Table des matières

Introduction

Les matrices échelonnées adorent les dictées : ce sont les gosses de Pivot !

L'objet de ce chapitre est l'étude des **systèmes linéaires**. Il s'agit d'un ensemble d'équations (linéaires), portants sur un certain nombre de variables communes, que nous étudions simultanément. Il s'agit d'un objet mathématique très utile dans la physique ou la chimie, car il permet de modéliser des systèmes ayant des contraintes linéaires multiples sur plusieurs paramètres (par exemple, les potentiels de différents points d'un circuit en éléctronique, l'étude de certains systèmes cinétiques en chimie, *etc* ...).

Nous utiliserons cet outils pour introduire un nouvel objet mathématique : les **matrices**. Ce sont des tableaux de nombres, qui nous serviront de représentation compacte des systèmes linéaires, et plus pratiques pour la mise en oeuvre d'algorithmes de résolution. Cependant, nous verrons par la suite qu'il s'agit d'un outil bien plus puissant et général, (systèmes d'équations différentielles, structures cristallines, champs de contraintes d'un solide, *etc.*..).

Ce chapitre porte principalement sur des définitions de bases, et des applications concrète de méthode. Cependant, nous introduirons aussi quelques outils mathématiques dont nous ferons bon usage dans les chapitres suivants. Ainsi, il est essentiel de travailler ce chapitre avec sérieux et de le maîtriser en profondeur.

Note : Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les nombres n et p, et q sont des entiers naturels non nuls.

I - Systèmes linéaires

1- Généralités

1.a) Définitions

Définition 1. Un **système linéaire** de n équations à p inconnues est un système de la forme :

$$(E) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,j} & + \cdots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + \cdots + & a_{i,j} & + \cdots & +a_{i,p}x_p & = & b_i \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + \cdots + & a_{n,j} & + \cdots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

où :

- $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sont les *inconnues* du système ;
- $(a_{1,1}, \ldots, a_{i,j}, \ldots, a_{n,p}) \in \mathbb{K}^{n \times p}$ sont les *coefficients* ;
- $(b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{K}^p$ sont les *constantes*.

On y associe le **système homogène** suivant :

$$(H) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,j} & + \cdots & +a_{1,p}x_p & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + \cdots + & a_{i,j} & + \cdots & +a_{i,p}x_p & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + \cdots + & a_{n,j} & + \cdots & +a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array} \right.$$

(C'est le même système, mais avec les constantes égales à 0).

Exemple 1. 1-

$$(E_1) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ -x & & + & & 2z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

est un système linéaire d'inconnues x, y, et z.

2-

$$(H_1) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -x & & + & & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

est le système homogène associé à (E_1).

3-

$$(E_2) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x^2 & + & 5y & + & 4z & = & 8 \\ -2x & + & 2xy & & & = & -1 \\ & & & & z & = & 4 \end{array} \right.$$

n'est pas un système linéaire $(x^2, xy \ldots)$

Définition 2.
- **Une solution** d'un système (E) est une valeur du n-uplet $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ telle que **toutes les équations du système sont satisfaites** par ces valeurs.
- On note usuellement $\mathcal{S}_E$ l'**ensemble des solutions du système** (E) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_E &= \{(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n \ / \ (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \text{ solution de } (E)\} \\ &= \{(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n \ / \ (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \vdash (E)\} \end{aligned}$$

Exemple 2. Le système (E_1) de l'exemple 1 a pour (unique) solution $(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ car :

$$\begin{array}{rcl} 3 \times 5/3 + 2 \times -1/3 - 1/3 & = & 4 \\ -5/3 + 2 \times 1/3 & = & -1 \\ -1/3 + 1/3 & = & 0 \end{array}$$

sont trois équations vraies. Donc $\mathcal{S}_{E_1} = \left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$

Exemple 3. Tout système n'a pas forcément une unique solution :

- $(E_2) : \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 4 \\ -6x - 4y + 2z = 9 \end{array} \right.$ n'as pas de solutions : $\mathcal{S}_{E_2} = \varnothing$
- $(E_3) : \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right.$ a une infinité de solutions : $\mathcal{S}_{E_3} = \left\{\left(\frac{y+2}{2}, y, 4y\right) \ / \ y \in \mathbb{K}\right\}$

1.b) Matrice d'un système linéaire

Définition 3. Pour un système linéaire (homogène ou non) (E) de coefficients $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^{n\times p}$, on définit **la matrice associée au système** (E) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

C'est un tableau de n lignes et p colonnes contenant les coefficients de (E).

Définition 4. Pour un système linéaire (E) de coefficients $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^{n\times p}$, et de constantes $(b_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ on définit **la matrice augmentée du système** (E) :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_p \end{array}\right)$$

C'est la matrice associée A que l'on a augmenté de la matrice colonne des constantes B du système (E).

Exemple 4. La matrice associée au système (E_1) de l'exemple 1 est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice augmentée du même système est :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

1.c) Opérations élémentaires

Définition 5. Soit (E) un système linéaire, de matrice associée A. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on appelle L_i la i-ème ligne de A. On définit alors les **opérations élémentaires sur les lignes** suivantes :

1- **Permutation** des lignes L_i et L_j, que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$

2- **Multiplication** de la ligne L_i par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$

3- **Ajout** à L_i de λL_j, où $\lambda \in \mathbb{K}$, que l'on note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Remarque 1. De la même manière, on peut définir les opérations élémentaires sur les lignes d'un système.

Remarque 2. On peut remplacer les opération 2 et 3 par l'opération non-élémentaire : "remplacer une ligne L_i par une combinaison linéaire de toutes les lignes, avec le i-ème coefficient non nul" :

$$L_i \leftarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k, (\lambda_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{K}^n, \lambda_i \neq 0$$

Proposition 1. Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont "réversibles" (on dit aussi "inversibles") : pour chaque opération élémentaire, on a une opération élémentaire réciproque qui permet de revenir au point d'où l'on est parti :

1- l'opération élémentaire réciproque de $L_i \leftrightarrow L_j$ est $L_i \leftrightarrow L_j$

2- l'opération élémentaire réciproque de $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$

3- l'opération élémentaire réciproque de $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$

Définition 6. Deux matrices A et A' sont dites **équivalentes par lignes** quand on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On le note

$$A \underset{L}{\sim} A'$$

Deux systèmes (E_1) et (E_2) sont dits **équivalents** quand leurs matrices augmentées associées sont équivalentes par ligne. On le note

$$(E_1) \sim (E_2)$$

Proposition 2. L'équivalence par ligne de deux matrices est une **relation d'équivlance**. C'est aussi le cas de l'équivalence de deux système.

Remarque 3. Deux matrices équivalentes par lignes ont forcément le même nombre de lignes et le même nombre de colonne.
Deux systèmes équivalents on le même nombre d'équations et les mêmes inconnues.

Exemple 5. Les deux matrices suivantes sont équivalentes par lignes :

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} A'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En effet, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ par } L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ par } L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ par } L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ par } L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ par } L_1 \leftrightarrow L_2$$

Proposition 3. Deux systèmes équivalents (E_1) et (E_2) ont le même ensemble de solutions. C'est à dire :

$$(E_1) \sim (E_2) \implies \mathcal{S}_{E_1} = S_{E_2}$$

Remarque 4. Attention, la réciproque n'est pas vraie. On peut par exemple penser à deux systèmes aux nombres d'inconnues différents, qui n'auraient tous les deux aucune solution.
Pour la démonstration, il suffit de montrer que la propriété est vraie pour chaque opération élémentaire.

Remarque 5. Ce n'est pas la seule conséquence de l'équivalence de deux matrices : nous le verrons plus tard. Cependant, elle est intéressantes pour nous car, si on arrive à transformer un système en un système équivalent "plus simple", alors on peut résoudre ce dernier, et obtenir ainsi la solution du premier. Ce sera l'objet de la partie suivante.

2- Algorithme du pivot de Gauss-Jordan

L'algorithme de Gauss-Jordan est une méthode pour mettre sous une forme "standard" un système donné. Il nous permet de crée un système équivalent plus simple. Cette forme standard, c'est ce que l'on va définir ci-après : la forme *échelonnée réduite*.

Définition 7. Soit A une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$. A est dite **échelonnée par ligne** (on dira souvent juste *échelonnée*) quand elle vérifie les deux conditions suivantes :

1- Si une ligne est nulle, alors toutes les lignes suivantes sont nulles.

2- Si une ligne est non-nulle, alors son premier coefficient non-nul est situé stricement à droite du premier coefficient non-nul de la ligne précédente.

(Le deuxième point ne s'appliquant, évidemment, qu'à partir de la deuxième ligne)

Définition 8. Si A est une matrice échelonnée, on appelle **pivot** d'une ligne le premier coefficient non-nul de cette ligne. Les lignes nulles n'ont pas de pivot.

Remarque 6. On peut transcrire en langage mathématique les définitions précédente : soit la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ de lignes $L_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}), i \in [\![1,n]\!]$. A est échelonnée si et seulement si :

1- $L_i = (0, \dots, 0) \implies \forall j \in [\![i+1, n]\!], L_j = (0, \dots, 0)$

2- $\exists L_i = (0, \dots, 0, a_{i,j}, \dots) \,/\, a_{i,j} \neq 0$ et $i \geqslant 2 \implies \exists k < j \,/\, a_{i-1,k} \neq 0$ et $L_{i-1} = (0, \dots, 0, a_{i-1,k}, \dots, a_{i-1,j}, \dots)$
(Avec éventuellement aucun 0 dans L_{i-1})

Et $(a_{i,j})$ est le pivot de la ligne L_i si et seulement si $\forall k \in [\![1, j-1]\!], a_{i,k} = 0$.

Remarque 7. Au vu des définitions, il a naturellement maximum un pivot par ligne, et maximum un pivot par colonne.

Exemple 6. La matrice suivante est échelonnée par ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & -1 & -4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & -2 & 11 & -1 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 9. Une matrice A est dite **échelonnée réduite** quand :

1- A est échelonnée ;

2- Les pivots de chaque ligne valent 1 ;

3- Les pivots sont les seuls éléments non-nuls de leur colonne.

Exemple 7. La matrice suivante est échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 6 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 11 & -1 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 1. *Toute matrice A est équivalente à une* ***unique*** *matrice échelonnée réduite.*

Démonstration 1.

Définition 10.

3- Solutions d'un système

Exercices

Exercice I-1. Identifier des systèmes linéaires

Exercice I-2. Montrer que deux systèmes donnés sont équivalents

Exercice I-3. Executer des Gauss-Jordan et dire des trucs

Exercice I-4. Résoudre des systèmes

II - Calcul matriciel

1- Ensembles de matrices

1.a) Définition

1.b) Opérations

2- Opérations élémentaires et calcul matriciel

3- Matrices carrées inversibles

3.a) Définitions et propriétés

+ prop de l'inverse d'un produit

3.b) Calcul d'un inverse

+ exemples sur les transvection etout

4- Transposition d'une matrice

$$\tilde{\mathbf{m}} = \begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ r_5 \\ r_4 \\ r_3 \\ r_2 \\ r_1 \\ \\ \end{array}$$

et

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ \\ \end{array}$$

et

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & \dots & f(X^k) & \dots & f(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 4 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2\binom{k}{k-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \ddots & 2\binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{k-1} \\ \vdots \\ X^n \end{array}$$

et

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & x \\ d & e & f & y \\ g & h & i & z \end{array}\right)$$