Application 2.

Exercice II-9. Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 16 \\ 4 & 9 & 22 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -13 & 11 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -4 \\ 2 & -5 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercices

Exercice II-10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice II-11. Pour les deux matrices suivantes, dire si elles sont inversible ou non, et calculer l'unique matrice échelonnée réduite qui leur soit équivalente par ligne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & -2 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice II-12. Donner les inverses des matrices suivantes :

1- $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]^2}$ avec $a_{i,j} = (1 - \delta_{i,j})$

2- $B = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]^2}$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $b_{i,j} = u\delta_{i,j} + v(1 - \delta_{i,j})$

3- $C = I_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k+1}$

4- $D = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$

5- $E = (e_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]^2}$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $e_{i,j} = a_i\delta_{n-i+1,j}$

Exercice II-13. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la matrice $B = A - I_4$ et la formule du binôme de Newton, determiner A^n pour tout n.

Exercice II-14. Soit $A = \begin{pmatrix} -49 & -10 & -21 \\ 180 & 37 & 75 \\ 30 & 6 & 14 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 = 2A^2 + A - 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice II-15. On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = \mathbf{0}_n$.

1- Montrer que si A est nilpotente, alors ${}^tA$ est nilpotente.

2- Montrer que si A et B sont nilpotentes et que $AB = BA$, alors AB et $A + B$ sont nilpotentes.

3- Montrer que si A est nilpotente, alors $A + I_n$ et $A - I_n$ sont inversibles.

Exercice II-16. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la *trace* de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, le scalaire :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

1- Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$

2- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Donnez des conditions nécessaires et suffisantes sur n, p, q, r pour que $A \times B$ et $B \times A$ existent. Sous ces conditions, montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

3- En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$.

4- Peut on trouver deux matrices, A et B, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?