点估计的概念

设总体 X 的分布函数形式已知，但它的一个或多个参数为未知，借助于总体 X 的一个样本来估计总体未知参数的值的问题称为**点估计问题**.

例1 在某炸药制造厂，一天中发生着火现象的次数 X 是一个随机变量，假设它服从以 $\lambda > 0$ 为参数的泊松分布，参数 λ 为未知，设有以下的样本值，试估计参数 λ.

着火次数 k	0	1	2	3	4	5	6	
发生 k 次着火的天数 n_k	75	90	54	22	6	2	1	$\Sigma = 250$

解　因为 $X \sim \pi(\lambda)$，所以 $\lambda = E(X)$.

用样本均值来估计总体的均值 $E(X)$.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{k=0}^{6} k n_k}{\sum_{k=0}^{6} n_k}$$

$$= \frac{1}{250}(0 \times 75 + 1 \times 90 + 2 \times 54 + 3 \times 22 + 4 \times 6 + 5 \times 2 + 6 \times 1)$$

$$= 1.22.$$

故 $E(X) = \lambda$ 的估计为 1.22 .

点估计问题的一般提法

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 的形式为已知，θ 是待估参数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应的一个样本值.

点估计问题就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来估计未知参数 θ.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\text{称为}\theta\text{的估计量.}\\ \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\text{称为}\theta\text{的估计值.}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{通称估计,}\\ \text{简记为}\hat{\theta}.\end{array}$$

例2 在某纺织厂细纱机上的断头次数 X 是一个随机变量,假设它服从以 $\lambda > 0$ 为参数的泊松分布,参数 λ 为未知,现检查了150 只纱锭在某一时间段内断头的次数,数据如下,试估计参数 λ.

断头次数 k	0	1	2	3	4	5	6	
断头 k 次的纱锭数 n_k	45	60	32	9	2	1	1	150

解 先确定一个统计量 $\overline{X}$, 再计算出 $\overline{X}$ 的观察值 $\overline{x}$, 把 $\overline{x}$ 作为参数 λ 的估计值.

$\overline{x} = 1.133$. λ 的估计值为 1.133.

矩估计法

设 X 为连续型随机变量,其概率密度为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$,或 X 为离散型随机变量,其分布律为 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$,其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 为待估参数，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本,假设总体 X 的前 k 阶矩存在，且均为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数，即

$$\mu_l=E(X^l)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^l f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\mathrm{d}x \quad （X为连续型）$$

或 $$\mu_l=E(X^l)=\sum_{x\in R_X}x^l p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k), \quad (X为离散型)$$

其中 R_X 是 x 可能取值的范围， $l=1,2,\cdots,k$

因为样本矩 $A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$ 依概率收敛于相应的总体矩 $\mu_l \ (l = 1, 2, \cdots, k)$,

样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩的连续函数.

矩估计法的定义

用样本矩来估计总体矩,用样本矩的连续函数来估计总体矩的连续函数,这种估计法称为矩估计法.

矩估计法的具体做法:

令 $\mu_l = A_l, \quad l = 1, 2, \cdots, k.$

这是一个包含 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的方程组,

解出其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$.

用方程组的解 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 分别作为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计量,这个估计量称为矩估计 量.

矩估计量的观察值称为矩估计值.

例1 设总体 X 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布,其中 $\theta(\theta>0)$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本,求 θ 的估计量.

解 因为 $\mu_1=E(X)=\dfrac{\theta}{2}$,

根据矩估计法, 令 $\dfrac{\hat{\theta}}{2}=A_1=\overline{X}$,

所以 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 为所求 θ 的估计量.

例2 设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，其中 a,b 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，求 a, b 的估计量.

解 $$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4},$$

令 $$\frac{a+b}{2} = A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

即 $$\begin{cases} a+b=2A_1, \\ b-a=\sqrt{12(A_2-A_1{}^2)}. \end{cases}$$

解方程组得到a, b的矩估计量分别为

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3(A_2-A_1{}^2)}=\overline{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2},$$

$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1{}^2)}=\overline{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

例3 设总体 X 服从几何分布，即有分布律

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1} \quad (k=1,2,\cdots),$$

其中 $p\ (0<p<1)$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，求 p 的估计量.

解 $$\mu_1 = E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p},$$

令 $$\frac{1}{\hat{p}} = A_1 = \overline{X},$$

所以 $\hat{p} = \dfrac{1}{\overline{X}}$ 为所求 p 的估计量.

例4 设总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 都存在，且有 $\sigma^2>0$，但 μ 和 σ^2 均为未知，又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，求 μ 和 σ^2 的矩估计量.

解 $\mu_1 = E(X) = \mu,$

$$\mu_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2,$$

$$\text{令} \begin{cases} \mu = A_1, \\ \sigma^2 + \mu^2 = A_2. \end{cases}$$

解方程组得到矩估计量分别为 $\hat{\mu} = A_1 = \overline{X},$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^{\ 2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{\ 2} - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

上例表明:

总体均值与方差的矩估计量的表达式不因不同的总体分布而异.

例 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 未知,即得 μ,σ^2 的矩估计量

$$\hat{\mu}=\overline{X},\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

一般地,

用样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 作为总体 X 的均值的矩估计,

用样本二阶中心矩 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 作为总体 X 的方差的矩估计.

最大似然估计法

(1) 设总体 X 属离散型

似然函数的定义

设分布律 $P\{X=x\}=p(x;\theta)$, θ 为待估参数, $\theta\in\Theta$,

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本,

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布律为 $\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$.

又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值.

则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 取到观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的概率,

即事件 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n$ 发生的概率为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta,$$

$L(\theta)$称为样本似然函数.

最大似然估计法

得到样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时,选取使似然函数 $L(\theta)$

取得最大值的 $\hat{\theta}$ 作为未知参数 θ 的估计值,

即 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta).$

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

这样得到的 $\hat{\theta}$ 与样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有关,记为

$\boxed{\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$, 参数 θ 的最大似然估计值,

$\boxed{\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)}$ 参数 θ 的最大似然估计量.

(2) 设总体 X 属连续型

似然函数的定义

设概率密度为 $f(x;\theta)$, θ 为待估参数， $\theta \in \Theta$,

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本,

则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度为 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$.

又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值.

则随机点 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 落在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的邻域(边长分别为 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 的 n 维立方体)内的概率近似地为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\mathrm{d}x_i \ ,$$

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta),$$

$L(\theta)$ 称为样本的似然函数.

若 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\theta)$.

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 参数 θ 的最大似然估计值,

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 参数 θ 的最大似然估计量.

求最大似然估计量的步骤:

(一) 写出似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

或 $$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta);$$

(二) 取对数

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta) \quad 或 \quad \ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta);$$

(三) 对 θ 求导 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$， 并令 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0}$, 对数似然方程

解方程即得未知参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

最大似然估计法也适用于分布中含有多个未知参数的情况. 此时只需令

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L=0, \qquad i=1,2,\cdots,k.}$$ 对数似然方程组

解出由 k 个方程组成的方程组,即可得各未知参数 $\theta_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i$.

例1 设 $X \sim B(1, p)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自X的一个样本, 求 p 的最大似然估计量.

解 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值,

X的分布律为 $P\{X = x\} = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0,1,$

似然函数 $L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p),$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L(p)=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}=0,$$

解得 p 的最大似然估计值 $$p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\bar{x}.$$

p 的最大似然估计量为 $$\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\bar{X}.$$

这一估计量与矩估计量是相同的.

例2 设 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda>0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一个样本, 求 λ 的最大似然估计量.

解 因为X的分布律为

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad (x=0,1,2,\cdots,n)$$

所以λ的似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right)=\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)},$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}(x_i!),$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln L(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0,$$

解得 λ 的最大似然估计值 $$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$$

λ 的最大似然估计量为 $$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

这一估计量与矩估计量是相同的.

例3 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2为未知参数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自X的一个样本值, 求 μ 和 σ^2 的最大似然估计量.

解 X的概率密度为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 ,$$

令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right] = 0 , \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 , \end{cases}$$

由 $\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right] = 0$ 解得 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$

由 $-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$ 解得

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

故 μ 和 σ^2 的最大似然估计量分别为

$$\hat{\mu} = \bar{X},\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

它们与相应的矩估计量相同.

例4 设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布,其中 a,b 未知, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值,求 a,b 的最大似然估计量.

解 记 $x_{(l)}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

$$x_{(h)}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

X 的概率密度为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为$a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$等价于$a \le x_{(l)}, x_{(h)} \le b$,

作为a, b的函数的似然函数为

$$L(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_{(l)},\ b \ge x_{(h)}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

于是对于满足条件 $a \le x_{(l)}, b \ge x_{(h)}$ 的任意a,b 有

$$L(a,b) = \frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{(h)} - x_{(l)})^n},$$

即似然函数 $L(a,b)$ 在 $a=x_{(l)}$，$b=x_{(h)}$ 时取到最大值 $(x_{(h)}-x_{(l)})^{-n}$，

a,b 的最大似然估计值

$$\hat{a}=x_{(l)}=\min_{1\le i\le n}x_i,\qquad \hat{b}=x_{(h)}=\max_{1\le i\le n}x_i,$$

a,b 的最大似然估计量

$$\hat{a}=\min_{1\le i\le n}X_i,\qquad \hat{b}=\max_{1\le i\le n}X_i\ .$$

最大似然估计的性质

设 θ 的函数 $u=u(\theta),\theta\in\Theta$ 具有单值反函数 $\theta=\theta(u),u\in\upsilon$ 又设 $\hat{\theta}$ 是 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)$ (f 形式已知) 中的参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

证明 因为 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计值,

所以 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$,

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值,

由于 $\hat{u}=u(\hat{\theta}),\quad \hat{\theta}=\theta(\hat{u})$,

故 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta(\hat{u}))=\max\limits_{u\in\mathcal{U}} L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta(u))$,

于是 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计 .

此性质可以推广到总体分布中含有多个未知参数的情况.

例如， σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,

函数 $u=u(\sigma^2)=\sqrt{\sigma^2}$ 有单值反函数 $\sigma^2=u^2\ (u\ge 0)$,

故标准差 σ 的最大似然估计值为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\hat{\sigma}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

估计量的评选标准

一、无偏性

二、有效性

三、相合性

一、无偏性

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，

$\theta \in \Theta$ 是包含在总体 X 的分布中的待估参数，

(Θ 是 θ 的取值范围)

若估计量 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意 $\theta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**无偏估计量.**

无偏估计的实际意义：无系统误差.

例1 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)\ (k \geq 1)$ 存在，又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本，试证明不论总体服从什么分布，k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

证明 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 X 同分布，

故有 $E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k$， $i = 1, 2, \cdots, n$.

即 $$E(A_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \mu_k.$$

故 k 阶样本矩 A_k 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

特别地:

不论总体 X 服从什么分布, 只要它的数学期望存在,

$\overline{X}$ 总是总体 X 的数学期望 $\mu_1 = E(X)$ 的无偏 估计量.

例2 对于均值 μ,方差 $\sigma^2 > 0$ 都存在的总体,若 μ, σ^2 均为未知,则 σ^2 的估计量 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 是有偏的(即不是无偏估计).

证明 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2 = A_2 - \overline{X}^2$,

因为 $E(A_2) = \mu_2 = \sigma^2 + \mu^2$,

又因为 $E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + [E(\overline{X})]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$,

所以 $E(\hat{\sigma}^2) = E(A_2 - \overline{X}^2) = E(A_2) - E(\overline{X}^2)$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2,$$ 所以 $\hat{\sigma}^2$ 是有偏的.

若以 $\dfrac{n}{n-1}$ 乘 $\hat{\sigma}^2$,所得到的估计量就是无偏的.

(这种方法称为无偏化).

$$E\left(\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2\right)=\frac{n}{n-1}E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2.$$

因为 $\dfrac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}^2)$,

即 S^2是σ^2 的无偏估计，故通常取 S^2 作 σ^2 的估计量.

例3 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，试求 σ^2 的无偏估计量.

解 已知 $\dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$,

$$E\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sigma}\right) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n-1}{2}-1} dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} dx = \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

$$E(S)=\sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma,$$

故 S 不是 σ 的无偏估计量,

$$\sqrt{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}S \text{ 是 } \sigma \text{ 的无偏估计量.}$$

例4 设总体 X 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布，参数 $\theta>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，试证明 $2\overline{X}$ 和 $\dfrac{n}{n+1}\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是 θ 的无偏估计.

证 因为 $E(2\overline{X})=2E(\overline{X})=2E(X)=2\times\dfrac{\theta}{2}=\theta$,

所以 $2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

因为 $X_h=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以 $$E(X_h)=\int_0^\theta x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n}{n+1}\theta,$$

故有 $$E\left(\frac{n+1}{n}X_h\right)=\theta,$$

故 $\dfrac{n}{n+1}\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 也是θ的无偏估计量.

例5 设总体 X 服从参数为 θ 的指数分布, 概率密度

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中参数 $\theta>0$, 又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本, 试证 $\overline{X}$ 和 $nZ=n[\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)]$ 都是 θ 的无偏估计.

证明 因为 $E(\overline{X})=E(X)=\theta,$

所以 $\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

而$Z=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从参数为$\dfrac{\theta}{n}$的指数分布,

概率密度 $f_{\min}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{nx}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

故知 $E(Z)=\dfrac{\theta}{n}$, $E(nZ)=\theta$,

所以nZ也是θ的无偏估计量.

由以上两例可知, 一个参数可以有不同的无偏估计量.

二、有效性

比较参数θ的两个无偏估计量$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$，如果在样本容量n相同的情况下，$\hat{\theta}_1$的观察值在真值θ的附近较$\hat{\theta}_2$更密集，则认为$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效.

由于方差是随机变量取值与其数学期望的偏离程度，所以无偏估计以方差小者为好.

设$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$与$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$都是$\theta$的无偏估计量，若有$D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效.

例6 (续例5)

试证当$n > 1$时，θ 的无偏估计量 $\overline{X}$ 较 nZ 有效.

证明 由于 $D(X) = \theta^2$， 故有 $D(\overline{X}) = \dfrac{\theta^2}{n}$，

又因为 $D(Z) = \dfrac{\theta^2}{n^2}$， 故有 $D(nZ) = \theta^2$，

当$n > 1$时， $D(nZ) > D(\overline{X})$，

故 θ 的无偏估计量 $\overline{X}$ 较 nZ 有效.

例7 (续例4) 在例4中已证明 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$ 和 $\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}$ $\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 都是 θ 的无偏估计量, 现证当 $n \geq 2$ 时, $\hat{\theta}_2$ 较 $\hat{\theta}_1$ 有效.

证明 由于 $D(\hat{\theta}_1) = 4D(\overline{X}) = \dfrac{4}{n}D(X) = \dfrac{\theta^2}{3n}$,

$$D(\hat{\theta}_2) = D\left(\frac{n+1}{n}X_h\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D(X_h),$$

又因为 $E(X_h) = \dfrac{n+1}{n}\theta$,

$$E(X_h{}^2)=\int_0^\theta \frac{n}{\theta^n}x^{n+1}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+2}\theta^2,$$

$$D(X_h)=E(X_h{}^2)-[E(X_h)]^2$$

$$=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2,$$

故 $D(\hat{\theta}_2)=\dfrac{1}{n(n+2)}\theta^2,$

又$n\geq 2$, 所以$D(\hat{\theta}_2)<D(\hat{\theta}_1)$, $\hat{\theta}_2$ 较 $\hat{\theta}_1$ 有效.

三、相合性

若$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$时，$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$依概率收敛于$\theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的相合估计量.

例如 已知，样本$k(k\geq 1)$阶矩是总体X的k阶矩$\mu_k=E(X^k)$的相合估计量，进而若待估参数$\theta=g(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，其中$g$为连续函数，则$\theta$的矩估计量$\hat{\theta}=g(\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\cdots,\hat{\mu}_n)=g(A_1,A_2,\cdots,A_n)$是$\theta$的相合估计量.

例8 试证：样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值 μ 的相合估计量，样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 及样本的二阶中心矩 $B_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 都是总体方差 σ^2 的相合估计量.

证明 由大数定律知，

$$\forall\varepsilon>0,\quad \text{有}\quad \lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

所以 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是 μ 的相合估计量.

又 $B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i{}^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-\overline{X}^2=A_2-\overline{X}^2,$$

(A_2 是样本二阶原点矩)

由大数定律知,

$$A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \text{依概率收敛于} E(X^2),$$

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{依概率收敛于} E(X),$$

故 $B_2 = A_2 - \overline{X}^2$

依概率收敛于 $E(X^2)-[E(X)]^2=\sigma^2$,

所以B_2是σ^2的相合估计量.

$$\text{又}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1,$$

所以 $S^2=\dfrac{n}{n-1}B_2$ 也是σ^2的相合估计量.

置信区间的概念

一、置信区间的概念

二、典型例题

一、置信区间的概念

1. 定义

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ, 对于给定值 $\alpha\ (0<\alpha<1)$, 若由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间, $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 为置信水平.

关于定义的说明

被估计的参数 θ 虽然未知，但它是一个常数，没有随机性，而区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 是随机的.

因此定义中下表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

的本质是：

随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 以 $1-\alpha$ 的概率包含着参数 θ 的真值，而不能说参数 θ 以 $1-\alpha$ 的概率落入随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$.

另外定义中的表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

还可以描述为:

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等, 都是n)

每个样本值确定一个区 间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$,

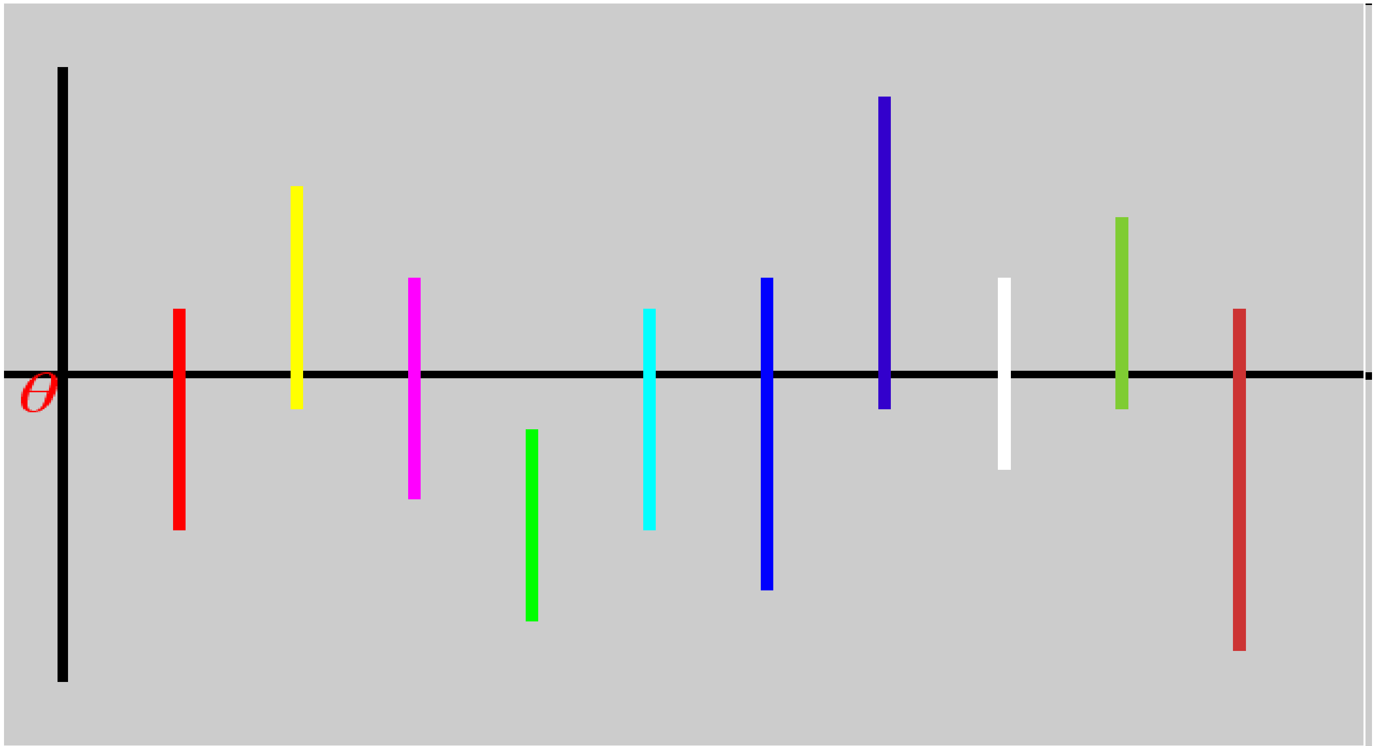
每个这样的区间或包含 θ 的真值或不包含 θ 的真值,

按伯努利大数定理, 在这样多的区间中,

包含 θ 真值的约占$100(1-\alpha)\%$, 不包含的约占 $100\alpha\%$.

例如　若 $\alpha = 0.01$, 反复抽样 1000 次,

则得到的1000个区间中不包含 θ 真值的约为10个.



2. 求置信区间的一般步骤(共3步)

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数：

$$Z = Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$

其中仅包含待估参数 θ, 并且 Z 的分布已知且不依赖于任何未知参数 (包括 θ).

(2) 对于给定的置信度 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b, 使 $P\{a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha.$

(3) 若能从 $a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$，其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n), \overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量，那么 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 就是 θ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

样本容量 n 固定,置信水平 $1-\alpha$ 增大,置信区间长度增大,可信程度增大,区间估计精度降低.

置信水平 $1-\alpha$ 固定,样本容量 n 增大,置信区间长度减小,可信程度不变,区间估计精度提高.

二、典型例题

例1 设总体 X 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布, 其中 $\theta(\theta>0)$ 未知, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的样本, 给定 α, 求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 令 $X_h=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,

已知, $\dfrac{n+1}{n}X_h$ 是 θ 的无偏估计,

因为 X_h 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

考察包括待估参数 θ 的随机变量 $Z = \dfrac{X_h}{\theta}$,

其概率密度为 $g(z) = \begin{cases} nz^{n-1}, & 0 \le z \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

对于给定的 α,可定出两个常数 $a,b(0 < a < b \le 1)$,

满足条件 $P\left\{a < \dfrac{X_h}{\theta} < b\right\} = 1 - \alpha$,

即 $1 - \alpha = \int_a^b nz^{n-1}\mathrm{d}z = b^n - a^n$,

$\Rightarrow P\left\{\dfrac{X_h}{b} < \theta < \dfrac{X_h}{a}\right\} = 1 - \alpha$, $\left(\dfrac{X_h}{b}, \dfrac{X_h}{a}\right)$为置信区间.

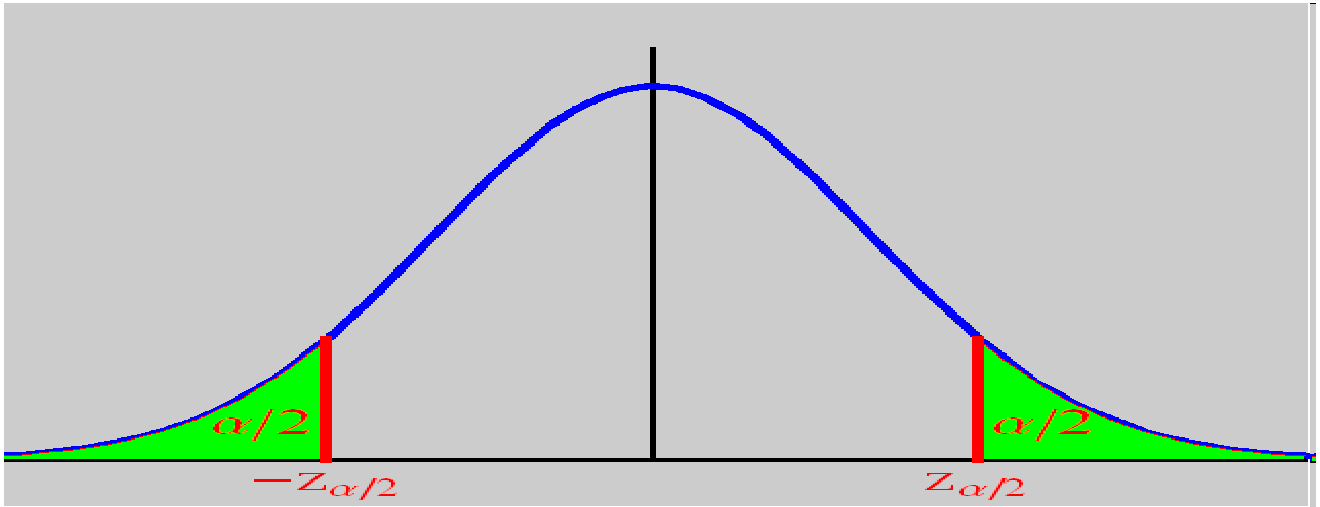
例2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本,其中 σ^2 为已知, μ 为未知,求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 因为 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计,

且 $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 是不依赖于任何未知参数的,

由标准正态分布的上 α 分位点的定义知



$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

于是得μ的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$

其置信区间的长度为 $2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}.$

注意：置信水平为$1-\alpha$的置信区间是不唯一的

如果在例2中取 $n = 16,\ \sigma = 1,\ \alpha = 0.05,$

查表可得 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$

得一个置信水平为0.95的置信区间$\left(\overline{X} \pm \frac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96\right).$

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\overline{x} = 5.20,$

则置信区间为(5.20 ± 0.49)，即 $(4.71, 5.69).$

在例2中如果给定 $\alpha = 0.05,$

则又有 $P\left\{-z_{0.04} < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95,$

即 $P\{\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01} < \mu < \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\} = 0.95,$

故 $\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01},\ \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$ 也是 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

其置信区间的长度为 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04} + z_{0.01})$.

比较两个置信区间的长度

$$L_1 = 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} = 3.92 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (z_{0.04} + z_{0.01}) = 4.08 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

显然 $L_1 < L_2$. 置信区间短表示估计的精度高.

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 易证取a和b关于原点对称时, 能使置信区间长度最小.

例3 设某工件的长度 X 服从正态分布 $N(\mu,16)$, 今抽 9 件测量其长度, 得数据如下(单位:mm):

142, 138, 150, 165, 156, 148, 132, 135, 160.

试求参数 μ 的置信水平为95%的置信区间.

解 根据例2得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right),$$

由 $n=9, \sigma=4, \alpha=0.05, z_{0.025}=1.96, \bar{x}=147.333$ 知,

μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 (144.720, 149.946).

单侧置信限的概念

一、基本概念

二、典型例题

一、基本概念

1. 单侧置信区间的定义

对于给定值 $\alpha\,(0<\alpha<1)$, 若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 对于任意 $\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta>\underline{\theta}\}\geq 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 是θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, $\underline{\theta}$ 称为θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

又如果统计量 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 对于任意 $\theta\in\Theta$满足 $P\{\theta<\overline{\theta}\}\geq 1-\alpha$,

则称随机区间 $(-\infty,\overline{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, $\overline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限.

2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

设正态总体 X 的均值是μ, 方差是σ^2 (均为未知),

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，由 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

有 $P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\mu > \overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),+\infty\right),$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限

$$\underline{\mu}=\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1).$$

又根据 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$

有 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha,$

即 $$P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

二、典型例题

例1 设从一批灯泡中，随机地取5只作寿命试验，测得寿命(以小时计)为 **1050，1100，1120，1250，1280**，设灯泡寿命服从正态分布，求灯泡寿命平均值的置信水平为 **0.95** 的单侧置信下限.

解 $1-\alpha=0.95,\quad n=5,\quad \bar{x}=1160,\ s^2=9950,$

$$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318,$$

μ 的置信水平为 **0.95** 的置信下限

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1065.$$

例2 设总体 X 在$[0,\theta]$上服从均匀分布，其中 θ $(\theta > 0)$ 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，给定 α，求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限和置信上限.

解 令 $X_h = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，

对于给定的 α，找 $0 < \underline{\theta} \le 1$，使 $P\left\{\theta > \dfrac{X_h}{\underline{\theta}}\right\} = 1-\alpha$，

即 $1-\alpha = \int_0^{\underline{\theta}} n z^{n-1} \mathrm{d}z = \underline{\theta}^n$，于是 $\underline{\theta} = \sqrt[n]{1-\alpha}$，

所以 $P\left\{\dfrac{X_h}{\sqrt[n]{1-\alpha}} < \theta\right\} = 1-\alpha$，

θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限 $\underline{\theta} = \dfrac{X_h}{\sqrt[n]{1-\alpha}}$.

对于给定的 α, 找 $0 < \overline{\theta} < 1$, 使 $P\left\{\theta < \dfrac{X_h}{\overline{\theta}}\right\} = 1-\alpha$,

即 $1-\alpha = \int_{\overline{\theta}}^{1} n z^{n-1} \mathrm{d}z = 1-\overline{\theta}^{n}$, 于是 $\overline{\theta} = \sqrt[n]{\alpha}$,

所以 $P\left\{\theta < \dfrac{X_h}{\sqrt[n]{\alpha}}\right\} = 1-\alpha$,

θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信上限 $\overline{\theta} = \dfrac{X_h}{\sqrt[n]{\alpha}}$.

单个正态总体均值或方差的置信区间和单侧置信限

设给定置信水平为 $1-\alpha$，并设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差.

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2 为已知，

μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\overline{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$.

例1 包糖机某日开工包了12包糖, 称得质量(单位: 克)分别为506, 500, 495, 488, 504, 486, 505, 513, 521, 520, 512, 485. 假设重量服从正态分布, 且标准差为$\sigma = 10$, 试求糖包的平均质量 μ 的 $1-\alpha$ 置信区间(分别取 $\alpha = 0.10$ 和 $\alpha = 0.05$).

解 $\sigma = 10$, $n = 12$,

计算得 $\bar{x} = 502.92$,

(1) 当 $\alpha = 0.10$ 时, $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.95$,

查表得 $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$,

附表2-1

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=502.92-\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=498.17,$$

$$\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=502.92+\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=507.67,$$

即μ的置信水平为 90% 的置信区间为

(498.17, 507.67).

(2) 当$\alpha=0.05$时, $1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975,$

查表得

$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$$

附表2-2

同理可得 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$(497.26,\ 508.58).$$

从此例可以看出:

当置信水平 $1-\alpha$ 较大时, 置信区间也较大;

当置信水平 $1-\alpha$ 较小时, 置信区间也较小.

(2) σ^2为未知,

μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

推导过程如下:

由于区间$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$中含有未知参数$\sigma$,不能直接使用此区间,

但因为S^2是σ^2的无偏估计,可用$S=\sqrt{S^2}$替换σ,

已知 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

则 $P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

于是得μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

例2 有一大批糖果, 现从中随机地取16袋, 称得质量(克)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的质量服从正态分布, 试求总体均值 μ 的置信度为0.95的置信区间.

解 $\alpha = 0.05$, $n-1=15$,

附表3-1

查 $t(n-1)$ 分布表可知: $t_{0.025}(15) = 2.1315$,

计算得 $\bar{x} = 503.75$, $s = 6.2022$,

得 μ 的置信水平为 95% 的置信区间

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right)$$ 即 (500.4, 507.1).

就是说估计袋装糖果质量的均值在500.4克与507.1克之间，这个估计的可信程度为95%.

若依此区间内任一值作为 μ 的近似值,

其误差不大于 $\frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61$ (克).

这个误差的可信度为95%.

例3 (续例1) 如果只假设糖包的质量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 试求糖包质量 μ 的95%的置信区间.

解 此时σ未知, $n=12$,

$\alpha=0.05,\quad \bar{x}=502.92,\quad s=12.35,$

附表3-2

查 $t(n-1)$ 分布表可知: $t_{0.025}(11)=2.201$,

于是 $\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)=\dfrac{12.35}{\sqrt{12}}\times 2.201=7.85$,

得μ的置信度为95%的置信区间 (495.07, 510.77).

例4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中 σ^2 和 μ 为未知参数，设随机变量 L 是关于 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度，求 $E(L^2)$.

解 当 σ^2 未知时,

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right),$$

置信区间长度 $L = \dfrac{2S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1),$

$$L^2 = \frac{4S^2}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2,$$

又 $$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]$$

$$= E\left\{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2} - n\overline{X}^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}E(X_i^{\ 2}) - nE(\overline{X}^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[D(X_i)+E(X_i)^2]-n[D(\overline{X})+E^2(\overline{X})]\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\sigma^2+\mu^2]-n\left[\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right]\right\}=\sigma^2,$$

于是 $E(L^2)=E\left(\frac{4S^2}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2\right)$

$$=\frac{4}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2E(S^2)$$

$$=\frac{4}{n}[t_{\alpha/2}(n-1)]^2\sigma^2.$$

2. 方差σ^2的置信区间

方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

推导过程如下:

因为S^2是σ^2的无偏估计,

已知 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

则 $$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间

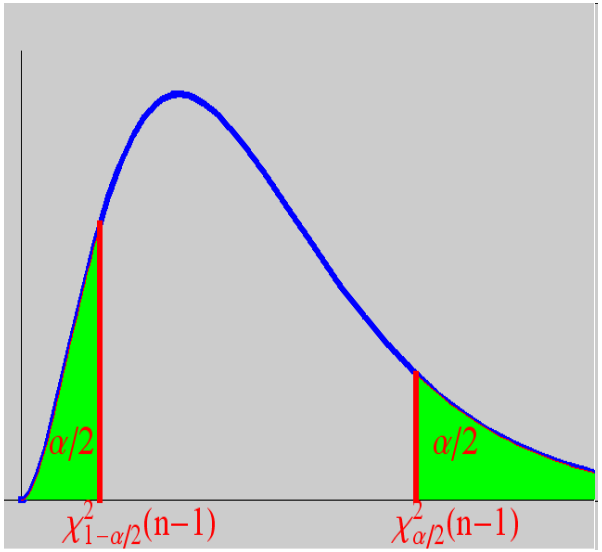
$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

进一步可得：

标准差σ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

注意：在密度函数不对称时，如 χ^2 分布和 F分布，习惯上仍取对称的分位点来确定置信区间(如图).



例5 （续例2）求例2中总体标准差 σ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 $\dfrac{\alpha}{2}=0.025,\quad 1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975,\quad n-1=15,$

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表可知： 附表4-1 附表4-2

$\chi^2_{0.025}(15)=27.488,\qquad \chi^2_{0.975}(15)=6.262,$

计算得 $s=6.2022,$

代入公式得标准差的置信区间 (4.58, 9.60).

例6　(续例1) 求例1中总体方差σ^2和标准差σ的置信度为0.95的置信区间.

解　$\frac{\alpha}{2} = 0.025,\quad 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975,\qquad n-1 = 11,$

查$\chi^2(n-1)$分布表可知：

$\chi^2_{0.025}(11) = 21.920,\qquad \chi^2_{0.975}(11) = 3.816,$

方差σ^2的置信区间　(78.97, 453.64);

标准差σ的置信区间　(8.87, 21.30).

两个正态总体均值或方差的置信区间和单侧置信限

设给定置信水平为$1-\alpha$，并设$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$为第一个总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$为第二个总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$与$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$独立. $\overline{X},\overline{Y}$分别是第一、二个总体的样本均值，$S_1^2$，$S_2^2$分别是第一、二个总体的样本方差.

讨论两个整体总体均值差和方差比的估计问题.

1. 两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) $\sigma_1{}^2$和$\sigma_2{}^2$均为已知

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}\right).$$

推导过程如下:

因为$\overline{X}$, $\overline{Y}$ 分别是 μ_1, μ_2 的无偏估计,

所以$\overline{X}-\overline{Y}$ 是 $\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计,

由 $\overline{X}, \overline{Y}$ 的独立性及

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}\right), \qquad \overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}\right),$$

可知 $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}\right),$

或 $\dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}} \sim N(0, 1),$

于是得 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}\right).$$

(2) $\sigma_1^{\ 2}$和$\sigma_2^{\ 2}$均为未知,

只要 n_1 和 n_2 都很大 (实用上 >50即可),则有

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的近似置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{S_2^{\ 2}}{n_2}}\right).$$

(3) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但 σ^2 为未知,

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w=\sqrt{S_w^2}$.

例1 为比较I, II两种型号步枪子弹的枪口速度, 随机地取I型子弹**10**发，得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500(\text{m/s})$,标准差 $s_1 = 1.10(\text{m/s})$, 随机地取II型子弹**20**发，得枪口速度平均值为 $\bar{x}_2 = 496(\text{m/s})$, 标准差 $s_2 = 1.20(\text{m/s})$, 假设两总体都可认为近似地服从正态分布, 且由生产过程可认为它们的方差相等，求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为**0.95**的置信区间.

解 由题意，两总体样本独立且方差相等(但未知),

$$\frac{\alpha}{2}=0.025, \quad n_1=10, \quad n_2=20, \quad n_1+n_2-2=28,$$

查 $t(n-1)$ 分布表可知：$t_{0.025}(28)=2.0484,$

$$s_w{}^2=\frac{9\times1.10^2+19\times1.20^2}{28}, \quad s_w=\sqrt{S_w{}^2}=1.1688,$$

于是得 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信度为0.95的置信区间

$$\left(\overline{x}_1-\overline{x}_2\pm S_w\times t_{0.025}(28)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}\right)=(4\pm0.93),$$

即所求置信区间为(3.07, 4.93).

例2 为提高某一化学生产过程的得率，试图用一种新的催化剂，为慎重起见，在试验工厂先行试验．设采用原来的催化剂进行了 $n_1=8$ 次试验，得到得率的平均值 $\bar{x}_1=91.73$. 样本方差 $s_1^2=3.89$, 又采用新的催化剂进行了 $n_2=8$ 次试验, 得到得率的平均值 $\bar{x}_2=93.75$, 样本方差 $s_2^2=4.02$, 假设两总体都可认为近似地服从正态分布，且方差相等, 求两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为0.95的置信区间.

解 由题意，两总体样本独立且方差相等(但未知),

且 $$s_w^{\ 2} = \frac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2} = 3.96,$$

于是得$\mu_1-\mu_2$的一个置信水平为0.95的置信区间

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2 \pm s_w \times t_{0.025}(14)\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}\right) = (-2.02 \pm 2.13),$$

即所求置信区间为$(-4.15,\ 0.11)$.

2. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况.

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

推导过程如下:

由于 $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$,

且由假设知 $\dfrac{(n_1-1)S_1^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}$ 与 $\dfrac{(n_2-1)S_2^{\,2}}{\sigma_2^{\,2}}$ 相互独立,

根据F分布的定义，知 $\dfrac{S_1^{\,2}/\sigma_1^{\,2}}{S_2^{\,2}/\sigma_2^{\,2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$,

即 $$\frac{S_1^{\,2}/\sigma_1^{\,2}}{S_2^{\,2}/\sigma_2^{\,2}} = \frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^{\,2}}{\sigma_1^{\,2}}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^{\,2}}{\sigma_2^{\,2}}\Big/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\frac{S_1^{\ 2}\big/\sigma_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}\big/\sigma_2^{\ 2}}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$$

$$=1-\alpha,$$

$$P\left\{\frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}<\frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right\}$$

$$=1-\alpha,$$

于是得 $\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

例3 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径随机抽取机器 A 生产的管子 18 只，测得样差为 $s_1^2 = 0.34(\text{mm}^2)$; 抽取机器$B$生产的管子 13 只, 测得样本方差为 $s_2^2 = 0.29(\text{mm}^2)$. 设两样本相互独立, 且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径分服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\mu_i, \sigma_i^2 (i = 1,2)$ 均未知，求方差比σ_1^2 / σ_2^2的置信度为0.90 的置信区间.

解 $n_1 = 18, \quad n_2 = 13, \quad \alpha = 0.10,$

$$s_1^2 = 0.34(\text{mm}^2), \quad s_2^2 = 0.29(\text{mm}^2),$$

$$F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.05}(17, 12) = 2.59,$$

$$F_{1-\alpha/2}(17, 12) = F_{0.95}(17, 12) = \frac{1}{F_{0.05}(12, 17)} = \frac{1}{2.38},$$

于是得 $\dfrac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2{}^2}$ 的一个置信度为0.90 的置信区间

$$\left(\frac{0.34}{0.29}\times\frac{1}{2.59},\ \frac{0.34}{0.29}\times 2.38\right) = (0.45,\ 2.79).$$

例4　甲、乙两台机床加工同一种零件，在机床甲加工的零件中抽取 9 个样品，在机床乙加工的件中抽取6个样品, 并分别测得它们的长度单位: mm）, 由所给数据算得 $s_1^2 = 0.245$, $s_2^2 = 0.357$,在置信度 0.98下，试求这两台机床加工精度之比σ_1/σ_2的置信区间. 假定测量值都服从正态分布，方差分为 σ_1^2, σ_2^2.

解　$n_1 = 9$,　　$n_2 = 6$,　　$\alpha = 0.02$,

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.99}(8, 5) = 10.3,$$

$$F_{\alpha/2}(8,5)=F_{0.01}(8,5)=\frac{1}{F_{0.99}(5,8)}=\frac{1}{6.63},$$

于是得$\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$的一个置信度为0.98的置信区间

$$\left(\sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}},\ \sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{S_2^{\,2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{0.245}{0.357\times 10.3}},\ \sqrt{\frac{0.245\times 6.63}{0.357}}\right)$$

$$=(0.258,\ 2.133).$$

$(0-1)$分布参数的近似置信区间

一、置信区间公式

二、典型例题

一、置信区间公式

设有一容量$n>50$的大样本，它来自$(0-1)$分布的总体X，X的分布律为 $f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}$，$x=0,1$，其中p为未知参数，则p的置信度为$1-\alpha$的置信区间是

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),$$

其中$a=n+z_{\alpha/2}^2$， $b=-(2n\overline{X}+z_{\alpha/2}^2)$， $c=n\overline{X}^2$.

推导过程如下:

因为(0–1)分布的均值和方差分别为

$$\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1-p),$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，因为容量n 较大，

由中心极限定理知 $$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

近似地服从 $N(0,1)$ 分布，

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right\} \approx 1-\alpha,$$

不等式 $-z_{\alpha/2} < \dfrac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}$

等价于 $(n + z_{\alpha/2}^2)p^2 - (2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2)p + n\overline{X}^2 < 0,$

令 $p_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$， $p_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$，

其中 $a = n + z_{\alpha/2}^2$， $b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2)$， $c = n\overline{X}^2$.

则 p 的近似置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

(p_1, p_2).

二、典型例题

例1 设从一大批产品的**100**个样品中，得一级品**60**个，求这批产品的一级品率 p 的置信水平为**0.95**的置信区间.

解 一级品率 p 是**(0-1)**分布的参数,

$$n = 100, \quad \bar{x} = \frac{60}{100} = 0.6,$$

$$1 - \alpha = 0.95, \quad z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96,$$

则$a = n + z_{\alpha/2}^2 = 103.84,$

$$b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2n\overline{x} + z_{\alpha/2}^2) = -123.84,$$

$$c = n\overline{X}^2 = n\overline{x}^2 = 36,$$

于是 $p_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.50,$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.69,$$

p 的置信水平为0.95的置信区间为(0.50, 0.69).

例2 设从一大批产品的**120**个样品中，得次品**9**个，求这批产品的次品率 p 的置信水平为**0.90**的置信区间.

解 $n = 120, \quad \bar{x} = \dfrac{9}{100} = 0.09, \quad 1 - \alpha = 0.90,$

则 $a = n + z_{\alpha/2}^2 = 122.71,$

$$b = -(2n\overline{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2n\bar{x} + z_{\alpha/2}^2) = -24.31,$$

$$c = -n\overline{X}^2 = -n\bar{x}^2 = 0.972,$$

于是 $$p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.056,$$

$$p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.143,$$

p 的置信水平为0.90的置信区间为(0.056, 0.143).