一. 填空题 (每空 3 分, 共 21 分).

(1) Hermite 矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & \mathrm{i} & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & -1\end{bmatrix}$ 是 ________ (正定、负定或不定) 矩阵.

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i} & -1\\ 1+\mathrm{i} & 1 & 1\\ -1 & 3-2\mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$, 则 $\|A\|_{m_\infty}=$ _____ , $\|A\|_1=$ _____ , $\|A\|_\infty=$ _____ .

(3) 已知 $e^{At}=\begin{bmatrix}2e^{2t}-e^t & e^t-e^{2t}\\ 3e^{2t}-3e^t & 2e^{2t}-e^t\end{bmatrix}$, 则 $A=$ ____________ .

(4) $A(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \lambda\\ 0 & \lambda^2-1 & 0\\ \lambda & 0 & \lambda\end{bmatrix}$ 的 Smith 标准型为 ____________ .

(5) 设 3 阶方阵 A 的特征多项式为 $\lambda^2(\lambda-6)$, 且 A 可对角化, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^k=$ ________ (用 A 的式子表示).

二. (12 分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 8\\ 3 & 1 & 6\\ -2 & 0 & -3\end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的特征多项式和全部特征值.

(2) 求 A 的 Jordan 标准形 J 和最小多项式.

(3) 求矩阵幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{A^k}{2^k}$.

三. (15 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & -4\end{bmatrix}$, $f(t)=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的 QR 分解 (要求 R 的对角线元素全是正数, 方法不限)

(2) 求 e^{At}

(3) 求微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t}=A\mathbf{x}(t)+f(t)$, 满足初值 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ 的解.

四. (12 分) 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

五. (15 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 12 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. 利用特征值隔离法和盖尔圆定理证明: A 的三个的特征值全为实数, 且分别位于实数区间 $[-0.5, 2.5]$, $[2.5, 5.5]$ 和 $[10, 14]$ 内.

六. (15 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = (1, 1, 1)^T$.

(1) 求 A 的满秩分解.

(2) 求 A^+.

(3) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax = b$ 是否有解, 并求极小范数解或极小范数最小二乘解, 并说明是哪种解.

七. (10 分) 设 $A = \alpha\beta^T$, 这里 α, β 为非零 $n(\geqslant 2)$ 维列向量.

(1) 证明: A 的最小多项式是 $m(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr(A)}\lambda$.

(2) 写出所有可能的若当标准型 (不要证明, 不计排序时写一个即可).