《落球法测液体粘滞系数》实验的理论探讨

蔡达峰 黎昌金

(物理系)

摘 要 本文指出《落球法测液体粘滞系数》实验中,小球的运动是一个"暂态过程"、讨论了影响小球趋于极限速度快慢的"驰豫时间",计算出几种液体的"驰豫时间"值,从而为判断小球是否达到平衡提供了理论依据。

关键词 暂态过程 驰豫时间

中图法分类号 O4—33

《落球法测液体粘滞系数》实验的基本原理是根据斯托克斯公式,在雷诺数很小的情况下,小球所受重力 mg,浮力 $F=\rho g\frac{4}{3}\pi r^3$,液体粘滞阻力 $f=6\pi\eta vr$ 且达到平衡,小球作匀速直线运动,列出平衡方程,从而求出液体粘滞系数[1]

$$\eta=\frac{(m-\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho)}{6\pi vr}\cdot g \tag{1}$$

式中,η 为液体粘滞系数,m 为小球质量,r 为小球半径,v 为小球相对液体运动速度,ρ 为液体密度。

实验中,确定小球何时进入匀速状态一般是经验估算,目测确定,通过多次实验,由实验室给出,或者由公式[1]

$$S_0=1.11\times10^4\times\frac{r^4\rho'^2}{\eta^2}(1-\frac{\rho}{\rho'}) \tag{2}$$

确定。其中 S_0 为记时起点到液面的距离,ρ' 为小球密度,η 值可先粗测。

1 小球运动是一个"暂态过程"

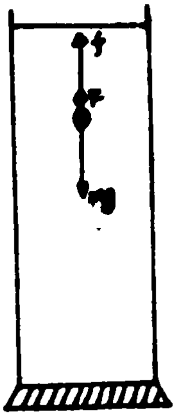
《落球法测液体粘滞系数》实验要求雷诺数很小。当待测液体为蓖麻油时,$\eta=2300\times10^{-3}$ Pa·s(17.5℃时理论值)[2],密度 $\rho=0.97\times10^3\text{kg/m}^3$[3];小球半径取 $r=2\text{mm}$,速度取匀速运动的速度(最大值)$v=2.6\times10^{-2}\text{m/s}$(实测值),则雷诺数为[2]

$$\text{Re}=\rho vr/\eta \tag{3}$$

代入数据,$\text{Re}=2.19\times10^{-2}$,由此可见,在实验室条件下,雷诺数很小,斯托克斯公式成立。

为讨论方便,设小球在液面处以初速为零开始下落,即 $t=0, v=0$。在下落过程中,小球受到三个力的作用:重力 mg,浮力 $F=\rho g\frac{4}{3}\pi r^3$,液体的粘滞阻力 $f=6\pi\eta vr$,这三个力作用在同一竖直线上,力的方向如图 1。

根据牛顿第二定律,列出动力学方程



$$mg-\frac{4}{3}\pi r^3\rho g-6\pi\eta vr=m\frac{dv}{dt} \tag{4}$$

分离变量 $\dfrac{dv}{mg-\frac{4}{3}\pi r^3\rho g-6\pi\eta vr}=\dfrac{dt}{m}$

两端同时积分,并整理后得

$$mg-\frac{4}{3}\pi r^3\rho g-6\pi\eta vr=Ae^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t} \tag{5}$$

式中,A 为积分常数,由初始条件确定。代入初始条件 $t=0,v=0$,则得

$$A=mg-\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$$

将 A 值代入(5)式,并解出 v 得

图 1

$$v=\frac{mg-\frac{4}{3}\pi r^3\rho g}{6\pi\eta r}\left(1-e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}\right) \tag{6}$$

令
$$v_0=\frac{mg-\frac{4}{3}\pi r^3\rho g}{6\pi\eta r} \tag{7}$$

(6)式写为 $$v=v_0\left(1-e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}\right) \tag{8}$$

由(8)式可知,小球的运动速度是按指数规律趋于一个极限速度 v_0 的。从理论上讲,只有当 $t\to\infty$ 时,小球速度才能达到 v_0 而作匀速运动。我们称小球运动是一个"暂态过程"。(7)式给出的粘滞系数与(1)式完全相同。

2 小球运动的"驰豫时间"

在公式(8)中,令 $\tau=\dfrac{m}{6\pi\eta r}$,称之为小球运动的"驰豫时间",(8)式写为

$$v=v_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{9}$$

"驰豫时间"τ 与小球质量 m、半径 r、液体粘滞系数 η 有关。当粘滞系数 η 和小球半径 r 一定时,小球质量 m 愈大,"驰豫时间"τ 愈长;当小球质量 m 和小球半径 r 一定时,粘滞系数 η 愈大,"驰豫时间"τ 愈小;当粘滞系数 η 和小球质量 m 一定,小球半径 r 与"驰豫时间"τ 成反比。对实心小球,由于 $m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho'$($\rho'$ 为小球密度)"驰豫时间"$\tau=\dfrac{2r^2\rho'}{9\eta}$。在小球密度 ρ'、半径 r 一定情况下,τ 与 η 成反比;在粘滞系数 η 和小球密度 ρ' 一定时,τ 与 r^2 成正比;而在粘滞系数 η 和小球半径 r 一定时,τ 与 ρ' 成正比。"驰豫时间"反映了小球速度增长的快慢程度,当 $t=\tau$ 时,小球速度达到极限速度的 63%。

下面从理论上计算几种液体的"驰豫时间"并按极限速度(7)式求得的速度值 v_0,计算相应的雷诺数 Re。(小球半径 $r=2\text{mm}$,密度 $\rho'=7.8\times10^3\,\text{kg/m}^3$[3])

水:20℃时,$\eta=1.002\times10^{-3}\,\text{Pa·s}$[2], $=1.0\times10^3\,\text{kg/m}^3$[3]。"驰豫时间"$\tau=6.80\text{s}$,极限速度 $v_0=59.12\text{m/s}$,雷诺数 $Re=1.18\times10^5$。

酒精:20℃时,$\eta=16\times10^{-3}\,\text{Pa·s}$[4],$\rho=0.8\times10^3\,\text{kg/m}^3$[3],"驰豫时间"$\tau=0.43\text{s}$,极限速度 $v_0=3.81\text{m/s}$,雷诺数 $Re=3.81\times10^2$。

甘油:20℃时,$\eta=830\times10^{-3}\,\text{Pa·s}$[4],$\rho=1.26\times10^3\,\text{kg/m}^3$[3],"驰豫时间"$\tau=8.35\times10^{-3}\text{s}$,极

限速度 $v_0 = 6.86 \times 10^{-2}$ m/s，雷诺数 Re = 0.21。

蓖麻油：17.5℃时，$\eta = 2300 \times 10^{-3}$ Pa·s[3]，$\rho = 0.97 \times 10^3$ kg/m^3[3]“驰豫时间”$\tau = 3.01 \times 10^{-3}$ s，极限速度 $v_0 = 2.59 \times 10^{-2}$ m/s，雷诺数 Re = 2.18×10^{-2}。

从以上数据可知，水和酒精的“驰豫时间”时间较大，雷诺数也大。实验采用钢质小球很难保证不产生湍流，故不能用此方法测其粘滞系数；而甘油、蓖麻油的雷诺数较小，能很好保证斯托克斯公式成立条件，且“驰豫时间”都很短，小球趋近极限速度很迅速，故落球法测液体粘滞系数仅适用于粘滞系数较大的液体。

3 对实验的启示

既然小球运动是一个“暂态过程”，理论上，只有 $t \to \infty$，小球速度才能达到极限速度 v_0。因此，我们不可能求出小球达到平衡的时间及所处的位置。故(2)式从理论上讲没有意义。然而，对具体实验而言，只要雷诺数很小，能满足斯托克斯公式的条件。当小球速度变化足够小，或者说小球速度非常趋近于极限速度时，即可把小球的运动视为匀速运动，从而测定液体的粘滞系数。

下面以甘油和蓖麻油为例作一估算。设小球速度达到极限速度的 99.99% 时，可视作匀速运动，所需时间为 t'。

对于甘油，$v = 99.99\% v_0$，$\tau = 8.35 \times 10^{-3} s$ 代入公式(9)得

$$99.99\% v_0 = v_0(1 - e^{-\frac{t'}{8.35 \times 10^{-3}}})$$

求出时间 $t' = 7.69 \times 10^{-2} s$。即小球在甘油中运动只需 $7.69 \times 10^{-2} s$ 速度可达到极限速度的 99.99%。此时，小球下落距离可由(9)式积分求出

$$S = \int_0^{t'} v_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\mathrm{d}t$$

$$= v_0(t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}})_0^{t'} = v_0[t' + \tau(e^{-\frac{t'}{\tau}} - 1)] \qquad (10)$$

将甘油极限速度 $v_0 = 6.86 \times 10^{-2}$ m/s，“驰豫时间”$\tau = 8.35 \times 10^{-3} s$，及 $t' = 7.69 \times 10^{-2} s$ 代入(10)式，

$s = 4.70 \times 10^{-3}$ m = 4.7mm，

同样，对于蓖麻油，$v = 99.99\% v_0$，$\tau = 3.01 \times 10^{-3}$ s，代入公式(9)可得

$$99.99\% v_0 = v_0(1 - e^{-\frac{t'}{3.01 \times 10^{-3}}})$$

求出时间 $t' = 2.77 \times 10^{-2}$ s；将蓖麻油的极限速度 $v_0 = 2.59 \times 10^{-2}$ m/s，“驰豫时间”$\tau = 3.01 \times 10^{-3}$ 及 $t' = 2.77 \times 10^{-2}$ s 代入公式(10)，求出小球下落距离

$s = 6.40 \times 10^{-4}$ m = 0.64mm

以上计算可知，对甘油和蓖麻油中运动的小球，当速度达到极限速度的 99.99%，只需非常短暂的时间，小球下落的距离也很小。因此，采用钢质小球测甘油、蓖麻油的粘滞系数时，确定小球何时、何处进入匀速状态或确定记时起点是完全没有理论意义的。只要甘油、蓖麻油均匀(尤其无密度梯度)，原则上液体内任何位置均可作为记时起点。我们只要考虑如何确定记时起点测量更方便而已。

最后，我们再估算一下小球从 $99.99\% v_0$ 到达 v_0 的速度改变量 $\triangle v$，

$$\triangle v = v_0 - 99.99\% v_0 = 10^{-4} v_0$$

将甘油的极限速度代入，则

$$\triangle v = 10^{-4} \times 6.86 \times 10^{-2} = 6.86 \times 10^{-6} \text{m/s}$$

将蓖麻油极限速度代入,则

$$\triangle v = 10^{-4} \times 2.59 \times 10^{-2} = 2.59 \times 10^{-6} \mathrm{m/s}$$

由此可见,无论是甘油还是蓖麻油,小球速度从 $99.99\% v_0$ 直至极限速度 v_0,其速度的改变量$\triangle v$ 都非常小(为 10^{-6}m/s 数量级),与极限速度(10^{-2}m/s 数量级)相比 完全可以忽略。即在这一段中,小球运动完全可视为匀速度运动,其引起的误差远小于其它因素产生的误差。

参 考 文 献

[1] 肖新民等,物理实验简明教程,山西人民出版社,1989 年 12 月,67~68

[2] 漆安慎等,力学基础,高等教育出版社,1989 年 2 月,536

[3] 许维亮,物理手册,江苏少年儿童出版社,1996 年 12 月,536~642

[4] 复旦大学、上海师范大学物理系,物理学(力学),上海科学技术出版社,1978 年 9 月,437