École d'Ingénieur de Chimie Pékin — Année 2019-2020

Contrôle 1 : Systèmes Linéaires et Calcul Matriciel

L'usage de tout dictionnaire, téléphone portable, ordinateur est strictement interdit. Un soin tout particulier devra être porté à la qualité et à la précision de la rédaction des argument.

★☆☆ **Exercice 1** (Inverse d'une matrice)**.**
Determiner si la matrice A suivante est inversible. Si oui, calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

★★☆ **Exercice 2** (Un système d'équations)**.**
Résoudre, selon les valeurs des réels $a, b,$ et c, le système suivant :

$$(E) = \left\{ \begin{array}{rcl} -bcy & = & c \\ x - (1+b)y - z & = & 2 \\ ax - ay + 2az & = & 1 \end{array} \right.$$

★★★ **Exercice 3** (Matrices nilpotentes)**.**

Définition 1. On dit qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* sitôt que :

$$\exists p \in \mathbb{N} \;/\; B^p = \mathbf{0}_n$$

1- Montrer que si B est une matrice nilpotente, alors B n'est pas inversible.

2- Montrer que si B est une matrice nilpotente, alors $A = I_n - B$ est inversible.

3- Dans le cas précédent, exprimer A^{-1} en fonction de A, puis de B.

4- Montrer que si B est une matrice nilpotente, alors $C = I_n + B$ est inversible.

Problème
Matrices équivalentes

Définition 2. On dit que deux matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont *équivalentes* sitôt que :

$$\exists (P, Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \;/\; A = PBQ^{-1}$$

On note cette situation $A \sim B$.

1- a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ A \sim A$

   b) Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$

   c) Montrer que $\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3,\ A \sim B$ et $B \sim C \implies A \sim C$

2- Prenons A et B deux matrices équivalentes par ligne à la même matrice échelonnée réduite E. Montrer qu'alors, $A \sim B$.

3- Prenons A et B deux matrices inversibles. Montrer qu'alors, $A \sim B$.

4- Montrer que si $A \sim B$, alors A et B ont même rang.

5- *(Difficile)* Montrer que si A et B ont le même rang, alors $A \sim B$.

FIN