2. Cinématique du point matériel

Introduction

La mécanique est une branche de la physique qui étudie et quantifie le mouvement, dans l'espace et au cours du temps, des objets matériels, en lien avec les causes qui lui ont donné naissance. Cette discipline est apparue sous sa forme moderne aux XVI^{e} et XVII^{e} siècles, grâce aux apports notamment de Galilée et de Newton, qui surent se détacher de la description du mouvement héritée de la Grèce antique, perçu alors comme un changement intrinsèque des propriétés de la matière.
On sépare généralement la mécanique en deux domaines distincts [1] : la *cinématique* et la *dynamique*. La cinématique correspond à l'étude du mouvement des corps, *indépendamment des causes qui lui ont donné naissance*, ce mot vient du grec « kinematikos » qui signifie « mouvement ». La dynamique, à l'inverse, étudie le lien entre le mouvement et les causes qui le produisent, appelées *forces*.

Nous nous intéresserons dans ce chapitre uniquement à la cinématique, ce qui nous permettra de découvrir les divers outils nécessaires à la description du mouvement, et notamment d'approfondir le formalisme vectoriel. Avant toute chose, il nous faut décrire dans quel cadre s'effectuera notre étude, ce qui sera l'objet de notre première partie.

2.1 Cadre d'étude

2.1.1 Objets d'étude - Mobiles ponctuels

Nous nous intéresserons, presque tout au long de ce semestre, à l'étude du mouvement de *mobiles ponctuels*. C'est à dire que l'on assimilera l'objet matériel étudié à un point unique auquel on attribuera les caractéristiques du solide initial (masse, charge, force appliquée). Il suffira de trois coordonnées pour définir totalement la position d'un tel objet.

Définition 2.1.1 — Point matériel.

....

....

....

....

Gardons à l'esprit que la notion de point matériel est une *approximation*, plus ou moins valable suivant

1. Cette séparation est relativement récente, puisqu'elle a été introduite pour la première fois en 1834, par le physicien français Ampère.

le cas considéré. En effet, assimiler un solide matériel à un point unique revient à négliger toute extension spatiale du solide et tout effet de rotation du solide sur lui-même.

■ **Exemple 2.1.1** Plusieurs cas se présentent où l'on peut négliger l'extension spatiale des objets étudiés :
— L'approximation précédente est particulièrement valide lors de l'étude de particules particulièrement petites (molécule, ion, électron), comme nous le verrons notamment dans un chapitre ultérieur lors de l'étude du mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique.
— Suivant le niveau de description souhaité, on peut assimiler une planète à un corps ponctuel. Par exemple, si l'on étudie le mouvement de rotation de la Terre autour du Soleil, on peut, à cette échelle, négliger le mouvement de rotation propre de notre planète et l'assimiler à un point matériel de même masse que la Terre.

■

2.1.2 Cadre spatio-temporel de la cinématique

L'étude du mouvement d'un objet nécessite de pouvoir mesurer sa position à différents instants. La donnée de la position (caractérisée par trois coordonnées dans notre espace à trois dimensions) et de l'instant auquel a été mesuré cette position constitue en physique un *événement*. Pour rendre objective la mesure de cet événement, il nous faudra déterminer des distances et des durées, ce qui nécessite le choix d'une origine et d'une norme, à la fois pour l'espace et le temps.

Repérage temporel - Mesure du temps

En mécanique classique, on postule le temps *absolu*, c'est à dire qu'il s'écoule de la même manière pour tous les observateurs. Ceci n'est valable que dans le cadre de la mécanique non relativiste, où la vitesse v des objets étudiés vérifie $v \ll c$ où c est la vitesse de la lumière. La mesure du temps exige ensuite le choix :
— d'une *origine*, prise à un instant arbitraire du mouvement. On prend généralement comme origine des temps un instant t_1 où l'état du système est connu, les instants ultérieurs correspondent alors à l'évolution du système vers le futur, où le mouvement est inconnu ;
— d'une échelle de temps, la seconde.

Se pose dès lors la question de *comment* définir une seconde. On s'appuie pour cela sur la mécanique quantique, une seconde correspondant à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux atomiques, plus précisément entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. [2] Les systèmes capables d'effectuer des décomptes d'intervalles de temps aussi petits sont des *horloges atomiques*, d'une grande précision, elles dérivent de moins d'une seconde en trois millions d'années. La mesure du temps effectuée par 250 de ces horloges réparties dans le monde entier constitue *l'échelle de temps atomique internationale*.

Remarque - Différentes échelles de temps

Notons qu'il existe d'autres échelles de temps, l'Homme n'ayant pas attendu l'invention de l'horloge atomique pour mesurer des durées :
— *L'échelle de temps solaire* remonte à la civilisation babylonienne, au deuxième millénaire avant notre ère, et est à l'origine de nos heures, minutes et secondes. Cette échelle de temps, basée sur la course du Soleil dans le ciel, subdivise la durée du jour en 24 parties, le midi correspondant au passage du Soleil au méridien (au zénith). Cette échelle de temps, mesurée alors par des cadrans solaires, constitue le *Temps Solaire Vrai* (TSV), basé sur la rotation de la Terre sur elle-même.
Comme la durée du jour varie au cours de l'année, en raison de l'inclinaison de l'axe des pôles par rapport au plan contenant l'orbite terrestre, la durée entre deux graduations d'un cadran solaire varie au cours de l'année. En corrigeant cette différence, qui peut aller jusqu'à 16 minutes, on obtient le *Temps Solaire Moyen* (TSM).
— Sur un cadran solaire, le midi est représenté par la graduation 0h. On obtient le temps civil en ajoutant 12 heures au temps solaire moyen. L'observatoire de Greenwich, en Angleterre, fournit un temps civil de référence, le *Temps Universel* (UT). Notons que le temps universel n'est pas une échelle de temps régulière, elle est affectée par les effets de marée, le déplacement des pôles terrestre (précession de la Terre), etc...
— Pour des raisons pratiques, notamment au niveau de la navigation maritime et aéronautique, on est amené à trouver un compromis entre le temps universel et le temps atomique international, c'est le *Temps Universel Coordonné* (UTC), qui correspond au temps atomique international décalé d'un nombre entier de secondes (33 en 2008), de sorte qu'il ne s'écarte jamais de plus de 0,9 secondes du temps universel, corrigé du déplacement des pôles terrestres (UT1). Quand on menace de dépasser cet écart maximal, on corrige UTC en ajoutant ou en enlevant une seconde de décalage, au 1^er^ janvier ou

2. Ce choix a été réalisé car on connaît avec une très grande précision cette période.

au 1er juillet. C'est cette échelle UTC qui est utilisée comme temps de référence planétaire, notamment dans les systèmes GPS.

Repérage spatial - Mesure des positions

Dans la suite de ce cours, nous nous intéresserons au mouvement d'un point mobile que nous noterons M. Pour décrire son mouvement, il nous faut tout d'abord parvenir à repérer sa position dans l'espace. On utilise pour cela un *repère d'espace*.

Définition 2.1.2 — Repère d'espace.

....

....

....

....

Pour repérer une position, il faudra ensuite utiliser un *système de coordonnées* auquel on associera une *origine* O, fixe par rapport au solide de référence. Par exemple, si l'on étudie le mouvement d'un mobile dans un plan, un système de coordonnées va associer à chaque point du plan deux nombres réels $(a_1(t), a_2(t))$ qui définiront les coordonnées du point M.

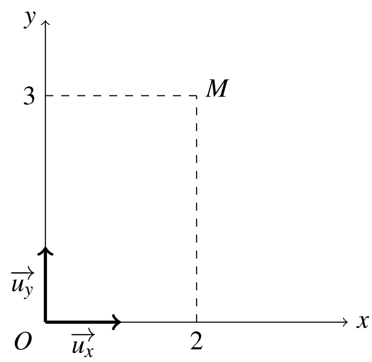
Notons qu'il existe donc une infinité de systèmes de coordonnées possibles. De la manière la plus générale possible, un repère sera constitué d'une origine et de trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ formant une *base* $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ qui permettront d'écrire la position $\overrightarrow{OM}$ du point M par rapport à l'origine O suivant :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$$

Vocabulaire 2.1 — Composantes. x_1 x_2, et x_3 sont les *composantes* ou *coordonnées* du point M dans la base $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. Ces composantes sont des grandeurs *algébriques* et peuvent donc être positives ou négatives.

■ **Exemple 2.1.2** Lorsque vous tracez sur un graphique le point M ,de coordonnées (x, y), avec $x = 2$ et $y = 3$, vous pouvez bien écrire, comme on le voit sur la représentation ce-dessous :

$$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{u_x} + 3\overrightarrow{u_y}$$



La base choisie est alors $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}\}$ et le point M a pour coordonnées dans cette base $(2, 3)$. Notons qu'on aurait pu choisir n'importe quel jeu de deux vecteurs pour exprimer la position $\overrightarrow{OM}$. Nous verrons plus loin comment déterminer les composantes d'un vecteur dans une base quelconque. ■

Remarque

L'unité usuelle de mesure des distances est le *mètre*. Celui-ci est défini à partir de la vitesse c de la lumière, posée comme une constante fondamentale de la physique. Le mètre est défini comme la distance parcourue par la lumière pendant un temps $\frac{1}{c}$.

Référentiels - Relativité du mouvement

A un repère d'espace, comme vu précédemment, on peut associer un temps unique en synchronisant toutes les horloges de ce repère [3], on obtient alors un *référentiel*.

3. La synchronisation des horloges se fait en deux étapes, on vérifie d'abord qu'elles ont la même *marche*, c'est à dire la même durée pour une seconde, on vérifie ensuite qu'elles ont la même origine des temps.

Définition 2.1.3 — Référentiel.

....

....

....

Dans la suite du cours, on désignera par $\mathscr{R}$ le référentiel du laboratoire, ou *référentiel terrestre*, car fixe par rapport à la Terre. Le mouvement d'un mobile s'effectuera toujours dans un référentiel donné qui comprendra à la fois un repère temporel et une base qu'on précisera. Nous étudierons plus loin dans ce cours les bases usuelles utilisées pour repérer des positions.

Relativité du mouvement

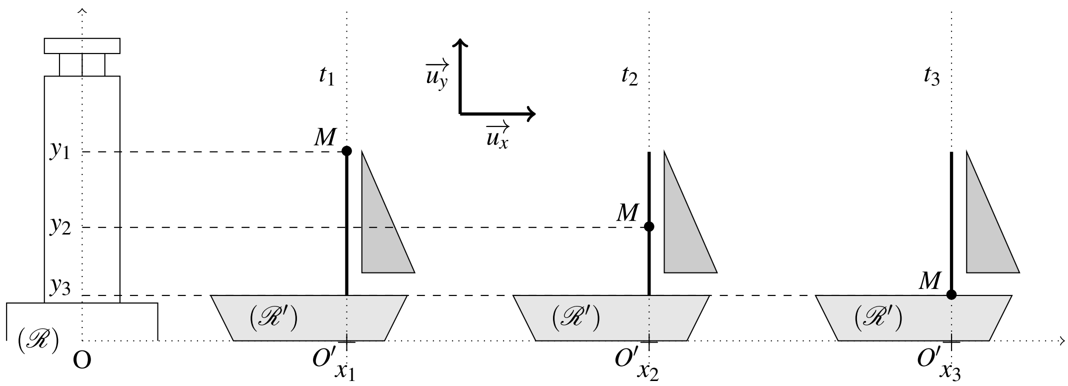
Il faut bien garder à l'esprit que le mouvement d'un mobile, repéré par ses coordonnées dans la base associée à un référentiel donné, *dépend de ce référentiel*. Le mouvement étant relatif au référentiel d'étude, on parle de *relativité du mouvement*.

À retenir 2.1.3

....

....

■ **Exemple 2.1.4** Un exemple classique pour illustrer la relativité du mouvement est celui proposé par Galilée au XVII^{eme} siècle. Supposons un bateau en mouvement à vitesse constante, en ligne droite sur une mer calme, par rapport à un phare sur la côte. On étudie le mouvement d'un boulet lâché par un matelot depuis le haut du mât. On désigne par $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ le référentiel associé au phare et par $\mathscr{R}' = (0', \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ celui associé au bateau. On observe ensuite le mouvement du boulet comme présenté sur la figure suivante.



Trois instants différents sont représentés sur le schéma précédent. On présente dans le tableau suivant le relevé des coordonnées de M dans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ à chacun de ces instants.

Instant considéré	t_1	t_2	t_3
Coordonnées de M dans $\mathscr{R}$	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
Coordonnées de M dans $\mathscr{R}'$	$(0, y_1)$	$(0, y_2)$	$(0, y_3)$

Nous voyons bien que les coordonnées de M sont différentes dans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$, il en va de même pour les trajectoires. Nous verrons plus loin dans ce cours, lorsque le formalisme nécessaire aura été abordé, que la trajectoire dans $\mathscr{R}'$ est une droite (ce qui apparaît clairement sur le schéma), tandis que celle dans $\mathscr{R}$ est une parabole. Ceci illustre la relativité du mouvement, il faudra prendre garde, dans un problème de mécanique, à toujours préciser le référentiel dans lequel on se place. ■

Nous avons dans cette partie précisé le cadre dans lequel nous allons étudier la mécanique. Ceci nous a permis de dégager la notion de *référentiel*, essentielle dans ce domaine. Nous avons également pu constater la nécessité du formalisme vectoriel. Une bonne maîtrise de celui-ci est indispensable pour la suite de ce chapitre, et c'est pourquoi nous allons effectuer quelques rappels concernant les vecteurs.

2.2 Quelques rappels sur les vecteurs

2.2.1 Définition

Définition 2.2.1 — Vecteur.

....

....

....

....

....

....

On représentera le vecteur par une flèche orientée dans le sens du vecteur et suivant la direction de celui-ci, de longueur égale à la norme du vecteur. On se servira de vecteurs pour modéliser de nombreux concepts en physique (position, vitesse, force...).

2.2.2 Dérivation temporelle d'un vecteur

La définition de la dérivée s'étend sans peine aux grandeurs vectorielles, comme le montre ce qui suit.

Définition 2.2.2 — Dérivée d'un vecteur.

....

....

....

....

R On note bien que la dérivée d'un vecteur est un vecteur et non un scalaire !

Théorème 2.2.1

....

....

....

....

....

....

....

....

R On prendra soin, en mécanique, de différencier une grandeur constante d'une grandeur invariante et d'une grandeur uniforme. Une grandeur est *constante* si elle ne dépend pas du temps, elle est *invariante* si elle ne dépend pas du référentiel d'étude et elle est *uniforme* si elle prend la même valeur en tout point de l'espace. Pour qu'un vecteur soit constant, sa norme et sa direction doivent être constantes.

R Nous avons ici défini la dérivée *temporelle* d'un vecteur, c'est à dire que nous avons dérivé le vecteur $\overrightarrow{a}$ par rapport au *temps*. La définition précédente se généralise bien évidemment pour la dérivation par rapport à n'importe quelle variable.

Cette définition nous permettra par la suite de définir rigoureusement, en quatrième partie, la notion de *vitesse* que nous avons abordé intuitivement dans le chapitre précédent.

2.2.3 Base orthonormée

Nous avons déjà vu précédemment que la donnée de trois vecteurs distincts forme une base de $\mathbb{R}^3$. On peut former, à l'aide de ces trois vecteurs des bases particulières appelées *bases orthonormées*.

Définition 2.2.3 — Base orthonormée.

....

....

....

....

....

....

....

Nous avons dans cette partie effectué un produit scalaire, rappelons quelques propriétés de ce dernier.

2.2.4 Produit scalaire

Définition 2.2.4 — Produit scalaire.

....

....

....

....

R On peut émettre les remarques suivantes quant au produit scalaire :
- Notons que le produit scalaire est une grandeur qui ne dépend que des normes des vecteurs et de l'angle qu'ils font entre eux, c'est donc une grandeur indépendante de la base.
- D'après la définition précédente, si deux vecteurs sont perpendiculaires, leur produit scalaire est nul. En effet, on a :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}.\vec{b} = 0$$

- On peut remarquer que, comme $\cos\theta = \cos(-\theta)$, on a $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$.

Produit scalaire dans une base orthonormée

Théorème 2.2.2 — Produit scalaire dans une base orthonormée.

....

....

....

....

....

....

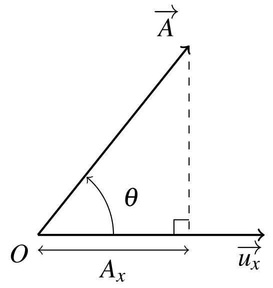
....

Projection d'un vecteur

Définition 2.2.5 — Projection d'un vecteur. Soit $\overrightarrow{A}$ un vecteur quelconque et $\overrightarrow{u_x}$ un vecteur unitaire [a]. On appelle projection de $\overrightarrow{A}$ sur $\overrightarrow{u_x}$ la grandeur scalaire A_x telle que :

$$A_x = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{u_x} = A\cos\theta$$

où θ est l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{u_x}$, comme présenté dans le schéma suivant.



a. i.e. de norme 1.

2.2.5 Produit vectoriel

Définition 2.2.6 — Produit vectoriel.

....

....

....

....

....

....

On explicite souvent le produit vectoriel sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Propriétés du produit vectoriel

Le produit vectoriel présente les propriétés suivantes.

— La norme de $\overrightarrow{c}$ est donnée par $\|\overrightarrow{c}\| = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\||\sin\theta|$ où θ représente l'angle entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.
— $\overrightarrow{c}$ est normal au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, sa direction est telle que la base $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ soit directe (voir plus bas).
— Pour avoir $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, il faut avoir ou $\overrightarrow{a} = 0$, ou $\overrightarrow{b} = 0$, ou $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$.

2.2.6 Base orthonormée directe

Définition 2.2.7 — Base orthonormée directe.

....

....

....

....

....

....

Pour déterminer si une base $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\}$ de l'espace à trois dimensions est une base directe, on peut utiliser une des deux règles suivantes :

— **Règle de la main droite :** Pour que $\mathscr{B}$ soit une base directe, il faut que, si le pouce pointe dans la direction de $\overrightarrow{u_x}$ et l'index dans la direction de $\overrightarrow{u_y}$, alors le majeur pointe dans la direction de $\overrightarrow{u_z}$, comme représenté sur la figure 2.1.

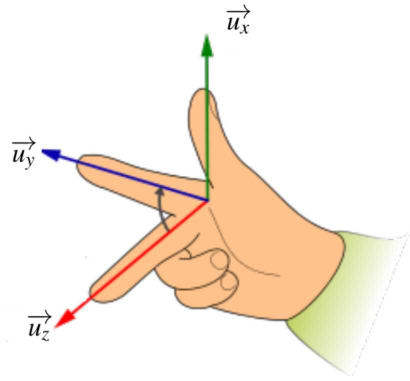


FIGURE 2.1 – Règle de la main droite

— **Règle du tire-bouchon :** Considérons les deux vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ vus de dessus. Si on « rabat » $\overrightarrow{u_x}$ sur $\overrightarrow{u_y}$, on tourne dans un certain sens. Si on tourne dans le sens horaire, alors $\overrightarrow{u_z}$ doit s'enfoncer dans le plan pour que $\mathscr{B}$ soit une base directe. En revanche, si on tourne dans le sens trigonométrique, alors $\overrightarrow{u_z}$ doit s'élever hors du plan, vers l'observateur, pour que $\mathscr{B}$ soit une base directe. On appelle cette règle « règle du tire-bouchon » car, si on tourne un tire-bouchon dans le sens horaire, on visse et le bouchon s'enfonce et, si l'on tourne dans le sens trigonométrique, on dévisse, et le bouchon s'élève, comme on le voit sur la figure 2.2. [4]

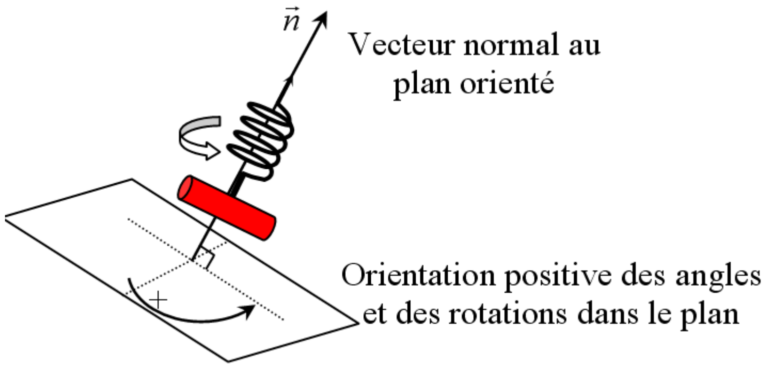


FIGURE 2.2 – Règle du tire bouchon

Si l'une de ces deux règles est satisfaite et que la base considérée est orthonormée, on parle alors de *base orthonormée directe*.

Ce sont de telles bases que nous allons utiliser, associées à un système de coordonnées, pour repérer un point mobile dans l'espace. Reste encore à choisir quel système de coordonnées, ce qui constituera l'objet de la partie suivante.

2.3 Repérage dans l'espace - Systèmes de coordonnées usuels

Notons qu'il existe une infinité de systèmes de cordonnées, chacun attachés à une base particulière. Dans les cas que nous étudierons, nous nous limiterons à trois systèmes, chacun présentant un intérêt suivant le problème considéré.

2.3.1 Coordonnées cartésiennes

Lorsque le système étudié ne possède aucune symétrie particulière, on utilise généralement pour le décrire les coordonnées cartésiennes relatives à la base $\mathscr{K} = \{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\}$, appelée *base cartésienne*. Pour

4. Chez nos confrères américains, plus raisonnables, la règle du tire-bouchon est plus souvent appelée « règle du tournevis ».

construire cette base, considérons trois axes perpendiculaires se coupant en un point O, l'origine, qu'on suppose liée au solide de référence définissant le référentiel $\mathscr{R}$, et donc immobile dans celui-ci. Les trois vecteurs de base $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ ont la direction de ces axes et sont orientés de manière à former un trièdre direct, comme présenté sur la figure 2.3. Notons que, comme ces vecteurs sont définis par rapports à des axes fixés au solide de référence, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ sont également fixes dans $\mathscr{R}$.

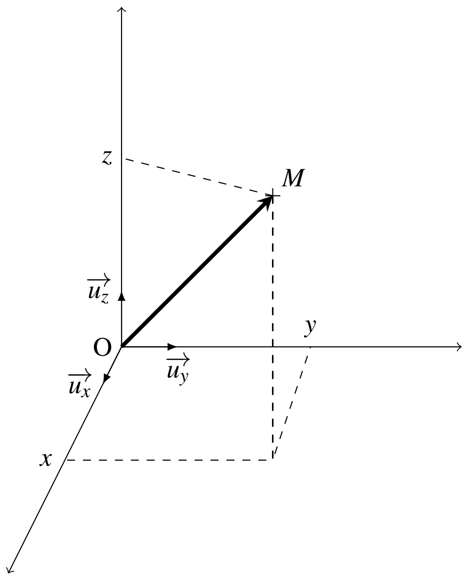


FIGURE 2.3 – Coordonnées cartésiennes

À retenir 2.3.1

....

....

....

....

....

....

....

Vocabulaire 2.2 — Nom des diffèrentes coordonnées. On utilise, pour désigner x, y et z le vocabulaire suivant :
- — $x \in [-\infty; +\infty]$, x est appelé *l'abscisse* de M.
- — $y \in [-\infty; +\infty]$, y est appelé *l'ordonnée* de M.
- — $z \in [-\infty; +\infty]$, z est appelé *l'altitude* de M.

2.3.2 Coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires)

Lorsque le système étudié présente une symétrie de révolution autour d'un axe dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u_z}$, on utilise généralement pour le décrire les coordonnées *cylindriques* parfois aussi appelées coordonnées *cylindro-polaires* associées à la base $\mathscr{C} = \{\overrightarrow{u_\rho, u_\varphi}, \overrightarrow{u_z}\}$.

Pour construire la base cylindrique, commençons par nous appuyer sur nos connaissances sur les coordonnées polaires (r, θ) caractérisant la position d'un point M contenu dans le plan (xOy), on a alors $r = OM$ et $\theta = \widehat{Ox, OM}$. Les deux vecteurs de la base polaire associée $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ se déduisent simplement de $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ par une rotation d'angle θ de ces derniers comme représenté sur la figure 2.4.

Pour obtenir les coordonnées cylindriques complètes, le principe est le même. Par tradition, le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est maintenant noté $\overrightarrow{u_\rho}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ devient $\overrightarrow{u_\varphi}$, r est noté ρ et θ devient φ. On trace la projection P du point M dans

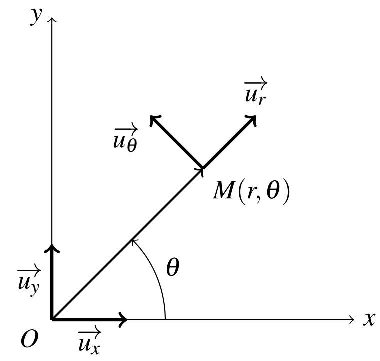


FIGURE 2.4 – Repérage en coordonnées polaires

le plan xOy. Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a une norme ρ et fait un angle φ avec l'axe Ox. On obtient comme précédemment les vecteurs $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\varphi}$ par une rotation d'un angle φ des vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ de la base cartésienne. Pour repérer totalement le point M, il nous manque encore son altitude qu'on repère par la coordonnée z, projection de $\overrightarrow{OM}$ sur $\overrightarrow{u_z}$. Ainsi, le vecteur de base $\overrightarrow{e_z}$ est le même dans la base cartésienne et dans la base cylindrique. Pour plus de clarté, le principe de la construction est représenté sur la figure 2.5.

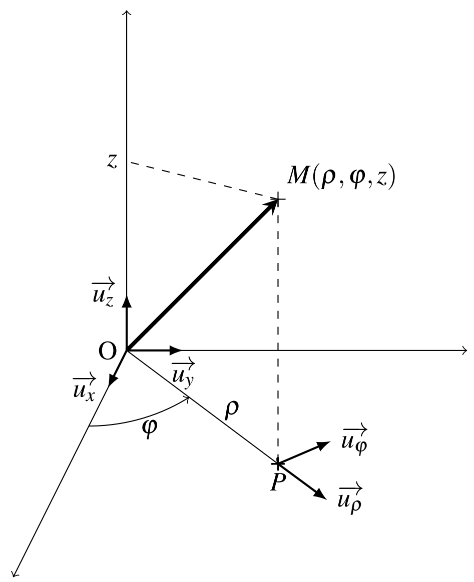


FIGURE 2.5 – Coordonnées cylindro-polaires

À retenir 2.3.2

....

....

....

....

À retenir 2.3.3 Contrairement aux vecteurs de la base cartésienne, fixes par rapport au solide de référence et indépendants de la position du point M, $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\varphi}$ dépendent de la position de M via la variable angulaire φ. Ils ne seront donc pas fixes dans le référentiel $\mathscr{R}$ associé au solide de référence et à la base cartésienne.

On peut noter les observations suivantes concernant les coordonnées (ρ,φ,z) :

— $\rho \in [0,+\infty]$, puisqu'il s'agit de la distance, non algébrisée, de M à l'axe de symétrie.

— $\varphi \in [0; 2\pi]$, et est appelé *angle azimutal*.
— $z \in [-\infty, +\infty]$ et est appelé *altitude* du point M.

Lien entre coordonnées cylindro-polaires et coordonnées cartésiennes

— **Lien entre coordonnées :**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

— **Lien entre les vecteurs de base :** Les vecteurs $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\varphi}$ de la base cylindro-polaire s'obtiennent par une simple rotation d'un angle φ des vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ de la base cartésienne. On en déduit les coordonnées de $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\varphi}$ dans la base cartésienne : ....

....

....

....

....

....

Les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ ne dépendant pas de φ on déduit des égalités précédentes :

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\varphi} = -sin(\varphi)\overrightarrow{u_x} + \cos(\varphi)\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_\varphi} \quad et \quad \frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{d\varphi} = -\cos(\varphi)\overrightarrow{u_x} - \sin(\varphi)\overrightarrow{u_y} = -\overrightarrow{u_\rho}$$

Nous verrons plus tard que ces expressions sont particulièrement utiles pour le calcul des vitesses et des accélérations.

2.3.3 Coordonnées sphériques

Nous allons enfin aborder un dernier jeu de coordonnées, utile lorsque le système étudié présente une symétrie sphérique. On utilisera alors la base locale sphérique $\mathscr{S} = \{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\}$.

Dans cette base, le point M est repéré à l'aide des trois variables (r, θ, φ), où $r = OM$, $\theta = \widehat{Oz, OM}$ et $\varphi = \widehat{Ox, OH}$ où H est le projeté orthogonal de M dans le plan (xOy). La base orthonormée directe associée est $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\}$, où $\overrightarrow{u_r}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ appartient au plan méridien contenant les axes (Oz) et (OM) et est orienté dans le sens des θ positifs. Enfin, $\overrightarrow{u_\varphi}$ est perpendiculaire à ce plan de sorte que le trièdre soit direct. Il est ainsi orienté dans le sens des φ positifs. On se référera à la figure 2.6 qui illustre cette construction.

À retenir 2.3.4

....

....

....

On peut noter les observations suivantes concernant les coordonnées (r, θ, φ) :

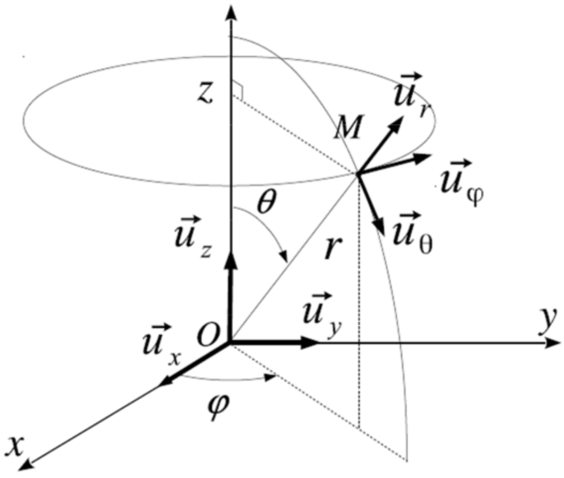


FIGURE 2.6 – Coordonnées sphériques

— $r \in [0,+\infty]$, puisqu'il s'agit de la distance, non algébrisée, de O à M.
— $\theta \in [0;\pi]$, et est appelé *colatitude*.
— $\varphi \in [0;2\pi]$ et est appelé *longitude* ou *azimut* du point M.

⚠De même que pour la base cylindrique, la base sphérique n'est pas fixe par rapport à l'origine O, et n'est donc pas fixe par rapport à $\mathscr{R}$. Il faudra toujours garder cela à l'esprit lors du calcul ultérieur des vitesses et des accélérations.

Lien entre coordonnées sphériques et cartésiennes

— **Liens entre coordonnées :** On déduit du schéma les égalités suivantes : ....

....

....

....

....

....

....

....

— **Lien entre vecteurs de base :** En projetant chacun des vecteurs de base, on obtient :

$$\overrightarrow{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{u_y} + \cos\theta\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{u_y} - \sin\theta\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\overrightarrow{u_x} + \cos\varphi\overrightarrow{u_y}$$

Nous savons maintenant repérer la position d'un mobile, à la fois dans l'espace et le temps. Nous sommes dotés de tous les outils techniques nécessaires à la résolution d'un problème de cinématique. Il ne nous reste plus qu'à définir et calculer les grandeurs *physiques* pertinentes, ce que nous allons faire dans la partie suivante.

2.4 Description cinématique du mouvement d'un point matériel

2.4.1 But de l'étude - Position et trajectoire

Le but de notre étude sera de pouvoir déterminer l'évolution de la position d'un mobile au cours du temps. Il faudra trouver les équations donnant l'évolution des coordonnées, dans la base la plus adaptée au problème, en fonction du temps, dans un référentiel donné. Ceci nous permettra ensuite de trouver la *trajectoire* de l'objet, concept que nous allons définir ci-dessous.

Définition 2.4.1 — Trajectoire.

....

....

....

....

....

....

⚠La trajectoire est définie par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$ donné.

Afin de pouvoir mener à son terme l'étude cinématique du déplacement d'un mobile, il va nous falloir introduire diverses grandeurs vectorielles, certaines déjà abordées, comme le *vecteur position*, d'autres plus nouvelles, comme les vecteurs vitesse et accélération.

2.4.2 Vecteurs position et déplacement élémentaire

Vecteur position

Définition 2.4.2 — Vecteur position.

....

....

....

....

Notons que la définition du vecteur position ne dépend que de l'origine O choisie et pas de la base considérée, c'est uniquement lorsqu'on exprime celui-ci en fonction d'un jeu de coordonnées particulières qu'il faut prendre garde à préciser dans quelle base on travaille. On rappelle dans le tableau 2.1 l'expression du vecteur position dans les différentes bases étudiées.

Base cartésienne	$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$
Base cylindrique	$\overrightarrow{r} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$
Base sphérique	$\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{u_r}$

TABLE 2.1 – Expression du vecteur position dans les différentes bases

Vecteur déplacement élémentaire

Définition 2.4.3 — Déplacement élémentaire.

....

....

....

....

....

....

....

....

Le vecteur déplacement élémentaire s'exprime différemment dans les différentes bases :

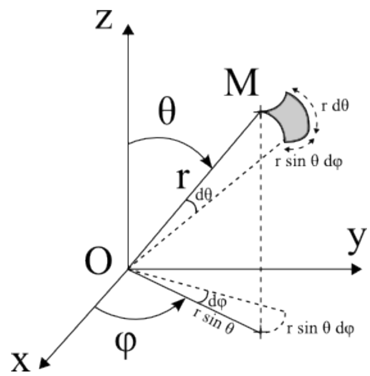


FIGURE 2.7 – Détermination du déplacement élémentaire en coordonnées sphérique

— **Base cartésienne :** On peut calculer le déplacement élémentaire suivant :

$$d\overrightarrow{OM} = d(x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}) = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$$

puisque, les vecteurs de la base cartésienne étant fixes dans le référentiel $\mathscr{R}$ considéré, on a : $d(\overrightarrow{u_x}) = d(\overrightarrow{u_y}) = d(\overrightarrow{u_z}) = \overrightarrow{0}$. Les grandeurs dx, dy et dz représentent des déplacements infinitésimaux le long des axes (Ox), (Oy) et (Oz).

— **Base cylindrique :** Pour déterminer le déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques, adoptons une approche géométrique. Observons la variation du vecteur position si chacune des coordonnées subit une variation infinitésimale :
  - — Si ρ varie de $d\rho$, le vecteur position varie de $d\rho$ dans la direction de $\overrightarrow{u_\rho}$, soit : $(d\overrightarrow{OM})_\rho = d\rho\overrightarrow{u_\rho}$.
  - — Si φ varie de $d\varphi$, le vecteur position va varier suivant $\overrightarrow{u_\varphi}$ et sa variation sera d'autant plus grande que ρ est élevé, soit : $(d\overrightarrow{OM})_\varphi = \rho d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$.
  - — Si z varie de dz, la variation du vecteur position sera simplement donnée par $(d\overrightarrow{OM})_z = dz\overrightarrow{u_z}$.

On obtient finalement le vecteur déplacement élémentaire total en sommant les contributions de chacune des coordonnées :

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\varphi\overrightarrow{u_\varphi} + dz\overrightarrow{u_z}.$$

— **Coordonnées sphériques :** Pour expliciter le vecteur déplacement élémentaire en coordonnées sphériques, utilisons une approche géométrique. Une variation de r de dr entraîne un déplacement $d\overrightarrow{OM}_r = dr\overrightarrow{u_r}$. Une modification infinitésimale $d\theta$ de θ entraîne une variation de position $d\overrightarrow{OM}_\theta = rd\theta\overrightarrow{e_\theta}$ au premier ordre. Enfin, une variation $d\varphi$ de l'angle φ entraîne une variation de position $d\overrightarrow{OM}_\varphi = r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$. On pourra, pour mieux visualiser ces opération se référer à la figure 2.7.

En sommant chacune des contributions suivant chacune des directions, on obtient le vecteur déplacement élémentaire total qui s'exprime suivant :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$

On récapitule dans le tableau 2.2 l'expression du déplacement élémentaire dans chaque système de coordonnées usuel :

Base cartésienne	$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z}$
Base cylindrique	$d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\varphi\overrightarrow{u_\varphi} + dz\overrightarrow{u_z}$
Base sphérique	$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$

TABLE 2.2 – Vecteur déplacement élémentaire dans les différentes bases

2.4.3 Vecteur vitesse

Obtention du vecteur vitesse par le vecteur déplacement élémentaire

Nous avons, dans le paragraphe précédent, déterminé l'expression du vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{r}$ dans les différentes bases. Nous pouvons, grâce à cela, obtenir l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$. En effet, un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ se déroulera pendant un intervalle de temps infinitésimal dt. Dès lors, en effectuant le rapport du déplacement sur le temps de parcours, on obtient bien une expression pour la vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

où la fraction désigne ici un rapport de grandeurs infinitésimales. [5]. Notons que distances et durées étant évaluées dans un certain référentiel, la vitesse dépend du référentiel $\mathscr{R}$ considéré.

En reprenant les expressions du déplacement élémentaire, on en déduit simplement l'expression du vecteur vitesse dans les différentes bases, comme présenté dans le tableau 2.3.

Base considérée	Vecteur déplacement élémentaire	Vecteur vitesse
Base cartésienne	$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u_x} + dy\vec{u_y} + dz\vec{u_z}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}\vec{u_y} + \frac{dz}{dt}\vec{u_z}$
Base cylindrique	$d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{u_\rho} + \rho d\varphi\vec{u_\varphi} + dz\vec{u_z}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u_\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{u_\varphi} + \frac{dz}{dt}\vec{u_z}$
Base sphérique	$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u_r} + rd\theta\vec{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\vec{u_\varphi}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{u_\varphi}$

TABLE 2.3 – Obtention du vecteur vitesse par le vecteur déplacement élémentaire dans les différentes bases

Nous avons ici obtenu le vecteur vitesse comme rapport du vecteur déplacement élémentaire par la durée correspondante. Il est temps de formaliser cette notion à travers l'outil mathématique correspondant, en généralisant la notion de dérivée aux grandeurs vectorielles.

Définition du vecteur vitesse

La position d'un mobile M étant repérée, dans le référentiel $\mathscr{R}$, par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, la vitesse de M dans $\mathscr{R}$ est le vecteur qui exprime le changement de position de M au cours du temps, par rapport à l'origine O.

Définition 2.4.4 — Vecteur vitesse.

....

....

....

....

Notons bien que la vitesse dépend du référentiel dans lequel on l'exprime. De plus, de par sa définition, la vitesse sera en tout point tangente à la trajectoire. On a en effet, par définition de la dérivée, en désignant par $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ les positions occupées par le mobile à t et $t+\delta t$:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\delta t}$$

La vitesse aura donc bien la direction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ qui, de toute évidence, est tangent à la trajectoire.

À retenir 2.4.1 Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}_{M/\mathscr{R}}$ d'un point M mobile est tangent en chaque point à sa trajectoire. En désignant par $\vec{u_t}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, on pourra alors noter :

$$\vec{v}_{M/\mathscr{R}} = v\vec{u_t}$$

où v désigne la norme du vecteur vitesse.

Cherchons maintenant si nous pouvons retrouver les relations précédemment établies pour la vitesse dans chacune des bases étudiées, en appliquant la définition précédente.

Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

Plaçons nous dans le référentiel $\mathscr{R}$ et utilisons le système de coordonnées cartésiennes. Rappelons dans un premier temps l'expression du vecteur position dans une base cartésienne :

$$\vec{r} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}$$

5. Nous assimilerons plus loin dans le cours ce rapport à une dérivée

Nous savons que les vecteurs de base cartésiens sont fixes, ce sont donc des constantes vectorielles, et on a :

$$\frac{d\overrightarrow{u_x}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_y}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt} = \overrightarrow{0}$$

On déduit immédiatement le vecteur vitesse :

À retenir 2.4.2

....

....

....

Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

Réitérons le traitement précédent en utilisant une base cylindrique, toujours dans le référentiel $\mathscr{R}$. On rappelle l'expression du vecteur position en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{r} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$$

On peut écrire, grâce aux formules de dérivation vues précédemment :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\overrightarrow{u_\rho}} + \dot{z}\overrightarrow{u_z} + z\dot{\overrightarrow{u_z}}$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ est le même en base cartésien et cylindrique, il vient immédiatement :

$$\dot{\overrightarrow{u_z}} = \overrightarrow{0}$$

Le problème est alors de calculer la dérivée temporelle du vecteur de base $\overrightarrow{u_\rho}$. On peut pour cela effectuer le traitement suivant :

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\varphi}\dot{\varphi}$$

Et nous avions précédemment exprimé $\overrightarrow{u_\rho}$ dans la base cartésienne, où nous avions :

$$\overrightarrow{u_\rho} = \cos\varphi\overrightarrow{u_x} + \sin\varphi\overrightarrow{u_y}$$

Et on obtient, en dérivant par φ :

$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\varphi} = -\sin\varphi\overrightarrow{u_x} + \cos\varphi\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_\varphi}$$

En remplaçant la dérivée par cette expression dans le calcul du vecteur vitesse, on obtient :

À retenir 2.4.3

....

....

....

Il ne nous reste maintenant plus qu'à exprimer la vitesse en coordonnées sphériques.

Vecteur vitesse en coordonnées sphériques

La dérivée du vecteur position dans la base locale sphérique est un peu plus compliquée à obtenir. Il nécessite de maîtriser la notion de *dérivée partielle* que vous rencontrerez plus tard en mathématiques. Pour cette raison, nous avons choisi ici de ne pas détailler le calcul, et d'en simplement présenter le résultat.

À retenir 2.4.4

....

....

....

De la même manière qu'on a introduit le *vecteur vitesse*, qui permet de quantifier les variations du vecteur position, nous allons désormais introduire le *vecteur accélération* qui nous permettra cette fois de quantifier les variations du vecteur vitesse.

2.4.4 Vecteur accélération

Définition du vecteur accélération

La vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}$ du point mobile M par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ est généralement une fonction du temps. Pour évaluer les variations de vitesse, aussi bien en norme qu'en direction, on utilise le *vecteur accélération*.

Définition 2.4.5 — Vecteur accélération.

....

....

....

....

On peut ensuite, grâce à cette définition, exprimer le vecteur accélération dans les différentes bases, en dérivant le vecteur vitesse.

Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Nous avons établi précédemment l'expression suivante de la vitesse, par rapport au référentiel $\mathscr{R}$, du mobile ponctuel M dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

On peut donc donc, en dérivant une nouvelle fois, trouver l'expression de l'accélération dans $\mathscr{R}$, comme les vecteurs de la base cartésienne sont fixes, on trouve directement le résultat suivant.

À retenir 2.4.5

....

....

....

....

Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

Exprimons maintenant l'accélération dans la base cylindrique. Rappelons pour cela l'expression de la vitesse :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}.$$

En dérivant cette expression une nouvelle par rapport au temps, dans $\mathscr{R}$, il vient :

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\overrightarrow{u_\rho}} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi} + \rho\dot{\varphi}\dot{\overrightarrow{u_\varphi}} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z} + \dot{z}\dot{\overrightarrow{u_z}}$$

Comme précédemment, nous avons :

$$\dot{\overrightarrow{u_z}} = 0 \quad ; \quad \dot{\overrightarrow{u_\rho}} = \dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

Pour trouver $\dot{\overrightarrow{u_\varphi}}$, exprimons ce vecteur dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\overrightarrow{u_x} + \cos\varphi\overrightarrow{u_y}$$

On peut ensuite effectuer le calcul suivant :

$$\frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = (-\cos\varphi\overrightarrow{u_x} - \sin\varphi\overrightarrow{u_y})\,\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\rho}.$$

En réinjectant ces expressions dans celle de l'accélération, on trouve :

$$\vec{a}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{\rho}\vec{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{u_\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{u_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\vec{u_\varphi} - \rho\dot{\varphi}^2\vec{u_\rho} + \ddot{z}\vec{u_z}.$$

On trouve finalement l'expression suivante :

À retenir 2.4.6

....

....

....

....

Vecteur accélération en coordonnées sphériques

L'expression générale de l'accélération en coordonnées sphériques est relativement complexe et son calcul présente peu d'intérêt. Il s'agit toutefois d'un bon exercice d'entraînement à la manipulation des dérivées vectorielles. Pour l'étudiant courageux qui souhaiterait mener le calcul, nous donnerons ici le résultat à titre informatif.

À retenir 2.4.7 L'accélération, par rapport au référentiel $\mathscr{R}$, d'un mobile ponctuel M dans la base sphérique est donnée par :

....

....

....

....

Nous avons exprimé dans cette partie les grandeurs pertinentes en cinématique dans les divers systèmes de coordonnées. Il est maintenant temps de mettre en application ces résultats dans le cadre de divers exemples.

2.5 Étude de mouvements particuliers

2.5.1 Méthode d'étude d'un mouvement

Lorsqu'on étudie le mouvement d'un mobile, on suit pour cela les étapes suivantes :

- Il faut tout d'abord définir le système, afin de savoir précisément ce que l'on étudie.
- Il faut ensuite choisir et préciser le référentiel d'étude.
- On précise ensuite la, ou les, bases choisies, en exploitant judicieusement les symétries du problème.
- Enfin, en exploitant les données, on détermine position, vitesse ou accélération, grâce à des intégrations et des dérivations.

2.5.2 Mouvements rectilignes d'un point

Les mouvements rectilignes sont caractérisés par la nature de leur trajectoire qui est une *droite*. Le mouvement s'effectuant le long d'une droite, le problème est à une dimension. On désignera par $\vec{u_x}$ le vecteur unitaire porté par cette droite, qu'on orientera arbitrairement. Nous pourrons projeter l'intégralité des grandeurs sur $\vec{u_x}$, de sorte que le formalisme vectoriel est ici superflu.
On peut distinguer trois types de mouvement rectilignes particuliers. On se placera, pour chacun de ces exemples, dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire, c'est-à-dire le référentiel terrestre, et on étudiera le mouvement d'un mobile ponctuel M.

Mouvement rectiligne uniforme

....

....

....

....

....

....

....

....

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Mouvement rectiligne sinusoïdal

Les mouvements rectilignes sinusoïdaux sont caractérisés par une accélération proportionnelle à la position, avec une constante de proportionnalité négative, que l'on désigne généralement par $-\omega_0^2$, de sorte que l'on a, après projection sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On reconnaît là l'équation d'un oscillateur harmonique, que vous avez déjà traité dans les chapitres précédents. Les solutions sont donc de la forme :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où x_0 et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

Afin de nous initier plus avant au formalisme vectoriel, considérons une nouvelle fois le cas où un point M est soumis à une accélération constante, mais cette fois ci dans le cas d'un mouvement non rectiligne.

2.5.3 Mouvement d'un point soumis à une accélération constante

Cette situation présente une grande importance en physique, puisque le champ de gravité produit par la Terre au voisinage du sol peut être considéré comme uniforme, et confère donc une accélération constante à tous les corps en chute libre. Pour rendre le problème plus concret, supposons que l'on souhaite déterminer la trajectoire suivie par un ballon de basket-ball, assimilé à un point matériel M, lancé par un joueur. On réalise l'étude dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}$. A l'instant initial, M est confondu avec l'origine du repère et la vitesse est donnée par (voir figure 2.8) :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = v_0(\cos\alpha\overrightarrow{u_x} + \sin\alpha\overrightarrow{u_z}).$$

Commençons par établir les équations horaires du mouvement, donnant l'évolution des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ au cours du mouvement. Le mouvement considéré est en effet contenu dans le plan (xOy) puisque la vitesse est initialement contenue dans celui-ci.

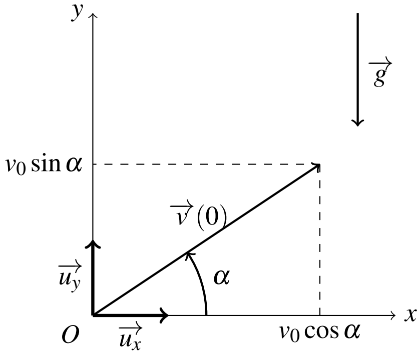


FIGURE 2.8 – Mouvement d'un point soumis à une accélération constante

Équations horaires du mouvement

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....

....

....

....

....

....

....

Nous pouvons maintenant, à l'aide des résultats précédents, déterminer la trajectoire du ballon de basket.

Équation de la trajectoire

La trajectoire correspond à l'ensemble des points occupés par le mobile, il s'agira donc des points de coordonnées $(x(t), y(t))$, ce qui correspond à l'ensemble des positions occupées par le ballon de basket au fil du temps, dans le plan (xOy). Rappelons les expressions précédemment obtenues :

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \quad et \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin(\alpha)t$$

Déterminer la trajectoire revient à trouver l'équation de la courbe $y = f(x)$. Pour faire cela, on isole la variable temporelle dans l'expression de x :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ceci correspond à l'équation d'une parabole. Le résultat, conforme à l'expérience de tous les jours, est représenté sur la figure 2.9.

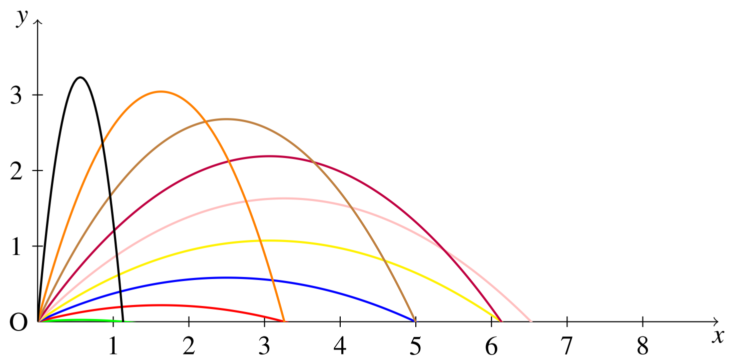


FIGURE 2.9 – Parabole observée pour différents angles α et pour $v_0 = 8m.s^{-1}$

2.5.4 Mouvement circulaire

Une autre grande catégorie de mouvement est celle des mouvements *circulaires*. Ceux-ci présentent une très grande importance puisqu'ils permettent de décrire, dans une première approximation, le mouvement d'un satellite autour de la Terre ou le mouvement de l'électron autour du noyau dans un cadre classique [6]. Historiquement, les astronomes grecs se sont largement intéressés au mouvement circulaire, car il constituait à leurs yeux l'exemple du mouvement naturel parfait des astres.

Le cercle étant inscrit dans un plan, on pourra utiliser les coordonnées polaires pour décrire le mouvement. On désigne donc par R le rayon du cercle et par θ l'angle qui permet de situer le mobile par rapport à l'axe des x. On peut se référer à la figure 2.10 pour les notations. Pendant toute notre étude, nous nous plaçons dans un référentiel $\mathscr{R}$, considéré comme étant celui de l'observateur.

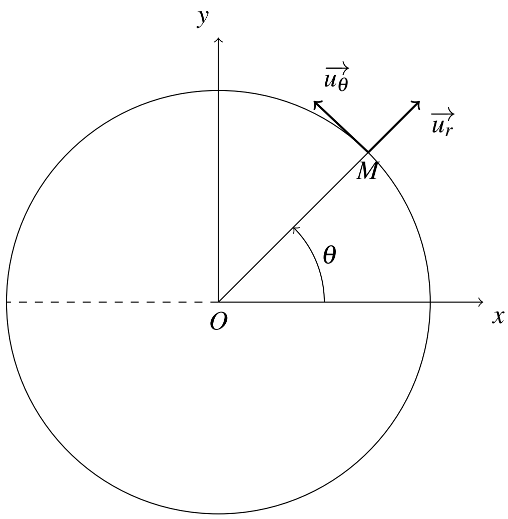


FIGURE 2.10 – Mouvement circulaire d'un mobile

On peut alors distinguer deux cas distincts, suivant que la norme de la vitesse est constante ou non.

6. C'est à dire dans le cas d'un traitement non quantique.

Mouvement circulaire uniforme

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, la norme de la vitesse est constante, soit :

$$r\dot{\theta} = cste \quad soit \quad \omega = \dot{\theta} = cste$$

où ω est appelée *vitesse angulaire*. La vitesse s'écrit alors :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = R\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

On remarque que l'accélération est radiale, et centripète, c'est à dire orientée vers le centre O du cercle.

Le cas que nous avons traité ici est un cas particulier, traitons maintenant le cas plus particulier du mouvement circulaire non uniforme.

Mouvement circulaire non uniforme

⚠On ne peut plus ici introduire de vitesse angulaire ω car la norme de la vitesse n'est plus constante.

Dans le cas du mouvement circulaire non uniforme, le mouvement n'est plus uniquement radial, la composante suivant $\overrightarrow{u_\theta}$ est appelée *composante orthoradiale*. On notera que, si l'accélération n'est plus radiale, elle reste cependant dirigée vers la concavité de la trajectoire, ce qui est un résultat général, même pour les mouvements non circulaires.

Conclusion

Nous avons, au cours de ce chapitre, énoncé les principes de base de la cinématique du point. Nous nous sommes dans un premier temps intéressés au mouvement d'un mobile ponctuel, approximation qui revient à négliger toute extension spatiale de l'objet considéré, et donc tout mouvement de rotation de l'objet sur lui-même, de déformation ou d'extension. Dans ce cadre, nous nous sommes interrogés sur la manière la plus simple de repérer la position d'un objet dans l'espace. Nous avons pour cela introduit trois bases, que l'on choisit en fonction de la symétrie du problème :

- Lorsque que le système ne présente aucune symétrie particulière, on utilise généralement la base cartésienne $\{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\}$.
- Lorsque le système présente une symétrie de révolution autour d'un axe Oz, on utilise généralement la base locale cylindrique $\{\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\varphi}, \overrightarrow{u_z}\}$.
- Lorsque le système présente une symétrie centrale de révolution, on utilise généralement la base locale sphérique $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\}$.

Pour ces deux dernières bases, le terme *local* signifie que la base est liée à l'objet et n'est donc pas fixe par rapport à un observateur de $\mathscr{R}$, contrairement à la base cartésienne.
Une fois exprimé le vecteur position exprimé dans chacune de ces différentes bases, nous avons vu comment en déduire l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération, par dérivées successives du vecteur position. La donnée du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération permet de caractériser le mouvement.

Bien que nous ayons appliqué à quelques exemple simples les concepts de cinématique du solide abordés ici, il nous faudra approfondir les notions vues ici dans des chapitres ultérieurs, afin de pouvoir mener l'étude de système plus complexes. De même, il nous faudra, en mécanique du point, nous intéresser aux *causes* du mouvement, ce qui correspond au domaine de la *dynamique* du point, qui fera l'objet du chapitre suivant. Vous verrez de plus, au cours de votre cursus, que la mécanique classique étudiée ici, aussi qualifiée de *mécanique newtonienne* en hommage au célèbre physicien anglais Isaac Newton (1642 - 1727), est une approximation aux faibles vitesses de la *mécanique relativiste*, introduite en 1905 par Albert Einstein. Si cette étude est hors programme, il est néanmoins bon de garder à l'esprit que les théories étudiées ici ont chacune un certain cadre d'application restreint.