北京化工大学

高等数学 AII 部分期中试卷勘误

及改正试卷

目　录

由于我们内容部门的失误，导致 **2009-2014 年的期中试卷**文件弄错，有多处错误，感到十分抱歉，我们会深刻的检讨此次的错误，如果还有任何问题，可以联系 QQ1152296818，感谢学弟学妹们的反馈。

北化高数 AII 部分期中试卷勘误

2014-2015 学年第二学期期中试卷

P4 第一题

6.设$z = u \cdot v \cdot$ 而$u = e^x siny, v = cosxy,$ 则$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}}\Big|\left(1,\frac{\pi}{2}\right) =$______

18.设密度为u(x,y,z)的空间体 Ω 由平面 z=0,z=y,y=0 及抛物柱面$\boxed{y = 1 - x^2}$所围成,

P29 第一题

1.【正解】$\sin xy$

【解析】$f(x+y, x-y) = sin[(x+y)(x-y)]$,$\boxed{f(x,y) = \sin xy}$

4.解析中 $z_y = -\boxed{\frac{x}{y^2}} + cos(xy^2)\,2xy$

P30

10.【正解】$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

【解析】$z_x = \frac{zy}{e^z - xy}$,$\boxed{z_y = \frac{zx}{e^z - xz}}$

$z(1,1) = 1$,$z_x = \frac{1}{e-1}, z_y = \frac{1}{e-1}, z_x = z_y \to \vec{d} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

12.【正解】$\boxed{(-1,0)}$

【解析】$f_x = 3x^2 - 3 = 0 \to x = \pm 1$,$f_y = \boxed{-2y} = 0 \to y = 0$

13.【正解】$\int_0^{\boxed{1}} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

14.【正解】$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\frac{1}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr}$

P31 第一题

17.解析中奇函数$\boxed{x\cos(x^2y)}$和

24.【正解】$e^x siny - 2xy$

【解析】令$P = e^x \sin y - 2y, Q = e^x \cos y - 2x$,依题意$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$

所以$u(x,y) = e^x \sin y - 2yx$

25.【正解】$\boxed{2a^2(\pi-2)}$

【解析】$S=\iint_s ds=\iint_D\sqrt{(z_x)^2+(z_y)^2+1}\,dxdy$

其中$z_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$　$z_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$\sqrt{(z_x)^2+(z_y)^2+1}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，D: $(x-\frac{a}{2})^2+y^2\le\frac{a^2}{4}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{所以 } S=2\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy\\&=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a-r^2}}rdr\\&=2a^2(\pi-2)\end{aligned}}$$

P32 第二题

2.【解析】$\int_L(\pi e^{2y}\cos\pi x-2\pi y)dx+(2e^{2y}\sin\pi x-2\pi)dy$

L: $y^2=2X-x^2$　$(0,0)\to(1,1)$

$Q_x=2\pi e^{2y}\cos\pi x$　$P_y=2\pi e^{2y}\cos\pi x-2\pi$　顺时针

补 L_1，L_2:　L_1:（1,1）→（1,0）　L_2:（1,0）→（0,0）

$$\text{原式}=-\iint_D(Q_x-P_y)dxdy\boxed{-}\int_{l_1}\boxed{-}\int_{l_2}$$

$$=-\frac{\pi}{4}\times2\pi\boxed{-}\int_1^0(-2\pi)dy\boxed{-}\int_1^0(\pi\cos\pi x)dx=-\frac{\pi^2}{2}-2\pi$$

3.【解析】 $x^2+y^2+z^2\boxed{-}2ax-2ay-2az+2a^2=0$

2012-2013 学年第二学期期中试卷

P6 第一题

10. 将二重积分$\int_1^2dx\int_{2-x}^{\boxed{\sqrt{2x-x^2}}}f(x,y)dy$

P33 第一题

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{5.【正解】}\ \frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f_2''-\frac{x}{y^2}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''\\&\text{【解析】}\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2',\quad\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}f_2'\right)=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}'',\\&\text{所以}\ \frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''\end{aligned}}$$

7.【正解】-$\sqrt{3}$

【解析】$\mu(1,1,1)=1$，$1+\left(\frac{1}{\mu}-3\right)\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$，$\mu x(1,1,1)=\frac{1}{2}$

$$2y+\left(\frac{1}{\mu}-3\right)\boxed{\frac{\partial\mu}{\partial y}}=0,\quad \mu y(1,1,1)=1,\quad \text{同理},\quad \mu z(1,1,1)=\frac{3}{2}$$

8.【正解】$\boxed{\left(0,\frac{1}{e}\right);\quad -\frac{1}{e}}$

P34

10.【正解】$\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

【解析】$D:\begin{cases}2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}\\ 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$,

由 $y=2-x$ 得 $x=2-y$，由 $\boxed{y=\sqrt{2x-x^2}\text{得}x=1+\sqrt{1-y^2}}$

$D:\begin{cases}2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2}\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$，原式$=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

11.【正解】$\frac{3\pi}{2}$

【解析】在极坐标下可表示为$\begin{cases}0\boxed{\leq}r\boxed{\leq}2cos\theta\\ -\frac{\pi}{2}\boxed{\leq}\theta\boxed{\leq}\frac{\pi}{2}\end{cases}$

12.【正解】$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \boxed{r}\mathrm{dr}\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} f(\mathrm{rcos\theta,rsin\theta,z})\mathrm{dz}$

【解析】$\Omega=\begin{cases}r\boxed{\leq}z\boxed{\leq}a+\sqrt{a^2-r^2}\\ 0\boxed{\leq}r\boxed{\leq}a\\ 0\boxed{\leq}\theta\boxed{\leq}2\pi\end{cases}$

三重积分为$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a \boxed{r}\mathrm{dr}\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} f(\mathrm{rcos\theta,rsin\theta,z})\mathrm{dz}$

14.【正解】$\boxed{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}} f(r^2)r^2\mathrm{dr}+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{cos\varphi}{sin^2\varphi}} f(r^2)r^2\mathrm{dr}}$

P35

15.【正解】$\int_{-4}^4 dx\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 f\boxed{(x+y+z)}dz$

17.【正解】$3\pi a^2$

【解析】原式$=\int_0^{2\pi}[a^2(1-cost)^2+a^2sint]\mathrm{dt}=a^2\int_0^{2\pi}(1-\boxed{2cost}+sint+\frac{1+cos2t}{2})\mathrm{dt}$

$=a^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}cos2t\right]dt=3\pi a^2$

19.【正解】$-a^2$

【解析】$\frac{\partial(x-y)}{\partial x}=1\boxed{=}\frac{\partial(x+y)}{\partial x}$,与路径无关，

改由直线段 $x=a-t,y=t,t=0\to a$ 积分

原式 $=\int_0^a[a(-1)+(a-2t)]dt=-a^2$

P36 第二题

1、【解析】$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}\boxed{(x^2+y^2)}=0=f(0,0)$

2、【解析】由对称性，$x=0$，$\iint_D\mu d\sigma=\mu\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\ =\mu\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}\mu$

$$\iint_D\mu yd\sigma=\mu\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}ydy\ =\frac{\mu}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx=\frac{4}{5}\mu$$

得 $y=\frac{3}{5}$，所以薄板质心为（0，$\frac{3}{5}$）

$$I=\mu\iint_D y^2d\sigma=\ \mu\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}y^2dy\ =\frac{\mu}{3}\int_{-1}^{1}(1-\boxed{x^6})dx=\frac{4}{7}\mu$$

薄板关于 x 轴的转动惯量为 $\frac{4}{7}\mu$

3、【解析】设平面为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\boxed{\frac{3}{c}}=1$，四面体的体积为 $\frac{abc}{6}$.

设 $F(a,b,c,\gamma)=abc+\lambda\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\boxed{\frac{3}{c}}-1\right)$,

$$\begin{cases}F'_a=bc-\frac{2\lambda}{a^2}=0\\ F'_b=ac-\frac{\lambda}{b^2}=0\\ F'_c=ab-\boxed{\frac{3\lambda}{c^2}}=0\\ F'_\lambda=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\boxed{\frac{3}{c}}-1=0\end{cases}$$

得到 $\gamma=\frac{a^2bc}{2}=ab^2c=\frac{abc^2}{3}$，即 $\frac{a}{2}=b=\frac{c}{3}$，代入 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}-1=0$，
解得 $b=3$，则 $a=6,c=9$，由实际意义，此时四面体面积为最小值，
所求平面为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{9}=1$

2011-2012 学年第二学期期中试卷

P8 第一题

8.求扇面 $z=\boxed{xy}$ 上一点 M_

12.设 D 由曲线 y=x, y=x^2所围成的闭区域，则 $\iint_D xy\boxed{dxdy}$_

14.设Ω由$x^2+y^2=\boxed{2z}$与$z=2$|

P9

19.质点在力场$\vec{F}=(x+y)\vec{\imath}+(x-y)\vec{\jmath}$中沿曲线$L$:$y=\sqrt{a^2-\boxed{x^2}}$从$x=a$移动到$x=0$所作的功为____________.

P36 第一题

1.【正解】$\boxed{\{(x,y)|y\geq 0,x\geq\sqrt{y}\}}$

P37

3.【正解】$dx+edy-edz$

【解析】$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\boxed{-}\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$

5.【正解】$e^y\cdot f_1'+f_{11}''\cdot xe^{2y}+e^y\cdot f_{13}''+f_{21}''\cdot xe^y+f_{23}''$

【解析】$e^y\cdot f_1'+e^y(f_{11}''\cdot xe^y+\boxed{f_{13}''})+f_{21}''\cdot xe^y+f_{23}''$

P38 第一题

10.【正解】$e^u sinv$|

【解析】$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}$,

$$\begin{cases}0=e^u cosv\frac{\partial u}{\partial y}-e^u sinv\frac{\partial v}{\partial y}, & \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}}=e^u cosv\\ 1=e^u sinv\frac{\partial u}{\partial y}+e^u cosv\frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial z}{\partial y}=e^{-u}(vsinv+ucosv)\end{cases}$$

11.【正解】$\int_0^1 dx\boxed{\int_0^x}f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}f(x,y)dy$

14.【正解】$\boxed{\frac{16}{3}\pi}$

【解析】Ω: $0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\boxed{\rho}\leq 2, \frac{\rho^2}{2}<z<2$，原式=$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2\rho^3 dz=\boxed{\frac{16}{3}\pi}$

P39

15.【正解】$\frac{5\pi}{2}$

【解析】原式$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (\boxed{2-r^2})rdr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (\boxed{r^2-2})rdr = \frac{5\pi}{2}$

16.【正解】$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\boxed{\sqrt{x^2+y^2}}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)dz$；

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \boxed{rdr} \int_0^{1+\sqrt{1-r^2}} f(r\cos\ \theta, r\sin\ \theta, z)dz$；

$\int_0^{2\pi} d\theta \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\ \psi d\psi \int_0^{2\cos\psi} f(r\cos\ \theta \sin\ \psi, r\sin\ \theta \sin\ \psi, r\cos\ \theta) r^2 dr}$

【解析】$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow z=1, Dxy: x^2+y^2 \le 1$；

$$\Omega: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ \boxed{\sqrt{x^2+y^2}} \le z \le 1+\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

17.【正解】A$=\iint_E dS = \iint_E \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy = \iint_{dxdy} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \iint_{dxdy} dxdy = \boxed{\sqrt{2}\pi}$

18.【正解】$\frac{\sqrt{3}(1-e^{4\pi})}{5}$

【解析】$\int_L ydS = \int_0^{2\pi} e^t \sin t \sqrt{(e^t\cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^{2t} \sin t dt \overset{分布积分}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^{2t} d(-\cos t)$$

$$= -\sqrt{3} e^{4\pi} + \sqrt{3} + \int_0^{2\pi} 2\sqrt{3} e^{2t} \cos t dt$$

$$\overset{再分布积分}{=} -\sqrt{3} e^{4\pi} + \sqrt{3} - \int_0^{2\pi} 4\sqrt{3} e^{2t} \sin t dt$$

所以$5\int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^{2t} \sin t dt = \sqrt{3}(1-e^{4\pi})$，

所以$\int_L ydS = \int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^{2t} \sin t dt = \frac{\sqrt{3}(1-e^{4\pi})}{5}$

P40

19.**删去** $\begin{cases} F_a = \frac{bc}{6} - \frac{2\gamma}{a^2} = 0 \\ F_b = \frac{ac}{6} - \frac{\gamma}{b^2} = 0 \\ F_a = \frac{ab}{6} - \frac{\gamma}{3c^2} = 0 \\ F_a = \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{3c} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 6, b = 3, c = 1$此解为唯一解

所求平面方程为$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + z = 1$

P41 第二题

2.最后一步 $= \iint\limits_D (\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{d}\sigma - \int_0^{\boxed{2a}} (-bx)dx = \frac{\pi a^2}{2}(\mathrm{b}-\mathrm{a}) + 2a^2 b$

2009-2010 学年第二学期期中试卷

P43

15. 【正解】$\frac{4}{3}$

【解析】$M = \iint_D \rho d\sigma = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (x+y)\, dy = \int_0^1 (2 - \boxed{2x^2}) dx = \frac{4}{3}$

18. 【正解】$\boxed{I_Z = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y \mu(x,y,z)\,(x^2+y^2) dz}$

P44

从 19 题开始题目序号错位，19 题之后的题目序号减 1

19. 【正解】$\frac{3}{32}a^4\pi$

【解析】原式 $= \iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^\pi d\theta \int_0^{\boxed{a\sin\theta}} r^2 r dr = \frac{a^4}{4}\int_0^\pi \sin^4\theta\, d\theta = \frac{3}{32}a^4\pi$

23. 【正解】$\boxed{a^2}$

【解析】$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,积分与路径无关,原式$= \int_a^0 -2y dy = \boxed{a^2}$

改正后的试卷

北京化工大学 2014-2015 学年第二学期

《高等数学 A（II）》期中考试试卷 答案 P11

一、填空题

1.已知二元函数$f(x+y,x-y)=\sin(x^2-y^2)$,则$f(x,y)=$____________

2.已知函数$z=e^{f(x^2-y^2)}$,且$x=lnt,y=t^3$,则当 t=1 时，$\frac{dz}{dt}=$____________

3.极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\frac{1-\cos(xy)}{yln(1+xy)}=$____________

4.$z=\frac{x}{y}+\sin(xy^2)$,则在（1,1）处，$dz=$____________

5.设函数$z=f(xe^y,x^2)$,其中$f(u,v)$以具有二阶连续偏导，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________

6.设$z=u\cdot v$ 而$u=e^x siny, v=cosxy$，则$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=$____________

7、设 u=x+y,v=x-y,而 z= z(x,y)具有连续偏导，则偏微分方程$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2$ 转换为以 u,v 为自变量的方程为____________

8.曲线$\begin{cases}x+y+z+z^2=0\\x+y^2+z+z^3=2\end{cases}$, 在点(-4,2,1)处的切线方程为____________

9.曲面$z=\ln(2x-y)$在点(2,3,0)处的切平面方程为____________

10.已知由方程$e^z-xyz=e-1$所确定的函数 z=z(x,y)在点(1,1)处沿方向 $\bar{d}$ 取得最大的方向导数，则与 $\bar{d}$ 同方向的单位向量为____________

11.三元函数$u=x^2+y^2+z^2$在点(1,2,3)处沿着从点(1,2,3)到点(3,4,4) 的方向导数为____________

12.二元函数$f(x,y)=x^3-y^2-3x$的极值点为____________

13.二次积分$\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$交换积分次序为____________

14.已知区域 D 表为$\{(x,y)|0\le y\le x^2, 0\le x\le 1\}$，则二重积分$\iint_D f(x,y)\,dxdy$在极坐标系下的二次积分为____________

15.设一物体由曲面$z=x^2+y^2$及$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成，则该物体所占体积为____________

16.设空间区域 Ω: $x^2+y^2\le z^2$, $x^2+y^2+z^2\le 2az$ $(a>0)$,则$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$

在柱坐标系下的三次积分表达式为____________

在球坐标系下的三次积分表达式为____________

17.设区域 D: $x^2+y^2\le ay$,则二重积分$\iint_D[x^2+y^2+x\cos(x^2y)]d\sigma=$ ____________

18.设密度为$u(x,y,z)$的空间体 Ω 由平面 z=0,z=y,y=0 及抛物柱面$y=1-x^2$所围成，则 Ω 对 z 轴的转动惯量在直角坐标系下的三次积分为____________

19.变力$\vec{F}=y\vec{i}+e^x\vec{j}$沿有向曲线 L:x=lnt,y=t 从点 t=1 处移动到点 t=2 处所作的功为____________

20.设 Γ 为曲线 x=cost,y=sint,z=2t 上相应于 t 从 1 到 0 的曲线弧，则对坐标的曲线积分

$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$化成对弧长的曲线积分为____________

21.设 L 为 y=x 上点(-1,-1)与点(1,1)间的线段，则$\int_L sin\sqrt{x^2+y^2}ds=$____________

22.设 L 是曲线 $2x=\pi y^2$ 从点(0,0)到点(π/2, -1)的弧段，则对坐标的曲线积分$\int_L (2xy^3-y^2cosx)dx+(1-2ysinx+3x^2y^2)dy=$____________

23.曲面 Σ 为抛物面$z=2-(x^2+y^2)$被柱面$x^2+y^2=a^2$所截得的有限部分，则曲面积分$\iint_\Sigma(\mathrm{xy}+\mathrm{yz}+\mathrm{zx})\,dS=$____________

24.设$(e^x siny-2y)\mathrm{dx}+(e^x cosy-2x)dy$在整个 xOy 面内是某个二元函数 u(x,y)的全微分，则 u(x,y)为____________

25.球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被圆柱面$x^2+y^2=ax$（常数 a>0）所割下部分的面积为____________

26.设曲线 L 为圆周$(x-1)^2+y^2=2$,取逆时针方向，则对坐标的曲线积分$\oint_L \frac{ydx-xdy}{2x^2+y^2}=$____________

二、解下列各题

1.(5 分)设函数 z=f(x,y)在点(1,1)处可微,且 f(1,1)=1, $\left.\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right|_{(1,1)}=2$, $\left.\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\right|_{(1,1)}=3$；已知$\psi(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{x}))$，求$\left.\frac{\mathrm{d}\psi^3(x)}{\mathrm{dx}}\right|_{\mathrm{x}=1}$。

2.(7 分) 计算曲线$\mathrm{I}=\int_L(\pi e^{2y}cos\pi x-2\pi y)dx+(2e^{2y}sin\pi x-2\pi)dy$，其中 L 为曲线$\mathrm{y}=\sqrt{2\mathrm{x}-x^2}$从(0,0)到(1,1)的弧段。

3.(7 分)设 Σ 是$x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$,试用积分性质和拉格朗日乘子法证明不等式 $\iint_\Sigma\left(x+y+z+\sqrt{3}a\right)ds\ge 12\pi a^3(\mathrm{a}>0)$成立。

2014-2015 学年第二学期期中考试试卷参考答案

一、填空题

1.【正解】$sin\,xy$

【解析】$f(x+y,x-y)=sin[(x+y)(x-y)]$，$f(x,y)=sin\,xy$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 1.1——函数的相关概念.

2.【正解】$-6e^{f(-1)}\times f'(-1)$

【解析】 $z=e^{f\left(x^2-y^2\right)}$,

$$\frac{dz}{dt}=e^{f\left(x^2-y^2\right)}\times f'(x^2-y^2)(2xx'-2yy')$$
$$=e^{f(-1)}\times f'(-1)(0-2\times 3\times 1\times 1)$$
$$=e^{f(-1)}\times f'(-1)(-6)$$
$$=-6e^{f(-1)}\times f'(-1)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 2.1——复合函数求导.

3.【正解】$\frac{3}{2}$

【解析】$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{1-\cos xy}{yln(1+xy)}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\frac{(xy)^2}{2}}{y*xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{x}{2}=\frac{3}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.1——二元函数的极限.

4.【正解】$(1+cos\,1)dx+(-1+2\,cos\,1)dy$

【解析】$z_x=\frac{1}{y}+cos(xy^2)\,y^2=1+cos\,1$，$z_y=-\frac{x}{y^2}+cos(xy^2)\,2xy=-1+2\,cos\,1$，

$dz=(1+cos\,1)dx+(-1+2\,cos\,1)dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——函数的全微分.

5.【正解】$xe^{2y}f_{11}+e^yf_1+2x^2e^yf_{12}$

【解析】 $z_x=f_1e^y+f_2 2x$

$z_{xy}=f_{11}xe^y\times e^y+f_1e^y+f_{21}xe^y\times 2x=xe^{2y}f_{11}+e^yf_1+2x^2e^yf_{12}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——函数的偏导数计算.

6.【正解】$-e$

【解析】 $z_y=\mu_y v+\mu v_y=e^x\cos y\cos(xy)-e^x\sin y\sin(xy)\times x$

$=e^x\cos y\cos(xy)-xe^x\sin y\sin(xy)=-e$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.3——复合函数求偏导

7.【正解】2

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \mu}\times\frac{\partial \mu}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \mu}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial v}$，得：$\frac{\partial z}{\partial \mu}-\frac{\partial z}{\partial v}=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——偏微分方程.

8.【正解】$\frac{x+4}{-8}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$

【解析】两曲线在 ξ 处的法线$\overrightarrow{n_1}=\{1,1,3\}$，$\overrightarrow{n_2}==\{1,4,4\}$,

切矢量：$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\{-8,-1,3\}$，所以切线：$\frac{x+4}{-8}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——空间曲线的切线方程.

9.【正解】$2x-y-z-1=0$

【解析】法线：{2,-1,-1}，切平面为：$2(x-2)-(y-3)-z=0\to 2x-y-z-1=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——空间曲面的切平面方程.

10.【正解】$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

【解析】$z_x=\frac{zy}{e^z-xy},z_y=\frac{zx}{e^z-xz}$

$z(1,1)=1$，$z_x=\frac{1}{e-1},z_y=\frac{1}{e-1},z_x=z_y\to\vec{d}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数的计算.

11.【正解】6

【解析】$(3,4,4)-(1,2,3)=(2,2,1)$

$\mu_x=2x=2,\mu_y=2y=4,\mu_z=2z=6$

$\frac{\mathrm{d}\mu}{dl}=\frac{2\times 2}{\sqrt{1+4+4}}+\frac{4\times 2}{\sqrt{1+4+4}}+\frac{6\times 1}{\sqrt{1+4+4}}=6$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数的计算.

12.【正解】$(-1,0)$

【解析】$f_x=3x^2-3=0\to x=\pm 1$，$f_y=-2y=0\to y=0$

所以点$(1,0)$与$(-1,0)$为函数的驻点

$A=f_{xx}=6x,B=f_{xy}=0,C=f_{yy}=-2$

所以在点$(1,0)$处$AC-B^2<0$，$(1,0)$不是极值点

在点$(-1,0)$处，$AC-B^2>0$，所以$(-1,0)$为函数的极值点.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——函数的极值.

13.【正解】$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)dx$

【解析】根据积分区域，改变积分顺序可得x从 0 到$\sqrt{2}$，y从曲线$y=x^2$到$x^2+y^2=2$ 所以积分为：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)dx$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.3——交换积分次序.

14.【正解】$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\frac{1}{\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——二重积分在极坐标下的计算.

15.【正解】$\frac{\pi}{6}$

【解析】 $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^{r}dz=\frac{\pi}{6}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 4.1——三重积分的应用.

16.【正解】$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$；

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\rho\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\, f(\rho sin\varphi cos\theta,\rho\sin\varphi sin\theta,\rho\cos\varphi)d\rho$$

【解析】$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$；

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\rho\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\, f(\rho sin\varphi cos\theta,\rho\sin\varphi sin\theta,\rho\cos\varphi)d\rho$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——三重积分在柱坐标和球坐标下的计算.

17.【正解】$\frac{3a^4\pi}{32}$

【解析】D:$x^2+(y-\frac{a}{2})^2\le\frac{a^2}{4}$关于 y 对轴 x 的奇函数$x\,cos(x^2y)$积分为 0

在区域 D 上：

$$\iint_D (x^2+y^2)d\sigma = \iint_D \left(x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2\right)d\sigma$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le\frac{a^2}{4}} \left(x^2+y^2+2ay+\frac{a^2}{4}\right)d\sigma = \frac{a^4\pi}{32}+0+\frac{a^4\pi}{16} = \frac{3a^4\pi}{32}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——二重积分的计算.

18.【正解】$\int_{-1}^{1}dx\int_0^{1-x^2}dy\int_0^{y}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)dz$

【解析】$\int_{-1}^{1}dx\int_0^{1-x^2}dy\int_0^{y}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)dz$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 4.1——三重积分的应用.

19.【正解】$\frac{5}{2}$

【解析】$\vec{F}\cdot\vec{l} = \int_L ydx+e^xdy = \int_L\left(t\times\frac{1}{t}+e^{lnt}\times 1\right)dt = \int_1^2(1+t)dt = (2+2)-\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分.

20.【正解】$\int[P(cost,sint,2t)(-sint)+Q(cost,sint,2t)cost+R(cost,sint,2t)\times 2]\frac{ds}{\sqrt{5}}$

【解析】$\int[P(cost,sint,2t)(-sint)+Q(cost,sint,2t)cost+R(cost,sint,2t)\times 2]dt$

由于$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{5}dt$

所以原式$=\int[P(cost,sint,2t)(-sint)+Q(cost,sint,2t)cost+R(cost,sint,2t)\times 2]\frac{ds}{\sqrt{5}}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.2——两类曲线积分的转化.

21.【正解】$2-2cos\sqrt{2}$

【解析】$\mathrm{ds}=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+(y')^2}dx$

$\int_{-1}^{1}\sin\sqrt{x^2+x^2}\sqrt{1+1}dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}|x|dx=2\int_0^1\sqrt{2}\sin\sqrt{2}xdx=2-2cos\sqrt{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——对弧长的曲线积分.

22.【正解】$-2-\frac{\pi^2}{4}$

【解析】$\mathrm{Q}_x-\mathrm{P}_y=-2ycosx+6xy^2-(6xy^2-2ycosx)=0$

原式=$0-(\int_{L_1}Pdx+Qdy+\int_{L_2}Pdx+Qdy)$

$L_1\left(\frac{\pi}{2},-1\right)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)$　L_2：$\left(\frac{\pi}{2},0\right)(0,0)$　（L_1，L_2均为直线）

$\int_{L_1}Pdx+Qdy=\int_{-1}^{0}\left(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2\right)dy=2+\frac{\pi^2}{4}$，　$\int_{L_2}0dy=0$

所以原式=$-2-\frac{\pi^2}{4}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——积分与路径无关的条件.

23.【正解】0

【解析】对称性：原式=0

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.3——曲面积分的对称性

24.【正解】$e^xsiny-2xy$

【解析】令$P=e^x\sin y-2y, Q=e^x\cos y-2x$，依题意$\frac{\partial u}{\partial x}=P,\frac{\partial u}{\partial y}=Q$

所以$u(x,y)=e^x\sin y-2yx$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 3.1——格林公式的应用.

25.【正解】$2a^2(\pi-2)$

【解析】$S=\iint_S ds=\iint_D\sqrt{(z_x)^2+(z_y)^2+1}\,dxdy$

其中$z_x=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$　$z_y=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$\sqrt{(z_x)^2+(z_y)^2+1}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$D:(x-\frac{a}{2})^2+y^2\le\frac{a^2}{4}$

所以 $S=2\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a-r^2}}rdr$$

$$=2a^2(\pi-2)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1——二重积分的应用

26.【正解】$-\sqrt{2}\pi$

【解析】由于$Q_x=P_y$，且（0,0）在圆内，作$2x^2+y^2=1$，

原式$=\oint_L ydx-xdy=\iint_D(-1-1)dxdy=-2*\pi*\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分的计算.

二、解下列各题

1.【解析】$f(1,1)=1$，$f_x|_{(1,1)}=2$，$f_y|_{(1,1)}=3$

$$\varphi(x)=f(x,f(x,x)),\qquad \varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$$

$$\frac{d\varphi^3(x)}{dx}=3\varphi^2(x)\varphi'(x)=3[\ f_1+\ f_2(\ f_1+f_2)]$$

$$=3*[2+3*(2+3)]=51$$

$\varphi'(x)=\ f_1+\ f_2(\ f_1+f_2)$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——函数的微分.

2.【解析】$\int_L(\pi e^{2y}cos\pi x-2\pi y)dx+(2e^{2y}sin\pi x-2\pi)dy$

L: $y^2=2X-x^2$　　$(0,0)\to(1,1)$

$Q_x=2\pi e^{2y}cos\pi x$　　$P_y=2\pi e^{2y}cos\pi x-2\pi$　　顺时针

补 L_1，L_2:　L_1:（1,1）→（1,0）　　L_2:（1,0）→（0,0）

原式$=-\iint_D(Q_x-P_y)dxdy-\int_{l_1}-\int_{l_2}$

$$=-\frac{\pi}{4}\times2\pi-\int_1^0(-2\pi)dy-\int_1^0(\pi\cos\pi x)dx=-\frac{\pi^2}{2}-2\pi$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分.

3.【解析】　$x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$

$\to(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$(球心为（$a,a,a$）的球面)

原不等式左边$=\bar{x}S+\bar{y}S+\bar{z}S+\sqrt{3}aS$

$=a*4\pi a^2+a*4\pi a^2+a*4\pi a^2+\sqrt{3}a*4\pi a^2$

$=12\pi a^3+4\sqrt{3}a^3\pi>12\pi a^3$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.2——积分的性质，拉格朗日乘子法.

北京化工大学 2012-2013 学年第二学期

《高等数学 A（II）》期中考试试卷

答案 P17

一、填空题(3 分×26=78 分)

1. 函数 z=$\frac{2^{xy}}{\sqrt{x}+arcsiny}$的定义域为____________.

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0.5,0)}\frac{\ln[1+\sin(x^2y)]}{y}$=____________.

3. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$=____________.

4. 设 z=$(xy)^{x+y}$,则 dz|（1，1）=____________.

5. 设 z=f(x,$\frac{x}{y}$),f 具有二阶连续偏导数，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$=____________.

6. 曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在（1，-1,0）点的切线方程为______________.法平面方程为____________.

7. 由方程 x+y^2+$z^3+\ln\mu-3\mu=0$确定的隐函数μ(x, y, z)在(1,1,1)处，沿着该点(1,1,1)到原点（0,0,0）的方向的方向导数为____________________； μ(x, y, z)在(1,1,1)处取得最大方向导数的方向为____________.

8. 函数 z=$x^2(2+y^2)$+yln$\,y$在（x,y）为__________处取得极值____________.

9. 设二重积分区域 D 是顶点分别为（0,0）， (π, 0) ， (π, π)所围成的三角形闭区域，则$\iint_D x\cos(x+y)d\sigma$=____________.

10. 将二重积分$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$改换次序积分，应为____________.

11. 设平面薄板所占的闭区城 D 由$x^2+y^2=2x$ 所围，它的面密度ρ(x,y)= x^2+y^2 ,则该薄板的质量为____________.

12. 设空间闭区域Ω: $x^2+y^2\le z^2$, $x^2+y^2+z^2\le 2az(a>0)$,则$\iiint_\Omega f$ (x, y, z)dxdydz 在柱面坐标系下的三次积分为____________.

13. 设空间闭区域Ω:-I≪x≪1,0≪y≪1,0≪z≪1,则$\iiint_\Omega\left(e^{y^2}sinx^3+2\right)dv=$____________.

14. 设Ω由曲面 z=x^2+y^2及 z=$\sqrt{2-x^2-y^2}$ 围成的闭区域，则$\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)dv$在球面坐标系下的三重积分为____________.

15. 设空间闭区城Ω 由 z=$\sqrt{x^2+y^2}$ 及 z=4 所围成。则$\iiint_\Omega f(x+y+z)dv$在直角坐标系下的三重积分为____________.

16. 曲面$x^2=y^2+z^2$包含在$x^2+y^2+z^2$=2z 内的面积为____________.

17. 设 L 为摆线 x=a(t-sint),y=a(1-cost), 从点(0,0)到(2πa,0)一段有向弧，则$\int_L y$dx+ady=____________.

18. 设 L 为螺线 x=acost,y=asint,z=at(0 ≤ t ≤ 2π)的一段弧，则对弧长的曲线积分

$\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}ds$=____________.

19. 质点在力场$\vec{F}$=(x+y)$\vec{i}$+(x-y)$\vec{j}$ 的作用下沿曲线 L :y=$\sqrt{a^2-x^2}$,x:a→0, 所作的功为____________.

20. 已知函数 u= u(x,y)的全微分是 du=(2xcosy+y^2cosx)dx+(2ysinx- x^2siny)dy,则函数 u(x,y)的表达式为____________.

21. 设曲线 L 是从点 A($\frac{\pi}{2}$,1）沿曲线 y=sinx 到原点(0,0)的一段有向弧，则对坐标的曲线积分 **I**=$\int_L P(x,y)dx$+Q(x,y)dy 化成对弧长的曲线积分为____________.

22. 设$\sum=${(x,y,z)|x+y+z=1,x$\gg 0, y\gg 0, z\gg 0$},则$\iint_\Sigma y^2 dS=$____________.

23. 设锥面 z=$\sqrt{x^2+y^2}$(0≪z≪a)上每点的面密度为该点到 z 轴距离的平方，则该球面的质量为

____________.

二、解下列各题

1.(7 分) 讨论$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|^3}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) & x^2+y^2 \neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0) 处的连续性、偏导性。

2.(8 分) 设均匀平面薄板 D 由$x^2\leqslant y\leqslant 1$确定，其面密度为$\mu$ ，

(1) 求该薄板的质心;

(2) 该薄板关于 x 轴的转动惯量。

3. (7 分) 求经过点$(2,1,3)$的所有平面中,哪一个平面与坐标平面所围成的四面体体积最小，并求其最小值。

2012-2013 学年第二学期期中考试试卷参考答案

一、填空题(3 分×26=78 分)

1.【正解】D={（x,y）|$x\geq 0, -1\leq y\leq 1, \sqrt{x}$+arcsiny$\neq 0$}

【解析】D={（x,y）|$x\geq 0, -1\leq y\leq 1, \sqrt{x}$+arcsiny$\neq 0$}

【考点延伸】《考试宝典》专题一 1.2——函数定义域的计算.

2.【正解】0.25

【解析】原式=$\lim\limits_{(x,y)\to(0.5,0)}\frac{\sin(x^2y)}{y}=\lim\limits_{(x,y)\to(0.5,0)}\frac{x^2y}{y}$=0.25

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.1——二元极限的计算.

3.【正解】$\frac{1}{6}$

【解析】设 z=$\sqrt{x^2+y^2}$,则$(x,y)\to(0,0)$时 $z\to 0$,

原式=$\lim\limits_{z\to 0}\frac{z-\sin z}{z^3}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{1-cosz}{3z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\frac{1}{2}z^2}{3z^2}=\frac{1}{6}$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 2.1——换元法求极限，洛必达法则.

4.【正解】$2dx+2dy$

【解析】$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\frac{d}{dx}x^{x+1}\Big|_{x=1}$,$\frac{\partial x^{x+1}}{\partial x}=(x+1)x^x+x^{x+1}\ln x$，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$

同理 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=2$，$dz\big|_{(1,1)}=2dx+2dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——函数的全微分.

5.【正解】$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f_2''-\frac{x}{y^2}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_2'$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}f_2'\right)=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$，

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{21}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——复合函数求偏导.

6.【正解】$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}$; x+y-2z=0

【解析】球面法向量为(2,-2,0),平面法向量为{1,1,1}

切向量为$\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$=(-2,-2,4)=-2(1,1,-2)，切线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-2}$

法平面方程为 1(x-1)+1(y+1)-2(z-0)=0

即 x+y-2z=0

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——空间曲线的切线方程.

7.【正解】-$\sqrt{3}$

【解析】$\mu(1,1,1)=1$，$1+\left(\frac{1}{\mu}-3\right)\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$，$\mu x(1,1,1)=\frac{1}{2}$

$2y+\left(\frac{1}{\mu}-3\right)\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$，$\mu y(1,1,1)=1$，同理，$\mu z(1,1,1)=\frac{3}{2}$

该点到原点方向为(-1，-1，-1)，方向余弦为$-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}$，

方向导数为$-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}\right)=-\sqrt{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数的计算.

8.【正解】$\left(0,\frac{1}{e}\right)$； $-\frac{1}{e}$

【解析】（1）由一阶导数=0 联立，求解函数的所有驻点.

由$f'_x(x,y)=2x(2+y^2)=0$，$f'_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0$，可得$x=0,y=\frac{1}{e}$

（2）利用二元函数极值的判断定理，判断点 $(0,\frac{1}{e})$是否为极值点.

由于$f''_{xx}=2(2+y^2)$，$f''_{yy}=2x^2+\frac{1}{y}$，$f''_{xy}=4xy$，将$x=0,y=\frac{1}{e}$带入可得，

$f''_{xx}\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=2\left(2+\frac{1}{e^2}\right)$，$f''_{xy}\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=0$，$f''_{yy}\Big|_{\left(0,\frac{1}{e}\right)}=e$

因为$f''_{xx}>0$而$(f''_{xy})^2-f''_{xx}f''_{yy}<0$，故点$\left(0,\frac{1}{e}\right)$为函数的极小值点.

从而，二元函数存在极小值$f\left(0,\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——函数的极值.

9.【正解】$-\frac{3}{2}\pi$

【解析】∬xcos(x+y)dxdy
=[0,π]∫xdx∫[0,x]cos(x+y)d(x+y)
=[0,π]∫xdx[sin(x+y)]｜[0,x]
①式 =[0,π]∫x(sin2x-sinx)dx
=[0,π][∫xsin2xdx-∫xsinxdx]
=[0,π][-(1/2)∫xd(cos2x)+∫xd(cosx)]
②式 =[0,π]{-(1/2)[xcos2x-∫cos2xdx]+[xcosx-∫cosxdx]}
=[0,π]{-(1/2)[xcos2x-(1/2)sin2x]+[xcosx-sinx]}
=[0,π]{-(1/2)xcos2x+(1/4)sin2x+xcosx-sinx}
=-(1/2)π-π
=-(3/2)π

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——二重积分的应用.

10.【正解】$\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

【解析】$D:\begin{cases}2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}\\1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，

由$y=2-x$得$x=2-y$，由$y=\sqrt{2x-x^2}$得$x=1+\sqrt{1-y^2}$

$$D:\begin{cases}2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2}\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}，原式=\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.3——交换积分次序.

11.【正解】$\frac{3\pi}{2}$

【解析】在极坐标下可表示为$\begin{cases}0\le r\le 2cos\theta\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$$\mathrm{M}=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{dxdy}=\iint_D r^2\cdot rdrd\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2cos\theta}\mathrm{r}^3\mathrm{dr}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\cdot cos^4\theta d\theta$$
$$=8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——二重积分的应用.

12.【正解】$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\mathrm{dr}\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}f(\mathrm{rcos\theta,rsin\theta,z})\mathrm{dz}$

【解析】$\Omega=\begin{cases}r\le z\le a+\sqrt{a^2-r^2}\\0\le r\le a\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

三重积分为$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\mathrm{dr}\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}f(\mathrm{rcos\theta,rsin\theta,z})\mathrm{dz}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——三重积分在柱坐标系下的计算.

13.【正解】4

【解析】$\mathrm{e}^{y^2}sinx^3$是关于 x 是奇函数，Ω 是关于 x=0 的对称区域，所以$\iiint_\Omega\left(\mathrm{e}^{y^2}sinx^3\right)dv=0$

原式$=\iiint_\Omega\left(\mathrm{e}^{y^2}sinx^3\right)dv+2\iiint_\Omega dv=0+4=4$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——三重积分的计算.

14.【正解】$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}f(r^2)r^2\mathrm{dr}+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{cos\varphi}{sin^2\varphi}}f(r^2)r^2\mathrm{dr}$

【解析】Ω=Ω1∪Ω2 , $\Omega1=\begin{cases}0\le r\le\sqrt{2}\\0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$ $\Omega2=\begin{cases}0\le r\le\frac{cos\varphi}{sin^2\varphi}\\\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

所求三重积分$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}f(r^2)r^2\mathrm{dr}+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{cos\varphi}{sin^2\varphi}}f(r^2)r^2\mathrm{dr}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——三重积分在球坐标系下的计算.

15.【正解】 $\int_{-4}^4 dx\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 f(x+y+z)dz$

【解析】$\Omega=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4\\-\sqrt{16-x^2}\le y\le\sqrt{16-x^2}\\-4\le x\le 4\end{cases}$

$$\int_{-4}^4 dx\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 f(x+y+z)dz$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——三重积分在直角坐标系下的计算.

16.【正解】$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

【解析】消去 x,得在 yOz 面的投影：$z^2+y^2\le\mathrm{z}$ 在坐标变换$\begin{cases}y=rcos\theta\\z=rsin\theta\end{cases}$下，D：$\begin{cases}0\le r\le sin\theta\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$

$x=\pm\sqrt{z^2+y^2}$,$dS=\sqrt{1+xy^2+xz^2}dydz=\sqrt{2}dydz$ $2\sqrt{2}\iint_D dydz=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$（前后对称两片)

【考点延伸】《考试宝典》专题九 4.1——重积分的应用.

17.【正解】$3\pi a^2$

【解析】原式$=\int_0^{2\pi}[a^2(1-cost)^2+a^2sint]dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2cost+sint+\frac{1+cos2t}{2})dt$

$=a^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}cos2t\right]dt=3\pi a^2$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分.

18.【正解】$\frac{8\sqrt{2}a\pi^3}{3}$

【解析】$ds=\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\ dt=\sqrt{2}adt$， $\int_L\frac{z^2}{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}\frac{a^2t^2}{a^2}\cdot\sqrt{2}adt=\frac{8\sqrt{2}a\pi^3}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——对弧长的曲线积分.

19.【正解】$-a^2$

【解析】$\frac{\partial(x-y)}{\partial x}=1=\frac{\partial(x+y)}{\partial x}$,与路径无关，

改由直线段$x=a-t,y=t,t=0\to a$积分 。

原式$=\int_0^a[a(-1)+(a-2t)]dt=-a^2$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——曲线积分的应用.

20.【正解】$u(x,y)=x^2\cos y+y^2\sin x$

【解析】$\frac{du}{dx}=2x\cos y+y^2\cos x\cdots(1)$，$\frac{du}{dy}=2y\sin x+x^2\sin y\cdots(2)$

对（1）的x积分得$u=x^2\cos y+y^2\sin x\cdots(3)$

对（2）的y积分得$u=x^2\cos y+y^2\sin x\cdots(4)$

3 式与 4 式相等，所以$u=x^2\cos y+y^2\sin x\cdots(4)$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——函数的全微分.

21.【正解】$\int_L\frac{-P(x,y)-cosxQ(x,y)}{\sqrt{1+cos^2x}}ds$

【解析】曲线的切向量为-（1，cosx）;方向余弦为$-\frac{1}{\sqrt{1+cos^2x}}--\frac{cosx}{\sqrt{1+cos^2x}}$

对弧长的曲线积分为$\int_L\frac{-P(x,y)-cosxQ(x,y)}{\sqrt{1+cos^2x}}ds$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.2——两类曲线积分的转化.

22.【正解】$\frac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ =\sqrt{3}$

原式$=\sqrt{3}\int_0^1dx\int_0^{1-x}y^2dy=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{12}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——对曲面的积分.

23.【正解】$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^4$

【解析】记锥面为∑，则质量为 $M=\iint_L(x^2+y^2)dS$

$M=\sqrt{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^4$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——二重积分的应用.

二、解下列各题

1、【解析】$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}(x^2+y^2)=0=f(0,0)$

f(x,y)在 f(0,0)处连续， $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(y,0)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$ ，f(x,y)在点（0,0）处的两个偏导数都存在且都为 0。

【考点延伸】《考试宝典》专题二 1.2——函数的连续性与偏导数存在定理.

2、【解析】由对称性，$x=0$，$\iint_D \mu d\sigma=\mu\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\ =\mu\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}\mu$

$$\iint_D \mu y d\sigma=\mu\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}ydy\ =\frac{\mu}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx=\frac{4}{5}\mu$$

得$y=\frac{3}{5}$，所以薄板质心为（0，$\frac{3}{5}$）

$$I=\mu\iint_D y^2 d\sigma=\ \mu\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}y^2dy\ =\frac{\mu}{3}\int_{-1}^{1}(1-x^6)dx=\frac{4}{7}\mu$$

薄板关于 x 轴的转动惯量为$\frac{4}{7}\mu$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1——二重积分的应用.

3、【解析】设平面为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，则$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}=1$，四面体的体积为$\frac{abc}{6}$.

设$F(a,b,c,\gamma)=abc+\lambda\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}-1\right)$,

$$\begin{cases} F'_a=bc-\dfrac{2\lambda}{a^2}=0 \\ F'_b=ac-\dfrac{\lambda}{b^2}=0 \\ F'_c=ab-\dfrac{3\lambda}{c^2}=0 \\ F'_\lambda=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{3}{c}-1=0 \end{cases}$$

得到$\gamma=\frac{a^2bc}{2}=ab^2c=\frac{abc^2}{3}$，即$\frac{a}{2}=b=\frac{c}{3}$，代入$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{3}{c}-1=0$，

解得$b=3$，则$a=6,c=9$，由实际意义，此时四面体面积为最小值，

所求平面为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{9}=1$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——函数的极值，条件极值.

北京化工大学 2011-2012 学年第二学期

《高等数学 A（II）》期中考试试卷 答案 P24

一、填空题(3 分*26=78 分)

I.函数$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 的定义域__________.

2.极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}\right)^{n}$ =_____________.

3.设 u=$x^{\frac{y}{z}}$、则 du(e，1,1)____________.

4.设$x+y+z-e^{x+y+z}$=0 确定隐函数 z=f(x,y),则$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$=___________.

5.设 z=f(u,x,y),u=xe^{y},则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.=_____________

6. 设方程组$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$确定的函数之一为 z=z(x)，则$\frac{dz}{dx}$ =____________.

7. 曲线$x=e^{t}$,y=t-cost;$z=t^2$在对应于 t=0 的点处的

切线方程为________________法平面方程为_________________

8.求扇面$z=xy$上一点 M______________使该处的法线垂直于平面 x+3y-z+9=0。

9.函数 z=xe^{2y}在点 P(1,0)处的方向导数取最大值的方向为___________该最大值为

____

10.设 x=$e^{u}\cos v$, y=$e^{u}\sin v$, Z=uv，则$\frac{\partial z}{\partial y}$=______________.

I1.交换积分顺序$\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x,y)dx$ =_____________.

12.设 D 由曲线 y=x, y=x^2所围成的闭区域，则$\iint_D xydxdy$________.

13.设 D={(x,y)|$x^2+y^2<2x$),则$\iint_D x^2y+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ =___________.

14.设Ω由$x^2+y^2=2z$与$z=2$围成的空间区域，则$\iiint_\Omega(x^2+y^2)\,dv$ =____________.

15.设 D= {(x,y)| $x^2+y^2\le 3$ }.计算$\iint_D|x^2+y^2-\mathbf{2}|$dxdy =___________.

16.设Ω由曲面$x^2+y^2+(z-1)^2=1$与 z=$\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成并包含 z 轴的闭区域，将三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$

化成直角坐标系下的三重积分为_____________

化成柱坐标系下的三重积分为______________

化成球坐标系下的三重积分为______________

17.锥面 z=$\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在柱体 $x\ ^2+y^2<2x$ 内部分的面积的计算公式和结果为____________

18.设曲线 L:x=$e^{\mathrm{t}}\cos t$, y=$e^{\mathrm{t}}\sin t$, z=e^{t}, 0≤ t ≤ 2π计算$\int_L$ ydS=.______________.

19.质点在力场$\vec{F}=(x+y)\vec{\imath}+(x-y)\vec{\jmath}$中沿曲线$L$:$y=\sqrt{a^2-x^2}$从$x=a$移动到$x=0$所作的功为___________.

20.设 L 为 y=$x\ ^2$从点(1,1)到点(0,0)的一段有向弧,将 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化成第--类曲线积分的形式为_________________.

21.设在 xOy 面内有 du(x,y)=(x+sin y)dx+(xcos y+y)dy,

则 u(x,y)=_______________;

22.设 E 是锥面 z=$\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 z=1 所围成区域的整个边界曲面，

则$\oiint_E x^2+y^2$dS=________________.

二、解下列各题

1.已知函数 y=y(x)出方程 y- x$e^{\mathrm{y}-1}=1$所确定，设 z=f(ln y-sin x),其中 f(u)具有二阶导数，且 f''(0)=1。求$\frac{\partial z}{\partial y}|_{x=0}$.

2.求曲线积分$\int_L[e^{\mathrm{x}}\sin y-b(x+y)]dx+[e^{\mathrm{x}}\cos y-ax]dy$,其中 a, b 为正的常数，L 为从点(2a,0)沿曲线 y=$\sqrt{2ax-x^2}$ 到点(0,0}的弧。

3.求过点$\left(2,1,\frac{1}{3}\right)$的平面，使该平面在第-卦限内与三个坐标面所围成的四面体的体积最小。

2011-2012 学年第二学期期中考试试卷参考答案

一、填空题（3*26=78 分）

1.【正解】$\{(x,y)|y\geqslant 0,x\geqslant\sqrt{y}\}$

【解析】函数$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 的定义域$\{(x,y)|y\geqslant 0,x\geqslant\sqrt{y}\}$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 1.2——函数定义域的计算.

2.【正解】2

【解析】极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{\mathrm{xy}}{\sqrt{\mathrm{xy}+1}-1}\right)^n=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{\mathrm{xy}}{\sqrt{\mathrm{xy}+1}-1}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{\mathrm{xy}(\sqrt{\mathrm{xy}+1}+1)}{\mathrm{xy}}\right)=2$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.1——二元极限的计算.

3.【正解】$dx+edy-edz$

【解析】$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$ ，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$

所以$\frac{\partial u}{\partial x}|_{(e,1,1)}=1$，$\frac{\partial u}{\partial y}|_{(e,1,1)}=e$，$\frac{\partial u}{\partial z}|_{(e,1,1)}=-e$，则 $\mathrm{du}=\mathrm{dx}+\mathrm{edy}-\mathrm{edz}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——函数的全微分.

4.【正解】-2

【解析】$1+\frac{\partial z}{\partial x}-e^{x+y+z}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$　　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{x+y+z}-1}{1-e^{x+y+z}}=-1$

$1+\frac{\partial z}{\partial y}-e^{x+y+z}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$　　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{x+y+z}-1}{1-e^{x+y+z}}=-1$　　$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-2$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.3——隐函数求偏导.

5.【正解】$e^{y}\cdot f_1'+f_{11}''\cdot \mathrm{x}e^{2y}+e^{y}\cdot f_{13}''+f_{21}''\cdot \mathrm{x}e^{y}+f_{23}''$

【解析】$e^{y}\cdot f_1'+e^{y}(f_{11}''\cdot \mathrm{x}e^{y}+f_{13}'')+f_{21}''\cdot \mathrm{x}e^{y}+f_{23}''$

$$=e^{y}\cdot f_1'+f_{11}''\cdot \mathrm{x}e^{2y}+e^{y}\cdot f_{13}''+f_{21}''\cdot \mathrm{x}e^{y}+f_{23}''$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.3——复合函数求偏导.

6.【正解】$\frac{-2x}{1+4(x^2+2y^2)}$

【解析】$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}2x & -4y\\ -2x & 2y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -4y\\ 2z & 2y\end{vmatrix}}=\frac{-2xy}{y+4yz}=\frac{-2x}{1+4(x^2+2y^2)}$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.3——隐函数求导.

7.【正解】$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0}$; x + y=0

【解析】$\frac{dx}{dt}=e^{t},\frac{dy}{dt}=1+\sin t,\frac{dz}{dt}=2t$

T=0 处的切向量为（1，1，0），切点为(1,-1,0)

切线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$，法平面方程为(x-1)+(y+1)+0$\cdot z=0$，即 x + y=0

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——曲线的切线与法平面方程.

8.【正解】M（3,1,3）

【解析】F = z − xy,　　$F_x=-y$,　　$F_y=-x$,　　$F_z=1$,

平面的法向量为（1,3，-1），$\frac{-y}{1}=\frac{-x}{3}=\frac{1}{-1}$，x=3,y=1,z=3，即 M（3,1,3）。

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——空间曲面的法线.

9.【正解】（1,2）；$\sqrt{5}$

因为$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2y}$,　　$\frac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}=1$,　　$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,0)}=2$

方向为（1,2），最大值为$\sqrt{5}$。

【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数的计算.

10.【正解】$e^u sinv$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}$,

$\begin{cases}0=e^u cosv\frac{\partial u}{\partial y}-e^u sinv\frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial y}=e^u cosv\\ 1=e^u sinv\frac{\partial u}{\partial y}+e^u cosv\frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial z}{\partial y}=e^{-u}(vsinv+ucosv)\end{cases}$，所以$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}0 & -e^u sinv\\ 1 & e^u cosv\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^u cosv & -e^u sinv\\ e^u sinv & e^u cosv\end{vmatrix}}=$ $e^u sinv$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——偏导数的计算.

11.【正解】$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$

【考点延伸】《考试宝典》专题四 2.2——交换积分次序.

12.【正解】$\frac{1}{24}$

【解析】原式=$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xydy=\int_0^1\frac{1}{2}(x^2-x^3)dx=\frac{1}{24}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1——二重积分的计算.

13.【正解】4

【解析】原式=$\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2cos\theta}\frac{1}{r}\cdot rdr=4$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——二重积分的计算.

14.【正解】$\frac{16}{3}\pi$

【解析】Ω: $0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 2, \frac{\rho^2}{2}<\mathrm{z}<2$，原式=$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{2}\rho^3dz=\frac{16}{3}\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——三重积分在球坐标系下的计算.

15.【正解】$\frac{5\pi}{2}$

【解析】原式=$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(r^2-2)rdr=\frac{5\pi}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——利用极坐标计算二重积分.

16.【正解】$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}f(x,y,z)dz$；

$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{1+\sqrt{1-r^2}}f(rcos\ \theta,rsin\ \theta,z)dz$；

$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}sin\ \psi d\psi\int_0^{2\cos\psi}f(rcos\ \theta sin\ \psi,rsin\ \theta sin\ \psi,rcos\ \theta)r^2dr$

【解析】$\begin{cases}x^2+y^2+(z-1)^2=1\\ \mathrm{z}=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}\Longrightarrow z=1, Dxy: x^2+y^2\le 1$；

$$\Omega:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\end{cases}$$

直：$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}f(x,y,z)dz$；$\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le 1\\ r\le z\le 1+\sqrt{1-r^2}\end{cases}$

柱：$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{1+\sqrt{1-r^2}}f(rcos\ \theta,rsin\ \theta,z)dz$；

$$x^2+y^2+z^2-2z+1=1\Longrightarrow r=2\cos\psi$$

球：$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}sin\ \psi d\psi\int_0^{2\cos\psi}f(rcos\ \theta sin\ \psi,rsin\ \theta sin\ \psi,rcos\ \theta)r^2dr$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——三重积分的几种计算方法.

17.【正解】A=$\iint_E dS = \iint_E \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy = \iint_{dxdy} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \iint_{dxdy} dxdy = \sqrt{2}\pi$

【解析】 $\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}$=$\sqrt{2}$

A=$\iint_E dS = \iint_E \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy = \iint_{dxdy} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \iint_{dxdy} dxdy =$ $\sqrt{2}\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——二重积分的计算.

18.【正解】 $\frac{\sqrt{3}(1-e^{4\pi})}{5}$

【解析】 $\int_L ydS = \int_0^{2\pi} e^t \sin t \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^{2t} \sin t dt \overset{分布积分}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^{2t} d(-\cos t)$$

$$= -\sqrt{3} e^{4\pi} + \sqrt{3} + \int_0^{2\pi} 2\sqrt{3} e^{2t} \cos t dt$$

$$\overset{再分布积分}{=} -\sqrt{3} e^{4\pi} + \sqrt{3} - \int_0^{2\pi} 4\sqrt{3} e^{2t} \sin t dt$$

所以$5\int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^{2t} \sin t dt = \sqrt{3}(1-e^{4\pi})$，

所以$\int_L ydS = \int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^{2t} \sin t dt = \frac{\sqrt{3}(1-e^{4\pi})}{5}$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——对弧线的曲线积分.

19.【解析】W=$\int (x+y)dx + (x-y)dy$，P=x + y, Q=x-y,$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y}$ ，

积分与路径无关，选路径 L1:y=0,x:a$\longrightarrow 0$, y: $0 \longrightarrow$ a，W=$\int_a^0 xdx + \int_0^a -ydy = -a^2$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——积分与路径无关的条件.

20.【解析】法一：曲线的切向量为$\pm$(1,2x),所求的方向余弦为$(\frac{-1}{\sqrt{1+4x^2}}, \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2}})$

对弧长的曲线积分$\int_L \frac{-P(x,y) - 2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}} ds$

法二：$\frac{dx}{ds}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\frac{dy}{ds}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$，所求的方向余弦为$(\frac{-1}{\sqrt{1+4x^2}},\frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2}})$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.2——两类曲线积分的转化.

21. 【解析】$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=cosy$，$u(x,y)=\int_0^x xdx+\int_0^y(xcosy+y)dy=\frac{1}{2}x^2+xsiny+\frac{1}{2}y^2$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——函数的全微分.

22.【解析】$\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}, dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$；

$\Sigma_2: z=1, \mathrm{dS}=\mathrm{dxdy}$ $\quad D_{xy}:\ x^2+y^2\le 1$

$$\iint_\Sigma x^2+y^2dS=\iint_{\Sigma_1} x^2+y^2dS+\iint_{\Sigma_2} x^2+y^2dS$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{2}r^2rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}r^2rdr=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 4.1——曲面积分.

二、解答下列各题（3*3=9 分）

1.【解析】 $\frac{dz}{dx}=f'(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}-cosx)$ $\qquad \frac{dy}{dx}-\left(e^{y-1}+xe^{y-1}\frac{dy}{dx}\right)=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{y-1}}{1-xe^{y-1}}$， $\quad x=0$时，y=1, $\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0}=1$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{x=0}=\mathrm{f}'(\ln 1-\sin 0)(1-\cos 0)=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 4.1——复合函数求导.

2.【解析】 $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x cosy-b$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x cosy-a$

添加曲线 L_1：y=0，x:0→2a, L, L_1 围成的区域记为 D，利用格林公式，

原式=$\int_{L+L_1} \quad -\int_{L_1} \quad)[e^{\mathrm{x}}\sin y-b(x+y)]dx+[e^{\mathrm{x}}\cos y-ax]dy$

$$=\iint_D(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{d}\sigma-\int_0^{2a}(-bx)dx=\frac{\pi a^2}{2}(\mathrm{b}-\mathrm{a})+2a^2b$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分.

3.【解析】设平面为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，则$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}=1$，四面体的体积为$\frac{abc}{6}$.

设$F(a,b,c,\gamma)=abc+\lambda\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}-1\right)$,

$$\begin{cases} F'_a = bc - \dfrac{2\lambda}{a^2} = 0 \\ F'_b = ac - \dfrac{\lambda}{b^2} = 0 \\ F'_c = ab - \dfrac{\lambda}{3c^2} = 0 \\ F'_\lambda = \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{3c} - 1 = 0 \end{cases}$$

得到$\gamma = \dfrac{a^2bc}{2} = ab^2c = 3abc^2$，即$\dfrac{a}{2} = b = 3c$，代入$\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{3c} - 1 = 0$，解得$b = 3$，则$a = 6, c = 1$，由实际意义，此时四面体面积为最小值，

所求平面为 $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} + z = 1$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——条件极值的应用.

北京化工大学 2009-2010 学年第二学期

《高等数学 A（II）》期中考试试卷 答案 P32

一、 填空题

1. 已知二元函数$f(x,y) = x \cdot y$，则 $f\left(\frac{x}{y}, f(x,y)\right) =$______________。
2. 函数 $z = ln(x-y) + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域为______________。
3. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{1-\cos(xy)}{x \cdot \sin(xy)} =$______________。
4. 设二元函数$f(x,y)$在点(a,b)处的偏导数存在，则$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x} =$______________。
5. 设$u = x^{\frac{z}{y}}$，则$du =$______________。
6. 设函数$z = f(xy, x^2)$，$f(u,v)$具有二阶连续偏导，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$______________。
7. 设$z = u \cdot v$，而$\begin{cases} x = e^u + \sin v \\ y = e^u - \cos v \end{cases}$，则$\frac{\partial z}{\partial y} =$______________。
8. 曲线$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$在点(1,1,2)处的切线方程为______________。
9. 曲面$z = e^{x-2y}$在点(2,1,1)处的切平面方程为______________。
10. 使函数$z = 5 - x^2 - 2y^2$，在点$\left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{3}{4}\right)$处的方向导数取得最大值的方向______________。
11. $z = x^2 + y^2$在点(1,2)处沿着从点(1,2)到点$(2, 2+\sqrt{3})$的方向导数为______________。
12. 函数$f(x,y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$在点$(1.-1)$处取得极值，则常数$a =$______________。
13. 交换二重积分的顺序，$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx =$______________。
14. 设二重积分的区域$D = \{(x,y)|0 \le y \le 1-x, 0 \le x \le 1\}$，二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy$在极

坐标系下的二重积分为________________。

15. 设平面薄板所占的闭面域D为由直线$x+y=2, y=x, x=0$，，所围，其面密度为$\rho(x,y)=x+y$，则该平面薄板的质量为________________。（不计单位）
16. 设空间区域$\Omega: x^2+y^2\le z^2,\ x^2+y^2+z^2\le 2az\ (a>0)$，则三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$在柱坐标系下的三重积分表达式为______________，在球坐标系下三重积分表达式为______________。
17. 球面$x^2+y^2+z^2=a^2$被圆柱面$x^2+y^2=ax$（常数$a>0$）所割下的那一部分面积为____________。
18. 设密度为$\mu(x,y,z)$的空间体Ω由平面$z=0, z=y, y=1$及抛物柱面$y=x^2$所围成，则Ω对z轴的转动惯量表作直角坐标系下的三重积分为________。
19. 设二重积分域$D: x^2+y^2\le ay$，则二重积分$\iint_D[\arcsin(xy^2)+x^2+y^2]d\sigma=$__________。
20. 变力$\vec{F}=y\vec{i}+x\vec{j}$沿有向曲线$L: x=R\cos t, y=R\sin t$从点$t=0$移动到点$t=\frac{\pi}{2}$所做功为____________。
21. 设Γ为曲线$x=t, y=t^2, z=t^3$上相应于t从0到1的曲线弧，则对坐标的曲线积分$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$化成对弧长的曲线积分为____________。
22. 设L为直线$y=x$上点$(-1,-1)$和点$(1,1)$之间的线段，则$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$____________。
23. 设L是沿曲线$x^2+y^2=a^2$从点$(0.a)$到点$(a,0)$的弧段，则$\int_L(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy=$__________。
24. 设曲面Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=a^2$所截得的有限部分，则$\iint_\Sigma(xy+yz+zx)dS=$____________。
25. 设曲面Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$外侧在$x\ge 0, y\ge 0$的部分，则$\iint_\Sigma -3z(x^2+y^2)dxdy=$______________。
26. 设曲面Σ为抛物面$z=8-x^2-y^2$在xOy面上方部分的上侧，将对坐标的曲面积分$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$化成对面积的曲面积分为________________。

二、 解答下列各题

1. （5 分）设$u = x + y, v = xy, z = z(x, y)$有连续偏导数，将$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$方程式转换成以$u, v$为自变量的方程式。

2. （7 分）若函数$u(x, y)$的全微分为$\left(x^4 + 4xy^\lambda\right)dx + \left(6x^{\lambda-1}y^2 - 5y^4\right)dy$，求$\lambda$的值和$u(x, y)$的一个表达式。

3. （7 分）求函数$f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$在有界闭区域$D$上的最大值与最小值，其中$D$由$x = 0, y = -3, x + y = 3$围成。

2009-2010 学年第二学期期中考试试卷参考答案

一、填空

1. 【正解】x^2
【解析】$\frac{x}{y}f(x,y)=\frac{x}{y}xy=x^2$
【考点延伸】《考试宝典》专题一 1.1——函数的相关概念理解.
2. 【正解】$\{(x,y)|y<x,y\geq 0,x^2+y^2<1\}$
【解析】对数函数要求自变量大于零，故$x-y>0$.
根号下要大于等于零，且分母不能为零，故$\begin{cases}y\geqslant 0\\1-x^2-y^2>0\end{cases}$.所以函数的定义域为
$$\{(x,y)|y<x,y\geq 0,x^2+y^2<1\}$$
【考点延伸】《考试宝典》专题一 1.2——函数的定义域.
3. 【正解】1
【解析】$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\frac{1}{2}(xy)^2}{x\cdot(xy)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{1}{2}y=1$
【考点延伸】《考试宝典》专题一 2.1——二元极限的计算.
4. 【正解】$2f_1'(a,b)$
【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(a+x,b)-f(a,b)}{x}+\frac{f(a-x,b)-f(a,b)}{-x}\right]=2f_1'(a,b)$
【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.1——偏导数的定义.
5. 【正解】$\frac{z}{y}x^{\frac{z}{y}-1}dx-x^{\frac{z}{y}}\frac{z}{y^2}\ln x\,dy+x^{\frac{z}{y}}\frac{1}{y}\ln x\,dz$
【解析】$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{y}x^{\frac{z}{y}-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{z}{y}}\ln x(-\frac{z}{y^2})$, $\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{z}{y}}\ln x\frac{1}{y}$,
$$du=\frac{z}{y}x^{\frac{z}{y}-1}dx-x^{\frac{z}{y}}\frac{z}{y^2}\ln x\,dy+x^{\frac{z}{y}}\frac{1}{y}\ln x\,dz$$
【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——函数的全微分.
6. 【正解】$xyf_{11}''+f_1'+2x^2f_{21}''$
【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'y+f_2'2x$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xyf_{11}''+f_1'+2x^2f_{21}''$
【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.3——复合函数求偏导.
7. 【正解】$\frac{-v\cos v+ue^u}{e^u(\sin v-\cos v)}$
【解析】$\begin{cases}0=e^u\frac{\partial u}{\partial y}+\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\\1=e^u\frac{\partial u}{\partial y}+\sin v\frac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$ $\begin{matrix}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)}\\\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u}{e^u(\sin v-\cos v)}\end{matrix}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-v\cos v+ue^u}{e^u(\sin v-\cos v)}$
【考点延伸】《考试宝典》专题八 4.1——隐函数求偏导.
8. 【正解】$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}$
【解析】$\begin{cases}1+\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=0\\2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{dz}{dx}=\frac{y-x}{z+y}\\\frac{dy}{dx}=\frac{x+z}{z+y}\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{dz}{dx}=0\\\frac{dy}{dx}=-1\end{cases}$ $(1,-1,0)$；$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}$
【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——空间曲线的切线方程.
9. 【正解】$x-2y-z=-1$

【解析】$F_x=-e^{x-2y},F_y=2e^{x-2y},F_z=1$；$(2,1,1)$点的法向量为$(-1,2,1)$
切平面方程为$-(x-2)+2(y-1)+(z-1)=0$
即$x-2y-z=-1$
【考点解析】《考试宝典》专题十 5.1——空间曲面的切线方程.

10.【正解】$3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$
【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-4y$，$grad\boldsymbol{z}\left(-\frac{3}{2},-1,\frac{3}{4}\right)=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$
【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数的计算.

11.【正解】$1+2\sqrt{3}$
【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=2,\frac{\partial z}{\partial y}=2y=4$,方向余弦为 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$；$\frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=1+2\sqrt{3}$
【考点延伸】《考试宝典》专题八 6.1——方向导数的计算.

12.【正解】-2
【解析】$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=4x+a+2xy=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2xy+2=0\\ (x,y)=(1,-1)\end{cases}\Rightarrow a=-2$
【考点延伸】《考试宝典》专题三 1.2——多元函数的极值.

13.【正解】$\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)\,dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$
【解析】原式$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}f(x,y)\,dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy$
【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.1——交换二重积分次序.

14.【正解】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$
【解析】$D:0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$；$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$
【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——极坐标下二重积分的计算.

15.【正解】$\frac{4}{3}$
【解析】$M=\iint_D\rho d\sigma=\int_0^1 dx\int_x^{2-x}(x+y)\,dy=\int_0^1(2-2x^2)dx=\frac{4}{3}$
【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.3——二重积分的应用.

16.【正解】$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$；
$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\sin\varphi)r^2\sin\varphi dr$
【解析】1、$\Omega:0\le\theta\le2\pi,0\le r\le a,r\le z\le a+\sqrt{a^2-r^2}$；
$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$；
2、$\Omega:0\le\theta\le2\pi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},0\le r\le2a\cos\varphi$；
$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\sin\varphi)r^2\sin\varphi dr$
【考点延伸】《考试宝典》专题九 3.1——球坐标系下三重积分的计算.

17.【正解】$4a^2(\frac{\pi}{2}-1)$
【解析】由对称性

$$S=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=-4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-1)d\theta=4a^2(\frac{\pi}{2}-1)$$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.3——二重积分的应用.

18.【正解】$I_Z=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 dy\int_0^y \mu(x,y,z)\,(x^2+y^2)\,dz$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 4.1——三重积分的应用.

19.【正解】$\frac{3}{32}a^4\pi$

【解析】原式 $=\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\int_0^\pi d\theta\int_0^{a\sin\theta}r^2rdr=\frac{a^4}{4}\int_0^\pi\sin^4\theta\,d\theta=\frac{3}{32}a^4\pi$

【考点延伸】《考试宝典》专题九 2.2——二重积分的计算.

20.【正解】0

【解析】$W=\int_L ydx+xdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-R^2\sin^2t+R^2\cos^2t)dt=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——对坐标的曲线积分.

21.【正解】$\int_\Gamma\frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}dS$

【解析】切向量$(1,2t,3t^2)=(1,2x,3y)$；$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\\ \cos\beta=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}};\\ \cos\gamma=\frac{3y}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\end{cases}$

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int_\Gamma\frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}dS$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.2——两类曲线积分的转化.

22.【正解】$2\left(e^{\sqrt2}-1\right)$

【解析】$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}dx=\int_{-1}^1 e^{\sqrt{2x^2}}\sqrt2dx=2\int_0^1 e^{\sqrt2x}d\sqrt2x=2\left(e^{\sqrt2}-1\right)$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 1.1——曲线积分的计算.

23.【正解】a^2

【解析】$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,积分与路径无关,原式$=\int_a^0-2ydy=a^2$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 2.1——积分与路径无关的条件.

24.【正解】0

【解析】由对称性 所求积分$=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 4.1——曲线积分的对称性应用.

25.【正解】$-\frac{2\pi}{5}$

【解析】原式$=2\iint_D-3\sqrt{1-x^2-y^2}(x^2+y^2)dxdy$

$$=-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2\cdot rdr$$

$$=-\frac{3\pi}{2}\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2dr^2\xRightarrow{\sqrt{1-r^2}=r}-\frac{3\pi}{2}\int_1^0(1-r^2)2rdr=-\frac{2\pi}{5}$$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.1——曲面积分计算.

26.【正解】$\iint_\Sigma\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$；$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$,

$\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)\left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right)$；$\iint_\Sigma\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS$

【考点延伸】《考试宝典》专题十 5.2——两种曲面积分的转化.

二、解下列各题

1. 【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}y$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}x;$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial v}=x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}xy+y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}xy=$$

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial u}+2xy\frac{\partial z}{\partial v}=u\frac{\partial z}{\partial v}+2v\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 2.2——偏导数的计算.

2. 【解析】$P=x^4+4xy^{\lambda},Q=6x^{\lambda-1}y^2-5y^4$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=6(\lambda-1)x^{\lambda-2}y^2,\frac{\partial P}{\partial y}=4\lambda xy^{\lambda-1},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow\lambda=3$$

$$\mu(x,y)=\int_0^x x^4dx\int_0^y(6x^2y^2-5y^4)dy=\frac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 3.1——函数的全微分.

3. 【解析】$f_x'=4-2x=0,f_y'=-4-2y=0\ \Rightarrow x=2,y=-2$

$f_{xx}''=-2,f_{xy}''=0,f_{yy}''=-2$

$AC-B^2=4>0,A=-2$ 有极大值 $f(2,-2)=8$

$$\begin{cases}f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2\\ x=0\end{cases}\Rightarrow(0,-2),f(0,-2)=4$$

$$\begin{cases}f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2\\ y=-3\end{cases}\Rightarrow(2,-3),f(2,-3)=7$$

$$\begin{cases}f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2\\ x+y=3\end{cases}$$

$$L(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2+\lambda(x+y-3)$$

$$L_x'=0,L_y'=0,L_\lambda'=0\Rightarrow x=\frac{7}{2},y=-\frac{1}{2}$$

$$f(0,-3)=3,f(0,3)=-21,f(6,-3)=-9,f\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$$

最大值为$f(2,-2)=8$，最小值为 $f(0,3)=-21$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 7.1——函数的最值,条件极值.