Contrôle De Mi-Semestre : Algèbre Linéaire

Exercice 1 (Cours)**. Théorème du rang.**

1- Énoncer le théorème du rang.
2- Démontrer le théorème du rang.
3- Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tel que $\forall x \in \mathbb{E}, u(u(u(x))) = 0_{\mathbb{E}}$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(u \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u)$
   b) En déduire $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u \circ u) \leqslant n$

Exercice 2 (Application)**.** On considère les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :

$$P_1 = X, \quad P_2 = X^2 + 1, \quad P_3 = 3X^2 + 2X - 1, \quad P_4 = 2 - X$$

Donnez, par la méthode de votre choix, le rang de la famille (P_1, P_2, P_3, P_4).

Problème

Étude des endomorphismes cycliques. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note Id l'application identité de $\mathbb{E}$. Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$, on note :

$$f^0 = Id, \quad f^1 = f, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f \circ f^n$$

On donne la définition suivante :

Définition 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est **cyclique d'ordre** p sitôt qu'il existe un élément $a \in \mathbb{E}$ tel que :

1- $f^p(a) = a$
2- $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est une famille génératrice de $\mathbb{E}$
3- Les éléments de la famille $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a))$ sont deux-à-deux distincts (c'est-à-dire, $\forall i, j \in [\![0; p-1]\!],\ i \neq j \Leftrightarrow f^i(a) \neq f^j(a)$.)

On dit alors de la famille $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a))$ que c'est **un cycle** de $\mathbb{E}$ pour f.

I - Étude d'exemples

1- Premier exemple

Dans cette partie uniquement, on pose $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$. On considère l'application suivante :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (-y, x) \end{array} \right.$$

1- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2- Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3- On pose $a = (1, 0)$. Calculer $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$ et $f^4(a)$.
4- En déduire que f est un endomorphisme cyclique d'ordre p, et donner la valeur de p.

2- Deuxième exemple

Dans cette partie uniquement, on pose $\mathbb{E} = \text{Vect}(\sin, \cos)$, sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions sin et cos. Entre autre, on a :

$$\forall f \in \mathbb{E},\ \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$$

1- Montrer que $(\sin, \cos)$ est une famille libre de $\mathbb{E}$. En déduire la dimension de $\mathbb{E}$.

2- Soit $q \in \mathbb{N},\ q \geqslant 3$. Soit l'application :

$$\begin{cases} T_q : & \mathbb{E} & \to & \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \\ & f & \mapsto & T_q(f) & : x \mapsto f\left(x + \dfrac{2\pi}{q}\right) \end{cases}$$

On rappelle par ailleurs que :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

- a) Montrer que $T_4(\sin) = \cos$ et que $T_8(T_8(\cos)) = -\sin$.
- b) Montrer que $\forall f \in \mathbb{E},\ T_q(f) \in \mathbb{E}$.
- c) Montrer que T_q est un endomorphisme de $\mathbb{E}$.

3- Donner pour $k \in \mathbb{N}$, les coefficients de $T_q^k(\sin)$ dans la base $(\sin, \cos)$.

4- Montrer que si $T_q^k(\sin) = T_q^l(\sin) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} \ / \ k = l + mq$
Indication : *Rappelez-vous que* $\sin(y) = 0 \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N} \ / \ y = 2l\pi$

5- En déduire que T_q est un endomorphisme cyclique d'ordre q.

II - Étude générale

Dans cette partie, on considère $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, muni de la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$.
Soit f un endomorphisme cyclique de $\mathbb{E}$ d'ordre p, et soit $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ un cycle de $\mathbb{E}$ pour f.

1- Montrer que $p \geqslant n$.

2-
- a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ f^p(f^k(a)) = f^k(a)$.
- b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{E},\ f^p(x) = x$.
  Indication : *Pensez à utiliser une "bonne" famille génératrice*
- c) En déduire que f est un automorphisme
  Indication : *Raisonnement par l'absurde. Peut-on avoir $f^p = Id$ si f n'est pas bijectif ? Rappelez-vous le DM 3 !*

3- Montrer (rapidement !) que $\mathbb{F}_1 = \text{Ker}(f - Id)$ et $\mathbb{F}_2 = \text{Ker}(Id + f + f^2 + \cdots + f^{p-1})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.

4- Montrer que $\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{F}_2 = \mathbb{E}$

5- On note m le plus grand des entiers k tel que la famille $(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ soit libre.
- a) Montrer qu'alors, $f^m(a) \in \text{Vect}(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{m-1}(a))$.
  Indication : *Commencez par justifier que la famille* $(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^m(a))$ *est liée.*
- b) Montrer que $\forall l \in \mathbb{N}, l \geqslant m,\ f^l(a) \in \text{Vect}(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{m-1}(a))$.
  Indication : *Raisonnez par récurrence.*
- c) En déduire que $m = n$ et que $(a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{m-1}(a))$ est une base de $\mathbb{E}$.