第一节　数学期望

一、数学期望的概念

二、数学期望的性质

三、随机变量函数的数学期望

四、小结

一、数学期望的概念

引例1　分赌本问题(产生背景)

A, B 两人赌技相同, 各出赌金100元,并约定先胜三局者为胜, 取得全部 200 元.由于出现意外情况 ,在 A 胜 2 局 B 胜1 局时, 不得不终止赌博, 如果要分赌金, 该如何分配才算公平?

分析 假设继续赌两局,则结果有以下四种情况:

A A	*A B*	*B A*	*B B*
*A*胜*B*负	*A*胜*B*负	*B*胜*A*负	*B*胜*A*负
*A*胜*B*负	*B*胜*A*负	*A*胜*B*负	*B*胜*A*负

把已赌过的三局(*A* 胜2局*B* 胜1局)与上述结果相结合,即 *A*、*B* 赌完五局,

前三局: *A* 胜 2 局 *B* 胜 1 局

后二局: $\boxed{AA \quad AB \quad BA}$ $\boxed{BB}$

A 胜　　*B* 胜

故有, 在赌技相同的情况下, A, B 最终获胜的可能性大小之比为 $3:1$,

即A 应获得赌金的 $\frac{3}{4}$, 而 B 只能获得赌金的 $\frac{1}{4}$.

因此, A 能"期望"得到的数目应为

$$200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}),$$

而B 能"期望"得到的数目, 则为

$$200 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 50(\text{元}).$$

若设随机变量 X 为:在 A 胜2局B 胜1局的前提下, 继续赌下去 A 最终所得的赌金.

则X 所取可能值为: 200 0

其概率分别为: $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

因而A期望所得的赌金即为X的 “期望” 值,

等于 $$200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150(\text{元}).$$

即为 X 的可能值与其概率之积的累加.

引例2　射击问题

设某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次,(命中的环数是一个随机变量).射中次数记录如下

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问:该射手每次射击平均命中靶多少环?

解 平均射中环数 $=\dfrac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$=\frac{0\times 2+1\times 13+2\times 15+3\times 10+4\times 20+5\times 30}{90}$$

$$=0\times\frac{2}{90}+1\times\frac{13}{90}+2\times\frac{15}{90}+3\times\frac{10}{90}+4\times\frac{20}{90}+5\times\frac{30}{90}$$

$$=\sum_{k=0}^{5}k\cdot\frac{n_k}{n}=3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y.

$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}}$

随机波动　　频率随机波动

"平均射中环数"的稳定值 = ?

$$\sum_{k=0}^{5} k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{5} k \cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

"平均射中环数"等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

分赌本问题

A 期望所得的赌金即为 X 的数学期望

$$E(X) = 200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}).$$

射击问题

“平均射中环数”应为随机变量Y 的数学期望

$$E(Y) =$$

$$0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + 4 \times p_4 + 5 \times p_5 .$$

关于定义的几点说明

(1) $E(X)$是一个实数,而非变量,它是一种加权平均,与一般的平均值不同，它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

(2) 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变，之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值,它不应随可能值的排列次序而改变.

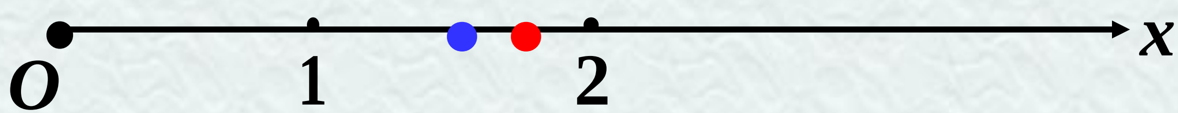
(3) 随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\dfrac{1+2}{2}=1.5,$

$$E(X)=1\times 0.02+2\times 0.98=1.98.$$



它从本质上体现了随机变量X 取可能值的平均值.

当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时，X 的期望值与算术平均值相等.

加权平均与算术平均区别

加权平均成绩

设某学生四年大学各门功课成绩分别为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n,$$

其学分分别为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$, 则称

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \frac{1}{n} \right)$$

为该生各门课程的**算术平均成绩**.

而

$$\overline{x}_{\omega}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{\omega_i}{\sum_{j=1}^{n}\omega_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i\,,\text{其中}\,v_i=\omega_i\Big/\sum_{j=1}^{n}\omega_j\,,$$

则称 $\overline{x}_{\omega}$为该生的**加权平均成绩**.

显然算术平均成绩是加权平均成绩的一种特例, 即 $v_i=\dfrac{1}{n}$, 可见加权平均才充分的体现了平均值的意义.

实例1 谁的技术比较好?

甲、乙两个射手，他们射击的分布律分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好?

解 设甲、乙射手击中的环数分别为 X_1, X_2 .

$$E(X_1)=8\times 0.3+9\times 0.1+10\times 0.6=9.3(\text{环}),$$

$$E(X_2)=8\times 0.2+9\times 0.5+10\times 0.3=9.1(\text{环}),$$

故甲射手的技术比较好.

实例2 发行彩票的创收利润

某一彩票中心发行彩票 10万张, 每张2元. 设头等奖1个, 奖金 1万元, 二等奖2个,奖金各 5 千元; 三等奖 10个, 奖金各1千元; 四等奖100个, 奖金各100元; 五等奖1000个, 奖金各10 元.每张彩票的成本费为 0.3 元, 请计算彩票发行单位的创收利润.

解 设每张彩票中奖的数额为随机变量X, 则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

每张彩票平均能得到奖金

$$E(X)=10000\times\frac{1}{10^5}+5000\times\frac{2}{10^5}+\cdots+0\times p_0$$

$$=0.5(\text{元}),$$

每张彩票平均可赚

$$2-0.5-0.3=1.2(\text{元}),$$

因此彩票发行单位发行 10 万张彩票的创收利润为

$$100000\times1.2=120000(\text{元}).$$

实例3 如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元， 失败的机会为70%，将损失 2 万元. 若存入银行，同期间的利率为5%， 问是否作此项投资?

解 设 X 为投资利润，则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$E(X) = 8 \times 0.3 - 2 \times 0.7 = 1$(万元), 存入银行的利息:

$10 \times 5\% = 0.5$(万元), 故应选择投资.

实例4 商店的销售策略

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式，记使用寿命为X(以年计),规定：

$X \le 1$,一台付款1500元;$1 < X \le 2$,一台付款2000元;

$2 < X \le 3$,一台付款2500元;$X > 3$,一台付款3000元.

设寿命 X 服从指数分布,概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-x/10}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求该商店一台家用电器收费 Y 的数学期望.

解 $$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} \mathrm{e}^{-x/10} \, \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-0.1} = 0.0952,$$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} \mathrm{e}^{-x/10} \, \mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{-0.1} - \mathrm{e}^{-0.2} = 0.0861,$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} \mathrm{e}^{-x/10} \, \mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{-0.2} - \mathrm{e}^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx$$

$$= e^{-0.3} = 0.7408.$$

因而一台收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得 $E(Y) = 2732.15,$

即平均一台家用电器收 费 2732.15 元.

实例5:常见离散型随机变量的数学期望

1 (0-1分布)　设随机变量X~(0,1), 求$E(X)$.

解　X 的分布律

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ (k=0,1;\ \ 0<p<1)$$

则有 $E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P\{X=k\}$

$$=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$

2 (二项分布) 设随机变量$X \sim B(n, p)$, 求$E(X)$.

解 设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布, 其分布律为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

$$0 < p < 1, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

则有 $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P\{X = k\}$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{kn!}{k!(n-k)!}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np[p+(1-p)]^{k-1}$$

$$=np$$

同时可得两点分布$B(1,p)$的数学期望为 p.

二项式定理可以用以下公式表示：

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^r a^{n-r}b^r$$

其中，$C_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ 又有$\dbinom{n}{r}$等记法，称为二项式系数，即取的组合数目。此系数亦可表示为杨辉三角形。[2]

考虑用数学归纳法。

当$n=1$，$(a+b)^1=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k=\binom{1}{0}a^1b^0+\binom{1}{1}a^0b^1=a+b$

假设二项展开式在$n=m$时成立。

设$n=m+1$，则：

$$(a+b)^{m+1}=a(a+b)^m+b(a+b)^m$$

$$=a\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k+b\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}a^{m-j}b^j$$

$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k+1}b^k+\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}a^{m-j}b^{j+1}$，将a、b<乘入：

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j} b^{j+1}$$，取出$k=0$ 的项：

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} a^{m-k+1} b^k$$，设$j=k-1$：

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^{m+1-k} b^k + b^{m+1}$$， 取出$k=m+1$ 项：

$$= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] a^{m+1-k} b^k$$，两者相加：

$$= a^{m+1} + b^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k$$，套用帕斯卡法则：

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k$$

3 (泊松分布)　设随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 求$E(X)$.

解　设$X \sim P(\lambda)$, 且其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda.$$

因而泊松分布$P(\lambda)$的数学期望为λ.

4 (几何分布)　设随机变量X 服从几何分布, 求$E(X)$.

解　设随机变量X 的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p, q=1-p; k=1,2,\cdots,0<p<1.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}\right)'$$

$$=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

这是因为$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^k\right)'(|x|<1)=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'.$

常见离散型分布的数学期望小结

分布	分布律	$E(X)$
0–1 分布 $X \sim B(1, p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p
二项分布 $X \sim B(n, p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\ldots,n$	np
泊松分布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$	$\dfrac{1}{p}$

实例6 按规定,某车站每天 $8:00\sim 9:00$, $9:00\sim 10:00$都恰有一辆客车到站,但到站的时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立.其规律为

到站时刻	$8:10$ $9:10$	$8:30$ $9:30$	$8:50$ $9:50$
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(i) 一旅客$8:00$到车站,求他候车时间的数学期望.

(ii) 一旅客$8:20$到车站,求他候车时间的数学期望.

解: 设旅客的候车时间为 X(以分计).

(i) X的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{3}{6} + 50 \times \frac{2}{6}$$

$$= 33.33(\text{分}).$$

(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=$$

$$10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+70\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+90\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$$

$$=27.22(\text{分}).$$

2.连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$. 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

实例7 顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(以分计)服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{5}e^{-x/5}\,\mathrm{d}x=5$(分钟).

因此, 顾客平均等待5分钟就可得到服务.

书上例7 有5个相互独立工作的电子装置，他们的寿命 X_k $(k=1,2,3,4,5)$ 服从同一指数分布，其分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

1. 若将这5个电子装置串联工作组成整机，求整机寿命N的数学期望。

2. 若将这5个电子装置并联工作组成整机，求整机寿命M的数学期望。

解：1.整机串联，则有

$$F_N(z)=P\{Z\le z\}=P\{\min\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}\le z\}$$

$$F_N(z)=1-\left[1-F_{X_1}(z)\right]^5$$

$$F_{X_1}(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & ,x>0\\ 0 & ,\ x\le 0\end{cases}$$

$$F_{X_1}(z)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-t/\theta}dt=\int_0^x\mathrm{e}^{-t/\theta}d\,\frac{t}{\theta}$$

$$=-\mathrm{e}^{-t/\theta}\Big|_0^x=1-e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$f_N(x) = F_N^{'}(z) = \left\{1 - \left[1 - (1 - e^{-\frac{x}{\theta}})\right]^5\right\}^{'}$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{5x}{\theta}}\right)^{'} = 0 - \left(-\frac{5}{\theta} e^{-\frac{5x}{\theta}}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{5}{\theta} e^{-\frac{5x}{\theta}} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$$

$$E(N)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_N(x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty} x\frac{5}{\theta}e^{-\frac{5x}{\theta}}dx$$

$$u=\frac{5x}{\theta}$$

$$=\frac{\theta}{5}\int_0^{+\infty} ue^{-u}du$$

$$=-\frac{\theta}{5}\int_0^{+\infty} ude^{-u}$$

$$=-\frac{\theta}{5}\left[ue^{-u}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} e^{-u}du\right]$$

$$=\frac{\theta}{5}\int_0^{+\infty} e^{-u}du=-\frac{\theta}{5}e^{-\frac{5x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\theta}{5}$$

解：2.整机并联，则有

$$F_M(z) = P\{M \le z\} = P\{X_1 \le z, X_2 \le z, X_3 \le z, X_4 \le z, X_5 \le z\}$$

$$= \left[P\{X_1 \le z\}\right]^5 = \left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^5 \qquad (z > 0)$$

$$f_M(x) = F_M'(z) = \left[\left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^5\right]'$$

$$= 5\left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^4 \times \left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)' = 5\left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^4 \times \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{5}{\theta}\left(1 - e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^4 \times e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{E(M)}=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_M(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{5x}{\theta}\left(1-e^{-\frac{x}{\theta}}\right)^4 \times e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$=\frac{137}{60}\theta$$

实例8 常见连续型随机变量的数学期望

1 (均匀分布) 设随机变量X服从均匀分布，求$E(X)$.

解 设$X \sim U(a,b)$,其分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{1}{b-a}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+b).$$

因而均匀分布数学期望位于区间的中点.

2 (正态分布)　　设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解　设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其分布密度函数

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\sigma>0,-\infty<x<\infty.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t$

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

因而参数 μ 为正态分布的数学期望.

3 (指数分布)

设随机变量X服从指数分布,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad 其中\ \lambda>0,$$

求$E(X)$.

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=-\int_{0}^{+\infty}x\cdot e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}(-\lambda x)=-\int_{0}^{+\infty}x\,\mathrm{d}e^{-\lambda x}$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}.$$

常见连续型分布的数学期望小结

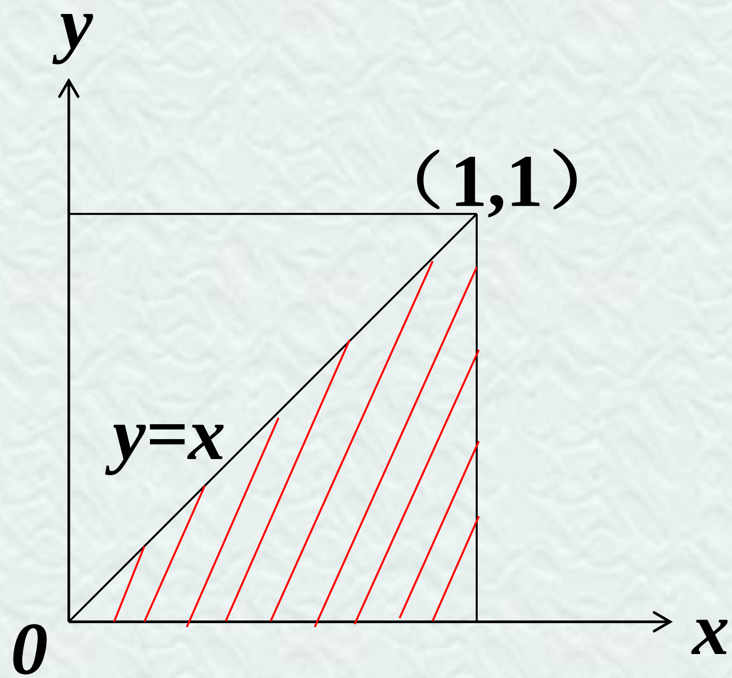
分布名称	概率密度	$E(X)$
均匀分布	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
正态分布	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ
指数分布	$p(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$

例9 设（X，Y）的分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0\quad, & \text{其它}.\end{cases}$$

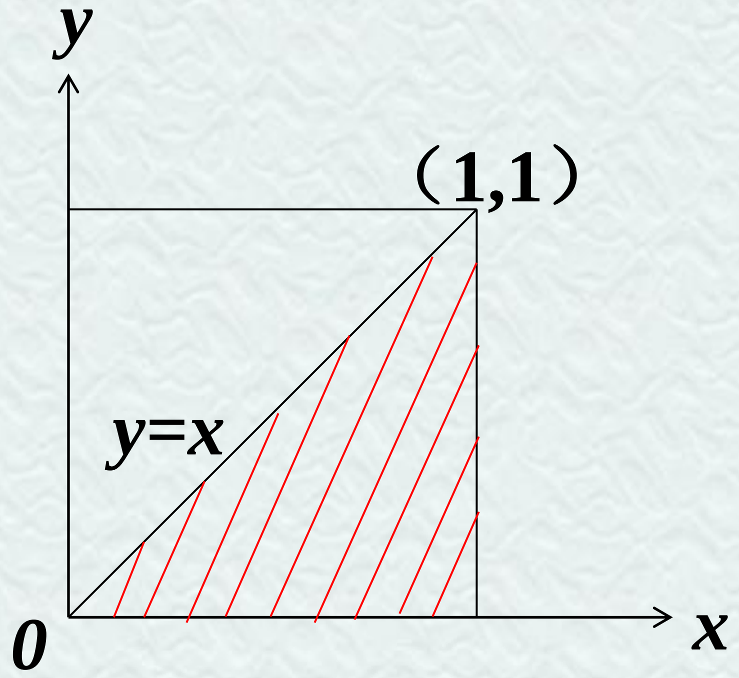
求：$E\left(X^2+Y^2\right)$

解：



$$E\left(X^2+Y^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2+y^2\right)f\left(x,y\right)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x\left(x^2+y^2\right)12y^2dy$$



$$=12\int_0^1 dx[\int_0^x x^2y^2dy+\int_0^x y^4dy]$$

$$=12\int_0^1[x^2\frac{1}{3}y^3\mid_0^x+\frac{1}{5}y^5\mid_0^x]dx$$

$$=12\int_0^1[\frac{1}{3}x^5+\frac{1}{5}x^5]dx=12\int_0^1[\frac{8}{15}x^5]dx$$

$$=12\times\frac{8}{15}\times\frac{1}{6}x^6\mid_0^1=\frac{16}{15}$$

二、数学期望的性质

1. 设 C 是常数, 则有 $E(C)=C$.

证明 $E(X)=E(C)=1\times C=C$.

2. 设 X 是一个随机变量,C 是常数, 则有

$$E(CX)=CE(X).$$

证明 $E(CX)=\sum_k Cx_k p_k=C\sum_k x_k p_k=CE(X).$

例如 $E(X)=5$, 则 $E(3X)=3E(X)=3\times5=15.$

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

证明

$$E(X+Y)=\sum_k (x_k+y_k)p_k$$

$$=\sum_k x_k p_k+\sum_k y_k p_k=E(X)+E(Y).$$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

说明　连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似.

性质3 设 X、Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

证

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=E(X)+E(Y).$$

性质4 设 X、Y是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

证

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=E(X)E(Y).$$

随机变量函数的数学期望

(一) 一维随机变量函数的数学期望

1. 问题的提出

$$X \xrightarrow{\text{数学期望}} E(X)$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$$

$$f(X) \xrightarrow{\text{数学期望}} E[f(X)]= ?$$

f是连续函数, $f(X)$ 是随机变量, 如: $aX+b$, X^2等等.

2. 一维随机变量函数数学期望的计算

如何计算随机变量函数的数学期望?

方法1 (定义法): $f(X)$是随机变量, 按照数学期望的定义计算$E[f(X)]$.

关键: 由X的分布求出$f(X)$的分布.

难点: 一般$f(X)$形式比较复杂的, 很难求出其分布.

方法2 (公式法):

定理3.1 设X是一个随机变量, $Y=f(X)$, 则

$$E(Y)=E[f(X)]=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k)p_k, & X\text{为离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)\mathrm{d}x, & X\text{为连续型}\end{cases}$$

当X为离散型时, $P(X=x_k)=p_k$, $(k=1,2,\ldots)$;
当X为连续型时, X的密度函数为$p(x)$.

求$E[f(X)]$时, 只需知道X的分布即可.

证 现在只证明定理的特殊情形:

设X的密度函数为$p_X(x)$, $Y = f(X)$, 函数f单调连续, $x = f^{-1}(y)$为其反函数, 并且可导, 同时$\alpha \le y \le \beta$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) \mathrm{d}x$$

$$\underline{\underline{x=f^{-1}(y)}} \int_{f(-\infty)}^{f(+\infty)} f(f^{-1}(y)) p_X(f^{-1}(y))(f^{-1}(y))' \mathrm{d}y$$

$$= \int_{f(-\infty)}^{f(+\infty)} y p_X(f^{-1}(y))(f^{-1}(y))' \mathrm{d}y$$

$$= \begin{cases} \int_\alpha^\beta y p_X(f^{-1}(y))(f^{-1}(y))' \mathrm{d}y, & (f^{-1}(y))' > 0 \\ \int_\beta^\alpha y p_X(f^{-1}(y))(f^{-1}(y))' \mathrm{d}y, & (f^{-1}(y))' < 0 \end{cases}$$

$$= \int_\alpha^\beta y p_X(f^{-1}(y)) \left| (f^{-1}(y))' \right| \mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta y p_Y(y) \mathrm{d}y$$

即

$$E(Y) = E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) \mathrm{d}x$$

例9 **(考研试题)**

设某种商品的需求量X是服从[10,30]上的均匀分布的随机变量，而经销商店进货数量为区间[10, 30]中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利500元．若供大于求则削价处理，每处理1单位商品亏损100元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每一单位商品仅获利300元.为使商品所获利润期望值不少于9280元, 试确定最少进货量.

解 设进货量为a, 则利润为

$$H(X)=\begin{cases}500a+(X-a)300, & a<X\le 30\\ 500X-(a-X)100, & 10\le X\le a\end{cases}$$

$$=\begin{cases}300X+200a, & a<X\le 30\\ 600X-100a, & 10\le X\le a\end{cases}$$

因此期望利润为

$$E[H(X)]=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}H(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{20}\int_{10}^{a}(600x-100a)\mathrm{d}x+\frac{1}{20}\int_{a}^{30}(300x+200a)\mathrm{d}x$$

$$E[H(X)] = \frac{1}{20}\left(600 \times \frac{x^2}{2} - 100ax\right)\Big|_{10}^{a} +$$

$$\frac{1}{20}\left(300 \times \frac{x^2}{2} + 200ax\right)\Big|_{a}^{30}$$

$$= -7.5a^2 + 350a + 5250.$$

因此 $-7.5a^2 + 350a + 5250 \geq 9280,$

解得 $20\frac{2}{3} \leq a \leq 26,$ 即最少进货量为21单.

(二) 二维随机变量函数的数学期望

对于二维随机变量而言, 其函数的数学期望计算方法可以由类似于**定理3.1**得到.

1. 二维离散型情形

设(X,Y)为二维离散型随机变量, $Z=f(X,Y)$为二元函数, 如果$E(Z)$存在,

$$E(Z)=E[f(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f(x_i,y_j)p_{ij}$$

其中(X,Y)的联合概率分布为p_{ij}.

2. 二维连续型情形

设(X,Y)为二维连续型随机变量, $Z=f(X,Y)$为二元连续函数, 如果$E(Z)$存在, 则

$$E(Z)=E[f(X,Y)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中(X,Y)的联合概率密度为$p(x,y)$.

例 10 设(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求$E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X-Y)^2]$.

解 X的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X) = 1\times 0.4 + 2\times 0.2 + 3\times 0.4 = 2.0.$

Y的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得$E(Y)=-1\times 0.3+0\times 0.4+1\times 0.3=0.$

因为(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

Y/X的分布律为

Y/X	-1	$-1/2$	0	$1/3$	$1/2$	1
p	0.2	0.1	0.4	0.1	0.1	0.1

计算可得

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=-1\times 0.2-\frac{1}{2}\times 0.1+0\times 0.4+\frac{1}{3}\times 0.1$$

$$+\frac{1}{2}\times 0.1+1\times 0.1$$

$$=-\frac{1}{15}.$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

$(X-Y)^2$的分布律为

p	0.1	0.2	0.3	0.4
$(X-Y)^2$	0	1	4	9

得 $E\left[(X-Y)^2\right] = 4\times 0.3 + 1\times 0.2 + 0\times 0.1 + 9\times 0.4$

$= 5.$

例11 设$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X 与Y相互独立,

求 $E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)$.

解 $E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(作极坐标变换)

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r^2}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

实例9 一机场班车载有 20 位旅客自机场开出,旅客有 10 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车,以 X 表示停车的次数,求 $E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立).

解 引入随机变量 X_i,

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车}, \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车}, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,10.$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}.$

则有 $P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$， $P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$，

$i=1,2,\cdots,10.$

由此 $E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$， $i=1,2,\cdots.$

得 $E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})$

$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$

$=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784$(次).

四、小结

1. 数学期望是一个实数, 而非变量,它是一种**加权平均**, 与一般的平均值不同,它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质

1^{o} $E(C)=C;$

2^{o} $E(CX)=CE(X);$

3^{o} $E(X+Y)=E(X)+E(Y);$

4^{o} X,Y 独立 $\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y).$