Intégration

Table des matières

Introduction

Une infinité de petits rectangles, tous semblables…

L'intégrale est un outil fondamental des mathématiques, qu'on ne présente plus. Entre représentation de l'aire sous une courbe donnée, réciproque de la dérivée, version continue d'une somme infinie, ses visages multiples lui donnent un nombre incalculable d'applications, théoriques comme pratiques.

Dans ce chapitre, nous allons nous efforcer de construire rigoureusement l'intégrale, d'abord en la définissant dans des cas simples, puis nous étendrons sa définition de plus en plus, tout en s'assurant de conserver ses propriétés essentielles au fur et à mesure. En partant de la définition comme aire sous une courbe, nous montrerons ensuite le lien qu'elle entretient avec les autres outils mathématiques.

L'intégrale que nous allons définir dans ce chapitre est l'intégrale dite « de Riemann » (plus précisément, une variante équivalente à celle-ci). C'est l'outil idéal pour travailler à notre niveau sur les fonctions continues (éventuellement par morceaux), puis développer les intégrales sur un intervalle (éventuellement divergentes). Il existe d'autres approches permettant d'englober des classes plus générales de fonctions, notamment l'intégrale de Lebesgue, mais la difficulté théorique de la définition les place en dehors du cadre de ce cours. Par ailleurs, tous les résultats énoncés ici restent vrais dans le cadre de définitions plus générales.

I – Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Dans cette partie, on va chercher à construire rigoureusement l'outil mathématique « intégrale », qui définit l'aire sous la courbe d'une fonction. Pour cela, nous allons partir d'un cas simple (où l'on ne calcule que l'aire de rectangles), puis nous allons *prolonger* successivement la définition, en s'assurant de conserver les propriétés essentielles de l'intégrale. Pour commencer, nous aurons donc besoin de définir quelques notions pour le cas de base.

1– Fonctions en escalier et fonctions continues par morceaux définies sur un segment à valeurs réelles

Dans toute cette partie, on considérera le segment $I = [a;b]$, avec $a < b$ deux réels.

Définition 1. On appelle **subdivision** du segment $[a;b]$ toute suite finie $\sigma = (c_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ de nombre réels vérifiant :

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b$$

L'ensemble $\{c_k \ / \ k \in [\![0;n]\!]\}$ est l'*ensemble des points de la subdivision*. On définit par ailleurs le **pas** de la subdivision, noté h, par :

$$h \overset{\text{def}}{=} \max_{k \in [\![1;n]\!]} (c_k - c_{k-1})$$

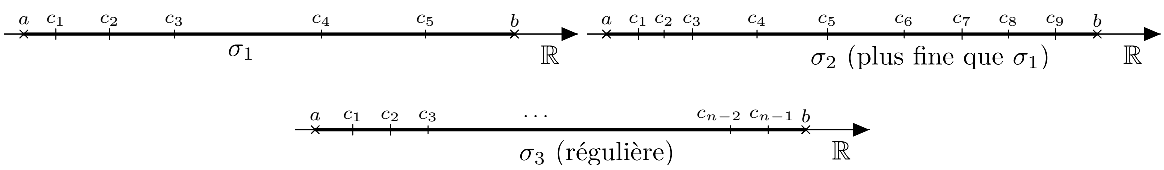
Enfin, on dit qu'une subdivision est **régulière** sitôt que : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ c_k - c_{k-1} = h$. Tous les intervalles $[c_{k-1}, c_k]$ ont alors la même taille $h = \dfrac{b-a}{n}$ et on a :

$$\forall k \ \in [\![0;n]\!],\ c_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Définition 2. Soient σ_1 et σ_2 deux subdivision d'un intervalle I. Si l'ensemble des points de σ_1 est inclus dans l'ensemble des points de σ_2, on dit que σ_1 est **plus fine** que σ_2.

Remarque 1. Si une division σ_1 est *plus fine* qu'une division σ_2, alors le pas de la première (h_1) est inférieur ou égal au pas de la seconde (h_2). Par ailleurs, la relation « plus fine que » est une relation d'ordre (partiel) sur les subdivisions d'un intervalle I donné.

Exemple 1. Trois subdivisions de l'intervalle $[a;b]$:

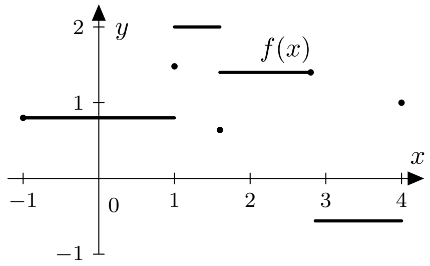


Définition 3. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est une **fonction en escalier** sur $[a;b]$ sitôt qu'il existe une subdivision σ de $[a;b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle ouvert de la subdivision. C'est-à-dire :

$$\exists \sigma = (c_k)_{k \in [\![0;n]\!]} \text{ subdivision de } [a;b] \ / \ \forall k \in [\![1;n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in]c_{k-1}, c_k[,\ f(x) = \lambda_k$$

Une telle subdivision σ (qui n'est pas unique, toute subdivision plus fine convient également) est dite **subordonnée**, ou **adaptée** à f. On notera $\mathcal{E}_{[a;b]}$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$.

Exemple 2. Une fonction $f \in \mathcal{E}_{[-1;4]}$:



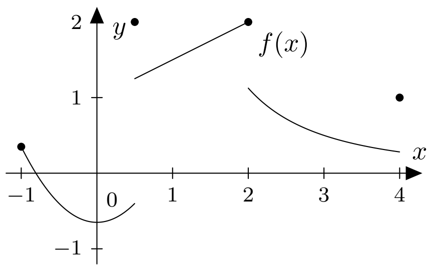
Définition 4. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est une **fonction continue par morceaux** sur $[a;b]$ sitôt qu'il existe une subdivision σ de $[a;b]$ telle que :

1– f soit continue sur chaque intervalle ouvert de la subdivision.

2– f admet une limite finie
   - à droite en a
   - à gauche en b
   - à droite et à gauche en chaque autre point de la subdivision

On notera $\mathscr{C}^0_m([a;b])$ (parfois juste $\mathscr{C}_m([a;b])$) l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$.

Exemple 3. La fonction f représentée ci-dessous est continue par morceaux sur $[-1;4]$:



La fonction $g : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ n'est pas continue par morceaux, car elle n'a pas de limite finie en 0^+.

Proposition 1. $(\mathscr{C}^0_m([a;b]), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, sous-algèbre de $(\mathbb{R}^{[a;b]}, +, \times, \cdot)$.

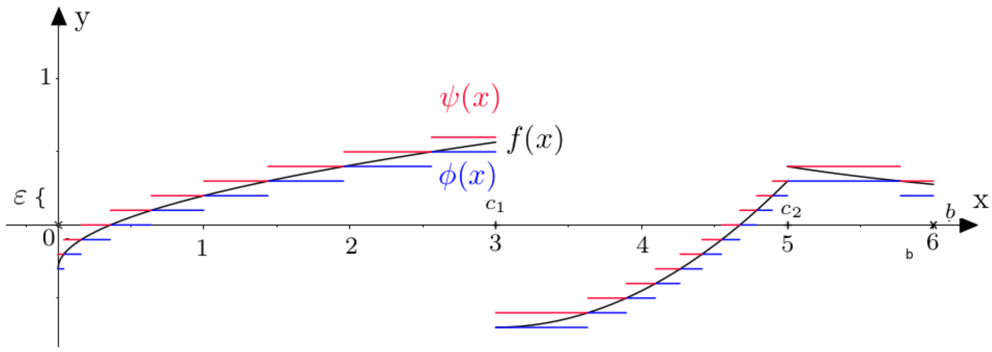
Théorème 1. *Approximation uniforme d'une fonction continue par fonctions en escalier.*
Soit $f \in \mathscr{C}^0_m([a;b])$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists (\phi, \psi) \in \mathcal{E}^2_{[a;b]}$ telles que :

$$\forall x \in [a;b], \begin{cases} \phi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \\ \psi(x) - \phi(x) \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

On peut encadrer toute fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier, de différence au plus ε.

Remarque 2. Au besoin, on peut même imposer que la subdivision subordonnée à ϕ et ψ soit régulière, quitte à prendre un pas de subdivision plus petit.
La démonstration de ce théorème étant plutôt technique (notamment par son utilisation de la notion de *continuité uniforme* et de théorèmes associés), elle ne sera pas au programme de ce cours. Cependant, on se convainc assez intuitivement que c'est vrai.

Exemple 4. Encadrement d'une fonction f continue par morceaux sur $[0;6]$ par deux fonctions ϕ et ψ en escalier, de différence au plus ε :



2– Intégrale sur un segment d'une fonction en escalier

C'est le cas le plus simple : puisqu'on sait calculer l'aire d'un rectangle, on ne va avoir aucun problème à définir l'intégrale dans le cas des fonctions en escalier. Nous nous servirons ensuite de cette définition (et du théorème d'approximation) pour construire l'intégrale de fonction plus générales.

2.a) Définition

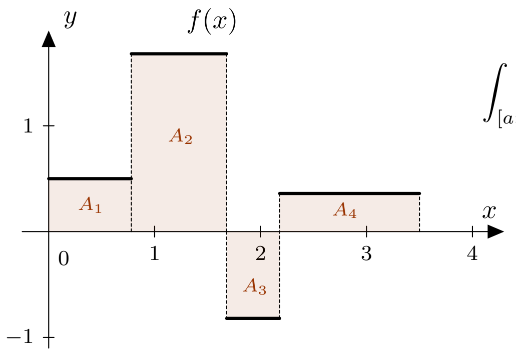
Définition 5. Soit $f \in \mathcal{E}_{[a;b]}$, et σ une subdivision subordonnée à f. On a notamment :

$$\sigma = (a, c_1, \ldots, c_{n-1}, b) \text{ et } a < c_1 < \cdots < c_{n-1} < b \text{ et } \forall k \in [\![1;n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in]c_{k-1}; c_k[,\ f(x) = \lambda_k$$

On définit alors **l'intégrale de f sur** $[a;b]$ le réel étant *la somme algébrique* des aires des rectangles formés par la courbe f :

$$\int_{[a;b]} f \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_{k-1})\lambda_k$$

On le notera parfois également $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. La notation ne fait pas intervenir σ, car le réel obtenu est indépendant du choix de la subdivision adaptée à f.



$$\int_{[a;b]} f = A_1 + A_2 - A_3 + A_4$$

2.b) Propriétés

Une fois définie, l'intégrale sur un segment d'une fonction en escalier à plusieurs propriétés intéressantes, que l'on connaît déjà mais qu'il est bon de rappeler, et de démontrer.

Proposition 2. L'intégrale sur un segment d'une fonction en escalier vérifie les trois propriétés suivantes :

1– *Linéarité de l'intégrale* :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (f,g) \in \mathcal{E}_{[a;b]}^2,\ \int_{[a;b]} \lambda f + g = \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$$

Cela revient a dire que l'application $f \mapsto \displaystyle\int_{[a;b]} f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}_{[a;b]}$ pris comme $\mathbb{R}$ espace-vectoriel.

2– *Positivité* :

$$\forall f \in \mathcal{E}_{[a;b]},\ f \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f \geqslant 0$$

3– *Relation de* Chasles :

$$\forall f \in \mathcal{E}_{[a;b]},\ \forall c \in]a;b[,\ \int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$$

Démonstration 1. Voir **Exercice 2.**

Corollaire 1. En conséquence de la linéarité et de la positivité, on a les propriétés suivantes :

1– *Croissance* :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{E}_{[a,b]},\ f \leqslant g \implies \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g$$

2– *Inégalité triangulaire* :

$$\forall f \in \mathcal{E}_{[a;b]},\ \left| \int_{[a;b]} f \right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|$$

3– *Inégalité de la moyenne* :

$$\forall f \in \mathcal{E}_{[a;b]},\ m \leqslant f \leqslant M \implies m(b-a) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant M(b-a)$$

Démonstration 2. Voir **Exercice 2.**

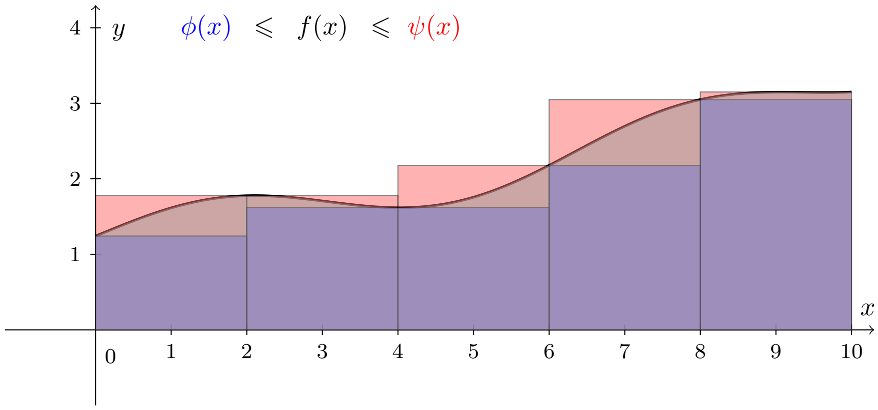
Remarque 3. Ces propriétés ne sont, en soi, pas très utiles en l'état, puisque nous les avons montrées uniquement dans le cas des fonctions en escalier. Cependant, la définition plus générale de l'intégrale que nous donnerons ensuite nous permettra de « transférer » ces propriétés au cas général.
D'autre part, il faut faire attention : si $\displaystyle\int_{[a;b]} f = 0$, on peut avoir $f \neq 0$ par exemple si f change de signe.
Même quand elle est de signe constant, f peut-être non nulle en chaque point de discontinuité (par contre, on peut montrer que dans ce cas, f doit être nulle sur chaque intervalle ouvert de toute subdivision qui lui est subordonnée).

3– Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux

Remarque 4. On veut définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. D'une part, on va vouloir conserver les propriétés précédentes, notamment la croissance de l'intégrale. C'est-à-dire que si $f \in \mathscr{C}_m^0([a;b])$, encadrée par ψ et ψ fonctions de $\mathcal{E}_{[a;b]}$, alors on a

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et on voudra } \int_{[a;b]} \phi \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} \psi$$

Ce qui correspond au fait qu'intuitivement, l'aire sous la courbe de f est comprise entre les aires sous les courbes de ϕ et ψ :



Par ailleurs, ce résultat doit être vrai pour *toute* fonctions ϕ et ψ vérifiant nos conditions (en escalier et encadrant f) : on peut donc passer aux bornes supérieures et inférieures, et obtenir :

$$\sup_{\substack{\phi \leqslant f \\ \phi \in \mathcal{E}_{[a;b]}}} \int_{[a;b]} \phi \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant \inf_{\substack{\psi \geqslant f \\ \psi \in \mathcal{E}_{[a;b]}}} \int_{[a;b]} \psi$$

Notamment, si ces deux bornes (supérieure et inférieure) sont égales (ce qui à l'air intuitivement vrai, et ce qui nous sera garanti à partir du théorème d'approximation uniforme), alors on peut utiliser ce résultat pour définir de manière unique et rigoureuse l'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. Nous verrons ensuite qu'une telle définition nous permet de conserver toutes les propriétés voulues.

3.a) Définition

Proposition 3. Soit $f \in \mathscr{C}^0_m([a;b])$. Alors :

$$\sup_{\substack{\phi \leqslant f \\ \phi \in \mathcal{E}_{[a;b]}}} \int_{[a;b]} \phi = \inf_{\substack{\psi \geqslant f \\ \psi \in \mathcal{E}_{[a;b]}}} \int_{[a;b]} \psi$$

Démonstration 3. Le **Théorème 1** nous assure que :

1– $E^-(f) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \int_{[a;b]} \phi \;/\; \phi \leqslant f \text{ et } \phi \in \mathcal{E}_{[a;b]} \right\}$ est non-vide, et majoré par n'importe quel élément de $E^+(f)$, donc il possède une borne supérieure S.

2– $E^+(f) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \int_{[a;b]} \psi \;/\; \psi \geqslant f \text{ et } \psi \in \mathcal{E}_{[a;b]} \right\}$ est non-vide, et minoré par n'importe quel élément de $E^-(f)$, donc il possède une borne inférieure I.

Nous devons donc montrer que $S = I$. Supposons que $S \neq I$, on peut alors poser $\varepsilon = \dfrac{I - S}{2(b-a)}$. Par la propriété de croissance de l'intégrale, on a que $S \leqslant I$, donc $\varepsilon > 0$. D'après le **Théorème 1**, on a : $\exists (\phi_0, \psi_0) \in \mathcal{E}^2_{[a;b]}$ telles que :

$$\forall x \in [a;b], \begin{cases} \phi_0(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_0(x) \\ \psi_0(x) - \phi_0(x) \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Cependant, on a $\int_{[a;b]} \phi_0 \in E^-(f)$, donc $\int_{[a;b]} \phi_0 \leqslant S$, et $\int_{[a;b]} \psi_0 \in E^+(f)$, donc $\int_{[a;b]} \psi_0 \geqslant I$, et on en déduit :

$$\int_{[a;b]} \psi_0 - \phi_0 \geqslant (I - S) = 2\varepsilon(b-a) > \varepsilon(b-a)$$

Or, on a également
$$\psi_0(x) - \phi_0(x) \leqslant \varepsilon \implies \int_{[a;b]} \psi_0 - \phi_0 \leqslant \varepsilon(b-a)$$
Par l'absurde, on en déduit donc que $S = I$, ce qui donne le résultat demandé. □

Définition 6. Soit $f \in \mathscr{C}^0_m([a;b])$. On définit alors **l'intégrale de f sur** $[a;b]$ le réel suivant :
$$\int_{[a;b]} f \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\phi \leqslant f \\ \phi \in \mathcal{E}_{[a;b]}}} \int_{[a;b]} \phi = \inf_{\substack{\psi \geqslant f \\ \psi \in \mathcal{E}_{[a;b]}}} \int_{[a;b]} \psi$$

Remarque 5. 1– On le notera parfois également $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, comme pour les fonctions en escalier.

2– Cette définition est compatible avec la précédente ; si on prend une fonction en escalier (donc, continue par morceaux), les deux définitions donnent le même résultat.

3– De manière équivalente, grâce au théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux, on peut définir les suites de fonctions en escalier $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall x \in [a;b], \begin{cases} \phi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_n(x) \\ \psi_n(x) - \phi_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n} \end{cases}$$
Et poser $I_n = \displaystyle\int_{[a;b]} \phi_n$, et $S_n = \displaystyle\int_{[a;b]} \psi_n$. On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \overset{\text{def}}{=} \int_{[a;b]} f$

3.b) Propriétés

Proposition 4. L'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à les mêmes propriétés que celle des fonctions en escalier :

1– *Linéarité de l'intégrale* :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (f,g) \in \mathscr{C}^0_m([a;b])^2,\ \int_{[a;b]} \lambda f + g = \lambda \int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$$
Cela revient a dire que l'application $f \mapsto \displaystyle\int_{[a;b]} f$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0_m([a;b])$ pris comme $\mathbb{R}$ espace-vectoriel.

2– *Positivité* :
$$\forall f \in \mathscr{C}^0_m([a;b]),\ f \geqslant 0 \implies \int_{[a;b]} f \geqslant 0$$

3– *Relation de* CHASLES :
$$\forall f \in \mathscr{C}^0_m([a;b]),\ \forall c \in]a;b[,\ \int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f$$

Corollaire 2. Et par conséquence, on a le corollaire similaire :

1– *Croissance* :
$$\forall (f,g) \in \mathscr{C}^0_m([a;b]),\ f \leqslant g \implies \int_{[a;b]} f \leqslant \int_{[a;b]} g$$

2– *Inégalité triangulaire* :
$$\forall f \in \mathscr{C}^0_m([a;b]),\ \left|\int_{[a;b]} f\right| \leqslant \int_{[a;b]} |f|$$

3– *Inégalité de la moyenne* :
$$\forall f \in \mathscr{C}^0_m([a;b]),\ m \leqslant f \leqslant M \implies m(b-a) \leqslant \int_{[a;b]} f \leqslant M(b-a)$$

Démonstration 4. Voir **Exercice 3.**

Remarque 6. On a vu qu'on avait pas tout a fait la propriété que, si l'intégrale d'une fonction positive est nulle, alors la fonction est nulle. Notamment, on a des problèmes aux points de discontinuités de notre fonction. Les deux proposition suivantes font part de ce cas : il suffit d'un point de continuité strictement positif pour que l'intégrale soit strictement positive. En conséquence, une fonction continue, positive est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Proposition 5. Soit $f \in \mathscr{C}_m^0([a;b])$, $f \geqslant 0$. Soit $x \in [a;b]$ / f est continue au point x_0 (à droite, à gauche, ou les deux), et $f(x_0) > 0$. Alors :

$$\int_{[a;b]} f > 0$$

Corollaire 3. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_{[a;b]} |f| = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Démonstration 5. Pour la proposition : f étant continue en x_0, on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0)\ /\ \forall x \in [a;b],\ x \in V \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(définition de $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$ avec les voisinages). Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2} f(x_0)$ et $x \in V$, on a alors :

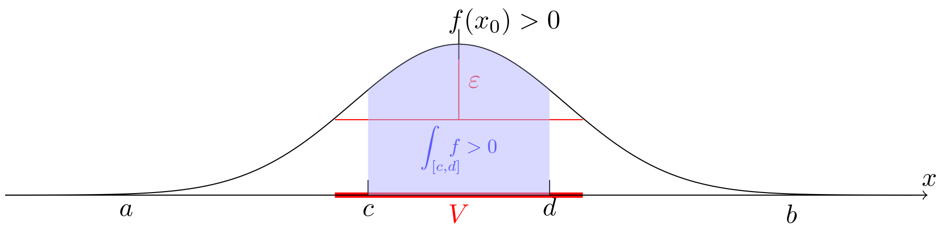
$$|f(x_0)| < |f(x)| + |f(x_0) - f(x)| \implies f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$$

Donc sur tout V, on a $f(x) > \dfrac{1}{2} f(x_0)$. Par définition, V contient au moins un segment $[c;d]$ avec $c < d$, et donc par l'inégalité de la moyenne, on a :

$$\int_{[c;d]} f \geqslant \frac{1}{2} f(x_0)(d-c) > 0$$

Enfin, comme $f \geqslant 0$, la positivité de l'intégrale donne $\displaystyle\int_{[a;c]} f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{[d;b]} f \geqslant 0$, et donc par la relation de Chasles, on trouve :

$$\int_{[a;b]} f = \underbrace{\int_{[a;c]} f}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int_{[a;c]} f}_{>0} + \underbrace{\int_{[a;c]} f}_{\geqslant 0} > 0$$



Pour le corollaire, le sens réciproque est évident, le sens direct se fait par l'absurde : s'il existe une valeur de f non-nulle, on applique la proposition. On utilise ici la valeur absolue, sans imposer f positive, car c'est le cas le plus fréquent d'utilisation.

Proposition 6. Inégalité de Cauchy–Schwarz
Soient f et g deux fonctions réelles continues sur le segment $[a;b]$. Alors on a l'inégalité suivante :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

Avec égalité si et seulement si f et g sont *proportionnelles.*

Démonstration 6. Voir **Exercice 4.**

4– Exercices

Exercice I-1. Soit $f \in \mathcal{E}_{[a;b]}$. Montrer qu'il existe une subdivision de $[a;b]$ adaptée à f, que l'on notera σ_f, telle que toute (autre) subdivision de $[a;b]$ adaptée à f est plus fine que σ_f.

Exercice I-2. Démontrer les six résultats de la **Propriété 3** et son corollaire. Pensez à vous aider des indications données dans la vidéo.

Exercice I-3. Démontrer les six résultats de la **Propriété 4** et son corollaire. Pensez à vous aider des indications données dans la vidéo.

Exercice I-4. *Démonstration de l'inégalité de* Cauchy-Schwarz
Soient f et g deux fonctions réelles, non-nulles, continues sur un segment $[a;b]$. Posons

$$P(x) = \int_a^b (f(t) + xg(t))^2\mathrm{d}t$$

1– Montrer que $P(x)$ est un polynôme de degré 2. En le notant $Ax^2 + Bx + C$, précisez les valeurs de A, B, C.
2– Justifier que $B^2 - 4AC \leqslant 0$
3– Conclure en démontrant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4– Montrer que si $f = \lambda g$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on est dans le cas d'égalité.
5– Montrer que si on est dans le cas d'égalité, alors nécessairement, $\exists\lambda \in \mathbb{R} \;/\; f = \lambda g$.
Indication ; que vaut le discriminant du polynôme dans le cas d'égalité ? que dire sur une éventuelle racine ?

Exercice I-5. Soit $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et telle que $f(0) = 0$. f est-elle une fonction continue par morceaux sur $[-\pi;\pi]$? Pourquoi ?