



北京化工大学

Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第四章 连续时间信号的复频域分析

主讲教师：张凤元

主要内容

CONTENTS



- 1 连续时间信号的复频域分析
- 2 典型连续时间信号的拉普拉斯变换
- 3 拉普拉斯变换的性质
- 4 拉普拉斯变换的逆变换
- 5 连续时间LTI系统的复频域描述
- 6 连续系统函数与系统特性
- 7 拉氏变换与傅里叶变换的关系



2

典型信号的拉普拉斯变换

- 阶跃信号
- 单边指数信号
- 多项式函数信号
- 单位冲击信号
- 正、余弦信号



1.1 阶跃信号的拉普拉斯变换

$$L(u(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad s = 0 \text{ 是极点。}$$

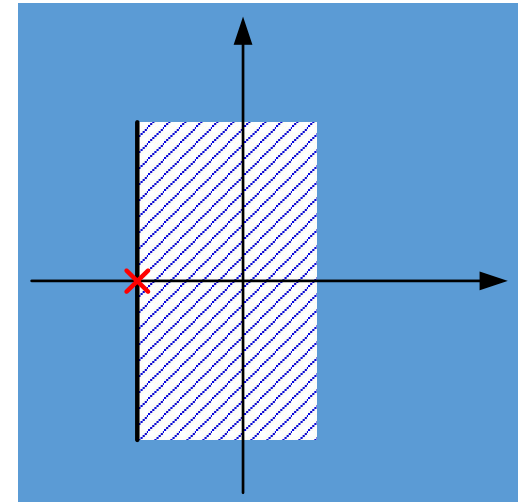
收敛域为右半平面，即满足条件 $s = \sigma + j\omega$, $\sigma > 0$

1.2 实指数信号的拉普拉斯变换

$$f(t) = e^{a_1 t} u(t), \quad a_1 \text{ 为实数。}$$

$$\text{令 } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a_1 t} \cdot e^{-\sigma t} = 0, \quad \text{得 } \sigma > a_1$$

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0_-}^{\infty} e^{a_1 t} \cdot e^{-st} dt = -\frac{e^{-(s-a_1)t}}{s-a_1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a_1} \end{aligned}$$



a_1 称为 $F(s)$ 的极点， s 平面中用 "×" 表示

如果 $F(s)$ 中有几个极点，对单（右）边信号最右边的极点的实部即为收敛坐标。

1.3 复指数信号的拉普拉斯变换

$f(t) = e^{-at}u(t)$, a 为复数。

$$L[f(t)] = F(s) = \int_{0_-}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt$$

$$= \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}, \quad s = -a \text{是极点}$$

收敛域为: $\operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{-a\}$

$$e^{j\omega_0 t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - j\omega_0}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

1.4 多项式信号的拉普拉斯变换

求 $t^n u(t)$ 的拉氏变换:

$$L[u(t)] = \int_{0_-}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \bigg|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \sigma > 0$$

$$L[tu(t)] = \frac{1}{s^2} \quad \sigma > 0$$

$$L[t^2 u(t)] = \frac{2!}{s^3} L[u(t)] = \frac{2!}{s^3} \quad \sigma > 0$$

$$L[t^3 u(t)] = \frac{3!}{s^4} \quad \sigma > 0$$

$$L[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n \geq 0 \quad \sigma > 0$$

1.5 单位冲击信号的拉普拉斯变换

$$L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

令 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \delta(t) e^{-\sigma t} = 0$, σ 可取任意值

$\delta(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 在全 s 域内收敛

$\delta'(t) \leftrightarrow F(s) = s$ 无极点, 全 s 域 $F(s)$ 解析

$\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow F(s) = s^n$ 无极点, 全 s 域 $F(s)$ 解析

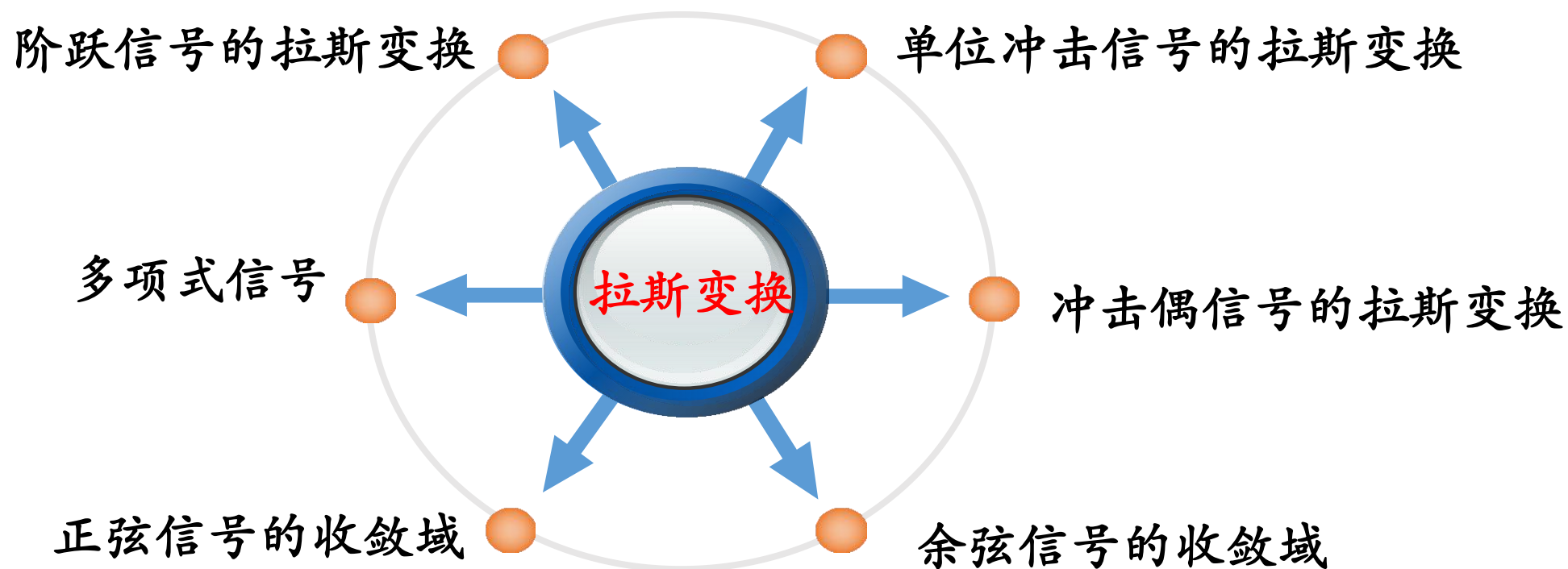
1.6 正、余弦信号的拉氏变换

$$f(t) = \cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2} \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right) u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$f(t) = \sin(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2j} \left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t} \right) u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

收敛域为: $\text{Re}\{s\} > 0$

连续时间信号的复频域分析



谢谢大家，下讲再见！

