

纠正粘滞系数实验中的计算错误

俞嘉隆 许定生 姜建民

(上海交通大学,上海,200240)

摘 要 本文指出了粘滞系数实验中的计算错误。详细推导了正确计算液体粘滞系数的计算公式。

关键词 粘滞系数;摩擦力矩

粘滞系数实验有些教材用下式计算液体粘滞系数 η

$$\eta = \frac{mgR(R_1 - R_2)}{4\pi^2 nLR\frac{3}{2}} \quad (1)$$

式中参量见图1:

R_1 为外圆筒的内半径, R_2 为圆柱的外半径, L 为圆柱高度, ΔZ 为圆柱底面到外圆筒的内底面的距离, R 为小轮的半径, m 为砝码、挂钩和挂桶的质量。

由于推导公式(1)时将液体转动简化为平动,这与实际情况不符,因而造成相当大的系统误差。

最近有人从液体旋转运动着手,推导出了粘滞系数实验中液体粘滞系数 η 的计算公式

$$\eta = \frac{0.99mgR}{2\pi^2 nR_1R_2\left(\frac{2L}{R_1 - R_2} + \frac{R_2^2}{2\Delta ZR_1}\right)} \quad (2)$$

由于(2)式的出现,使得计算液体粘滞系数 η 的误差大大减小。

但(2)式也有不足之处,因为在推导(2)式时取底部环状液体(3)(见图1)的摩擦力矩

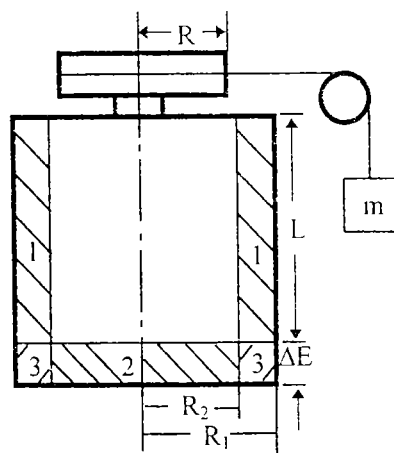


图1 测液体粘滞系数的原理图

收稿日期:1997-01-19

$M_3 = 0.01M$ 。这在数学上不够严格,因而公式(2)在数学推导过程中就缺乏数学的严谨性。

正确计算液体粘滞系数的计算公式应该是

$$\eta = \frac{3mgR(R_1 - R_2)\Delta Z}{\pi^2 n R_1 R_2 (12R_2 L \Delta Z + R_1^3 - R_2^3)} \quad (3)$$

下面我们就来详细介绍(3)式的推导过程。

在稳定流动的液体中,流速不同的相邻两层液体的接触面上,会形成一对阻碍两液体层相对运动的等值反向的相反作用力,这一对力称为内摩擦力(即粘滞力)。

测液体粘滞系数的原理简图见图1。圆柱作等速转动时的角速度为 ω_0 。半径 r ($R_2 < r < R_1$) 处液体的角速度为 ω 。在 $r = R_1$ 处角速度为零。

我们将液体划分成如图1所示的三个部分来分别讨论:(1)圆柱侧面的液体;(2)圆柱底面下方的液体;(3)图1所示的底部环状部分的液体。

1 旋转流体内摩擦力矩的计算公式

1.1 圆柱侧面液体所受的力矩 M_1

在柱与筒之间,设想在液体中有一个距轴线 r 处厚度为 dr ,长度为 L 的圆筒状薄层,如图2所示。薄层的内表面积为 $S = 2\pi rL$ 。由该层内部液体作用在这个内表面的内摩擦力方向与 ω_0 的转向相同。

实验中我们只讨论牛顿流体情形。由牛顿内摩擦定律可知:平面层流时流层间的内摩擦力 F 等于表面积 S 、粘滞系数 η 和速度梯度 $\frac{dv}{dl}$ 的乘积,即

$$F = -\eta S \frac{dv}{dl} \quad (4)$$

本实验中,当液体部分(1)产生稳定旋转时属于旋转层流,对于如图2所示的高度为 L 的筒状薄层,半径为 r 处的表面积 $S = 2\pi rL$,该面所受的内摩擦力在柱坐标系中沿切线方向,其大小(在旋转层流情形)为

$$F_\theta = -\eta S \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) = -2\pi\eta L r^2 \frac{d\omega}{dr} \quad (5)$$

$$d\left(r^2 \frac{d\omega}{dr}\right) = 0$$

$$\int d\left(r^2 \frac{d\omega}{dr}\right) = r^2 \frac{d\omega}{dr}$$

$$\omega = -\frac{c}{r} + c'$$

利用边界条件 $\omega|_{r=R_2} = \omega_0$ 和 $\omega|_{r=R_1} = 0$ 可得

$$0 = -\frac{c}{R_1} + c', \quad \omega_0 = -\frac{c}{R_2} + c'$$

$$C = \frac{\omega_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad C' = \frac{\omega_0 R_2}{R_2 - R_1}$$

$$\omega = \frac{\omega_0 R_2}{R_1 - R_2} \left(\frac{R_1}{r} - 1 \right) \quad (6)$$

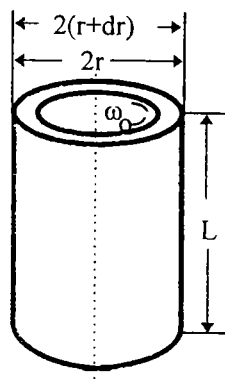


图2 筒状薄层

稳定旋转时半径为 r 的柱面所受的力矩为常数, 设其值为 M_1 , 可得

$$M_1 = rF\varphi = -2\pi\eta Lr^3 \frac{d\omega}{dr} \quad (7)$$

(7)式微分方程的解为

$$M_1 = 2\pi\eta L\omega_0 \frac{R_1 R_2^2}{R_1 - R_2} \quad (8)$$

1.2 内圆柱底面所产生的内摩擦力矩 M_2

两个距离较小的同轴大圆片, 其间放有待测液体。当上圆片以 ω_0 匀速转动, 下圆片静止时, 可以认为两圆片间液体层的角速度均匀变化, 即 $\frac{d\omega}{dz}$ 为常量, $\frac{d\omega}{dz} = \frac{\omega_0}{\Delta z}$

底面半径为 r 处液体的速度梯度为 $r \frac{d\omega}{dz} = r \frac{\omega_0}{\Delta z}$, 对面积为 $ds = 2\pi r dr$ 的面积元积分, 可得圆柱底面所受的内摩擦力矩 M_2 为

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{R_2}^{R_1} r \eta \cdot ds \cdot r \frac{\omega_0}{\Delta z} = \int_{R_2}^{R_1} 2\pi \eta r^3 \frac{\omega_0}{\Delta z} dr \\ M_2 &= \frac{\pi \eta R_2^4 \omega_0}{2 \Delta z} \end{aligned} \quad (9)$$

1.3 底部环状液体的摩擦力矩 M_3

环面半径为 r ($R_2 < r < R_1$) 处液体的速度梯度为 $r \frac{d\omega}{dz}$ 。根据(6)式可知, 环状液体上表面 $\omega = \frac{\omega_0 R_2}{R_1 - R_2} (\frac{R_1}{r} - 1)$, $r \frac{d\omega}{dz} = \frac{\omega_0 R_2 (R_1 - r)}{(R_1 - R_2) \Delta z}$, 对面积为 $ds = 2\pi r dr$ 的环状面积元积分, 可得环状液体的摩擦力矩 M_3 为

$$\begin{aligned} M_3 &= \int_{R_2}^{R_1} r \eta ds \frac{\omega_0 R_2 (R_1 - r)}{(R_1 - R_2) \Delta z} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{2\pi \eta \omega_0 R_2}{(R_1 - R_2) \Delta z} r^2 (R_1 - r) dr \\ M_3 &= \frac{\pi \eta \omega_0 R_2}{6(R_1 - R_2) \Delta z} [R_1^4 - R_2^4 (4R_1 - 3R_2)] \end{aligned} \quad (10)$$

2 液体粘滞系数的计算公式

圆柱所受的内摩擦力矩 M 为三分量之和, 综合(8)(9)(10)三式可得

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

经整理可得

$$M = \frac{\pi \eta \omega_0 R_1 R_2}{6(R_1 - R_2) \Delta z} (12R_2 L \Delta z + R_1^3 - R_2^3) \quad (11)$$

因稳态旋转时内摩擦力产生的力矩 M 与重力产生的力矩相平衡, 故

$$M = mgR \quad (12)$$

角速度 ω_0 可由转速的测量值 n 来求出

$$\omega_0 = 2\pi n \quad (13)$$

将(12)、(13)式代入(11)式, 最后可得

$$\eta = \frac{3mgR(R_1 - R_2)\Delta z}{\pi^2 n R_1 R_2 (12R_2 L \Delta z + R_1^3 - R_2^3)}$$

这就是我们要推导的(3)式。

实验中, 只要测出不同 m 所对应的稳态旋转转速 n , 就可利用上式, 先算出 $\frac{m}{n}$ 的平均值, 进而可计算出粘滞系数 η 来。实验中质量 m 由挂钩、挂桶和砝码组成。所以在具体

实验中砝码、挂钩和挂桶的质量皆需测量。

3 液体粘滞系数公式的实验验证

表 1 是我们利用液体粘度计实测蓖麻油粘滞系数的实验数据。表中 t 是旋转 10 周所经历的时间。

对表中数据用算术平均值法算得的 $\frac{m}{n} = 0.1257$

表 1 质量 m 与转速 n 的实测数值

序号	1	2	3	4	5	6	7
$m(g)$	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00
$t(s)$	180.69	156.81	138.92	124.86	114.58	105.53	97.47
$n = \frac{10}{t}(s^{-1})$	0.05534	0.06377	0.07198	0.08009	0.08728	0.09476	0.1026
$\frac{m}{n}(s \cdot kg)$	0.1265	0.1254	0.1250	0.1235	0.1260	0.1266	0.1267

粘度计的几何参数和测量的温度分别为

$R_1 = 3.084cm, R_2 = 2.492cm, R = 1.853cm, L = 7.462cm$

$\Delta z = 1.870cm, T = 10.5^{\circ}C$

将 $\frac{m}{n}$ 和以上参数代入(3)式得 $\eta = 2.32P_{\bullet} \cdot s$

此结果和由文献数据得出的 $10.5^{\circ}C$ 时蓖麻油的粘滞系数值 $2.31P_{\bullet} \cdot s$ 相差约 0.4%，这说明(3)式是计算液体粘滞系数的非常理想的公式。

而用(1)式计算 $\eta = \frac{mgR(R_1 - R_2)}{4\pi^2 nLR\frac{1}{2}} = 2.96P_{\bullet} \cdot s$

此值比参考值大 28%，这说明(1)式是一个很不理想的近似公式。

参 考 文 献

[1] 张立．大学物理实验,1988:82~84
[2] 林佩芬等．工科物理,1996(4):23~25
[3] 陈惠钊．粘度测量,北京:中国计量出版社,1994

CORRECTING THE ERROR OF CALCULATION
IN VISCOSITY COEFFICIENT EXPERIMENT

Yu Jialong Xu Dingsheng Jiang Jianmin
(Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200240)

Abstract The error of calculation in viscosity coefficient experiment is pointed out. The formula for calculating liquid viscosity coefficient correctly is deduced in detail.

Keywords viscosity coefficient; friction moment