北京化工大学

Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第四章 连续时间信号的复频域分析

主讲教师：张凤元

主要内容 CONTENTS

3

拉普拉斯变换的基本性质

-- 线性特性

--平移特性

--微积分特性

--尺度变换

--初、终值定理

--卷积定理

如没有特别的说明，以下所讲变换的基本性质，对双边变换、单边变换都成立。

1、线性特性

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s), \quad \alpha_1 < \sigma < \beta_1$

$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s), \quad \alpha_2 < \sigma < \beta_2$

则 $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \longleftrightarrow C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)$

$\max(\alpha_1, \alpha_2) < \sigma < \min(\beta_1, \beta_2)$

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

2、时域移位特性

设 $f(t) \leftrightarrow F(s), \qquad \alpha < \sigma < \beta$

则 $f(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0} \qquad \alpha < \sigma < \beta$

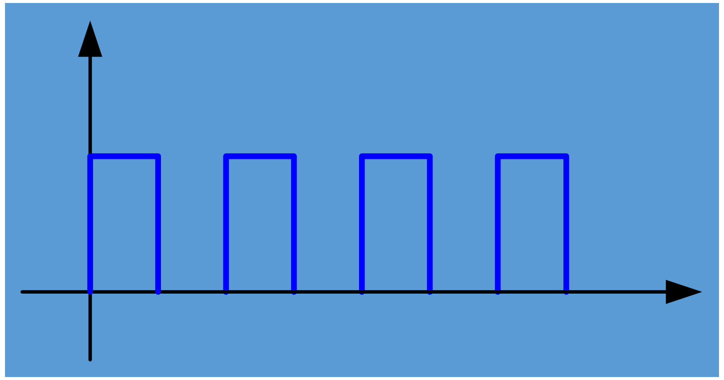
对于单边拉氏变换，一般只考虑正边信号的移位特性，而且只考虑右移特性。

设 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s),$

则 $f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0} \qquad \alpha < \sigma < \beta \quad t_0 > 0$

例1： $L[tu(t-1)] = L[(t-1)u(t-1) + u(t-1)] = (\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s})e^{-s}$

例2：求周期矩形脉冲信号的拉氏变换。



设 $f_1(t)=\begin{cases}E & (0<t<\tau)\\ 0 & (\tau<t<T)\end{cases}$， 先求$F_1(s)$.

$$F_1(s)=L\{E[u(t)-u(t-\tau)]\}=\frac{E}{s}-\frac{E}{s}e^{-s\tau}=\frac{E}{s}\left(1-e^{-s\tau}\right)$$

$$f_T(t)=f_1(t)+f_1(t-T)+f_1(t-2T)+\cdots$$

$$F_T(s)=F_1(s)+F_1(s)e^{-sT}+F_1(s)e^{-2sT}+\cdots=F_1(s)(1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots)$$

$$=F_1(s)\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$L[\delta_T(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}$$ 称为周期化因子

3、s域移位特性

$$若 f(t) \longleftrightarrow F(s), \qquad \alpha < \sigma < \beta$$

$$则 f(t)e^{s_0 t} \longleftrightarrow F(s-s_0) \qquad \alpha + \mathrm{Re}[s_0] < \sigma < \beta + \mathrm{Re}[s_0]$$

例3： 已知：$L[\cos\omega_0 t u(t)] = \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$$\therefore e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

4、时域微分特性

双边拉氏变换的微分性质：

若$f(t) \leftrightarrow F_B(s) \qquad \alpha < \sigma < \beta$,

则：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\, f(t)}{\mathrm{d}\, t} \leftrightarrow sF_B(s) \\ &\frac{\mathrm{d}^{(n)}\, f(t)}{\mathrm{d}\, t^{(n)}} \leftrightarrow s^n F_B(s) \end{aligned}\right\} \qquad \alpha < \sigma < \beta$$

4、时域微分特性　　单边拉氏变换的微分特性：

$$\text{设 } f(t) \longleftrightarrow F(s), \text{则} \frac{\mathrm{d} f(t)}{\mathrm{d} t} \longleftrightarrow sF(s) - f(0_-)$$

$$\text{推广}: \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d} t^2} \longleftrightarrow s\left[sF(s) - f(0_-)\right] - f'(0_-) = s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

$$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d} t^n} \longleftrightarrow s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0_-) \quad \text{式中 } f(0_-) = f(t)\big|_{t=0^-}, f^{(r)}(0_-) = f^{(r)}(t)\big|_{t=0_-}$$

若 $f(t)$是因果信号，即$t<0$时，$f(t)=0$.且 $f'(0_-) = f''(0_-) = \cdots = 0$

则 $f'(t) \longleftrightarrow sF(s)$, $f''(t) \longleftrightarrow s^2F(s)$, $\cdots$.

5、频域微分特性

$$t\cdot f(t)\longleftrightarrow -\frac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$$

若 $f(t)\longleftrightarrow F(s)$， $\alpha<\sigma<\beta$

则 $t^n\cdot f(t)\longleftrightarrow(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}^n s}$ n 取正整数，$\alpha<\sigma<\beta$

6、时域积分特性

双边拉氏变换：

若 $f(t) \leftrightarrow F_B(s) \qquad \alpha < \sigma < \beta$

则 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \dfrac{F_B(s)}{s} \qquad \max(\alpha,0) < \sigma < \beta,\text{且}\beta > 0$

$\int_{t}^{\infty} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \dfrac{F_B(s)}{s} \qquad \alpha < \sigma < \min(\beta,0),\text{且}\alpha < 0$

6、时域积分特性

单边拉氏变换的积分特性：

设：$f(t) \longleftrightarrow F(s)$

则：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \dfrac{F(s)}{s} + \dfrac{f^{-1}(0_-)}{s}$ 式中 $f^{-1}(0_-) = \int_{-\infty}^{0_-} f(\tau)d\tau$

$$\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

7、频域积分特性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s), \quad \alpha < \sigma < \beta$

则 $\dfrac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^{\infty} F(s)\,\mathrm{d}s \quad \alpha < \sigma < \beta$

若 $f(t) \longleftrightarrow F(s),\quad \alpha < \sigma < \beta$

则 $f(at) \longleftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{s}{a}\right) \qquad \begin{cases} a\alpha < \sigma < a\beta \\ a\beta < \sigma < a\alpha \end{cases}$

$$f(at-b) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-s\frac{b}{a}} \qquad \begin{cases} a\alpha < \sigma < a\beta \\ a\beta < \sigma < a\alpha \end{cases}$$

对于单边拉氏变换：

若 $f(t)u(t) \leftrightarrow F(s)$, 则 $f(at-b)u(at-b) \longleftrightarrow \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right) e^{-s\frac{b}{a}}$

$a > 0, b > 0$

初始值定理：

若 $f(t)$及$\dfrac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t}$可以进行拉氏变换，且 $f(t)\longleftrightarrow F(s)$,

则 $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)=f(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

终值定理：

设 $f(t)$, $\dfrac{d\,f(t)}{dt}$的拉氏变换存在, 且$sF(s)$在右半平面和 $j\omega$（原点除外） 轴上无极点

若 $f(t)\longleftrightarrow F(s)$, 则 $\lim\limits_{s\to 0} sF(s)=f(\infty)$

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), \quad \alpha_1 < \sigma < \beta_1$,

$f_2(t) \leftrightarrow F_2(s), \quad \alpha_2 < \sigma < \beta_2$

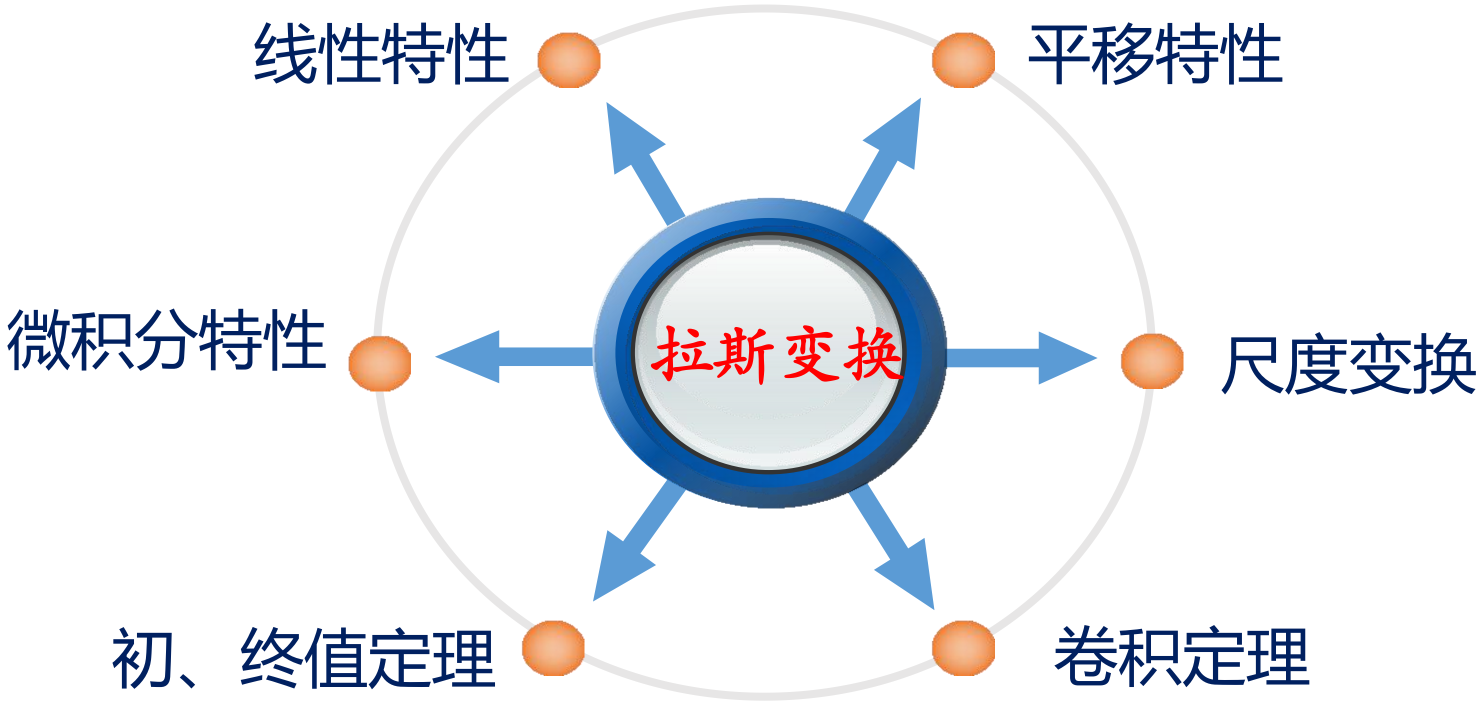
则 $L\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s) \cdot F_2(s)$

$$\max(\alpha_1, \alpha_2) < \sigma < \min(\beta_1, \beta_2)$$

$$L\left[f_1(t) \cdot f_2(t)\right] = \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) < \sigma < (\beta_1 + \beta_2)$$

拉普拉斯变换的基本性质



谢谢大家，下讲再见！