II - Probabilités

1- Généralités

1.a) Expérience aléatoire et univers

Définition 12. Une **expérience aléatoire** est une expérience *renouvelable* dont les *résultats possibles* sont connus *sans qu'on puisse déterminer* à l'avance lequel sera réalisé (c'est le fruit du *hasard*).

- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire s'appelle **l'univers**, on le note généralement Ω (lettre grecque *oméga*).
- On appelle **événement** un ensemble d'issues possible d'une expérience aléatoire. Un événement A est donc une partie de Ω.
- On appelle **évèenement élémentaire** un événement qui ne contient qu'une issues, c'est-à-dire un *singleton* de Ω.

Remarque 13. En théorie, l'univers Ω n'a pas de restrictions particulières. Cependant, cette année nous n'étudierons que des expériences aléatoires dont les univers sont des **ensembles finis**.

Exemple 5. Si on lance un dé à 6 faces, il s'agit d'une expérience aléatoire (le résultat dépend bien du hasard, mais l'ensemble des résultats possibles est connu à l'avance et l'expérience est reproductible). L'univers est :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Des événements de Ω sont par exemple : $\{2, 4, 6\}, \{1, 2\}, \{5\}$.
Les événements élémentaires de Ω sont : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$.

Définition 13. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et soit $A \subset \Omega$ un événement. On appelle **événement contraire** de A l'événement noté $\overline{A}$, le *complémentaire* de A dans Ω.

Exemple 6. Dans le cas d'un lancé de dé à 6 faces, si l'événement $A = \{1, 3, 5\}$ ("obtenir un nombre impair"), alors son événement contraire est :

$$\overline{A} = \{2, 4, 6\}$$

Définition 14. Soient A et B deux événements d'un univers Ω. On définit les événement :

- "A et B" ; c'est l'événement de l'ensemble $A \cap B$.
- "A ou B" ; c'est l'événement de l'ensemble $A \cup B$.

Rappel 1. Lois de De Morgan

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega),\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \text{ et }\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Exemple 7. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$. Alors :

- L'événement A ou B est l'événement $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.
- L'événement A et B est l'événement (élémentaire) $\{2\}$.

Définition 15.

- On appelle $\varnothing$ l'**événement impossible**.
- Deux événement A et B sont dit **incompatibles** sitôt que l'événement A et B est l'événement impossible : $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 8. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{4, 6\}$. Ce sont deux événements incompatibles.

Définition 16. Soit Ω un univers, et soit $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'événements de Ω. On dit que les $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ forment **un système complet d'événement** sitôt que :

1- les événements sont deux à deux incompatibles : $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

2- leur réunion est l'univers complet : $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1;p]\!]} A_i = \Omega$.

Exemple 9.
- Si $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, alors les événements $A = \{1,2\}$, $B = \{4,6\}$, et $C = \{3,5\}$ forment un système complet d'événements de Ω.
- Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événements de Ω.
- La famille des événements élémentaires forme toujours un système complet d'événements.

1.b) Espaces probabilisés finis

Remarque 14. Si on reproduit une expérience aléatoire un grand nombre de fois, on peut alors faire des statistiques sur cette ensemble d'expérience, et notamment dégager la **fréquence** de chacun des événements qu'on considère (c'est à dire, la proportion des expérience où l'événement a été réalisé). En fait, à force de faire de plus en plus de répétitions de l'expérience, la fréquence va tendre vers un nombre donné, dépendant de l'événement, ce nombre étant "la proportion de réalisation de cet événement sur un nombre infini d'expérience". Moralement, c'est cela qu'on va appeller la probabilité d'un événement.
Cependant, pour plus de généralité et de rigueur mathématique, on va prendre une définition plus opérationnelle de la probabilité (à partir de ses propriétés). Du fait du lien avec la fréquence, on va observer un grand nombre de propriétés similaires entre la fréquence (en statistique) et la probabilité.

Définition 17. Soit Ω un univers. On appelle **probabilité** sur Ω toute application :

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1- $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \cap B = \varnothing \implies \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

2- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Définition 18. On appelle **espace probabilisé fini** tout couple $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. C'est-à-dire, un ensemble d'issues possibles à une expérience, et la probabilité de chacun des événements.

Proposition 14. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. La probabilité $\mathbb{P}$ est entièrement détérminée par l'image des événements élémentaires.

Démonstration 7.

Exemple 10. Prenons comme expérience aléatoire le tirage d'un nombre entre 1 et 4 (inclus). L'univers est donc $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Prenons par exemple la probabilité suivante :

$x \in \Omega$	1	2	3	4
$\mathbb{P}(\{x\})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

On peut alors calculer la probabilité de n'importe quel événement :

Définition 19. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Un événement $A \subset \Omega$ est dit **négligeable** sitôt que $\mathbb{P}(A) = 0$. Il est dit **certain** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Remarque 15. ATTENTION : la notion de *négligeable* ou *certain* dépend du choix de la probabilité $\mathbb{P}$. Comme plusieurs probabilités sont possibles sur un même univers Ω, on peut avoir un événement qui est négligeable pour une probabilité $\mathbb{P}_1$ mais pas pour une probabilité $\mathbb{P}_2$. Cependant, l'événement $\varnothing$ est toujours négligeable, et l'événement Ω est toujours certain.

Définition 20. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, avec $\#\Omega = n$. On dit qu'on est dans une situation **d'équiprobabilité**, ou encore que $\mathbb{P}$ est **uniforme** sitôt que *tous les évènements élémentaires ont* **la même probabilité** :

$$\forall x \in \Omega,\ \mathbb{P}(x) = \frac{1}{n}$$

Proposition 15. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, avec $\#\Omega = n$, et $\mathbb{P}$ une probabilité uniforme. Alors :

$$\forall A \subset \Omega,\ \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Démonstration 8.

Remarque 16. Attention, la propriété ci-dessus n'est vraie **que** dans les situations d'équiprobabilité.

Remarque 17. Dans un exercice, c'est souvent l'énoncé et le contexte qui vont nous dire si on est, ou non, dans une situation d'équiprobabilité. Celle-ci est souvent caractérisée par :

- Le tirage d'un dé *non truqué* ;
- Le lancé d'une ou plusieurs pièce *équilibrée* ;
- Le tirage de boules *indiscernables* au toucher ;
- La pioche d'une carte *sans tricher* ;
- ...

Théorème 12. *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé fini. La probabilité* $\mathbb{P}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

2- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ *(croissance).*

3- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

4- Si $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ *est une famille d'événements deux à deux incompatibles, alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) \qquad \textit{(additivité finie).}$$

Démonstration 9.

1.c) Probabilités conditionnelles

Remarque 18. Dans la pratique, on peut réaliser un grand nombre de fois un expérience, et non seulement déterminer la fréquence d'un événement A, mais aussi la fréquence d'un événement A parmis toutes les fois où un événement B s'est réalisé. Cela permet de mettre au jour des liens éventuels entre ces événements.

Définition 21. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement de Ω non négligeable (c'est-à-dire, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(B) > 0$. Soit A un événement, on définit la **probabilité** (conditionnelle) **de** A **sachant** B comme :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proposition 16. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, B un événement non négligeable, alors l'application :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \mathbb{P}_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0;1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}(A|B) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω.

Démonstration 10.

Théorème 13. *Formules des probabilités composées*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ *une famille d'événements tels que :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right) > 0$$

Alors on a la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{p} A_i\right) = \prod_{i=1}^{p} \mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

Que l'on écrit aussi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots\mathbb{P}(A_p|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{p-1})$$

Démonstration 11.

Remarque 19.

- Pour $p = 2$, on retrouve la formule d'un probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_1|A_2)$$

- Pour $p = 3$, on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Proposition 17. *Formule des probabilités totales* Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soit $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ un système complet d'événements, tous non négligeables. Alors :

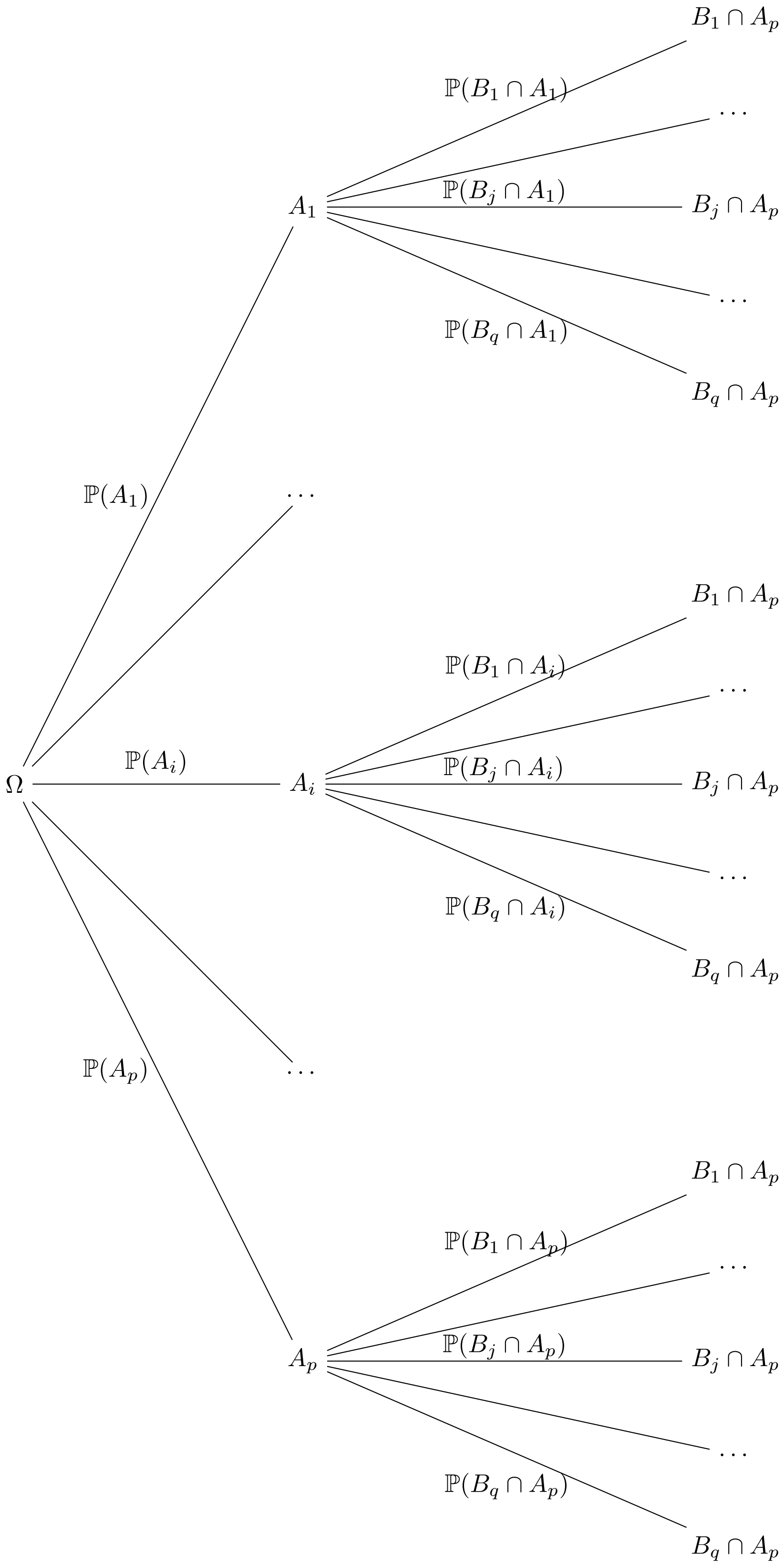
$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(B \cap A) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

Démonstration 12.

Remarque 20. Dans un problème de probabilité, on peut souvent représenter la situation sous forme d'un *arbre des possibles*. Imaginons que nous ayons deux systèmes complets de probabilités : $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ et $(B_j)_{j\in[\![1;q]\!]}$. On peut alors tracer un arbre avec le principe suivant :

- D'un point de départ Ω, on trace p branche correspondants aux événements A_i. On étiquette chaque branche avec la probabilité $\mathbb{P}(A_i)$, et chaque noeud d'arrivé avec A_i.
- De chaque noeud A_i, on trace q branches correspondants aux événements B_j. On étiquette chaque branche avec la probabilité $\mathbb{P}(B_j|A_i)$, et chaque noeud d'arrivé avec $A_i \cap B_j$.

D'après la formule des probabilités totales, pour trouver la formule d'un événement B_j, il suffit de faire le produit des probabilités présentes sur chaque branche qui arrive à un noeud $\cdots \cap B_j$, et d'additionner tous ces produits


Ω
$\mathbb{P}(A_1)$
$\mathbb{P}(A_i)$
$\mathbb{P}(A_p)$
A_1
$\dots$
A_i
$\dots$
A_p
$\mathbb{P}(B_1 \cap A_1)$
$\mathbb{P}(B_j \cap A_1)$
$\mathbb{P}(B_q \cap A_1)$
$B_1 \cap A_p$
$\dots$
$B_j \cap A_p$
$\dots$
$B_q \cap A_p$
$\mathbb{P}(B_1 \cap A_i)$
$\mathbb{P}(B_j \cap A_i)$
$\mathbb{P}(B_q \cap A_i)$
$B_1 \cap A_p$
$\dots$
$B_j \cap A_p$
$\dots$
$B_q \cap A_p$
$\mathbb{P}(B_1 \cap A_p)$
$\mathbb{P}(B_j \cap A_p)$
$\mathbb{P}(B_q \cap A_p)$
$B_1 \cap A_p$
$\dots$
$B_j \cap A_p$
$\dots$
$B_q \cap A_p$

Exemple 11. On dispose de deux urnes, U_1 et U_2, contenant chacune 7 boules indiscernables au toucher. L'urne U_1 contient 4 boules vertes et 3 boules rouges, et l'urne U_2 contient 2 boules vertes et 5 boules rouges. On lance un dé équilibré, et si l'on fait 1 ou 6, on prend un boule dans l'urne U_1. Sinon, on prend une boule dans l'urne U_2. On note $A =$"Faire 1 ou 6 avec le dé", $R =$"Tirer une boule rouge" et $V =$"Tirer une boule verte.

1- Faire un dessin de la situation

2- a) Calculer $\mathbb{P}(A)$, et en déduire $\mathbb{P}(\bar{A})$

b) On tire une boule dans l'urne U_1, quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ? verte ?

c) Même question avec U_2

3- a) Construire l'arbre de probabilité représentant ce jeu.

b) Calculer la probabilité des évènements suivants : $E =$"La boule provient de l'urne U_1 est elle est rouge" et $F =$"La boule provient de l'urne U_2 est elle est rouge".

c) Quelle est la probabilité totale d'obtenir une boule rouge ? Une boule verte ?

Proposition 18. *Inversion du conditionnement*

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, soient A et B deux événements non négligeables, alors :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B|A)$$

Démonstration 13.

Théorème 14. *Formule de Bayes Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ *un système complet d'événements non négligeables, et soit* B *un événement non négligeable. Alors :*

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$

Démonstration 14.

Exemple 12. On considère un test de dépistage d'une maladie qui touche $0,5\%$ de la population.

- Le test est positif dans 99% des cas si le patient est malade.
- Le test est positif dans $0,1\%$ des cas si le patient n'est pas malade (c'est ce que l'on appelle un *faux positif*).

Calculer la probabilité qu'une personne, prise au hasard dans la population, soit malade sachant que le test est positif.

Démonstration 15.