

Électrocinétique 3

Régime transitoire d'un oscillateur électrique

Introduction

Nous nous sommes dans le chapitre précédent intéressé à des circuits linéaires du premier ordre, à travers les exemples classique des circuits RC et RL série. L'objet de ce chapitre va être de décrire des circuits un peu plus complexes, tels que le circuit LC ou, de manière plus réaliste, le circuit RLC. Ceci nous permettra d'introduire les notions d'oscillateur harmonique et d'amortissement.

1 Circuit LC - Oscillateur harmonique

1.1 Oscillateur - Définition et vocabulaire

1.1.1 Définition

Définition 1. *Oscillateur*

.....
.....
.....

Un oscillateur est donc un dispositif dans lequel une grandeur physique, que nous noterons x , évolue de manière périodique au cours du temps, tel que présenté sur la figure 1. La grandeur x peut être une grandeur *électrique*, comme ce sera le cas dans tout ce chapitre, mais également une grandeur *mécanique* (on peut par exemple penser à la position angulaire d'un pendule, grandeur mécanique périodique). Notons que dans le cas présenté en figure 1, l'oscillateur est de plus *harmonique*.

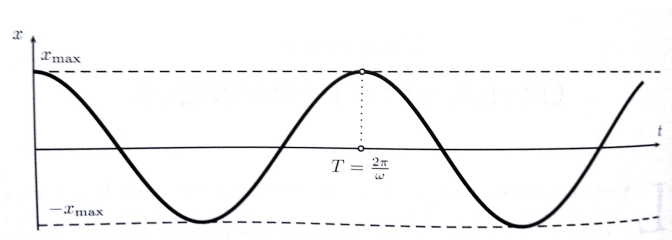


FIGURE 1 – Évolution temporelle d'un oscillateur harmonique

1.1.2 Vocabulaire

Définition 2. *Amplitude*

.....
.....

Définition 3. Fréquence et pulsation

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.1.3 Représentation mathématique**Définition 4. Représentation mathématique d'une grandeur sinusoïdale**

.....

.....

.....

.....

.....

❖ Remarques :

- On vérifie bien que, avec la forme mathématique choisie, $x(t)$ est périodique de période $T = 2\pi/\omega$, puisque :

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = x_{max} \cos\left(\omega t + \omega \times \frac{2\pi}{\omega} + \varphi\right) = x_{max} \cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = x_{max} \cos(\omega t + \varphi) = x(t)$$

- La phase à l'origine des temps permet de décrire le « décalage » de la grandeur sinusoïdale par rapport à l'origine des temps.
- Notons que tout signal sinusoïdal peut également se mettre sous la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Prouvons le :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Cette écriture sera parfois utile dans la résolution d'équations différentielles car elle permettra d'exploiter plus facilement les conditions initiales.

1.2 Réalisation d'un oscillateur harmonique - Circuit LC

1.2.1 Mise en équation

Afin de rencontrer notre premier exemple d'oscillateur harmonique, considérons le circuit LC présenté en figure 2, constitué de l'association série d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L .

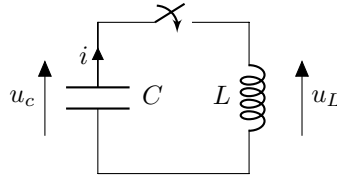


FIGURE 2 – Circuit LC

On suppose le condensateur initialement chargé sous la tension $u_c = E$ grâce à un dispositif non représenté ici. Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Cherchons à exprimer l'équation d'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 5. Pulsation propre du circuit LC

.....

.....

Forme canonique de l'équation d'évolution de u_c dans un circuit LC

.....

.....

.....

1.2.2 Expression de la tension $u_c(t)$

On cherche à résoudre l'équation précédente. Cherchons les solutions sous la forme de fonctions sinusoïdales d'expression :

$$u_c(t) = u_{c,m} \cos(\omega_0 t + \varphi_u)$$

avec $u_{c,m}$ et φ_u des constantes que nous déterminerons ultérieurement. Vérifions qu'une telle fonction est solution de l'équation d'évolution de $u_c(t)$.

.....

.....

.....

Les conditions initiales vont ensuite nous permettre de déterminer les deux constantes $u_{c,m}$ et φ_u .

L'évolution de $u_c(t)$ est donc sinusoïdale d'amplitude E , comme présenté en figure 3.

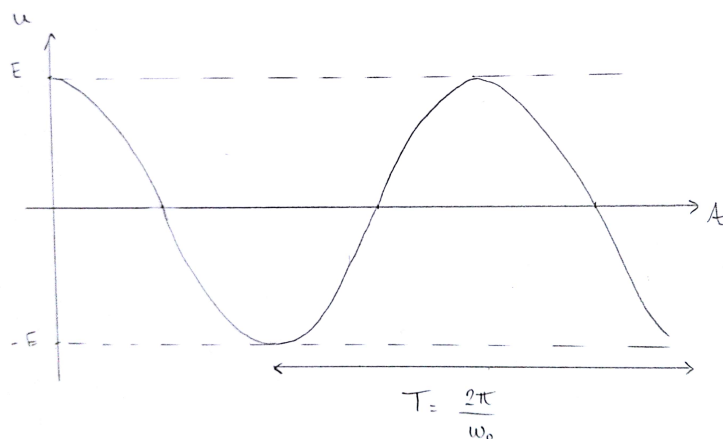


FIGURE 3 – Tension aux bornes du condensateur dans un circuit LC

1.2.3 Expression de l'intensité i

Exprimons maintenant l'intensité dans le circuit.

1.2.4 Aspects énergétiques

Nous pouvons ensuite nous intéresser aux expressions des énergies stockées dans le condensateur et dans la bobine au cours des oscillations.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

On observe que la somme des énergies $\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ est une constante, égale à l'énergie initialement stockée dans le condensateur. Le condensateur va se décharger dans la bobine, qui va stocker l'énergie pendant un certain temps, avant que celle-ci ne retourne dans le condensateur. Ceci est explicité sur le graphique en figure 4 où on représente les variations d'énergie dans le condensateur et la bobine. On observe que, quand l'énergie est maximale dans le condensateur, elle est nulle dans la bobine et réciproquement. En noir est représentée l'énergie stockée dans le condensateur, et en rouge celle stockée dans la bobine.

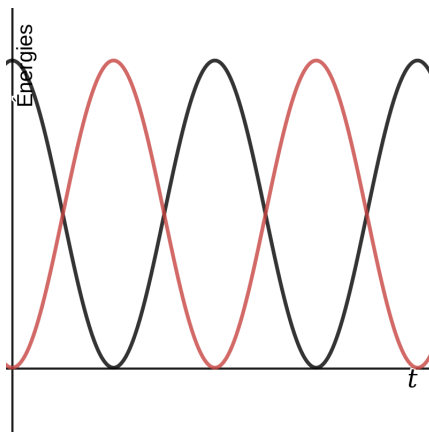


FIGURE 4 – Aspects énergétiques d'un circuit LC

1.2.5 Portrait de phase

Nous utiliserons souvent, en physique, afin de caractériser un oscillateur, son *portrait de phase*.

Définition 6. *Portrait de phase*

.....

.....

.....

.....

❖ **Cas du circuit LC :** Considérons le circuit LC, caractérisé par la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur. La dérivée de u_c est liée à l'intensité du courant traversant le circuit, puisque nous avons $i = -C \frac{du_c}{dt}$ soit $\frac{du_c}{dt} = -\frac{i}{C}$. Le portrait de phase sera donnée par le tracé de $-i/C$ en fonction de u_c . Cherchons à exprimer le lien entre ces deux grandeurs :

On reconnaît l'équation d'une ellipse, centrés sur l'origine du repère telle que présenté en figure 5.

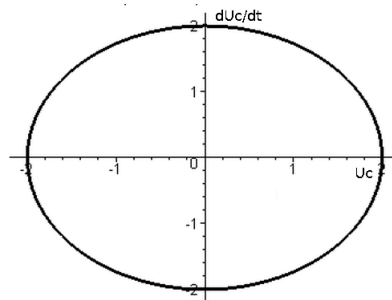


FIGURE 5 – Portrait de phase d'un circuit LC

1.3 Réalisation expérimentale d'un circuit LC

Essayons, en laboratoire, de réaliser un tel circuit, et observons si les résultats obtenus sont conformes aux prédictions théoriques précédentes. Si on trace l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur en fonction du temps, nous obtenons le résultat présenté en figure 6.

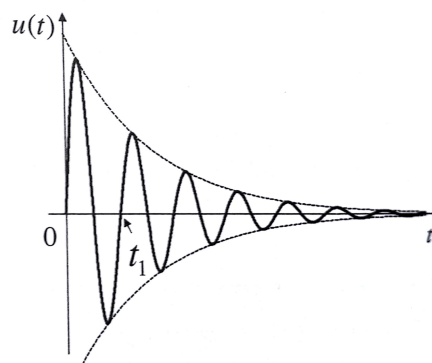


FIGURE 6 – Tension aux bornes du condensateur observée en laboratoire

Contrairement à nos prédictions, on observe une diminution progressive de l'amplitude des oscillations. On a alors réalisé ce que l'on appelle un *oscillateur amorti*. Ceci s'explique par le fait que, quelle que soit la qualité du matériel utilisé, la bobine et les fils présentent une certaine résistance interne, qui entraînent une dissipation progressive de l'énergie contenue dans le circuit. Pour rendre compte de ce phénomène, il va maintenant nous falloir raffiner notre description afin de rendre compte de ces effets dissipatifs. Pour cela, nous allons étudier le circuit RLC, dans un premier temps en régime libre.

2 Étude d'un oscillateur amorti en régime libre - Circuit RLC série

On se propose maintenant d'étudier le circuit RLC série de la figure 7, qui nous permettra de mettre en avant les phénomènes de dissipation. On suppose initialement le condensateur chargé sous la tension E . À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et on observe l'évolution du circuit.

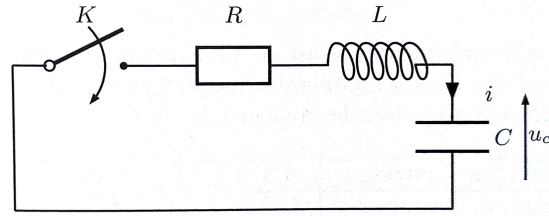


FIGURE 7 – Régime libre d'un circuit RLC série

2.1 Équation d'évolution de la tension aux bornes du condensateur

Appliquons la loi des mailles au circuit précédent, afin d'établir l'équation d'évolution de $u_c(t)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 7. Pulsation propre du circuit

.....

.....

.....

Définition 8. Taux d'amortissement

.....

.....

.....

Nous verrons plus tard pour quelles raisons on introduit un tel facteur, permettant de caractériser l'intensité de l'amortissement. Donnons pour l'instant son expression en fonction de R et L :

.....

.....

.....

.....

Définition 9. Facteur de qualité

.....

.....

.....

On a donc :

.....

.....

.....

.....

Forme canonique de l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique amorti

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Il ne nous reste dès lors plus qu'à résoudre cette équation.

2.2 Résolution d'une équation différentielle du second ordre homogène

Nous allons voir dans cette partie comment résoudre une équation différentielle du second ordre homogène du type :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = 0.$$

Pour résoudre une telle équation, on s'appuiera sur le théorème suivant.

Théorème 1. Résolution d'équation différentielle

.....

.....

.....

.....

Pour résoudre l'équation précédente, on cherche les solutions sous la forme $f(t) = Ke^{rt}$, où $r \in \mathbb{C}$. Calculons les dérivées première et seconde de f :

.....

.....

.....

L'équation différentielle à résoudre se met alors sous la forme suivante :

$$(r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2)e^{rt} = 0$$

Comme l'exponentielle ne peut s'annuler, cela revient à résoudre le polynôme caractéristique :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0.$$

Calculons le discriminant de ce polynôme :

$$\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1).$$

Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

2.2.1 Cas 1 - $\Delta > 0$

2.2.2 Cas 2 - $\Delta = 0$

2.2.3 Cas 3 - $\Delta < 0$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation d'évolution de $u_c(t)$ en appliquant la méthode précédente. On distinguera trois cas suivant les valeurs d'amortissement.

2.3 Cas d'un amortissement faible - Régime pseudo-périodique

2.3.1 Expression de la tension

Définition 10. *Régime pseudo-périodique*

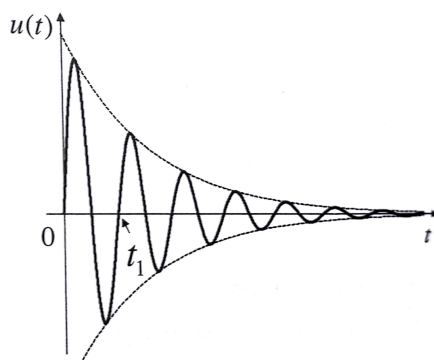
Résolvons l'équation différentielle satisfaite par $u_c(t)$:

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$$

On suit la même démarche que précédemment pour résoudre l'équation différentielle.

Définition 11. *Pseudo-période*

On représente en figure 8 l'allure de $u_c(t)$ pour un régime pseudo-périodique. On observe bien des oscillations, avec une diminution de l'amplitude de celles-ci. La diminution de l'amplitude des oscillations sera d'autant plus rapide que l'amortissement est fort. Au temps t_1 , on observe de plus qu'une pseudo-période s'est écoulée.

FIGURE 8 – Allure de $u_c(t)$ pour un régime pseudo-périodique

On représente en figure 10 l'allure de $u_c(t)$ pour un régime aperiodique, pour diverses valeurs de ξ . Il n'y a cette fois-ci plus d'oscillations. On notera que plus l'amortissement est fort, et plus il faut longtemps pour atteindre le régime permanent.

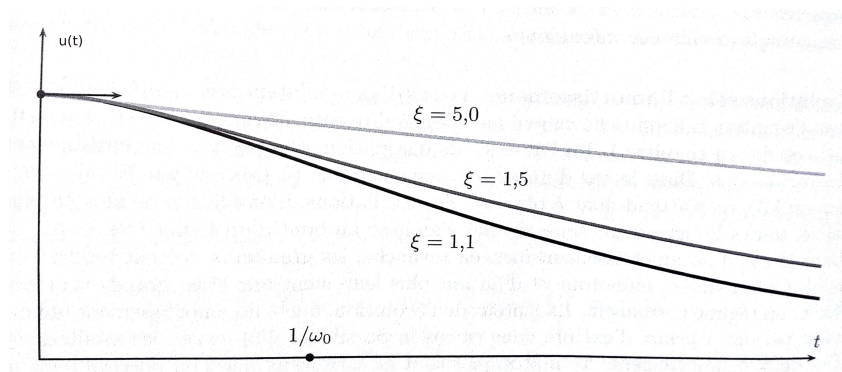


FIGURE 10 – Évolution de la tension aux bornes du condensateur dans le cas d'un régime aperiodique

2.4.2 Portrait de phase

Dans ce cas là, le portrait de phase ne ressemble plus du tout à celui de l'oscillateur harmonique, puisqu'on tend directement vers $u = i = 0$ sans effectuer d'oscillations. La figure 11 présente l'allure d'un tel portrait de phase.

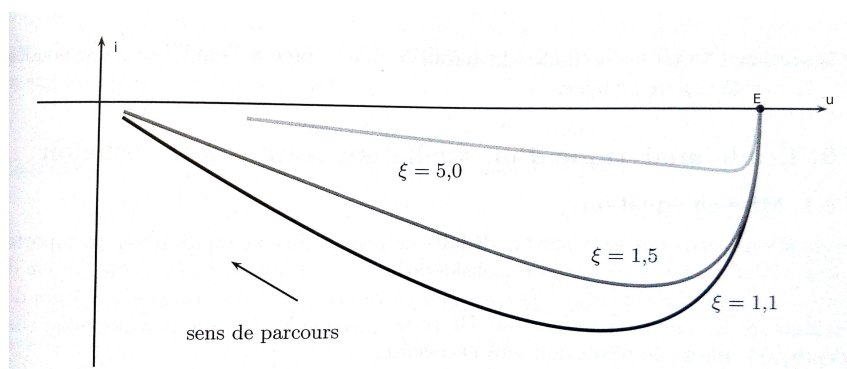


FIGURE 11 – Portrait de phase de l'évolution d'un circuit RLC en régime libre aperiodique

3.2 Résolution d'une équation différentielle du second ordre avec second membre

Considérons l'équation différentielle à résoudre :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E.$$

La marche à suivre est la même que celle que nous avons appliquée dans le chapitre précédent pour résoudre une équation différentielle du premier ordre avec second membre. Elle se divise en quatre étapes.

1. On commence par résoudre l'équation différentielle homogène (sans second membre), en suivant la méthode vue dans la partie précédente :

$$\frac{d^2 u_{c,g}}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du_{c,g}}{dt} + \omega_0^2 u_{c,g} = 0$$

On note $u_{c,g}$ la solution ainsi obtenue.

2. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre, sous la forme de celui-ci. Dans notre cas précis nous la chercherons sous la forme d'une constante. On obtient ainsi une solution particulière $u_{c,p}$.
3. On obtient l'expression de $u_c(t)$ en faisant la somme des $u_{c,g}$ et $u_{c,p}$ suivant :

$$u_c = u_{c,g} + u_{c,p}.$$

4. Enfin, on exploite les conditions initiales pour déterminer les constantes dans l'expression de $u_c(t)$.

3.3 Expression de $u_c(t)$

Appliquons la méthode précédente pour exprimer $u_c(t)$. On distinguera divers cas, suivant que l'équation différentielle homogène correspond à un régime pseudo-périodique, apériodique ou critique.

3.3.1 Cas d'un régime pseudo-périodique

On se place dans la cas d'un amortissement faible, à savoir $\xi < 1$ ou $Q > 1/2$. Appliquons les étapes précédentes.

L'allure de $u_c(t)$ est présentée en figure 13. On observe des oscillations autour de la valeur $u = E$, qui finisse par s'atténuer. Il s'agit d'un cosinus oscillant sous une enveloppe exponentielle. On a de plus représenté sur la figure la pseudo-période T , séparant deux maxima locaux successifs. On représente également l'évolution de l'intensité au cours du temps, qui présente une allure similaire. On l'obtient simplement par dérivation de u_c suivant $i = C \frac{du_c}{dt}$. Nous ne mènerons pas ce calcul ici, mais l'effectuerons en travaux dirigés.

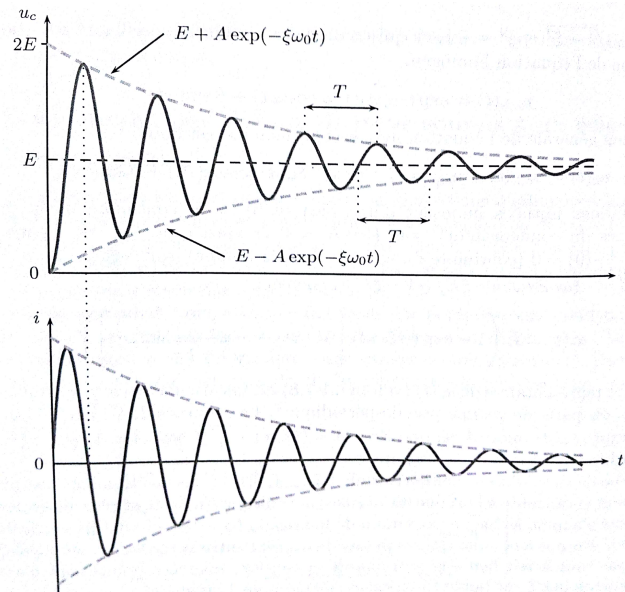


FIGURE 13 – Régime pseudo-périodique d'un circuit RLC soumis à un échelon de tension

❖ **Durée du régime transitoire :** Afin de déterminer un temps caractéristique donnant un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, considérons de nouveau l'expression de $u_c(t)$:

$$u_c(t) = E \left(1 - e^{-\xi\omega_0 t} \left[\cos(\omega t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega t) \right] \right)$$

Le terme caractérisant la décroissance exponentielle des oscillations dans cette expression est $\exp(-\xi\omega_0 t)$. On observe que la grandeur $\frac{1}{\xi\omega_0}$ est homogène à un temps. C'est ce temps qui caractérisera la durée du régime transitoire.

Durée du régime transitoire en régime pseudo-périodique

3.3.2 Cas d'un régime apériodique

On se place maintenant dans le cas d'un amortissement fort, c'est à dire $\xi > 1$ et $Q < 1/2$.

On représente l'allure de u_c et i sur la figure 14. On n'observe plus d'oscillations. La durée du régime transitoire s'obtient comme précédemment en étudiant les arguments des exponentielles. Nous ne détaillerons pas le calcul ici et le conserverons pour les travaux dirigés.

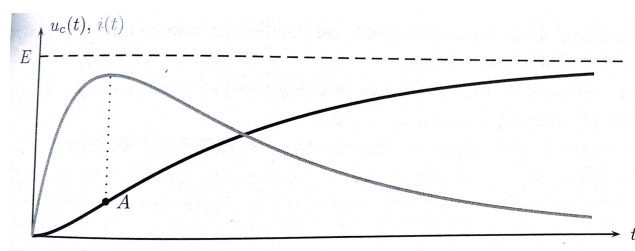


FIGURE 14 – Régime apériodique d'un circuit RLC soumis à un échelon de tension

Nous ne traiterons pas ici le cas du régime critique, car la résolution est très similaire aux deux précédentes. De plus, l'intérêt pratique du régime critique est assez limité puisqu'on ne le réalise jamais réellement dans les faits.

3.4 Aspects énergétiques

Reprenons la loi des mailles de ce début de partie et multiplions la par i afin d'obtenir le bilan de puissance du circuit. On a immédiatement :

.....

.....

.....

On peut intégrer le bilan de puissance entre $t = 0$ et $t \rightarrow +\infty$ pour obtenir l'expression de l'énergie fournie par le générateur, et celle stockée dans le circuit.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Aspects énergétiques

.....

.....

.....

.....

Conclusion

Nous avons pu dans ce chapitre nous intéresser à divers aspects des circuits LC et RLC, ce qui nous a permis d'introduire les notions d'oscillateur harmonique et d'amortissement. Nous avons ici étudié divers régimes transitoires dans des cas simples : celui du régime libre et celui de l'échelon de tension. Dans le chapitre suivant, nous étudierons ces mêmes circuits, mais cette fois soumis à une excitation sinusoïdale et non plus à un échelon, ce qui nous amènera à introduire la notion de résonance.