

北京化工大学 2017——2018 学年第一学期

《高等数学 (I)》期终考试试卷

课程代码	M	A	T	1	3	9	0	4/6	T
------	---	---	---	---	---	---	---	-----	---

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____ 任课教师: _____ 分数: _____

题号	一	二							三					四	总分
		1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5		
得分															

一、填空题 (3 分×6=18 分)

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 与 x^k 为同阶无穷小, 则 $k =$ _____;
- 设函数 $f(x) = \frac{\sin \pi x}{x-1}$, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 _____ 间断点;
- 设 $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^3} dt$, 则 $f'(1) =$ _____;
- 曲线 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 在点 $(0, 0)$ 处的曲率 $k =$ _____;
- $\int_{-1}^1 (x^{2017} + \sqrt{1-x^2}) dx =$ _____;
- 微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解为 _____。

二、解答题(6 分×7=42 分)

- 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x - \tan x}$
- 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = a \sec t \end{cases}$ 确定, 若 $y = y(x)$ 为微分方程 $\frac{dy}{dx} = y + e^{-x}$ 的解, 求常数 a 的值。
- 求不定积分 $\int \ln(1 + \sqrt{x}) dx$
- 将函数 $f(x) = \arctan x$ 展开为带有拉格朗日型余项的 3 阶麦克劳林公式。
- 求曲线 $y^2 = -4(x-1)$ 与 $y^2 = -2(x-2)$ 围成的平面图形的面积。

6. 求曲线 $y = 2\ln x + x^2 - 1$ 在拐点处的切线方程。

7. 求曲线 $\rho = a\sin^3 \frac{\theta}{3}$ 相应于 $0 \leq \theta \leq 3\pi$ 的一段弧长, 其中 $a > 0$ 。

三、解答题 (7 分 \times 5=35 分)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{e^x + e^{-x}} & x < 0 \end{cases}$, 计算 $\int_{-\infty}^2 f(x-1)dx$ 。

2. 求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解。

3. 求由曲线 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 及直线 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积。

4. 设 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$, 计算 $\int_0^1 x f(x) dx$ 。

5. 将长为 a 的铁丝切成两段, 分别围成正方形与圆形。当两段铁丝各为多长时, 正方形与圆形的面积之和最小。

四、证明题 (5 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = a$, $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$,

证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = f(\xi) - \xi + 1$ 。