北京化工大学
Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第三章 信号的频域表达-傅里叶变换

主讲教师：袁洪芳

主要内容 CONTENTS

1 周期信号的傅里叶级数

-- 三角形式的傅里叶级数

-- 复指数形式的傅里叶级数

-- 幅度频谱和相位频谱

1. 三角函数集

$$\{\cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t\}$$

是一个完备的正交函数集,

其中： n=0,1,....∞ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t = 0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

3.1.1 三角形式的傅里叶级数

周期信号 $f(t)$，周期为 T_1，基波角频率为 $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$ **在满足狄氏条件时**

可展成三角形式的傅里叶级数: $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$

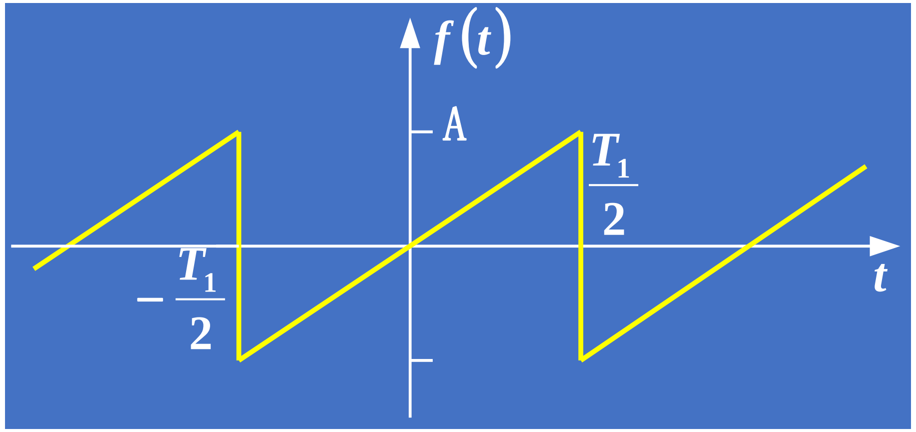
直流分量： $a_0 = \dfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$

余弦分量的幅度： $a_n = \dfrac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_1 t dt$

正弦分量的幅度： $b_n = \dfrac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega_1 t dt$

例3.1：求周期锯齿波的三角形式的傅里叶级数展开式

$$f(t)=\frac{A}{T_1}t \quad \left(-T_1/2 \le t \le T_1/2\right)$$



$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\frac{A}{T_1}t\,dt=0 \qquad a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\frac{A}{T_1}t\cos n\omega_1 t\,dt=0$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\frac{A}{T_1}t\sin n\omega_1 t\,dt \quad =\frac{A}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad n=1,2,3\cdots$$

基波

二次谐波

$$f(t)=0+\frac{A}{\pi}\sin\omega_1 t-\frac{A}{2\pi}\sin 2\omega_1 t-\cdots$$

余弦形式的傅里叶级数： $\boldsymbol{f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega_1 t+\phi_n)}$

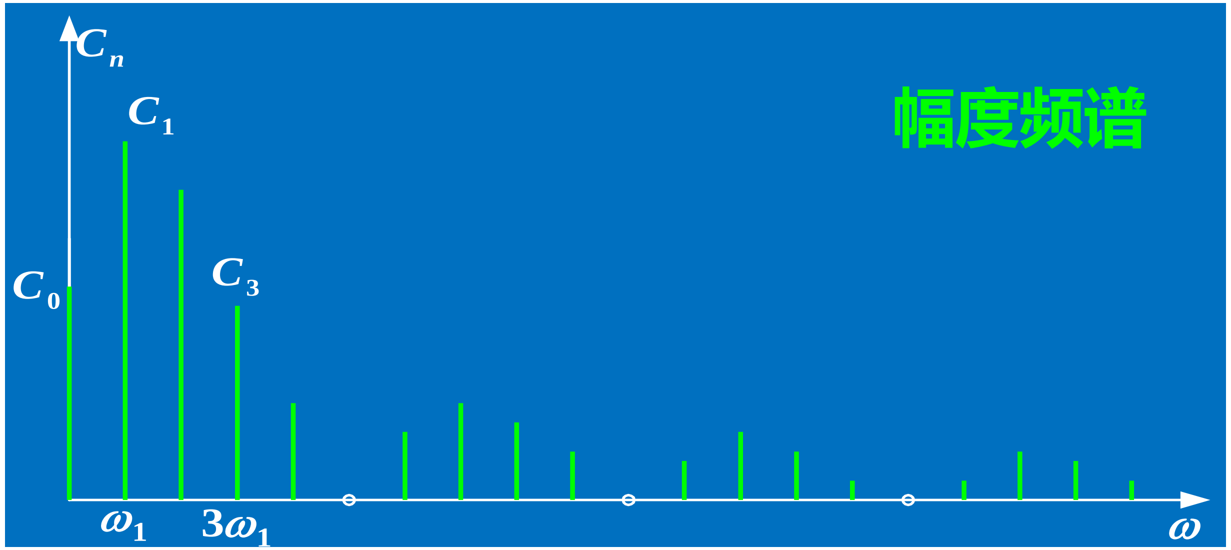
$c_0=a_0 \quad c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \varphi_n=tg^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \quad a_n=c_n\cos\phi_n \quad b_n=-c_n\sin\phi_n$

正弦形式的傅里叶级数： $f(t)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty} d_n\sin(n\omega_1 t+\theta_n)$

$d_0=a_0 \quad d_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \theta_n=tg^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad a_n=d_n\sin\theta_n \quad b_n=d_n\cos\theta_n$

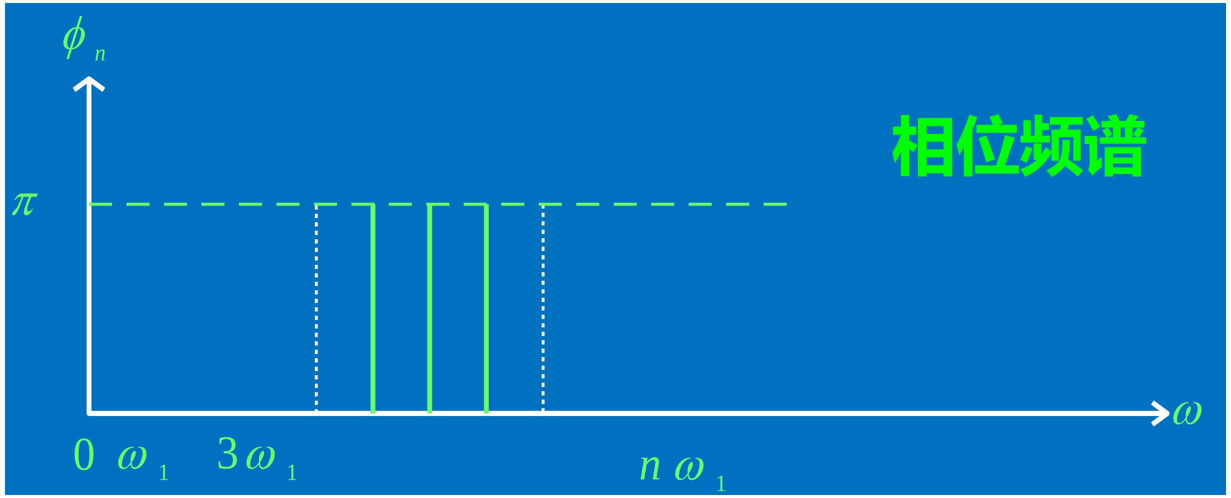
3.1.1 单边实频谱

周期信号可分解为直流，
基波（频率$\boldsymbol{\omega_1}$）
各次谐波
（$\boldsymbol{n\omega_1}$: 基波角频率的整数倍）



周期信号频谱具有

离散性，谐波性，收敛性



2. 复指数正交函数集

$$\left\{e^{jn\omega_1 t}\right\}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)\, e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(n\omega_1) = \frac{\int_0^{T_1} f(t)\, e^{-jn\omega_1 t} dt}{\int_0^{T_1} e^{jn\omega_1 t} e^{-jn\omega_1 t} dt} = \frac{1}{T}\int_0^{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

也可写成F_n

傅里叶变换对

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)\,e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{T}\int_0^{T_1}f(t)\,e^{-jn\omega_1 t}dt$$

- 周期信号可分解为 $(-\infty,\infty)$区间上的指数信号 $\boldsymbol{e^{jn\omega_1 t}}$的线性组合

- 如给出$\boldsymbol{F(n\omega_1)}$，则$\boldsymbol{f(t)}$唯一确定

3.3.3 两种系数之间的关系

$$F(n\omega_1)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

利用欧拉公式

$$=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_1 t dt-j\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_1 t dt=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$F(-n\omega_1)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_1 t dt+j\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_1 t dt=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)$$

$\therefore F(n\omega_1),F(-n\omega_1)$是复数 $\quad F(n\omega_1)=|F(n\omega_1)|e^{j\phi_n}$

幅频特性：

$$|F(n\omega_1)| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2}c_n$$

相频特性：

$$\phi_n = tg^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

a_n	偶函数
b_n	奇函数
$\|F(n\omega_1)\|$	偶函数
φ_n	奇函数

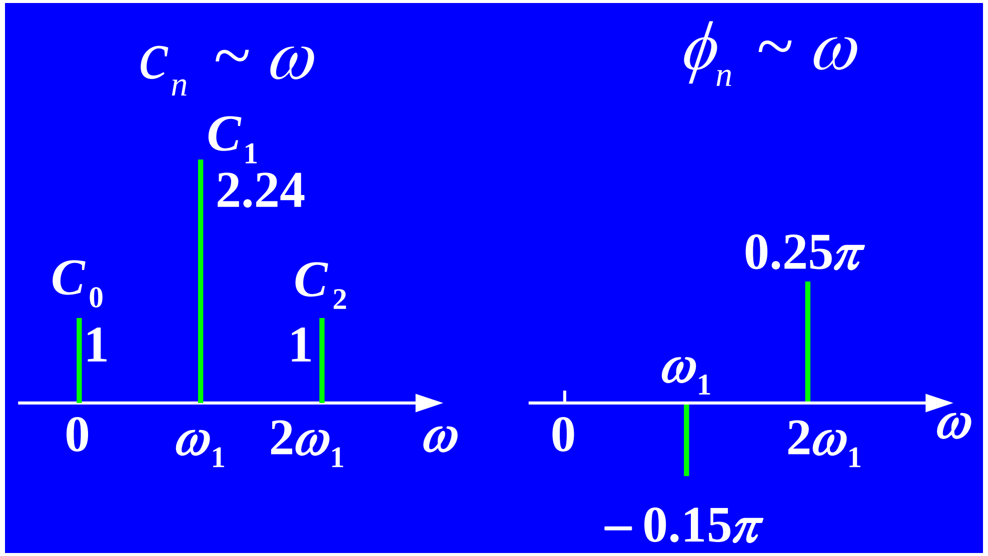
例3.2 已知$f(t)=1+\sin\omega_1 t+2\cos\omega_1 t+\cos\left(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)$，请画其幅度谱和相位谱。

请化为余弦形式：$f(t)=1+\sqrt{5}\cos(\omega_1 t-0.15\pi)+\cos\left(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)$

$c_0=1 \qquad \phi_0=0$

$c_1=\sqrt{5}=2.236 \qquad \phi_1=-0.15\pi$

$c_2=1 \qquad \phi_2=0.25\pi$



例3.2 已知$\boldsymbol{f(t)=1+\sin\omega_1 t+2\cos\omega_1 t+\cos\left(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4}\right)}$，请画其幅度谱和相位谱。

$$f(t)\ =\ 1+\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_1 t}-e^{-j\omega_1 t}\right)+\frac{2}{2}\left(e^{j\omega_1 t}+e^{-j\omega_1 t}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4})}+e^{-(jn\omega_1 t+\frac{\pi}{4})}\right)$$

$$f(t)=1+\left(1+\frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_1 t}+\left(1-\frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_1 t}+\frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{j2\omega_1 t}+\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{-j2\omega_1 t}$$

$$\boldsymbol{F(0)=1}$$

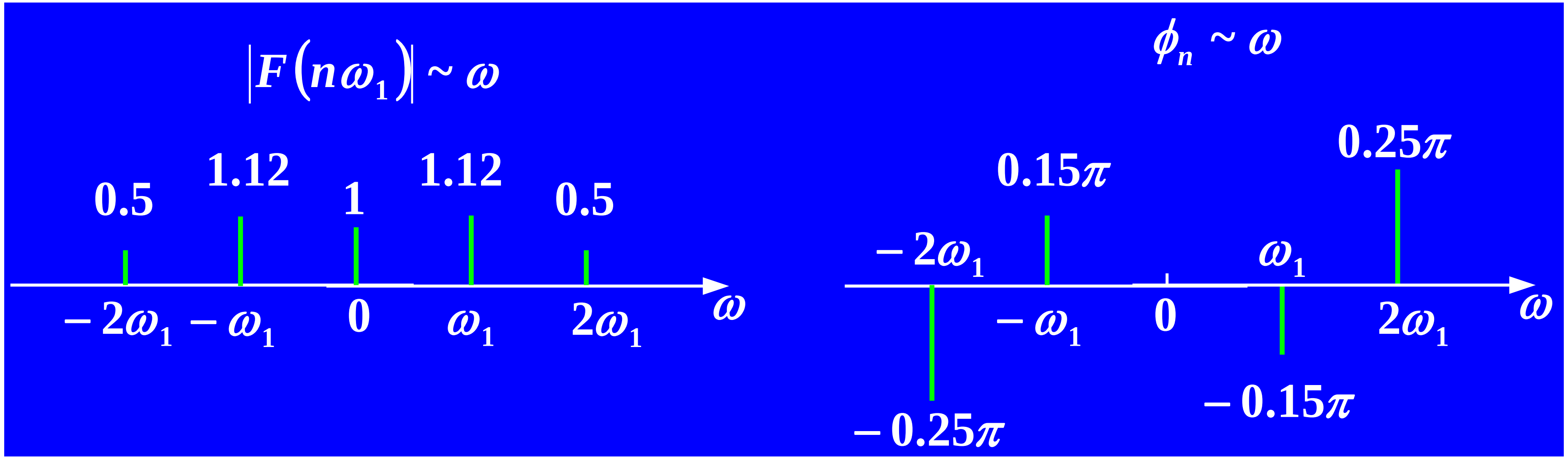
$$\boldsymbol{F(\omega_1)=\left(1+\frac{1}{2j}\right)=1.12e^{-j0.15\pi}} \qquad \boldsymbol{F(2\omega_1)=\frac{1}{2}e^{j\pi/4}}$$

$$\boldsymbol{F(-\omega_1)=\left(1-\frac{1}{2j}\right)=1.12e^{j0.15\pi}} \qquad \boldsymbol{F(-2\omega_1)=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}}$$

$$F(0)=1$$

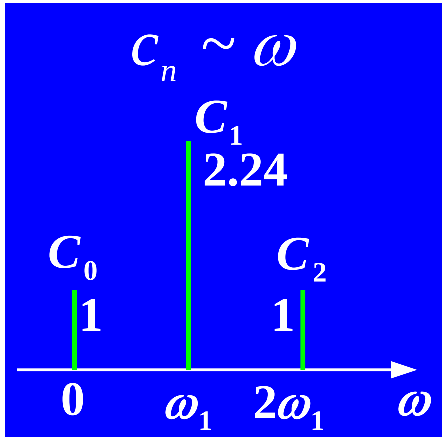
$$F(\omega_1)=\left(1+\frac{1}{2j}\right)=1.12e^{-j0.15\pi}\qquad F(2\omega_1)=\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$$

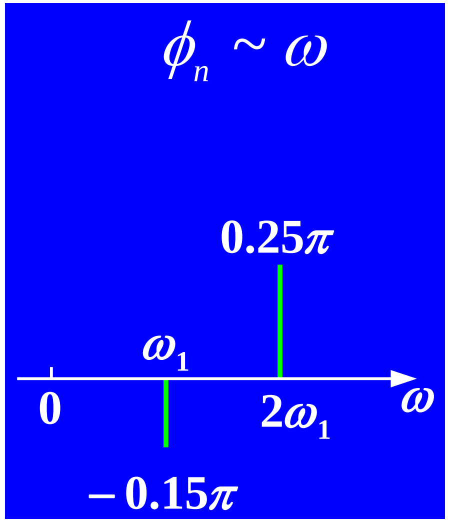
$$F(-\omega_1)=\left(1-\frac{1}{2j}\right)=1.12e^{j0.15\pi}\qquad F(-2\omega_1)=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$$



三角函数形式

单边实频普



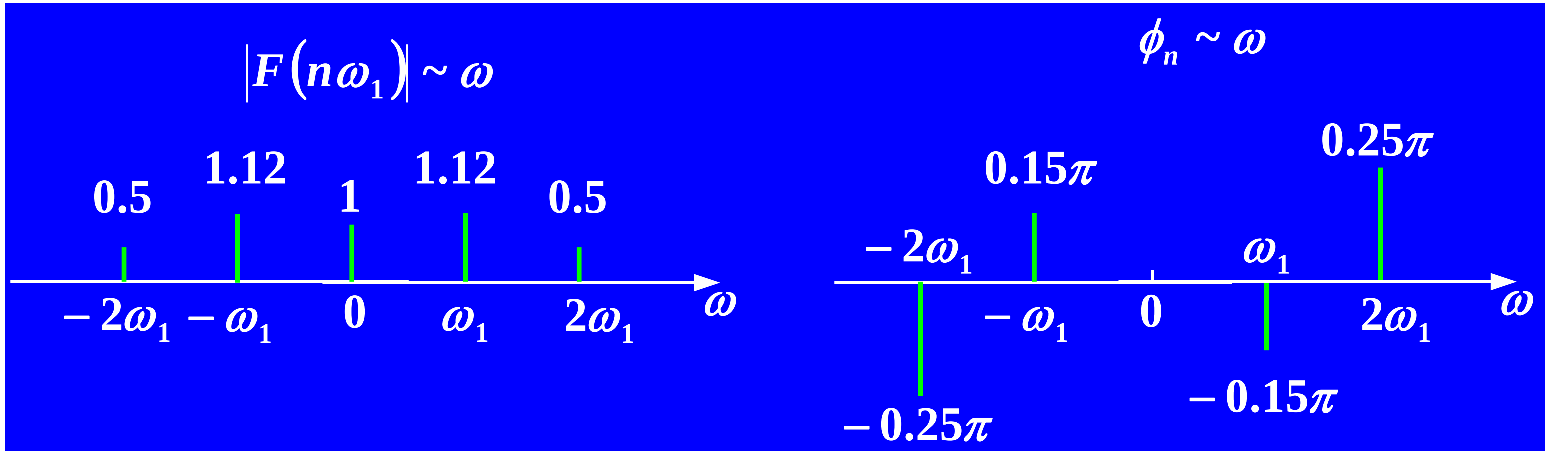


复指数形式

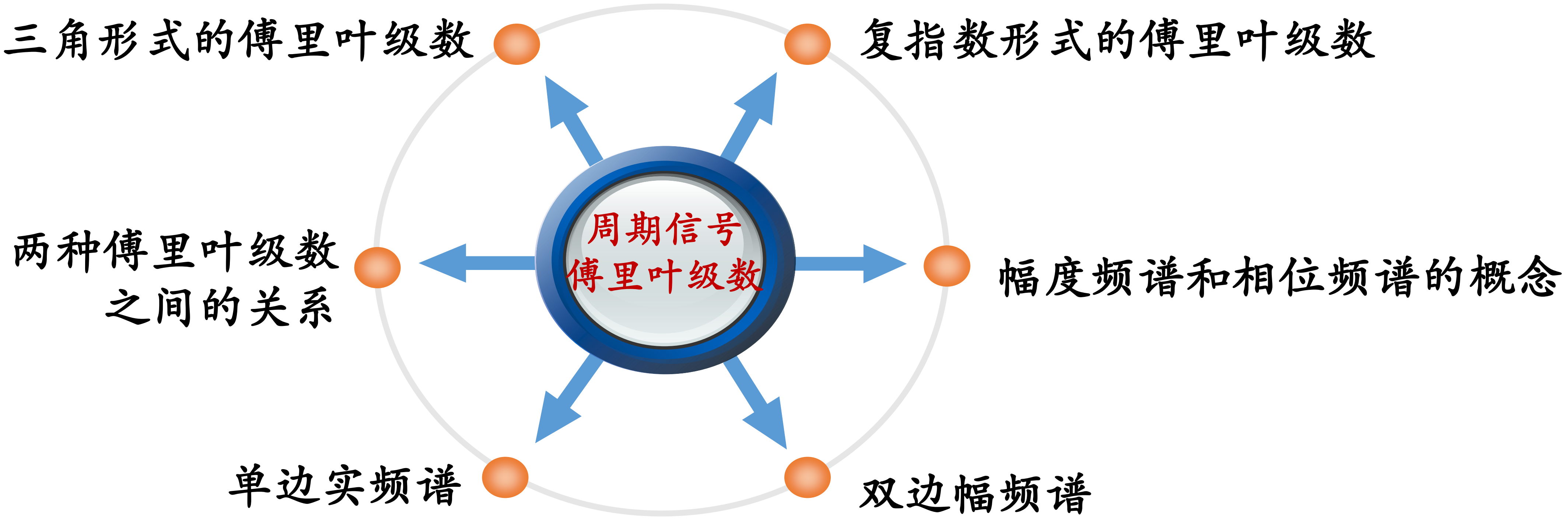
双边复频普

幅度为偶函数

相位为奇函数



3.7 本讲小结



周期信号
傅里叶级数
三角形式的傅里叶级数
复指数形式的傅里叶级数
两种傅里叶级数
之间的关系
幅度频谱和相位频谱的概念
单边实频谱
双边幅频谱