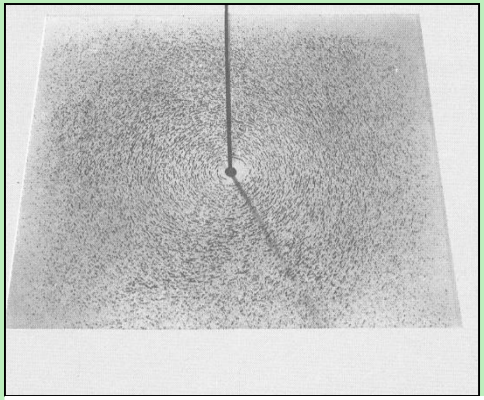
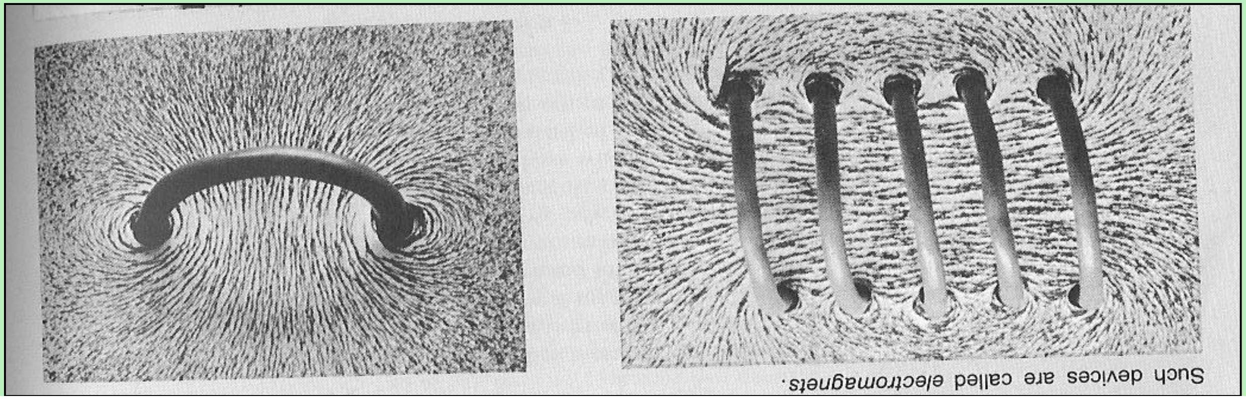
稳恒磁场两条重要的基本定理

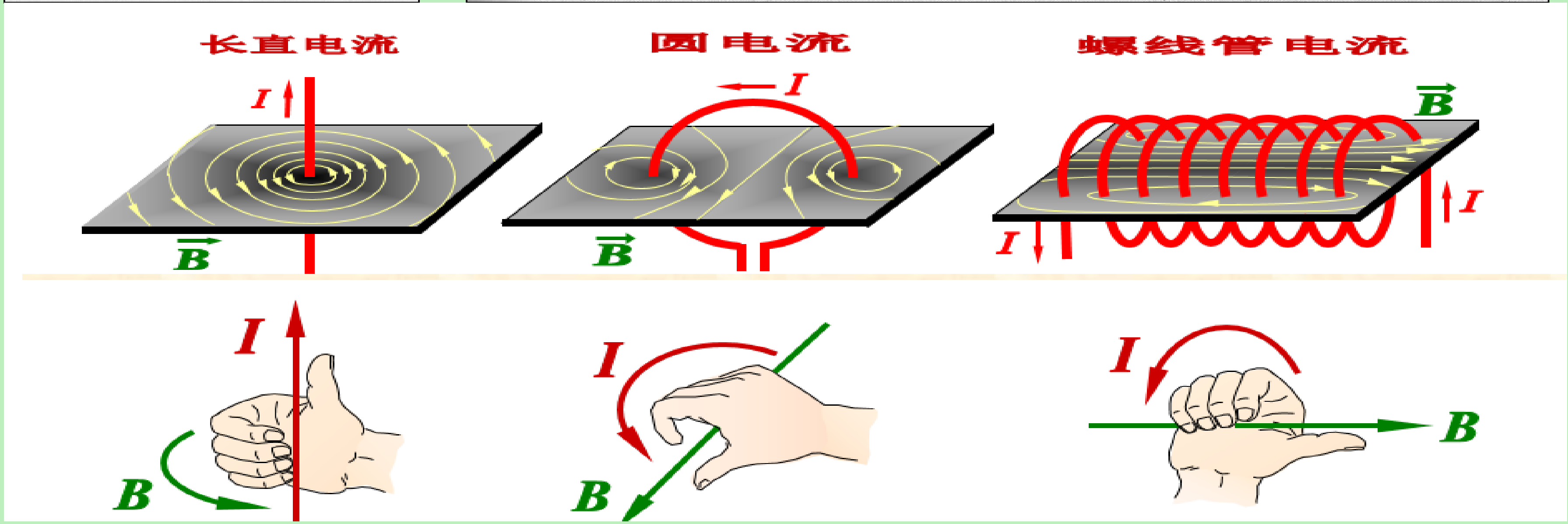
two theorems about the character of magnetic field

§ 7.5 磁通量 磁场的高斯定理

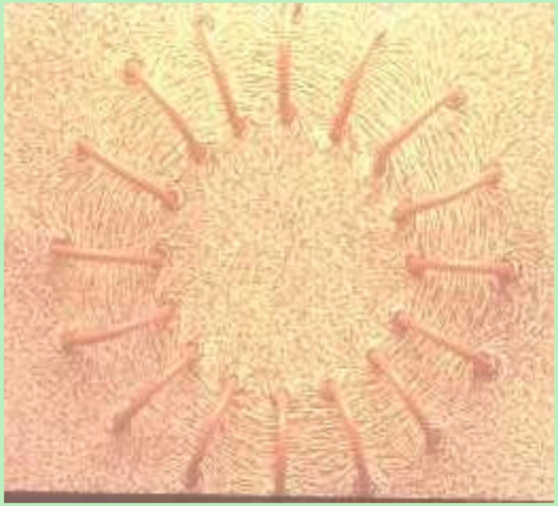
一、磁感应线($\vec{B}$ 线)

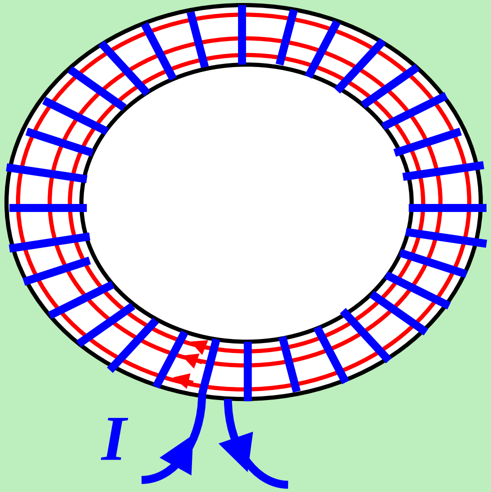






载流环形螺线管





规定

- 曲线任一点切线方向与该点 $\vec{B}$ 方向一致.
- 垂直于通过某点附近单位面积的 $\vec{B}$ 线(即 $\vec{B}$ 线密度)等于该点 $\vec{B}$ 的大小.

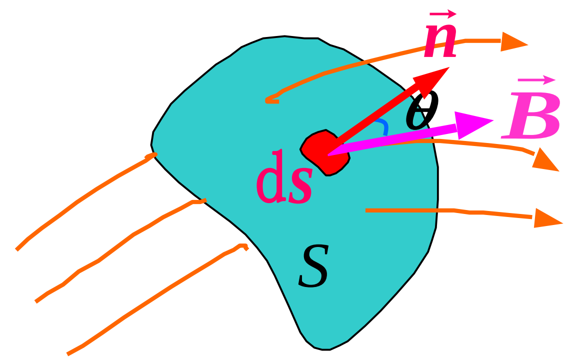
特点

- $\vec{B}$ 线恒闭合，既无起点，也无终点.
- $\vec{B}$ 线不能相交.
- $\vec{B}$ 线方向与电流流向组成右手螺旋关系.

二、磁通量　磁场的高斯定理

1. 磁通量 Φ_{m} :通过给定曲面的总磁感线数。

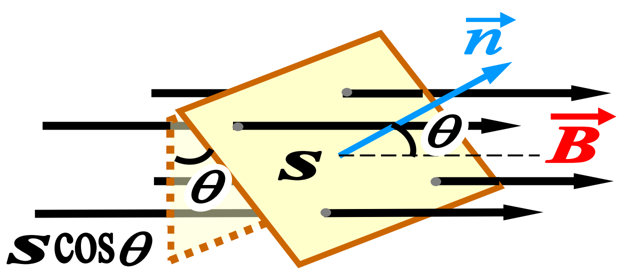
$$\mathrm{d}\Phi_m = B\cos\theta\,\mathrm{d}S = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



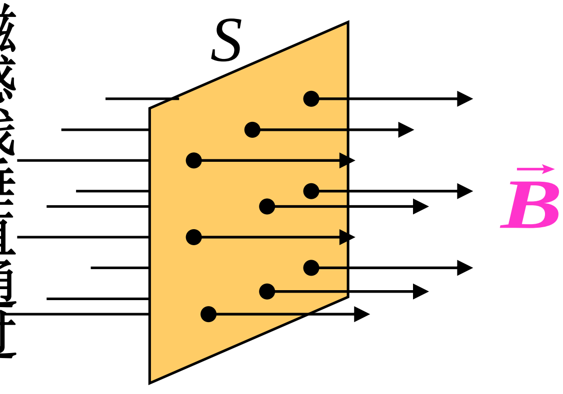
$$\boxed{\Phi_m = \iint_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}} = \iint_s B\,\mathrm{d}S\cos\theta$$

SI单位：韦伯(Wb)　　1Wb=1T·m^2

讨论：(1)均匀磁场中的磁通量



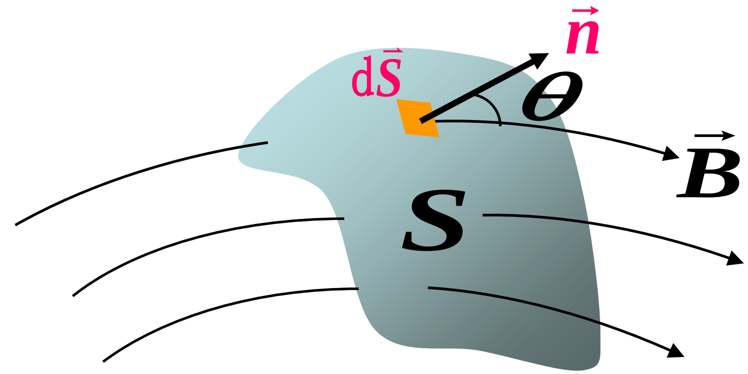
磁感线垂直通过S



$$\Phi_m = B\cos\theta\,\mathrm{d}S = \vec{B}\cdot\vec{S}$$

$$\Phi_m = BS$$

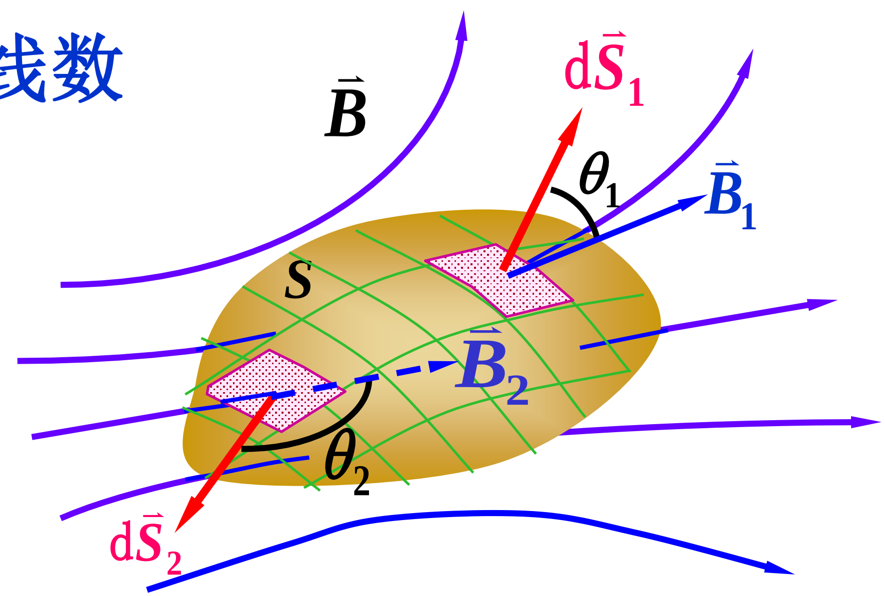
$$\Phi_m = \iint_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_s B\,dS\cos\theta$$

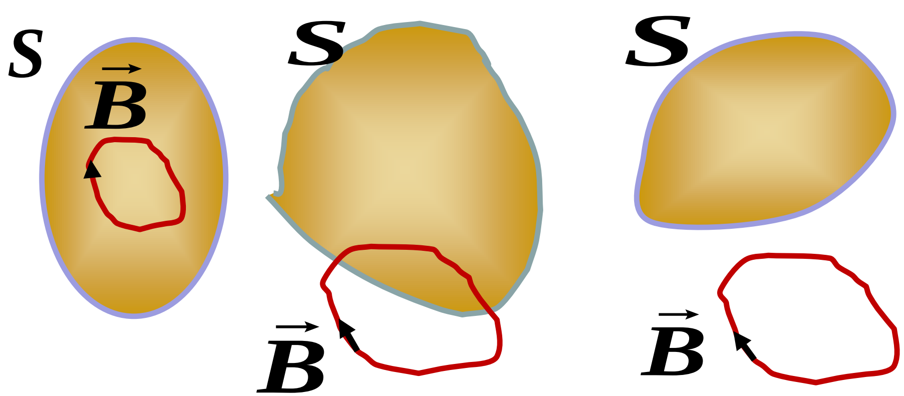


讨论：(2)通过任意封闭曲面的磁通量

$$\Phi_m = \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oiint_S B\cos\theta\, dS = 0$$

=净穿出封闭曲面的磁感线数





磁感线穿入：Φ_m为负

磁感线穿出：Φ_m为正

2. 磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$ --通过任意封闭曲面的磁通量等于零

说明：（磁场是由电流产生的情况）

1）磁力线是无头无尾的闭合曲线，

2）磁场是无源场，磁场无磁荷存在。

比较：静电场高斯定理

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

1）电场线不闭合，

2）静电场是有源场，有单独的正、负电荷存在。

稳恒磁场和静电场的高斯定理的比较

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{n} q_i$$ —静电场是有源场　电场线不闭合

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$ —磁场是无源场　磁感应线闭合

再比较：

静电场中：$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ —静电场是保守场

稳恒磁场：$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?$ —磁场是？

§ 7.5 安培环路定理

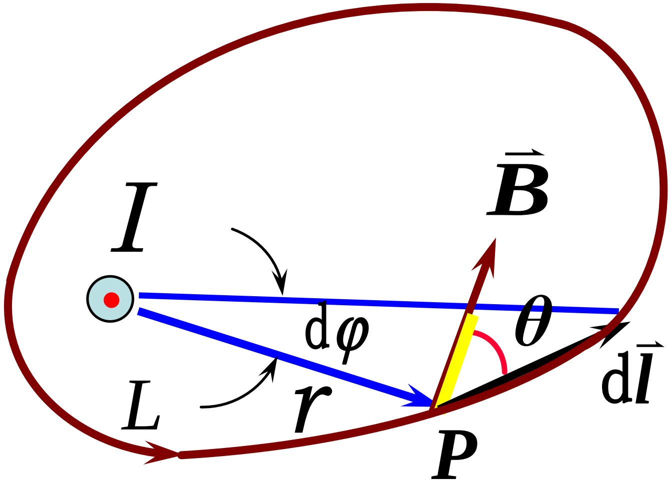
一、定理表述

真空中的稳恒电流磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任一闭合回路L的线积分等于路径L所包围的电流的代数和的μ_0 倍。

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i内}$$

二、验证 （无限长载流直导线特例）

1. 积分回路包围长直电流且在与直电流垂直的平面内



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi \cancel{r}} \cancel{r}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L \mathrm{d}\varphi = \mu_0 I$$

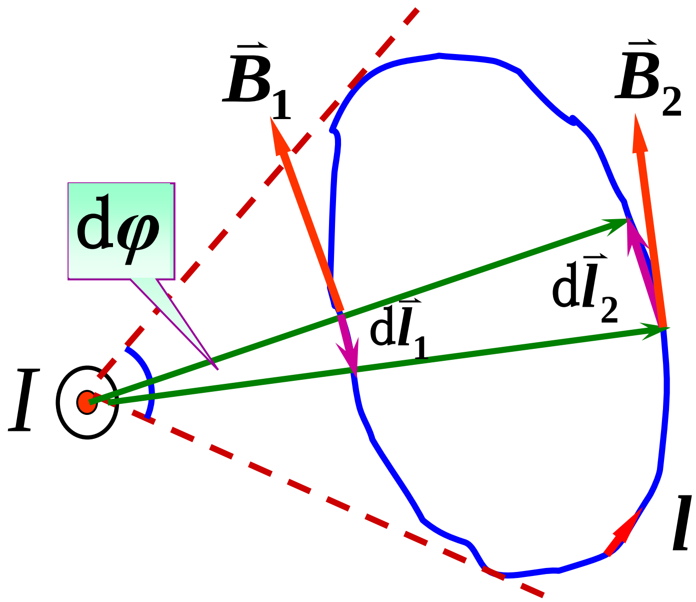
$$\cos\theta \mathrm{d}l = r\mathrm{d}\varphi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

2.积分回路不包围长直电流：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \cdots$$



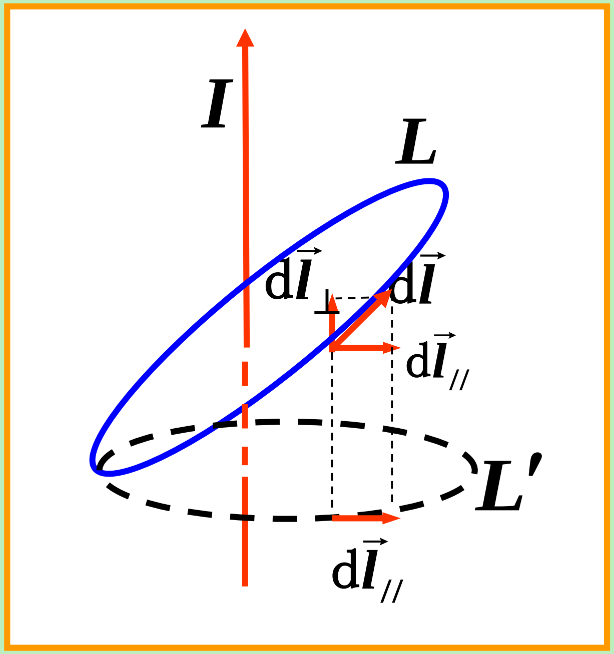
$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$\vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

安培环路定理成立

3.闭合路径不在垂直于电流的平面内



$$\oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(\mathrm{d}\vec{l}_{//} + \mathrm{d}\vec{l}_{\perp})$$

$$= \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{//} + \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{\perp}$$

$$= \oint_L \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_{//} + 0$$

$$= \begin{cases} \mu_0 I & (I\text{穿过}L) \\ 0 & (I\text{不穿过}L) \end{cases}$$

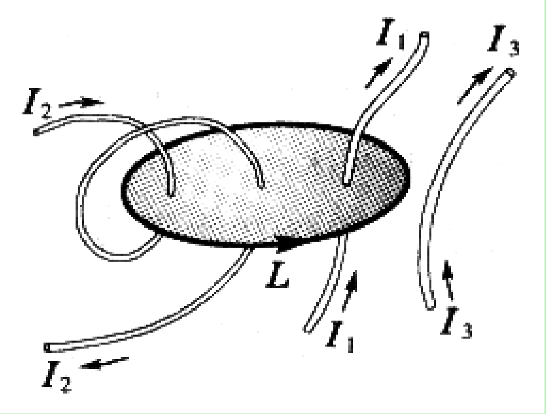
安培环路定理成立

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_{i内}$$

☆ 安培环路定理是稳恒电流磁场的基本性质方程。$\vec{B}$ 的环流不为零，表明磁场是非保守场（不能引入势的概念），是涡旋场。

说明：

（1）电流正负规定：电流方向与环路的绕行方向服从右手螺旋定则时，电流为正；反之为负。



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i内} = \mu_0 (I_1 - 2I_2)$$

（2）$\vec{B}$:环路上各点的磁感应强度（环路内、外所有电流的贡献）。

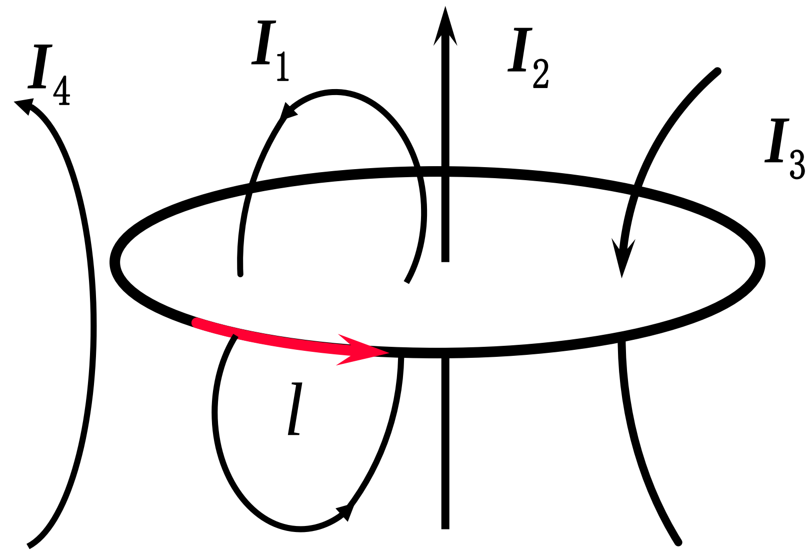
讨论

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i内} = \mu_0 (I_2 - I_3)$$

环路上的磁感应强度由环路内外电流产生

由环路内电流决定

环路所包围的电流



不穿过L 的电流：对L 上各点 $\vec{B}$ 有贡献；

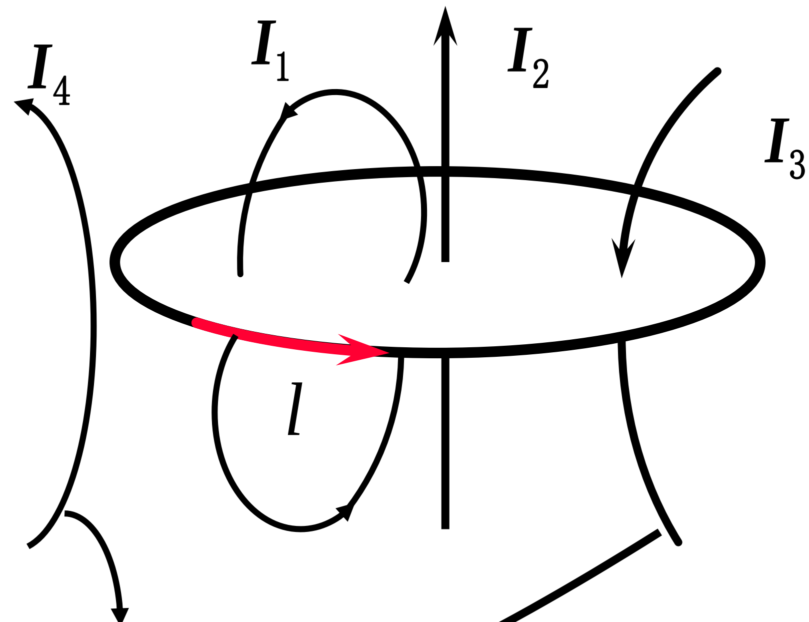
对 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 无贡献

讨论

$$\boxed{\oint_L \boxed{\vec{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}} = \mu_0 \sum I_{i内} = \mu_0 \boxed{(I_2 - I_3)}$$

改变

不变



在原区域发生位置小移动

三、安培环路定理的应用举例

当电流分布具有某种对称性时，可利用安培环路定理计算磁感应强度。

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i内}$$

步骤：

1、根据电流分布的对称性，<u>分析</u>磁场分布的<u>对称性</u>；

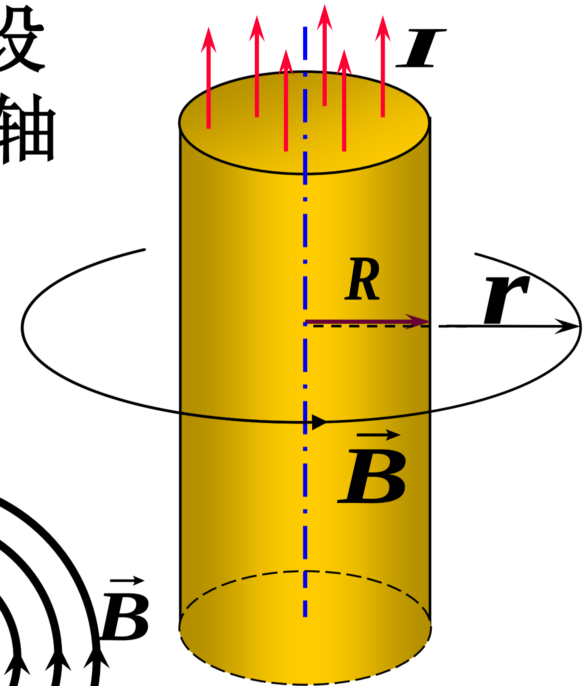
2、根据磁场分布的对称性，<u>选</u>取合适的<u>回路</u>。

（1）回路上磁感大小相等，$\vec{B}$的方向沿回路切线方向；

（2）一部分回路上的 $\vec{B}=0$ 或 $\vec{B}\perp \mathrm{d}\vec{l}$，另一部分各点 $\vec{B}$ 大小相等，方向沿回路切线方向。

3、计算，求出磁感B 。

例1：无限长圆柱体电流的磁场（设圆柱面半径为R，面上均匀分布的轴向总电流为I）

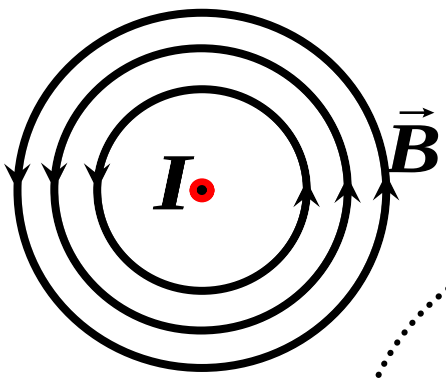


解：分析对称性

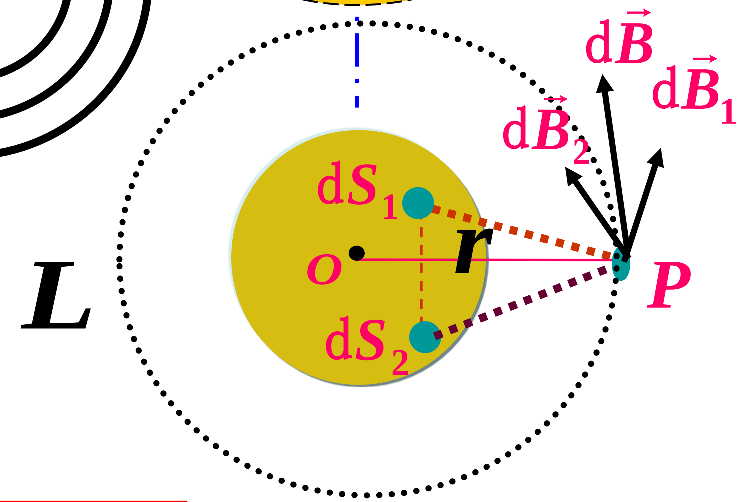
俯视

磁场分布 ——轴对称

任意一点磁场的方向沿该点所在圆周的切向(与电流满足右螺旋关系)，圆周上各点磁场的大小相等.



选圆形积分环路L

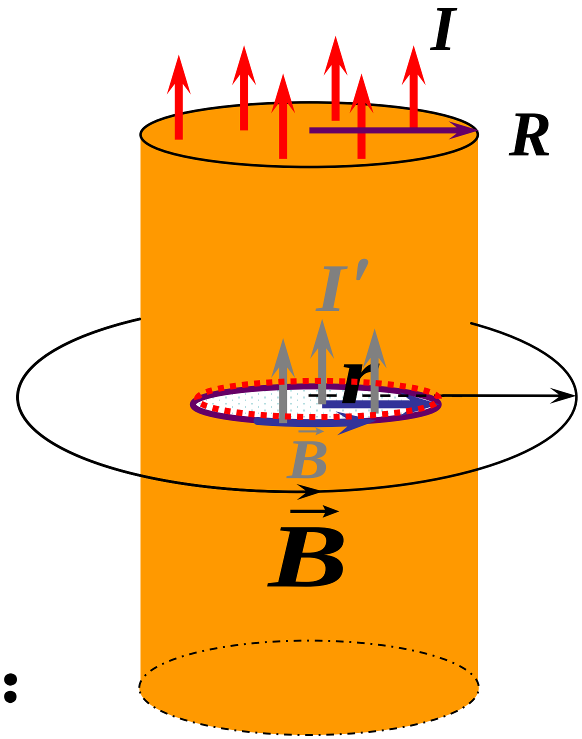


$$r > R:\ \oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint B\,\mathrm{d}l = 2\pi r B$$

据安环定理： $2\pi r B = \mu_0 I$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

$r < R \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B\,dl = 2\pi r B$

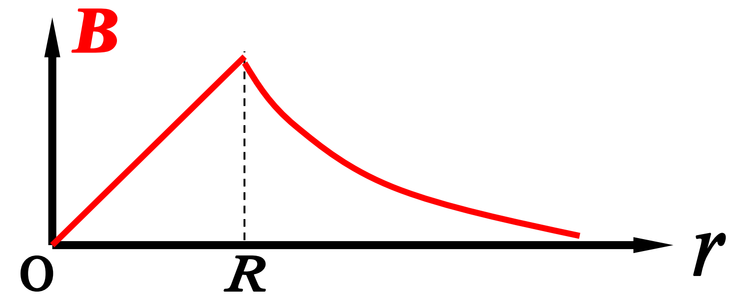


安环定理：$2\pi r B = \mu_0 I' = \mu_0 \dfrac{I}{\pi R^2} \pi r^2$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}}$$

<u>结论</u>：无限长均匀载流圆柱导体磁场：

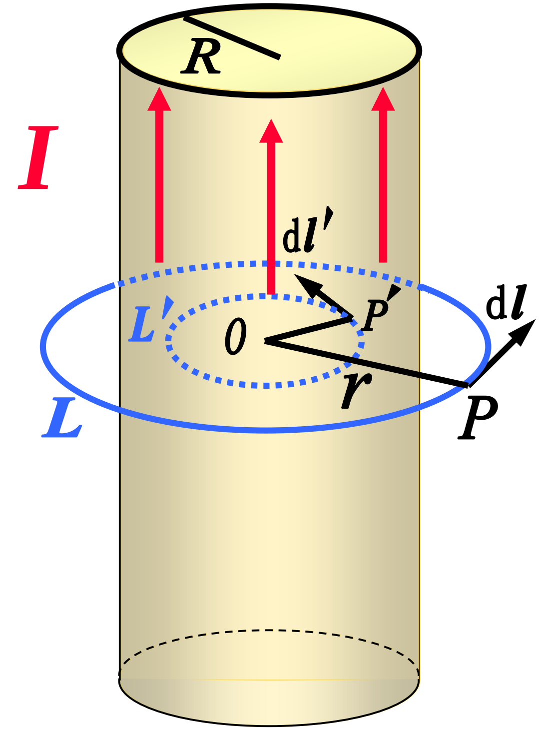
$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & 0 < r < R \\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$



讨论：长直载流圆柱面的磁场。

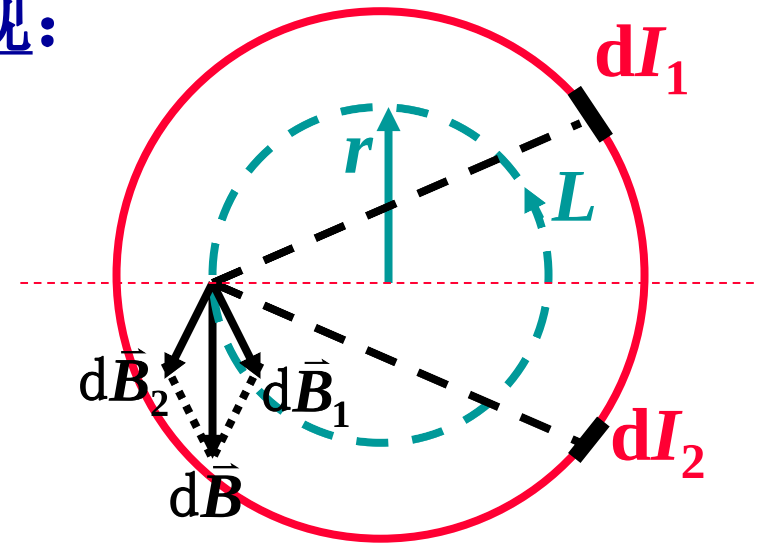
$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint B\,\mathrm{d}l = 2\pi r B$$

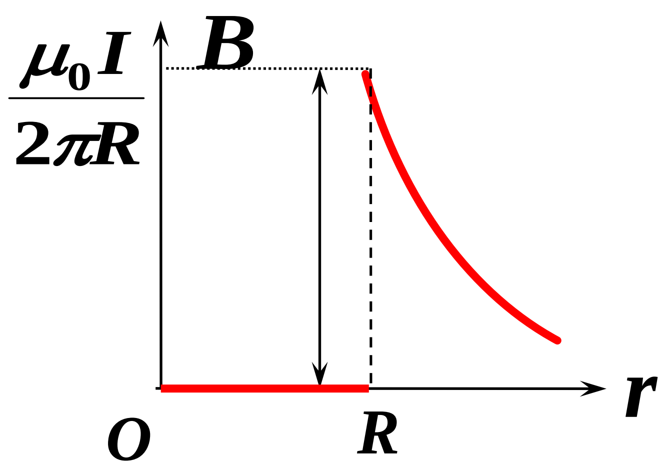
$$= \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \mu_0 I & (r > R) \end{cases}$$



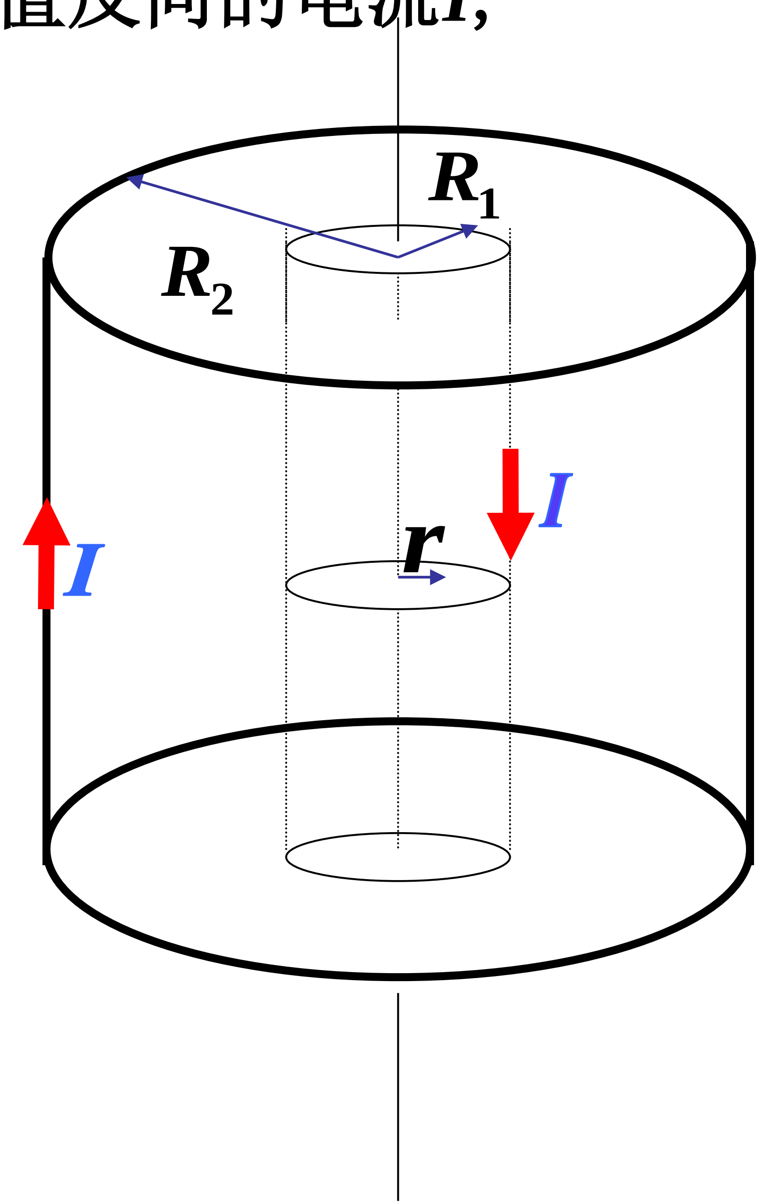
$$B = \begin{cases} 0 & 0 < r < R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

俯视：





练习：同轴的两筒状导线通有等值反向的电流I，求 $\vec{B}$的分布。



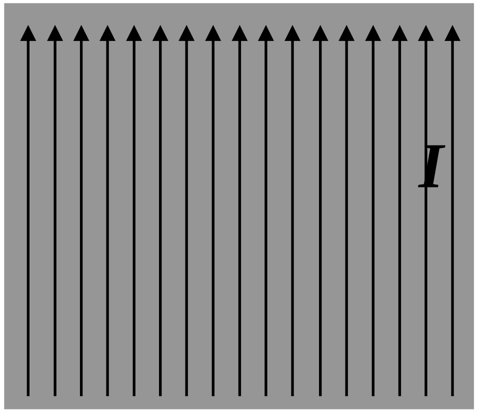
(1) $r > R_2,\ B = 0$

(2) $R_1 < r < R_2,\ B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

(3) $r < R_1,\ B = 0$

例2.无限大平面电流的磁场分布。

无限大载流导体薄板



视为无限多电流为 I 的平行长直导线电流，

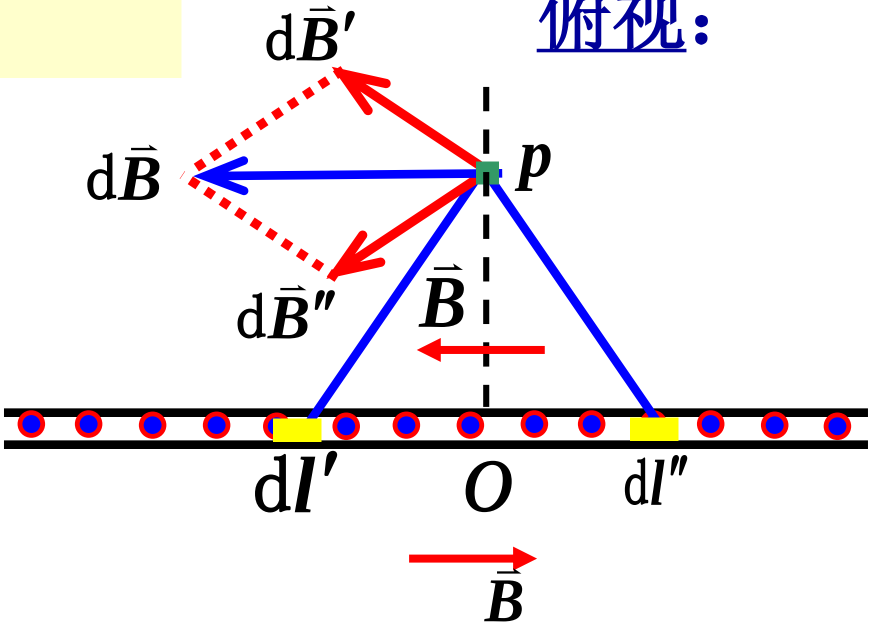
设：单位长度导线匝数 n，则电流沿线密度

$$\boxed{j = nI}$$

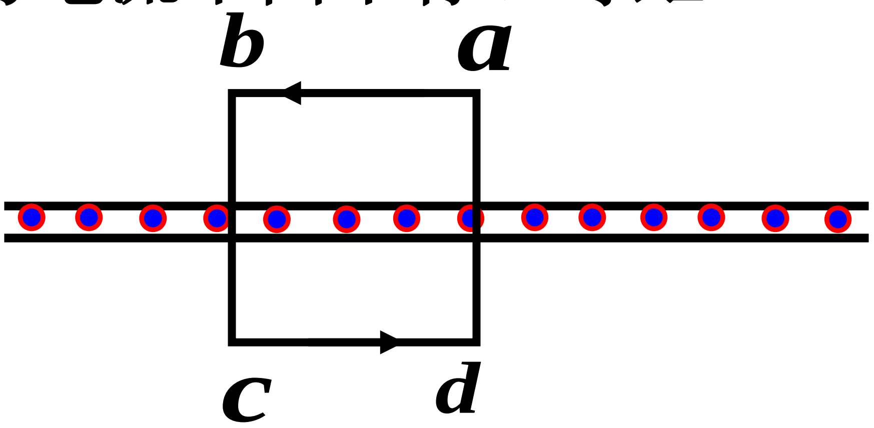
解：分析对称性

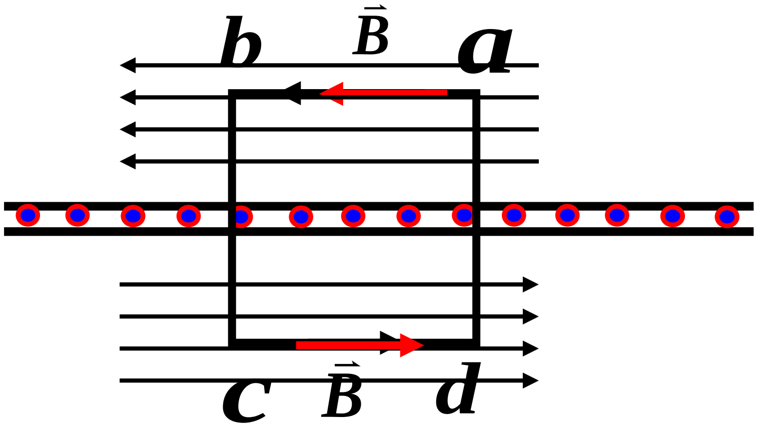
① $\vec{B}$ 方向平行于平面，且与电流垂直；② 平面两侧 $\vec{B}$ 的方向相反；③平面两侧空间各的 $\vec{B}$ 的大小相等.

俯视：



选积分回路，如图：ab 和 cd 与电流平面平行、等距。





选积分回路，如图

计算回路环流：

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b B\mathrm{d}l\cos 0 + \int_b^c B\mathrm{d}l\cos\frac{\pi}{2} + \int_c^d B\mathrm{d}l\cos 0 + \int_d^a B\mathrm{d}l\cos\frac{\pi}{2}$$

$$= B\cdot ab + B\cdot cd = 2B\cdot ab$$

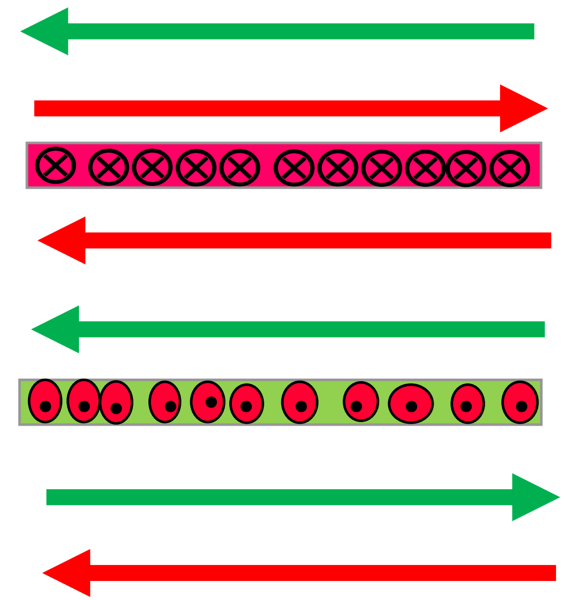
安培环路定理： $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 n\cdot ab\cdot I = \mu_0 j\cdot ab$

$$\boxed{B = \frac{\mu_o j}{2}}$$

板上下两侧为均匀磁场

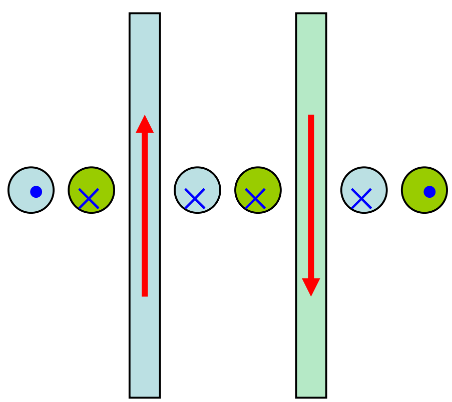
<u>讨论</u>：如图，两块无限大载流导体薄板平行放置。通有相反方向的电流。求磁场分布。

已知：导线中电流强度I、单位长度导线匝数n



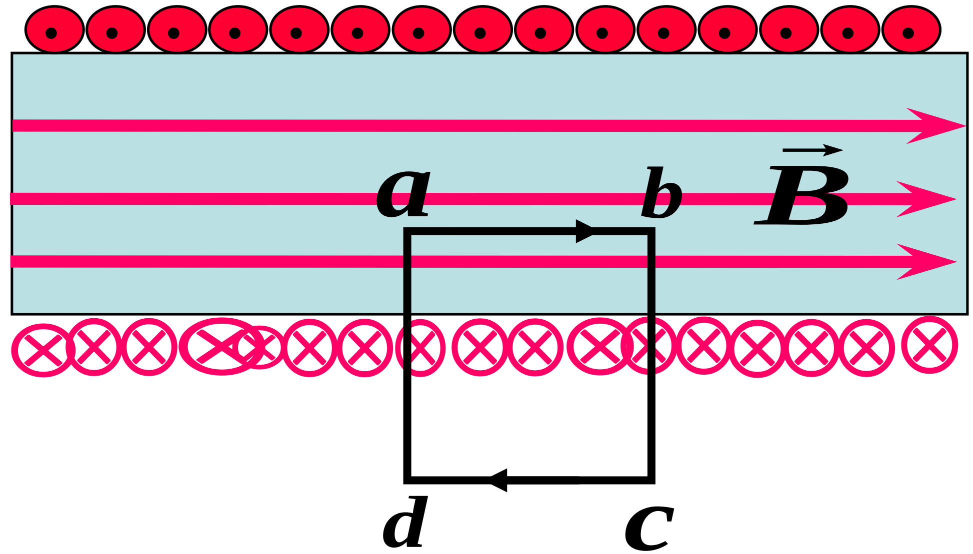
单个平板：$B = \mu_0 nI/2$

$$B = \begin{cases} 0 & \text{两板外侧} \\ \mu_0 nI & \text{两板之间} \end{cases}$$



例3. 长直载流螺线管的磁场分布

已知：　单位长度导线匝数n,导线内通有电流I



解：分析对称性

管内磁力线平行于管轴

方向：右手螺旋

管外靠近管壁处磁场为零

选矩形安培环路，如图

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = B\cdot ab$$

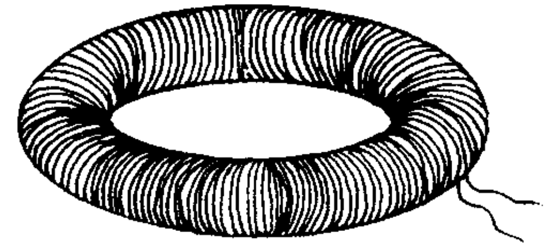
安培环路定理： $\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 n\cdot ab\cdot I$

长直载流螺线管内部磁场均匀，外部磁场为零

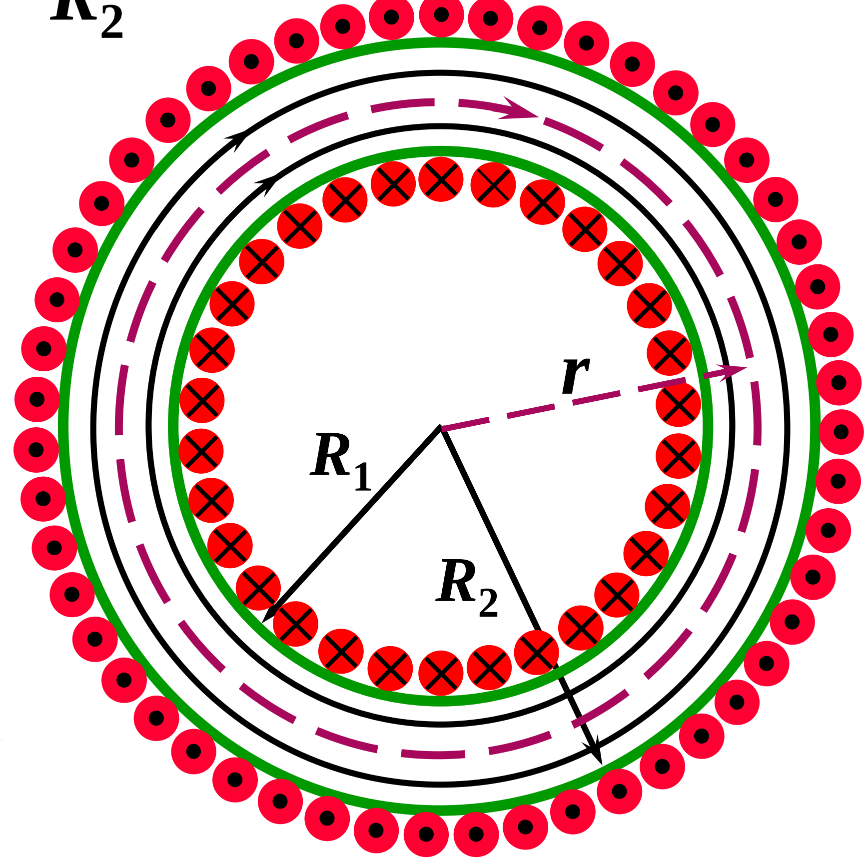
$$B = \begin{cases} 0 & \text{管外} \\ \mu_0 nI & \text{管内} \end{cases}$$

例4. 载流密绕螺线环的磁场分布

均匀密绕在环形管上的线圈形成环形螺线管，称为螺绕环.



已知：I　　N（导线总匝数）　　R_1　　R_2



解：<u>分析对称性</u>

磁场全部集中在管内，管内的磁力线都是同心圆.在同一条磁力线上，B的大小相等，方向就是该圆形磁力线的切线方向.

右手螺旋

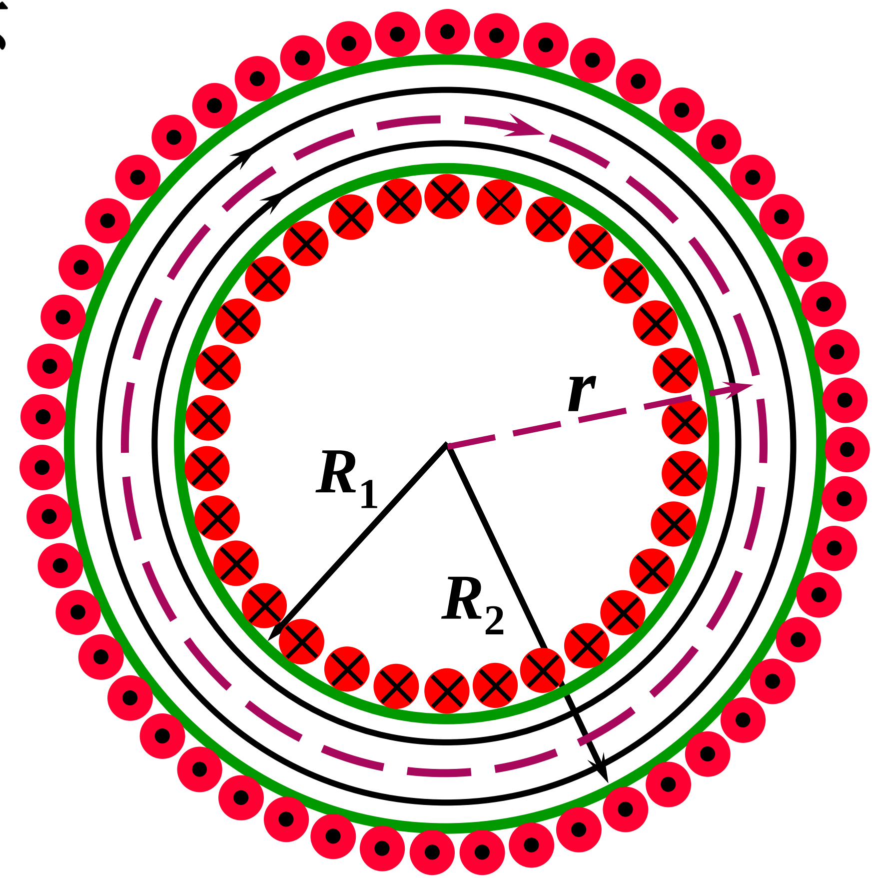
<u>选圆形安培环路，如图</u>

在管内作环路半径为 r 的圆环

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B\,dl = 2\pi r B$$

安培环路定理：$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N I$

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r} & \text{管内} \\ 0 & \text{管外} \end{cases}$$



当：$R_1, R_2 >> (R_2 - R_1)$

则：$\dfrac{N}{2\pi r} \approx \dfrac{N}{2\pi R_1} = n$ 沿轴向线圈密度

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

习　题　课

★**磁感强度的计算：**

基本方法：

1毕－萨定律和磁场叠加原理（典型场的叠加）

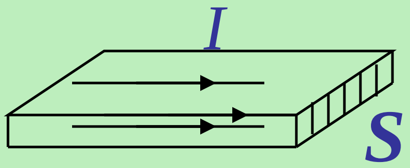
2.某些对称分布，利用安培环路定理

★**磁通量：** $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

★**磁场的高斯定理**和**安培环路定理**

电流密度

- （体）电流（面）密度



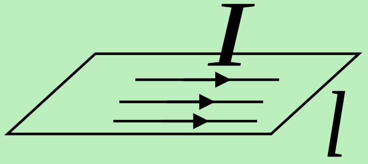
如图 电流强度为I 的电流通过截面S

若均匀通过　电流面密度为

$$J = \frac{I}{S}$$

- （面）电流（线）密度

如图 电流强度为I的电流通过截线 l



若均匀通过，

电流线密度为：
$$j = \frac{I}{l}$$

习题 在一个半径为R的无限长半圆筒形金属片中，沿轴向均匀通有电流I，求半圆筒轴线上的磁感应强度。

解：无限长直电流元： $\mathrm{d}I = \dfrac{I}{\pi R}\mathrm{d}l$

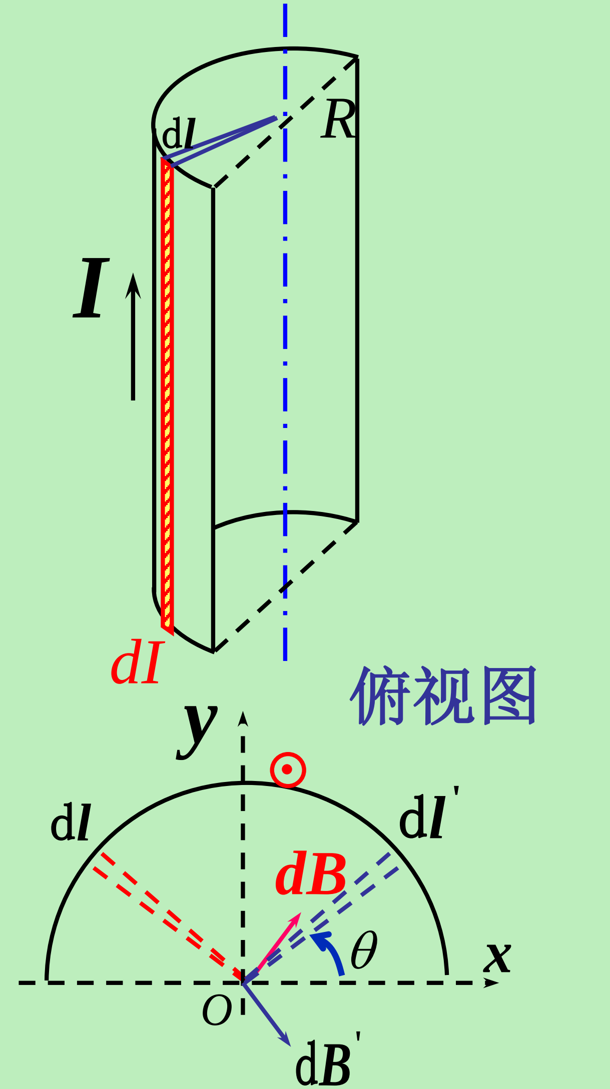
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2}\mathrm{d}l$$

由对称性有：$B_y = \int \mathrm{d}B_y = 0$

$$B = B_x = \int \mathrm{d}B_x = \int \mathrm{d}B \sin\theta$$

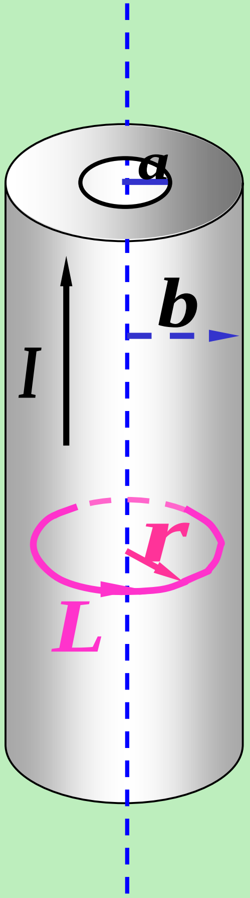
$$= \int \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2}\sin\theta \,\mathrm{d}l \qquad \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\int_0^{\pi}\sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$



习题 空心长圆柱形导体的内、外半径分别为a和b，均匀流过电流I。求导体内部与轴线相距r的各点（$a<r<b$）的磁感强度。

解：导体内的电流密度 $j=\dfrac{I}{\pi(b^2-a^2)}$



电流和磁场分布具有轴对称性，磁感线是以轴为中心的系列同心圆，取半径为 r 的圆环为积分回路，由安培环路定理得：

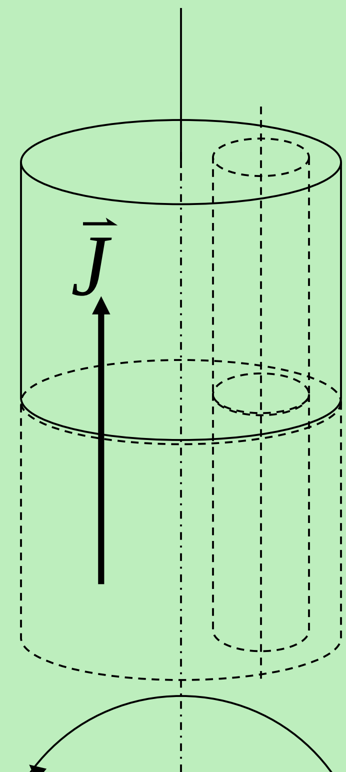
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = u_0 j(\pi r^2-\pi a^2)$$

$$B=\frac{u_0 I(r^2-a^2)}{2\pi(b^2-a^2)r}$$

习题: 在一半径为R的无限长导体圆柱内，在距柱轴为d处，沿轴线方向挖去一个半径为 r 的无限长小圆柱。导体内均匀通过电流，电流密度 $\vec{J}$ 。

求小圆柱空腔内一点的磁感强度。

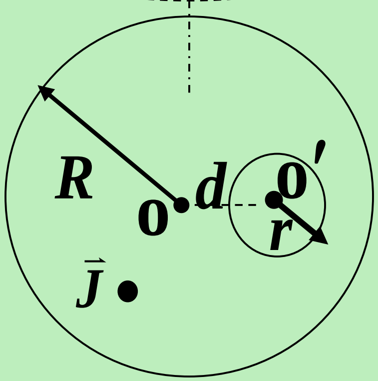
分析：电流的分布失去了对轴线的对称性，所以无法整体用安培环路定理求解。可以利用**补偿法**，使电流恢复对轴线的对称性。



补偿法

设想在小圆柱内存在**等值反向**的电流密度值都等于J 的 两个均匀的电流

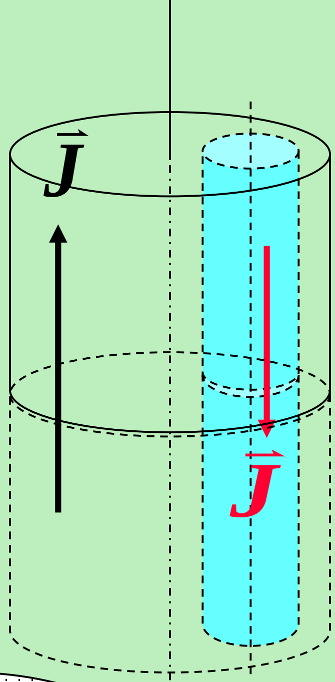
结果会出现电流密度值相同，电流相反的完整的两个圆柱电流



解：设场点对大圆柱中心o的位矢为 $\vec{r}_1$

对小圆柱中心o′的位矢为 $\vec{r}_2$

由安环定理求出圆柱体内：$B=\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$

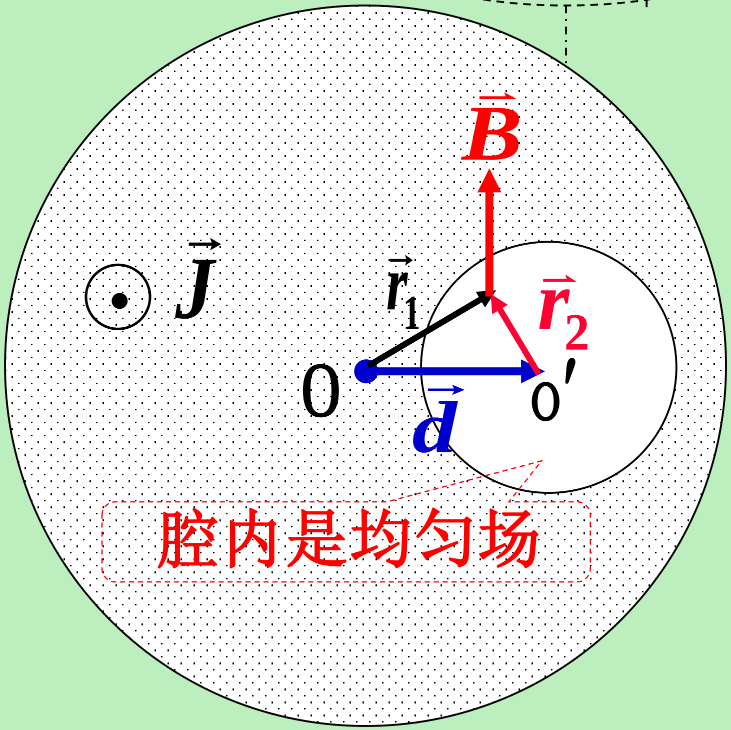


$$\vec{B}_{大圆柱}=\frac{\mu_0}{2}\vec{J}\times\vec{r}_1$$

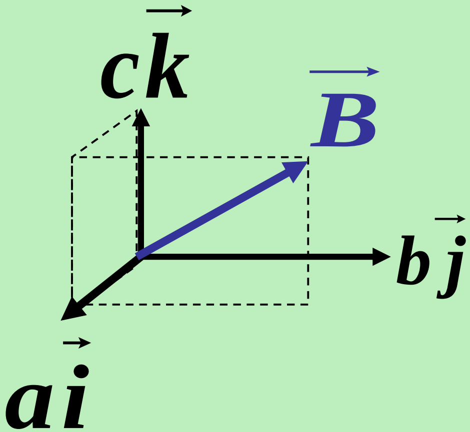
$$\vec{B}_{小圆柱}=\frac{\mu_0}{2}(-\vec{J})\times\vec{r}_2$$

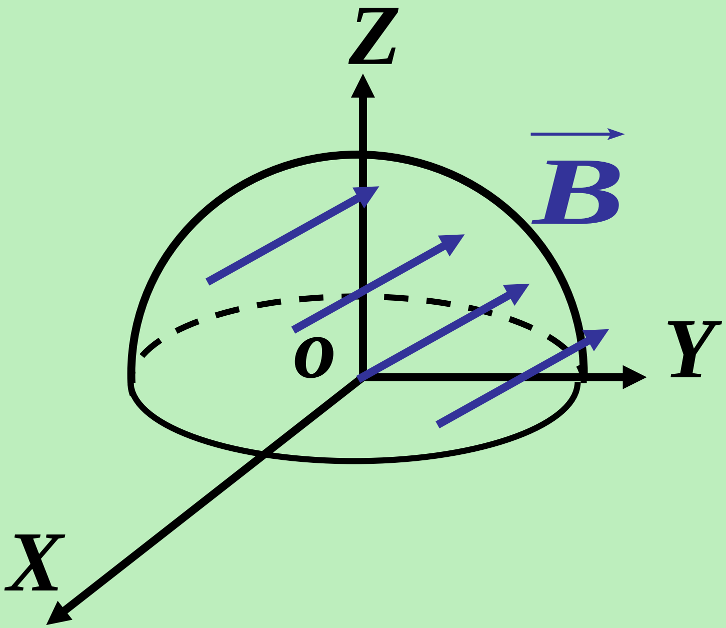
总场为：$\vec{B}=\vec{B}_{大圆柱}+\vec{B}_{小圆柱}$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{2}\vec{J}\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{\mu_0}{2}\vec{J}\times\vec{d}$$



练习 求通过一半径为R、开口向-Z方向的半球壳曲面的磁通量为________.

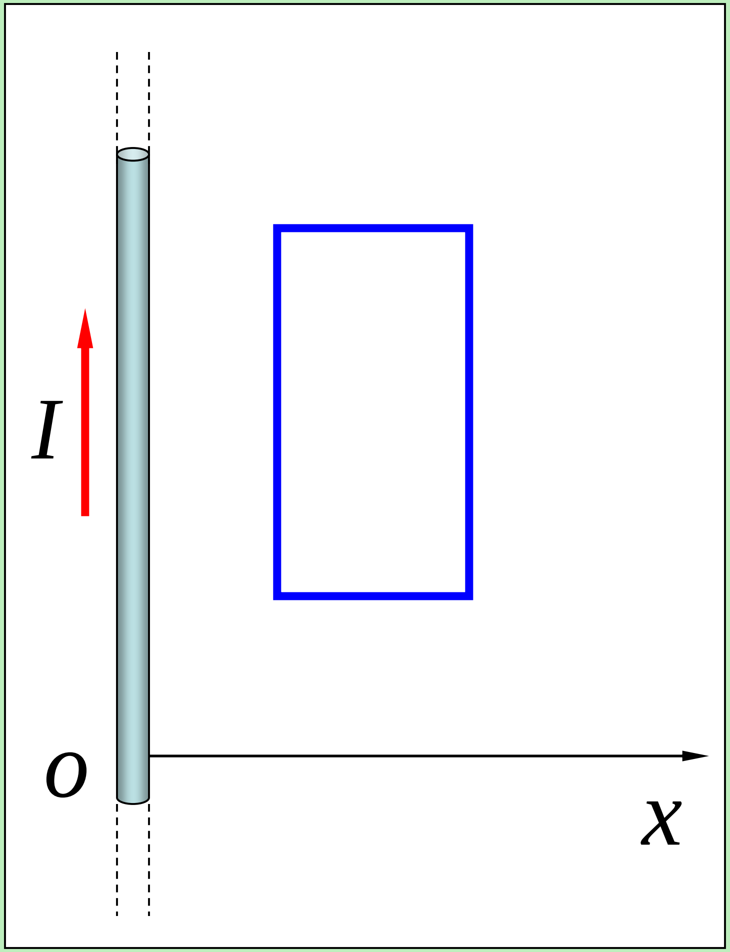


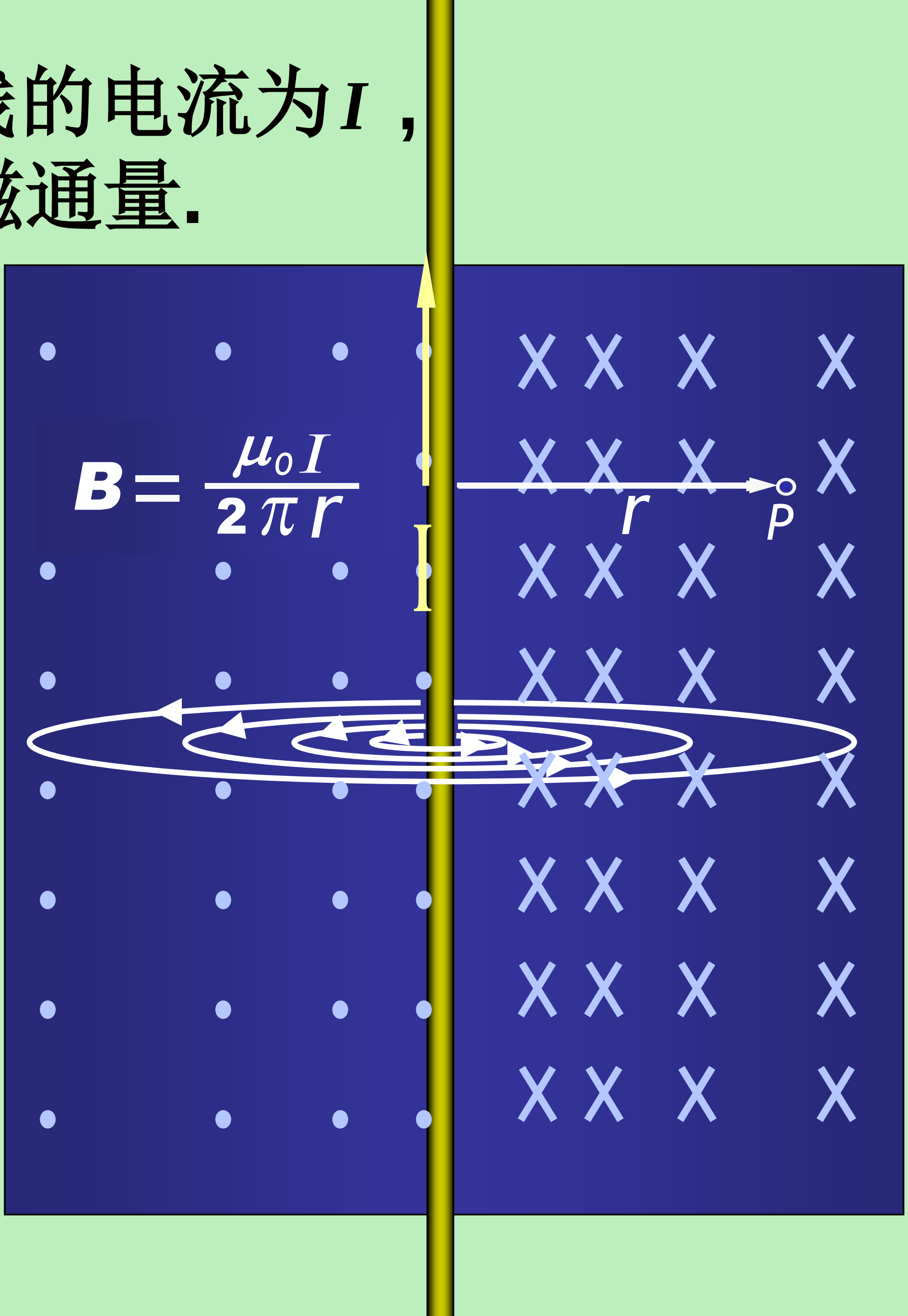


$$\pi R^2 c$$

$$\vec{B} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

例 如图载流长直导线的电流为I，试求通过矩形面积的磁通量.



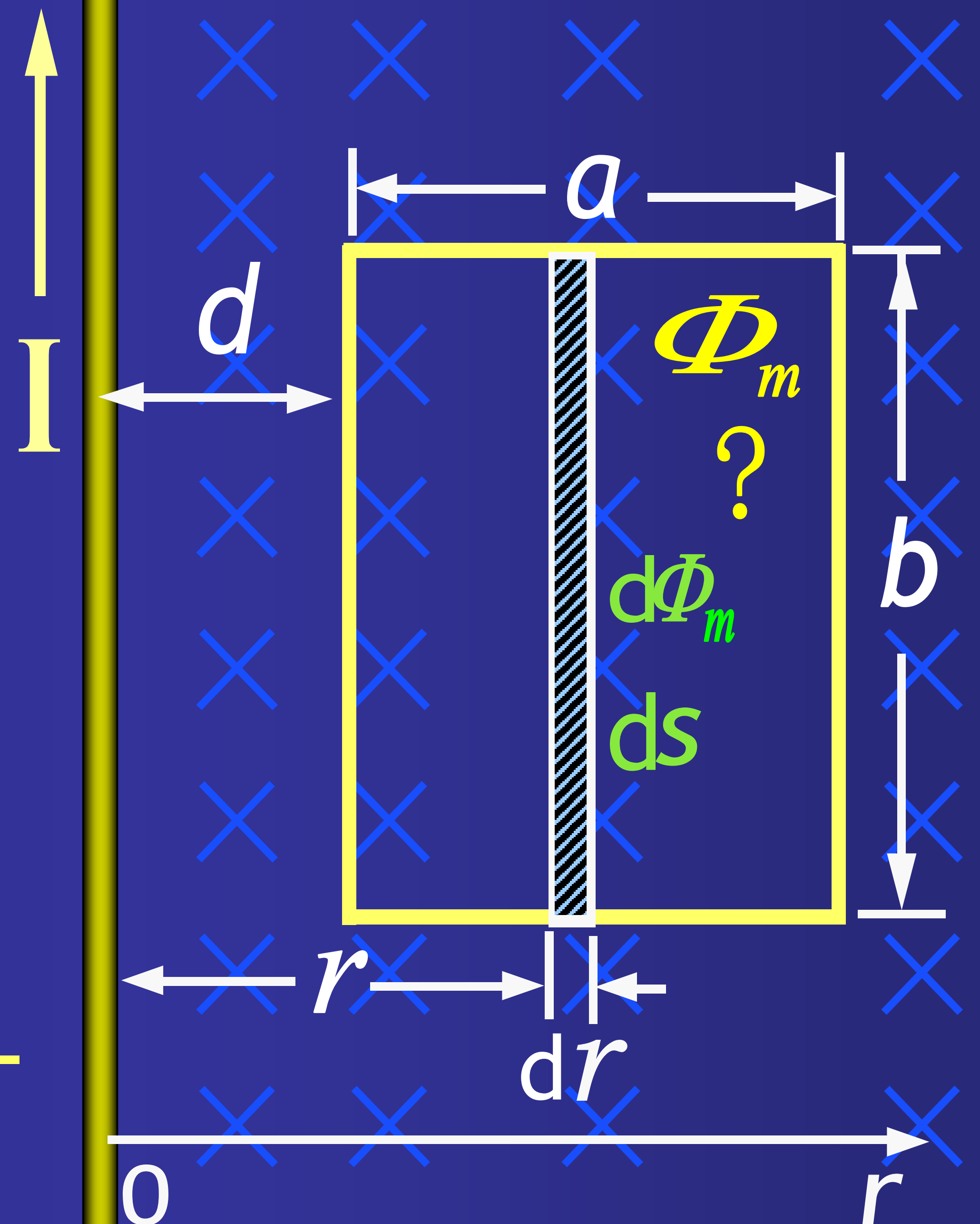


续

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

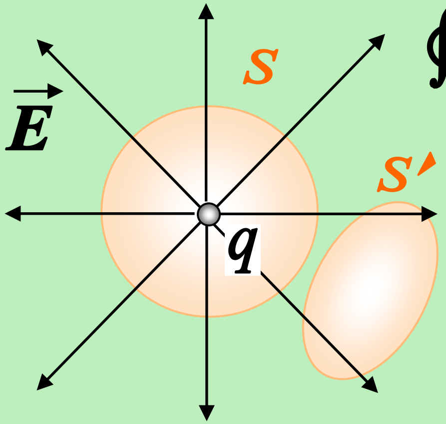
$$d\Phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, b\, dr$$

$$\Phi_m = \iint d\Phi_m = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\,\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$



用　通量　和　环流　的概念研究磁场，所得结果与电场大不相同。

通量

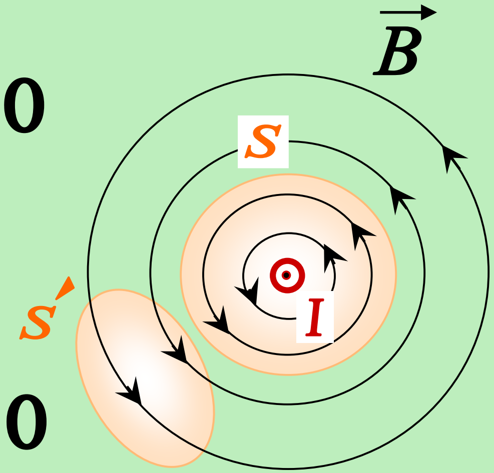


$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0}$$

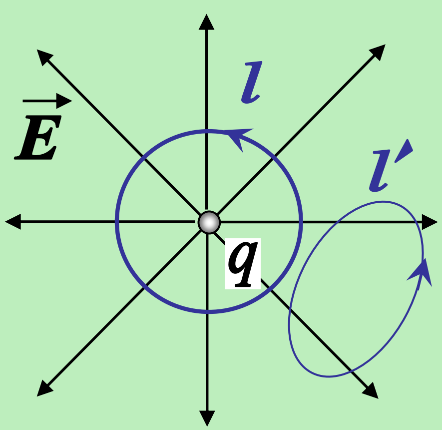
$$\oiint_{S'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oiint_{S'} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



环流

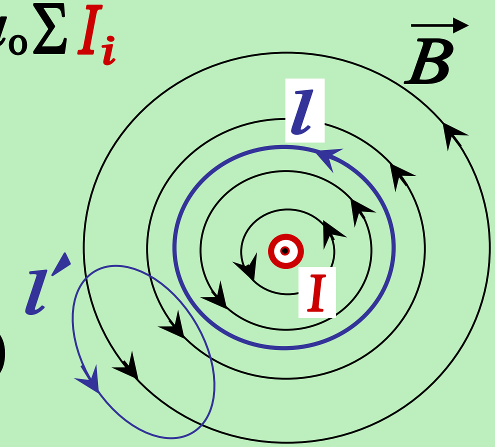


$$\oint_l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

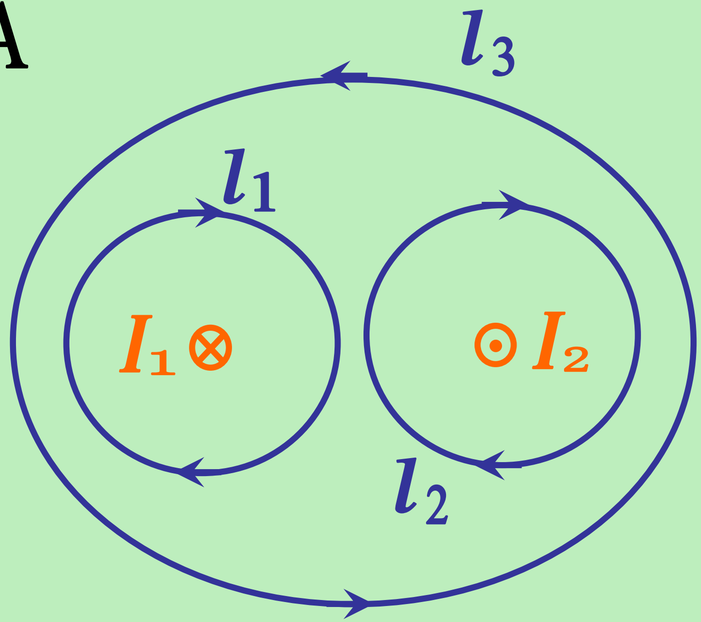
$$\oint_{l'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \Sigma I_i$$

$$\oint_{l'} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



例 已知 $I_1 = I_2 = 5\,\mathrm{A}$



则 $\oint_{l_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \underline{\quad \mu_0\, 5\,\mathrm{A} \quad}$

$\oint_{l_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \underline{\quad -\mu_0\, 5\,\mathrm{A} \quad}$

$\oint_{l_3} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \underline{\quad 0 \quad}$

各环路的积分 $\oint_{l} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$（$\vec{B}$ 的环流 ）的值

只与 环路所围绕的电流 有关。

而积分式中的 $\vec{B}$ 则是 环路内、外一切电流

所激发的磁感应强度的 矢量和。