2017-2018学年第一学期高数(经管)期末答案

一. 1. x^2-3, 2. 偶函数 3. $e^{-\frac{3}{2}}$, 4. $x=1$为可去间断点, $x=2$为无穷间断点.

5. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, 6. 30, 8.

二. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{\sin^4(\sqrt{2}x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{4x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2xe^{-x^2}+2x}{16x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{-x^2}}{8x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{8x^2}=\frac{1}{8}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^{\frac{1}{2}}}(1-\cos t^2)dt}{x^{\frac{5}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{5x^2}=\frac{1}{10}$.

3. 方程两边求导得 $2-\sec^2(x-y)(1-y')=\sec^2(x-y)(1-y')$.

$1-y'=\frac{1}{\sec^2(x-y)}\Rightarrow y'=1-\cos^2(x-y)=\sin^2(x-y)$. 两边对$x$求导, 得

$y''=2\sin(x-y)\cdot\cos(x-y)\cdot(1-y')\overset{1-y'\text{代入}}{=\!=\!=}2\sin(x-y)\cdot\cos^3(x-y)$.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{\frac{1}{t}}=t^2\sin t$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{x'_t}=\frac{2t\sin t+t^2\cos t}{\frac{1}{t}}$

$=2t^2\sin t+t^3\cos t=t^2(2\sin t+t\cos t)$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\infty$ ① ∴ 曲线无水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\infty$ ① ∴ $x=-1$为曲线的铅直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(x+1)^2}=\frac{1}{2}$ ①, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-\frac{1}{2}x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{2(x+1)^2}$ ①

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=-1$ ∴ $y=\frac{1}{2}x-1$为曲线的斜渐近线.

6. $y'=\frac{2x}{x^2+1}$ ① $y''=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ 令$y''=0$, 得 $x=\pm 1$. ②

思路对3分

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	凸		凹		凸

∴ 凸区间: $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$ ②

凹区间: $[-1,1]$. ②

拐点 $(-1,\ln 2)$, $(1,\ln 2)$ ①

7. 令 $f(x)=\tan x-x$, $f'(x)=\sec^2 x-1\geq 0$. $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ②

又 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=-\infty$ ①, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=+\infty$ ①, $f(x)$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内单调上升 ①,

∴ $f(x)$单调地由$-\infty$增加到$+\infty$, 表明方程 $\tan x-x=0$ 在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内存在唯一实根. ①