Ecole d'Ingénieur de Chimie Pékin — Année 2019-2020

Devoir Maison 3

Applications linéaires remarquables

Exercice 1 (Projecteurs)**.**

1- *Projection sur un espace parallèlement à son supplémentaire.*
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ tels que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{E}$. Soit l'application :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \Phi : & \mathbb{E} & \to & F_1 \times F_2 \\ & x & \mapsto & (x_1, x_2) \ / \ x_1 + x_2 = x \end{array} \right.$$

On rappelle que cette décomposition existe, et est unique.

a) Montrer que Φ est une application linéaire.

b) Montrer que Φ est un isomorphisme.

Soient p_1 et p_2 les applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{llll} p_1 : & F_1 \times F_2 & \to & F_1 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \\ p_2 : & F_1 \times F_2 & \to & F_2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 \end{array}$$

c) Montrer que p_1 et p_2 sont des applications linéaires.

On appelle $p = p_1 \circ \Phi$ la *projection sur* F_1 *parallèlement à* F_2, et $q = p_2 \circ \Phi$ la *projection sur* F_2 *parallèlement à* F_1. On peut les voir comme des *endomorphismes* de $\mathbb{E}$.

d) Montrer que $p \circ p = p$.

e) Montrer que $\ker p = F_2$.

f) Montrer que $\operatorname{Im} p = \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$

2- *Projecteurs*

a) Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $p \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tel que $p \circ p = p$. On appelle une telle application un **projecteur**. Montrer que $\ker p \oplus \ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$.

b) Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $p \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tel que $\ker p \oplus \ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$. Montrer que $p \circ p = p$ et que $\operatorname{Im} p = \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$.

3- *Applications*

a) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on appelle p_n l'application qui à un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ associe la n-ième coordonnée de x dans la base canonique. Montre que $\forall i \in [\![1; n]\!]$, p_i est un projecteur, et donner une base de son noyau.

b) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que l'application qui a un polynôme P associe son coefficient dominant est un projecteur. Donner son noyau et une base de son image.

4- Donner un exemple de fonction f telle que $f \circ f = f$ mais qui ne soit pas linéaire.

5- Dans quels cas un projecteur est-il un automorphisme ?

Exercice 2 (Inovlutions)**.**

1- *Symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel.*
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ tels que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{E}$. Soit l'application :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{E} & \to & F_1 \times F_2 \\ & x & \mapsto & (x_1, x_2) \ / \ x_1 + x_2 = x \end{array} \right.$$

Soit l'application :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \hat{s} : & F_1 \times F_2 & \to & \mathbb{E} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$$

Et enfin, soit $s = \hat{s} \circ \Phi$.

a) Soit p la projection sur F_1 parallèlement à F_2 (*cf exercice 1*). Monter que $s = 2p - Id_{\mathbb{E}}$.
On appelle s la symétrie par rapport à F_1 (parallèlement à F_2).

b) Montrer que $s \circ s = Id_{\mathbb{E}}$.

c) Montrer que $\operatorname{Im} s = \mathbb{E}$ et $\ker s = \{0\}$.

d) En déduire que s

e) Montrer que $\ker(s - Id_{\mathbb{E}}) \oplus \ker(s + Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$.

2- *Symétries*

a) Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ telle que $s \circ s = s$. On appelle une telle application une **symétrie**. Montrer qu'il existe un projecteur p tel que $s = 2p - Id_{\mathbb{E}}$.

b) Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ telle que $\ker(s - Id_{\mathbb{E}}) \oplus \ker(s + Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$. Montrer que s est une symétrie.

3- *Applications*

a) Montrer que l'application de transposition :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & {}^{\mathrm{t}}M \end{array} \right.$$

est une symétrie.

b) En déduire que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Montrer que l'application suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \psi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cccc} \psi(f) : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(-x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est une symétrie.

d) Décrire simplement son noyau et son image.

e) En déduire que toute fonction réelle se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

4- Donner un exemple de fonction f telle que $f \circ f = Id$ mais f ne soit pas linéaire.

Exercice 3 (Homotéthies)**.**

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle **homotéthie** toute application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ telle que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \ / \ \forall x \in \mathbb{E}, \ f(x) = \lambda x$$

. On appelle λ le **facteur** de l'homotéthie f.

1- Vérifier qu'une homotéthie est bien une application linéaire.

2- Montrer que la composée de deux homotéthies est une homotéthie.

3- Montrer que si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ et f est une homotéthie, alors $g \circ f = f \circ g$.

4- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ telle que $\forall g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}) g \circ f = f \circ g$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{E}, (x, f(x))$ n'est pas une famille libre.
   b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{E}, \exists \lambda_x \ / \ f(x) = \lambda_x x$.
   c) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{E}^2, (\exists m \in \mathbb{K} \ / \ x = my) \implies \lambda_x = \lambda_y$.
   d) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{E}^2, (x,y)$ famille libre $\implies \lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$.
   e) En déduire que $\exists \lambda \in \mathbb{K} \ / \ \forall x \in \mathbb{E}, \lambda_x = \lambda$.
   f) En déduire que f est une homotéthie.

5- Donner deux symétries s_1 et s_2 distinctes telles que $s_1 \circ s_2$ soit une homotéthie.

Exercice 4 (Sur le rang)**.**
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1- Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ un projecteur. Quels sont les valeurs possibles de $\operatorname{rg} p$?
2- Que vaut un projecteur de rang n ?
3- Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ une homotéthie. Quelles sont les valeurs possibles de $\operatorname{rg} h$?
4- Que vaut une homotéthie de rang 0 ?
5- Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ une symétrie. Quels sont les valeurs possibles de $\operatorname{rg} n$?

Exercice 5 (Pour aller plus loin)**.**

1- Soit p et q deux endomorphismes de $\mathbb{E}$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   a) Montrer que si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ alors ce sont deux projecteurs de même noyau.
   b) On suppose que p et q sont deux projecteurs. Montrer que si $p \circ q = q \circ p$ alors $p \circ q$ est un projecteur. Quel est son noyau ? Son image ?
   c) On suppose que p et q sont deux projecteurs. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$. Quel est son noyau ? Son image ?

2- Soient p et q les applications linéaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{llll} p : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x, 2x, z) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{llll} q : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+3y, 0, z) \end{array} \right.$$

Montrer que p et q sont des projecteurs, mais que $p \circ q \neq q \circ p$ et que $p \circ q$ n'est pas un projecteur.