2. Cinématique du point

2.1 Exercices d'application

2.1.1 Choix d'un repère

Quel repère choisiriez-vous pour étudier le mouvement :

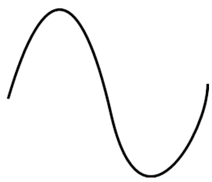
1. d'un skieur dans un half-pipe formant un demi-cylindre ?
2. d'une moto sur une autoroute ?
3. de l'extrémité d'une scie circulaire ?
4. d'un avion au décollage ?
5. d'un skieur nautique qui fait un saut sur un tremplin ?
6. d'une aiguille d'une montre ?
7. d'un avion allant du Japon en Afrique du Sud ?
8. d'un électron autour du noyau d'un atome ?

2.1.2 Repérage d'un point

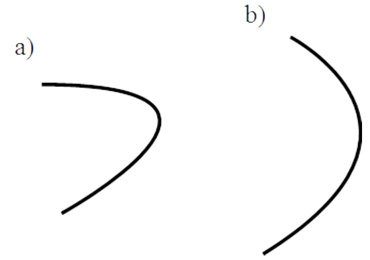
1. Placer les points M(1,1,1) ; N(-2,0,3) ; P(4,3,-1) et Q(-1,-1,1) dans le repère cartésien (O,x,y,z). Déterminer les coordonnées cylindriques de ces points.
2. Placer les points A($2,\frac{\pi}{2}$,1) et B($3,\frac{\pi}{3}$,-1) dans le repère cylindrique (O,r,θ,z). Déterminer les coordonnées cartésiennes de ces points.

2.1.3 Virages

Un mobile suit la trajectoire représentée sur la figure ci-contre avec un vecteur vitesse de norme constante.

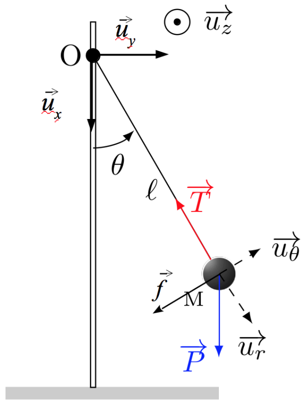


1. Le vecteur vitesse est-il constant sur toute la trajectoire ?
2. Représenter l'allure du vecteur accélération en quelques points de la trajectoire.
3. Un mobile peut suivre les deux trajectoires de la figure ci-dessous avec une vitesse de norme constante. Dans quel cas la norme de l'accélération est-elle la plus importante ?

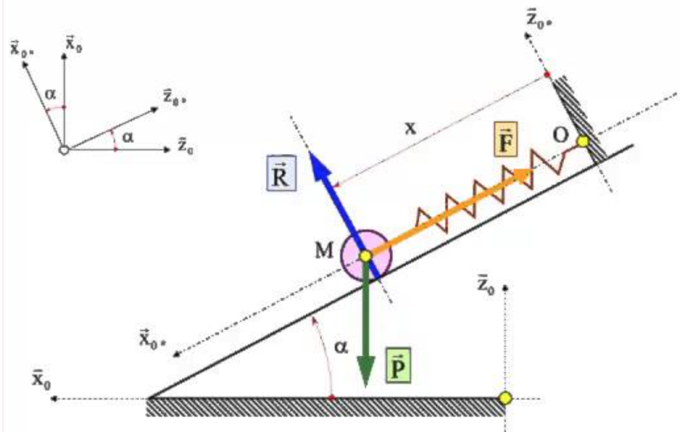


2.1.4 Projection de vecteur

1. Pour le pendule (1) : décomposer les forces $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{f}$, de normes P, T et f sur les deux bases $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ et $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.
2. Pour le système masse-ressort (2), décomposer les forces $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{R}$, de normes P, F et R sur les deux bases $(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{z}_0)$ et $(\overrightarrow{x}_{0*}, \overrightarrow{z}_{0*})$.



1) Pendule simple avec frottements



2) Système masse ressort sur plan incliné

2.1.5 Trajectoire et manège

Un enfant se déplace sur un manège en rotation. Vue d'un hélicoptère, sa position au cours du temps est donnée par les coordonnées polaires : $r(t) = v_0 t$ et $\theta(t) = \omega_0 t$, où v_0 et ω_0 sont des constantes.

1. Quelle est l'allure de la trajectoire ?
2. Évaluer la vitesse de l'enfant en coordonnées polaires.
3. Évaluer l'accélération de l'enfant en coordonnées polaires.

2.1.6 Test d'accélération d'une voiture

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération constante en ligne droite avec départ arrêté.

1. Elle met un temps de 26,6 s pour parcourir une distance $D = 180$ m. Déterminer l'accélération et la vitesse à la distance D.
2. Quelle est alors la distance d'arrêt pour une décélération de $7{,}00$ m.s^{-2} ?

2.1.7 Mouvement hélicoïdal

On considère un point matériel se déplaçant le long d'une hélice circulaire. Son mouvement est donné en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \omega t \\ z = ht \end{cases} \tag{2.1}$$

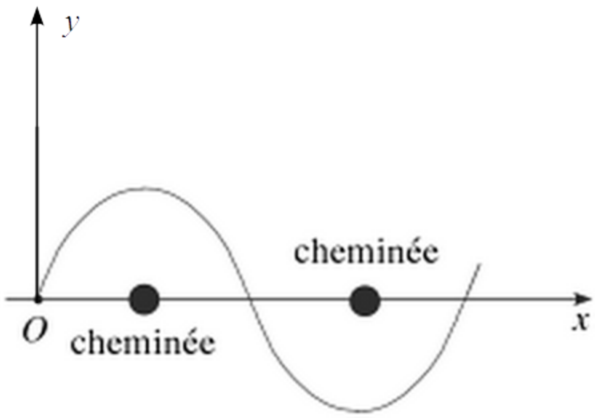
où R, ω et h sont des constantes.

1. Donner l'expression du vecteur vitesse.
2. En déduire que le module de la vitesse est constant.
3. Exprimer le vecteur accélération.

2.2 Exercices de réflexion

2.2.1 Un peu de science-fiction...

Dans un épisode de Star Wars (l'attaque des clones pour être précis), on peut assister à une course poursuite de « speeder » entre des cheminées d'usine. On suppose que le véhicule suit une trajectoire sinusoïdale de slalom entre les cheminées suivant l'axe (Ox) comme le montre la figure. Elles sont espacées d'une distance $L = 200$ m.



1. Le véhicule conserve une vitesse v_0 constante selon (Ox) et met $t_t = 8,0$ s pour revenir sur cet axe après la sixième cheminée. En déduire la vitesse v_0. Faire l'application numérique.
2. On s'intéresse maintenant à l'amplitude de la sinusoïde donc à la composante suivant l'axe (Oy).
   (a) Expliquer pourquoi l'expression de y en fonction de x s'écrit : $y = A\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$. Quelle est la longueur d'onde λ de cette sinusoïde ? (On rappelle que la longueur d'onde est définie comme la *période spatiale* de la sinusoïde.) Quel est le vecteur d'onde ? (Le vecteur d'onde k est défini par $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) Faire l'application numérique.
   (b) Exprimer y en fonction de t.
3. Déterminer l'expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes.
4. Déterminer l'expression de l'accélération en coordonnées cartésiennes.
5. Déterminer l'amplitude de la sinusoïde décrite par le speeder pour que l'accélération reste inférieure à $10g$ en valeur absolue, avec $g = 9,8$ m.s^{-2}.
6. Commenter les valeurs obtenues. Pour comparaison, l'accélération ressentie est de $3g$ au décollage d'une navette spatiale, de $5g$ au décollage d'un avion de chasse à partir d'un porte-avion, de $1,1g$ lors du décollage d'un avion de ligne.

2.2.2 Course poursuite

Quatre individus sont placés aux sommets A, B, C et D d'un carré de centre O et de demi-diagonale $a = OA$, comme présenté en figure 2.1. À partir de l'instant $t = 0$, chaque individu court vers son voisin (dans le sens trigonométrique) avec une vitesse $\overrightarrow{v}$ de norme v_0 dans le référentiel d'étude considéré. On repère la position d'un des individus, assimilé à un point matériel M, initialement en A en courant vers B, par ses coordonnées polaires $r(t), \theta(t)$. On admet, par symétrie, que les quatre individus forment à tout instant un carré.

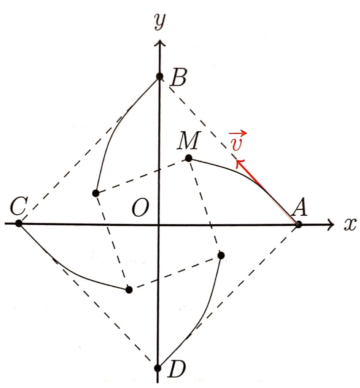


FIGURE 2.1 – Trajectoire des quatre individus

1. Exprimer, en fonction de v_0, les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'individu M dans la base $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}$.
2. En déduire le système d'équations différentielles vérifié par $r(t)$ et $\theta(t)$.

3. Intégrer le système précédent pour établir, en fonction de a et v_0, les équations horaires du mouvement $r(t)$ et $\theta(t)$.
4. À quel instant t_f les quatre individus se rejoignent-ils ?
5. Déterminer l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire de M. La représenter graphiquement.
6. Calculer la distance L parcourue par chaque individu, commenter le résultat obtenu.