Exemple 18.

Remarque 20. Les matrices diagonales, triangulaires (supérieures et inférieures), et symétriques sont stables par produit matriciel. Pas les matrices antisymétriques cependant, attention !

Théorème 7. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^{t}(\lambda AB) = \lambda {}^{t}B {}^{t}A$

Définition 22. On définit naturellement les *puissances k-ème* d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- $A^0 = I_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = A \times A^n$

Théorème 8. *Soient A et B deux matrices carrée qui commutent (c'est à dire que $AB = BA$). Alors :*

- $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$. *(formule de Newton)*
- $A^{n+1} - B^{n+1} = (A - B) \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A^{n-k} B^k \right)$.

Démonstration 4. Exactement de la même manière que pour les réels où les complexes : par récurrence avec un changement d'indice à faire dans la démonstration d'hérédité, qui part de $(A+B)^{n+1} = (A+B)^n(A+B)$. Il faut bien justifier, par contre, quand et où on utilise l'hypothèse de commutativité. De même pour la factorisation de $A^n - B^n$.

Application 1. On cherche à calculer A^n, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche aussi une matrice B telle que $AB = BA = I_3$.

1- Posons $N = A - I_3$. Calculer N^2, N^3 et N^4.

2- En déduire N^k pour $k \geqslant 4$.

3- Avec la formule de Newton, en déduire une forme simple de A^n.

4- Avec la formule de factorisation, en déduire la matrice B.

Remarque 21. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Pour calculer le produit de A et B, il peut parfois être utile de les décomposer «par bloc » : on va séparer les matrices A et B en 4 blocs comme suit :

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{s} & \overbrace{\quad}^{p-s} \end{array} \\ n \left\{ \vphantom{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}} \right. & \underbrace{\left(\begin{array}{c:c} A_1 & A_3 \\ \hdashline A_2 & A_4 \end{array}\right)}_{p} \end{array} \qquad \text{et } B = \begin{array}{c c c} p \left\{ \vphantom{\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}} \right. & \underbrace{\left(\begin{array}{c:c} B_1 & B_3 \\ \hdashline B_2 & B_4 \end{array}\right)}_{q} & \begin{array}{l} \}\, s \\ \}\, p-s \end{array} \end{array}$$

Alors quand on calcul $A \times B$, tout ce passe comme si on multipliait deux matrices 2×2 (attention toutefois à l'ordre des multiplications !). Notons qu'avec la séparation de s colonnes pour A et s lignes pour B, on est assurés que tous les produits ici sont compatibles :

$$A \times B = \quad n \left\{ \underbrace{\left(\begin{array}{c:c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hdashline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right)}_{q} \right.$$

Cette méthode est à la base de l'algorithme de Strassen, qui permet un calcul informatique plus rapide de la multiplication de matrices. De plus, cette méthode peut se généraliser, tant qu'on s'assure que les découpages sont compatibles : si

$$A = \left.\underbrace{\left(\begin{array}{c:c:c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,s} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline A_{r,1} & \cdots & A_{r,s} \end{array}\right)}_{\substack{p \text{ colonnes séparées} \\ \text{en } s \text{ groupes}}}\right\} \begin{array}{l} n \text{ lignes séparées} \\ \text{en } r \text{ groupes} \end{array} \quad \text{et } B = \left.\underbrace{\left(\begin{array}{c:c:c} B_{1,1} & \cdots & B_{1,t} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline B_{s,1} & \cdots & B_{s,t} \end{array}\right)}_{\substack{q \text{ colonnes séparées} \\ \text{en } t \text{ groupes}}}\right\} \begin{array}{l} p \text{ lignes séparées} \\ \text{en } s \text{ groupes} \end{array}$$

et que les produits sont compatibles :

$$\begin{array}{lll} \forall i \in [\![1;r]\!] & \exists (n_{i,j,k}, p_{i,j,k}, q_{i,j,k}) \in \mathbb{N}^{*3} \ / & A_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_{i,j,k},p_{i,j,k}}(\mathbb{K}) \\ \forall j \in [\![1;t]\!] & & B_{k,j} \in \mathcal{M}_{p_{i,j,k},q_{i,j,k}}(\mathbb{K}) \\ \forall k \in [\![1;s]\!] & & (\text{donc on peut calculer } A_{i,k}B_{k,j}) \end{array}$$

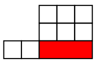
alors on peut écrire :

$$A \times B = C = \left(\begin{array}{c:c:c} C_{1,1} & \cdots & C_{1,t} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline C_{s,1} & \cdots & C_{s,t} \end{array}\right) \qquad \text{avec } C_{i,j} = \sum_{k=1}^{s} A_{i,k}B_{k,j}$$

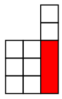
Un cas particulier qui intervient souvent lorsqu'on raisonne par récurrence et quand on considère la première colonne à part des $(p-1)$ restantes ; on a alors cette situation :

$$\left(\begin{array}{c:c} a & L_A \\ \hdashline C_A & A' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} b & L_B \\ \hdashline C_B & B' \end{array}\right) \qquad \begin{array}{cc} \text{avec :} & L_A \in \mathcal{M}_{1,p-1}(\mathbb{K}), \\ a, b \in \mathbb{K}, & L_B \in \mathcal{M}_{1,q-1}(\mathbb{K}), \\ A' \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K}), & C_A \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}), \\ B' \in \mathcal{M}_{p-1,q-1}(\mathbb{K}), & C_B \in \mathcal{M}_{p-1,1}(\mathbb{K}). \end{array}$$

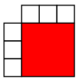
Cela nous permet de rappeller quelques propriétés utiles de la mutltiplication entre lignes, colonnes, et matrices :



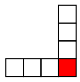
$$\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{1,q}(\mathbb{K})$$



$$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$$



$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$



$$\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K})$$

Exemple 19. En utilisant une décomposition par bloc bien choisie, on peut calculer très efficacement le produit :

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5- Opérations élémentaires sur les matrices

5.a) Généralités

Définition 23. Soient I un ensemble, $(i, j) \in I^2$, on appelle **symbole de Kronecker** de i, j :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 22. Si $I = [\![1; n]\!]$, alors $(\delta_{i,j})_{i \in [\![1;n]\!], j \in [\![1;n]\!]} = I_n$.

Proposition 14. Soient I un ensemble, $(i,j,k) \in I^3$, alors :

1- $\delta_{i,j}\delta_{j,k} = \delta_{i,k}$.

2- $\displaystyle\sum_{k \in I} a_k \delta_{i,k} = a_i$

3- $\displaystyle\sum_{k \in I} a_{p,k}\delta_{k,q} = a_{p,q}$

Définition 24. Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On appelle matrice $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ème ligne et j-ème colonne :

$$E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{l,k})_{\substack{k \in [\![1;n]\!] \\ l \in [\![1;p]\!]}} = \begin{array}{cc} \text{j-ème colonne} & \\ \begin{pmatrix} (0) & & (0) \\ & & \\ & \boxed{1} & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{i-ème ligne} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Proposition 15. Soient $(n,p,q) \in \mathbb{N}^{*3}$, et $i \in [\![1;n]\!], j \in [\![1;p]\!], k \in [\![1;p]\!], l \in [\![1;q]\!]$. Prenons alors $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors :

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

Ce produit fait donc $\mathbf{0}_{n,q}$ si $j \neq k$, et si $j = k$, alors c'est la matrice $E_{i,l}$.

Exemple 20.

Définition 25. Soient $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, et $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, avec $i \neq j$. On définit alors les matrices suivantes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dites **matrices d'opération élémentaires** :

- **Matrice de transvection**

$$U_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} = \begin{array}{cc} \text{j-ème colonne} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots \; \boxed{\lambda} & \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \text{i-ème ligne} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

- **Matrice de permutation**

$$T_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & (0) & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \boxed{0} & & & & \boxed{1} & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & \boxed{1} & & & & \boxed{0} & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & (0) & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

- **Matrice de dilatation**

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & i\text{-ème colonne} & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \boxed{\lambda} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & (0) & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Définition 26. On appelle $\mathbf{Elm}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'opérations élémentaires, et de tous leurs produits possibles :

$$\mathbf{Elm}_n(\mathbb{K}) = \begin{cases} \{U_{i,j}(\lambda), (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j, \lambda \in \mathbb{K}\} & \subset \mathbf{Elm}_n(\mathbb{K}) \\ \{T_{i,j}, (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j\} & \subset \mathbf{Elm}_n(\mathbb{K}) \\ \{D_i(\lambda), i \in [\![1;n]\!], \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0\} & \subset \mathbf{Elm}_n(\mathbb{K}) \\ \forall A, B \in \mathbf{Elm}_n(\mathbb{K})^2, A \times B \in \mathbf{Elm}_n(\mathbb{K}) & \end{cases}$$

Proposition 16. • $U_{i,j}(\lambda)U_{i,j}(-\lambda) = I_n$ • $T_{i,j}T_{i,j} = I_n$ • $D_i(\lambda)D_i(\lambda^{-1}) = I_n$

Remarque 23. On a donc $I_n \in \mathbf{Elm}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\mathbf{Elm}_n(\mathbb{K})$ est le *groupe engendré par* les matrices des opérations élémentaires.

Exemple 21.

5.b) Équivalence par ligne

Les matrices que nous venons de définir correspondent aux opérations élémentaires sur les lignes d'un système où d'une matrice, par *multiplication à gauche*

Proposition 17. Soit (E) un système de n équations linéaires a p inconnues, $A \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ la matrice augmentée associée. On a les équivalences suivantes par multiplication à gauche par une matrice de $\mathbf{Elm}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{array}{lllllll} L_i & \leftarrow & L_i + \lambda L_j & \Longleftrightarrow & A & \rightarrow & U_{i,j}(\lambda)A \\ L_i & \leftrightarrow & L_j & \Longleftrightarrow & A & \rightarrow & T_{i,j}A \\ L_i & \leftarrow & \lambda L_i & \Longleftrightarrow & A & \rightarrow & D_i(\lambda)A \end{array}$$

Notons que ces opération sont toujours possibles, et conservent la taille de A, car les matrices des opérations élémentaires sont dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$

Proposition 18. Soient (E) et (E') deux systèmes de n équations linéaires a p inconnues, $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})^2$ les matrices augmentées associées.

$$(E) \underset{L}{\sim} (E') \Longleftrightarrow A \underset{L}{\sim} A' \Longleftrightarrow \exists E \in \mathbf{Elm}_n(\mathbb{K}) \ / \ EA = A'$$

C'est la traduction, avec les matrices d'opération élémentaires, du fait que deux matrices sont équivalentes par lignes si il existe une suite d'opération élémentaire transformant l'une en l'autre.

Théorème 9.

$$\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \exists! R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \exists E \in \mathbf{Elm}_n(\mathbb{K}) \ / \ \begin{cases} R \text{ échelonnée réduite} \\ EM = R \end{cases}$$

Remarque 24. On a vu que multiplier à gauche par un matrice de $\mathbf{Elm}_n(\mathbb{K})$ revenait à faire une opération élémentaire sur les lignes. Que ce passe-t-il si on multiplie à droite ? Prenons l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \times D_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que l'opération élémentaire associée à $D_2(3)$ (multiplication par 3) a été effectuée sur la deuxième colonne (et non la deuxième ligne). En fait, c'est un résultat plus général : *la multiplication à droite par une matrice de* $\mathbf{Elm}_n(\mathbb{K})$ *correspond à une opération sur les colonnes.*

Définition 27. En conséquence de la remarque précédente, on définit les opérations élémentaire sur les colonnes de la manière suivante :

$$\begin{array}{lllllll} A & \rightarrow & AU_{i,j}(\lambda) & \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} & C_i & \leftarrow & C_i + \lambda C_j \\ A & \rightarrow & AT_{i,j} & \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} & C_i & \leftrightarrow & C_j \\ A & \rightarrow & AD_i(\lambda) & \overset{\Delta}{\Longleftrightarrow} & C_i & \leftarrow & \lambda C_i \end{array}$$

Remarque 25. En termes de résolution de systèmes, cela revient à faire des changements de variables. Par exemple, l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ échange les variables x_i et x_j. L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ correspond au changement de variable $x'_i = \lambda x_i$, et l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ correspond au changement de variable (non-trivial) $x'_j = x_j - \lambda x_i$.

Remarque 26. Avec une notation matricielle, résoudre le système

$$(E) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + \cdots + & a_{1,j} & + \cdots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + \cdots + & a_{i,j} & + \cdots & +a_{i,p}x_p & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + \cdots + & a_{n,j} & + \cdots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right. , \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Revient à résoudre pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ l'équation $AX = B$.

Remarque 27. Dans le corps $\mathbb{K}$, l'équation $ax = b$ est facile à résoudre. Il suffit de prendre l'élément a^{-1} (*l'inverse*, celui pour lequel, par définition, $a^{-1}a = 1$), et de multiplier l'équation des deux côtés : $a^{-1}ax = a^{-1}b = x$, et la voilà résoulue. Le problème de la résolution de système étant similaire, nous allons étudier l'existence (ou non) et les propriétés d'un éventuel inverse pour le matrices.

6- Matrices inversibles

Définition 28. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite **inversible** quand $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ AB = BA = I_n$.
On note alors $B = A^{-1}$.

Remarque 28. Une matrice inversible est nécessairement carrée. On aurait bien du mal à donner du sens à la définition de l'inverse pour une matrice rectangulaire...

Proposition 19. Les implications suivantes sont vérifiées :

- A inversible $\implies A^{-1}$ (et $(A^{-1})^{-1} = A \dots$)
- A, B inversibles $\implies AB$ inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- A inversible $\implies A^n$ inversible, et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ ($= A^{-n}$ par abus de notation)
- A inversible $\implies {}^{\mathrm{t}}A$ inversible et $({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{t}}(A^{-1})$ ($= {}^{\mathrm{t}}A^{-1}$ par abus de notation)

Définition 29. On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrice inversibles de taille n, à coefficient dans $\mathbb{K}$.
On appelle cet ensemble groupe linéaire de $\mathbb{K}^n$*, pour des raisons que nous préciserons plus tard.*

Remarque 29. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est stable par $\times$, et $\times$ est associative sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, et possède un élément neutre : I_n. De plus, tout élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ possède un inverse pour $\times$, ce qui en fait un *groupe*.
$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est aussi stable pour ${}^{\mathrm{t}}\cdot$, mais pas pour $+$!

Proposition 20. On a :

- $I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), I_n^{-1} = I_n$
- $\mathbf{0}_n \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), E_{i,j} \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$
- $\mathbf{Elm}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, avec $U_{i,j}(\lambda)^{-1} = U_{i,j}(-\lambda)$, etc...

Remarque 30. Le théorème suivant donne même l'égalité entre $\mathbf{Elm}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, puisque ces deux ensembles sont en fait la *classe d'équivalence* de I_n pour $\underset{L}{\sim}$ ...

Théorème 10. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sont équivalents :*

i) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

ii) $A \underset{L}{\sim} I_n$

iii) *A est de rang n*

iv) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \boldsymbol{0}_{n,1} \implies X = \boldsymbol{0}_{n,1}$

Démonstration 5.

Méthode 3. Calcul de l'inverse d'une matrice A

I- ....

II- ....

III- ....

IV- ....