Mécanique - TD 3 - Correction :

3.1 - Exercices d'application

3.1.1 - Voyageur 2 :

1. Etant loin de tout corps céleste, la sonde n'est par conséquent soumise à aucune force : son mouvement est donc rectiligne uniforme.

2. Soit d la distance entre la Terre et la sonde. On note Δt le temps nécessaire pour que la communication effectue un aller-retour.

$$c = \frac{2d}{\Delta t} \Rightarrow d = \frac{c\Delta t}{2} \quad \text{avec } \Delta t = 31 \times 3600 + 39 \times 60 + 26$$
$$\Delta t = 113\,966\,s$$

D'où : $d = \dfrac{3.10^8 \times 113\,966}{2} = \boxed{17{,}1.10^{12}\,m}$

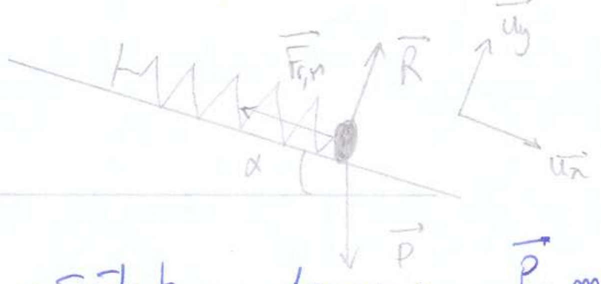
Notons v la vitesse de la sonde. Elle a parcouru la distance d en un temps $\Delta t'$ avec : $\Delta t' = 40 \times 365 \times 24 \times 3600 + 5 \times 30{,}5 \times 24 \times 3600 = 1{,}27.10^9\,s$.

Soit $v = \dfrac{d}{\Delta t'} = \dfrac{17{,}1.10^{12}}{1{,}27.10^9} = \boxed{13{,}5.10^3\,m.s^{-1}}$

3.1.2 - Oscillateur masse-ressort sur un plan incliné :

1. Avant toute chose, on définit le système étudié et le référentiel.

* Système : La masselotte M de masse m que l'on assimile à un point matériel.
* Référentiel : référentiel du laboratoire supposé galiléen sur la durée de l'expérience.
* BAM : La masselotte est soumise à :
  - son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
  - la réaction du support : $\vec{R} = R\vec{u_y}$
  - la force de rappel élastique : $\vec{F_{r/r}} = -k(x - l_0)\vec{u_x}$



Grâce au schéma précédent, on trouve : $\vec{P} = mg(+\sin\alpha\,\vec{u_x} - \cos\alpha\,\vec{u_y})$

* LFD : $m\ddot{x}\,\vec{u_x} = mg(\sin\alpha\,\vec{u_x} - \cos\alpha\,\vec{u_y}) + R\vec{u_y} - k(x - l_0)\vec{u_x}$

On projette sur $\vec{u_y}$ pour trouver R :

$0 = -mg\cos\alpha + R \Rightarrow \boxed{R = mg\cos\alpha}$

2. A l'équilibre, on a $\ddot{x} = 0$, d'où :

$$\vec{0} = mg(\cos\alpha\,\vec{u_x} - \sin\alpha\,\vec{u_y}) + R\vec{u_y} - k(x_{eq} - l_0)\vec{u_x}$$

On projette sur $\vec{u_x}$: $mg\cos\alpha - k(x_{eq} - l_0) = 0 \Rightarrow kx_{eq} = mg\cos\alpha + kl_0$

$$\Rightarrow x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}\cos\alpha$$

D'après nos notations, $x_{eq} = l_{eq}$, donc : $\boxed{l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}\cos\alpha}$

3. On projette la LFD sur $\vec{u_x}$, on obtient :

$$m\ddot{x} = mg\cos\alpha - k(x - l_0) \Rightarrow m\ddot{x} = -k\left(x - l_0 - \frac{mg}{k}\cos\alpha\right) = -k(x - l_{eq})$$

$\Rightarrow m\ddot{x} + k(x - l_{eq}) = 0$. Posons $\Delta l = x - l_{eq}$

$$\ddot{\Delta l} + \frac{k}{m}\Delta l = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\Delta l} + \omega_0^2 \Delta l = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

On reconnaît l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique.

4. On sait que les solutions de l'équation sont de la forme :

$$\Delta l(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)$$

Et $\Delta l(0) = \Delta l_0 = 5\text{ cm}$; $\dot{\Delta l}(0) = 0$

$\dot{\Delta l}(t) = -C_1\omega_0\sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2\cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{\Delta l}(0) = \omega_0 C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\Delta l(0) = C_1 = \Delta l_0 = 5\text{ cm}$

$$\Rightarrow \Delta l(t) = x - l_{eq} = \Delta l_0\cos(\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{x(t) = l_{eq} + \Delta l_0\cos(\omega_0 t)}$$

3.1.3 - Partie immergée de l'iceberg :

* Système étudié : il s'agit de l'iceberg
* Référentiel d'étude : on se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen
* BAM : L'iceberg est soumis à :
  * son poids : $\vec{P} = -\rho_G V g\,\vec{u_z}$ où $\vec{u_z}$ est l'axe ascendant.
  * la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = \rho_L V_I g\,\vec{u_z}$.

A l'équilibre, la somme des forces doit être nulle, d'où :

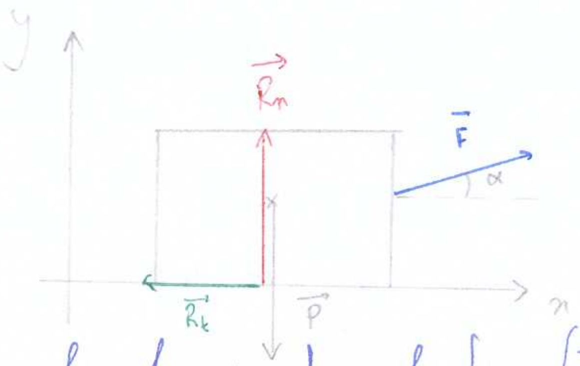
$$\rho_L V_I g - \rho_G V g = 0 \Rightarrow \rho_L V_I = \rho_G V \Rightarrow \boxed{\frac{V_I}{V} = \frac{\rho_G}{\rho_L}}$$

Application numérique : $\frac{V_I}{V} = \frac{0,92.10^3}{1,02.10^3} = 90\%$

$\Rightarrow$ La majeure partie de l'iceberg est immergée.

3.1.4 - Livraison d'une machine à laver :

* Système étudié : la caisse en bois de masse m
* Référentiel : terrestre supposé galiléen
* BAM : La caisse est soumise à :
  - son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
  - la réaction du support : $\vec{R} = \vec{R_t} + \vec{R_N}$
  - la force exercée par le livreur $\vec{F}$.



On décompose les forces dans la base $\{\vec{u_x}, \vec{u_y}\}$: $\vec{P} = -mg\,\vec{u_y}$, $\vec{R_n} = R_n\vec{u_y}$, $\vec{R_t} = -R_t\,\vec{u_x}$ et $\vec{F} = F\cos\alpha\,\vec{u_x} + F\sin\alpha\,\vec{u_y}$.

La caisse est immobile. L'application de la LFD donne alors :

$$\vec{0} = -mg\,\vec{u_y} + R_n\,\vec{u_y} - R_t\,\vec{u_x} + F\cos\alpha\,\vec{u_x} + F\sin\alpha\,\vec{u_y}.$$

On projette sur $\vec{u_y}$: $0 = -mg + R_n + F\sin\alpha \Rightarrow R_n = mg - F\sin\alpha$

On projette sur $\vec{u_x}$: $0 = -R_t + F\cos\alpha \Rightarrow R_t = F\cos\alpha$.

La caisse commencera à glisser pour : $R_t = f_s R_n$ soit

$$F_{min}\cos\alpha = f_s mg - F_{min}\sin\alpha \Rightarrow F_{min}(\cos\alpha + \sin\alpha) = f_s mg$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{min} = \frac{f_s mg}{\cos\alpha + \sin\alpha}}$$

Application numérique : Pour $\theta = 30°$: $F_{min}(30°) = \frac{0,5 \times 100 \times 9,8}{\cos(30°) + \sin(30°)}$

$\rightarrow F_{min} = 359\text{ N}$.

Et pour $\theta = 0°$ $\rightarrow F_{min}(0°) = f_s mg = 490\text{ N}$ $\Rightarrow$ La force est plus grande pour $\theta = 0°$ que pour $\theta = 30°$.

3.1.5 - Tir d'un boulet de canon :

1. * Système étudié : il s'agit du boulet de masse m.
* Référentiel : référentiel terrestre, supposé galiléen sur la durée de l'expérience.
* BAM : On néglige les frottements, le boulet est uniquement soumis à son poids.
* LFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g}$. On se place dans la base $\{\vec{u_x}, \vec{u_y}\}$, d'où

$$\ddot{x}\,\vec{u_x} + \ddot{y}\,\vec{u_y} = -g\vec{u_y}.$$

On projette sur $\vec{u_x}$: $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \int \ddot{x}\,dt = cste$ et $\dot{x}(0) = v_0\cos\alpha$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = v_0\cos\alpha \Rightarrow x(t) = \int \dot{x}(t)\,dt = \int v_0\cos\alpha\,dt = v_0\cos\alpha\, t + cste$

Et, à $t=0$, $x(0)=0$ $\Rightarrow \boxed{x(t) = v_0\cos\alpha\, t}$

On projette ensuite la LFD sur $\vec{u_y}$, on obtient :

$$\ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = \int \ddot{y}\,dt = \int -g\,dt = -gt + cste.$$

Et $\dot{y}(0) = v_0\sin\alpha \Rightarrow \dot{y}(t) = -gt + v_0\sin\alpha$

Puis $y(t) = \int(-gt + v_0\sin\alpha)\,dt = \dfrac{-gt^2}{2} + v_0\sin\alpha\, t + cste.$

Comme $y(0) = 0$, on a $\Rightarrow \boxed{y(t) = \dfrac{-gt^2}{2} + v_0\sin\alpha\, t}$

Les équations horaires du mouvement sont donc :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0\cos\alpha\, t \\ y(t) = \dfrac{-gt^2}{2} + v_0\sin\alpha\, t \end{cases}}$$

On cherche maintenant à obtenir la trajectoire, on a :

$x = v_0\cos\alpha\, t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$ et $y(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0\sin\alpha\, t$

D'où : $y = \dfrac{-g}{2} \times \dfrac{x^2}{(v_0\cos\alpha)^2} + \dfrac{v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}x$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{-g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2 + x\tan\alpha}$$

On trouve l'équation d'une parabole.

2. Notons x_p la portée. De manière évidente, on a : $y(x_p) = 0$, soit

$$\frac{-g}{2(v_0\cos\alpha^2)}x_p^2 + x_p\tan\alpha = x_p\left(\tan\alpha - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x_p\right) = 0$$

La solution $x_p = 0$ **ne nous intéresse** pas d'où :

$$x_p = \frac{2(v_0\cos\alpha)^2}{g}\tan\alpha = \frac{2v_0^2}{g}\times\cos^2\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha$$

Or $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow$ $\boxed{x_p = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)}$

La portée sera maximale pour $\sin(2\alpha_p) = 1$ soit $2\alpha_p = \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{\alpha_p = \frac{\pi}{4}}$

La prise en compte des frottements induit une diminution de la portée.

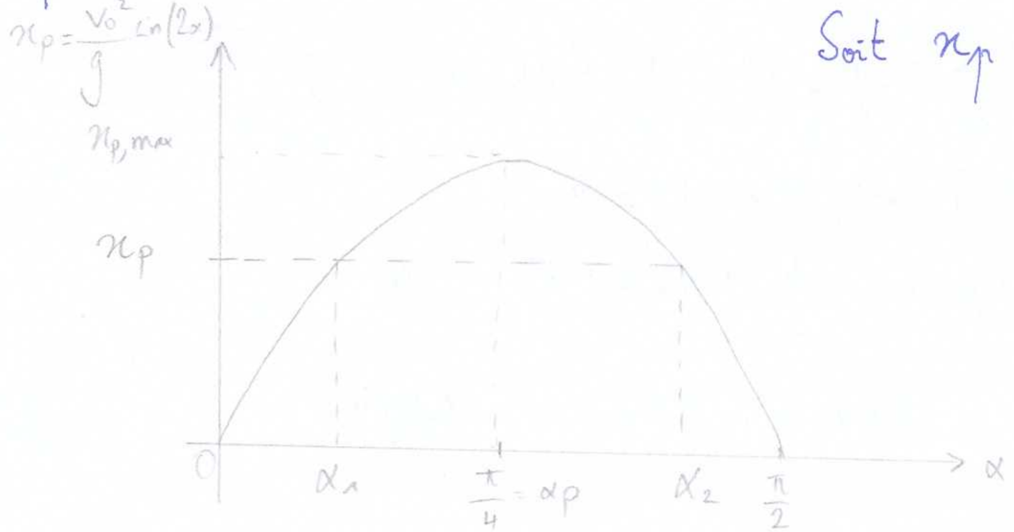
3. Par des raisons de symétrie, la hauteur maximale h est atteinte pour $x = \frac{x_p}{2}$. Soit :

$$h = \frac{-g}{2(v_0\cos\alpha)^2}\left(\frac{x_p}{2}\right)^2 + \frac{x_p}{2}\tan\alpha = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \times \frac{v_0^4}{g^2 \times 4} \times 4\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \frac{v_0^2}{2g}2\cos\alpha\sin\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow h = \frac{-v_0^2}{2g}\sin^2\alpha + \frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha \Rightarrow \boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha}$$

Application numérique : $h = \frac{82{,}0^2}{2 \times 9{,}8} \times \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 171 \text{ m}$

4. D'après le schéma de l'énoncé, on a $\alpha \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que $2\alpha \in [0 ; \pi]$. Représentons graphiquement la portée x_p, on observe une demi-période de sinus.



Soit $x_p < x_{p,max}$

On observe bien qu'il existe deux angles α_1 et α_2 qui correspondent à une même portée.

Pour α_1, on aura h_1 faible $\rightarrow$ on parlera de tir tendu.

Pour $\alpha_2 > \alpha_1$, on aura $h_2 > h_1$, le boulet montera plus haut et on parlera de tir en cloche.

5. Soit $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$, on a $x_p = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha_1) = v_0\cos\alpha_1 \, t_{F_1}$ avec t_{F_1} le

temps de tir.

D'où $t_{F_1} = \dfrac{v_0 \sin(2\alpha_1)}{g \cos(\alpha_1)} = 8{,}37\,s$

Déterminons l'angle α_2 correspondant à un tir en cloche : on a, en nous référant au graphique de la question précédente :

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \text{ d'où :}$$

$$t_{F_2} = \frac{v_0 \sin(\pi - 2\alpha_1)}{g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)} = 14{,}5\,s.$$

On observe que le tir en cloche est plus long.

3.1.6 - Mesure de la viscosité du glycérol

1. * Système étudié : la bille de masse $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{acier}$

* Référentiel : référentiel terrestre supposé galiléen.

* BAM : La bille est soumise à :

- son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{acier}\, g\, \vec{u_z}$ (on choisit $\vec{u_z}$ descendant)
- la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{gly}\, g\, \vec{u_z}$
- la force de frottements de Stokes : $\vec{F_s} = -6\pi\eta r \vec{v}$

* LFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{acier}\, g\, \vec{u_z} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{gly}\, g\, \vec{u_z} - 6\pi\eta r\vec{v}$

On note $\vec{v} = v_z \vec{u_z}$ soit, après projection :

$$m\dot{v}_z = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{acier}\, g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{gly}\, g - 6\pi\eta r v_z$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{acier}\, \dot{v}_z + 6\pi\eta r v_z = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{acier} - \rho_{gly})\, g$$

2. Les frottements vont devenir de plus en plus importants avec l'augmentation de la vitesse tandis que les autres forces vont rester constantes. Au bout d'un certain temps, la somme des forces va alors s'annuler et on atteindra une vitesse limite. On a alors :

$$6\pi\eta r v_{lim} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{acier} - \rho_{gly})\, g \Rightarrow v_{lim} = \frac{4\pi r^3 (\rho_{acier} - \rho_{gly})\, g}{3 \times 6\pi\eta r}$$

On a bien : $\boxed{v_{lim} = \dfrac{2gr^2(\rho_{acier} - \rho_{gly})}{9\eta}}$

3. Pour répondre à la question, on met l'équation différentielle sous forme canonique.

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{3 \times 6\pi\eta r}{4\pi r^3 \rho_{acier}} v_z = \left(1 - \frac{\rho_{gly}}{\rho_{acier}}\right) g$$

$$\Rightarrow \frac{dv_z}{dt} + \frac{9\eta}{2r^2 \rho_{acier}} v_z = \left(1 - \frac{\rho_{gly}}{\rho_{acier}}\right) g \quad \text{et} \quad \frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \left(1 - \frac{\rho_{gly}}{\rho_{acier}}\right) g$$

Soit $\tau = \dfrac{2r^2 \rho_{acier}}{9\eta}$

4. Supposons que la vitesse limite est déjà atteinte au 1er trait. On a alors :

$$v_{lim} = \frac{h}{\Delta t} \Rightarrow \frac{2gr^2(\rho_{acier} - \rho_{gly})}{9\eta} = \frac{h}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{2gr^2(\rho_{acier} - \rho_{gly})\Delta t}{9h}$$

avec
$$\left\{\begin{array}{l} g = 9{,}81 \text{ m.s}^{-2} \\ r = 2{,}5.10^{-3} \text{ m} \\ \rho_{acier} = 7\,830 \text{ kg.m}^{-3} \\ \rho_{gly} = 1\,260 \text{ kg.m}^{3} \\ \Delta t = 8{,}3 \text{ s} \\ h = 50{,}0 \text{ cm} \end{array}\right.$$

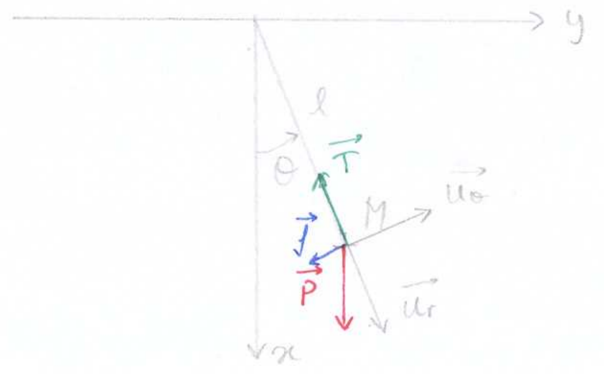
$\boxed{\eta = 1{,}49 \text{ Pa.s}}$

5. Calculons la valeur du temps caractéristique τ.

$\tau = 7{,}3$ ms. τ est faible devant le temps que mettra la bille pour atteindre le 1er trait. On en déduit que la vitesse limite sera largement atteinte au 1er trait.

3.1.7 - Pendule simple avec frottements :

1.



2. * Système étudié : le point M de masse m

* référentiel : terrestre supposé galiléen. * Base : polaire.

* BAM : La masselote est soumise à :

* son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\left(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right)$

* la tension du fil : $\vec{T} = -T\,\vec{u_r}$

* les forces de frottement : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

En coordonnées polaires, on a : $\vec{OM} = l\,\vec{u_r}$ et $\vec{v} = \left.\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = l\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ $(\dot{l} = 0)$

* LFD :

$$m\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R = mg\left(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right) - T\,\vec{u_r} - \alpha l\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$\Rightarrow ml\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - ml\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta} - T\,\vec{u_r} - \alpha l\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

On projette sur $\vec{u_\theta}$:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \alpha l\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

3. Dans le cadre des petites oscillations : $\sin\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0} \qquad \left(\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}\right)$$

4. Le polynôme caractéristique de l'équation précédente est :

$$r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{g}{l} = 0 \rightarrow \Delta = \frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{4g}{l}$$

Pour être en régime pseudo-périodique, on doit avoir :

$$\Delta < 0 \text{ soit } \frac{\alpha^2}{m^2} - \frac{4g}{l} < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{4g}{l} > \frac{\alpha^2}{m^2}}$$

5. La solution d'une telle équation est de la forme :

$$\theta(t) = e^{-\omega_0 t/2Q}\left(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\right) \quad \text{avec } \omega = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{4g}{l} - \frac{\alpha^2}{m^2}}$$

On a : $\theta(0) = C_1 = \theta_0$

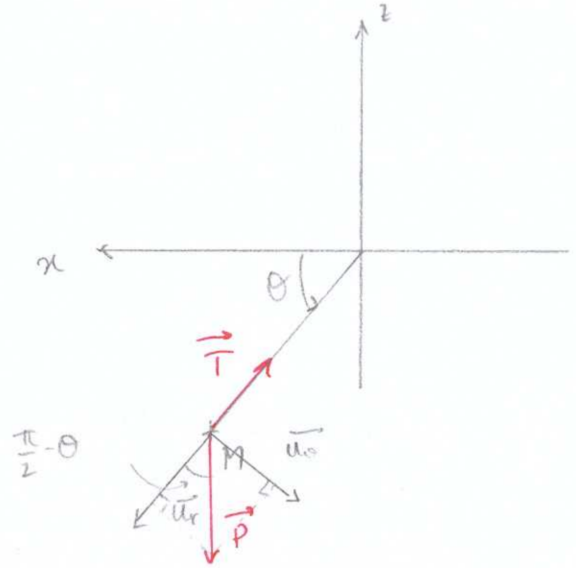
$$\dot{\theta}(t) = \frac{-\omega_0}{2Q}e^{-\omega_0 t/2Q}\left(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\right) + e^{-\omega_0 t/2Q}\left(-C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t)\right)$$

$$\dot{\theta}(0) = \frac{-\omega_0}{2Q}C_1 + C_2\omega \Rightarrow C_2 = \frac{\omega_0 C_1}{2Q\omega} = \frac{\omega_0\theta_0}{2Q\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0 e^{-\omega_0 t/2Q}\left(\cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin(\omega t)\right)}$$

3. 1. 8- Trajectoire circulaire :

* Système : point matériel M de masse m.
* Référentiel : terrestre supposé galiléen sur la durée de l'expérience. On utilisera pour repérer la position du mobile un repère polaire.
* BAM : Le mobile est soumis à :
  - son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
  - la tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{u_r}$



On décompose le poids : $\vec{P} = mg\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\vec{u_r} + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\vec{u_\theta}\right)$

$\Rightarrow \vec{P} = mg\left(\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta}\right)$

* LFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = mg\left(\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta}\right) - T\vec{u_r}$

La vitesse en coordonnées polaires est donnée par : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$, or $\dot{r} = 0$ car la trajectoire est un cercle : $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow mR\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - mR\dot{\theta}^2\vec{u_r} = mg\sin\theta\,\vec{u_r} + mg\cos\theta\,\vec{u_\theta} - T\vec{u_r}$

En projetant sur $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$, on obtient les équations du mouvement :

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = mg\cos\theta \\ -mR\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta - T \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} R\ddot{\theta} - g\cos\theta = 0 \\ R\dot{\theta}^2 + \frac{T}{m} - g\sin\theta = 0 \end{cases}}$$

2. On a : $T = mg\sin\theta + mR\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{T = m\left(g\sin\theta + R\dot{\theta}^2\right)}$

3. On a $v = R\dot{\theta}$, d'où $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$, la tension du fil peut donc se réécrire : $T = m\left(g\sin\theta + \frac{v^2}{R}\right)$. Dans la position (1), on a

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ soit $T\left(\frac{3\pi}{2}\right) = m\left(-g + \frac{v^2}{R}\right)$.

Pour que la trajectoire reste un cercle, on doit avoir $T > 0$, d'où $\frac{v^2}{R} - g > 0 \Rightarrow v > \sqrt{Rg}$, on a donc $\boxed{v_{min} = \sqrt{Rg}}$

4. Repartons de $R\ddot{\theta} - g\cos\theta = 0$

$\Rightarrow R\ddot{\theta} - g\cos\theta = 0 \Rightarrow R\ddot{\theta}\dot{\theta} - g\dot{\theta}\cos\theta = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{R\dot{\theta}^2}{2} - g\sin\theta\right] = 0$

$\Rightarrow \frac{R\dot{\theta}^2}{2} - g\sin\theta = cste$. Or, pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$, on a $v = R\dot{\theta} = v_{lim}$

Soit : $cste = \frac{R}{2} \times \frac{v_{lim}^2}{R^2} - g\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{v_{lim}^2}{2R} + g$

$\Rightarrow \boxed{\frac{R\dot{\theta}^2}{2} - g\sin\theta = \frac{v_{lim}^2}{2R} + g} \Rightarrow R\dot{\theta}^2 = 2g\sin\theta + \frac{v_{lim}^2}{R} + 2g$

Et on sait que : $T = m\left(g\sin\theta + R\dot{\theta}^2\right) = m\left(g\sin\theta + 2g\sin\theta + \frac{v_{lim}^2}{R} + 2g\right)$

$\Rightarrow \boxed{T = m\left(g(2 + 3\sin\theta) + \frac{v_{lim}^2}{R}\right)}$

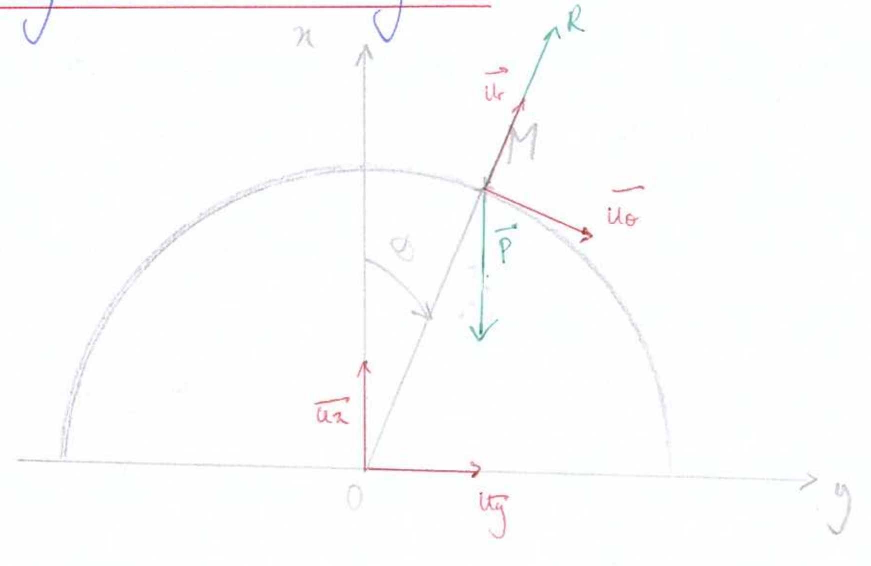
On calcule $\frac{dT}{d\theta} = 3mg\cos\theta$ soit $\frac{dT}{d\theta} = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

On sait que T est minimale en $\frac{3\pi}{2}$, on en déduit qu'elle sera maximale en $\frac{\pi}{2}$.

3.2 - Exercices de réflexion :

3.2.1 - Glissade sur un igloo :

1.



2. * Système étudié : point M de masse m.
   * Référentiel : terrestre supposé galiléen
   * Base : polaire $\{\vec{u_r}, \vec{u_\theta}\}$

* BAM : Le mobile est soumis à :
  - son poids : $\vec{P} = +mg\left(-\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right)$
  - la réaction normale : $\vec{N} = N\vec{u_r}$

* LFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -mg\cos\theta\,\vec{u_r} + mg\sin\theta\,\vec{u_\theta} + N\vec{u_r}$.

Et, en base polaire : $\vec{OM} = R\vec{u_r}$ d'où, comme $R = \text{cte}$:
$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ et $\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$

$\Rightarrow m R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - mR\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} = -mg\cos\theta\,\vec{u_r} + mg\sin\theta\,\vec{u_\theta} + N\vec{u_r}$

On projette sur $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$:

$$\boxed{\begin{cases} R\ddot{\theta} = g\sin\theta \\ -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \end{cases}}$$

3. On a : $R\ddot{\theta} = g\sin\theta \Rightarrow R\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0 \Rightarrow R\ddot{\theta}\dot{\theta} - g\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{R\dot{\theta}^2}{2} + g\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{R\dot{\theta}^2}{2} + g\cos\theta = \text{cste}$

Or, à $t = 0$, on a $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta = \theta_0$, soit $\text{cte} = g\cos\theta_0$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{R\dot{\theta}^2}{2} + g\cos\theta = g\cos\theta_0}$$

4. On utilise la deuxième équation :

$N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$ et $R\dot{\theta}^2 = 2g\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)$ d'où :

$N = mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0 + 2mg\cos\theta \Rightarrow \boxed{N = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)}$

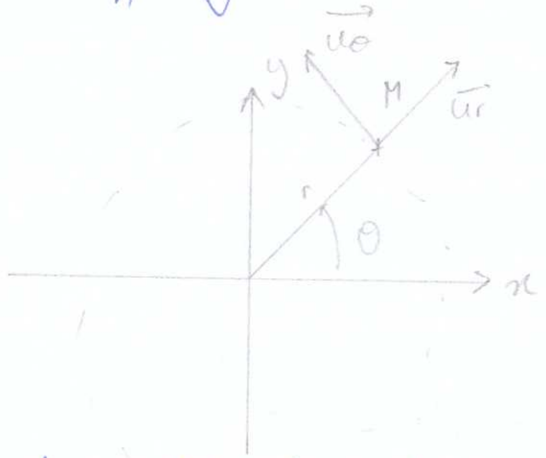
5. L'enfant peut décoller si la réaction normale s'annule. On note θ_d l'angle de décollement.

$3\cos\theta_d = 2\cos\theta_0 \Rightarrow \cos\theta_d = \dfrac{2}{3}\cos\theta_0 \Rightarrow \boxed{\theta_d = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\cos\theta_0\right)}$

3.2-2 : Résolution de problème - chaussette dans un sèche-linge :

Commençons par définir le système étudié et le référentiel d'étude.

* système : chaussette, assimilée à un point M de masse m.
* référentiel : terrestre supposé galiléen.
* base polaire



On s'intéresse à la 1ère phase du mouvement, qui est circulaire uniforme.
On a alors : $\vec{v} = R\omega_0 \vec{u_\theta}$ où R est le rayon du sèche-linge et ω_0 sa vitesse de rotation.

La chaussette est soumise à : * son poids : $\vec{P} = mg\left(-\sin\theta \vec{u_r} - \cos\theta \vec{u_\theta}\right)$
* la réaction : $\vec{N} = -N\vec{u_r} - T\vec{u_\theta}$

On applique la LFD :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} \Rightarrow -mR\omega_0^2\vec{u_r} = -mg\sin\theta\vec{u_r} - mg\cos\theta\vec{u_\theta} - N\vec{u_r} - T\vec{u_\theta}$$

On projette sur $\vec{u_r}$:

$$-mR\omega_0^2 = -mg\sin\theta - N \quad \text{soit} \quad N = mR\omega_0^2 - mg\sin\theta$$

$$N = m\left(R\omega_0^2 - g\sin\theta\right)$$

Pour que la chaussette décolle, il faut que N s'annule, soit

$$R\omega_0^2 - g\sin\theta_d = 0 \Rightarrow \sin\theta_d = \frac{R\omega_0^2}{g} \Rightarrow \boxed{\theta_d = \arcsin\left(\frac{R\omega_0^2}{g}\right)}$$

On observe que θ_d n'est défini que pour $\frac{R\omega_0^2}{g} \leq 1$ soit

$$\omega_0^2 \leq g/R \quad \text{et} \quad \omega_0 \leq \sqrt{g/R}$$

En prenant R = 50 cm et $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$, on a : $\omega_0 \leq 4{,}43\ rad.s^{-1}$
soit $\omega_0 \leq 42{,}3$ tours.min^{-1}.

En prenant $\omega_0 = 20$ tour/min $= 2{,}1\ rad.s^{-1}$, on a $\boxed{\theta_d = 13°}$