Analyse Asymptotique

Table des matières

I – Relations de comparaison O, o, $\sim$ — 3
- 1– Suites . . . 3
  - 1.a) Définitions . . . 3
  - 1.b) Résultats de convergence et d'encadrement . . . 5
  - 1.c) Suites de références . . . 6
- 2– Fonctions . . . 7
- 3– Exercices . . . 9

II – Développements limités — 10
- 1– Développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point a . . . 10
- 2– Formule de Taylor–Young . . . 13
- 3– Opérations sur les développements limités . . . 14
  - 3.a) Primitivation d'un développement limité . . . 14
  - 3.b) Dérivation d'un développement limité . . . 15
  - 3.c) Opérations algébriques . . . 16
- 4– Exercices . . . 18

III – Applications des développements limités — 19
- 1– Calcul de limites . . . 19
- 2– Position d'une courbe par rapport à sa tangente ou son asymptote . . . 19
- 3– Développement asymptotique . . . 20
- 4– Exercices . . . 21

IV – Exercices — 21

Introduction

« *Dans le doute, DL à trois termes non-nuls, c'est jamais perdu. . .* »

Nous savons déjà comment caractériser le comportement des fonctions ou des suites en certains points, et en $\pm\infty$ au moyen des limites. Cependant, cette information est souvent trop faible, et ne caractérise pas suffisamment la fonction. Par exemple, on peut se retrouver avec des formes indéterminées. Certaines peuvent être gérées par des théorèmes spécifiques, ou des astuces, mais ce n'est pas toujours le cas.

L'objet de ce chapitre est d'introduire deux outils fondamentaux dans l'analyse, qui permettrons de répondre en un sens bien plus large à la question de « comment comparer deux fonctions ou suites » dans la plupart des cas (notamment, lorsque les quantités à l'étude tendent vers $+\infty$). Nous verrons d'une part quels sont les outils qui permettent de comparer rigoureusement le comportement de suites et de fonctions (les relations de domination et négligeabilité, avec la notation de Landau), puis nous présenterons un outil donnant une approximation « simple » (polynômiale, en fait, donc simple à manier) d'une fonction au voisinage d'un point, fut-il infini, avec un contrôle sur l'erreur faite dans cette approximation. Cela nous permet alors de détailler bien plus précisément le comportement local de la fonction.

Les outils présentés dans ce chapitre, bien que simples, sont absolument essentiels. Les définitions des relations de domination et négligeabilité sont à comprendre en profondeur, et l'on veillera à développer l'intuition nécessaire à ces notions. Les développement limités sont certes un outil fort calculatoire, mais si puissant dans les situation pratiques qu'il est absolument essentiel de connaître les formule de bases, savoir les composer entre elles, et savoir effectuer les calculs de manière rapide et intelligente.

I – Relations de comparaison O, o, $\sim$

1– Suites

1.a) Définitions

Définition 1. *Relations de comparaison et notation de* LANDAU.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, à partir d'un certain rang, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule plus. Alors, à partir de ce rang, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et on a les définitions suivantes :

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est dominée par** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sitôt que $\underline{\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$

  En notation mathématique, ça donne :

  $$\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant A$$

  De plus, on notera également cette situation : $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)}$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est négligeable devant** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sitôt que $\underline{\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

  En notation mathématique, ça donne :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \left|\frac{u_n}{v_n}\right| < \varepsilon$$

  De plus, on notera également cette situation : $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)}$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est équivalente à** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sitôt que $\underline{\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$

  En notation mathématique, ça donne :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon$$

  De plus, on notera également cette situation : $\underline{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n}$

Remarque 1. Quand la variable et la limites sont claires, on peut se contenter de noter plus simplement :

$$u_n = \mathcal{O}(v_n),\ u_n = o(v_n),\ u_n \sim v_n$$

Cette notation est appelée *notation de* LANDAU.

Exemple 1.

- On a $n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$. En effet, la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien non-nulle à partir d'un certain rang, et $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- On a $(-1)^n\frac{n}{2} + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(n)$, en effet, $\left|\frac{(-1)^n\frac{n}{2} + \sqrt{n}}{n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right| < 1$ pour $n > 4$. Le rapport des deux suites est donc borné à partir d'un certain rang, et on a bien la domination annoncée.
- On a $\frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. En effet :

  $$\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Remarque 2. Ces relations ne sont pas tout à fait indépendantes, certaines sont plus fortes que d'autre. On a notamment :

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.
- Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.
- $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ si et seulement si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

Remarque 3. Il est important de noter que, tant par la définition que par sens mathématique, on ne peut **jamais** écrire $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 0$!

Remarque 4. Sauf mention contraire, dans la suite du polycopié, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mentionneront deux suites réelles, non-nulles à partir d'un certain rang.

Théorème 1. *Équivalence et compatibilité*
La relation $\underset{n\to\infty}{\sim}$ *est une* ***relation d'équivalence*** *(réflexive, symétrique et transitive). De plus, elle est* ***compatible avec le produit*** *(mais pas avec la somme !)*

Démonstration 1. Soient u_n, v_n et w_n trois suites réelles, non-nulles à partir d'un certain rang, telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$. Alors :

- **Réflexivité** : On a $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.
- **Symétrie** : On a $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1} = 1$, donc $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.
- **Transitivité** : On a $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 1 = 1$, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$.
- **Compatibilité avec** $\times$: Soient de plus a_n et b_n deux suites réelles, non-nulles à partir d'un certain rang, telles que $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$. Alors :

$$\frac{u_n \times a_n}{v_n \times b_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 1 = 1$$

  et les suites $(u_n \times a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n \times b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont également bien non-nulles à partir d'un certain rang. On peut donc bien écrire :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \text{ et } a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \implies u_n \times a_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \times b_n$$ □

Exemple 2.
- $2n(n+1)(n-2)(3\sqrt{n}+1) \underset{n\to\infty}{\sim} 6n^3\sqrt{n}$
- Attention, on n'a pas le même résultat avec la somme : d'une part, on ne peut pas garantir que la suite soit non-nulle à partir d'un certain rang (par exemple, si on veut additionner n^2 et $(-1)^n n^2$, et d'autre part, il peut y avoir de nombreux contre-exemples. Prenons $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$, et $a_n = b_n = -1 + \dfrac{1}{n}$.
  Alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ mais $\dfrac{u_n + a_n}{v_n + b_n} = \dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{2}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \neq 1$ et donc on a pas l'équivalence des sommes.

Remarque 5. Les outils présentés ici sont suffisant pour faire l'**Exercice I-1**. Le faire dès maintenant vous permettra de bien mieux suivre la suite du chapitre, en vous habituant tout de suite à l'intuition derrière ces relations.

Proposition 1. Les relations « être dominé par » (être $\mathcal{O}$ de ...) et « être négligeable devant » (être o de ...) sont des relations transitives.

Remarque 6. La démonstration de cette proposition sera l'objet de l'**Exercice I-2**. Il s'agit comme souvent d'écrire proprement les définitions de départ et d'arrivée, et de remplir les trous.

1.b) Résultats de convergence et d'encadrement

Proposition 2. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

Démonstration. Résultat direct lorsque l'on constate que si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, alors cette suite est positive à partir d'un certain rang.

Théorème 2. *Résultats de convergence*

1– Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2– Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3– Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Démonstration 2. 1– Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors, par définition :

$$\begin{array}{lcl} (1) & : & \exists A \in \mathbb{R}^+,\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant A \\ (2) & : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \implies |v_n| < \varepsilon \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $N_3 \geqslant \max(N_1, N_2)$. Alors pour $n \geqslant N_3$ on a :

$$|u_n| \leqslant A|v_n| \text{ par (1) et } |v_n| < \varepsilon \text{ par (2)} \implies |u_n| < A\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

On a donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

2– Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors, par définition :

$$\begin{array}{lcl} (1) & : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| < \varepsilon \\ (2) & : & \exists A > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \implies |v_n| \leqslant A \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $N_3 \geqslant \max(N_1, N_2)$. Alors pour $n \geqslant N_3$ on a :

$$|u_n| \leqslant \varepsilon|v_n| \text{ par (1) et } |v_n| < A \text{ par (2)} \implies |u_n| < A\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

On a donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

3– Supposons $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$. Alors, par définition :

$$\begin{array}{lcl} (1) & : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon \\ (2) & : & \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \implies |v_n - l| < \varepsilon \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $N_3 \geqslant \max(N_1, N_2)$, et $n \geqslant N_3$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} |u_n - l| & = & |u_n - v_n + v_n - l| \\ & \leqslant & \underbrace{|u_n - v_n|}_{<\varepsilon|v_n| \text{ par (1)}} + \underbrace{|v_n - l|}_{<\varepsilon \text{ par (2)}} \quad < \varepsilon|v_n| + \varepsilon \end{array}$$

De plus, on a également par (2) que $|v_n| < \varepsilon + |l|$, et donc $|u_n - l| < \varepsilon(\varepsilon + |l| + 1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. On a donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. □

Théorème 3. *Résultats d'encadrement*

1– Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est également bornée.*

2– Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée, alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est également bornée.*

Démonstration 3. Voir **Exercice I-3**.

Remarque 7. Une chose importante à remarquer, c'est que si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n + w_n$ (et notamment quand $u_n = v_n + w_n$) avec $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$; le deuxième terme de la somme étant négligeable devant le premier, on peut s'en passer dans l'équivalent. Cependant, la première relation nous donne un peu plus de « finesse » dans la caractérisation du comportement asymptotique de u_n, et peut parfois permettre plus d'opérations, ou plus précises. Cette écriture sera à la base de ce que nous ferons ensuite, qu'il s'agisse de *développements limités* ou de *développements asymptotiques*.
Une autre chose à remarquer également ; si $l \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \Leftrightarrow u_n \underset{n\to\infty}{\sim} l$.

Remarque 8. Notons que nous n'avons pas parlé de résultat de divergence. Vu la variété des cas possibles, il est préférable de traiter ceux-ci soit par contraposée (notamment pour les suites non-bornées), soit par retour à la définition.

1.c) Suites de références

Les outils introduits précédemment permettent facilement de comparer des suites dans leur comportement asymptotique. Pour établir des résultats de convergence (ou divergence) plus avancé, il est toujours utile d'avoir un certain nombre de suites « de référence » dont on connaît le comportement et avec lesquelles on peut comparer les autres suites. Ces suites de références seront les suivantes :

- $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$, la *factorielle*.
- $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, les *polynômiales*
- $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{R}$, les *exponentielles*
- $(\ln(n)^\beta)_{n\geqslant 2}$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, les *logarithmiques*

Factorielle. $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et on a également la formule de Stirling : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n^n}{e^n}\right)$ (que nous ne démontrerons pas pour l'instant).

Exponentielles. On a :

- $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $k \in]-1;1[$.
- Lorsque $k \geqslant 1$, alors $k^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Enfin, si $k \leqslant -1$, k^n n'a pas de limite.

De plus :

- Si $k < k'$, alors $k^n \underset{n\to+\infty}{=} o((k')^n)$ (une exponentielle est dominée par une exponentielle de coefficient plus grand).
- $\forall k \in \mathbb{R},\ k^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ (intéressant quand $k \geqslant 1$: toutes les exponentielles sont dominées par la factorielle).
- $\forall k \in \mathbb{R},\ n! \underset{n\to+\infty}{=} o(k^n)$. (intéressant quand $|k| < 1$: toutes les décroissances exponentielles dominent une décroissance factorielle).

Polynômiales. On a :

- $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $\alpha < 0$.
- $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $\alpha > 0$.

De plus :

- Si $\alpha < \alpha'$, alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\alpha'}\right)$ (un suite polynômiale est dominée par une polynômiale de degré plus grand).
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\forall k \leqslant 1$, $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(k^n)$ (une croissance exponentielle domine toutes les polynômiales).
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\forall |k| < 1$, $k^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$ (une décroissance exponentielle est dominée par toutes les polynômiales).

Logarithmiques. On a :
- $(\ln n)^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $\beta < 0$.
- $(\ln n)^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $\beta > 0$.

De plus :
- Si $\beta < \beta'$, alors $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left((\ln n)^{\beta'}\right)$ (un suite logarithmique est dominée par une logarithmique de degré plus grand).
- $\forall \beta \in \mathbb{R}^*$, $\forall \alpha > 0$, $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$ (une croissance polynômiale domine toutes les logarithmiques).
- $\forall \beta \in \mathbb{R}^*$, $\forall \alpha < 0$, $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left((\ln n)^\beta\right)$ (une décroissance polynômiale est dominée par toutes les logarithmiques).

Remarque 9. En notant la domination $\lesssim$ (et uniquement pour cette fois !), on peut synthétiser quelques résultats précédents de manière plus visuelle :

$$\frac{1}{n!} \lesssim \underbrace{\frac{1}{k^n}}_{k>1} \lesssim \underbrace{\frac{1}{k'^n}}_{1<k'<k} \lesssim \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{\alpha>0} \lesssim \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha'}}}_{0<\alpha'<\alpha} \lesssim \underbrace{\frac{1}{(\ln n)^\beta}}_{\beta>0} \lesssim \underbrace{\frac{1}{(\ln n)^{\beta'}}}_{0<\beta'<\beta} \lesssim 1 \lesssim (\ln n)^{\beta'} \lesssim (\ln n)^\beta \lesssim n^{\alpha'} \lesssim n^\alpha \lesssim k'^n \lesssim k^n \lesssim n!$$

À gauche de 1, on a les suite qui tendent vers 0 (car dominées par 1), et à droite de 1, on a les suites qui tendent vers $+\infty$.

2– Fonctions

De plus, on a des résultats très similaires sur les fonctions, non seulement en $\pm\infty$, mais aussi *au voisinage* de points $a \in \mathbb{R}$, sous réserve que la fonction ne s'annule pas sur ce voisinage. Pour cela, on va considérer des fonction f et g, définies sur (au moins) un intervalle I de $\mathbb{R}$, de manière à ce que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$. Lorsque nécessaire, on posera la même hypothèse sur f.

Définition 2. *Voisinage d'un point*
Soit I un intervalle non-réduit à un point de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. On appellera **voisinage de** a un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a, inclus dans I, ouvert « par rapport à » I. Si V est un voisinage de a, on notera $V \in \mathcal{V}(a)$.
On appellera **voisinage de** $\pm\infty$ un intervalle de la forme $]A; +\infty[$, respectivement $]-\infty; A[$.

Remarque 10. Cette définition est un peu compliquée, mais elle est nécessaire pour obtenir les propriétés qu'il nous faut sans faire appel à des notions de topologie plus théoriques. Ce qu'il faut retenir, c'est qu'un voisinage de a est, moralement, « un intervalle ouvert autour de » a, aussi petit que nécessaire. Par ouvert « par rapport à » I, on entend que dans certain cas, l'intervalle peut être fermé d'un côté. Par exemple, si je considère $I = \mathbb{R}^+$, ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, $[0; 1[$ est un voisinage de 0, malgré l'inclusion de 0 et le caractère fermé de l'intervalle en ce point ; cet intervalle reste ouvert « par rapport à » $\mathbb{R}^+$, car sa frontière fermée est aussi une frontière fermée de $\mathbb{R}^+$.
Ce sont des cas assez particuliers, mais la notion sous-jacente (« une petite zone ouverte autour du point ») reste intuitive.
Pour une définition plus rigoureuse, il faut pour que $V \in \mathcal{V}(a)$, que $V \subset I$, $a \in V$, et que *une suite convergente d'éléments du complémentaire de* V *ait sa limite également dans le complémentaire de* V (autrement dit, que V soit topologiquement ouvert dans I).

Remarque 11. Notons que cette notion de voisinage permet de définir de manière équivalente la notion de limite d'une fonction en un point : pour $f : I \to \mathbb{R}$, avec $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$, $a \in I$ au lieu de l'habituel :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

on peut également dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a) \ / \ \forall x \in \mathcal{V}(a),\ |f(x) - l| < \varepsilon$$

Définition 3. *Relations de comparaison et notation de* Landau *pour les fonctions*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, et f et g deux fonctions définies sur I, non-nulles sur un voisinage de a (éventuellement, f et g peuvent être nulles exactement en a). Alors :

- On dit que f **est dominée par** g **au voisinage de** a sitôt que $\underline{\dfrac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a}$ (c'est à dire, on peut trouver un voisinage de a sur lequel $\dfrac{f}{g}$ soit bornée).
  En notation mathématique, ça donne :
  $$\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \exists V \in \mathcal{V}(a) \ / \ \forall x \in V,\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant A$$
  De plus, on notera également cette situation : $\underline{f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))}$
- On dit que f **est négligeable devant** g **au voisinage de** a sitôt que $\underline{\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0}$.
  En notation mathématique, ça donne :
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a) \ / \ \forall x \in V,\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$$
  De plus, on notera également cette situation : $\underline{f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))}$
- On dit que f **est équivalente à** g **au voisinage de** a sitôt que $\underline{\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1}$.
  En notation mathématique, ça donne :
  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a) \ / \ \forall x \in V,\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \varepsilon$$
  De plus, on notera également cette situation : $\underline{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)}$

Exemple 3. 1– $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

2– $(x-a)^2 \underset{x\to a}{=} o(x-a)$

3– $x^5 \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)$

4– $\tan^3 x \underset{x\to\pi}{=} \mathcal{O}((x-\pi)^2)$

Exemple 4. Voir **Exercice I-4**.

Remarque 12. C'est exactement la même chose que pour les suites. Par ailleurs, ces notions sont également valable quand $a = \pm\infty$, sans changer de définition (mais avec la notion de voisinage adaptée). C'est pourquoi nous allons rapidement reprendre les points essentiels précédents, en les adaptant. Commençons tout de suite ;

- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(f(x))$.
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{n\to+\infty}{=} o(f(x))$.

Théorème 4. *Équivalence et compatibilité*
La relation $\underset{x\to a}{\sim}$ *est une* ***relation d'équivalence*** *(réflexive, symétrique et transitive). De plus, elle est* ***compatible avec le produit, la division, et les puissances****.*

Démonstration 4. Voir **Exercice I-5-2**.

Théorème 5. *Résultats d'encadrement et de limites*

1– Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ *et* g *bornée au voisinage de* a*, alors* f *est également bornée au voisinage de* a*.*

2– Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$*,* $l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}$*, alors* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$

Démonstration 5. Voir **Exercice I-5-3**.

Proposition 3. Soit $l \in \mathbb{R}$, avec $\underline{l \neq 0}$.

1– $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} l$
Attention à bien exclure 0 : on n'écrira **jamais** $f(x) \sim 0\ldots$

2– $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$.

Proposition 4. *Comparaison en* 0 *et* ∞ *des fonctions de référence*

$\alpha > \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o(x^\beta)$

$\alpha > \beta \Leftrightarrow (\ln x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} o((\ln x)^\beta)$

$\beta < 0$ ou $(\beta = 0,\ \alpha < 0) \Leftrightarrow (\ln x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} o(x^\beta)$

$x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^x)\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha < \beta \Leftrightarrow x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$

$\alpha < \beta \Leftrightarrow (\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o((\ln x)^\beta)$

$\beta > 0$ ou $(\beta = 0, \alpha < 0) \Leftrightarrow (\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$

$\mathrm{e}^x \underset{x\to-\infty}{=} o(x^\alpha)\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

3– Exercices

Exercice I-1. Parmi suites suivantes, dire lesquelles sont dominées par/sont négligeables devant/sont équivalentes à quelles autre :

1– $u_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$

2– $v_n = n^2\mathrm{e}^{-n}$

3– $w_n = 3n^3 + \dfrac{1}{2n}$

4– $x_n = \ln(n) + \ln(2n)$

5– $y_n = n^2\ln(2n)$

6– $z_n = \dfrac{1}{n}$

Exercice I-2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles non-nulles à partir d'un certain rang.

1– On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(w_n)$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(w_n)$.

2– On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

Exercice I-3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles non-nulles à partir d'un certain rang

1– On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ est $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que, à partir d'un certain rang, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée.

2– A partir de la question précédente, montrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée.

Démontrer le théorème 3 : résultats d'encadrement, de manière intelligente

Exercice I-4. Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont dominées par/sont négligeables devant/sont équivalentes à quelles autre, en $-\infty$, 0, et $+\infty$:

1– $x \mapsto 3x^2 + 2x - 3$

2– $x \mapsto x^2 \ln(x) + \ln^2(x)$

3– $x \mapsto x^{-4} e^x$

4– $x \mapsto (x+1)^{-1} - (x-1)^{-1}$

5– $x \mapsto \ln(x^2 + 3x + 1) - \ln^2(2x)$

6– $x \mapsto x^3 (\ln x)^{-1}$

Exercice I-5. 1- Démontrer la **Remarque 12.** (uniquement dans le cas $a \in \mathbb{R}$) 2- Démontrer le **Théorème 4.** (en s'inspirant de la démonstration du **Théorème 2.**) 3- Démontrer le **Théorème 5.** (pour le *2*–, uniquement dans le cas ou $l \in \mathbb{R}$)

Exercice I-6. Donner un équivalent simple des suites suivantes, et donner leurs limites :

1– $(n + 3 \ln n) e^{-n-1}$

2– $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$

3– $\dfrac{2n^3 - \ln n + 4}{n^2+1}$

4– $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$

5– $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

6– $\sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$

Exercice I-7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels tels que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

1– Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2– Donner un équivalent simple de u_n.

Exercice I-8. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$.

1– Montrer que $u_{n-2} \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

2– Montrer que $(n-1)! \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

3– En déduire $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n!$

Exercice I-9. Donner un équivalent simple aux fonctions suivantes :

1– $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1$ quand $x \to +\infty$

2– $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}$ quand $x \to +\infty$

3– $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ quand $x \to +\infty$

4– $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2}$ quand $x \to 0$

5– $\tan x - \sin x$ quand $x \to 0$

6– $e^x + x - 1$ quand $x \to 0$

Exercice I-10. 1– Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $[1; a[$ avec $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. On suppose que

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \text{ et } g(x)(f(x)-1) \xrightarrow[x\to a]{} l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Étudier la limite de $f(x)^{g(x)}$ quand $x \to a$.

2– En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}$

II – Développements limités

1– Développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

Définition 4. *Développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de* 0
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $0 \in \bar{I}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre** n **au voisinage de** 0 sitôt que :

$$\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X] \;/\; f(x) - P_n(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$$

Généralement, on notera les puissance de P_n par ordre *croissant*, et on se permettra de généraliser un peu la notation de LANDAU :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

On appelle alors P_n la **partie régulière** du développement limité de f.

Remarque 13.
- On peut rendre rigoureuse la notation $+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ en la remplaçant par $+x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Ça pourra d'ailleurs être utile dans certains calculs dans la suite.
- Concrètement, le développement limité d'une fonction, c'est l'approximation de cette fonction par un polynôme, au voisinage d'un point donnée, avec une erreur de l'ordre de x^n.

Exemple 5. 1– Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ avec $x \in I =]-1;1[$. On a bien $0 \in I$, et de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x}\\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\frac{x}{1-x}\end{aligned}$$

D'une part, on peut poser $\sum_{k=0}^{n} x^k \overset{\text{def}}{=} P_n(x)$, $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$. D'autre part, comme $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{1-x} = 0$, on a $x^n\dfrac{x}{1-x} = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ Et donc on peut dire que f admet (pour tout $n \in \mathbb{N}$), un développement limité à l'ordre n, avec :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

2– Soit $g : x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et $g(0) = 0$. On a alors $\dfrac{g(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et donc :

$$g(x) = 0 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

g admet donc un développement limité à l'ordre 2 en 0. Notons qu'on approxime g par la fonction nulle, mais que celle-ci **n'est pas** nulle...

Proposition 5. *Unicité du DL en cas d'existence*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *qui admet* un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Alors ce développement limité est unique, c'est-à dire :

$$\text{Si } f(x) = P_n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = Q_n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\ , \quad P_n, Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$$

Alors $P_n = Q_n$.

Remarque 14. ATTENTION
- Pour pouvoir utiliser cette proposition, il **faut** déjà savoir que f admet bien un développement limité à l'ordre n en 0. La proposition **ne nous garanti pas l'existence**.
- La proposition nous donne *l'unicité du DL pour une fonction*, mais **ne donne pas** *l'unicité de la fonction à un DL* : deux fonctions différentes peuvent avoir le même développement limité à l'ordre n : par exemple, la fonction nulle et la fonction de l'**Exemple 5-2-**. Ou bien $1 + x + x^6$ et $1 + x + x^7$ à l'ordre $n \leqslant 5$.

Proposition 6. *Troncature du DL en cas d'existence*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *qui admet* un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Alors f admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0, pour tout $p \leqslant n$.

Exemple 6. Supposons que f admette le développement limité suivant, d'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{1}{2} - 3x + \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

Alors f admet également un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{1}{2} - 3x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Remarque 15.
- Le développement limité d'une fonction nulle au voisinage de 0 sera toujours $0 + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Cependant, une fonction qui a un développement limité toujours égal à 0 n'est pas forcément nulle.
- On en déduit donc que le développement limité n'identifie pas uniquement la fonction.
- Par exemple, on verra que $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ a un développement limité au voisinage de 0 qui est toujours égal à 0, quelque soit l'ordre n que l'on choisisse.

Définition 5. *Développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$*
Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, avec $a \in \bar{I}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de** a sitôt que la fonction $h \mapsto f(a+h)$ *admet un développement limité* d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

En posant $x = a + h$, on a de manière équivalente :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

Exemple 7. Développement limité de $\ln(\cdot)$ à l'ordre 2 au voisinage de 1 :

$$\ln(x) = x + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}((x-1)^2)$$

équivalent au DL au voisinage de 0 suivant :

$$\ln(1+x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Définition 6. *Développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de $a = \pm\infty$*
Soient $a = \pm\infty$, $f : I \to \mathbb{R}$, avec a une borne de I, et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de** a sitôt que la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ *admet un développement limité* d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

On a de manière équivalente :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Exemple 8. Développement limité de $\mathrm{Arctan}(\cdot)$ à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$:

$$\mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \underset{x\to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

2– Formule de Taylor–Young

Théorème 6. *Formule de* TAYLOR–YOUNG
Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *tel que* $a \in \bar{I}$ *et soit* $\underline{f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})}$. *Alors, pour tout* $x \in I \setminus \{a\}$ *:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$$

Soit, de manière compacte :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)}$$

Notamment, pour $a = 0$ *:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Soit, de manière compacte :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)}$$

Corollaire 1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in \bar{I}$ et soit $\underline{f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})}$, alors

f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, donné par la formule de TAYLOR–YOUNG.

Remarque 16. ATTENTION
Pour les deux précédents résultats, il **faut que** f soit de classe $\mathcal{C}^n$. Nous le verrons juste après, être n fois dérivable n'est pas suffisant !
De plus, je le rappelle, avoir un développement limité à l'ordre n **n'implique pas** d'être n fois dérivable !

Remarque 17. *Développement limité en* 0 *de fonctions usuelles*
On peut appliquer la formule de TAYLOR–YOUNG à quelques fonctions usuelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour obtenir les résultats suivants. Ils sont ***à connaître par cœur***.

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
e^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) \\
\cos(x) & = & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2p}) \\
\sin(x) & = & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2p+1}) \\
\mathrm{ch}(x) & = & 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots + \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2p}) \\
\mathrm{sh}(x) & = & x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \cdots + \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2p+1}) \\
(1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)
\end{array}}$$

On peut donner quelques cas particulier du dernier, qu'il est également bon de savoir par cœur :

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2p-3)}{2\times 4\times\cdots\times 2p}x^p + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^{p}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2p}x^p + \cdots + (-1)^{n}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)
\end{aligned}}$$

Notez que pour $\frac{1}{1-x}$ (ici obtenu en remplaçant x par $-x$), on obtient le même résultat que celui qu'on avait donné dans l'**Exemple 5**.

Proposition 7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $0 \in I$. Alors :

1– Pour que f admette un développement limité d'ordre 0 au voisinage de 0, *il faut et il suffit* que f soit continue en 0.

2– Pour que f admette un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, *il faut et il suffit* que f soit dérivable en 0.

Remarque 18. Ce sont en quelques sortes deux « exceptions » à la suffisance d'être de classe $\mathcal{C}^n$ pour avoir un DL à l'ordre n. Cependant, il faut garder en tête que ce n'est pas une généralité : il existe des fonctions admettant un développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ au voisinage d'un point a, sans être dérivables n fois en ce point a, par exemple :

$$\begin{array}{rrcl}
f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\
& x \neq 0 & \mapsto & x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \\
& 0 & \mapsto & 0
\end{array}$$

admet bien un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, mais n'y est pas dérivable deux fois...

Remarque 19. On peut aussi déduire que si f admet un DL à l'ordre n en a (que l'on notera $a_0 + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to a}{o}(x^n)$), alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **existe et est finie**, et même précisément égal à a_0. Ce critère sert généralement à montrer qu'une fonction n'admet pas de DL.

3– Opérations sur les développements limités

3.a) Primitivation d'un développement limité

Théorème 7. *Primitivation d'un développement limité*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f' admet le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 suivant :

$$f'(x) = P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0, qui s'écrit :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P_n(t)\mathrm{d}t + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$$

Remarque 20. Notez que l'on fait toujours la primitivation d'une fonction *qui est la dérivée* d'une autre... Notamment, si l'on veut calculer le DL de la dérivée d'une fonction g, il faut prendre plus de précautions : nous verrons ce résultat juste après.

Démonstration 6. Soit f dans les conditions de l'énoncé. Alors, pour une certaine fonction ε telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a :

$$f'(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$$

Posons alors $Q(x) = \displaystyle\int_0^x P_n(t)\mathrm{d}t$, on a donc $Q'(x) = P_n(x)$ et $f'(x) - Q'(x) = x^n\varepsilon(x)$.
Alors, d'après le *Théorème des Accroissements Finis*, on a

$$\exists \theta \in]0;1[\ / \ \frac{(f(x) - Q(x)) - (f(0) - Q(0))}{x - 0} = (f'(\theta x) - Q'(\theta x))$$

Et on a

$$x(f'(\theta x) - Q'(\theta x)) = x((\theta x)^n \varepsilon(\theta x)) = x^{n+1}\varepsilon_2(x)$$

Avec $\varepsilon_2(x) = \theta^n \varepsilon(\theta x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. De plus, comme $Q(0) = 0$, on a :

$$f(x) = f(0) + Q(x) + x^{n+1}\varepsilon_2(x)$$

C'est-à-dire :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x P_n(t)\mathrm{d}t + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}) \qquad \square$$

Remarque 21. L'utilisation du *Théorème des Accroissements Finis* dans la démonstration précédente revient à montrer que, quand on primitive un $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$, on obtient toujours bien un $\underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$.

Exemple 9. *Logarithme, Arctangente*
On peut utiliser ce théorème pour obtenir les nouveaux développement limités **à savoir** suivants :

1– En primitivant $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, on obtient :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})}$$

2– En primitivant $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$ (obtenu soit directement, soit en substituant x^2 à x dans la formule précédente), on obtient :

$$\boxed{\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})}$$

3.b) Dérivation d'un développement limité

Remarque 22. L'idée principale de la dérivation d'un DL d'une fonction f, de dérivée f', est la suivante :

- Montrer que la dérivée f' a bien un DL
- En déduire que f en a un, l'écrire sous la forme de la primitive de celui de f'
- Utiliser l'unicité pour conclure sur l'écriture sur DL de f
- En déduire l'écriture du DL de f'

Tout cela est synthétisé dans le théorème suivant.

Théorème 8. *Dérivation d'un développement limité*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, qui admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, telle que f' admette un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \ \text{ et } \ f'(x) = Q_{n-1}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-1})$$

Alors $P_n'(x) = Q_{n-1}(x)$. Si, par ailleurs, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors l'existence du développement limité de f' est garantie, et il s'obtient en dérivant terme-à-terme celui de f.

Démonstration 7. Dans le premier cas, où on ne suppose pas f de classe $\mathcal{C}^n$, il suffit d'utiliser le théorème précédent et de conclure par unicité du développement limité. Si on suppose f de classe $\mathcal{C}^n$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et admet un DL donné par la formule de TAYLOR–YOUNG, et on conclut avec le cas précédent.

Exemple 10. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, de classe $\mathcal{C}^5$ (et même, $\mathcal{C}^\infty$) sur $I =]-1;1[$. On a son développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

On en déduit le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

3.c) Opérations algébriques

Proposition 8. *Combinaison linéaire de développements limités*
Soient f et g deux fonctions définies sur I, avec $0 \in \bar{I}$. On suppose que ces deux fonctions admettent un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière respectives P_n et Q_n. Alors, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière $\lambda P + Q$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ g(x) & = & Q_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \end{array}\right. \implies \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda f + g)(x) = (\lambda P_n(x) + Q_n(x)) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Exemple 11. Cela permet de calculer facilement les développements limités de $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, plutôt que de passer par la formule de TAYLOR–YOUNG.

Proposition 9. Soient f et g deux fonctions définies sur I, avec $0 \in \bar{I}$. On suppose que ces deux fonctions admettent un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière respectives P_n et Q_n. Alors $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière *la troncature* au degré n du polynôme P_nQ_n.

Exemple 12. On peut par exemple retrouver le résultat de l'**Exemple 10** :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{(1-x)^2} & = & \dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{1-x} \\ & = & (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4))(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)) \\ & = & \underbrace{1 \times 1}_{1} + \underbrace{1 \times x + x \times 1}_{2x} + \underbrace{1 \times x^2 + x \times x + x^2 \times 1}_{3x^2} + \dots \\ & = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \underbrace{+ \dots}_{\text{tronqué}} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ & = & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \end{array}$$

Notons que, même si notre polynôme produit est de degré 8, on *doit* s'arrêter à l'ordre 4 : les termes obtenus après ne sont pas corrects pour le DL. De même, on est obligé de partir de deux polynômes de degré 4 : si par exemple on choisissait de partir avec deux polynômes de degré 2 (pour obtenir un polynôme de degré 4 au final), on n'obtiendrait pas le bon polynôme, car on manquerait les termes de la forme $1 \times x^4$ ou $x \times x^3$ par exemple...

Exemple 13. Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-Ax}\sin(Bx)$, avec $A, B \in \mathbb{R}^+$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 pour tout n, et on peut par exemple le calculer à l'ordre 5 :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{-Ax} & = & 1 - Ax + \dfrac{A^2}{2}x^2 - \dfrac{A^3}{6}x^3 + \dfrac{A^4}{24}x^4 - \dfrac{A^5}{120}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\ \sin(Bx) & = & Bx - \dfrac{B^3}{6}x^3 + \dfrac{B^5}{120}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\ f(x) & = & Bx - ABx^2 + \left(\dfrac{A^2B}{2} - \dfrac{B^3}{6}\right)x^3 + \left(\dfrac{AB^3 - A^3B}{6}\right)x^4 + \left(\dfrac{5A^4B - 10A^2B^3 + B^5}{120}\right)x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \end{array}$$

Proposition 10. *Composition de développements limités*
Soient f et g deux fonctions définies sur I, avec $0 \in \bar{I}$. On suppose que ces deux fonctions admettent un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière respectives P_n et Q_n, et que $f(0) = 0$. Alors $g \circ f$ est bien définie au voisinage de 0, et y admet un développement limité à l'ordre n, de partie régulière *la troncature* au degré n du polynôme $Q_n \circ P_n$.

Exemple 14. Soit $f : x \mapsto \cos(\sin x)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 pour tout n, et on peut par exemple le calculer à l'ordre 6 :

$$\begin{array}{rcl} \cos x & = & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \\ \sin x & = & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \\ \cos(\sin(x)) & = & 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} - \dfrac{37x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \end{array}$$

Remarque 23. *Inverse d'un développement limité* La composition nous permet également de traiter le cas plus délicat de l'inverse, en remarquant que (pour $f(x) \neq 0$ au voisinage de 0 et en 0) :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)} \frac{1}{1 + \frac{f(x) - f(0)}{f(0)}}$$

On traite donc ce cas comme la composition de $u \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ ($\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, donc à toujours un développement limité à l'ordre n) avec $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{f(0)}$ (qui admet un développement limité à l'ordre n sitôt que f en admet un).
Notamment, dans le cas où $f(0) = 1$, les calculs sont relativement simples.

Exemple 15. On a $\cos x = \underbrace{1}_{f(0)} + \underbrace{\dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)}_{\frac{f(x)-f(0)}{f(0)}}$, donc :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{\cos x} & = & \dfrac{1}{1 + \underbrace{\left(\dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\right)}_{u}} \\ & = & 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + u^6 + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \\ & = & 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}(x^6) \end{array}$$

Attention : le calcul précédent, si on le poursuit bêtement, fait apparaître un polynôme de degré 36. Comme on sait à l'avance que, ce qui nous intéresse, c'est la troncature au degré 6, il n'est pas nécessaire de calculer les termes suivants (ce seront des $\underset{x\to 0}{o}(x^6)$, de toute manière...) On préférera commencer par regarder quel est le terme constant, puis le coefficient de x, puis de x^2, etc... Par exemple, comme on sait que u^p à une valuation de $2p$, pour obtenir le coefficient de x^4, j'ai uniquement à regarder ce que vont donner u et u^2.

Remarque 24. Pour gérer un quotient de développements limités $\dfrac{f}{g}$, on tâchera donc de se ramener à $\dfrac{1}{g(0)} f \times \dfrac{1}{1+(g-1)}$. Notons par ailleurs que si $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on va pouvoir mettre en facteur dans le développement limité de g un terme en x^p, et se ramener au cas précédent.

Exemple 16. *Arcsin, Argsh et Tangente*
Les résultats précédents nous permettent de donner les trois derniers développements limités à savoir :
En partant de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, puis en composant avec $x \mapsto \pm x^2$, puis en primitivant, on trouve :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{Arcsin}\, x &=& x + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2p)}\dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} + \cdots + \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) \\ \text{Argsh} x &=& x - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^p \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2p)}\dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} + \cdots + (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}) \end{array}}$$

En calculant le produit $\sin \times \dfrac{1}{\cos}$, on trouve :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \underset{x\to 0}{o}(x^9)$$

Le terme général n'a pas d'écriture simple, mais comme les calculs deviennent très lourds pour retrouver ce développement, il est nécessaire d'apprendre au moins les 4 premiers termes du développement limité de tangente en 0 :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^8)}$$

Remarque 25. Dans toute la partie précédente, nous n'avons traité que les cas au voisinage de 0. Pour le voisinage de $a \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$, on se ramènera au voisinage de 0 soit par translation ($x \to x - a$, soit par inverse $x \to \dfrac{1}{x}$ comme nous l'avons vu en fin de la partie **II–1**.

4– Exercices

Dans tous les exercices suivant, on notera « Donner $DL_n(a)$ de f » la consigne : « Donner le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de a ».

Exercice II-11. Donner les développements limités suivants :

1– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

2– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

3– $DL_4(0)$ de $x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$

4– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\text{sh}^2\, x}$

5– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{\text{sh}\, x} - \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

6– $DL_4(1)$ de $x \mapsto x^{\frac{1}{\ln x - 1}}$

7– $DL_4(+\infty)$ de $x \mapsto (x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}$

8– $DL_3(\frac{\pi}{6})$ de $x \mapsto \ln(2\sin x)$

Exercice II-12. Donner les développements limités suivants :

1– $DL_4(1)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

2– $DL_5(0)$ de $x \mapsto (\text{sh}\, x)(\text{ch}\, 2x) - \text{ch}\, x$

3– $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

4– $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$

5– $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$

6– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$

7– $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $x \mapsto \ln(\sin x)$

8– $DL_2(+\infty)$ de $x \mapsto x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right)$

9– $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$

10– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice II-13. *Fonction au DL nul à tout ordre*

Soit $\left\{\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R}^* & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array}\right.$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

Exercice II-14. Donner le développement limité à l'ordre 10 en 0 de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$

Exercice II-15. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1– Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

2– f admet-elle un développement limité en 0 ? A quel ordre maximal ?

III – Applications des développements limités

1– Calcul de limites

Remarque 26. Une des applications les plus directes des développements limités est le calcul de limite. En effet, le terme constant d'un développement limité étant égal à la limite de la fonction, trouver le développement limité d'une fonction à l'ordre 0 en un point a donne directement sa limite en a. De plus, puisque les développements limités ramènent toutes les fonctions étudiées à des polynômes, cela permet de lever *toutes* les formes indéterminées.

Exemple 17. Calculons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x}$. Avec les développements limités usuels, on a :

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6} \text{ et } \tan x - x = \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$$

On en déduit que $\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x} \underset{x\to 0}{\sim} -2$ et donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2$.

2– Position d'une courbe par rapport à sa tangente ou son asymptote

Remarque 27. Une autre application des développement limités est de déterminer la position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point $a \in \mathbb{R}$, ou par rapport à son asymptote $a = \pm\infty$. La partie du développement limité de forme $a_0 + a_1 x$ donne l'équation de la droite en question, et l'étude du signe du coefficient d'ordre 2 (noté a_2 permet de déterminer si, localement, la courbe est au-dessus ($a_2 > 0$) ou en dessous ($a_2 < 0$) de la droite. Si $a_2 = 0$ et $a_3 \neq 0$, la courbe présente un point d'inflexion, et c'est l'étude du terme d'ordre 3 qui permet de répondre, etc…

Exemple 18. Quelle est la position de $f : x \mapsto \dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$ par rapport à sa tangente en 0 ? Pour commencer, on va « pousser » les développements limités un peu plus loin :

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ et } \tan x - x = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

On en déduit que $\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{40x^3+16x^5}{-20x^3+x^5} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{40+16x^2}{-20+x^2}$. On va donc développer cette fraction :

$$\begin{aligned}
\frac{40+16x^2}{-20+x^2} &= \frac{40}{-20+x^2} + x^2\frac{16}{-20+x^2} \\
&= -2\frac{1}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{20}}\right)^2} + \frac{-4}{5}x^2\frac{1}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{20}}\right)^2} \\
\text{Or } \frac{1}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{20}}\right)^2} &= 1 + \frac{x^2}{20} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\
\Longrightarrow \frac{40+16x^2}{-20+x^2} &= -2\left(1+\frac{x^2}{20}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) - \frac{4}{5}\left(1+\frac{x^2}{20}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2 \\
&= -2 - \frac{9}{10}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

On a donc $\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2 - \dfrac{9}{10}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. La tangente en 0 est la droite d'équation $y = -2(+0x)$, et la courbe est en-dessous de cette tangente au voisinage de 0.

3– Développement asymptotique

Remarque 28. Parfois, il est nécessaire d'utiliser des familles de fonctions un peu plus larges que les polynômes pour une analyse, notamment en $+\infty$. On va donc définir une classe plus générale de développement, appelés les *développements asymptotiques*. Cependant, dans les cas que nous étudierons, ce seront toujours des développements limités, à une multiplication (cas type : $\sqrt{x}P_n(x)$) ou un changement de variable ($P_n(\ln x)$ ou $P_n(\sqrt{x})$ près.

Définition 7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $a \in \bar{I}$ (généralement, $a = 0$ ou $\pm\infty$). On appelle **développement asymptotique à k termes** de f toute expression de la forme :

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_k f_k$$

Avec :

- $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}^k$ sont des constantes multiplicatives (les **coefficients**)
- $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sont des fonctions définies au voisinage de a telles que $f_{i+1}(x) = \underset{x\to a}{o}(f_i(x))$ pour tout i. On appelle cette famille **l'échelle de comparaison**, et en particulier f_k est **la précision** du développement.
- On a $f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_kf_k(x) + \underset{x\to a}{o}(f_k(x))$.

Proposition 11. *Propriétés des développements asymptotiques*

1– Lorsqu'il existe, un développement asymptotique est **unique** à échelle de comparaison donnée.

2– En particulier, $f(x) \underset{x\to a}{\sim} c_1f_1(x)$. On appelle cette partie la *partie principale* du développement.

Exemple 19. On peut démontrer que $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{\ln^2 x} + \cdots + \frac{(k-1)!x}{\ln^k x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{\ln^k x}\right)$. C'est un développement asymptotique à k termes (et à la précision $\dfrac{x}{\ln^k x}$), en $+\infty$ de notre fonction.

Exemple 20. On peut donner un développement asymptotique de $\sqrt{1+x}$ en $+\infty$ à partir d'un développement limité :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} \\
&= \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\underset{\frac{1}{x}\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= \sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{8x^{3/2}}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

Remarque 29. Dans la plupart des exercices, que ce soit le calcul de limite ou la détermination d'équivalent, le principal problème est de savoir « à l'avance » à quel ordre pousser les premiers DL, sachant que des termes risquent de s'annuler, etc ... On peut soit griffonner un peu au brouillon pour avoir une idée plus claire, soit décider d'y aller directement. Une bonne règle pour ça, en général, et de prendre *trois termes non-nuls.*
Il faut aussi toujours penser à ne pas calculer les termes dont on sait qu'il finiront dans un $\underset{x\to a}{o}(\cdot)$, c'est du temps perdu.

4– Exercices

Exercice III-16. *Calcul de limites*
Déterminer les limites suivantes :

1– $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}+x^2}{x-\ln x}$

2– $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\sin x}{x\ln x}$

3– $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}$

4– $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$

5– $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{\frac{1}{2-x}}$

6– $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\ln(x)\ln(1-x)$

Exercice III-17. *Branches infinies*

1– Soit $f : x\mapsto x^2\,\mathrm{Arctan}(1+x^2)$.
   a) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré 2, que l'on appellera P.
   b) La courbe $y=f(x)$ est-elle au-dessus ou en-dessous de $y=P(x)$ en $+\infty$?

2– Soit $g : x\mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$.
   a) Montrer que g possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation.
   b) La courbe $y=g(x)$ est-elle au-dessus ou en-dessous de son asymptote en $+\infty$?

Exercice III-18. *Développement asymptotique*
Calculer :

1– Le développement asymptotique de $x\mapsto\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ en 0 à la précision $x^{5/2}$.

2– Le développement asymptotique de $x\mapsto\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x$ en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$.

IV – Exercices

Exercice IV-19. Soient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi_- :]-1;0] & \to & [0;+\infty[\\ x & \mapsto & x-\ln(1+x)\end{array}\right. \quad\text{et}\quad \left\{\begin{array}{rcl}\varphi_+ : [0;+\infty[& \to & [0;+\infty[\\ x & \mapsto & x-\ln(1+x)\end{array}\right.$$

1– Montrer que φ_- et φ_+ sont des bijections

2– Donner un équivalent de φ_- et φ_+ au voisinage de 0

3– En déduire un équivalent de φ_-^{-1} et φ_+^{-1} au voisinage de 0

4– Donner un développement asymptotique à trois termes au voisinage de 0 de φ_- et φ_+

5– Donner un développement asymptotique à trois termes au voisinage de 0 de φ_-^{-1} et φ_+^{-1}

Exercice IV-20. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + \ln(x)$.

1– Montrer que pour tout entier n, il existe un unique x_n tel que $f(x_n) = n$.

2– Former le développement asymptotique de la suite x_n à la précision $\dfrac{\ln n}{n}$

Exercice IV-21. Soit la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice IV-22. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$.

1– Donner un développement limité(ou asymptotique) à l'ordre 2 de f en 0, $+\infty$ et $-\infty$.

2– Donner les équations des tangentes et branches infinies de f

3– Donner la position relative de la courbe $y = f(x)$ à ces trois courbes au voisinage des points considérés.