第十节　两个随机变量的函数的分布

一、问题的引入

二、离散型随机变量函数的分布

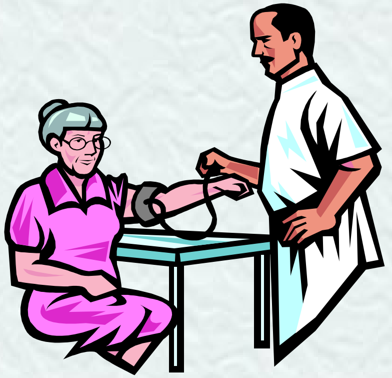
三、连续型随机变量函数的分布

四、小结

一、问题的引入

有一大群人,令 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重, Z 表示该人的血压,并且已知 Z 与 X, Y 的函数关系 $Z = g(X,Y)$, 如何通过 X,Y 的分布确定 Z 的分布.

为了解决类似的问题下面我们讨论随机变量函数的分布.



二维随机变量函数的概念

定义： 设 $Z=g(X,Y)$ 是定义在随机变量 (X,Y) 一切可能取值 (x,y) 的集合上的函数，如果对于 (X,Y) 每一对取值 (x,y)，另一个随机变量Z相应地取值为 $z=f(x,y)$，于是确定一个随机变量 Z，称 Z 为 (X,Y) 的函数。记为：$Z=g(X,Y)$.

说明：

二维随机变量 (X,Y) 的函数 $Z=g(X,Y)$ 是一维随机变量，若设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $z=f(x,y)$，则二维随机变量 (X,Y) 的函数 $Z=g(X,Y)$ 是一维连续型随机变量.

二、离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X+Y$, (2) $\lvert X-Y\rvert$ 的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$\lvert X-Y\rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

所以 $X+Y, |X-Y|$ 的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

结论:

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

和的分布：$Z=X+Y$ —— 卷积公式

例2：若X、Y 独立，$P(X=k)=a_k$, $k=0,1,2,\ldots$,

$P(Y=k)=b_k$, $k=0,1,2,\ldots$,

求$Z=X+Y$的概率函数.

解：$$P(Z=r)=P(X+Y=r)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

由独立性

$$=\sum_{i=0}^{r}P(X=i)P(Y=r-i)$$

此即离散卷积公式

$$=a_0b_r+a_1b_{r-1}+\ldots+a_rb_0 \qquad r=0,1,2,\ldots$$

实例：设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

可得

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1 , 2)	3
0.12	(1 , 4)	5
0.42	(3 , 2)	5
0.28	(3 , 4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例3 若*X*和*Y*相互独立,它们分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布，证明*Z*=*X*+*Y*服从参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松分布.

解：依题意

$$P(X=i)=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}$$ *i*=0,1,2,…

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!}$$ *j*=0,1,2,…

由卷积公式

$$P(Z=r)=\sum_{i=0}^{r}P(X=i,Y=r-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{r}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\mathrm{r-i}}}{(\mathrm{r-i})!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{\mathrm{r}!}{\mathrm{i}!(\mathrm{r-i})!}\lambda_1^{\mathrm{i}}\lambda_2^{\mathrm{r-i}}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^r,\quad r=0,1,\ \ldots$$

即Z服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布.

例4 设X和Y相互独立，$X\sim B(n_1,p)$,$Y\sim B(n_2,p)$,求$Z=X+Y$的分布.

若$X\sim B(n_1,p)$,则X是在n_1次独立重复试验中事件A出现的次数,每次试验中A出现的概率都为p.

同样，Y是在n_2次独立重复试验中事件A出现的次数,每次试验中A出现的概率为p.

故$Z=X+Y$是在n_1+n_2次独立重复试验中事件A出现的次数，每次试验中A出现的概率为p，于是Z是以（n_1+n_2，p）为参数的二项随机变量，即$Z \sim B(n_1+n_2, p)$.

例5 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 服从同一分布，其分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}\ \left(k=0,1;0<p<1\right)$

试证：$\sum_{k=1}^{n} X_k$ 服从二项分布 $B\left(n, p\right)$

证明：采用数学归纳法

当 $n=2$ 时，则 $Z=X_1+X_2$ 的分布律为

$$
\begin{aligned}
P\{X_1+X_2=0\} &= P\{X_1=0, X_2=0\} \\
&= P\{X_1=0\}P\{X_2=0\} \\
&= (1-p)^2
\end{aligned}
$$

当 $n=2$ 时，则 $Z=X_1+X_2$ 的分布律为

$$P\{X_1+X_2=1\}=P\{X_1=0\,,X_2=1\}+P\{X_1=1\,,X_2=0\}$$

$$=P\{X_1=0\}P\{X_2=1\}+P\{X_1=1\}P\{X_2=0\}$$

$$=2p(1-p)$$

$$P\{X_1+X_2=2\}=P\{X_1=1\,,X_2=1\}$$

$$=P\{X_1=1\}P\{X_2=1\}$$

$$=p^2$$

$$\left(X_1+X_2\right)\sim B\left(2\,,p\right)$$

假设 $n=m$ 时成立，则 $\sum_{k=1}^{m} X_k \sim B(m,p)$

当 $n=m+1$ 时

$$P\{\sum_{k=1}^{m+1} X_k = 0\} = P\{\sum_{k=1}^{m} X_k = 0, X_{m+1} = 0\}$$

$$= P\{\sum_{k=1}^{m} X_k = 0\} P\{X_{m+1} = 0\}$$

$$= (1-p)^{m+1}$$

$$P\{\sum_{k=1}^{m+1} X_k = s\} = P\{\sum_{k=1}^{m} X_k = s\,, X_{m+1} = 0\} + P\{\sum_{k=1}^{m} X_k = s-1\,, X_{m+1} = 1\}$$

$$= P\{\sum_{k=1}^{m} X_k = s\}P\{X_{m+1} = 0\} + P\{\sum_{k=1}^{m} X_k = s-1\}P\{X_{m+1} = 1\}$$

$$= C_m^s p^s (1-p)^{m+1-s} + C_m^{s-1} p^s (1-p)^{m+1-s}$$

$$= \left(C_m^s + C_m^{s-1}\right) p^s (1-p)^{m+1-s}$$

$$= C_{m+1}^s p^s (1-p)^{m+1-s}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} X_k \sim B(m+1\,, p)$$

结论：***n*** 个相互独立的参数为 ***p*** 的（**0-1**）分布之和，是参数为 ***n*** 与 ***p*** 的二项分布 $B(n, p)$

三、极值分布 $M=max\{X,Y\},N=min\{X,Y\}$

设(X,Y)是二维独立随机变量，其联合分布函数为$F(x,y)$，边缘分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$.

1.$M=max\{X,Y\}$的分布 .

$$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=F(z,z)$$

X与Y相互独立

$$=F_X(z)F_Y(z)$$

设(X,Y)是二维独立随机变量，其联合分布函数为$F(x,y)$，边缘分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$.

2.$N=min\{X,Y\}$的分布 .

$$F_N(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}=1-P\{X>z,Y>z\}$$

X与Y相互独立

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(y)]$$

例6 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z = \max(X, Y)$ 的分布律 .

解 因为X与Y相互独立,

所以 $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$P\{\max(X,Y)=i\}$

$= P\{X=i, Y<i\}$

$+ P\{X \le i, Y=i\}$

X \ Y	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\max(X,Y)=0\} = P\{0,0\} = \frac{1}{2^2},$$

$$P\{\max(X,Y)=1\} = P\{1,0\} + P\{0,1\} + P\{1,1\}$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}.$$

故 $Z = \max(X,Y)$ 的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$P\{\min(X,Y)=i\}$$
$$=P\{X=i,Y>i\}$$
$$+P\{X\geq i,Y=i\}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\min(X,Y)=0\}=P\{0,0\}+P\{0,1\}+P\{1,0\}$$
$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2^2}.$$

$$P\{\min(X,Y)=1\}$$
$$=P\{1,1\}=\frac{1}{2^2},$$

故$Z=\min(X,Y)$的分布律为

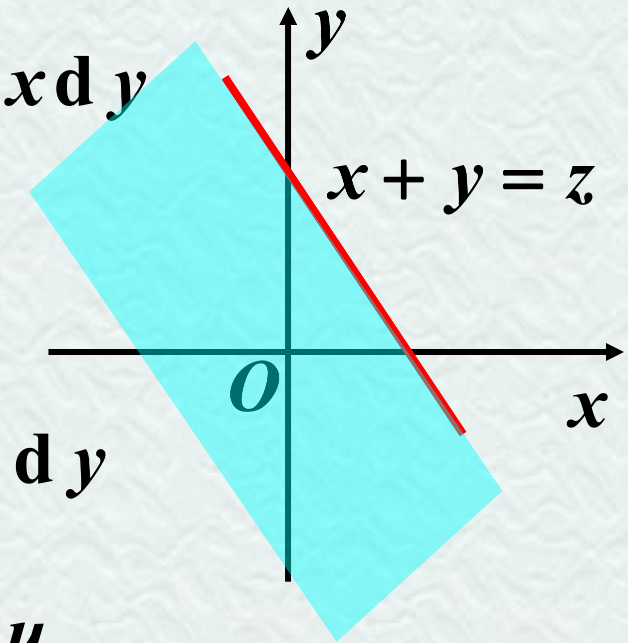
Z	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

三、连续型随机变量函数的分布

1. $Z=X+Y$ 的分布

设 (X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$, 则$Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\overset{x=u-y}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

固定z和y,对方括号内的积分作变量代换,令$x=u-y$,得

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

1. $Z=X+Y$ 的分布

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

化成累次积分,得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx]dy$$

固定z和y,对方括号内的积 变量代换 代换,
令$x=u-y$,得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du]dy$$

交换积分次序

$$=\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)dy]du$$

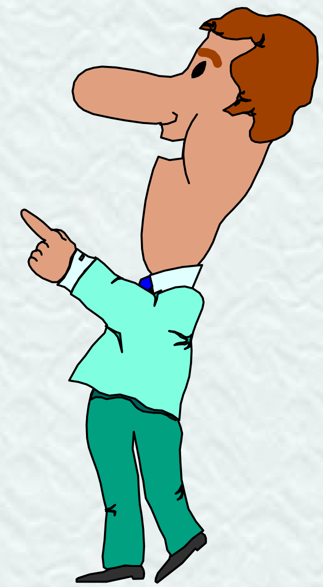
$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u-y,y)dy\right]du$$

由概率密度与分布函数的关系，即得$Z=X+Y$的概率密度为:

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$$

由X和Y的对称性，$f_Z(z)$又可写成

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$$



以上两式即是两个随机变量和的概率密度的一般公式.

特别，当X和Y独立，设(X,Y)关于X,Y的边缘密度分别为$f_X(x)$，$f_Y(y)$，则上述两式化为:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

这两个公式称为卷积公式.

例7 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

由公式 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$$

得 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=x-\frac{z}{2}}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.

说明

一般，设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z = X + Y$仍然服从正态分布，且有$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例8 若X和Y独立,具有共同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

解：由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

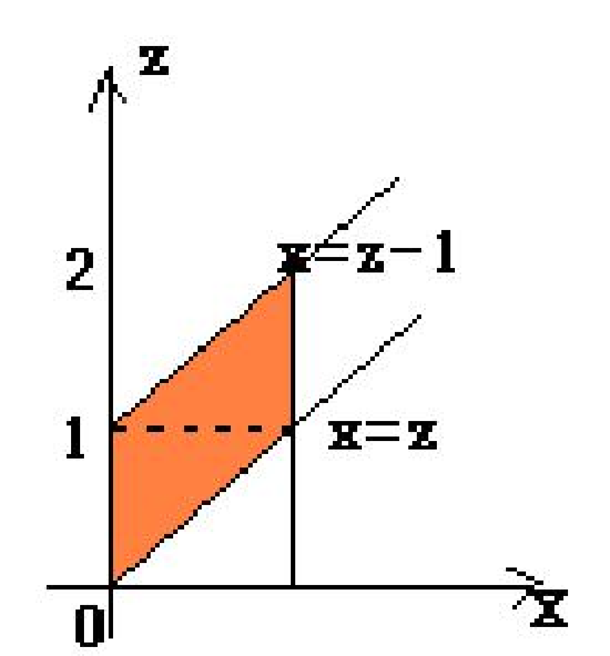
为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le z-x\le 1\end{cases}$$

也即

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-1\le x\le z\end{cases}$$

如图示:
$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ z-1 \le x \le z \end{cases}$$



于是

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z dx = z, & 0 \le z < 1 \\ \int_{z-1}^1 dx = 2-z, & 1 \le z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

从前面例子可以看出， 在求随机向量(X,Y)的函数$Z=g(X,Y)$的分布时，关键是设法将其转化为(X,Y)在一定范围内取值的形式，从而利用已知的分布求出$Z=g(X,Y)$的分布.

若每一个问题都这样求，是很麻烦的. 下面我们介绍一个用来求随机向量(X,Y)的函数的分布的定理 .

对二维情形,表述如下:

定理 设(X_1,X_2)是具有密度函数$f(x_1,x_2)$的连续型二维随机变量,

1. 设$y_1=g_1(x_1,x_2)$, $y_2=g_2(x_1,x_2)$是$\Re_2$到自身的一对一的映射, 即存在定义在该变换的值域上的逆变换: $x_1=h_1(y_1, y_2)$, $x_2=h_2(y_1, y_2)$

2. 假定变换和它的逆都是连续的;

3. 假定偏导数 $\dfrac{\partial h_i}{\partial y_i}$ ($i=1,2$, $j=1,2$) 存在且连续;

4. 假定逆变换的雅可比行列式

$$J(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial h_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial h_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}\neq 0$$

即 $J(y_1,y_2)$对于在变换的值域中的(y_1,y_2)是不为0的.

则Y_1,Y_2具有联合密度

$$w(y_1,y_2)=|J|\,f(h_1(y_1,y_2),\,h_2(y_1,y_2)) \qquad (*)$$

例9 设(X_1,X_2)具有密度函数$f(x_1,x_2)$. 令

$$Y_1=X_1+X_2,\quad Y_2=X_1-X_2$$

试用f表示Y_1和Y_2的联合密度函数.

解: 令$y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_1-x_2$，则逆变换为

$$x_1=\frac{y_1+y_2}{2},\quad x_2=\frac{y_1-y_2}{2},$$

$$J(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=-1/2\neq 0$$

故由(*)式,所求密度函数为

$$w(y_1,y_2)=\frac{1}{2}f\left(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{y_1-y_2}{2}\right)$$

有时，我们所求的只是一个函数 $Y_1=g_1(X_1,X_2)$的分布．一个办法是:

对任意 y, 找出$\{Y_1\le y\}$在(x_1,x_2)平面上对应的区域$\{g_1(X_1,X_2)\le y\}$，记为D.

然后由

$$P\{Y_1\le y\}=\iint_D f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

求出Y_1的分布.

另一个办法是配上另一个函数$g_2(X_1,X_2)$，使(X_1,X_2)到(Y_1,Y_2)成一一对应变换，然后利用定理, 按

$$w(y_1,y_2)=|J|\,f(h_1(y_1,y_2),\,h_2(y_1,y_2)) \quad (*)$$

找出(Y_1,Y_2)的联合密度函数$w(y_1,y_2)$, 最后, Y_1的密度函数由对$w(y_1,y_2)$求边缘密度得到:

$$f_{Y_1}(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty} w(y_1,y_2)\,dy_2$$

下面我们用一例来说明.

例10 设(X_1,X_2)具有密度函数$f(x_1, x_2)$,求$Y=X_1X_2$的概率密度.

所配函数

解: 令$Y= X_1X_2$, $Z= X_1$， 它们构成(x_1,x_2)到(y,z)的一对一的变换，逆变换为: $x_1=z$, $x_2=y/z$

雅可比行列式为:

$$J(y,z)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1/z & -y/z^2 \end{vmatrix} = -1/z \neq 0$$

按(*)式得Y和Z的联合密度为

$$f(z,\frac{y}{z})\frac{1}{|z|}$$

按(*)式得Y和Z的联合密度为

$$f(z,\frac{y}{z})\frac{1}{|z|}$$

此即求两个r.v乘积的密度函数公式

再求Y的边缘密度得

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z,\frac{y}{z})\frac{1}{|z|}dz$$

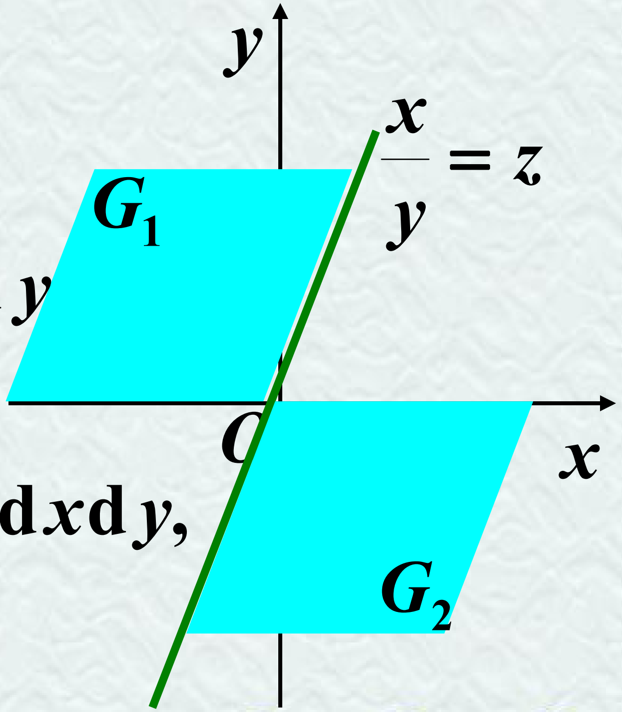
2. $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，则$Z=\dfrac{X}{Y}$的

分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}$$

$$=\iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

令$u=x/y$,

$$\iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} yf(yu,y)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{z}\int_0^{+\infty} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$$

同理可得

$$\iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{0} yf(yu,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u,$$

故有 $F_Z(z) = P\{Z \le z\}$

$$= \iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{0}^{+\infty} yf(yu, y)\,\mathrm{d}\,y - \int_{-\infty}^{0} yf(yu, y)\,\mathrm{d}\,y\right]\mathrm{d}\,u.$$

由此可得分布密度为

$$f(z) = \int_{0}^{+\infty} yf(yz, y)\,\mathrm{d}\,y - \int_{-\infty}^{0} yf(yz, y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y)\,\mathrm{d}\,y.$$

当 X, Y 独立时,

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y.$$

2. $Z=\frac{X}{Y}$的分布

显然，此时麻烦。引入另一个函数用变量代换公式

令$Y=Y$，它构成(x,y)到(y,x)一对一变换

逆变换：$x=yz$，$y=y$

雅克比行列式：$J(y,z)=\begin{vmatrix} z & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-y\neq 0$

$$w(y_1,y_2)=|J|\,f(h_1(y_1,y_2),\,h_2(y_1,y_2))\quad (*)$$

$$w(y,z)=|-y|\,f(y,z)$$

由边缘密度公式：

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy$$

当X与Y相互独立时，

$$f(x,y)=f_X(x)\bullet f_Y(x)$$

则有：

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy$$

例9 设 X,Y 分别表示两只不同型号 的灯泡的寿命,X,Y 相互独立,它们的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数.

解 由公式

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty} yf(yz,y)\,\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{0} yf(yz,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-x}e^{-2y}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得所求密度函数 (当$z>0$时)

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty}2ye^{-yz}e^{-2y}\,dy=\int_0^{+\infty}2ye^{-y(2+z)}\,dy=\frac{2}{(2+z)^2},$$

(当 $z\le 0$ 时) $f_Z(z)=0,$

得 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

3. $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机 变量,它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

则有 $F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z).$$

$$F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}$$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

$$= 1 - [1 - P\{X \le z\}] \cdot [1 - P\{Y \le z\}]$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

故有

$$F_{\max}(z) = F_X(z) F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

则$M = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$及$N = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数分别为

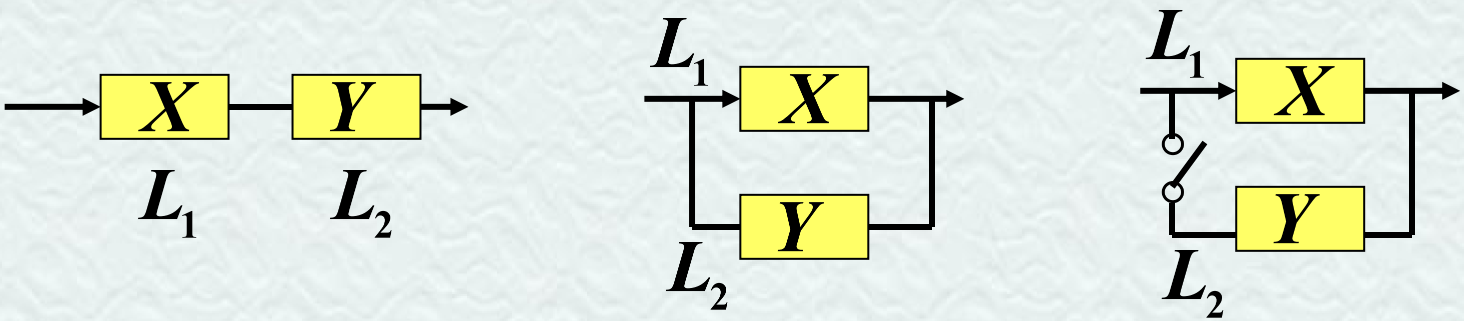
$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且具有相同的 分布函数 $F(x)$,则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n,\ F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

例10 设系统 L 由两个相互独立的子系 统 L_1, L_2 联接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y, 已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 (i)串联情况

由于当 L_1,L_2 中有一个损坏时,系统 L 就停止工作,所以这时 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

由 $f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0; \end{cases}$ $\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$.

$Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha z})(1 - \mathrm{e}^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha z} + \beta \mathrm{e}^{-\beta z} - (\alpha + \beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta) z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 才开始工作,因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和,即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时, $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}\, y = \int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha(z-y)} \beta \mathrm{e}^{-\beta y} \mathrm{d}\, y$$

$$= \alpha\beta \mathrm{e}^{-\alpha z} \int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y} \mathrm{d}\, y$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}].$$

当 $z < 0$ 时, $f(z) = 0$,

于是 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}], & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

4. 距离分布 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$

例11：设 X，Y 相互独立，均服从正态分布 $N\left(0,\sigma^2\right)$ **，求** $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$**的密度函数.**

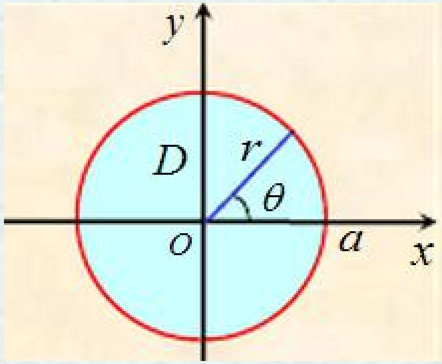
解：

$$F_Z\left(z\right)=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}$$

当 $z<0$ **时，** $P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=0$ **，故** $F_Z\left(z\right)=0$

当 $z \geq 0$ 时，

$$F_Z(z) = \iint\limits_{\sqrt{X^2+Y^2} \leq z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} dxdy$$



$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} rdr$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \int_0^z e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} rdr$$

$$= 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

而 $f_Z(z) = F'(z)$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

四、小结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots,$$

则随机变量函数 $Z=g(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{g(X,Y)=z_k\}$$

$$=\sum_{z_k=g(x_i y_j)} p_{ij}, \qquad k=1,2,\cdots.$$

2. 连续型随机变量函数的分布

(1) $Z = X + Y$ 的分布

(2) $Z = \dfrac{X}{Y}$ 的分布

(3) $M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布

(4) $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的分布