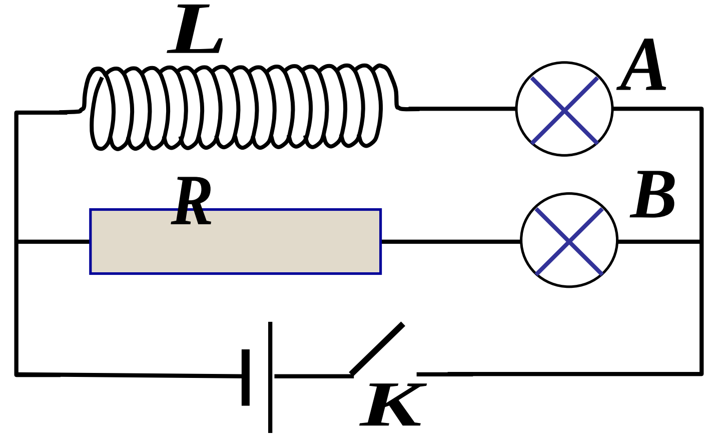
§4 自感和互感 --实际线路中的感生电动势

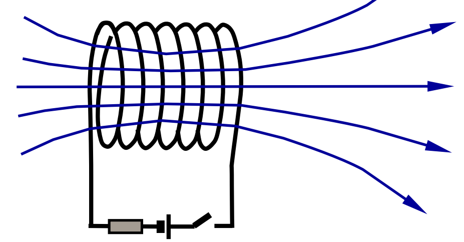
一、自感

闭合*K*：*LAK*回路：*I*增 → Φ 增 → ε_L 阻碍

断开*K*：*LABK*回路：*I*减 → Φ 减 → ε_L 阻碍



$I^{\approx} \rightarrow \psi^{\approx} \rightarrow \varepsilon_i$



自感现象：由于回路自身电流的变化，在回路中产生感应电动势的现象。

自感的应用：稳流，*LC* 谐振电路，滤波电路等

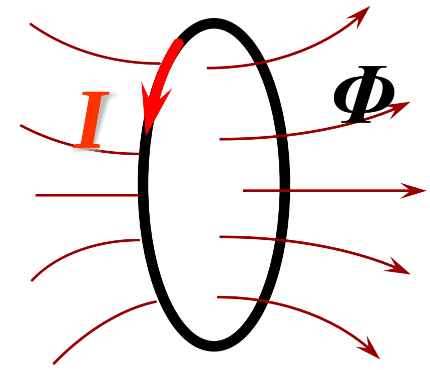
自感现象反映了电路元件反抗电流变化的能力（电磁惯性） 如何反应电磁惯性的大小？

1、 自感系数 L

若：回路几何形状、尺寸不变，周围无铁磁性物质。

实验指出：

$$\Phi \propto I$$



写成比例式 $\Phi = LI$

N 匝线圈：　$\Psi = N\Phi = LI$

定义该回路的自感系数 $\boxed{L = \dfrac{\Psi}{I}}$

L仅与回路本身的形状、大小、匝数及周围的磁介质有关

自感电动势 $\varepsilon_L = -\dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}(LI)}{\mathrm{d}t} = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - I\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$　$\boxed{\varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}$

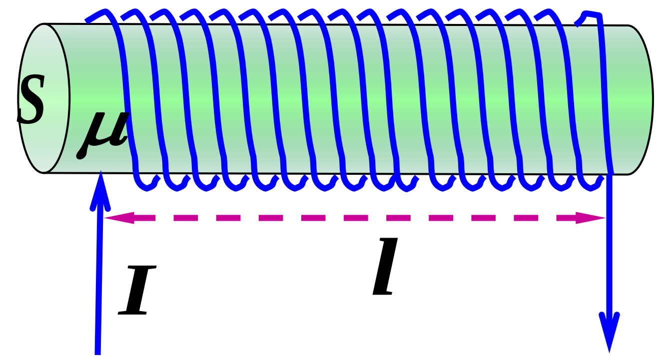
$L = -\dfrac{\varepsilon_L}{\mathrm{d}I/\mathrm{d}t}$　自感系数的一般定义式

物意：单位电流变化引起感应电动势的大小

L的单位：亨利（H）　$1\mathrm{H} = 1\mathrm{wb}\cdot\mathrm{A}^{-1}$

$$L=\frac{\psi}{I}$$

例： 设一长直螺线管，长为l ，截面积S，线圈总匝数N ，管中充有磁导率μ的介质，求自感系数L。



解：设电流 I 通过螺线管线路

则管内磁感强度为

$$B=\mu nI=\mu\frac{N}{l}I$$

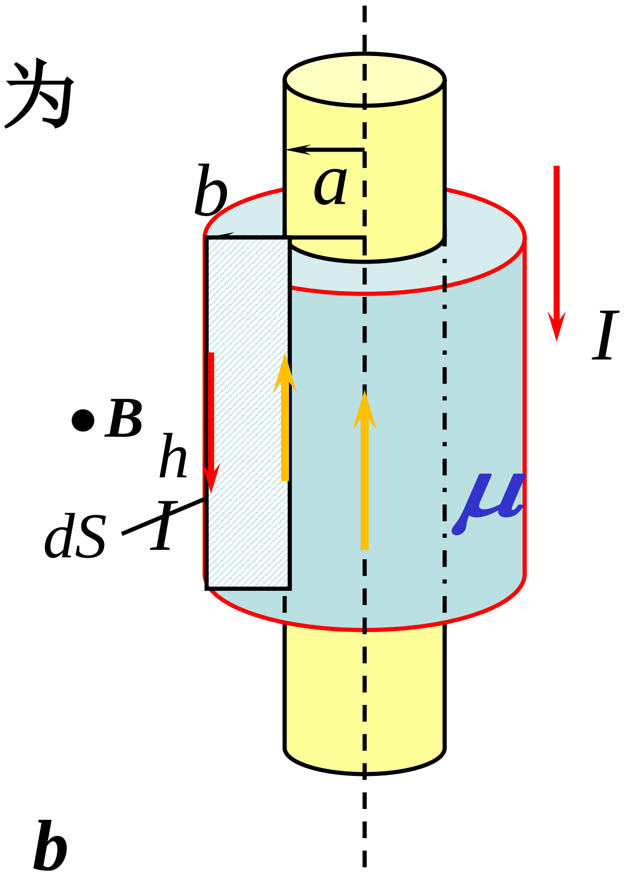
全磁通为 $\psi=N\Phi=NBS=\mu\frac{N^2}{l}IS$

由L的定义有 $L=\frac{\psi}{I}=\frac{\mu N^2S}{l}=\mu n^2lS=\underline{\mu n^2V}$

自感系数只与装置的几何因素和介质有关

例： 有一同轴电缆，由半径为 a 和 b 的同轴长圆筒组成，两筒间充满磁导率为 μ 的均匀介质，求单位长度同轴电缆的自感系数。（设电流 I 由内筒一端流入，经外筒的另一端流出）

解： 距轴为 r $(a<r<b)$ 处的磁感应强度为



$$B=\frac{\mu I}{2\pi r}$$

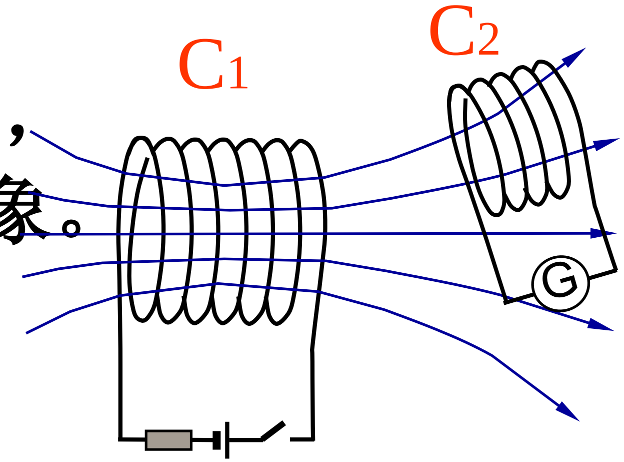
$$\Phi=\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r}h\mathrm{d}r=\frac{\mu I h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$L'=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

单位长度电缆自感系数为：$L=\frac{L'}{h}=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

二、互感现象　互感系数

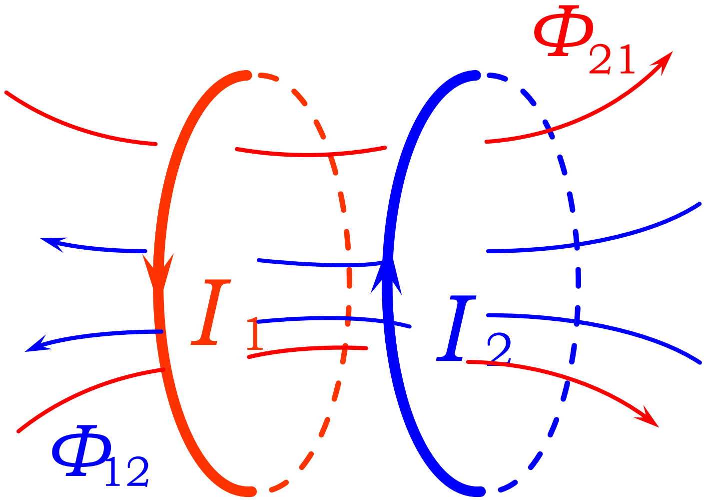
互感现象:由于一回路电流发生变化，在另一回路中产生感应电动势的现象。



$$\tilde{I_1} \Rightarrow \tilde{\psi_2} \Rightarrow \varepsilon_{i2}$$

$$\tilde{I_2} \Rightarrow \tilde{\psi_1} \Rightarrow \varepsilon_{i1}$$

若两回路几何形状、尺寸及相对位置不变，周围无铁磁性物质：



$$M_{21} = \frac{\psi_2}{I_1} \qquad M_{12} = \frac{\psi_1}{I_2}$$

$M_{21}=M_{12}=M$　称为两个线圈的互感系数。

$$\boxed{M = \frac{\psi_2}{I_1} = \frac{\psi_1}{I_2}}$$

$$\psi_2 = MI_1 \qquad \psi_1 = MI_2$$

互感电动势：

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_1 = -\frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

$$M = -\frac{\varepsilon_2}{\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon_1}{\mathrm{d}I_2/\mathrm{d}t}$$

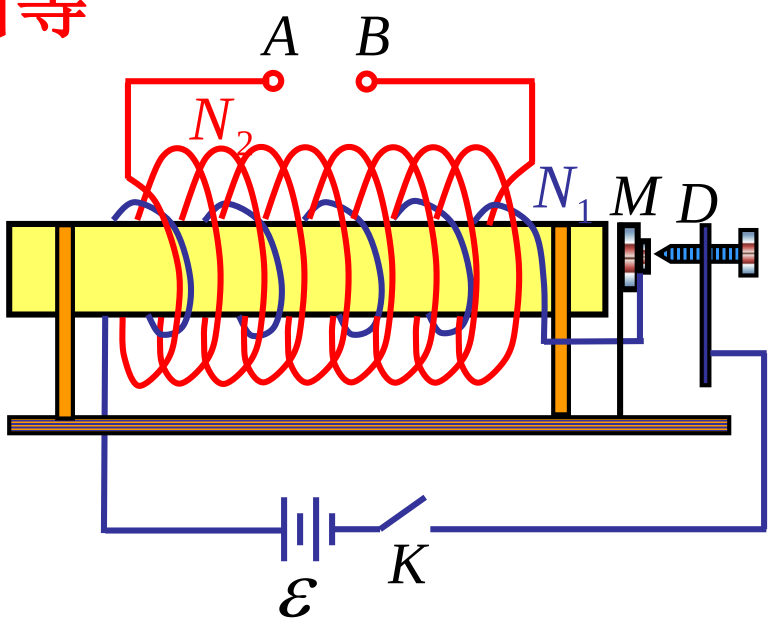
互感系数的一般定义式

物理意义：单位电流的变化引起感应电动势的大小

*互感系数反映了两个线圈磁场的相互影响程度。

*互感的应用：变压器、感应圈等

互感的应用：变压器、感应圈等



感应圈是利用互感原理，实现由低压直流电源获得高压电的一种装置。

感应圈的主要部分是：初级线圈N_1、次级线圈N_2和断续器。

$$N_2 >> N_1$$

在次级线圈中能获得高达几十万伏的电压，使A、B间产生火花放电现象。

例　一长直螺线管，单位长度上的匝数为n，有一半径为r的圆环放在螺线管内，环平面与管轴垂直，求螺线管与圆环的互感系数。

$$M=\frac{\Psi_2}{I_1}=\frac{\Psi_1}{I_2}$$

解：设螺线管中通有电流 I，则管内的磁感应强度

$$B=\mu_0 nI$$

通过圆环的磁通量为

$$\Phi=B\cdot\pi r^2=\mu_0 nI\pi r^2$$

由定义得互感系数为

$$M=\frac{\Phi}{I}=\mu_0 n\pi r^2$$

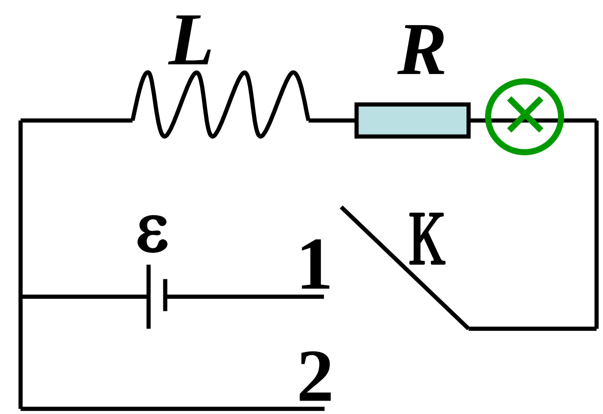
思考：若圆环在螺线管外，互感系数如何？

§5 磁场的能量　磁能密度

一、磁能的来源

当K→1 电路接通　电流建立过程⟷磁场储存能量

I 增加：电源作功=反抗ε_L作功+焦耳热



电源作功＞焦耳热 ⇨ 有能量储存

电源提供的能量的一部分储存在线圈的磁场内。

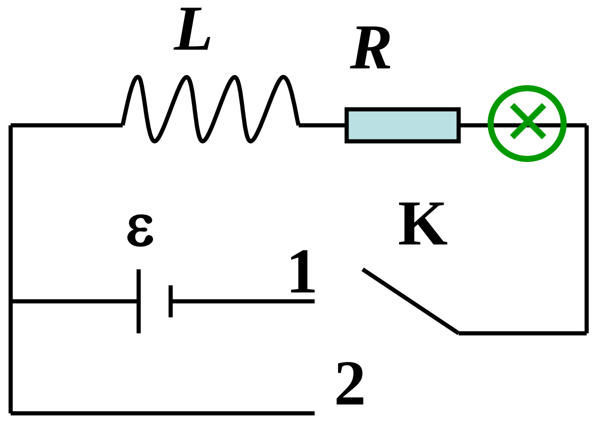
稳态时：电源作功 = 焦耳热

K由1→2 电路断开

I 减小：ε_L作功=焦耳热 ⇨ 有能量放出

二、磁场能量

1. 自感磁能 W_m



K 接1后某时刻回路中的电流为i

$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri$$

$$\xrightarrow{\text{乘}idt} \varepsilon i\mathrm{d}t = Li\mathrm{d}i + Ri^2\mathrm{d}t$$

经过t后达到稳态，稳态时回路中电流为I。

$$\underbrace{\int_0^t \varepsilon i\mathrm{d}t}_{\text{电源作功}} = \underbrace{\int_0^I Li\,\mathrm{d}i}_{\text{磁能}} + \underbrace{\int_0^t i^2R\,\mathrm{d}t}_{\text{焦耳热}}$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

磁能是贮存在磁场中的

$W_m \sim B$、H 的关系？

以填充非铁磁介质的长直螺线管为例

磁场占据的空间体积

$$L=\mu n^2 V\,,\ B=\mu nI\,,\ H=\frac{B}{\mu}$$

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu n^2 VI^2=\frac{B^2}{2\mu}V=\frac{1}{2}BHV$$

2、磁场能量密度：单位体积中储存的磁场能量 w_m

$$\boxed{w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{B^2}{2\mu}}$$

3、磁场的能量

$$\boxed{W_m=\iiint_V w_m \mathrm{d}V=\iiint_V \frac{HB}{2}\mathrm{d}V}$$

V 是磁场分布的整个空间。

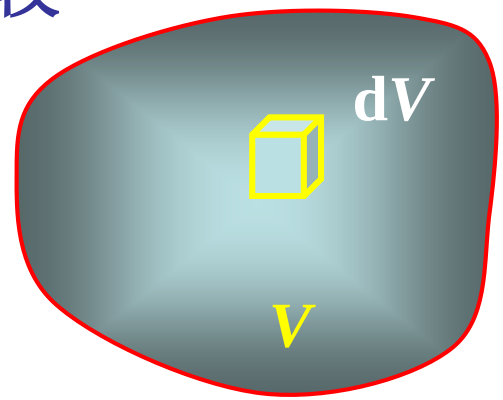
自感线圈储能与电容器储能比较

$$\boxed{W_m=\frac{1}{2}LI^2} \longleftrightarrow \boxed{W_e=\frac{1}{2}CU^2}$$

自感线圈也是一个储能元件，自感系数反映线圈储能的本领。

磁场能量密度与电场能量密度公式的比较

$$\boxed{w_m=\frac{1}{2}\mu_0\mu_r H^2=\frac{1}{2}BH} \longleftrightarrow \boxed{w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2=\frac{1}{2}ED}$$



在有限区域内

$$W_m=\int_V w_m\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}BH\mathrm{d}V \longleftrightarrow W_e=\int_V w_e\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{2}ED\mathrm{d}V$$

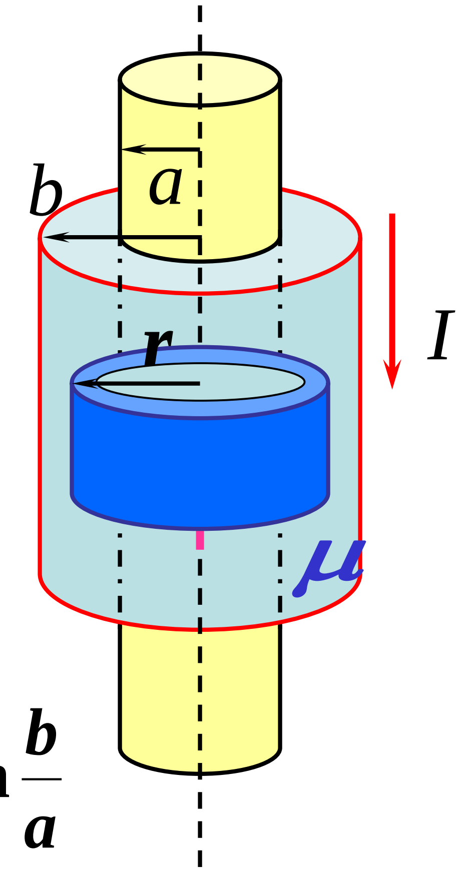
磁场能量公式与电场能量公式具有完全对称的形式!

例： 用磁场能量求单位长度同轴电缆的磁能。

$$W_{\mathrm{m}} = \iiint_V w_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu} \mathrm{d}V$$

解：磁场只存在于两筒之间，由安培环路定律得磁感强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}, \quad a < r < b$$



选单位长度的体积元 $\mathrm{d}V = 2\pi r \mathrm{d}r$

单位长度电缆的磁能 $W_m = \int_a^b w_m \mathrm{d}V$

$$= \int_a^b \frac{\mu}{8\pi^2} \frac{I^2}{r^2} \cdot 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$= \int_a^b \frac{\mu I^2}{4\pi} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

计算自感的另一种方法：

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$