**Théorème.** *Si un espace vectoriel possède une famille génératrice à $n$ éléments, alors toute famille libre a au plus $n$ éléments.*

**Proposition 9.** Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille libre de $\mathbb{E}$. Soit $k \in [\![1;n]\!]$, et soit :

$$\mathbb{V}_1 = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_k) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}_2 = \text{Vect}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

Alors $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{0\}$.

**Démonstration 8.**

## 4- Base d'un espace vectoriel

**Définition 18.** *Base*
La famille $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est dite une **base** de $\mathbb{E}$ si elle est simultanément **libre et génératrice**.

**Exemple 15.** $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**Remarque 17.** Notons que l'on restreint la définition précédente aux familles finies de vecteurs. En fait, c'est possible de l'étendre aux familles infinies en conservant ou adaptant beaucoup des résultats suivants, mais les démonstrations sont bien plus techniques. L'étude d'espaces vectoriels munis de bases infinies est hors de l'objet de ce chapitre.

**Remarque 18.** Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{E} = \text{Vect}(\mathcal{B})$. La réciproque est vraie si on s'assure que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

**Proposition 10.** *Décomposition unique de tout vecteur dans une base*
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(e_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une base de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{E},\ \exists!(\lambda_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^n \ / \ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

**Démonstration 9.** L'existence est donnée par le fait que la base est génératrice, l'unicité par le fait qu'elle est libre.

**Définition 19.** *Coordonnées*
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $(e_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une base de $\mathbb{E}$. Tout vecteur $x \in \mathbb{E}$ s'écrit, d'après la propriété précédente, comme une unique combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ :
On a donc $\exists!(\lambda_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^n \ / \ x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$.
Les scalaires $\lambda_i$ sont appelés les **coordonnées** (ou *composantes*) du vecteur $x$ dans la base $(e_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$.

**Remarque 19.** Attention, un espace vectoriel ne possède pas (en général) une unique base, et la valeur des coordonnées dépend de la base choisie. Il est donc important de la préciser quand celle-ci n'est pas évidente.

**Définition 20.** *Matrice colonne des coordonnées*
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{E}$, $x$ un vecteur de $\mathbb{E}$. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{B}$.
On définit la *matrice de $x$ dans la base* $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficitents sont les coordonnées de $x$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

**Exemple 16.**

- $\mathcal{B}_1 = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, les coordonnées du vecteur $x = (3,-2,4)$ peuvent s'écrire :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
- $\mathcal{B}_2 = (1, \mathrm{i})$ et $\mathcal{B}_2' = (\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{4}})$sont des bases de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Dans ces bases, les coordonnées du vecteur $z = 1 - \mathrm{i}$ peuvent s'écrire :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2'}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
- $\mathcal{B}_3 = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{B}_3' = (2, X-2, (X-2)^2, (X-3)^3)$sont des bases de $\mathbb{R}_3[X]$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Dans ces bases, les coordonnées du vecteur $P = X^3 - 4X^2 + 3X + 8$ peuvent s'écrire :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(P) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3'}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Définition 21.** *Base canonique*
La plupart des espaces vectoriels ont une base «standard », qui sert bien plus souvent que les autres. On l'appelle **base canonique**, est elle est définit par :

- La base canonique de $\mathbb{K}^n$ (comme $\mathbb{K}$-e.v.) est $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ avec :
$$e_k \quad = \quad (0, \ldots, 0, \underset{\hookrightarrow\, k\text{-ième position}}{1}, 0, \ldots, 0)$$
- La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, \ldots, X^{n-1}, X^n)$.
- La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $(E_{i,j})_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ j \in [\![1;p]\!]}}$ avec $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{l,j})_{\substack{k \in [\![1;n]\!] \\ l \in [\![1;p]\!]}}$.

**Définition 22.** *Base adaptée à une somme directe*
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, muni d'une base $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ et soit $(\mathbb{V}_1 \ldots \mathbb{V}_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ en somme directe :
$$\mathbb{E} = \oplus_{k=1}^{p} \mathbb{V}_p$$
On dit que la base $\mathcal{B}$ est **adaptée** à la somme directe si *les premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ forment une base de* $\mathbb{V}_1$, *les suivant une base de* $\mathbb{V}_2$, …, *les derniers une base de* $\mathbb{V}_p$.

Formellement, on a : $\exists(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{N}^p$ / $k_1+k_2+\cdots+k_p=p$ (pensez $k_q$ comme la «taille » de la $q$-ème base) et :

$$\begin{array}{rll}
(b_1,\dots,b_{k_1}) & \text{base de } \mathbb{V}_1 & \text{(les } k_1 \text{ premiers)}\\
(b_{k_1+1},\dots,b_{k_1+k_2}) & \text{base de } \mathbb{V}_2 & \text{(les } k_2 \text{ suivants)}\\
\vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots\\
(b_{k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}+1},\dots,b_{k_1+k_2+\cdots+k_p}) & \text{base de } \mathbb{V}_p & \text{(les } k_p \text{ derniers)}
\end{array}$$

**Remarque 20.** Si $\mathbb{E}=\mathbb{V}_1\oplus\mathbb{V}_2$ et que $\mathcal{B}=(b_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une base de $\mathbb{E}$ adaptée à cette décomposition, alors $\exists k\in[\![1;p]\!]$ / $\mathbb{V}_1=\mathrm{Vect}(b_1,\dots,b_k)$ et $\mathbb{V}_2=\mathrm{Vect}(b_{k+1},\dots,b_p)$.

# II - Dimension

## 1- Préliminaire

**Proposition 11.** *Sous-famille libre, sur-famille génératrice*
Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}$, $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots,x_{n+p})\in\mathbb{E}^{n+p}$. On considère les familles de vecteurs suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}&=(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \mathcal{F}'&=(x_1,x_2,\dots,x_{n+p})\end{aligned}$$

Alors on a :

1- Si $\mathcal{F}'$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est libre
« *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.* »

2- Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}'$ est génératrice
« *Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.* »

**Proposition 12.** *Sur-famille libre, sous-famille génératrice*
Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{E}^{n+1}$. On considère les familles de vecteurs suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}&=(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \mathcal{F}'&=(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})\end{aligned}$$

Alors on a :

1- Si $\mathcal{F}$ est libre, **et** $x_{n+1}\notin\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ alors $\mathcal{F}'$ est libre
« *Une famille libre le reste si on lui ajoute un vecteur qui n'est pas engendré par les vecteurs déjà présents dans la famille.* »

2- Si $\mathcal{F}'$ est génératrice, **et** $x_{n+1}\in\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ alors $\mathcal{F}$ est génératrice
« *Une famille génératrice le reste si on lui enlève un vecteur engendré par les autres vecteurs de la famille.* »

3- Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}'$ est liée
« *Une famille génératrice est forcément liée si on lui ajoute un vecteur.* »

4- Si $\mathcal{F}'$ est libre, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice
« *Une famille libre privée d'un vecteur ne peut être génératrice* »

**Démonstration 10.**

**Théorème 2.** *Théorème de l'échange*
*Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_p)$ une famille génératrice de $\mathbb{E}$, et soit $\mathcal{L} = (l_1, l_2, \ldots, l_q)$ une famille libre de $\mathbb{E}$. Alors :*

- *$q \leqslant p$.*
- *On peut remplacer $q$ vecteurs de la famille $\mathcal{G}$ par ceux de la famille $\mathcal{L}$ pour obtenir une nouvelle famille $\mathcal{G}'$ également génératrice de $\mathbb{E}$*

**Démonstration 11.**

## 2- Espaces vectoriels de dimension finie

### 2.a) Définition

**Définition 23.** *Espace vectoriel de dimension finie*
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $\mathbb{E}$ **est de dimension finie** sitôt qu'*il existe une famille génératrice finie de* $\mathbb{E}$ :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists \mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{E}^n \ / \ \mathrm{Vect}(\mathcal{G}) = \mathbb{E}$$

Inversement, on dira que $\mathbb{E}$ **est de dimension infinie** s'il n'est pas de dimension finie (et donc qu'il n'existe aucune famille génératrice finie).

**Exemple 17.**

- $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie, car la base canonique est une famille finie et génératrice.
- $\mathbb{K}_2[X]$ est de dimension finie, car la famille $(1, X, X^2, 1 + X + X^2)$ est finie et génératrice.
- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.
- $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est de dimension infinie.

**Théorème 3.** *Existence de base en dimension finie*
*Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$. Alors :*

- *$\mathbb{E}$ admet une base finie.*
- *Toutes les bases de $\mathbb{E}$ sont finies, et ont le même cardinal.*

**Démonstration 12.**

**Définition 24.** *Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie*
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, non réduit à $\{0\}$. On appelle **dimension** de $\mathbb{E}$ le *cardinal des bases de* $\mathbb{E}$. On note ce nombre $\dim(\mathbb{E})$, ou $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{E})$ quand il y a ambiguïté sur le corps.

**Remarque 21.** Par convention, on dit que :

- $\{0\} = \mathrm{Vect}(\varnothing)$
- $\varnothing$ est une base de $\{0\}$
- $\dim(\{0\}) = 0$
- $\dim(\mathbb{E}) = +\infty$ quand $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.

**Exemple 18.**

- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$
- $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
- $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$
- $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$
- $\dim(\mathbb{K}[X]) = +\infty$
- $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = +\infty$
- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$