《概率论与数理统计》习题及答案

填　空　题

填空题

1．设事件 A,B 都不发生的概率为 0.3，且 $P(A)+P(B)=0.8$，则 A,B 中至少有一个不发生的概率为_________.

解：$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

$$=1-0.8+P(AB)=0.3$$

$P(AB)=0.1$

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9$

2．设 $P(A)=0.4,\ P(A\cup B)=0.7$，那么

（1）若 A,B 互不相容，则 $P(B)=$_________;

（2）若 A,B 相互独立，则 $P(B)=$_________.

解：（1）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\Rightarrow P(B)$

$$=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.7-0.4=0.3$$

（由已知 $AB=\phi$）

（2）$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=0.7-0.4+P(A)P(B)=0.3+0.4P(B)$

$$0.6P(B)=0.3\Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}$$

3.设 A,B 是任意两个事件，则 $P\{\overline{A}\cup B(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=$_______.

解：$P\{(\overline{A}\cup B)\}(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=P\{(\overline{A}A\cup\overline{A}B)\cup(AB\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{AB})\}$

$=P\{(\overline{A}B\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{AB})\}$

$=P\{(AB\cup B\overline{B})(\overline{AB})\}=P\{(AB)(\overline{AB})\}=P(\phi)=0.$

4．从 $0,1,2,\cdots,9$ 中任取 4 个数，则所取的 4 个数能排成一个四位偶数的概率为_________.

解：设 $A=$取 4 个数能排成一个四位偶数，则 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_5^4}{C_{10}^4}=\dfrac{41}{42}$

5．有 5 条线段，其长度分别为 1,3,5,7,9，从这 5 条线段中任取 3 条，所取的 3 条线段能拼成三角形的概率为_________.

解：设 $A=$能拼成三角形，则 $P(A)=\dfrac{3}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$

6．袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个黄球，30 个白球，甲、乙两人依次各取一球，取后不放回，甲先取，则乙取得黄球的概率为__________.

解$_1$：由抓阄的模型知乙取到黄球的概率为$\frac{2}{5}$.

解$_2$：设 $A=$乙取到黄球，则 $P(A)=\frac{C_{20}^1C_{19}^1+C_{30}^1C_{20}^1}{C_{50}^1C_{49}^1}=\frac{2}{5}$

或　$P(A)=\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}+\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}=\frac{2}{5}$.

7．设事件 A,B,C 两两独立，且 $ABC=\varnothing$, $P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，$P(A\cup B\cup C)=9/16$，则 $P(A)=$__________.

解：$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=3P(A)-3[P(A)]^2$$

$$16[P(A)]^2-16P(A)+3=0\ .$$

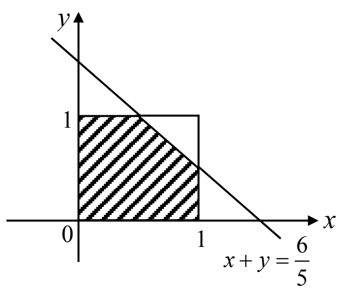
$P(A)=\frac{3}{4}$ 或 $P(A)=\frac{1}{4}$，由 $P(A)<\frac{1}{2}$ $\therefore$ $P(A)=\frac{1}{4}$.

8．在区间（0, 1）中随机地取两个数，则事件“两数之和小于 6/5”的概率为__________.

解：设 $A=$两数之和小于 6/5，两数分别为 x,y，由几何概率如图

$$A\text{发生}\Leftrightarrow \begin{cases}0<x<1\\0<y<1\\x+y<\frac{6}{5}\end{cases}$$

$$P(A)=\frac{S_{\text{阴}}}{S_{\text{正}}}=\frac{1-(1-\frac{1}{5})^2\cdot\frac{1}{2}}{1}=\frac{17}{25}$$



9．假设一批产品中一、二、三等品各占 60%、30%、10%，今从中随机取一件产品，结果不是三等品，则它是二等品的概率为__________.

解：A_i $=$取到 i 等品，$\overline{A}_3=A_1+A_2\supset A_2$

$$P(A_2\mid\overline{A}_3)=\frac{P(A_2\overline{A}_3)}{P(\overline{A}_3)}=\frac{P(A_2)}{P(A_1)+P(A_2)}=\frac{0.3}{0.6+0.3}=\frac{1}{3}$$

10．设事件 A,B 满足：$P(B\mid A)=P(\overline{B}\mid\overline{A})=\frac{1}{3}$，$P(A)=\frac{1}{3}$，则 $P(B)=$__________.

解：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(\overline{A\cup B})}{P(\bar{A})}=\dfrac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}$

$$=\frac{1-\frac{1}{3}-P(B)+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

（因为$P(AB)=P(A)P(B/A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$）

$\therefore\quad P(B)=\frac{5}{9}$.

11．某盒中有 10 件产品，其中 4 件次品，今从盒中取三次产品，一次取一件，不放回，则第三次取得正品的概率为__________，第三次才取得正品的概率为__________.

解：设 A_i ＝第 i 次取到正品，$i=1,2,3$ 则 $P(A_3)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ 或

$$P(A_3)=P(A_1A_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3}{5}$$

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{1}{10}=0.1$$

12．三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球，1 个白球；第二个箱子中有 3 个黑球，3 个白球；第三个箱子中有 3 个黑球，5 个白球. 现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出一个球，这个球为白球的概率为__________；已知取出的球是白球，此球属于第一个箱子的概率为__________.

解：设 A_i ＝取到第 i 箱　$i=1,2,3$，B＝取出的是一个白球

$$P(B)=\sum_1^3 P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{6}+\frac{5}{8}\right)=\frac{53}{120}$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}}{\frac{53}{120}}=\frac{20}{53}$$

13．设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为$1/9$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$__________.

解：由 $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$ 知 $P(A-B)=P(B-A)$

即　$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$　故　$P(A)=P(B)$，从而

$P(\overline{A})=P(\overline{B})$，由题意：

$$\frac{1}{9}=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=[P(\overline{A})]^2\text{，所以}P(\overline{A})=\frac{1}{3}$$

故 $P(A)=\dfrac{2}{3}$.

（由 A,B 独立 $\Rightarrow$ $\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 均独立）

14．设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 p．现进行 n 次独立试验，则 A 至少发生一次的概率为__________，而事件 A 至多发生一次的概率为__________.

解：设 $B=A$ 至少发生一次 $P(B)=1-(1-p)^n$,

$C=A$ 至多发生一次 $P(C)=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$

15．设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{A}{2+k}(k=0,1,2,3)$，则 $A=$__________，$P(X<3)=$__________.

解：$\displaystyle\sum_{k=0}^{3}P(X=K)=\frac{A}{2}+\frac{A}{3}+\frac{A}{4}+\frac{A}{5}=A(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})=1$

$\therefore\ A=\dfrac{60}{77}\quad P(X<3)=1-P(X=3)=1-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{60}{77}=\dfrac{65}{77}$

16．设 $X\sim B(2,p),\ Y\sim B(3,p)$，若 $P(X\geq 1)=5/9$，则 $P(Y\geq 1)=$__________.

解：$X\sim B(2,\ p)\qquad P(X=k)=C_2^k p^k(1-p)^{2-k}\quad k=0,1,2$

$Y\sim B(3,\ p)\qquad P(Y=k)=C_3^k p^k(1-p)^{3-k}\quad k=0,1,2,3.$

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-C_2^0p^0(1-p)^2=1-(1-p)^2=\dfrac{5}{9}$

$(1-p)^2=\dfrac{4}{9}\qquad 1-p=\dfrac{2}{3}\qquad p=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-(1-p)^3=1-(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{19}{27}$.

17．设 $X\sim P(\lambda)$，且 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $P(X\geq 1)=$__________，$P(0<X^2<3)=$__________.

解：$P(X=1)=\dfrac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}\Rightarrow\lambda=\dfrac{\lambda^2}{2}\Rightarrow\lambda=2(\lambda>0)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-2}$$

$$P(0 < X^2 < 3) = P(X = 1) = 2e^{-2}$$

18．设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A\sin x, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

则 $A =$__________，$P\left(|X| < \dfrac{\pi}{6}\right) =$__________.

解：$F(x)$ 为连续函数，$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} F(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} F(x) = F(\frac{\pi}{2})$

$$1 = A\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = 1.$$

$$P(|X| < \frac{\pi}{6}) = P(-\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{6}) = F(\frac{\pi}{6}) - F(-\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

19．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

则 $A =$__________，X 的分布函数 $F(x) =$__________.

解：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} Ax^2e^{-2x}dx = A(-\frac{1}{2})\left[x^2e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2xe^{-2x}dx\right]$

$$= A(-\frac{1}{2})\int_0^{+\infty} xde^{-2x} = \frac{A}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = -\frac{A}{4}e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A}{4} = 1$$

$A = 4$.

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(x)dx = 4\int_0^x x^2e^{-2x}dx = 4\int_0^x u^2e^{-2u}du = 1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}, & x > 0 \\ 0\ , & x \leq 0 \end{cases}$$

20．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0\ , & \text{其他}. \end{cases}$$

现对 X 进行三次独立重复观察，用 Y 表示事件 $(X \le 1/2)$ 出现的次数，则 $P(Y=2)=$__________.

解：$Y \sim B(3,\ p)$，其中 $p = P(X \le \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

$$P(Y=2) = C_3^2 p^2(1-p) = 3 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

21．设随机变量 X 服从 $[-a,\ a]$ 上均匀分布，其中 $a>0$.

（1）若 $P(X>1)=1/3$，则 $a=$__________；

（2）若 $P(X<1/2)=0.7$，则 $a=$__________；

（3）若 $P(|X|<1)=P(|X|>1)$，则 $a=$__________.

解：$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x \in [-a,\ a] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

（1）$P(X>1) = \frac{1}{3} = \int_1^a \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a}(a-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3.$

（2）$P(X<\frac{1}{2}) = 0.7 = \int_{-a}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a}(\frac{1}{2}+a) = \frac{1}{4a} + \frac{1}{2} = 0.7 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$

（3）$P(|X|<1) = P(|X|>1) = 1 - P(|X| \le 1) = 1 - P(|X|<1)$

$\therefore\ P(|X|<1) = \frac{1}{2} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \cdot 2 = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 2.$

22．设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，且关于 y 的方程 $y^2 + y + X = 0$ 有实根的概率为 $1/2$，则 $\mu=$__________.

解：$y^2 + y + X = 0$ 有实根 $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4X \ge 0 \Leftrightarrow X \le \frac{1}{4}$

$$P(X \le \frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \Rightarrow F(\frac{1}{4}) = \Phi(\frac{\frac{1}{4}-\mu}{\sigma}) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu = \frac{1}{4}.$$

23．已知某种电子元件的寿命 X（以小时计）服从参数为 $1/1000$ 的指数分布. 某台电子仪器内装有 5 只这种元件，这 5 只元件中任一只损坏时仪器即停止工作，则仪器能正常工作 1000 小时以上的概率为__________.

解：$Y=$ 仪器正常工作时间，则

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$P(Y \ge 1000) = P(X_1 \ge 1000 \cdots X_5 \ge 1000)$$

$$= P(X_1 \geq 1000) \cdots P(X_5 \geq 1000)$$

$$= [P(X \geq 1000)]^5$$

$$P(X \geq 1000) = \int_{1000}^{+\infty} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = e^{-1}$$

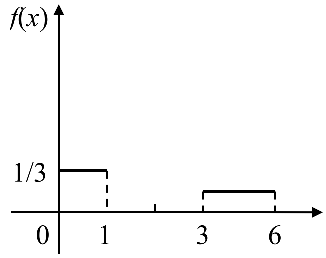
$\therefore \quad P(Y \geq 1000) = e^{-5}$

24．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & 若\ x \in [0,\ 1] \\ \dfrac{2}{9}, & 若\ x \in [3,\ 6] \\ 0\ , & 其他. \end{cases}$$

若 k 使得 $P(X \geq k) = 2/3$，则 k 的取值范围是__________.

解：$P(X \geq K) = \int_k^{+\infty} f(x)dx = \int_k^1 \frac{1}{3} dx + \int_3^6 \frac{2}{9} dx$



$$= \frac{1-k}{3} + \frac{2(6-3)}{9} = \frac{3-k}{3} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \quad k = 1$

$\therefore \quad k$ 的取值范围为 $[1,\ 3]$.

25．设随机变量 X 服从 $(0,\ 2)$ 上均匀分布，则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0,\ 4)$ 内的密度函数为 $f_Y(y) =$__________.

解：$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & x \in (0,\ 2) \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} P(|X| \leq \sqrt{y}) & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{y}} & 0 < y < 4 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

当　$Y=X^2$ 在（0，4）内时 $f_Y(y)=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

26．设 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $Y=\min(X,\ 2)$ 的分布函数 $F_Y(y)=$__________.

解$_1$：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\min(X,\ 2)\le y)=1-P(\min(X,\ 2)>y)$

$$=1-P(X>y,\ 2>y)$$

$$=\begin{cases}1-P(X>y)=P(X\le y)=F_X(y)=0 & y\le 0\\ F_X(y)=1-e^{-y} & 0<y<2\\ 1-0=1 & y\ge 2\end{cases}$$

解$_2$：设 X 的分布函数为 $F_X(x)$，2 的分布函数为 $F_2(z)$，则

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ \ \ 0\ \ , & x\le 0;\end{cases}\qquad F_2(z)=\begin{cases}0, & z<2,\\ 1, & z\ge 2;\end{cases}$$

$$F_Y(y)=1-[1-F_X(y)][1-F_2(y)]$$

$$=\begin{cases}0\ \ , & y\le 0,\\ 1-e^{-y}, & 0<y<2,\\ 1\ \ , & y\ge 2.\end{cases}$$

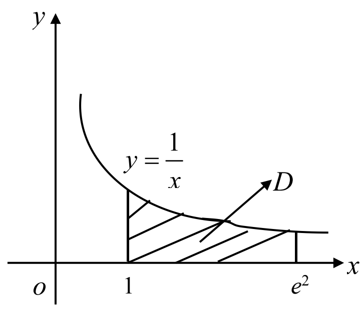
27．设二维随机变量 (X,Y) 在由 $y=1/x,\ y=0,\ x=1$ 和 $x=e^2$ 所形成的区域 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘密度在 $x=2$ 处的值为______.

解：$S_{阴}=\int_1^{e^2}(\dfrac{1}{x}-0)dx=\ln x\Big|_1^{e^2}=2$

$$\therefore\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x,y)\in D\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{2}dy=\dfrac{1}{2x} & 1\le x\le e^2,\\ \ \ 0 & 其它.\end{cases}$$



$f_X(2)=\dfrac{1}{4}$

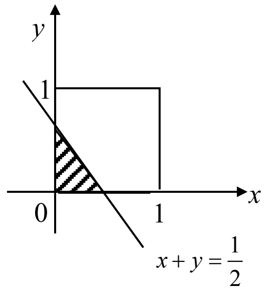
或　$f_x(2)=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}dy=\dfrac{1}{4}$

28．设随机变量 X,Y 相互独立且都服从区间 [0, 1] 上的均匀分布，则

$P(X+Y\le 1/2)=$__________.

解：$f_X(x)=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\\ 0 & 其它\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}1 & y\in[0,\ 1]\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\le x,\ y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$



$$P(X+Y\le\frac{1}{2})=\iint\limits_{S_{阴}} f(x,y)dxdy=S_{阴}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

29．设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim B(1,p),\ 0<p<1$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim$__________.

解：$\because\ X_i\sim B(1,p)$　　$\therefore\ X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim B(n,p)$

30．设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且有相同的概率分布 $P(X_i=1)=p$，$P(X_i=0)=q,\ i=1,2,3,\ p+q=1$，记

$$Y_1=\begin{cases}0, & 当\ X_1+X_2取偶数,\\ 1, & 当\ X_1+X_2取奇数,\end{cases}$$

$$Y_2=\begin{cases}0, & 当\ X_2+X_3取偶数,\\ 1, & 当\ X_2+X_3取奇数,\end{cases}$$

则 $Z=Y_1Y_2$ 的概率分布为__________.

解：

Z	0	1
P	$1-pq$	pq

$$P(Z=1)=P(Y_1=1,\ Y_2=1)=P(X_1+X_2=1,\ X_2+X_3=1)$$

$$=P(X_1=1,\ X_2=0,\ X_3=1)+P(X_1=0,\ X_2=1,\ X_3=0)$$

$$\overset{X_1X_2X_3独立}{=\!=\!=\!=\!=\!=}p^2q+pq^2=pq(p+q)=pq$$

$$P(Z=0)=1-p(Z=1)=1-qp$$

31．设 X 服从泊松分布.（1）若 $P(X\ge 1)=1-e^{-2}$，则 $EX^2=$__________；（2）若 $EX^2=12$，则 $P(X\ge 1)=$__________.

解：$P(X=K)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \qquad \lambda>0$

（1）$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\frac{\lambda^{\circ}}{0!}e^{-\lambda}=1-e^{-\lambda}=1-e^{-2}$

$\therefore \quad \lambda=2.$

$DX=\lambda=EX^2-(EX)^2=EX^2-\lambda^2 \quad \therefore \quad EX^2=\lambda+\lambda^2=2+4=6$

（2）$EX^2=12=\lambda+\lambda^2 \quad \lambda^2+\lambda-12=0 \qquad (\lambda+4)(\lambda-3)=0,\quad \lambda=3$

$P(X\ge 1)=1-e^{-\lambda}=1-e^{-3}$

32．设 $X\sim B(n,p)$，且 $EX=2,\ DX=1$，则 $P(X>1)=$__________.

解：$X\sim B(n,p) \quad EX=np=2$

$$DX=npq=1\Rightarrow q=\frac{1}{2} \qquad p=\frac{1}{2} \qquad n=4$$

$$P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-C_4^0(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^4-C_4^1(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^3=\frac{11}{16}$$

33．设 $X\sim U[a,b]$，且 $EX=2,\ DX=1/3$，则 $a=$______；$b=$______.

解：$X\sim U[a,b] \quad EX=2=\frac{a+b}{2}\Rightarrow a+b=4$

$$DX=\frac{1}{3}=\frac{(b-a)^2}{12}\Rightarrow (a-b)^2=4\Rightarrow b-a=2$$

$\therefore \quad a=1 \quad b=3$

34．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{-x^2+2x-1},\ -\infty<x<+\infty$，则 $A=$________，$EX=$________，$DX=$________.

解：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-(x-1)^2}dx=A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}dx}$

$$=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}dx}dx\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$EX=1$，$DX=\frac{1}{2}$.

35．设 X 表示 10 次独立重复射击中命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 X^2 的数学期望 $EX^2=$__________.

解：$X\sim B(10,0.4) \quad EX=np=10\times 0.4=4 \quad DX=npq=4\times 0.6=2.4$

$EX^2 = DX + (EX)^2 = 2.4 + 16 = 18.4$

36．设一次试验成功的概率为 p，现进行 100 次独立重复试验，当 $p=$________时，成功次数的标准差的值最大，其最大值为________.

解：$DX = npq = 100p(1-p) = -100p^2 + 100p = (-100)(p-\frac{1}{2}) + 25$

$p = \frac{1}{2}$，$\sqrt{DX}$ 有最大值为 5.

37. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布，且 $P(X \geq 1) = e^{-2}$，则 $EX^2 =$_______.

解：$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1) = e^{-2}$

$1 - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-2} \Rightarrow \lambda = 2$.

$EX = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$，$DX = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$，$\therefore$ $EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

38．设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} x, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad 0 < a < b,$$

且 $EX^2 = 2$，则 $a =$__________，$b =$__________.

解：$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b xdx = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \Rightarrow b^2 - a^2 = 2$ ①

$EX^2 = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b x^3 dx = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}(b^4 - a^4) = \frac{1}{4}(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)$

$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4$ ②

解（1）（2）联立方程有：$a = 1,\quad b = \sqrt{3}$.

39．设随机变量 X, Y 同分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x\theta^2, & 0 < x < 1/\theta, \\ 0\ , & \text{其他}, \end{cases} \qquad \theta > 0,$$

若 $E(CX + 2Y) = 1/\theta$，则 $C =$__________.

解：$EX = \int_0^{\frac{1}{\theta}} 2x^2\theta^2 dx = \theta^2 \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^{\frac{1}{\theta}} = \frac{2}{3\theta} = EY$

$E(CX + 2Y) = CEX + 2EY = (C+2)\frac{2}{3\theta} = \frac{1}{\theta}$

$(C+2)\frac{2}{3} = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

40．一批产品的次品率为 0.1，从中任取 5 件产品，则所取产品中的次品数的数学期望为________，均方差为________.

解：设 X 表示所取产品的次品数，则 $X \sim B(5,\ 0.1)$.

$$EX = np = 5\times 0.1 = 0.5,\quad DX = npq = 0.45\text{ ，}\sqrt{DX} = \sqrt{\frac{45}{100}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

41．某盒中有 2 个白球和 3 个黑球，10 个人依次摸球，每人摸出 2 个球，然后放回盒中，下一个人再摸，则 10 个人总共摸到白球数的数学期望为______.

解：设 X_i 表示第 i 个人模到白球的个数，X 表示 10 个人总共摸到白球数，则 $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$

X_i	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$EX_i = 1\times\frac{6}{10} + 2\times\frac{1}{10} = \frac{8}{10}$$

$$EX = 10EX_i = 10\times\frac{8}{10} = 8$$

42．有 3 个箱子，第 i 个箱子中有 i 个白球，$4-i$ 个黑球 $(i=1,2,3)$.今从每个箱子中都任取一球，以 X 表示取出的 3 个球中白球个数，则 $EX =$________，$DX =$_________.

解：

X	0	1	2	3
P	$\frac{6}{64}$	$\frac{26}{64}$	$\frac{26}{64}$	$\frac{6}{64}$

$$P(X=0) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{64}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{26}{64}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{26}{64}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{64}\qquad EX = \frac{3\times 26 + 18}{64} = \frac{3}{2}$$

$$EX^2=\frac{5\times 26+9\times 6}{64}=\frac{23}{8} \qquad DX=EX^2-(EX)^2=\frac{23}{8}-\frac{18}{8}=\frac{5}{8}.$$

43．设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布列为

(X,Y)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
P	0.4	0.2	a	b

若 $E(XY)=0.8$， $a=$________， $b=$________.

解：$EXY=0.2+2b=0.8\Rightarrow b=0.3$

$a+b=1-0.4-0.2=0.4\Rightarrow a=0.1$

44．设 X,Y 独立，且均服从 $N\left(1,\ \frac{1}{5}\right)$，若 $D(X-aY+1)=E[(X-aY+1)^2]$，则 $a=$________， $E|X-aY+1|=$________.

解：$D(X-aY+1)=E[(X-aY+1)^2]\Rightarrow E(X-aY+1)=0$.

$EX-aEY+1=0$，$1-a+1=0\Rightarrow a=2$.

令 $Z=X-aY+1,\quad EZ=0,\quad DZ=DX+a^2DY=1$.

$\therefore\quad Z\sim N(0,\ 1)$

$$\therefore\quad E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

45．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$________.

解：$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=EX^2-3EX+2=1$

$\because\quad X\sim P(\lambda)\quad \therefore EX=DX=\lambda,\ DX=EX^2-(EX)^2\Rightarrow EX^2=\lambda+\lambda^2$

$\therefore\quad \lambda+\lambda^2-3\lambda+2=1\ \Rightarrow\ \lambda^2-2\lambda+1=0\ \Rightarrow\ \lambda=1$.

46．设随机变量 $X\sim U[-2,\ 2]$，记

$$Y_k=\begin{cases}1, & X>k-1,\\ 0, & X\le k-1,\end{cases}\qquad k=1,2,$$

则 $\mathrm{Cov}(Y_1,\ Y_2)=$________.

解：$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x\in[-2,\ 2]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$P(Y_1=1,\ Y_2=1)=P(X>0,\ X>1)=P(X>1)=\int_1^2\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$$

$$P(Y_1=1,\ Y_2=0)=P(X>0,\ X\le 1)=P(0<X\le 1)=\int_0^1\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}$$

$P(Y_1=0,\ Y_2=0)=P(X\le 0,\ X\le 1)=P(X\le 0)=\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}\,dx=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$

$P(Y_1=0,\ Y_2=1)=P(X\le 0,\ X>1)=0$.

$Y_2 \backslash Y_1$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$EY_1=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$EY_2=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$EY_1Y_2=1\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ \ \mathrm{cov}(Y_1Y_2)=EY_1Y_2-EY_1\,EY_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

47．设 X,Y 是两个随机变量，且 $DX=1,\ DY=1/4,\ \rho_{XY}=1/3$，则 $D(X-3Y)=$__________.

解：$D(X-3Y)=DX+D(3Y)-2\,\mathrm{cov}(X,3Y)=DX+9DY-6\,\mathrm{cov}(X,Y)$

$$=1+\frac{9}{4}-6\cdot\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=1+\frac{9}{4}-6\times\frac{1}{3}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}.$$

48．设 $EX=1,\ EY=2,\ DX=1,\ DY=4,\ \rho_{XY}=0.6$，则 $E(2X-Y+1)^2=$__________.

解：$E(2X-Y+1)=2EX-EY+1=1$，$\rho_{XY}=0.6=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$

$\therefore\ \ \mathrm{cov}(X,Y)=0.6\times 1\times 2=1.2\qquad \mathrm{cov}(C,Y)=0$，$C$ 常数

$$D(2X-Y+1)=D(2X+1)+DY-2\,\mathrm{cov}[(2X+1),\ Y]$$

$$=4DX+DY-4\,\mathrm{cov}(X,Y)=4+4-4\times 1.2=3.2$$

$$E(2X-Y+1)^2=D(2X-Y+1)+[E(2X-Y+1)]^2=3.2+1^2=4.2\ .$$

49．设随机变量 X 的数学期望为 μ，方差为 σ^2，则由切比雪夫不等式知 $P(|X-\mu|\ge 2\sigma)\le$__________.

解：$P(|X-\mu|\ge 2\sigma)\le\dfrac{DX}{\varepsilon^2}=\dfrac{\sigma^2}{4\sigma^2}=\dfrac{1}{4}$.

50．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 独立同分布，且 $EX_i = 0,\ DX_i = 10,$ $i = 1, 2, \cdots, 100$，令 $\bar{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$，则 $E\{\sum_{i=1}^{100}(X_i - \bar{X})^2\} =$ ________.

解$_1$：$E(X_i - \bar{X}) = EX_i - E\bar{X} = 0$

$$D(X_i - \bar{X}) = D[X_i - \frac{1}{100}(X_1 + \cdots + X_{100})]$$

$$= D[(-\frac{1}{100})(X_1 + \cdots + X_{i-1} + X_{i+1} + X_{100}) + \frac{99}{100}X_i]$$

$$= (-\frac{1}{100})^2 \times 99 \times 10 + (\frac{99}{100})^2 \times 10$$

$$= \frac{99}{10} = E(X_i - \bar{X})^2 - [E(X_i - \bar{X})]^2 = E(X_i - \bar{X})^2$$

$$\therefore\quad E\{\sum_{i=1}^{100}(X_i - \bar{X})^2\} = \sum_{1}^{100} E(X_i - \bar{X})^2 = 100 \times \frac{99}{10} = 990$$

解$_2$：设 $X_1, \cdots, X_{100}$ 为总体 X 的样本，则 $S^2 = \frac{1}{99}\sum_{i=1}^{100}(X_i - \bar{X})^2$ 为样本方差，于是 $ES^2 = DX = 10$，即 $E\sum_{i=1}^{100}(X_i - \bar{X})^2 = 10 \times 99 = 990.$

51．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(\mu,\ 4)$ 的样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则当 $n \geq$ ________时，有 $E(\bar{X} - \mu)^2 \leq 0.1$.

解：

$$\left.\begin{array}{l} E\bar{X} = \mu,\ D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{n} \quad E(\bar{X} - \mu)^2 \leq 0.1 \\ E(\bar{X} - \mu) = 0,\ D(\bar{X} - \mu) = E(\bar{X} - \mu)^2 = \frac{4}{n} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \frac{4}{n} \leq 0.1 \\ n \geq 40. \end{array}$$

52．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 0－1 分布：$P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p$ 的样本，则 $E\bar{X} =$ ________，$D\bar{X} =$ ________，$ES^2 =$ ________.

解：$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad EX_i = p,\quad DX_i = pq = p(1-p)$

$$E\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot nEX_i = p \qquad D\bar{X} = \frac{1}{n^2} \cdot nDX_i = \frac{1}{n}p(1-p)$$

$$ES^2 = \frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2) = \frac{1}{n-1} \cdot [nEX_i^2 - nE\bar{X}^2]$$

$$= \frac{1}{n-1}[n(p(1-p) + p^2) - n(\frac{1}{n}p(1-p) + p^2)]$$

$$=\frac{1}{n-1}[np-p-(n-1)p^2]=p(1-p).$$

53．设总体 $X\sim P(\lambda),X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的一个样本，则 $E\overline{X}=$________，$D\overline{X}=$________.

解：$X\sim P(\lambda)\quad EX_i=DX_i=\lambda\quad E\overline{X}=\lambda\quad D\overline{X}=\dfrac{\lambda}{n}$

54．设总体 $X\sim U[a,b],X_1,X_2,\cdots X_n$ 为 X 的一个样本，则 $E\overline{X}=$________，$D\overline{X}=$________.

解：$X\sim U[a,b]\qquad EX=\dfrac{a+b}{2}\qquad DX=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

$$E\overline{X}=\frac{a+b}{2}\qquad D\overline{X}=\frac{(b-a)^2}{12n}$$

55．设总体 $X\sim N(0,\ \sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_6$ 为来自 X 的一个样本，设 $Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，则当 $C=$________时，$CY\sim\chi^2(2)$.

解：$E(X_1+X_2+X_3)=E(X_4+X_5+X_6)=0$

$$D(X_1+X_2+X_3)=D(X_4+X_5+X_6)=3DX_i=3\sigma^2$$

$$D[\frac{1}{\sqrt{3}\sigma}(X_1+X_2+X_3)]=\frac{1}{3\sigma^2}D(X_1+X_2+X_3)=1$$

$\therefore\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}\sigma}(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,\ 1)$，

$\dfrac{1}{\sqrt{3}\sigma}(X_4+X_5+X_6)\sim N(0,1)$ 且独立

$\therefore\quad C=\dfrac{1}{3\sigma^2}$

56．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{16}$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是样本方差，若 $P(\overline{X}>\mu+aS)=0.95$，则 $a=$________.

解：$P(\overline{X}>\mu+aS)=P(\dfrac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{16}\geq a\sqrt{16})=P(t\geq -t_{0.05}(15))=0.95$

查 t 分布表 $4a=-t_{0.05}(15)=-1.75\Rightarrow a=-0.4383.$

57．设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是正态总体 X 的样本，记

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6),\quad Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,\quad Z=\sqrt{2}(Y_1-Y_2)/S,$$

则 $Z\sim$__________.

解：设总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 则 $Y_1\sim N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{6})$　$Y_2\sim N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{3})$

且 Y_1 Y_2 独立，$\frac{Y_1-Y_2}{\sigma}\sqrt{2}\sim N(0,\ 1)$，而 $\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$.

故 $Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{\frac{Y_1-Y_2}{\sigma}\sqrt{2}}{\sqrt{2S^2/\sigma^2/2}}\sim t(2)$.

58．设总体 $X\sim U[-\theta\ ,\theta](\theta>0)$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本，则 θ 的一个矩估计为__________.

解：$EX=\frac{\theta-\theta}{2}=0,\quad DX=\frac{(2\theta)^2}{12}=\frac{\theta^2}{3},\quad \mu_1=EX=\int_{-\theta}^{\theta}x\frac{1}{2\theta}dx=0$

$$\mu_2=EX^2=DX+(EX)^2=DX=\frac{\theta^2}{3}\Rightarrow\theta^2=3\mu_2\Rightarrow\hat{\theta}=\sqrt{3a_2}$$

其中 $a_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

59．设总体 X 的方差为 1，根据来自 X 的容量为 100 的样本，测得样本均值为 5，则 X 的数学期望的置信度近似为 0.95 的置信区间为_________.

解：$\because$　X 不是正态总体，应用中心极限定理

$$U=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nEX}{\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-EX}{1}\times10\dot{\sim}N(0,\ 1)\qquad\alpha=0.05$$

$\Phi(\mu_{\alpha/2})=1-0.05/2=0.975\Rightarrow\mu_{0.025}=1.96$

使 $P(|u|<\mu_{0.025})=P(|\frac{\bar{X}-EX}{1}\times10|<1.96)=0.95$

EX 的置信区间为 $(\bar{X}-1.96\times\frac{1}{10},\ \bar{X}+1.96\times\frac{1}{10})=(4.804,\ 5,196)$

60．设由来自总体 $N(\mu,\ 0.9^2)$ 的容量为 9 的简单随机样本其样本均值为 $\bar{x}=5$，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是__________.

解：$\bar{\chi}=5,\ \sigma=0.9,\ n=9,\ \alpha=1-0.95=0.05,\ u_{\alpha/2}=\mu_{0.025}=1.96$

故置信限为：$\bar{\chi}\pm\mu_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5\pm1.96\frac{0.9}{3}=5\pm1.96\times0.3=5\pm0.588$

∴　置信区间为 $(4.412,\quad 5.588)$