北京化工大学

Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第三章 信号的频域表达-傅里叶变换

主讲教师：袁洪芳

主要内容 CONTENTS

17

傅里叶变换的卷积性质

-- 时域卷积

-- 频域卷积

-- 卷积定理的应用

卷积定理揭示了时间域与频率域的运算关系，是通信系统和信号处理研究领域中应用最广泛的傅里叶变换性质之一。

在这一节中，我们同时讨论“调制原理与频分复用”的概念。

17.1 时域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$， $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则 $f_1(t) \otimes f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

时域卷积对应频域频谱密度函数乘积

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega),\qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则 $f_1(t) \cdot f_2(t) \quad \leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega)$

时间函数的乘积 $\leftrightarrow$ 各频谱函数卷积的 $1/2\pi$ 倍。

两个信号时域卷积定义： $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt$$

交换积分次序

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau$$

时移性质

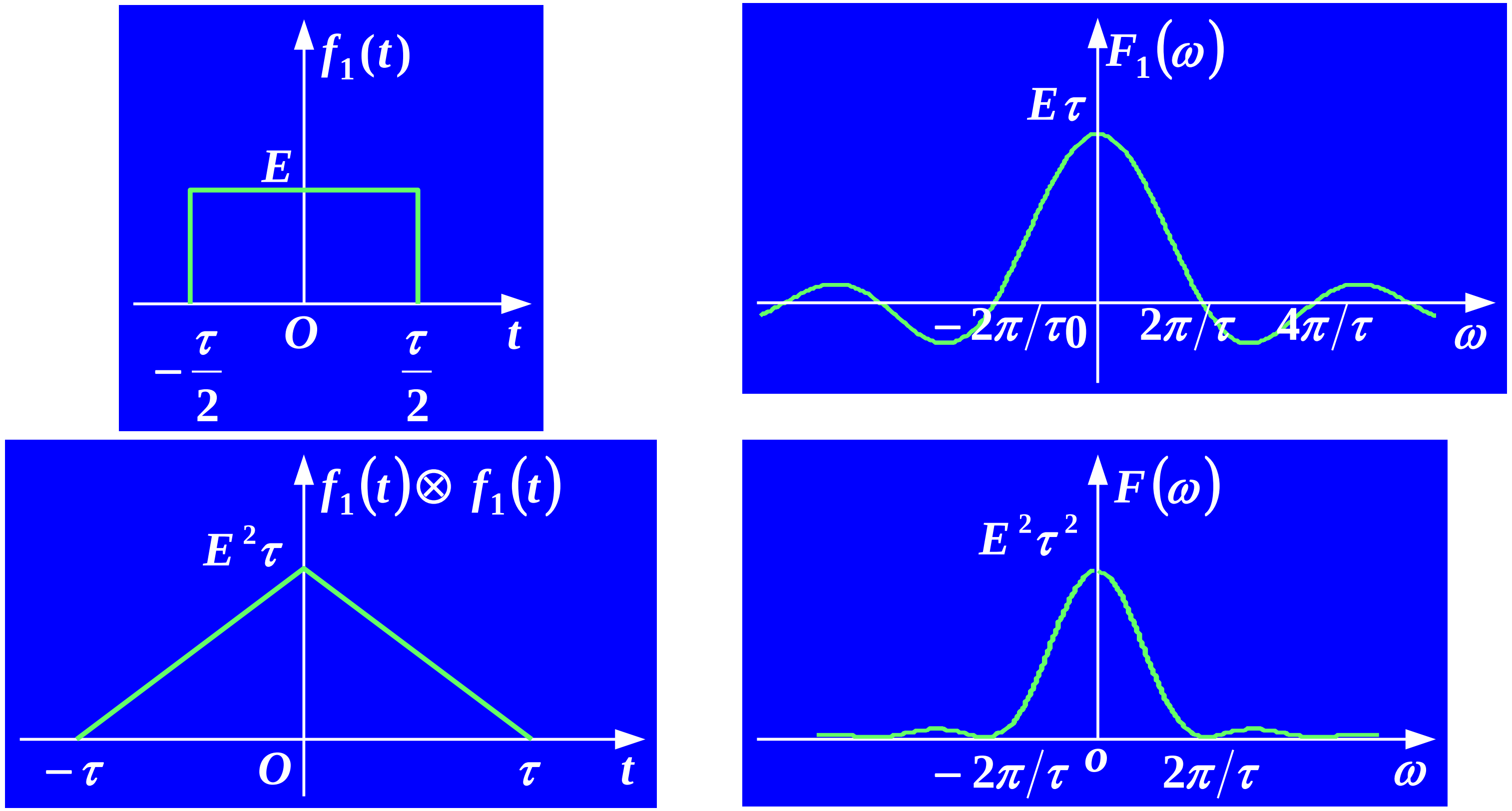
$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) \underbrace{f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau} = \boldsymbol{F_1(\omega) F_2(\omega)}$$

(1) 用时域卷积定理求频谱密度函数

例：已知 $f_1(t) \leftrightarrow E\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，求 $f(t)=f_1(t)\otimes f_1(t)$ 频谱密度函数 $F(\omega)$。

$$F_1(\omega)\cdot F_1(\omega)$$

$$=E^2\tau^2 Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

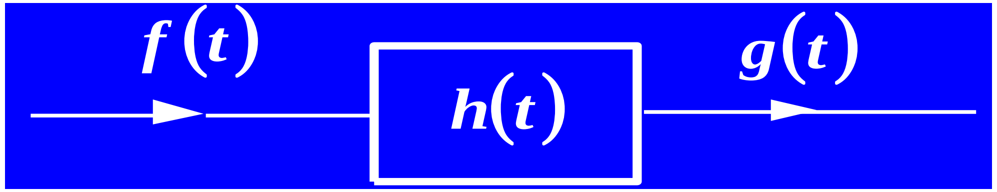


(2)求 $\int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{f(\tau)d\tau}$ 的傅里叶变换。

$$\because \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = f(t) \otimes u(t)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow F(\omega)\cdot\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right] = \pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\omega)}{j\omega}$$

(3) **求系统的响应**

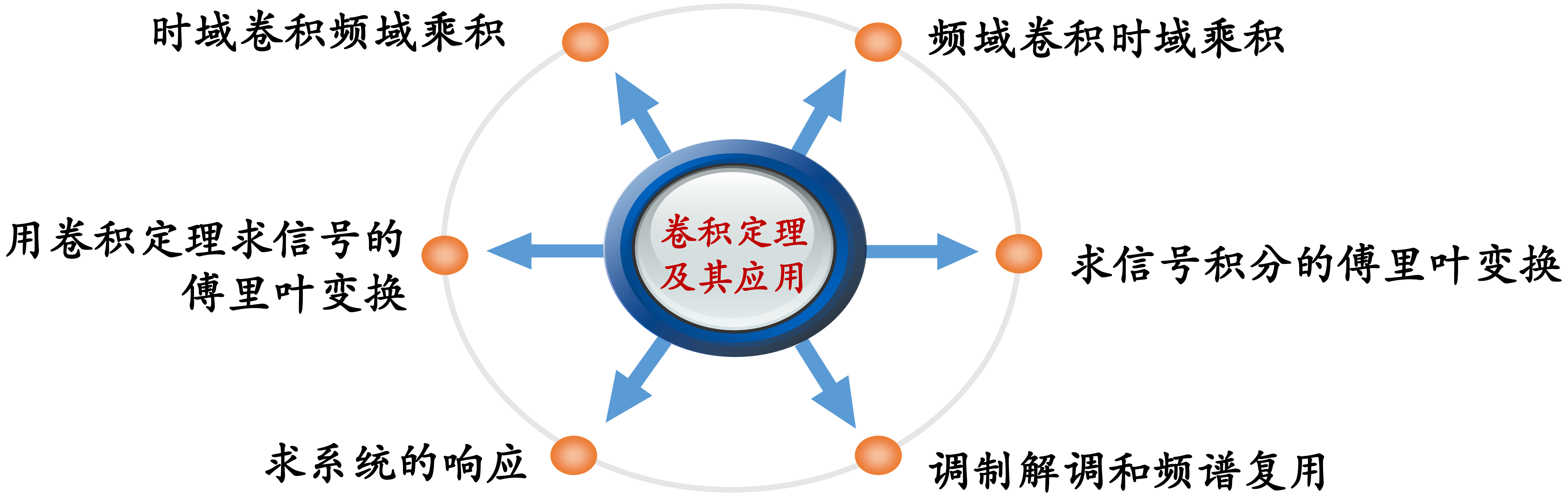


$$g(t) = f(t) \otimes h(t)$$

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega) \leftrightarrow g(t) = F^{-1}[G(\omega)]$$

将时域求响应，转化为频域求响应

16.3 本讲小结


卷积定理
及其应用
时域卷积频域乘积
频域卷积时域乘积
用卷积定理求信号的
傅里叶变换
求信号积分的傅里叶变换
求系统的响应
调制解调和频谱复用