
第四篇
振动和波动

第19章

振 动

1940年美国塔科马海峡大桥断塌

振动是自然界中最普遍的一种运动形式。物体在平衡位置附近做往复的周期性运动，称为机械振动。

广义振动： 任一个物理量在某一定值附近往复变化， 该物理量的运动称为振动。如电流、电压、电场强度和磁场强度围绕某一平衡值做周期性变化，称为电磁振动或电磁振荡

虽然各种振动的具体物理机制可能不同，但是作为振动这种运动的形式，它们却具有共同的特征。

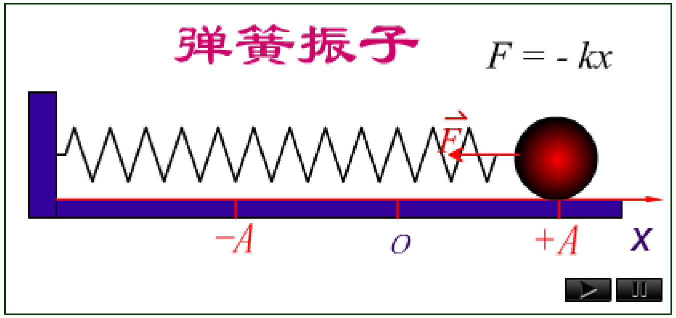
- 振动
  - 受迫振动 → 共振
  - 自由振动
    - 阻尼自由振动
    - 无阻尼自由振动 →
      - 无阻尼自由非谐振动
      - 无阻尼自由谐振动（简谐振动）

振动的理论建立在简谐振动的基础上。

本章以<u>机械简谐振动</u>为例, 说明振动的一般性质

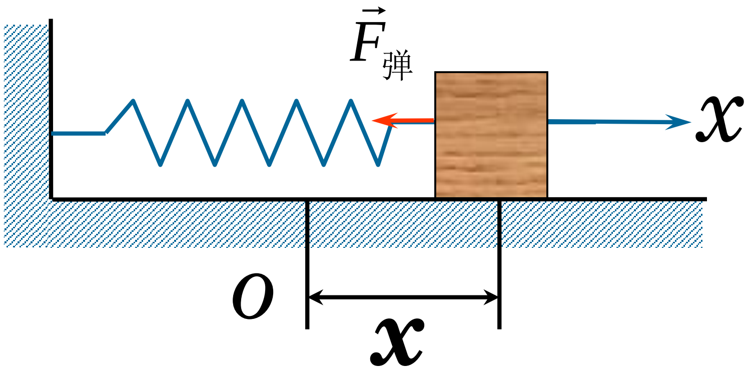
§ 1　简谐振动描述

一、简谐振动的定义



$$F = -kx$$

又由　$F = ma = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$



$$\therefore \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

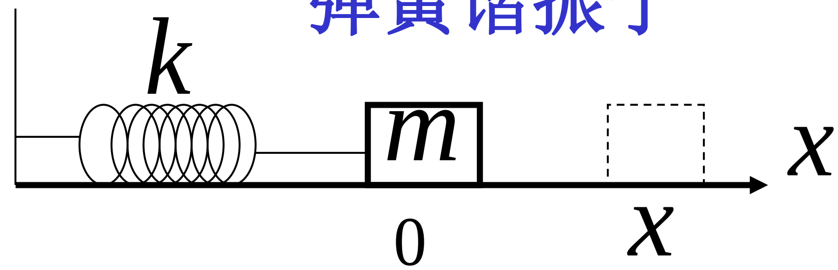
令 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$　　则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$

$\boxed{定义\ \ x = A\cos(\omega t + \varphi)}$ ——谐振动方程

物体离开平衡位置的位移按余弦函数(或正弦函数)的规律随时间变化**的振动**，称为**简谐振动**

简谐振动的判据

弹簧谐振子



1. 运动学表达式

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

2. 动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2} + \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\cancel{\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}^2} - \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{x} = \mathbf{0}}$$

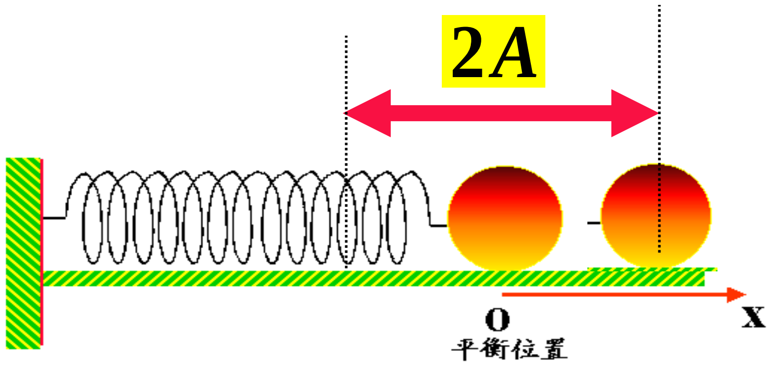
加速度与位移成正比而反向

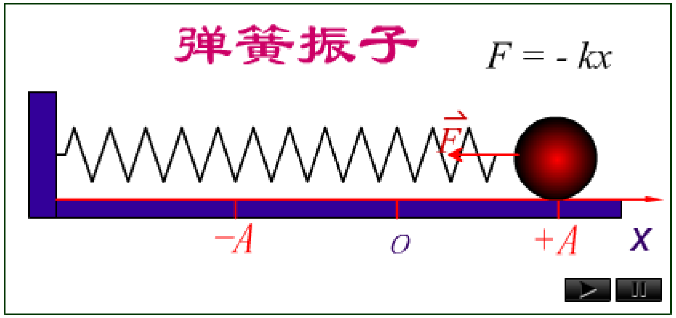
$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{kx}$ —准弹性力 （恢复力）

合外力与位移成正比而反向

二、简谐振动的特征量

简谐运动方程 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$





$$A = \left| x_{\max} \right|$$

A永远是正值

1. 振幅 *A*：振动物体离开平衡位置的最大距离。

2. 周期和频率：

2. 周期和频率：　$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

周期：T　（S）　完全振动一次所需时间

频率：ν　$\nu = \dfrac{1}{T}$（H_Z）单位时间内的完全振动次数

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \varphi) \\ &= A\cos[\omega(t + T) + \varphi] \\ &= A\cos(\omega t + \varphi + 2\pi) \end{aligned}$$

$\therefore \omega T = 2\pi$

圆频率：ω　（rad/S）：2πs 时间内物体所作完全振动的次数。

（角频率）

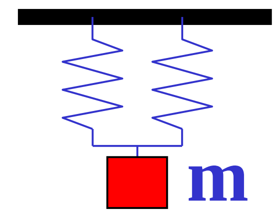
T, ν, ω 反映系统的周期性,是系统本身的固有的性质,称固有周期、固有频率

弹簧振子　$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

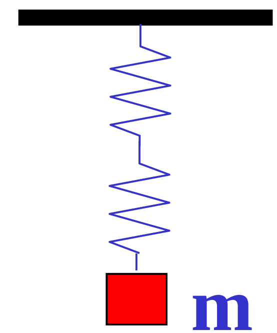
讨论：弹簧串、并联的等效弹性系数

1. 设两个弹簧弹性系数分别为k_1和k_2

并联： 等效弹性系数为k_1+k_2。$(k_1+k_2)\,x = mg$



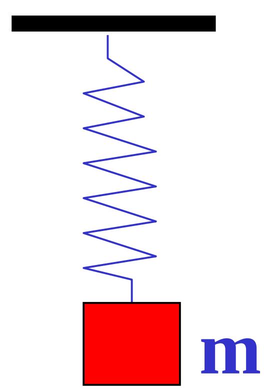
串联： 等效弹性系数为$k_1k_2/(k_1+k_2)$；



$$k\,(x_1+x_2) = mg \qquad k_1x_1 = k_2x_2 = mg$$

不同长度的两节弹簧的弹性系数之比：$k_1/k_2 = l_2/l_1$

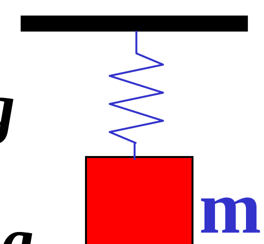
2. 弹簧截取长度一半



弹性系数由K变成$2K$。

$$k\,x = mg$$

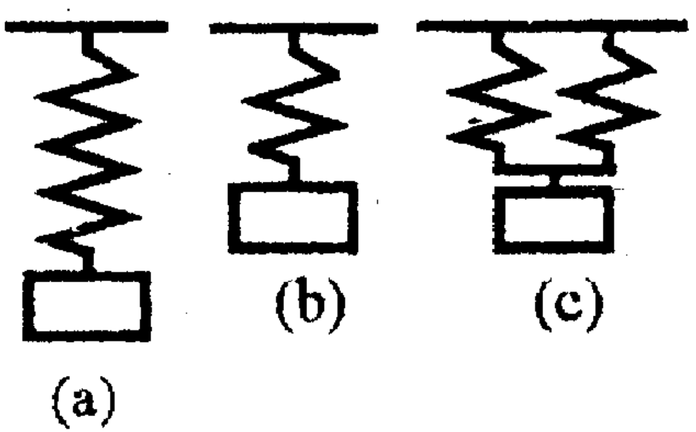
$$k'\frac{x}{2} = mg$$



例：物体质量都为m，b弹簧长度为a 的一半，c中两弹簧长度与b相同，则三个系统的ω^2值之比[B]

（A）2:1:0.5（B）1:2:4

（C）4:2:1　（D）1:1:2



k　　$2k$　　$4k$

并联：

$$k = k_1 + k_2$$

$$\omega_1^2 = k/m$$

$$\omega_2^2 = 2k/m$$

$$\omega_3^2 = 4k/m$$

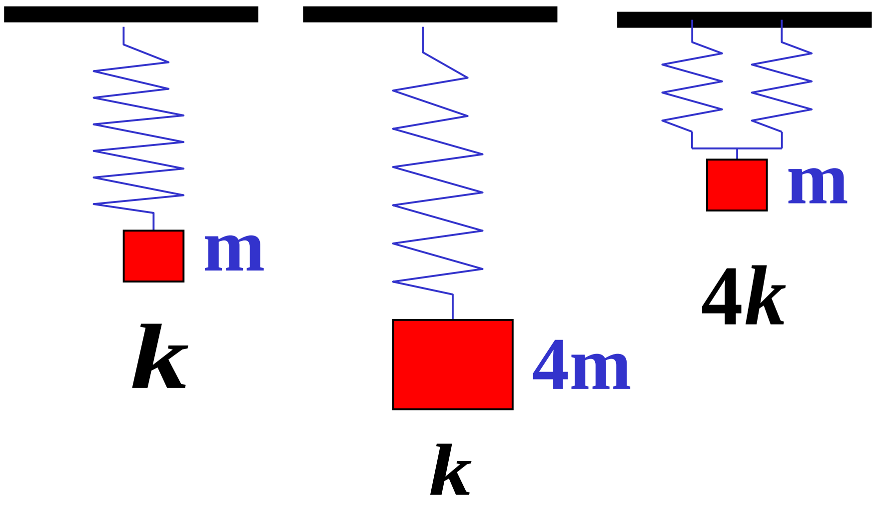
例：　在一铅直悬挂的弹簧下系一质量为m的物体，再用此弹簧改系一质量为4m的物体，最后将此弹簧截断为两个等长的弹簧，并联后悬挂质量为m的物体，则这三个系统的周期值之比为

(A) $1:2:\sqrt{1/2}$

(B) $1:1/2:2$

(C) $1:2:1/2$

(D) $1:2:1/4$



答:（C）

$$T_1 = 2\pi\sqrt{m/k}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{4m/k} = 2T_1$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{m/4k} = T_1/2$$

3. 相位和初相

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ \upsilon = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \\ a = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$(\omega t+\varphi)$ 确定 $\Leftrightarrow$ x、υ、a 确定

称为**相位/位相**：决定振动物体的运动状态。

- t 时相位: $(\omega t+\varphi)$
- t =0时相位: φ 初相（位）

初相反应了t =0时刻的振动状态 $(x_0，\upsilon_0)$

(φ 取 $[-\pi \to \pi]$或 $[0 \to 2\pi]$)

物理意义: 表征任意时刻（t）物体振动状态（相貌）.

物体经一**周期**的振动，相位改变2π .

相的概念在比较两个谐振动的步调时也很有用！

➢相位差

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \phi_2) - (\omega t + \phi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$

若 $\Delta\varphi > 0$，称 x_2 比 x_1 超前（x_1 比 x_2 落后）。

若 $\Delta\varphi = 0$，称 x_2 和 x_1 同相

$\Delta\varphi = \pi$ 反相

振动三要素：振幅 A、频率 ν（或 T 或 ω）、初相 φ

4. 常数A和φ的确定

振幅A和初相φ由初始条件（t=0时 x_0，v_0）确定.

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$x_0 = A\cos\varphi$；

$v_0 = -\omega A\sin\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}} \\ \boxed{\tan\varphi = \dfrac{-v_0}{\omega x_0}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)}$$

φ在0—2π之间有两个解，但只有一个解符合要求，为此要根据已知的x_0、v_0的正负来判断和取舍。

三、简谐振动的描述

1. 解析描述

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -\omega^2 x$$

x, υ, a 均是作谐振动

- 频率相同 ω
- 振幅的关系 $x_m = A$ $\upsilon_m = A\omega$ $a_m = A\omega^2$
- 相位的关系 υ比 x 超前 $\frac{\pi}{2}$ a比 υ 超前 $\frac{\pi}{2}$

2. 曲线描述

根据 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$ 画出

$$\upsilon = A\omega\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

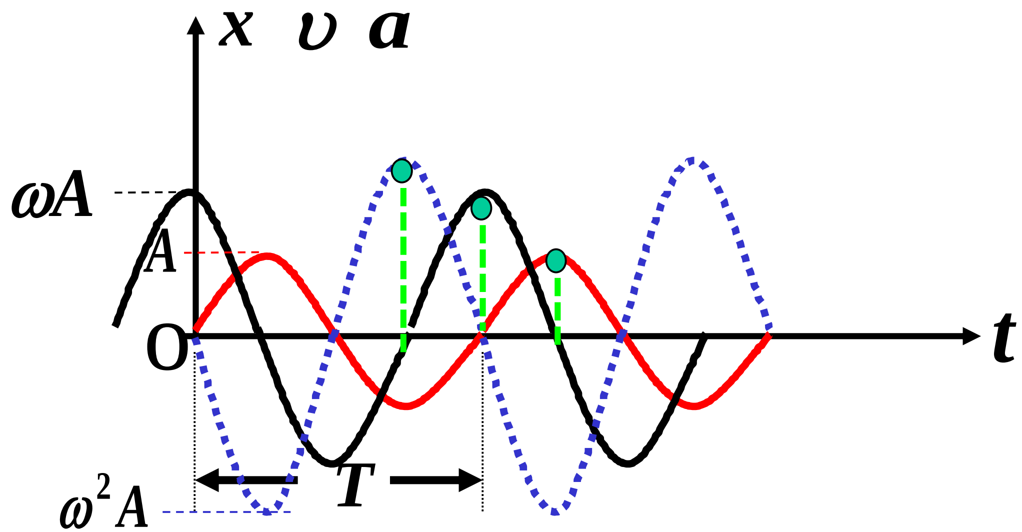
取 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

$x \sim t$ 振动曲线

$\upsilon \sim t$ 曲线

$a \sim t$ 曲线

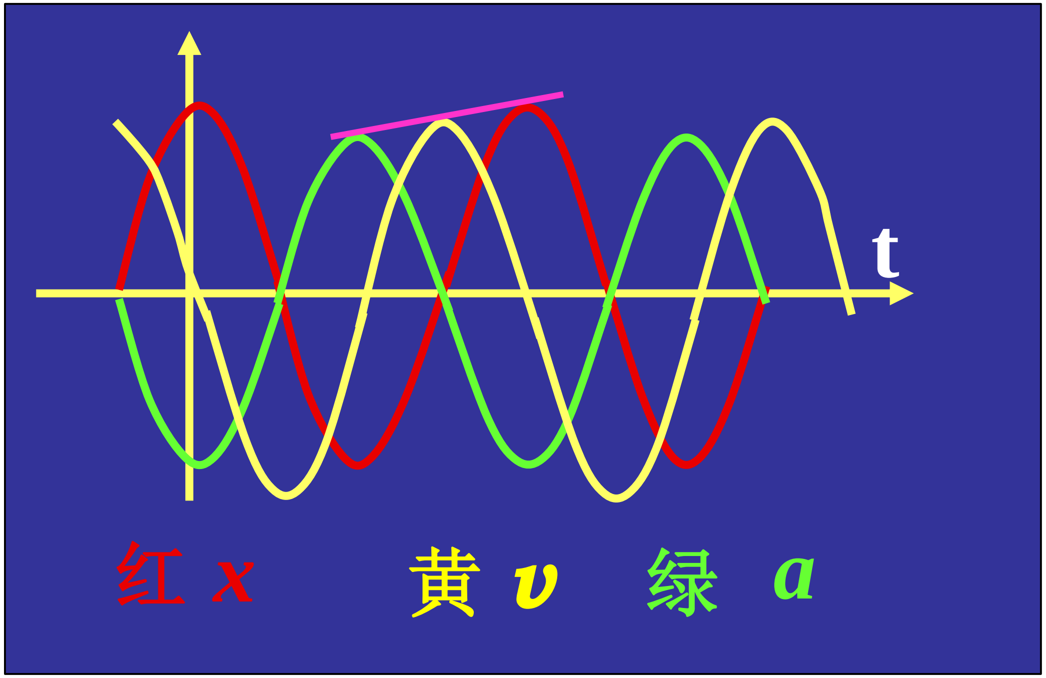


频率相同

振幅的关系

相位的关系: υ比x超前 $\frac{\pi}{2}$ a比υ超前 $\frac{\pi}{2}$

在振动曲线图中比较两个谐振动的步调

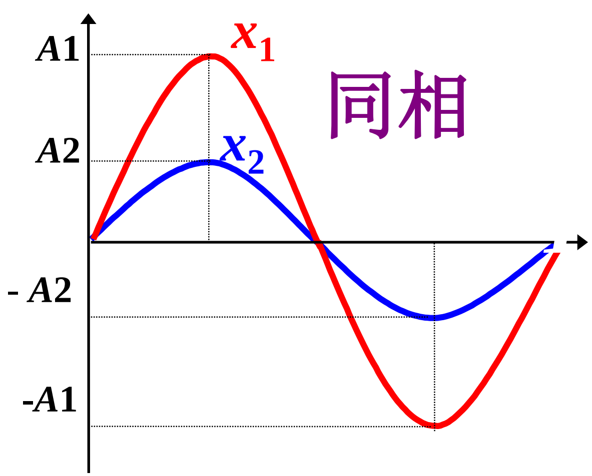


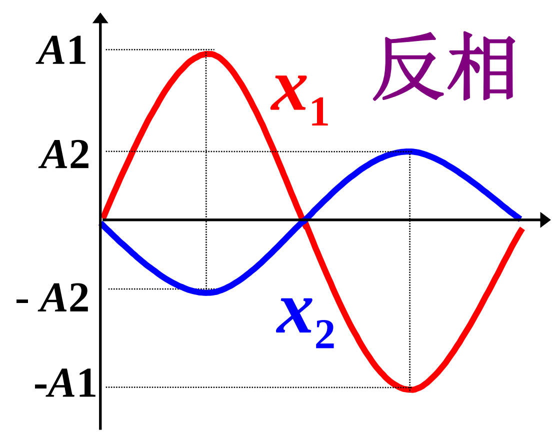
a比υ超前 $\frac{\pi}{2}$

υ比 x超前 $\frac{\pi}{2}$

a比 x超前 π

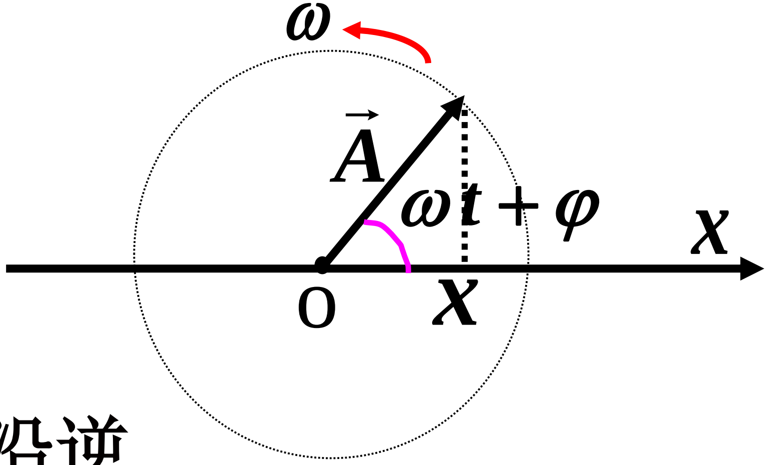
a与 x反相





2. 旋转矢量法 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

规定： 旋转矢量 $\vec{A}$



$$|\vec{A}| = A$$

以匀角速度 ω 逆时针转

则矢量端点以恒角速度ω 沿逆时针做半径为A匀速圆周运动。

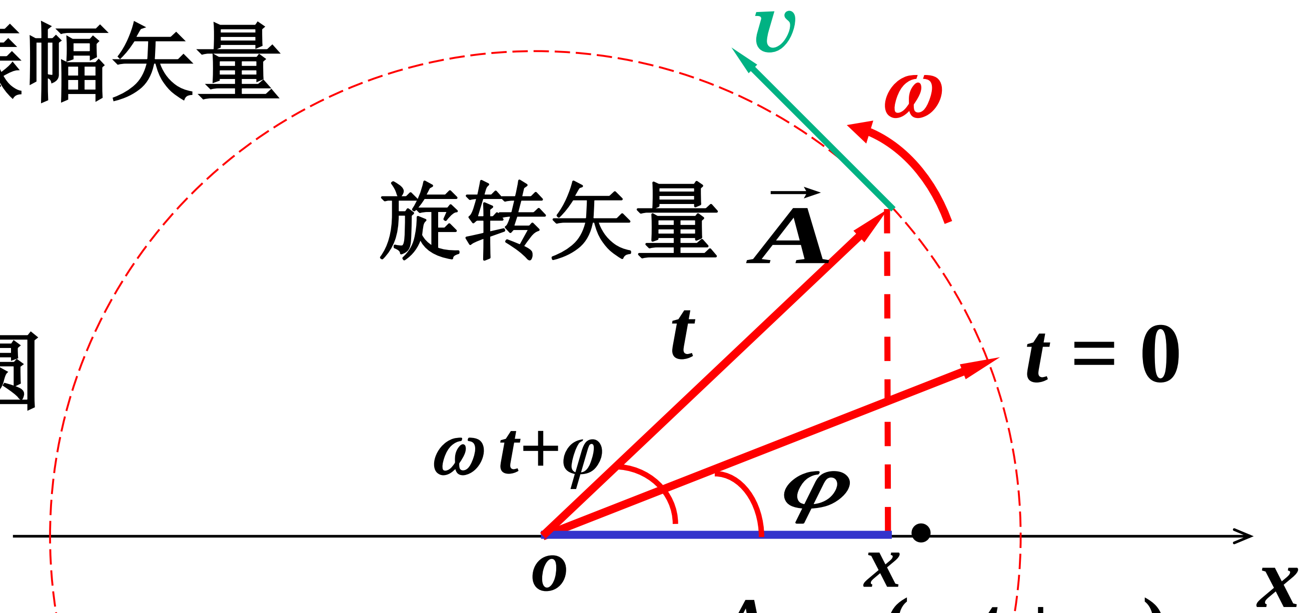
规定：t=0时$\vec{A}$与x轴的夹角为 φ

任意t 时刻，矢量端点在x轴上的投影点的坐标：

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

旋转的振幅矢量

参考圆



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量的长度 ⟶ 振幅

旋转的角速度 ⟶ 圆频率(角频率)

矢量与 x 轴的夹角 ⟶ 位相

t=0时与 x 轴的夹角 ⟶ 初位相

矢量端点的投影坐标 ⟶ 振动的位移

矢量端点的线速度投影 ⟶ 振动速度（上负下正）

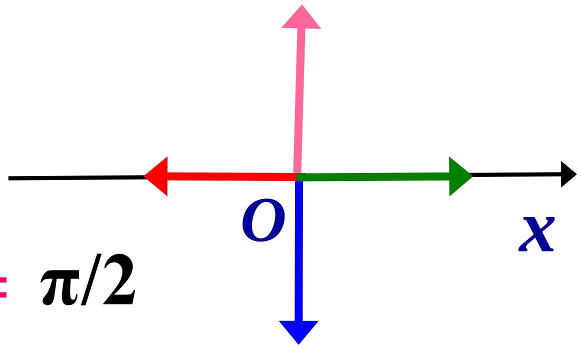
1）直观地表达振动状态（易于确定相位）

$x_0=+A$，初相= 0

$x_0=-A$，初相= π

$x_0=0$且向负最大位移运动,初相= $\pi/2$

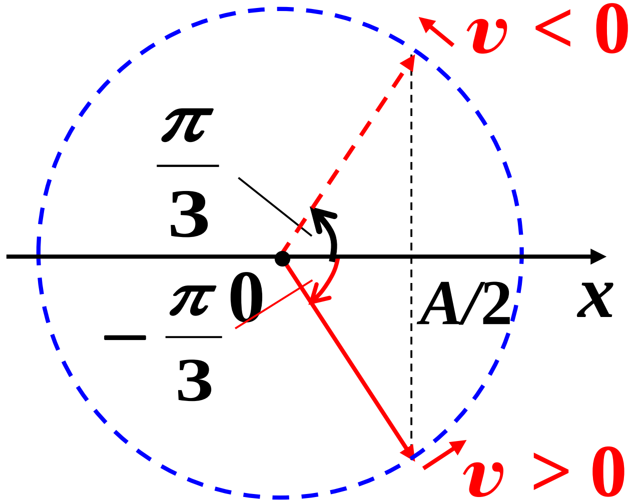
$x_0=0$且向正最大位移运动,初相= $-\pi/2$



例：已知某时刻质点经二分之一振幅处向正方向运动，确定其相位

$$\begin{cases} x = A/2 \\ v > 0 \end{cases}$$

由图知 $\omega t+\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$

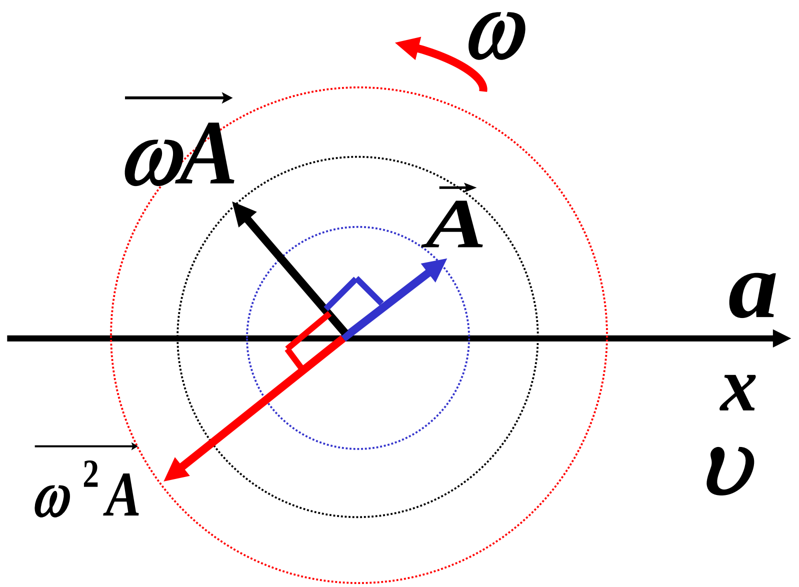


2）方便地比较振动步调（易于求相位差）

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$



由图看出：速度超前位移 $\dfrac{\pi}{2}$

加速度超前速度

加速度与位移 $\Delta\varphi = \pi$，反相

3）方便计算　　用圆周运动代替三角函数的运算

例：求a、b点的相位差和由a变到b运动状态所需的时间.

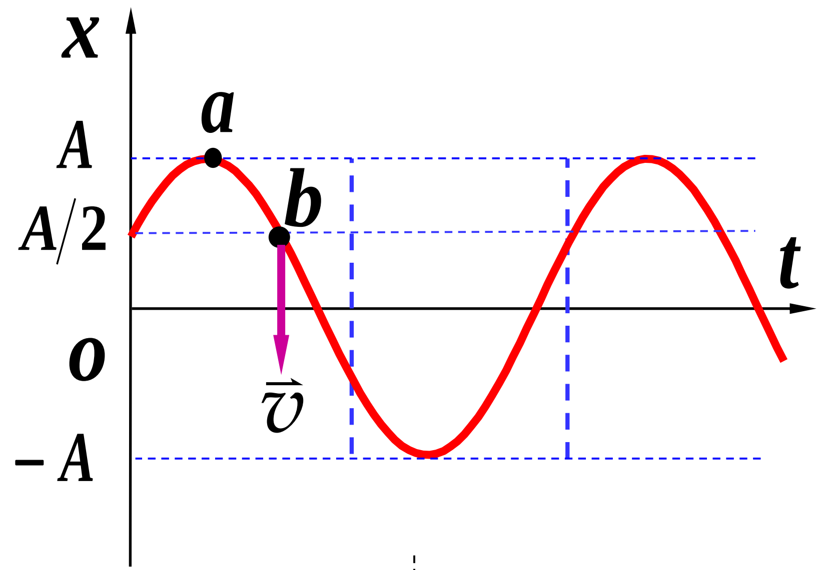
$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$$

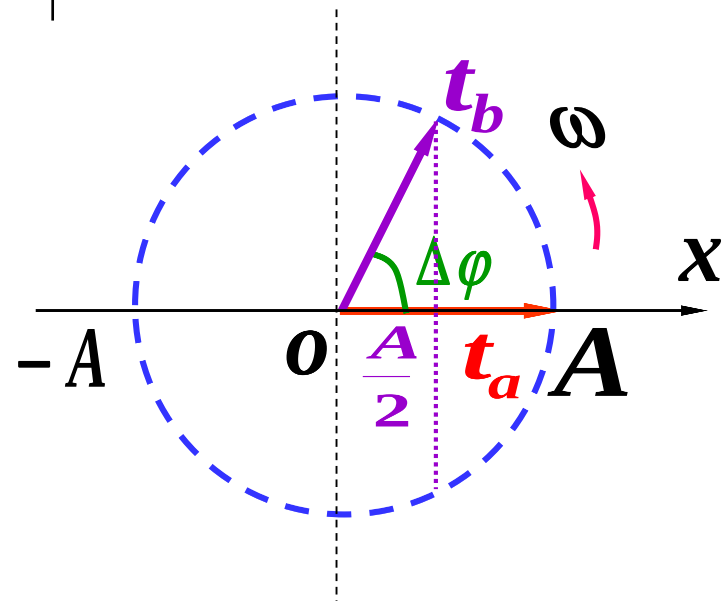
$$x_a = A\cos(\omega t_1 + \varphi)$$

$$x_b = A\cos(\omega t_2 + \varphi)$$

$$\because \Delta\varphi = \omega (t_2 - t_1)$$

$$\therefore \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi/3}{\omega}$$





四、确定振动方程

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

1）解析法

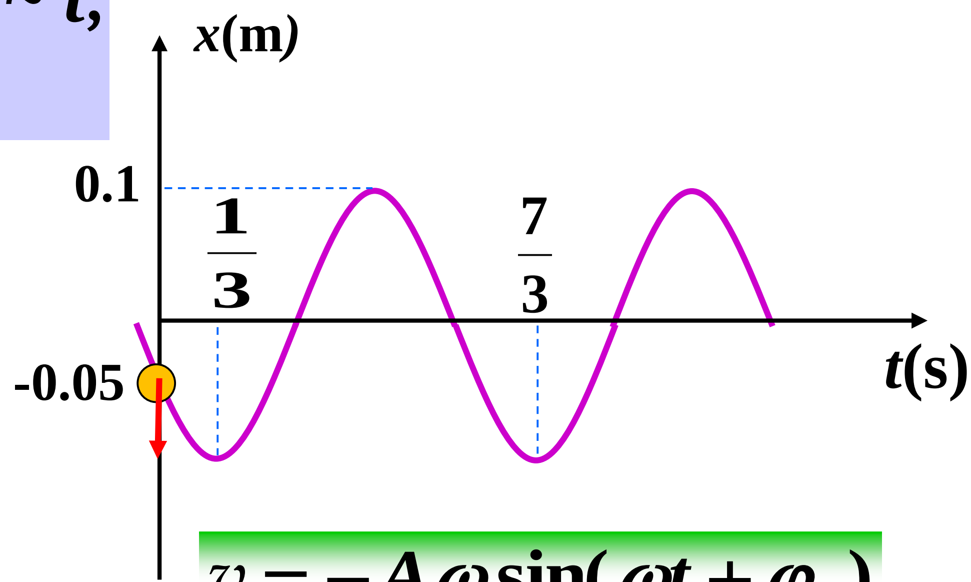
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \cdots (1) \\ \upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi \cdots (2) \end{cases}$$

解方程

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}} \cdots (3) \qquad tg\varphi = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0} \cdots (4)$$

2）旋转矢量法

例： 已知简谐振动曲线$x\sim t$，试写出此振动的运动方程



解： 设振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = 0.1m \quad T = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2s$$

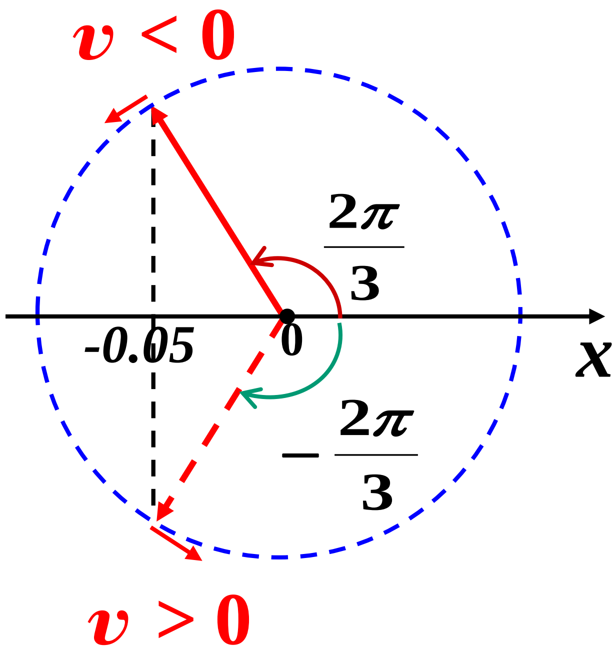
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \ \ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

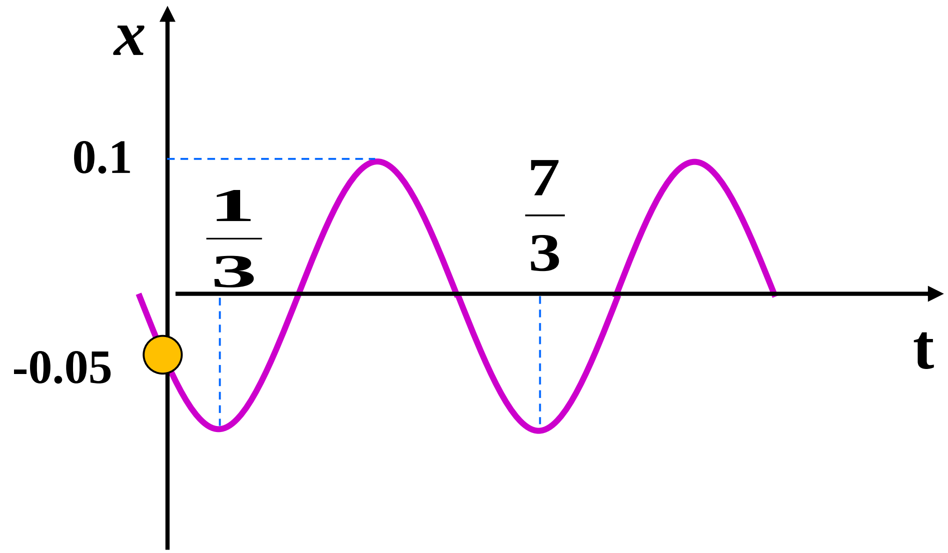
由图知：
$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 < 0 \end{cases} \qquad \cos\varphi_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi_0 = \pm\frac{2\pi}{3}$$

所以 $\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi \qquad \therefore x = 0.1\cos(\pi t + \frac{2}{3}\pi)$ （解析法）

旋转矢量法:





t=0时 $\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$

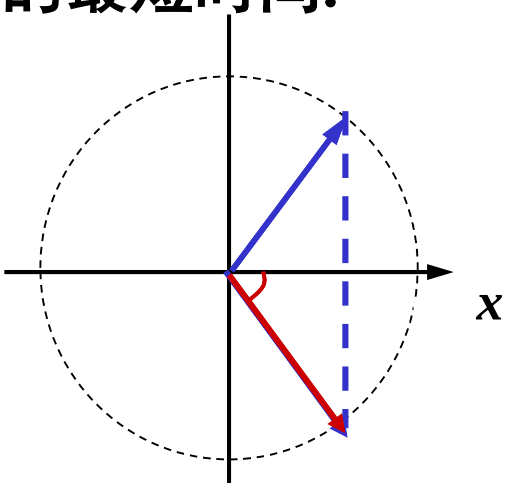
$$\therefore x = 0.1\cos(\pi t + \frac{2}{3}\pi)$$

例： 一质点沿x轴作简谐运动的振幅为12cm，周期为2s. 当t = 0时，位移为6cm，且向x轴正方向运动.求:

(1) 振动表达式；

(2) t = 0.5s时，质点的位置、速度和加速度；

(3)如果在某时刻质点位于x= -6cm，且向x轴负方向运动，求从该位置回到平衡位置所需要的最短时间.



解： A=12cm，T=2s，x_0=6cm

(1)
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$x = 0.12\cos(\pi t + \varphi)\ \mathrm{m}$$

t=0 时，$x_0 = 0.06\ \mathrm{m}$ ，

$$v_0 > 0 \qquad \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\ \mathrm{m}$$

(2)
$$x\Big|_{t=0.5\mathrm{s}} = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5\mathrm{s}}$$

$$= 0.10\,\mathrm{m}$$

$$v\Big|_{t=0.5\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0.5\mathrm{s}}$$

$$= -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5\mathrm{s}}$$

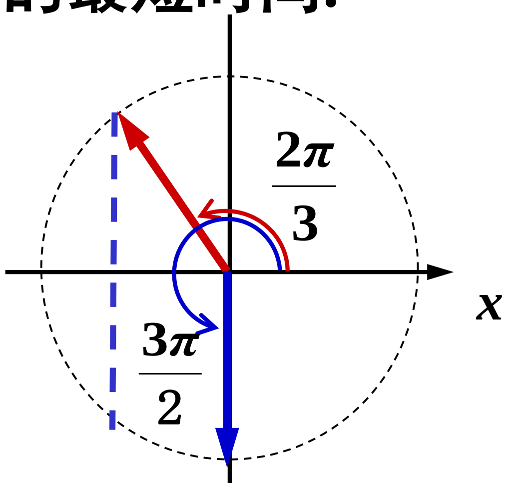
$$= -0.19\,\mathrm{m/s}$$

例： 一质点沿x轴作简谐运动的振幅为12cm，周期为2s．当t = 0时，位移为6cm，且向x轴正方向运动.求:

(1) 振动表达式；

(2) t = 0.5s时，质点的位置、速度和加速度；

(3)如果在某时刻质点位于x= -6cm，且向x轴负方向运动，求从该位置回到平衡位置所需要的最短时间.



解：

$$v\Big|_{t=0.5\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0.5\mathrm{s}}$$

$$= -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5\mathrm{s}}$$

$$= -0.19\,\mathrm{m/s}$$

$$a\Big|_{t=0.5\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0.5\mathrm{s}}$$

$$= -0.12\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5\mathrm{s}}$$

$$= -1.0\,\mathrm{m/s^2}$$

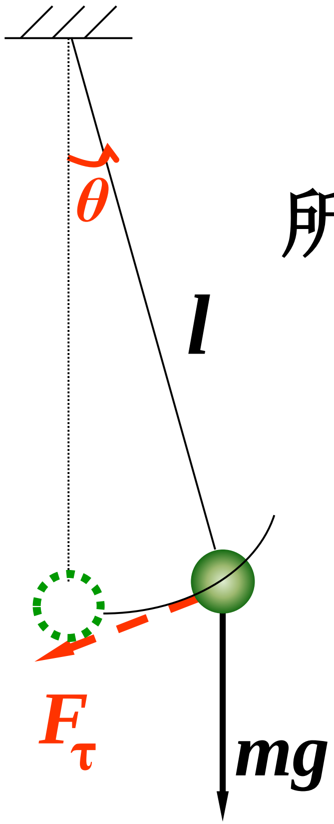
(3) $$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{5\pi}{6\pi} = \frac{5}{6}\,\mathrm{s}$$

五、 简谐振动的实例 （取逆时针方向为正）

● 单摆　　摆球相对平衡位置的**角位移**为θ时：



$$F_\tau = -mg\sin\theta = ma_\tau = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta$　　$\theta < 5^\circ$ 时，$\sin\theta \approx \theta$

则 $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$　　令：$\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}}$

周期：$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

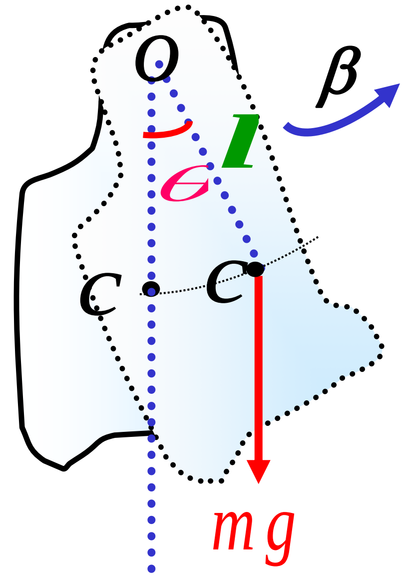
得：$\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$　　$\theta = \theta_m\cos(\omega t + \varphi)$

其中θ_m为最大角位移，即（角）振幅。

单摆的运动在摆角很小时是简(角)谐振动

重力加速度的测量：$g = 4\pi^2\dfrac{l}{T^2}$

•复摆（物理摆）的振动



由转动定律 $-mgl\sin\theta = J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

得 $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{mgl}{J}\sin\theta = 0$ $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0}$

对比谐振动方程知：一般情况不是简谐振动

但若做小幅度摆动 即θ很小 $\sin\theta \approx \theta$时

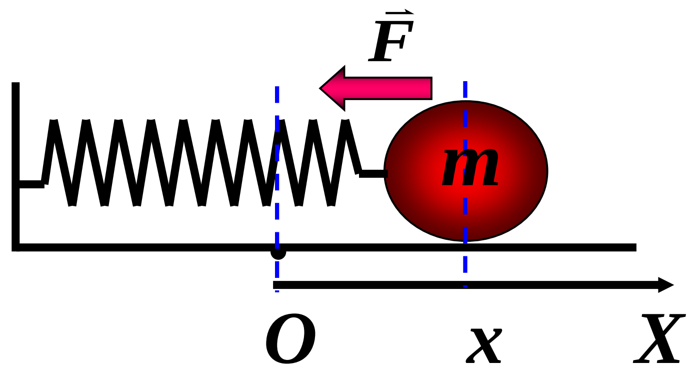
则： $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{mgl}{J}\theta = 0$ 振动的物理量 角位移θ

固有圆频率 $\omega^2 = \dfrac{mgl}{J}$ ➡ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgl}}$ 测J的一种方法

振动表达式 $\theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\dfrac{mgl}{J}}t + \varphi\right)$

§ 2　简谐振动的能量

以水平弹簧振子为例:



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

势能: $E_p = \frac{1}{2}k\ x^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

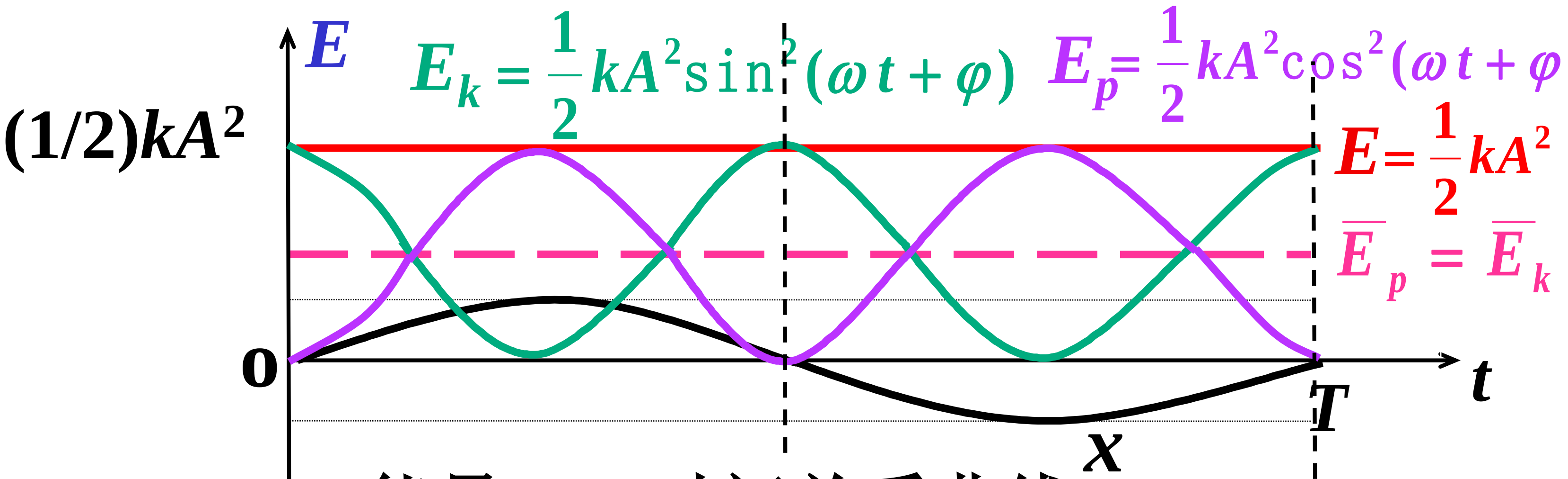
动能: $E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

机械能: $E = E_k + E_P = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$　$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$

结论:

1）简谐振动系统的总机械能守恒!

2）$E \propto A^2$　（普适）　　A是振动强度的标志



能量——时间关系曲线

系统势能的平均值： $\overline{E}_k=\overline{E}_p=\frac{1}{2}E$

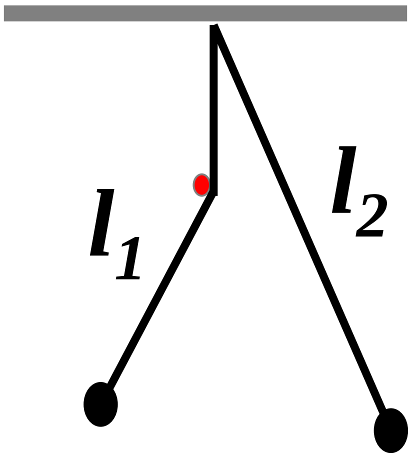
$$\overline{E}_p=\frac{1}{T}\int_0^T E_p\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

思考： 1. 平衡位置能量特点：动能最大，势能为零

2. 动能和势能变化频率是：2 ω

$$E_K=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\,\frac{1}{2}[1-\frac{1}{2}\cos(2\omega t+\varphi)]$$

例: 单摆的悬线长l_2=1.5 m，在顶端固定点的下方0.45 m处有一小钉，如图示. 设两方摆动均较小，则单摆的左右两方振幅之比A_1/A_2为______.



解: 机械能守恒

$$\frac{1}{2}m\omega_1^2A_1^2=\frac{1}{2}m\omega_2^2A_2^2$$

于是
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}=\sqrt{\frac{1.5-0.45}{1.5}}\approx 0.84$$