3.5随机变量函数的分布

北京化工大学数学系

苏贵福

在第二章已经讨论过由一个随机变量生成函数的分布情况, 本节主要讨论两个随机变量 函数的分布问题. 我们只就下面几个具体的函数来讨论.

一. 连续型情形

设二维连续型随机变量(X, Y)的联合密度为$f(x, y)$, $z = g(x, y)$为二元连续函数, 则$Z = g(X, Y)$的密度函数可以用下述方法求得:

① 求出Z的分布函数$F_Z(z) = P\{g(X, Y) \leq z\}$

② 求导数可得密度函数为$f_Z(z) = F'_Z(z)$.

1. $Z = X + Y$的分布

定理1 设二维连续性随机变量(X, Y)的联合密度为$f(x, y)$，边缘密度为$f_X(x)$和$f_Y(y)$，则$Z = X + Y$仍为连续性随机变量，其概率密度为

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx$$

当X和Y相互独立时，有

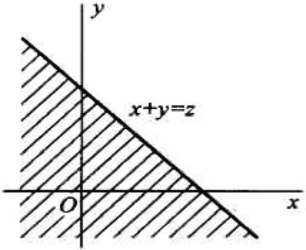
$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \\ f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \end{aligned} \tag{1}$$

公式(1)称为卷积公式，记作$f_X * f_Y$.

证明 先求$Z = X + Y$的分布函数$F_Z(z)$:

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy \qquad (2)$$

其中积分区域G: $x + y \le z$是直线$x + y = z$及其左下方的半平面, 如图.



将二重积分(2)化为累次积分得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx \right] dy$$

固定z和y, 对积分$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx$作变量变换. 令$x = u - y$, 则有

$$\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du$$

因此有

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy \right] du \end{aligned}$$

两边求导获证. ■

例1 设X和Y是两个相互独立的随机变量. 它们都服从$N(0,1)$, 其概率密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty$$
$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

解 由卷积公式

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx.\end{aligned}$$

令$t = x - \frac{z}{2}$, 则有

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即$Z = X + Y$服从$(0, 2)$正态分布. ■

♠ 若X, Y相互独立且$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 则

$$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

♠ 有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例2 在一简单电路中有两电阻R_1和R_2. 设R_1, R_2相互独立, 它们的概率密度均为

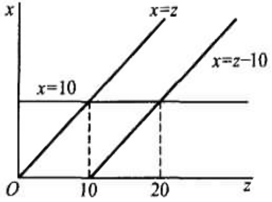
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求总电阻$R=R_1+R_2$的概率密度.

解 由卷积公式知R的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{R_1}(x)f_{R_2}(z-x)dx.$$

仅当 $\begin{cases}0<x<10\\ 0<z-x<10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<10\\ z-10<x<z\end{cases}$ 时被积函数$\neq 0$, 如图.



于是有

$$f_R(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z f(x)f(z-x)dx, & 0 \leq z < 10 \\ \displaystyle\int_{z-10}^{10} f(x_f(z-x)dx, & 10 \leq z \leq 20 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

将$f(x)$的表达式代入上式得

$$f_R(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{15000}(600z-60z^2+z^3), & 0\le z<10\\ \dfrac{1}{15000}(20-z)^3, & 10\le z\le 20\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

2. $\max\{X, Y\}$和$\min\{X, Y\}$分布

设$M = \max\{X, Y\}$, 则

$$F_M(z) = P\{\max\{X, Y\} \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = F(z, z).$$

① 当X, Y相互独立时, 有

$$F_M(z) = F_X(z)F_Y(z).$$

② 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立, 其分布函数分别为$F_1(x)$, $F_2(x)$, $\cdots$, $F_n(x)$, 则$M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$的分布函数为

$$F_M(z) = F_1(z)F_2(z)\cdots F_n(z).$$

设$N=\min\{X,Y\}$, 则

$$\begin{aligned}F_N(z)=&P\{\min\{X,Y\}\le z\}=1-P\{\min\{X,Y\}>z\}\\=&1-P\{X>z,Y>z\}=P\{\{X\le z\}\cup\{Y\le z\}\}\\=&F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z).\end{aligned}$$

① 当X,Y相互独立时, 有

$$\begin{aligned}F_N(z)=&1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\\=&F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z).\end{aligned}$$

② 若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立, 其分布函数分别为$F_1(x)$, $F_2(x)$, $\cdots$, $F_n(x)$, 则$N=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数为

$$F_N(z)=1-[1-F_1(z)][1-F_2(z)]\cdots[1-F_n(z)].$$

例3 设系统L由相互独立的两个子系统 L_1和L_2联接而成, 联接的方式分别为串联与并联, 如图所示. 设L_1和L_2的寿命分别为 X和Y, 已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} se^{-sx}, & x \geq 0, s > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} te^{-tx}, & y \geq 0, t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试分别就串联和并联方式下求出系统L的寿命Z的概率密度.

解 (1) 串联时L_1与L_2有一个损坏, 则整个系统L就无法正常工作, 如图. 故L的寿命为

$$Z = \min\{X, Y\}.$$

注意到X与Y相互独立, 所以

$$F_Z(z) = F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z).$$

由已知条件可知

$$F_X(z) = \begin{cases} 1 - e^{-sz}, & z \geq 0, s > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$F_Y(z) = \begin{cases} 1 - e^{-tz}, & z \geq 0, t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故寿命Z的分布函数为

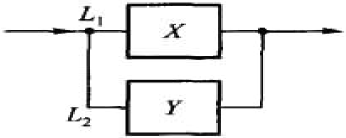
$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-(s+t)z}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

从而寿命Z的密度函数为

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} (s+t)e^{-(s+t)z}, & z \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 并联时只要L_1与L_2中有一个不损坏, 整个系统L就可正常工作, 如图. 故L的寿命为

$$Z = \max\{X, Y\}.$$



注意到X与Y相互独立, 所以

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z).$$

故寿命Z的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-sz} - e^{-tz} + e^{-(s+t)z}, & z \geq 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

关于z求导即可得密度函数

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} se^{-sz} + te^{-tz} - (s+t)e^{-(s+t)z}, & z \geq 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

二. 离散型情形

设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

则$Z = g(X, Y)$的分布律可以用下述方法求得:

$$P\{Z = g(x_i, y_j)\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots . \tag{3}$$

① 当函数值$g(x_i, y_j)$均不相同时, 式(3)即为$Z = g(X, Y)$的分布律.

② 当函数值$g(x_i, y_j)$中有相同值时, 相同值只写一个, 对应的概率相加, 其余不变, 即可得到$Z = g(X, Y)$的分布律.

例4 设X, Y相互独立且服从同一分布, 其分布律为$P\{X=i\}=\frac{1}{3}$, $i=1,2,3$. 试求: (1) $Z=X+Y$的分布律; (2) $Z=\max\{X,Y\}$的分布律; (3) $Z=\min\{X,Y\}$的分布律.

解 由已知条件知(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=i, Y=j\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},\quad i,j=1,2,3.$$

(1) $Z=X+Y$的分布律

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{9}$$

$$P\{Z=3\}=P\{X=2,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=\frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned}P\{Z=4\}=&P\{X=3,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}\\&+P\{X=1,Y=3\}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$P\{Z=5\} = P\{X=2,Y=3\}+P\{X=3,Y=2\}=\frac{2}{9}$$

$$P\{Z=6\} = P\{X=3,Y=3\}=\frac{1}{9}.$$

或用表格形式表示

$X+Y$	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(2) $Z=\max\{X,Y\}$的分布律

$$P\{Z=1\} = P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{9}$$

$$P\{Z=2\} = P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}$$
$$+P\{X=2,Y=2\}=\frac{1}{3}.$$

$$
\begin{aligned}
P\{Z=3\} =&P\{X=1,Y=3\}+P\{X=3,Y=1\}+P\{X=3,Y=2\} \\
&+P\{X=2,Y=3\}+P\{X=3,Y=3\}=\frac{5}{9}.
\end{aligned}
$$

或用表格形式表示

$\max\{X,Y\}$	1	2	3
p_k	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

(3) 用类似于(2)的方法可求得$Z=\min\{X,Y\}$的分布律

$\min\{X,Y\}$	1	2	3
p_k	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$