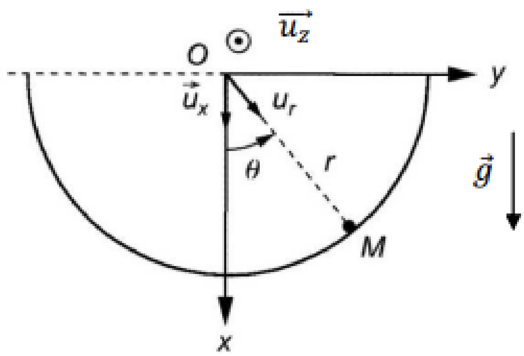
6. Théorème du moment cinétique

6.1 Exercices d'application

6.1.1 Oscillation d'une bille dans une cuvette



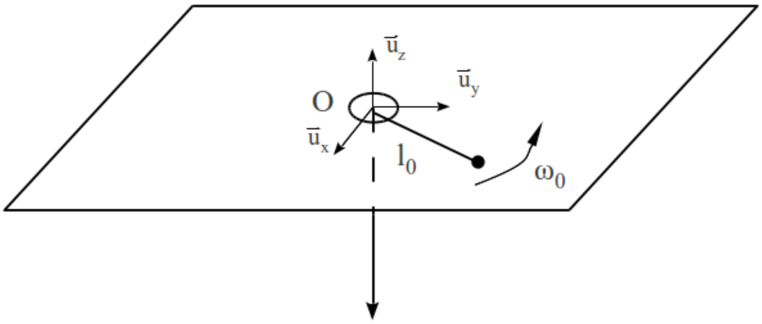
Une bille de masse m peut glisser sans frottement à l'intérieur d'une cuvette sphérique de rayon R. On note $\theta(t)$ l'angle entre $\vec{u_x}$ et $\overrightarrow{OM}$. La bille est initialement lâchée sans vitesse initiale d'un angle θ_0 puis effectue des oscillations.

1. Quelles sont les forces qui s'exercent sur la bille ? Calculer leur moment en O.
2. Exprimer le moment cinétique par rapport à O de la bille en fonction de $\dot{\theta}(t)$.
3. En appliquant le théorème du moment cinétique à la bille, trouver son équation du mouvement.
4. En déduire la période T des oscillations dans le cas où θ_0 est faible..

6.1.2 Masse attachée à une ficelle

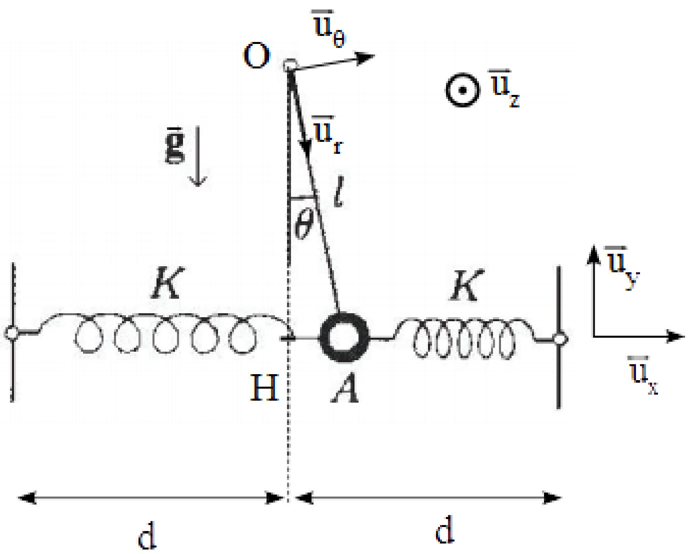
Un point matériel M de masse m, attaché à une ficelle, peut glisser sans frottement sur un support. La ficelle passe par un trou du support et est tirée à la vitesse $\vec{v}(t) = -v_0\vec{u_z}$ vers le bas, où $v_0 \geq 0$ est une constante. La masse est lancée initialement avec la vitesse angulaire ω_0 et la longueur horizontale de fil est à cet instant ℓ_0.

1. Déterminer le vecteur vitesse et évaluer le moment cinétique de la masse à un instant quelconque en fonction des variables.
2. Appliquer le théorème du moment cinétique à la masse. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique.
3. Déterminer le rayon $\ell(t)$ de la trajectoire de la masse en fonction du temps. En déduire l'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la masse.



6.2 Exercices de réflexion

6.2.1 Pendule lié à deux ressorts.



Un pendule est constitué d'une masse m attachée à un fil de longueur quasi constante l. La masse est de plus fixée à deux ressorts identiques (K, l_0) placés symétriquement par rapport à la verticale. On se place dans la limite des petits angles, de telle sorte que le mouvement de la masse soit quasi horizontal. On notera $\overline{HA} = x$.

1. Déterminer les forces élastiques exercées en A par chacun des deux ressorts en fonction du vecteur $\overrightarrow{u_x}$. Déterminer leur résultante $\overrightarrow{F_r}$ en fonction de x, K et du vecteur $\overrightarrow{u_x}$. Puis en fonction de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.
2. Calculer les moments scalaires par rapport à Oz des diverses forces s'exerçant sur la masse.
3. Appliquer le théorème du moment cinétique, trouver l'équation du mouvement pour de petites oscillations. La variable étudiée est laissée au choix.
4. Quelle est la période des oscillations ?