2015----2016高数（上）期中试题

一、填空（3分×27=81分）

1. 设$f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}$，则$f(x)$的定义域为________

解：令$t=x^2-1, f(t)=\ln\dfrac{t+1}{t+2}$

$$t\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$$

由于$x^2=t+1>0 \Rightarrow t>-1$

定义域为$(-1,+\infty)$

$$2.\ \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=\underline{\qquad\qquad}$$

解：$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}\le n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

$$3.\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{\sqrt{1+3x}-1}=\underline{\qquad\qquad}$$

$$解:\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{\sqrt{1+3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{1}{2}\cdot 3x}=\frac{4}{3}$$

$$4.\lim_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{(x-1)}=\underline{\qquad\qquad}$$

$$解:\lim_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{(x-1)}=0$$

有界变量与无穷小乘积是无穷小

5. 若函数$f(x)=\dfrac{\ln(x+2b)}{(x-a)(x-2)}$有无穷间断点$x=3$和可去间断点$x=2$, 那么$a=$ ________, $b=$ ________.

解：因为$x=2$是可去间断点，所以$\lim\limits_{x\to 2}\ln(x+2b)=0$

$$2+2b=1\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$x=3$是无穷间断点且$\lim\limits_{x\to 3}\ln(x+2b)=\lim\limits_{x\to 3}\ln(x-1)=\ln 2$

$$\lim_{x\to 3}(x-a)(x-2)=0\Rightarrow a=3$$

6. 已知$f'(3)$存在，且$\lim\limits_{h\to\infty} h[f(3-\frac{2}{h})-f(3)]=1$，则曲线$y=f(x)$在点$(3, f(3))$处的切线斜率为______

解：$$\lim_{h\to\infty} h[f(3-\frac{2}{h})-f(3)]=\lim_{h\to\infty}\frac{f(3-\frac{2}{h})-f(3)}{-\frac{2}{h}}\cdot(-2)$$

$$=-2f'(3)=1 \quad \Rightarrow f'(3)=-\frac{1}{2}$$

7. 设$y=\tan\sqrt{x}$，则$\frac{dy}{dx}=$______

$$\frac{dy}{dx}=\sec^2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x}$$

8. 曲线$y=f(x)$由方程$y=x+\ln y$所确定，则$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=e-1}=$ ________

解： $y'=1+\frac{1}{y}y'$ $\qquad y'=\frac{y}{y-1}$

$$x=e-1, y=e, \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=e-1}=\frac{e}{e-1}$$

9. 设函数$y=3e^x+e^{-x}\ (x\geq 0)$，其反函数为$x(y)$，则$\frac{dx}{dy}\Big|_{y=4}=$ ____

解： $y'=3e^x-e^{-x}$ $\qquad y=4\Rightarrow x=0\ \ x=-\ln 3$(舍)

$$y'(0)=2 \qquad \frac{dx}{dy}\Big|_{y=4}=\frac{1}{y'(0)}=\frac{1}{2}$$

10. 设$y=\arctan f(x^2)$,其中函数f可导，则$dy=$______

解： $dy=\dfrac{2xf'(x^2)}{1+[f(x^2)]^2}dx$

11. 设$y=x^{\sin x}$,则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______.

解： $\ln y=\sin x\ln x$

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=y(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x})$$

12.已知$y(0)=0$, $dy=\sec^2 3x dx$,则$y=$ ________

解： $\left(\frac{1}{3}\tan 3x + C\right)' = \sec^2 3x$

$$y=\frac{1}{3}\tan 3x + C$$

将$y(0)=0$代入得$C=0$

$$y=\frac{1}{3}\tan 3x$$

13.设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$确定，则

$\dfrac{dy}{dx}=$ ________，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ________

解：$\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}$　　$\dfrac{dy}{dt}=3t^2+2t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2t}{\dfrac{t}{1+t}}=(3t+2)(t+1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(6t+5)\cdot\frac{1+t}{t}=\frac{(6t+5)(1+t)}{t}$$

14. 已知函数$y=\sin 2x$，则$y^{(n)}=$________

$$y^{(n)}=2^n\sin(2x+\frac{n\pi}{2})$$

15.函数$f(x)=x^2\ln x$在$x_0=1$处具有拉格朗日余项的二阶泰勒公式为$f(x)=$________

$$f'(x)=2x\ln x+x,\quad f''(x)=2\ln x+3,\quad f'''(x)=\frac{2}{x}$$

$$f(1)=0,\quad f'(1)=1,\quad f''(1)=3$$

$$f(x)=(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{3\xi}$$

ξ在1与x之间

16.曲线$y=\ln\sec x$在点(x,y)处的曲率半径为__________.

$$y'=\frac{\sec x\tan x}{\sec x}=\tan x,\quad y''=\sec^2 x$$

$$k=\frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^{3/2}}=\cos x \qquad R=\frac{1}{k}=\sec x$$

17.曲线$r=e^{2\theta}$在点$\theta=\frac{\pi}{2}$处的弧微分$ds=$__________.

$$ds=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta=\sqrt{e^{4\theta}+4e^{4\theta}}\,d\theta=\sqrt{5}e^{2\theta}d\theta$$

$$ds\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\sqrt{5}e^{\pi}d\theta$$

18．曲线y=$\dfrac{x^2+\sin x}{x-1}$的铅直渐近线方程为＿＿＿＿＿＿，

斜渐近线方程为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\sin x}{x-1}=\infty \qquad x=1\text{为铅直渐近线}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2+\sin x-x^2+x}{x-1}]=1$$

斜渐近线方程为　$y=x+1$

19.函数$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$在$(0,+\infty)$上的最大值为________

$$y'=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=e^{\frac{1}{x}\ln x}(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\frac{1}{x})=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$$

令$y'=0$, 得驻点$x=e$

当$x>e$时，$y'<0$; 当$x<e$时，$y'>0$

函数在$x=e$处取得极大值，

由于只有一个驻点，此极大值就是最大值

$$y_{最大}=e^{\frac{1}{e}}$$

$$20. \lim_{n\to\infty} \ln[1+\frac{1}{n(x+1)}]^n = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln[1+\frac{1}{n(x+1)}]^n = \ln \lim_{n\to\infty}[1+\frac{1}{n(x+1)}]^{n(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}$$

$$= \ln e^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x+1}$$

$$21. \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})} = 0$$

$$22.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\arcsin x}\right)=\underline{\qquad\qquad}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\arcsin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^2\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{6}$$

23. 设曲线满足方程$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，则曲线在点$(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)$处的切线方程为______

方程两边对x求导 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$

$$y'=-(\frac{x}{y})^{-\frac{1}{3}} \qquad y'\Big|_{(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a)}=-1$$

切线方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a)$

即 $x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$

二、解答题

1.（6分）设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+bx)}{x} & x\neq 0\\ -1 & x=0\end{cases}$，且 $(1+bx)>0$，在$x=0$处可导，求b值和$f'(0)$值及$f'(x)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性。

解：$f(x)$在$x=0$可导，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1+bx)}{x}+1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)+x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{b}{1+bx}+1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{b+1+bx}{2x(1+bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{b+1+bx}{2x}$$

b=−1

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1-x)}{x}+1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-1}{1-x}+1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1-x)}=-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{-x}{1-x}-\ln(1-x)}{x^2}=\frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}\qquad x\neq 0$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+\ln(1-x)+1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}=f'(0)$$

$f'(x)$在$x=0$处连续。

2.(6分)求函数$f(x)=1+\dfrac{x}{(x+3)^2}$在$x>0$上的单调区间与极值点，凹凸区间与拐点。

解：$f'(x)=\dfrac{3-x}{(x+3)^3}$，　$f''(x)=\dfrac{2(x-6)}{(x+3)^4}$

$f'(x)=0$，得$x=3$，　$f''(x)=0$，得$x=6$

x	$(0,3)$	3	$(3,6)$	6	$(6,+\infty)$		
y'	$+$		$-$		$-$		
y''	$-$		$-$		$+$		
y	$\nearrow\ \cap$	极大值 $\dfrac{13}{12}$	$\searrow\ \cap$	拐点 $(6,\dfrac{29}{27})$	$\searrow\ \cup$		

3.(5分)设$p>1, q>1$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,证明:当$x>0$时,

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geq x$$

证明：设$f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$

$$f'(x)=x^{p-1}-1,\quad f''(x)=(p-1)x^{p-2}>0$$

则$f'(x)$单调递增。又因$f(1)=0$,

当$x>1$时, $f'(x)>f'(1)=0$ 当$x<1$时$f'(x)<f'(1)=0$

所以$f(x)$在$x=1$处达到最小值，从而$f(x)\geq f(1)=0$

即 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geq x$

4.（5分）证明函数$f(x)=e^x-(ax^2+bx+1)$至多只有三个零点

证：假设$f(x)$有4个不同的零点，则由罗尔中值定理知$f'(x)$有3个不同的零点，

进一步，$f''(x)$有两个不同的零点，$f'''(x)$有一个零点。

但$f'''(x)=e^x\neq 0$，矛盾。

4.（5分）证明函数$f(x)=e^x-(ax^2+bx+1)$至多只有三个零点

证：假设$f(x)$有4个不同的零点，

不妨设 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$

则由罗尔中值定理知，

在 $(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4)$内各存在一点$\xi_1$，$\xi_2$，$\xi_3$，使

$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$ 再由罗尔中值定理知，

在 $(\xi_1,\xi_2),(\xi_2,\xi_3)$内各存在一点$\eta_1$，$\eta_2$使

$f''(\eta_1)=f''(\eta_2)=0$ 还由罗尔中值定理知，

在 (η_1,η_2)内存在一点τ使$f'''(\tau)=0$

但$f'''(x)=e^x\neq 0$，矛盾。