2- Dénombrement

2.a) Ensembles finis

Définition 7. Un ensemble E est dit **fini** sitôt qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi : E \to [\![1;n]\!]$. On dit alors que n est le **cardinal** de E : c'est le nombre d'éléments de E, et on le note $\mathrm{Card}(E)$, $|E|$, ou encore $\#E$.

Remarque 5.
- Par convention, $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal 0.
- Un ensemble est dit *infini* s'il n'est pas fini.
- On appelle **singleton** un ensemble de cardinal 1.
- Pour un ensemble fini E de cardinal n, on a également une bijection $[\![1;n]\!] \to E$, qui permet de numéroter les éléments de E et d'écrire : $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Exemple 4.

- $\mathrm{Card}(\{a,b,c,d\}) = 4$
- $\mathrm{Card}([\![0;n]\!]) = n+1$
- $\mathrm{Card}([\![p;n]\!]) = n-p+1$

Proposition 8. Soit E un ensemble fini, et $E' \subset E$. Alors E' est un ensemble fini et :

$$\mathrm{Card}(E') \leqslant \mathrm{Card}(E)$$

Avec égalité si et seulement si $E = E'$.

Démonstration 1.

Corollaire 1. Si F est inclus dans E est F est infini, alors E est infini.

Proposition 9. Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \to F$. Alors :

1- f est injective $\implies \mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$

2- f est surjective $\implies \mathrm{Card}(E) \geqslant \mathrm{Card}(F)$

3- f est bijective $\implies \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$

Démonstration 2.

Proposition 10. Soient E et F deux non vides, avec E fini, et $f : E \to F$.

1- $f(E)$ est fini, et $\mathrm{Card}(f(E)) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.

2- $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E) \Leftrightarrow f$ est injective.

3- f est surjective $\Leftrightarrow F$ est fini et $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F)$.

Démonstration 3.

Théorème 7. *Soient E et F deux ensembles finis, de même cardinal, et $f : E \to F$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1- f est injective.

2- f est surjective.

3- f est bijective.

Démonstration 4.

Théorème 8. *Soient E et F deux ensembles finis, alors les ensembles suivants sont également finis, et on peut calculer leur cardinal :*

- $E \cup F$*, avec* $\#E \cup F = \#E + \#F - \#E \cap F$
- $E \cap F$*, avec* $\#E \cap F = \#E + \#F - \#E \cup F$
- $E \times F$*, avec* $\#E \times F = \#E \times \#F$
- F^E*, avec* $\#F^E = \#F^{\#E}$
- $\mathcal{P}(E)$*, avec* $\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$

2.b) Listes

Définition 8. Soit E un ensemble fini, on appelle p**-liste** ou p**-uplet** tout élément de E^p, avec :

$$E^p = \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \;/\; \forall i \in [\![1;p]\!],\, x_i \in E\}$$

Remarque 6. Attention, c'est une notion distincte d'un sous-ensemble de E à p éléments. D'une part, on peut avoir $p \geqslant \mathrm{Card}(E)$, d'autre part, certains éléments d'un p-uplet peuvent se répéter, et enfin, *l'ordre des éléments est important.*

Théorème 9. *Soit E un ensemble fini.*

$$\mathrm{Card}(E^p) = \mathrm{Card}(E)^p$$

2.c) Arrangements et permutations

Remarque 7. Dans une p-liste, certains éléments peuvent se répéter. Si l'on veut choisir une p-liste d'éléments *sans répétitions*, cela revient à choisir un sous-ensemble F de E avec p éléments, ou encore à donner un ensemble F à p éléments, et une fonction injective de E dans F (fonction correspondant au "choix" ou non de l'élément de E).

Définition 9. Soient E un ensemble, et p un entier naturel. On appelle p-arrangement d'éléments de E toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Proposition 11. Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier. Le nombre de p-arrangements d'éléments de E est noté A_n^p et :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Remarque 8. Un p-arrangement est un p-uplet sans répétitions, mais l'ordre des éléments est important. Par exemple ; $(1,4,2)$ et $(1,2,4)$ sont deux 3-arrangements différents de $[\![1;4]\!]$.

Proposition 12. Soient E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs n et p. Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des applications injectives de E dans F. Alors :

$$\mathrm{Card}(I) = A_n^p$$

Démonstration 5.

Définition 10. Soit E un ensemble fini, on appelle **permutation** de E toute bijection $\varphi : E \to E$. L'ensemble des permutations de E est noté $\mathfrak{S}_E$. De plus, si $E = [\![1;n]\!]$, on note $\mathfrak{S}_E = \mathfrak{S}_n$.

Remarque 9. $(\sigma(E), \circ)$ est un groupe (non-abélien).

Théorème 10. *Si E est un ensemble fini, alors $\sigma(E)$ est fini également et*

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_E) = \mathrm{Card}(E)!$$

en particulier, on a

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!$$

Démonstration 6.

2.d) Combinaison

Définition 11. Soit E un ensemble. On appelle p-**combinaison** de E une partie de E ayant exactement p éléments.

Remarque 10. Si on prend une p-combinaison particulière, il s'agit d'un sous-ensemble de E, donc d'une part, l'ordre des éléments n'a pas d'importance, et d'autre part, il n'y a pas de répétitions.

Théorème 11. *Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit $p \in [\![0;n]\!]$. Alors le nombre de p-combinaison de E est :*

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times p} = \frac{A_n^p}{p!}$$

On le lit «p parmi n ».

Remarque 11. La dernière écriture nous indique que moralement, une combinaison est un arrangement dont on ne regarde pas l'ordre.

Remarque 12. Par convention, si $p > n$, on posera $\binom{n}{p} = 0$.

Proposition 13. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![0;n]\!]$. On a alors :

1- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

3- $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

2.e) Exercices

Exercice I-5. Une fourmi se déplace sur les arêtes d'un tétraèdre. Chaque seconde, elle part d'un sommet pour aller à un autre sommet relié par une arête. Combien y a-t-il de chemins possibles en n secondes ? Même question pour un cube, et pour un dodécaèdre.

Exercice I-6. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;3]\!]$?

Exercice I-7. On tire simultanément 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Combien d'entre eux contiennent deux carrés ?

Exercice I-8. Soient n et p deux entiers naturels non-nuls. Combien y a-t-il de listes de p entiers strictement croissantes ?

Exercice I-9. On veut organiser des matchs entre $2n$ équipes de basket, chaque équipe disputant un match (c'est à dire, on veut construire n paires d'équipes). Combien y a-t-il de manière possible d'organiser ces matchs ?

Exercice I-10. Montrer que :

1- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{p+1}$

2- $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{n+m}{p}$

3- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

4- $\displaystyle\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$

5- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$