北京化工大学 2016——2017 学年第二学期

《线性代数》（考试）期末考试试卷

课程代码	M	A	T	1	1	4	0	0	T

班级：__________姓名：___________学号：_________任课教师：____________分数：______

题号	一	二	三	总分
得分				

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1\. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=(2,-1)^T$，则 $\boldsymbol{C}^T\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\right)=$ ______________.

2\. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\left|\boldsymbol{A}\right|=1,\ \left|\boldsymbol{B}\right|=-2$，则 $\left|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}\right|=$ ______________.

3\. 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以互相线性表示，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性 ______________.

4\. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $1, 2, 3$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的迹为________.

5\. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_3^2$ 的秩为_____________.

二、计算题（每小题 15 分，共 75 分）

6\. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix}$，且 $\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+3\left|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵.

（1）求 $\left|\boldsymbol{A}\right|$.　　　　(2) 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

7. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)^T$ 的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

8. 已知线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2.\end{cases}$ 试讨论当λ取何值时，方程组

（1）有唯一解？（2）无解？（3）有无穷多解，并在此时求出通解.

9. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，秩 $R(\boldsymbol{A})=2$, $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量.

（1）求 $|\boldsymbol{A}|$；

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值 λ_3 及其对应的特征向量；

（3）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

10. 已知二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\left(a>0\right)$$

经过正交线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化为标准形 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，

其中 $\boldsymbol{X}=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$， $\boldsymbol{Y}=\left(y_1,y_2,y_3\right)^T$. 求参数 a 的值及所用的正交变换.

三、证明题（共 10 分）

11. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$为线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3$，…，$\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中$t_1,t_2$为实常数．证明当$t_1^s+(-1)^{1+s}t_2^s\neq 0$时，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关.