第四章 随机变量的数字特征

北京化工大学数学系

苏贵福

在上一章介绍了随机变量的分布函数, 概率密度和分布律, 它们都能完整 地描述随机变量, 但在某些实际或理论问题中, 人们感兴趣于某些能 描述随机变量某一种特征的常数.

- 一篮球队上场比赛的运动员的身高 是一个随机变量, 人们往往关心上场运动员的平均身高.

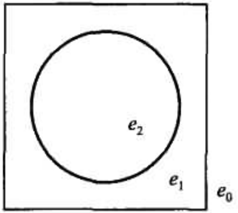
- 一个城市一户家庭拥有汽车 的辆数是一个随机变量, 在考察城市的交通情况时, 人们关心户均拥有汽车的辆数.

这种由随机变量的分布所确定的, 能够刻画随机变量某一方面的特征的常数统称为数字特征, 它在理论和实际中有着重要的应用.

4.1数学期望

一. 数学期望

例1 一射手进行打靶练习, 规定射入区域e_2得分2分, 射入区域e_1得分1分, 脱靶即射入区域e_0得分0分, 如下图所示.



射手一次射击得分数X是一个随机变量. 设X的分布律为

$$P\{X=k\}=p_k,\ \ k=0,1,2.$$

现在射击N次, 其中有a_0次得0分, a_1次得1分, a_2次得2分, 则

$$a_0+a_1+a_2=N.$$

他射击N次得分的总和为$a_0 \times 0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 2$. 于是平均每一次射击的得分为

$$\frac{a_0 \times 0 + a_1 \times 1 + a_2 \times 2}{N} = \sum_{k=0}^{2} k \frac{a_k}{N}.$$

其中$\frac{a_k}{N}$是事件$\{X = k\}$的频率. 第五章将会讲到

$$\text{当}N\text{很大时}\frac{a_k}{N} \to P\{X = k\} = p_k.$$

也就是说, 在试验次数很大时

$$\sum_{k=0}^{2} k \frac{a_k}{N} \to \sum_{k=0}^{2} k p_k.$$

我们称$\sum_{k=0}^{2} k p_k$为随机变量X的数学期望或均值.

定义1 设离散型随机变量X的分布律

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

绝对收敛, 则称级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$的和为随机变量$X$的数学期望, 记作

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k .$$

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛, 则称积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$的值为随机变量$X$的数学期望, 记作

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

♣ 数学期望$E(X)$完全由随机变量X的概率分布所确定. 若X服从某一分布, 也称$E(X)$也是这一分布的数学期望.

例2 某医院当新生儿诞生时, 医生要根据 婴儿的皮肤颜色, 肌肉弹性, 反应的敏感性以及心脏的搏动等方面的情况对婴儿进行评价, 新生儿的得分 X是一个随机变量. 根据以往的资料表明X的分布律为

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0.002	0.001	0.002	0.005	0.06	0.18	0.37	0.25	0.13

试求X的数学期望$E(X)$.

解 根据期望的定义

$$
\begin{aligned}
E(X) =& 0 \times 0.002 + 1 \times 0.001 + 2 \times 0.002 + 3 \times 0.005 + 4 \times 0.06 \\
&+ 5 \times 0.18 + 6 \times 0.37 + 7 \times 0.25 + 8 \times 0.13 \\
=& 6.17.
\end{aligned}
$$

表明若考察医院出生的很多新生儿, 例如1000个, 那么一个新生儿 的平均得分约6.17分, 1000个新生儿共得分约6170分. ■

例3 有两个相互独立工作的电子装置，它们的寿命$X_k(k=1,2)$服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\theta>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

若将这两个电子装置串联组成整机. 试求整机寿命N的数学期望$E(X)$.

解 $X_k\ (k=1,2)$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

根据题意整个系统的寿命为$N=\min\{X_1,X_2\}$，相应的分布函数为

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}1-e^{-\frac{2x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

因而N的概率密度为

$$f_{\min}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

于是N的数学期望为

$$E(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\min}(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}} dx = \frac{\theta}{2}.$$

二. 几类重要的数学期望

例4 设随机变量$X \sim N(0,1)$, 则$E(X) = p$.

证明 因为X的分布律为

$$P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, \quad (k = 0, 1, 0 < p < 1).$$

因此X的期望为

$$E(X) = \sum_{k=0}^{1} kP\{X = k\} = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

例5 设随机变量$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, 则$E(X) = \lambda$.

证明 因为X的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

因此X的期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

- 指数函数e^x的泰勒展开公式为

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

例6 设随机变量$X \sim \mathcal{B}(n,p)$, 则$E(X) = np$.

证明 因为X的分布律为

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

因此X的期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP\{X=k\} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{令}k' = k-1). \end{aligned}$$

注意到$\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'![(n-1)-k']!} p^{k'} (1-p)^{[(n-1)-k']} = [p+(1-p)]^{n-1}$. 于是

$$E(X) = np\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'![(n-1)-k']!} p^{k'} (1-p)^{[(n-1)-k']} == [p+(1-p)]^{n-1} = np.$$

例7 设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则$E(X) = \mu$.

证明 已知X的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

因此X的期望为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

令$\frac{x-\mu}{\sigma} = t$, 则有

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \mu. \end{aligned}$$

三. 随机变量函数的数学期望

定理1 设Y是随机变量X的函数$Y=g(X)$, 其中g是连续函数.

(1) 若X是离散型随机变量, 它的分布律为$P\{X=x_k\}=p_k$, $(k=1,2,\cdots)$, 且$\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$绝对收敛, 则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k.$$

(2) 若X是连续型随机变量, 它的密度函数为$f(x)$, 且$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$绝对收敛, 则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx.$$

定理2 设Z是随机变量X, Y的函数$Z = g(X, Y)$, 其中g是连续函数.

(1) 若二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \ (i, j = 1, 2, \cdots).$$

如果$\sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{ij}$绝对收敛, 则有

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}.$$

(2) 若二维连续型随机变量(X, Y)的联合密度函数为$f(x, y)$. 如果$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$绝对收敛, 则有

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy.$$

例8 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	3
p_k	0.2	0.7	0.1

求X^2和$3X-1$的数学期望.

解 列出下表

X	-1	0	3
p_k	0.2	0.7	0.1
X^2	1	0	9
$3X-1$	-4	-1	8

根据期望的定义 $E(X^2) = 1 \times 0.2 + 0 \times 0.7 + 9 \times 0.1 = 1.1.$

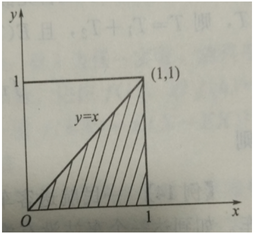
$$E(3X-1) = -4 \times 0.2 + (-1) \times 0.7 + 8 \times 0.1 = -0.7.$$

例9 设二维随机变量(X, Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 12y^2, & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求$Z=X^2+Y^2$的数学期望.

解 易知$f(x,y)$不等于0的区域如图虚线三角区域所示. 则有



$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)12y^2dy=\frac{16}{15}.$$

四. 数学期望的性质

定理3 设X, Y是随机变量, C是常数, 则

(1) $E(C) = C$.

(2) $E(CX) = CE(X)$.

(3) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

(4) 当X, Y相互独立时, 有$E(XY) = E(X)E(Y)$.

证明 设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为$f(x, y)$, 其边缘密度函数为$f_X(x)$, $f_Y(y)$. 则根据定理2有

$$E(X + Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y) f(x, y) dxdy.$$

进而有

$$\begin{aligned}E(X+Y)=&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy\\&+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy\\=&E(X)+E(Y).\end{aligned}$$

又若X和Y相互独立时，有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. 进一步有

$$\begin{aligned}E(XY)=&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)dxdy\\=&\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy\right]\\=&E(X)E(Y).\end{aligned}$$

其余结论可以类似地证明!

例10 两台同样自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为5的指数分布. 首先开动其中一台，当其发生故障 时停用而另一台自行开动. 试求两台记录仪无故障工作的总时间T的数学期望.

解 设第一，二台无故障工作的时间分别为T_1, T_2，总的无故障工作时间为T. 则$T = T_1 + T_2$，且$E(T) = E(T_1) + E(T_2)$. 我们知道

$$f_{T_1}(t) = f_{T_2}(t) = \begin{cases} 5e^{-5t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

于是所求的期望为

$$E(T) = 2\int_0^{+\infty} t \cdot 5e^{-5t} dt = \frac{2}{5}.$$

例11 一民航送客车载有20名旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以X表示停车的次数. 求X的数学期望. (设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立)

解 引入随机变量X_i $(i=1,2,\cdots,10)$:

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{在第}i\text{站没有人下车}\\ 1, & \text{在第}i\text{站有人下车}\end{cases}$$

则有$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$. 按题意任一旅客在第i站不下车的概率为$\frac{9}{10}$，因此20位旅客都不在 第i站下车的概率为$\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$，而在第$i$站有人下车的概率为$1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$.

也就是说

$$P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$$
$$P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}.$$

于是有

$$E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}, \quad (i=1,2,\cdots,10).$$

由此可得

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$$
$$=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784.$$