北京化工大学

Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第三章 信号的频域表达-傅里叶变换

主讲教师：袁洪芳

主要内容 CONTENTS

14 典型信号的傅里叶级数

-- 对称信号傅里叶级数特点

-- 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数

-- 信号的频带宽度

本节首先讨论傅里叶级数和信号对称性之间的关系

然后以周期矩形脉冲信号为例进行分析

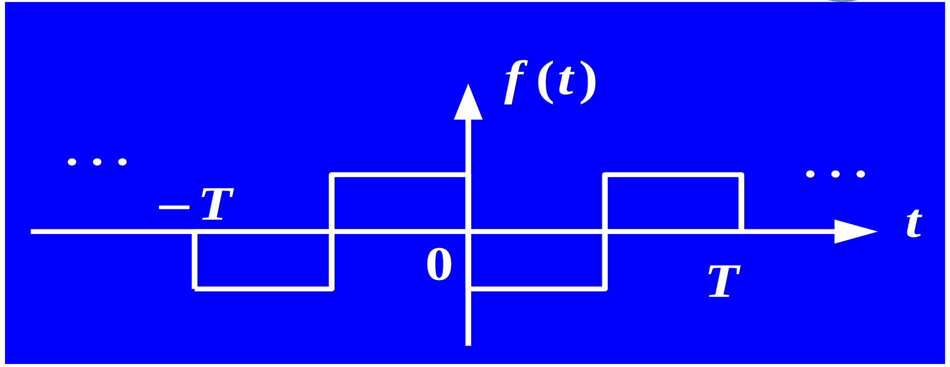
主要讨论：频谱的特点，频谱结构，

频带宽度，能量分布。

其他信号，如周期锯齿脉冲信号、周期三角脉冲信号

周期半波余弦信号、周期全波余弦信号请自学。

（1）奇函数：$f(t) = -f(-t)$



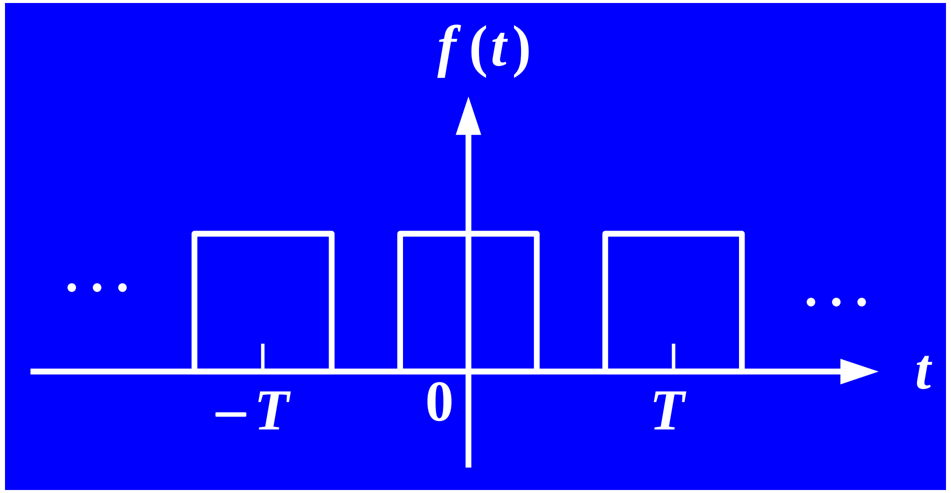
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \;=0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_1 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_1 t dt \neq 0$$

$$F_n = F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}(-jb_n)$$ $F(n\omega_1)$**傅里叶级数是虚函数。**

（2）偶函数：$\boldsymbol{f(t)=f(-t)}$



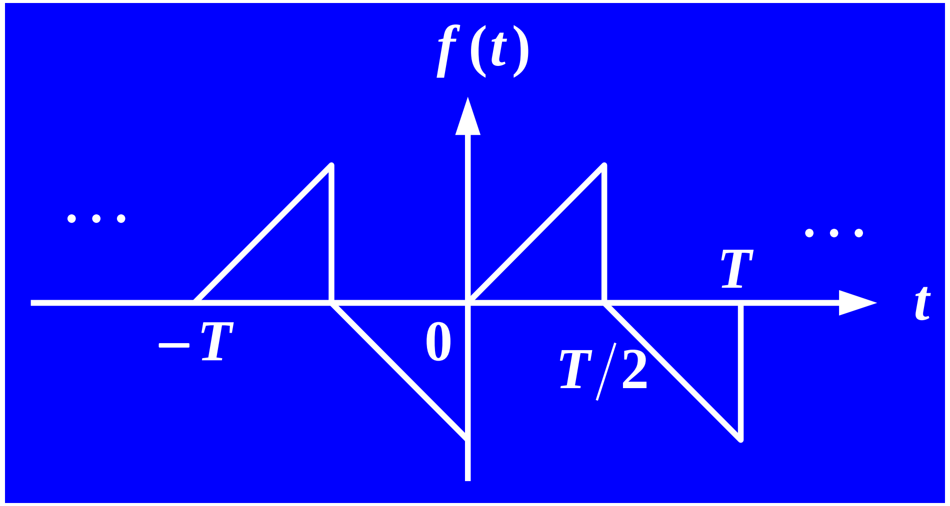
$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_1 t dt=0$$

$$a_n=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_1 t dt\neq 0$$

$$F_n=F(n\omega_1)=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\frac{1}{2}a_n$$

$F(n\omega_1)$**傅里叶级数只有余弦分量，是实函数。**

（3）奇谐函数：$f(t) = -f\left(t \mp \frac{T}{2}\right)$



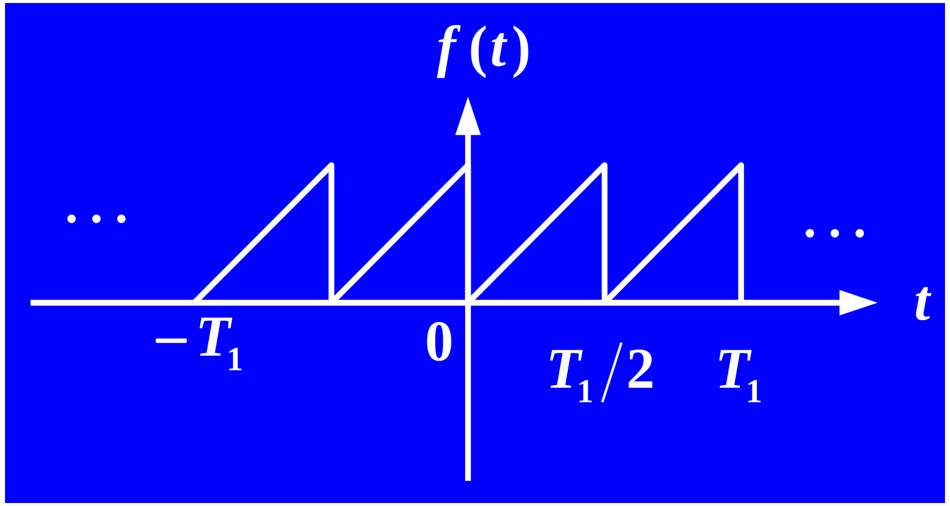
该信号只有奇次谐波的正弦和余弦分量

偶次谐波分量都是0

n为偶数时：$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_1 t dt=0$ $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_1 t dt = 0$

n为奇数时：$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega_1 t dt$ $b_n= \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega_1 t dt$

(4)偶谐函数： $f(t) = f\left(t \mp \frac{T}{2}\right)$



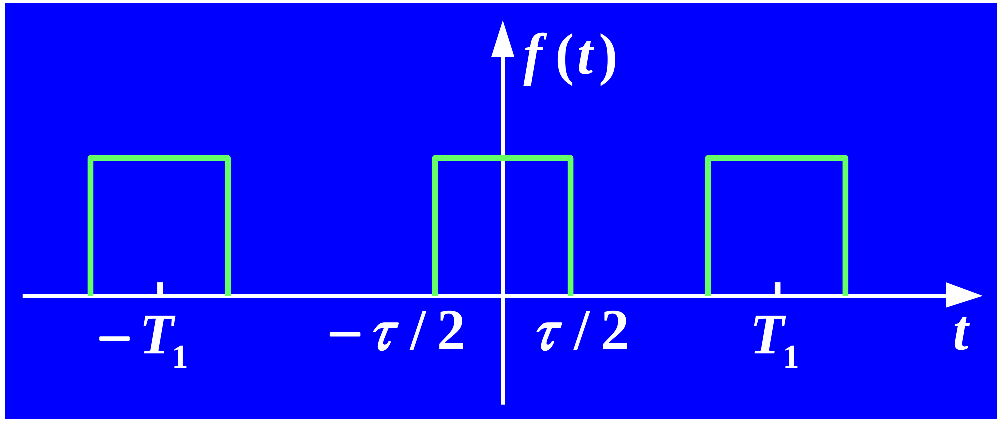
该信号只有偶次谐波的正弦和余弦分量

奇次谐波分量都是0

n为偶数时： $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega_1 t dt \quad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega_1 t dt$

n为奇数时： $a_n = \ b_n = 0$

脉宽为τ、脉冲高度为E、周期为T_1

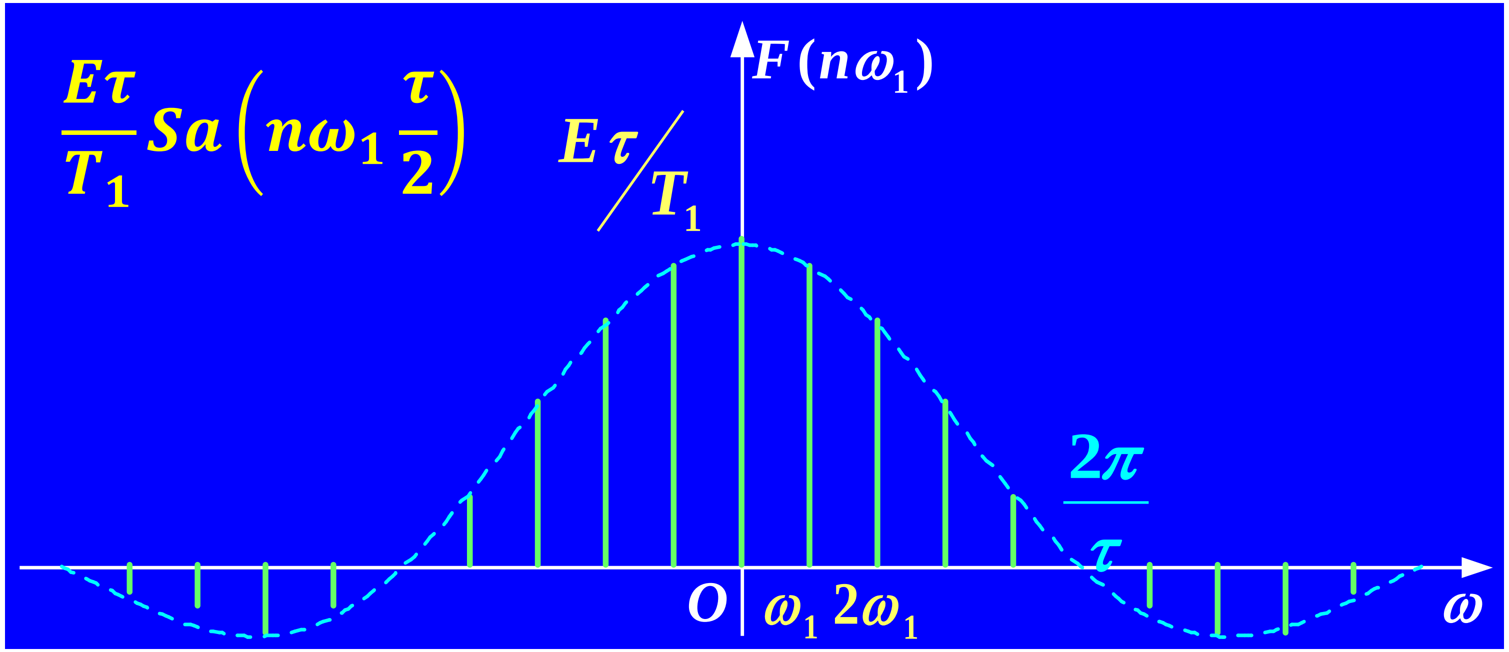


$f(t)$是偶函数 $b_n=0$, 只有a_0, a_n

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

$$=\frac{1}{T_1}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ee^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{E}{T_1}\frac{1}{-jn\omega_1}e^{-jn\omega_1 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{-E}{jn\omega_1 T_1}\left[e^{-jn\omega_1 \tau/2}-e^{jn\omega_1 \tau/2}\right]$$

$$=\frac{2E}{n\omega_1 T_1}\sin n\omega_1\frac{\tau}{2} \quad =\frac{E\tau}{T_1}\frac{\sin n\omega_1\frac{\tau}{2}}{n\omega_1\frac{\tau}{2}} \quad =\frac{E\tau}{T_1}Sa\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)$$



(1)包络线形状：抽样函数

(2)最大值在 $n=0$处为$\frac{E\tau}{T_1}$。

(3)离散谱（谐波性)

(4)第一个零点坐标: $\frac{2\pi}{\tau}$

（5）$F(n\omega_1)$一般是复函数（此处为实 函 数），幅 度/相 位

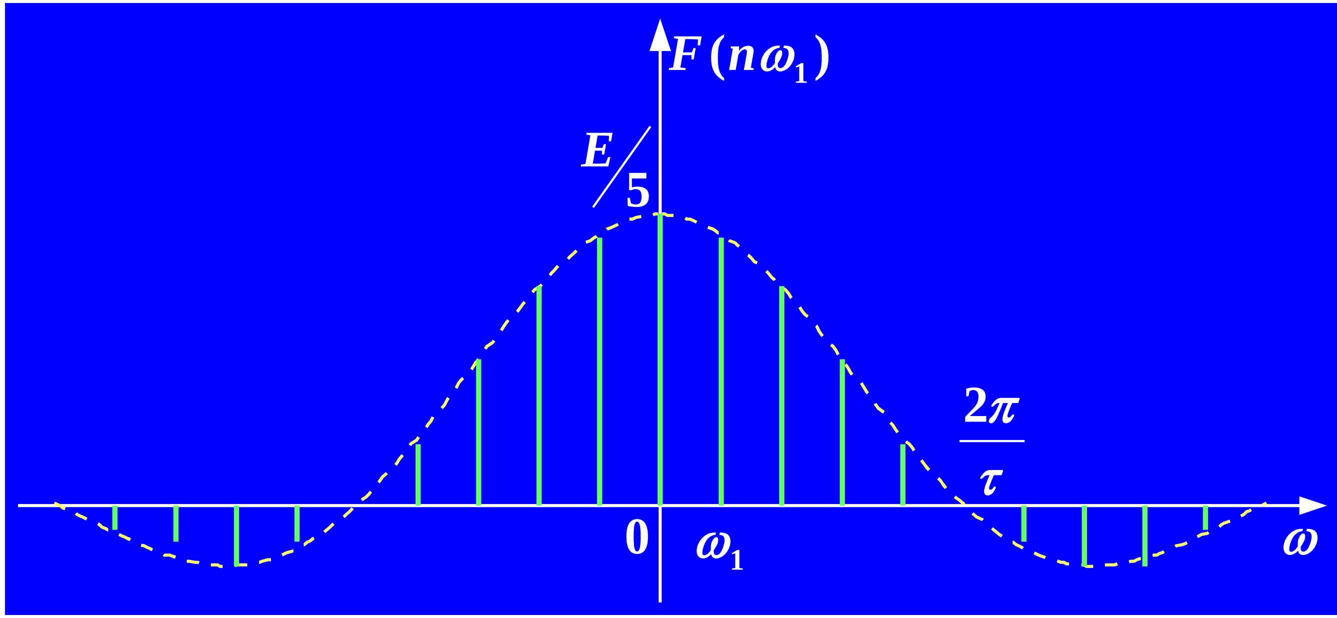
$F_n>0$，相位为 0，$F_n<0$相位为$\pm\pi$。

(1) $\tau = \frac{1}{20}s, T_1 = \frac{1}{4}s$

$$F(n\omega_1) = \frac{E\tau}{T_1}Sa\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right) = \frac{E}{5}Sa\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

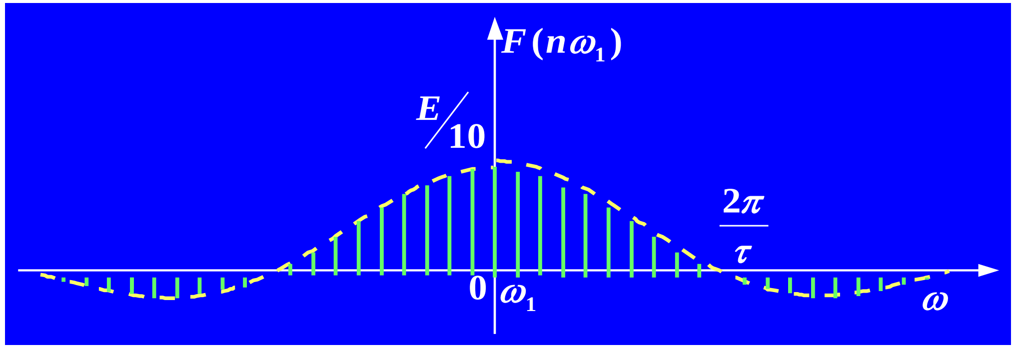
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 8\pi$$

第一个零点：$\omega = n\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau} = 40\pi$



第一个零点内谱线数 $n = \frac{40\pi}{\omega_1} = \frac{40\pi}{8\pi} = 5$，即五次谐波为 0。

$(2)\tau=\frac{1}{20}s,\ \ T_1=\frac{1}{2}s$



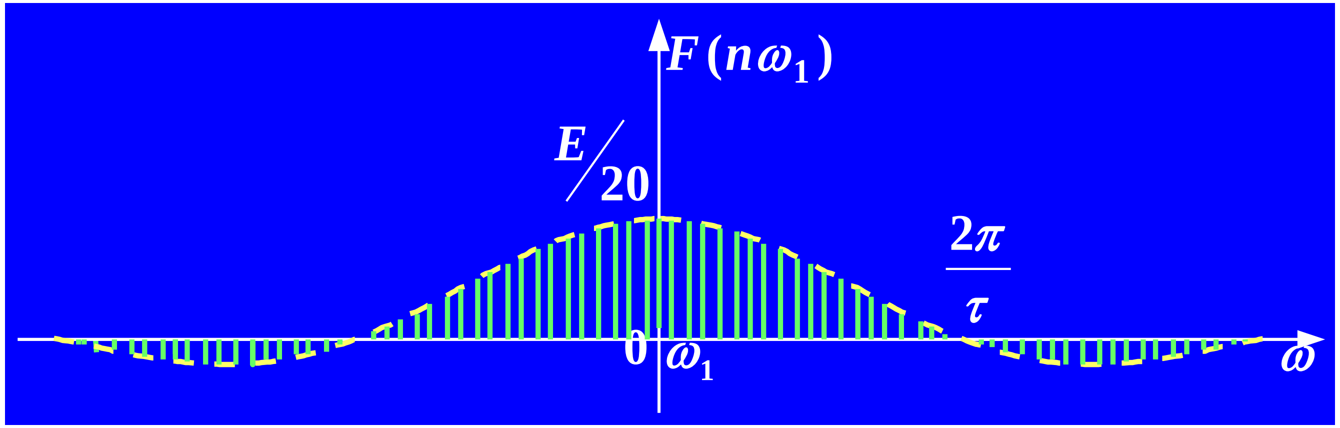
$$F(n\omega_1)=\frac{E\tau}{T_1}Sa\left(n\omega_1\frac{\tau}{2}\right)=\frac{E}{10}Sa\left(\frac{n\pi}{10}\right)$$

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=4\pi$$

第一个零点： $\omega=n\omega_1=\frac{2\pi}{\tau}=40\pi$

第一个零点内谱线数 $n=\frac{40\pi}{\omega_1}=\frac{40\pi}{4\pi}=10$，即10次谐波为0。

$(2)\tau = \dfrac{1}{20}s,\ \ T_1 = 1s$



$$F(n\omega_1) = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) = \frac{E}{20} Sa\left(\frac{n\pi}{20}\right)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi$$

第一个零点：$\omega = n\omega_1 = \dfrac{2\pi}{\tau} = 40\pi$

第一个零点内谱线数 $n = \dfrac{40\pi}{\omega_1} = \dfrac{40\pi}{2\pi} = 20$，即20次谐波为0。

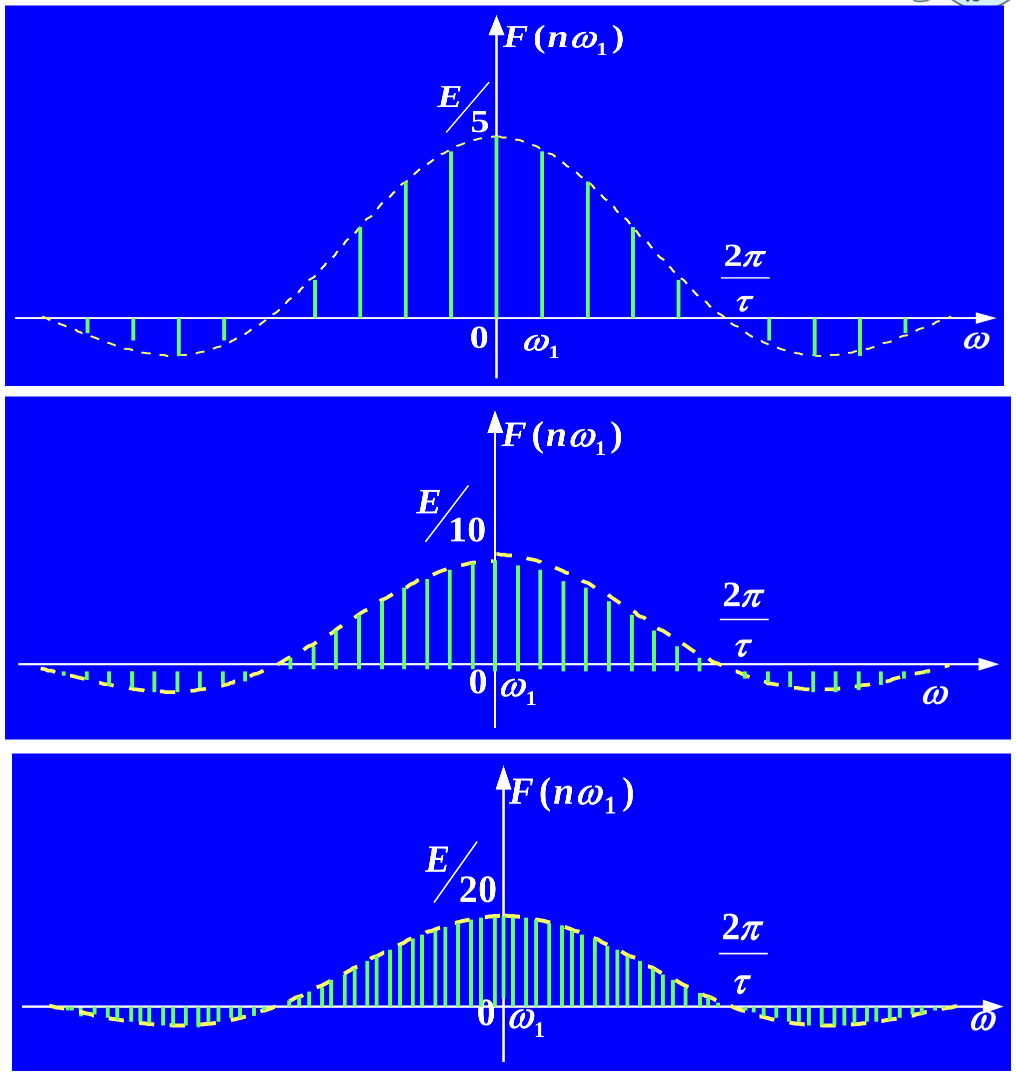
矩形脉冲的频谱说明了周期信号频谱的特点：
离散性，谐波性，收敛性

其傅里叶级数随着周期的变换存在的特点：

$$T_1\uparrow\Rightarrow\begin{cases}\text{幅度}\downarrow\\ \text{谱线间隔 }\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}\downarrow\end{cases}$$

当$T_1\to\infty$，时，$\omega_1\to 0$，$\dfrac{E\tau}{T_1}$为无限小，

$f(t)$由周期信号 → 非周期信号。



对于三角形式的傅里叶级数：$\boldsymbol{f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)}$

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)\right]^2 dt$$

$$=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2=a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}c_n\right)^2$$

对于指数形式的傅里叶级数：$P=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F(n\omega_1)|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$

总平均功率=各次谐波的平均功率之和

以$\tau=\frac{1}{20}s, T_1=\frac{1}{4}s$为例，取前 5 次谐波

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F(n\omega_1)|^2$$

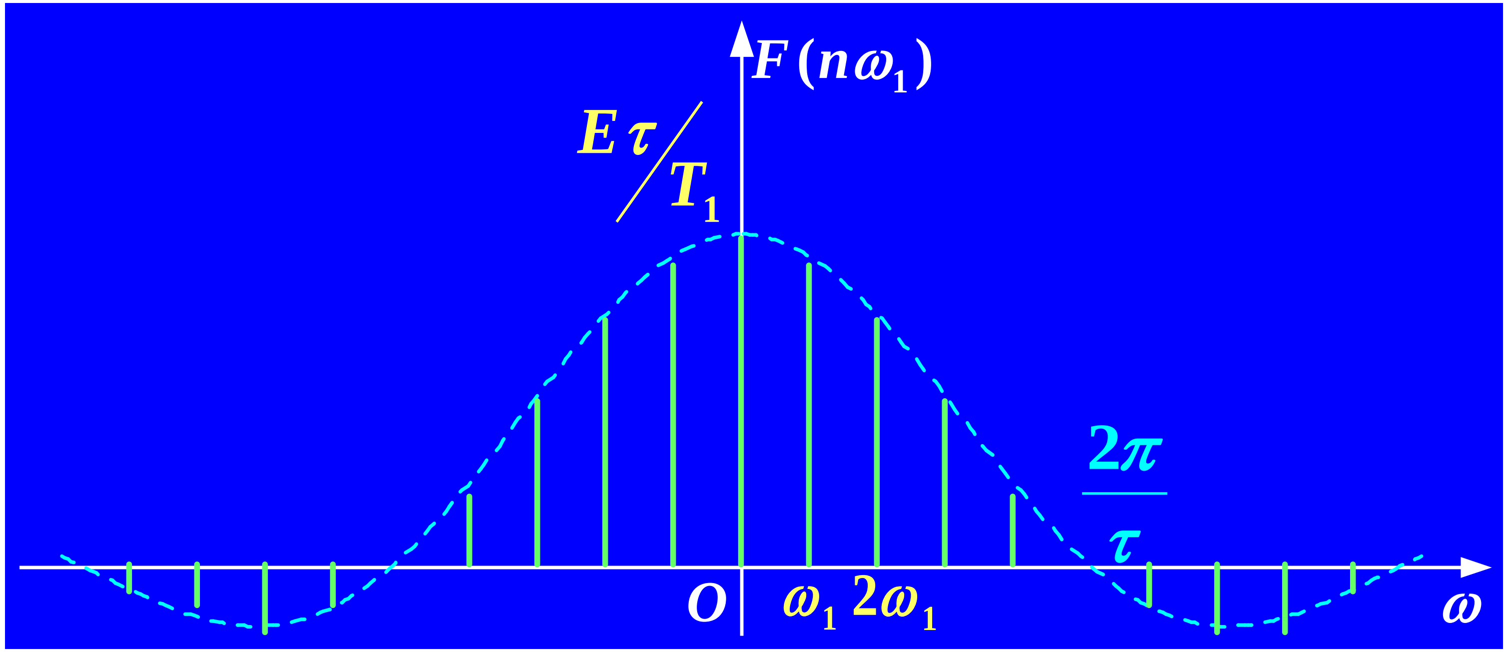
$$P_{5n}=F^2(0)+|F(\omega_1)|^2+|F(2\omega_1)|^2+|F(3\omega_1)|^2+|F(4\omega_1)|^2$$

$$+|F(-\omega_1)|^2+|F(-2\omega_1)|^2+|F-(3\omega_1)|^2+|F-(4\omega_1)|^2 = \mathbf{0.181E^2}$$

总功率$=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f^2(t)dt=0.2E^2$

$$\frac{\text{前5次谐波平均功率}}{\text{信号总的平均功率}}=\frac{p_{5n}}{p}=90.5\%$$

频带宽度



第一个零点集中了信号绝大部分能量（平均功率）

由频谱的收敛性可知，信号的功率集中在低频段。

3.6 信号的频带宽度

1、在一定失真条件下，信号可用某频率范围的信号来表示，此频率范围称为频带宽度。

2、一般把第一个零点作为信号的频带宽度。 $B_\omega=\dfrac{2\pi}{\tau}$或$B_f=\dfrac{1}{\tau}$，带宽与脉宽成反比。

对于一般周期信号，将幅度下降为$\frac{1}{10}|F(n\omega_1)|_{max}$频率区间定义为频带宽度。

3、系统的通频带>信号的带宽，才能不失真

语音信号	**频率大约为**	**300~3400Hz，**
音乐信号		**50~15,000Hz，**
扩大器与扬声器	**有效带宽约为**	**15~20,000Hz。**

3.7 本讲小结

典型周期信号傅里叶级数

- 奇函数傅里叶级数特点
- 偶函数傅里叶级数特点
- 奇谐函数傅里叶级数特点
- 偶谐函数傅里叶级数特点
- 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数
- 周期信号的平均功率 频带宽度