2018-2019第一学期期末复习

2019年1月11日

2017-2018-1高等数学A期末试题

一、填空（3分×6＝18分）

1. 若$x \to 0$时，$1 - cosx$与x^k为同阶无穷小，则$k =$ __2__.

考点缩影

设 α, β 是同一过程中的两个无穷小，且 $\alpha \neq 0$

(1) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小.
记作 $\beta = o(\alpha)$

(2) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$，那么就说 β 与 α 是同阶无穷小.

(3) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，那么就说 β 与 α 是等价无穷小.

2. $x=1$为函数 $f(x)=\frac{\sin\pi x}{x-1}$ 的 <u>可去</u> 间断点.

考点缩影

① 第一类间断点 $f(x_0^-)$与$f(x_0^+)$均存在.

- 若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$, 称 x_0 为可去间断点.
- 若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$, 称 x_0 为跳跃间断点.

② 第二类间断点 $f(x_0^-)$与$f(x_0^+)$中至少一个不存在.

- 若其中有一个为∞, 称 x_0 为无穷间断点.
- 若其中有一个为振荡,称 x_0 为振荡间断点.

3．设$f(x)=\int_{x}^{x^2}\frac{1}{1+t^3}dt$，则$f'(1)=$ $\underline{\quad\frac{1}{2}\quad}$.

考点缩影

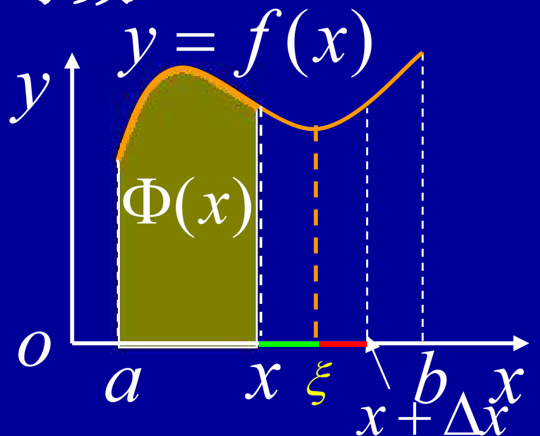
定义 设 $f(x)\in C[a,b]$ $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ (a\le x\le b)$

称为积分上限的函数.

定理1 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续, 那么积分上限的函数

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上可导，并且它的导数

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)\ \ (a\le x\le b)$$



4. 曲线$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在点 (0,0)处的曲率 k=$\underline{\ \ 0\ \ }$.

考点缩影

➢曲率计算公式

$$\boxed{K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}}$$

$$C:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases} \longrightarrow \boxed{K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{\left(\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\right)^{3/2}}}$$

5. $\int_{-1}^{1}\left(x^{2017}+\sqrt{1-x^2}\right)dx=$ __$\frac{\pi}{2}$__.

考点缩影

积分方法

直接积分法

换元积分法

分部积分法

6．微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解为______.

$y = (c_1 + c_2 x)e^x$

考点缩影

➢二阶常系数线性齐次方程

●方程形式 $y'' + py' + qy = 0$

●求解方法 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

解出特征根

写出对应通解

●通解公式 特征根	通解形式
二相异实根 r_1, r_2	$Y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
重根 r	$Y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$
二共轭复根 $\alpha \pm i\beta$	$Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

二、解下列各题$(6分\times 7=42分)$

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x-\tan x}$

1.原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x(\cos x-1)}{x-\tan x}$ (2 分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3}{x-\tan x}$ (2 分)

$\overset{L'}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x^2}{1-\sec^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x^2}{-\tan^2 x}=3$ (2 分) 。

2. 设函数$y=y(x)$ 由方程$\begin{cases} x = lncost \\ y = asect \end{cases}$确定，若$y=y(x)$为微分方程$\frac{dy}{dx}=y+e^{-x}$的解，求常数 a 的值。

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{a\sec t\cdot\tan t}{\frac{1}{\cos t}(-\sin t)}=-a\sec t$，(2分) 代入得：$-a\sec t=a\sec t+e^{-\ln\cos t}$， (2分) ；即 $a=-\frac{1}{2}$。(2分)

考点缩影

- 隐函数求导问题

求导步骤

1. 方程两边对x求导 注意$\begin{cases} \text{将}y\text{视为}x\text{的函数} \\ \text{将含}y\text{的项视为}x\text{的复合函数} \end{cases}$

2. 解出y'

3. 求不定积分 $\int \ln(1+\sqrt{x})\,dx$

3. $I \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int_0^1 \ln(1+t)d(t^2)$ (2分) $= t^2\ln(1+t) - \int t^2\cdot\frac{1}{1+t}dt$ (2分) $= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}x + \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) + C$ (2分)

或 $I = x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int \sqrt{x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ (2分) $\overset{t=\sqrt{x}}{=} x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int\frac{t}{1+t}\cdot 2tdt$ (2分) $= \cdots\cdots + C$ (2分)

4. 将函数$f(x) = arctan\ x$ 展开为带有拉格朗日型余项的3阶麦克劳林公式。

4. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}, f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}, f'''(x)=\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}, f^{(4)}(x)=\dfrac{24(x-x^3)}{(1+x^2)^4}$ (3 分) 注.一个导数给一分，最多给 3 分。$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-2$ (1 分) $\arctan x = x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{\xi-\xi^3)}{(1+\xi^2)^4}x^4$ (2 分) ，ξ 位于 0 与 x 之间。注.写出公式可给一分。

考点缩影

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1)$$

考点缩影

若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad ①$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 在 x_0 与 x 之间） ②

公式 ① 称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式 .

公式 ② 称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日余项 .

5.求曲线$y^2=-4(x-1)$与$y^2=-2(x-2)$围成的平面图形的面积。

5. 由对称性得 $A=2\int_0^2[\frac{1}{2}(4-y^2)-\frac{1}{4}(4-y^2)]dy$，(2分) $=\frac{1}{2}\int_0^2(4-y^2)dy=4-\frac{1}{2}\int_0^2 y^2dy$ (2分) $=\frac{8}{3}$ (2分)

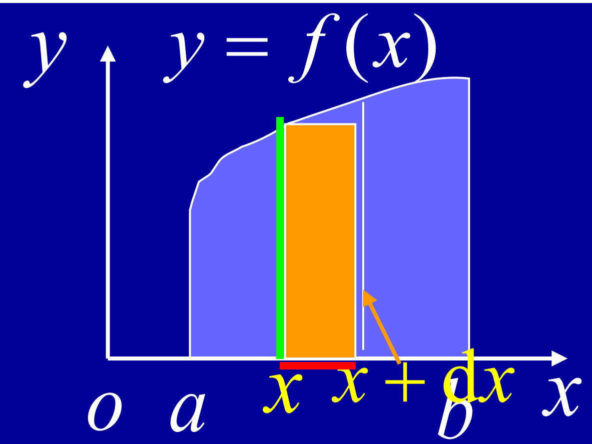
考点缩影

直角坐标:

积分变量: x　　积分区间: $[a, b]$

面积元素: $\Delta s\approx f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}A$

所求面积: $A=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

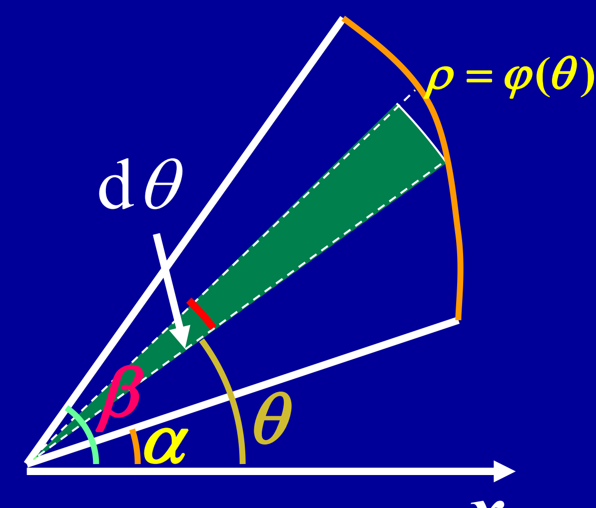


极坐标:

积分变量: θ　　积分区间: $[\alpha, \beta]$

面积元素: $\Delta A\approx\frac{1}{2}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}A$

所求面积: $A=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}A=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$



6.求曲线 $y=2lnx+x^2-1$上拐点处的切线方程。

6. $y'=\frac{2}{x}+2x, y''=\frac{2(x^2-1)}{x^2}$, (2分) 由 $y''=0$ 得 $x=1, x=-1$ （舍去）(1分) 。当 $x\in(0,1)$ 时，$y''<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$y''>0$，$(0,1)$ 为曲线的拐点。(1分)，$k=y'|_{x=1}=4$,，切线方程：$y=4(x-1)$ (2分)。

考点缩影

➢凹凸性判定定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数，那么

(1)若在(a, b)内$f''(x)>0$,则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹的；

(2)若在(a, b)内$f''(x)<0$,则$f(x)$在$[a, b]$上的图形是凸的；

拐点： 设$y=f(x)$在区间I上连续，x_0是I内的点. 如果曲线$y=f(x)$ 在经过点$(x_0, f(x_0))$时，曲线的凸凹性改变了，那么称该点$(x_0, f(x_0))$为这个曲线的拐点.

7. 计算曲线 $\rho = a\sin^3\frac{\theta}{3}, a > 0$相应于$0 \le \theta \le 3\pi$ 的一段弧的长度。

7. $ds = \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta = a\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta$ (2分)， $S = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}(1-\cos\frac{2\theta}{3})d\theta$ (2分) $=\frac{3}{2}\pi a$ (2分)

$\boxed{\text{考点缩影}}$ **(1) 直角坐标方程情形** $y = f(x) \quad (a \le x \le b)$

所求弧长： $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$

(2) 参数方程情形 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

所求弧长： $s = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

(3) 极坐标方程情形$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$ $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$

所求弧长： $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

三、解下列各题(7分×5=35分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x} & x\ge 0\\[2mm] \dfrac{1}{e^x+e^{-x}} & x<0\end{cases}$**，计算** $\int_{-\infty}^{2} f(x-1)dx$ 。

1. $\int_{-\infty}^{2} f(x-1)dx \overset{t=x-1}{=} \int_{-\infty}^{1} f(t)dt$ (2分) $=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{1} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{e^t+e^{-t}}dt+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+t}dt$ (2分)

$=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^t}{1+e^{2t}}dt+\ln(1+t)\big|_0^1=\arctan e^t\big|_{-\infty}^{0}+\ln 2$ (2分) $=\frac{\pi}{4}+\ln 2$ (1分)。

2. 求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解。

2. $r^2+1=0, r=\pm i$ (2分) 齐次方程的通解 $Y=c_1\cos x+c_2\sin x$ (1分)对于 $y''+y=x$ 特解 $y_1{}^*=Ax+B=x$，

对于 $y''+y=\cos x$ 特解 $y_2{}^*=x(C\cos x+D\sin x)=\frac{1}{2}x\sin x$ (3分)，（注：特解形式各一分），

通解 $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x$

考点缩影

- 二阶常系数线性非齐次方程
  - 方程形式 $y'' + py' + qy = f(x)$
  - 求解步骤

    求出对应齐次方程的通解 Y;

    求出非齐次方程的一个特解 y^*;

    写出非齐次方程的一个通解 $y = Y + y^*$.
  - 特解求法

    待定系数法

●特解形式

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$

$$y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x}\begin{cases}\lambda\text{ 不是特征方程的根} \longrightarrow k=0\\ \lambda\text{ 是特征方程的单根} \longrightarrow k=1\\ \lambda\text{ 是特征方程的重根} \longrightarrow k=2\end{cases}$$

(2) $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$$

$R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 为m次多项式　$m=\max\{l,n\}$

$$\begin{cases}\lambda+i\omega\text{ 不是特征方程的根} \longrightarrow k=0\\ \lambda+i\omega\text{ 是特征方程的根} \longrightarrow k=1\end{cases}$$

3. 求由曲线$y=sinx, y=cosx, (0\le x\le \frac{\pi}{2})$及直线$x=0, x=\frac{\pi}{2}$围成的平面图形绕$x$轴旋转一周而成的旋转体的体积。

$$3.V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\sin^2 x)dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\cos^2 x)dx \quad \text{(2 分)} \quad =\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx \quad \text{(2 分)}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sin 2x\,|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{2}\sin 2x\,|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(2 分)} \quad =\pi \quad \text{(1 分)}$$。

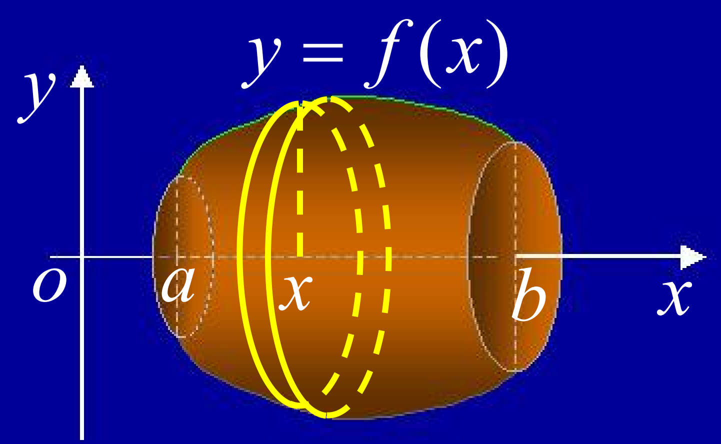
考点缩影

旋转体的体积

积分变量: x　　积分区间: $[a, b]$

体积元素: $\Delta v\approx \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}V$

所求体积: $V=\int_a^b \mathrm{d}V=\int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x$



类似地: $V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$

4. 设$f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$，求$\int_0^1 xf(x)dx$。

4. $f'(x)=2x\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}=\frac{2\sin x^2}{x}$，(3分) 由分部积分公式，原积分$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)$ (1分)

$=\frac{1}{2}[x^2f(x)]|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx$ (2分) $=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2dx^2=\frac{1}{2}\cos x^2|_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1)$ (2分)。

5. 将长为a的铁丝切成两段，分别围成正方形与圆形。当两段铁丝各为多长时，正方形与圆形的面积之和最小。

5.设圆形周长为x,则 $S(x)=(\frac{a-x}{4})^2+\pi(\frac{x}{2\pi})^2=\frac{(a-x)^2}{16}+\frac{x^2}{4\pi}$ (3分)，$S'(x)=\frac{a-x}{8}+\frac{x}{2\pi}$,得驻点$x=\frac{a\pi}{4+\pi}$

(2分) 由$S''(\frac{a\pi}{4+\pi})>0$ ，$S(\frac{a\pi}{4+\pi})$为唯一极小值，因此为最小值 (1分) ，即当两段铁丝分别为$\frac{4a}{4+\pi},\frac{a\pi}{4+\pi}$时图形面积之和为最小 (1分)。

考点缩影

- **极值存在的必要条件**

定理1 设函数$f(x)$在x_0处可导，且在x_0处取得极值，

则$f'(x_0)=0$

- **注**

可导函数：驻点 ⟵⟶ 极值点

极值嫌疑点

不可导点

极值嫌疑点

➢极值存在的充分条件

定理2（第一充分条件）

设函数$f(x)$在x_0处连续，且在x_0的某去心邻域$\overset{o}{U}(x_0,\delta)$内可导.

(1) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，

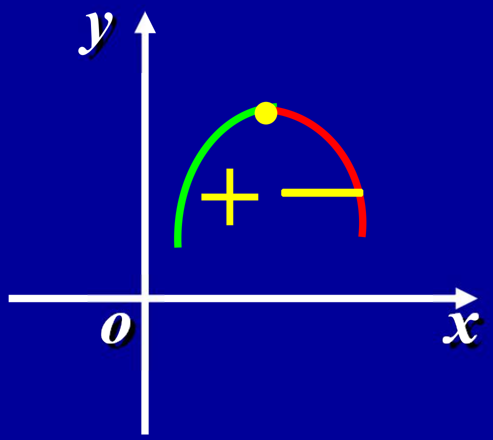
则 $f(x)$在 x_0 处取得极大值；

(2) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$在 x_0 处取得极小值；

(3) 若 $x\in\overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，

则 $f(x)$在 x_0 处没有极值



➢极值存在的充分条件

定理3（第二充分条件）

设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$, 则

(1) 当$f''(x_0)<0$时, 函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2) 当$f''(x_0)>0$时, 函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

➢最值的求法

(1) 求出$f(x)$在(a,b)内的驻点和不可导点;

(2) 计算$f(x)$在上述驻点、不可导点处的函数值及$f(a),f(b)$;

(3) 上述函数值中，最大者为最大值，最小者为最小值.

➢特例 若$f(x)$在一个区间内可导且只有一个驻点，若这个驻点是极值点，则$f(x)$在该点处取得最大值或最小值.

四. 证明题(5分) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导,

$f(a)=a$且$\int_a^b f(x)dx=\dfrac{b^2-a^2}{2}$, 证明至少存在一点

$\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.

证. $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)=\int_a^b xdx$,得 $\int_a^b[f(x)-x]dx=0$,

由积分中值公式,知存在$\xi_1\in(a,b)$,使得 $(f(\xi_1)-\xi_1)(b-a)=0$,即$f(\xi_1)=\xi_1$ (2分) .

设$F(x)=(f(x)-x)e^{-x}$, 则$F(\xi_1)=F(a)=0$ (2分) 由 Rolle 定理知存在 $\xi\in(a,\xi_1)\subset(a,b)$ 使

$F'(\xi)=0$, 即$[f'(\xi)-1]e^{-\xi}-[f(\xi)-\xi]e^{-\xi}=0$, 又因$e^{\xi}\neq0$, 所以 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$。(1分)

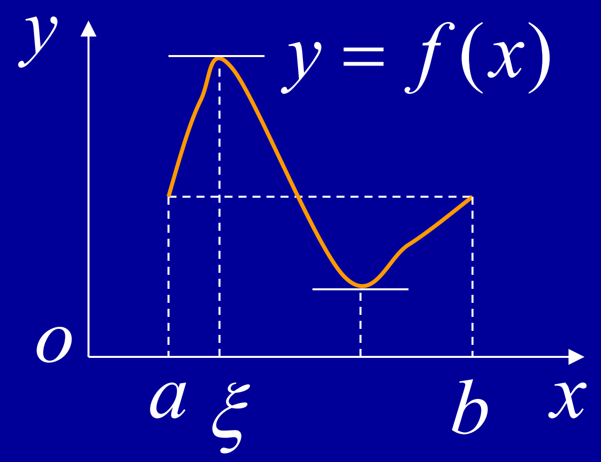
罗尔(Rolle)定理

$y=f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在区间 (a, b) 内可导

(3) $f(a)=f(b)$



那么在(a, b)内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi)=0.$

➢性质6 （定积分中值定理）如果函数 $f(x)$ 在积分区间$[a, b]$上连续, 那么在$[a,b]$上至少存在一点ξ,使下式成立:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)\ (a \le \xi \le b)$$