Devoir Maison 2

Exercice 1 (Sous-espaces vectoriels de dimension finie)**.**
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soient U, V, W trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.

1- Montrer que si $\dim U + \dim V > n$, alors $U \cap V$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{E}}\}$

2- On suppose que $\dim U + \dim V + \dim W > 2n$, que dire de $U \cap V \cap W$?

Exercice 2 (Supplémentaires)**.**
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sous-espaces-vectoriels de $\mathbb{E}$.

1- On suppose que $\dim \mathbb{F}_1 = \dim \mathbb{F}_2$. On veut montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathbb{G}$ de $\mathbb{E}$ tel que :

$$\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

   a) Que dire si $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$?

   b) Que dire si $\dim \mathbb{F}_1 = n$?

   c) Si $\mathbb{F}_1 \neq \mathbb{F}_2$ et $\dim \mathbb{F}_1 < n$, montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{E}$ tel que $\mathbb{F}_1$ soit en somme directe avec $\mathrm{Vect}(x)$, et $\mathbb{F}_2$ également.

   d) Conclure avec une récurrence.

2- On suppose que $\dim \mathbb{F}_1 < \dim \mathbb{F}_2$. Montrer qu'il existe deux sous-espace vectoriel $\mathbb{G}_1$ et $\mathbb{G}_2$ de $\mathbb{E}$ tel que :

$$\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G}_1 = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G}_2 = \mathbb{E} \text{ et } \mathbb{G}_2 \subset \mathbb{G}_1$$

Pensez à utiliser la question précédente !

Problème

On cherche à résoudre, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M^2 = I_2$$

I - Préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1- Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2- Décomposer la matrice A suivante comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 5 & -2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II - Analyse

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = I_2$.

1- Soient $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = S + A$. Montrer qu'on a nécessairement :

$$\begin{cases} A^2 + S^2 & = I_2 \\ AS + SA & = \mathbf{0}_2 \end{cases}$$

2- En déduire que AS est une matrice symétrique

3- On pose $S = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que $d = 0$ ou $a = -b$.

4- En déduire que toutes les solutions de $M^2 = I_2$ sont soit I_2, soit $-I_2$, soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\phi\cos\theta & \operatorname{ch}\phi\sin\theta + \operatorname{sh}\phi \\ \operatorname{ch}\phi\sin\theta - \operatorname{sh}\phi & -\operatorname{ch}\phi\sin\theta \end{pmatrix} \text{ avec } (\theta, \phi) \in [0; 2\pi[\times\mathbb{R}$$

Rappel : on a $\operatorname{ch}\phi = \dfrac{\mathrm{e}^{\phi} + \mathrm{e}^{-\phi}}{2}$ et $\operatorname{sh}\phi = \dfrac{\mathrm{e}^{\phi} - \mathrm{e}^{-\phi}}{2}$, avec notamment, $\operatorname{ch}^2\phi - \operatorname{sh}^2\phi = 1$, pour tout réel ϕ.

III - Synthèse

Vérifier ques les matrices trouvées à la question précédentes sont bien solutions de l'équation de départ.