§3 简谐振动的合成（一质点同时参与两种振动）

当一个物体同时参与几个谐振动时，就需考虑振动的合成问题。

本节只讨论满足线性叠加的情况。

一、两个同方向、同频率简谐振动的合成

*二、两个同方向、不同频率简谐振动的合成----拍

三、两个相互垂直简谐振动的合成

（同频率或不同频率）

一、振动方向相同、振动频率相同的两个SHV的合成

（双光束干涉的理论基础）

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

一质点同时参与此两振动，则

•**质点合振动：** $x = x_1 + x_2$ **?**

1. 解析法

2. 旋转矢量法

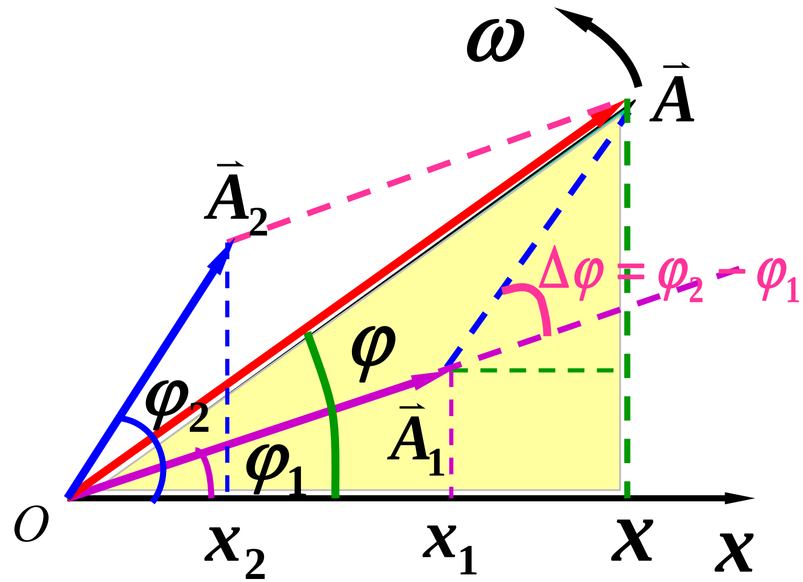
2. 旋转矢量法

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



合成后仍为同频率的简谐运动

两振动的相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

• 合振动的振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$

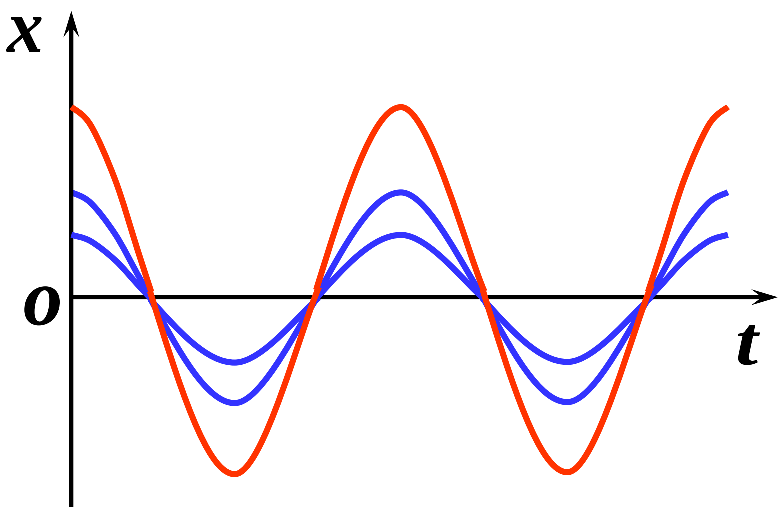
初相 $\varphi = \arctan\dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

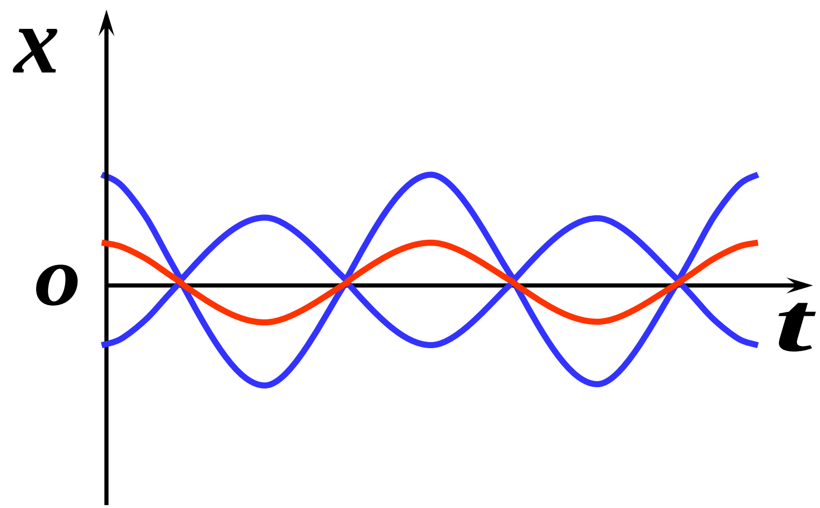
合振幅 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$

- 若 $\Delta\varphi=0$ $\quad A=A_1+A_2$ 同相 合振动加强

- 若 $\Delta\varphi=\pi$ $\quad A=|A_1-A_2|$ 反相 合振动减弱

- 若 $A_1=A_2$
  - 同相 $A=2A_1$ 可能的最强振动
  - 反相 $A=0$ "振动加振动"不振动

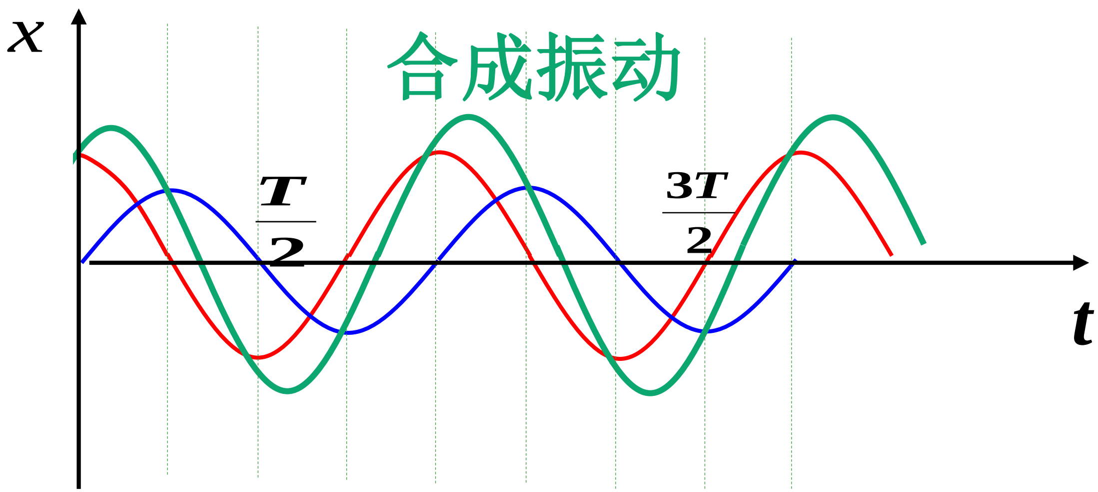




可见，两个分振动的<u>相位差</u>对合振动起着重要作用

一般情况 $\Delta\varphi$ 为其它任意值，则：

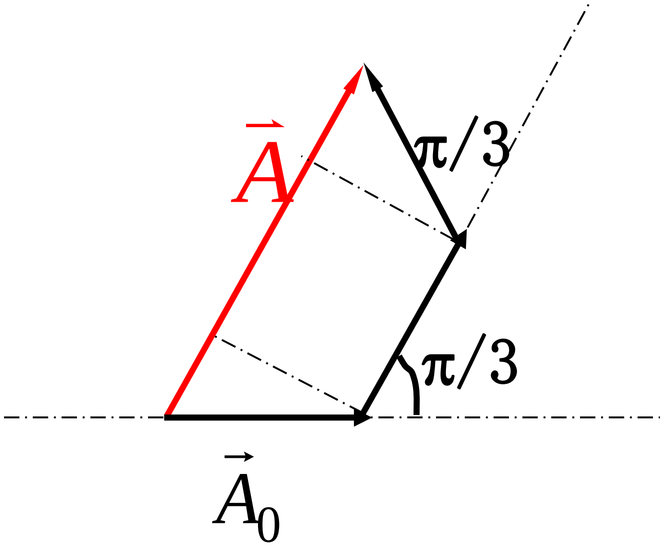
$$|A_1 - A_2| < A < (A_1 + A_2)$$



两个分振动的相位差对合振动起着重要作用

例　三个同频率ω，同振幅A_0，同方向的简谐振动，相邻相位差为$\pi/3$。求：合振幅A。

解：画旋转矢量图



由图很容易得到

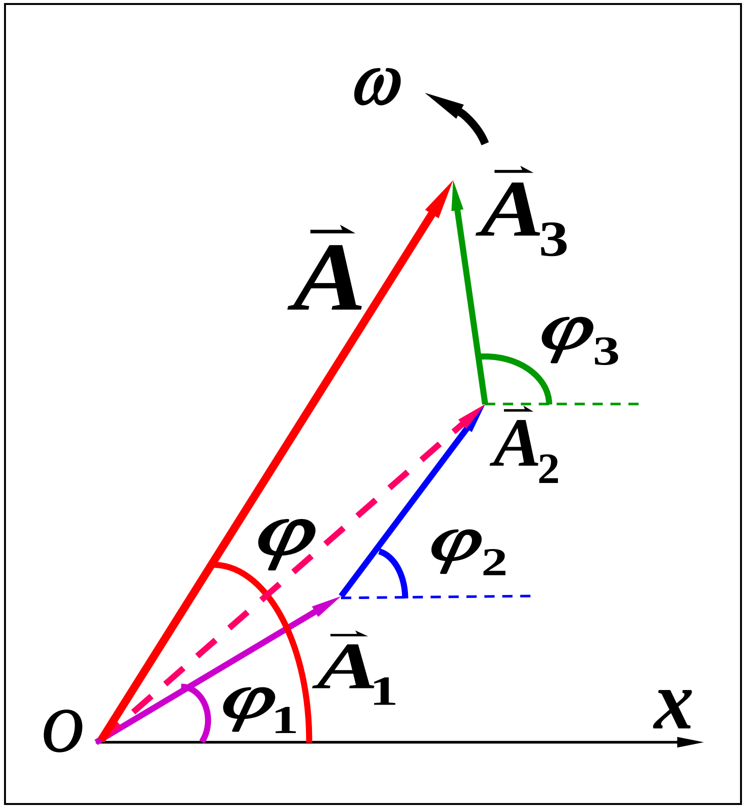
$$A = 2A_0$$

* 多个同方向、同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N = A_N\cos(\omega t+\varphi_N) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

习题 N个同方向、同频率的简谐振动，它们的振幅相等，初相分别为 $0, \alpha, 2\alpha, \cdots$ 依次差一个恒量 α，振动表达式可写为

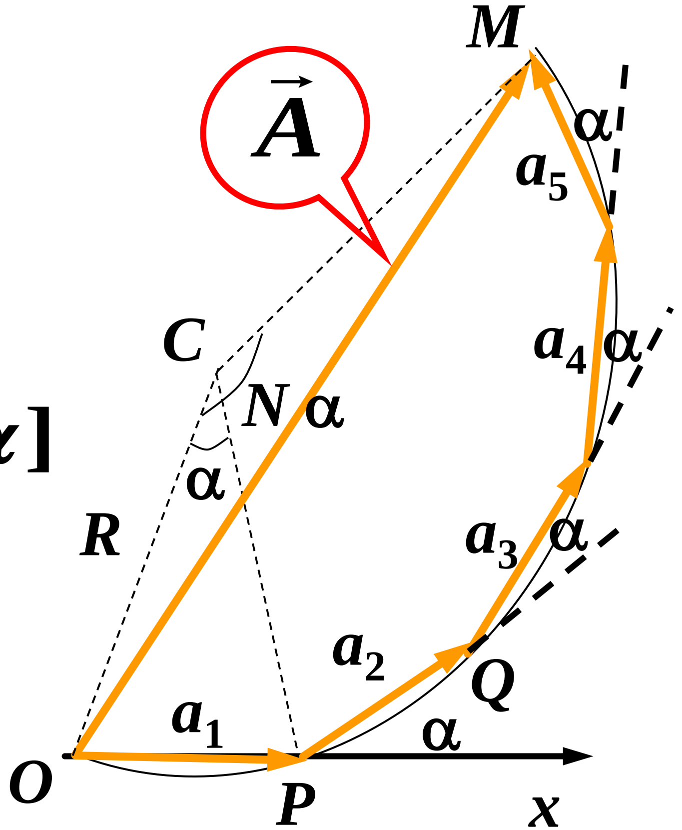
$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t + \alpha)$$

$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\alpha)$$

$$x_N = a\cos[\omega t + (N-1)\alpha]$$

求它们的合振动的振幅和初相。



解 采用旋转矢量法

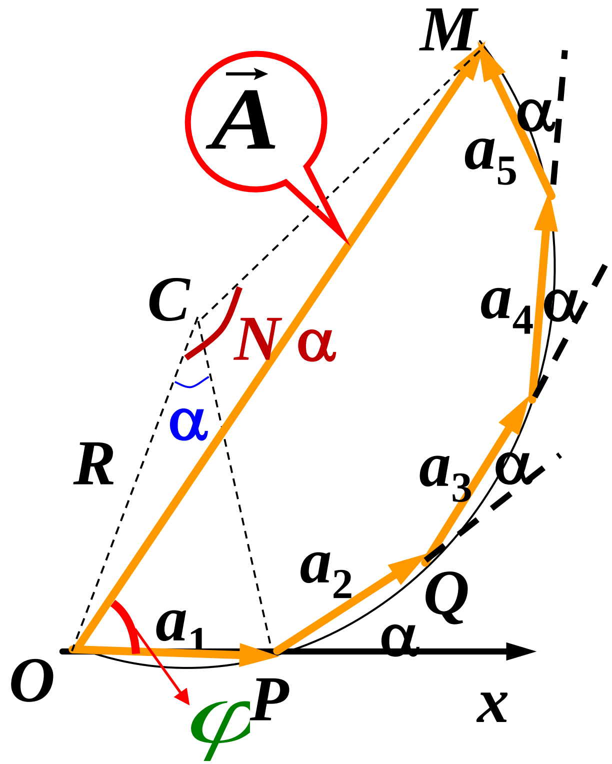
$$\angle OCM = N\alpha \qquad A = 2R\sin\frac{N\alpha}{2}$$

在 $\angle OCP$ 中，$a = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$

$$A = a\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

$$A = a\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

φ 为 $\vec{A}$与x轴间的夹角，即合振动的初相。



$$\varphi = \angle COP - \angle COM$$

$$= \frac{1}{2}(\pi - \alpha) - \frac{1}{2}(\pi - N\alpha)$$

$$\varphi = \frac{N-1}{2}\alpha$$

合振动的表达式为

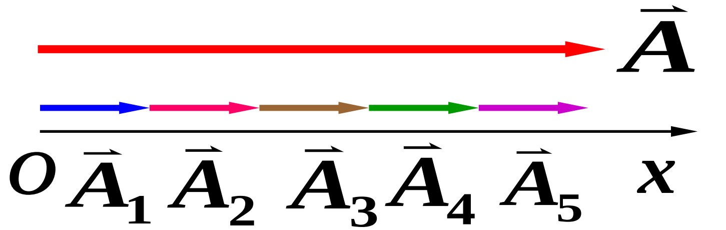
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = a\frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\alpha)$$

讨论: $x = a\dfrac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}\cos(\omega t + \dfrac{N-1}{2}\alpha)$

(1) 如果各分振动的初相相同，即 $\alpha = 0$，则有

$$A = \lim_{\alpha\to 0} a\frac{\sin\frac{N\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = Na$$

$$\varphi = 0$$

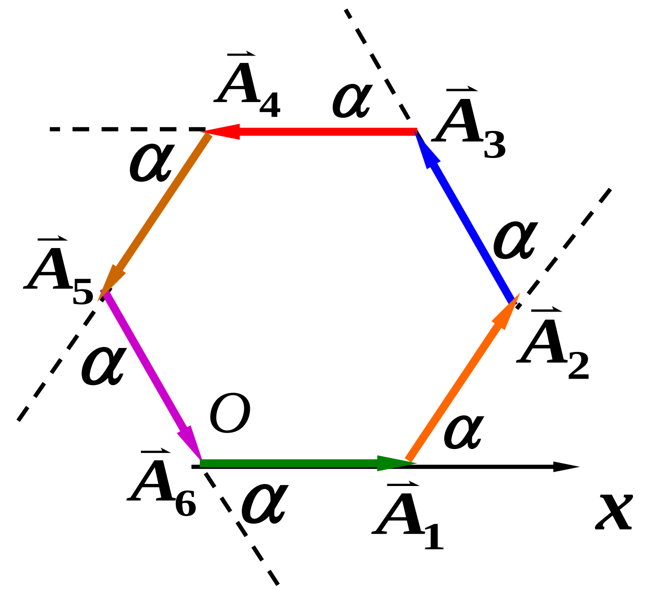


合振幅最大 同相 $\boxed{A = Na}$

(2) $N\alpha = 2k'\pi$

$(k' = \pm 1, \pm 2, \cdots,$ 但$k' \neq kN)$

$$\boxed{A = 0}$$



二、振动方向相同、频率略有差别、振幅相等的两个SHV的合成　拍

设分振动：$x_1 = A_0 \cos \omega_1 t$

$$x_2 = A_0 \cos \omega_2 t \qquad \omega_1 \approx \omega_2$$

线性相加：

$$x = x_1 + x_2 = 2A_0 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

结论：合振动已不再是谐振动

但因 $\omega_1 \approx \omega_2$ ，可用谐振动表达式等效，加深认识

$$x = x_1 + x_2 = 2A_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$$

分析： $\omega_1 \approx \omega_2$

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad \Delta\,\omega = \omega_1 - \omega_2 << \overline{\omega}$$

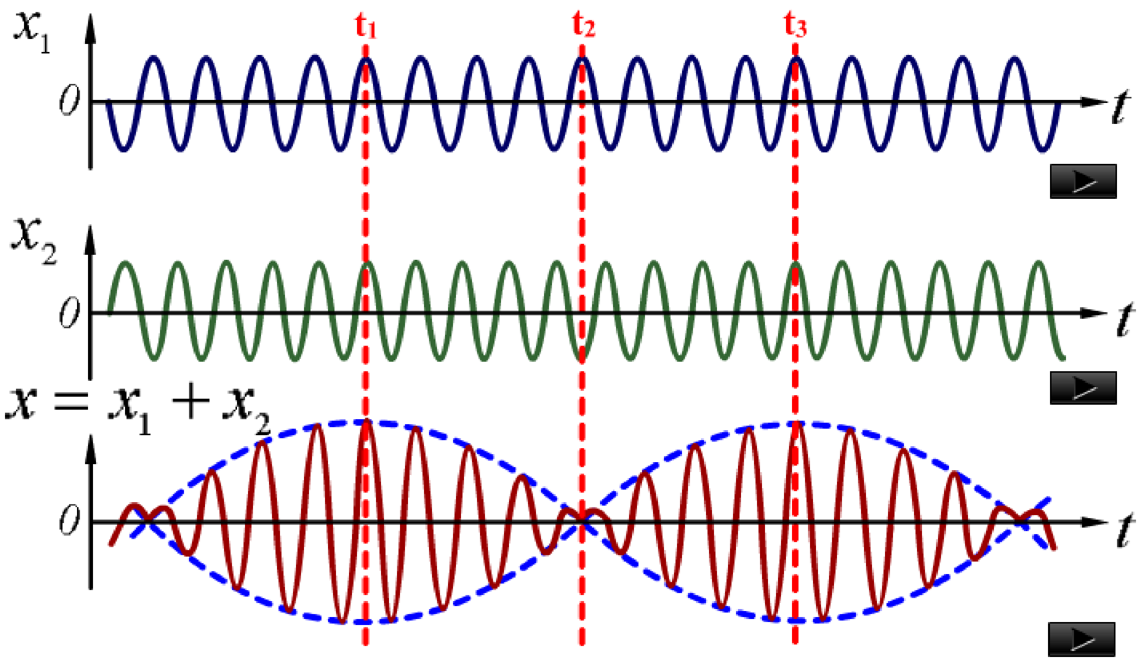
则 $2A_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$ 较 $\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$ 随时间变化缓慢得多，

将合成式写成谐振动形式 $x = A(t)\cos\overline{\omega}t$

合振动的振幅 $A(t) = \left|2A_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right|$

<u>合振动可看做是振幅缓慢、周期变化的谐振动</u>

$$x = [2A_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t]\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$



$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$$

$$\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

$$\boxed{\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}$$

拍：　　合振动的周期性的强弱变化叫做拍

拍频：单位时间内合振动加强或减弱的次数叫拍频

由 $A(t) = \left|2A_0 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right|$ 　　得

$\nu_{拍} = |\nu_1 - \nu_2|$　测未知频率的一种方法

三、两个振动方向相互垂直的谐振动的合成

1. 同频率

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

设分振动

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

消去参数 t，得合运动的轨迹方程：椭圆方程

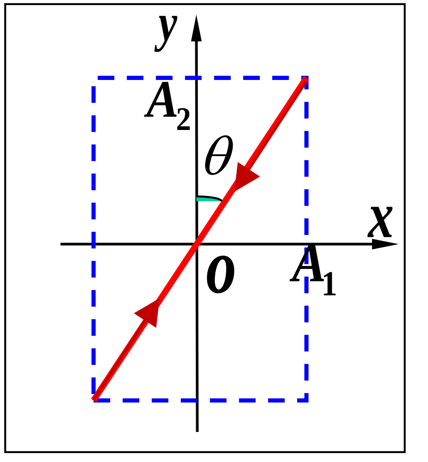
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

一般而言，合振动轨迹为椭圆。椭圆的性质（方位、长短轴、左右旋）在 A_1、A_2确定之后，主要取决于相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

特殊结果:

（1）$\Delta\varphi=0$ 时，$y=\dfrac{A_2}{A_1}x$　　$r=\sqrt{x^2+y^2}$



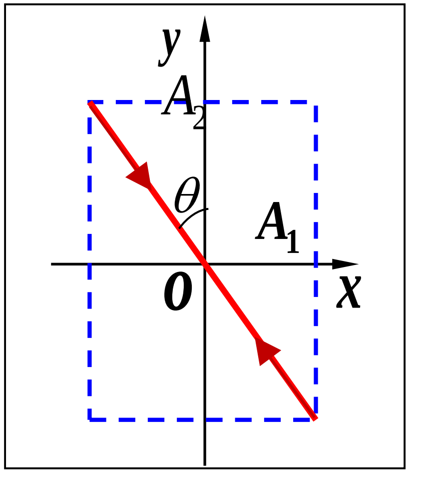
合运动 $r=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi)$

仍是频率为ω的简谐振动。$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$

$\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{A_1}{A_2}$

（2） $\Delta\varphi=\pi$ 时，$y=-\dfrac{A_2}{A_1}x$

$\Delta\varphi=0 \Longrightarrow \Delta\varphi=\pi$　振动方向旋转2θ

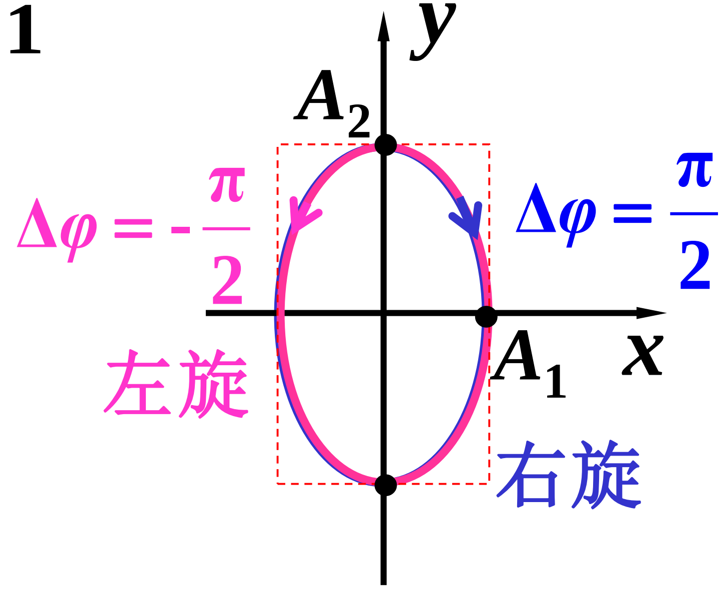


（3）$\Delta\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$

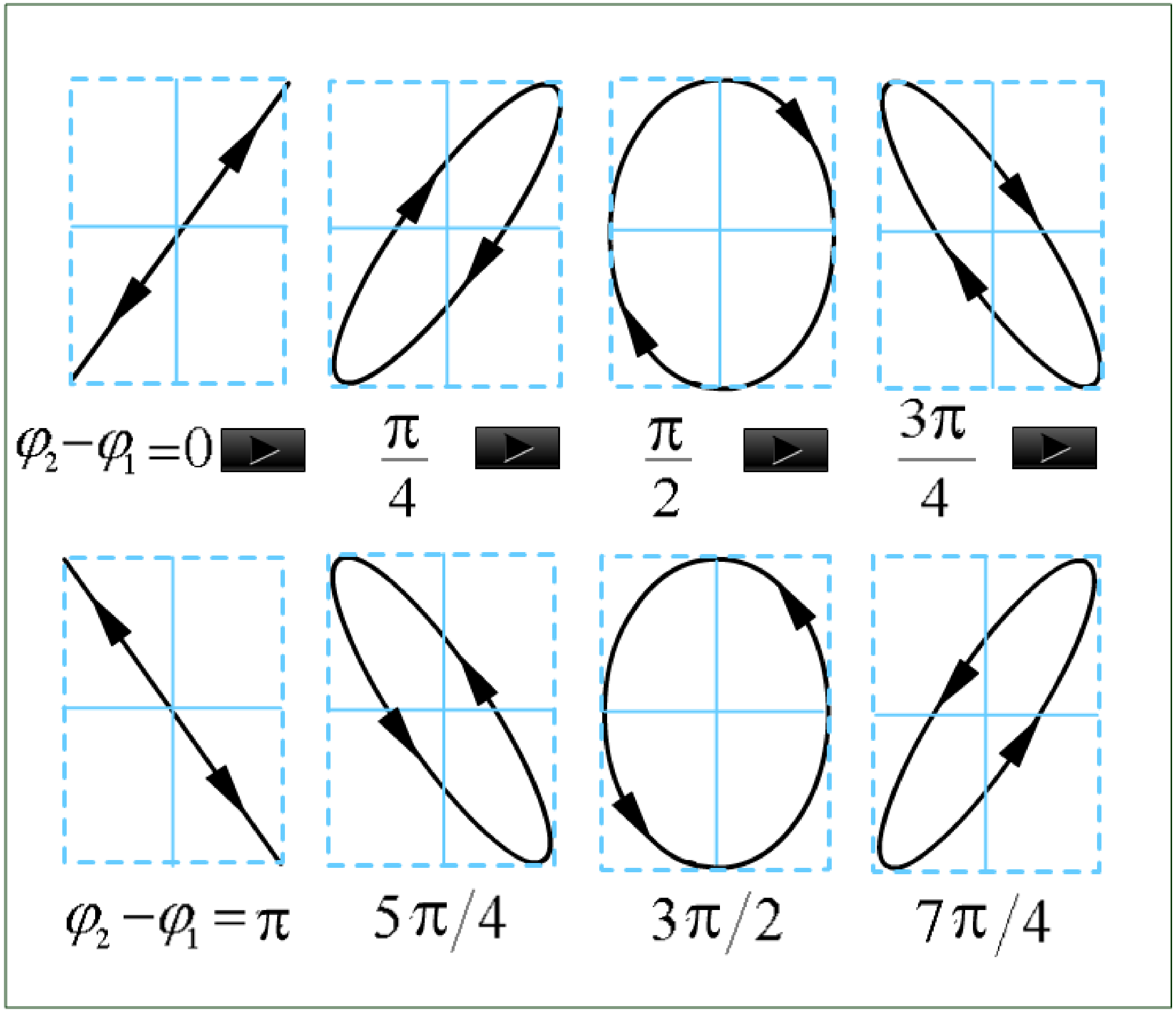
（3）$\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$

合运动是椭圆振动；

若$A_1 = A_2$ 则为圆振动



（偏振光干涉的理论基础）



$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ 的值不同，椭圆形状、旋向也不同

2. 不同频率的两个相互垂直的谐振动的合成

设分振动 $x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

$y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ $\qquad \omega_1 \neq \omega_2$

1）若频率相差很小 $\omega_1 \approx \omega_2$

可看作两频率相等而 $\Delta\varphi$ 随 t 缓慢变化

合运动轨迹将按上页图依次缓慢变化。

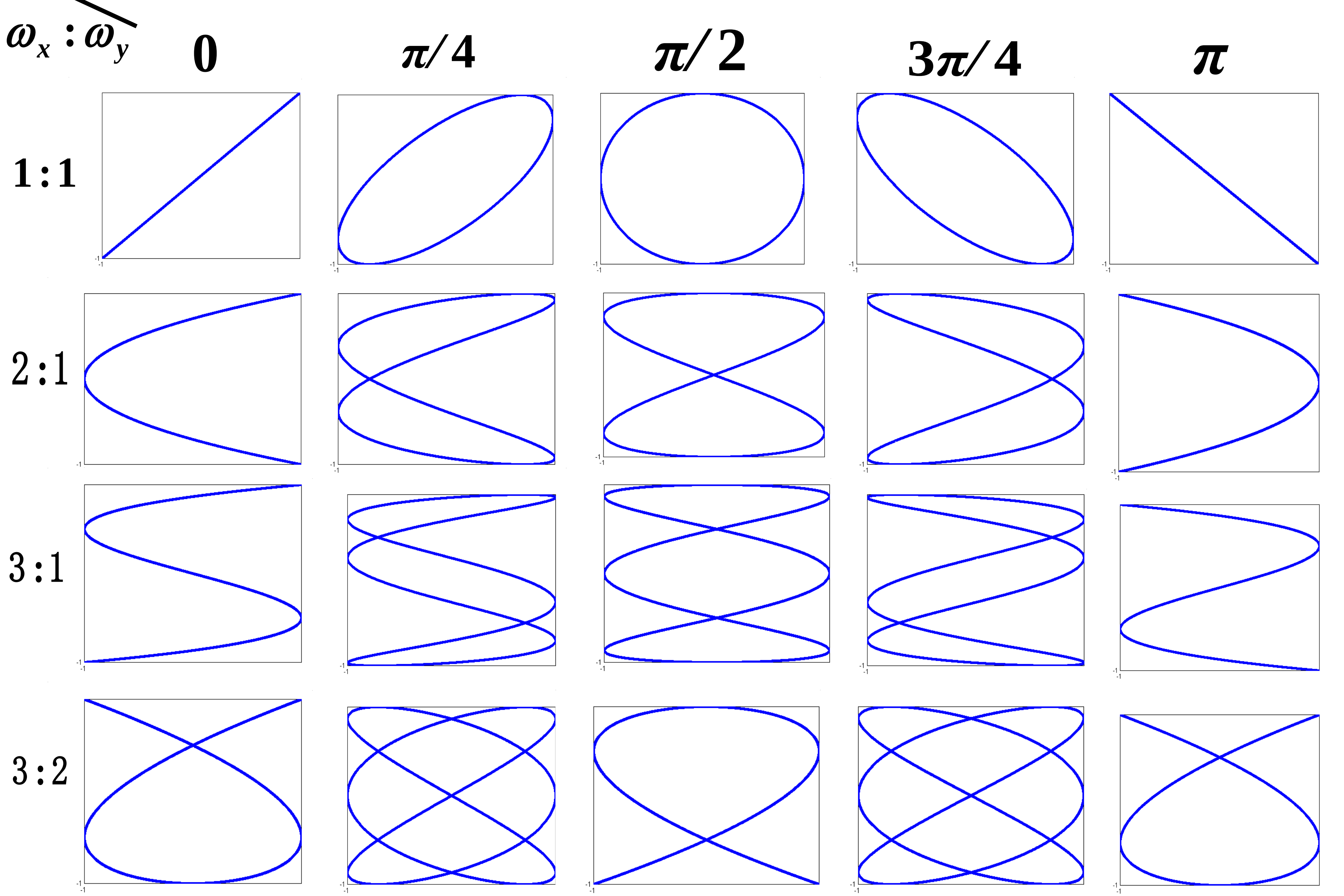
2）频率比是整数比 $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{m}{n},\ m,n = 1,2,\cdots$

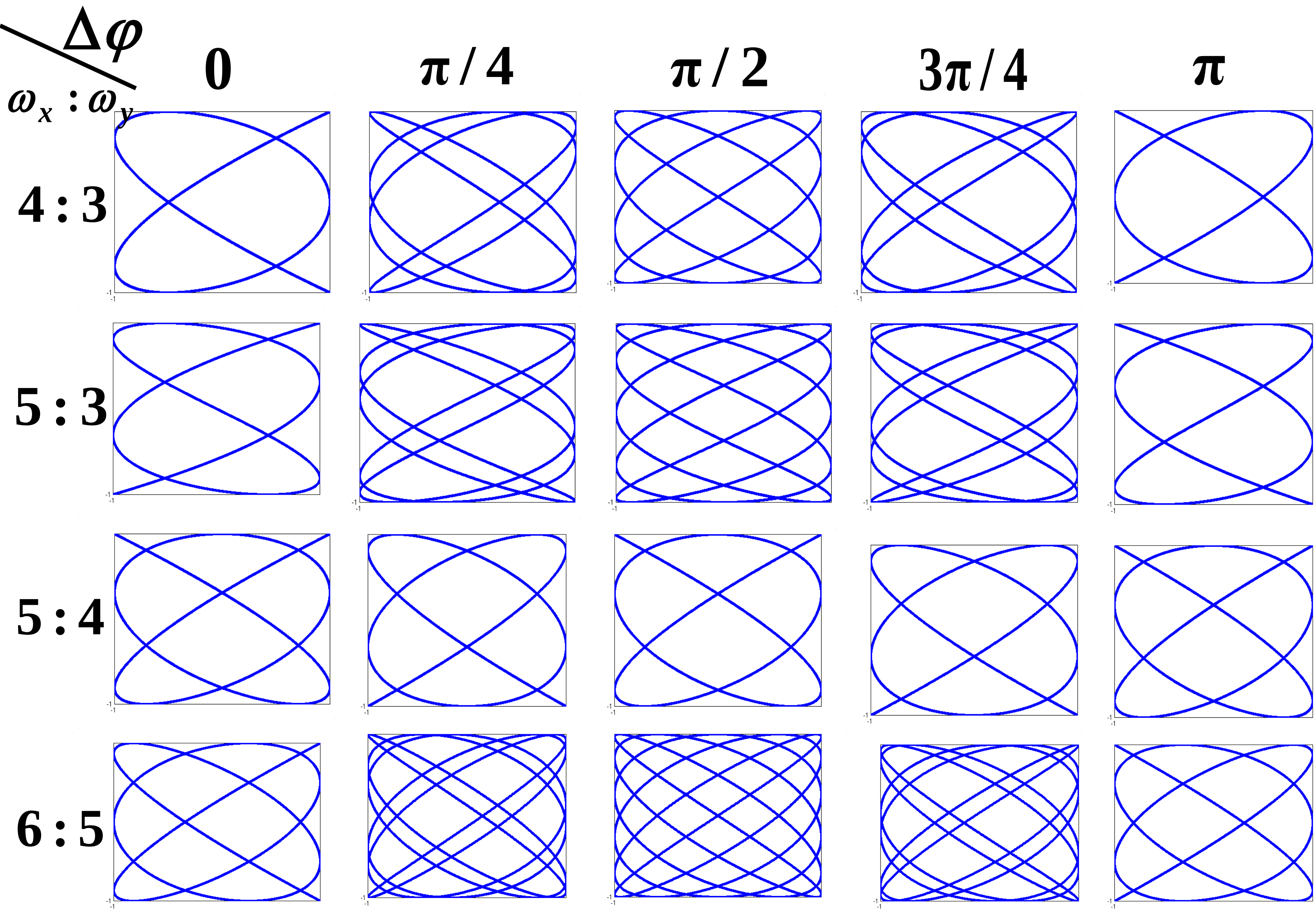
则合成轨迹为稳定的闭合曲线—李萨如图

李萨如图形状取决于频率比和相差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

频率比不为整数时,合成运动的轨迹是不闭合的曲线.

李萨如图形




$\Delta\varphi$
$\omega_x : \omega_y$
0
π / 4
π / 2
3π / 4
π
4 : 3
5 : 3
5 : 4
6 : 5

简谐振动的合成

一、两个同方向、同频率简谐振动的合成

二、两个同方向、不同频率简谐振动的合成----拍

三、两个相互垂直简谐振动的合成

（同频率或不同频率）