第八节　相互独立的随机变量

一、随机变量的相互独立性

二、二维随机变量的推广

三、小结

一、随机变量的相互独立性

1.定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有 x,y 有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

2.说明

(1) 若离散型随机变量 (X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立

$$\Longleftrightarrow \quad P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

(2) 设连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$,边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$,则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

(3) X 和 Y 相互独立, 则

$f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

例1　已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立,求 α 与 β 的值.

解　将 (X,Y) 的分布律改写为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3} + \alpha + \beta$
$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9} + \alpha$	$\frac{1}{18} + \beta$	$\frac{2}{3} + \alpha + \beta$

(1)由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \frac{2}{3} + \alpha + \beta = 1,$

故α与β应满足的条件是 : $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 且 $\alpha + \beta = \frac{1}{3}.$

(2) 因为 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

特别有

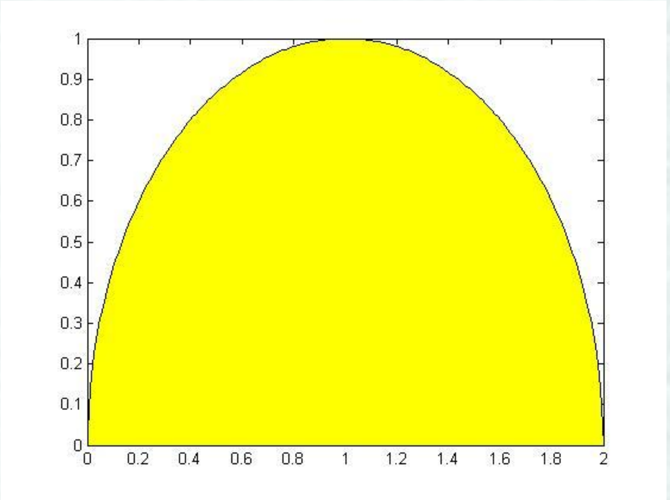
$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$, 得 $\beta = \dfrac{1}{9}$.

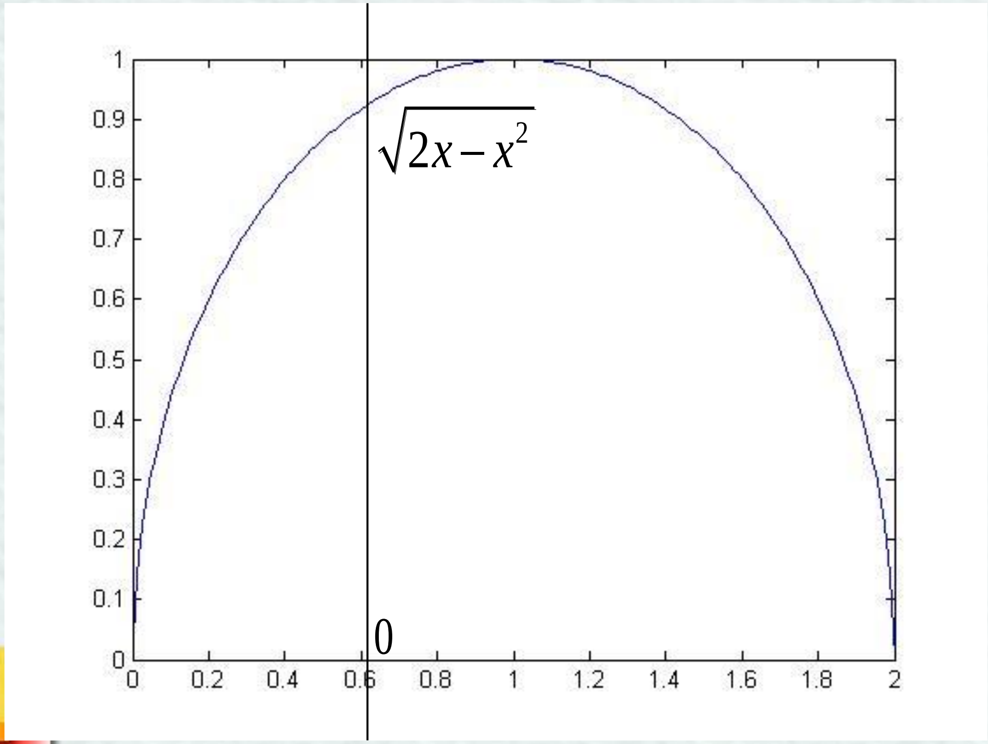
例2：已知（X，Y）服从区域 $G:\{(x,y)\,|\,0\le x<2\,,0\le y<\sqrt{2x-x^2}\}$ **上的均匀分布，求关于X和Y的边缘分布密度，并判定X和Y是否独立**

解: 均匀分布的联合密度为： $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{s} & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

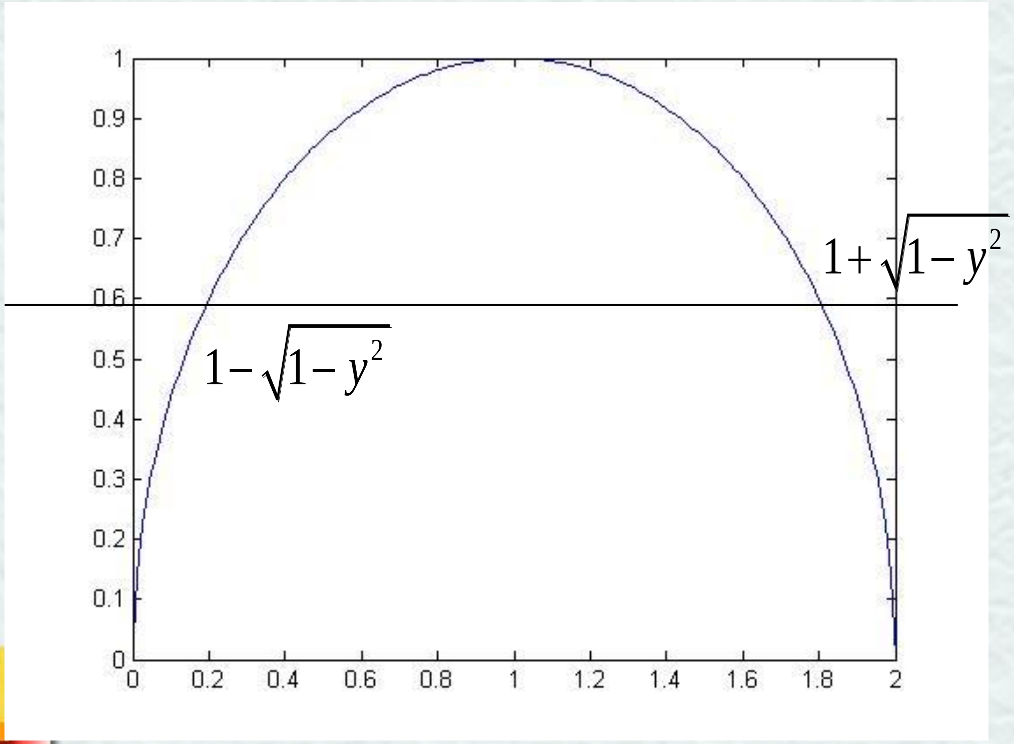
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & 0\le x<2,0\le y<\sqrt{2x-x^2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{2}{\pi}\,dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{2x-x^2} & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\,dx=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & 0\le x<2, 0\le y<\sqrt{2x-x^2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\dfrac{2}{\pi}dy=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{2x-x^2} & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}\dfrac{2}{\pi}dx=\dfrac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$ **X，Y不独立**

[定理] 设$(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则$X$与$Y$独立的充要条件是$\rho = 0$.

证：$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-0}} e^{-\frac{1}{2(1-0)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\,0\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}.$$

充分性：若$\rho = 0$，则二维正态分布的联合密度可化为：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \mathrm{e}^{-[(x-\mu_1)^2/\sigma_1^2 + (y-\mu_2)^2/\sigma_2^2]/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \mathrm{e}^{-(x-\mu_1)^2/(2\sigma_1^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \mathrm{e}^{-(y-\mu_2)^2/(2\sigma_2^2)}$$

$$= f_X(x) f_Y(y).$$

所以，随机变量X与Y相互独立.

必要性：若X和Y相互独立，$\Rightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,

令 $x=\mu_1$，$y=\mu_2$,

$$\Rightarrow f(\mu_1,\mu_2)=f_X(\mu_1)f_Y(\mu_2),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}$$

$$\Rightarrow \rho=0.$$

二、二维随机变量的推广

1.分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数.

2.概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 使对于任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数.

3.边缘分布函数

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1 的**边缘分布函数.**

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$关于(X_1, X_2)的**边缘分布函数.**

其它依次类推.

4.边缘概率密度函数

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度, 则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 关于 X_1,关于 (X_1,X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_n.$$

同理可得 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的 $k(1\le k<n)$ 维边缘概率密度.

5. 相互独立性

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$
$$= F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

其中F_1, F_2, F依次为随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$,$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$和$(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$的分布函数,则称随机变量$(X_1, \cdots, X_m)$与$(Y_1, \cdots, Y_n)$相互独立.

6.重要结论

定理 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立,则 $X_i(1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立.又若 h, g 是连续函数,则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.

三、小结

1. 若离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=i, Y=j\}=p_{ij}, \quad i, j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

2. 设连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$

3. X 和 Y 相互独立，则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.