随机变量及其分布
习 题 课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

二维随机变量的分布

有关概率的计算和随机变量的独立性

2.难点

随机变量函数的分布

目 上 下 回 停 续

二、主要内容

二维随机变量

推广

随机变量的相互独立性

定义

联合分布函数

联合分布律

联合概率密度

条件分布

边缘分布

定义

性质

两个随机变量的函数的分布

随机变量的分布:

1、离散型 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

（1）(0—1)分布

X	0	1
p_k	$1-p$	p

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$

(3) 泊松分布 $X \sim \pi(\lambda)$

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad k=0,1,2,\cdots$$

（4）离散型求分布函数的原则：

- 以取值点为临界点讨论
- 区间左闭右开

2、分布函数的性质：

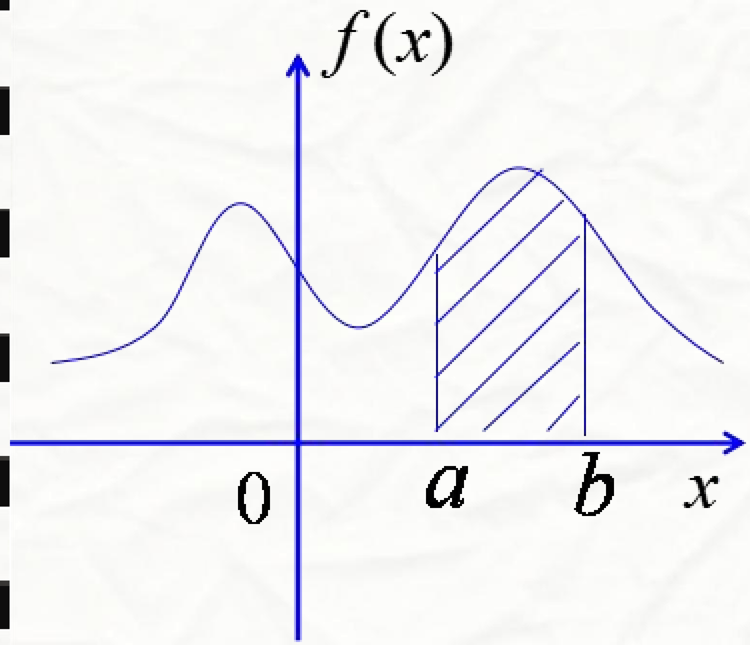
$$
\begin{cases}
x_1 < x_2\,,\ F(x_1) \le F(x_2) \\
0 \le F(x) \le 1 \\
F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \\
F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1; \\
F(x+0) = \lim\limits_{t \to x^+} F(t) = F(x)\,. \\
P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)
\end{cases}
$$

3、连续型随机变量

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

概率密度的性质

- $f(x)\ge 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $P\{a<X\le b\}=\int_{a}^{b} f(x)dx;$
- $f(x)=F'(x)$
- $P\{X=x_0\}=0;$



$f(x)$ 与$F(x)$相互求解的方法

几种常用的分布

均匀分布：$X \sim U[a,b]$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

指数分布：$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

正态分布：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,$$

标准正态分布：$\varphi(x),\Phi(x)$

随机变量函数的分布:

（1）分布函数法

（2）定理法（注意使用条件）

目 上 下 回 停 续

1、分布函数 $F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$

性质:

① $F(x,y)$是变量 x和 y的不减函数

② $0 \le F(x,y) \le 1$

$$F(-\infty,y)=0,\quad F(x,-\infty)=0,\quad F(-\infty,-\infty)=0$$

$$F(+\infty,+\infty)=1.$$

③ $F(x,y)$ 关于 x,y 右连续，即

$$F(x,y)=F(x+0,y)\quad ,F(x,y)=F(x,y+0)$$

2、离散型 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i, j=1, 2, \cdots)$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$$

3、连续型

概率密度函数 $f(x,y)$
$$\begin{cases} f(x,y)\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \\ \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=f(x,y) \\ P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy, \end{cases}$$

$f(x,y) \to F(x,y)$

目 上 下 回 停 续

4、边缘分布 $F_X(x)=F(x,+\infty),\quad F_Y(y)=F(+\infty,y)$

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}\quad,i=1,2,\cdots\quad=p_{i\bullet}$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\ ,j=1,2,\cdots\quad=p_{\bullet j}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

—— 注意含参变量的讨论

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

5、独立性 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立。

6、函数的分布

Ⅰ. $Z=X+Y$ 的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

当X与Y相互独立时,$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)\cdot f_Y(y)dy$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$ ——注意含参变量积分的讨论

步骤：1、公式；2、写出被积函数，并在y,z平面上确定被积函数不为零的区域；3、根据z的讨论，确定y的积分区间；4、整理计算结果。

或者先求Z的分布函数，再求概率密度。

Ⅱ. $M=\max(X,Y)$，$N=\min(X,Y)$ （相互独立）

$$F_M(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$$

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

(4) 两个常用的分布

设 D 是平面上的有界区域, 其面积为 A , 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in D, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称(X,Y)在D上服从均匀分布.

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$为常数,$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1,$

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$。

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布.

边缘分布函数

设$F(x,y)$为随机变量(X,Y)的分布函数，则

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\},$$

令 $y\to\infty$, 称

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<\infty\}=F(x,\infty)$$

为随机变量(X,Y)关于 X 的边缘分布函数.

记为 $F_X(x)=F(x,\infty)$.

同理令 $x\to\infty$,

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=P\{X<\infty, Y\le y\}=P\{Y\le y\}$$

为随机变量(X,Y)关于 Y 的边缘分布函数.

离散型随机变量的边缘分布

设二维离散随机变 量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$$

记 $$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律 .

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布

随机变量关于X 和 Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \le y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

连续型随机变量的边缘分布

对于连续型随机变量 (X,Y), 设它的概率密度为 $f(x,y)$, 由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,x,$$

记

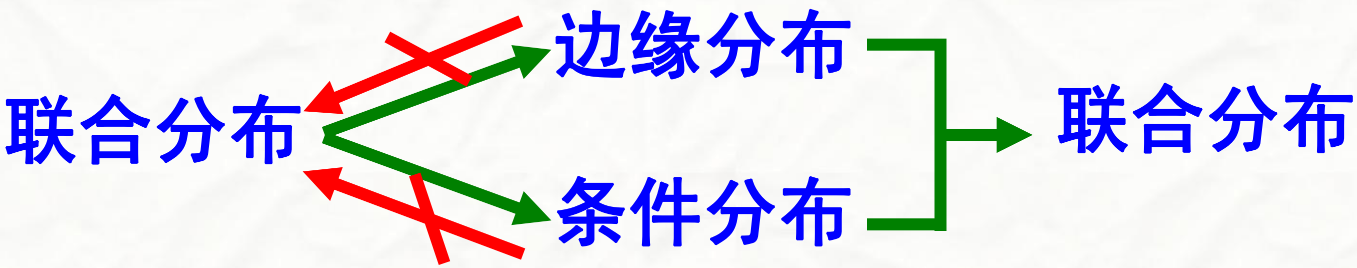
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

称为随机变量 (X,Y) 关于 X 的的边缘概率密度.

同理得 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x.$$

联合分布、边缘分布、条件分布的关系



随机变量的相互独立性

设 $F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x, y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即 $$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

目 上 下 回 停 续

说明

(1) 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$ 即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}$.

(2) 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$,边缘概率密度分别为 $f_X(x),f_Y(y)$,则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

(3) X 和 Y 相互独立,则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

例1 设(*X*,*Y*)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\ , & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c的值； （2）两个边缘密度。

解：(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$

由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$$

确定C

$$=\int_0^1[\int_0^x cy(2-x)dy]dx$$

$$=c\int_0^1[x^2(2-x)/2]dx=5c/24=1,$$

$$\Rightarrow c=24/5$$

目 上 下 回 停 续

例1 设(X,Y)的概率密度是

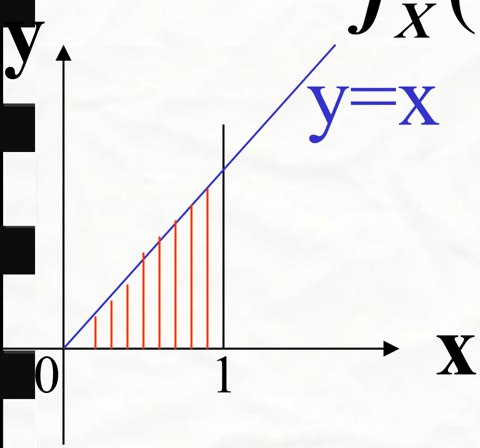
$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c的值; (2) 两个边缘密度 .

解: (2)

$$f_X(x)=\int_0^x \frac{24}{5}y(2-x)dy$$

注意积分限



$$=\frac{12}{5}x^2(2-x),\qquad 0\le x\le 1$$

注意取值范围

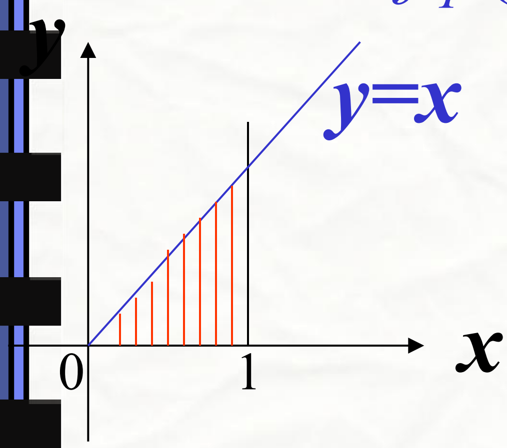
例1 设(X,Y)的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} cy(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0\quad, & \text{其它} \end{cases}$$

求 (1) c的值; (2) 两个边缘密度 .

注意积分限

解: (2) $f_Y(y)=\int_y^1 \frac{24}{5}y(2-x)dx$



$$=\frac{24}{5}y\left(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}\right),\quad 0\le y\le 1$$

注意取值范围

即

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(\dfrac{3}{2}-2y+\dfrac{y^2}{2}), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

例2. 若(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

问X和Y是否独立？

解： $$f_X(x)=\int_x^1 2dy=2(1-x),\qquad 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_0^y 2dx=2y,\qquad 0<y<1$$

由于存在面积不为0的区域，

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故X和Y不独立 .

例3 设二维随机变量(X, Y)的联合分布律如下表所示。

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	0.25	0.1	0.3
2	0.15	0.15	0.05

试求$Z_1=X+Y$；$Z_2=XY$；$Z_3=\max\{X, Y\}$的分布律。

解 先列出如下表格

(X, Y)	$(-1, -1)$	$(-1, 1)$	$(-1, 2)$	$(2, -1)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$
p_{ij}	0.25	0.1	0.3	0.15	0.15	0.05
$Z_1=X+Y$	-2	0	1	1	3	4
$Z_2=XY$	1	-1	-2	-2	2	4
$Z_3=\max\{X, Y\}$	-1	1	2	2	2	2

因此， $Z_1=X+Y$的分布律为

Z_1	-2	0	1	3	4
p_k	0.25	0.1	0.45	0.15	0.05

$Z_2=XY$的分布律为

Z_2	-2	-1	1	2	4
p_k	0.45	0.1	0.25	0.15	0.05

$Z_3=\max\{X+Y\}$的分布律为

Z_3	-1	1	2
p_k	0.25	0.1	0.65

例4 设X，Y是相互独立的服从标准正态分布$N(0, 1)$的随机变量。求$Z=X+Y$的概率密度。

解 由于

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty$$

因此,由卷积公式有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

目 上 下 回 停 续

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx \quad 令\frac{t}{\sqrt{2}}=x-\frac{z}{2},$$

可得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

即$Z\sim N(0,2)$

一般来说，若$X_i(i=1, 2, \ldots, n)$是n个相互独立的服从 $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ 分布的随机变量，则$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$仍然是一个服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$的随机变量，且其参数为

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \ , \ \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i \sigma_i)^2$$

这个事实，也称正态分布具有可加性。

例5　设随机变量X与Y相互独立，且都服从 $(-a,\ a)$ $(a>0)$上的均匀分布。试求它们的和$Z=X+Y$的概率密度。

解　X与Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & -a<x<a,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & -a<y<a,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

显然仅当 $\begin{cases} -a < x < a \\ -a < z - x < a \end{cases}$，即 $\begin{cases} -a < x < a \\ x - a < z < x + a \end{cases}$ 时，

上述积分不等于零。

因此，当$0 \le z < 2a$时， $f_Z(z) = \int_{z-a}^{a} \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{4a^2}(2a - z)$;

当$-2a < z < 0$时，$f_Z(z) = \int_{-a}^{z+a} \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{4a^2}(z + 2a)$.

$$\therefore \quad f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2a+z}{4a^2}, & -2a < z < 0, \\ \dfrac{2a-z}{4a^2}, & 0 \le z < 2a, \\ 0, & |z| \ge 2a. \end{cases}$$

2、$M=\max(X，Y)$及$N=\min(X，Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机 变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有 $F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z).$$

$$F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

$$=1-[1-P\{X\le z\}]\cdot[1-P\{Y\le z\}]$$

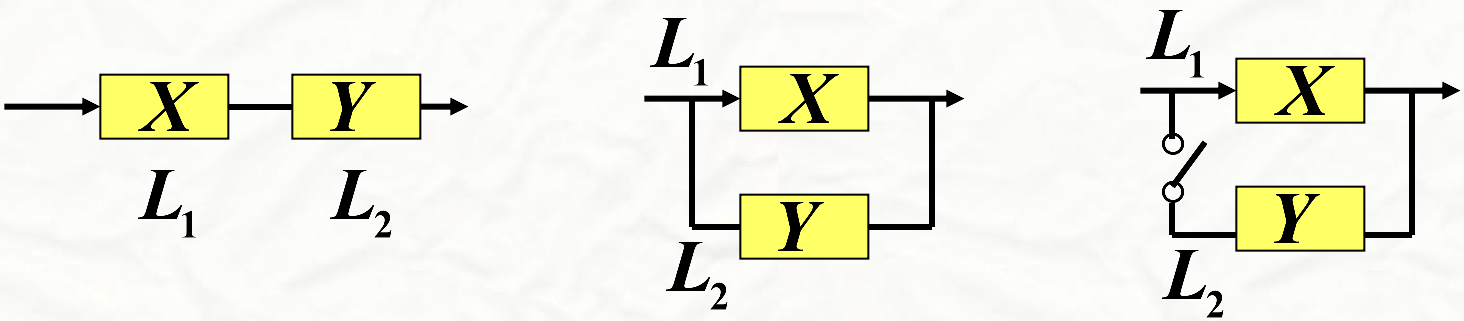
$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

故有

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

例6　设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度 .

解 **(i)串联情况**

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时,系统 L 就停止工作,所以这时 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0;\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-\beta e^{-\beta y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0.\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0,\\ 0, \quad z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0,\\ 0, \quad z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$.

$Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha+\beta) z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 才开始工作,因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和,即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时, $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}\, y = \int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)} \beta \mathrm{e}^{-\beta y} \mathrm{d}\, y$$

$$= \alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z} \int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha) y} \mathrm{d}\, y$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}].$$

当 $z < 0$ 时, $f(z) = 0$,

于是 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}], & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

例7 设X_1，X_2，…，X_n相互独立，且都服从(0，1)上的均匀分布，试求$U=\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$及$V=\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的密度函数。

解 因为相应于（0，1）上均匀分布的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x, & 0<x<1, \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$$

因此U的分布函数为

$$F_U(u)=[F(u)]^n=\begin{cases} 0, & u\le 0, \\ u^n, & 0<u<1, \\ 1, & u\ge 1. \end{cases}$$

故U的概率密度为

$$f_U(u) = F_U'(u) = \begin{cases} nu^{n-1}, & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

而V的分布函数为

$$F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n = \begin{cases} 0, & v \le 0, \\ 1 - (1 - v)^n, & 0 < v < 1, \\ 1, & v > 1. \end{cases}$$

故V的概率密度为

$$f_V(v) = F_V'(v) = \begin{cases} n(1-v)^{n-1}, & 0 < v < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

三、典型例题

例1 在10件产品中有2件一等品、7件二等品和一件次品,从10件产品中不放回地抽取3件,用 X 表示其中的一等品数,Y 表示其中的二等品数.求:

(1) (X,Y) 的联合分布律;

(2) X,Y 的边缘分布律;

(3) X 和 Y 是否独立;

(4) 在 $X=0$ 的条件下,Y 的条件分布律.

解　由题设知 X 只能取　0,　1,　2,

Y 只能取　　0,　1,　2,　3.

当 $i+j<2$ 或 $i+j>3$ 时,有

$$P\{X=i,Y=j\}=0.$$

当 $2\le i+j\le 3$ 时,由古典概率知

$$P\{X=i,Y=j\}=\binom{2}{i}\binom{7}{j}\binom{1}{3-i-j}\Big/\binom{10}{3},$$

$$(i=0,1,2,\ j=0,1,2,3).$$

目 上 下 回 停 续

因此的 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0
2	$\frac{1}{121}$	$\frac{7}{120}$	0	0

(2) X, Y 的边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P_{i\bullet}$
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{56}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0	$\frac{56}{120}$
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0	$\frac{8}{120}$
$P_{\bullet j}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	1

(3) 因为 $P\{X=0, Y=0\}=0,$

$$P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{56}{120}\times\frac{1}{120}\neq 0,$$

所以 X 与 Y 不相互独立.

(4) 在 $X=0$ 的条件下, Y 的条件概率为

$$P\{Y=j \mid X=0\}=\frac{P\{X=0, Y=j\}}{P\{X=0\}}, \quad j=0,1,2,3.$$

因此 Y 的条件分布律为

目 上 下 回 停 续

$Y=j \mid X=0$	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

例2 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cxe^{-y}, & 0<x<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) X 与 Y 是否独立?为什么?

(3) 求 (X,Y) 的联合分布函数;

(4) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数;

(5) 求 $P\{X+Y<1\}$; (8) 求 $P\{\min(X,Y)<1\}$.

目 上 下 回 停 续

解　(1)　由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$，得

$$1 = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{y} cx\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2}\Gamma(3) = c,$$

$\Rightarrow c = 1.$

(2)　$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^{+\infty} x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

由于在 $0<x<y<+\infty$上, $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,

故 X 与 Y 不独立.

(5) 由于 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$, 故有：

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时,有 $F(x,y)=0$.

当 $0\le y<x<+\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

$$=\int_0^y \mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^y v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$=1-\left(\frac{y^2}{2}+y+1\right)\mathrm{e}^{-y}.$$

当 $0 \le x < y < +\infty$ 时,有

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \int_0^x \mathrm{d}u \int_u^y u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^x u(\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}u$$

$$= 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}.$$

目 上 下 回 停 续

故得

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0,\\ 1-(\dfrac{y^2}{2}+y+1)\mathrm{e}^{-y}, & 0\le y<x<\infty,\\ 1-(x+1)\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}, & 0\le x<y<\infty.\end{cases}$$

(6) 根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,\mathrm{d}\,x,$

由于要被积函数 $f(x,z-x)$ 非零,只有当

$0<x<z-x$,即 $0<x<\dfrac{z}{2}$ 时, 从而有:

当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$;

当 $z\geq 0$ 时, $f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{-(z-x)}\,\mathrm{d}\,x$

$$=\mathrm{e}^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}};$$

因此 $$f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+\left(\dfrac{z}{2}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} & z\geq 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

(7) $P\{X+Y<1\}=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1 [\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}]\,\mathrm{d}z=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}.$$

(8) $P\{\min(X,Y)<1\}=1-P\{\min(X,Y)\geq 1\}$

$$=1-P\{X\geq 1,Y\geq 1\}$$

$$=1-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v=1-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

目 上 下 回 停 续

6. 某批电子管正品率为3/4，次品率为1/4，现对该批电子管进行测试，第X次测得正品，求X的分布律。（离散型，几何分布）

X	1	2	… …	n	…
P_k	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$	…	$\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$	…

目 上 下 回 停 续

8. 有一繁忙汽车站有大量汽车通过，每辆汽车在一天内出故障的概率为0.0001，在一天内有1000辆汽车通过，问出事故的次数不小于2的概率是多少？（用泊松定理计算）

解 $\lambda = np = 1000 \times 0.0001 = 0.1$

X为事故次数

$$P\{X \geq 2\} = 1 - p\{X < 2\}$$

$$= 1 - e^{-0.1} - 0.1e^{-0.1} = 1 - 1.1 \times e^{-0.1} \approx 0.0047$$

11

设X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Ax^2, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

(1) 确定常数 A;　(2) $P\{-\frac{1}{2}\le X\le \frac{1}{2}\}$;

(3) 求 X的密度函数.

解 (1) 由 $F(x)$ 的连续性

$$F(1-0)=F(1+0)=1$$

$$Ax^2=1 \qquad \therefore \quad A=1$$

$$(2)\ P\left\{-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

$$(3)\ f(x)=F'(X)=\begin{cases}2x & 0<x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

14. 设X的密度函数为 $f(x)=ae^{-(x+1)^2} \quad (-\infty<x<+\infty)$,

1. 求常数a； 2. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ 各取什么值.

解

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$

$$f(x)=ae^{-(x+1)^2} \quad (-\infty<x<+\infty),$$

对比可得： $2\sigma^2=1\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\mu=-1$

$a=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

16. 测量误差的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{40\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-20)^2}{3200}}, -\infty<x<+\infty$

1. 测量误差绝对值不超过30的概率
2. 进行三次独立测量，至少有一次误差绝对值不超过30的概率；
3. 进行三次独立测量，恰有一次误差绝对值不超过30的概率

解 $X\sim N(20,40)$

$$P\{|X|\le 30\}=P\{-30\le X\le 30\}$$
$$=P\left\{\frac{-30-20}{40}\le\frac{X-20}{40}\le\frac{30-20}{40}\right\}$$
$$=\Phi(0.25)-\Phi(-1.25)$$
$$=\Phi(0.25)+\Phi(1.25)-1$$
$$=0.5987-1+0.8944=0.4931$$

2. $1-(1-0.4931)^3=0.8698$

3. $C_3^1 0.4931\times(0.5069)^2\approx 0.3801$

17. 设中国男人身高 $X \sim N(170, 6^2)$ ，问公共汽车车门至少为多高时才能保证99.87%的人不碰头。（单位cm)

解:设车门高至少为x

$$P\{X \le x\} = 99.87\%$$

$$\Rightarrow P\left\{\frac{X-170}{6} \le \frac{x-170}{6}\right\} = 99.87\%$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{x-170}{6}\right) = 99.87\%$$

$$\frac{x-170}{6} = 3$$

$$x = 188cm$$

目 上 下 回 停 续