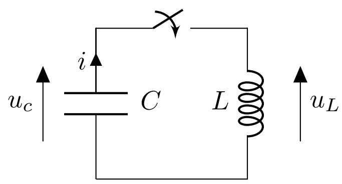
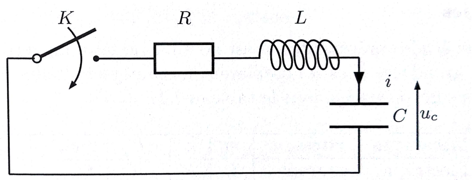
Électronique 3 - TD
Régime transitoire d'un oscillateur amorti

1 Questions de cours

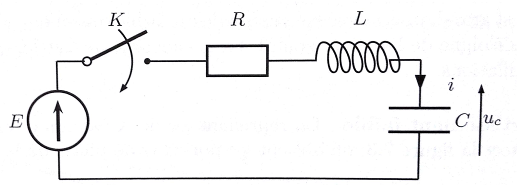
1. Définir ce qu'est un oscillateur.
2. Définir la fréquence et la pulsation d'un signal périodique et donner l'expression mathématique générale d'une grandeur évoluant de manière harmonique.
3. On considère le circuit LC représenté ci-dessous, le condensateur étant initialement chargé à la tension E :



Trouver l'équation d'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur. On introduira une pulsation caractéristique ω_0 qu'on définira.
4. Résoudre cette équation pour trouver l'expression de $u_c(t)$. Représenter graphiquement $u_c(t)$.
5. Trouver l'expression de l'intensité dans le circuit.
6. Représenter le portrait de phase du circuit LC.
7. Trouver l'expression des énergies stockées dans le condensateur et dans la bobine. Prouver que l'énergie contenue dans le circuit se conserve.
8. On considère maintenant le circuit RLC représenté ci-dessous, le condensateur étant initialement chargé à la tension E :



Écrire l'équation d'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur. On définira pour cela la pulsation propre du circuit, le taux d'amortissement et le facteur de qualité.
9. Quels sont les différents régimes envisageables ? Définir chacun d'entre eux.
10. Trouver l'expression de $u_c(t)$ dans le cas d'un régime pseudo-périodique, apériodique et critique. Dans chaque cas, représenter graphiquement $u_c(t)$ et donner l'allure du portrait de phase.
11. On considère maintenant le même circuit RLC soumis à un échelon de tension comme représenté ci-dessous. Le condensateur est initialement déchargé.

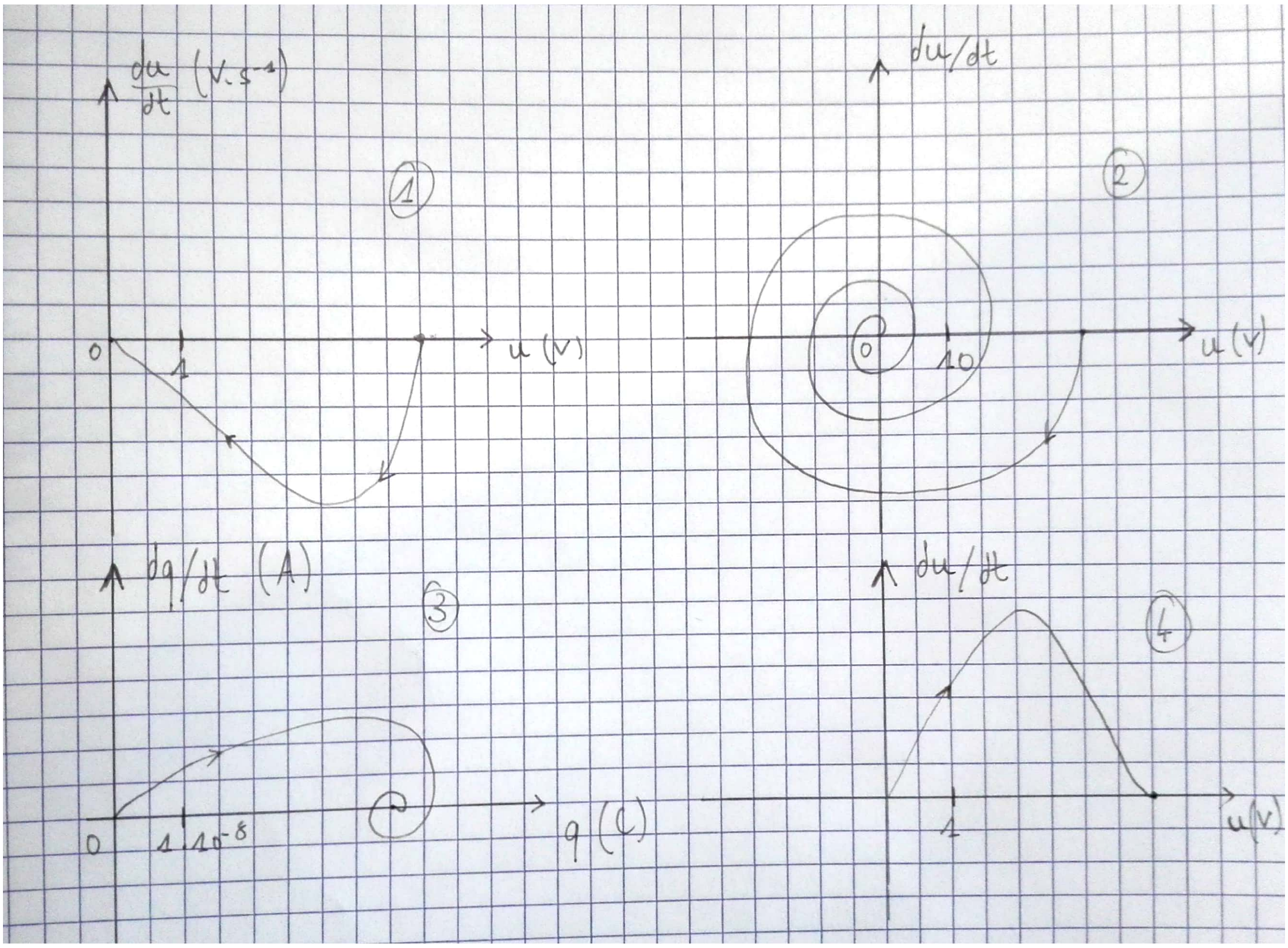


Répondre aux mêmes questions que pour le circuit RLC précédent.
12. Faire un bilan de puissance sur le circuit.

2 Applications directes du cours

2.1 Étude de portraits de phase

1. On trace les portraits de phase de quatre systèmes du second ordre. Pour chacun d'eux,
   - ➢ déterminer les valeurs finales et initiales des grandeurs considérées et de leurs dérivées temporelles,
   - ➢ déterminer le type de régime transitoire, et si le système répond à un échelon de tension ou est étudié en régime libre,
   - ➢ représenter l'allure de l'évolution temporelle des grandeurs à partir des portraits de phases.



2. Proposer un portrait de phase pour un oscillateur harmonique (donc non amorti).

2.2 Étude énergétique d'un circuit RLC série

On considère un circuit R-L-C série en série avec un générateur idéal de tension. A $t = 0$ on allume le générateur qui délivre alors une tension constante E.

1. Écrire le bilan de puissance pour ce circuit.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ à partir du bilan de puissance.
3. Comparer avec l'équation différentielle du cours.

3 Exercices

3.1 Décrément logarithmique

On considère un circuit R-L-C série peu amorti. L'expression de la tension aux bornes de C à un instant t est de la forme avec $u(t) = A\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega t + \phi)$ avec $\xi\omega_0 = R/L$, $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$.

1. Montrer que la pseudo-pulsation ω peut être confondue avec la pulsation propre ω_0 du circuit dans le cas où $Q \gg 1$, où Q est le facteur de qualité du circuit RLC.

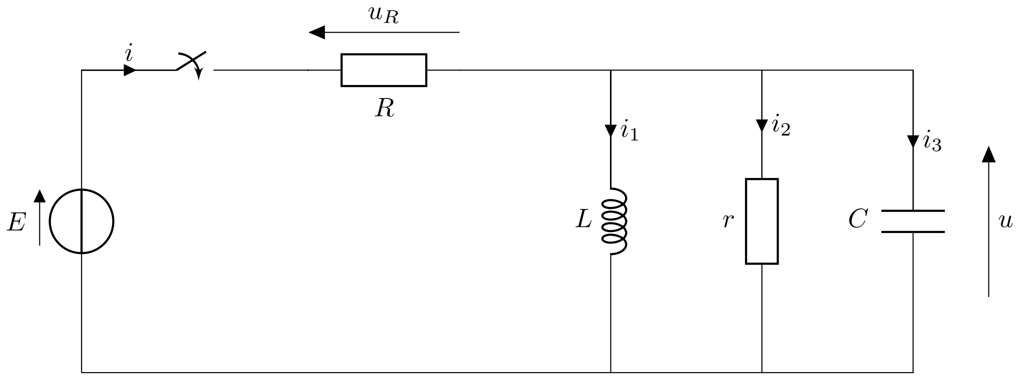
2. On suppose que les oscillations restent visibles tant que leur amplitude est supérieure au vingtième de l'amplitude initiale. Quel est le nombre d'oscillations observées ? Exprimez-le en fonction du facteur de qualité. Que devient cette expression pour $Q \gg 1$?

On s'intéresse maintenant à l'énergie oscillante du système c'est-à-dire qu'on s'intéresse aux échanges énergétiques entre le condensateur et la bobine qui stockent alternativement de l'énergie.

3. Exprimer l'énergie oscillante ($E(t) = E_C(t) + E_L(t)$) du système à un instant t en fonction de u et i, puis à des instants t_n et $t_n + T$, t_n correspondant à un extremum du graphe de $u(t)$ et T étant la pseudo-période. Quelles sont les valeurs de l'énergie emmagasinée dans la bobine à ces deux instants t_n et $t_n + T$?
4. Écrire la variation $\Delta E = E(t_n + T) - E(t_n)$ en fonction de $u(t_n)$ et de $u(t_n + T)$.
5. Que représente ΔE ? Justifier son signe.
6. Montrer ensuite que $\dfrac{\Delta E}{E(t_n)} = \mathrm{e}^{-2\delta} - 1$ où δ est le décrément logarithmique défini par : $\delta = \ln\left(\dfrac{u(t_n)}{u(t_n+T)}\right)$.
7. Démontrer la relation $\delta = \xi\omega_0 T$.
8. Écrire le rapport $\dfrac{\Delta E}{E(t_n)}$ en fonction de Q quand $Q \gg 1$? Commenter. (On donne $e^x \simeq 1 + x$ quand $x \to 0$.)

3.2 Circuit RLC parallèle (circuit bouchon)

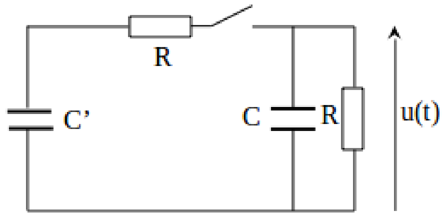
On considère le circuit composé de l'association en série d'un générateur idéal de tension E, d'un interrupteur K, d'une résistance en série R et de l'association en parallèle d'une résistance r, d'un condensateur C et d'une bobine L représenté sur la figure ci-dessous. Initialement, l'interrupteur est ouvert, le condensateur est déchargé et tous les courants sont nuls. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.



1. Déterminer les valeurs de u, i_1, i_2 et i_3 juste après la fermeture de K.
2. Déterminer les valeurs de u, i_1, i_2 et i_3 en régime permanent.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.
4. L'écrire sous la forme canonique suivante
$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0,$$
et déterminer, par identification, les valeurs de ω_0 et Q.
5. Quelle relation doit-il exister entre r, R, L et C pour que le régime soit apériodique ? Pour la suite on prendra $R = 2$ kΩ, $r = 200$ Ω, $C = 100$ nF, $L = 40$ mH.
6. Déterminer grâce aux conditions initiales l'évolution temporelle de $u(t)$.
7. Donner les relations qui permettent de déterminer les intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ et $i(t)$ à partir de $u(t)$.

3.3 Étude d'un pont de Wien en régime transitoire

On considère le circuit suivant :



A $t = 0$, on ferme l'interrupteur du circuit. Le condensateur C' est initialement chargé sous une tension $U = 3$ V et le condensateur C est, lui, déchargé. La capacité des deux condensateurs est la même $C = C' = 100$ nF. On prend $R = 10$ kΩ et on pose $\tau = RC$.

1. Déterminer sans calcul les valeurs de la tension u pour $t = 0^+$ et lorsque le régime permanent est atteint.
2. Montrer que l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ est :

$$\ddot{u} + \frac{3}{\tau}\dot{u} + \frac{u}{\tau^2} = 0$$

3. Exprimer $u(t)$ en déterminant les valeurs des constantes d'intégration.
4. Tracer le graphe u(t) à l'aide d'un outil numérique.