北京化工大学
Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第二章 连续时间系统的时域分析

主讲教师：张凤元

主要内容 CONTENTS

1 连续时间系统响应的时域分析

2 连续时间系统初始条件的确定

3 连续LTI系统的零输入和零状态响应

4 信号的线性卷积

5 离散时间LTI系统的时域分析法

6 信号的变换域分析简介

2 连续时间系统初始条件的确定

-- 系统的起始条件

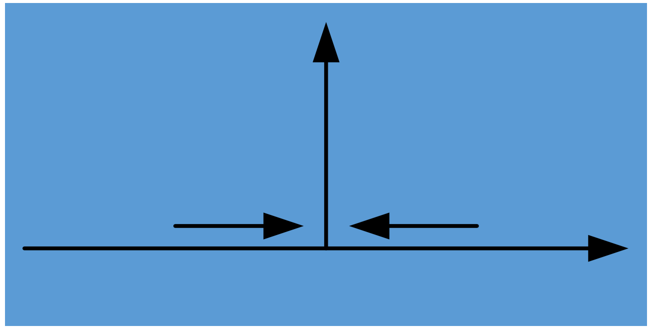
-- 系统的初始条件

-- 冲击响应匹配法

-- 求解初始条件举例

系统起始条件，起始状态，0 - 状态：

$$r^{(k)}(0_-)=\left[r(0_-),\frac{\mathrm{d}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$



系统初始条件，初始状态，0+状态：

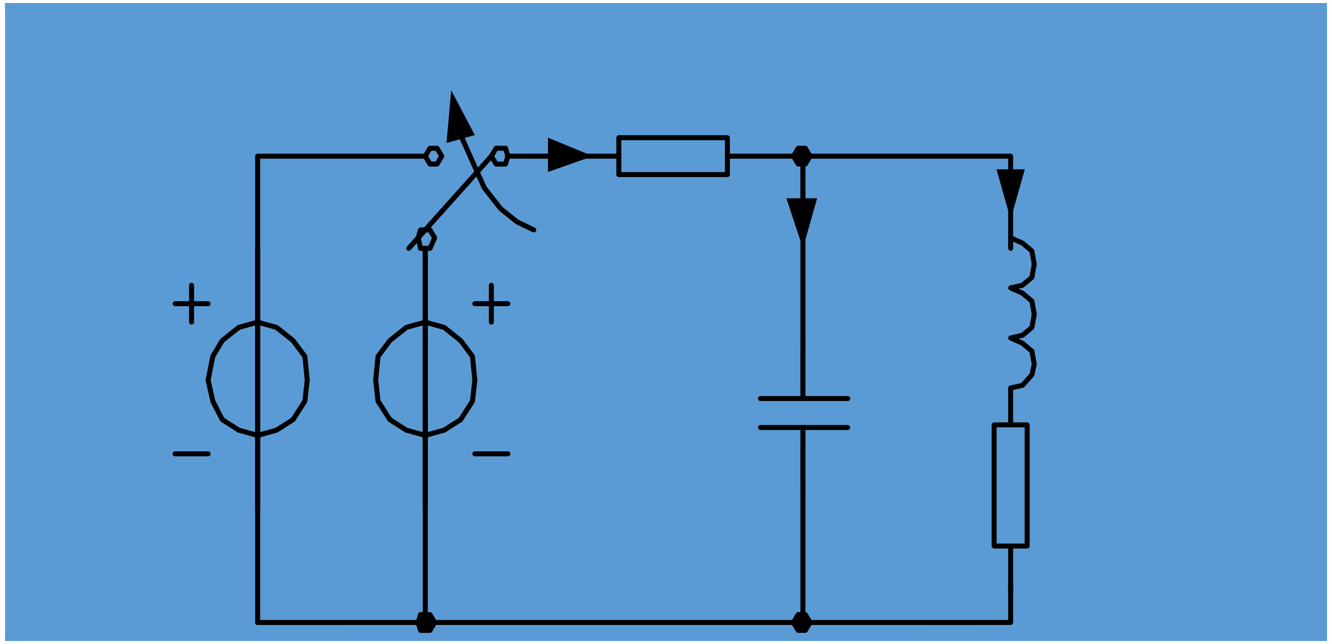
$$t\geq 0_+$$

$$r^{(k)}(0_+)=\left[r(0_+),\frac{\mathrm{d}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$

系统的初始条件由系统模型、起始状态、激励输入信号确定。

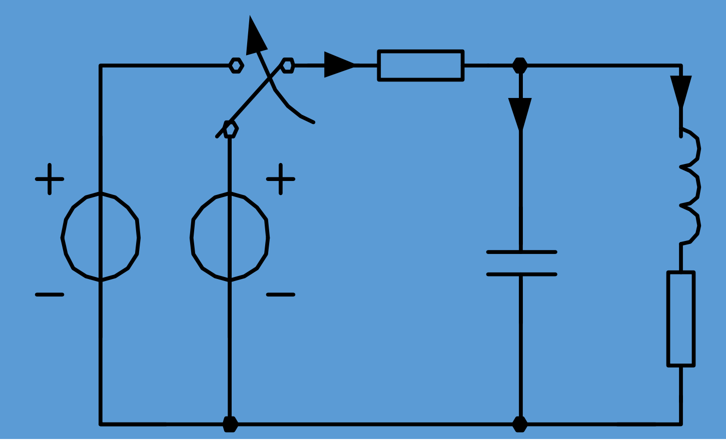
2.2 例1 冲击响应匹配法确定初始条件

给定如图所示电路 $t<0$ 时开关S位于1的位置而且已经达到稳态；当 $t=0$ 时，S由1转向2。试建立 $i(t)$ 电流的微分方程，并求解 $i(t)$ 在 $t\geq 0_+$ 时的变化。



解答

（1）列写电路的微分方程



$$R_1 i(t)+v_c(t)=e(t)$$

$$v_C(t)=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t)+i_L(t)R_2$$ 结点电压

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t)+i_L(t)$$ 回路方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+4e(t)$$

消去中间变量

(2)求系统的完全响应通解

系统的特征方程：

$$\alpha^2 + 7\alpha + 10 = 0 \quad , \ (\alpha + 2)(\alpha + 5) = 0$$

特征根：

$$\alpha_1 = -2, \ \alpha_2 = -5$$

齐次通解：

$$i_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} \quad (t \geq 0_+)$$

非齐次特解：

由于$t \geq 0_+$时　　　$e(t) = 4V$

方程右端自由项为 4×4 ，因此令特解 $i_p(t) = B,$

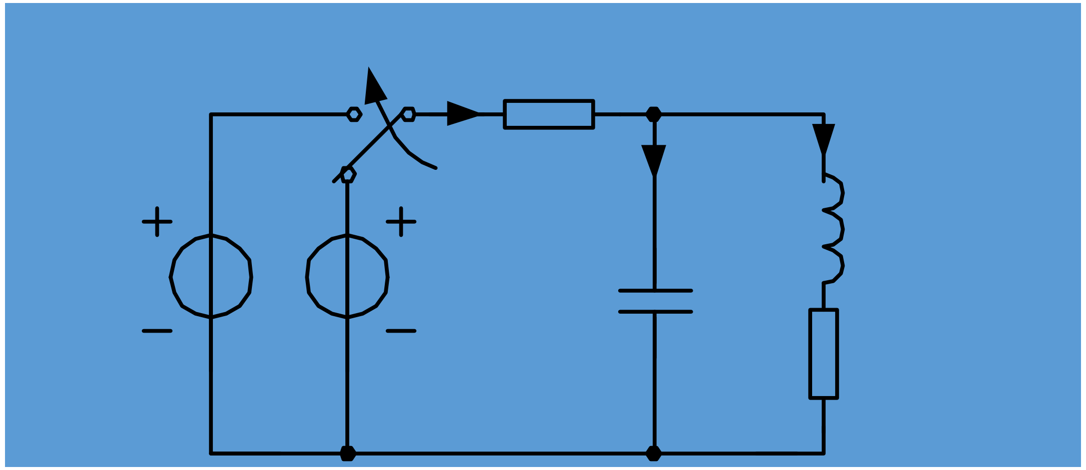
$$10B = 4 \times 4 \qquad \therefore B = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

系统的完全响应为：

$$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \qquad (t \geq 0_+)$$

（3）平衡匹配法确定初始条件的确定

换路前系统状态



系统起始条件：

$$i(0_-)=i_L(0_-)=\frac{2}{R_1+R_2}=\frac{4}{5}A$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_-)=0$$

平衡匹配的原理：t=0 时刻微分方程左右两端的$\delta(t)$及各阶导数应该平衡(其它项也应该平衡，我们讨论初始条件，可以不管其它项）。

1）激励输入信号 $e(t)=\begin{cases}2 & t<0\\ 4 & t\geq 0\end{cases}$ 代入微分方程模型，t ≥0得：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8u(t)$$

2）方程右端的冲激函数项最高阶次是 $\delta'(t)$ ，因而有：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} i(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + c\Delta u(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \\ i(t) = a\Delta u(t) \end{cases} \qquad (0_- < t < 0_+)$$

代入微分方程得：

$$\left[a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\right]+7\left[a\delta(t)+b\Delta u(t)\right]+10a\Delta u(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8\Delta u(t)$$

方程左右两端的 $\delta(t)$ 及各阶导数应该平衡（即系数相同），因而得：

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 7a = 12 \\ c + 7b + 10a = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(0_+) - i(0_-) = a = 2 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_+) - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_-) = b = -2 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} i(0_+) - \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} i(0_-) = c = 2 \end{cases}$$

所求系统的初始条件，即 0+ 状态为：

$$\begin{cases} i(0_+) = 2 + i(0_-) = 2 + \dfrac{4}{5} = \dfrac{14}{5} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_+) = -2 + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_-) = -2 \end{cases}$$

(4) 求系统的完全响应

系统的初始条件为： $i(0_+) = \frac{14}{5}A$ $\frac{di}{dt}(0_+) = -2A/s$

将初始条件代入通解得：

$$\begin{cases} i(0_+) = A_1 + A_2 + \frac{8}{5} = \frac{14}{5} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_+) = -2A_1 - 5A_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = \frac{4}{3} \\ A_2 = -\frac{2}{15} \end{cases}$$

系统的完全的完全响应为：

$$\boldsymbol{i(t) = \left(\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t} + \frac{8}{5}\right)A \qquad (t \geq 0_+)}$$


谢谢大家，下讲再见！
北京化工大学
新闻网