1.2 概率与频率

北京化工大学数学系

苏贵福

对于一个事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生．我们通常希望 知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟多大．

我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次试验中发生的可能性大小．为此首先引入描述事件发生的频繁程度的指标—频率，进而给出表征事件在一次试验中发生可能性大小的数—概率．

一. 频率

定义1 在相同的条件下，进行了n次试验，在这n次试验中，事件A发生的次数n_A称为事件A发生的频数. 比值$\frac{n_A}{n}$称为事件A发生的频率，记$f_n(A)$.

性质1 频率具有如下性质:

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f_n(U) = 1$且$f_n(\emptyset) = 0$;

(3) 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$是两两互斥的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

由于事件A发生的频率是它发生的次数与试验次数之比, 其大小表示A发生的频繁程度. 频率越大, 事件A发生就越频繁, 这就意味着 事件A在一次试验中发生的可能性就大. 反之亦然.

鉴于上述原因, 一个自然的问题就是能否用频率来表示事件 A在一次试验中发生的可能性的大小?

例1 将一枚硬币抛掷5次, 50次, 500次, 各做10遍. 得到 数据如表1-1所示. 其中n_H表示正面H发生的频数, $f_n(H)$表示正面H发生的频率.

表 1—1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

事实上上述试验在历史上已经做过多次, 相应的数据如表1-2所示.

表 1—2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

由上述数据可以看出:

- 当投掷硬币次数n较小时, 频率$f_n(H)$在0与1之间随机波动, 而且波动幅度较大.
- 但当n逐渐增大时, $f_n(H)$总在0.5附近摆动, 而且逐渐稳定于0.5.

二. 概率

定义2 设E是随机试验, U是 它的样本空间. 对于E的每一事件A赋予一个实数$P(A)$, 称为事件A的概率, 如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件:

- (非负性) 对于每一个事件A, 有$P(A) \geq 0$.
- (规范性) 对于必然事件U, 有$P(U) = 1$.
- (可列可加性) 设$A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容的事件, 即 对于$A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

在第四章将证明: 当$n \to \infty$时频率$f_n(A)$在一定意义下 接近于概率$P(A)$. 即

$$\lim_{n \to \infty} f_n(A) = P(A)$$

基于这一事实, 我们就有理由将概率$P(A)$用来表征事件 A在一次试验中发生的可能性大小.

性质2 $P(\emptyset) = 0.$

证明 令$A_1 = A_2 = \cdots = \emptyset$, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, 且$A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots$. 则由概率的可列可加性得

$$P(\emptyset) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

由概率的非负性知, $P(\emptyset) \geq 0$. 因此由上式得$P(\emptyset) = 0$. ■

性质3 (有限可加性) 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证明 令$A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$, 则有 $A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \cdots$.
从而由概率的可列可加性, 得

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\
&\quad = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1}) + P(A_{n+2}) + \cdots \\
&\quad = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

性质4 设A, B是两个事件, 若$A \subset B$, 则有$P(A) \leq P(B)$.

证明 由$A \subset B$知, $B = A \cup (B - A)$且$A \cap (B - A) = \emptyset$. 于是由概率的有限可加性, 得

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

又根据概率的非负性, $P(B - A) \geq 0$. 进而有$P(B) \geq P(A)$. ■

性质5 对于任意事件A, 有

- $P(A) \leq 1$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明 因为$A \subset U$, 所以由概率的单调性有, $P(A) \leq P(U) = 1$.

因为$A \cup \overline{A} = U$, $A\overline{A} = \emptyset$, 则由概率的有限可加性得

$$1 = P(U) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

故$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. ■

性质6 对于任意两个事件A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明 因为$A \cup B = A \cup (B - AB)$, 且$A(B - AB) = \emptyset$, $AB \subset B$. 则有

$$\begin{aligned} P(A \cup B) =& P(A) + P(B - AB) \\ =& P(A) + P(B) - P(AB). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) \\ & - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3). \end{aligned}$$

例2 设$P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{2}$. 在下列三种情况下求$(B\overline{A})$的值:

(1) A与B互斥; (2) $A\subset B$; (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 (1) 由于$AB=\emptyset$, 故$B\subset\overline{A}$, 进而 $B\overline{A}=B$. 因此$P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}$.

(2) 当$A\subset B$时, $P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

(3) 当$P(AB)=\frac{1}{8}$时, 因为$B\overline{A}=B-A=B-AB$. 又$AB\subset B$, 则

$$\begin{aligned}P(B\overline{A})=&P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)\\=&\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

三. 等可能概型(古典概型)

定义3 具有如下两个特点的试验称为等可能概型:

- 试验的样本空间只包含有限个元素.
- 试验中每个基本事件发生的可能性相同.
- 等可能概型在概率论发展初期曾是主要的研究对象, 因此也被称为古典概型.
- 古典概型的概念具有直观、容易理解的特点, 有着广泛的应用.

设试验的样本空间为$U=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 由于在古典概型中每个基本事件发生的可能性相同, 即有

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}).$$

又因为基本事件两两互不相容, 于是

$$\begin{aligned}1=P(U)=&P(\{e_1\}\cup\{e_2\}\cup\cdots\cup\{e_n\})\\=&P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\})\\=&nP(\{e_i\}).\end{aligned}$$

于是古典概型中每个基本事件发生的概率为

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

若事件A包含k个基本事件, 即$A=\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\}$. 则有

$$\begin{aligned}P(A)=&P(\{e_{i_1}\}\cup\{e_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{i_k}\})\\=&P(\{e_{i_1}\})+P(\{e_{i_2}\})+\cdots+P(\{e_{i_k}\})\\=&\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{U\text{中基本事件的总数}}.\end{aligned}$$

- 上述公式就是等可能概型中事件A的概率的计算公式.

例3 将一枚硬币投掷三次. (1) 设事件A_1为 "恰有一次出现正面", 求$P(A_1)$; (2) 设事件A_2为" 至少有一次出现正面", 求$P(A_2)$.

解 (1) 易知样本空间为

$$U = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

而$A_1 = \{HTT, THT, TTH\}$. U中包含有限个元素, 且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同. 故

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|U|} = \frac{3}{8}.$$

(2) 由于$\overline{A}_2 = \{TTT\}$, 于是

$$P(A_2) = 1 - P(\overline{A}_2) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

例4 有一只口袋装有6个苹果，其中4个黄苹果，2个红苹果。现从口袋中取苹果两次，每次随机地 取一个苹果。第一次取一个苹果，观察其颜色后放回，搅匀后再取一苹果。试求 (1) 取到两个苹果都是黄色的概率；(2) 取到的两个苹果颜色相同的概率；(3) 取到 的两个苹果中至少有一个黄色苹果的概率。

解 设$A =$"取到的两个苹果都是黄色"，$B =$"取到的两个苹果都是红色的"；$C =$"取到的两个苹果中至少有一个是黄色"。

易知"取到两个颜色相同的苹果"这一事件即为$A \cup B$，而$C = \overline{B}$。

在袋中依次取两个苹果，每一种取法为一个基本事件。显然此时样本空间中仅包含有限个元素。且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同，因此 可利用古典概型求相应概率。

第一次从袋中取苹果有6种方法, 取第二次也有6个苹果可供抽取. 由组合学乘法原理知, 样本空间中元素总数为6×6. 不难发现事件A中共有4×4个元素. 于是

$$P(A) = \frac{4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{4}{9}.$$

同理可知B中包含了2×2个元素, 故

$$P(B) = \frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{9}.$$

由于$AB = \emptyset$, 则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{9}$$

$$P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{8}{9}.$$

四. 几何概率

定义3 具有如下两个特点的随机试验所对应的数学模型 称为几何概型:

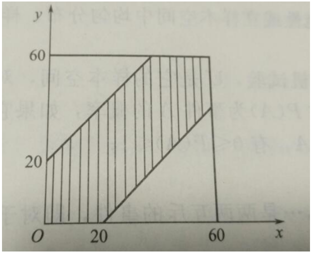
- 随机试验的样本空间中的基本事件有无穷多个.
- 每一个基本事件在样本空间中是"均匀分布"的.
- 几何概型是通过几何的手段刻画样本空间与其子集的度量.
- 空集的几何度量为零.
- "基本事件在样本空间中是均匀分布的"是指 "由样本点构成的子集所对应的随机事件发生的可能性大小与子集的几何度量结果成正比, 而与该子集的几何形状及其在样本空间中的位置无关".

定义4 在几何概型中, 以$L(U)$和 $L(A)$分别表示样本空间和随机事件A所对应的子集的几何度量, 则称

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(U)}$$

为事件A的几何概率.

例5 两人相约7点到8点在国家大剧院会面, 先到者等候另一人20分钟, 过时就可离去. 试求这两人能会面的概率.



解 以x, y分别表示两人到达的时刻, 则会面 成功的充要条件是$|x-y| \leq 20$. 故可能结果的全体是边长 为60的正方形里的点, 能会面的点的区域用阴影部分标出. 故所求概率为 $P = \frac{60^2-40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$. ■

例6 在线段AD上任取两点B, C, 在B, C处 折断而得到三个线段. 求"这三个线段能构成三角形"的概率.

解 设A表示事件"三个线段能构成三角形", 并设三个线段的长度分别为x, y, z, 线段AD的长度为a. 则有

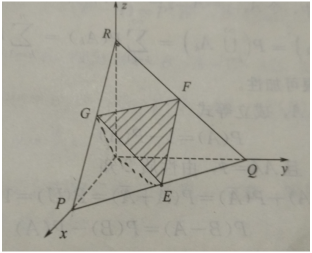
$$x + y + z = a$$

$$x > 0, y > 0, z > 0, a > 0.$$

把x, y, z看成空间点的坐标, 则所有基本事件可用平面$x + y + z = a$ 在第一卦限内的部分ΔPQR上的点表示. 要使三条线段构成三角形, 需满足下述条件

$$0 < x < y + z, \quad 0 < y < x + z, \quad 0 < z < x + y.$$

满足上述三个不等式的点的集合恰好是平面$x+y+z=a$上ΔPQR的三边 中点连线所构成的三角形ΔEFG上的所有的点组成, 如下图所示:



故所求概率为

$$P(A)=\frac{\Delta EFG\text{的面积}}{\Delta PQR\text{的面积}}=\frac{1}{4}.$$