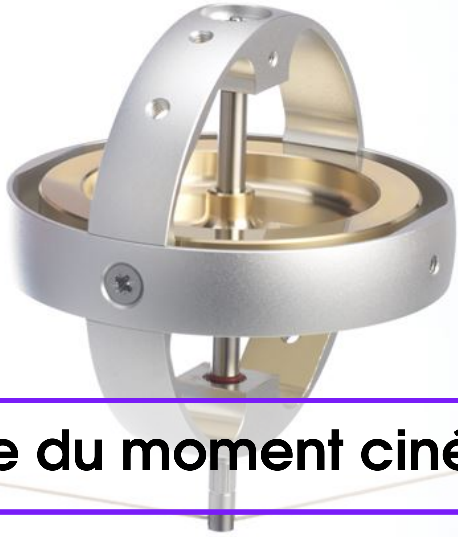


6. Théorème du moment cinétique

Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents que, lorsque l'on souhaite étudier le mouvement d'un point matériel soumis à plusieurs forces, il est toujours possible d'appliquer la loi fondamentale de la dynamique. Nous avons également appris qu'il était parfois plus commode d'adopter une approche énergétique, notamment lorsque le problème ne dépendait que d'une variable de position. Via l'expression de l'énergie mécanique, on trouvait facilement l'équation caractéristique du mouvement pour un système conservatif.

Cependant, cette approche ne nous permet pas de décrire facilement certains phénomènes. Ainsi, par exemple, pour ouvrir une porte, il est plus facile de pousser à l'extrémité de celle-ci qu'au niveau de la charnière où s'effectue la rotation. Un des objectifs de ce chapitre sera de nous doter de nouveaux outils capables de décrire facilement de tels phénomènes, ce qui se fera en introduisant la notion de moment d'une force. Ce sera alors pour nous l'occasion de découvrir une autre grandeur qui se conserve dans certaines situations : le *moment cinétique*.

Au cours de ce chapitre, nous nous servirons abondamment du *produit vectoriel*. Nous allons, en introduction rappeler quelques propriétés de ce dernier. On considère deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, que l'on exprime dans une base orthonormée directe quelconque notée $\mathscr{B}$, de sorte que :

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Dans cette même base, le vecteur $\overrightarrow{c}$, produit vectoriel de $\overrightarrow{a}$ par rapport à $\overrightarrow{b}$ est donné par :

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

On remarque grâce à la formule précédente qu'on a :

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a})$$

La norme du produit vectoriel est donnée par :

$$\|\overrightarrow{c}\| = \|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\| \times \|\overrightarrow{b}\| \times |\sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})|$$

On rappelle également que $\overrightarrow{c}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. De plus si $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k}\}$ est une base orthonormée directe alors on a :

$$\overrightarrow{e_i} \wedge \overrightarrow{e_j} = \overrightarrow{e_k} \qquad , \qquad \overrightarrow{e_k} \wedge \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{e_j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{e_j} \wedge \overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{e_j}$$

Forts de ces rappels sur le produit vectoriel, nous pouvons maintenant aborder sereinement l'étude des moments, en commençant par le moment d'une force. Nous nous placerons, tout au long de ce chapitre, dans le référentiel $\mathscr{R}$ terrestre lié au laboratoire, et supposé galiléen.

6.1 Moment d'une force

6.1.1 Moment d'une force par rapport à un point O

Comme nous l'avons dit en introduction, il est plus facile de faire tourner une porte autour de ses gonds en appliquant une force au niveau de la poignée qu'au niveau des gonds. Pour quantifier cela, on introduit le *moment d'une force par rapport à un point*.

Définition 6.1.1 — Moment d'une force par rapport à un point O. ....

....

....

....

....

Les notations sont explicitées sur la figure 6.1.

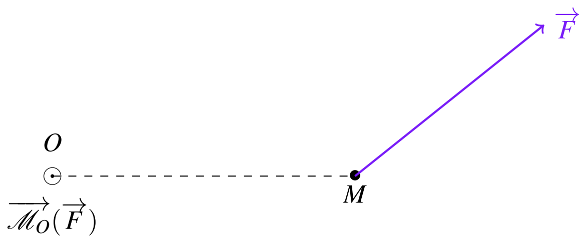


FIGURE 6.1 – Moment d'une force par rapport à un point O

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le référentiel d'étude, comme cela sera le cas au cours de ce chapitre, on peut alléger la notation en ne notant plus le $\mathscr{R}$ en indice.

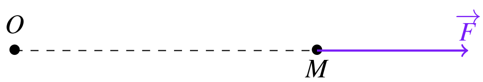
À retenir 6.1.1 — Interprétation physique du moment d'une force. ....

....

....

....

■ **Exemple 6.1.2 Force de moment nul**
On considère le cas où la force considérée est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$ comme présenté ci-dessous :

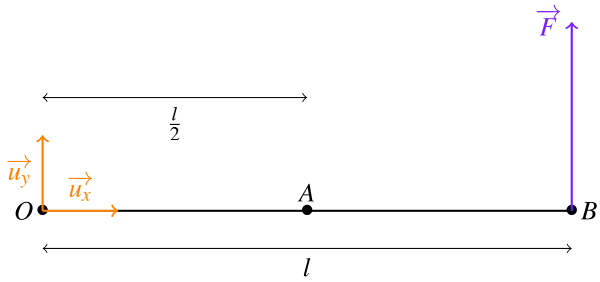


Calculons le moment de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport au point O. On a :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_{\overrightarrow{F},O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

Car les deux vecteurs sont colinéaires. On retrouve bien l'interprétation physique du moment puisque la force, telle qu'est appliquée, ne va pas faire tourner M autour du point O. ■

■ **Exemple 6.1.3 Rotation d'une baguette autour d'un point** On considère une baguette, pouvant tourner librement dans le plan (xOy) autour de son point d'attache O telle que représenté sur la figure suivante. On exerce sur cette baguette dans un premier temps une force $\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{u_y}$ appliquée au point O, puis la même force appliquée au point A situé au centre de la baguette et enfin, toujours la même force, mais appliquée au point B correspondant à l'extrémité de la baguette. Sur le schéma, on considère le cas où la force est appliquée en B.



Calculons le moment de la force $\overrightarrow{F}$ par rapport à O pour chacun des points d'application.

— **Cas 1 - Force appliquée en O**

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F},0} = \overrightarrow{OO} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

Car $\overrightarrow{OO}$ correspond au vecteur nul. Appliquer la force au point O ne fait pas tourner la baguette autour de O.

— **Cas 2 - Force appliquée en A**

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F},0} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F} = \frac{l}{2}\overrightarrow{u_x} \wedge F\overrightarrow{u_y} = \frac{lF}{2}\overrightarrow{u_z}$$

L'application de la force $\overrightarrow{F}$ au point A va faire tourner la baguette autour de l'axe $\overrightarrow{u_z}$ passant par O.

— **Cas 2 - Force appliquée en B**

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F},0} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F} = l\overrightarrow{u_x} \wedge F\overrightarrow{u_y} = lF\overrightarrow{u_z}$$

Le résultat est qualitativement le même que précédemment, on va de nouveau tourner autour de l'axe $\overrightarrow{u_z}$ passant par O, mais la mise en rotation va être plus efficace que dans le cas précédent, puisque le moment est doublé. Il va être deux fois plus facile de mettre la baguette en rotation en appliquant une force au point B plutôt qu'au point A.

■

R De par sa définition, le moment d'une force est additif. Le moment d'une somme de forces $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$ est donné par :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F},O} = \overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}_2 = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}_1,O} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F}_2,O}$$

6.1.2 Transport des moments d'une force

Nous avons précédemment vu que le moment d'une force dépendait de son point d'application. Afin de le mettre en évidence, exprimons la relation entre le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ calculé en un point O et celui de cette même force calculée en O'. On a :

....

....

....

Théorème 6.1.4 ....

....

....

....

6.1.3 Moment d'une force par rapport à un axe orienté Δ

Le moment d'une force par rapport à un point, calculé précédemment, permet d'étudier la mise en rotation d'un objet autour d'un point. Souvent, dans les problèmes de physique rencontrés, on s'intéresse à la rotation d'un objet autour d'un axe. C'est par exemple le cas de la rotation de la porte autour de ses gonds que nous avons abordé en introduction. Pour répondre à ce problème, on introduit la notion de *moment d'une force par rapport à un axe*.

Définition 6.1.2 — Moment d'une force par rapport à un axe. ....

....

....

....

....

....

....

À retenir 6.1.5 — Sens physique du moment d'une force par rapport à un axe. ....

....

....

....

R Pour que la définition du moment par rapport à un axe ait un sens, il faut que cette grandeur soit indépendante du point O de l'axe choisi pour calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}}$. On vérifie facilement que c'est le cas, en appliquant le résultat précédent du transport des moments d'une force par rapport à un point.

$$\mathcal{M}_{\vec{F},\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F},0} \cdot \vec{u_\Delta} = (\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F},O'} + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u_\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F},O'} \cdot \vec{u_\Delta} + (\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u_\Delta}$$

Or, $\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{u_\Delta}$ comme $\overrightarrow{OO'}$ est colinéaire à $\vec{u_\Delta}$ (par définition du produit vectoriel).
On a donc bien :

$$(\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u_\Delta} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_{\vec{F},\Delta} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F},O'} \cdot \vec{u_\Delta}$$

On voit donc que le moment par rapport à un axe ne dépend pas du point de l'axe choisi pour calculer le moment qui intervient dans la formule.

Cas particuliers où le moment par rapport à un axe est nul

— *Le moment d'une force, appliquée au point M, par rapport à un axe est nul si* $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F},O}$ *est perpendiculaire à* $\vec{u_\Delta}$. Cela est possible si $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{u_\Delta}$ c'est à dire si $\vec{F}$ *est colinéaire à* $\vec{u_\Delta}$, comme présenté sur la figure 6.2.

— *Le moment d'une force, appliqué au point M, par rapport à un axe est nul si la droite portant la force coupe l'axe* $\vec{u_\Delta}$. En effet, on a dans ce cas, en notant O le point de l'axe par rapport auquel est calculé le moment :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{F},0} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge F \frac{\overrightarrow{OM}}{||OM||} = \vec{0}$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, le moment par rapport à l'axe sera donc nul quel que soit le point O choisi. On illustre la situation sur la figure 6.3.
Le résultat obtenu ici paraît logique, si l'on applique une force dirigée vers les gonds de la porte, cela ne fera pas tourner celle-ci.

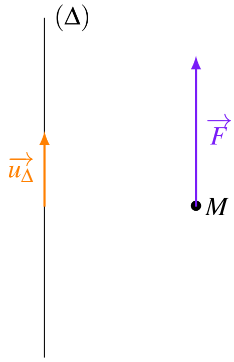


FIGURE 6.2 – Le moment d'une force par rapport à un axe est nul si la force est colinéaire au vecteur portant l'axe.

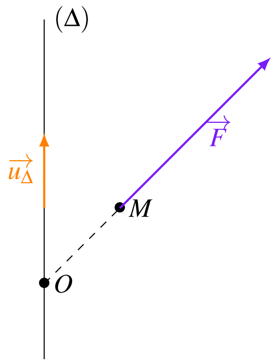


FIGURE 6.3 – Le moment d'une force par rapport à un axe est nul si la droite portant la force coupe l'axe de rotation.

6.1.4 Notion de bras de levier

On rencontre souvent, lors de l'étude des moments des forces autour d'un axe, la notion de *bras de levier*. On la présente dans la section qui suit dans le cas d'une force *perpendiculaire* à l'axe Δ par rapport auquel le moment est calculé, et nous généraliserons ensuite ce résultat au cas d'une force quelconque.

Définition 6.1.3 — Bras de levier pour une force perpendiculaire à l'axe de rotation. ....

....

....

....

On représente dans le tableau 6.1 quelques exemples permettant d'illustrer ce concept.

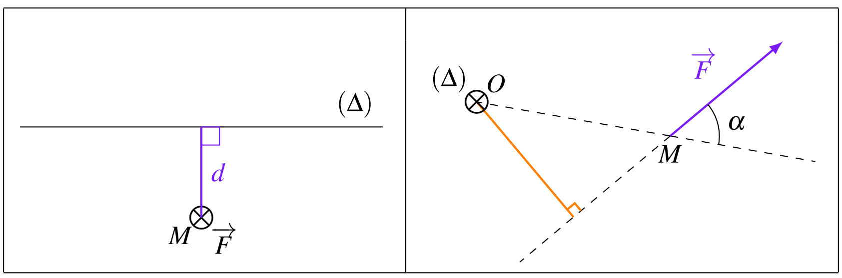


TABLE 6.1 – Deux exemples de bras de levier

On présente un autre exemple dans la figure 6.4.

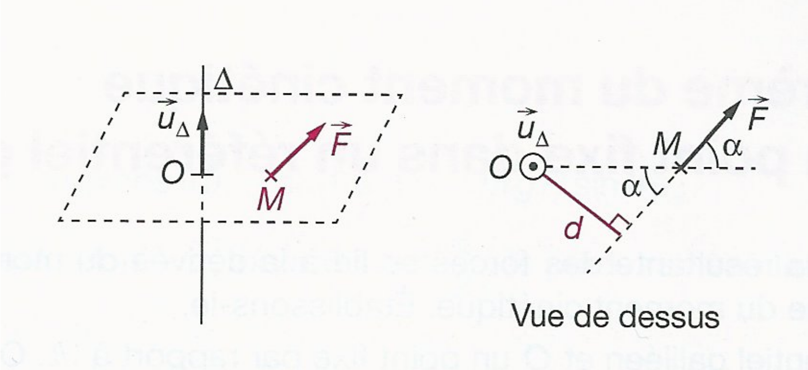


FIGURE 6.4 – Autre exemple de détermination du bras de levier

On peut se demander quel est l'intérêt d'introduire une telle notion. Nous allons voir qu'il permet de réécrire plus simplement l'expression du moment d'une force, lorsque $\vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{u_\Delta}$, ce qui est souvent le cas..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Théorème 6.1.6 ....

....

....

....

Le *signe* du moment est ensuite déterminé grâce au sens de rotation.

- Si on tourne dans le sens direct, alors le signe du moment est positif ($\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est alors orienté dans le sens de $+\vec{u_\Delta}$). On se référera au tableau 6.2 pour connaître les sens de rotation.
- Si on tourne dans le sens indirect, alors le signe du moment est négatif ($\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est alors orienté dans le sens de $-\vec{u_\Delta}$).

Deuxième règle de la main droite

Pour connaître le sens de rotation, on peut utiliser la deuxième règle de la main droite. En orientant le pouce dans le sens de $\vec{u_\Delta}$, l'enroulement des autres doigts donne le sens de rotation *direct*.

■ **Exemple 6.1.7**
Afin de mettre en application le concept de bras de levier, considérons l'exemple suivant où 4 forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ et $\vec{F}_4$ de même norme F mais de directions différentes sont appliquées en un point M, comme représenté sur la figure ci-dessous.

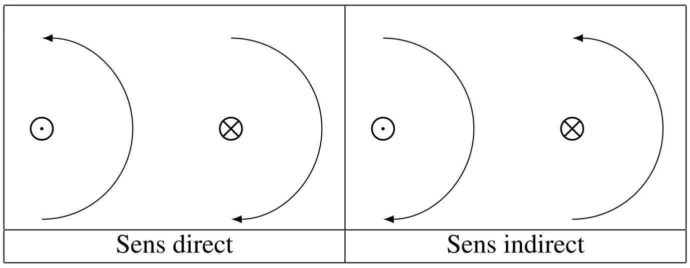
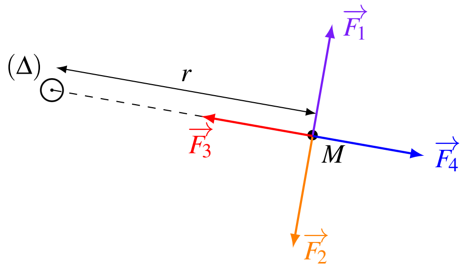


TABLE 6.2 – Identification du sens de rotation



On souhaite connaître le moment de la somme des forces qui s'exercent sur le point M. Comme $\vec{F}_3$ et $\vec{F}_4$ ont leur droite d'action qui coupe l'axe, on a :

$$\mathscr{M}_{\vec{F}_3,\Delta} = \mathscr{M}_{\vec{F}_4,\Delta} = 0$$

La valeur absolue du moment de la force $\vec{F}_1$ est donnée par le produit de la norme de la force par le bras de levier r, soit :

$$|\mathscr{M}_{\vec{F}_1,\Delta}| = F \times r$$

La force $\vec{F}_1$ va entraîner une rotation dans le sens direct (puisque l'axe $\vec{e}_\Delta$ vient vers nous), on a donc :

$$\mathscr{M}_{\vec{F}_1,\Delta} = +Fr$$

Le moment de la force $\vec{F}_2$ par rapport à Δ va avoir la même valeur absolue (puisque les forces sont de même norme et que le bras de levier est identique) que celui de $\vec{F}_1$. Cette force va cependant entraîner un mouvement de rotation dans le sens indirect, d'où :

$$\mathscr{M}_{\vec{F}_2,\Delta} = -Fr$$

Les moments étant additifs, on a finalement :

$$\mathscr{M}_{\sum \vec{F}_i,\Delta} = \sum_{i=1}^{4} \mathscr{M}_{\vec{F}_i,\Delta} = Fr - Fr + 0 + 0 = 0$$

La résultante des forces étant nulle, nous aurions pu déduire ce résultat depuis le début, sans même calculer les moments. ■

Généralisation à une force quelconque

Considérons maintenant une force $\vec{F}$ qui n'est plus perpendiculaire à l'axe Δ. On peut cependant décomposer cette force en deux composantes, l'une perpendiculaire à l'axe Δ, et l'autre parallèle, soit :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

Le moment cette force par rapport à l'axe Δ, orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ est donné par :

$$\vec{\mathscr{M}}_{M,\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u_\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp})) \cdot \vec{u_\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{\parallel}) \cdot \vec{e}_\Delta + (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{\perp}) \cdot \vec{e}_\Delta$$

Et, par définition du produit vectoriel, le vecteur $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{\parallel}$ est orthogonal à $\vec{u_\Delta}$. Il s'ensuit que le moment par rapport à l'axe est simplement donné par :

$$\vec{\mathscr{M}}_{M,\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{\perp}) \cdot \vec{e}_\Delta$$

Le bras de levier calculé pour une force perpendiculaire à l'axe se généralise alors pour une force quelconque :

À retenir 6.1.8 — Bras de levier pour une force quelconque. ....

....

....

....

....

....

....

....

R Les résultats obtenus ci-dessus sont logiques, puisque la composante parallèle de la force n'entraînera aucune rotation autour de l'axe.

Dans le but de lier les moments des forces s'appliquant sur un point matériel M à une grandeur cinétique, via la loi de Newton, il nous faut maintenant introduire une nouvelle grandeur dynamique : le *moment cinétique*.

6.2 Moment cinétique d'un point matériel

6.2.1 Moment cinétique par rapport à un point

Définition 6.2.1 — Moment cinétique. ....

....

....

....

....

....

....

....

R Comme il dépend de la vitesse $\vec{v}_{M/\mathscr{R}}$, le moment cinétique dépend également du référentiel. Pour des raisons de simplification d'écriture, nous cesserons cependant à partir de maintenant de noter le $\mathscr{R}$ en indice, car il n'y a ici pas d'ambiguïté sur le référentiel d'étude.

Propriétés du moment cinétique

— Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel il est calculé, comme nous le verrons dans la sous-partie suivante.

— Par définition, le vecteur moment cinétique $\vec{L}_{M,O}$ est perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}_M$ et au vecteur $\overrightarrow{OM}$, de telle sorte que le trièdre $\{\vec{L}_{M,0}\ ,\ \overrightarrow{OM}\ ,\ \vec{v}_M\}$ soit direct.

— Le moment cinétique caractérise les mouvements de rotation du point M, en effet :

- Si M est en mouvement de rotation autour du point O, alors $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}_M$ ne sont jamais colinéaires, de sorte que $\vec{L}_{O,M} \neq \vec{0}$.
- A l'inverse, si le point M est mouvement rectiligne et uniforme, on peut toujours choisir le point O tel que $\overrightarrow{OM}$ soit colinéaire à $\vec{v}_M$ et on a alors $\vec{L}_{M,O} = \vec{0}$.

— Si $\vec{v}_M$ et $\overrightarrow{OM}$ sont contenus dans un plan, alors $\vec{L}_{M,O}$ est toujours perpendiculaire à ce plan.

Notation 6.1. *Dans les ouvrages français, le moment cinétique est parfois désigné par la lettre σ et pas par la lettre L. La notation L correspond à la recommandation internationale.*

6.2.2 Transport du moment cinétique

Comme nous l'avons dit précédemment, le moment cinétique par rapport à un point dépend du point O par rapport auquel on le calcule. On peut, comme pour le moment d'une force, trouver une relation entre le moment cinétique calculé au point O et celui calculé au point M. Pour cela, on écrit :

$$\vec{L}_{M,O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_M = (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) \wedge \vec{p}_M = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{p}_M + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}_M = \vec{L}_{M,O'} + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}_M$$

Cette relation est connue sous le nom *d'équation de transport du moment cinétique*.

Théorème 6.2.1 — Transport du moment cinétique. Le moment cinétique par rapport à un point O est lié au moment cinétique par rapport à un point O' par la relation :

$$\vec{L}_{M,O} = \vec{L}_{M,O'} + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}_M \ .$$

R En multipliant scalairement par $\overrightarrow{OO'}$ la relation précédente, on obtient :

$$\vec{L}_{M,O} \cdot \overrightarrow{OO'} = \vec{L}_{M,O'} \cdot \overrightarrow{OO'} + \underbrace{(\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}_M) \cdot \overrightarrow{OO'}}_{= \vec{0}} = \vec{L}_{M,O'} \cdot \overrightarrow{OO'}$$

On parle *d'équiprojectivité* du moment cinétique.

6.2.3 Moment cinétique par rapport à un axe

De la même manière que pour le moment d'une force, on définit le moment cinétique par rapport à un axe orienté Δ.

Définition 6.2.2 — Moment cinétique par rapport à un axe. ....

....

....

....

....

....

De la même manière que pour le moment d'une force par rapport à un axe, le moment cinétique par rapport à un axe ne dépend pas du point O de l'axe où on calcule $\vec{L}_{M,O}$.

Le moment cinétique par rapport à un axe est parfois appelé *moment cinétique scalaire*.

Signe du moment cinétique scalaire

- **Cas** $L_{M,\Delta} > 0$: $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_M$ est alors orienté suivant $+\vec{u}_\Delta$, le mobile est en mouvement de rotation autour de Δ dans le sens *direct*.
- **Cas** $L_{M,\Delta} < 0$: $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_M$ est alors orienté suivant $-\vec{u}_\Delta$, le mobile est en mouvement de rotation autour de Δ dans le sens *indirect*.
- **Cas** $L_{M,\Delta} = 0$: Le mobile M n'est pas en mouvement de rotation autour de Δ.

Afin d'illustrer cela, on peut se référer à la figure 6.5.

Afin de nous entraîner aux calculs de moments cinétiques, traitons un exemple simple, celui du *mouvement circulaire uniforme*.

■ Exemple 6.2.2 Mouvement circulaire uniforme
On considère un mobile M de masse m, en mouvement circulaire uniforme autour d'un point O pris comme origine d'un repère cylindrique $\{\vec{u_r}, \vec{u}_\theta, \vec{u_z}\}$. Nous savons que les vecteurs position et vitesse sont donnés par :

$$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u_r} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_M = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

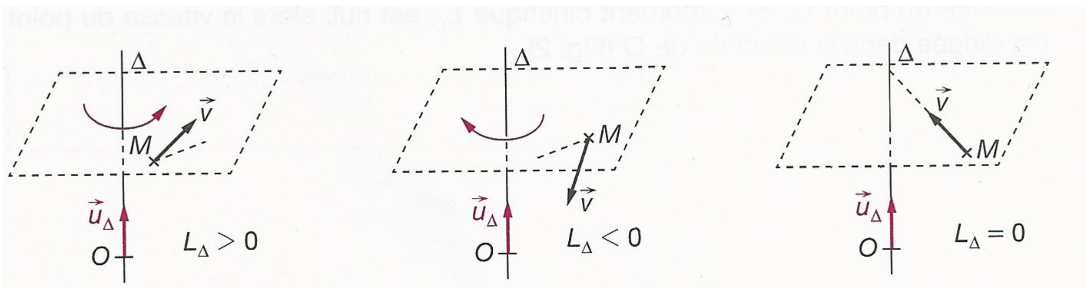


FIGURE 6.5 – Signe du moment cinétique scalaire et sens de rotation

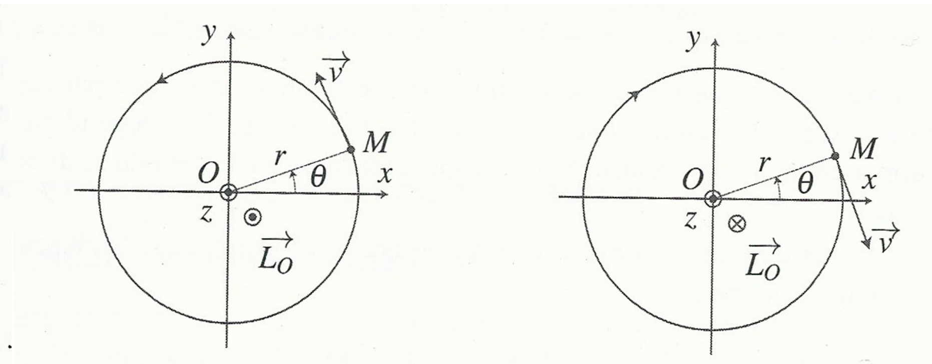
Où R est le rayon du cercle décrit par le mobile. Le moment cinétique peut ensuite se calculer, par rapport au point O, comme :

$$\vec{L}_{M,O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_M = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}_M = m\, R\vec{u_r} \wedge R\dot{\theta}\vec{u_\theta} = mR^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

On peut ensuite calculer le moment cinétique par rapport à l'axe $\vec{u_z}$. On a donc :

$$L_{M,\vec{u_z}} = \vec{L}_{M,O} \cdot \vec{u_z} = mR^2\dot{\theta}\ \vec{u_z} \cdot \vec{u_z} = mR^2\dot{\theta}$$

On voit bien que le signe du moment cinétique scalaire nous renseigne sur le sens de rotation :
— Si $L_{M,\vec{u}_z} > 0$ alors, $\dot{\theta} > 0$ et on tourne dans le sens *direct*.
— Si $L_{M,\vec{u}_z} < 0$ alors, $\dot{\theta} < 0$ et on tourne dans le sens *indirect*.
Ces résultats sont récapitulés sur la figure suivante.



■

Voyons maintenant, dans une troisième partie, comment lier moment des forces s'appliquant en un point M et moment cinétique, via le *théorème du moment cinétique*.

6.3 Théorème du moment cinétique

6.3.1 Théorème du moment cinétique

Afin de déterminer l'expression du théorème du moment cinétique, multiplions vectoriellement la loi fondamentale de la dynamique par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ où O est un point quelconque de l'espace et où M correspond à un mobile M de masse m, et donc au point d'application des forces. On a alors :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

On obtient alors le *théorème du moment cinétique* :

Théorème 6.3.1 — Théorème du moment cinétique en un point fixe. ....

....

....

....

....

....

6.3.2 Conservation du moment cinétique

On peut séparer, dans l'expression du théorème du moment cinétique, le moment des forces dites *centrales* du moment des forces non centrales. Commençons par définir ce qu'est une force centrale.

Définition 6.3.1 — Force centrale. ....

....

....

R La force gravitationnelle est par exemple une force centrale, si on choisit comme origine O du repère un point matériel M_0 immobile, affublé d'une masse m_O. La force exercée par M_0 sur un point M quelconque aura une direction qui passe toujours par M_0, qui est alors le centre de force.

Moment cinétique d'une force centrale

Calculons le moment d'une force centrale $\overrightarrow{F}$ par rapport au point O, centre de force de $\overrightarrow{F}$. On a alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{F},O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

Puisque, la force étant centrale, $\overrightarrow{F}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

Conservation du moment cinétique

Distinguons dans le théorème du moment cinétique le moment des forces centrales des autres moments. On supposera de plus que le point O est le centre de force de toutes les forces centrales. Il vient :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{M,O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}^{(centrale)}_{\overrightarrow{F},O} + \overrightarrow{\mathcal{M}}^{(non\ centrale)}_{\overrightarrow{F},O} = \overrightarrow{\mathcal{M}}^{(non\ centrale)}_{\overrightarrow{F},O}$$

Puisque le moment des forces centrales, calculé par rapport à O, est nul. Ainsi, si le mobile M n'est soumis qu'à des forces centrales de centre de force O, son moment cinétique par rapport à O se conserve.

Théorème 6.3.2 — Conservation du moment cinétique. ....

....

....

Conséquence de la conservation du moment cinétique

....

....

....

....

....

Ceci implique que, à tout moment, le vecteur position et la vitesse sont perpendiculaires à un vecteur constant, et sont donc contenus dans le même plan. Une application de ce résultat sera étudiée de manière plus approfondie dans deux chapitres, lorsque nous étudierons le mouvement d'un point matériel dans un champ de forces central.

6.3.3 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe

En projetant scalairement le théorème du moment cinétique vu précédemment par le vecteur $\overrightarrow{u_\Delta}$ constant on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{L}_{M,O} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}) = \sum_i \overrightarrow{\mathscr{M}}_{\vec{F}_i,O} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

On obtient donc directement :

Théorème 6.3.3 — Théorème du moment cinétique par rapport à un axe. ....

....

....

....

....

R Le théorème du moment cinétique par rapport à un point est une équation vectorielle qui aboutit à trois équations scalaires. En revanche, le théorème du moment cinétique par rapport à un axe est constitué d'une unique équation scalaire, et contient donc moins d'informations.

6.3.4 Exemple d'application - Le pendule simple

On considère une nouvelle fois le pendule simple représenté sur la figure 6.6.

L'axe de rotation est l'axe (Oz) orienté par le vecteur $\overrightarrow{u_z}$. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre, supposé galiléen sur la durée de l'expérience. On choisit pour traiter le problème une base cylindrique $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\varphi}, \overrightarrow{u_z}\}$. Le système étudié est la masselotte de masse m, située au point M.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

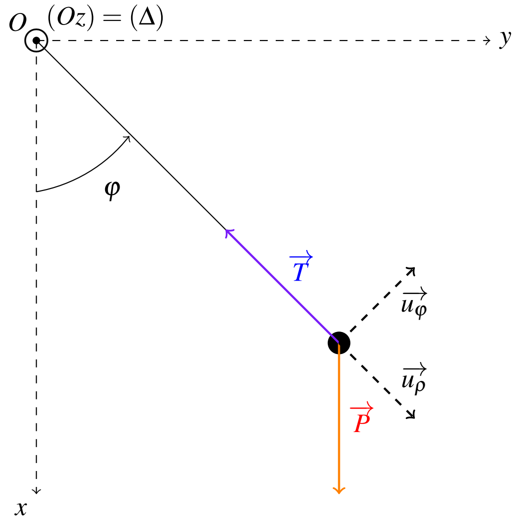


FIGURE 6.6 – Pendule simple

On retrouve bien l'équation d'évolution du pendule simple, établie cette fois en utilisant le théorème du moment cinétique.

Conclusion

Nous avons pu, au cours de cette leçon, introduire de nouvelles grandeurs permettant plus facilement de caractériser la rotation d'un point matériel M autour d'un point ou d'un axe, via l'introduction de nouvelles grandeurs dynamiques, à savoir le moment d'une force et le moment cinétique. Ces grandeurs sont liés entre elles par un théorème, découlant de la loi fondamentale de la dynamique, appelé *théorème du moment cinétique*.

Un des résultats les plus importants établi dans ce chapitre est la *conservation du moment cinétique* dans le cas où seules des forces centrales sont exercées sur le mobile. Comme toujours en physique, une loi de conservation implique de nombreux résultats facilement déductibles, sans s'encombrer de lourds calculs. Nous mettrons cela en application plus tard lors de l'étude du mouvement d'un point matériel soumis uniquement à des forces centrales. Avant cela, nous chercherons à étendre notre étude, qui s'est pour l'instant limitée à celle des points matériels, à des solides indéformables.