III - Applications linéaires

1- Définition

Définition 26. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. On dit que $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est une **application linéaire** de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ sitôt que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

On le note : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$

Remarque 26.
- En français, on parle aussi d'*homomorphisme d'espaces vectoriels*.
- On a notamment $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Définition 27. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.
- Si f est *bijective*, on dit que c'est un **isomorphisme**.
- Si $\mathbb{E} = \mathbb{F}$, on dit que c'est un **endomorphisme** (et on note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$).
- Si $\mathbb{F} = \mathbb{K}$, on dit que c'est une **forme linéaire**.
- Si f est un endomorphisme **et** un isomorphisme, on dit que c'est un **automorphisme**, on le note $f \in \mathcal{GL}(\mathbb{E})$.

Proposition 18. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. On a toujours :

$$f(0_{\mathbb{E}}) = 0_{\mathbb{F}}$$

Exemple 25.

- $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & (x + y, 2x - y, 3y) \end{array}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
- $\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
- $\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & {}^{t}M \end{array}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$
- l'application “trace” d'une matrice est une forme linéaire.

2- Noyau, image d'une application linéaire

Définition 28. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.
- On appelle **noyau** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble des vecteurs pour lesquels f s'annule :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{E} \ / \ f(x) = 0_{\mathbb{F}}\} = f^{-1}(\{0_{\mathbb{F}}\})$$

- On appelle **image** de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble des vecteurs atteints par f :

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{F} \ / \ \exists x \in \mathbb{E} \ / \ f(x) = y\} = f(\mathbb{E})$$

Proposition 19. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.
- Soit A un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.
- Soit B un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$, alors $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Démonstration 18.

Corollaire 3. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

Théorème 9. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, alors*

1- f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{E}}\}$

2- f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{F}$

Démonstration 19.

3- Opération sur les applications linéaires

3.a) Structure d'espace vectoriel

Définition 29. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ les opérations suivantes :

- La *loi de composition interne* d'**addition** :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})^2, \quad \begin{array}{rccl} f+g : & \mathbb{E} & \to & \mathbb{F} \\ & x & \mapsto & f(x) +_{\mathbb{F}} g(x) \end{array}$$

- La *loi externe* de **produit par un scalaire** :

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{array}{rccl} \lambda f : & \mathbb{E} & \to & \mathbb{F} \\ & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

Proposition 20. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors :

1- $(\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2- Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont de dimension finie, alors $\dim \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}) = \dim \mathbb{E} \times \dim \mathbb{F}$

Démonstration 20.

3.b) Composition d'application linéaires

Proposition 21. Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$.

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \to & \mathbb{G} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \text{ est une application linéaire : } g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{G})$$

Démonstration 21.

Théorème 10. $(\mathcal{L}(\mathbb{E}), +, \circ, \cdot)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre non-commutative, contenant éventuellement des diviseurs de zéro.*

Remarque 27. Sur la structure de $\mathbb{K}$-algèbre :

- Attention, ce n'est vrai que pour les endomorphismes (sinon, la composition n'est pas bien définie).
- Si $\dim \mathbb{E} = n$, alors $(\mathcal{L}(\mathbb{E}), +, \circ, \cdot)$ a exactement la même structure que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ *(Il existe un isomorphisme entre les deux).*
- Le théorème suivant encourage encore plus cette similarité.

Théorème 11. *Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Muni de la composition $(\mathcal{GL}(\mathbb{E}), \circ)$ est un groupe. On dit que $\mathcal{GL}(\mathbb{E})$ est le* ***groupe linéaire de*** $\mathbb{E}$

Remarque 28. *cf devoir maison n°3 :*

- Les symétries, les homotéthies, et l'identité, font partie du groupe linéaire de $\mathbb{E}$. Ce sont des automorphismes de $\mathbb{E}$.
- Les projecteurs (à l'exception de l'identité) n'en font pas partie : ce sont des endomorphismes non-inversibles.

3.c) Isomorphismes

Proposition 22. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors :

$$f \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow \text{L'image d'une base de } \mathbb{E} \text{ par } f \text{ est une base de } \mathbb{F}.$$

Démonstration 22.

Définition 30. Deux espace vectoriels $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont dit **isomorphes** sitôt qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ qui soit un isomorphisme.

Exemple 26.
- $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes.
- $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sont isomorphes.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ sont isomorphes.
- $\mathbb{R}[X]$ et $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \exists p \in \mathbb{N} \ / \ \forall q \geqslant p, u_q = 0\}$ sont isomorphes.

Théorème 12. *Caractérisation des espaces vectoriels isomorphes :*
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

$$\mathbb{E} \textit{ et } \mathbb{F} \textit{ sont isomorphes} \Leftrightarrow \dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}.$$

Démonstration 23.

Exemple 27. *Suites linéaire récurrentes.*
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, soit l'ensemble :

$$\mathcal{S}_{a,b} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 0 \implies u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, isomorphe à $\mathbb{C}^2$, et donc de dimension 2. En effet :

Il suffit donc, pour en trouver un base, de trouver une famille libre à deux éléments.