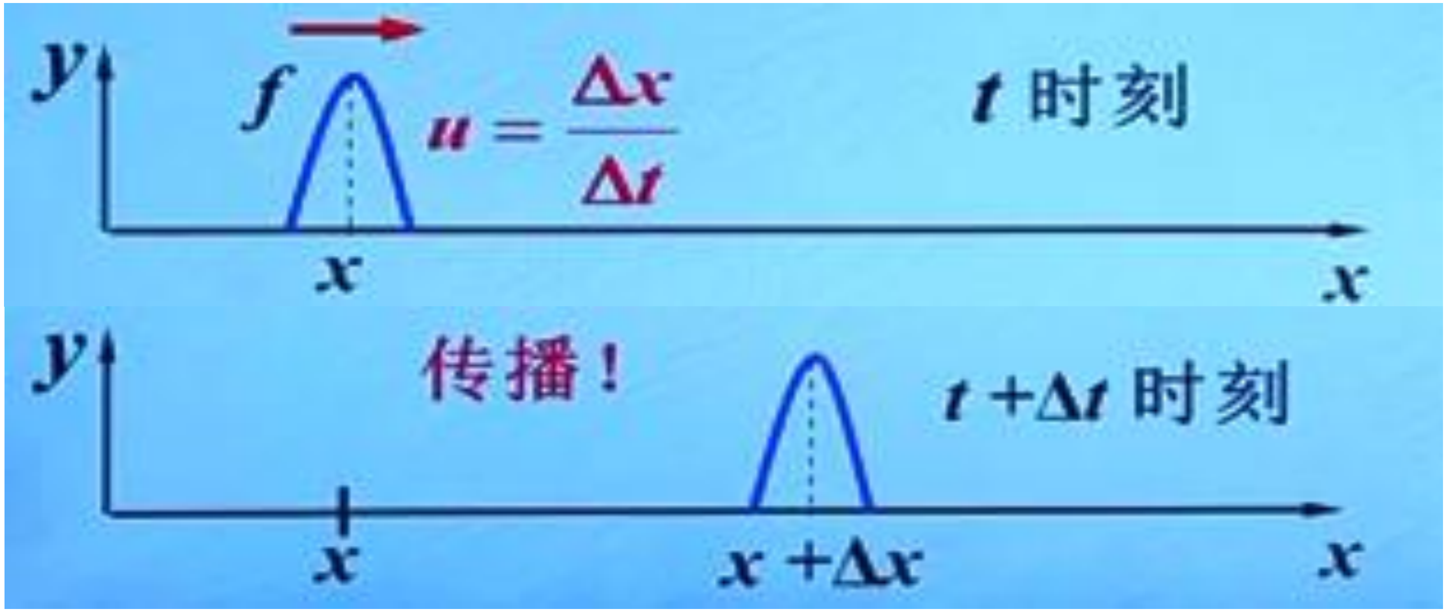
$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$\boxed{\Delta x = u\Delta t}$$



波形曲线以波速 u 沿波的传播方向平移（行波）

波函数反映了波的时间、空间双重周期性



波形曲线以波速 u 沿波的传播方向平移（行波）

$$y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_o]$$

$$y = A\cos\left[\omega(t \pm \frac{x - x_{参}}{u}) + \varphi_0\right]$$

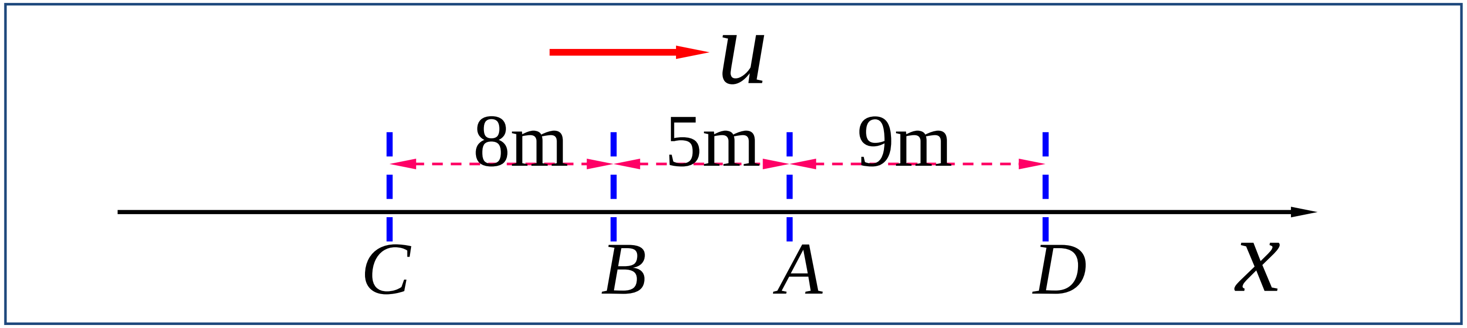
波动方程的建立

1）先写出振源（$x_{参}$）的振动方程；

2）根据波的传播方向确定“+”或“—”

3）再找出任意点离振源的距离 $x - x_{参}$，带入上式。

例： 一平面简谐波以速度 $u = 20\mathrm{m/s}$ 沿直线传播,波线上点 A 的简谐运动方程 $y_A = (3\times10^{-2}\mathrm{m})\cos(4\pi\mathrm{s}^{-1})t$.



（1）分别求出 BC， CD 两点间的相位差

（2）以 A 为坐标原点，写出波动方程

（3）以 B 为坐标原点，写出波动方程

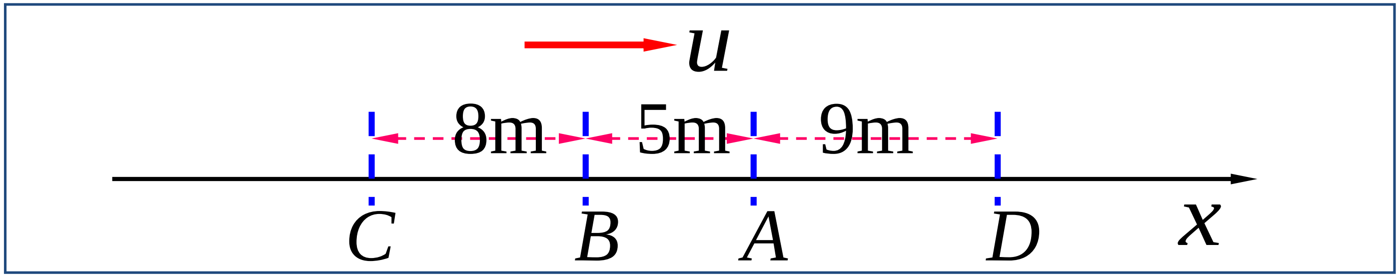
（4）写出传播方向上点C、点D 的简谐运动方程

解： （1）C点的相位比B、D点的相位超前

$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi\frac{|\Delta x_{CB}|}{\lambda} = -2\pi\frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = 2\pi\frac{|\Delta x_{CD}|}{\lambda} = 2\pi\frac{22}{10} = 4.4\pi$$

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\text{m})\cos(4\pi\,\text{s}^{-1})t \qquad u = 20\,\text{m/s}$$



（2）以A为原点的波动方程 $y = A\cos[\omega(t \mp \frac{x}{u}) + \varphi_o]$

$$y = A\cos\omega(t - \frac{x}{u}) = 3\times10^{-2}\cos4\pi(t - \frac{x}{20})\ (\text{m})$$

（3）B点的相位比A点的超前： $\omega\frac{5}{u} = \pi$

B点振动方程 $y_B = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + \pi)$

以B为原点的

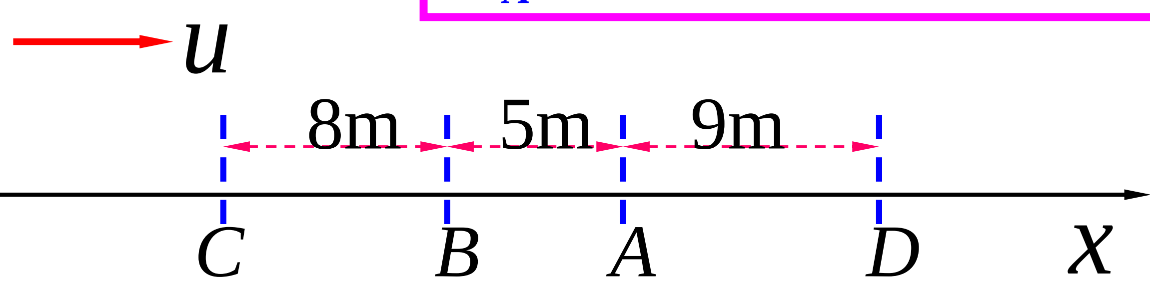
波动方程： $$y = 3\times10^{-2}\cos[4\pi(t - \frac{x}{20}) + \pi](\text{m})$$

或：用波源位置不在坐标原点的波函数：

$$\boxed{y = A\cos\omega(t - \frac{x - x_a}{u} + \varphi_a)} = A\cos\omega(t - \frac{x-5}{u})$$

（4）写出传播方向上C、D点的简谐运动方程

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$



点 C 的相位比点 A 超前 $\omega\dfrac{AC}{u}$

$$y_C = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + \omega\frac{AC}{u})$$

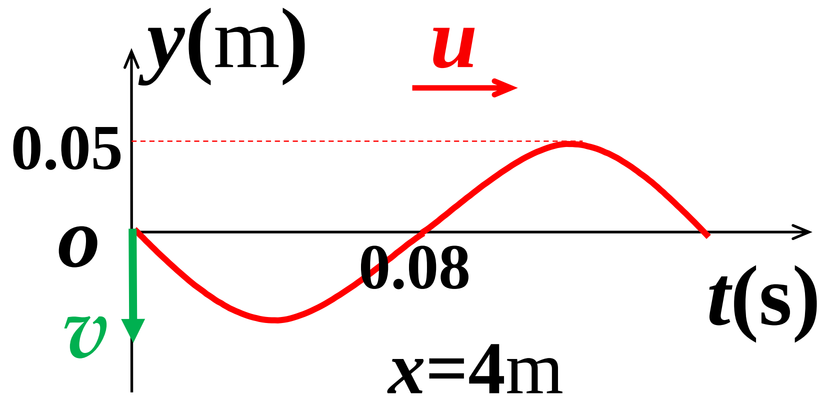
$$= 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + \frac{13}{5}\pi) \quad (\mathrm{m})$$

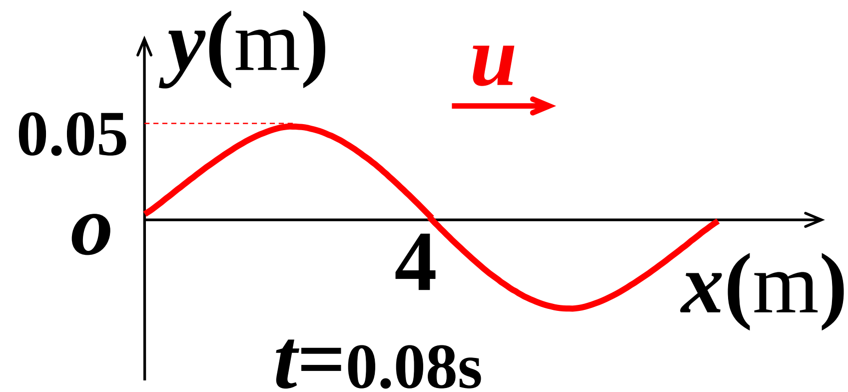
点 D 的相位落后于点 A $\omega\dfrac{AD}{u}$

$$y_D = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t - \omega\frac{AD}{u})$$

$$= 3\times10^{-2}\cos(4\pi t - \frac{9}{5}\pi) \quad (\mathrm{m})$$

例：一平面余弦波在介质中以速度u=50m s^{-1}沿x轴正向传播。1）已知x =4m处质点的振动曲线；2）已知t=0.08s时的波形曲线。分别求波的表达式。



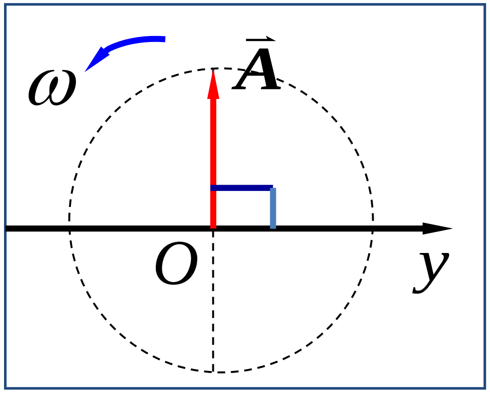


$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_o]$$

解：1）由图1知A=0.05m,

T=0.16s $\rightarrow \omega = 2\pi/T = 12.5\pi$

x=4m 处t=0时，y=0, v<0



$$\frac{\pi}{2} = -\pi + \varphi_0$$

$$\Rightarrow \varphi_o = \frac{3\pi}{2}$$

波动方程：

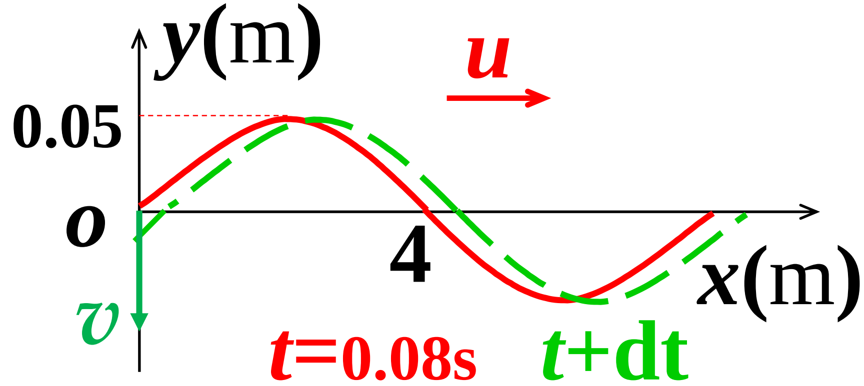
$$y = 0.05\cos[12.5\pi(t - \frac{x}{50}) + \frac{3\pi}{2}]\ (\text{m})$$

$$y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_o]$$

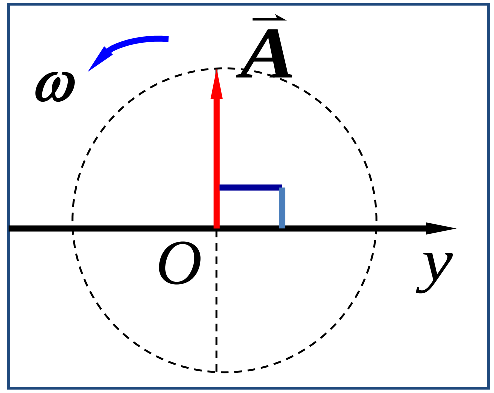
2）由图2知A=0.05m,　λ=8m $\rightarrow \omega = 2\pi u/\lambda = 12.5\pi$

t=0.08s时，

x=0 处 $\boxed{\begin{matrix} y=0 \\ v<0 \end{matrix}}$，$v$?



$$\pi + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_o = -\frac{\pi}{2} \text{或} \frac{3\pi}{2}$$



波动方程：

$$y = 0.05\cos[12.5\pi(t - \frac{x}{50}) - \frac{\pi}{2}]\ (\mathrm{m})$$

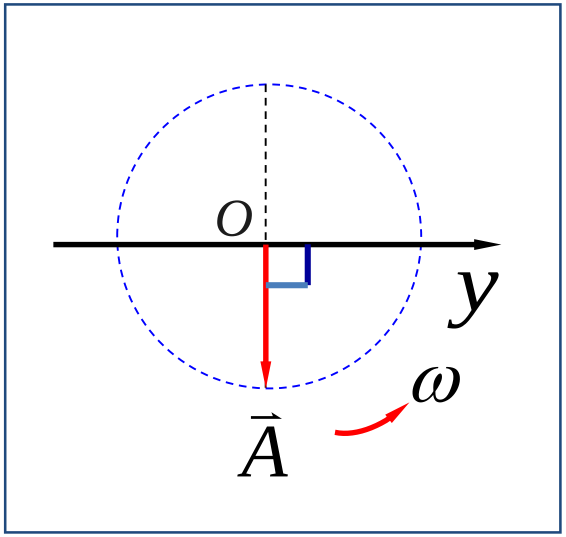
例： 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，在 $t=0$ 时坐标原点处的质点位于平衡位置沿 Oy 轴正方向运动。 已知 $A=0.5\text{m}$，$T=2.0\text{s}$，$\lambda=2.0\text{m}$， 求波动方程。

解 写出波动方程的标准式

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$t=0$时，$x=0$处 $\quad y=0,\upsilon>0$

$$\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$$

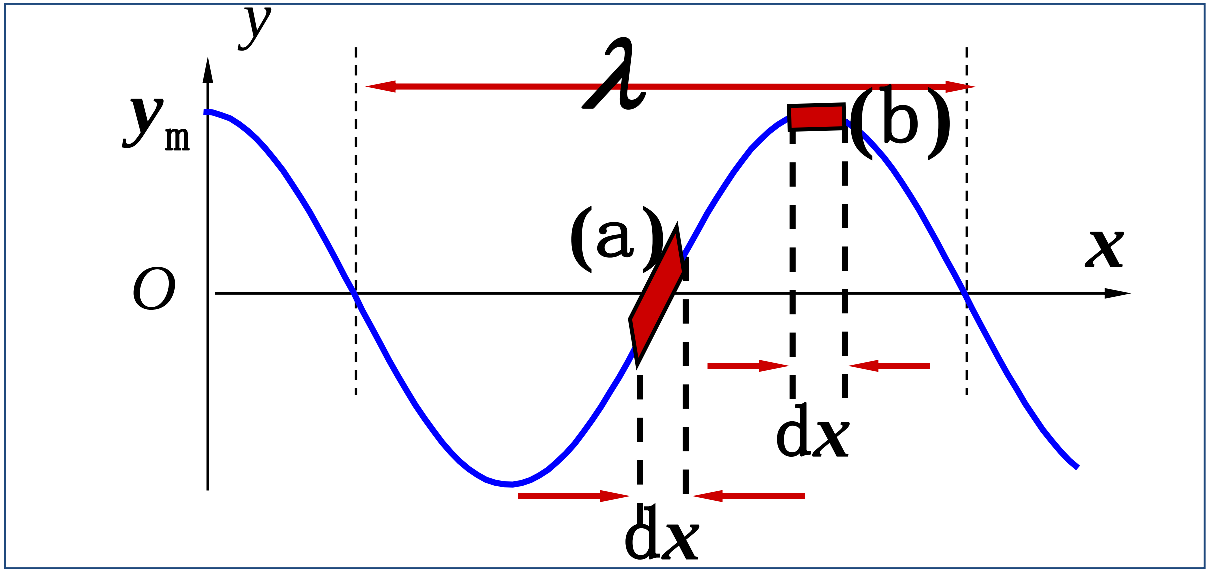


波动方程：$y=0.5\cos[2\pi(\frac{t}{2}-\frac{x}{2})-\frac{\pi}{2}]\,(\text{m})$

§3 波的能量　能流密度

一、波动能量

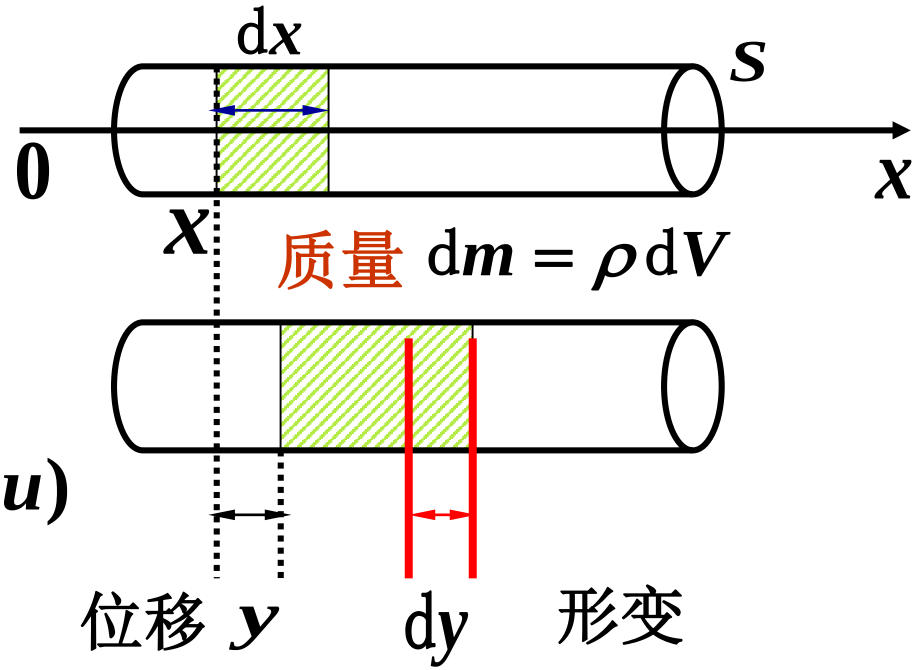
当机械波在媒质中传播时，媒质中各质点均在其平衡位置附近振动，因而具有振动动能.同时，介质发生弹性形变，因而具有弹性势能.



以固体棒中传播的简谐纵波为例分析波动能量的传播

一、机械波的能量 能量密度

设棒是密度为ρ的均匀弹性介质，有一维平面简谐波以速度u沿x轴正方向传播.



波函数: $y = A\cos\omega(t - x/u)$

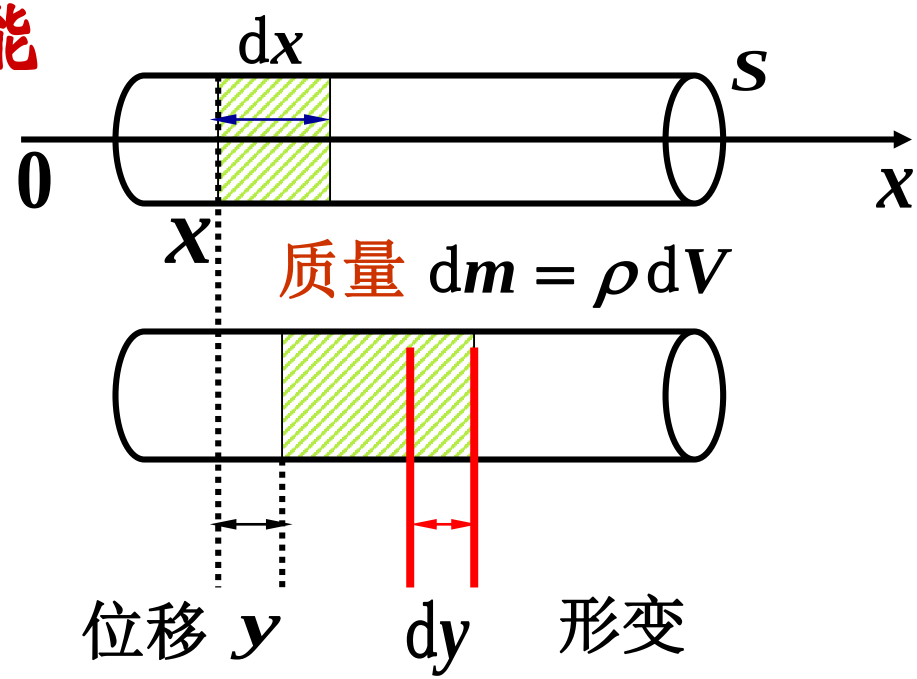
质元的振动动能

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)v^2 \qquad v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\omega(t - \frac{x}{u})$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

质元弹性（形变）势能

$$\mathrm{d}W_p = \frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2$$



$$k = \frac{SE}{\mathrm{d}x}$$ E：弹性模量

纵波：$E = \rho u^2$

$$y = A\cos\omega(t - x/u)$$

$$\mathrm{d}W_p = \frac{1}{2}ES\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho u^2 \mathrm{d}V(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -A\frac{\omega}{u}\sin\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

$$\mathrm{d}W_p = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$$

振动动能

$$\mathrm{d}W_k = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

弹性势能

$$\mathrm{d}W_p = \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

即任一时刻，质元的动能和势能大小相等，相位相同！

- **质元的总机械能**

$$\boxed{\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_k + \mathrm{d}W_p = \rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})}$$

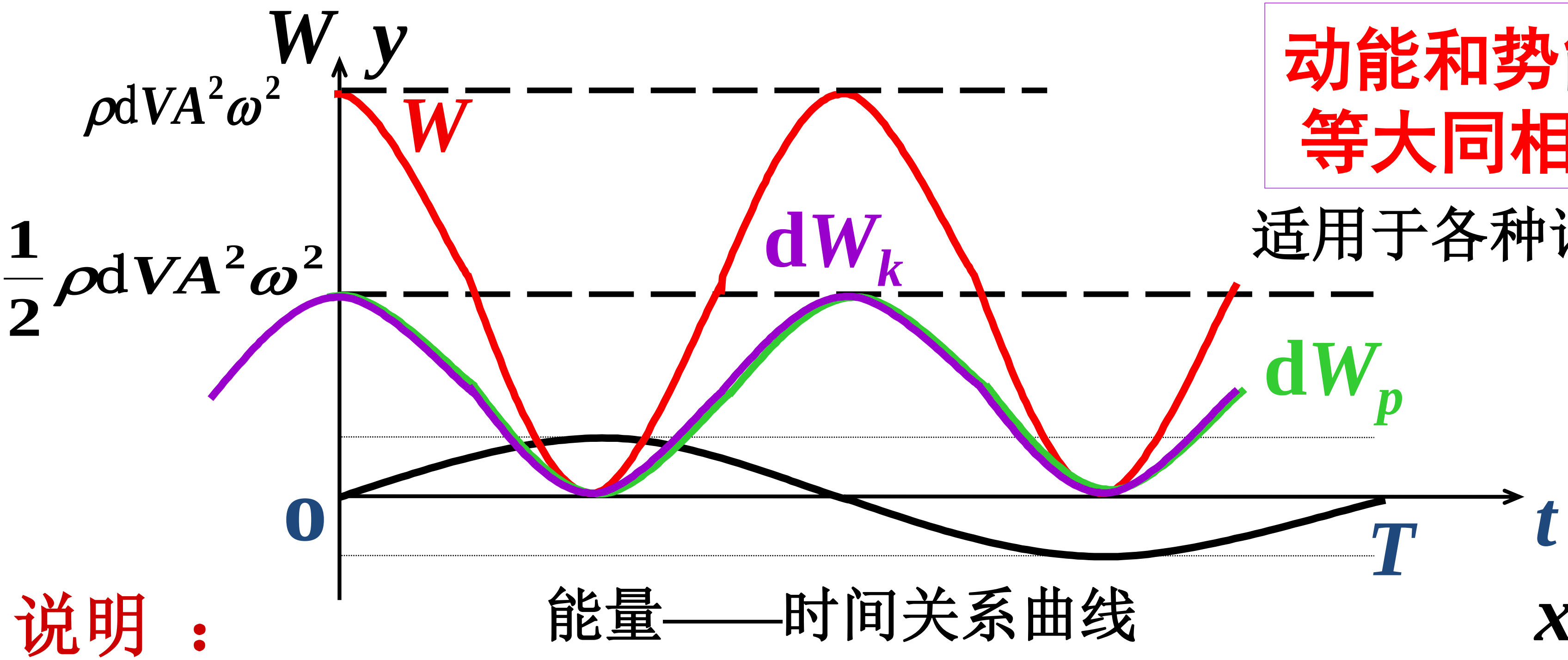
总机械能不守恒！三者均随*x*,*t*周期性同相变化。

- **能量密度：** 单位体积介质中的波动能量

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

- **平均能量密度：** 一个周期内能量密度的平均值

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$$



动能和势能等大同相!

适用于各种谐波

说明：

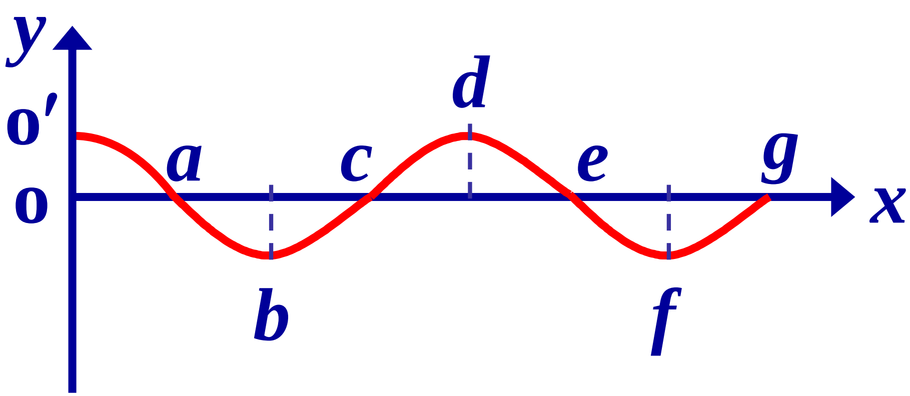
(1) 任一体积元的机械能不守恒，随t作周期性变化.

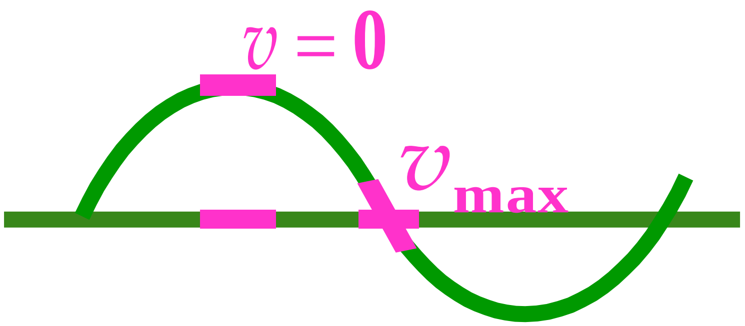
(2) 动能、势能、总机械能的变化是同相位的.

动能、势能、总机械能同时达到最大；同时为零。

(3) 在平衡位置的质元能量最大，在最大位移（波峰、波谷）处的质元能量为零。

例: 一横波*t*时刻的波形曲线如图，该时刻能量最大的质元位置是 ***a, c, e, g*** ，能量最小的质元位置 ***o′,b, d, f*** .





例: 一平面简谐波在弹性媒质中传播，在媒质质元从最大位移处回到平衡位置的过程中（ **C** ）。

(A)它的势能转换成动能.　(B)它的动能转换成势能.

(C)它从相邻的一段媒质质元获得能量，其能量逐渐增加.

(D)它把自己的能量传给相邻的一段媒质质元，其能量逐渐减小.

例： 一平面简谐机械波在弹性介质中传播,下述各结论哪个正确？

选择（ D ）

(A)介质质元的振动动能增大时，其弹性势能减小，总机械能守恒.

(B)介质质元的振动动能和弹性势能都作周期性变化，但两者相位不相同.

(C)介质质元的振动动能和弹性势能的相位在任一时刻都相同，但两者数值不同.

(D)介质质元在其平衡位置处弹性势能最大.

$$\boxed{\overline{w} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2}$$ -----平均能量密度是常量

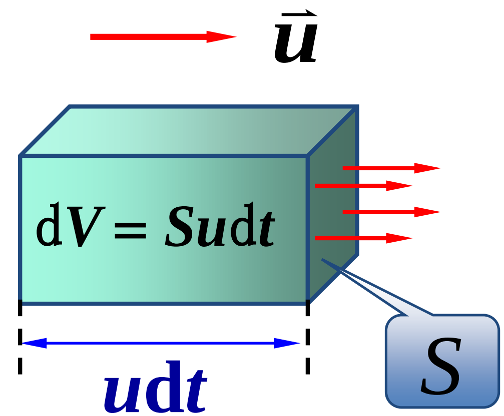
平均说来，介质中无能量累积。这说明，体积元都在不断地从波源方向的介质中吸收能量，又不断地向后面的介质传递能量。所以说波动是能量的传播，且能量传播的速度就是波速。

-----能 流

二、能流(瞬时功率)和能流密度

➢能流 单位时间内垂直通过某一面积的能量,用P表示。

$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{wSu\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=wSu$$



$$P=wuS$$

➢ 平均能流

$$\overline{P}=\overline{w}Su$$

定义式

➢ 能流密度(功率密度):单位时间内垂直通过单位面积的能量,即通过单位面积的能流。

$$\frac{P}{S}=wu$$

➢ 平均能流密度(波的强度)

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\overline{w}\,u=\frac{1}{2}\rho\,\omega^2A^2u$$

任意谐波 $I\propto A^2$

例 广播电台的平均辐射功率为20kW，辐射能量均匀分布在以电台为中心的球面上，则距电台10km处电磁波平均辐射强度为 ______________.

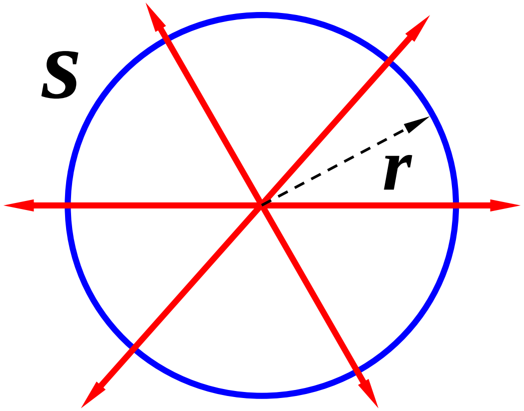
平均能流

平均能流密度

解：

$$I=\frac{\overline{P}}{S}=\frac{\overline{P}}{4\pi r^2}$$

$$=1.6\times10^{-5}J/m^2.s$$



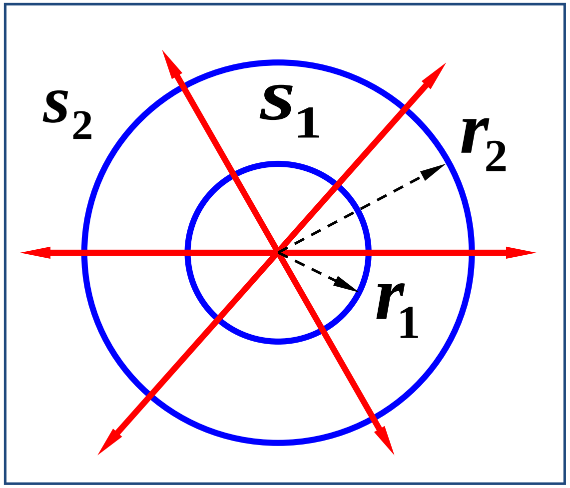
例 证明球面波的振幅与离开其波源的距离成反比，并求球面简谐波的波函数.

证 介质无吸收，通过两个球面的平均能流相等.

$$\overline{w}_1 u S_1 = \overline{w}_2 u S_2$$

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u 4\pi r_2^2$$

故 $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow A = \frac{A_0 r_0}{r}$$



- 球面简谐波的波函数

$$y = \frac{A_0 r_0}{r}\cos\omega(t - \frac{r}{u})$$

<u>球面波的振幅随距离而减小，强度也随距离而衰减.</u>

前面讨论了波动的基本概念

$$y = A\cos\left[\omega t \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi\right]$$

波在传播中，由于某些原因，其传播方向、频率和振幅都有可能改变。现在讨论与波的传播特性有关的现象、原理和规律。

1678年惠更斯提出简洁的作图法，定性解决了波的传播方向问题，称为惠更斯原理。它在研究波的传播问题中，具有重要作用。

§4 惠更斯原理

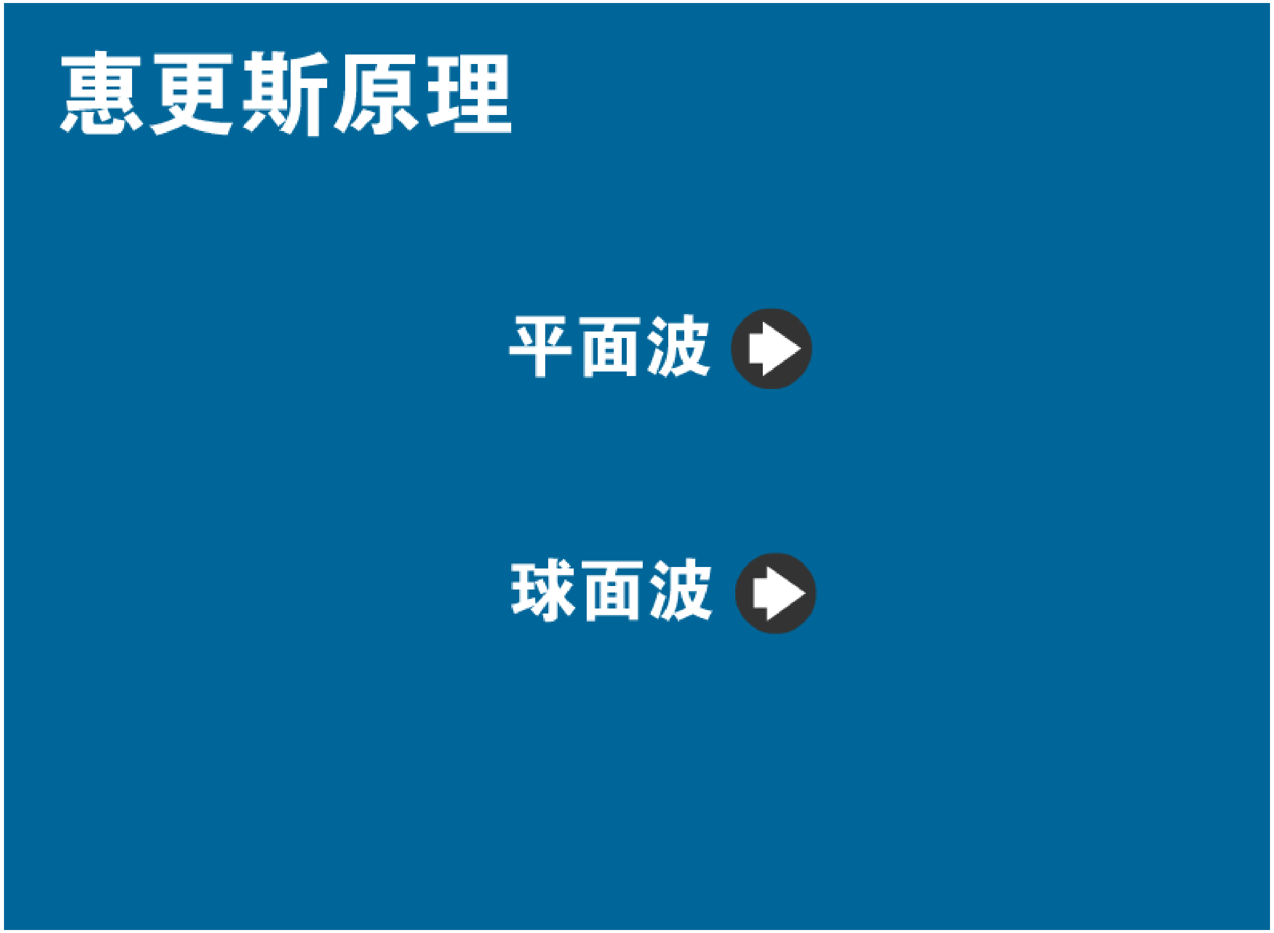
一、惠更斯原理（Huygens principle）

媒质中波动传到的各点，都可看作是发射子波的波源(点波源)，在其后的任一时刻，这些子波的包络面就是该时刻的波面。

• 子波概念　波面上任一点都是新的振源，发出的波叫子波

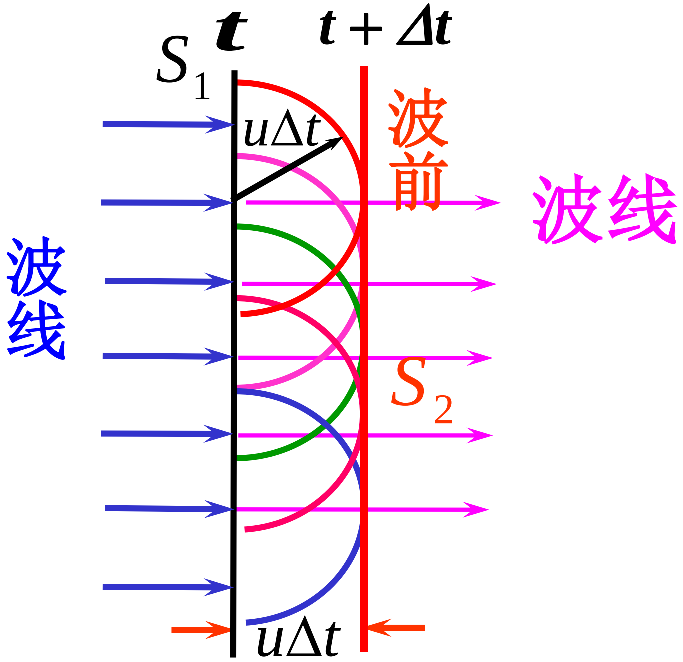
子波面的包络面 -- 新波面

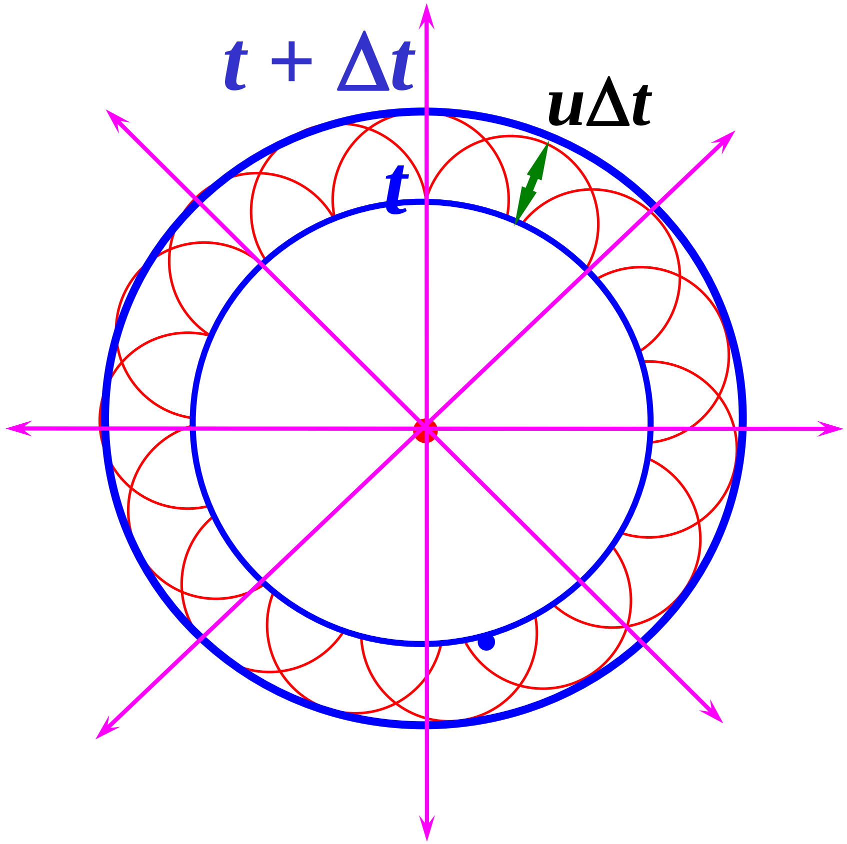
t 时刻各子波波面的公共切面（包络面）就是该时刻的新波面



应该指出，惠更斯原理没有说明子波的**强度分布**，因而只能解决波动**传播方向**问题。

根据惠更斯原理，用几何作图法，求出下一时刻的波面,确定波的传播方向。



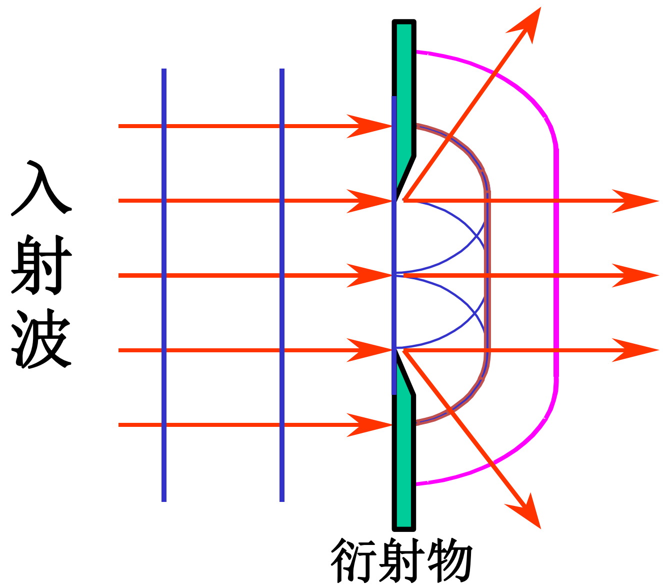


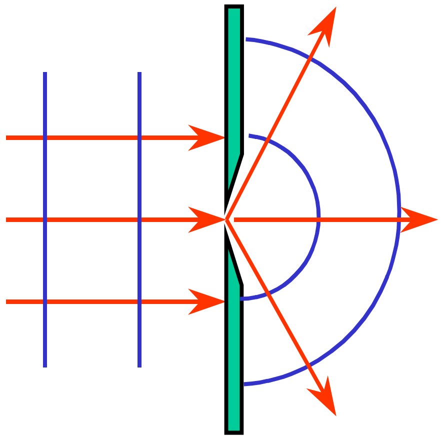
在各向同性介质中传播

二、惠更斯原理的应用

1. 解释波的衍射现象

衍射--偏离原来直线传播的方向　衍射是波动的判据





平面波经小孔衍射成球面波

衍射现象明显程度

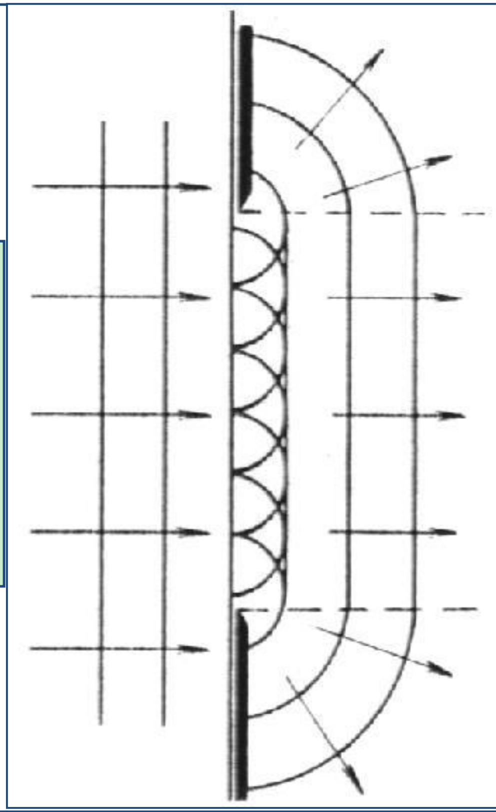
视衍射物（包括孔、缝）的线度与波长相比较.

对一定波长的波, 线度小衍射现象明显

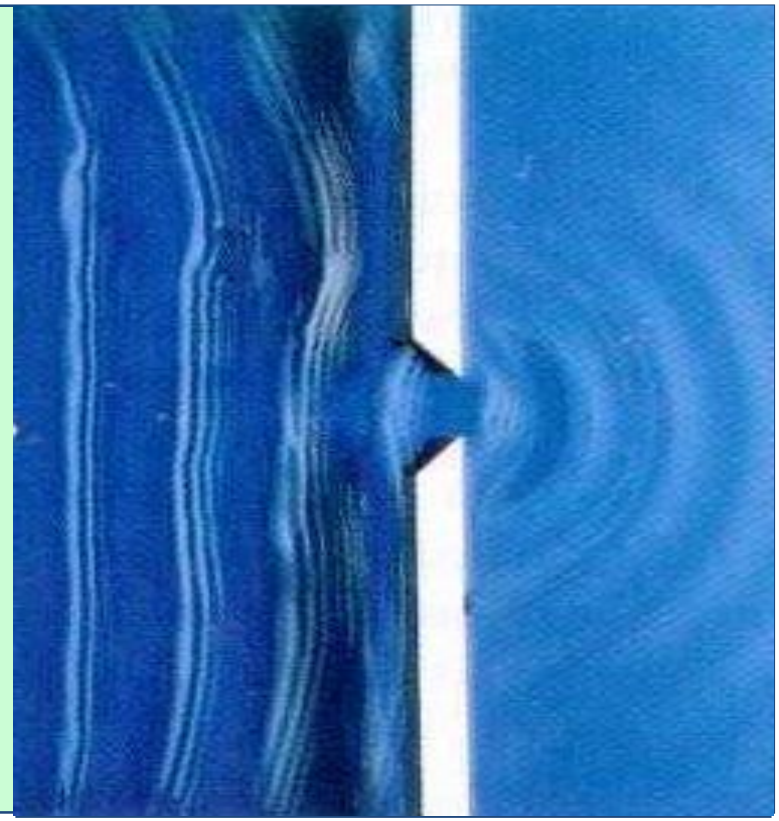
若障碍物宽度$d \gg \lambda$, 衍射现象不明显(直线传播);

$d \approx \lambda$, 衍射现象比较明显.

波的衍射

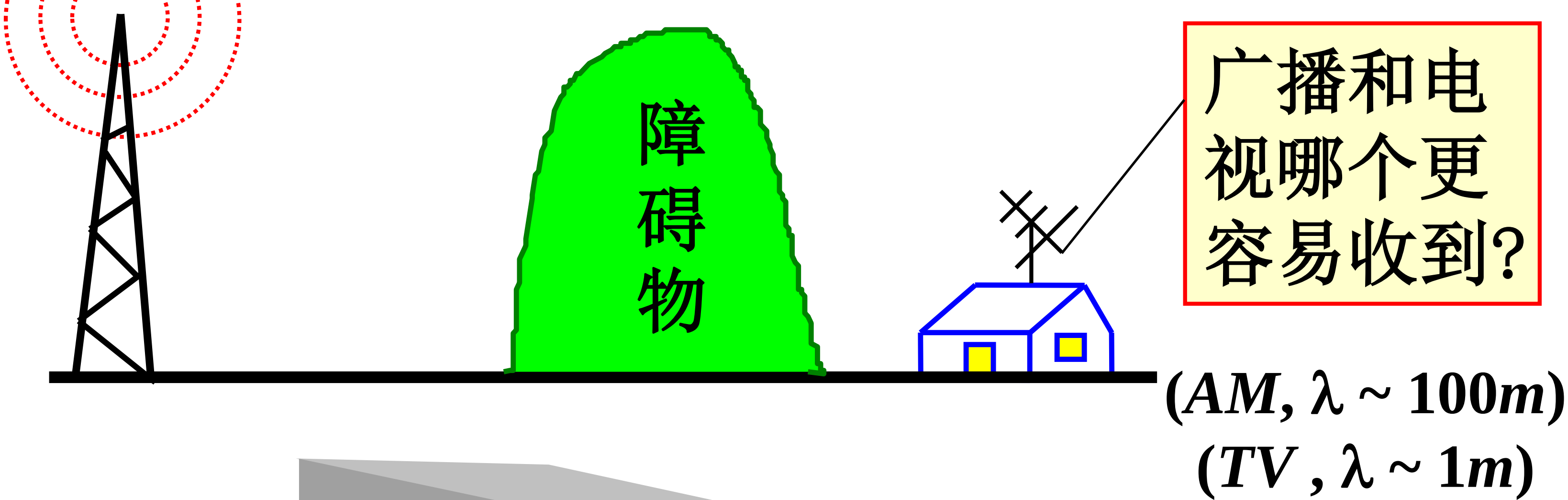


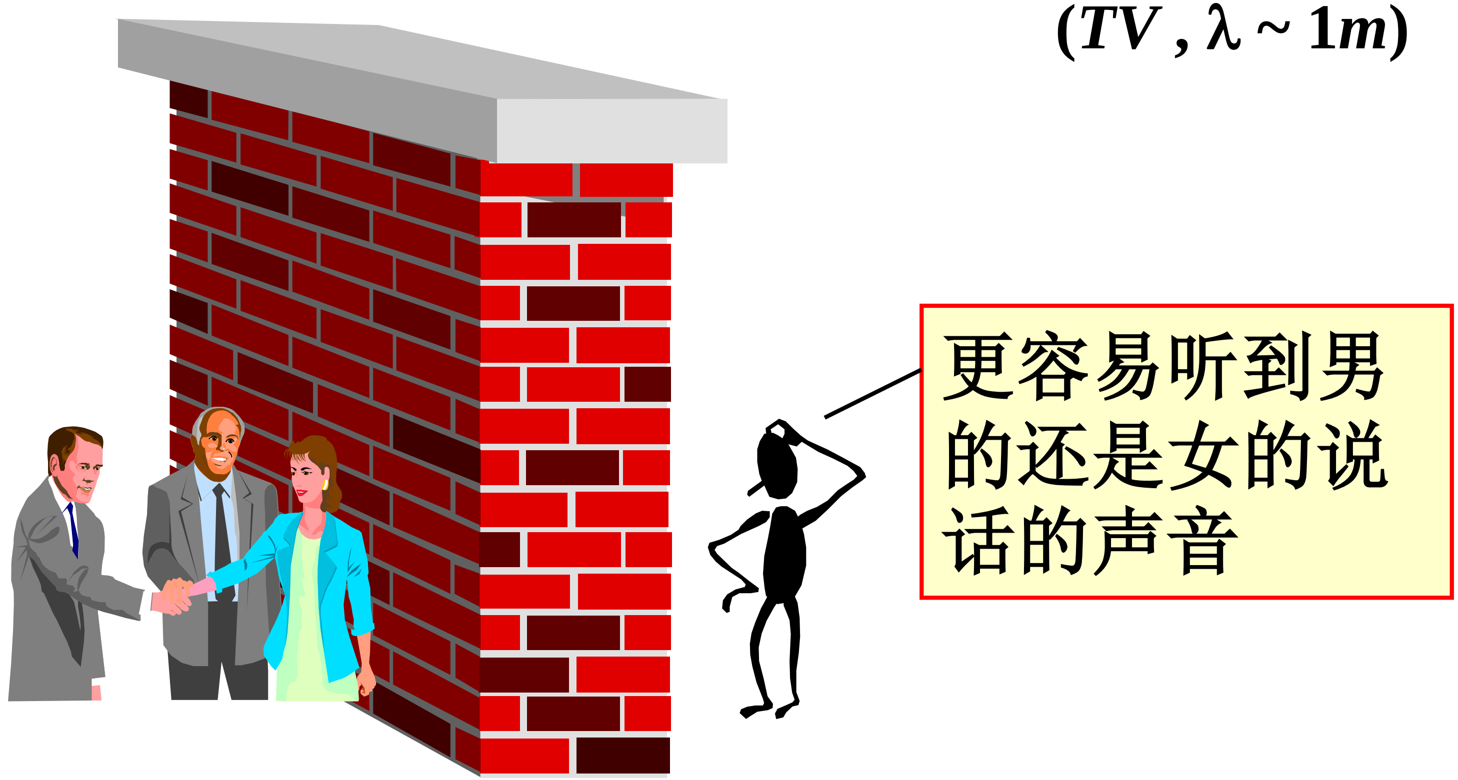
水波通过狭缝后的衍射



衍射：波在传播过程中遇到障碍物，能绕过障碍物的边缘，偏离原来直线传播的方向，在障碍物的阴影区内继续传播。

衍射：受限的尺度与波长相比





波的反射定律和折射定律

反射定律

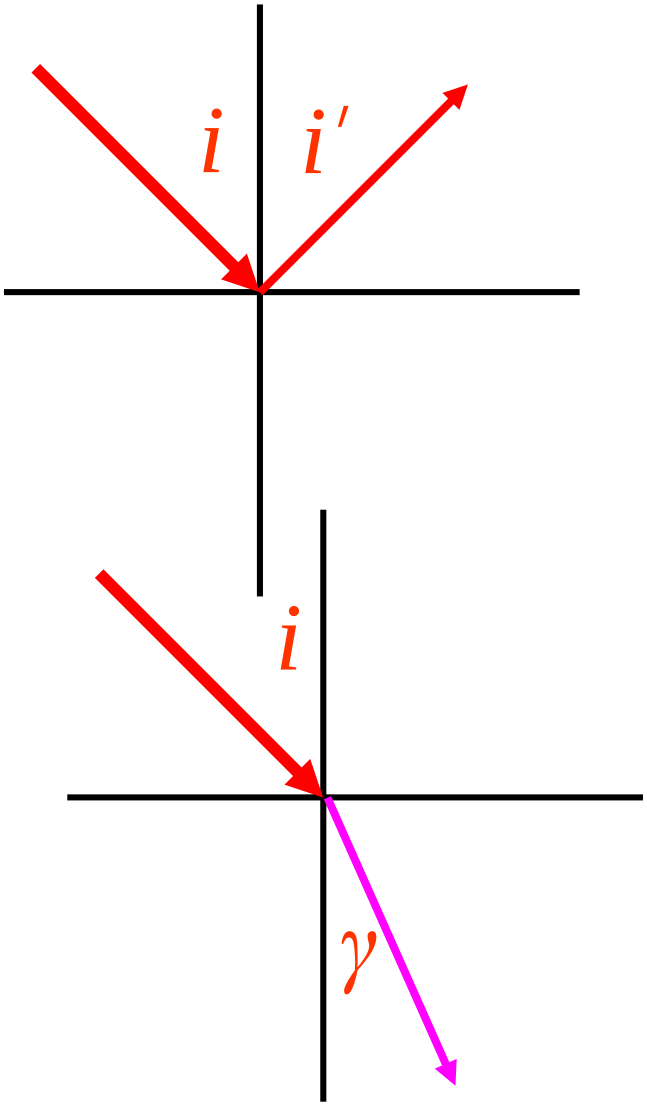
$$i = i'$$

•反射线、入射线和法线在同一平面内；反射角等于入射角。

波的折射定律

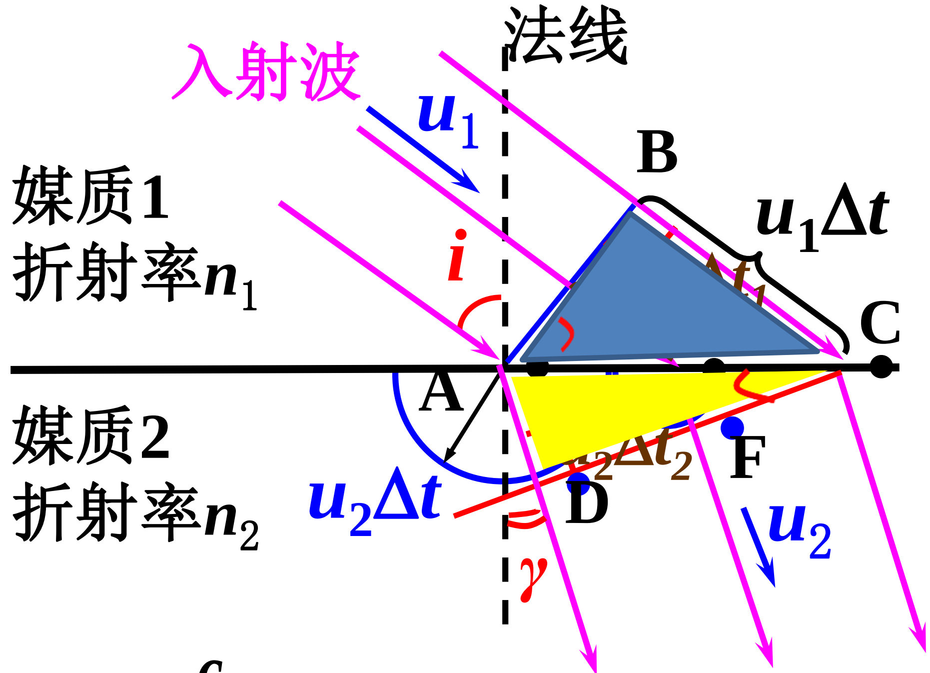
•折射线、入射线和法线在同一平面内；入射角的正弦与反射角的正弦之比等于波在两种介质中传播的速度之比

$$\frac{\sin i}{\sin \gamma} = \frac{u_1}{u_2}$$



2. 用惠更斯作图法导出光的折射定律和反射定律

- 作图步骤：
- 导出折射定律



$$\overline{BC} = u_1 \Delta t = \overline{AC}\sin i$$

$$\overline{AD} = u_2 \Delta t = \overline{AC}\sin\gamma$$

得 $\boxed{\dfrac{\sin i}{\sin\gamma} = \dfrac{u_1}{u_2}}$

绝对折射率定义：$n_1 = \dfrac{c}{u_1}$，$n_2 = \dfrac{c}{u_2}$

$\dfrac{\sin i}{\sin\gamma} = \dfrac{n_2}{n_1}$ 即 $\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin\gamma \quad \text{折射定律}}$