2.1 逻辑代数

研究逻辑运算所遵循的定律、规则。

一、逻辑代数的基本定律

或	与	非
A+0=A	A·0=0	$\overline{\overline{A}}=A$
A+1=1	A·1= A	
A+A=A	A·A= A	
$A+\overline{A}=1$	$A\cdot\overline{A}=0$	

交换律 A+B=B+A A·B=B·A

结合律
(A+B)+C=A+(B+C)
(A·B)·C = A·(B·C)

分配律
A·(B+C)=AB+AC
A+BC=(A+B)(A+C)

反演律

$$\overline{A\cdot B\cdot C\cdots}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\cdots$$

$$\overline{A+B+C+\cdots}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdots$$

吸收律

$A+AB=A$ $A+\overline{A}B=A+B$

A·(A+B)=A

(A+B)·(A+C)=A+BC

Which one of the following Boolean expressions is not correct?

(a) $X + XY = X$
(b) $X(X' + Y) = XY$
(c) $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$
(d) $XY + XY' = Y$
(e) $(X \odot Y)' = X \oplus Y$

(a) $\mathrm{X} \oplus 1 = \mathrm{X}'$
(b) $\mathrm{X} \odot 0 = \mathrm{X}'$
(c) $\mathrm{X} \oplus \mathrm{X}' = 0$
(d) $\mathrm{X} \odot \mathrm{X}' = 0$
(e) $X \odot Y \odot Z = X \oplus Y \oplus Z$

二、逻辑代数中的两个常用恒等式

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

$$左式=AB+\overline{A}C+BC(A+\overline{A})$$

$$AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$$

三.逻辑运算的规则

1、代入规则——等式两边的某变量用一个函数代替，等式仍然成立

二变量的摩根律：

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

以BC代入B

$$\overline{ABC}=\overline{A}+\overline{BC}$$

$$=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

可证明多变量的摩根律（反演律）

2、反演规则:可用于求函数的反函数

将函数中

原变量	$\leftrightarrow$	反变量
$\cdot$	$\leftrightarrow$	$+$
1	$\leftrightarrow$	0

注意： 1)变换过程必须保持原来运算的优先顺序

❖遵循先“与”后“或”的顺序

❖保持括号的优先权

2)在几个变量上的非号必须保持不变

例1

$$L = \overline{A}\,\overline{B} + CD + 0$$

$$\overline{L} = (A+B)\cdot(\overline{C}+\overline{D})\cdot 1$$

例2： $Y=(A+BC)(C+D)$

$$\overline{Y}=\overline{A}(\overline{B}+\overline{C})+\overline{C}\,\overline{D}$$

用摩根定律验证

例3

$$L = A + \overline{B\overline{C} + \overline{D + \overline{E}}}$$

$$\overline{L} = \overline{A}\cdot\overline{(\overline{B}+C)\cdot\overline{\overline{D}\cdot E}}$$

3、对偶规则 —指当某个逻辑恒等式成立时，则其两边的对偶式也相等。

对偶式的取得：

将函数中 $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \leftrightarrow + \\ 1 \leftrightarrow 0 \end{array} \right.$ 其中变量不变

注意： 变换过程 ①必须遵循原函数中先“与”后“或”的顺序

②注意()的优先权

③在几个变量上的非号必须保持不变

$$Y = A(B+C); \qquad Y' = A + BC$$

$$Y = (A+\overline{B})(A+C); \qquad Y' = A\overline{B} + AC$$

$$Y = AB + \overline{C+D}; \qquad Y' = (A+B)\overline{CD}$$

应用：当要证明某两个逻辑式相等时，可以证明他们的对偶式相等，某些情况证明对偶式更加容易。

例1：证明A+BC=(A+B)(A+C)

$$A+BC=(A+B)(A+C)$$

对偶式 ↓ ↓ 对偶式

$$A(B+C) \qquad AB+AC$$

显然A(B+C)=AB+AC（分配律）

所以由对偶规则

A+BC=(A+B)(A+C)

例2：证明

$$A+\overline{A}B=A+B$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$A(\overline{A}+B) \quad = \quad AB$$

四.逻辑函数的代数化简法

利用逻辑运算的基本定律、恒等式、规则化简逻辑函数

1、逻辑函数的不同形式

对于同一个逻辑问题，真值表唯一，但逻辑表达式及其实现电路并不唯一。

例 $L = AC + \bar{C}D$ 与或式

二次取反 $= \overline{\overline{AC + \bar{C}D}}$

反演定律 $= \overline{\overline{AC} \cdot \overline{\bar{C}D}}$ 与非-与非式

反演定律 $= \overline{(\bar{A}+\bar{C})\cdot(C+\bar{D})}$

分配律 $= \overline{\bar{A}C + \bar{C}C + \bar{A}\bar{D} + \bar{C}\bar{D}}$

冗余项

$= \overline{\bar{A}C + \bar{C}\bar{D}}$ 与或非式

摩根律 $= \overline{\bar{A}C} \cdot \overline{\bar{C}\bar{D}}$

摩根律 $=(A+\bar{C})(C+D)$ 或与式

二次取反 $= \overline{\overline{(A+\bar{C})(C+D)}}$

摩根律 $= \overline{\overline{A+\bar{C}} + \overline{C+D}}$ 或非-或非式

例：将下列逻辑式变换成与非-与非形式

$$Y=\overline{\overline{AB}+C}+\overline{B}C+BD=AB\overline{C}+\overline{B}C+BD$$

$$=\overline{\overline{AB\overline{C}+\overline{B}C+BD}}$$

$$=\overline{\overline{AB\overline{C}}\cdot\overline{\overline{B}C}\cdot\overline{BD}}$$

与或式可从真值表直接得到（乘积和的形式），且可容易地转换成其它形式。（如很容易转化成与非与非式）

∴ 重点讨论把逻辑函数化简成最简与或式。

与或式最简标准:

i)所含乘积项最少

ii)每个乘积项所含变量因子数亦最少

2、将逻辑函数化成最简与或式

①并项法

——利用 $A+\overline{A}=1$ **两项并一项且消去一变量**

例： $Y = A\overline{\overline{B}CD} + A\overline{B}CD = A(\overline{\overline{B}CD} + \overline{B}CD) = A$

$$Y = A\overline{B} + ACD + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}CD$$

$$= \overline{B} + CD$$

$$Y = B(\overline{C}D + C\overline{D}) + B(\overline{C}\,\overline{D} + CD)$$

$$= B(C \oplus D) + B(\overline{C \oplus D}) = B$$

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + (A + \overline{B})\overline{C}$$

$$= (\overline{A}B)\overline{C} + (\overline{\overline{A}B})\overline{C} = \overline{C}$$

②吸收法 —利用$A+AB=A$消去多余项

例：

$$Y=(\overline{\overline{A}B}+C)ABD+AD \quad =AD$$

$$Y=AB+AB\overline{C}+ABD+AB(\overline{C}+\overline{D})$$

$$=AB$$

$$Y=A+\overline{\overline{A}\cdot\overline{BC}}(\overline{A}+\overline{\overline{B}\,\overline{C}+D})+BC$$

$$=(A+BC)+(A+BC)(\overline{A}+\overline{\overline{B}\,\overline{C}+D})$$

$$=A+BC$$

③消项法 —利用 $AB+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C,\ AB+\bar{A}C+BCD=AB+\bar{A}C$

消去冗余项

$$Y=AC+A\bar{B}+\overline{B+C}$$

冗余项

$$=AC+A\bar{B}+\bar{B}\bar{C}\quad =AC+\bar{B}\bar{C}$$

冗余项

$$Y=A\bar{B}C\bar{D}+\overline{A\bar{B}}E+\bar{A}C\bar{D}E$$

$$=A\bar{B}C\bar{D}+\overline{A\bar{B}}E$$

$$Y=\bar{A}\bar{B}C+ABC+\bar{A}B\bar{D}+A\bar{B}\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+BC\bar{D}\bar{E}$$

$$=(\bar{A}\bar{B}+AB)C+(\bar{A}B+A\bar{B})\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+BC\bar{D}\bar{E}$$

$$=(\overline{A\oplus B})C+(A\oplus B)\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+BC\bar{D}\bar{E}$$

$$=(\overline{A\oplus B})C+(A\oplus B)\bar{D}$$

④**消因子法**—利用 $A+\overline{A}B=A+B$ 消去多余因子

$$Y=\overline{B}+ABC=\overline{B}+AC$$

$$\boldsymbol{Y=A\overline{B}+B+\overline{A}B}$$

$$=A+B+\overline{A}B=A+B$$

$$\boldsymbol{Y=AC+\overline{A}D+\overline{C}D}$$

$$=AC+(\overline{A}+\overline{C})D$$

$$=AC+\overline{AC}D$$

$$=AC+D$$

⑥综合运用

例

$$Y = AC + \overline{B}C + B\overline{D} + C\overline{D} + A(B + \overline{C}) + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}DE$$

$$= AC + \overline{B}C + B\overline{D} + C\overline{D} + A(\overline{\overline{B}C}) + A\overline{B}DE$$

$$= AC + \overline{B}C + B\overline{D} + C\overline{D} + A + A\overline{B}DE$$

$$= A + \overline{B}C + B\overline{D} + C\overline{D}$$

冗余项

$$= A + \overline{B}C + B\overline{D}$$

例2.1.8 已知逻辑函数表达式为

$$L = AB\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D} + ABD + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}D + \bar{A}\,\bar{B}\,CD$$

要求：（1）最简的与-或逻辑函数表达式

（2）仅用与非门画出最简表达式的逻辑图。

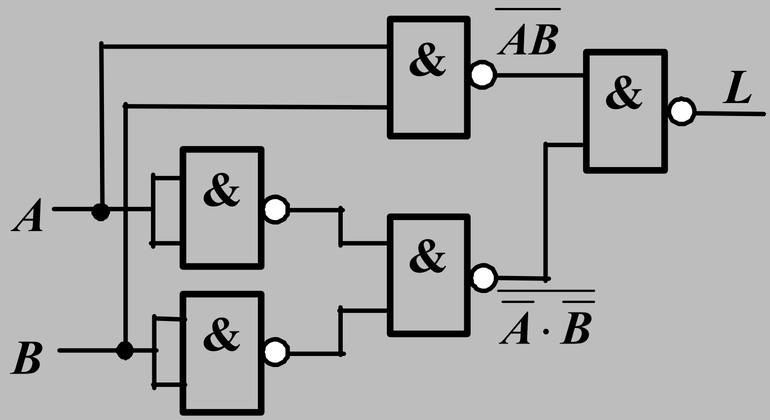
解：

$$L = AB + \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D$$

$$= AB + \bar{A}\bar{B}$$

$$= \overline{\overline{AB + \bar{A}\bar{B}}}$$

$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{\bar{A}\bar{B}}}$$

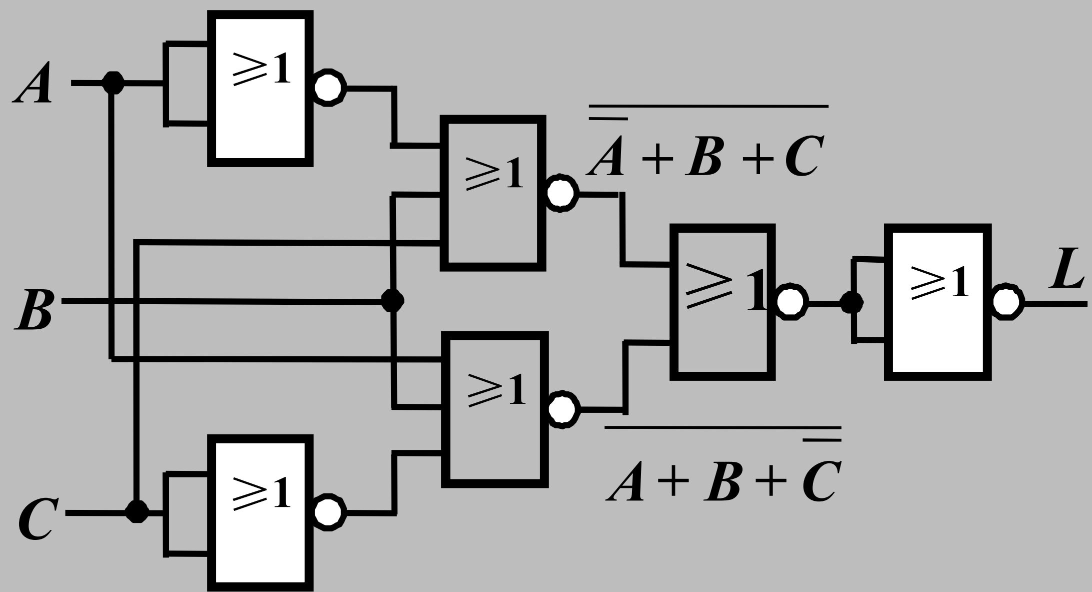


例2.1.9 试对逻辑函数表达式 $L=\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}$

进行变换，仅用或非门画出该表达式的逻辑图。

解：

$$L=\overline{\overline{\overline{A+B+\overline{C}}+\overline{\overline{A}+B+C}}}$$



2.2.1 公式化简法（代数法）

代数化简法的缺点：

- **需熟练应用逻辑代数公式的技巧**
- **很难判断是否得到最简**

公式化简法的特点

公式化简法带有明显的试探性。试探的成功率和化简过程的简繁，取决于对公式定理的理解和熟悉程度。实际的化简，往往并不是可以简单套用某个公式来解决的，需要在认真观察、分析之后灵活地运用公式，最后求得最简表达式。许多情况下，化简方法不是唯一的，甚至结果也不是唯一的，不要强求套用某个固定的模式，要充分利用最熟悉的公式，从一点突破，最终解决问题。

逻辑函数$L = AB + \overline{C}\overline{D}$ 的对偶函数__________反函数__________

逻辑函数 $L = \overline{(\overline{A}C + B)D}$ 的反函数为__________，对偶式为__________。

26.5=(______)$_2$=(________)$_{16}$=(________)$_{8421BCD码}$

将2019个“1”异或起来得到的结果是_______

十进制数3.625的二进制数和8421BCD码分别为（　　　　　　　　）

A　11.11和11.001　　　　　　　　B　11.101和0011.011000100101

C　11.01和11.011000100101　　　　D　11.101和11.101

2.1.7 逻辑函数的标准形式

最小项

逻辑函数的多个变量相乘构成的代数项，称为**乘积项**(积项)

最小项是乘积项，该乘积项包含了逻辑函数的全部变量，而且每个变量因子仅仅以原变量或反变量的形式在一个乘积项中唯一出现一次。

n 变量逻辑函数共有2^n个最小项

三变量最小项

A	B	C	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

2.1.7 逻辑函数的标准形式

最小项的性质

- 在变量的任意取值组合下，仅有一个最小项的值为1，其余的全部为0，即等于1的机会“最小”；任意两个不同的最小项的积为0；全部最小项的和为1。
- 为了书写方便，常用m_i表示 n 变量的最小项，$i\in(0,1,2,\ldots 2^n-1)$，若将使m_i的值为1的变量取值当成一个二进制数，这个二进制数所对应的十进制数，即为i的取值。例如 ABC- m_7　$A\overline{B}C$- m_5

四变量最小项

A B C D	m_i	对应最小项	A B C D	m_i	对应最小项
0 0 0 0	m_0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	1 0 0 0	m_8	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$
0 0 0 1	m_1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$	1 0 0 1	m_9	$A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$
0 0 1 0	m_2	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}$	1 0 1 0	m_{10}	$A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}$
0 0 1 1	m_3	$\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D$	1 0 1 1	m_{11}	$A\,\overline{B}\,C\,D$
0 1 0 0	m_4	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}$	1 1 0 0	m_{12}	$A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}$
0 1 0 1	m_5	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D$	1 1 0 1	m_{13}	$A\,B\,\overline{C}\,D$
0 1 1 0	m_6	$\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}$	1 1 1 0	m_{14}	$A\,B\,C\,\overline{D}$
0 1 1 1	m_7	$\overline{A}\,B\,C\,D$	1 1 1 1	m_{15}	$A\,B\,C\,D$

2.1.7 逻辑函数的标准形式

最小项表达式

全部由最小项相加构成的“**与 - 或**”表达式，即最小项表达式。又称标准与 - 或表达式，**标准积之和**表达式。最小项表达式

$$Y=\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+ABC$$

可以写成 $Y(A,B,C)=m_3+m_5+m_6+m_7$

进一步写成 $Y(A,B,C)=\sum m(3,5,6,7)$

一般形式是

$$Y=\sum_{i=0}^{2^n-1}a_i\cdot m_i$$

2.1.7 逻辑函数的标准形式

最小项和最小项表达式

对于任何一个逻辑函数，都可以写出它的标准与 - 或表达式。

对于逻辑函数的任何非标准与 - 或表达式，可用吸收律公式

$$A = A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$$

将乘积项中所缺少的变量补齐，从而变换成标准与 - 或表达式

2.1.7 逻辑函数的最小项表达式

逻辑函数的最小项表达式：

$$L(ABC) = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$$

- 为“与或”逻辑表达式；
- 在“与或”式中的每个乘积项都是最小项。

由一般逻辑式→最小项表达式方法

1.)用摩根定律去掉非号(多个变量上)直至只在一个变量上有非号为止

2)用分配律去除括号，直至得到一个与或表达式

3)配项得到最小项表达式

2.1.7 逻辑函数的最小项表达式

例1 将 $L(A,B,C)=AB+\overline{A}C$ 化成最小项表达式

$$L(A,B,C)=AB(C+\overline{C})+\overline{A}(B+\overline{B})C$$

$$=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C$$

$$=m_7+m_6+m_3+m_5$$

$$=\sum m\,(7,6,3,5)$$

例2 将 $L(A,B,C)=\overline{(AB+\bar{A}\bar{B}+\bar{C})\overline{AB}}$ 化成最小项表达式

a.去掉非号 $L(A,B,C)=\overline{(AB+\bar{A}\bar{B}+\bar{C})}+AB$

$=(\overline{AB}\cdot\overline{\bar{A}\bar{B}}\cdot C)+AB$

$=(\bar{A}+\bar{B})(A+B)C+AB$

b.去括号 $=\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB$

$=\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB(C+\bar{C})$

$=\bar{A}BC+A\bar{B}C+ABC+AB\bar{C}$

$=m_3+m_5+m_7+m_6=\sum m(3,5,6,7)$

结论：任一个逻辑函数都可化成为唯一的最小项表达式

2.2.2 图解法（卡诺图法）

卡诺图

是一种变形真值表。将输入变量分成行列两组，变量取值也分成两组， 变量取值按循环码规律排列；各变量取值组合对应的逻辑函数值标注在行列两组变量交叉覆盖产生的方格中，它同样具有真值表的唯一性，完整性和正确性，但却可以方便地用于逻辑运算和逻辑函数化简。

卡诺图：将n变量的全部最小项都用小方块表示，并使具有逻辑相邻的最小项在几何位置上也相邻地排列起来，这样,所得到的图形叫n变量的卡诺图。

逻辑相邻的最小项：如果两个最小项只有一个变量互为反变量，那么，就称这两个最小项在逻辑上相邻。

如最小项 $m_6=AB\overline{C}$与 $m_7=ABC$ 在逻辑上相邻。

m_6	m_7

卡诺图的特点：

- n变量的k图有2^n个小方格，分别对应2^n个最小项；

- k图中行、列两组变量取值按循环码规律排列，
使几何相邻的最小项之间具有逻辑相邻性。

- 几何相邻包括：邻接、行列两端、四角相邻。

卡诺图具有循环邻接性，是使用K图化简逻辑函数的主要依据。

2.2.2 图解法（卡诺图法）

二变量的卡诺图 *L(A,B)*

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

三变量的卡诺图 *L(A,B,C)*

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

四变量的卡诺图 *L(A,B,C,D)*

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

四变量卡诺图单元格的编号

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

C

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$
$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

B

A

D

The 4-Variable K-map

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ 0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$ 1	$\overline{A}\overline{B}CD$ 3	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$ 2
01	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$ 4	$\overline{A}B\overline{C}D$ 5	$\overline{A}BCD$ 7	$\overline{A}BC\overline{D}$ 6
11	$AB\overline{C}\overline{D}$ 12	$AB\overline{C}D$ 13	$ABCD$ 15	$ABC\overline{D}$ 14
10	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$ 8	$A\overline{B}\overline{C}D$ 9	$A\overline{B}CD$ 11	$A\overline{B}C\overline{D}$ 10

已知逻辑函数画卡诺图

当逻辑函数为最小项表达式时，在卡诺图中找出和表达式中最小项对应的小方格填上1，其余的小方格填上0（有时也可用空格表示），就可以得到相应的卡诺图。任何逻辑函数都等于其卡诺图中为1的方格所对应的最小项之和。

例 画出下列逻辑函数的卡诺图。

$$L(A,B,C,D)=\sum m(\mathbf{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 10,\ 11,\ 14,\ 15})$$

L AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	0	0	1	1
10	1	0	1	1

逻辑函数卡诺图的画法

(1)已知逻辑表达式

ⅰ) 将逻辑表达式化成最小项表达式

ⅱ) 画变量卡若图

ⅲ) 在最小项对应的小方块中填“1”
其余填入“0”

(2)已知真值表

ⅰ) 画变量卡若图

ⅱ)将真值表中函数值为1的变量取值组合（最小项）所对应的小方块中填“1”,其余填“0”即可。

说明：

ⅰ)可直接按与或式填卡诺图

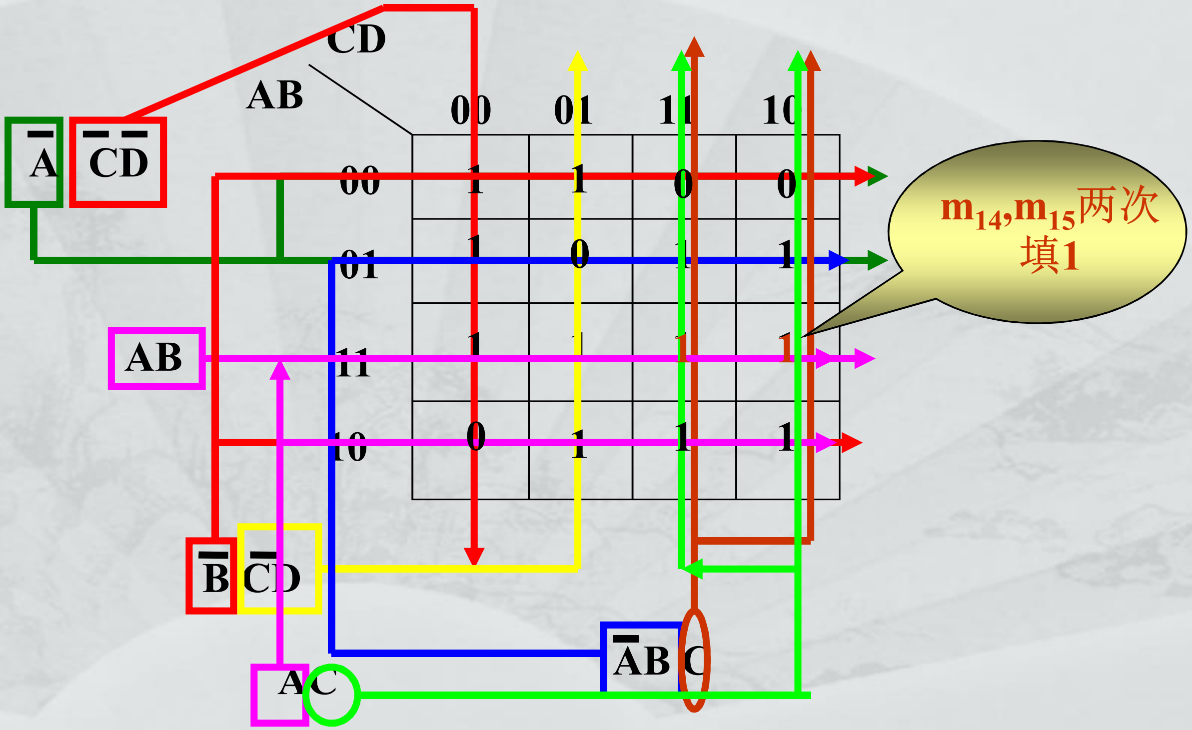
此时，可在包含乘积项的小方块中填“1”，其余填“0”。

ⅱ)有时可按函数的反函数填卡诺图,只需将L中的乘积项对应的小方块中填入“0”,其余填“1”即可。

由函数的逻辑表达式画卡诺图

例：求 F(A、B、C、D) $=\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}+AB+\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}BC+AC$ 的卡诺图

解：



3. 已知逻辑函数真值表，画卡诺图

逻辑函数真值表

	A B C	L
m_0	0 0 0	0
m_1	0 0 1	1
m_2	0 1 0	0
m_3	0 1 1	1
m_4	1 0 0	1
m_5	1 0 1	1
m_6	1 1 0	0
m_7	1 1 1	1

$$L = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$$

$$= m_1 + m_3 + m_4 + m_5 + m_7$$

逻辑函数的卡诺图

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

例 画出下式的卡诺图

$$L(A,B,C,D)=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+B+\overline{C}+D)$$
$$(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(A+B+C+D)$$

解：1. 将逻辑函数化为最小项表达式

$$\overline{L}=ABCD+AB\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$
$$=\sum m(0,6,10,13,15)$$

2. 填写卡诺图

L AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	1	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	1	1	0

例 已知 $L = ABCD + B$ ，画出卡诺图。

解:

容易发现利用吸收律 $L = B$

即B等于1的方格填1其他方格填0。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

对于一个具体的逻辑问题，逻辑表达式是**不唯一**的

唯一 $\left\{ \begin{array}{l} \text{真值表} \\ \text{最小项表达式} \\ \text{卡诺图} \end{array} \right.$

真值表实际上是函数最小项表达式的一种**表格**表示

最小项表达式的一种图形表示

——**卡诺图**

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

练习

用卡诺图表示逻辑函数

$H(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,5,7,8,10,13,15)$ $G(A,B,C) = \Sigma m(3,5,6,7)$

(a) $xy + x'y'z' + x'yz'$
(b) $x'y' + yz + x'yz'$
(c) $F(x, y, z) = x'y + yz' + y'z'$
(d) $F(x, y, z) = x'yz + xy'z' + xy'z$

Find the minterms of the following Boolean expressions by first plotting each function in a map:

(a) $xy + yz + xy'z$
(b) $C'D + ABC' + ABD' + A'B'D$
(c) $wyz + w'x' + wxz'$
(d) $A'B + A'CD + B'CD + BC'D'$

逻辑相邻

如果两个最小项中只有一个变量因子不相同，则称这两个最小项**逻辑相邻**。具有逻辑相邻性的两个最小项可以合并为一个乘积项，这个乘积项由它们的相同部分组成。逻辑相邻的数学基础是吸收律

$$ABC + A\overline{B}C = AC$$

任意一个n变量最小项有n个相邻的最小项

具有逻辑相邻性的两个乘积项可以消去这个不相同的变量因子合并为一个变量因子更少的乘积项

2.2.2 图解法（卡诺图法）

用卡诺图合并最小项

可以直观地凭借最小项在卡诺图中的几何位置来确定最小项的逻辑相邻性。再简单地将几何位置相邻的两个最小项方格（简称“1”格）用一个“圈”圈起来，便可产生一个合并项

根据逻辑相邻的概念，可以进一步将“圈”扩大，把4个、8个 …… 2^i 个“1”格圈起来得到更为简单的合并项

化简的步骤

用卡诺图化简逻辑函数的步骤如下：

(1) 将逻辑函数写成最小项表达式；

(2) 按最小项表达式填卡诺图，凡式中包含了的最小项，其对应方格填1，其余方格填0；

(3) 合并最小项，即将相邻的1方格圈成一组(包围圈)，每一组含2^n个方格，对应每个包围圈写成一个新的乘积项；

(4) 将所有包围圈对应的乘积项相加。

画包围圈时应遵循的原则：

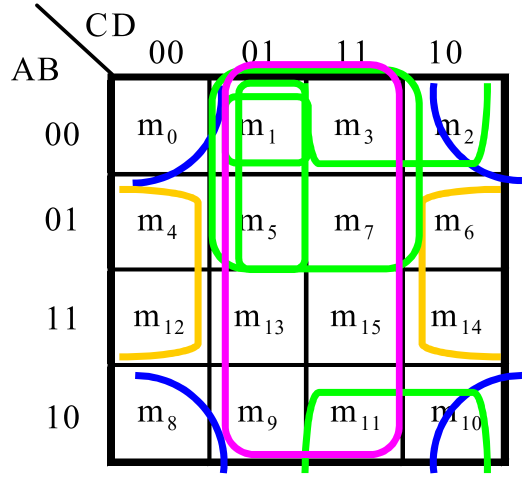
（1）包围圈内的方格数一定是2^n个；

（2）循环相邻特性包括上下底相邻，左右边相邻和四角相邻；

（3）同一方格可以被不同的包围圈重复包围多次，但新增的包围圈中一定要有原有包围圈未曾包围的方格；

（4）**同一卡诺图可以有多种圈法，应选择一种合适的圈法，直到所有1格无遗漏地至少被圈一次，且圈的总数尽可能少；**

(5) 也可以圈“0格”化简，得到最简或 - 与表达式；但是，决不允许在同一卡诺图内既圈“0格”同时又圈“1格”



用卡诺图合并最小项产生合并项

合并项由圈所覆盖的范围内没有发生变化的变量组成。

一个圈内应当、也只能圈入 2^i 个方格，则这个合并项与最小项相比消去了i 个变量

用卡诺图合并最小项

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	
1			1	

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1				

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

A \ BC	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1	1	1

用卡诺图合并最小项

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01				1
11		1	1	1
10	1			1

AB \ CD	00	01	11	10
00				1
01	1	1		1
11	1	1		1
10				1

用卡诺图合并最小项

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	
11		1	1	
10	1			1

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01	1			1
11	1			1
10		1	1	

用卡诺图合并最小项

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1			1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	1
11			1	1
10	1	1	1	1

2.2.2 图解法（卡诺图法）

卡诺图化简逻辑函数例1

$$F_1(A,B,C,D)=\Sigma m(0,4,5,8,10,12,15)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01		1		
11			1	
10				1

卡诺图化简逻辑函数**例2**

$$F_2(A,B,C,D)=\Sigma m(0,1,3,5,6,7,11,13)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			
01	1	1	1	
11	1	1		1
10		1		

多余项

卡诺图化简逻辑函数例3

$$F_3(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,4,5,10,11,13,15)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11			1	1
10	1			1

卡诺图化简逻辑函数 **例4**

$$F_4(A,B,C) = A\overline{B} + B\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}B$$
$$= \Sigma m(1,2,3,4,5,6)$$

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

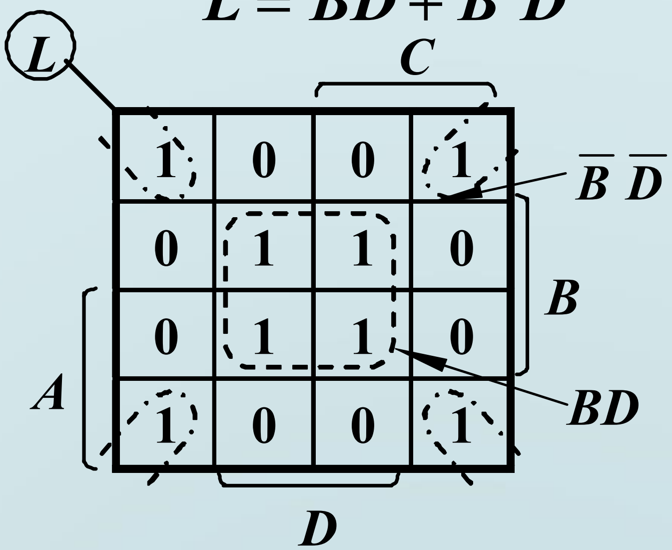
例　用卡诺图法化简下列逻辑函数

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0,\ 2,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 13,\ 15)$$

解：(1) 由L 画出卡诺图。

（2）画包围圈合并最小项，得最简与-或表达式

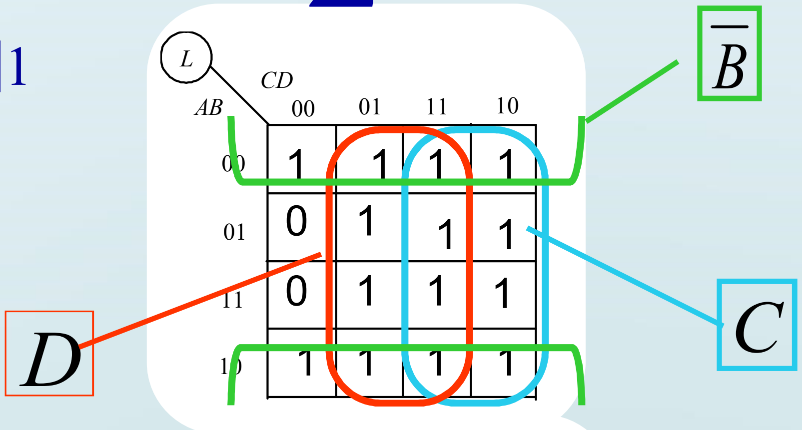
$$L = BD + \overline{B}\,\overline{D}$$



例 用卡诺图化简

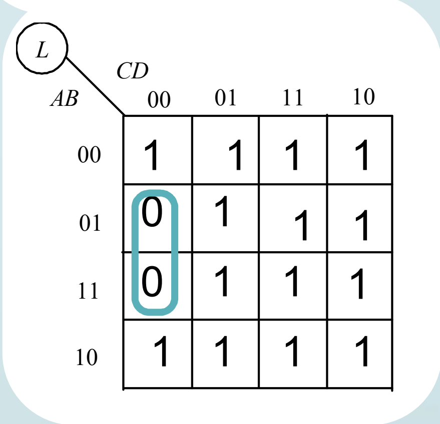
$$L(A,B,C,D)=\sum m(0\sim 3,5\sim 7,8\sim 11,13\sim 15)$$

圈1



$$L=D+C+\overline{B}$$

圈0

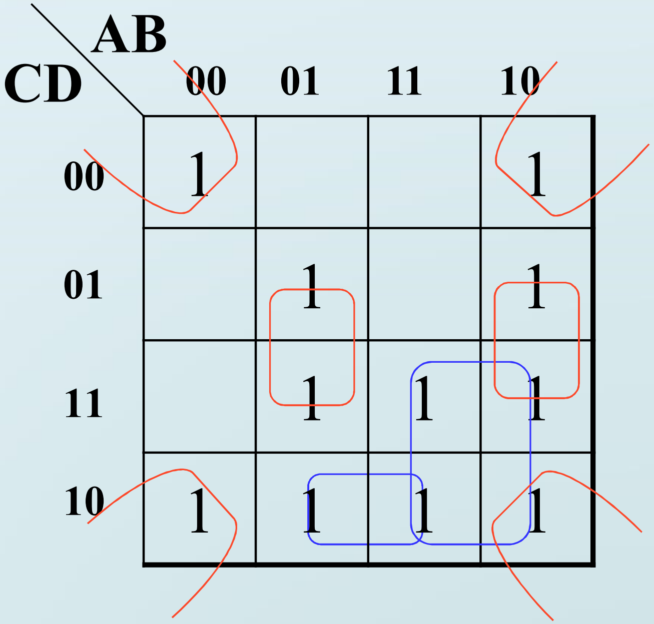


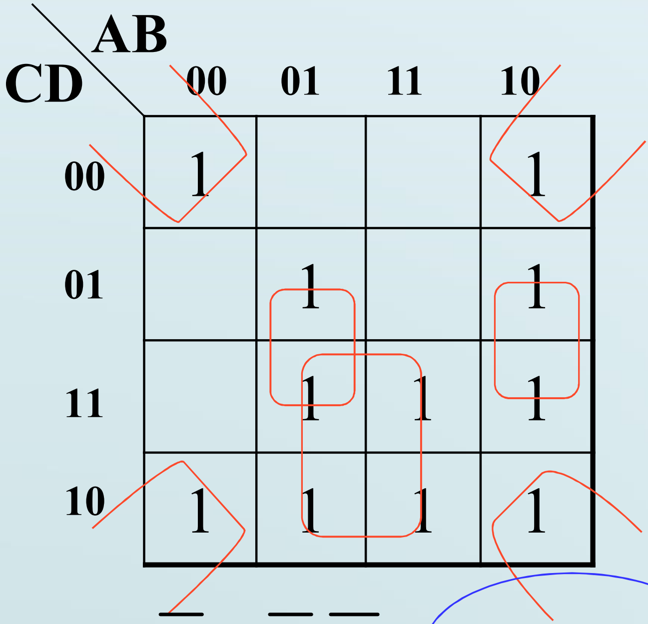
$$\overline{L}=B\overline{C}\overline{D}$$

$$L=D+C+\overline{B}$$

卡诺图化简逻辑函数例5

$$F_5(A,B,C,D)=\Sigma m(0,2,5,6,7,8,9,10,11,14,15)$$





左边圈法结果是 $F_5=\overline{A}BD+A\overline{B}+\overline{B}\,\overline{D}+AC+C\overline{D}$

显然右边圈法更好 $F_5=\overline{A}BD+A\overline{B}+\overline{B}\,\overline{D}+BC$

2.2.3 含无关项的逻辑函数及其化简

在真值表内对应于变量的某些取值下，函数的值可以是任意的，或者这些变量的取值根本不会出现，这些变量取值所对应的最小项称为无关项或任意项。

在含有无关项逻辑函数的卡诺图化简中，它的值可以取0或取1，具体取什么值，可以根据使函数尽量得到简化而定。

2.2.3 含无关项的逻辑函数及其化简

例: 要求设计一个逻辑电路，能够判断一位十进制数是奇数还是偶数，当十进制数为奇数时，电路输出为1，当十进制数为偶数时，电路输出为0。

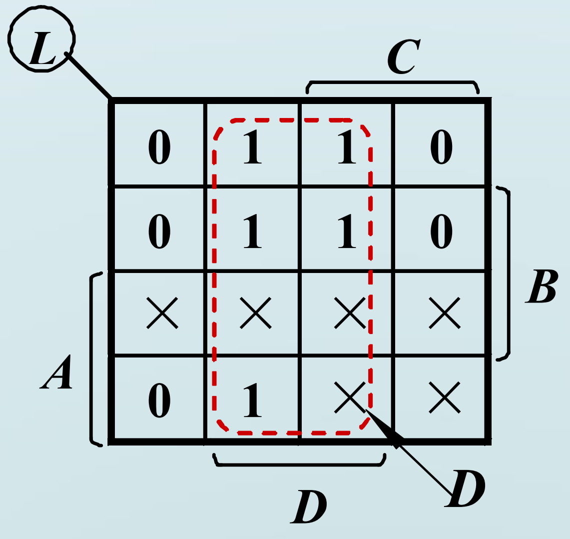
解:

(1)列出真值表

(2)画出卡诺图

(3) 卡诺图化简

$$L = D$$



ABCD	L
0000	0
0001	1
0010	0
0011	1
0100	0
0101	1
0110	0
0111	1
1000	0
1001	1
1010	×
1011	×
1100	×
1101	×
1110	×
1111	×

2.2.3 含无关项的逻辑函数及其化简

练习： 已知函数：

$$\begin{cases} \mathbf{F(A、B、C、D)} = \sum \mathbf{m}\,(0、2、3、4、6、8、10) \\ 约束条件 \sum \Phi\,(11、12、14、15) = 0 \end{cases}$$

求其最简与或式

练习

含有无关项的练习

逻辑函数F(A,B,C,D)化简时没有考虑无关项，结果为 $F=BC'+AC'D+A'B'C+A'B'D'$。当考虑无关项时，化简结果为 $F=A'+B+C'D$。那么下面对应哪个无关项

(a) $d(A,B,C,D)=\sum d(6,7,14,15)$
(b) $d(A,B,C,D)=\sum d(1,10,11,14,15)$
(c) $d(A,B,C,D)=\sum d(10,11,14,15)$
(d) $d(A,B,C,D)=\sum d(0,6,7,10,11)$
(e) $d(A,B,C,D)=\sum d(1,6,7,14,15$

例3、$F(A, B, C, D)=\sum(0,1,2,3,4,8,10,11,14,15)$ 四角

例4、$F(A, B, C, D)=\sum(2,3,6,7,8,10,11)$ 不唯一

例6、$F = A\overline{C} + AD + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}D$ 求反函数

$Y(A,B,C,D)=\sum m(1,2,5,6,9)+\sum d(10,11,12,13,14,15)$

$F(A,B,C,D)=\sum m(3,4,5,10,11,12)+\sum d(0,1,2,13,14,15)$

2.4.1 已知逻辑函数 $L(A,B,C)=A\overline{B}+B\,C+C\,A$，试用真值表、卡诺图和逻辑

2.4.2 已知函数 $L(A,B,C,D)$ 的卡诺图如图题 2.4.2 所示，请写出函数 L

2.4.3 用卡诺图法化简下列各式：

(1) $A\overline{B}CD+AB\overline{C}D+A\overline{B}+A\overline{D}+A\overline{B}C$

(2) $\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}D+AB\overline{C}D+ABC$

(3) $A\overline{B}CD+D(\overline{B}\,\overline{C}D)+(A+C)B\overline{D}+\overline{A}\,\overline{(\overline{B}+C)}$

(4) $L(A,B,C,D)=\sum m(0,2,4,8,10,12)$

(5) $L(A,B,C,D)=\sum m(0,1,2,5,6,8,9,10,13,14)$

(6) $L(A,B,C,D)=\sum m(0,2,4,6,9,13)+\sum d(1,3,5,7,11,15)$

(7) $L(A,B,C,D)=\sum m(0,4,6,13,14,15)+\sum d(1,2,3,5,7,9,10,11)$

2.4.4 用卡诺图化简法，求下列函数的最简或-与表达式。

1-12　具有无关项的逻辑函数化简。

(1) $L(A, B, C)=\sum m(0, 1, 2, 4)+\sum d(5, 6)$

(2) $L(A, B, C, D)=\sum m(1, 5, 7, 9, 15)+\sum d(3, 8, 11, 14)$

(3) $L=A'B'C+AB'C'$，约束条件 $AB+AC+BC=0$

(4) $L(A, B, C, D)=\sum m(0, 2, 3, 4, 6, 8, 10)$，约束条件 $\sum d(11、12、14、15)=0$

(5) $L=A'CD'+A'BC'D'+AB'C'D'$，约束条件

$$AB'CD'+AB'CD+ABC'D'+ABC'D+ABCD'+ABCD=0$$

小测验

1、将逻辑函数化为最小项之和的形式

$Y=\bar{A}BC+AC+\bar{B}C$

2、用卡诺图化简逻辑函数

$Y_1=ABC+ABD+A\bar{C}D+\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}C+\bar{A}C\bar{D}$

Y_2（ABC）$=\Sigma$（m_0,m_1,m_2,m_4）

约束条件：$m_3+m_5+m_6+m_7=0$

3、求下列函数的对偶式和反函数：

$$F_1=(\bar{B}+\overline{A+C+\bar{D}})(A+B+\overline{C\bar{D}})$$

$$F_2=A+\overline{B+C\bar{D}}+\overline{AD}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$$