最优化方法

主讲教师：郭秋敏

qmguo@mail.buct.edu.cn

什么是最优化 (Optimization)

最优化就是在复杂环境中遇到的许多决策中，挑选最优决策的一门科学。

什么是最优化方法

最优化方法就是寻找最优决策的方法。

线性规划、整数规划、非线性规划、目标规划、动态规划 （五规划）

对策论、存储论、排队论、决策论、图论 （五论）

第一章　线性规划

§1　线性规划问题的基本概念

例1 (生产计划问题) 某工厂生产甲、乙、丙、丁四种产品，需要用 A、B、C三种设备，每 kg 产品在生产中需要占用的设备机时数、可以获得的利润以及三种设备可利用的机时数如下表所示，制订使总利润最大的生产计划。

每 kg 产品占用的机时数(小时)	产品甲	产品乙	产品丙	产品丁	设备能力(小时)
设备A	1.5	1.0	2.4	1.0	2000
设备B	1.0	5.0	1.0	3.5	8000
设备C	1.5	3.0	3.5	1.0	5000
利润 (元/ kg)	5.24	7.30	8.34	4.18	

例2 (配料问题) 某工厂要用四种合金T_1，T_2，T_3和T_4为原料，经熔炼成为一种新的不锈钢G。这四种原料含元素铬 (Cr)，锰 (Mn)和镍 (Ni)的含量 (%)、这四种原料的单价以及新的不锈钢材料 G 所要求的Cr，Mn 和 Ni 的最低含量 (%)如下表所示：

	T_1	T_2	T_3	T_4	G
Cr	3.21	4.53	2.19	1.76	3.20
Mn	2.04	1.12	3.57	4.33	2.10
Ni	5.82	3.06	4.27	2.73	4.30
单价(元/公斤)	115	97	82	76	

设熔炼时重量没有损耗，要熔炼成100公斤不锈钢 G，应选用原料T_1，T_2，T_3和T_4各多少公斤，使成本最小。

例3 (背包问题) 一只背包最大装载重量为50公斤。现有三种物品，每种物品数量无限。每种物品每件的重量、价值如下表所示：

	物品1	物品2	物品3
重量(公斤/件)	10	41	20
价值(元/件)	17	72	35

要在背包中装入这三种物品各多少件，使背包中的物品价值最高。

例4 (运输问题) 设某种物资从两个供应地A_1，A_2运往三个需求地B_1，B_2，B_3。各供应地的供应量、各需求地的需求量、每个供应地到每个需求地的单位物资运价如下表所示。

运价(元/吨)	B_1	B_2	B_3	供应量(吨)
A_1	2	3	5	35
A_2	4	7	8	25
需求量（吨）	10	30	20	

如何安排运输，使总运费最小。

例5 (指派问题) 有张、王、李、赵4位教师被分配教语文、数学、物理、化学4门课程，每位教师教一门课程，每门课程由一位老师教。根据这四位教师以往教课的情况，他们分别教这四门课程的平均成绩如下表：

	语文	数学	物理	化学
张	92	68	85	76
王	82	91	77	63
李	83	90	74	65
赵	93	61	83	75

要确定哪一位教师上哪一门课，使四门课的平均成绩之和为最高。

线性规划的数学模型：

$$\max\ (\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=,\ge)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (=,\ge)\ b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=,\ge)\ b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \ge 0 \end{cases}$$

说明：

(1) 决策变量：x_1，x_2，$\cdots$，x_n。

一组决策变量表示为问题的一个方案；

(2)目标函数：max(min) z　　z为决策变量的线性函数;

(3) 约束条件：一组线性不等式或等式。

1.2 图解法

例：用图解法求　$\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 & ① \\ 4x_1 \qquad \le 16 & ② \\ \qquad 4x_2 \le 12 & ③ \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

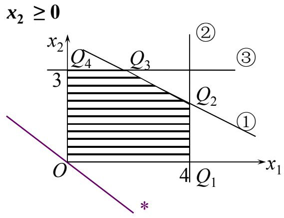
解：(1) 建立 $x_1 - x_2$ 坐标；

(2) 约束条件的几何表示；

(3) 目标函数的几何表示；

$z = 2x_1 + 3x_2$

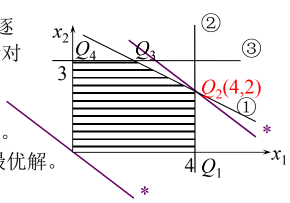
$\Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}z$



首先取 $z=0$，然后，使 z 逐渐增大，直至找到最优解所对应的点。

可见，在Q_2点 z 取到最大值。

因此，Q_2点所对应的解为最优解。



由此求得最优解：$x_1^* = 4\ \ x_2^* = 2$

最大值：$\max z = z^* = 2x_1 + 3x_2 = 14$

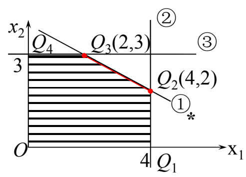
讨论：

(1) 唯一最优解　$\max z = z^*$ 时，解唯一，如本例。

(2) 无穷多最优解

对上例，若目标函数

$z = 2x_1 + 4x_2$，

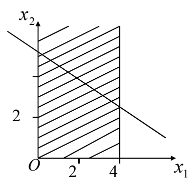


(3) 无界解

$\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 \le 16 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

在实际问题中，可能是缺少约束条件。

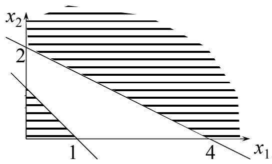


注：无界的可行域也可能有最优解。

(4)无可行解

$\max z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{s.t}\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



无公共部分，无可行域。即无可行解。

在实际问题中，可能是关系错。

小结：

(1) 线性规划问题的可行域是一个凸多边形。

(2) 线性规划如果有最优解，其最优解必可在某个顶点达到。

1.3 线性规划的标准型

1、标准型 $\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$$\text{s.t}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

简记： $\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1,\cdots,m \\ x_j \geq 0, \ j = 1,\ldots,n \end{cases}$$

矩阵形式： $\max z = Cx$

$$s.t\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

其中:

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$

向量形式： $\max z = Cx$

$$s.t\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b \\ x_j \geq 0, j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

$p_j = (a_{1j} \ a_{2j} \ \cdots \ a_{mj})^T$ x_j 的系数列向量

2、标准型的化法

(1) min→max $\min z = Cx = -\max(-z)$

令 $z' = -z$，则 $\max z' = -Cx$

(2)不等式 (≤，≥)

对于"≤"情况：在"≤"左边加上一个松弛变量(非负)，变为等式；

对于"≥"情况：在"≥"左边减去一个剩余变量(非负)，变为等式。

注：松弛变量、剩余变量在目标函数中的价值系数为 0。

(3) 无约束变量 令 $x_k = x_k' - x_k''$， $x_k', x_k'' \geq 0$

(4) 右端项为负 两边乘以 -1

例：将下述问题化为标准型

$\min z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 & ① \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 & ② \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 & ③ \\ x_1, x_2 \geq 0, \ x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解： 令 $z' = -z$， $x_3 = x_4 - x_5$， $x_4, x_5 \geq 0$

①式加上一个松弛变量 x_6；②式减去一个剩余变量 x_7；

$\max z' = -x_1 + 2x_2 - 3(x_4 - x_5)$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

3 线性规划解的概念

设线性规划为 $\max z = Cx$ ①

$$\text{s.t}\begin{cases} Ax = b & ② \\ x \geq 0 & ③ \end{cases}$$

A为$m \times n$ 矩阵, $n > m$, Rank $A = m$ (A为行满秩矩阵)

1. 可行解：满足条件②、③的 x；

2. 最优解：满足条件①的可行解；

3. 基：取 B 为 A 中的 m 阶子矩阵，Rank $B = m$，则称 B 为线性规划问题的一个基。

设 $B = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ $p_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T$

则称$x_1, x_2, \cdots, x_m$为基变量，其它为非基变量。

4. 基(本)解：非基变量为0且满足②的解 x；

设 $B=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

令 $x_{m+1}=\cdots=x_n=0$ (非基变量为0)

则 $Bx_B=b \quad x_B=B^{-1}b=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)})^T$

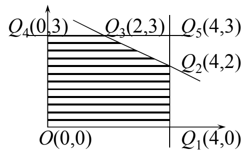
基本解：$X=(\underbrace{x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_m^{(0)}}_{m个},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-m个})^T$

基本解个数 $\le C_n^m$

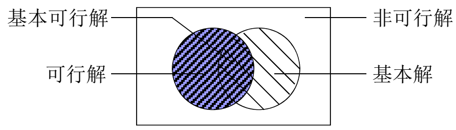
5. 基本可行解

满足③式要求的基本解。

如右图所示，各边交点O, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 均为基可行解；而其延长线的交点Q_5为基解，但不是基可行解。



6. 可行基：基本可行解对应的B为可行基。



例：求所有基解、基可行解 $\begin{cases} x_1+2x_2\le 8, \\ x_2\le 2. \end{cases}$

解：化为标准型

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ x_2+x_4=2. \end{cases} \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}=(p_1,p_2,p_3,p_4)$$

A 的所有 2 阶方阵有

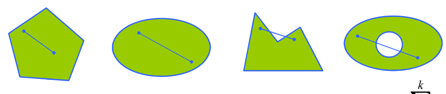
$$B_1=(p_1,p_2)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2=(p_1,p_3)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3=(p_1,p_4)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_4=(p_2,p_3)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5=(p_2,p_4)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_6=(p_3,p_4)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 线性规划的基本理论

定义1 设 S 是 R^n 的一个子集，若对任意 $x_1\in S$, $x_2\in S$, $0\le\lambda\le 1$，有 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in S$，则称S为凸集 (Convex Set)。



凸组合：设 $x_i\in R^n$, 若存在$0<\mu_i<1$，$i=1,\cdots,k$, $\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1$

使 $x=\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i$，则称$x$ 为 x_i 的凸组合。

极(顶)点：$x\in S$, 若不存在不同的两点 $x_1\in S$, $x_2\in S$, 使 $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$ $(0<\alpha<1)$,

注：极点所对应的解是基可行解。

定理1 若线性规划存在可行域，则可行域 $S=\{x\mid Ax=b, x\ge 0\}$为凸集。

定理2 线性规划的可行解 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$为基可行解的充要条件是：x的正分量所对应的系数列向量线性无关。

定理3 线性规划问题的基可行解 x 对应于线性规划问题可行域(凸集)的顶点。

定理4 有界凸集 S上任一点可表示为 S 的极点的凸组合。

定理5 若线性规划有解，则一定存在基可行解为最优解.

如果在几个顶点上都达到最优解，则这些顶点的每个凸组合上也达到最优。

定理6 若线性规划问题有可行解，必有基可行解。

§2 单 纯 形 法

1. 单纯形法原理

$$\max Z=2x_1+3x_2+3x_3 \qquad \max Z=2x_1+3x_2+3x_3+0x_4+0x_5$$

$$s.t\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 3 \\ x_1+4x_2+7x_3\le 9 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases} \qquad s.t\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+4x_2+7x_3+x_5=9 \\ x_1\sim x_5\ge 0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=(p_4,p_5)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

用非基变量表示基变量 $\quad x_4=3-x_1-x_2-x_3$

$$x_5=9-x_1-4x_2-7x_3$$

用非基变量表示目标函数 $\quad Z=2x_1+3x_2+3x_3$

基本解 (0, 0, 0, 3, 9) 也是可行的

$Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$

$$\begin{aligned} x_4 &= 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 &= 9 - x_1 - 4x_2 - 7x_3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_5 = 6 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 \end{cases}$$

取 x_1增大，应该确定其增大的上限θ

x_1增大时，其余非基变量保持为零，称 x_1进基

$$\begin{cases} x_4 = 3 - \theta \\ x_5 = 9 - \theta \end{cases}$$

取 x_1进基时，应该保持所有基变量非负，哪个基变量先成为零，哪个基变量成为非基变量，称这个基变量出基。

$\theta = \min\left\{\frac{3}{1}, \frac{9}{1}\right\} = 3$ 新的基本可行解 (3, 0, 0, 0, 6)

$Z = 2(3 - x_2 - x_3 - x_4) + 3x_2 + 3x_3 = 6 + x_2 + x_3 - 2x_4$

有正的检验数，不是最优。

$Z = 6 + x_2 + x_3 - 2x_4$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_5 = 6 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 \end{cases} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 + x_3 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ x_2 &= 2 - 2x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \end{aligned}$$

取 x_2 进基 $\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_5 = 6 - 3x_2 \end{cases}$ $x_2 = \theta = \min\left\{\frac{3}{1}, \frac{6}{3}\right\} = 2$

x_5 出基　新的基本可行解 (1, 2, 0, 0, 0)

$$Z = 6 + \left(2 - 2x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5\right) + x_3 - 2x_4$$

$$= 8 - x_3 - \frac{5}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$$

所有检验数小于零，目标最优，最优值 $Z = 8$

方法步骤总结：

1. 确定 (观察法) 一个初始基本可行解;
2. 从约束中解出基变量 (用非基变量表示基变量);
3. 代入目标消去基变量 (用非基变量表示目标函数)，得到非基变量 x_j 的检验数σ_j。
4. 判断最优。若σ_j≤0，当前解最优;
   若σ_k>0，则选x_k进基
5. 用最小比值法确定 x_k 的最大值θ，使基变量 x_l 取0值，其它基变量非负, 即 x_l 出基，若 θ 不存在, 则 Z→∞，没有有限最优解。
6. 重复上述1到5的工作。

初始基可行解的确定

(1) 松弛基 (松弛变量对应的B)

对约束条件是“≤”形式的不等式，在每个约束条件的左端加上一个松弛变量。

$$\max z = x_1 + 3x_2 \qquad \max z = x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{化标准型}} \text{s.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,p_1\ \ p_2\ \ p_3\ \ p_4\,], \quad \text{则 } B = [\,p_3\ \ p_4\,]$$

取x_3、x_4为基变量，初始基可行解：$x^{(0)} = (0, 0, 3, 4\,)^T$

(2) 人工基

对所有约束条件是“≥”形式的不等式及等式约束情况，化为标准型后若不存在单位矩阵式，就采用人工基方法。即对不等式约束减去一个非负剩余变量，再加上一个非负人工变量；对于等式约束再加上一个非负的人工变量，总能得到一个单位矩阵。

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 \qquad + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

最优性检验与解的判别

对于 $\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1, \cdots, m \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

设 x_i 为基变量，$i = 1, \ldots, m$ $\quad x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j$

$$\text{则}\quad z = \sum_{i=1}^{m} c_i (b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i' + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}') x_j$$

记 $z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i'$，$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}'$

$$= z_0 + \sum_{j=m+1}^{n}(c_j - z_j)x_j \qquad (\sigma_j = c_j - z_j)$$

$$= z_0 + \sum_{j=m+1}^{n}\sigma_j x_j \qquad \text{称 } \sigma_j \text{ 为 } x_j \text{ 的检验数 .}$$

解的判别：

1. 若所有$\sigma_j \le 0$，则此时的基可行解为最优解；

2. 若所有 $\sigma_j \le 0$，又对于某个非基变量 x_{m+t} 有 $\sigma_{m+t} = 0$，则该线性规划问题具有无穷多最优解；

3. 若存在某个非基变量 x_{m+t} 的检验数 $\sigma_{m+t} > 0$，且 $p_{m+t} \le 0$，则该线性规划问题具有无界解（或称无最优解）。

基变换

1. 进基变量

若 $\max\limits_{j \in J_N}\{\sigma_j > 0\} = \sigma_{m+t}$，则$x_{m+t}$为进基变量。

2. 离基变量

用最小比值法确定 x_{m+t} 的最大值θ，使基变量 x_l 取 0 值，其它基变量非负；

$$x_i = b_i' - a_{i,m+t}' x_{m+t} \ge 0 \qquad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\theta = \min\left\{ \frac{b_i'}{a_{i,m+t}'} \,\middle|\, a_{i,m+t}' > 0 \right\} = \frac{b_l'}{a_{l,m+t}'}$$

下证：$x_1, \ldots, x_{l-1}, x_{m+t}, x_{l+1}, \ldots, x_m$ 构成新的基变量。

2. 单纯形表 $\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & x_{n+m} & b \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \\ 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & x_{n+m} & b \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \\ 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1} - z_{m+1} & \cdots & c_n - z_n & -\sum_{i=1}^{m} c_i b_i \end{pmatrix}$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \qquad z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i, \qquad \sigma_j = c_j - z_j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{m+1} & \cdots & \sigma_n & -z_0 \end{pmatrix}$$

建立单纯形表

			c_1	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	
c_B	x_B	b	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	θ
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$a_{m,n}$	
	$-z$	$-z_0$	0	$\cdots$	0	σ_{m+1}	$\cdots$	σ_n	

例：$\max z = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\max z = x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

			1	3	0	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	8	1	2	1	0	0	
0	x_4	16	4	0	0	1	0	
0	x_5	12	0	4	0	0	1	
	$-z$	0	1	3	0	0	0	

此时的解：

$x^{(0)} = (0\ 0\ 8\ 16\ 12)^{\mathrm{T}}$

$z^{(0)} = 0$

解的判别

σ_1=1 σ_2=3 >0

$x^{(0)}$非最优解

			1	3	0	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	8	1	2	1	0	0	8/2
0	x_4	16	4	0	0	1	0	--
0	x_5	12	0	[4]	0	0	1	12/4
	$-z$	0	1	3	0	0	0	

基变换

$\max\{\sigma_1, \sigma_2\} = 3 = \sigma_2$ x_2入基

$\min\{8/2, 12/4\} = 12/4$ x_5出基

			1	3	0	0	0	
0	x_3	2	[1]	0	1	0	−1/2	2/1
0	x_4	16	4	0	0	1	0	16/4
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4	--
	$-z$	−9	1	0	0	0	−3/4	
1	x_1	2	1	0	1	0	−1/2	
0	x_4	8	0	0	−4	1	2	
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4	
	$-z$	−11	0	0	−1	0	−1/4	

此时的解：

$x^{(1)}=(0\ 3\ 2\ 16\ 0)^{\mathrm{T}}$

$z^{(1)}=9$

$x^{(1)}$非最优

此时的解：

$x^{(2)}=(2\ 3\ 0\ 8\ 0)^{\mathrm{T}}$

$z^{(2)}=11$

$x^{(2)}$为最优解

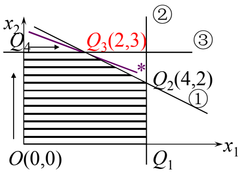
即： 最优解：$x^* = (2\ 3\ 0\ 8\ 0)^{\mathrm{T}}$

最大值：$z^* = 11$

$x^{(0)} = (0\ 0\ 8\ 16\ 12)^{\mathrm{T}} \Longleftrightarrow O(0,0)$

$x^{(1)} = (0\ 3\ 2\ 16\ 0)^{\mathrm{T}} \Longleftrightarrow Q_4(0,3)$

$x^{(2)} = (2\ 3\ 0\ 8\ 0)^{\mathrm{T}} \Longleftrightarrow Q_3(2,3)$



例：$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1 \sim x_5 \ge 0 \end{cases}$$

c_B	x_B	c_j	2	3	3	0	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	3	[1]	1	1	1	0	3/1
0	x_5	9	1	4	7	0	1	9/1
	$-z$	0	2	3	3	0	0	

c_B	x_B	c_j	2	3	3	0	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	3	[1]	1	1	1	0	3/1
0	x_5	9	1	4	7	0	1	9/1
	$-z$	0	2	3	3	0	0	
2	x_1	3	1	1	1	1	0	3/1
0	x_5	6	0	[3]	6	-1	1	6/3
	$-z$	−6	0	1	1	−2	0	
2	x_1	1	1	0	-1	4/3	-1/3	
3	x_2	2	0	1	2	-1/3	1/3	
	$-z$	−8	0	0	−1	−5/3	−1/3	

3. 单纯形法的进一步讨论

前面提到用人工变量法可以得到初始基可行解，但加入人工变量的数学模型与未加人工变量的数学模型一般是不等价的。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \sim x_n \ge 0, x_{n+1} \sim x_{n+m} \ge 0 \end{cases}$$

结论：新问题的最优解中，如果人工变量均为零，则得到的解也是原问题的最优解，否则原问题无可行解。

大 M 法 (M为很大的正数)

法则：

对于max问题, 人工变量在目标函数中的价值系数为 –M ;

对于min问题, 人工变量在目标函数中的价值系数为 M。

例：$\min z = x_1 + 5x_2$ $\qquad \min z = x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

			1	5	0	0	M	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	6	2	3	1	0	0	6/2
M	x_5	1	[2]	1	0	–1	1	1/2
	$-z$	$-M$	$1-2M$	$5-M$	0	M	0	

			1	5	0	0	M	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	6	2	3	1	0	0	6/2
M	x_5	1	[2]	1	0	–1	1	1/2
	$-z$	$-M$	$1-2M$	$5-M$	0	M	0	
0	x_3	5	0	2	1	1	–1	
1	x_1	1/2	1	1/2	0	–1/2	1/2	
	$-z$	–1/2	0	9/2	0	1/2	$M-1/2$	

因为所有$\sigma_j \ge 0$，于是得问题的最优解

$$x^* = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)^{\mathrm{T}} = (1/2\ \ 0\ \ 5\ \ 0\ \ 0)^{\mathrm{T}}$$

例： $\max z = x_1 + 2x_2$ $\qquad \max z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 - Mx_4 + 0x_5$

$$s.t\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad s.t\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

c_B	x_B	c_j	1	2	0	$-M$	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-M$	x_4	4	–1	2	–1	1	0	4/2
0	x_5	1	1	[1]	0	0	1	1/1
	$-z$	$4M$	$1-M$	$2+2M$	$-M$	0	0	

c_B	x_B	c_j	1	2	0	$-M$	0	θ
		x_j / b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$-M$	x_4	4	–1	2	–1	1	0	
0	x_5	1	1	[1]	0	0	1	
	$-z$	$4M$	$1-M$	$2+2M$	$-M$	0	0	
$-M$	x_4	2	–3	0	–1	1	–2	
2	x_2	1	1	1	0	0	1	
	$-z$	$2M-2$	$-1-3M$	0	$-M$	0	$-2-2M$	

所有 $\sigma_j \le 0$ 已经是最优解，x_4=2 人工变量不为零，表示原问题无可行解。 参照图解法结果

两阶段法

第一阶段： $\min w = x_{n+1} + \cdots\cdots + x_{n+m}$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1,\cdots,m \\ x_j \ge 0, j = 1,\cdots\cdots n+m \end{cases}$$

如果 $w^* = 0$, 且人工变量全为非基变量, 则得到原问题的基本可行解。

第二阶段： $\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$

以第一阶段最优解作为初始基本可行解，继续迭代.

例：$\min z = x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

第一阶段：

$\min z = x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$\min w = x_5$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

			0	0	0	0	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	6	2	3	1	0	0	6/2
1	x_5	1	[2]	1	0	–1	1	1/2
	$-z$	–1	–2	–1	0	1	0	

			0	0	0	0	1	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	6	2	3	1	0	0	6/2
1	x_5	1	[2]	1	0	–1	1	1/2
	$-z$	–1	–2	–1	0	1	0	
0	x_3	5	0	2	1	1	–1	
1	x_1	1/2	1	1/2	0	–1/2	1/2	
	$-z$	0	0	0	0	0	1	

第一阶段有最优解 $x^* = (1/2, 0, 5, 0, 0)^T$

第二阶段：去掉人工变量，换上原线性规划目标函数

			1	5	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_3	5	0	2	1	1	
1	x_1	1/2	1	1/2	0	–1/2	
	$-z$	–1/2	0	9/2	0	1/2	

最优解：$x^* = (1/2,\ 0,\ 5,\ 0)^T$
$z^* = 1/2$

几个问题

1. 检验数相同

$\max\limits_j \{\sigma_j > 0\}$　有两个以上相同值

2. 最小比值相同

$\min\left\{ \frac{b'_i}{a'_{i,k}} \middle| a'_{i,k} > 0 \right\}$ 有相同值　此时就会出现退化解。

定义：一个基本可行解如果有取零的基变量，则称为退化的基本可行解，相应的基称为退化基。

§3　应 用 实 例

线性规划建模

(1) 设立决策变量；

(2) 明确约束条件并用变量的线性等式或不等式表示；

(3) 用变量的线性函数表示目标，并确定是求极小还是极大；

(4) 根据变量的物理性质研究变量是否有非负性。

一、生产计划问题

例：A，B两种产品，两道工序

产品	工序一	工序二
A	加工2小时	加工3小时
B	加工3小时	加工4小时
可利用工时	15	25

每生产一吨B，可得到两吨产品C

A每吨盈利400元，　B每吨盈利800元

销售一吨C盈利300元

报废每吨C损失200元

市场预测，C最大销量为5吨

决定A，B的产量，使工厂总的盈利最大。

例：产品＝2个零件1+3个零件2

车间	总工时	生产效率（件 / 小时）	
		零件1	零件2
1	100	8	6
2	50	10	15
3	75	16	21

车间	生产工时数	
	零件1	零件2
1	x_{11}	x_{12}
2	x_{21}	x_{22}
3	x_{31}	x_{32}

二、合理下料问题

从给定尺寸的材料中，按需要的尺寸截取给定数量的零件，使残余废料总量最小的问题。

例：用长9米的原料截取：3.1米 200根， 2.5米 100根 1.7米 300根

方案	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.1米	2	2	1	1	1	0	0	0	0
2.5米	1	0	2	1	0	3	2	1	0
1.7米	0	1	0	2	3	0	2	3	5
废料长	**0.3**	**1.1**	**0.9**	**0**	**0.8**	**1.5**	**0.6**	**1.4**	**0.5**

三、合理配料问题

例：根据对食物所含的营养素成份及食物的市场价格调查，按照医生所提出的对每个人每天所需的营养要求，可得下表：

	食 物				每天的最低需要量
营养成份	A	B	C	D	
维生素A（国际单位）	1000	1500	1750	3250	4000
维生B（毫克）	0.6	0.27	0.68	0.3	1
维生素C（毫克）	17.5	7.5	0	30	30
单 价（元）	0.8	0.5	0.9	1.5	

怎样采购食物才能保证营养要求的前提下花费最省？

§4 对偶理论

1. 对偶问题的提出

例：制定生产计划

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

	I	II	限制
设备台时	1	2	8台时
材料A	4	0	16kg
材料B	0	4	12kg
利润	2	3	

假设有客户提出要求，购买工厂所拥有的工时和材料，为客户加工别的产品，由客户支付工时费和材料费。那么工厂给工时和材料制订的最低价格应是多少，才值得出卖工时和材料？

设 w_1为设备单位台时的租金，w_2, w_3为材料A、B转让附加费(kg^{-1})

$$\min y = 8w_1+16w_2+12w_3$$
$$\begin{cases} w_1 + 4w_2 \qquad \ge 2 \\ 2w_1 \qquad + 4w_3 \ge 3 \\ w_1,\ w_2,\ w_3 \ge 0 \end{cases}$$

	I	II	限制
设备台时	1	2	8台时
材料A	4	0	16kg
材料B	0	4	12kg
利润	2	3	

原问题：$\max z = cx \quad Ax \le b \quad x \ge 0$

对偶问题：$\min y = wb \quad yA \ge c \quad y \ge 0$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \qquad \le 16 \\ \qquad 4x_2 \le 12 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

比较：	$\max z$	$\min y$
	决策变量为n个	约束条件为n个
	约束条件为m个	决策变量为m个
	"$\le$"	"$\ge$"

对偶的三种形式

(1)对称形式

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.t.\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = cx \qquad s.t.\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\min y = b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_mw_m$$
$$s.t.\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ w_1, w_2, \cdots, w_m \ge 0 \end{cases}$$

$$\min y = wb \qquad s.t.\begin{cases} wA \ge c \\ w \ge 0 \end{cases}$$

(2)非对称形式

$$\max z = cx \qquad s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax \le b \\ -Ax \le -b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\min y = (u,v)\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \qquad \text{令 } w = u - v \qquad \min y = wb$$

$$s.t.\begin{cases} (u,v)\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \ge c \\ (u,v) \ge 0 \end{cases} \qquad s.t.\begin{cases} wA \ge c \\ w\text{无正负限制} \end{cases}$$

(3)混合形式

例 $\max z = x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 3 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 \le -3 \end{matrix}$$

$$\min y = 3w_1' - 3w_1'' + 4w_2$$

$$s.t\begin{cases} 2w_1' - 2w_1'' + w_2 \ge 1 \\ w_1' - w_1'' + 2w_2 \ge 2 \\ 3w_1' - 3w_1'' + 5w_2 \ge 4 \\ w_1', w_1'', w_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min y = 3w_1 + 4w_2$$

$$\begin{cases} 2w_1 + w_2 \ge 1 \\ w_1 + 2w_2 \ge 2 \\ 3w_1 + 5w_2 \ge 4 \\ w_2 \ge 0，w_1\text{无约束} \end{cases}$$

对偶问题对应表

原问题（对偶问题）	对偶问题（原问题）
目标函数max	目标函数min
约束条件： m个 第i个约束类型为“≤” 第i个约束类型为“≥” 第i个约束类型为“＝”	变量数： m个 第i个变量≥0 第i个变量≤0 第i个变量是自由变量
变量数：n个 第j个变量≥0 第j个变量≤0 第j个变量是自由变量	约束条件：n个 第j个约束类型为“≥” 第j个约束类型为“≤” 第j个约束类型为“＝”

例 $\min z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$s.t\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 7 \\ 8x_1 - 9x_2 + 10x_3 \ge 11 \\ 12x_1 + 13x_2 \quad \le 14 \\ x_1 \le 0, x_2\text{符号不限}, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max y = 7w_1 + 11w_2 + 14w_3$$

$$s.t\begin{cases} 4w_1 + 8w_2 + 12w_3 \ge 4 \\ 5w_1 - 9w_2 + 13w_3 = 2 \\ -6w_1 + 10w_2 \quad \le 3 \\ w_1\text{符号不限}, w_2 \ge 0, w_3 \le 0 \end{cases}$$

2. 单纯形法的矩阵描述

$$\max\ z = cx \qquad s.t\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$A = (p_1, p_2, \cdots, p_n) \underline{\underline{\Delta}} (B \vdots N)$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$c = (c_B \vdots c_N)$$

$$Ax = (B \vdots N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$z = cx = (c_B \vdots c_N)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = c_B x_B + c_N x_N$$

$$= c_B(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N x_N$$

$$= c_B B^{-1}b + (c_N - c_B B^{-1}N)x_N$$

$\sigma_N = c_N - c_B B^{-1}N$ 检验数向量

或者

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = B^{-1}b - B^{-1}(p_{m+1}, \cdots, p_n)\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= B^{-1}b - \sum_{j \in J_N} B^{-1}p_j x_j$$

$$z = c_B B^{-1}b + ((c_{m+1}, \cdots, c_n) - c_B B^{-1}(p_{m+1}, \cdots, p_n))\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= c_B B^{-1}b + \sum_{j \in J_N}(c_j - c_B B^{-1}p_j)x_j$$

单纯形表的矩阵形式

c_B	x_B	c_j x_j b	c_B x_B	c_N x_N	θ
c_B	x_B	$B^{-1}b$	I	$B^{-1}N$	
	$-z$	$-c_B B^{-1}b$	0	$c_N - c_B B^{-1}N$	

注：使 $\sigma_N \le 0$ 的 B 为最优基。

3. 对偶理论

定理1 (对称性) 对偶问题的对偶为原问题。

定理2 (弱对偶性) 设 $x^{(0)}$, $w^{(0)}$ 分别为LP和DP问题的可行解，则 $cx^{(0)} \le w^{(0)}b$.

推论：

(1) max问题任一可解的目标值为min问题目标值的一个下界; min问题任一可解的目标值为max问题目标值的一个上界。

(2) 设 $x^{(0)}$, $w^{(0)}$ 分别为LP和DP问题的可行解, 当 $cx^{(0)} = w^{(0)}b$ 时，它们为最优解。

(3) 若原问题(对偶问题)为无界解，则对偶问题(原问题)为无可行解。

定理3 (强对偶性) 设若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解，且目标值相等。

例：已知 $x_1^* = 1.2, x_2^* = 0.2$ 是下列问题的最优解,求其对偶问题的最优解。

$$\min z = 20x_1 + 20x_2 \qquad \max y = w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 + 2w_2 + 2w_3 + 3w_4 \le 20 \\ 2w_1 + w_2 + 3w_3 + 2w_4 \le 20 \\ w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0 \end{cases}$$

解 $w_1^* + 2w_2^* + 2w_3^* + 3w_4^* = 20$

$2w_1^* + w_2^* + 3w_3^* + 2w_4^* = 20$

$x_1^* + 2x_2^* = 1.6 > 1$

$2x_1^* + x_2^* = 2.6 > 2$

$2x_1^* + 3x_2^* = 3$

$3x_1^* + 2x_2^* = 4$

$w_1^* = 0,\ w_2^* = 0$

$w_3^* = 4,\ w_4^* = 4$

4. 对偶最优解的经济含义——影子价格

$z^* = cx^* = w^*b = w_1^*b_1 + w_2^*b_2 + \cdots + w_m^*b_m$

$\dfrac{\partial z^*}{\partial b_i} = w_i^*$ 称w_i^*为b_i的影子价格 其经济含义是为约束条件所付出的代价。

	A	B	C	拥有量
工　时	1	1	1	3
材　料	1	4	7	9
单件利润	2	3	3	

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min y = 3w_1 + 9w_2$$

$$s.t.\begin{cases} w_1 + w_2 \ge 2 \\ w_1 + 4w_2 \ge 3 \\ w_1 + 7w_2 \ge 3 \\ w_1, w_2 \ge 0 \end{cases}$$

w_1=5/3, w_2=1/3

w_1=5/3, w_2=1/3

即工时的影子价格为5/3，材料的影子价格为1/3。

如果目前市场上材料的价格低于1/3，则企业可以购进材料来扩大生产，反之可以卖掉部分材料。

如果有客户以高于5/3的价格购买工时，则可以出售一些工时，反之则反。

5. 对偶单纯形法

单纯形法：由 $x_B = B^{-1}b \ge 0$，使 $\sigma \le 0$

$\sigma = c - c_B B^{-1}A = c - w^{(0)}A \le 0 \qquad w^{(0)} \ge 0$

即 $w^{(0)} = c_B B^{-1}$ 是对偶问题的可行解

对偶单纯形法：由 $\sigma \le 0$，使 $x_B = B^{-1}b \ge 0$

定义 设 $x^{(0)}$是LP问题的一个基本解，对应的基是B，若

$$\sigma = c - c_B B^{-1}A \le 0,$$

则称 $x^{(0)}$为正则解，B为正则基。

计算步骤：

(1) 保持 $\sigma \le 0$，确定x_B，建立计算表格；

(2) 判别 $x_B = B^{-1}b \ge 0$是否成立？

① 若成立，当前解为最优解；

② 若不成立，转下一步。

(3) 基变换

① 出基变量

若 $\min\limits_i\{\bar{b}_i\} = \bar{b}_r$　$i = 1,\cdots,m$，则x_{B_r}出基；$\bar{b}_r < 0$

② 入基变量

若 $\min\limits_j\left\{\dfrac{\sigma_j}{a'_{rj}}\middle| a'_{rj} < 0\right\} = \dfrac{\sigma_k}{a'_{rk}}$　则x_k入基。

若所有 $a'_{rj} \ge 0$，则原问题无可行解。

$$x_{B_r} = \bar{b}_r - \sum_{j\in J_N} a'_{rj}x_j$$

(4) 消元运算，得到新的 x_B。

重复(2) ~(4)步，求出结果。

例：用对偶单纯形法求解

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \qquad \max f = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

解：

			−2	−3	−4	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	−1	−1	−2	−1	1	0
0	x_5	−4	[−2]	1	−3	0	1
	$-f$	0	−2	−3	−4	0	0
			1	--	4/3		

			−2	−3	−4	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	−1	−1	−2	−1	1	0
0	x_5	−4	[−2]	1	−3	0	1
	$-f$	0	−2	−3	−4	0	0
			1	--	4/3		
0	x_4	1	0	−5/2	1/2	1	−1/2
−2	x_1	2	1	−1/2	3/2	0	−1/2
	$-f$	4	0	−4	−1	0	−1

最优解：$x_1^* = 2, x_2^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 1, x_5^* = 0$

目标值：$z^* = -f^* = 4$

例：用对偶单纯形法求解

$$\min z = 3x_1 + 9x_2 \qquad \max f = -3x_1 - 9x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 + 4x_2 \ge 3 \\ x_1 + 7x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad s.t.\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 - 4x_2 + x_4 = -3 \\ -x_1 - 7x_2 + x_5 = -3 \\ x_1,\dots,x_5 \ge 0 \end{cases}$$

			−3	−9	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	−2	[−1]	−1	1	0	0
0	x_4	−3	−1	−4	0	1	0
0	x_5	−3	−1	−7	0	0	1
	$-f$	0	−3	−9	0	0	0
			3	9	--	--	--

			−3	−9	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	−2	[−1]	−1	1	0	0
0	x_4	−3	−1	−4	0	1	0
0	x_5	−3	−1	−7	0	0	1
	$-f$	0	−3	−9	0	0	0
			3	9	--	--	--
−3	x_1	2	1	1	−1	0	0
0	x_4	−1	0	[−3]	−1	1	0
0	x_5	−1	0	−6	−1	0	1
	$-f$	6	0	−6	−3	0	0
			--	2	3	--	--

			-3	-9	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_1	2	1	1	-1	0	0
0	x_4	-1	0	[-3]	-1	1	0
0	x_5	-1	0	-6	-1	0	1
	$-f$	6	0	-6	-3	0	0
			--	2	3	--	--
-3	x_1	5/3	1	0	-3/4	1/3	0
-9	x_2	1/3	0	1	1/3	-1/3	0
0	x_5	1	0	0	1	-2	1
	$-f$	8	0	0	-1	-2	0

6. 灵敏度分析

分析c_i , a_{ij}, b_i 变化对最优解的影响。

最优性条件：　$\sigma_N = c_N - c_B B^{-1} N \le 0$

或　$\sigma = c - c_B B^{-1} A \le 0$

或　$\sigma_j = c_j - c_B B^{-1} p_j \le 0, j = 1,2,\cdots\cdots,n$

可行性条件：$x_B = B^{-1} b \ge 0$，

1. 当 c 变化时：　$c \to c + \Delta c$

检验数变为 $(c+\Delta c) - (c_B + \Delta c_B) B^{-1} A$

目标函数值变为 $(c_B + \Delta c_B) B^{-1} b$

例1 已知下述问题的最优解及最优单纯形表,

(1) 求 Δc_4的变化范围,使最优解不变;

(2) 求 Δc_2的变化范围,使最优解不变.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

			2	3	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0
	$-z$	-14	0	0	-3/2	-1/8	0

解: (1) $\sigma_4' = c_4 + \Delta c_4 - c_B B^{-1} p_4 = \sigma_4 + \Delta c_4 \le 0$

$$\Delta c_4 \le -\sigma_4 = \frac{1}{8}$$

(2) $\sigma = c - c_B B^{-1} A = (0, \Delta c_2, -3/2, -1/8, 0)$

$$-(0,0,\Delta c_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(0, 0, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Delta c_2, -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}c_2, 0\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta c_2 \ge -3 \\ \Delta c_2 \le 1 \end{cases}$$

2. 当 b 变化时：

$b \to b + \Delta b$

$x_B = B^{-1} b \to x_B' = B^{-1}(b + \Delta B)$

目标函数值变为 $c_B B^{-1}(b + \Delta b)$

若 $x_B' \ge 0$, 则最优解不变；

若 $x_B' \ge 0$不成立，　由于 $\sigma = c - c_B B^{-1} A \le 0$ 仍成立，

可由对偶单纯形法求解最优解。

例2 对例1，

1) 求Δb_2的变化范围,使最优解不变.

2) 求$\Delta b_1 = 4$时的最优解.

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1/4 & 0\\ -2 & 1/2 & 1\\ 1/2 & -1/8 & 0\end{bmatrix}$$

解: (1) $b_2 = 16 \to b_2 + \Delta b_2$

$$x_B^* = B^{-1}b = \begin{bmatrix}0 & 1/4 & 0\\ -2 & 1/2 & 1\\ 1/2 & -1/8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\16\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}(b+\Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b$$

$$=\begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1/4 & 0\\ -2 & 1/2 & 1\\ 1/2 & -1/8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \Delta b_2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/4\\ 1/2\\ -1/8\end{bmatrix}\Delta b_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases}4+\Delta b_2/4 \ge 0\\ 4+\Delta b_2/2 \ge 0\\ 2-\Delta b_2/8 \ge 0\end{cases} \Rightarrow -8 \le \Delta b_2 \le 16$$

(2) $\Delta b = (\Delta b_1 \ \ 0 \ \ 0)^T = (4 \ \ 0 \ \ 0)^T$

$$B^{-1}(b+\Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b$$

$$=\begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1/4 & 0\\ -2 & 1/2 & 1\\ 1/2 & -1/8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-8\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-4\\4\end{bmatrix}$$

不可行，用对偶单纯形法计算

			2	3	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	4+0	1	0	0	1/4	0
0	x_5	4–8	0	0	[–2]	1/2	1
3	x_2	2+2	0	1	1/2	–1/8	0
	$-z$	–14	0	0	–3/2	–1/8	0
			--	--	3/4	--	--
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0
0	x_3	2	0	0	1	–1/4	–1/2
3	x_2	3	0	1	0	0	1/4
	$-z$	–17	0	0	0	–1/2	–3/4

3. 当约束条件的系数列向量 p_k 变化时：

$p_k \to p_k + \Delta p_k$

(1) 若 x_k 不是基变量

$$\sigma_k' = c_k - c_B B^{-1}(p_k + \Delta p_k) = c_k - c_B B^{-1}p_k - c_B B^{-1}\Delta p_k$$
$$= \sigma_k - c_B B^{-1}\Delta p_k$$

① 若 $\sigma_k' \le 0$，最优解不变；

② 若 $\sigma_k' > 0$，对第 k 列 $\quad$ 继续用单纯形法

$B^{-1}p_k \to B^{-1}(p_k + \Delta p_k), \sigma_k \to \sigma_k'$

(2) 若 x_k 是基变量，用单纯形表重新计算。

4. 增加一个新变量 x_{n+1} 时 新问题为：

$$\max z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1}$$

$$s.t \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + a_{i,n+1}x_{n+1} = b_i, i = 1, \cdots m\\ x_j \ge 0, j = 1, \cdots, n+1.\end{cases}$$

显然原问题的最优基 B 是新问题的可行基，

$$\sigma_{n+1} = c_{n+1} - c_B B^{-1} p_{n+1}$$

(1) 若 $\sigma_{n+1} \le 0$，则 $x = (x_1^*, \ldots, x_n^*, 0)$ 是新问题的最优解.

(2) 若 $\sigma_{n+1} > 0$，在最优单纯形表中增加一列

$$\begin{bmatrix}p_{n+1}'\\ \sigma_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B^{-1}p_{n+1}\\ c_{n+1} - c_B B^{-1}p_{n+1}\end{bmatrix}$$ 继续迭代

例3 在例1的基础上，企业要增加一个新产品III,每件产品需2个台时，原材料A 6kg，原材料B 3kg，利润 5元/件，问如何安排各产品的产量，使利润最大？

解：

	I	II	III	b
设备	1	2	2	8
料A	4	0	6	16
料B	0	4	3	12
利润	2	3	5	

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_6$$

$$s.t \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_6 \le 8\\ 4x_1 + 6x_6 \le 16\\ 4x_2 + 3x_6 \le 12\\ x_1, x_2, x_6 \ge 0\end{cases}$$

$$\sigma_6 = c_6 - C_B B^{-1} p_6 = 5 - [\frac{3}{2} \ \ \frac{1}{8} \ \ 0]\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix} = \frac{5}{4} > 0$$

表明生产新品有利。

$$B^{-1}p_6=\begin{bmatrix}0 & 1/4 & 0\\ -2 & 1/2 & 1\\ 1/2 & -1/8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5\\2\\0.25\end{bmatrix}$$

			2	3	0	0	0	5	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
2	x_1	4	1	0	0	1/4	0	3/2	8/3
0	x_5	4	0	0	-2	1/2	1	[2]	4/2
3	x_2	2	0	1	1/2	-1/8	0	1/4	8
	$-z$	-14	0	0	-3/2	-1/8	0	5/4	

			2	3	0	0	0	5	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	θ_i
2	x_1	1	1	0	3/2	-1/8	-3/4	0	
5	x_6	2	0	0	-1	1/4	1/2	1	
3	x_2	3/2	0	1	3/4	-3/16	-1/8	0	
	$-z$	-16.5	0	0	-1/4	-7/16	-5/8	0	

5. 增加新的约束条件

增加一个约束之后，应把最优解带入新的约束，若满足则最优解不变，否则填入最优单纯形表作为新的一行，引入一个新的非负变量（原约束若是小于等于形式可引入非负松弛变量，否则引入非负人工变量），并通过矩阵行变换把对应基变量的元素变为0，进一步用对偶单纯形法求解。

§5 运输问题

一、运输问题的数学模型

运输问题的一般提法是：设某种物资有 m 个产地 $A_1, \dots, A_m$, 产量分别是 $a_1, \dots, a_m$, 有 n 个销地 $B_1, \dots, B_n$，销量分别是 $b_1, \dots, b_n$。假定从 A_i 到 B_j 单位物资的运价为 c_{ij}, 怎样调运这些物品才能使总运费最小？

如果运输问题的总产量等于总销量，即有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$$

称该运输问题为产销平衡问题; 反之, 称产销不平衡问题。

产销平衡问题的数学模型为：

$$\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i & i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j & j=1,2,\cdots n\\ x_{ij}\ge 0 & i=1,2,\cdots,m \quad j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

若记

$$x=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n},x_{21},x_{22},\cdots,x_{2n},\cdots,x_{m1},x_{m2},\cdots,x_{mn})^T$$

$$c=(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1n},c_{21},c_{22},\cdots,c_{2n},\cdots,c_{m1},c_{m2},\cdots,c_{mn})$$

$$A=(p_{11},p_{12},\cdots,p_{1n},p_{21},p_{22},\cdots,p_{2n},\cdots,p_{m1},p_{m2},\cdots,p_{mn})$$

$$b=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots b_n)^T$$

其中 $\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$

$$p_{ij}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{(m+n)\times 1}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{(m+n)\times 1}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{(m+n)\times 1}=e_i+e_{m+j}$$

矩阵表示的平衡运输问题模型为

$$\min z=cx$$

$$s.t.\begin{cases}Ax=b\\ x\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{array}{c} x_{11}\ x_{12}\ \cdots\ x_{1n}\ x_{21}\ x_{22}\ \cdots\ x_{2n}\ \cdots\ x_{m1}\ x_{m2}\ \cdots\ x_{mn} \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & \ddots & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & 1 & & & \cdots & & 1 & \\ & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots\\ & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1\end{pmatrix}_{(m+n)\times(mn)}$$

若记

$$e_1=(1,1,\cdots,1)_{1\times n}\qquad I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$$

A 可简记为： $A = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & e_1 \\ I_n & I_n & \cdots & I_n \end{pmatrix}$

性质1：产销平衡运输模型必有最优基本可行解。

证明 记 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d$. 令

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d} \quad (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$$

因 $a_i \geq 0, b_j \geq 0$, 所以 $x_{ij} \geq 0$.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{a_i}{d} \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{b_j}{d} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

所以 x_{ij} 是可行解，因此必有基本可行解。

又任一可行解均满足：

$$0 \leq x_{ij} \leq \min(a_i, b_j)$$

即任一可行解是有限的。基可行域是有界的。故必有最优解。

性质2：运输模型的约束矩阵的秩为 $(m+n-1)$ 。

证明：因 A 的前 m 行的和与后 n 行的和相等，恰好都是 $e_1 = (1,1,\cdots,1)_{m\times n}$，所以 A 的行向量是线性相关。

从而

$R(A) \leq m+n-1$

去掉 A 的第一行，并取如下 $m+n-1$ 列，得到

$$D = |p'_{11} p'_{12} \cdots p'_{1n} p'_{21} p'_{31} \cdots p'_{m1}|$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \pm 1 \neq 0$$

$R(A) = m+n-1$

二、表上作业法

例1：某部门有3个同类型的工厂（产地），生产的产品由4个销售点出售，各工厂的生产量、各销售点的销售量 (假定单位为 t)以及各工厂到销售点的单位运价 (元/ t) 示于下表中，问如何调运才能使总运费最小？

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4	11	16
A_2	2	10	3	9	10
A_3	8	5	11	6	22
销 量	8	14	12	14	48

1. 确定初始基本可行解

(1) 西北角规则

西北角规则是优先满足运输表中西北角 (左上角) 上空格的供销需求。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	8	8			16
A_2		6	4		10
A_3			8	14	22
销 量	8	14	12	14	48

$$z = 8\times 4 + 8\times 12 + 6\times 10 + 4\times 3 + 8\times 11 + 14\times 6 = 372$$

(2) 最小元素法 优先满足运价 (或运距) 最小的供销业务。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4 10	11 6	16
A_2	2 8	10	3 2	9	10
A_3	8	5 14	11	6 8	22
销 量	8	14	12	14	48

$$z = 10\times 4 + 6\times 11 + 8\times 2 + 2\times 3 + 14\times 5 + 8\times 6 = 246$$

2. 解的最优性检验（位势法）

用 LP 的对偶理论可以证明，检验数的公式为：

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$$

其中 u_i, v_j 分别称为行位势、列位势。

由基变量所对应的检验数为零，可从 $m+n-1$ 个等式

$$c_{ij}-(u_i+v_j)=0$$

解出所有的行位势、列位势。

可以证明，不论令 $v_n=a$ 为何值，(u_i+v_j) 始终不变。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u_i
A_1	4 1	12 2	4	11	16	1
A_2	2	10 1	3	9 –1	10	0
A_3	8 10	5	11 12	6	22	–4
销　量	8	14	12	14	48	
v_j	2	9	3	10		

$$\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$$

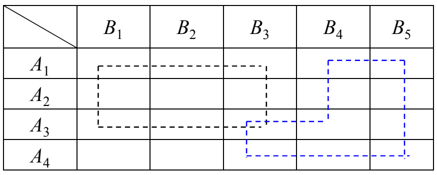
3. 解的改进（用闭回路法调整）

闭回路：$(i_1,j_1), (i_1,j_2), (i_2,j_2), (i_2,j_3), \ldots, (i_s,j_s), (i_s,j_1)$

$(i_1,j_1), (i_2,j_1), (i_2,j_2), (i_3,j_2), \ldots, (i_s,j_s), (i_1,j_s)$

其中，$i_1 i_2,\ldots, i_s$ 互不相同，$j_1 j_2, \ldots, j_s$ 互不相同

闭回路的特点：封闭、每行每列至多两个顶点



选择进基变量：$\sigma_{kl}=\min\limits_{i,j\in J_N}\{\sigma_{ij}\mid\sigma_{ij}<0\}$

在进基格点所对应的闭回路上，定义顶点的序号：自进基格点起选定一个方向（比如顺时针方向），依次为第一格、第二格、…

在奇数格点上增加调整量 θ，在偶数格点上减少调整量 θ。

$$\theta=\min\{x_{ij}\mid(i,j)\text{为闭回路中的偶数格点}\}$$

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u_i
A_1	4 1	12 2	4 10	11 6	16	
A_2	2 8	10 1	3 2	9 –1	10	
A_3	8 10	5 14	11 12	6 8	22	
销　量	8	14	12	14	48	
v_j						

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	u_i
A_1	4 0	12 2	4 12	11 4	16	1
A_2	2 8	10 2	3 1	9 2	10	–1
A_3	8 9	5 14	11 12	6 8	22	–4
销　量	8	14	12	14	48	
v_j	3	9	3	10		

$c_{ij}=u_i+v_j$　　$\sigma_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$　　$z=244$

4、表上作业法计算中的两个问题

(1). 无穷多个最优解

销地 \ 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	0 $\boxed{4}$	2 $\boxed{12}$	12 $\boxed{4}$	4 $\boxed{11}$	
A_2	8 $\boxed{2}$	2 $\boxed{10}$	1 $\boxed{3}$	2 $\boxed{9}$	
A_3	9 $\boxed{8}$	14 $\boxed{5}$	12 $\boxed{11}$	8 $\boxed{6}$	
v_j					

(2). 退化情况

有以下两种情况：

1. 在确定初始基本可行解时，若已确定在空格 (i, j) 处要添上调运量 x_{ij}，而此时发点的当前可发送量与收点的当前需求量恰好相等。即发点的当前发送量已全部用完，而收点的需求量已全部满足。因此应同时划掉发送的行及接受的列。为了使调运表上确保有$(m+n-1)$个基变量的值，就需要在所划掉的行（或列）的任一空格添上调运量 0。这样就得到有一个基变量取值为0的基本可行解——退化解。

例如：试用最小元素法求下表的一个初始基本可行解。

销地 \ 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11 0	4 1	5 6	7
A_2	7	7	3 4	8	4
A_3	1 3	2 6	10	6	9
销 量	3	6	5	6	20

2. 在用闭回路调整当前基本可行解时，有多个偶数格值相等且都是极小值点 。此时只能取一个离基，其余的仍作为基格。

销地 \ 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	3 −3	1	−2	7
A_2	−1	−1	3 −3	−3	3
A_3	11	3	14	6	9
销 量	3	6	4	6	19

三、产销不平衡的运输问题

对产销不平衡问题，可转化为平衡问题，然后按表上作业法求解。

1. 若产大于销，增加一个假想的销地（可视为库存地）其销量设定为余量，相应的运价设为0。

2. 若销大于产，增加一个虚拟的产地，其产量设定为不足量，相应的运价也设为0。

例

销地 \ 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	12	3	4	8
A_2	11	2	5	9	5
A_3	6	7	1	5	9
销 量	4	3	5	6	

§6 线性目标规划

一、线性目标规划的数学模型

例1 某工厂生产Ⅰ，Ⅱ两种产品，已知有关数据见下表。试求获利最大的生产方案。

	Ⅰ	Ⅱ	拥有量
原材料(kg)	2	1	11
设备(hr)	1	2	10
利润(元/件)	8	10	

$$\max z = 8x_1 + 10x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad x_1^*=4,\ x_2^*=3,\ z^*=62(\text{元})$$

实际上工厂在作决策时, 要考虑市场等一系列其他条件:

(1) 根据市场信息，产品Ⅰ的销售量有下降的趋势，故考虑产品Ⅰ的产量不大于产品Ⅱ。

(2) 超过计划供应的原材料，需用高价采购，会使成本大幅度增加。

(3) 应尽可能充分利用设备台时，但不希望加班。

(4) 应尽可能达到并超过计划利润指标56元。

这样在考虑产品决策时，便为多目标决策问题。目标规划方法是解这类决策问题的方法之一。

目标规划的基本概念

1.目标值：是指预先给定的某个目标的一个期望值

2. 正、负偏差变量d^+，d^-

d^+：表示实际值超过目标值的部分

d^-：表示实际值未达到目标值的部分

当超额完成规定的指标：$d^+>0, d^-=0$

当未完成规定的指标： $d^+=0, d^->0$

当恰好完成指标时： $d^+=0, d^-=0$

$$d^+ \times d^- = 0$$

3. 绝对约束和目标约束

4. 优先级与权因子

一个规划问题常常有若干目标。但决策者在要求达到这些目标时，是有主次或轻重缓急的不同。优先因子P_i是将决策目标按其重要程度排序并表示出来。$P_1 >> P_2 >> \ldots >> P_k$。

权系数ω_k区别具有相同优先因子的两个目标的差别，决策者可视具体情况而定。

5. 目标规划的目标函数

决策者的要求是尽可能缩小偏离目标值，因此目标规划的目标函数只能是

$$\min z = f(d^+, d^-)$$

其基本形式有三种：

(1) 要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能地小。

$$\min\ (d^+ + d^-)$$

(2) 要求不超过目标值，即允许达不到目标值，就是正偏差变量要尽可能地小。

$$\min\ (d^+)$$

(3) 要求超过目标值，即超过量不限，但必须是负偏差变量要尽可能地小。

$$\min\ (d^-)$$

例2：例1的决策者在原材料供应受严格限制的基础上考虑：首先是产品Ⅱ的产量不低于产品Ⅰ的产量；其次是充分利用设备有效台时，不加班；再次是利润额不小于56元。求决策方案。

解 按决策者所要求的，分别赋予这三个目标P_1，P_2，P_3优先因子。

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

目标规划的一般数学模型为

$$\min z=\sum_{l=1}^{L}P_l\sum_{k=1}^{K}(\omega_{lk}^{-}d_k^{-}+\omega_{lk}^{+}d_k^{+})$$

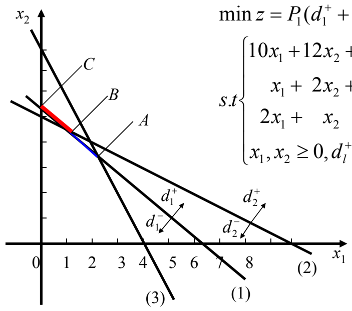
$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}x_j+d_k^{-}-d_k^{+}=g_k, & k=1,\cdots,K\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(=,\ge)b_i, & i=1,\cdots,m\\ x_j\ge 0, & j=1,\cdots,n\\ d_k^{-},d_k^{+}\ge 0, & k=1,2,3\end{cases}$$

二、目标规划的图解法

例4 用图解法求解目标规划问题

$$\min z=P_1(d_1^{+}+d_1^{-})+P_2d_2^{-}$$

$$s.t\begin{cases}10x_1+12x_2+d_1^{-}-d_1^{+}=62.5\\ x_1+2x_2+d_2^{-}-d_2^{+}=10\\ 2x_1+x_2\le 8\\ x_1,x_2\ge 0,d_l^{+},d_l^{-}\ge 0(l=1.2)\end{cases}$$



图解法解题步骤如下：

1、确定各约束条件的可行域，即将所有约束条件 (包括目标约束和绝对约束，暂不考虑正负偏差变量) 在坐标平面上表示出来；

2、在目标约束所代表的边界线上，用箭头标出正、负偏差变量值增大的方向；

3、求满足最高优先等级目标的解；

4、转到下一个优先等级的目标，在不破坏所有较高优先等级目标的前提下，求出该优先等级目标的解；

5、重复4，直到所有优先等级的目标都已审查完毕为止；

6、确定最优解和满意解。

例5 某公司分厂用一条生产线生产两种产品A和B，每周生产线运行时间为60小时，生产一台A产品需要4小时，生产一台B产品需要6小时．根据市场预测，A、B产品平均销售量分别为每周9、8台，每台销售利润分别为12、18万元。在制定生产计划时，经理考虑下述4项目标：

首先，产量不能超过市场预测的销售量；

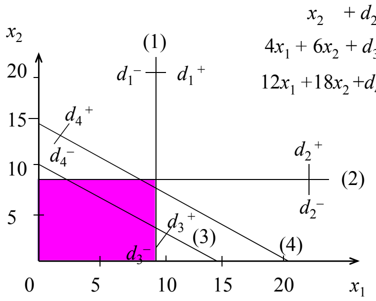
其次，工人加班时间最少；

第三，希望总利润最大；

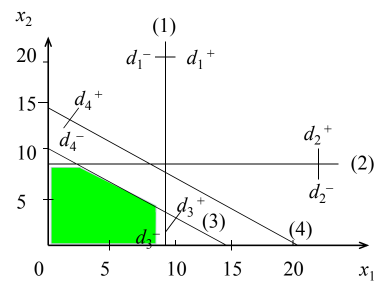
最后，要尽可能满足市场需求, 当不能满足时, 市场认为 B 产品的重要性是 A 产品的2倍．

$$\text{Min } z=P_1(d_1^{+}+d_2^{+})+P_2d_3^{+}+P_3d_4^{-}+P_4(d_1^{-}+2d_2^{-})$$

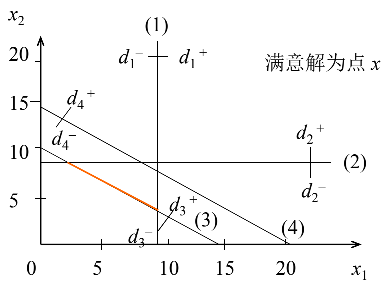
$$\begin{aligned} \text{s.t}\quad x_1\qquad\quad +d_1^{-}-d_1^{+}&=9\\ x_2+d_2^{-}-d_2^{+}&=8\\ 4x_1+6x_2+d_3^{-}-d_3^{+}&=60\\ 12x_1+18x_2+d_4^{-}-d_4^{+}&=252\end{aligned}$$



$$\text{Min } z=P_1(d_1^{+}+d_2^{+})+P_2d_3^{+}+P_3d_4^{-}+P_4(d_1^{-}+2d_2^{-})$$



$$\text{Min } z = P_1(d_1^{+} + d_2^{+}) + P_2 d_3^{+} + P_3 d_4^{-} + P_4(d_1^{-} + 2d_2^{-})$$



满意解为点 $x = 3, y = 8$

三、目标规划的单纯形法

目标规划的数学模型特点：

(1) 因目标规划问题的目标函数都是求最小化，所以以 $c_j - z_j \geq 0$，$j = 1, 2, \ldots, n$为最优准则。

(2) 因非基变量的检验数中含有不同等级的优先因子，即

$$c_j - z_j = \sum a_{kj} P_k \quad j = 1,2,\cdots,n;\ k = 1,2,\cdots,K$$

因 $P_1 >> P_2 >> \ldots >> P_K$，$\sigma_j$的正、负首先决定于$P_1$的系数$a_{1j}$的正、负。若 $a_{1j} = 0$，这时此检验数的正、负就决定于P_2的系数 a_{2j}的正、负，依此类推。

例5 用单纯形法求解例2：

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, x_3, d_i^-, d_i^+ \geq 0, \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

c_j			0	0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	θ
0	x_3	11	2	1	1	0	0	0	0	0	0	11
0	d_1^-	0	1	–1	0	1	–1	0	0	0	0	
P_2	d_2^-	10	1	[2]	0	0	0	1	–1	0	0	5
P_3	d_3^-	56	8	10	0	0	0	0	0	1	–1	5.6
$c_j - z_j$		P_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
		P_2	–1	–2	0	0	0	0	2	0	0	
		P_3	–8	–10	0	0	0	0	0	0	1	

$$\sigma_j = c_j - c_B B^{-1} p_j$$

c_j			0	0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	θ
0	x_3	6	3/2	0	1	0	0	–1/2	1/2	0	0	12
0	d_1^-	5	3/2	0	0	1	–1	1/2	–1/2	0	0	
0	x_2	5	1/2	1	0	0	0	1/2	–1/2	0	0	
P_3	d_3^-	6	3	0	0	0	0	–5	[5]	1	–1	6/5
$c_j - z_j$		P_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
		P_2	0	0	0	0	0	1	–1	0	0	
		P_3	–3	0	0	0	0	5	–5	0	1	

c_j			0	0	0	0	P_1	P_2	P_2	P_3	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	θ
0	x_3	6	3/2	0	1	0	0	–1/2	1/2	0	0	
0	d_1^-	5	3/2	0	0	1	–1	1/2	–1/2	0	0	
0	x_2	5	1/2	1	0	0	0	1/2	–1/2	0	0	
P_2	d_2^+	6/5	3/5	0	0	0	0	–1	1	1/5	–1/5	
$c_j - z_j$		P_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
		P_2	3/5	0	0	0	0	0	0	1/5	0	
		P_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	