第一节　随机变量

一、随机变量的引入

二、随机变量的概念

三、小结

一、随机变量的引入

1. 为什么引入随机变量?

概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，为了更方便有力的研究随机现象，就要用数学分析的方法来研究，因此为了便于数学上的推导和计算，就需将任意的随机事件数量化．当把一些非数量表示的随机事件用数字来表示时，就建立起了随机变量的概念．

1. 为什么引入随机变量?

1. 量化随机事件

2. 引入数学工具研究随机事件

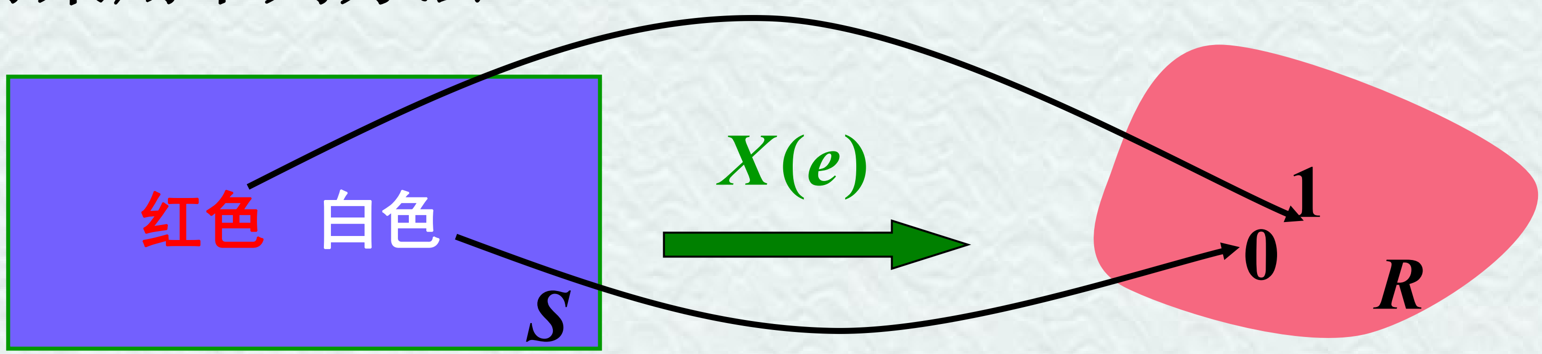
2. 随机变量的引入

完成下面引例，适当定义一个变量（函数），使之与随机试验结果对应起来。

实例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球，观察摸出球的颜色.

$S=\{\underbrace{\text{红色、白色}}_{\text{非数量}}\}$ $\xrightarrow{?}$ 将 S 数量化

可采用下列方法



即有 X(红色)=1， X(白色)=0.

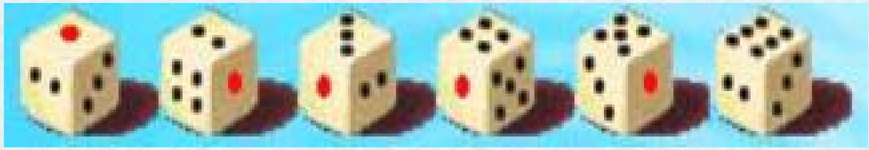
$$X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{红色},\\ 0, & e=\text{白色}.\end{cases}$$

这样便将非数量的 S={红色，白色} 数量化了.

样本空间的样本点到实数的映射

实例2 抛掷骰子,观察出现的点数.

则有



S={1，2，3，4，5，6}

样本点本身就是数量

$X(e)=e$ 恒等变换

$$X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3, X(4)=4, X(5)=5, X(6)=6,$$

且有 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{6}, \quad (i=1,2,3,4,5,6).$

样本空间的样本点到实数的映射

实例3 10件产品中有2件次品现任取3件，记录取到次品的个数

$$X(e)=e$$

$$\Big\downarrow \text{恒等变换}$$

$$X(e)=e, e=0,1,2$$

样本空间的样本点到实数的映射

实例4 射击一个目标，击中未知，记录射击次数

$$X(e) = e$$

恒等变换

$$X(e) = e, e = 1, 2, \cdots$$

样本空间的样本点到实数的映射

实例5 从一批灯泡中任取一只，测其寿命

$$X(e)=e$$

$\Big\downarrow$ 恒等变换

$$X(e)=t, t\geq 0$$

样本空间的样本点到实数的映射

二、随机变量的概念

1.定义

设 E 是随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$. 如果对于每一个 $e\in S$, 有一个实数 $X(e)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 S 上的单值实值函数 $X(e)$, 称 $X(e)$ 为随机变量.

2.说明

(1)随机变量与普通的函数不同

随机变量是一个函数，但它与普通的函数有着本质的差别，普通函数是定义在实数轴上的，而随机变量是定义在样本空间上的（样本空间的元素不一定是实数）.

(2)随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值，由于试验的各个结果的出现具有一定的概率，因此随机变量的取值也有一定的概率规律.

(3)随机变量与随机事件的关系

随机事件包容在随机变量这个范围更广的概念之内.或者说：随机事件是从静态的观点来研究随机现象,而随机变量则是从动态的观点来研究随机现象.

$$\{X=x\},\{X<x\},\{X\le x\},$$
$$\{X>x\},\{X\ge x\},\{x_1<X\le x_2\}$$
$$\{x_1\le X\le x_2\},\{x_1\le X<x_2\},\{x_1<X<x_2\}.$$

实例3 掷一个硬币, 观察出现的面 , 共有两个结果:

$e_1 =$ (反面朝上),

$e_2 =$ (正面朝上),

若用 X 表示掷一个硬币出现正面的次数, 则有

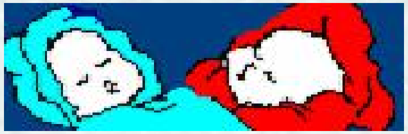
$$
\begin{array}{ccc}
e_1 = (\text{反面朝上}) & \xrightarrow{X(e)} & 0 \\
e_2 = (\text{正面朝上}) & & 1
\end{array}
$$

$\rightarrow X(e_1) = 0$

$\rightarrow X(e_2) = 1$

即 $X(e)$ 是一个随机变量.

实例4 在有两个孩子的家庭中,考虑其性别, 共有 4 个样本点:



$e_1=$(男,男), $e_2=$(男,女), $e_3=$(女,男), $e_4=$(女,女).

若用 X 表示该家女孩子的个数时, 则有

$X(e_1)=0,\quad X(e_2)=1,\quad X(e_3)=1,\quad X(e_4)=2,$

可得随机变量 $X(e)$,

$$X(e)=\begin{cases}0, & e=e_1,\\ 1, & e=e_2, e=e_3,\\ 2, & e=e_4.\end{cases}$$

实例5 设盒中有5个球 (2白3黑), 从中任抽3个,则

$$X(e) = \text{抽得的白球数},$$

是一个随机变量. 且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

0, 1, 2.

实例6 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次, 则

$$X(e) = \text{射中目标的次数},$$

是一个随机变量. 且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

0, 1, 2, 3, $\cdots$, 30.

实例7 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8,现该射手不断向目标射击，直到击中目标为止,则

$$X(e) = \text{所需射击次数},$$

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots\quad .$$

实例8　某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过, 如果某人到达该车站的时刻是随机的, 则

$$X(e) = \text{此人的等车时间},$$

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为: $[0,5]$.

3.随机变量的分类

随机变量

- 离散型
- 非离散型
  - 连续型
  - 其它

(1)离散型　随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个, 叫做离散型随机变量.

实例1　观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是 :　$1, 2, 3, 4, 5, 6.$

实例2 若随机变量 X 记为“连续射击, 直至命中时的射击次数”, 则 X 的可能值是:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots.$$

实例3 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次,则随机变量 X 记为“击中目标的次数”,则 X 的所有可能取值为:

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots,\quad 30.$$

(2)连续型 随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

实例1 随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

实例2 随机变量 X 为“测量某零件尺寸时的测量误差”.

则 X 的取值范围为 (a, b) .

三、小结

1. 概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，因此为了方便有力的研究随机现象，就需将随机事件数量化，把一些非数量表示的随机事件用数字表示时，就建立起了随机变量的概念. 因此随机变量是定义在样本空间上的一种特殊的函数.

2. 随机变量的分类: 离散型、连续型.