概率论与数理统计

# 2.3 随机变量的函数的分布

北京化工大学数学系

苏贵福

随机变量及其分布可以帮助人们解决许多实际问题. 但是在工作实践中, 还常常遇到借助随机变量的函数的分布才能解决的问题.

♣ 圆的直径$X$是随机变量, 研究圆面积 $S = \frac{1}{4}\pi X^2$的概率分布问题.

♣ 商品的价格$X$和成本$Y$都是随机变量, 研究盈利$Z = X - Y$的概率分布问题.

●●●●●●

下面我们将讨论如何由已知的随机变量$X$的概率分布去求得函数$Y = g(X)$的概率分布.

**例1** 设随机变量$X$具有以下的分布律. 试求$Y=(X-1)^2$的分布律.

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.4 |

**解** $Y$的所有可能的值为$0, 1, 4$. 并且

$$P\{Y=0\}=P\{(X-1)^2=0\}=P\{X=1\}=0.1$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.3+0.4=0.7$$

$$P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=0.2$$

由此可得$Y$的分布律为

| $X$ | $0$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0.1 | 0.7 | 0.2 |

**例2** 设随机变量$X$具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量$Y=2X+8$的概率密度.

**解** 分别记$X,Y$的分布函数为$F_X(x)$, $F_Y(y)$. 下面先来求$F_Y(y)$.

$$\begin{aligned}F_Y(y)=&P\{Y\leq y\}=P\{2X+8\leq y\}\\ =&P\left\{X\leq\frac{y-8}{2}\right\}=F_X\left(\frac{y-8}{2}\right).\end{aligned}$$

将$F_Y(y)$关于$y$求导, 得到$Y=2X+8$的概率密度为

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) =& f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\left(\frac{y-8}{2}\right)' \\
=& \begin{cases} \frac{1}{8}\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
=& \begin{cases} \frac{1}{32}(y-8), & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}
$$

**例3** 设随机变量$X$具有分布函数$F_X(x)$和密度函数$f_X(x)$. 试求随机变量$Y = aX + b$ $(a \neq 0)$的密度函数.

**解** 令$F_Y(y)$表示随机变量$Y$的分布函数, 则

$$F_y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{aX + b \leq y\} = P\{aX \leq y - b\}$$

当$a > 0$时

$$F_Y(y) = P\left\{X \leq \frac{y-b}{a}\right\} = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

当$a < 0$时

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P\left\{X \geq \frac{y-b}{a}\right\} = 1 - P\left\{X < \frac{y-b}{a}\right\} \\ =& 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a} - 0\right). \end{aligned}$$

其中$F_X\left(\frac{y-b}{a}-0\right)$表示$X$的分布函数$F_X(x)$在点 $\frac{y-b}{a}$处的左极限.
当$X$为连续型随机变量时, 由$F_X(x)$的连续性可知,

$$F_X\left(\frac{y-b}{a}-0\right)=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

因此分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ 1-F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases}$$

由此可得, 随机变量$Y$的密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

**定理2** 设随机变量$X$具有概率密度$f_X(x)$, $-\infty < x < +\infty$. 又设函数$g(x)$处处可导且恒有$g'(x) > 0$(或恒有$g'(x) < 0$), 则$Y = g(X)$是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, 而$h(y)$是$g(x)$的反函数.

**证明** 我们只证明$g'(x) > 0$的情形. 此时$g(x)$在$(-\infty, +\infty)$严格单调增加, 因而 它的反函数$h(y)$存在, 且在$(\alpha, \beta)$严格增加并且可导.

记$X, Y$的分布函数为$F_X(x)$和$F_Y(y)$. 先求$Y$的分布函数$F_Y(y)$.

- 当$y \le \alpha$时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 0$.
- 当$y \ge \beta$时, $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = 1$.
- 当$\alpha < y < \beta$时,

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) =& P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} \\
=& P\{X \le h(y)\} = F_X[h(y)].
\end{aligned}
$$

将$F_X(y)$关于$y$求导数, 即得$Y$的概率密度

$$
f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & 其他 \end{cases}
$$

**例4** 设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 试证明$X$的线性函数 $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$也服从正态分布.

**证明** $X$的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

由$y = g(x) = ax + b$解得

$$x = h(y) = \frac{y-b}{a}, \text{ 且有} h'(y) = \frac{1}{a}.$$

进而由定理2可知, $Y = aX + b$的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < y < +\infty$$

也就是说

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty < y < +\infty$$

于是$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$.

特别地, 若取$a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$, 则有

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

这便是上一节定理1的结论. ■