概率论与数理统计总复习大题类型题及解答

已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解：A_1={男人}，A_2={女人}，B={色盲}，显然 $A_1 \cup A_2 = S$，$A_1 A_2 = \phi$

由已知条件知 $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ 。$P(B \mid A_1) = 5\%, P(B \mid A_2) = 0.25\%$

由贝叶斯公式，有

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{10000}} = \frac{20}{21}$$

01 第一章 全概、贝叶斯

设由以往记录的数据分析。某船只运输某种物品损坏 2%（这一事件记为 A_1），10%（事件 A_2），90%（事件 A_3）的概率分别为 $P(A_1)=0.8$， $P(A_2)=0.15$, $P(A_2)=0.05$，现从中随机地独立地取三件，发现这三件都是好的（这一事件记为 B），试分别求 $P(A_1|B)$ $P(A_2|B)$, $P(A_3|B)$（这里设物品件数很多，取出第一件以后不影响取第二件的概率，所以取第一、第二、第三件是互相独立地）

∵ B 表取得三件好物品。

$B=A_1B+A_2B+A_3B$ 三种情况互斥

由全概率公式，有

∴ $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.8\times(0.98)^3+0.15\times(0.9)^3+0.05\times(0.1)^3=0.8624$

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)}=\frac{0.8\times(0.98)^3}{0.8624}=0.8731$$

$$P(A_2 \mid B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)}=\frac{0.15\times(0.9)^3}{0.8624}=0.1268$$

$$P(A_3 \mid B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B \mid A_3)}{P(B)}=\frac{0.05\times(0.1)^3}{0.8624}=0.0001$$

习题1

一批产品100件，有80件正品，20件次品，其中甲厂生产的为60件，有50件正品，10件次品，余下的40件均由乙厂生产．现从该批产品中任取一件，记A为“正品”，B为“甲厂生产的产品”，求$P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，$P(B|A)$，$P(A|B)$．

解答：

由题意知

$$P(B)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\qquad P(\bar{B})=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},$$

$$P(A|B)=\frac{5}{6},\qquad P(A|\bar{B})=\frac{80-50}{40}=\frac{3}{4}.$$

则由全概率公式得

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{4}{5}=0.8;$$

由乘法公式得

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{1}{2}=0.5;$$

由贝叶斯公式得，

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.5}{0.8}=\frac{5}{8}=0.625.$$

1. 设事件 A,B 仅发生一个的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.5$，则 A,B 至少有一个不发生的概率为__________.

答案：0.3

解：

$$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=0.3$$

即

$$0.3=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=0.5-2P(AB)$$

所以

$$P(AB)=0.1$$

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9$$

二、已知一批产品中 90%是合格品，检查时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.02，

求（1）一个产品经检查后被认为是合格品的概率；

（2）一个经检查后被认为是合格品的产品确是合格品的概率.

解： 设 $A=$ ‘任取一产品，经检验认为是合格品’

$B=$ ‘任取一产品确是合格品’

则（1） $P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\bar{B})P(A\mid \bar{B})$

$$=0.9\times 0.95+0.1\times 0.02=0.857.$$

（2） $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.9\times 0.95}{0.857}=0.9977$.

已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=Ae^{-|x|}, \quad -\infty<x<+\infty,$$

求：（1）A 值；（2）$P\{0<X<1\}$；（3）$F(x)$.

【解】（1）由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$得

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty} Ae^{-x}\mathrm{d}x=2A$$

故 $A=\dfrac{1}{2}$.

(2) $p(0<X<1)=\dfrac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$

(3) 当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}e^{x}$

当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{2}e^{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-x}\mathrm{d}x$

$=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$

故 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$

设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件$\{X\le 1/2\}$出现的次数，试求 $P\{Y=2\}$.

解：因 $P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx=x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$，有 Y 服从二项分布 $b\left(3,\frac{1}{4}\right)$，

故 $P\{Y=2\}=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$.

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X（以分钟计）服从指数分布 $E(\frac{1}{5})$.某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开.他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geq 1\}$.

【解】 依题意知 $X\sim E(\frac{1}{5})$，即其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

该顾客未等到服务而离开的概率为

$$P(X>10)=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2}$$

$Y\sim b(5,\mathrm{e}^{-2})$,即其分布律为

$$P(Y=k)=\mathrm{C}_5^k(\mathrm{e}^{-2})^k(1-\mathrm{e}^{-2})^{5-k},k=0,1,2,3,4,5$$

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5=0.5167$$

某人乘汽车去火车站乘火车，有两条路可走.第一条路程较短但交通拥挤，所需时间 X 服从 N（40，10^2）；第二条路程较长，但阻塞少，所需时间 X 服从 N（50，4^2）.

（1）若动身时离火车开车只有 1 小时，问应走哪条路能乘上火车的把握大些?

（2）又若离火车开车时间只有 45 分钟，问应走哪条路赶上火车把握大些?

【解】（1）若走第一条路，X~N（40，10^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{x-40}{10}<\frac{60-40}{10}\right)=\Phi(2)=0.97727$$

若走第二条路，X~N（50，4^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{60-50}{4}\right)=\Phi(2.5)=0.9938++$$

故走第二条路乘上火车的把握大些.

（2）若 X~N（40，10^2），则

$$P(X<45)=P\left(\frac{X-40}{10}<\frac{45-40}{10}\right)=\Phi(0.5)=0.6915$$

若 X~N（50，4^2），则

$$P(X<45)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{45-50}{4}\right)=\Phi(-1.25)$$

$$=1-\Phi(1.25)=0.1056$$

故走第一条路乘上火车的把握大些.

一工厂生产的电子管寿命 X（小时）服从正态分布 $N(160,\sigma^2)$，若要求 $P\{120<X\leqslant 200\}\geqslant 0.8$，允许$\sigma$ 最大不超过多少？

【解】$P(120<X\leq 200)=P\left(\frac{120-160}{\sigma}<\frac{X-160}{\sigma}\leq\frac{200-160}{\sigma}\right)$

$$=\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-1\geq 0.8$$

故 $\sigma\leq\frac{40}{1.29}=31.25$

设 $X\sim N(0,1)$.

（1）求 $Y=e^X$ 的概率密度;

（2）求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度;

（3）求 $Y=|X|$ 的概率密度.

【解】（1）当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^x\leq y)=P(X\leq \ln y)$

$$=\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 $f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y}f_x(\ln y)=\dfrac{1}{y}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\ln^2 y/2}, y>0$

(2) $P(Y=2X^2+1\geq 1)=1$

当 $y\leqslant 1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$

当 $y>1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X^2+1\leq y)$

$$=P\left(X^2\leq\frac{y-1}{2}\right)=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leq X\leq\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

$$=\int_{-\sqrt{(y-1)/2}}^{\sqrt{(y-1)/2}} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

故 $f_Y(y)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{y-1}}\left[f_X\left(\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)+f_X\left(-\sqrt{\dfrac{y-1}{2}}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{y-1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(y-1)/4},y>1$$

(3) $P(Y \geq 0) = 1$

当 $y \leqslant 0$ 时 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$

当 $y > 0$ 时 $F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y)$

$$= \int_{-y}^{y} f_X(x)\mathrm{d}x$$

故 $f_Y(y) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}, y > 0$$

在电源电压不超过 200V、200V~240V 和超过 240V 三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001 和 0.2（假设电源电压 X 服从正态分布 N（220，25^2））.试求：

（1）该电子元件损坏的概率 α；

(2) 该电子元件损坏时，电源电压在 200~240V 的概率 β

【解】 设 A_1={电压不超过 200V}，A_2={电压在 200~240V}，

A_3={电压超过 240V}，B={元件损坏}。

由 X~N（220，25^2）知

$$P(A_1)=P(X\le 200)$$

$$=P\left(\frac{X-220}{25}\le\frac{200-220}{25}\right)$$

$$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=0.212$$

$$P(A_2)=P(200\le X\le 240)$$

$$=P\left(\frac{200-220}{25}\le\frac{X-220}{25}\le\frac{240-220}{25}\right)$$

$$=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576$$

$$P(A_3)=P(X>240)=1-0.212-0.576=0.212$$

由全概率公式有

$$\alpha=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.0642$$

由贝叶斯公式有

$$\beta=P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}\approx 0.009$$

设 $X \sim N(0,1)$

（1）求 $Y=e^X$ 的概率密度

$\because$ X 的概率密度是 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$

$Y=g(X)=e^X$ 是单调增函数

又 $X=h(Y)=\ln Y$ 反函数存在

且 $\alpha=\min[g(-\infty),g(+\infty)]=\min(0,+\infty)=0$

$\beta=\max[g(-\infty),g(+\infty)]=\max(0,+\infty)=+\infty$

$\therefore$ Y 的分布密度为：

$$\psi(y)=\begin{cases} f[h(y)]\cdot|h'(y)|=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{y} & 0<y<+\infty \\ 0 & y\text{为其他} \end{cases}$$

（2）求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度。

在这里，$Y=2X^2+1$ 在$(+\infty，-\infty)$不是单调函数，没有一般的结论可用。

设 Y 的分布函数是 $F_Y(y)$，

则 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(2X^2+1\leqslant y)$

$$=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$

当 $y<1$ 时：$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant 1$ 时：$F_y(y)=P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

故 Y 的分布密度 $\psi(y)$是：

当 $y\leqslant 1$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

当 $y>1$ 时，$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}$$

（3）求 $Y=|X|$的概率密度。

$\because$ Y的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(|X|\leqslant y)$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y\geqslant 0$ 时，$F_Y(y)=P(|X|\leqslant y)=P(-y\leqslant X\leqslant y)=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$\therefore$ Y的概率密度为：

当 $y\leqslant 0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=(0)'=0$

当 $y>0$ 时：$\psi(y)=[F_Y(y)]'=\left(\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)'=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

1. 设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X \le 1) = 4P(X = 2)$，则 $P(X=3)=$______.

答案：

$$\frac{1}{6}e^{-1}$$

解答：

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}, \quad P(X=2) = \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$$

由 $P(X \le 1) = 4P(X=2)$ 知 $e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 2\lambda^2 e^{-\lambda}$

即 $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ 解得 $\lambda = 1$，故

$$P(X=3) = \frac{1}{6}e^{-1}$$

1. 设随机变量 X 在区间 $(0,2)$ 上服从均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在区间 $(0,4)$ 内的概率密度为 $f_Y(y)=$ ________.

答案：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0\ , & \text{其它}.\end{cases}$$

解答：设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，X 的分布函数为 $F_X(x)$，密度为 $f_X(x)$ 则

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

因为 $X\sim U(0,\ 2)$，所以 $F_X(-\sqrt{y})=0$，即 $F_Y(y)=F_X(\sqrt{y})$

故

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0\ , & \text{其它}.\end{cases}$$

另解　在 $(0,2)$ 上函数 $y=x^2$ 严格单调，反函数为 $h(y)=\sqrt{y}$

所以

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0\ , & \text{其它}.\end{cases}$$

1. 设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布，$P(X>1)=e^{-2}$，则 $\lambda=$________，$P\{\min(X,Y)\le 1\}=$________.

答案：$\lambda=2$，$P\{\min(X,Y)\le 1\}=1-\mathrm{e}^{-4}$

解答：

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=e^{-\lambda}=e^{-2}\text{，故 }\lambda=2$$

$$\begin{aligned}P\{\min(X,Y)\le 1\}&=1-P\{\min(X,Y)>1\}\\&=1-P(X>1)P(Y>1)\\&=1-e^{-4}.\end{aligned}$$

从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 2/5. 设 X 为途中遇到红灯的次数，

求 X 的分布列、分布函数、数学期望和方差.

解： X 的概率分布为

$$P(X=k)=C_3^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}\qquad k=0,1,2,3.$$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0,\\ \frac{27}{125}, & 0\le x<1,\\ \frac{81}{125}, & 1\le x<2,\\ \frac{117}{125}, & 2\le x<3,\\ 1\ , & x\ge 3.\end{cases}$$

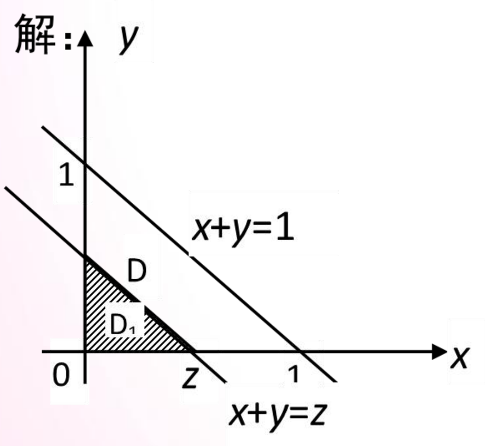
$$EX=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5},$$

$$DX=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}.$$

二、设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$ 上服从均匀分布.

求（1）(X,Y)关于X 的边缘概率密度；（2）$Z=X+Y$ 的分布函数与概率密度.

解：



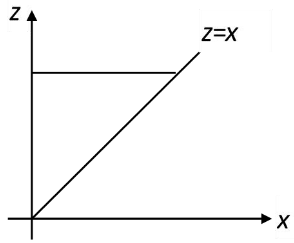
（1）(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2-2x, & 0\leq x\leq 1\\ 0\ \ , & 其它\end{cases}$$

（2）利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z-x)dx$

其中 $f(x,z-x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1, 0\le z-x\le 1-x \\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1,\quad x\le z\le 1. \\ 0, & 其它.\end{cases}$



当 $z<0$ 或 $z>1$ 时 $f_Z(z)=0$

$0\le z\le 1$ 时 $f_Z(z)=2\int_0^z dx=2x\Big|_0^z=2z$

故 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z, & 0\le z\le 1, \\ 0, & 其它.\end{cases}$$

Z 的分布函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Z(y)dy=\begin{cases}0, & z<0 \\ \int_0^z 2ydy, & 0\le z\le 1 \\ 1, & z>1\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0, \\ z^2, & 0\le z\le 1, \\ 1, & z>1.\end{cases}$$

或利用分布函数法

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\begin{cases}0, & z<0, \\ \iint\limits_{D_1} 2dxdy, & 0\le z\le 1, \\ 1, & z>1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0, \\ z^2, & 0\le z\le 1, \\ 1, & z>1.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z, & 0\le z\le 1, \\ 0, & 其它.\end{cases}$$

设某机器生产的零件长度（单位：cm）$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值$\bar{x}=10$，样本方差$s^2=0.16$．（1）求μ的置信度为 0.95 的置信区间；（2）检验假设$H_0:\sigma^2 \le 0.1$（显著性水平为 0.05）．

（附注）$t_{0.05}(16)=1.746,\ t_{0.05}(15)=1.753,\ t_{0.025}(15)=2.132,$

$$\chi^2_{0.05}(16)=26.296,\ \chi^2_{0.05}(15)=24.996,\ \chi^2_{0.025}(15)=27.488.$$

解：（1）μ的置信度为$1-\alpha$下的置信区间为

$$(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$\bar{X}=10,\ s=0.4,\ n=16,\ \alpha=0.05,\ t_{0.025}(15)=2.132$$

所以μ的置信度为 0.95 的置信区间为（9.7868，10.2132）

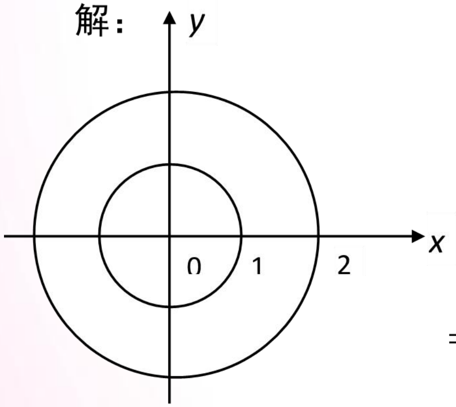
（2）$H_0:\sigma^2 \le 0.1$的拒绝域为$\chi^2 \ge \chi^2_\alpha(n-1)$．

$$\chi^2=\frac{15S^2}{0.1}=15\times 1.6=24，\quad \chi^2_{0.05}(15)=24.996$$

因为　$\chi^2=24<24.996=\chi^2_{0.05}(15)$，所以接受$H_0$．

六、向一目标射击，目标中心为坐标原点，已知命中点的横坐标X和纵坐标Y相互独立，且均服从$N(0,2^2)$分布. 求（1）命中环形区域$D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2\}$的概率；（2）命中点到目标中心距离$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的数学期望.

解：



（1）$P\{X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$$=\iint\limits_D \frac{1}{2\pi\cdot 4}e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^2 e^{-\frac{r^2}{8}}rdrd\theta$$

$$=-\int_1^2 e^{-\frac{r^2}{8}}d(-\frac{r^2}{8})=-e^{-\frac{r^2}{8}}\Big|_1^2=e^{-\frac{1}{8}}-e^{-\frac{1}{2}};$$

（2）$EZ=E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{8\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}re^{-\frac{r^2}{8}}rdrd\theta=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{8}}r^2dr$$

$$=-re^{-\frac{r^2}{8}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{8}}dr=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{8}}dr=\sqrt{2\pi}.$$

某新产品在未来市场上的占有率 X 是仅在区间 (0, 1) 上取值的随机变量，它的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}4(1-x)^3, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求平均市场占有率.

解：平均市场占有率 $E(X)=\int_0^1 x\cdot 4(1-x)^3dx=\int_0^1(4x-12x^2+12x^3-4x^4)dx$

$$=\left(2x^2-4x^3+3x^4-\frac{4}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}.$$

设随机变量 X 的密度函数如下，试求 $E(2X+5)$.

$$p(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0; \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

解：$E(2X+5)=\int_0^{+\infty}(2x+5)e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}(2x+5)(-de^{-x})=-(2x+5)e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2e^{-x}dx=5-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=7$.

设随机变量 X 的分布函数如下，试求 $E(X)$.

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}}{2}, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1;\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$$

解：因分布函数 $F(x)$ 是连续函数，有 X 为连续型，密度函数 $p(x)=F'(x)$，

当 $x<0$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{e^{x}}{2}$，

当 $0<x<1$ 时，$p(x)=F'(x)=0$，

当 $x>1$ 时，$p(x)=F'(x)=\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}$，$=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\dfrac{1}{2}d(e^{x})+\int_{1}^{+\infty}x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)d[e^{-\frac{1}{2}(x-1)}]$

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot\dfrac{e^{x}}{2}dx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx+\dfrac{1}{4}\int_{1}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx$，

因 $\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot d(e^{x})=x\cdot e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx=0-e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}=-1$，

$$\int_{1}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=-2\int_{1}^{+\infty}x\cdot d[e^{-\frac{1}{2}(x-1)}]=-2xe^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}+2\int_{1}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}dx=2-4e^{-\frac{1}{2}(x-1)}\Big|_{1}^{+\infty}=6,$$

故 $E(X)=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\dfrac{1}{4}\times 6=1$.

假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若 1 周 5 个工作日里无故障，可获利 10 万元；发生一次故障仍可获利 5 万元，发生两次故障所获利润零元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求 1 周内期望利润是多少？

解　设一周所获利润为 T（万元），则 T 的可能值为10，5，0，-2 .

又设 X 为机器一周内发生故障的次数，则 $X\sim B(5,\ 0.2)$，于是，

$$P(T=10)=P(X=0)=(0.8)^5=0.3277$$

$$P(T=5)=P(X=1)=C_5^1 0.2\times(0.8)^4=0.4096$$

类似地可求出 T 的分布为

T	-2	0	5	10
P	0.0579	0.2048	0.4096	0.3277

所以一周内的期望利润为

$$ET=-2\times0.0579+5\times0.4096+10\times0.3277$$

$$=5.209\ （万元）$$

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2, \\ cx+b, & 2\le x\le 4, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

已知 $EX=2$, $P(1<X<3)=\dfrac{3}{4}$，求

（1） a, b, c 的值

（2） 随机变量 $Y=e^X$ 的数学期望和方差.

解 （1） $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2 axdx+\int_2^4 (cx+b)dx$

$$=\frac{a}{2}x^2\Big|_0^2+\frac{c}{2}x^2\Big|_2^4+bx\Big|_2^4=2a+2b+6c,$$

$$2=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^2 ax^2dx+\int_2^4 (cx+b)xdx$$

$$=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+6b,$$

$$\frac{3}{4}=\int_1^2 axdx+\int_2^3 (cx+b)dx=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b,$$

解方程组

$$\begin{cases} a+b+3c=\dfrac{1}{2} \\ 8a+18b+56c=6 \\ 3a+2b+5c=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

得

$$a=\frac{1}{4},$$

$$b=1,$$

$$c=-\frac{1}{4}.$$

（2） $EY=E(e^{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{x}f(x)dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{4}xe^{x}dx+\int_{2}^{4}(-\frac{1}{4}x+1)e^{x}dx=\frac{1}{4}(e^{2}-1)^{2}$，

$$EY^{2}=E(e^{2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2x}f(x)dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{4}xe^{2x}dx+\int_{2}^{4}(-\frac{1}{4}x+1)e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2}-1)^{2}[e^{2}+\frac{1}{4}(e^{2}-1)^{2}]$$

$$DY=EY^{2}-(EY)^{2}=\frac{1}{4}e^{2}(e^{2}-1)^{2}.$$

设 X, Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他;\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & y>5,\\ 0, & y\le 5.\end{cases}$$

求 $E(XY)$, $D(XY)$

解 $EX=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3}$,

$EY=6$

（注：因为参数为 1 的指数分布的数学期望为 1，而 $f_Y(y)$ 是前指数分布向右平移了 5 个单位，所以 $EY=1+5=6$）

因 X, Y 独立，所以

$$EXY=EXEY=\frac{2}{3}\times 6=4.$$

今求 DXY

方法 1 $DXY=EX^2Y^2-(EXY)^2$

$$=EX^2EY^2-16=\int_0^1 2x^3dx\cdot[DY+(EY)^2]-16$$

$$=\frac{1}{2}[1+36]-16=\frac{37}{2}-16=\frac{5}{2}=2.5.$$

方法 2 利用公式：当 X, Y 独立时

$$DXY=DX\cdot DY+DX(EY)^2+DY(EX)^2=\frac{1}{18}\times 1+\frac{1}{18}\times 36+1\times\frac{4}{9}=2.5.$$

设随机变量（X，Y）具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), COV(X,Y)$。

解 下面是直接利用二维随机量（X，Y）的概率密度求随机变量的数字特征。

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} x dy=2\int_0^1 x^2 dx=\frac{2}{3}$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} y dy=0$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} xy dy=\int_0^1 x dx\int_{-x}^{x} y dy=0$$

则 X 和 Y 的协方差为

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

若 $DX = 0.004$，利用切比雪夫不等式估计概率 $P(|X - EX| < 0.2)$

解 由切比雪夫不等式

$$P(|X - EX| < 0.2) \geq 1 - \frac{DX}{(0.2)^2} = 1 - \frac{0.004}{0.04} = 0.9$$

设有 30 个电子器件 $D_1, D_2, \cdots, D_{30}$，它们的使用情况如下：D_1 损坏，D_2 立即使用；D_2 损坏，D_3 立即使用等等，设器件 D_i 的寿命服从参数为 $\lambda = 0.1$（小时）$^{-1}$ 的指数分布的随机变量，令 T 为 30 个器件使用的总时间，求 T 超过 350 小时的概率。

解　设 D_i 为器件 D_i 的寿命，则 $T = \sum_{i=1}^{30} D_i$，所求概率为

$$P(T \geq 350) = P(\sum_{i=1}^{30} D_i \geq 350) = P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{30} D_i - 300}{\sqrt{3000}} \geq \frac{350-300}{\sqrt{3000}} \right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(\frac{50}{\sqrt{3000}}) = 1 - \Phi(0.91) = 1 - 0.8186 = 0.1814 .$$

1. 据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布。现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的。求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率。

解　利用独立同分布中心极限定理。设 X 表示电器元件的寿命，则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

随机取出 16 只元件，其寿命分别用 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 表示，且它们相互独立，同服从均值为 100 的指数分布，则 16 只元件的寿命的总和近似服从正态分布。设寿命总和为 $Y=\sum_{i=1}^{16}X_i$，其中 $E(X_i)=100, D(X_i)=100^2$，由此得 $E(Y)=\sum_{i=1}^{16}E(X_i)=16\times100=1600, D(Y)=\sum_{i=1}^{16}D(X_i)=16\times100^2$。由独立同分布中心极限定理知，Y 近似服从正态分布 $N(1600,16\times100^2)$，于是

$$\begin{aligned}&P\{Y>1920\}=1-P\{Y\leq1920\}\\&=1-P\{\frac{Y-1600}{\sqrt{16\times100^2}}\leq\frac{1920-1600}{\sqrt{16\times100^2}}\}\\&=1-P\{\frac{Y-1600}{\sqrt{16\times100^2}}\leq\frac{320}{400}\}\\&\approx1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119\end{aligned}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数。

某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难的血液病的治愈率为 0.8，医院检验员任意抽查 100 个服用此药品的病人，如果其中多于 75 人治愈，就接受这一断言，否则就拒绝这一断言。（1）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，问接受这一断言的概率是多少？（2）若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

解：设 X 为 100 人中治愈的人数，则 $X\sim B(n,p)$其中 $n=100$

（1）$P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$

$$=1-\Phi(\frac{-5}{4})=\Phi(+\frac{5}{4})=0.8944$$

（2）$p=0.7$ 由中心极限定理知

$$P(X>75)=1-P(X\le 75)=1-P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le\frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}=1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})$$

$$=1-\Phi(\frac{5}{\sqrt{21}})=1-\Phi(1.09)=1-0.8621=0.1379.$$

设在总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取一容量为16的样本。这里μ,σ^2均为未知。

（1）求$P\{S^2/\sigma^2 \le 2.041\}$，其中$S^2$为样本方差；

（2）求D（S^2）。

解　（1）由$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2(n-1)$，得$\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim X^2(15)$。所求概率为

$$P\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.041\} = P\{\frac{15S^2}{\sigma^2} \le 15\times 2.041\}$$

$$=1-P\{\frac{15S^2}{\sigma^2} > 30.615\}$$

$$=1-0.01=0.99$$

（1）设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
P_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数。已知取得了样本值 $x_1=1, x_2=2, x_3=1$ 。试求 θ 的矩估计值和最大似然估计量。

（2）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数为 的泊松分布总体的一个样本，试求 λ 的最大似然估计量及矩估计量。

解 （1）$E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta$ 。

样本均值 $\bar{x}=\dfrac{1+2+1}{3}=\dfrac{4}{3}$，令 $3-2\theta$，得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$ 。

似然函数为

$$L(\theta)=\theta^4 2\theta(1-\theta)=2\theta^5(1-\theta)$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln l\theta+\ln(1-\theta)$$

似然方程为

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=0$$

得θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$。

（2）总体X服从泊松分布，其分布律为

$$P\{X=x\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\quad（x=0,1,2,\cdots）$$

而$E(X)=\lambda$，令$\lambda=\overline{X}$，得λ的矩估计量为$\hat{\lambda}=\overline{X}$。

似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}=e^{-n\lambda}(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i!})\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

对数似然函数为

$$1nL(\lambda)=-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}1nx_i!+\sum_{i=1}^{n}x_i1n\lambda$$

似然方程为

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0$$

得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$，$\lambda$ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\overline{X}$ 。λ 的矩估计量和最大似然估计量相等。

随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮口速度的样本标准差 $s=11m/s$。设炮口速度服从正态分布。求这种炮口速度的标准差 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解　求标准差 σ 的置信区间时，首先求方差 σ^2 的置信区间。选取的随机变量（样本的函数）为

$$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim X^2(n-1)$$

给定置信水平 $1-a=0.95$，使

$$P\{X^2_{0.975}(8)<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<X^2_{0.025}(8)\}=0.95$$

查 X^2 分布表得分位点为 $X^2_{0.975}(8)=2.180, X^2_{0.025}(8)=17.535$。等价于

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{17.535}<\sigma<\frac{(n-1)S^2}{2.180}\}=0.95$$

于是 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\frac{(n-1)S^2}{17.535},\frac{(n-1)S^2}{2.180})$$

将 $n=9, s=11$ 代入，得 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(\frac{8\times11^2}{17.535},\frac{8\times11^2}{2.180}\right)=(55.2,444.0)$$

由此得 σ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\sqrt{55.2},\sqrt{444.0})=(7.43,21.07)$$

12．某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005（欧姆）。今在生产的一批导线中取样品 9 跟，测得 $s=0.007$（欧姆），设总体为正态分布，参数均未知。问在水平 $a=0.05$ 下能否认为这批导线的标准差显著地偏大？

解 关于正态总体方差的假设检验。检验假设

$$H_0:\sigma\le\sigma_0=0.005, H_1:\sigma\le\sigma_0=0.005$$

因为样本提供的信息为 $s=0.007$，强有力的支持备择假设，它的对立是原假设。用 X^2 检验法。

当原假设为真时，选取检验统计量服从 X^2 分布，即

$$X^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim X^2(n-1)$$

该统计时是样本的函数，不含任何未知参数。

给定显著性水平 $a=0.05$，使

$$P\{X^2\ge X_{0.05}^2(8)\}=0.05$$

查 X^2 分布表得临界值为 $X_{0.05}^2(8)=15.507$，则拒绝域为

$$[15.507,+\infty)$$

根据样本标准差 $s=0.007, n=9$，得 X^2 的观察值为

$$X^2=\frac{8\times0.007^2}{0.005^2}=15.68$$

由于 $X^2=15.68$ 落在拒绝域中，所以拒绝原假设，可以认为这批导线的标准显著偏大。

05 第五章 参数估计与假设检验

1. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad \theta>-1.$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，则未知参数θ 的极大似然估计量为________.

答案：

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$$

解答：

似然函数为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+1)x_i^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1;\cdots,x_n)^{\theta}$$

$$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \triangleq 0$$

解似然方程得θ 的极大似然估计为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1.$$