Polynômes Irréductibles ; Contrôle

Corrigé

Exercice -1. Donner la décomposition en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes suivants :

1– $X^3-(1-3\mathrm{i})X^2-(2+3\mathrm{i})X+2$

On remarque que 1 est racine du polynôme, on peut donc le factoriser par $(X-1)$, et après une division euclidienne, on obtient qu'il est égal à : $(X-1)(X^2+3\mathrm{i}X-2)$. On peut encore factoriser le deuxième terme dans $\mathbb{C}$, il faut trouver les racines de $(X^2+3\mathrm{i}X-2)$. Soit en résolvant avec un discriminant ($\Delta=-9+8=-1$, deux racines complexes), soit en remarquant que la somme des deux racines fait $-3\mathrm{i}$, et leur produit -2, et donc c'est $-\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$ (application rapide des formules de Newton). Quoiqu'il en soit, on trouve comme factorisation :

$$X^3-(1-3\mathrm{i})X^2-(2+3\mathrm{i})X+2=(X-1)(X+\mathrm{i})(X+2\mathrm{i})$$

2– $(X^4-X^2+1)^2+1$

Première chose à faire : factoriser ce polynôme avec

$$(X^4-X^2+1)^2-(\mathrm{i})^2=(X^4-X^2+1+\mathrm{i})(X^4-X^2+1-\mathrm{i})=PQ$$

Maintenant, il nous reste à factoriser P et Q, pour les deux, on fait le changement de variable $Y=X^2$, on trouve les racines du polynôme obtenu :

- $P=X^4-X^2+1+\mathrm{i}=Y^2-Y+1+\mathrm{i}=(Y-\mathrm{i})(Y-(1-\mathrm{i}))=(X^2-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}})(X^2-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})$ Et donc, après une nouvelle factorisation : $P=(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X-\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})(X+\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})$
- $Q=X^4-X^2+1-\mathrm{i}=Y^2-Y+1-\mathrm{i}=(Y+\mathrm{i})(Y-(1+\mathrm{i}))=(X^2-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}})(X^2-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})$ Et donc, après une nouvelle factorisation : $Q=(X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X-\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})(X+\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})$

Enfin, on a donc :

$$(X^4-X^2+1)^2+1=(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X-\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})(X+\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})(X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X-\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})(X+\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})$$

Exercice -2. Donner la décomposition en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes suivants :

1– $X^5-2X^3-X^2+2$ (sachant que $\sqrt{2}$ est racine du polynôme)

On connaît déjà une racine, on peut donc faire une division euclidienne par $(X-\sqrt{2})$ et trouver : $(X-\sqrt{2})(X^4+\sqrt{2}X^3-X-\sqrt{2})$, et on repère deux racines évidentes sur ce second terme : $-\sqrt{2}$ et 1, donc on peut de nouveau diviser, par $(X+\sqrt{2})(X-1)$ cette fois, et on obtient :

$$X^5-2X^3-X^2+2=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-1)(X^2+X+1)$$

Attention : beaucoup d'élèves ont écrit $(X^2-2)(X-1)(X^2+X+1)$. Le premier terme n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$!

2– $X^5+2X^3-X^2-2$

En comparant avec le précédent, on remarque que c'est assez proche. D'ailleurs, 1 est racine évidente aussi, et si on cherche un peu avec $\sqrt{2}$, on remarque que $\mathrm{i}\sqrt{2}$ est racine également. Comme c'est un polynôme à coeffcient réels, les racines complexes sont conjuguées, donc $-\mathrm{i}\sqrt{2}$ est racine également. On a donc déjà deux diviseurs irréductibles : $(X-1)$ et (X^2+2) (le produit $(X-\mathrm{i}\sqrt{2})(X+\mathrm{i}\sqrt{2})$, remis sous forme réelle). On peut donc faire une division euclidienne, et obtenir :

$$X^5+2X^3-X^2-2=(X-1)(X^2+2)(X^2+X+1)$$

3– $(X^4 - X^2 + 1)^2 + 1$

C'est le même que dans l'exercice précédent, donc on sait déjà une décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, et on a juste à regrouper les racines conjuguées ensembles !

$$\underbrace{(X - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})}_{(1)}\underbrace{(X + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})}_{(2)}\underbrace{(X - \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})}_{(3)}\underbrace{(X + \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})}_{(4)}\underbrace{(X - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})}_{(1)}\underbrace{(X + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})}_{(2)}\underbrace{(X - \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})}_{(3)}\underbrace{(X + \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})}_{(4)}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{array}{lcl}
(1) & (X - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}) & = X^2 - \sqrt{2}X + 1 \\
(2) & (X + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})(X + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}) & = X^2 + \sqrt{2}X + 1 \\
(3) & (X - \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})(X - \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}}) & = X^2 - \sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}X - \sqrt[4]{2}e^{-\frac{i\pi}{8}}X + \sqrt{2} \\
 & & = X^2 - 2\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{2} \\
(4) & (X + \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{8}})(X + \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}}) & = X^2 + \sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{8}}X + \sqrt[4]{2}e^{-\frac{i\pi}{8}}X + \sqrt{2} \\
 & & = X^2 + 2\sqrt[4]{2}X\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sqrt{2}
\end{array}$$

4– $X^7 - 1$

Les racines de l'unité, on l'a déjà vu plusieurs fois. On écrit donc directement :

$$X^7 - 1 = (X-1)(X - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{6\mathrm{i}\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{8ik\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{10ik\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{12ik\pi}{7}})$$

Et on fait appraître les conjugués (par réduction des arguments modulo 2π à un nombre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$:

$$X^7 - 1 = (X-1)(X - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{6\mathrm{i}\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{-6ik\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{-4ik\pi}{7}})(X - \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}k\pi}{7}})$$

On regroupe les racines conjuguées, faisant apparaître les produits :

$$X^7 - 1 = (X-1)(X^2 - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)X + 1)(X^2 - \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)X + 1)(X^2 - \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)X + 1)$$

Attention : Premièrement, on avait déjà fait cet exercice dans le cas général. Il suffisait de l'adapter. Deuxièmement, certains élèves ont écrit :

$$X^7 - 1 = (X-1)(X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

C'est effectivement un début mais ensuite, que faire ? Hors de question de s'arrêter là : le deuxième terme étant de degré > 2, il n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$!

Exercice -3. Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1– Montrer que $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ est racine de ce polynôme.

$P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 3 \times 0 = 0$

2– Déterminer l'ordre de multiplicité de j comme racine de P.

Il faut dériver P et calculer combien vaut le polynôme dérivé en j, jusqu'à ce qu'on obtienne une valeur différente de 0 :

$$\begin{array}{rcll}
P' & = & 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X & \\
P'(j) & = & 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j & = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12(j^2 + j + 1) = 0 \\
P'' & = & 56X^6 + 60X^4 + 36X^2 + 4 & \\
P''(j) & = & 56j^6 + 60j^4 + 36j^2 + 4 & = 56 + 60j + 36j^2 + 4 = 60(j^2 + j + 1) - 24j^2 = -24j^2 \neq 0
\end{array}$$

Donc, $P(j) = 0$, $P'(j) = 0$, et $P''(j) \neq 0$, donc j est racine de P de multiplicité 2.

3– Montrer que $P(X) = P(-X)$.

P n'as que des termes de degré pairs, donc la fonction polynômiale associée à P est paire, d'où l'on déduit la propriété. Sinon, calculer $P(-X)$ directement marche bien aussi.

4– En déduire une autre racine de P dont on donnera l'ordre de multiplicité.

Puisque $P(X) = P(-X)$ et que j est racine de P de multiplicité 2, on en déduit que $-j$ est racine de P de multiplicité 2

5– En déduire une décomposition de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Avec les question précédentes, on a déjà 4 racines, comptées avec leurs ordres de multiplicité (j, deux fois, et $-j$, deux fois). Comme les coefficient du polynôme sont réels, les racines complexes sont conjuguées, donc on trouve 4 autres racines ($\bar{j}$, deux fois, et $\overline{-j} = -\bar{j}$, deux fois). Ce qui nous fait 8 racines (avec ordre de multiplicité) pour un polynôme de degré 8, donc on a directement :

$$X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1 = (X - j)^2(X + j)^2(X - \bar{j})^2(X + \bar{j})^2$$

6– En déduire une décomposition de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ On groupe les conjugées ensembles : $(X - j)(X - \bar{j}) = X^2 + X + 1$, et $(X + j)(X + \bar{j}) = X^2 - X + 1$ et donc :

$$X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2$$