Exercice II-3. *Sous-espaces vectoriels*

1- Parmis les parties suivantes, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? Lorsque c'est possible, donner une base. Justifier.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leqslant y\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 0\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 1\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - y^2 = 0\}$

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 0\}$

2- Parmis les parties suivantes, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Justifier.

a) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)$ bornée $\}$

b) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)$ convergente $\}$

c) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)$ monotone $\}$

d) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)$ arithmétique $\}$

e) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$

Exercice II-4. *Intersection*

Soient $\mathbb{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$ et $\mathbb{G} = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1- Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2- Déterminer $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$. Quel est sa dimension ?

Exercice II-5. *Supplémentaires*

1- Soient $\mathbb{F} = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(0) = f'(0) = 0\}$ et $\mathbb{G} = \{x \mapsto ax + b \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a) Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donner leurs dimensions.

b) Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires.

2- Soit $\mathbb{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(0) + f(1) = 0\}$

a) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) Donner un supplémentaire de $\mathbb{H}$, et sa dimension.

3- Montrer que les matrices symétriques et antisymétriques forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quels sont leur dimension ?

Exercice II-6. *Famille libre*

1- On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions suivantes : $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = x\cos(x)$, $f_3(x) = \sin(x)$, $f_4(x) = x\sin(x)$. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

2- Pour tout entier $k \in [\![1; n]\!]$, on pose $g_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$, fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(g_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3- Soit $F = (e_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille libre d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$, et $a \in E$. Montrer que $a \notin \mathrm{Vect}(F) \implies (e_i + a)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{E}$.

Exercice II-7. *Polynômes*

1- Soient $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$, $P_3 = X^2 + X$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

2- Pour $k \in [\![1; n]\!]$, on pose $P_k = (X + 1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_k)_{k \in [\![1;p]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$