包含概率、随机变量、大数定理、参数估计、假设检验等重点内容

概率论
期末资料

扎堆学社

学无止境，获取更多资料

欢迎关注 扎堆学社微信平台

出品人：曹望北 李兆芃
程璐瑶
2015.1
扎堆学社竭诚为您服务

§1. 随机事件及其概率

一. 随机事件及样本空间

1. 概念

基本事件．复合事件．必然事件．不可能事件　P2

和事件 $A\cup B$　　积事件 $A\cap B=AB$　　互斥 $AB=\phi$　　互逆/对立 $A\cup B=U$．且 $AB=\phi$

差事件 $A-B=A\bar{B}=A-AB$．　$\bar{A}=U-A$

基本事件．样本空间．P3

2. 公式

若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$

$A\cup B=B\cup A$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\bar{\bar{A}}=A$．　若 $A\subset B$，则 $\bar{A}\supset\bar{B}$

$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；　$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

二. 频率与概率

1. 概念

频率 P4　　古典概型 P5　　几何概率 P8

2. 公式

$$P(A\cup B)=\begin{cases} AB\text{互斥} & P(A)+P(B) \\ \text{无条件} & P(A)+P(B)-P(AB) \end{cases}$$

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

$$P(B-A)=\begin{cases} A\subset B & P(B)-P(A) \\ \text{无条件} & P(B)-P(AB) \end{cases}$$

三. 条件概率与贝努利概型

1. 概念

条件概率 P12　　全概率公式 P14　　贝叶斯公式 P16　　独立性 P17　　贝努力概型 P20

2. 公式

在事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ $(P(B)>0)$

$$P(AB)=\begin{cases} A、B独立, & P(A)P(B) \\ P(A|B)P(B) \\ P(B|A)P(A) \end{cases}$$

全概率公式 $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

贝叶斯公式 $P(B_j|A)=\dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$

↓

可由条件概率与全概率公式推得. $P(B_j|A)=\dfrac{P(AB_j)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$

独立性 ① $P(AB)=P(A)P(B)$

② $P(A|B)=P(A)$； $P(B|A)=P(B)$

③ 若四对事件 A,B；$A,\bar{B}$；$\bar{A},B$；$\bar{A},\bar{B}$中有一对是相互独立的事件.
则另外三对也是相互独立的事件.

④ 若 $\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \end{cases}$ 成立. 则 A、B、C 两两独立.

$\downarrow$ 不一定

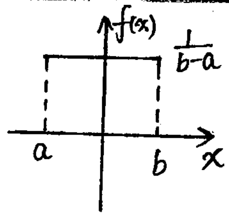
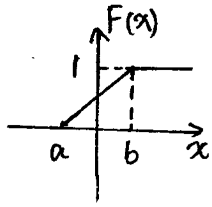
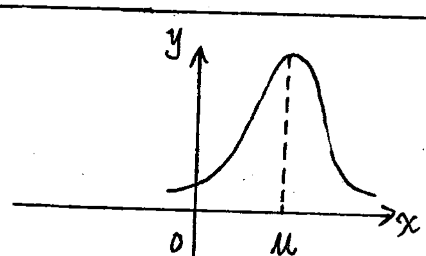
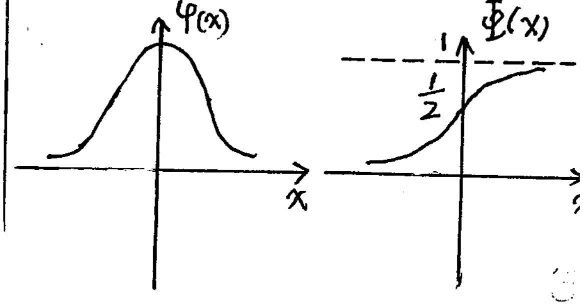
$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

⑤ 若 $\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$ 成立. 则 A、B、C 为相互独立事件.

贝努利概型 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,2\cdots n)$ n次试验. k为事件A发生的次数. p为A在一次试验中发生的概率

第二章 随机变量及其分布

离散型	分布律	条件	实例	联系
(0-1)分布	$p^k(1-p)^{1-k}$	$k=0,1$ $0<p<1$	掷硬币	(0-1)分布进行k次可以变为二项分布，当$n\to\infty$时，且$\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$ 则可用泊松分布$P(np)$近似
二项分布 $X\sim B(n,p)$	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	$k\in N$ $0<p<1$	k次贝努利试验	
泊松分布 $P(\lambda)$	$\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$	$\lambda=np$ $k\in N$	书P27~P28 例7 例8	
几何分布	$p(1-p)^{k-1}$	$k\in N^+$	书P28 例9	
超几何分布	$\frac{C_a^k C_b^{m-k}}{C_{a+b}^m}$	$1\le k\le\min\{m,n\}$	书P29 例10	

连续型	密度函数	分布函数	图像
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}0 & x<a\text{或}x>b\\ \frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$	
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\lambda>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$	
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($\mu,\sigma\in R$ $\sigma>0$ $x\in R$) 标准正态分布 ($\mu=0,\sigma=1$) $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ($x\in R$)	标准正态分布 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ ($x\in R$)	图像关于$x=\mu$对称 ($\mu\pm\sigma$, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$)为拐 

二维随机变量

定义：U为随机试样E的样本空间，X, Y为定义于U上的一对随机变量

称(X, Y)为二维随机变量

对任意一对实数x, y，称二元函数$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$为$(X,Y)$的联合分布函数

性质：(1) $0\le F(x,y)\le 1$，(2) $F(x,y)$对于x, y都是单调不减的

(3) $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$; $F(+\infty,+\infty)=1$

(4) $F(x,y)$对于x, y均右连续

(5) 对于任意x_1, x_2, y_1, y_2，且$x_1\le x_2$，$y_1\le y_2$均有

$P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$成立

分类：(1) X, Y均为离散型随机变量，则称(X,Y)为二维离散型随机变量

随机事件$\{X=x_i, Y=y_j\}$的概率$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$为(X,Y)的联合分布

① $0\le p_{ij}\le 1$ ② $\sum\limits_{ij} p_{ij}=1$ ③ $F(x,y)=\sum\limits_{x_i\le x, y_j\le y} p_{ij}$，P39 例1

(2) 若二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$对任意x, y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy, \quad (x,y\in R)$$

其中$f(x,y)\ge 0$，称(X,Y)为二维连续型随机变量，$f(x,y)$称为联合密度

① $f(x,y)\ge 0$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=1$ ③ 在$f(x,y)$连续点处有$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

④ G为xOy平面上一区域，则$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)d\sigma$

均匀分布：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S}, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$

二维正态分布：$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$

其中$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$均为实常数，$\sigma_1>0, \sigma_2>0, -1<\rho<1$，$x, y\in R$

称(X,Y)服从二维正态分布，记为$N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

边缘分布

定义：设 $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数

则称 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$ 为 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$ 为 (X,Y) 关于 Y 的边缘分布函数

分类：离散型：$F_X(x)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$；$F_Y(y)=\sum\limits_{y_j\le y}\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}$

对应的边缘分布率为 $p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}\ (i\in N^+)$

$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}\ (j\in N^+)$

连续型：$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

对应的边缘密度函数分别为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$\left.\begin{array}{l}\text{边缘分布}\\ \text{联合分布}\end{array}\right\}\longrightarrow$ 随机变量的独立性

定义：二维随机变量 (X,Y) 有联合分布函数 $F(x,y)$，

边缘分布函数 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，若 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

则称变量 X 与 Y 相互独立

分类：离散型：$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$

书 P_{49} 例 11

连续型：在 $f(x,y)$ 的连续点 (x,y) 处有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

书 P_{49} 例 12

一维随机变量的函数及其分布

分类：离散型：对于连续实函数 $y=g(x)$，则 $Y=g(X)$ 的分布律 $P\{g(X)=g(x_i)\}=p_i$

① 若 $g(x_1)\cdots g(x_n)$ 均不同，则上式即为 $Y=g(X)$ 的分布律

② 若 $g(x_1)\cdots g(x_n)$ 有相同，则相同项对应概率相加，其余照抄

连续型（P52书）

例3 设$X \sim N(0,1)$，求$Y=X^2$的密度函数

解：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$ —— 写出表达式

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$ —— 因为$Y=X^2$恒不小于0，所以以0为界划分

当$y\ge 0$时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=2\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$ —— 对不同范围内的$F_Y(y)$求导得$f_Y(y)$

二维随机变量的函数及其分布

分类：离散型 P_{54} 例5

连续型
$$\begin{cases} Z=X+Y \quad ✓ \quad P_{57}\text{例7, 8} \\ Z=\sqrt{X^2+Y^2} \quad ✓ \quad P_{58}\text{例9} \\ \max(X,Y)\text{与}\min(X,Y) \\ Z=\frac{X}{Y} \end{cases}$$

第三章 随机变量的数字特征

一.离散型随机变量的数学期望及方差

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cdot p_k \qquad DX=EX^2-(EX)^2$$

1. $X\sim(0-1)$分布 $p\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}\ (k=0,1;\ 0<p<1)$ $EX=p$ $DX=p-p^2$

2. $X\sim B(n,p)$ $p\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,2\cdots n)$ $EX=np$ $DX=np(1-p)$

3. $X\sim p(\lambda)$ $p\{X=k\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\ (k=0,1,2\cdots n)$ $EX=\lambda$ $DX=\lambda$

例1. 若X服从泊松分布，且$EX=DX=1$，则$p(X\neq0)=$ $\underline{1-\frac{1}{e}}$

解: $p(X\neq0)=1-p(X=0)=1-\frac{e^{-1}\cdot1^0}{0!}=1-\frac{1}{e}$

例2. 设X服从参数为1的泊松分布，则$p\{X-E(X^2)=0\}=$ $\underline{\frac{1}{2e}}$

解: $EX=DX=\lambda=1$，$EX^2=DX+(EX)^2=2$ $p\{X=2\}=\frac{e^{-1}\cdot1^2}{2!}=\frac{1}{2e}$

例3. 假设随机变量X在区间$[-1,2]$上服从均匀分布，随机变量

$$Y=\begin{cases}1 & X>0\\ 0 & X=0\\ -1 & X<0\end{cases}$$ 则$E(Y)=$ $\underline{\frac{1}{3}}$ $D(Y)=$ $\underline{\frac{8}{9}}$

解: $\because$ X服从均匀分布 $\therefore f(x)=\frac{1}{3}\quad x\in[-1,2]$

$p\{X>0\}=\int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{3}$ $p\{X=0\}=0$ $p\{X<0\}=\int_{-1}^0 f(x)dx=\frac{1}{3}$

$\therefore$ Y的分布律

Y	-1	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$\therefore E(Y)=(-1)\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ $EY^2=1$

$\therefore D(Y)=EY^2-(EY)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

二.连续型随机变量的数学期望及方差

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)dx \qquad DX=EX^2-(EX)^2$$

1. X服从在$[a,b]$上的均匀分布 $EX=\frac{a+b}{2}$ $DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

2. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $EX=\mu$ $DX=\sigma^2$

三.随机变量函数的数学期望

1. 离散型随机变量: $Y=g(X)$，$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)\cdot p_k$

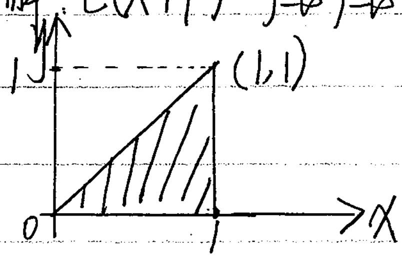
2. 连续型随机变量: $Y=g(X)$，$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f(x)dx$

例1. 设随机变量的分布密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2 & 0<x<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 求 $E\left(\frac{1}{X^2}\right)$

解: $E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{4}$

例2. 设(X,Y)的分布密度为 $f(x,y)=\begin{cases}12y^2 & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 求 $E(X^2+Y^2)$

解. $E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x(x^2+y^2)12y^2dy=\frac{16}{15}$



四. 数学期望的性质

(1) $E(C)=C$ (C为常数)

(2) $E(CX)=CE(X)$

(3) $E(X+Y)=EX+EY$

(4) X,Y相互独立, $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

五. 方差的性质

(1) $D(C)=0$

(2) $D(CX)=C^2DX$

(3) X,Y相互独立, $D(X+Y)=DX+DY$

(4) $D(X)=0$的充分必要条件是X以概率1取常数C, 即$P\{X=C\}=1$。这里$C=EX$

例1. 设随机变量ξ与η相互独立, 且$E\xi=2$, $E\eta=3$, 则$E(\xi-\eta+\xi\eta)=$ <u>5</u>

解: $E(\xi-\eta+\xi\eta)=E(\xi)-E(\eta)+E(\xi\eta)=E(\xi)-E(\eta)+E(\xi)\cdot E(\eta)=2-3+6=5$

例2. 设X,Y相互独立, $DX=6$, $DY=3$, 则$D(2X-Y)=$ <u>27</u>

解. $D(2X-Y)=D(2X)+D(Y)=4DX+DY=4\times6+3=27$

六. 协方差与相关系数

1. $Cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY$

2. $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$ (可正可负)

3. $D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$

七. 协方差的相关性质

1. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

2. $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

$Cov(aX+c,bY+d)=abCov(X,Y)$

3. $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

八. 相关系数的性质

1. $|\rho_{XY}|\le1$ 2. 若X与Y相互独立 $\rho_{XY}=0$

例1. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

试证X和Y不相关，但X和Y不是相互独立的。

证：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\quad(|x|\le 1)$

同理 $f_Y(y)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\quad(|y|\le 1)$

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx=0$

同理 $EY=0$　$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}xdx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}y\frac{1}{\pi}dy=0$

$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$　$\therefore \rho_{XY}=0$　$\therefore X,Y$不相关

但 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$　$\therefore X,Y$不相互独立.

小结：判断 相关性用 $Cov(X,Y)\overset{?}{=}0$ $(\rho_{XY}\overset{?}{=}0)$

独立 用 $f(x,y)\overset{?}{=}f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

例2. $X\sim U(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　$Y=\cos X$　问X与Y是否相关？

解：$f(x)=\begin{cases}1 & x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\\ 0 & 其他\end{cases}$

$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}xdx=0$　$EY=E(\cos X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\cdot f(x)dx=2\sin\frac{1}{2}$

$E(XY)=E(X\cdot\cos X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\cos x\,dx=0$

$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0\Rightarrow X,Y$不相关

例3. $(X,Y)\sim N(0,25;0,16;0.4)$，则 $Cov(X,Y)=$ __8__　$D(3X-\frac{1}{2}Y+1)=$ __205__

解：$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=0.4\times5\times4=8$

$D(3X-\frac{1}{2}Y+1)=D(3X-\frac{1}{2}Y)=9DX+\frac{1}{4}DY+\underline{2Cov(3X,-\frac{1}{2}Y)}=9\times25+\frac{1}{4}\times16+\underline{2\times3\times(-\frac{1}{2})\cdot Cov(X,}$

$=205$

例4 二维随机变量(X,Y)，$DX=4$，$DY=9$，$\rho_{XY}=0.8$，求$D(X-Y+2)$

解：$D(X-Y+2)=D(X-Y)=DX+DY+2cov(X,-Y)=4+9-9.6=3.4$

其中 $Cov(X,-Y)=-Cov(X,Y)=-\rho_{XY}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=-0.8\times2\times3=-4.8$

第四章 大数定律和中心极限定理

1. 契比晓夫不等式：

设随机变量 X 的数学期望为 EX，方差为 DX，则对于任意给定的正数 ε，有 $P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq DX/\varepsilon^2$ 或 $P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq 1-DX/\varepsilon^2$

2. 契比晓夫大数定律

设随机变量 $X_1, X_2 \cdots X_n \cdots$ 相互独立，每个分量分别有在数学期望 $E(X_1)$、$E(X_2)$、$\cdots E(X_n)\cdots$ 及方差 $D(X_1)$、$D(X_2)\cdots D(X_n)\cdots$，并且这些方差是有界的，即存在某个正常数 M，使得 $D(X_i)<M$ $(i=1,2\cdots n\cdots)$，则对于任一正数 ε，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

3. 中心极限定理

n 个相互独立且服从同一分布的随机变量 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 的和的极限分布为正态分布，即 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

设随机变量 Y_n $(n=1,2\cdots)$ 服从参数为 n, p $(0<p<1)$ 的二项分布，则对于任意的 x，总有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 成立

例1. 某商店出售某品牌雪糕，共有三种价格 2元，3.5元，3元。出售哪一种雪糕是随机的，售出三种价格雪糕的概率分别为 0.3，0.4，0.3. 已知某天共售出 200个，试用中心极限定理求这天收入在 490元至 510元之间的概率。

解：设 X_k 表示第 k 支雪糕的卖价，$X=\sum_{k=1}^{200}X_k$

X_k	2	3.5	3
p	0.3	0.4	0.3

$E(X_k)=2\times0.3+3.5\times0.4+3\times0.3=2.5$

$D(X_k)=EX_k^2-(EX_k)^2=0.15$

求 $P\{490\leq\sum_{k=1}^{200}X_k\leq510\}$　由中心极限定理知：$\frac{\sum_{k=1}^{200}X_k-E(\sum_{k=1}^{200}X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{200}X_k)}}\sim N(0,1)$.

原式 $=\{\frac{10}{\sqrt{30}}\leq X^*\leq\frac{10}{\sqrt{30}}\}=2\phi(\frac{10}{\sqrt{30}})-1=0.932.$

§5. 数理统计的基本概念

§5.1 数理统计中的几个概念

1. 总体：研究对象的某项数量指标的值的全体
2. 个体：总体中的每个元素
3. 样本：从总体中抽出的部分个体，叫总体的一个样本
4. 从总体X中抽取n个个体，就是对随机变量X进行n次试验，分别记为$X_1, \cdots X_n$. 样本就是n维随机变量$(X_1, X_2 \cdots X_n)$

   在一次抽样以后，$(X_1 \cdots X_n)$就有了一组确定的值$(x_1, x_2 \cdots x_n)$，称为样本观测值.

5. 简单随机样本性质

   ① $X_1, X_2 \cdots X_n$间相互独立

   ② $X_1, X_2 \cdots X_n$与总体具有相同分布

6. $(X_1, \cdots X_n)$的联合分布函数为 $F^*(x_1 \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$

   联合密度函数为 $f^*(x_1, \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

7. 统计量

   ① 样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

   ② 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

   ③ 样本k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \quad (k=1, 2 \cdots)$

   ④ 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k \quad (k=1, 2 \cdots)$

⑤ 设总体X的均值为μ. 方差为σ^2. $(X_1, \cdots X_n)$是X的一个样本 $\Rightarrow$

$E(\bar{X}) = \mu$. $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

⑥ 设…… …… $\Rightarrow$

$E(S^2) = \sigma^2$

§5.2 数理统计中常用的三个抽样分布

一. 样本均值分布

1. 设 $X_1 \cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则样本的任一确定的线性函数 $U = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ 也服从正态分布 $N(\mu \sum_{i=1}^{n} a_i, \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2)$

2. 对样本均值$\bar{X}$有： $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

将$\bar{X}$标准化： $\frac{\bar{X}-\mu}{n/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

n越大，$\bar{X}$越向μ集中.

二. χ^2分布

1. 定义：随机变量 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 相互独立且都服从标准正态分布，则统计量 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 所服从的分布称为自由度是n的χ^2分布.
记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

2. 性质

① $E(\chi^2(n)) = n$ ， $D(\chi^2(n)) = 2n$

② χ^2分布对参数n有可加性.

设 $X_1 \sim \chi^2(n_1)$. $X_2 \sim \chi^2(n_2)$ 且相互独立. $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

3. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

三. t分布

1. 定义：设 $X \sim N(0,1)$. $Y \sim \chi^2(n)$ 且 X、Y 相互独立. 则称统计量 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布. 记作 $T \sim t(n)$

2. 定理

① 设 $X_1, \cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本. 则

$$T = \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \sim t(n-1)$$

② 设 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 与 $Y_1, Y_2 \cdots Y_n$ 分别是具有同方差的两正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本. 且相互独立. 则

$$T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $S_W^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i. \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i. \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$$

四. F分布

1. 定义：设 $X \sim \chi^2(n_1)$. $Y \sim \chi^2(n_2)$. 且相互独立. 则统计量 $\frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 所服从的分布称为自由度是 (n_1, n_2) 的 F 分布. 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$. 其中, n_1 称为第一自由度, n_2 称为第二自由度

2. $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

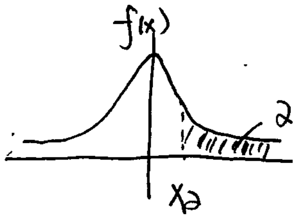
3. $F = \frac{S_1^2\sigma_2^2}{S_2^2\sigma_1^2} \sim F(\cancel{n_2-1}\ n_1-1, n_2-1)$

§5.3 上侧α分位数

一. 概念: 连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$. 设 α 满足 $0<\alpha<1$. 若数 x_α

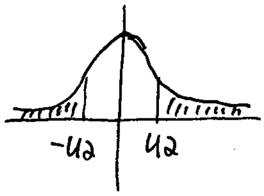
满足 $P\{X>x_\alpha\}=\int_{x_\alpha}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$

则称 x_α 为此概率分布的上侧 α 分位数



二. 标准正态分布的上侧α分位数 u_α $\qquad P(X>u_\alpha)=\alpha$

$\int_{u_\alpha}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\alpha$.



$\boxed{-u_\alpha=u_{1-\alpha}}$

$P(X>1.645)=0.05 \iff u_{0.05}=1.645$. $\alpha=0.05$

三. $\chi^2(n)$ 分布的上侧α分位数 $\chi^2_\alpha(n)$

$\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty}\chi^2(n)dx=\alpha$. $\qquad P(X>\chi^2_\alpha(n))=\alpha$

PS: 当 $n>45$. $n\to\infty$ 时. $\chi^2_\alpha(n)=\frac{1}{2}(u_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$

四. $t(n)$ 分布的上侧α分位数 $t_\alpha(n)$

$\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}t(x)dx=\alpha$. $\qquad P(X>t_\alpha(n))=\alpha$

$\boxed{-t_\alpha(n)=t_{1-\alpha}(n)}$

PS: $n>45$ 时, 用正态近似. $t_\alpha(n)\approx u_\alpha$

五. $F(n_1, n_2)$分布的上侧α分位数 $F_\alpha(n_1, n_2)$

$$\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} f(x)\,dx = \alpha$$

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$$

六. 补充

1. p分位数

若$P\{X \le \lambda\} = p$. 则称λ为X的p分位数. 显然 $P\{X > \lambda\} = 1 - P\{X \le \lambda\}$ $= 1-p$. 因此X的p分位数λ为X的上侧$1-p$分位数

2. 双侧α分位数

使 $P\{X \le \lambda_1\} = \frac{\alpha}{2}$. $P\{X > \lambda_2\} = \frac{\alpha}{2}$

则称λ_1, λ_2为X的双侧α分位数.

λ_1为X的上侧$1-\frac{\alpha}{2}$分位数. λ_2为X的上侧$\frac{\alpha}{2}$分位数.

§6. 参数估计

§6.1 参数的点估计

一. 矩估计法

1. ∵ 样本矩依概率收敛于相应总体矩

∴ 用样本矩作为总体矩的估计量. 通过参数与总体矩的联系，得到参数估计量.

2. 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta_1,\theta_2\cdots\theta_k)$. 其中 $\theta_1,\theta_2\cdots\theta_k$ 未知参数. 总体 X 的前 k 阶矩

$$\alpha_l = E(X^l) \quad (l=1,2,\cdots k)$$

存在. $X_1, X_2\cdots X_n$ 是来自总体 X 的样本 $M_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l \quad (l=1,2,\cdots k)$

是样本前 k 阶原点矩. 由于总体矩是总体分布参数的函数，因此 α_l 可表作

$$\alpha_l = \alpha_l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \quad (l=1,2,\cdots k)$$

令 $$M_l = \alpha_l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k) \quad (l=1,2\cdots k)$$

这是个包含 k 个未知数，由 k 个方程组成的方程组，一般来说，可以解出 $\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_k$.
这个方程组的解 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots\hat{\theta}_k$ 分别作为参数 $\theta_1,\theta_2\cdots\theta_k$ 的估计量.(矩估计量)，
它的观察值称为矩估计值.

3. 例题

① 设总体 X 服从几何分布 $G(p)$. $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$ $(k=1,2\cdots)$. 其中 $0<p<1$.
如果样本观察值为 $x_1,x_2,\cdots x_n$, 求参数 p 的矩估计量.

解: $\alpha_1 = EX = \frac{1}{p}$

$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

令 $\alpha_1 = M_1$ 得 $\frac{1}{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

∴ p 的矩估计量 $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$

② 设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-(x-\mu)/\theta} & x\geq\mu\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$. $X_1, X_2\cdots X_n$ 为总体 X 的一个样本. 求未知参数 θ 和 μ 的矩估计量.

解: $\alpha_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\mu+\theta$

$\alpha_2=EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2$

$M_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. $M_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

令 $\alpha_1=M_1$. $\alpha_2=M_2$. 得方程组 $\begin{cases}\mu+\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\\ \mu^2+2\mu\theta+2\theta^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$

解得: $\hat{\mu}=\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$

二. 极大似然估计法

1. 概念

① 设总体 X 的分布类型已知, 但含未知参数 θ.

设离散型总体 X 的概率分布律为 $p(x;\theta)$. 则样本 $(X_1, X_2\cdots X_n)$ 的联合分布律

$p(x_1, x_2\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ 称为似然函数. 记为 $L(\theta)=L(x_1,x_2\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}$

设连续型总体 X 的概率分布律为 $f(x;\theta)$. 则样本 $(X_1, X_2\cdots X_n)$ 的联合概率密度函数

$f(x_1, x_2\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$ 称为似然函数. 记为 $L(\theta)=L(x_1\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;$

② 设 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 为总体 X 的一个样本观察值. 若似然函数 $L(\theta)$ 在 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1, x_2\cdots x_n)$ 处取到最大值, 则称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 为 θ 的极大似然估计值.

设 $(X_1, X_2\cdots X_n)$ 为总体 X 的一个样本, 若 $\hat{\theta}(x_1, x_2\cdots x_n)$ 为 θ 的极大似然估计值

则称 $\hat{\theta}(X_1, X_2\cdots X_n)$ 为参数 θ 的极大似然估计量.

2. 求极大似然估计的一般步骤.

① 求似然函数 $L(\theta)$

② 求出 $\ln L(\theta)$ 及方程 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$

③ 解上述方程得到极大似然估计值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n)$

④ 解上述方程得到极大似然估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2 \cdots X_n)$

3. 例题

① (接上) 求参数 p 的极大似然估计量.

解: 似然函数 $L(p)=\prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1} = p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i-n}$

$$\ln L(p) = n\ln p + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)\ln(1-p)$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp} = \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}{1-p} = 0$$

解得 $\hat{p} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \dfrac{1}{\bar{X}}$

② (接上). 求未知参数 θ 和 μ 的极大似然估计量.

解: $X_{(1)} = \min(x_1, x_2, \cdots x_n)$

$\because X_1, x_2 \cdots x_n \geq \mu$. 则 $X_{(1)} > \mu$.

样本似然函数
$$L(\mu,\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-(x_i-\mu)/\theta} & x_{(1)} \geq \mu \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\ln L(\mu,\theta) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L(\mu,\theta)}{\partial \mu} = \dfrac{n}{\theta} = 0 \\ \dfrac{\partial \ln L(\mu,\theta)}{\partial \theta} = -\dfrac{n}{\theta} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu}{\theta^2} = 0 \end{cases}$$

方程组显然解不出 θ 和 μ. 现用极大似然估计定义求 θ 和 μ 的极大似然估计.

$\because$ 当 $\theta>0$ 时，对所有满足 $\mu \le x_{(1)}$ 的 μ 总有 $e^{-(x_i-\mu)/\theta} \le e^{-(x_i-x_{(1)})/\theta}$

$\therefore \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-(x_i-\mu)/\theta} \le \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-(x_i-x_{(1)})/\theta}$. 即 $L(\mu,\theta) \le L(x_{(1)},\theta)$

以 μ 的极大似然估计值为 $\hat{\mu}=x_{(1)}$. 由似然方程知 $\hat{\theta}=\bar{x}-x_{(1)}$.

$\therefore \hat{\mu}=X_{(1)}$. $\hat{\theta}=\bar{X}-X_{(1)}$. 极大似然估计量.

PS. 当由似然方程解不出参数时. 可直接利用极大似然估计量的定义解决

§6.2 评选估计量的标准

一. 无偏性.

估计量 $\hat{\theta}$ 的取值应围绕参数真值 θ 波动. 即要求 $\hat{\theta}$ 的平均取值与 θ 相同. 这一要求称为无偏性.

1. 定义.

设 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 是来自总体 X 的样本. θ 是待估参数. Θ 为参数空间.

设 $\hat{\theta}(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 是 θ 的估计量, 数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在. 对任意 $\theta\in\Theta$ 有 $E(\hat{\theta})=\theta$.

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量. $|E(\hat{\theta})-\theta|$ 称为系统误差.

2. 例题

从总体 X 中取一样本 $(X_1, X_2 \cdots X_n)$. $EX=\mu$. $DX=\sigma^2$. 试证样本均值 $\bar{X}$ 及样本方差 S^2 分别是 μ 及 σ^2 的无偏估计.

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}[X_i-\mu-(\bar{X}-\mu)]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2 - \frac{n}{n-1}E(\bar{X}-\mu)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}DX_i - \frac{n}{n-1}D\bar{X} \qquad D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i = \frac{1}{n}\sigma^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot n\sigma^2 - \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

二. 有效性

1. 定义

当估计量 $\hat{\theta}$ 的平均取值与 θ 相同时，自然要求 $\hat{\theta}$ 取值的波动性要尽可能小. 这就是有效性的要求

无偏估计量的方差越小，所得到的估计值与参数真值的偏离越小.

设 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量. 若 $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$.

则 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

2. 例题（书 P_{119}）

三. 相合性.

$$估计量 \xrightarrow[P]{\theta \to \infty} 真实值$$

§6.3 参数的区间估计

一. 定义.

区间估计：该范围包含真实值的可靠程度.

设总体 X 的分布中含有未知参数 θ. 对给定值 α $(0<\alpha<1)$. 若由样本 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 确定的两个统计量 $\theta_1(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 与 $\theta_2(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 满足

$$P\{\theta_1(X_1, X_2 \cdots X_n) < \theta < \theta_2(X_1, X_2 \cdots X_n)\} = 1-\alpha$$

则称区间 (θ_1, θ_2) 为参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

θ_1, θ_2 分别称为置信下限和置信上限. $1-\alpha$ 称为置信度 / 置信水平.

置信度 $1-\alpha$.

所求 已知/未知	μ 的置信区间	所求 已知/未知	σ^2 的置信区间
σ^2 已知	$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})$	μ 已知	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$
σ^2 未知	$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$	μ 未知	$\left(\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}S, \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}S\right)$

第七章：假设检验.

一. 解题步骤.

1. 原假设 H_0. 备择假设 H_1
2. 选取检验统计量.（要求此统计量在 H_0 成立条件下有确定的分布或渐近分布）
3. 给定显著水平 α 的值. 确定临界值. 拒绝域
4. 判断：拒绝 & 接受 H_0 的判断.

二. 两类错误

	H_0 真	H_0 不真
接受	✓	X(II)
拒绝	X(I)	✓

✓ 正确决定. X 错误决定.

两类错误：I：P(拒绝 H_0 | H_0 真) $= \alpha$

II：P(接受 H_0 | H_0 不真) $= \beta$

$\}$ 不能同时小

设计标准：使 I 类错误小的概率. α（显著水平）很小.

P(犯错) $\leq \alpha$ (小)

三. 双侧假设检验和单侧假设检验

1. 根据问题提出原假设 $H_0: \mu = \mu_0$
2. 根据实际情况选择备择假设

$$H_1: \begin{cases} ① \ \mu \neq \mu_0 \\ ② \ \mu > \mu_0 \\ ③ \ \mu < \mu_0 \end{cases}$$

3. 即：对 μ 可提出三种假设检验

① $H_0: \overset{\text{给定的}}{\mu = \mu_0}$ $H_1: \mu \neq \mu_0$

② $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ 右边检验

③ $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ 左边检验

$\}$ 单侧检验

双侧假设检验：拒绝域在接受域的两侧

检验总体参数与某个具体数值是否有显著差异

单侧假设检验：拒绝域只在接受域的一侧

总体参数是否显著增大或降低.

均值μ的检验.

	检验法则	原假设H_0	检验统计量	H_0为真时统计量分布	备择假设H_1	拒绝域
σ^2已知	u检验	$\mu=\mu_0$	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$u\geq u_\alpha$ $u\leq -u_\alpha = u_{1-\alpha}$ $\lvert u\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
σ^2未知	t检验	$\mu=\mu_0$	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$t\geq t_\alpha(n-1)$ $t\leq -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

σ^2的检验

	检验法则	原假设H_0	检验统计量		备择假设H_1	拒绝域
μ未知	χ^2	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或$\chi^2\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
μ已知	χ^2	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2$	$\chi^2(n)$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_\alpha(n)$ $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n)$ $\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$或$\chi^2\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$

$$\chi^2_{(n-1)}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$