Polynômes : Exercices Corrigés

I – Construction de $\mathbb{K}[X]$

Exercice. Démontrer :

Proposition. *Calcul dans un anneau*

Soit $(A,+,\times)$ un anneau, soient 0_A l'élément neutre pour $+$, et 1_A l'élément neutre pour $\times$. Pour $a \in A$, on notera $-a$ son symétrique pour $+$. On a les propriétés suivantes :

- 0_A est **absorbant** pour la loi $\times$: $\forall a \in A,\ 0_A \times a = a \times 0_A = 0_A$
- Soient $(a,b) \in A^2$ **qui commutent** pour $\times$ ($a \times b = b \times a$), et $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \times b^k = (a-b) \times (a^{n-1} + a^{n-2} \times b + a^{n-3} \times b^2 + \cdots + a \times b^{n-2} + b^{n-1})$$

et on a également la **formule de** Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$$

.....

Corrigé : 0_A est absorbant :

Soient $(a,b) \in A^2$, alors on a :

$$\begin{array}{lrcll}
 & b & = & b + 0_A & (0_A \text{ neutre de } +) \\
\Leftrightarrow & a \times b & = & a \times (b + 0_A) & (\text{produit par } a \text{ à gauche}) \\
\Leftrightarrow & a \times b & = & (a \times b) + (a \times 0_A) & (\text{distributivité}) \\
\Leftrightarrow & -a \times b + a \times b & = & -(a \times b) + ((a \times b) + (a \times 0_A)) & (\text{somme par } -a \times b \text{ à gauche}) \\
\Leftrightarrow & 0_A & = & (-a \times b + a \times b) + (a \times 0_A) & (\text{annulation, puis associativité}) \\
\Leftrightarrow & 0_A & = & 0_A + a \times 0_A & (\text{annulation, puis associativité}) \\
\Leftrightarrow & 0_A & = & a \times 0_A & (0_A \text{ neutre de } +)
\end{array}$$

Et donc, $\forall a \in A,\ a \times 0_A = 0_A$. On peut raisonner de même pour la multiplication par 0_A à gauche :

$$\begin{array}{lrcll}
 & b & = & 0_A + b & (0_A \text{ neutre de } +) \\
\Leftrightarrow & b \times a & = & (0_A + b) \times a & (\text{produit par } a \text{ à droite}) \\
\Leftrightarrow & b \times a & = & (0_A \times a) + (b \times a) & (\text{distributivité}) \\
\Leftrightarrow & b \times a - b \times a & = & ((a \times b) + (0_A \times a)) - (b \times a) & (\text{somme par } -b \times a \text{ à droite}) \\
\Leftrightarrow & 0_A & = & (b \times a - b \times a) + (0_A \times a) & (\text{annulation, puis associativité et commutativité de } +) \\
\Leftrightarrow & 0_A & = & 0_A + 0_A \times a & (\text{annulation, puis associativité}) \\
\Leftrightarrow & 0_A & = & 0_A \times a & (0_A \text{ neutre de } +)
\end{array}$$

Et donc, $\forall a \in A,\ 0_A \times a = 0_A$, ce qui conclut cette partie de la preuve. □

C'est une démonstration très abstraite d'algèbre, qui nécessite de savoir ce que l'on fait, et ce qu'on peut, ou non, utiliser. Par exemple, on ne peut pas dire $(-a) \times b = -(a \times b)$, *car cette formule est une* conséquence *de ce que l'on veut démontrer. Notez que nous n'avons employé que les axiomes des groupes et des anneaux.*

Formule de factorisation de $a^n - b^n$:
Soit $(a, b) \in A^2$ tels que $a \times b = b \times a$:

$$\begin{aligned}
(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \times b^k &= a \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \times b^k + (-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \times b^k && \text{(distributivité)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a \times a^{n-1-k} \times b^k + \sum_{k=0}^{n-1} -b \times a^{n-1-k} \times b^k && \text{(distributivité)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-\cancel{1}-k\cancel{+1}} \times b^k + \sum_{k=0}^{n-1} -a^{n-1-k} \times b \times b^k && \text{(car } a \times b = b \times a) \\
& && \text{et } (-b) \times c = -(b \times c) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} \times b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \times b^{k+1} && \text{(regroupement)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} \times b^k - \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} \times b^k && \text{(substitution } k+1 \to k \\
& && \text{dans la seconde somme)} \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k-1} \times b^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k-1} \times b^{k+1} - b^n && \text{(séparation de termes)} \\
&= a^n - b^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k-1} \times b^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k-1} \times b^{k+1} && \text{(commutativité de } +) \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

On a donc $\forall (a, b) \in A^2,\ a \times b = b \times a \implies a^n - b - n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \times b^k$ □

Notez l'importance de l'hypothèse de commutativité. Aussi, soyez vigilants et rigoureux sur les substitutions d'indices.

Formule de Newton :
Soit $(a, b) \in A^2$ tels que $a \times b = b \times a$:

Initialisation : On a par définition, $(a+b)^0 = 1_A = \binom{0}{0} a^0 \times b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k \times b^{0-k}$.

Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $(P_n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$.

Démonstration de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons (P_n) vraie et montrons (P_{n+1}). On a alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n && \text{(par définition)} \\
&= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} && \text{(par } P_n) \\
&= a \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} + b \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k} && \text{(distributivité)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} \times b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k+1} && \text{(car } a \times b = b \times a) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k \times b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k+1} && \text{(changement d'indice } k+1 \to k \\
& && \text{dans la première somme)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k \times b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k+1} + b^{n+1} && \text{(séparation de termes)} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k \times b^{n-k+1} + b^{n+1} && \text{(regroupement des sommes)} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k \times b^{n-k+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} && \text{(formule de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k \times b^{(n+1)-k} && \text{(regroupement de termes)} \\
&\implies (P_{n+1}) \text{ vraie}
\end{aligned}$$

Conclusion : On a (P_0) vraie et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (P_n) \implies (P_{n+1})$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}$, ce qui conclut la démonstration □

Exercice I -1. Démontrer la **Proposition 3**.
Proposition. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors :

- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- $\mathrm{val}(PQ) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.
- $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$.

. . . . . .

Corrigé : Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Si $P = 0$ ou $Q = 0$, les quatres propriétés sont trivialement vérifiées. Posons alors $P \neq 0,\ Q \neq 0$, et :

$$\deg(P) = d_p,\ \mathrm{val}(P) = v_p,\ \deg(Q) = d_q,\ \mathrm{val}(Q) = v_q,\ P = \sum_{k=v_p}^{d_p} a_k X^k,\ Q = \sum_{k=v_q}^{d_q} b_k X^k$$

On a par le produit de Cauchy $PQ = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k X^k$, avec

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \text{ avec } i \notin [\![v_p; d_p]\!] \implies a_i = 0,\ j \notin [\![v_q; d_q]\!] \implies b_j = 0$$

Notamment, si $k > d_p + d_q$, quand $i + j = k$ on a forcément $i > d_p$ ou $j > d_q$, et donc $a_i b_j = 0$, et donc $c_k = 0$, c'est à dire, $\deg(PQ) \leqslant d_p + d_q$. De plus,

$$\begin{aligned} c_{d_p+d_q} &= \sum_{i+j=d_p+d_q} a_i b_j \\ &= a_{d_p} b_{d_q} + 0 + \cdots + 0 + \ldots \\ &= a_{d_p} b_{d_q} \neq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $\deg(PQ) = d_p + d_q = \deg(P) + \deg(Q)$.
On pourrait employer une méthode similaire pour la valuation. Cependant, on peut aussi procéder de la manière suivante :

$$P = \sum_{k=v_p}^{d_p} a_k X^k = X^{v_p} \sum_{k=0}^{d_p - v_p} a_{k+v_p} X^k,\ Q = \sum_{k=v_q}^{d_q} b_k X^k = X^{v_q} \sum_{k=0}^{d_q - v_q} a_{k+v_q} X^k$$

Et donc :

$$PQ = X^{v_p} X^{v_q} R \text{ avec } R = \sum_{k=0}^{d_p - v_p} a_{k+v_p} X^k \times \sum_{k=0}^{d_q - v_q} a_{k+v_q} X^k$$

Le terme d'ordre le plus bas de R est $a_{v_p} b_{v_q} X^0$, et on obtient facilement que le terme d'ordre le plus bas de PQ est :

$$a_{v_p} b_{v_q} X^{v_p + v_q}$$

Et donc $\mathrm{val}(PQ) = v_p + v_q = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.
Enfin, $P + Q = \sum_{k\in\mathbb{N}} d_k X^k$ avec :

$$d_k = a_k + b_k, \text{ avec } k \notin [\![v_p; d_p]\!] \implies a_k = 0,\ k \notin [\![v_q; d_q]\!] \implies b_k = 0$$

Notamment, si $k > \max(d_p, d_q)$, alors $d_k = 0$, donc $\deg(P+Q) \leqslant \max(d_p, d_q)$. De même, si $k < \min(v_p, v_q)$, alors $d_k = 0$, donc $\mathrm{val}(P+Q) \geqslant \min(v_p, v_q)$, ce qui achève la démonstration. □

Exercice I-2. Démontrer la **Proposition 4**.
Proposition. Le groupe des inversibles de $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes constants non-nuls :

$$U(\mathbb{K}[X]) = \mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^*$$

. . . . . .
Corrigé : On va procéder par double inclusion. Montrons d'abord $\mathbb{K}^* \subset U(\mathbb{K}[X])$. Soit $P = a \in \mathbb{K}^*$. Comme $\mathbb{K}$ est un corps, on a $a^{-1} \in \mathbb{K}^*$, et on peut poser $Q = a^{-1} \in \mathbb{K}[X]$, avec $PQ = 1$, et donc P est inversible. D'où $\mathbb{K}^* \subset U(\mathbb{K}[X])$
Prenons maintenant $P \in U(\mathbb{K}[X])$. On a donc $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ / $PQ = 1$. L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ étant intègre, cela exclue $P = 0$. Alors, $\deg(PQ) = \deg(1) = 0$, et comme $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$, on a nécessairement $\deg(P) = \deg(Q) = 0$, c'est à dire $\exists a \in \mathbb{K}^*$ / $P = a$, et donc $U(\mathbb{K}[X]) \subset \mathbb{K}^*$.
Par double inclusion, on a donc $\mathbb{K}^* = U(\mathbb{K}[X])$ □

Exercice I-3. Peut-on trouver des polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $Q^2 = XP^2$?

. . . . . .
Corrigé : Supposons qu'il existe un tel couple de polynômes. En regardant les degrés de chaque côté, on a alors :

$$2\deg(Q) = 1 + 2\deg(P)$$

Le terme de gauche de cette équation est pair, le terme de droite est impair. Par l'absurde, il est donc impossible d'avoir un tel couple de polynômes. □

II – Substitution et fonction polynômiale

Exercice II-4. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

1– $P \circ P = P$.

2– $P(X^2) = (X^2 + 1)P$.

. . . . . .
Corrigé : 1– Analyse : Observons que $P = 0$ est une solution triviale. En excluant $P = 0$ et en regardant le degré de l'équation, on a $\deg(P)^2 = \deg(P)$, et donc $\deg(P) = 0$, c'est-à-dire $P = a \in \mathbb{R}^*$, ou $\deg(P) = 1$. Dans ce deuxième cas, posons $P = aX + b$ avec $a \neq 0$. On a alors $P \circ P = a(aX + b) + b = a^2X + ab + 2b$. Il faut donc que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & a \\ ab + 2b & = & b \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $P = X$.
Synthèse : On vérifie facilement que $P = X$, $P = a \in \mathbb{R}^*$ et $P = 0$ sont bien solutions. □

2– Là aussi, $P = 0$ est une solution triviale, que l'on peut désormais exclure. En regardant à nouveau les degrés, on a :

$$2\deg(P) = 2 + \deg(P) \implies \deg(P) = 2$$

Posons donc $P = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(X^2) & = & aX^4 + bX^2 + c \\ (X^2+1)P & = & aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ a + c & = & b \end{array} \right. \implies P = a(X^2 - 1)$$

Synthèse : D'une part, on vérifie facilement que $P = 0$ est solution. D'autre part, si $P = a(X^2-1)$, $a \in \mathbb{R}^*$, alors $P(X^2) = a(X^4 - 1)$ et $(X^2+1)P = (X^2+1)(X^2-1)a = a(X^4-1)$, ce qui vérifie l'équation donnée, et conclut la recherche de solutions. □

Exercice II-5. Démontrer la **Proposition 5**.
Proposition. *Degré d'une substitution*
Soit $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$, non nuls, alors $\deg(P\circ Q)=\deg(P)\times\deg(Q)$, et $\mathrm{val}(P\circ Q)\geqslant\mathrm{val}(P)\times\mathrm{val}(Q)$ avec égalité si $\mathrm{val}(Q)\neq 0$

. . . . . .

Corrigé : Soit $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$, non nuls. Posons :

$$\deg(P)=d_p,\ \mathrm{val}(P)=v_p,\ \deg(Q)=d_q,\ \mathrm{val}(Q)=v_q,\ P=\sum_{k=v_p}^{d_p}a_kX^k,\ Q=\sum_{k=v_q}^{d_q}b_kX^k,\ P\circ Q=\sum_{k\in\mathbb{N}}c_kX^k$$

et $k\notin[\![v_p;d_p]\!]\implies a_k=0$, $k\notin[\![v_q;d_q]\!]\implies b_k=0$. Alors, d'une part,

$$\deg(P\circ Q)=\deg(\sum_{k=v_p}^{d_q}a_kQ^k)\leqslant\max\{\deg(Q^k),\ k\in[\![v_p;d_p]\!]\}=\max\{d_qk,\ k\in[\![v_p;d_p]\!]\}=d_qd_p$$

et de plus, $c_{d_pd_q}=a_{d_p}b_{d_q}^{d_p}+0+\cdots+0+\cdots=a_{d_p}b_{d_q}^{d_p}\neq 0$ et donc $\deg(P\circ Q)=d_pd_q=\deg(P)\times\deg(Q)$.
On pourrait raisonner de la même manière pour la valuation. Cependant, on peut aussi procéder de la manière suivante :
Si $\mathrm{val}(Q)=0$, la propriété est trivialement vraie. On peut maintenant supposer $\mathrm{val}(Q)\geqslant 1$.

$$P=\sum_{k=v_p}^{d_p}a_kX^k=X^{v_p}R_p,\ Q=\sum_{k=v_q}^{d_q}b_kX^k=X^{v_q}R_q$$

Avec $\mathrm{val}(R_p)=\mathrm{val}(R_q)=0$.

$$P\circ Q=Q^{v_p}R_p(Q)=X^{v_pv_q}R_q^{v_p}R_p(X^{v_q}R_q)$$

Notons que si $A\in\mathbb{K}[X]$, $\mathrm{val}(A)=0$, alors $\forall B\in\mathbb{K}[X]\ /\ \mathrm{val}(B)\geqslant 1$, $\mathrm{val}(A\circ B)=0$, le terme constant de A étant inchangé par la substitution. Ici, en appliquant soit ce résultat, soit la formule pour $\mathrm{val}(PQ)$, on trouve successivement : $\mathrm{val}(X^{v_q}R_q)=v_q$, puis $\mathrm{val}(R_p(X^{v_q}R_q))=0$, puis $\mathrm{val}(R_q^{v_p}R_p(X^{v_q}R_q))=0$ et enfin $\mathrm{val}(P\circ Q)=v_pv_q=\mathrm{val}(P)\times\mathrm{val}(Q)$. □

III – Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice III-6. En posant $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{q}b_kX^k$, démontrer le **Théorème 2**.

Théorème. *Propriétés de la dérivation des polynômes*

1– La dérivation des polynômes est **linéaire**, c'est-à-dire :

$$\forall(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ (\lambda P+Q)'=\lambda P'+Q'$$

2– La dérivation d'un produit de deux polynômes s'obtient par la **règle de** Leibniz :

$$\forall(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2,\ (PQ)'=P'Q+PQ'$$

3– La dérivation d'une composée de deux polynômes s'obtient avec une règle analogue au *théorème de dérivation des fonctions composées* :

$$\forall(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2,\ (P\circ Q)'=(P'\circ Q)Q'$$

. . . . . .

Corrigé : Soient $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{q}b_kX^k$ et soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors :

1– Linéarité :

$$\begin{aligned}(\lambda P+Q)' &= \left(\sum_{k=0}^{p}(\lambda a_k+b_k)X^k\right)'\\ &= \sum_{k=1}^{p}k(\lambda a_k+b_k)X^{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{p}k\lambda a_kX^{k-1}+kb_kX^{k-1}\\ &= \lambda\sum_{k=1}^{p}ka_kX^{k-1}+\sum_{k=1}^{p}kb_kX^{k-1}\\ &= \lambda P'+Q'\end{aligned}$$

2– Règle de Leibniz ;

$$\begin{aligned}(PQ)' &= \left(\sum_{k=0}^{p+q}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)X^k\right)'\\ &= \sum_{k=1}^{p+q}k\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)X^{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{p+q}\left(\sum_{i+j=k}(i+j)a_ib_j\right)X^{k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{p+q-1}\left(\sum_{i+j=k+1}ia_ib_j+ja_ib_j\right)X^{k}\\ &= \sum_{k=0}^{p+q-1}\left(\sum_{i+j=k}(i+1)a_{i+1}b_j+(j+1)a_ib_{j+1}\right)X^{k}\end{aligned}$$

L'avant dernière étape est un banal changement d'indice $k-1\to k$. La dernière est plus astucieuse, il s'agit de remarquer que $i+j=k+1$ est équivalent à : soit $(i'+j=k$ et $i'+1=i)$, soit $(i+j'=k$ et $j'+1=j)$, puis faire les changements d'indice $i'\to i$ et $j'\to j$.

$$\begin{aligned}P'Q+PQ' &= \left(\sum_{k=1}^{p}ka_kX^{k-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{q}b_kX^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{p}a_kX^k\right)\left(\sum_{k=1}^{q}kb_kX^{k-1}\right)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{p-1}(k+1)a_{k+1}X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{q}b_kX^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{p}a_kX^k\right)\left(\sum_{k=0}^{q-1}(k+1)b_{k+1}X^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{p-1+q}\left(\sum_{i+j=k}(i+1)(a_{i+1})b_j\right)X^k+\sum_{k=0}^{p+q-1}\left(\sum_{i+j=k}a_i(j+1)b_{j+1}\right)X^k\\ &= \sum_{k=0}^{p-1+q}\left(\sum_{i+j=k}(i+1)a_{i+1})b_j+\sum_{i+j=k}a_i(j+1)b_{j+1}\right)X^k\\ &= \sum_{k=0}^{p-1+q}\left(\sum_{i+j=k}(i+1)a_{i+1}b_j+(j+1)a_ib_{j+1}\right)X^k\\ &= (PQ)'\end{aligned}$$

3– Dérivation de polynômes composés :

Commençons par noter que $P'\circ Q=\sum_{k=0}^{p}a_kkQ^{k-1}$ et aussi remarquer une application particulière

de la règle de Leibniz : $(P^k)' = kP^{k-1}P'$. C'est évident par récurrence sur k.

$$\begin{aligned}(P\circ Q)' &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k Q^k\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k (Q^k)' \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k k Q^{k-1} Q' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k k Q^{k-1}\right) Q' \\ &= (P'\circ Q)Q'\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de ces propriétés. □

Exercice III-7. Par récurrence sur n, démontrer le **Théorème 3**.
Théorème. *Formule de* Leibniz
Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$

.....

Corrigé : Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Rappelons que $PQ = QP$. Pour les commentaires, voir la démonstration de la formule de Newton, c'est les mêmes.

Initialisation : On a par définition, $(PQ)^{(0)} = PQ = \binom{0}{0} P^{(0)}Q^{(0)} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} P^{(k)} Q^{(0-k)}$.

Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $(P_n) : (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Démonstration de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons (P_n) vraie et montrons (P_{n+1}). On a alors :

$$\begin{aligned}(PQ)^{(n+1)} &= ((PQ)^{(n)})' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (P^{(k)}Q^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (P^{(k)})' Q^{(n-k)} + P^{(k)} (Q^{(n-k)})' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} \\ &= P^{(n+1)}Q^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} + P^{(0)} Q^{(n+1)} \\ &= P^{(n+1)}Q + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) P^{(k)} Q^{(n-k+1)} + PQ^{(n+1)} \\ &= \binom{n+1}{n+1} P^{(n+1)}Q^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} + \binom{n+1}{0} P^{(0)} Q^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} P^{(k)} Q^{((n+1)-k)} \\ \Longrightarrow\ & (P_{n+1}) \text{ vraie}\end{aligned}$$

Conclusion : On a (P_0) vraie et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (P_n) \implies (P_{n+1})$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (P+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$, ce qui conclut la démonstration □

Exercice III-8. Trouver dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes P tels que :

1– $(P')^2 = 4P$

2– $(X^2+1)P'' = 6P$

. . . . . .

Corrigé : **1**– Notons que le polynôme $P = 0$ est solution. On peut donc maintenant chercher les cas où $P \neq 0$. En regardant le degré de P, on trouve $2(\deg(P)-1) = \deg(P)$, et donc $\deg(P) = 2$, et on peut écrire $P = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$. L'équation de départ donne alors $4aX^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$, qui donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & a \\ 4ab & = & 4b \\ b^2 & = & 4c \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ & & \\ c & = & \dfrac{b^2}{4} \end{array} \right.$$

Donc les solutions sont nécessairement de la forme $P = 0$ ou $P = X^2 + bX + b^2/4,\ b \in \mathbb{R}$, et réciproquement, on vérifie facilement que tout polynôme de cette forme est solution.

2– Notons qu'à cause de la dérivée double, si $\deg(P) \leqslant 1$, alors $P'' = 0$ et nécessairement, $P = 0$. Donc, parmis les polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 1, seul le polynôme nul est solution. Si $\deg(P) \geqslant 2$, alors regarder les degrés dans l'équation nous donne $2 + (\deg(P) - 2) = \deg(P)$, ce qui ne nous apprend rien.

Il va falloir être plus précis, et regarder le *terme dominant* au lieu du degré. En écrivant $P = \sum_{i=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} P & = & a_n X^n + \dots \\ 6P & = & 6a_n X^n + \dots \\ P'' & = & n(n-1)a_n X^{n-2} + \dots \\ (X^2+1)P'' & = & n(n-1)a_n X^n + \dots \end{array}$$

D'où l'on déduit que $n(n-1)a_n = 6a_n$ et donc $n^2 - n - 6 = 0$, dont la seule solution dans $\mathbb{N}$ est $n = 3$ (l'autre étant $n = -2$), et on peut donc écrire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a \neq 0$, et par suite :

$$\begin{array}{rcl} 6P & = & 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + 6d \\ P'' & = & 6aX + 2b \\ (X^2+1)P'' & = & 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b \end{array} \implies \left\{ \begin{array}{rcl} 6b & = & 2b \\ 6a & = & 6c \\ 6d & = & 2b \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ a & = & c \\ d & = & b = 0 \end{array} \right.$$

D'où l'on déduit que les solutions sont alors de la forme $a(X^3 + X),\ a \in \mathbb{R}$. Avec la solution nulle, on vérifie que cela forme l'ensemble des solutions. □

Exercice III-9. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! P_n \in \mathbb{R}[X] \ /\ P_n - P_n' = X^n$. On raisonnera par analyse/synthèse.

. . . . . .

Corrigé : **Analyse :** Supposons qu'un tel polynôme existe, pour tout n, notons alors p_n son degré. Comme P_n' est de degré $p_n - 1$, strictement inférieur au degré de P_n, on en déduit que $\deg(P_n - P_n') = \deg(P_n)$, et donc $\deg(P_n) = n$. Posons alors $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$. La relation $P_n - P_n' = X^n$ nous indique que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & 1 \\ \forall k \in [\![0; n-1]\!] a_k & = & (k+1)a_{k+1} \end{array} \right.$$

D'où l'on déduit directement (et en faisant une récurrence descendante si on est pas convaincu...) :

$$\begin{cases} a_n &= 1 \\ a_{n-1} &= n \\ a_{n-2} &= n(n-1) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-k} &= n(n-1)\cdots(n-k+1) &= \dfrac{n!}{k!} \\ \vdots & \vdots \\ a_0 &= n! \end{cases}$$

Et la solution doit donc être de la forme $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} X^k$. Entre autre, cela nous garanti l'unicité si l'on prouve l'existence.

Synthèse : Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} X^k$. On a alors $P_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} X^k$ après simplification par k et changement d'indice. On en déduit que $P_n - P_n'$ est bien égal à X^n, et donc un tel polynôme existe, ce qui achève la démonstration □

Exercice III-10. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(X+1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$.

. . . . . .

Corrigé : On commence par appliquer la formule de Taylor en 0 :

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

Et en faisant la substitution de 1 à l'indéterminée X, on obtient :

$$P(1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

De plus, en dérivant k fois la **première** formule, et avec le changement d'indice approprié, on obtient aussi :

$$P^{(k)}(1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!}$$

Appliquons maintenant la formule de Taylor en 1 :

$$P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k \xrightarrow[X\to X+1]{} P(X+1) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} X^k$$

On en déduit :

$$P = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!} X^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n+k)}(0)}{k!n!} X^k$$

Les sommes ayant chacune un nombre fini de termes (puisque ce sont des polynômes), on peut sans problèmes les permuter (ce n'est pas vrai quand les sommes sont infinies...), et donc

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n+k)}(0)}{k!n!} X^k$$

Puis

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k \right)^{(n)}$$

Et donc $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}}{n!}$, en ré-utilisant la première formule de Taylor écrite. □

IV – Divisibilité

Exercice IV -11. *Démonstration*
Théorème. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, avec $B \neq 0$. Alors il existe un **unique** couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Q est alors appelé le **quotient** de la division euclidienne de A par B, et R est appelé le **reste**.

1– Démontrer, par l'absurde, le résultat d'**unicité** du **Théorème**.

2– Montrer que si S et T sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non-nuls, avec S de degré n et de coefficient dominant a, et T de degré p et de coefficient dominant b, et $n \geqslant p$, alors

$$\deg\left(S - \frac{a}{b}X^{n-p}T\right) < \deg S$$

3– Par récurrence sur le degré du polynôme A, montrer le résultat d'**existence** du **Théorème**.

.....

Corrigé :

1– Supposons que l'on ait deux couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2), distincts, tels que $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$. Notons d'abord que $R_1 = R_2 \Leftrightarrow Q_1 = Q_2$. Les couples étant distincts, on en déduit $R_1 \neq R_2$ **et** $Q_1 \neq Q_2$. De plus, on a

$$B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1 \neq 0$$

En regardant le degré, on en déduit :

$$\begin{cases} \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_1 - R_2) \\ \text{et} \\ \deg(R_2 - R_1) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \end{cases} \implies \begin{cases} \deg(R_1 - R_2) \geqslant \deg(B) & (\deg(Q_1 - Q_2) \geqslant 0) \\ \text{et} \\ \deg(R_2 - R_1) < \deg(B) & (\deg(R_i) < \deg(B)) \end{cases}$$

Ce qui est absurde. On a donc unicité du résultat. □

2– Posons $S = aX^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $T = bX^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k$. On a alors :

$$\begin{aligned} X^{n-q}T &= bX^{q+n-q} + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^{k+n-q} \\ &= bX^n + \sum_{k=n-q}^{n-1} b_{k-n+q} X^k \\ \implies -\frac{a}{b}X^{n-q}T &= -\frac{a}{\cancel{b}}\cancel{b}X^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k \text{ avec } c_k = \begin{array}{l} 0 \text{ si } k < n-q \\ -\frac{a}{b}b_{k+n-q} \text{ sinon} \end{array} \\ \implies S - \frac{a}{b}X^{n-q}T &= \cancel{aX^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k - \cancel{aX^n} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - c_k) X^k \\ \implies \deg\left(S - \frac{a}{b}X^{n-q}T\right) &\leqslant n-1 < \deg(S) \end{aligned}$$

3– Avant la récurrence, excluons le cas $A = 0$. Dans ce cas, on peut prendre $Q = 0$ et $R = 0$, et le théorème est vrai. On doit aussi remarque que, quand $\deg(A) < \deg(B)$, la division euclidienne est triviale : $A = 0B + A$ convient (et est unique, par le point **1**–). Ceci fait office d'**initialisation** jusqu'au rang $\deg(B) - 1$.

Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \deg(B) - 1$ et $\deg(A) = n$. Soit (H_n) :

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{array} \right.$$

Démonstration de récurrence : Supposons que $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \deg(B) - 1$ tel que

$$\forall N \leqslant n,\ (H_N) \text{ est vraie (c'est une récurrence } \textit{forte}\text{, initialisée jusqu'à } \deg(B) - 1)$$

Et montrons (H_{n+1}) : soit A un polynôme de degré $n+1$. Notons son coefficient dominant a et notons b le coefficient dominant de B, et $\deg(B) = q$. On peut alors appliquer le résultat du point **2**–, avec $T = A$ et $S = B$. On a alors :

$$\deg\left(A - \frac{a}{b} X^{n-p} B\right) < \deg A$$

En posant $Q_A = \dfrac{a}{b} X^{n-p}$ et $G = A - Q_A B$, et en se souvenant du degré de A, on a $\deg(G) \leqslant n$, et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence forte à G :

$$\exists (Q_G, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} G = BQ_G + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{array} \right.$$

Or, $G = A - BQ_A$ (l'anneau des polynômes est commutatif), donc on peut écrire $A - BQ_A = BQ_G + R$, d'où $A = B(Q_G + Q_A) + R$. En posant alors $Q = Q_G + Q_A$, on a :

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{array} \right.$$

Et donc (H_{n+1}) est vraie.

Conclusion : On a $\forall n \leqslant \deg(B) - 1,\ (H_n)$ vraie, et $\forall n \geqslant \deg(B) - 1,\ \forall N \leqslant n,\ (H_N)$ vraie $\implies (H_{n+1})$ vraie. On en déduit que :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]^2,\ B \neq 0,\ \exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{array} \right.$$

Combiné au résultat d'unicité du point **1**–, cela achève la démonstration. □

Exercice IV -12. Effectuer les divisions euclidiennes de polynômes suivantes :

1– $(-1) - 3X^2 - X^4 + 6X^5$ par $(2X^2 + X)$

2– $(-2) + X + 5X^4 - 6X^5 + X^6 + 4X^7 - 2X^8$ par $X^3 - 2X^2 + 1$

3– $2 + 4\mathrm{i}X - 4X^2 + 3\mathrm{i}X^3 + 2\mathrm{i}X^4 + (1 - \mathrm{i})X^5 + (1 + \mathrm{i})X^6$ par $X^2 - \mathrm{i}X + 2$

. . . . . .

Corrigé : On applique la **Méthode 1**.

1– $Q = -2 + X - 2X^2 + 3X^3,\ R = -1 + 2X$

2– $Q = 1 + X - 2X^2 + X^3 - 2X^5,\ R = -3 + 4X^2$

3– $Q = -1 + \mathrm{i}X - 2X^2 + (1 + \mathrm{i})X^4,\ R = 4 + \mathrm{i}X$

Exercice IV -13. Dans cet exercice, on prendra $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$

1– Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tels que $a \neq b$, soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

(Notons qu'on peut commencer par écrire $P = BQ + R$ avec $B = (X - a)(X - b)$, puis faire les substitution nécessaires)

2– En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{n+2} - 2X^{n+1} - X + 1$ par $X^2 - 5X + 6$.

3– Soit $a \in \mathbb{K}$, soit $P \in \mathbb{K}$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

(Notons la similitude avec la question 1– *...)*

4– En déduire le reste de la division euclidienne de $X^n + X - 1$ par $X^2 - 2X + 1$.

5– Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner le reste de la division euclidienne de $(X\sin(t) + \cos(t))^n$ par $X^2 + 1$ en fonction de t.

(Notons qu'une division euclidienne vraie dans $\mathbb{R}$ *reste vraie dans* $\mathbb{C}$*, et donc permet une substitution de* X *par* i*...)*

.....

Corrigé :

1– En effectuant la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$, on obtient : $P = (X-a)(X-b)Q + R$. Effectuer les substitutions $X \to a$ et $X \to b$ donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} P(a) & = & 0(a-b)Q(a) + R(a) & = & R(a) \\ P(b) & = & (b-a)0Q(b) + R(b) & = & R(b) \end{array} \right.$$

Or, R est ici un polynôme de degré strictement inférieur à celui de $(X-a)(X-b)$, c'est-à-dire, 2. On peut donc écrire $R = sX + t$ avec $(s,t) \in \mathbb{K}^2$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(a) & = & sa + t \\ P(b) & = & sb + t \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P(a) - P(b) & = & s(a-b) \\ aP(b) - bP(a) & = & t(a-b) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & \dfrac{P(a) - P(b)}{a-b} \\ t & = & \dfrac{aP(b) - bP(a)}{a-b} \end{array} \right.$$

(Les divisions par $(a-b)$ sont possibles car $a \neq b$ par énoncé. On a donc le reste cherché :

$$R = \frac{P(a) - P(b)}{a-b}X + \frac{aP(b) - bP(a)}{a-b}$$

2– On cherche à appliquer la question précédent. Notons que $X^2 - 5X + 6 = (X-3)(X-2)$ (factorisation des polynômes de degré 2), on peut donc poser $a = 3$; $b = 2$ dans la question précédente, et $P = X^{n+2} - 2X^{n+1} - X + 1$. On obtient successivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(3) = 3^{n+2} - 2.3^{n+1} - 3 + 1 = 3^{n+1}(3-2) - 2 = 3^{n+1} - 2 \\ P(2) = 2^{n+2} - 2.2^{n+1} - 2 + 1 = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{l} s = \dfrac{3^{n+1} - 2 + 1}{3-2} \\ t = \dfrac{3(-1) - 2(3^{n+1} - 2)}{3-2} \end{array}$$

donc $s = 3^{n+1} - 1$ et $t = -2.3^{n+1} + 1$, d'où l'on déduit le reste cherché :

$$R = (3^{n+1} - 1)X + -2.3^{n+1} + 1$$

3– En effectuant la division euclidienne de P par $(X-a)^2$, on obtient : $P = (X-a)^2Q + R$. En dérivant les deux côté de cette équation, on a également $P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2Q' + R'$. On effectue alors la substitution $X \to a$

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} P(a) & = & 0^2Q(a) + R(a) & = & R(a) \\ P'(a) & = & 2(0)Q(a) + 0^2Q'(a) + R'(a) & = & R'(a) \end{array} \right.$$

Or, R est ici un polynôme de degré strictement inférieur à celui de $(X-a)^2$, c'est-à-dire, 2. On peut donc écrire $R = sX + t$ avec $(s,t) \in \mathbb{K}^2$, et alors $R' = s$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(a) & = & sa + t \\ P'(a) & = & s \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & P'(a) \\ t & = & P(a) - aP'(a) \end{array} \right.$$

On a donc le reste cherché :

$$R = P'(a)X + P(a) - aP'(a)$$

4– De même manière, on remarque que $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, et on applique la question précédente avec $a = 1$, $P(a) = 1$ et $P'(a) = n.1 - 1 = n - 1$. Cela donne :

$$R = (n-1)X + -n + 2$$

5– Écrivons la division euclidienne, dans $\mathbb{R}$, de $A_n = (X\sin(t) + \cos(t))^n$ par $B = X^2 + 1$: $\exists!(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X]^2$ / $A_n = BQ_n + R_n$. Notons que comme A_n, B, Q_n et R_n sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, ce sont également des polynômes de $\mathbb{C}[X]$, et comme le théorème de la division euclidienne garanti l'unicité, Q_n et R_n sont également les quotient et reste de la division euclidienne de A_n par B dans $\mathbb{C}[X]$. On peut donc écrire $B = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$ et en appliquant la même démarche qu'à la question **1**–, trouver :

$$R = \frac{P(\mathrm{i}) - P(-\mathrm{i})}{\mathrm{i} - (-\mathrm{i})}X + \frac{\mathrm{i}P(-\mathrm{i}) - (-\mathrm{i})P(\mathrm{i})}{\mathrm{i} - (-\mathrm{i})}$$

Notons que $P(\mathrm{i}) = (\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ et $P(-\mathrm{i}) = (\cos(t) - \mathrm{i}\sin(t))^n = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}$ (en se souvenant de la formule d'Euler et de la formule de De Moivre...) ce qui donne :

$$R = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{2\mathrm{i}}X + \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{2\mathrm{i}} = \sin(nt)X + \cos(nt)$$

Notons qu'on a bien $R \in \mathbb{R}[X]$, comme attendu.

Exercice IV -14. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, et soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que le reste de la division euclidienne de X^a par $X^b - 1$ est X^r.

. . . . . .

Corrigé : D'après l'énoncé, on a $a = bq + r$, avec $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ et $r < b$. Notamment, on peut alors écrire :

$$X^a = X^{bq+r} \implies X^a - X^r = X^{bq+r} - X^r = (X^{bq} - 1)X^r$$

Il ne nous reste plus qu'a montrer que $X^b - 1 | X^{bq} - 1$, et on pourra conclure par unicité du résultat d'une division euclidienne. Or, on a :

$$X^{bq} - 1 = (X^b)^q - 1^q = (X^b - 1)\left(\sum_{k=0}^{q-1}(X^b)^k 1^{q-1-k}\right) = (X^b - 1)\underbrace{(1 + X^b + \cdots + (X^b)^k + \cdots + (X^b)^{q-1})}_{=Q}$$

Donc $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ / $X^{bq} - 1 = (X^b - 1)Q$, et en revenant à notre première relation :

$$X^a - X^r = (X^b - 1)QX^r \implies X^a = (X^b - 1)\underbrace{QX^r}_{\text{quotient}} + \underbrace{X^r}_{\text{reste}}$$

qui est bien une division euclidienne, la condition sur le degré étant donné par $r < b$. Le reste de la division euclidienne de X^a par $X^b - 1$ est bien X^r. □

V – Racines d'un polynôme

Exercice V -15. L'objectif de cet exercice est de montrer que le polynôme $X^n - X + 1$ n'as que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

1– Pour $n = 0$ et $n = 1$, donnez les racines de ce polynôme.

2– Pour $n \geqslant 2$ montrer qu'une racine double z s'écrit nécessairement de la forme $\dfrac{n}{n-1}$.

3– En déduire qu'alors $P'(z) > 0$

4– Conclure

. . . . . .

Corrigé :

1– Pour $n=0$, le polynôme est $-X+1$ et sa seule racine est 1. Pour $n=1$, le polynôme est 1, et n'a aucune racine.

2– Soit z une racine double de $P=X^n-X+1$. Alors $P(z)=0$ et $P'(z)=0$, donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z^n-z+1 &=& 0\\ nz^{n-1}-1 &=& 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcl} z^{n-1} &=& \dfrac{1}{n}\\ \dfrac{z}{n}-z+1 &=& 0 \end{array}\right. \implies z=\frac{n}{n-1}$$

3– On a alors $P'(z)=n\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}-1>n-1>0$

4– On a donc montré que, si z est racine double, $P'(z)>0$, mais c'est contradictoire avec $P'(z)=0$. Par l'absurde, P n'a donc pas de racine simple dans $\mathbb{C}$.

□

Exercice V -16. L'objectif de cet exercice est de démontrer la **Proposition 10** :
Proposition. Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, ayant (entre autre) pour racines $(a_1,a_2,\dots,a_k)$, de multiplicités respectives $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)$. Alors :

$$\exists Q\in\mathbb{K}[X]\ /\ P=\left(\prod_{i=1}^{k}(X-a_i)^{\alpha_i}\right)Q \text{ et } \forall i\in[\![1;k]\!],\ Q(a_i)\neq 0$$

1– Justifier que

$$\exists Q_1\in\mathbb{K}[X]\ /\ P=(X-a_1)^{\alpha_1}Q_1 \text{ et } Q_1(a_1)\neq 0$$

2– Montrer que $(a_2,a_3\dots,a_k)$ sont racines de Q_1 de multiplicités respectives $(\alpha_2,\alpha_3\dots,\alpha_k)$.

3– Par récurrence (finie), montrer la **Proposition 10**.

. . . . . .

Corrigé :

1– a_1 est une racine de P de multiplicité α_1, donc par définition, $(X-a_1)^{\alpha_1}|P$ et $(X-a_1)^{\alpha+1}\nmid P$. On en déduit, d'une part, que

$$\exists Q_1\in\mathbb{K}[X]\ /\ P=(X-a)^{\alpha_1}Q_1$$

D'autre part, si a_1 est racine de Q_1, alors $(X-a_1)|Q_1$ et $\exists S\in\mathbb{K}[X]\ /\ Q_1=(X-a_1)S$, et donc

$$\exists S\in\mathbb{K}[X]\ /\ P=(X-a)^{\alpha_1}(X-a_1)S=(X-a_1)^{\alpha_1+1}S \implies (X-a_1)^{\alpha+1}\mid P$$

ce qui est absurde. On en déduit que $Q_1(a_1)\neq 0$, et donc que :

$$\exists Q_1\in\mathbb{K}[X]\ /\ P=(X-a_1)^{\alpha_1}Q_1 \text{ et } Q_1(a_1)\neq 0 \qquad \square$$

2– Soit $i\in[\![2;k]\!]$, comme a_i est racine de P de multiplicité α_i, on a $P(a_i)=P'(a_i)=\cdots=P^{(\alpha_i-1)}(a_i)=0$ et $P^{\alpha_i}(a_i)\neq 0$. Alors on a successivement :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 &=& P(a_i) &=& ((X-a_1)^{\alpha_1}Q)(a_i) &=& \underbrace{(a_i-a_1)^{\alpha_1}}_{\neq 0}Q(a_i) && \implies & Q(a_i)=0\\
0 &=& P'(a_i) &=& ((X-a_1)^{\alpha_1}Q)'(a_i) &=& \alpha_1(a_i-a_1)^{\alpha_1-1}\underbrace{Q(a_i)}_{0}+\underbrace{(a_i-a_1)^{\alpha_1}}_{\neq 0}Q'(a_i) && \implies & Q'(a_i)=0\\
\vdots && \vdots && \vdots && \vdots && && \vdots\\
0 &=& P^{(j)}(a_i) &=& ((X-a_1)^{\alpha_1}Q)^{(j)}(a_i) &=& \displaystyle\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\underbrace{((X-a_i)^{\alpha_i})^{(j-l)}(a_i)}_{\neq 0 \text{ pour } l=j}\underbrace{Q^{(l)}(a_i)}_{=0\ \forall l\in[\![0;j-1]\!]} && \implies & Q^{(j)}=0\\
\vdots && \vdots && \vdots && \vdots && && \vdots\\
0 &=& P^{(\alpha_i-1)}(a_i) &=& ((X-a_1)^{\alpha_1}Q)^{(\alpha_i-1)}(a_i) &=& \displaystyle\sum_{l=0}^{\alpha_i-1}\binom{\alpha_i-1}{l}\underbrace{((X-a_i)^{\alpha_i})^{(\alpha_i-1-l)}(a_i)}_{\neq 0 \text{ pour } l=\alpha_i-1}\underbrace{Q^{(l)}(a_i)}_{=0\ \forall l\in[\![0;\alpha_i-2]\!]} && \implies & Q^{(\alpha_i-1)}=0
\end{array}$$

Donc, d'une part, $Q(a_i) = Q'(a_i) = \cdots = Q^{(\alpha_i-1)}(a_i) = 0$, donc a_i est racine de multiplicité au moins α_i de Q. Enfin,

$$\begin{aligned} P^{(\alpha_i)} &= \sum_{l=0}^{\alpha_i} \binom{\alpha_i}{l} ((X-a)^{\alpha_i})^{(\alpha_i-l)} Q^{(l)} \\ \implies P^{(\alpha_i)}(a_i) &= \sum_{l=0}^{\alpha_i} \binom{\alpha_i}{l} ((X-a)^{\alpha_i})^{(\alpha_i-l)}(a_i) \underbrace{Q^{(l)}(a_i)}_{=0 \text{ pour } l<\alpha_i} \\ \implies \underbrace{P^{(\alpha_i)}(a_i)}_{\neq 0} &= 1.(a_i-a_1)^{\alpha_i} Q^{(\alpha_i)}(a_i) \\ \implies Q^{(\alpha_i)}(a_i) &\neq 0 \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que a_i est racine de multiplicité α_i de Q, ce résultat étant valable $\forall i \in [\![2;k]\!]$ □

3– **Initialisation :** C'est la question **1**–
Hypothèse de réucrrence : Soit $l \in [\![1;k]\!]$, posons (H_l) :

$$\exists Q_l \in \mathbb{K}[X] \ / \ P = \left(\prod_{i=1}^{l}(X-a_i)^{\alpha_i}\right) Q_l \text{ et } \forall i \in [\![1;l]\!],\ Q(a_i) \neq 0,$$
$$\text{et } \forall i \in [\![l+1;k]\!],\ a_i \text{ est racine de multiplicité } \alpha_i \text{ de } Q.$$

Démonstration de récurrence : Supposons H_l vraie. On peut appliquer les questions **1**– et **2**– au polyôme Q_l, et à la racine a_{l+1}, et obtenir :

$$\exists Q_{l+1} \in \mathbb{K}[X] \ / \ Q_l = (X-a_{l+1})^{\alpha_{l+1}} Q_{l+1} \text{ et } Q_{l+1}(a_{l+1}) \neq 0$$
$$\text{et } \forall i \in [\![l+2;k]\!],\ a_i \text{ est racine de multiplicité } \alpha_i \text{ de } Q_{l+1}.$$

On a alors

$$P = \left(\prod_{i=1}^{l}(X-a_i)^{\alpha_i}\right) Q_l = \left(\prod_{i=1}^{l}(X-a_i)^{\alpha_i}\right)(X-a_{l+1})^{\alpha_{l+1}} Q_{l+1} = \left(\prod_{i=1}^{l+1}(X-a_i)^{\alpha_i}\right) Q_{l+1}$$

Avec de plus, $\forall i \in [\![1;l+1]\!],\ Q_{l+1}(a_i) \neq 0$ et $\forall i \in [\![l+1;k]\!],\ a_i$ est racine de multiplicité α_i de Q. On en déduit donc que (H_{l+1}) est vérifiée.
Conclusion : On a (H_1) vérifiée, et $\forall l \in [\![1;k]\!],\ (H_l \implies H_{l+1})$, donc :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X] \ / \ P = \left(\prod_{i=1}^{k}(X-a_i)^{\alpha_i}\right) Q \text{ et } \forall i \in [\![1;k]\!],\ Q(a_i) \neq 0$$ □

Exercice V -17. *Théorèmes*

1– Avec l'aide de la **Proposition 10** et d'une réflexion sur le degrés des polynômes, montrer le **Théorème 6** :
Théorème. Soit $P \in \mathbb{K}$, avec $\deg(P) = n$. Si P admet au moins $n+1$ racines (comptées avec leurs multiplicités) dans $\mathbb{K}$, alors P est le polynôme nul.

Autrement dit, « un polynôme dont le nombre de racines dépasse strictement le degré est nul ».

Notamment, un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ non-nul admet au plus n racines.

2– En étudiant le polynôme $P = A - B$ (avec les notations de l'énoncé), démontrer de **Théorème 7** :
Théorème. Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ et S une partie infinie de $\mathbb{K}$, telle que $\forall x \in S,\ A(x) = B(x)$. Alors

$$A = B$$

Autrement dit, deux polynômes qui coïncident sur une partie infinie sont égaux

. . . . . .

Corrigé :

1– Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, avec $\deg(P) = n$, admettant au moins $n+1$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité, et soit $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ ses $n+1$ premières racines (eventuellement, certaines sont du multiplicité au moins 2, on est compte alors plusieurs fois ...). D'après la **Proposition 10.**, on a :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ Q \neq 0\ /\ P = \left(\prod_{i=1}^{n+1}(X - a_i)\right) Q$$

Mais alors :

$$\deg(P) = \sum_{i=1}^{n+1} 1 + \deg(Q) = n + 1 + \deg(Q) > n$$

Ce qui est absurde, sauf si $P = 0$. □

2– Soient A, B tels que dans l'énoncé. Soit $P = A - B$. Alors $\forall x \in S,\ P(x) = A(x) - B(x) = 0$, et donc P a une infinité de racines, donc au moins plus de son degré, donc P est nul par la question **1**–. □

VI – Polynômes scindés

1– Exercices

Exercice VI-18. Résoudre les système suivants, d'inconnues complexes x, y, z :

1– $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ xyz & = & 1 \\ |x| = |y| & = & |z| \end{array}\right.$ 2– $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 14 \\ x^3+y^3+z^3 & = & 20 \end{array}\right.$

. . . . . .

Corrigé :

1– Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ un triplet de solutions, et posons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sigma_1 & = & x+y+z \\ \sigma_2 & = & xy+yz+zx \\ \sigma_3 & = & xyz \end{array}\right.$$

On sait déjà que $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_3 = 1$, par l'énoncé. Il faut alors trouver σ_2, et on pourra déterminer les valeurs de x, y et z. Notons que :

$$\begin{array}{rcl} xyz = 1 \text{ et } |x| = |y| = |z| & \Longrightarrow & |x| = |y| = |z| = 1 \\ |x| = |y| = |z| = 1 & \Longrightarrow & \overline{x} = \dfrac{1}{x} \text{ et } \overline{y} = \dfrac{1}{y} \text{ et } \overline{z} = \dfrac{1}{z} \\ \dfrac{1}{xyz}(xy+yz+zx) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} & \Longrightarrow & \sigma_2 = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} \text{ (car } xyz = 1) \\ \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = \overline{x+y+z} = \overline{1} = 1 & \Longrightarrow & \sigma_2 = 1 \end{array}$$

On obtient donc que (x, y, z) sont les racines du polynôme $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$, c'est à dire $P = X^3 - X^2 + X - 1$. Pour trouver ces racines, on peut par exemple factoriser le polynôme :

$$\begin{array}{rcl} P & = & X^3 - X^2 + X - 1 \\ & = & X^2(X-1) + (X-1) \\ & = & (X^2+1)(X-1) \\ & = & (X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})(X-1) \end{array}$$

Et on a les racines de P : 1, i et $-$i. Les solutions sont donc $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3\ /\ \{x, y, z\} = \{1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}\}$ (cette écriture prend en compte le fait que x, y, ou z peuvent prendre n'importe laquelle des 3 valeurs tant que les 3 sont prises.

2– Soit $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ un triplet de solutions, et posons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sigma_1 &=& x+y+z \\ \sigma_2 &=& xy+yz+zx \\ \sigma_3 &=& xyz \end{array}\right.$$

On sait déjà que $\sigma_1 = 2$. Il nous faut donc trouver σ_2 et σ_3. On va poser :

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_1 &=& x+y+z \\ S_2 &=& x^2+y^2+z^2 \\ S_3 &=& x^3+y^3+z^3 \end{array}\right.$$

On a alors $S_1^2 - S_2 = (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) - (x^2+y^2+z^2) = 2\sigma_2$, d'où $\sigma_2 = \dfrac{2^2-14}{2} = -5$. Il nous faut maintenant bricoler quelque chose de semblable pour trouver σ_3 à partir de S_3 :

$$S_1^3 = \underbrace{x^3+y^3+z^3}_{S_3} + 3(xy^2+yx^2+yz^2+zy^2+xz^2+zx^2) + 6\underbrace{xyz}_{\sigma_3}$$

Il nous faut trouver la valeur de $xy^2+yx^2+yz^2+zy^2+xz^2+zx^2$. Comme il y a des termes d'ordre 1 fois des termes d'ordre 2, on essaye :

$$\begin{array}{rrcl} & S_1S_2 &=& (x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \\ \Longrightarrow & 2\times 14 &=& x^3+xy^2+xz^2+yx^2+y^3+yz^2+zx^2+zy^2+z^3 \\ \Longrightarrow & 28 &=& \underbrace{(x^3+y^3+z^3)}_{=S_3=20} + (xy^2+yx^2+yz^2+zy^2+xz^2+zx^2) \\ & & \Longrightarrow & (xy^2+yx^2+yz^2+zy^2+xz^2+zx^2) = 8 \end{array}$$

On a donc $S_1^3 = S_3 + 3\times 8 + 6\sigma_3$, d'où $\sigma_3 = -6$. On obtient donc que (x,y,z) sont les racines du polynôme $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$, c'est à dire $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$. Pour trouver les racines, on peut commencer par remarquer que 1 est une racine évidente du polynôme, et donc $(X-1)|P$. Après une division euclidienne, on a $P = (X-1)(X^2-X-6)$. En cherchant les racines du polynôme de degré 2 ($\Delta = (-1)^2 - 4(-6) = 25$), on trouve -2 et 3, donc $P = (X-1)(X+2)(X-3)$. On a alors les racines de P : 1, -2 et 3. Les solutions sont donc $\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \ / \ \{x,y,z\} = \{1,-2,3\}\}$

Exercice VI-19. Trouver les racines de $X^3 - 8X^2 + 23X - 28$, sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

. . . . . .

Corrigé : Appelons ces trois racines x, y et z. On a, avec les formules symétriques de Newton :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 8 \\ xy+yz+zx &=& 23 \\ xyz &=& 28 \end{array}\right.$$

Et comme la somme de deux des racines est égale à la troisième, on peut par exemple poser $x+y=z$. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+y+z &=& 8 & (1) \\ xy+yz+zx &=& 23 & (2) \\ xyz &=& 28 & (3) \\ x+y &=& z & (4) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcll} (4)\hookrightarrow(1) & 2(x+y) &=& 8 & (5) \\ (4)\hookrightarrow(2) & 3xy+y^2+x^2 &=& 23 & (6) \\ (4)\hookrightarrow(3) & x^2y+xy^2 &=& 28 & (7) \\ & x+y &=& z & (4) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcll} & (5) & & & \\ & & y &=& 4-x \quad (5') \\ (5')\hookrightarrow(6) & 3x(4-x)+(4-x)^2+x^2 &=& 23 & (8) \\ (5')\hookrightarrow(7) & x^2(4-x)+x(4-x)^2 &=& 28 & (9) \\ & x+y &=& z & (4) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcll} & 4-x & = & y & (5') \\ (8) & -x^2+4x & = & 23-16=7 & (8') \\ (9) & -4x^2+16x & = & 28 & 4\times(8') \\ & x+y & = & z & (4) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lrcl} (8') & x & = & 2\pm \mathrm{i}\sqrt{3} \\ & y & = & 4-x \\ & z & = & x+y \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2\pm \mathrm{i}\sqrt{3} \\ y & = & 2\mp \mathrm{i}\sqrt{3} \\ z & = & 4 \end{array}\right.$$

Les solutions sont donc $\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \ / \ \{x,y,z\}=\{4,2+\mathrm{i}\sqrt{3},2-\mathrm{i}\sqrt{3}\}\}$ (Là aussi, on peut permuter n'importe comment les solutions, tant que x, y et z prennent ces 3 valeurs). □

VII – Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

A venir.

Exercice VII-20. *Démonstrations*

1– À l'aide d'une récurrence et du théorème de D'Alembert–Gauss, démontrer le **Corollaire 1**.
Corollaire. *Tout polynôme complexe est scindé*
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$, non-constant. Alors, nécessairement P est **scindé**, donc s'écrit :

$$P=\lambda\prod_{i=1}^{n}(X-a_i),\ \text{ avec } n=\deg(P),\ (a_i)_{i\in[\![1;n]\!]}\in\mathbb{C}^n,\ \lambda\in\mathbb{C}^*$$

2– Démontrer le **Théorème 10** :
Théorème. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

3– En déduire le **Théorème 12** dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.
Théorème. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme non-constant. Alors on peut décomposer P en produit d'une constante $\alpha\in\mathbb{C}^*$ et de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$:

$$\exists!\alpha\in\mathbb{C}^*,(Q_1,\dots,Q_m)\in\mathbb{C}[X]^m \ / \ P=\alpha\prod_{i=1}^{m}Q_i,\ \text{ avec } \forall i\in[\![1;m]\!],\ Q_i=(X-a_i),\ a_i\in\mathbb{C}$$

4– À l'aide de la **Proposition 11** et des questions précédentes, démontrer le **Théorème 12** dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.
Théorème. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme non-constant. Alors on peut décomposer P en produit d'une constante $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

$$\exists\alpha\in\mathbb{R}^*,(Q_1,\dots,Q_m)\in\mathbb{R}[X]^m \ / \ P=\alpha\prod_{i=1}^{m}Q_i,\ \text{ avec } \forall i\in[\![1;m]\!],\ Q_i \text{ irréductible dans } \mathbb{R}[X]$$

De plus, cette décomposition est unique (à l'ordre des facteurs près) si on impose que le coefficient dominant des polynômes Q_i soit 1.

. . . . . .

Corrigé :

1– **Initialisation :** Soit $P\in\mathbb{C}[X]$, avec $\deg(P)=1$. On peut écrire $P=aX+b$ avec $(a,b)\in\mathbb{C}^2,\ a\neq 0$, et on a alors $P=a\left(X-\dfrac{-b}{a}\right)$, donc P est scindé.
Hypothèse de réucrrence : Pour $n\geqslant 1$, posons (H_n) : $\forall P\in\mathbb{C}[X],\ \deg(P)=n \implies P$ est scindé.
Démonstration de récurrence : Supposons (H_n) vraie. Soit $P\in\mathbb{C}[X]$, $\deg(P)=n+1$. D'après le théorème de D'Alembert–Gauss, P admet une racine $a_1\in\mathbb{C}$. Donc $(X-a_1)|P$, et donc $\exists Q\in\mathbb{C}[X]\ / \ P=(X-a_1)Q$.

Par ailleurs, on a $\deg(P) = 1 + \deg(Q)$, d'où $\deg(Q) = n$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q, qui est donc scindé, que l'on peut écrire sous la forme :

$$Q = \lambda \prod_{k=2}^{n+1} (X - a_k)$$

On a alors $P = (X - a_1)\lambda \prod_{k=2}^{n+1}(X - a_k) = \lambda \prod_{k=1}^{n+1}(X - a_k)$, et donc P est scindé, et (H_{n+1}) est vraie.

Conclusion : On a (H_1) vraie et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (H_n) \implies (H_{n+1})$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (H_n)$ est vraie, ce qui démontre le théorème. □

2– Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 1. Soit D un diviseur de P, on a $D|P$, soit $\exists Q \in \mathbb{C}[X]\ /\ P = DQ$, et donc $\deg(D) \leqslant \deg(P) = 1$.

- Si $\deg(P) = 1$, alors $\deg(Q) = 0$ et $Q = \alpha \in \mathbb{C}^*$, donc $P = \alpha D$ et $D = \dfrac{1}{\alpha}P$
- Si $\deg(P) = 0$, alors $D = \alpha \in \mathbb{C}^*$

Dans les deux cas, on est dans un des cas de la définition d'un polynôme irréductible, et donc P est irréductible.
Réciproquement, soit P un polynôme non-constant, irréductible. Si $\deg(P) \leqslant 2$, P admet au moins deux racines $a, b \in \mathbb{C}$ éventuellement confondues. Mais alors $(X-a)|P$, et $(X-a)$ n'est pas le produit d'une constante non-nulle et de P, ce qui est en contradiction avec la définition de P irréductible. Par l'absurde, on en déduit que $\deg(P) \leqslant 1$, et comme on a exclu les polynômes constant, on en déduit $\deg(P) = 1$. □

3– Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(P) = n$. En notant $Q_i = (X - \alpha_i)$ dans le résultat de la question **1**–, et en remarquant qu'alors Q_i est irréductible par le résultat de la question **2**–, on obtient le théorème énoncé. □

4– Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, avec $\deg(P) = n$. On peut voir P comme un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et lui appliquer le résultat précédent. On obtient alors :

$$\exists! \alpha \in \mathbb{C}^*, (Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathbb{C}[X]^n\ /\ P = \alpha \prod_{i=1}^{n} Q_i, \quad \text{avec } \forall i \in [\![1; n]\!],\ Q_i = (X - a_i),\ a_i \in \mathbb{C}$$

Notons que α est le coefficient dominant de P, et que comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a nécessairement $\underline{\alpha \in \mathbb{R}^*}$
Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Si $a_i \in \mathbb{R}$, alors $Q_i \in \mathbb{R}[X]$ et y est irréductible. Il nous reste à traiter le cas des $a_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$, avec $p_k \in \mathbb{R}$. Soit $a_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine de P. On a alors $P(a_i) = 0$ et

$$\begin{aligned}
\overline{P(a_i)} &= \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k a_i^k} &&= \sum_{k=0}^{n} \overline{p_k a_i^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\overline{p_k}}_{\in \mathbb{R}}\, \overline{a_i}^k &&= \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{a_i}^k \\
& &&= P(\overline{a_i})
\end{aligned}$$

Or $\overline{P(a_i)} = \overline{0} = 0$, donc $P(\overline{a_i}) = 0$. Comme $a_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\overline{a_i} \neq a_i$, mais $\exists j \in [\![1; n]\!]\ /\ a_j = \overline{a_i}$ (puisque c'est une racine, c'est une de celle que l'on a précédemment nommé). On va donc séparer notre polynôme en deux types de termes : ceux réels (qui sont déjà irréductibles), et ceux complexe, où l'on peut grouper deux à deux les racines conjuguées :

$$P = \lambda \prod_{\substack{a_i \in \mathbb{R} \\ P(a_i)=0}} (X - a_i) \prod_{\substack{a_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \\ P(a_i)=0}} (X - a_i)(X - \overline{a_i})$$

Notons que les termes $(X-a_i)(X-\overline{a_i})$ peuvent s'écrire $(X^2-(a_i+\overline{a_i})X+a_i\overline{a_i}) = X^2-2\Re(a_i)X+|a_i|^2$ qui est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, d'une part, et irréductible car sans racines réelles (puisqu'elles sont

dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). D'où :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^*, (Q_1, \dots, Q_m) \in \mathbb{R}[X]^m \ / \ P = \alpha \prod_{i=1}^{m} Q_i, \ \text{ avec } \forall i \in [\![1; m]\!], \ Q_i \text{ irréductible dans } \mathbb{R}[X]$$

Avec les résultats d'unicité (à l'ordre des facteurs près) annoncé évidents. □

Exercice VII-21. *Décomposition en produits de facteurs irréductibles*
Décomposer les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ (éventuellement en passant par $\mathbb{C}[X]$) :

1– $X^4 - 1$
2– $X^5 - 1$
3– $(X^2 - 2X + 1)^2 - 1$
4– $X^4 + X^2 + 1$
5– $X^4 + X^2 - 6$
6– $X^8 + X^4 + 1$
7– $X^{2n+1} - 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
8– $X^{2n} - 2\cos(\alpha n)X^n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0; \pi[$.

. . . . . .

Corrigé :

1– $(-1 + X)(1 + X)(1 + X^2)$ en partant de $(X^4 - 1) = (X^2)^2 - 1^2$ par exemple...

2– $-\frac{1}{4}(-1 + X)(-2 + (-1 + \sqrt{5})X - 2X^2)(2 + (1 + \sqrt{5})X + 2X^2)$ en décomposant en produit de $X - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{5}}$, puis regroupant les termes conjugués.

3– $X(-2 + X)(2 - 2X + X^2)$, en commençant par $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

4– $(1 - X + X^2)(1 + X + X^2)$, on peut commencer par chercher toutes les racines en posant $Y = X^2$ et en résolvant.

5– $(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(3 + X^2)$, idem, ou une autre méthode.

6– $-(-1 + \sqrt{3}X - X^2)(1 - X + X^2)(1 + X + X^2)(1 + \sqrt{3}X + X^2)$, pareil, mais en posant $Y = X^4$. Ou en étant malin.

7– $(X - 1)\prod_{k=1}^{n}(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1)$, il ne faut pas se perdre dans les calculs, faire un dessin peut aider.

8– $\prod_{k=0}^{n-1}(X^2 - 2\cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right)X + 1)$ en remarquant que $X^{2n} - 2\cos(\alpha n)X^n + 1 = (X^n - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha})(X^n + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha})$, puis en décomposant chaque part, et en regroupant correctement les termes.

□

VIII – Exercices

Exercice VIII-22. Soit P un polynôme complexe, non-constant. Existe-t'il $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P - \lambda$ soit un polynôme scindé à racines simples ?

. . . . . .

Corrigé : P est non-constant, donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $P - \lambda$ est non-nul, non-constant, donc scindé (puisque polynôme complexe). Il s'agit donc de trouver λ tel que les racines de $P - \lambda$ soit simple.
Les racines doubles de ce polynôme sont les complexes z tel que $(P - \lambda)(z) = 0$ et $(P - \lambda)'(z) = P'(z) = 0$. Soit alors $z_0, \dots, z_p$ les racines de P' ; si on prend $\lambda \neq P(z_i) \forall i \in [\![0; p]\!]$, alors $(P - \lambda)(z_i) \neq 0 \forall i \in [\![0; p]\!]$ et si $(P - \lambda)'(z) = 0$, alors $P'(z) = 0$ et donc $z = z_i$, et donc z n'est pas racine de $P - \lambda$. Donc, avec un λ ainsi choisi, les racines de $(P - \lambda)$ sont simples. □

Exercice VIII-23. *Les polynômes dérivés de polynômes scindés sont scindés*

1– Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable, dont on suppose qu'elle s'annule au moins $n \geqslant 2$ fois. Montrer que f' s'annule au moins $n - 1$ fois.

2– Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples, de degré $n \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé

3– En déduire que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, P scindé $\implies$ P' scindé sur $\mathbb{R}$ ou constant.

4– Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $X^{10} + aX^9 + bX^8 + cX^6 + X + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

. . . . . .

Corrigé :

1– Appelons $\{x_1, \dots, x_n\}$ une liste de n zéros de f, rangé par ordre croissant. f étant continue et dérivable sur chaque interval $[x_i; x_{i+1}]$, $i \in [\![1; n-1]\!]$, on peut appliquer le théorème de Rolle sur chacun de ces intervalles (car $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$), et trouver :

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \exists y_i \in]x_i; x_{i+1}[\ /\ f'(y_i) = 0$$

On a donc bien (au moins) $n-1$ valeurs distinctes pour lesquelles f' s'annule. □

2– P est scindé à racine simple, et de degré n, il a donc exactement n racines, distinctes. Sa fonction polynômiale associée, $\tilde{P}$, à donc n zéros, et est dans les hypothèses de la question **1-**. On en déduit que $\tilde{P}'$ possède $n-1$ zéros, et donc que P' possèdes $n-1$ racines distinctes. Or, c'est un polynôme de degré $n-1$; il est donc nécessairement scindé à racines simples. □

3– Soit P un polynôme de degré n, scindé. Si $n < 2$, P' est constant. Si $n \geqslant 2$, soit $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ les racines de P, d'ordre de multiplicité respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. On a notamment, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$. De plus, les $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ sont racine de P', de multiplicités respectives $\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_p - 1$ (avec « multiplicité 0 » si a_i n'est que racine simple de P, et donc pas racine de P').
En utilisant de nouveau la question **1-**, on peut assurer l'existence d'au moins $p-1$ **autres** racines de P', et en comptant le nombre de racines (avec leurs ordres de multiplicité) aux total :

$$\underbrace{p-1}_{\text{par } \mathbf{1\text{-}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - 1)}_{\text{racines multiples de } P} = p - 1 + n - p = n - 1$$

Or, P est de degré $n-1$, et on vient de compter $n-1$ racines avec leurs ordres de multiplicité. Donc P' est scindé. □

4– Si ce polynôme était scindé, alors P' et P'' le serait également, avec notamment 0 racine multiple de P''. Or, si 0 est racine de P'' et P'' est scindé, d'après l'étude qui précéde, 0 devrait être racine de P, ce qui n'est pas le cas. Par l'absurde, on en déduit que P n'est pas scindé. □

Exercice VIII-24. À quelle condition sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ a-t'on $(X^2+2) \mid (X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2)$?

. . . . . .

Corrigé : Effectuons la division euclidienne de $(X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2)$ par (X^2+2)

	X^4	+	X^3	+	λX^2	+	μX	+	2	X^2	+	2
−	$(X^4$			+	$2X^2)$					X^2		
			X^3	+	$(\lambda-2)X^2$	+	μX	+	2			
		−	$(X^3$			+	$2X)$				$+X$	
					$(\lambda-2)X^2$	+	$(\mu-2)X$	+	2			
				−	$((\lambda-2)X^2$			+	$2(\lambda-2))$			$+\lambda-2$
							$(\mu-2)X$	+	$6-2\lambda$	X^2	$+X$	$+\lambda-2$

La condition que l'on cherche revient à ce que le reste soit nul, ce qui n'est le cas que pour $\mu = 2$ et $\lambda = 3$. □

Exercice VIII-25. Montrer que :

1– $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1$

2– $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X-1)^3 | nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$

3– $\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3,\ X^2 + X + 1 | X^{3q+2} + X^{3p+1} + X^{3n}$

.....

Corrigé :

1– On peut développer, puis factoriser, $(X+1)^n - nX - 1$ sous la forme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - nX - 1 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} X^{k+2} = \left(\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} X^k \right) X^2$$

Et on a directement le résultat voulu □

Note : On peut aussi constater que 0 est racine du polynôme $(X+1)^n - nX - 1$ et de son polynôme dérivé : $n(X+1)^{n-1} - n$. C'est donc une racine double, et on a la même conclusion.

2– Posons $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$, on a alors successivement :

$$\begin{array}{lcllcl} P(1) & = & n1^{n+2} - (n+2)1^{n+1} + (n+2)1 - n & = & n - (n+2) + (n+2) - n & = & 0 \\ P' & = & n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2) & & & & \\ P'(1) & = & n(n+2)1^{n+1} - (n+2)(n+1)1^n + (n+2) & = & (n+2)(n-(n+1)+1) & = & 0 \\ P'' & = & n(n+2)(n+1)X^n - (n+2)(n+1)nX^{n-1} & & & & \\ P''(1) & = & n(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n & = & 0 & & \end{array}$$

Donc, 1 est racine de multiplicité au moins 3 de P, et donc $(X-1)^3 | P$ □

3– Les racines de $X^2 + X + 1$ sont $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $\bar{j} = j^2 = \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Or , $\forall (n,p,q) \in \mathbb{N}^3$:

$$\begin{array}{lll} j^{3q+2} = j^{3q} j^2 = j^2 & \text{et} & \bar{j}^{3q+1} = \bar{j}^2 \\ j^{3p+1} = j^{3p} j = j & \text{et} & \bar{j}^{3p+1} = \bar{j} \\ j^{3n} = 1 & \text{et} & \bar{j}^{3n} = 1 \end{array}$$

Comme $1 + j + j^2 = 1 + \bar{j} + \bar{j}^2 = 0$, on en déduit que j et $\bar{j}$ sont également racines de $X^{3q+2} + X^{3p+1} + X^{3n}$, et ce pour tout (n,p,q) triplet d'entiers naturels. On a alors la relation de divisibilité recherchée. □

Exercice VIII-26. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :

1– $P(X^2) = P(X)P(X-1)$

2– $P(X^2) = P(X)P(X+1)$

.....

Corrigé :

1– Remarquons déjà que $P = 0$ est une solution. Soit maintenant P une solution non-nulle. Alors si a est racine complexe de P, on a d'une part, a^2 également racine de P, et d'autre part, puisque $a+1$ est racine de $P(X-1)$, alors $(a+1)^2$ est aussi une racine de P. Alors notamment :

a) soit $a = 0$ ou $a = 1$, alors $(0+1)^2 = 1$ est racine, puis $(1+1)^2 = 4$, etc..., et P a une infinité de racines, ce qui est absurde.

b) soit la suite des a^{2^n} prend uniquement un nombre fini de valeurs, ce qui revient à dire que a est une racine de l'unité (c'est-à-dire, $\exists p \in \mathbb{N}\ /\ a^p = 1$)et $a+1$ également, ce qui nous donne $a = j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ ou $a = j^2 = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}$.

De plus, le polynôme P étant à coefficients réels, les racines j et $j^2 = \bar{j}$ ont forcément même ordre de multiplicité, et on en déduit que :

$$P = \lambda(X^2 + X + 1)^n,\ \ n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$$

En ré-injectant dans l'équation, on déduit de plus que $\lambda = 1$, et on vérifie en même temps que l'ensemble des solutions est bien :

$$\{P = (X^2 + X + 1)^n,\ \ n \in \mathbb{N}\}$$

2– Remarquons déjà que $P = 0$ est une solution. Soit maintenant P une solution non-nulle. Alors si a est racine complexe de P, on a $P(a^2) = P(a)P(a+1) = 0$ et donc a^2 est également racine de P. De même, on déduit que $a^4,\ a^8, \dots$ et tous les $a^{2^n},\ n \in \mathbb{N}$ sont racine de P. Or P est non-nul, donc cela veut dire que :

a) soit $a = 0$, et alors tous les a^{2^n} valent également 0

b) soit la suite des a^{2^n} prend uniquement un nombre fini de valeurs, ce qui revient à dire que a est une racine de l'unité (c'est-à-dire, $\exists p \in \mathbb{N}\ /\ a^p = 1$)

De plus, si a est racine de P, on en déduit que $(a-1)$ est une racine de $P(X+1)$, et donc que $(a-1)^2$ est une racine de P. Et on peut appliquer le même raisonnement que juste au dessus à $a-1$, et l'on trouve que soit $a-1=0$, donc $a=1$, soit $a-1$ est également une racine de l'unité. Enfin, si $a \neq 0$, on a $|a| = |a-1| = 1$, donc $a = -j$ ou $a = -j^2$, avec j racine troisième de l'unité.
Les racines possibles de P sont donc $0, 1, -j, -j^2$, avec $-j$ et $-j^2$ de même multiplicité, et l'on en déduit qu'on peut écrire P sous la forme :

$$P = \lambda X^\alpha (X-1)^\beta (X^2 - X + 1)^\delta,\ \ (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{N}^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

On peut injecter ce résultat dans l'équation de départ, et constater que P est solution si et seulement si $\alpha = \beta$, $\lambda = 1$, et $\delta = 0$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\{P = X^\alpha (X-1)^\alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{N}\}$$

□

Exercice VIII-27. *Polynômes de* Lagrange
Soit $(a_i)_{i \in [\![0;n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}$ une famille d'éléments deux-à-deux distincts ($i \neq j \implies a_i \neq a_j$). Pour $i \in [\![0;n]\!]$, on pose :

$$L_i \overset{\text{def}}{=} \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - a_j) \frac{1}{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}$$

1– Calculer $L_i(a_j)$ pour $i \neq j$, avec $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2$

2– Calculer $L_i(a_i)$ pour $i \in [\![0;n]\!]$

3– Quel est le degré de L_i ?

4– Montrer que $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \deg(P) \leqslant n \implies P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$

5– **Application :** donner un polynôme P tel que : $P(0) = 1$, $P(1) = 6$, $P(2) = 4$, $P(-1) = 2$, et $P(-2) = -1$.

. . . . . .

Corrigé :

1– Soit $i \neq j$, avec $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2$

$$L_i(a_j) = \prod_{\substack{0 \leqslant j' \leqslant n \\ j' \neq i}} (a_j - a_{j'}) \frac{1}{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j' \leqslant n \\ j' \neq i}} (a_i - a_{j'})}$$

Puisque $j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\}$ et que le produit parcours les $j' \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\}$, alors l'un des termes du produit est $(a_j - a_j = 0$. Le produit contient donc un terme nul, et donc est nul lui-même, d'où :

$$L_i(a_j) = 0$$

2– On injecte directement a_i dans la définition, et les deux termes de la fraction se simplifient.

$$L_i(a_i) = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j) \frac{1}{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)} = 1$$

On en déduit donc que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ pour tout i et j.

3– L_i est un produit de n termes de la forme $(X - a_j)$ (il y en a $n+1$ entre 0 et n, et on enlève le terme $j = i$). C'est donc un polynôme de degré n. □

4– Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré $\leqslant n$. Comme les L_i sont également des polynômes de degré n, on en déduit que $Q \stackrel{\text{def}}{=} P - \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$ est également un polynôme de degré au plus n. De plus, pour tout $j \in [\![0; n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} Q(a_j) &= P(a_j) - \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(a_j) \\ \left(P - \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i\right)(a_j) &= P(a_j) - \sum_{i=0}^{n} P(a_i)\delta_{i,j} \\ &= P(a_j) - P(a_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que Q est un polynôme de degré au plus n, avec $n+1$ racines, c'est donc le polynôme nul. On en déduit que $P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i$. □

5– Posons $a_0 = -2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$. On peut alors donner les polynômes L_i suivant :

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(X+1)X(X-1)(X-2)}{(-2-(-1))(-2-0)(-2-1)(-2-2)} &&= \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} - \frac{X^2}{24} + \frac{X}{12} \\ L_1 &= \frac{(X+2)X(X-1)(X-2)}{(-1-(-2))(-1-0)(-1-1)(-1-2)} &&= -\frac{X^4}{6} + \frac{X^3}{6} + \frac{2X^2}{3} - \frac{2X}{3} \\ L_2 &= \frac{(X+2)(X+1)(X-1)(X-2)}{(0-(-2))(0-(-1))(0-1)(0-2)} &&= \frac{X^4}{4} - \frac{5X^2}{4} + 1 \\ L_3 &= \frac{(X+2)(X+1)X(X-2)}{(1-(-2))(1-(-1))(1-0)(1-2)} &&= -\frac{X^4}{6} - \frac{X^3}{6} + \frac{2X^2}{3} + \frac{2X}{3} \\ L_4 &= \frac{(X+2)(X+1)X(X-2)}{(2-(-2))(2-(-1))(2-0)(2-1)} &&= \frac{X^4}{24} + \frac{X^3}{12} - \frac{X^2}{24} - \frac{X}{12} \end{aligned}$$

Comme on peut $P(a_0) = -1$, $P(a_1) = 2$, $P(a_2) = 1$, $P(a_3) = 6$, $P(a_4) = 4$, il nous suffit d'injecter ces valeurs dans la formule trouvée de la question précédente :

$$P = \sum_{i=0}^{4} P(a_i)L_i = -L_0 + 2L_1 + L_2 + 6L_3 + 4L_4$$

Ce qui se simplifie en :

$$P = \frac{1}{24}\left(-23X^4 - 6X^3 + 95X^2 + 54X + 24\right)$$
