6.3 上侧α分位数

北京化工大学数学系

苏贵福

定义1 设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)$, 密度函数为$f(x)$.

(1) 若对任意正数$\alpha(0 < \alpha < 1)$, 称满足条件

$$P\{X \le x_\alpha^-\} = F(x_\alpha^-) = \int_{-\infty}^{x_\alpha^-} f(x)dx = \alpha$$

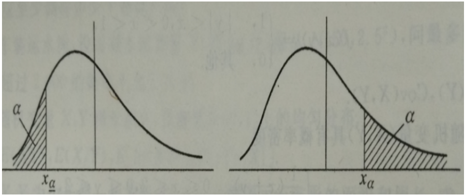
的数x_α^-为此概率分布的下侧α分位数.

(2) 若对任意正数$\alpha(0 < \alpha < 1)$, 称满足条件

$$P\{X > x_\alpha^+\} = 1 - F(x_\alpha^+) = \int_{x_\alpha^+}^{\infty} f(x)dx = \alpha$$

的数x_α^+为此概率分布的上侧α分位数.

① 下侧α分位数x_α^-将概率密度曲线下的面积分为两部分，左侧的面积恰好等于α，如左下图所示.



② 上侧α分位数x_α^+将概率密度曲线下的面积分为两部分，右侧的面积恰好等于α，如右上图所示.

③ $x_\alpha^+ = x_{1-\alpha}^-$或$x_\alpha^- = x_{1-\alpha}^+$.

1. 标准正态分布的上侧α分位数

我们专门用u_α表示标准正态分布的上侧α分位数, 即满足

$$P\{X > u_\alpha\} = 1 - \Phi(u_\alpha) = \int_{u_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \alpha.$$

u_α的值可以查阅附表1.

例如: $u_{0.05} = 1.645.$

这是因为

$$P\{X \leq u_{0.05}\} = 1 - P\{X > u_{0.05}\} = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$P\{X \leq 1.64\} = 0.9495$$

$$P\{X \leq 1.65\} = 0.9505$$

因此$u_{0.05} \approx \frac{1}{2}(1.64 + 1.64) = 1.645.$

例如: $u_{0.025} = 1.96$.

这是因为

$$P\{X \leq u_{0.025}\} = 1 - P\{X > u_{0.025}\} = 1 - 0.025 = 0.975.$$

在附表1中, 当$x = 1.96$时, $\Phi(1.96) = 0.975$, 故$u_{0.025} = 1.96$.

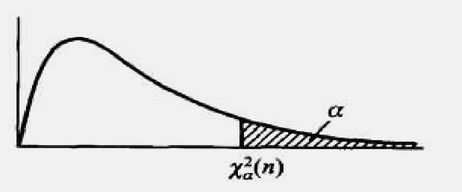
- 由于分布的对称性, 显然有$u_{1-\alpha} = u_\alpha$.

2. χ^2分布的上侧α分位数

对于给定的正数α, $0 < \alpha < 1$, 满足条件

$$P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \int_{\chi^2_\alpha(n)}^{\infty} f(y)dy = \alpha.$$

的点$\chi^2_\alpha(n)$就是χ^2分布的上侧α分位数, 如下图所示.



对于不同的n和α, 我们可以通过附表5查阅χ^2分布的α分位数.

如$\chi^2_{0.1}(25) = 34.382$. 但是该表只详列到$n = 45$为止.

当n充分大时, 费希尔曾证明了如下结果

$$\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}(u_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$$

其中u_α是标准正态分布的上侧α分位数. 这样可以利用这种公式 求得当$n > 45$时χ^2分布的上侧α分位数的近似值.

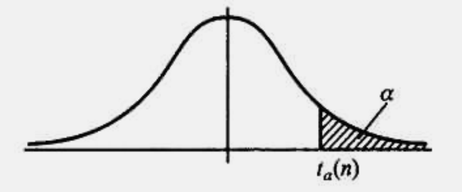
例如: $\chi^2_{0.05}(50) \approx \frac{1}{2}(1.645 + \sqrt{2 \times 50 - 1})^2 = 67.221$. 事实上, $\chi^2_{0.05}(50) = 67.505$.

3. t分布的上侧α分位数

对于给定的正数α, $0 < \alpha < 1$, 满足条件

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{\infty} h(t)dt = \alpha.$$

的点$t_\alpha(n)$就是t分布的上侧α分位数, 如下图所示.



由t分布的上侧α分位数的定义以及$h(t)$图形的对称性知

$$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$$

t分布的上侧α分位数可通过附表3查阅. 在$n > 45$时对于常用的α的值, 就借助如下正态近似

$$t_\alpha(n) \approx u_\alpha.$$