2017-2018 第二学期高等数学期中试卷解析

一、填空题

1．设向量 $\vec{a}=(2,-1,1)$，$\vec{b}=(4,-2,\lambda)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\lambda=$___

1. -10

2．过点 $(0,-3,2)$ 且与两点 $P_1(3,4,-7)$, $P_2(2,7,-6)$ 的连线平行的直线的对称式方程为____________。

2. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z-2}{-1}$

3．平行于 x 轴，且过点 $P(3,-1,2)$ 及 $Q(0,1,0)$ 的平面方程是________

3. $y+z=1$

4．在 xoz 面上的曲线 $z=5x^2$ 绕 z 轴旋转一周，所成的旋转曲面方程是________________。

$z=5(x^2+y^2)$

5. 函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(3-x^2-y^2)}$ 的定义域为______，

极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=$______________________。

5. $\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<3, x^2+y^2\neq 2,\ \ y^2\leq 4x\right\}$

$$\frac{2}{\ln 2}$$

6. 设 $u=e^{-x}\cos y$，则 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=$__________。

6. e^{-2x}

7. 设方程$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases}$确定的函数之一为$y=y(x)$，则$\dfrac{dy}{dx}=$_____

7. $\dfrac{z-x}{y-z}$

8. 设$z=f\left(xy,\mathrm{e}^x\right)$，其中$f$具有连续偏导数，则$dz=$_____

8. $(yf_1'+e^x f_2')dx+xf_1'dy$

9. 曲线 $x=\sin t$， $y=\dfrac{t}{2}$， $z=\mathrm{e}^t$ 在对应于 $t=0$ 处的切线方程________________， 法平面方程______________

9. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$　　$2x+y+2z=2$

10. 曲线 $\begin{cases} 3x^2z=1 \\ y=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\dfrac{1}{3})$ 处的切向量为__________

10. $(1,0,-\dfrac{2}{3})$（与其平行的非零向量都对）

11．函数$u=x+y+z$沿着曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$上的点$(1,1,1)$处的外法线方向的方向导数为________________________________。

11. $\dfrac{6}{\sqrt{14}}$

12．函数$u=xy^2z$在点$P(x,y,z)$处的梯度为______

$(y^2z, 2xyz, xy^2)$

13．曲面 $e^{z}-z+xy=3$ 在点（2，1，0）处的切平面为________

13. $x+2y-4=0$

14．设二重积分区域 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域，则 $\iint\limits_{D}(3x+2y)\,\mathrm{d}\sigma=$________________________。

14. $\dfrac{20}{3}$

15．根据二重积分的几何意义 $\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=$__________，其中 $D: x^2+y^2\le 1$。

15． $\frac{2}{3}\pi$

16．设 $f(x)$ 在[0,4]上连续，且 $D: x^2+y^2\le 4$，则 $\iint\limits_{D} f(x^2+y^2)dxdy$ 在极坐标系下的二次积分为______________________________。

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2} f(r^2)rdr.$$

17．交换二次积分的积分顺序 $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\mathrm{d}y =$ ______

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\mathrm{d}x$$

18．设三重积分的积分区域Ω是由$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成（满足$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$），函数$f\left(x^2+y^2,z\right)$在Ω上连续，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f\left(x^2+y^2,z\right)\mathrm{d}v$在柱坐标系下的三次积分为____________________；在直角坐标系下先对y再对x后对z积分的三次积分为____________________。

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{\sqrt{4-\rho^2}} f\left(\rho^2,\mathrm{z}\right)\rho\mathrm{dz}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}}dz\int_{-z}^{z}dx\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f\left(x^2+y^2,z\right)dy+\int_{\sqrt{2}}^{2}dz\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}dx\int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}}f\left(x^2+y^2,z\right)dy$$

19．设Ω由$x^2+y^2=2z$与$z=2$围成的空间区域，则$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}v=$_____

19. $\dfrac{16}{3}\pi$

20. 设 L 为 椭 圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$ ， 其 周 长 为 a ， 则 对 弧 长 的 曲 线 积 分 $\oint_L\left(5x^2+4y^2\right)\mathrm{d}s=$______________________________。

20. 20a

21. 设 L 是 xoy 平面上沿顺时针方向绕行的简单闭曲线，且 $\oint_L (x-2y)dx+(4x+3y)dy=-9$ 则 L 所围成的平面闭区域 D 的面积等于________________。

21. $\dfrac{3}{2}$

22. 设 L 为 $y=x^2$ 从点 $(1,1)$ 到点 $(0,0)$ 的一段有向弧，将 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化成第一类曲线积分的形式为________________。

22. $-\int_L \left(P(x,y)+2xQ(x,y)\right)\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2}}ds$

23．函数 $z = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ 在定义域内的极值点为________

23. $(0,0)$

二、解答题

1．（7 分）验证 $(x+\sin y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 面内是某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出这样的一个 $u(x,y)$。

解法二：由题意，$P(x,y)=(x+\sin y),Q(x,y)=(x\cos y+y)$，在整个 xOy 面内都有：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\cos y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，因而 $(x+\sin y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 面内是某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分。（2 分）

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+\sin y)dx+(x\cos y+y)dy\text{(2分)}=\int_0^x(x+0)dx+\int_0^{y}(x\cos y+y)dy\text{(2分)}$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+x\sin y.\text{（1 分）}$$

2．（7 分）计算曲线积分 $\int_L e^{y^2}dx+(x+1)dy$，式中 L 为圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限和第四象限的半圆弧，方向由点 $A(0,1)$ 指向点 $B(0,-1)$。

2. 解：添加线段 BA，方向由 B 指向 A。 设线段 BA 和曲线 L 围成区域为 D，则 D 为半圆域：$x^2+y^2\le 1, x>0$。

易知 $\int_{BA} e^{y^2}dx+(x+1)dy=\int_{-1}^{1}dy=2$ （2 分）

由格林公式，原式 $=-\iint_D (1-2ye^{y^2})dxdy-2$ （3 分）

$$=-\iint_D dxdy+\iint_D 2ye^{y^2}dxdy-2=-\pi/2-2.$$ （2 分）

3．（8 分）在椭圆 $2x^2+9y^2=36$ 的第一象限部分上求一点，使椭圆在该点的切线与坐标轴所围三角形的面积最小，并求最小三角形面积。

3．解：椭圆在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $2x_0(x-x_0)+9y_0(y-y_0)=0$，即

$2x_0x+9y_0y=36$，截距为 $\frac{18}{x_0},\frac{4}{y_0}$，所围三角形的面积 $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{x_0}\cdot\frac{4}{y_0}$ 。（3 分）

令 $L=\frac{36}{xy}+\lambda\left(2x^2+9y^2-36\right)$

由 $\begin{cases} L_x=-\frac{36}{x^2y}+\lambda(4x)=0 \\ L_y=-\frac{36}{xy^2}+\lambda(18y)=0 \\ L_\lambda=\left(2x^2+9y^2-36\right)=0 \end{cases}$ 得 $x=3$ $y=\sqrt{2}$ 且 $A\left(3,\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}$ （4 分）

于所围三角形面积的最小值必定存在，因此点$\left(3,\sqrt{2}\right)$为所求的点，最小三角形面积$A_{\min}=A\left(3,\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}$。（1 分）　注：也可求$u=xy$在$2x^2+9y^2=36$下的最大值。