北京化工大学

Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第三章 信号的频域表达-傅里叶变换

主讲教师：袁洪芳

主要内容 CONTENTS

18

周期信号的傅里叶变换

-- 正弦信号的傅里叶变换

-- 一般周期信号的傅里叶变换

--如何由F(ω)求F(nω1)

--单位冲激序列的傅里叶变换

--周期矩形脉冲序列的傅里叶变换

由欧拉公式可得

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)\qquad \sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

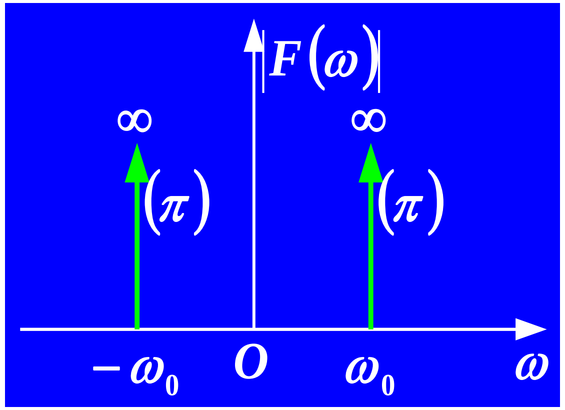
$$1\cdot e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow \boldsymbol{2\pi\delta(\omega-\omega_0)}\qquad 1\cdot e^{-j\omega_0 t}\leftrightarrow \boldsymbol{2\pi\delta(\omega+\omega_0)}$$

$$\therefore \cos\omega_0 t\leftrightarrow\frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)]=\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\sin\omega_0 t\leftrightarrow -j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

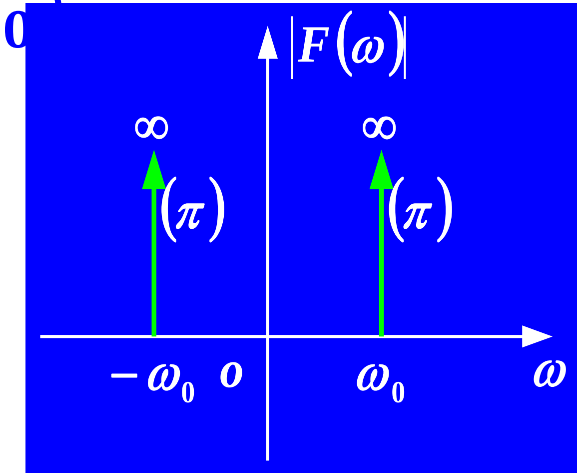
$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

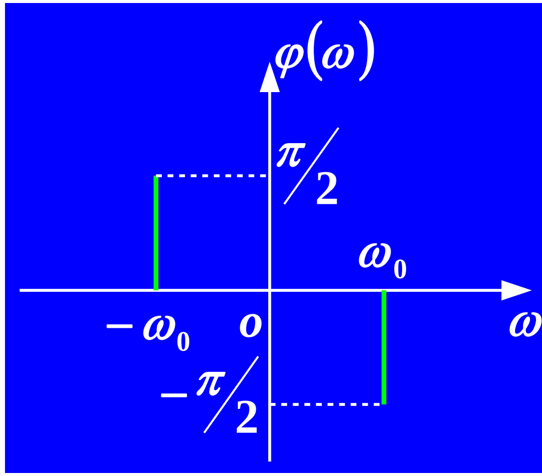
$\cos\omega_0 t$ 频谱图:



$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow -j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$\sin\omega_0 t$ 频谱图:





函数	奇偶性	$F(\omega)$	频谱组成	相位谱
$\cos\omega_0 t$	偶函数	实函数	一对冲激	0
$\sin\omega_0 t$	奇函数	虚函数	一对冲激	$\pm\frac{\pi}{2}$

周期信号的频谱仍为离 散谱, 在ω_0处频谱密度为 ∞

设信号周期: $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ $f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$

$$F_T(\omega) = F[f_T(t)] = F\left[\sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)\, F\left[e^{jn\omega_1 t}\right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot 2\pi\delta(\omega - n\omega_1) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$F_T(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$

（1）$f_T(t)$的频谱由冲激序列组成;

位置: $\omega = n\omega_1$ （谐波频率）

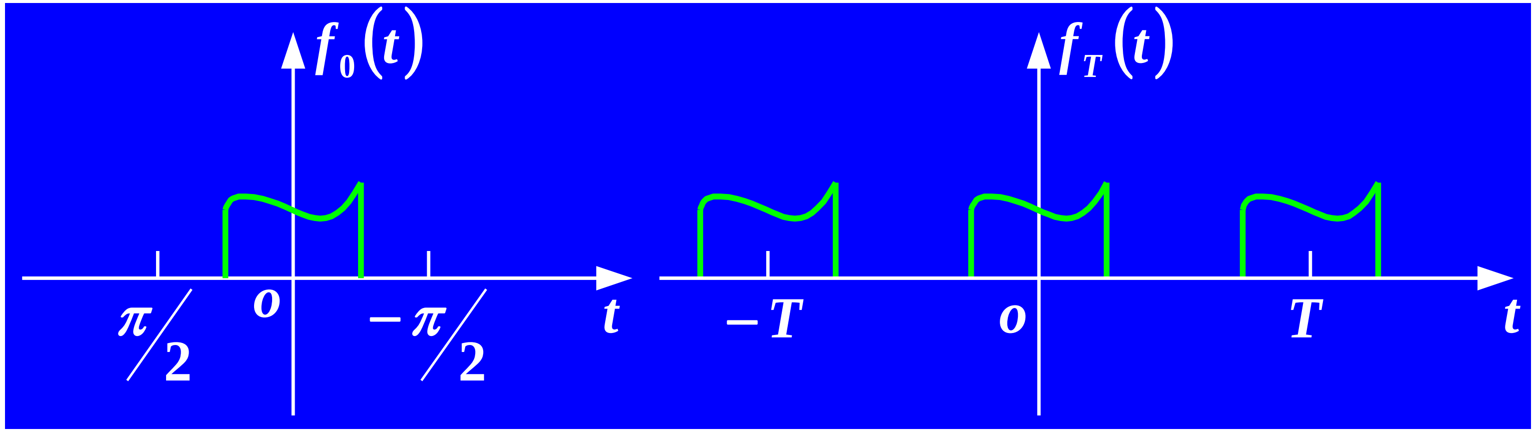
强度: $2\pi F(n\omega_1)$ 与$F(n\omega_1)$成正比，离散谱

（2）谱线的幅度不是有限值，因为$F(\omega)$表示的是频谱密度.

周期信号的 $F(\omega)$只存在于$\omega = n\omega_1$处, 频率范围无限小，幅度为∞.

18.3 如何由 $F(\omega)$ 求 $F(n\omega_1)$

即单个脉冲的 $F_0(\omega)$ 与周期信号 $f_T(t)$ 的谱系数 $F(n\omega_1)$ 的关系



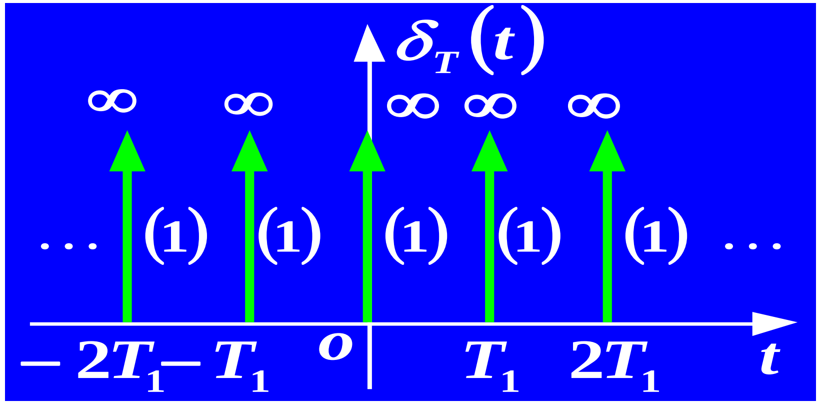
$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega = n\omega}$$

设 $f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$

$$F_0(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$\because \begin{cases} f_T(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \\ F(n\omega_1) = \dfrac{1}{T_1} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \qquad (2) \end{cases}$$

周期冲激信号：$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$



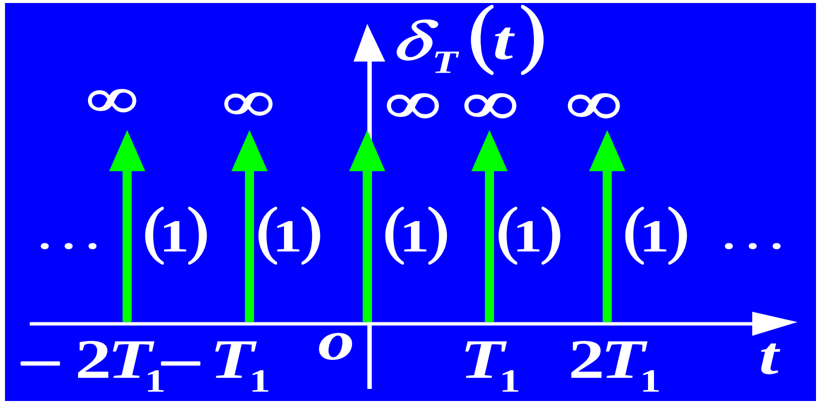
$\because \delta(t) \leftrightarrow 1$

$\therefore \delta_T(t)$的傅氏级数谱系数 $F(n\omega_1) = \dfrac{1}{T_1}$

$$\therefore \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{T_1}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_1 t}$$

18.4 周期冲激信号的傅里叶变换

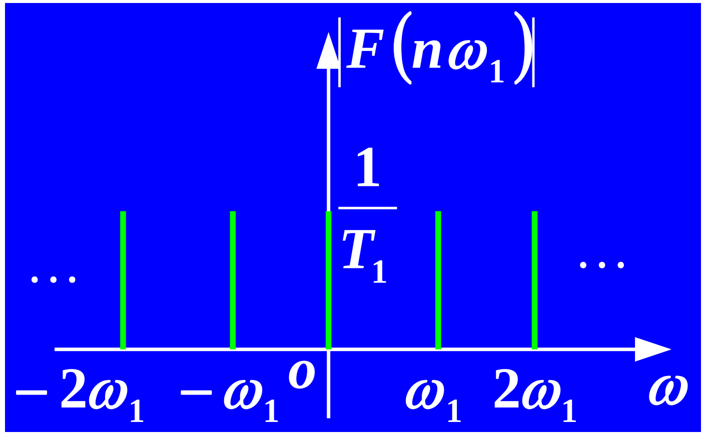
$\therefore\ \boldsymbol{\delta_T(t)}$的傅氏级数谱系数 $\boldsymbol{F(n\omega_1)=\dfrac{1}{T_1}}$

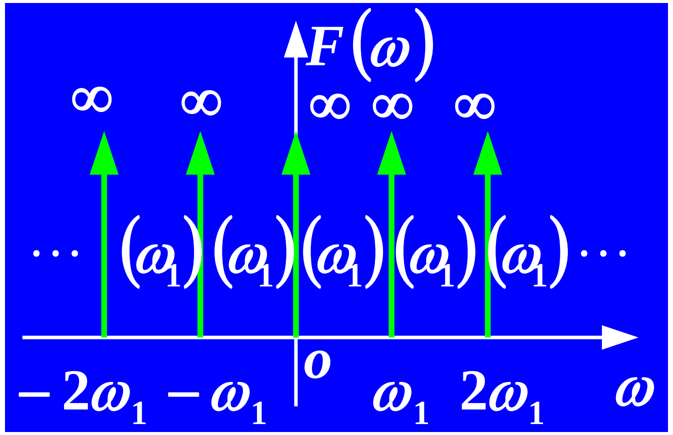


$$\boldsymbol{F(\omega)=2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)\cdot\delta(-n\omega_1)}$$

$$=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-n\omega_1)$$

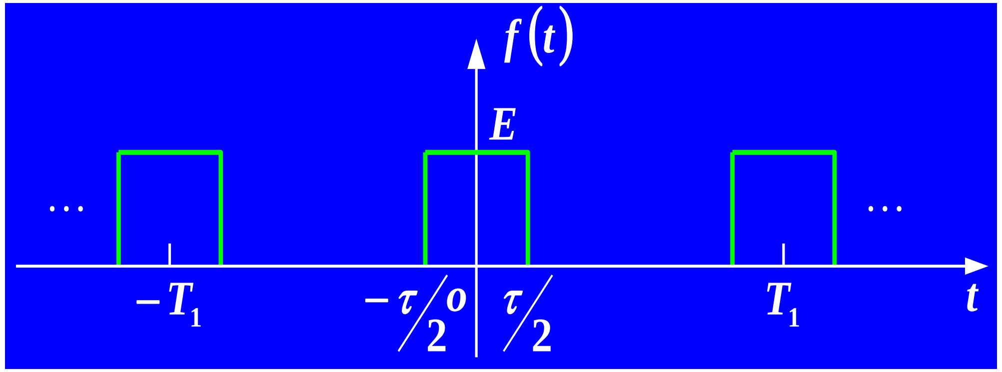
$$\boldsymbol{=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)}$$





$\boldsymbol{\delta_T(t)}$ 的频谱密度函数仍是冲 激序列，强度和间隔都是 $\boldsymbol{\omega_1}$

$$F_0(\omega) \to F(n\omega_1) \to F(\omega)$$



$$F_0(\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\therefore F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega = n\omega_1}$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

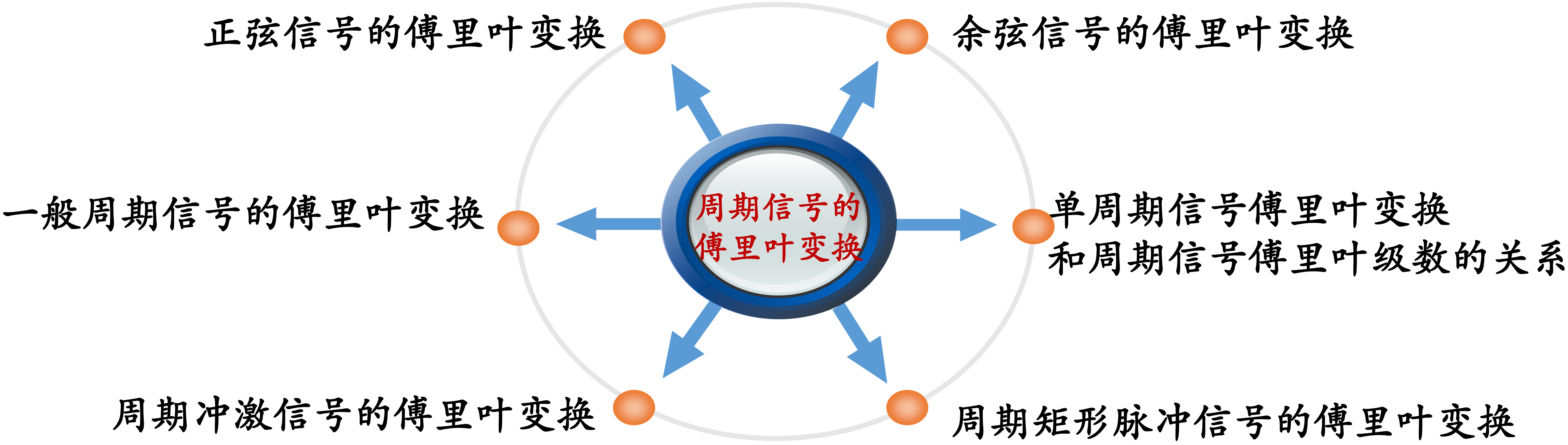
利用时域卷积定理，求周期为T_1的周期矩形脉冲信号的傅里叶变换

$$f(t) = f_0(t) \otimes \delta_T(t) \qquad F_0(\omega) = E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

利用冲激函数的抽样性质

$$F(\omega) = F_0(\omega) \cdot \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$F(\omega) = \omega_1 \sum_{-\infty}^{+\infty} E\tau Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$


周期信号的傅里叶变换
正弦信号的傅里叶变换
余弦信号的傅里叶变换
一般周期信号的傅里叶变换
单周期信号傅里叶变换
和周期信号傅里叶级数的关系
周期冲激信号的傅里叶变换
周期矩形脉冲信号的傅里叶变换