高等数学

下学期总复习

——提要——

2019.6

< 总复习提要 >

- **基本知识理论——**
  - 多元函数连续+可导+微分概念
  - 多元微积分学基本定理
    Green公式+Gauss公式+Stokes公式
  - 级数敛散性理论
  - 向量代数与空间解析几何

- **基本方法——**
  - 研究多元函数连续+可导+可微+极值最值
  - 用多元积分求整体量的微元分析法
  - 多元微积分研究场的方法
  - 用级数研究函数的方法
  - 用向量观点分析现实问题

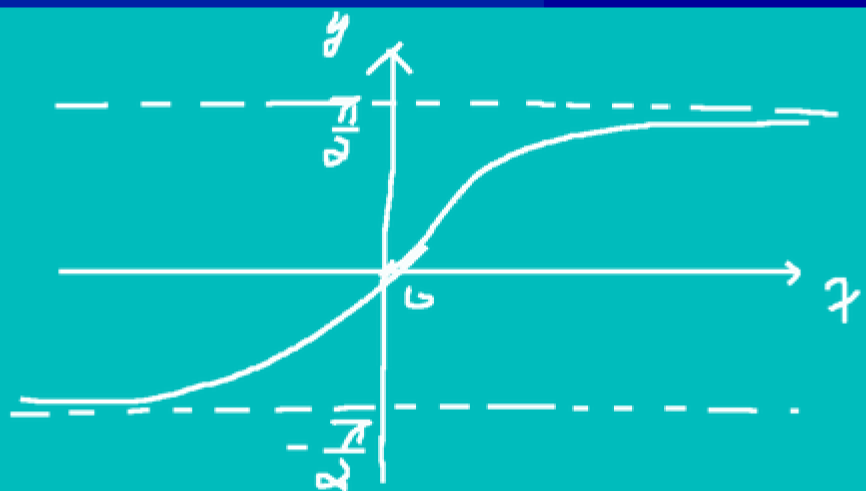
- 基本技能——
  - 多元微分的计算
  - 各类多元积分的计算(会用三大定理)
  - 用多元微积分解决一些空间几何问题
  - 会判定常见级数的敛散性
  - 求级数的和+会将函数作幂级数展开

2016－2017－2高数期末试卷第二场

一. 填空题(3分×6=18分)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}=$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\arctan\frac{1}{x^2+y^2}=0$$ (有界与无穷小乘积)



定义域：
$(-\infty, +\infty)$

值域：
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

➢梯度与方向导数的关系

$$f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta \xrightarrow{\vec{\mathbf{e}}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)} \operatorname{grad} f(x_0,y_0)\cdot\vec{\mathbf{e}}_l$$

$$\theta=(\widehat{\operatorname{grad} f(x_0,y_0),\vec{\mathbf{e}}_l})$$

$$|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)|\cos\theta$$

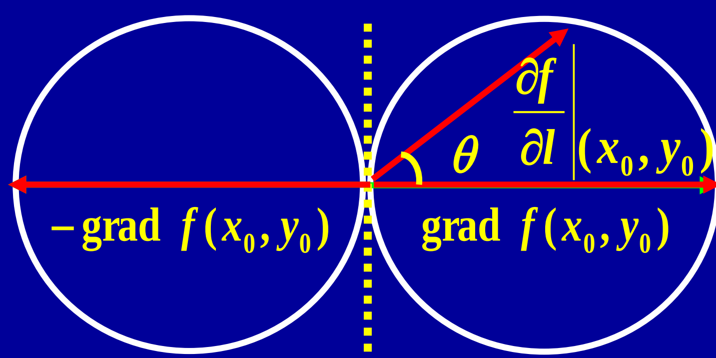
梯度的投影

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}\begin{cases}\text{最大值 } |\operatorname{grad} f(x_0,y_0)| \longleftarrow \theta=0\\ \text{最小值} -|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)| \longleftarrow \theta=\pi\\ 0 \longleftarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

●注释

梯度是一个向量

$\begin{cases}\text{方向: 方向导数最大值的方向}\\ \text{大小: 方向导数的最大值}\end{cases}$



3. 函数$z=x^2+\frac{1}{2}y^2$在点$(1,2)$处方向导数的最大值为?

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.2x\right|_{(1,2)}=2 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.y\right|_{(1,2)}=2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{最大}=\left|grad\, f(1,2)\right|$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{最大}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

设区域G是一个单连通域，若函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，则曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在G内与路径无关（或沿G内任意闭曲线的曲线积分为零）的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在G内恒成立.

4.若积分$\int_L (6xy^2-y^3)dx+(6x^2y-axy^2)dy$在整个$xoy$面内与路径无关，则$a=?$

积分与路径无关 $\Longrightarrow$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

即 $12xy-ay^2=12xy-3y^2 \Longrightarrow a=3$

2015－2016－2同类型考题

计算变力$\vec{F}=(xe^{2y}+x)\vec{i}+(x^2e^{2y}-y)\vec{j}$沿有向曲线$L: y=\sqrt{4x-y^2}$从原点移动到$A(2,2)$点处所作的功.

解：$W=\int_L \vec{F}d\vec{r}=\int_L (xe^{2y}+x)dx+(x^2e^{2y}-y)dy$

因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xe^{2y}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，故积分与路径无关

故 $I=\int_L (xe^{2y}+x)dx+(x^2e^{2y}-y)dy$

$$=\int_0^2 2xdx+\int_0^2 (4e^{2y}-y)dy$$

$$=x^2\Big|_0^2+(2e^{2y}-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^2=2e^4$$

➢ 收敛定理

设 $f(x)$是周期为2π的周期函数,如果它满足:

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点

则 $f(x)$的傅里叶级数收敛, 并且

当x为$f(x)$的连续点时, 级数收敛于$f(x)$;

当x为$f(x)$的间断点时, 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

5.周期为2π的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的表达式$f(x)=e^x$,则$f(x)$的傅里叶级数在$x=\pi$处收敛于?

$$S(x)=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$$

二. 计算题(6分×7=42分)

1.设函数$z=z(x,y)$由方程$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$确定,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

隐函数存在性定理 (P87)

解:令$F=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$

$$\begin{cases} F_x=2\cos(x+2y-3z)-1 \\ F_y=4\cos(x+2y-3z)-2 \\ F_z=-6\cos(x+2y-3z)+3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1+4\cos(x+2y-3z)-2}{-6\cos(x+2y-3z)+3}=1$$

2015－2016－2同类型考题

设$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2=f(2z)$确定，且$f(x)$二阶可导，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$F=x^2+y^2+z^2-f(2z)$

则 $F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z-2f'(2z)$

因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{f'(2z)-z},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{f'(2z)-z}$

故 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{0-x[f''(2z)\cdot 2\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}]}{[f'(2z)-z]^2}=\frac{xy[1-2f''(2z)]}{[f'(2z)-z]^3}$$

2.计算积分 $I=\int_0^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \frac{1}{1+y^4}dy.$

解: $I=\int_0^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \frac{1}{1+y^4}dy=\int_0^1 dy\int_0^{y^3} \frac{1}{1+y^4}dx$

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+y^4}y^3dy$$

$$=\frac{1}{4}\ln(1+y^4)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 2$$

$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\sqrt[3]{x}\le y\le 1\}$

$=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,0\le x\le y^3\}$

$2015-2016-2$同类型考题

设D是由$x^2+(y-1)^2\le 1, y\ge|x|$所确定的平面区域,则二重积分$\iint\limits_D f(x^2+y^2)dxdy$在极坐标系下的二次积分为?

解：$x^2+(y-1)^2=1$在极坐标下的方程为$\rho=2\sin\theta$

$$I=\iint\limits_D f(x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho f(\rho^2)d\rho$$

3. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$的收敛域及和函数.

解: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, 故收敛区间为$(-2,0)$

又$x+1=1$时级数发散, $x+1=-1$时级数发散

故收敛域为$(-2,0)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n=(x+1)\sum_{n=1}^{\infty}[(x+1)^n]'$$

$$=(x+1)\left[\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^n\right]'=(x+1)\left[\frac{x+1}{1-(x+1)}\right]'$$

$$=\frac{x+1}{x^2}\quad(-2<x<0)$$

4. 求曲面$z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$在点$(1,9,4)$处的切平面方程.

解：令$F=z-\sqrt{x}-\sqrt{y}$
$$\begin{cases} F_x=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ F_y=-\dfrac{1}{2\sqrt{y}} \\ F_z=1 \end{cases}$$

因此$(1,9,4)$处的法向量为$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6},1\right)$

则切平面方程为：

$$-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{6}(y-9)+(z-4)=0$$

2015－2016－2同类型考题

求曲线$\begin{cases} x+y+z+z^2=0 \\ x+y^2+z+z^3=2 \end{cases}$在点$(-4,2,1)$处的切线方程与法平面方程.

解：$\vec{n}_1\big|_{(-4,2,1)}=(1,1,1+2z)\big|_{(-4,2,1)}=(1,1,3),$

$\vec{n}_2\big|_{(-4,2,1)}=(1,2y,1+3z^2)\big|_{(-4,2,1)}=(1,4,4),$

则在$(-4,2,1)$处的切向量为 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=(-8,-1,3)$

故切线方程为 $\dfrac{x+4}{-8}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$

法平面方程为 $-8(x+4)-(y-2)+3(z-1)=0$

即 $8x+y-3z+33=0$

5.计算曲线积分$\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$,其中$L$为沿曲线$y=\sqrt{2x-x^2}$从点$O(0,0)$到点$A(2,0)$,再沿曲线$y=\sqrt{4-x^2}$到点$B(0,2)$的曲线弧.

解:补充曲线$L_1: x=0, y:2\to 0$, L与L_1围成区域记为D.

则由格林公式

$$\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy=\int_{L+L_1}-\int_{L_1}$$

$$=\iint_D d\sigma-\int_2^0 -2ydy$$

$$=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2+y^2\Big|_2^0=\frac{\pi}{2}-4$$

7.将函数$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$展开为x的幂级数.

解: $$f'(x)=e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

$$f(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)}$$

将函数$f(x)=x\left(0\le x\le\pi\right)$展成为正弦级数,并求该级数在$[0,\pi]$上的和函数.

解:将函数奇延拓,则$a_n=0,\quad n=0,1,2\cdots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx]_0^{\pi}=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

$n=1,2,\cdots$

则 $$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx\quad(0\le x<\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx=\begin{cases}x & 0\le x<\pi\\ 0 & x=\pi\end{cases}$$

三. 解答题(7分×5=35分)

1. 求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x+1$的极值.

解: 令$f_x=3x^2+6x-9=0,\quad f_y=-3y^2+6y=0$

得驻点$(1,0),\quad (1,2),\quad (-3,0),\quad (-3,2)$

又因为 $f_{xx}=6x+6,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=-6y+6$

在$(1,0)$点$A=12>0, AC-B^2=12\times 6>0$,有极小值$-4$

在$(1,2)$点$A=12>0, AC-B^2=12\times(-6)<0$,无极值

在$(-3,0)$点$A=-12<0, AC-B^2=-12\times 6<0$,无极值

在$(-3,2)$点$A=-12<0, AC-B^2=-12\times(-6)>0$,

有极大值32

2. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}[(x-1)^2+y^2+z^2]dxdydz$, 其中
$\Omega=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

解： $$\iiint\limits_{\Omega}[(x-1)^2+y^2+z^2]dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi(r^2+1)dr$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi(\frac{1}{5}r^5+\frac{1}{3}r^3)\Big|_0^1 d\varphi$$

$$=-\frac{16\pi}{15}\cos\varphi\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{32}{15}\pi$$

3\. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$的敛散性，其中$\alpha>0$.

解：注意到 $\left|(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right|\le\frac{1}{n^{\alpha}}$

(1) 当$\alpha>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$收敛，故原级数绝对收敛

(2) 当$0<\alpha\le 1$时，$\sin\frac{1}{n^{\alpha}}>\sin\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$，且 $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}=0$

由莱布尼兹判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$收敛.

而级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right|$发散. 因此原级数条件收敛.

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n n}$的收敛域, 并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n n}$的和.

解: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)}{3^n n}=3$

易知 $x=3$时级数收敛, $x=-3$时级数发散

故收敛域为$(-3,3]$.

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}x^n$

则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}x^{n-1}=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{3}}=-\frac{1}{3+x}$

故 $S(x)=\int_0^x\frac{-1}{3+x}dx+S(0)=-\ln(3+x)+\ln 3$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}=S(1)=-\ln 4+\ln 3=\ln\frac{3}{4}$

➢定理(高斯公式)

设空间闭区域Ω是由分片光滑的闭曲面Σ围成,若函数$P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$与$R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数,则

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

或者

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

这里Σ是Ω的整个边界曲面的外侧,而$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$是Σ在点(x,y,z)处的法向量的方向余弦.

4. 计算积分$\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$,

其中Σ为曲面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的下侧, $a>0$.

解: 添加$\Sigma_1: z=0$取上侧, $D_{xy}: x^2+y^2\le a^2$

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=-\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)dV=-\frac{2}{5}\pi a^3 \cdots\cdots\cdots \Theta$$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_1} \frac{xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{D}\frac{2xy}{x^2+y^2}dxdy=0 \qquad \text{原式}=I_1-I_2=-\frac{2}{5}\pi a^3$$

$$\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)dV=\frac{2}{5}\pi a^3$$

解：利用球坐标变换公式

$$I=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)dV$$

$$=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{a}a^4\, dr$$

$$=\frac{2}{5}\pi a^3$$

2015－2016－2同类型考题

设Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}(0\le z\le 1)$,取下侧. 计算第二类曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3zdxdy.$

解: 添加$\Sigma_1: z=1$取上侧, $D_{xy}: x^2+y^2\le 1.$

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(6x^2+6y^2+3)dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1(6\rho^2+3)dz=\frac{8}{5}\pi$$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3zdxdy=\iint\limits_{D_{xy}}3dxdy=3\pi$$

$$原式=I_1-I_2=\frac{8}{5}\pi-3\pi=-\frac{7}{5}\pi$$

5. 某建筑物的构件由半径为2的半球面截去顶部(截面圆半径为1)后与半径为1的半球面拼接而成,求构件的面积.

解:设半径为2的球面方程为$x^2+y^2+z^2=4$

所求面积为$A=2\pi+\iint\limits_D\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy$

$$=2\pi+\iint\limits_D\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy=2\pi+\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{2rdr}{\sqrt{4-r^2}}$$

$$=2\pi-2\pi 2\sqrt{4-r^2}\,\Big|_1^2=2\pi+4\sqrt{3}\pi$$

曲面面积公式:$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

很享受和你们一起携手共进的一年！

未来的生活有很多可能性，也有很多值得你们拼搏的机会！

祝愿每一个纯正且聪慧的你！

把握自己，实现梦想，做一个让自己和家人都幸福的你！

SEE YOU ALL !