3. Dynamique du point matériel

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la *cinématique du point*. Nous avons alors étudié comment caractériser un mouvement, à travers la détermination de positions, de vitesses et d'accélérations. Cependant, cette approche ne nous permet pour l'instant pas de lier le mouvement à ses causes. Ce domaine de la mécanique, qui sera l'objet du chapitre, est la *dynamique*.
La formulation de la dynamique repose sur un nombre restreint de lois, énoncées par Galilée et Isaac Newton au XVII^{eme} siècle. Ces lois ont été *postulées*, c'est à dire qu'elles sont justifiées par leur validité vis à vis de l'expérience. Certains résultats expérimentaux ont montré que ces lois cessent d'être valides à de très petites échelles, ce qui correspond au domaine de la *physique quantique*, et lorsque la vitesse des objets considérés devient proche de la vitesse de la lumière, c'est le cadre de la *relativité restreinte*. Au cours de ce chapitre, nous exclurons de notre traitement ces situations, nous placerons dans un cadre où les lois de la mécanique classique, dite *newtonienne*, sont valides, et limiterons notre étude à celle des mobiles ponctuels.
Nous nous proposons de commencer notre étude par l'énoncé du principe d'inertie, ce qui nous permettra de dégager la notion de *force*.

3.1 Principe d'inertie - Première loi de Newton

3.1.1 Énoncé du principe d'inertie

On observe, si on lance une bille sur un plan horizontal lisse avec une vitesse initiale v_0, qu'elle continue son mouvement en ligne droite à vitesse presque constante (la vitesse diminue au fur et à mesure à cause des frottements). On peut considérer qu'aucune action mécanique n'est exercée sur la bille (il s'agit comme nous le verrons plus tard, d'un système pseudo-isolé, le poids étant compensé par la réaction du support). C'est en menant des expériences de ce type que Galilée parvint à énoncer le principe d'inertie que nous allons étudier maintenant plus en détail.

On peut trouver un énoncé du principe de l'inertie dans les premières pages du traité de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, ouvrage révolutionnaire paru en 1726 qui posa les bases de la dynamique : [1]

« *Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne et uniforme, sauf si des forces imprimées le contraignent d'en changer* ».

Nous retiendrons l'énoncé plus moderne suivant :

Loi 3.1.1 — Principe d'inertie - Première loi de Newton. ....

....

1. Notons toutefois que c'est à Galilée que l'on doit la première mention du principe d'inertie.

....

R Si un mobile est initialement immobile dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen, il persistera dans son état de repos. Il s'agit d'un cas particulier de translation uniforme à vitesse nulle.

R Un objet peut donc être en mouvement, *même si aucune action n'est appliquée sur lui*. C'est ce qu'exprima Galilée avec sa fameuse phrase « *Le mouvement [rectiligne et uniforme] est comme rien*. Il s'opposait en cela à une croyance héritée de la Grèce antique, et notamment d'Aristote, qui pensait que, si un mobile était en mouvement, c'est que quelques chose le poussait ou le tirait en permanence.

R Ce qu'on qualifie *d'inertie* correspond à la « résistance » qu'oppose tout corps à la modification de sa vitesse.

Les énoncés du principe d'inertie ci-dessus font apparaître des concepts nouveaux, tels que ceux de *référentiel galiléen* et de *force*. Nous allons, dans les parties suivantes, préciser ces concepts.

3.1.2 Référentiel galiléen

Le premier principe de la dynamique postule l'existence d'au moins un référentiel particulier, dit galiléen, dans lequel le principe d'inertie peut s'appliquer. Ceci constitue une définition générale d'un référentiel galiléen. Reprenons pour l'illustrer l'exemple introductif de la bille en mouvement rectiligne uniforme.

— Si on se place dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire, et que la durée de l'expérience est suffisamment faible, le principe d'inertie est vérifié, puisque la bille, qui n'est soumise à aucune action mécanique, persiste dans son mouvement de translation rectiligne uniforme.
— Si l'on se place dans le référentiel $\mathscr{R}_b$ lié à la bille, la bille est immobile, et le principe d'inertie est une nouvelle fois vérifié. $\mathscr{R}_b$ est donc un référentiel galiléen.

On voit que $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}_b$ sont tous deux galiléens. Or, $\mathscr{R}_b$ est en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathscr{R}$, puisque lié à la bille. Ceci fait partie d'un résultat plus large, que nous allons énoncer ici :

À retenir 3.1.2 ....

....

....

Conséquence

Le repos est relatif, un objet immobile dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ sera en mouvement de translation rectiligne uniforme dans un autre référentiel galiléen $\mathscr{R}_1$.

Il faut garder à l'esprit que la notion de référentiel galiléen est un concept abstrait, en effet, aucun référentiel connu n'est rigoureusement galiléen, on pourra cependant souvent supposer certains référentiels galiléens, il s'agit alors d'une *approximation* dont il convient de donner le domaine de validité. Afin d'illustrer cela, nous allons donner ici quelques référentiels usuels :

— **Le référentiel héliocentrique ou référentiel de Copernic** $\mathscr{R}_c$: Ce référentiel a pour origine le centre de gravité du système solaire, quasiment confondu avec le centre S du Soleil. On lui associe trois axes, passant par S, et pointant vers trois étoiles lointaines fixes. On utilise souvent ce référentiel pour étudier le mouvement des planètes du système solaire, il constitue alors une très bonne approximation d'un référentiel galiléen (cela reste une approximation, car le mouvement du centre de notre galaxie n'est pas rectiligne et uniforme).
— **Le référentiel géocentrique** $\mathscr{R}_g$: Ce référentiel a pour origine le centre de notre planète. On lui associe les trois mêmes axes qu'au référentiel héliocentrique. Comme la Terre décrit une ellipse dont l'un des foyers est S, $\mathscr{R}_g$ est en mouvement de translation elliptique par rapport à $\mathscr{R}_c$. Il est alors clair que le référentiel géocentrique n'est pas galiléen, on pourra cependant le supposer comme tel si le temps d'étude du système est faible devant la période de révolution de la Terre autour du Soleil ($\approx$ 365 jours).
— **Le référentiel terrestre** $\mathscr{R}_t$: Ce référentiel a pour origine le centre de la Terre et est en mouvement de rotation par rapport à $\mathscr{R}_g$ à la pulsation $\omega \approx \frac{2\pi}{T_r}$ où T_r correspond à la période de révolution de la Terre sur elle même. De nouveau, ce référentiel n'est rigoureusement pas galiléen. On pourra cependant le

considérer comme tel si la durée des expériences réalisées est négligeable devant T_r.

L'étude des référentiels non galiléens n'est pas au programme de cette année, nous nous contenterons de mener des études dans des référentiels que nous supposerons galiléens, réservant pour l'année prochaine les cas plus complexes.

L'énoncé du principe d'inertie donné par Newton faisait apparaître le concept de *forces*, nous allons désormais préciser ce concept.

3.1.3 Notion de force

Pour modifier le mouvement rectiligne et uniforme d'un objet, on peut par exemple exercer sur lui une poussée, on parle généralement *d'action mécanique* exercée sur l'objet. Cette action mécanique va être modélisée par un objet mathématique : une *force*.

L'action mécanique exercée sur l'objet présente plusieurs caractéristiques :
— un point d'application où s'exerce l'action ;
— une direction et un sens donnés ;
— une certaine intensité (on peut pousser un objet plus ou moins fort).
L'objet mathématique le plus commode pour modéliser cela sera un vecteur, caractérisé par sa direction, son sens et sa norme.

> **À retenir 3.1.3** On modélise l'action mécanique exercée sur un objet par un vecteur appelé force, caractérisé par :
> — son sens et sa direction, les mêmes que ceux de l'action mécanique ;
> — son point d'application, indiquant où l'action mécanique s'applique ;
> — sa norme, caractérisant l'intensité de l'action mécanique.
> La norme de la force s'exprime en newton (noté N).

Notons que la force est un objet mathématique et n'est pas directement observable, seuls les effets d'une force, à savoir les variations de vitesse, sont observables et mesurables.

3.1.4 Systèmes isolés et pseudo-isolés

En fonction des forces qui s'exercent sur un système, on définit généralement deux cas particuliers :
— **Système isolé** : Un système est dit *isolé* si aucune force ne s'exerce sur lui. Notons qu'il s'agit d'un concept idéal, irréalisable expérimentalement. En effet, tout objet dans l'Univers est soumis à une force, aussi ténue soit-elle.
— **Système pseudo-isolé** : Un système est dit *pseudo-isolé* si la résultante des forces qui s'exercent sur lui est nulle. C'est par exemple le cas de la bille de l'exemple introductif si on néglige les frottements solides. On peut réaliser des systèmes très proches de systèmes isolés à l'aide de mobiles auto-porteurs à coussins d'air qui permettent de s'affranchir des frottements.

Nous avons vu dans cette partie qu'un système sur lequel ne s'exerçait aucune action mécanique dans un référentiel galiléen était animé d'un mouvement rectiligne uniforme. L'introduction du principe d'inertie nous a permis de détailler les notions de force et de référentiel galiléen. Nous avons vu que l'action d'une force sur un objet en mouvement avait pour conséquence de modifier le mouvement de ce dernier. Il nous faut maintenant quantifier ces observations et déterminer la relation entre force et « modification du mouvement », ce qui sera l'objet de la partie suivante, où nous étudierons la seconde loi de Newton.

3.2 Loi fondamentale de la dynamique - Deuxième loi de Newton

3.2.1 Notion de masse

Afin d'énoncer la seconde loi de Newton, il nous faut expliciter plus en détail ce qu'est la masse d'un objet. L'expérience ordinaire nous le confirme, il est plus difficile de mettre en mouvement une boule de pétanque qu'une balle de ping-pong, or on sait bien que la masse d'une boule de pétanque est supérieure à celle d'une balle de tennis de table. Ainsi, plus la masse d'un objet va être élevée, plus il va être difficile de « modifier »son mouvement. On définit ainsi la masse, qualifiée de *masse inerte*, car liée à l'inertie du corps.

Définition 3.2.1 — Masse inerte d'un corps. ....

....

....

....

....

....

3.2.2 Énoncé de la loi fondamentale de la dynamique

On peut, à partir de ce qui précède, construire la loi fondamentale de la dynamique. En effet, lorsqu'on exerce une action mécanique sur un corps, on change sa vitesse. Par exemple, en poussant un ballon de football immobile, on fait passer sa vitesse d'une valeur nulle à une valeur v_0 en un certain laps de temps. Plus la force exercée sur l'objet va être intense, plus la modification de vitesse sera importante. On en déduit que la dérivée temporelle de la vitesse est proportionnelle aux forces appliquées à l'objet, soit $\frac{d\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}}{dt} \propto \sum \overrightarrow{F}$, où le second membre désigne la somme des forces qui s'exercent sur l'objet considéré.

Nous avons également vu qu'il était d'autant plus difficile de communiquer une variation de vitesse au point matériel considéré que sa masse inerte était grande. On en déduit $m\frac{d\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}}}{dt} = \sum \overrightarrow{F}$, ce qui peut se réécrire :

$$\frac{d(m\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}})}{dt} = \sum \overrightarrow{F}$$

Pour écrire la seconde loi de Newton, on introduit une nouvelle grandeur, appelée *quantité de mouvement* :

Définition 3.2.2 — Vecteur quantité de mouvement. ....

....

....

R Comme la vitesse, l'expression du vecteur quantité de mouvement dépend du référentiel dans lequel on l'exprime.

R On rencontre parfois le terme « impulsion » pour désigner le vecteur quantité de mouvement. Il s'agit d'un abus de langage, l'impulsion, définie à partir de la mécanique analytique, s'identifie dans la plupart des cas à la quantité mouvement, mais pas dans le cas général.

On peut alors réécrire le principe fondamental de la dynamique sous sa forme finale :

Définition 3.2.3 — Loi fondamentale de la dynamique - Deuxième loi de Newton. ....

....

....

....

....

....

....

C'est grâce à cette expression que nous allons pouvoir résoudre la plupart des problèmes de mécanique du point qui se présentent à nous, comme nous allons bientôt le voir. Avant cela, afin de pouvoir décrire le mouvement des mobiles étudiés, il nous faut connaître l'expression des forces qui s'exercent sur lui, ce qui sera l'objet de notre prochaine partie.

3.3 Expression des forces usuelles et exemples d'application

3.3.1 Interactions fondamentales et lois phénoménologiques

La loi fondamentale de la dynamique nous permettra de trouver la trajectoire d'un mobile ponctuel, sous réserve que l'on connaisse les forces qui s'exercent sur lui. L'étude d'un problème commencera toujours par un inventaire des forces qui s'exercent sur l'objet étudié. On distingue généralement en physique deux types de forces :

— Les forces découlant des interactions fondamentales, au nombre de 4 (force de gravitation, force électromagnétique, force forte et force faible). Ces forces sont valables quelle que soit l'échelle du problème considéré. Leur expression est exacte et ne relève pas d'approximations.

— Les autres forces sont des résultantes, à notre échelle, d'interactions fondamentales à l'échelle moléculaire. Par exemple, les forces de frottement sont dues à des interactions électrostatiques entre molécules, mais ne sont pas calculable, on les modélise alors via les lois du frottement solide que nous verrons plus loin. On parle alors de lois phénoménologiques, l'expression de ces forces découlera de l'expérience et constituera toujours une approximation, venant de notre incapacité à exprimer à notre échelle la résultante globale des interactions fondamentales. Elles n'ont donc pas le même statut que ces dernières et, contrairement à elles, elles auront un certain cadre d'application en dehors duquel elles ne seront plus valables.

Commençons par étudier l'interaction gravitationnelle, interaction fondamentale régissant notamment le mouvement des planètes et des astres.

3.3.2 Force de gravitation

Expression de la loi de la gravitation universelle

C'est à Isaac Newton que nous devons la découverte de la loi de la gravitation universelle. Nous verrons en travaux dirigés *comment* le célèbre scientifique a pu déduire, de simples constatations expérimentales, cette loi fondamentale de la physique. Dans le cadre de cours, nous nous contenterons pour l'instant simplement de donner l'expression mathématique de cette interaction.

Loi 3.3.1 — Loi de la gravitation universelle. ....

....

....

....

....

....

....

La constante $\mathscr{G}$ étant positive, le signe - signifie que la force de gravitation est toujours attractive. On peut réécrire cette loi de la manière suivante, en remarquant que $\overrightarrow{u}_{1\to 2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{d}$:

À retenir 3.3.2 On peut écrire autrement la loi de la gravitation universelle :

$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\mathscr{G} m_1 m_2 \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{d^3}$$

R Les masses qui apparaissent dans l'expression de la loi de la gravitation universelle sont appelées *masses pesantes*. La masse pesante d'un corps est une grandeur scalaire qui caractérise sa capacité à attirer à lui un autre corps, via la force gravitationnelle. A priori, ces grandeurs n'ont pas à être égales aux masses inertes, qui caractérisent la capacité d'un corps à s'opposer à la modification de sa vitesse. Il est particulièrement remarquable que l'expérience nous prouve que la masse pesante soit égale à la masse inerte, avec une précision remarquable. En effet, à ce jour, aucune expérience de physique n'a permis à ce jour de mettre en défaut l'égalité $\frac{m_{inerte}}{m_{pesante}} = 1$. C'est cette égalité qui a permis à Einstein de poser les bases de la relativité générale.[2]

2. En effet, vous verrez plus tard dans votre cursus que les forces d'inertie, qui dépendent du référentiel, sont également proportionnelles à la masse. Einstein postula que la gravitation dépendait également du référentiel, ce qui le mena à la théorie de la relativité générale.

En appliquant cette loi, on pourra par exemple déterminer la force exercée par la Terre sur un satellite. Il faudra supposer ces deux corps ponctuels. Vous prouverez plus loin dans votre cursus que cette approximation, bien que brutale, est bien valable, puisqu'une distribution de masse sphérique produit, en dehors de la sphère, une force égale à celle produite par un point unique placé en son centre, affublé de la masse totale du corps.

Intéressons-nous maintenant à l'effet de la force de gravitation au voisinage du sol, afin de trouver une expression pour une force que nous manipulons depuis le chapitre 1 : le *poids*.

Gravitation terrestre proche du sol

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Théorème 3.3.3 ....

....

....

R L'expression précédente est en réalité une approximation. En effet, nous n'avons pas pris en compte le caractère non galiléen du référentiel terrestre, ce qui ferait apparaître des termes d'inertie liés à la rotation de la Terre. Vous verrez dans la suite de votre cursus, la définition rigoureuse et exacte du poids. Notons cependant que ce sont des termes correctifs, qui ne font varier la valeur de g_0 que de quelques pourcents.

3.3.3 Exemple d'application - Tir de projectile dans le vide sans frottements

Méthode générale

Avant de nous lancer dans la résolution d'un problème concret de mécanique, commençons par donner la méthode générale de résolution. Dans la plupart des problèmes rencontrés, on pourra suivre les étapes suivantes :

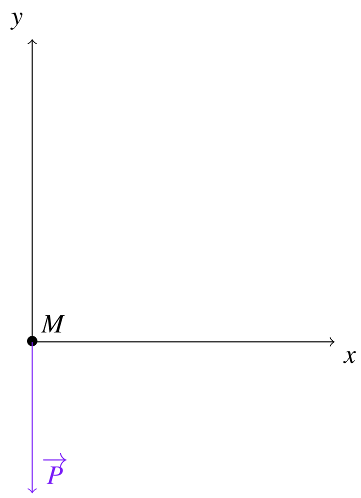
- On définit tout d'abord le système étudié.
- On choisit pour mener l'étude un référentiel galiléen, de sorte qu'on puisse y appliquer la loi fondamentale de la dynamique.
- On choisit le système de coordonnées le plus adapté, et on dessine éventuellement un schéma.
- On réalise un bilan des forces, en indiquant chacune des forces sur le schéma.
- On écrit la loi fondamentale de la dynamique et on la projette sur les axes du système de coordonnées choisi.
- On résout les équations différentielles ainsi obtenues pour pouvoir caractériser le mouvement.

Appliquons cela à un exemple simple, celui d'une chute libre sans vitesse initiale.

Résolution

On étudie par exemple le lancer d'une boule de pétanque, sans vitesse initiale. Appliquons les étapes précédentes pour déterminer au problème considéré.

- Le système étudié est la boule de pétanque, de masse $m = 700$ kg.
- On se place pour étudier ce mouvement dans le référentiel terrestre, que l'on suppose galiléen sur la durée de l'étude.
- On choisit ensuite un repère. Le problème étudié ne présente pas de symétrie particulière, on choisira donc une base cartésienne. Le mouvement étant plan, nous n'aurons besoin que de deux vecteurs de base, d'où $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u_x}; \overrightarrow{u_y}\}$. On choisit comme origine pour ce repère le point O à la position où on lâche la boule de pétanque.
- On réalise ensuite le bilan des forces, comme les frottements sont négligés, la seule force en présence est le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$.
- On représente la situation sur un schéma :



- On applique ensuite la loi fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathscr{R}$:

$$m\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{g} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_y}$$

- On peut ensuite projeter sur $\overrightarrow{u_y}$ pour obtenir une équation scalaire, on note $a_{y,M/\mathscr{R}}$ la composante de l'accélération suivant $\overrightarrow{u_y}$:

$$a_{y,M/\mathscr{R}} = -g \tag{3.1}$$

- Par intégrations successives, on obtient ensuite les composantes de la vitesse et du vecteur position suivant $\overrightarrow{u_y}$. Pour des raisons évidentes, ces deux vecteurs seront portés par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_y}$. Comme le mobile est lâché depuis l'origine du repère sans vitesse initiale, les constantes d'intégrations (notées ici v_0 et y_0) seront nulles. Nous obtenons ainsi :

$$v_{y,M/\mathscr{R}} = \int a_{y,M/\mathscr{R}}\, dt = -gt + v_0 = -gt \tag{3.2}$$

$$y(t) = \int v_{y,M/\mathscr{R}}\, dt = \int -gt\, dt = -\frac{gt^2}{2} + y_0 = -\frac{gt^2}{2} \tag{3.3}$$

On a donc finalement :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}} = -gt\,\overrightarrow{u_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = -\frac{gt^2}{2}\,\overrightarrow{u_y} \tag{3.4}$$

On a alors complètement caractérisé le mouvement.

3.3.4 Forces élastiques

Nous allons dans cette partie traiter des forces élastiques que vous avez déjà rencontrées, notamment via la loi de Hooke lors de l'étude des oscillateurs harmoniques mécaniques. L'expression de ces forces permettra de décrire des *déformations élastiques*, c'est à dire des déformations réversibles, où l'objet déformé retrouve sa forme initiale une fois que la contrainte qu'on lui applique disparaît.

Nous nous contenterons de considérer des faibles déformations, pour lesquelles la loi de comportement pourra être considérée linéaire. Notons bien que, contrairement à l'interaction gravitationnelle traitée précédemment, les lois considérées sont des lois *phénoménologiques*, et des approximations. En effet, par exemple, si l'on tire trop fort sur un ressort, on le déforme de manière irréversible, comportement qui n'est pas décrit par la loi de Hooke, on parle alors de *déformation plastique*.

Loi de Hooke

L'exemple le plus simple de déformation élastique est celui des ressorts. Si on comprime ou étire un ressort, de longueur à vide l_0, il va exercer à ses extrémités une force donnée par la *loi de Hooke*, de manière à s'opposer à cette déformation :

Loi 3.3.4 — Loi de Hooke. Un ressort élastique exerce sur chacune de ses extrémités une force dirigée le long de l'axe du ressort, proportionnelle à l'allongement algébrique $\Delta l = l - l_0$ de celui-ci, dirigée dans le sens qui s'oppose à la déformation du ressort. En notant M l'une de ces extrémités, on a :

$$\overrightarrow{F}_{ressort \to M} = -k\Delta l \ \overrightarrow{u_x}$$

où $\overrightarrow{u_x}$ est le vecteur unitaire orienté dans la direction de la déformation et orienté dans le sens des l croissants, et où la constante k, appelée *raideur*, est une constante caractéristique du ressort exprimée en newton par mètre ($N.m^{-1}$).

> **R** L'allongement Δl est une grandeur algébrique, son signe déterminera le sens de la force. Il faudra bien penser à vérifier, dans les exercices, que le signe obtenu pour $\overrightarrow{F}$ est compatible avec le bon sens.

Tension d'un fil

Considérons le cas limite d'un ressort de raideur k particulièrement élevé, la force exercée par ce ressort peut alors prendre des valeurs importantes alors que l'allongement du ressort reste presque nul. Ce ressort, aux propriétés limites peut modéliser un fil inextensible. On considérera que de tels fils ne s'allongent pas mais exercent une force, souvent notée $\overrightarrow{T}$, dirigée le long de l'axe du fil et vers l'autre extrémité (dans le cas d'un fil tendu comme présenté sur la figure 3.1). De manière plus générale, la tension exercée par un fil est toujours tangente à celui-ci.

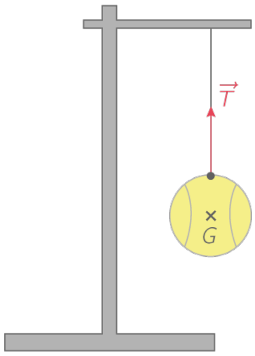


FIGURE 3.1 – Tension d'un fil inextensible

En général, la valeur du module de cette force n'est pas connue, et c'est l'application de la deuxième loi de Newton qui permet de la déterminer, il est toutefois bon de garder à l'esprit que le comportement du fil est décrit par les mêmes lois phénoménologiques que celui du ressort.

3.3.5 Exemple d'application - Pendule simple

Mise en équation du problème

On considère un pendule simple, réalisé en attachant une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m, à l'extrémité d'un fil tendu, inextensible, de longueur l. L'autre extrémité est fixée en un point fixe O du référentiel terrestre $\mathscr{R}$ qui constituera le référentiel d'étude, comme présenté sur la figure 3.2. On cherche dans cette partie à expliciter les équations du mouvement du pendule.

....

....

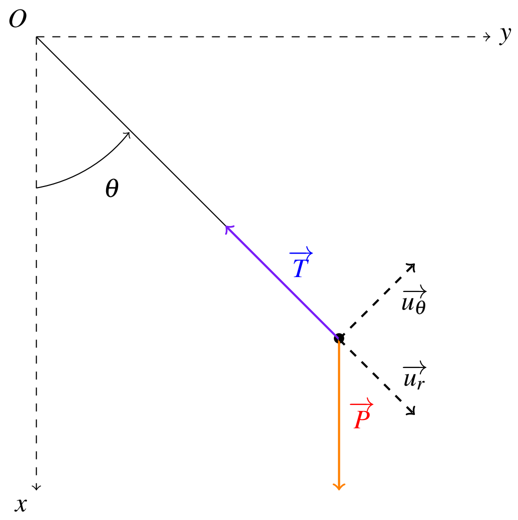


FIGURE 3.2 – Pendule simple

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

C'est une équation différentielle en θ. Il suffit de la résoudre pour trouver l'équation d'évolution de θ. Le problème est que nous ne savons pas résoudre analytiquement une telle équation.[3] Nous sommes donc amenés à faire des approximations pour obtenir des résultats, ce qui sera l'objet de la partie suivante.

Approximation des petits angles

Pour des angles suffisamment petits, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de $\sin\theta$, ce qui revient à faire l'approximation :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Intéressons nous maintenant à une manière particulièrement commode de caractériser le pendule, à savoir son *portrait de phase*.

Portrait de phase du pendule simple

Pour trouver l'expression du portrait de phase, il faut exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de θ. Pour faire cela, multiplions l'équation différentielle régissant l'évolution de θ aux petits angles par $\dot{\theta}$. On obtient :

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta\dot{\theta} = 0$$

Ceci peut se réécrire de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) + \omega_0^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\theta^2\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2\right) = 0 \quad \text{d'où} \quad \dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2 = \Omega^2 = cste$$

3. En réalité, cette équation ne peut être résolue analytiquement, il faut avoir recours à des outils numériques pour obtenir un résultat.

Où Ω dépend des conditions initiales. Cette expression se met sous la forme suivante :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} + \theta^2 = \Omega^2$$

Le portrait de phase du pendule correspond au tracé de $\dot{\theta}/\omega_0$ en fonction de θ. On reconnaît alors l'équation d'un cercle de centre O l'origine du repère et de rayon Ω. On représente l'allure du portrait de phase en figure 3.3.

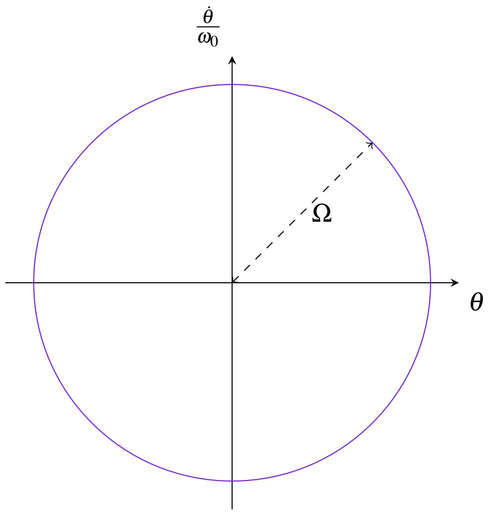


FIGURE 3.3 – Portrait de phase du pendule simple aux petits angles

Si on se place à des angles plus grands, l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ n'est plus valable. Le portrait de phase est alors modifié, il ne s'agit plus d'une cerclee. A titre d'exemple, le portrait de phase d'un pendule simple aux grands angles est présenté sur la figure 3.4. s

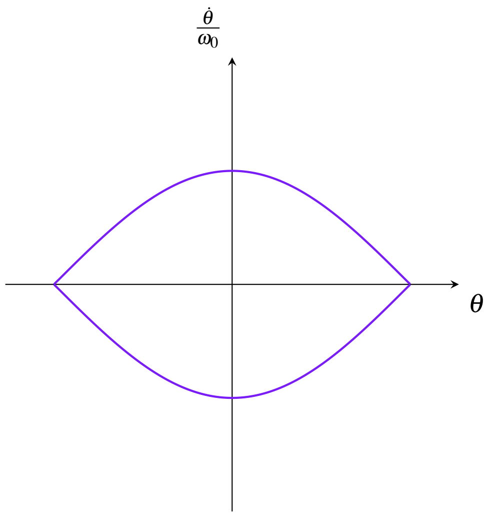


FIGURE 3.4 – Portrait de phase du pendule simple aux grands angles

R Aux petits angles, la période ne dépend pas de l'amplitude du mouvement du pendule, on dit qu'il y a *isochronisme des oscillations*. Aux grands angles, cela n'est plus vrai et la période des oscillations varie en fonction de l'amplitude.[4]

4. La formule de Borda donne une approximation de la dépendance de T avec θ_0 : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{12}\right)$.

3.3.6 Forces de réactions et de frottements

Les forces de frottements et de réaction, bien que communes à notre échelle, sont particulièrement difficiles à décrire. Ces forces tirent leur origine des interactions entre molécules à l'échelle microscopique, qui ne sont pas facilement modélisables. On utilise donc, pour décrire ces phénomènes, des lois phénoménologiques telles que les lois de Coulomb. Gardons à l'esprit que ces lois modélisent les effets d'interactions à l'échelle microscopique trop complexes pour être décrites, sans se préoccuper de leurs causes.

Contact avec un support

Considérons le cas d'un mobile M qui glisse sur un support solide, que nous appellerons Σ. Le support exerce une force $\vec{R}$ sur le mobile, appelée *réaction du support*. Cette réaction est la résultante des actions microscopiques qui s'exercent sur le mobile au niveau de l'interface solide/solide, et qui l'empêche notamment de s'enfoncer dans le support.

On sépare généralement la réaction $\vec{R}$ en deux composantes, en notant : $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$, comme présenté sur la figure 3.5.

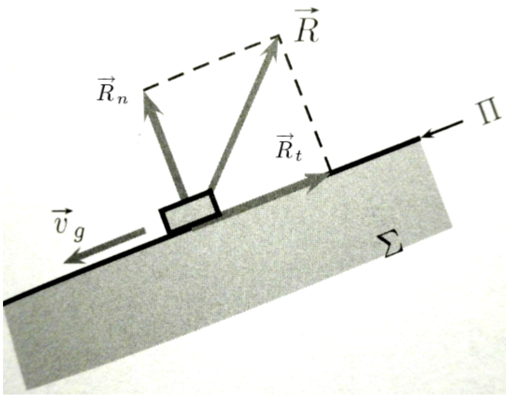


FIGURE 3.5 – Réaction d'un support sur un mobile

- La composante $\vec{N}$ est la projection de $\vec{R}$ sur le normale à la surface de contact. C'est pour cette raison qu'on l'appelle *composante normale*. Cette composante est dirigée du support vers le solide, l'empêchant ainsi de s'enfoncer dans celui-ci. Ainsi, la condition $\vec{N} = \vec{0}$ caractérise le décollage du mobile par rapport au support.
- La composante $\vec{T}$ est la projection de $\vec{R}$ sur la surface de contact. Ce vecteur s'oppose au mouvement du mobile et modélise les forces de frottements entre le support et le solide.

Attention, même si le mobile ne bougeait pas, les forces de frottement existeraient tout de même, ce sont précisément ces forces qui empêcheraient le solide de se mettre à glisser sur le support. Dans une telle situation, on dit que le solide adhère au support.

Pour rendre cette étude quantitative, on utilise des lois phénoménologiques qui donnent certaines informations sur les valeurs de $\vec{T}$ et $\vec{N}$. Ces lois sur le frottement solide, sont appelées *lois de Coulomb*.

Lois de Coulomb du frottement solide

C'est Léonard de Vinci qui, le premier, a étudié le frottement solide, mais c'est à Coulomb que l'on doit sa formalisation mathématique en 1760. La grandeur pertinente pour caractériser la réaction du support est la vitesse du mobile par rapport à la surface de contact, appelée *vitesse de glissement*. On notera cette vitesse $\vec{v}_g = \vec{v}_{M/\mathscr{R}_\Sigma}$ où $\mathscr{R}_\Sigma$ désigne le référentiel lié au support. Notons que si le support est immobile dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire, la vitesse de glissement s'identifie à la vitesse du mobile M dans $\mathscr{R}$.

Donnons l'énoncé des lois de Coulomb :

Loi 3.3.5 — Lois de Coulomb du frottement solide. ....

....

....

....

Les coefficients f_s et f_d sont déterminés par l'expérience. Ils dépendent de nombreux paramètres, tels que la température, la pression, l'humidité, etc... Notons qu'ils sont également très sensibles à l'état de la surface.

La loi du frottement solide de Coulomb est conforme à l'expérience sensible. Plus un objet est lourd, plus il faudra le pousser fort pour le faire glisser, les frottements sont donc bien proportionnels à la réaction normale.

Le coefficient de frottement statique f_s est généralement supérieur à f_d, il est plus difficile de mettre en mouvement un objet maintenu immobile par des frottements que de faire avancer ce même objet déjà mobile.

Exemple d'application - Caisse sur un plan incliné

Afin de donner un exemple de problèmes où interviennent les lois de Coulomb, on considère une caisse immobile sur un plan incliné. On augmente l'inclinaison α de la caisse au fil du temps et on cherche pour quelle valeur de α la caisse se mettra à glisser. Afin de mieux visualiser la situation, on la représente sur la figure 3.6.

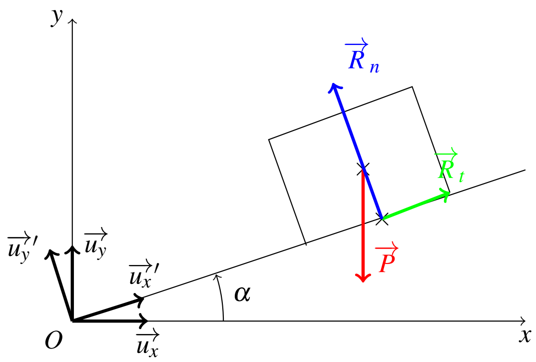


FIGURE 3.6 – Étude d'une caisse sur un plan incliné

On peut dès lors s'interroger sur le traitement du problème lorsque la caisse est en mouvement. L'application des lois de Coulomb nous permet une nouvelle fois de répondre à cette question. La composante tangentielle R_t est liée à la composante normale R_n par la relation :

$$R_t = f_d R_n$$

Où f_d est le coefficient de frottements dynamique. Comme la caisse glisse le long du plan incliné, la composante suivant $\vec{u_y}'$ de son accélération est nulle (autrement, la caisse s'élèverait au dessus du support). On a donc, comme précédemment :

$$R_n - mg\cos\alpha = 0 \quad \text{d'où} \quad R_n = mg\cos\alpha$$

On a ensuite, d'après les lois du frottement solide :

$$R_t = f_d\, R_n = f_d\, mg\cos\alpha$$

En projetant la loi fondamentale de la dynamique sur $\vec{u_x}'$, et en désignant par la variable x' la position de la caisse, on obtient :

$$m\ddot{x}' = R_t - mg\ \sin\alpha = f_d\ mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = mg(f_d\ \cos\alpha - \sin\alpha) = cste$$

Nous avons donc affaire à un mouvement rectiligne uniformément accéléré, dont la résolution complète a déjà été traitée dans le chapitre précédent.

Gardons à l'esprit qu'il existe d'autres types de frottements, par exemple les frottements fluides, que nous allons étudier dans la partie suivante.

Frottements visqueux

L'expérience sensible nous le prouve, quand un solide se déplace dans un fluide, le fluide semble s'opposer au mouvement. Il exerce une *force de frottements visqueux*, qui tend à faire diminuer la vitesse. Si la vitesse considérée est faible, la norme de la force de frottements est approximativement proportionnelle à la norme de la vitesse, on parle alors de frottements de types *Stokes*, du nom de Georges Gabriel Stokes, physicien et mathématicien britannique ayant travaillé principalement sur la mécanique des fluides. Si les vitesses considérées sont trop importantes, l'approximation de Stokes n'est plus valable, la norme de la force de frottements fluide est alors approximativement proportionnelle à la norme de la vitesse au carré, on parle alors de frottements de type *Venturi*. C'est expressions sont toujours des *approximations*, l'étude des frottements étant en réalité particulièrement complexe.

Loi 3.3.6 — Modélisation des frottements visqueux. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

3.3.7 Poussée d'Archimède

Une autre force usuelle que l'on peut rencontrer, qui caractérise également l'action d'un fluide sur un corps immergé est la poussée d'Archimède.

Loi 3.3.7 — Poussée d'Archimède. ....

....

La poussée d'Archimède correspond donc à l'opposé du poids du volume de fluide déplacé. Nous reviendrons plus tard, lors de l'étude de la mécanique des fluides, sur la démonstration de l'expression de la force d'Archimède.[5]

3.3.8 Exemple d'application - Chute libre avec frottements de Stokes

On considère cette fois-ci l'exemple de la chute libre d'une bille dans un fluide visqueux, de sorte que les frottements ne soient pas négligeables. Cette situation modélise bien la chute d'une petite bille en plomb dans du glycérol, lâchée sans vitesse initiale. Appliquons de nouveau la méthode mise en jeu précédemment.

5. Celle-ci est liée aux forces de pression exercées par le fluide sur le solide immergé.

R Par mesure de la vitesse limite, on peut remonter à la valeur de α qui est liée à la viscosité η du liquide par la loi de Stokes $\alpha = 6\pi\eta R$, où R est le rayon de la bille. On a alors réalisé un *viscosimètre à chute de bille*.

3.3.9 Forces électromagnétiques

Les forces électromagnétiques sont dues à l'attraction entre charges. Il s'agit d'une interaction fondamentale, au même titre que l'interaction gravitationnelle. L'étude plus détaillée des forces électromagnétiques est réservée à un chapitre ultérieur où nous étudierons le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique, c'est pourquoi nous ne donnerons pas leur expression pour le moment.

3.4 Troisième loi de Newton

Il nous reste encore à donner la troisième des lois de Newton, appelée *principe des actions réciproques*.

Loi 3.4.1 — Principe des actions réciproques. ....

....

....

....

....

....

....

R Notons que la troisième loi de Newton postule l'égalité de la norme des forces, mais cela n'implique pas l'égalité de leurs effets. Ainsi, si l'on exerce une même forces sur deux objets de masses différentes, la modification de l'accélération du corps de plus petite masse sera plus grande que celle du corps de plus grande masse.

■ **Exemple 3.4.2** C'est le principe des actions réciproques qui permet d'expliquer le recul d'un pistolet. ■

Conclusion

Nous avons pu, dans ce chapitre, mettre en application les outils découverts lors de l'étude de la cinématique du point à des cas concrets, et ce principalement grâce à une unique loi : la deuxième loi de Newton, aussi appelée *loi fondamentale de la dynamique* en raison de son importance pratique. Grâce à cette loi, si l'on connaît l'expression des forces en présence, on peut caractériser complètement le mouvement du mobile étudié, c'est pourquoi nous avons, dans cette leçon, rappelé l'expression des forces les plus courantes.

Malgré sa grande puissance, la loi fondamentale de la dynamique ne permet pas toujours de résoudre analytiquement les problèmes. Il arrive que l'expression des forces soit d'une complexité telle que la résolution ne mène pas à un calcul d'intégrales connues. Il arrive également que celle-ci, bien que possible, soit particulièrement lourde. On peut alors utiliser d'autres méthodes, et notamment une approche *énergétique* qui peut donner bien des informations, rapidement et simplement, sur le mouvement du mobile étudié. Cette branche de la mécanique, particulièrement importante, sera l'objet du prochain chapitre.