实施例18。

注20。 对角矩阵，三角形（上和下），并对称稳定的基质产物。然而，没有反对称矩阵当心！

定理7. @ λ P 沃顿知识 *A*，*B* P 中号 *N*,*P* p ķ q 中号 *P*,*Q* p ķ q ǐ p λ*AB* q" λǐ 乙ǐ 一

定义22。 这自然定义 *权力 ķ 日* 矩阵 *中号* P 中号 *ñ* p ķ 问：

- 一 0 " *我 ñ*
- @ *ñ* P ñ 一 *N*`1 " 一 ˆ 一 *ñ*

定理8。 *让 一 和 乙 两个方形矩阵，开关（即 AB" BA）。 则：*

- p *A*`*B* q *ñ* " *ñ* ÿ ˆ *NK* 一 *ñ*" *ķ* 乙 *ķ*。（*牛顿式*） *ķ*" 1
- 一 *N*`1 " 乙 *N*`1 "P. 一 " 乙 q ⌒ *ñ* ÿ ˛ 一 *ñ*" *ķ* 乙 *ķ* 。 *ķ*" 0

样品4。 在完全相同的方式为真正复杂的地方：通过感应与指数的变化来继承示范，这让 p *在B点* q *N*`1 "P. *A*`*B* q *ñ* p *A*`*B* Q值。 它必须是JUSTI网络版的利弊，何时何地，我们使用可交换的假设。同样的分解 一 *ñ* " 乙 *ñ*。

应用1。 我们要计算 一 *N*, 同 一 " ˝ 1 2 3 0 1 2 0 1 ‚. 它还试图矩阵 乙 这样

那 *AB* " *BA* " *我* 3。

1-令 *ñ* " 一 " *我* 3。计算 *ñ* 2 *ñ* 3 和 *ñ* 4。

2派生 *ñ* *ķ* 为 *ķ* ED 4。

3-随着牛顿公式，推导出一个简单的形式 一 *ñ*。

4-与式因式分解推导出矩阵 *B.*

注21。 让 一P 中号 N, P p ķ q 乙P 中号 P, Q p ķ Q值。 要计算的产品 一 和 乙 它有时会打破“块”有用：我们将分离矩阵 一 和 乙 成4个块，如下所示：

SP“ 小号

一“ ñ 一1 一3 一2 一4 p 和 乙“ p 乙1 乙3 乙2 乙4 q 小号 p“ 小号

所以，当我们计算 一ˆ 乙 一切发生，因为如果我们将两个矩阵相乘2ˆ2（但是请注意乘法的顺序！）。需要注意的是与分离 小号 列 一 和 小号 对于线 乙 它是保证所有的产品都是兼容的位置：

一ˆ 乙“ ñ 一1 乙1` 一2 乙3 一1 乙2` 一2 乙4 一3 乙1` 一4 乙3 一3 乙2` 一4 乙4 q

此方法是Strassen的算法，其允许矩阵乘法的更快的计算的基础。此外，该方法可以被概括的，因为它确保了雕刻是如果兼容

一“ 一1.1 一1 小号 一[R1 一R, S ñ 单独的行 在 [R 组 p 单独的列 在 小号 组

和 乙“ 乙1.1 乙1 Ť 乙小号1 乙S, T p 单独的行 在 小号 组 q 单独的列 在 Ť 组

并且该产品是兼容的：

@ 我P � 1; [R DP ñI, J, K, pI, J, K, qI, J, K q P构成 ñ ˆ 3{ 一I, KP 中号 ñI, J, K, pI, J, K p ķ q

@ ĴP � 1; Ť 乙K, JP 中号 pI, J, K, qI, J, K p ķ q

@ ķP � 1; 小号 （因此，我们可以计算出 一I, K 乙K, J）

那么我们可以这样写：

一ˆ 乙“ ç“ ç1.1 ç1 Ť ç小号1 çS, T 同 çI, J“ 小号 ÿ ķ“ 1 一I, K 乙K, J

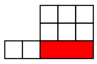
这往往发生在使用感应，当你考虑的第一列分享一种特殊的情况 p p“ 1 q 剩下的; 那么，我们有这样的情况：

有 该– b 该Z ç– 一1 çZ 乙1

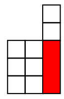
有：
A, B P ķ
一1 P 中号 ñ ˆ 1 p ˆ 1 p ķ q
乙1 P 中号 p ˆ 1 q ˆ 1 p ķ q

该 – P 中号 1 p ˆ 1 p ķ q
该 Z P 中号 1 q ˆ 1 p ķ q
ç – P 中号 ñ ˆ 1.1 p ķ q
ç Z P 中号 p ˆ 1.1 p ķ Q值。

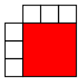
这让我们回忆起行，列之间的mutltiplication的一些有用的特性，并且死：



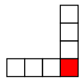
中号 $_{1p}$ p k q 中号 $_{P,Q}$ p k 将q个n 中号 $_{1q}$ p k q



中号 $_{P,Q}$ p k q 中号 $_{q1}$ p k 将q个n 中号 $_{q1}$ p k q



中号 $_{N,1}$ p k q 中号 $_{1p}$ p k 将q个n 中号 $_{N,P}$ p k q



中号 $_{1p}$ p k q 中号 $_{p,1}$ p k 将q个n 中号 $_{1.1}$ p k q

实施例19。 使用公选择了一个分解块，可以计算非常ËFFI ciently产物：

¨°°˝ “ 1 3 2 3 <<˛ , ˆ ¨°°˝ 2 0 2 0 0 1 0 0 <<˛ ,

1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1

0 0 1

5-矩阵的基本操作

5.A) 通用去网络nition 23。 让 *我* 一组， p *I* , *J* q P构成 *我* $_2$ 叫 克罗内克符号 的 *I* , *J* :

δ $_{I,J}$“ # 1，如果 *我*“ *Ĵ*
否则为0。

注22。 如果 *我*“ � 1; *ñ* ， 然后 p *δ* $_{I,J}$ q $_{我P�1;ñ, ĴP�1;ñ}$“ *我* $_{ñ}$。

命题14。 让 *我* 一组，p *I*，*J*，*K* q P构成 *我* 3 则：

1- *δI*, *J* *δJ*, *K*" *δI*, *K*。

2- ÿ 有 ķ *δI*, *K*" 有 *我*

ķ P *我*

3- ÿ 有 *P*, *K* *δK*, *Q*" 有 *P*, *Q*

ķ P *我*

定义24。 让 *ñ* 和 *p* 两个上或整数等于1.我们称之为矩阵 *ËI*, *J* 的 中号 *N*, *P* p ķ q
其中所有的COE FFI cient为零，除了在矩阵 *I*- 日线 *J*- 列：

J- 列

p 0 q p 0 q

ËI, *J*"P. *δI*, *K* *δL*, *K* q ķ P � 1; *ñ* �
升 P � 1; *p*" 1 *I*- 日线

p 0 q p 0 q

命题15。 让 p *N*，*P*，*Q* q P构成 ñ˚3 和 *我* P � 1; *ñ*，*Ĵ* P � 1; *p*，ķ P � 1; *p*，升 P � 1; *q*。 让我们再
ËI, *J* P 中号 *N*, *P* p ķ q 和 *ËK*, *L* P 中号 *P*, *Q* p ķ q 则：

ËI, *J* *ËK*, *L*" *δJ*, *K* *ËIL* P 中号 *N*, *Q* p ķ q

因此，该产品是 **0** *N*, *Q* 如果 *Ĵ*‰ ķ 如果 *Ĵ*" ķ 那么这是矩阵 *ËI*, *L*。

实施例20。

定义25。 让 *ñ* P ñ *λ* P ķ ZT 0 U，和 p *I*，*J* q P构成 � 1; *ñ* � 2 同 *我*‰ *学家* 然后定义在下面的矩阵 中号 *ñ* p ķ q 说 **基本操作矩阵：**

- **矩阵transvection**

J- 列

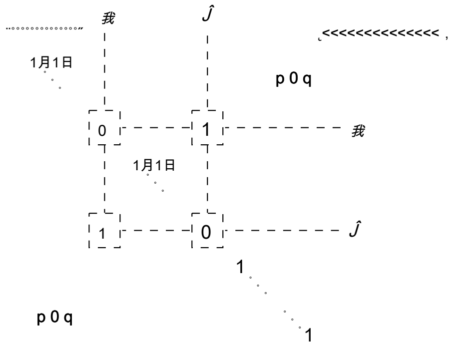
1 p 0 q

üI, *J* p *λ* q" *我 ñ* *λEI*, *J*" *λ* *I*- 日线

p 0 q 1

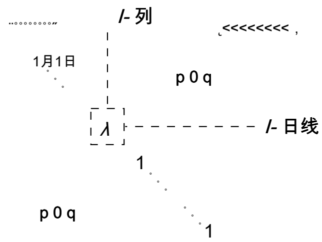
- 置换矩阵

Ť*I, J*“ 我*ñ*“ *Ë*我, 我“ *Ë* , *J*将· *ËI, J*· *ËJ, I*“



- 基质扩张

*d*我 p *λ* q“ 我*ñ*· p *λ*“ 1 q *Ë*我, 我“



定义26。 他们呼吁 **榆树** *ñ* p ķ q 基本操作的所有矩阵，它们所有可能的产品：

$ " '和' " % Ť *üI, J* p *λ* Q , P *I* , *J* q P构成 � 1; *ñ* �2 我‰ *Ĵ* , *λ* P ķ ü — 谩 **榆树** *ñ* p ķ q

榆树 *ñ* p ķ q“ — Ť *ŤI, J,* p *I* , *J* q P构成 � 1; *ñ* �2 我‰ *Ĵ* ü — 谩 **榆树** *ñ* p ķ q

Ť *d*我 p *λ* q 我P � 1; *ñ* , *λ* P ķ *λ* ‰ 0 ü — 谩 **榆树** *ñ* p ķ q

@ *A* , *B* P **榆树** *ñ* p ķ q2 一ˆ 乙 P **榆树** *ñ* p ķ q

命题16。 ， *üI, J* p *λ* q *üI, J* p” *λ* q“ 我*ñ* ， *ŤI, J ŤI, J*“ 我*ñ* ， *d*我 p *λ* q *d*我 p *λ*-1 q“ 我*ñ*

注23。 因此，我们 *我ñ* P **榆树** *ñ* p ķ Q值。 他们说， **榆树** *ñ* p ķ q 是 *由生成的组* 基本操作的矩阵。

实施例21。

5.B）每行等价

我们只是定义矩阵对应于基本运算上的系统，其中一个矩阵的行， *左乘法*

命题17。 是否 p *Ë* q 制度 *ñ* 线性方程组 *p* 不明 －P 中号 *N*, *p*˙1 p ķ q 增广矩阵相关联。我们必须通过矩阵乘法左下面等价

榆树 *ñ* p ķ 问：

该我 d *该我˙ λL J*DN －Ñ *ü I*, *J* p *λ* q *AL 我*Ø *该 J*

DN －Ñ *Ť I*, *J* －

该我 d *λL 我*　　DN －Ñ *d 我* p *λ* q －

请注意，这些操作总是可能的，并保持的尾巴 － 因为基本操作的矩阵是在 中号 *N*, *N*- p ķ q

建议18。 让 p *Ë* q 和 p *Ë*₁ q 两个系统 *ñ* 线性方程组 *p* 不明 *A*，*A*₁P
中号 *N*, *p*˙1 p ķ q 2 相关联的增广矩阵。

p *Ë* q ˙ *该* p *Ë* 1 q DN －˙ *该* －1 DN d *Ë* P **榆树** *ñ* p ķ q { *EA*" －1

这是翻译，以基本操作矩阵的两个矩阵是通过线等价的，如果存在的初级转化操作到彼此的序列。

定理9 @ *中号* P 中号 *N*, *P* p ķ Q，d！ *[R* P 中号 *N*, *P* p ķ Q，d *Ë* P **榆树** *ñ* p ķ q {#

[R 交错减少

EM" *[R*

注24。 我们已经看到左边是乘以一个矩阵 榆树 *ñ* p ķ q 返回到上线的基本操作。它-发生，如果我们乘吧？请看下面的例子：

¨˝ 1 " 1 2 3 0 " 2 1 2̧， － －ˆ *d*₂ p 3 q"　　¨˝ 1 " 1 2 3 0 " 2 1 2̧，ˆ ¨˝ 1 0 0 0 3 0 0̧，" ¨˝ 1 " 3 2 3 0 " 2 1 6̧，

0 1

－"

1　　1　　1

请注意，相关的基本操作 *d*₂ p 3 q（ 由3乘法）是在第二列（而不是第二线）在线FFectuée。事实上，它是一个更一般的结果： ***由矩阵乘法右*** **榆树** *ñ* p ķ q ***对应于各列的操作。***

定义27。 作为上述表示的结果是，它定义的列的基本操作如下：

－Ñ *TO I*, *J* p *λ* q　　$\overset{\Delta}{\text{DN}}$ *ç 我* d *ç 我˙ λC J*

－Ñ *AT I*, *J*　　$\overset{\Delta}{\text{DN}}$ *ç 我* Ø *ç J*

－Ñ *AD 我* p *λ* q　　$\overset{\Delta}{\text{DN}}$ *ç 我* d *λC 我*

注25。 在解决制度而言，这无异于不同的变化。例如，操作 *ç 我* Ø *ç J* 交换变量 *X 我* 和 *X 学家* 操作 *ç 我* d *λC 我* 对应于变量的变化 *X* 1 *我*" *λx 我* 和操作 *ç 我* d *ç 我˙ λC J* 对应于变量变化（非平凡） *X* 1 *J*" *XJ*" *λx 我*。

注26。 用矩阵符号，解决系统

$"""和"""%

有 1.1 X1` ""` 有 1 J` ""` 有 1 p Xp" b1

pË问： 有我 1 X1` ""` 有 I, J` ""` 有 I, P Xp" b我 ，同 一" ""˝ 有 1.1 ""` 有 1 p ˛<,, 和 乙" ""˝ b1 ˛<,

有 N, 1 X1` ""` 有 ñ, J` ""` 有 N, P Xp" bñ 有 N, 1 "" 有 N, P bñ

""˝ X1 ˛<，方程 AX" B.

返回解决 X"

Xñ

注27。 在体 ķ 方程 斧" b 很容易解决。据苏FFI冒这个项目
有 -1（扭转，一个用于，根据定义，有 -1 有"1），和乘法两侧方程：
有 -1 斧" 有 -1 b" X 这里résoulue。解决系统是类似的问题，我们将研究的存在（或不）和矩阵潜在逆的性质。

6-逆转模具

定义28。 是否 一P 中号 ñ p ķ Q值。 一表达 **翻转** 当 d 乙P 中号 ñ p ķ q { AB" BA" 我 ñ。
然后，它笔记 乙" 一 -1。

注28。 可逆矩阵必然是正方形。这将是很难做出逆的定义意义的长方形矩阵。。。

命题19。 下面的含义是VERI网络编辑：

- 一翻转 一 一 -1（和 p 一 -1 q -1 "A.。。）
- A，B 翻转 一 AB 可逆的，p AB q -1 " 乙 -1 一 -1
- 一翻转 一 一 ñ 可逆的，p 一 ñ q -1 "P. 一 -1 q N（" 一 -ñ 被标记的滥用）
- 一翻转 一 ť 一和逆转 p ť 一 q -1 " ť p 一 -1 Q（" ť 一 -1 被标记的滥用）

定义29。 注 GL ñ p ķ q 集合大小的可逆矩阵的 N，在以COE FFI cient K.
这套被称为 线性组 ķ N，为此，我们将在后面具体说明原因。

注29。 GL ñ p ķ q 稳定 ，和 是联想 GL ñ p ķ q 和具有中性元素：
我 ñ。 此外，任何项目 GL ñ p ķ q 有逆 ，使其成为一个 *组。*
GL ñ p ķ q 也是稳定 ť ¨，但不是`！

建议20。 我们有：

- 我 ñ P GL ñ p ķ q 我 -1 ñ " 我 ñ
- 0 ñ [R GL ñ p ķ q Ë I, J [R GL ñ p ķ q
- **楡树** ñ p ķ q A GL ñ p ķ q 同 ü I, J p λ q -1 " ü I, J p" λ q 等等 。。

注30。 下面的定理给出了相同的性别 **楡树** ñ p ķ q 和 GL ñ p ķ q 因为这两套其实 *等价类* 的 我 ñ 为 -L。。

定理10。 *让 ñ* P ñ·，一 P 中号 *ñ* p ķ Q值。 *是等价的：*

*我）*一 P GL *ñ* p ķ q

*II）*一·*该我 ñ*

三）一有秩 ñ

IV）@ X P 中号 *N*，1 p ķ q *AX*“ *0N*，1 一 *X*“ *0N*，1

样品5。

方法3的矩阵A的逆矩阵的计算

I-。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。III。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。

。。。。II。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。IV。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。