



☞ Contrôle 1 : Systèmes Linéaires et Calcul Matriciel ☞

Sujet A

L'usage de tout dictionnaire, téléphone portable, ordinateur est strictement interdit. Un soin tout particulier devra être porté à la qualité et à la précision de la rédaction des arguments.

★★☆

Exercice 1 (Inverse d'une matrice).

Déterminer si la matrice A suivante est inversible. Si oui, calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & -4 \\ -9 & -6 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

★★☆

Exercice 2 (Un système d'équations).

Résoudre, selon les valeurs des réels a, b , et c , le système suivant :

$$(E) = \begin{cases} -bcy & = c \\ ax - ay + az & = 2 \\ 2x + (b-2)y + 3z & = 1 \end{cases}$$

★★★

Exercice 3 (Matrices nilpotentes).

Définition 1. On dit qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* sitôt que :

$$\exists p \in \mathbb{N} / B^p = \mathbf{0}_n$$

- 1- Montrer que si B est une matrice nilpotente, alors B n'est pas inversible.
- 2- Montrer que si B est une matrice nilpotente, alors $A = I_n - B$ est inversible.
- 3- Dans le cas précédent, exprimer A^{-1} en fonction de A , puis de B .
- 4- Montrer que si B est une matrice nilpotente, alors $C = I_n + B$ est inversible.

PROBLÈME

Matrices équivalentes

Définition 2. On dit que deux matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont *équivalentes* sitôt que :

$$\exists (P, Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) / A = PBQ^{-1}$$

On note cette situation $A \sim B$.

- 1-
 - a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A \sim A$
 - b) Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$
 - c) Montrer que $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3, A \sim B \text{ et } B \sim C \implies A \sim C$
- 2- Prenons A et B deux matrices équivalentes par ligne à la même matrice échelonnée réduite E . Montrer qu'alors, $A \sim B$.
- 3- Prenons A et B deux matrices inversibles. Montrer qu'alors, $A \sim B$.
- 4- Montrer que si $A \sim B$, alors A et B ont même rang.
- 5- (*Difficile*) Montrer que si A et B ont le même rang, alors $A \sim B$.

❧ _____ FIN _____ ❧