Chapitre 1 - TD - Oscillateurs mécaniques :

1.1 - Exercices d'application :

1.1.1 - Oscillateur lâché avec vitesse initiale :

- Définition du système et du référentiel d'étude :
  - système étudié : mobile M de masse m.
  - référentiel : référentiel du laboratoire (supposé galiléen).
- Bilan des actions mécaniques : le mobile est soumis à :
  - son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_y}$
  - la réaction du support : $\vec{R} = R\,\vec{u_y}$
  - la force de rappel élastique : $\vec{F}_{r/M} = -k(l-l_0)\,\vec{u_x}$
- LFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{r/M} = -mg\,\vec{u_y} + R\vec{u_y} - k(l-l_0)\,\vec{u_x}$

Et $\vec{v} = v_x\,\vec{u_x} \Rightarrow m\dfrac{dv_x}{dt}\vec{u_x} = -mg\,\vec{u_y} + R\vec{u_y} - k(l-l_0)\,\vec{u_x}$

On projette sur $\vec{u_x}$:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -k(l-l_0) \quad \text{et} \quad v_x = \frac{dl}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2l}{dt^2} + k(l-l_0) = 0$$

On pose $x = l - l_0$ (choix de l'origine du repère à la position d'équilibre du ressort)

Et $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d(l-l_0)}{dt} = \dfrac{dl}{dt} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$

On pose $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

Les solutions de l'équation sont de la forme :

$$x(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0$$

$x(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 C_1\sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2\cos(\omega_0 t) \rightarrow \dot{x}(0) = \omega_0 C_2 = v_0$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega_0} \qquad \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

1.1.2 - Approche énergétique de l'oscillateur élastique :

1. On ne prend pas en compte de phénomène dissipatif (frottements)

donc l'énergie mécanique du système se conserve.

2. L'énergie cinétique est donnée par : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$.

3. L'énergie potentielle élastique est donnée par $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k x^2$

4. L'énergie mécanique du système est : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$.

D'où : $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x}$

D'après la question 1, $\mathcal{E}_m = \text{cste}$, d'où $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$

5. On a : $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + k x = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$$

1.1.3 : Saut à l'élastique :

1. a) * Système et référentiel :
- système : point M de masse m
- référentiel : terrestre supposé galiléen

* BAM : le sauteur est soumis à : * son poids : $\vec{P} = m g \vec{u_z}$
* la force de rappel élastique : $\vec{F}_{r/n} = -k(z - z_0)\vec{u_z}$

* LFD : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m g \vec{u_z} - k(z - z_0)\vec{u_z}$

Or : $\vec{v} = v_z \vec{u_z} = \dot{z} \vec{u_z} \Rightarrow m \ddot{z} \vec{u_z} = m g \vec{u_z} - k(z - z_0)\vec{u_z}$

On projette sur $\vec{u_z}$:

$$m \ddot{z} + k(z - z_0) - m g = 0$$

b) On peut écrire : $\ddot{z} + \frac{k}{m}(z - z_0) = g$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, d'où :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 (z - z_0) = g \Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_0 + g}$$

c) L'équation considérée est une équation différentielle du 2nd ordre avec second membre.

① Solution générale de l'équation différentielle homogène :

$\ddot{z}_h + \omega_0^2 z_h = 0 \quad \Rightarrow z_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$

② Solution particulière : On la cherche sous la forme d'une constante :

$\omega_0^2 z_p = \omega_0^2 z_0 + g \quad \Rightarrow \quad z_p = z_0 + \dfrac{g}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow z_p = z_0 + \dfrac{mg}{k}$

③ Solution générale : $z(t) = z_h(t) + z_p$

$\Rightarrow z(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + z_0 + \dfrac{mg}{k}$

④ Détermination des constantes :

$\dot{z}(t) = -\omega_0 C_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2 \cos(\omega_0 t)$

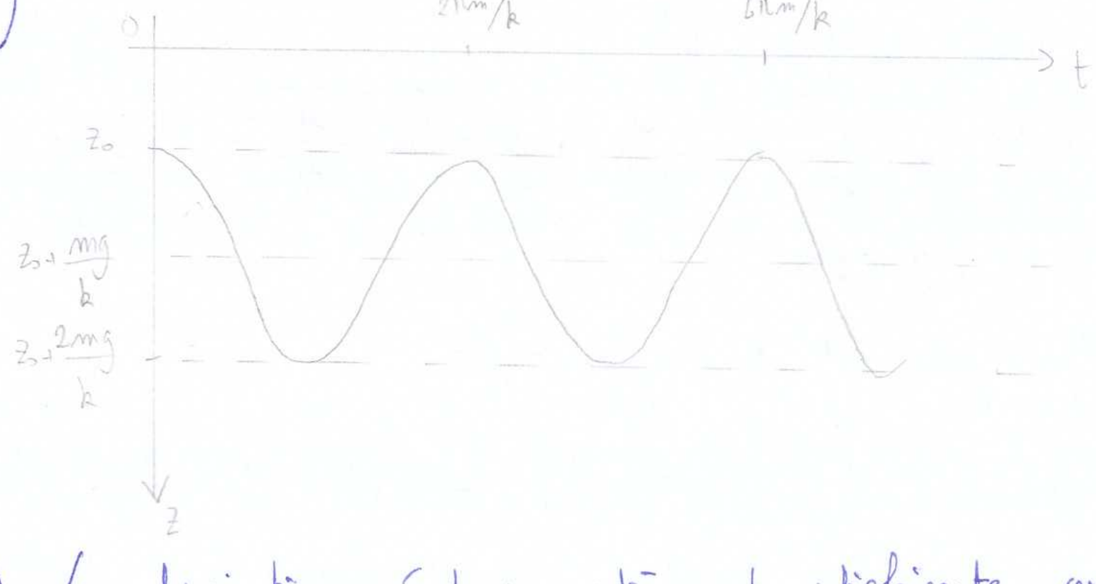
$\dot{z}(0) = \omega_0 C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

$\Rightarrow z(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + z_0 + \dfrac{mg}{k}$

$z(0) = C_1 + z_0 + \dfrac{mg}{k} = z_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{-mg}{k}$

$$\boxed{\Rightarrow z(t) - z_0 = \frac{mg}{k}\left(1 - \cos(\omega_0 t)\right)}$$

d)



e) La description n'est pas entièrement satisfaisante car on ne prend pas en compte les frottements.

2. a) • Système et référentiel : les mêmes que précédemment

• BAM : les mêmes qu'avant avec en plus les frottements $\vec{F_S} = -\alpha \dot{z} \vec{u_z}$

D'où : $m\ddot{z} = -k(z - z_0) + mg - \alpha \dot{z}$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{z} + \alpha \dot{z} + kz = kz_0 + mg$$

On introduit la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_0 + g$$

b) On peut réécrire l'équation précédente :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_0 + g \quad \text{avec} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

Pour observer des oscillations, on doit être en régime pseudo-périodique, d'où :

$$Q > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{km}}{\alpha} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{k} > \frac{\alpha}{2\sqrt{m}}$$

$$\Rightarrow \quad k > \frac{\alpha^2}{4m} \qquad \text{soit } k > 1{,}43.10^{-10}\ N.m^{-1}$$

c) On résout $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_0 + g$

1 Solution générale de l'équation homogène :

$$\ddot{z}_h + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_h + \omega_0^2 z_h = 0$$

Polynôme caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

$$r_+ = \frac{-\omega_0}{2Q} + j\frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} = \frac{-\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

On pose $\omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$

$$\Rightarrow \quad r_+ = \frac{-\omega_0}{2Q} + j\omega \quad \text{et} \quad r_- = \frac{-\omega_0}{2Q} - j\omega$$

D'où : $z_h(t) = e^{-\omega_0 t/2Q}\left[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\right]$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

2 Solution particulière : on la cherche sous la forme d'une constante.

$$\omega_0^2 z_p = \omega_0^2 z_0 + g \quad \Rightarrow \quad z_p = z_0 + \frac{g}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad z_p = z_0 + \frac{mg}{k}$$

3 $z(t) = e^{-\omega_0 t/2Q}\left[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\right] + z_0 + \dfrac{mg}{k}$

4 On détermine les constantes :

$$z(0) = C_1 + z_0 + \frac{mg}{k} = z_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{-mg}{k}$$

$$\dot{z}(t) = \frac{-\omega_0}{2Q} e^{-\omega_0 t/2Q}\left[C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)\right] + e^{-\omega_0 t/2Q}\left[-\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t)\right]$$

$$\dot{z}(0) = \frac{-\omega_0}{2Q} C_1 + \omega C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{\omega_0}{2Q\omega} C_1$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{1}{2Q\left(1 - 1/4Q^2\right)^{1/2}} \times \frac{(-mg)}{k} = \frac{1}{(4Q^2-1)^{1/2}} \times \frac{(-mg)}{k}$$

D'où :

$$\boxed{z(t) = z_0 + \frac{mg}{k}\left\{1 - e^{-\omega_0 t/2Q}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t)\right]\right\} \quad \text{avec } \omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}}$$

d) La longueur maximale est donnée par $z_0 + \frac{2mg}{k}$

D'où $z_0 + 2mg/k < z_{lim}$ $\Rightarrow \frac{2mg}{k} < z_{lim} - z_0$

$\Rightarrow \frac{k}{2mg} > (z_{lim} - z_0)^{-1}$ $\Rightarrow k > 2mg\,(z_{lim} - z_0)^{-1}$

AN : $k > 34{,}3 \cdot 10^3\ N \cdot m^{-1}$

1.1.4 - Système de suspension d'une voiture :

1. • Système et référentiel :
   * système étudié : voiture de masse m assimilée à un point matériel M.
   * référentiel : référentiel du laboratoire supposé galiléen.

• BAM :
* Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_z}$
* force de rappel élastique : $\vec{F}_{R/M} = -k(l - l_0)\vec{u_z}$ où l désigne la longueur du ressort
* force de frottements : $\vec{f} = -\alpha \frac{dl}{dt}\vec{u_z}$

LFD : $m\frac{d^2l}{dt^2}\vec{u_z} = -mg\,\vec{u_z} - k(l - l_0)\vec{u_z} - \alpha\frac{dl}{dt}\vec{u_z}$

On projette sur $\vec{u_z}$:

$$m\frac{d^2l}{dt^2} = -mg - k(l-l_0) - \alpha\frac{dl}{dt}.$$

. Choix de l'origine à la position d'équilibre de la voiture : si la voiture est en équilibre, alors :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{et} \quad mg = -k(l-l_0) \Rightarrow kl = kl_0 - mg \Rightarrow l = l_0 - \frac{mg}{k}$$

On pose $z = l - l_0 + \dfrac{mg}{k}$, d'où

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -mg - kz + mg - \alpha\dot{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0}$$

2. Le polynôme caractéristique de l'équation précédente est :

$$r^2 + \frac{\alpha}{m}r + \frac{k}{m} = 0.$$

Son discriminant vaut : $\Delta = \dfrac{\alpha^2}{m^2} - 4\dfrac{k}{m}$

On est en régime critique si :

$$\Delta = 0, \text{ soit } \frac{\alpha^2}{m^2} = 4\frac{k}{m} \Rightarrow \alpha^2 = 4km \Rightarrow \boxed{\alpha = 2\sqrt{km}}$$

3. Le système a maintenant une masse $m + m_p$. La nouvelle position d'équilibre s'obtient pour :

$$l = l_0 - \frac{(m+m_p)g}{k}$$

On pose $z' = l - l_0 + \dfrac{(m+m_p)g}{k}$. L'équation du mouvement devient :

$$\boxed{\ddot{z}' + \frac{\alpha}{(m+m_p)}\dot{z}' + \frac{k}{(m+m_p)}z' = 0}$$

On a $\Delta = \dfrac{\alpha^2}{(m+m_p)^2} - \dfrac{4k}{(m+m_p)}$ et $\alpha = 2\sqrt{km}$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{4km}{(m+m_p)^2} - \frac{4k}{(m+m_p)} = \frac{4k}{m+m_p}\left[\frac{m}{m+m_p} - 1\right] < 0$$

$\Rightarrow$ On est en régime pseudo-périodique.

4. La pulsation des oscillations va être donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+m_p}\left(1 - \frac{m}{m+m_p}\right)} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m+m_p}\left(1 - \frac{m}{m+m_p}\right)$$

$$\Rightarrow k\left(\frac{m+m_p-m_p}{m+m_p}\right) = (m+m_p)\,\omega^2 \Rightarrow k = \frac{\omega^2 (m+m_p)^2}{m}$$

Et $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{k = \frac{4\pi^2 (m+m_p)^2}{m T^2}}$

AN : $\boxed{k = 426 \text{ kN.m}^{-1}}$

1.1.5 - Étude d'une résonance mécanique

1. • Définition du système et du référentiel :
   * système : mobile M de masse m
   * référentiel : terrestre supposé galiléen

• BAM : (Bilan des Actions Mécaniques)
   * poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_y}$ (on choisit $\vec{u_y}$ ascendant)
   * réaction du support : $\vec{R} = R\,\vec{u_y}$
   * force de rappel élastique : $\vec{F_{r/m}} = -k(l-l_0)\,\vec{u_x}$ $x - kl$ $\vec{u_x} = -kx\,\vec{u_x}$
   * force de frottements : $\vec{f} = -h(\dot{x} - \dot{x}_B)\,\vec{u_x}$

• LFD :
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\,\vec{u_y} + R\,\vec{u_y} - kx\,\vec{u_x} - h(\dot{x} - \dot{x}_B)\,\vec{u_x}$$

$$m\ddot{x}\,\vec{u_x} = -mg\,\vec{u_y} + R\,\vec{u_y} - kx\,\vec{u_x} - h(\dot{x} - \dot{x}_B)\,\vec{u_x}$$

On projette sur $\vec{u_x}$: $m\ddot{x} = -kx - h(\dot{x} - \dot{x}_B)$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{h}{m}\dot{x}_B$$

On pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$ soit $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{km}}{h}$

$$\boxed{\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_B}$$

2. Nous allons adopter la représentation complexe ; on note $\underline{x} = \underline{x_m} e^{j\omega t}$ et $\dot{\underline{x}}_B = j\omega b e^{j\omega t}$

On a alors :

$$-\omega^2 \underline{x_m} + \frac{j\omega\omega_0}{Q}\underline{x_m} + \omega_0^2 \underline{x_m} = \frac{j\omega\omega_0}{Q} b$$

$$\Rightarrow \underline{x_m}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q}\right) = \frac{j\omega\omega_0}{Q} b$$

$$\Rightarrow \underline{x_m} = \frac{j\omega\omega_0/Q}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\omega_0/Q} b = \frac{j\omega\omega_0 b}{Q(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\omega_0}$$

$$\Rightarrow \underline{x_m} = \frac{b}{1 - \frac{jQ}{\omega\omega_0}(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{b}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{x_m} = \frac{b}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

3. On commence par calculer l'amplitude x_m des oscillations :

$$x_m = |\underline{x_m}| \qquad \Rightarrow \boxed{x_m = \frac{b}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

On calcule ensuite la phase à l'origine φ :

$$\varphi = \arg(\underline{x_m}) = \arg(b) - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$

4. On observe que l'amplitude x_m du système passe par un maximum pour $\omega = \omega_0$, il peut donc y avoir résonance du système.

1.2 - Exercices de réflexion

1.2.1 - Mobile lié à deux ressorts.

1. Écrivons l'expression des forces de rappel qui s'exercent sur la masselotte M, étudiée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

* force exercée par le ressort de gauche : $\vec{F_g} = -k_1(x - l_{0,1})\vec{u_x}$
* force exercée par le ressort de droite :

$$\vec{F_d} = k_2(L - x - l_{0,2})\vec{u_x}$$

Les ressorts exercent donc au total une force :

$$\vec{F} = -k_1(x - l_{0,1})\vec{u_x} + k_2(L - x - l_{0,2})\vec{u_x}$$

A l'équilibre, on aura : $-k_1(x_{eq} - l_{0,1}) + k_2(L - x_{eq} - l_{0,2}) = 0$

$$\Rightarrow -x_{eq}(k_1 + k_2) = -k_1 l_{0,1} - k_2 L + k_2 l_{0,2} \quad \Rightarrow \boxed{x_{eq} = \frac{k_1 l_{0,1} + k_2(L - l_{0,2})}{k_1 + k_2}}$$

2. L'application de la loi fondamentale de la dynamique donne :

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_{0,1}) + k_2(L - x - l_{0,2})$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = -k_1 l_{0,1} + k_2(L - l_{0,2})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m}x = \frac{-k_1 l_{0,1}}{m} + \frac{k_2}{m}(L - l_{0,2})$$

3. On va observer un mouvement sinusoïdal de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$.

D'où une fréquence : $\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$

4. La force totale exercée par les deux ressorts, projetée sur $\vec{u_x}$ vaut :

$$F = -k_1(x - l_{0,1}) + k_2(L - x - l_{0,2}) = -(k_1 + k_2)x + k_1 l_{0,1} + k_2(L - l_{0,2})$$

$$F = -(k_1 + k_2)\left(x - \frac{(k_1 l_{0,1} + k_2(L - l_{0,2}))}{k_1 + k_2}\right)$$

Soit $F = -k(x - l_0)$ avec $\begin{cases} k = k_1 + k_2 \\ l_0 = \dfrac{k_1 l_{0,1} + k_2(L - l_{0,2})}{k_1 + k_2} \end{cases}$

5. Le système est équivalent au suivant :

; d'où un oscillateur harmonique oscillant à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$.

On retrouve bien la même fréquence :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

1.2.2 - Mise en résonance d'un pont :

1. • Définition du système et du référentiel :

* système : point assimilé à un point G de masse m.
* référentiel : lié à la terre, supposé galiléen.

• BAM : Le point est soumis à :

* son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_x}$
* la force de rappel élastique : $\vec{F_r} = -k(x - l_0)\,\vec{u_x}$
* la force de frottements : $\vec{F_f} = -\alpha\dot{x}\,\vec{u_x}$

LFD : $m\ddot{x}\,\vec{u_x} = -mg\,\vec{u_x} - k(x - l_0)\,\vec{u_x} - \alpha\dot{x}\,\vec{u_x}$

On projette sur $\vec{u_x}$: $m\ddot{x} = -mg - k(x - l_0) - \alpha\dot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k\left(x - l_0 + \frac{mg}{k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\left(x - l_0 + \frac{mg}{k}\right) = 0$$

On pose $x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$ et $X = x - x_{eq}$, il vient :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$ $\Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0}$$

2. a) Si $Q \to \infty$, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

C'est l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique :

$$X(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)$$

$X(0) = C_1 = X_0$ et $\dot{X}(t) = -\omega_0 C_1\sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2\cos(\omega_0 t)$

$\dot{X}(0) = \omega_0 C_2 = V_0 \Rightarrow C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = X_0\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

b) On est maintenant dans le cas de figure $Q > \frac{1}{2}$.

$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$. On écrit le polynôme caractéristique :

$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. On écrit le discriminant :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0 \quad \text{car } Q > \frac{1}{2}$$

Les racines du polynôme sont donc données par :

$$r_+ = \frac{-\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \frac{-\omega_0}{2Q} + \frac{j\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$$

$$r_- = \frac{-\omega_0}{2Q} - \frac{j\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$$

On pose $\omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$

D'où : $X(t) = \exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2Q}\right)\left\{C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right\}$

On détermine C_1 et C_2 grâce aux conditions initiales :

$$X(0) = C_1 = X_0$$

$$\dot{X}(t) = \frac{-\omega_0}{2Q}\exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2Q}\right)\left\{C_1\cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\right\} + \exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2Q}\right)\left\{-\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t)\right\}$$

$$\dot{X}(0) = \frac{-\omega_0 C_1}{2Q} + \omega C_2 = V_0 \Rightarrow C_2 = \frac{V_0}{\omega} + \frac{\omega_0 C_1}{2Q\omega} = \frac{V_0}{\omega_0} \times \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}} + \frac{\omega_0 X_0}{2Q\omega_0} \times \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{V_0}{\omega_0} \times \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}} + \frac{X_0}{\sqrt{4Q^2-1}} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\left[\frac{2QV_0}{\omega_0} + X_0\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow X(t) = \exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2Q}\right)\left\{X_0 \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\left[X_0 + \frac{2QV_0}{\omega_0}\right]\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}\right)\right\}}$$

On a cette fois un amortissement exponentiel des oscillations.

3. L'équation du mouvement devient alors :

$$m\ddot{X} = -kX - \alpha\dot{X} + \beta\dot{X} \Rightarrow \ddot{X} + \frac{\alpha-\beta}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

Le terme d'amortissement est maintenant $\frac{\alpha-\beta}{m}$. Si $\beta > \alpha$, on peut avoir un terme d'amortissement négatif. Les oscillations du pont vont voir leur amplitude augmenter exponentiellement au fil du temps, jusqu'à destruction du pont.

4. Faisons de nouveau le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur le pont :

* poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{u_x}$
* force de rappel : $\vec{F_r} = -k(x - l_0)\vec{u_x}$
* frottements : $\vec{F_f} = -\alpha\dot{x}\,\vec{u_x}$
* forçage dû au piéton : $\vec{F} = -(F_0 + F_1\cos(2\pi f t))\vec{u_x}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg - k(x - l_0) - \alpha\dot{x} - (F_0 + F_1\cos(2\pi f t))$$

Soit : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k(x - l_0) + mg + F_0 = -F_1\cos(2\pi f t)$.

5. $$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\left(x - l_0 + \frac{mg}{k} + \frac{F_0}{k}\right) = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$$

$$\Rightarrow \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2\left(X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\right) = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{Y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)} \quad \text{avec } Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

6. Réécrivons l'équation précédente en notation complexe :

$$-\omega^2 \underline{Y_m} + \frac{j\omega\omega_0}{Q}\underline{Y_m} + \omega_0^2\underline{Y_m} = -\frac{F_1}{m} \Rightarrow \underline{Y_m}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q}\right) = \frac{-F_1}{m} = -E$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{Y_m}}{E} = \frac{-1}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q}} = \frac{-1}{\omega_0^2} \times \frac{1}{1 - z^2 + \frac{jz}{Q}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{\omega_0^2} \times \frac{-1}{1 - z^2 + jz/Q}}$$

7. On calcule le module de $\underline{H}$:

$$\boxed{|\underline{H}| = \frac{1}{\omega_0^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + (z/Q)^2}}}$$

. Il y aura résonance si $|\underline{H}|$ passe par un maximum pour une certaine valeur de z.

$|\underline{H}|$ passera par un maximum si $f(z) = (1-z^2)^2 + (z/Q)^2$ passe par un minimum.

$$\frac{df(z)}{dz} = 2(1-z^2)\times(-2z) + \frac{2z}{Q} = 2z\left(\frac{1}{Q} - 2 + 2z^2\right)$$

On cherche quand cette dérivée s'annule :

$$\frac{df(z)}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{1}{Q} - 2 + 2z_r^2 = 0 \Rightarrow z_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Comme $Q > \frac{1}{2}$, cette équation admet une racine réelle :

$$z_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

On vérifie qu'il s'agit bien d'un minimum :

$$f''(z) = 12z^2 - 4 + \frac{2}{Q^2} \; ; \; f''(z_r) = 12 - \frac{6}{Q^2} - 4 + \frac{2}{Q^2} = 8 - \frac{4}{Q^2} < 0$$

Donc il peut bien y avoir résonance pour $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$

8. Si $Q \gg 1$, alors $\omega_r \approx \omega_0$, d'où $x_r = 1$ et

$$|\underline{H}|(x_r) = \frac{1}{\omega_0^2} \times Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\underline{H}|(x_r) = \frac{Q}{\omega_0^2}}$$

9. La fréquence du forçage sera de l'ordre de $f \approx 1$ Hz, d'où $\omega \approx 2\pi$ rad
Si le pont est tel que $\omega \approx \omega_0$, alors $|\underline{H}|$ devient très grand pour cette fréquence donnée. Ainsi, même pour une faible excitation, on peut avoir une grande amplitude pour les oscillations du pont.