线性代数

张治刚

北京化工大学数理学院

zhigangzhang@mail.buct.edu.cn

October 28, 2019

Overview

1. 行列式
   - 范德蒙行列式

引例：范德蒙行列式

- n阶行列式的计算：范德蒙行列式

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\
a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & a_3^{(n-1)} & \cdots & a_n^{(n-1)}
\end{vmatrix} \\
&= \prod_{j \neq i, j > i} (a_j - a_i)
\end{aligned}
$$

范德蒙矩阵

$$D_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & a_3^{(n-1)} & \cdots & a_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

行列式的性质

1. 令M是一个分块矩阵：$M=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$, 那么$det\ M=\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}=det\ A*det\ B$（这里$det\ M$表示$M$的行列式，即$det\ M=|M|$）

2. 设A和B是n阶方阵，则$det\ (AB)=det\ A*det\ B$。

证明:构造分块矩阵$M=\begin{bmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{bmatrix}$，由性质1可知$|M|=|A||B|$。构造矩阵$P=\begin{bmatrix} E & B \\ 0 & E \end{bmatrix}$，同理可得$|P|=1$，因此$P$可逆。注意到$MP$表示对$M$做初等列变换，并且

$$M\ P=\begin{bmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & B \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{bmatrix}\triangleq M_1$$

也就是说M经过列变换的消法变换变为矩阵M_1，而消法变换不改变行列式的值，因此$|M|=|M_1|$。注意到$|M_1|=|AB|$，$|M|=|A||B|$，因此，$|AB|=|A||B|$。

- 令$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$为分块方阵，其中$A$和$D$分别是$m$阶和$n$阶方阵。我们想要研究$M$的行列式和其逆矩阵。

定理1

令M是以上定义的方阵，如果A可逆，那么$|M|=|A||D-CA^{-1}B|$。如果$AC=CA$，那么$|M|=|AD-CB|$。

Proof: 因为A可逆，我们可以利用行的消法变换将M化为上三角分块矩阵：$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$（此消法变换可以表示为用$-CA^{-1}$左乘以$M$中的第一行元素加到第二行），这意味着：

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

对(1.2)式两边取行列式，可得$|M|=|A||D-CA^{-1}B|$。

例题

例1：

假设A是方阵，则若$|A|=0$，那么$|A^*|=0$。
方法1：反证法，假设$|A^*|\neq 0$，则A^*可逆。因为$AA^*=|A|E=0$，所以$A=0$，这意味着$A^*=0$，从而$|A^*|=0$，矛盾。
方法2：利用线性方程组解空间的结构证明。

例2：

假设A是方阵，且A可逆，$\alpha=[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$，证明：

$$|A-\alpha\alpha^T|=(1-\alpha^T A^{-1}\alpha)|A|$$

（提示：利用定理1，构造行列式$D=\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 1 \end{vmatrix}$）

博弈矩阵图

	L	R
a	2, 2, 1	0, 3, 0
b	3, 0, 2	1, 1, 4

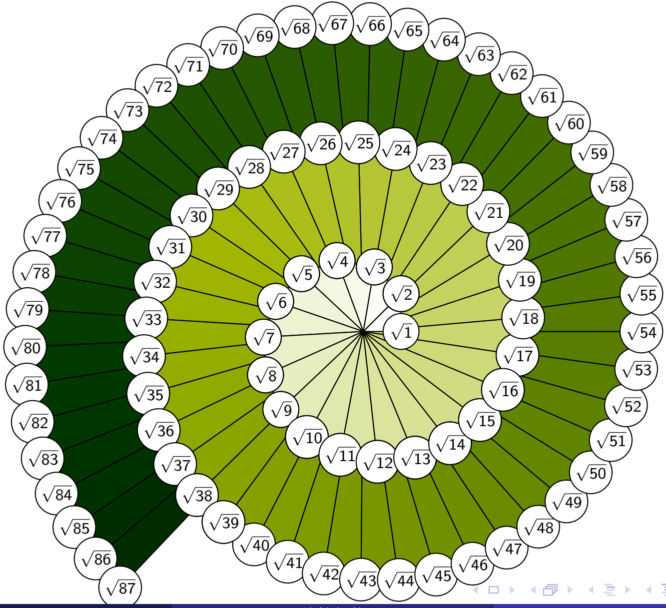
A

	L	R
a	2, 3, 0	0, 4, 1
b	3, 1, 2	1, 2, 0

B

Figure 1: A three player strategic game, in which player 3 chooses A or B.

Latex 作图


√1
√2
√3
√4
√5
√6
√7
√8
√9
√10
√11
√12
√13
√14
√15
√16
√17
√18
√19
√20
√21
√22
√23
√24
√25
√26
√27
√28
√29
√30
√31
√32
√33
√34
√35
√36
√37
√38
√39
√40
√41
√42
√43
√44
√45
√46
√47
√48
√49
√50
√51
√52
√53
√54
√55
√56
√57
√58
√59
√60
√61
√62
√63
√64
√65
√66
√67
√68
√69
√70
√71
√72
√73
√74
√75
√76
√77
√78
√79
√80
√81
√82
√83
√84
√85
√86
√87