北京化工大学

Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第三章 信号的频域表达-傅里叶变换

主讲教师：袁洪芳

主要内容 CONTENTS

3.3 非周期信号的傅里叶变换

-- 傅里叶变换的定义

-- 傅里叶反变换

-- 傅里叶变换的物理意义

-- 典型连续非周期信号的傅里叶变换

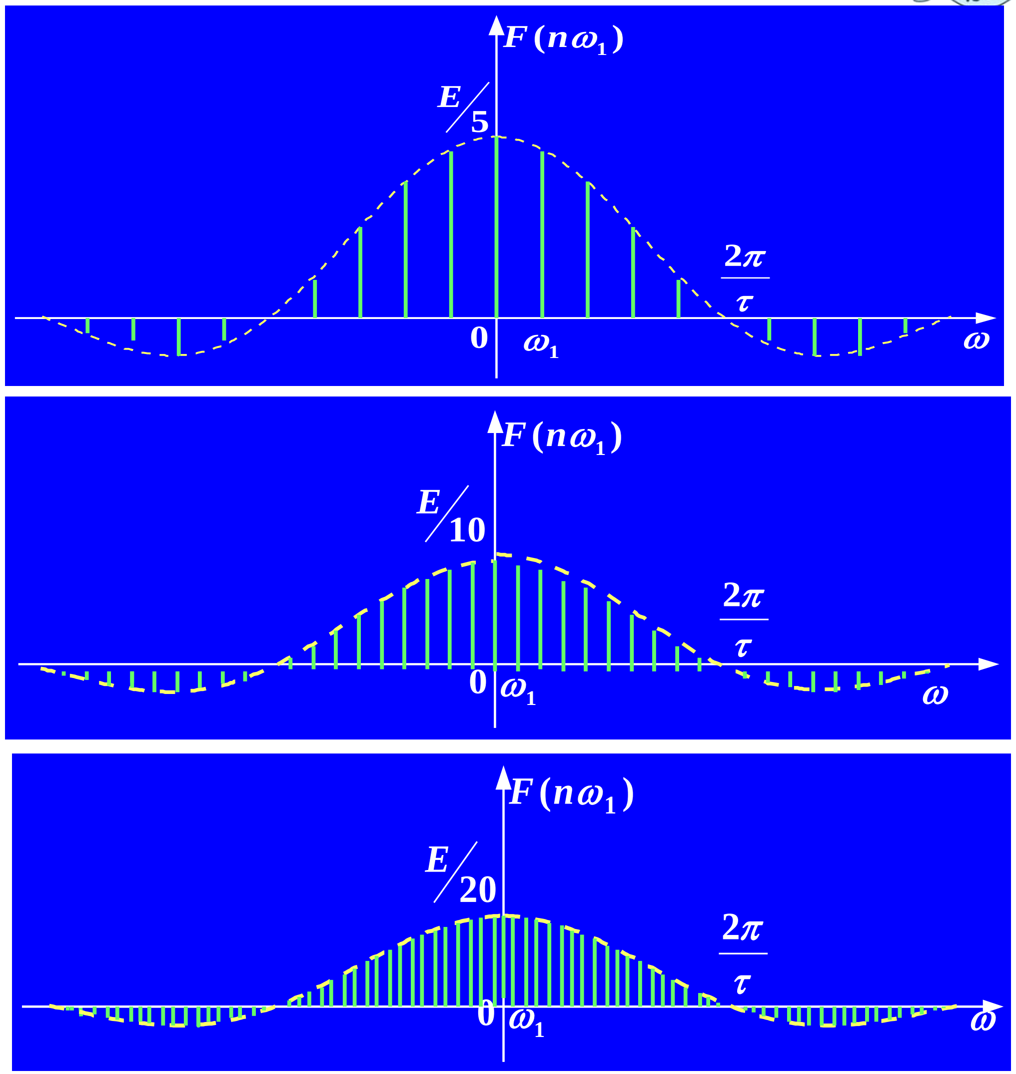
3.3.1 连续非周期信号的傅里叶变换

根据周期矩形脉冲信号的傅里叶级数总结：

$$T_1\uparrow\Rightarrow\begin{cases}\text{幅度}\downarrow\\ \text{谱线间隔}\,\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}\downarrow\end{cases}$$

当$T_1\to\infty$，时，$\omega_1\to 0$，$\dfrac{E\tau}{T_1}$为无限小，

$f(t)$由周期信号 → 非周期信号。



$T_1 \to \infty$ $f(t)$ **由周期信号变成非周期信号**

谱系数$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$ 变成0

频谱由离散的变成连续的

再用$F(n\omega_1)$表示频谱就不合适了，虽然各频谱幅度无限小，但相对大小仍有区别，引入频谱密度函数。

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \xlongequal{\text{两边同时乘以}T_1} T_1F(n\omega_1)=\frac{F(n\omega_1)}{1/T_1}=\frac{F(n\omega_1)}{f}$$

$$f=\frac{1}{T_1}\to 0,\qquad F(n\omega_1)\to 0\qquad \frac{F(n\omega_1)}{f}\to \text{有界函数}$$

单位频带上的频谱值

$$\Delta(n\omega_1)=\omega_1\to d\omega\qquad (n\omega_1),\quad \to \omega\text{连续}$$

频谱密度函数
简称频谱

$$F(\omega)=\lim_{T_1\to\infty}T_1F(n\omega_1)=\lim_{T_1\to\infty}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \xlongequal{T_1\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

由$f(t)$求$F(\omega)$称为**非周期信号的傅立叶变换**

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=F[f(t)]$$

$F(\omega)$一般为复信号,故可表示为$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$

$|F(\omega)|\sim\omega$: 幅度频谱　　$\phi(\omega)\sim\omega$: 相位频谱

由复指数形式的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)\,e^{jn\omega_1 t}$$

除以ω_1，再乘以ω_1

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}\cdot\omega_1\cdot e^{jn\omega_1 t}$$

$$\because\ F(\omega)=\lim_{T_1\to\infty}T_1F(n\omega_1)\qquad \lim_{T_1\to\infty}\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}2\pi\qquad \therefore\ \lim_{T_1\to\infty}\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}=\frac{F(\omega)}{2\pi}$$

当$\boldsymbol{T_1\to\infty}$时，$\quad\boldsymbol{\omega_1\to d\omega},\quad\boldsymbol{n\omega_1\to\omega}$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega$$

傅里叶变换对可以简写成　　时间信号$\boldsymbol{f(t)} \leftrightarrow$ 频谱密度函数$\boldsymbol{F(\omega)}$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=F[f(t)]$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega=F^{-1}[f(t)]$$

傅里叶变换存在的条件：$\int_{-\infty}^{\infty}|\boldsymbol{f(t)}|\,\boldsymbol{dt}=$ 有限值　　(充分条件)

即信号满足绝对可积，所有能量信号都满足傅里叶变换的条件。

当引入$\boldsymbol{\delta(\omega)}$函数的概念后,允许作变换的函数类**型大大扩展了**

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

实部 虚部

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

实信号 偶分量 奇分量

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

用欧拉公式将$e^{-j\omega t}$展开

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [f_e(t) + f_o(t)] \cdot [\cos\omega t - j\sin\omega t]dt$$

$$= 2\int_0^{\infty} f_e(t)\cos\omega t dt - j2\int_0^{\infty} f_o(t)\sin\omega t dt$$

实部 虚部

3.3.2 傅里叶变换的特殊形式

$$R(\omega)=2\int_0^{\infty}f_e(t)\cos\omega t dt$$

关于ω 的偶函数

$$X(\omega)=-2\int_0^{\infty}f_o(t)\sin\omega t dt$$

关于ω 的奇函数

$$|F(\omega)|=\sqrt{[R(\omega)]^2+[X(\omega)]^2}$$

关于ω 的偶函数

$$\varphi(\omega)=tg^{-1}\frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

关于ω 的奇函数

$f(t)$**偶函数（奇分量为零）** $F(\omega)$**为实函数，只有**$R(\omega)$**，相位为±π**

$f(t)$**奇函数（偶分量为零）** $F(\omega)$**为虚函数，只有**$X(\omega)$**，相位为±π/2**

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

用欧拉公式将$e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}$展开

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega + j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

积分为0

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \quad = \int_{0}^{\infty} \frac{|F(\omega)|}{\pi} d\omega \cdot \cos[\omega t + \theta(\omega)]$$

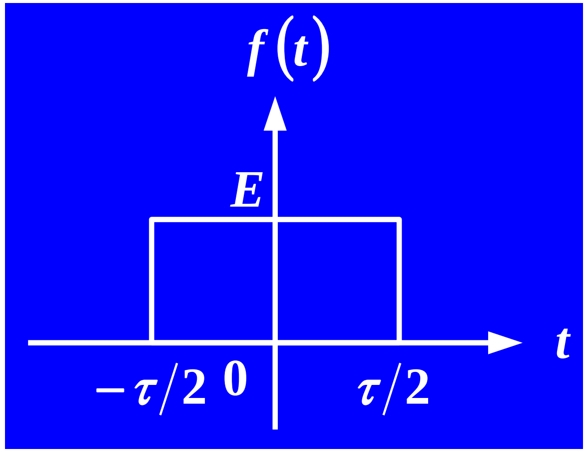
$$\boldsymbol{f(t)=\int_0^{\infty}\frac{|F(\omega)|}{\pi}d\omega\cdot\cos[\omega t+\theta(\omega)]}$$

求和　幅度　　　连续余弦信号

无穷多个振幅为无穷小 $\left(\frac{1}{\pi}|F(\omega)|d\omega\right)$ 的连续余弦信号之和,频域范围: $0\to\infty$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega)}{2\pi}d\omega\cdot e^{j\omega t}$$

无穷多个幅度为无穷小 $\left(\frac{1}{2\pi}|F(\omega)|d\omega\right)$ 的连续指数信号之和, 占据整个频域 ω : $-\infty\to\infty$

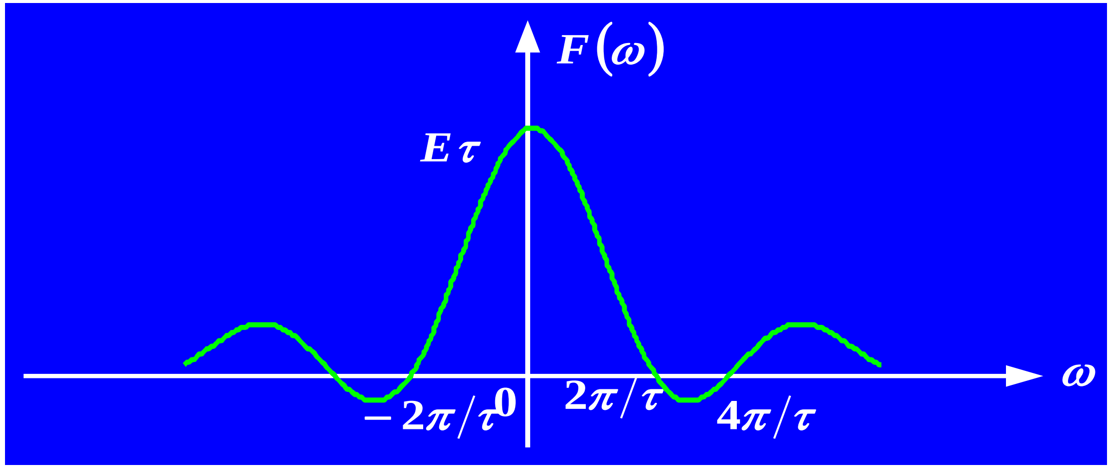


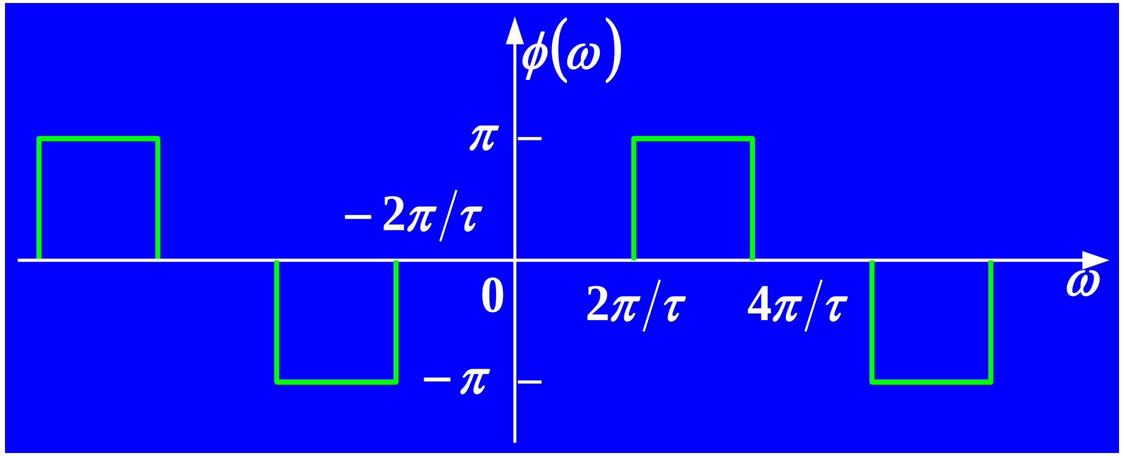
(1)矩形脉冲信号 $F(\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$

$$= \frac{E\tau}{\omega\tau/2} \cdot \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j} = E\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = \boldsymbol{E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}$$

幅度频谱： $|F(\omega)| = E\tau|Sa(\omega\tau/2)|$

相位频谱： $$\varphi(\omega)=\begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau}<|\omega|<\frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pm\pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau}<|\omega|<\frac{2(2n+2)\pi}{\tau} \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots$$





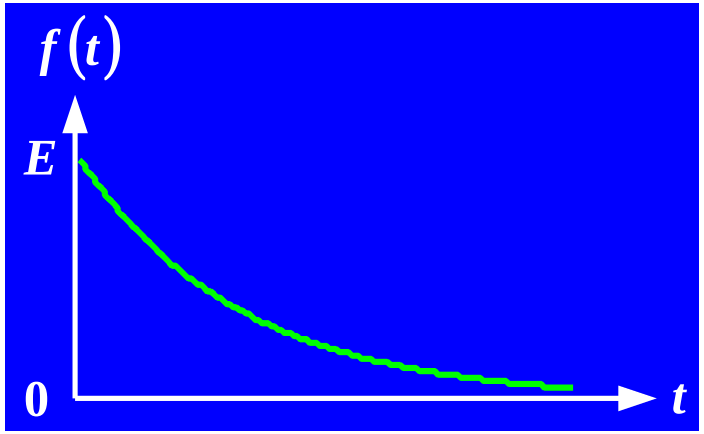
频宽： $B_\omega \approx \frac{2\pi}{\tau}$ 或 $B_f \approx \frac{1}{\tau}$

幅度频谱 $|F(\omega)| = E\tau\left|Sa\left({}^{\omega\tau}/_{2}\right)\right|$

相位频谱

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pm\pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+2)\pi}{\tau} \end{cases} \quad n\text{是整数}$$

(2)单边指数信号 $f(t)=\begin{cases}Ee^{-\alpha t} & t>0 \quad \alpha>0\\ 0 & t<0\end{cases}$



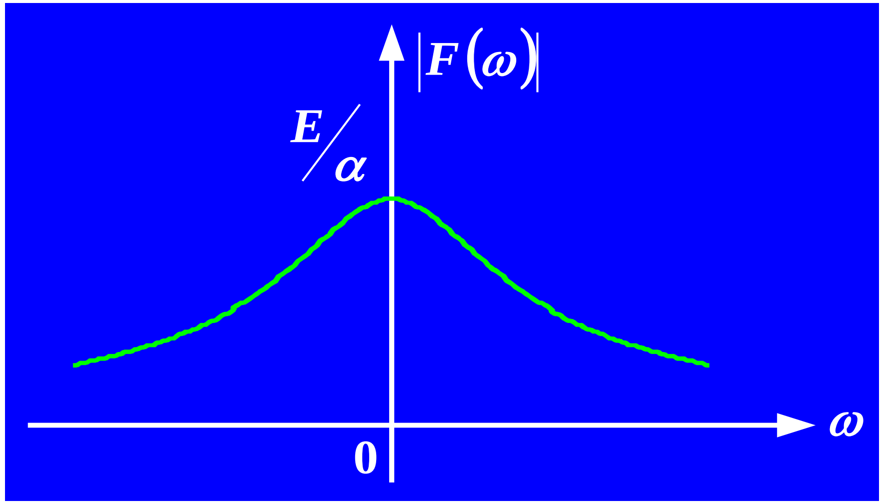
$$F(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}Ee^{-\alpha t}u(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}Ee^{-(\alpha+j\omega)t}dt=\frac{E}{\alpha+j\omega}$$

$$|F(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

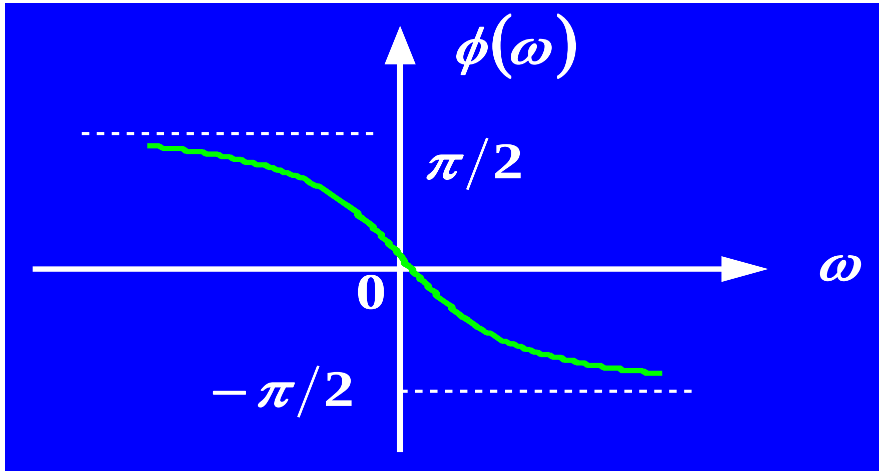
幅度频谱：

$$\begin{cases} \omega = 0, & |F(\omega)| = \dfrac{E}{\alpha} \\ \omega \to \pm\infty, & |F(\omega)| \to 0 \end{cases}$$



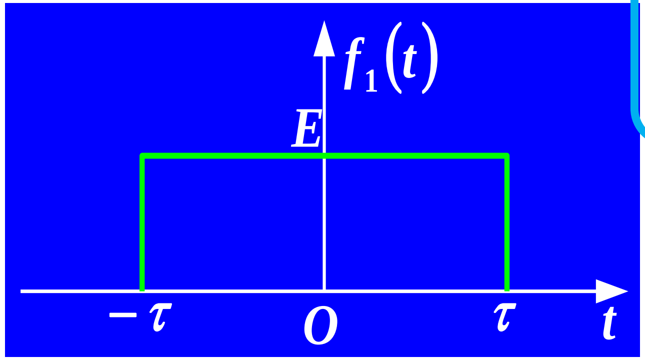
相位频谱：

$$\begin{cases} \omega \to 0, & \varphi(\omega) = 0 \\ \omega \to +\infty, & \varphi(\omega) \to -\dfrac{\pi}{2} \\ \omega \to -\infty, & \varphi(\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



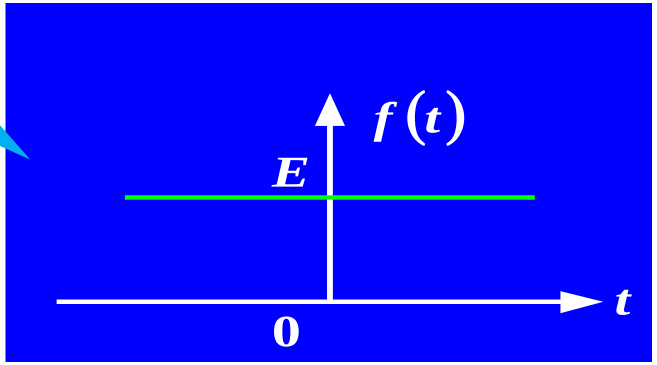
(3)直流信号

$$\boldsymbol{f(t) = E, -\infty < t < +\infty}$$



不满足绝对可积条件

$\tau \to \infty$

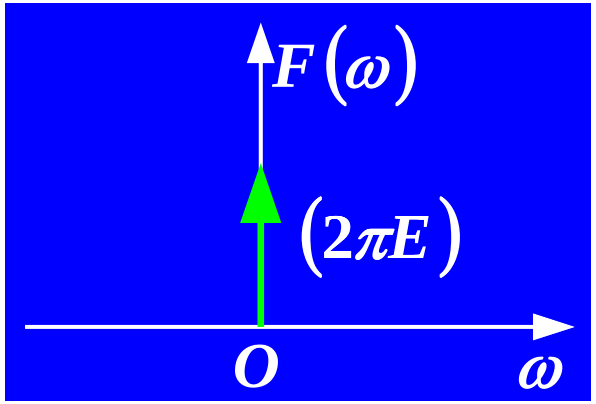


$$F(\omega) = \lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau}^{\tau} E\, e^{-j\omega t} dt$$

$$= E\lim_{\tau\to\infty}\frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} = 2\pi E\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{\pi}\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} = 2\pi E\delta(\omega)$$

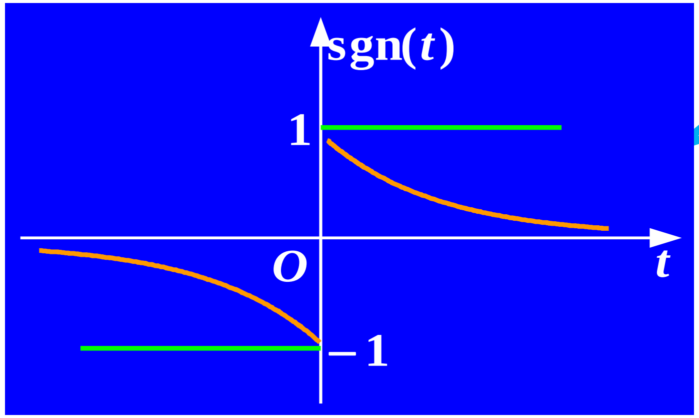
$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{\pi}Sa(\omega\tau) = \delta(\omega)$$

时域无限宽，频带无限窄



(4) 符号函数

$$f(t)=\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}+1, t>0\\ -1, t<0\end{cases}$$



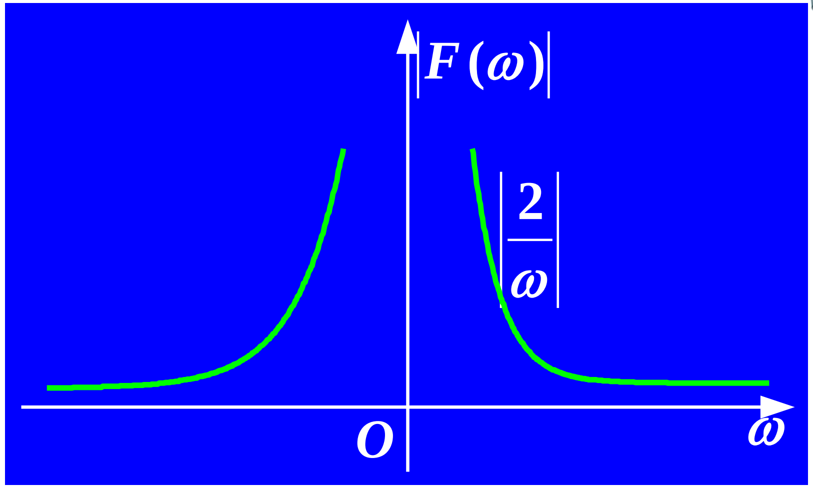
不满足绝对可积条件

$f_1(t)=\mathrm{sgn}(t)e^{-\alpha|t|}$，求$F_1(\omega)$，求极限得到$F(\omega)$

$$F_1(\omega)=\int_{-\infty}^{0}-e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\frac{-1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{-j2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

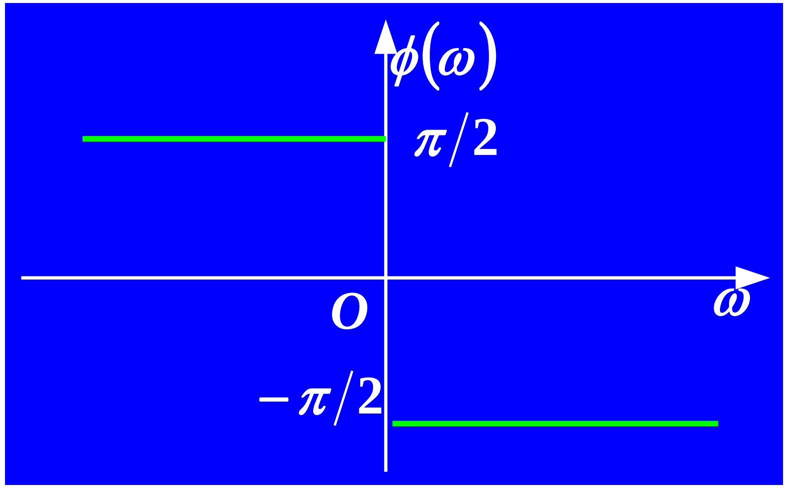
$$F(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}F_1(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-j2\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{2}{j\omega}$$

幅度频谱： $|F(\omega)| = \left(\sqrt{\left(\frac{2}{\omega}\right)^2} = \frac{2}{|\omega|}\right)$



$$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} = -j\frac{2}{\omega} = \frac{2}{|\omega|}e^{\mp j\frac{\pi}{2}}$$

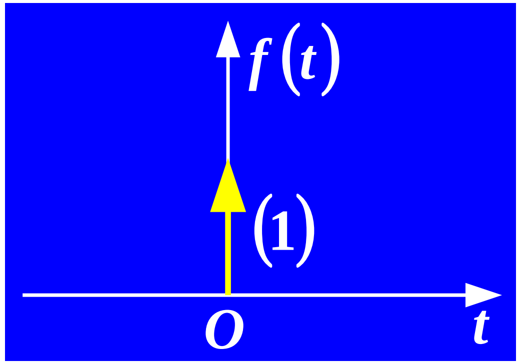
相位频谱： $tg^{-1}\frac{-2/\omega}{0} = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ \pi/2, & \omega < 0 \end{cases}$

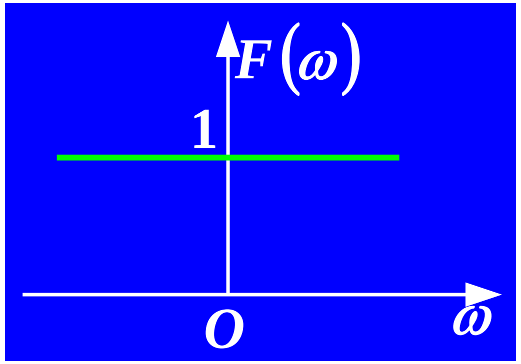


(5) 单位冲激信号

$$\delta(t) \leftrightarrow F(\omega)=1$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1$$

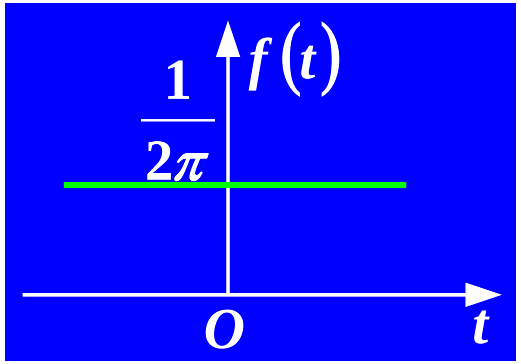


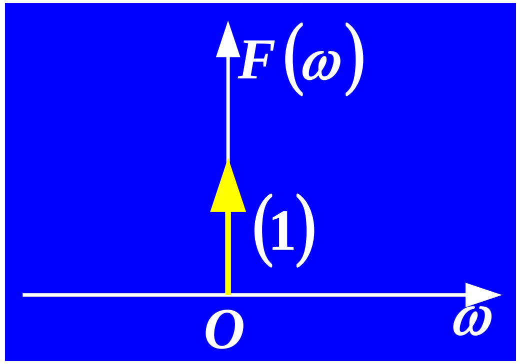


$$f(t)=\frac{1}{2\pi} \leftrightarrow \delta(\omega)$$

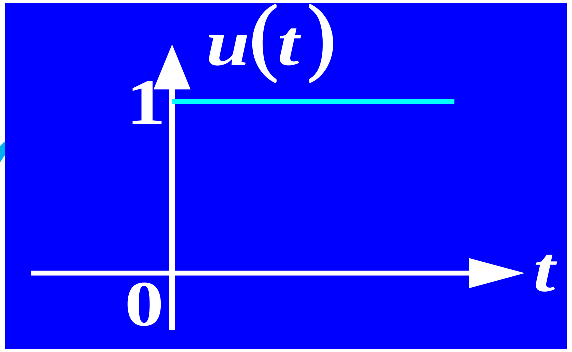
$\delta(t)$看作$\tau\times\frac{1}{\tau}$的矩形脉冲

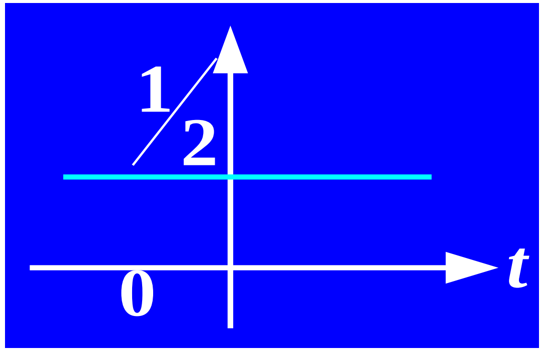
$\tau\to 0$时,$B_\omega\to\infty$

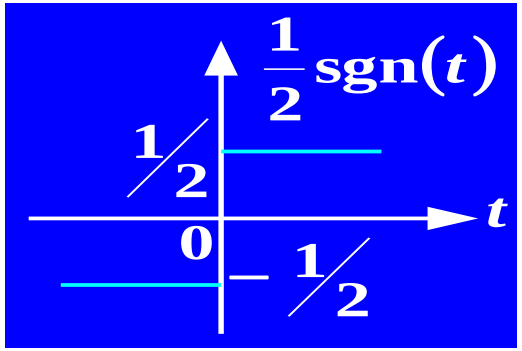




（6）阶跃信号







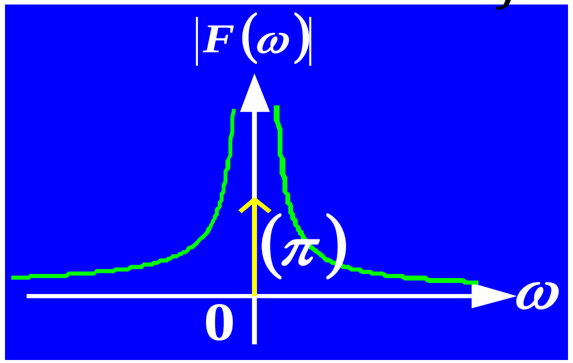
不满足绝对可积条件

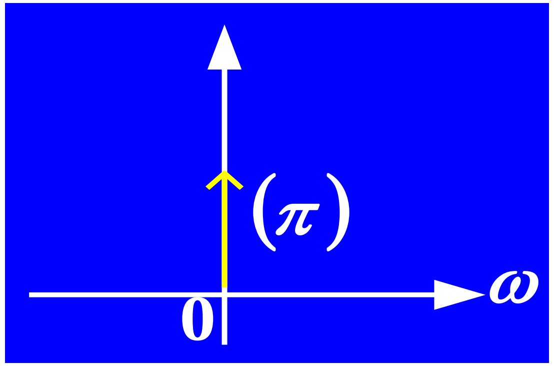
$$\therefore u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

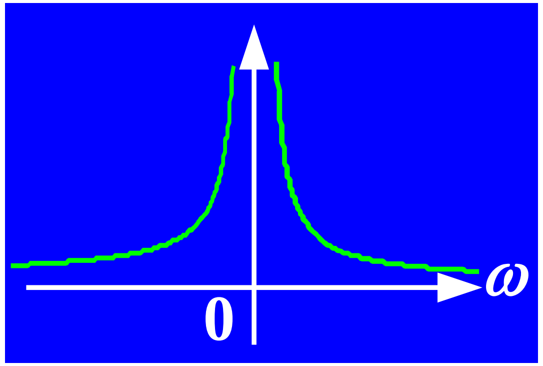
$$\frac{1}{2} \leftrightarrow \pi\delta(\omega)\vee$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}\vee$$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$







3.3.5 本讲小结

周期信号傅里叶级数

- 傅里叶变换的引入和定义
- 傅里叶反变换
- 傅里叶变换的特殊形式
- 傅里叶变换的物理意义
- 矩形脉冲信号的傅里叶变换
- 其它典型信号如单边指数信号直流信号符号函数的傅里叶变换