一、平面简谐波的波函数

简谐波： 在均匀的、无吸收的介质中，波源作简谐运动时，在介质中所形成的波。

平面简谐波： 波面为平面的简谐波。

波函数： 介质中任一质点（坐标为 x）相对其平衡位置的位移（坐标为 y）随时间 t 的变化关系，即 $y(x,t)$ 称为波函数。

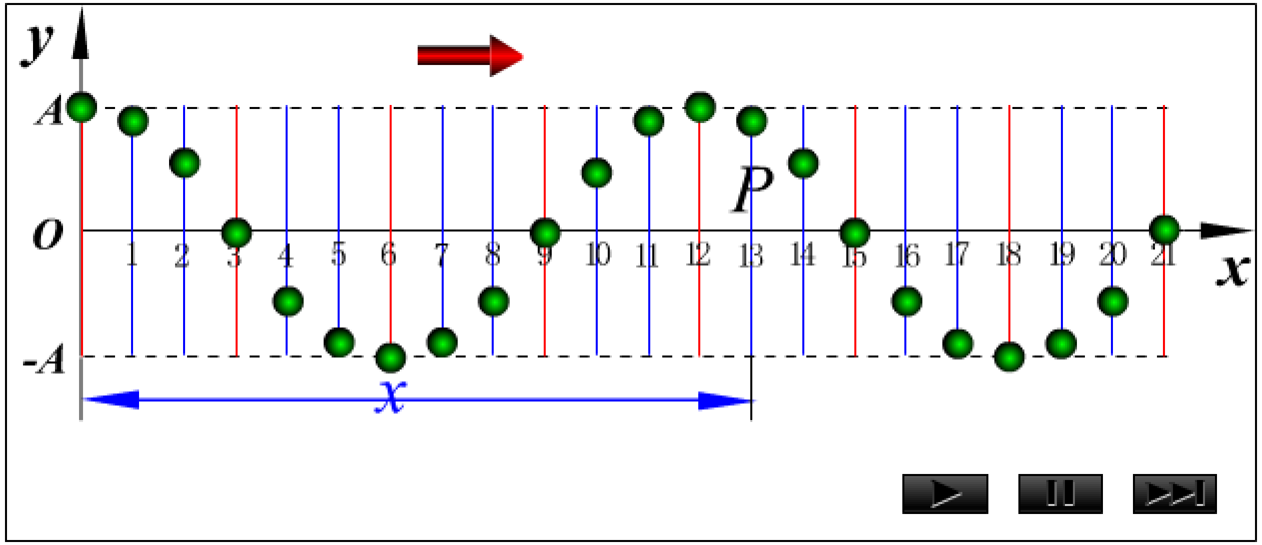
$$\boxed{y = y(x,t)}$$

各质点相对平衡位置的位移

波线上各质点平衡位置

以速度u 沿 x 轴正向传播的平面简谐波 。令原点O的初相为零，其振动方程：

$$y_O = A\cos\omega t$$



时间推迟方法

点O 的振动状态 $y_O = A\cos\omega t$

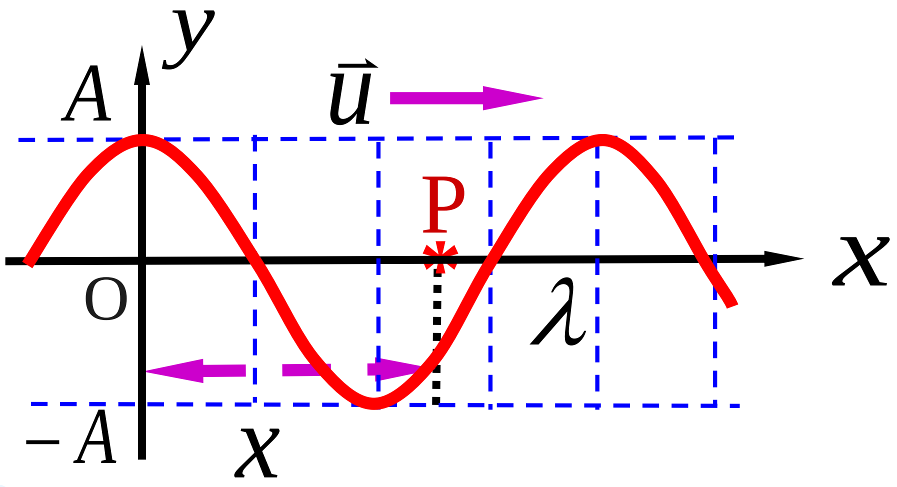
$$\Delta t = \frac{x}{u}$$

点 P

$t-x/u$ 时刻点O 的运动 = t 时刻点 P 的运动

点 P 振动方程为： $y_P = A\cos\omega(t - \frac{x}{u})$

➤ 波函数 $y = A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$



点 O 振动方程：

$$x = 0, \varphi = 0$$

$$y_o = A\cos\omega t$$

比较相位法

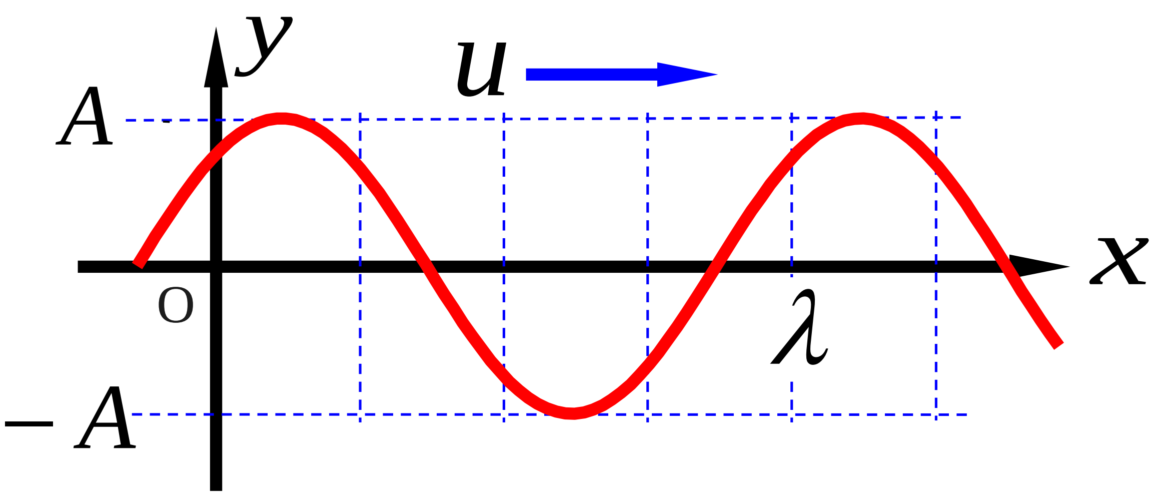
点 P 比点 O 落后的相位：$\Delta\varphi = \varphi_P - \varphi_O = -2\pi\frac{x}{\lambda}$

$$\varphi_P = -2\pi\frac{x}{\lambda} = -2\pi\frac{x}{Tu} = -\omega\frac{x}{u}$$

点 P 的振动方程： $y_P = A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$

如果原点的初相位不为零

$$x=0,\varphi\neq 0$$



点 O 振动方程： $y_O=A\cos(\omega t+\boxed{\varphi})$

波函数

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$ u 沿 x 轴正向

$$y=A\cos[\omega(t\boxed{+}\frac{x}{u})+\varphi]$$ u 沿 x 轴负向

➢ 波动方程的其它形式

$$y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx + \varphi)$$

角波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

➢ 质点的振动速度和加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t \pm \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t \pm \frac{x}{u}) + \varphi]$$

二、波函数的物理意义

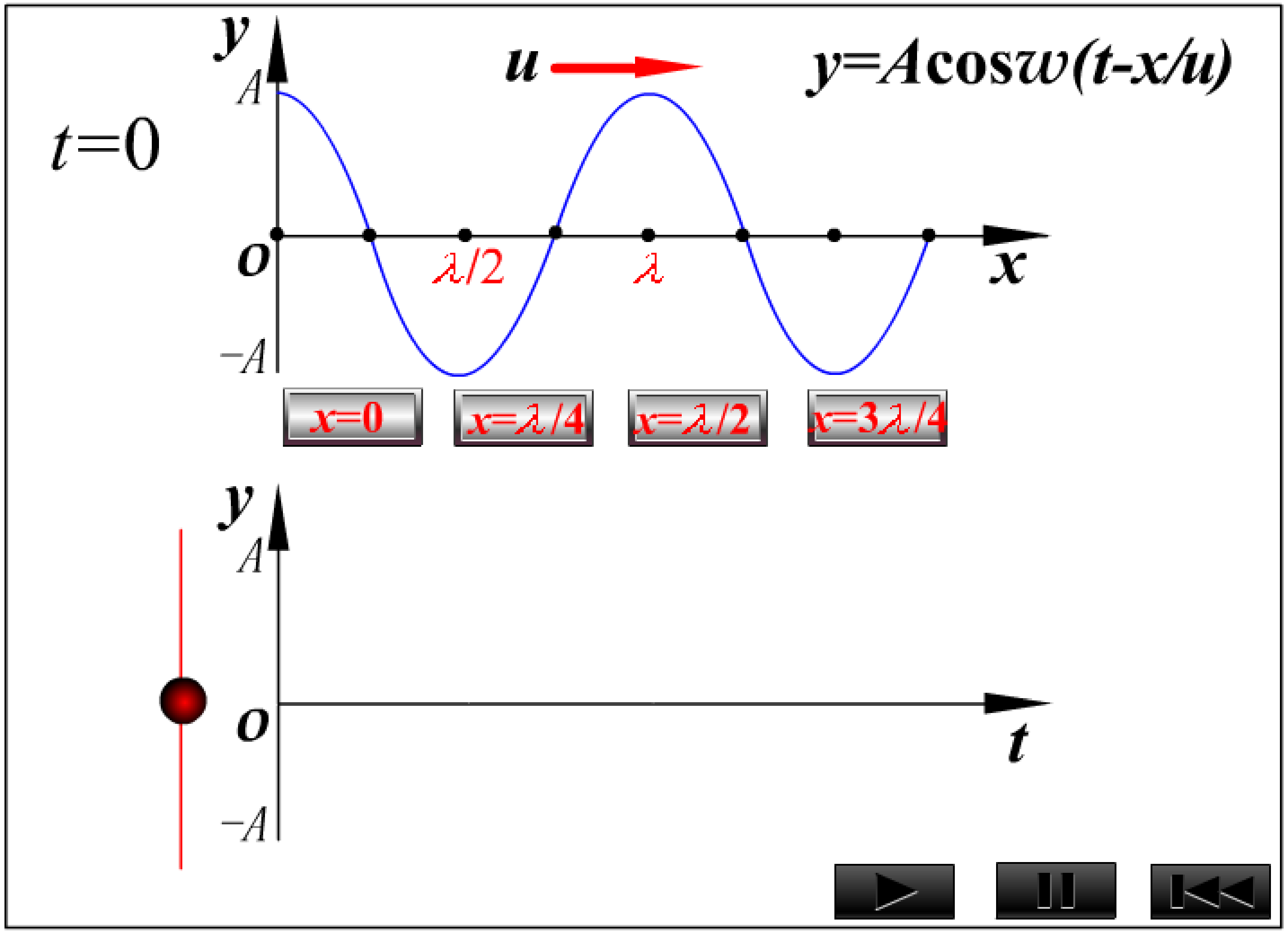
$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

1、 当 x 固定时， 波函数表示该点的简谐运动方程，并给出该点与点 O 振动的相位差。

$$\Delta\varphi = -2\pi\frac{x}{\lambda}$$

$$y(x,t) = y(x,t+T)$$ （波具有时间的周期性）

波线上各点的简谐运动图



2、当 t 一定时，波函数表示该时刻波线上各点相对其平衡位置的位移，即此刻的波形。

$$y(x,t)=y(x+\lambda,t)$$（波具有空间的周期性）

$$\varphi_1=2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda})+\varphi$$

$$\varphi_2=2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda})+\varphi$$

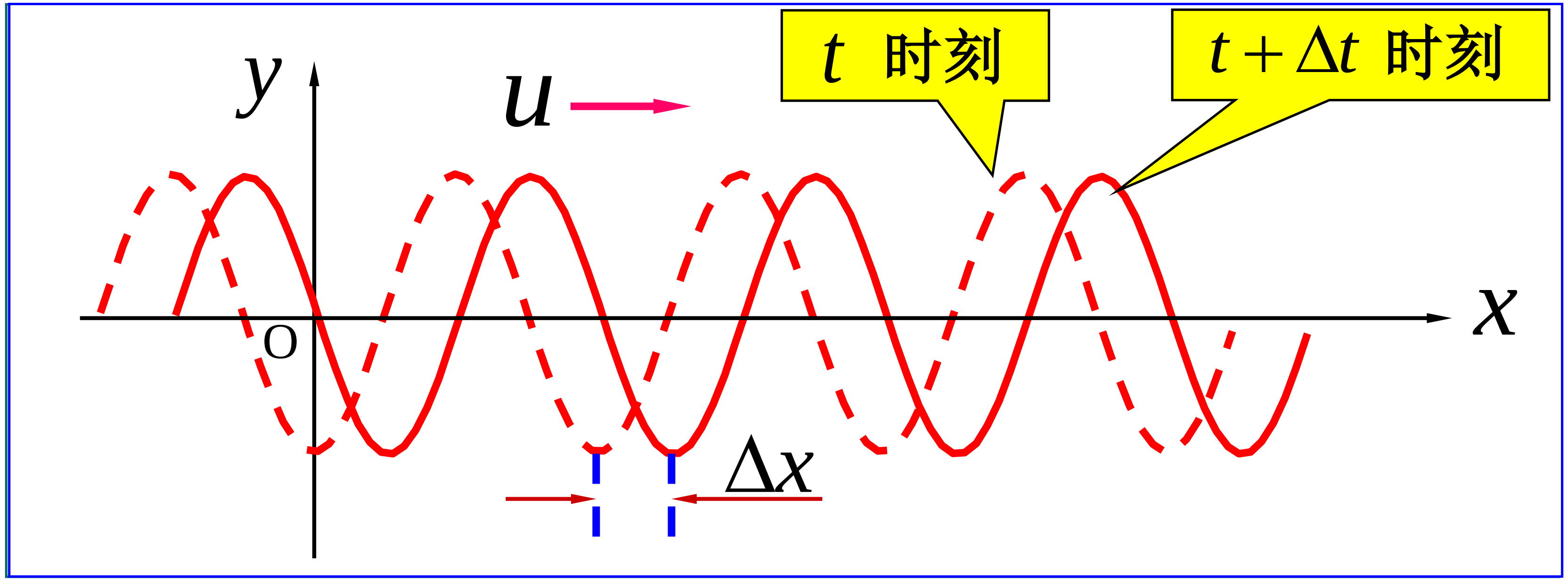
$$\Delta\varphi_{12}=\varphi_1-\varphi_2=2\pi\frac{x_2-x_1}{\lambda}=2\pi\frac{\Delta x_{21}}{\lambda}$$

波程差

$$\boxed{\Delta x_{21}=x_2-x_1}$$

$$\boxed{\Delta\varphi=2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}}$$

3、 若 x,t 均变化，波函数表示波形沿传播方向的运动情况（行波）。



$$y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\varphi(t,x)=\varphi(t+\Delta t, x+\Delta x)$$

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=2\pi\left(\frac{t+\Delta t}{T}-\frac{x+\Delta x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{\Delta x}{\lambda}$$

$$\Delta x = u\Delta t$$

讨论

（1）给出下列波函数所表示的波的传播方向和 $x=0$ 点的初相位。

$$(a)\ y=-A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) \qquad (b)\ y=-A\cos\omega(-t-\frac{x}{u})$$

解：波函数的标准形式为：

$$\boxed{y=A\cos[\omega(t\pm\frac{x}{u})+\varphi]=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{\lambda})+\varphi]}$$

$$(a)\ y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\pi]$$ （向 x 轴正向传播，$\varphi=\pi$ ）

$$(b)\ y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\pi]$$ （向 x 轴负向传播， $\varphi=\pi$ ）

（2）平面简谐波的波函数为 $y = A\cos(Bt - Cx)$ 式中 A、B、C 为正常数，求波长、波速、波传播方向上相距为 d 的两点间的相位差。

解：波函数的标准形式为：$y = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$

比较系数法得：

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{C}} \qquad T = \frac{2\pi}{B}$$

$$\boxed{u = \frac{\lambda}{T} = \frac{B}{C}} \qquad \boxed{\Delta\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda} = dC}$$

例1：已知波动方程如下，求波长、周期和波速。

$$y=(5\text{cm})\cos\pi[(2.50\text{s}^{-1})t-(0.01\text{cm}^{-1})x].$$

解：**比较系数法**：

$$\boxed{y=A\cos2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

把题中波动方程改写成：

$$y=(5\text{cm})\cos2\pi[(\frac{2.50}{2}\text{s}^{-1})t-(\frac{0.01}{2}\text{cm}^{-1})x]$$

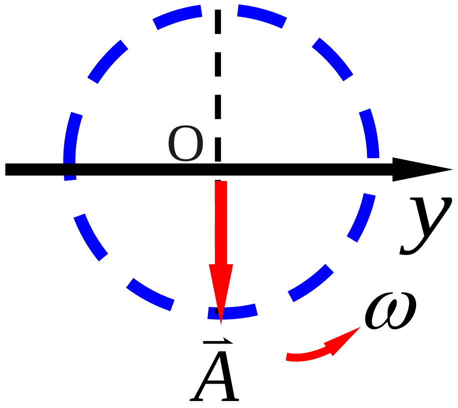
比较得：

$$T=\frac{2}{2.5}\text{s}=0.8\text{ s}\qquad \lambda=\frac{2\text{cm}}{0.01}=200\text{ cm}\qquad u=\frac{\lambda}{T}=250\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$$

例2： 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播， 已知振幅 $A=1.0\text{m}$，$T=2.0\text{s}$，$\lambda=2.0\text{m}$。 在 $t=0$ 时坐标原点处的质点位于平衡位置沿 Oy 轴正方向运动 。 求 （1）波动方程。

解：写出波动方程的标准式。

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\boxed{\varphi}]$$



已知： $t=0$ ， $x=0$ 处质点 $y=0,$

下一时刻该质点沿着oy轴正方向运动。

由旋转矢量法可得： $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$

$$y=1.0\text{m}\cos[2\pi\left(\frac{t}{2.0\text{s}}-\frac{x}{2.0\text{m}}\right)-\frac{\pi}{2}]$$

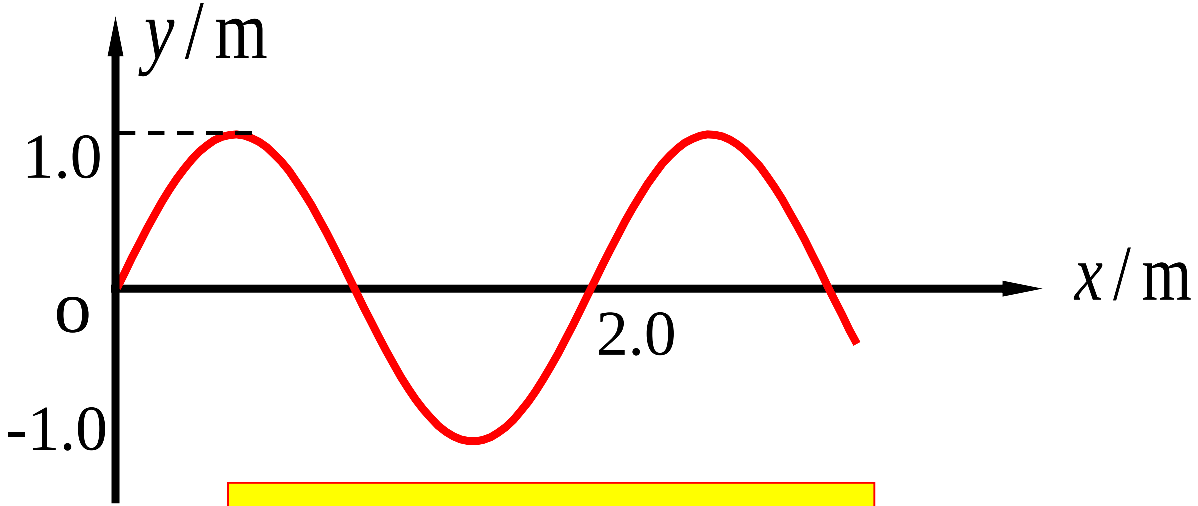
（2）求 $t=1.0\text{s}$ 波形图。

$$y=(1.0\text{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\text{s}}-\frac{x}{2.0\text{m}})-\frac{\pi}{2}]$$

$t=1.0\text{s}$
波形方程

$$y=(1.0\text{m})\cos[\frac{\pi}{2}-\pi x]=(1.0\text{m})\sin\pi x$$

$x=0, \lambda/4, \lambda/2, 3\lambda/4, \lambda$



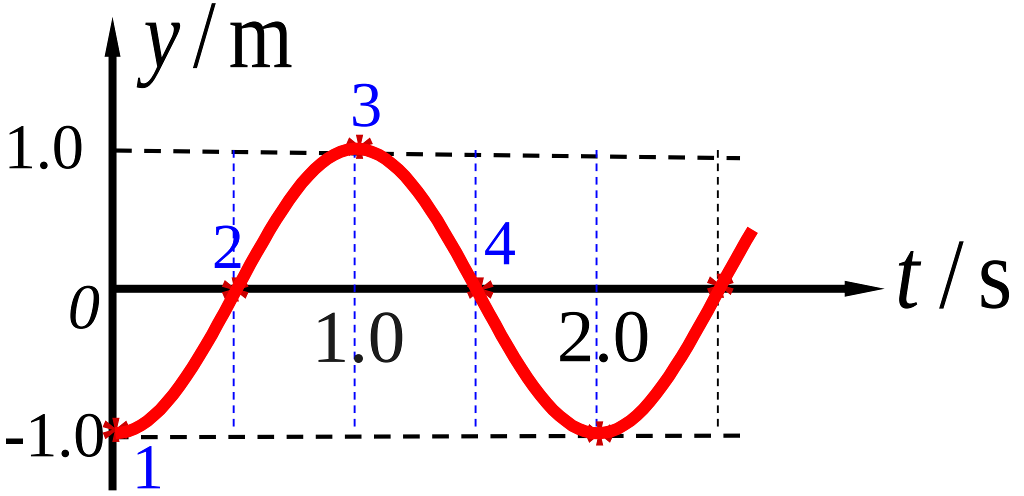
$t=1.0\,\text{s}$ 时刻波形图

（3） $x = 0.5\text{m}$ 处质点的振动规律并做图。

$$y = (1.0\text{m})\cos[2\pi(\frac{t}{2.0\text{s}} - \frac{x}{2.0\text{m}}) - \frac{\pi}{2}]$$

$x = 0.5\text{m}$ 处质点的振动方程为： $y = (1.0\text{m})\cos(\pi t - \pi)$

$t = 0, T/4, T/2, 3T/4, T$



$x = 0.5\,\text{m}$ 处质点的振动曲线

例3： 已知波长为 λ 的平面简谐波沿 x 轴负方向传播。在 $x = \lambda/4$ 处质点的振动方程为： $y = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}ut$

（1）写出该平面简谐波的表达式；

（2）画出 $t = T$ 时刻的波形图。

解法一：（1）先求出O 点（坐标原点）的振动方程。（比较相位法）

因为波沿 x 轴负向传播，所以O点振动落后于 x 处的振动，O 点振动方程为：

$$y_o = A\cos[\omega t + \varphi_o] = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}ut + \boxed{\varphi_o}]$$

$$\varphi_o - \varphi_{\lambda/4} = -2\pi\frac{\lambda/4}{\lambda}$$

$$\varphi_o = -2\pi\frac{\lambda/4}{\lambda} + \varphi_{\lambda/4} = -2\pi\frac{\lambda/4}{\lambda} = -\frac{\pi}{2}$$

$$y_o = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}ut - \frac{\pi}{2}]$$

$$\boxed{y_{\lambda/4} = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}ut}$$

$$y_o = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}ut - \frac{\pi}{2}]$$

（2）由 O点的振动方程直接写出波动方程。

由沿 x 轴负向传播标准形式得：

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \varphi] = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}ut + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi]$$

$$y = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}ut \boxed{+ \frac{2\pi}{\lambda}x} - \frac{\pi}{2}]$$

解法2：取波线上任意一点 P，坐标设为 x，由波的传播特性，P 点的振动落后于 $\lambda/4$ 处质点的振动，P 点的振动方程（也是该波的波函数的表达式）为：

$$y = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}ut - \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{\lambda}{4} - x)]$$

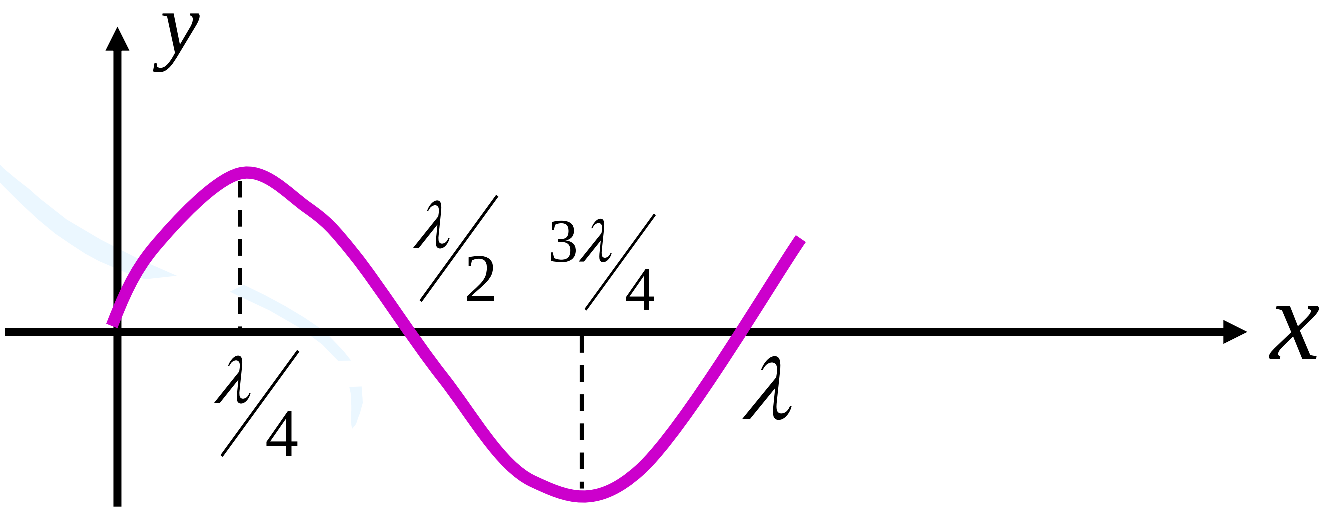
$$y = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}ut + \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2}]$$

$$y = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}ut + \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2}]$$

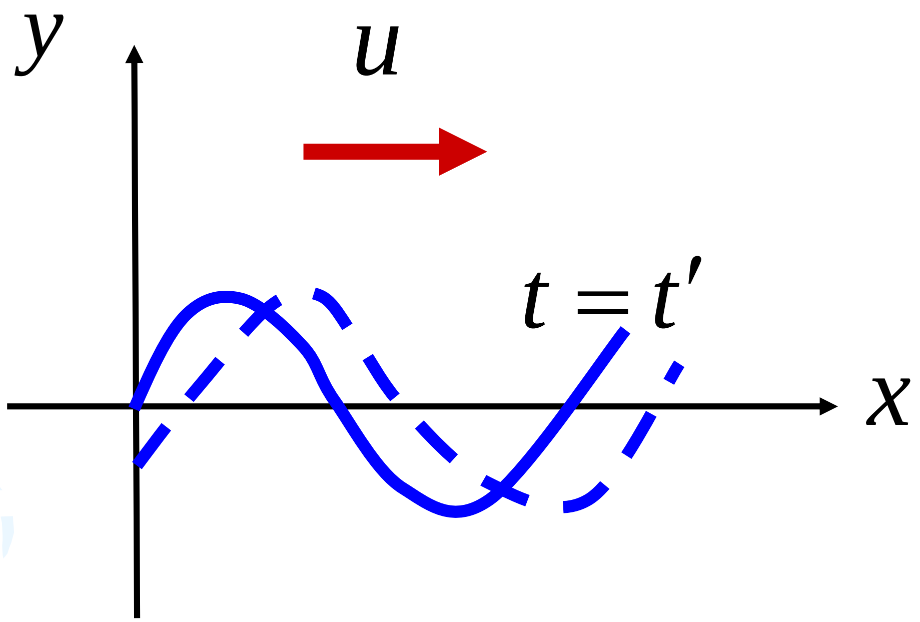
（2） $t=T$ 时波形和 $t=0$ 时的波形一样。

$t=0$时， $$y = A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2}]$$

分别取 $x = 0, \lambda/4, \lambda/2, 3\lambda/4, \lambda$

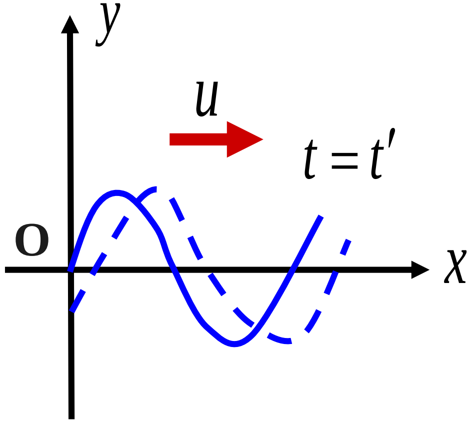


例3： 一平面简谐波沿 x 轴正方向传播，其振幅为 A，频率为 ν，波速为 u，设 $t=t'$ 时刻的波形曲线如图所示。求（1） $x=0$ 处质点振动方程；（2）该波的波动方程。



解： 我们的解题思路是先求出O点处质元的振动方程，然后由O点处质元的振动方程直接写出这列波的波动方程。

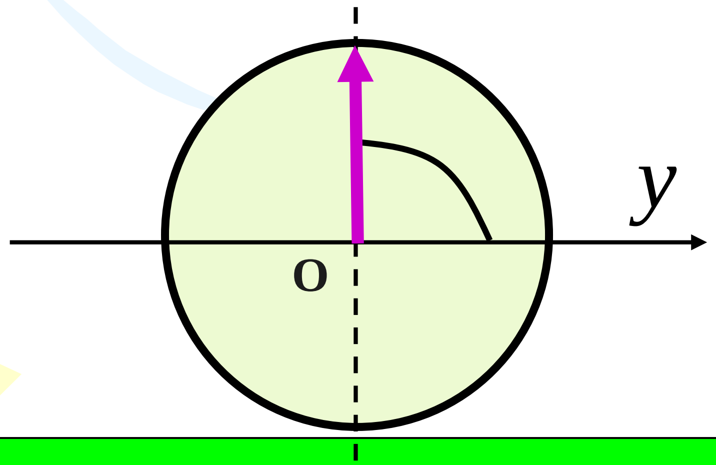
O点的振动方程应为：$y = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$



$\boxed{\varphi}$ 应该由初始条件决定，也就是 $t = 0$ 时刻的条件决定。

由波沿 x 轴正向传播定出 $t = t'$ 时，$x = 0$ 处的质元将离开平衡位置向 y 轴负向运动。

由旋转矢量法可得此时相位为 $\dfrac{\pi}{2}$。



$$\boxed{2\pi\nu t' + \varphi = \frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\pi\nu t'}$$

O点处质元的振动方程：

$$y_{\mathrm{O}} = A\cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2} - 2\pi\nu t')$$

波动方程为：

$$y = A\cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2} - 2\pi\nu t' - \frac{2\pi\nu}{u}x)$$