北京化工大学
Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第二章 连续时间系统的时域分析

主讲教师：张凤元

主要内容 CONTENTS

1 连续时间系统响应的时域分析

2 连续时间系统初始条件的确定

3 连续LTI系统的零输入和零状态响应

4 信号的线性卷积（单位冲击响应）

5 离散时间LTI系统的时域分析法

6 信号的变换域分析简介

4 单位冲击响应和阶跃响应

--单位冲击响应的定义

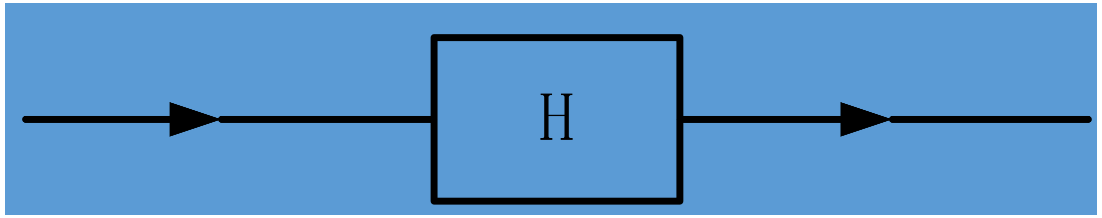
-- n阶系统的单位冲击响应

-- 单位阶跃响应

--系统零状态响应的卷积计算

-- 单位冲击响应求解举例

连续时间系统在单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用下的零状态响应，称为单位冲激响应，简称冲激响应，一般用$h(t)$表示。



对于线性时不变系统，可以用一高阶微分方程表示：

$$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)=E_0\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+E_m e(t)$$

系统零状态下，令：

$$e(t)=\delta(t)\quad ,r(t)=h(t)$$

则有：

$$C_0h^{(n)}(t)+C_1h^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}h^{(1)}(t)+C_n h(t)=E_0\delta^{(m)}(t)+E_1\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}\delta^{(1)}(t)+E_m\delta(t)$$

求系统的零状态响应输出，即得单位冲击响应：$h(t)$

由于 $\delta(t)$ 及其导数在 0_+ 时都为零，因而方程式右端的自由项恒等于零，这样原系统的冲激响应形式与齐次解的形式相同。

（1）冲击响应的形式与特征根有关，当特征根为简单根（无重根的单根）时有：

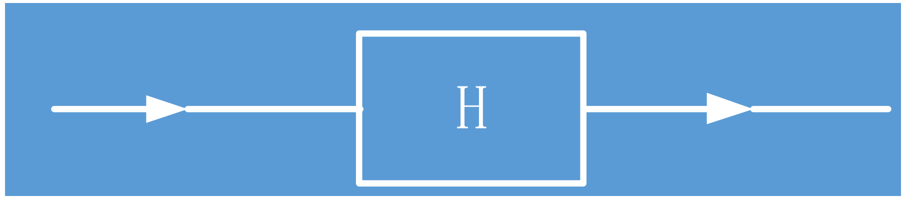
$$h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i t}\right]u(t)$$

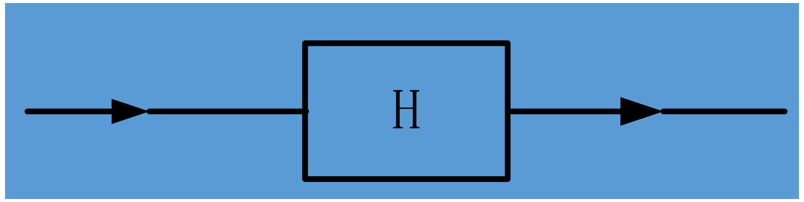
(2) 与 n，m 相对大小有关

- 当 $n>m$ 时，$h(t)$ 不含 $\delta(t)$ 及其各阶导数；
- 当 $n=m$ 时，$h(t)$ 中应包含 $\delta(t)$；
- 当 $n<m$ 时，$h(t)$ 应包含 $\delta(t)$ 及其各阶导数；

4.4 n阶系统的单位阶跃响应

系统在单位阶跃信号作用下的零状态响应，称为单位阶跃响应，简称阶跃响应。





系统的输入 $u(t)$ ，其响应为 $g(t)$ 。系统方程的右端将包含阶跃函数 $u(t)$ ，所以除了齐次解外，还有特解项。

对于线性时不变系统，可以利用冲激响应与阶跃响应的关系来求解阶跃响应

线性时不变系统满足微、积分特性：

$$\because u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)\,\mathrm{d}t$$

阶跃响应是冲激响应的积分，注意积分限：

$\int_{-\infty}^{t}$,对于因果系统，积分限为：$\int_{0_-}^{t}$

任意信号 $e(t)$ 可表示为冲击序列之和：

$$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

若把它作用于冲激响应为 $h(t)$ 的LTIS,则响应为

$$r(t)=H\left[e(t)\right]=H\left[\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\left[\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)H\left[\delta(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=e(t)\otimes h(t)=e(t)*h(t)$$

$$=r_{zs}(t)$$

这就是系统的零状态响应.

例1 求系统 $\dfrac{d^2 r(t)}{dt^2}+4\dfrac{dr(t)}{dt}+3r(t)=\dfrac{de(t)}{dt}+2e(t)$ 的冲激响应

解（1）求通解

将$e(t)\to\delta(t)$， $r(t)\to h(t)$得到：

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2}+4\frac{dh(t)}{dt}+3h(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}+2\delta(t)$$

求特征根得：$\alpha^2+4\alpha+3=0\Rightarrow\alpha_1=-1,\alpha_2=-3$

$\therefore$冲激响应的通解为：$h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$

（2）确定初始条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t) \\ h(t)=a\Delta u(t) \end{cases}$$

代入微分方程得：

$$\left[a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\right]+4\left[a\delta(t)+b\Delta u(t)\right]+3a\Delta u(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

方程左右两端的 $\delta(t)$ 及各阶导数应该平衡（即系数相同），因而得：

$$\begin{cases} a=1 \\ b+4a=2 \\ c+4b+3a=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(0_+)-h(0_-)=a=1 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(0_+)-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(0_-)=b=-2 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(0_+)-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}h(0_-)=c=5 \end{cases}$$

所求系统的初始条件，即 0+ 状态为：

$$\begin{cases} h(0_+)=1+h(0_-)=1 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(0_+)=-2+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(0_-)=-2 \end{cases}$$

(3) 求系统的单位冲击响应

系统的初始条件为： $h(0_+)=1$ $\frac{dh}{dt}(0_+)=-2$

将初始条件代入通解得：

$$\begin{cases} h(0_+)=A_1+A_2=1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(0_+)=-A_1-3A_2=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1=\frac{1}{2} \\ A_2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

系统的单位冲击响应为：

$$h(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t) \qquad (t\geq 0_+)$$


谢谢大家，下讲再见！
北京化工大学
新闻网