第三节 正态总体方差的假设检验

一、单个总体的情况

二、两个总体的情况

三、小结

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均为未知,

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本,

(1) 要求检验假设: $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$, $H_1:\sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

其中 σ_0 为已知常数. 设显著水平为 α,

由于 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 当 H_0 为真时,

比值 $\dfrac{s^2}{\sigma_0^2}$ 在1附近摆动, 不应过分大于1或过分小于1,

根据第六章§2, 当 H_0 为真时, $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$,

取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 作为统计量,

拒绝域的形式 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2$,

此处 k_1 和 k_2 的值由下式确定:

$P\{H_0$ 为真, 拒绝 $H_0\}$

$$= P_{\sigma_0^2}\left\{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right) \cup \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right)\right\} = \alpha.$$

为了计算方便, 习惯上取

$$P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le k_1\right\} = \frac{\alpha}{2}, \quad P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge k_2\right\} = \frac{\alpha}{2},$$

故得 $k_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \quad k_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1).$

拒绝域为:

$$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1).}$$

指它们的和集

(2)单边检验问题的拒绝域 (设显著水平为 α)

右边假设检验: $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$,

因为 H_0 中的全部 σ^2 都比 H_1 中的 σ^2 要小,

当 H_1 为真时, S^2 的观察值 s^2 往往偏大,

拒绝域的形式为: $s^2 \ge k$.

此处 k 的值由下式确定:

$$P\{H_0 \text{为真, 拒绝} H_0\} = P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\{S^2 \ge k\}$$

$$= P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\}$$

$$\le P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\}. \quad (\text{因为}\ \sigma^2 \le \sigma_0^2)$$

要使 $P\{H_0\ \text{为真,拒绝}\ H_0\} \le \alpha,$

只需令 $P_{\sigma^2 \le \sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ge \frac{(n-1)k}{\sigma_0^2}\right\} = \alpha.$

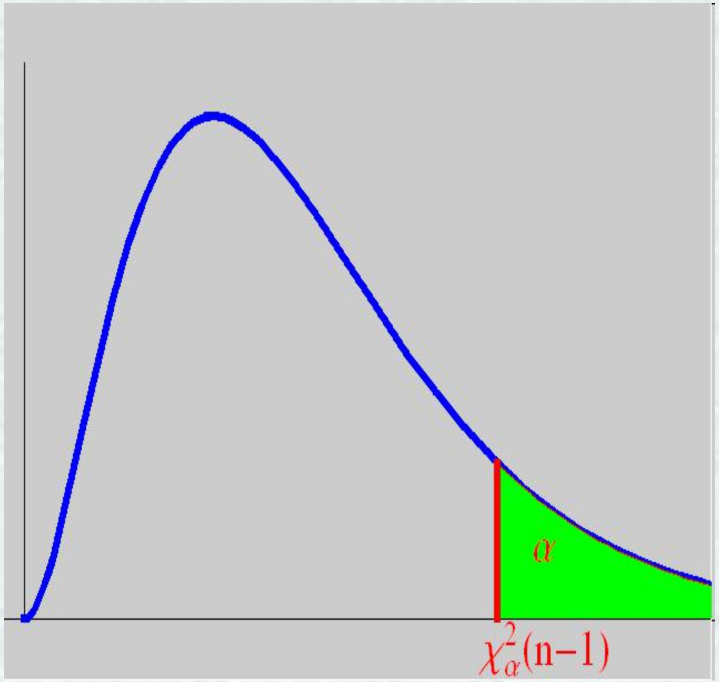
因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 所以 $\frac{(n-1)k}{\sigma_0^2} = \chi_\alpha^2(n-1),$

故 $k = \dfrac{\sigma_0^2}{n-1}\chi_\alpha^2(n-1),$

右边检验问题的拒绝域为

$$s^2 \ge \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi_\alpha^2(n-1),$$

即 $\boxed{\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_\alpha^2(n-1).}$



同理左边检验问题：$H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$，$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$，

拒绝域为 $\boxed{\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1).}$

上述检验法称为 χ^2 检验法.

例1 某厂生产的某种型号的电池, 其寿命长期以来服从方差$\sigma^2=5000$ (小时²) 的正态分布, 现有一批这种电池, 从它生产情况来看, 寿命的波动性有所变化. 现随机的取26只电池, 测出其寿命的样本方差 $s^2=9200$(小时²). 问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化? $(\alpha = 0.02)$

解 要检验假设 $H_0: \sigma^2 = 5000,\quad H_1: \sigma^2 \neq 5000,$

$$n = 26,\quad \alpha = 0.02,\quad \sigma_0^2 = 5000,$$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.01}(25) = 44.314,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.99}(25)=11.524,$$

拒绝域为: $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}\le 11.524$, 或 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}\ge 44.314$.

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\dfrac{25\times 9200}{5000}=46>44.314$,

所以拒绝 H_0,

认为这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化.

例2 (续第八章第二节例1)如果只假设切割长度服从正态分布, 问该机切割的金属棒长度的标准差有无显著变化? $(\alpha=0.05)$

解 因为总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均为未知,

要检验假设 $H_0:\sigma=0.15,\quad H_1:\sigma\neq 0.15,$

即 $H_0:\sigma^2=0.0225,\quad H_1:\sigma^2\neq 0.0225,$

$n=15,\quad \bar{x}=10.48,\quad \alpha=0.05,\quad s^2=0.056,$

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\dfrac{14\times 0.056}{0.0225}=34.844,$

查表得 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(14)=5.629,$

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(14)=26.119,$

于是 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\dfrac{14\times 0.056}{0.0225}=34.844>26.119,$

所以拒绝 $H_0,$

认为该机切割的金属棒长度的标准差有显著变化.

例3 某厂生产的铜丝的折断力指标服从正态分布, 现随机抽取9根, 检查其折断力, 测得数据如下(单位:千克): 289, 268, 285, 284, 286, 285, 286, 298, 292. 问是否可相信该厂生产的铜丝的折断力的方差为20? $(\alpha = 0.05)$

解 按题意要检验 $H_0:\sigma^2 = 20,\ H_1:\sigma^2 \neq 20,$

$n = 9,\quad \bar{x} = 287.89,\quad s^2 = 20.36,$

查表得 $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18,\quad \chi^2_{0.025}(8) = 17.5,$

于是 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{8 \times 20.36}{20} = 8.14,\quad 2.18 < 8.14 < 17.5,$

故接受 H_0,认为该厂生产铜丝的折断力的方差为20.

例4 某自动车床生产的产品尺寸服从正态分布，按规定产品尺寸的方差 σ^2 不得超过0.1, 为检验该自动车床的工作精度, 随机的取25件产品, 测得样本方差 $s^2=0.1975$, $\bar{x}=3.86$. 问该车床生产的产品是否达到所要求的精度? $(\alpha=0.05)$

解 要检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.1,\quad H_1:\sigma^2>0.1,$

$$n=25,\quad \chi^2_{0.05}(24)=36.415,$$

因为 $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\frac{24\times 0.1975}{0.1}=47.4>36.415,$$

所以拒绝 H_0,

认为该车床生产的产品没有达到所要求的精度.

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$的样本,

$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$ 的样本,

且设两样本独立, 其样本方差为 $S_1{}^2, S_2{}^2$.

又设 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2$均为未知,

需要检验假设: $H_0:\sigma_1{}^2 \le \sigma_2{}^2$, $H_1:\sigma_1{}^2 > \sigma_2{}^2$,

当 H_0 为真时，$E(S_1^2)=\sigma_1^2 \le \sigma_2^2 = E(S_2^2)$,

当 H_1 为真时，$E(S_1^2)=\sigma_1^2 > \sigma_2^2 = E(S_2^2)$,

当 H_1 为真时，观察值 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ 有偏大的趋势，

故拒绝域的形式为 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \ge k$,

此处 k 的值由下式确定：

$$P\{H_0\text{为真,拒绝}H_0\} = P_{\sigma_1^2 \le \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} \ge k\right\}$$

$$\leq P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \geq k\right\}, \quad (\text{因为} \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \leq 1)$$

要使 $P\{H_0 \text{为真}, \text{拒绝} H_0\} \leq \alpha,$

只需令 $P_{\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2}\left\{\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \geq k\right\} = \alpha.$

根据**第六章§2定理四**知

定理四

$$\frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$$

即 $k = F_{\alpha}(n_1 - 1,\ n_2 - 1).$

检验问题的拒绝域为 $\boxed{F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{\alpha}(n_1 - 1,\ n_2 - 1).}$

上述检验法称为 F 检验法.

例5 试对第八章第二节例4中的数据检验假设

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$ (取 $\alpha = 0.01$)

解 $n_1 = n_2 = 10,$ 拒绝域见表 8.1.

附表8-1

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq F_{0.005}(10-1,\ 10-1) = 6.54$$

或 $$\frac{s_1^2}{s_2^2} \leq F_{1-0.005}(10-1,\ 10-1)$$

$$= \frac{1}{F_{0.005}(9,\ 9)} = \frac{1}{6.54} = 0.153,$$

因为 $s_1^2 = 3.325, \quad s_2^2 = 2.225,$

所以 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 1.49,$

$$0.153 < \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.49 < 6.54,$$

故接受 H_0, 认为两总体方差相等.

两总体方差相等也称两总体具有方差齐性.

例6 试对第七章第五节例9中的数据检验假设

$H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$. (取 $\alpha = 0.1$)

解 $n_1 = 18$, $n_2 = 13$, 拒绝域见表 8.2. 附表8-2

$$F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.1}(18-1, 13-1) = 1.96,$$

拒绝域为 $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} \ge 1.96$,

因为 $s_1^2 = 0.34$, $s_2^2 = 0.29$, $\dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 1.17 < 1.96$,

故接受 H_0, 认为两总体具有方差齐性.

例7 两台车床加工同一零件, 分别取6件和9件测量直径, 得: $s_x^2 = 0.345$, $s_y^2 = 0.357$. 假定零件直径服从正态分布, 能否据此断定 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.$(\alpha = 0.05)$

解 本题为方差齐性检验:

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2, \quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$$

$$F_{0.025}(5,\ 8) = 4.82, \quad F_{0.975}(5,\ 8) = 0.148,$$

取统计量 $F = \dfrac{s_x^2}{s_y^2} = \dfrac{0.345}{0.357} = 0.9644,$

$0.148 < F < 4.82$, 故接受 H_0, 认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

例8 分别用两个不同的计算机系统检索10个资料，测得平均检索时间及方差(单位:秒)如下:

$$\bar{x} = 3.097,\ \ \bar{y} = 3.179,\ \ s_x^2 = 2.67,\ \ s_y^2 = 1.21,$$

假定检索时间服从正态分布, 问这两系统检索资料有无明显差别? $(\alpha = 0.05)$

解 根据题中条件, 首先应检验方差的齐性.

假设 $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2, \quad H_1: \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$

$$F_{0.025}(9,\ 9) = 4.03, \quad F_{0.975}(9,\ 9) = 0.248,$$

取统计量 $F = \dfrac{s_x^2}{s_y^2} = \dfrac{2.67}{1.21} = 2.12,$

$0.248 < F = 2.12 < 4.03,$

故接受 H_0, 认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

再验证 $\mu_x = \mu_y$,

假设 $H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x \neq \mu_y$.

取统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$,

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$.

当H_0为真时，$t \sim t(n_1+n_2-2)$.

$n_1=10,\quad n_2=10,\quad t_{0.05}(18)=2.101,$

因为$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{3.097-2.179}{\sqrt{\frac{10(2.67+1.21)}{18}}\cdot\sqrt{\frac{2}{10}}}$$

$=1.436<2.101,$ 故接受 H_0,

认为两系统检索资料时间无明显差别.

三、小结

1. 单个正态总体方差的检验法 —— χ^2 检验法;

2. 两个正态总体方差的检验法 —— F 检验法;

正态总体均值、方差的检验法见下表

(显著性水平为 α)

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ (σ_1^2, σ_2^2已知)	$Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z \rvert \ge z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1 - \mu_2 \le \delta$ $\mu_1 - \mu_2 \ge \delta$ $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知)	$t = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-2)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu - \mu_0 > \delta$ $\mu - \mu_0 < \delta$ $\mu - \mu_0 \ne \delta$	$t \ge t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $t \le -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ $\lvert t \rvert \ge t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 1)$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2未知)	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

附表8-1

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5				$\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $(\mu_1,\mu_2$未知$)$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或 $F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \frac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

$$F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\text{或}$$
$$F \le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$$

附表8-2

$$F \geq F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)			$\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2未知)	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \geq F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \leq F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
7	$\mu_D \leq 0$ $\mu_D \geq 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \frac{\overline{D} - 0}{S_D / \sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \neq 0$	$t \geq t_{\alpha}(n-1)$ $t \leq -t_{\alpha}(n-1)$ $\lvert t \rvert \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

第六章§2定理四

设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$与$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是具有相同方差的两正态总 体$N(\mu_1,\sigma^2), N(\mu_2,\sigma^2)$的样本,且这两个样本互相独立,设$\overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$,

$\overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ 分别是这两个样本的均 值,

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2,\ S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2$$

分别是这两个样本的方 差,则有

(1) $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1);$$

(2) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时,

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad S_w=\sqrt{S_w^2}.$$