

定理1. 任何矩阵 \mathbf{A} 相当于单降低的梯队矩阵。

示例1. 首先，我们将证明唯一性。从高斯 - 乔丹的算法，我们稍后会解释存在如下。唯一的证明的主要思想是，等值线移除它们相同的列时保持两个芯片之间的事实。它通过确保它们保持减小阶梯形式，并且我们可以随后通过感应感在数列进行。我们将使用以下三个引理：

引理1： 设 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 按行两个等价矩阵，或我 $\mathbf{A} = \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \dots \mathbf{J}_k$ 一组开指数
单独的列 \mathbf{A} 或 \mathbf{B} 让 \mathbf{U} 和 \mathbf{U}' 从得到的矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 删除列，其指数是 k 。我们有：

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}'$$

在电子 FECT，基本行操作独立于列。基本操作的线路上的相同的顺序，从切换 \mathbf{A} 至 \mathbf{B} 因此，也可以花 \mathbf{U} 至 \mathbf{U}' 。

引理2： 设 \mathbf{A} 减少交错矩阵，并 \mathbf{A} 的特定列 \mathbf{A} 是否 \mathbf{U} -矩阵
通过除去所有列获得 \mathbf{A} (所有 stricement 更多的列在右边)。然后 \mathbf{U} 是逐步减少。

在电子 FECT，它根据定义检查容易所需的四个属性被逐步降低被“发送”，以 \mathbf{A} 至 \mathbf{U} 除去列的列的块时

\mathbf{A} (含) 到最后。

引理3： 要么 \mathbf{A} 减少交错矩阵，并 \mathbf{A} 最后一栏 \mathbf{A} 是否 \mathbf{U} -的矩阵获得
删除所有列 \mathbf{A} 不含枢轴 \mathbf{A} (无支点所有列前年)。然后 \mathbf{U} 被逐步地减小，具有以下形式：如果 \mathbf{A} 是与枢轴柱：

如果 \mathbf{A} 是没有一个枢轴柱：

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(可能具有以下线 0)

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(可能具有以下线 0)

在电子 FECT，如果我们去掉所有的列没有支点，我们剩下的那些谁拥有。因此，有与支点为轴的列多行，如果你不希望最后一列。因此，对角线 1，直到最后一列，将 0 别处。

我们现在正在武装我们的数列示范感应。

初始化 让 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 两个错开矩阵由等效线减少，与单个列。需要注意的是，只有两个阵列这种类型的：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0$$

$$0$$

但应用的所有基本行操作 \mathbf{A} 给 \mathbf{B} 。因此，如果 \mathbf{A} 中 \mathbf{A} 如

\mathbf{A} 然后 \mathbf{B} 中 \mathbf{A} 因此 \mathbf{A} 中 \mathbf{B} 。同样地，如果 \mathbf{B} 中 \mathbf{A} 然后 \mathbf{A} 中 \mathbf{B} 。最后一个可能的情况是

一" 中号1 和 乙" 中号1 这种运作良好 一" B. 所以

\$&% A, B 交错减少

一" 该 Z
A, B 用1柱

归纳假设 在这里, 我们将复发 强, 用以下假设:

\$&% A, B 交错减少

p ^ h p q 一" 该 Z
A, B 没有 p 列

样品复发 假设 p ^ h p q 并显示通过矛盾的参与, 我们承担更多: \$&% A, B 交错减少

一" 该 Z 和 一" B (假设矛盾)
A, B 同 p 1 列

如 一" B 有一栏" 更左" 即间二FF erent 一和 乙 因此, 我们可以定义 J_0" 分 J P 1 p 1 { c -

J_0 c z J_0 注意 c - J 该 J- 矩阵的第n列 A. 然后, 我们

2案件

在1- J_0 a p 1 (这不是最后一列是二FF erent)。

我们把 我 " J_0 1; p, 我们设定 u - 和 u z 通过除去所有列严格右列所获得的矩阵 J_0. 通过引理1和2, 我们有:

\$&% u - u z 交错减少 (引理2)
u - u z (引理1)
u - u z 没有 p 列 (因为它已移除至少一个)

所以归纳假设, u - u z. 但是, 这些矩阵的最后一列是 c -

J_0 和 c z J_0 这被认为是双FF erent ! 因此, 我们到达在这种情况下下的谬论。

2 - 如果 J_0" p 1 (仅最后一列是二FF erent)。我们把 u - 和 u z 得到的矩阵

从 一和 乙 通过删除不转动的所有列 (不考虑最后一列)。有两个选项:

a) 如果列中除去, 然后通过引理3, u - 和 u z 范围缩小

和等同由引理1。另外, 它们具有较低的数列或等于对 p, 因此, 我们可以运用归纳假设和推断 u - u z. 但同样, 这些矩阵的最后一列是 c -

J_0 和 c z J_0 这被认为是

迪FF erent ! 因此, 我们到达在这种情况下下的谬论。

b) 如果您没有删除列, 所以我们 u - 和 u z 其是以下形式的:

如果 c p 1 是与枢轴柱:

1 0 0
0 1
A, B"
0 0 1
0 0 1

(可能在沙漠副线0)

如果 c p 1 是没有一个枢轴柱:

1 0 0
0 1
A, B"
0 0 1

(可能具有以下线0)

然后, 三种情况可能:

我。在两个矩阵, 最后一列是与枢轴柱。不过, 他们都是一样的, 这与我们的假设 一" B !

II。只有两个一个是最后一列支点，其他没有。说它 A (该

推理是相同的，如果它是 B)，看看我们两个矩阵的矩阵增加了系统 我`1个方程 p 未知：最后一列是那么的系统常数。因此，我们有：

$$\begin{array}{ccc} \$'' \text{和}'' \% X_1 = 0 & & \$'' \text{和}'' \% X_1 = \varphi_{Z1} \\ \\ p \tilde{E} - q'' & \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ X_{\#}'' 0 0 = 1 \end{array} & p \tilde{E} Z q'' & \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ X_{\#}'' \varphi_{Z1} \\ 0 = 0 \end{array} \end{array}$$

然后，我们注意到，第一个系统没有解决方案，而第二个是一个。但随后基质不能由命题3当量！这种情况是不可能的。

III。无论是做了他的最后一列矩阵是一个支点。所以，再一次，我们将看到我们的矩阵，矩阵增加了线性系统; 因此，我们有：

$$\begin{array}{ccc} \$'' \text{和}'' \% X_1 = \varphi_{-1} & & \$'' \text{和}'' \% X_1 = \varphi_{Z1} \\ \\ p \tilde{E} - q'' & \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ X_{\#}'' \varphi_{1 \#} \\ 0 = 0 \end{array} & p \tilde{E} Z q'' & \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ X_{\#}'' \varphi_{\#} \\ 0 = 0 \end{array} \end{array}$$

矩阵是等价的由线，这些系统具有相同的溶液，这意味着 $@ k P \diamond 1$ 我， $\varphi_{\# \#}'' \varphi_{BK}$ 。这是说，最后一列是相等的，所以矩阵是相等的，这是荒谬的。最后，在所有情况下，我们考虑的假设 $一 \% \text{乙}$ 因此，荒唐 $一'' \text{乙}$ 然后我们证明 $p \wedge h_{p+1} Q$ 值。

结论 因此，我们已经证明，如果两个矩阵 $一$ 和 $乙$ 位于行等效和交错减小，则它们是相等的。这证明了我们所期待的那么唯一性，如果一个矩阵 $中号$ 在两个错开阵列是每行的等效减小的 $一$ 和 $乙$ 迥FF erent，这将是直接的矛盾，我们已经展示。

注。在前面的演示中，我们只占领了 独特性 这样的矩阵。为了证明 存在 我们需要解释的方法，用于减少梯队矩阵变换给定矩阵。这是受以下算法：

定义10。为了从模具移动以降低的梯队矩阵使用 高斯 - 乔丹算法，我们将详细介绍。考虑一个矩阵 $一$ 至 \tilde{n} 在线 p 列COEFFI cient在 K ：

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{有 } 1,1 \text{ 有 } 1,2 \\ \text{有 } 1,2 \text{ 有 } 2,2 \\ \vdots \\ \text{有 } N,1 \text{ 有 } N,2 \end{array} & \begin{array}{c} \text{有 } 1,p \\ \text{有 } 2,p \\ \vdots \\ \text{有 } N,p \end{array} & \begin{array}{c} < \\ < \\ < \\ < \end{array} \end{array}$$

第1步。显示所述第一枢轴

这个第一步骤的目的是要表明枢轴线1。

一。考虑第一列，从左边，使得COEFFI cient中的至少一个不为零： φ_{J_1} 。

数学： J_1'' 分 $\tilde{J} P \diamond 1$; $p \{ d$ 我 $P \diamond 1$; $\tilde{n} \{$ 有 $1, J_{\#} 0 \tilde{u}$

湾 如果必要的话，它切换第一行 $该_1$ 与其他行 $该_{\#}$ 我 ± 1 ，使得

COEFFI cient协调 $p 1 J_1 q$ 是非零的。数学：如果 $有 1 J_1 = 0$ ，则EFF ectue $该_1 \emptyset$ $该_{\#}$ 同 $我(-1, J_1 \% 0$ (我存在，我们确信步骤 1。 $一$)。

		<<<<<<	
\$'&'% 该1d 该1' 32 该3	1 " 1	2 0 29	22
		0	1 0 50
该2d 该2' 13 该3			33
		0	0 1月6日
			11
		<<<<<<	
		1 0 0 112	33
该1d 该1' 12 该2		0 1 0 50	33
			6月1
		0 0 1	1日

		<<<<<<, 减少梯队。	
		1 0 0 112	33
一 " 该		0 1 0 50	33
			6月1
		0 0 1	1日

示范。我们现在可以显示“存在”我们的定理。它苏FFI吨为它表明，高斯-约旦算法结束，并且它总是产生减小的梯形矩阵。

算法结束：在电子FF ECT时，第1步 仅由一次，每次EFF ectue
该 步骤2中，是严格地增加在基体1中的管脚数由于存在至多一个销行和列（注7），存在至多分钟 $p N, P q$ 在算法的通道 步骤2：所以我们进入到下一个步骤。同样的，第4步 被再现一次的枢轴，所以没有分钟 $p N, P q$ 时间也。该算法因此不可避免地结束。

其结果是降低的梯队矩阵：他知道我们FFI CES上显示的四个项目
减小的梯形矩阵的定义被检查ED：

- 1- 如果行是空，那么所有的以下行是零：算法交易先后
所有非零行，只有当没有多余的线条，最后喷雾毕竟线停止为零（步骤3）。如 第4步 不与枢轴最后一行后的线起作用，这种情况将是VER I音响ED在算法的执行结束。
- 2- 如果行是非零，则第一COE FFI cient非零位于到stricement的右

COE FFI cient第一非零从上一行：该 步骤表1.A 和 2.A 确保我们从左至右治疗支点，这种情况将在算法的执行结束VERI网络版。3- 枢轴的每一行值得1：它是由我们保证 步骤1.C 和 2.C. 如

是其中修改与枢轴线的COE FFI cient的唯一步骤，该条件将在该算法的执行结束VERI音响编辑。4- 枢轴是其列的唯一的非零元素：这是保证我们 阶段

1.D 和 2.D 对于下面的枢轴元件，以及由 第4步 每个枢轴以上项目。注意，为了在其中E FF ectue的algorithme阶段确保元件“故意”期间设定为0 步骤1.D，2.D，4 保持算法执行的全部时间。因此，这种情况将在该算法的执行结束VERI音响编辑。

因此，该算法总是终止和必然产生减小的梯形矩阵。正如我们可以应用此算法，以任何矩阵，那么对于任意矩阵存在等效矩阵线或交错减小。

注8。
• 在实践中，一个是自由的时间，因为你想换行
1.B步骤，2.B. 为了避免级分的外观，它是有利的地方，已经有一个COE FFI cient线1或“1在所讨论的列中。

- 当这个网络FF ectue algorithme有一台电脑，这是有利的选择尽可能大的枢轴（绝对值）：它降低舍入误差，这将趋于分散。

- 当Effectue这种算法“手动”，最常见的错误是错误的签署和分数的总和。警惕！

3-解的系统

发现每行相当于减少的梯队矩阵到一个给定的系统的和系统的分辨率最FFI崇拜一部分。这一事实是几乎完了。让我们来看看如何在实践中，应对该决议结束。

定义11. 让 $p \tilde{E} q$ 线性方程的系统，中号它的增广矩阵，中号1减小的梯形矩阵按行等效中号和 $p \tilde{E}_1 q$ 与相关联的线性系统 中号1。

- 不明 $p \tilde{E}_1 q$ (因此 $p \tilde{E} q$) 关联支点的 中号1 被称为该系统的主要未知数。
- 其他 (任何时) 被称为次级未知数，或设置系统。

\$\%\$ "2 X"4 回答 y2 z'3 '吨9 ü"1

实施例9. 考虑系统 $p \tilde{E}$ 问：

z''吨五 ü"1

X'2 那里" z" t"3 ü"0未知 p X, Y, Z, T, UQ值。

其相关的增广矩阵是：

$$\begin{array}{cccccc|cccccc} \text{中号"} & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

和 中号1代表系统 $p \tilde{E}_1$ 问：

z'2 ü"2

'吨3 ü"1。

该主要未知 因此，这些系统 $p X, Z, T q$ 和 设置 (或未知次级) 是 那里和 \tilde{u} 。

定义12. 让 $p \tilde{E} q$ 线性方程的系统，中号它的增广矩阵，中号1减小的梯形矩阵按行等效中号和 $p \tilde{E}_1 q$ 与相关联的线性系统 中号1。

- 该系统 ($p \tilde{E} q$ 或 $p \tilde{E}_1 q$) 说 兼容 当矩阵 中号1 不转动他最新的专栏。
- 该系统 ($p \tilde{E} q$ 或 $p \tilde{E}_1 q$) 说 不符 否则。

定理2. 不兼容的系统允许无解。

- 兼容的系统支持的单一解决方案或解决方案，我们可以表达根据设置的主要inconnes的无穷大。

实施例10. 我们以前的系统的例子。它的工作原理，它可以按以下方式转换：

$$\begin{array}{l} p \tilde{E}_1 \text{ 问: } \begin{array}{cccc|cccc} \text{那里} & & & & & & & \\ & 2 & \tilde{u} & 1 & & & & \\ & z'2 & \tilde{u} & 2 & & & & \\ & & & & \text{吨} & 3 & \tilde{u} & 1 \end{array} \end{array}$$

(通过从每个方程的两边同时减去隔离主未知数的术语表示参数)。然后，我们可以写的解决方案集

小号 $p \tilde{E}_1$ TP 1"2 那里"2 U, Y, 2"2 U, 1"3 U, UQ, P Y, Uq P构成 $[R_2 0$

"TP 1 0 2"1,0 q` 那里 p"2 1 0 0,0 q` ü p"2 0"2"3,1 Q, P Y, Uq P构成 $[R_2 \tilde{u}$

方法1.修正的线性方程系统

$$\begin{aligned} & \mathbf{I}_n \cdot \dots \dots \dots \mathbf{D}_n \cdot \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \mathbf{I}_n \cdot \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \mathbf{I}_n \cdot \dots \dots \dots \mathbf{D}_n \cdot \dots \dots \dots \end{aligned}$$

.....

定义13. 是否 $p \in q$ 线性方程的系统。他们呼吁 等级 的 $p \in q$ 该 支点的数 减小的梯形矩阵等效于具有相关联的增广矩阵 $p \in Q$ 值。

建议4. 是否 $p \in q$ 的线性系统 n 方程 p 未知。

- 秩 $p \in q / R$ 等于主未知数的数量 $p \in Q$ 值。
- 该参数的个数等于 p “ 河”
- 我们始终 $[Rd \text{ 分 } p N, P Q \text{ 值}]$ 。

实施例11. 在实施例9和10中，一个系统是秩3的（ 因为有3个主要的未知约5： XZ ， 和 T ） 参数的（ 数 那里 和 U ） 值得 $5 \times 3 \times 2$ 。

定理3. 让 $p \in q$ 线性方程的系统， 和 $p \wedge h q$ 与相关联的均相体系 $p \in Q$ 值。

是否 v 的一个特定的溶液 $p \in q$ ($v P$ 小号 E) 则：

$$\text{小号 } E = T v' H, \text{ HP 小号 } \wedge h \bar{u}$$

$$= v' \text{ 小号 } \wedge h$$

这意味着所有的解决方案 $p \in q$ 是一整套解决方案 $p \wedge h q$ auquel 是“添加”的特定的解决方案 $p \in Q$ 值。

注9. 这简化了求解线性方程的系统。在电子FF ECT， 而不是试图去解决 $p \in q$ 我们只需要设法解决 $p \wedge h q$ （ 这不可避免地至少一种溶液）， 然后更容易看到的解决方案 $p \in Q$ 值。 特别是， 如果有至少一个参数， 所以我们可以表达 $p \wedge h q$ 仅取决于参数和发现的特定解决方案 $p \in q$ 采取一切参数等于0， 从而大大简化了工作。

方法2. 通过均相体系的线性方程系统的分辨率

I. IV.

 III. V.

.....

.....

演练

练习I-1。是否每个以下系统是线性的或没有。如果是这种情况下，到相关联的均质系统和相关联的增广矩阵，指定方程的数目和未知量的数目。

\$""和""%

3 X'2 那里 " 7 " 4

五 X" 回答 y3 z'2 t" u" 9

1- p E1 q 五 那里 " 3 '吨2 u" 1

" X'7 那里 " 5 t " 0

" z" 2 '吨4 u" 1

\$'&' % 3 X" 2 '吨9" 3 那里" 2 "x7的2月1日 z" 6 X

2- p E2 q " 4 X'9 那里" 3

4 t" 3 u " 2 u'2 X"Y

" 2 p z'8 q'3 p X"Yq

3- p E3 Q| " 3 X" 4 回答 y9

p 4 z" 2 TQP X'1 q" 2 X" 3 "arrow-吨

4- p E4 q|2 X" 2 回答 y7 t" 3 p X" 1 q'2 t

" 7 '吨2 z'ZT"P. z" 6 QP '吨4 q

\$'&' % X" 1

5- p E5 q 那里" 2

z" X"Y

练习I-2。由以下各行显示等值（一个也可以，根据需要，转化的另一个的基体，或者两者在相同的矩阵）：

^" 10 " ^7 3 10'

1- " 该

0 1

^1 3 3 0 9 7 " ^0" 3" 2 1 6

2- " 该

3 6 1 2, " 该 " 1 0 0 1, 五

3- 4 0 0 0

" 2月1日 " 1 " 该 " 1 0 0 0 1 0 0.

4- 2 1 0 0 1

" 1 0 4

" 4 " 2 5 1 << " 该 " 2 2 5 " 3 << " 该

5- " 2 0 3 2 5 2 3 4 2

3 " 1 1 1 4月5日 " 1月1日

2 1月5日 " 3 2 1 8

练习I-3。对于每一个矩阵，得到等价矩阵线或交错降低（准确地说，我们使用高斯 - 约旦算法）

1- - " 4 " 2

1月9日

" 4 " 1 4 6 " 2

2- Z" 3 " 4 2 5 " 1

" 1 2 0 1 " 2

6 <<<< " 该

2 2

" 3月1日 4月

3- c" 5日 1 3月

2日 " 7月9日

9 " 3

	****8"10		<<_ ,		*****00000	<<<<_ ,
		031				
4- d"	4	0"211"3			1000031000	
	"1月5日	2	000	5- Ė"		
	五	2	1"320		"20410110"1月1日	

练习I-4。JUSTI科幻阳离子是否解决了以下系统，并在适当情况下，给所有的解决方案。

	\$""和""%		\$""和""%
	3 X'2 那里	" ħ	"4
	五 X" 回答y3 ž'2 ħ" ū"9		2 X"3 回答y2 ħ"4 ž'1月4日 X"2 回答y3 ħ
1- p Ė1 q	五 那里	"3 '吨2 ū"1	"2
	"X'7 那里	`五 ħ	"0
	"ž"2 '吨4 ū"1		3- p Ė3 q
	\$'&'%3 X"2 '吨9"3 那里"2 ``x7的2月1日 ž'6 X		2 ž'4 那里"4 ħ
			2 X" 回答y2 那里"3 ħ"2
			X" ž'吨
			"1
			\$'&'%3 X" 回答y2 ž'"吨U, V, "1月4日 XZ"20
2- p Ė2 q		"4 X'9 那里"3	"3
	4 ħ"3 ū	"2 ū'2 X"Y	
		那里"3 '吨v	"1

练习I-5。演示提案4。