2.b) Lois usuelles

Définition 28. *Loi uniforme.*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et $X : \Omega \to \{x_1, \ldots, x_p\}$ une variable aléatoire sur Ω. On dit que X **suit une loi uniforme** sitôt que :

$$\forall i \in [\![1;p]\!],\ \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{p}$$

C'est-à-dire qu'on a équiprobabilité de tous les événements $(X = x_i)$. On note cette situation :

$$X \sim \mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n)$$

Définition 29. *Loi uniforme.*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et $X : \Omega \to \{0; 1\}$ une variable aléatoire sur Ω. On dit que X **suit une loi de Bernoulli** *de paramètre* p sitôt que :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

On note cette situation :

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Remarque 22. Une variable aléatoire à valeur dans $\{0; 1\}$ suit **toujours** une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$.
En particulier, si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, on a la fonction indicatrice de A : $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.
Enfin, si une expérience n'a que deux issues (par exemple, S en cas de succès, E en cas d'échec), alors la variable aléatoire qui à S associe 1 et à E associe 0 suit une loi de Bernoulli.

Définition 30. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X **suit une loi binomiale** *de paramètre* $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sitôt que :

$$X : \Omega \to [\![0; n]\!] \text{ et } \forall f \in [\![0; n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note cette situation :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Remarque 23. On vera plus tard dans ce chapitre qu'en ajoutant n fois des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, on obtient une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p.

2.c) Couples de variables aléatoires

Définition 31. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. L'application :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \mathbb{P}_{X,Y} : & \mathcal{P}(X(\Omega) \times Y(\Omega)) & \to & [0; 1] \\ & (\{x\}, \{y\}) & \mapsto & \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \end{array} \right. \text{étendue par additivité finie,}$$

définit une probabilité sur Ω, que l'on appelle **loi conjointe** de X et Y, ou encore **loi du couple** (X, Y).

Remarque 24. Dans le cas d'une seule variable aléatoire, un simple tableau suffisait à caractériser la loi. Dans le cas d'un couple, il nous faut un tableau *à double-entrée* qui va contenir les valeurs de $\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ pour chaque paire de valeur $(x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Prenons par exemple une variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_1, x_2, x_3\}$ et Y à valeurs dans $\{y_1, y_2\}$. On aura alors un tableau de la forme :

y \ x	x_1	x_2	x_3
y_1	$\mathbb{P}((X = x_1) \cap (Y = y_1))$	$\mathbb{P}((X = x_2) \cap (Y = y_1))$	$\mathbb{P}((X = x_3) \cap (Y = y_1))$
y_2	$\mathbb{P}((X = x_1) \cap (Y = y_2))$	$\mathbb{P}((X = x_2) \cap (Y = y_2))$	$\mathbb{P}((X = x_3) \cap (Y = y_2))$

Définition 32. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, on appelle **lois marginales** du couples (X, Y) les lois des variables aléatoires X et Y. On peut les ajouter dans les «marges » du tableau à double-entrée précédent.

Exemple 19. On reprend l'exemple précédent, en choisissant des valeurs pour les probabilité dans le tableau. On ajoute ensuite une ligne, et une colonne, dans lesquelles on mettra (respectivement) les lois marginales de X et de Y :

$y \backslash x$	x_1	x_2	x_3	$\mathbb{P}(Y = y_i)$
y_1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	...
y_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	...
$\mathbb{P}(X = x_i)$	...	...	...	...

Pour obtenir les valeurs des marges, il suffit d'ajouter les valeurs de la ligne ou la colonne correspondante.

Remarque 25. Généralement, connaître les lois marginales n'est pas suffisant pour déterminer la loi jointe. Dans l'exemple précédent, si l'on connaît uniquement les valeurs dans les marges du tableau, on ne peut pas retrouver de manière unique les valeurs de $\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

Définition 33. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Alors pour $y \in Y(\Omega)$, on appelle **probabilité conditionnelle** de $(Y = y)$ **sachant que** $(X = x)$ la probabilité :

$$\mathbb{P}((Y = y)|(X = x)) = \frac{\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))}{\mathbb{P}(X = x)}$$

De plus, on appelle **loi conditionnelle** de Y sachant $X = x$ la loi de la variable aléatoire "Y sachant $X = x$“, que l'on note :

$$Y_{X=x} \text{ qui vérifie } \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{Y_{X=x}}(\{y\}) = \mathbb{P}((Y = y)|(X = x))$$

2.d) Indépendance de variables aléatoires

Définition 34. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Less variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** sitôt que :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

Remarque 26. Avec la définition précédente, on remarque que *dans le cas de variables aléatoires indépendantes* (et uniquement dans ce cas !), la connaissance des deux lois marginales suffit à déterminer la loi jointe de (X, Y).

Proposition 21. Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^2,\ \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$$

Proposition 22. Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et si on prend deux fonctions : $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont également des variables aléatoires réelles indépendantes.

Définition 35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** sitôt que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Proposition 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors :

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^n,\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Proposition 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0; 1]$.
La variable aléatoire $Y = X_1 + \cdots + X_n$ suit alors une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration 17.

2.e) Espérance, Variance, Écart-type

Définition 36. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, et notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On appelle **espérance** de X la *valeur moyenne* des valeurs prises par X *pondérées par* leur probabilité :

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemple 20. Si l'on reprend l'exemple *15-16* de la roulette, on peut calculer l'espérance de notre gain (le gain moyen sur un grand nombre de parties) quand on parie 10€ sur le numéro 8 :

Remarque 27. On peut aussi faire le calcul de l'espérance en sommant sur Ω, mais ce sera rarement le cas :

$$E[X] = \sum_{w \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega)$$

Remarque 28. Lorsqu'une variable aléatoire a une *espérance nulle* ($E[X] = 0$), on parle de variable aléatoire **centrée**.

Proposition 25. *Espérance des lois usuelles*
Soit X une variable aléatoire d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors :

- Si X est constante, $X = \lambda$, alors $E[X] = \lambda$.
- Si $X \sim \mathcal{U}([\![1; n]\!])$, alors $E[X] = \dfrac{n+1}{2}$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $E[X] = p$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $E[X] = np$.
- Si $X = \mathbb{1}_A$ avec $A \subset \Omega$, alors $E[X] = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration 18.

Proposition 26. *propriétés de l'espérance*
L'espérance d'une variable aléatoire suit les propriétés suivantes ;
Pour X, Y variable aléatoire, et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1- **Linéarité :** $E[\lambda X + Y] = \lambda E[X] + E[Y]$

2- **Positivité :** $X \geqslant 0 \implies E[X] \geqslant 0$

3- **Croissance :** $X \leqslant Y \implies E[X] \leqslant E[Y]$

Proposition 27. *Somme finie*
Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors :

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

Théorème 15. *Théorème du transfert*
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction, alors l'espérance de $f(X)$ est donnée par :

$$E[f(X)] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$$

Théorème 16. *Espérance d'un produit*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$. Alors :

$$E[XY] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_i \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_i))$$

*De plus, **si** X et Y sont **indépendantes**, alors :*

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Remarque 29. Attention, la dernière égalité n'est pas vraie en général. Prenez par exemple deux variables aléatoires X et Y avec $X = Y$ et $X \sim \mathcal{B}(0, 2)$.

Définition 37. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on définit la **variance** de X, notée $V[X]$ comme :

$$V[X] = E[(X - E[X])^2]$$

C'est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
On définit l'**écart-type** de X, noté $\sigma(X)$ comme :

$$\sigma(X) = \sqrt{V[X]}$$

Proposition 28. Si X est une variable aléatoire, alors $V[X] \geqslant 0$ et $\sigma(X) \geqslant 0$.

Remarque 30. La variance et l'écart-type sont des mesures de dispersion, elles caractérisent l'écart de la variable aléatoire à sa valeur moyenne, en tenant compte des probabilités de chaque valeur.

Proposition 29. *Relation de Huygens*
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

Proposition 30. *Variance et fonction affine*
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$V[aX + b] = a^2 V[X] \quad \text{et} \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

Théorème 17. *Inégalité de Markov*
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant \frac{E[|X|]}{t}$$

Théorème 18. *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(|X - E[X]| \geqslant t) \leqslant \frac{V[|X|]}{t^2}$$

Proposition 31. *Variance des lois usuelles*
Soit X une variable aléatoire d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors :

- Si X est constante, $X = \lambda$, alors $V[X] = 0$.
- Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$, alors $V[X] = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $V[X] = p(p - 1)$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $V[X] = np(p - 1)$.

2.f) Exercices

Exercice II-15. On lance deux dés à 6 faces équilibrés. On note X la variable aléatoire "somme des deux dés", et Y la variable aléatoire "produit des deux dés", Z la variable aléatoire "maximum des deux dés" et W la variable aléatoire "minimum des deux dés".

1- Calculer $E[X]$ et $V[X]$
2- Calculer $E[Y]$ et $V[Y]$
3- Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
4- Calculer $E[XY]$.
5- Déterminer les lois de W et Z.
6- Calculer $E[W]$ et $E[Z]$.
7- Calculer $V[W]$ et $V[Z]$.

Exercice II-16. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, et dont la loi est donnée par : $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket,\ \mathbb{P}(X = k) = ak$.

1- Déterminer a.
2- Calculer $E[X]$ et $V[X]$.
3- On lance 10 dés, indiscernables, non truqués. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux 6 sachant qu'on en fait au moins un.

Exercice II-17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note X la variable aléatoire à valeur dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ de loi :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket,\ \mathbb{P}(X = k) = \lambda \frac{\binom{n}{k}}{k + 1}$$

1- Déterminer λ.
2- Calculer $E[X + 1]$, et en déduire $E[X]$.
3- Calculer $E[X(X + 1)]$, et en déduire $V[X]$.