北京化工大学

Beijing University of Chemical Technology

# 信号与系统

## 第二章 连续时间系统的时域分析

主讲教师：张凤元

# 主要内容 CONTENTS


1

# 连续时间信号的时域分析

-- 方程齐次解

-- 方程特解

-- 方程通解

-- 初始条件

-- 经典解法

时域分析方法:不涉及任何变换，直接求解系统的微分、积分方程式，这种方法比较直观，物理概念比较清楚，是学习各种变换域方法的基础。

输入输出描述:一元$n$阶微分方程

状态变量描述:$n$元一阶微分方程

本课程中我们主要讨论输入、输出描述法

- 列写系统的微分方程：根据元件约束，网络拓扑约束等
- 解方程求解系统响应 $r(t)$：
  - 经典法
  - 双零法
    - 零输入响应
    - 零状态响应
  - 变换域法

经典法：求解常系数线性微分方程的一般方法；

零输入响应：可以用经典法求解。

零状态响应：任意激励 $e(t)$ 下的零状态响应 $r_{zs}(t)$ 可通过冲激响 $h(t)$ 应用卷积法来计算。

•许多实际系统可以用线性系统来模拟。

•对于线性时不变系统，系统的参数不随时间而改变，这样的系统可以用线性常系数微分方程模型描述。

•经典解法中，对于高阶系统或激励输入信号较复杂时，求解系统响应时计算过程复杂，求解并不方便。而在变换域中求解显得比较方便。所以人们的兴趣更集中于变换域分析。

•一般根据实际系统的物理特性列写系统的微分方程。

•对于电路系统，主要是根据元件特性约束和网络拓扑约束列写系统的微分方程。

元件特性约束：表征元件特性的关系式。例如二端元件电阻，电容，电感各自的电压与电流的关系，以及四端元件互感的初、次级电压与电流的关系等等。

网络拓扑约束：由网络结构决定的电压电流约束关系，KCL, KVL.

一个线性系统，其激励信号 $e(t)$ 与响应信号 $r(t)$ 之间的关系，可以用下列形式的微分方程式来描述。

$$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)=E_0\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+E_m e(t)$$

系统为时不变的，则 ***C***，***E*** 均为常数，此方程为常系数的 ***n*** 阶线性常微分方程。

**阶次*n*：** 方程的阶次***n*** 由独立的动态元件的个数决定。

**分析系统的经典方法：**

（1）列写常系数线性微分方程；（2）求方程对应的齐次方程的通解；

（3） 求方程的一个特解；（4）方程的通解 = 齐次解+特解；

（5）将初始条件代入通解得到完全响应。

我们一般将激励信号加入的时刻定义为0，响应为 $t \geq 0_+$ 时方程的解，初始条件

$$r(0^+),\quad \frac{\mathrm{d}\,r(0^+)}{\mathrm{d}\,t},\quad \frac{\mathrm{d}^2\,r(0^+)}{\mathrm{d}\,t^2},\quad \cdots,\quad \frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0^+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}$$

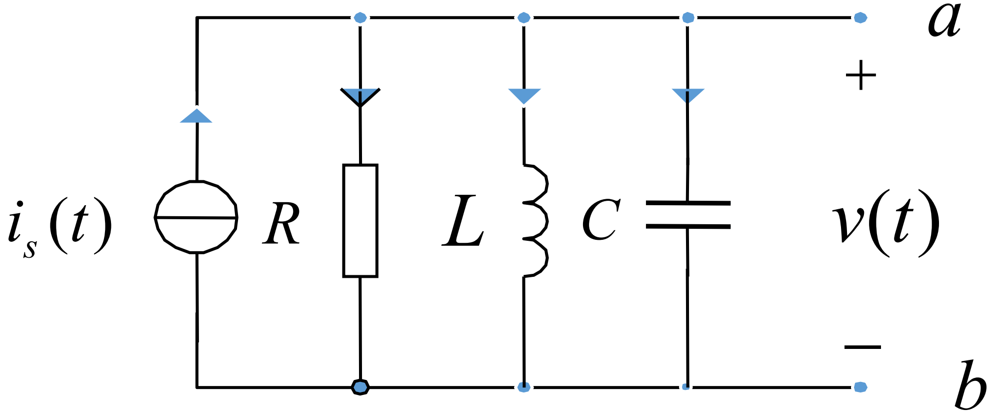
# 1.7 几种典型激励函数相应的特解形式



<table>
<tr><th>激励函数 $e(t)$</th><th>响应函数 $r(t)$ 的特解</th></tr>
<tr><td>$E$(常数)</td><td>$B$(常数)</td></tr>
<tr><td>$t^p$</td><td>$B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}$</td></tr>
<tr><td>$e^{\alpha t}$</td><td>$Be^{\alpha t}$</td></tr>
<tr><td>$\cos(\omega t)$</td><td rowspan="2">$B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$\sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$t^p e^{\alpha t} \sin(\omega t)$</td><td rowspan="2">$\left(B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}\right) e^{\alpha t} \cos(\omega t)$<br>$+\left(D_1 t^p + D_2 t^{p-1} + \cdots + D_p t + D_{p+1}\right) e^{\alpha t} \sin(\omega t)$</td></tr>
<tr><td>$t^p e^{\alpha t} \cos(\omega t)$</td></tr>
</table>

# 1.8 例1 求并联电路的端电压 $v(t)$ 与激励 $i_s(t)$ 间的关系

**解答**




电阻 $i_R(t)=\dfrac{1}{R}v(t)$

电感 $i_L(t)=\dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

电容 $i_C(t)=C\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$

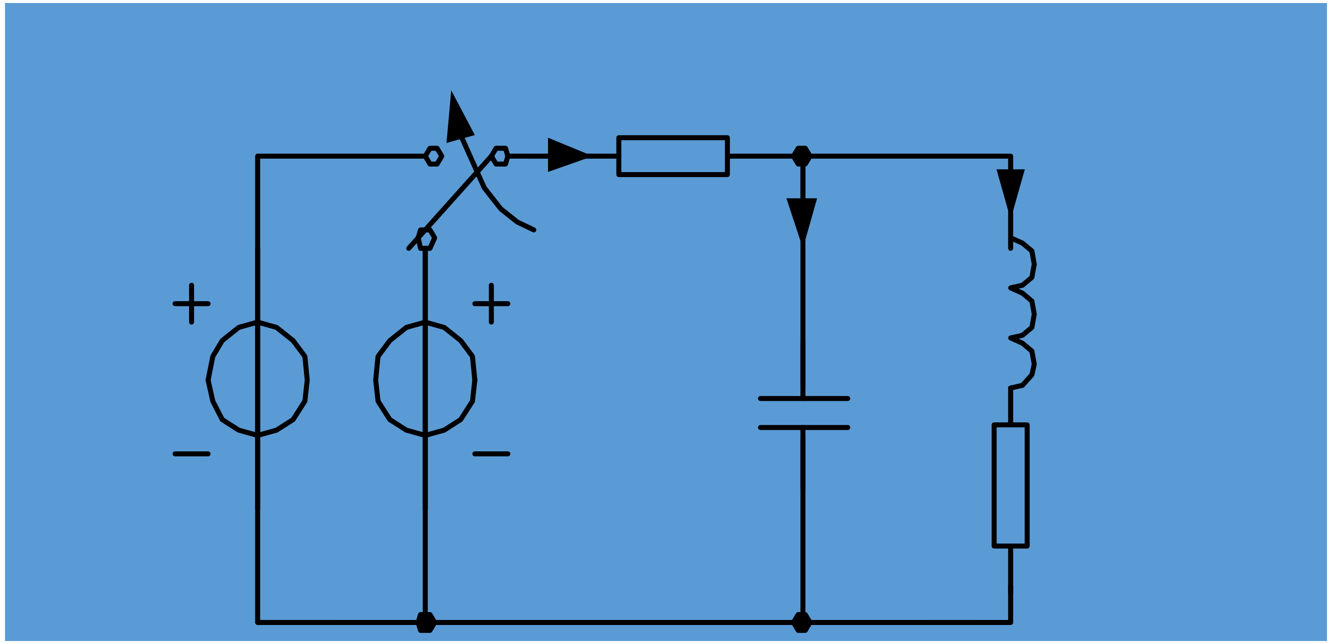
根据KCL $i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_S(t)$

代入上面元件伏安关系，并化简有

$$C\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{L}v(t)=\frac{\mathrm{d}i_S(t)}{\mathrm{d}t}$$

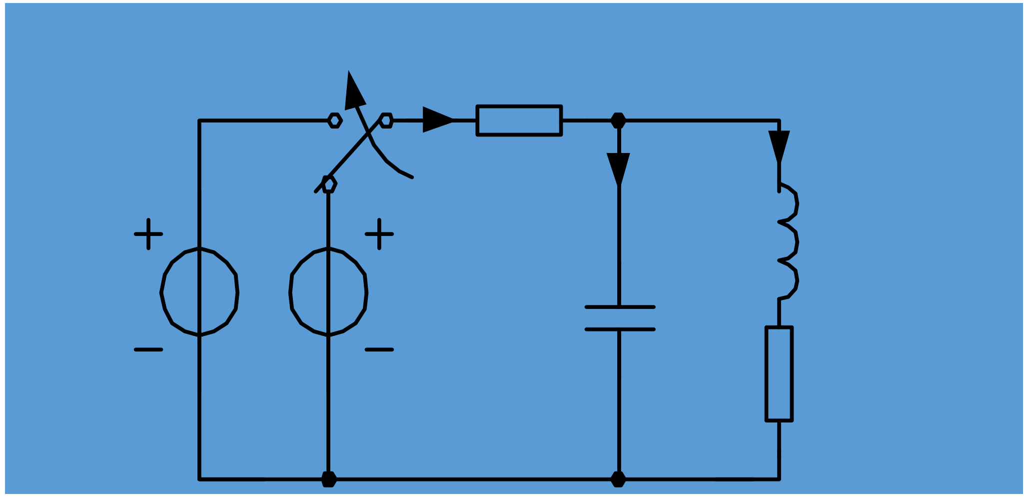
这是一个代表RCL并联电路系统的二阶微分方程。

给定如图所示电路 $t$ 时0开关S位于1的位置而且已经达到稳态；当 $t=0$ 时，S由1转向2。试建立 $i(t)$ 电流的微分方程，并求解 $i(t)$ 在 $t\geq 0$ 时的变化。



解答

（1）列写电路的微分方程




$$R_1 i(t) + v_c(t) = e(t)$$

$$v_C(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t) + i_L(t)R_2$$ 结点电压

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t) + i_L(t)$$ 回路方程

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t) + 7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + 10i(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t) + 6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t) + 4e(t)}$$ 消去中间变量

## (2) 求系统的完全响应通解

**系统的特征方程：**

$$\alpha^2+7\alpha+10=0 \quad ,\ (\alpha+2)(\alpha+5)=0$$

**特征根：**

$$\alpha_1=-2,\ \alpha_2=-5$$

**齐次通解：**

$$i_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t} \quad (t\ge 0_+)$$

**非齐次特解：**

由于$t \geq 0_+$时　　$e(t)=4V$

**方程右端自由项为** $4\times 4$ ，因此令特解 $i_p(t)=B,$

$$10B=4\times 4 \qquad \therefore B=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$$

**要求系统的完全响应为：**

$$i(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}+\frac{8}{5} \qquad (t\geq 0_+)$$

## (3) 求系统的完全响应

**开关S从1切换到2后，系统的初始条件为：**

$$r(0_+) = \frac{14}{5}A \qquad \frac{dr}{dt}(0_+) = -2A/s$$

**将初始条件代入通解得：**

$$\begin{cases} i(0_+) = A_1 + A_2 + \dfrac{8}{5} = \dfrac{14}{5} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_+) = -2A_1 - 5A_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{4}{3} \\ A_2 = -\dfrac{2}{15} \end{cases}$$

**完全响应为：** $$i(t) = \left(\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} + \frac{8}{5}\right)A \qquad (t \geq 0_+)$$


谢谢大家， 下讲再见！
北京化工大学
新闻网