4- Applications Linéaires et famille de vecteurs

Proposition 23. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

1- f est injective **et** $\mathcal{F}$ est libre $\implies$ $(f(x_i))_{i \in [\![1;p]\!]}$ est libre.

2- f est surjective **et** $\mathcal{F}$ est génératrice $\implies$ $(f(x_i))_{i \in [\![1;p]\!]}$ est génératrice.

Démonstration 24.

Proposition 24. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, et soit :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \phi_{\mathcal{F}} & : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{E} \\ & & (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \end{array} \right.$$

Alors :

1- $\phi_{\mathcal{F}}$ est une application linéaire.

2- $\phi_{\mathcal{F}}$ est injective $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est libre.

3- $\phi_{\mathcal{F}}$ est surjective $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est génératrice.

4- $\phi_{\mathcal{F}}$ est bijective $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{E}$.

Démonstration 25.

Proposition 25. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

1- Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{E}$, f est *entièrement déterminée* par les images de e_i.

2- Si $\mathbb{E} = V_1 \oplus V_2$, f est *entièrement déterminée* par la définition de f sur V_1 et V_2.

5- Rang d'une application linéaire

Remarque 29. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$

1- Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, prenons $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base de $\mathbb{E}$. Soit $\mathcal{I} = f(\mathcal{B}) = (f(e_i))_{i\in[\![1;n]\!]}$ l'image de la base $\mathcal{B}$ par f.
$\mathcal{I}$ est alors une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$ de dimension finie, et on a :
$$\dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \mathbb{E}$$

2- Si $\mathbb{F}$ est de dimension finie, prenons $\mathcal{B} = (f_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une base de $\mathbb{F}$.
Alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$, donc de dimension finie également, et on a :
$$\dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \mathbb{F}$$

3- Avec ce qui a été dit précédemment, et la convention sur les espaces vectoriels de dimension infinie, on peut donc toujours dire :
$$\dim \operatorname{Im} f \leqslant \min(\dim \mathbb{E}, \dim \mathbb{F})$$

Définition 31. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, avec *au moins un des deux espaces* $\mathbb{E}$ et/ou $\mathbb{F}$ de dimension finie. On définit le **rang d'une application linéaire** f comme :
$$\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f$$
La remarque précédente nous garantie que $\operatorname{rg}(f)$ est fini, et $\operatorname{rg}(f) \leqslant \min(\dim \mathbb{E}, \dim \mathbb{F})$.

Remarque 30. 1- Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors l'image de la base de $\mathbb{E}$ par f est une famille de vecteur, est le rang de cette famille de vecteur est bien le rang de f.

2- Si $\mathbb{F}$ est de dimension finie, $\operatorname{Im} f$ est engendré par une famille de vecteur, est le rang de cette famille de vecteur est bien le rang de f.

3- Quand $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, et $\operatorname{Im} f$ sont de dimension infinie, on dit que f est de rang infini. Sinon, f est dite de rang finie.

Proposition 26. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ de rang *fini.*

1- Si $u \in \mathcal{GL}(\mathbb{E})$, $\operatorname{rg}(u \circ f) = \operatorname{rg}(f)$

2- Si $v \in \mathcal{GL}(\mathbb{F})$, $\operatorname{rg}(f \circ v) = \operatorname{rg}(f)$

Autrement dit, composer (à droite ou à gauche) par un isomorphisme ne change pas le rang.

Démonstration 26.

Exemple 28. Déterminons le rang des applications linéaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & & (a,b) & \mapsto & f : x \mapsto ax+b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \psi & : & \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & f & \mapsto & (f(0), f'(0), f''(0)) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \xi & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, x+2y-z) \end{array} \right.$$

Théorème 13. *Théorème du rang*
Soient $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$*. Si* $\mathbb{E}$ *est de* ***dimension finie****, alors :*

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f}$$

Autrement dit :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f)$$

Enfin :

$$\forall\, V \text{ sev de } \mathbb{E} \;/\; \operatorname{Ker} f \oplus V = \mathbb{E} \Leftrightarrow V \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ sont isomorphes}$$

Remarque 31. C'est le théorème d'algèbre linéaire le plus important de cette année.

Démonstration 27.

Exemple 29. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $u \circ u = 0$.

1- Quels sont les rangs possibles pour u ?

2- En déduire que $\exists u^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ une forme linéaire, et $\exists v \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\; u(x) = u^*(x) \cdot v$$

Théorème 14. *Caractérisation des isomorphismes en dimension finie Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* ***tous deux de dimension*** n*, soit* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1- f *est bijective.*

2- f *est injective (*$\operatorname{Ker} f = \{0\}$*)*

3- f *est surjective (*$\operatorname{Im} f = \mathbb{F}$*)*

4- $\operatorname{rg}(f) = n$

5- f *est inversible à droite, c'est-à-dire :*

$$\exists u \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{E}) \ / \ f \circ u = Id_{\mathbb{F}}$$

6- f *est inversible à gauche, c'est-à-dire :*

$$\exists v \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{E}) \ / \ v \circ f = Id_{\mathbb{E}}$$

Remarque 32. Attention, il est absolument nécessaire que $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}$ dans le théorème précédent.

Démonstration 28.

Exemple 30. Montrons que l'application suivante est un automorphisme.

$$\left\{\begin{array}{cccc} u & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, x+2y-z, y) \end{array}\right.$$

Théorème 15. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, et soit $b \in \mathbb{F}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $u(x) = b$. Alors :*

$$\exists x_0 \in \mathcal{S} \;/\; \mathcal{S} = x_0 + \{x \in \mathbb{E} \;/\; u(x) = 0\}$$

C'est-à-dire qu'on a, pour les solutions d'équations de la forme $u(x) = b$, ***toujours*** *une décomposition en solution particulière + espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.*
Par exemple, c'est le cas pour les solutions d'un système linéaire. Maus aussi pour une équation différentielle linéaire, ou une suite définie par récurrence.