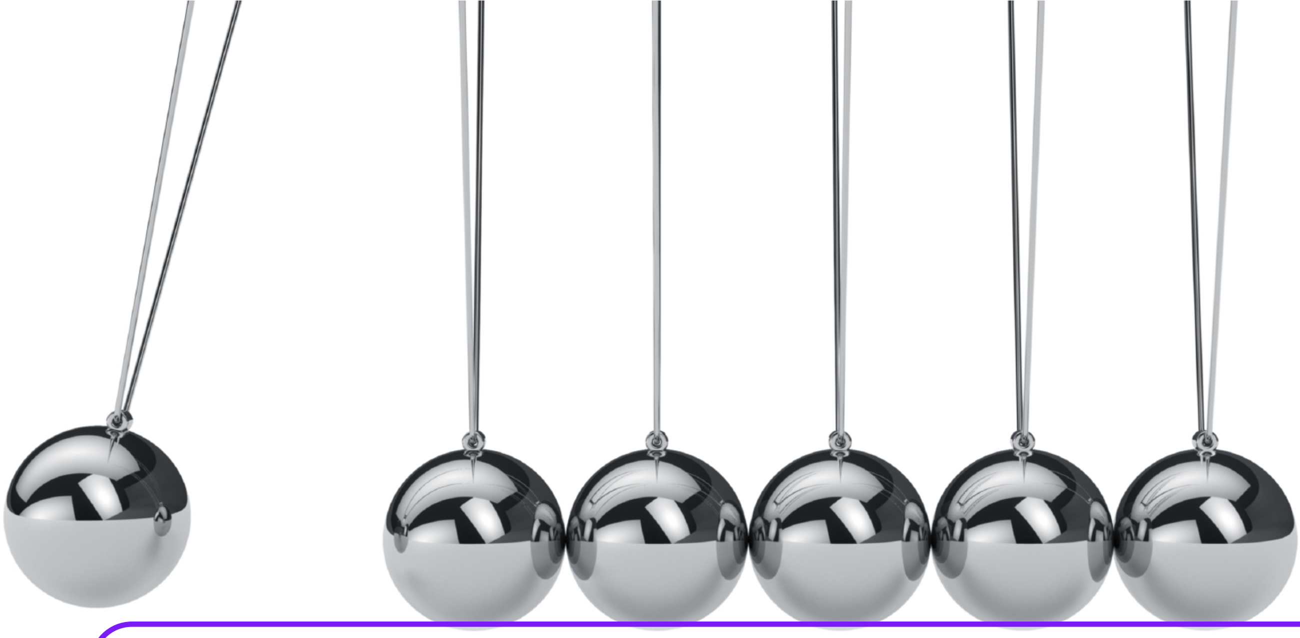

1. Oscillateurs mécaniques

1.1 Exercices d'application

1.1.1 Oscillateur lâché avec vitesse initiale

On considère un mobile M de masse m lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, comme présenté sur la figure 1.1. Le mobile est lancé avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\ \overrightarrow{u_x}$ avec $v_0 > 0$ depuis sa position d'équilibre, sur une glissière parfaite (il n'y a pas de frottements). Déterminer la loi d'évolution de la position $x(t)$ du mobile. On précisera le choix de l'origine O de l'axe x.

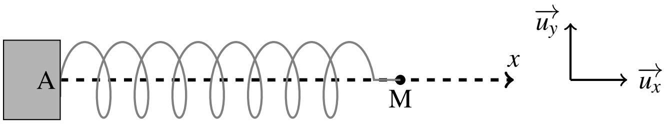

FIGURE 1.1 – Système étudié

1.1.2 Approche énergétique de l'oscillateur élastique

Nous étudions un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Une masse m y est attachée et le tout se déplace horizontalement sans frottement (même situation que celle du cours). On repère la position de la masse par son abscisse $x(t)$.

1. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système ? Justifier la réponse.
2. Donner l'expression de l'énergie cinétique du système en fonction de $\dot{x}$.
3. Donner maintenant l'expression de l'énergie potentielle élastique du système en fonction de x.
4. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système puis de sa dérivée temporelle $\frac{d\mathscr{E}_m}{dt}$. D'après la question 1, que vaut cette grandeur ?
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

1.1.3 Saut à l'élastique

On cherche ici à décrire de manière simplifiée ce qui se passe lors d'un saut à l'élastique quand l'élastique se tend. On effectuera les hypothèses simplificatrices suivantes :

— l'élastique est assimilé à un ressort de raideur k, de masse nulle et de longueur à vide l_0 correspondant à une côte z_0 ;

— le sauteur est assimilé à une masse ponctuelle M de masse m située à l'altitude $z(t)$.

On se référera pour les notations à la figure 1.2.

1. Dans cette première partie de l'exercice, on néglige tout type de frottement.
   (a) Appliquer la loi fondamentale de la dynamique au système étudié et la projeter sur $\overrightarrow{u_z}$ pour en déduire l'équation du mouvement en fonction de $z(t)$.

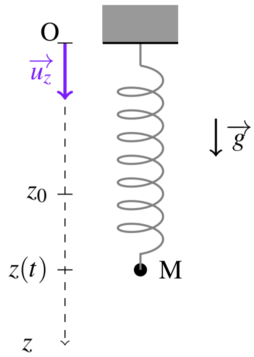

FIGURE 1.2 – Saut à l'élastique

(b) Récrire l'équation précédente en introduisant une pulsation caractéristique $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

(c) On considère les conditions initiales suivantes.

$$z(t=0) = z_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{z}(t=0) = 0\,. \tag{1.1}$$

Résoudre l'équation précédente pour déterminer l'expression de $z(t)$.

(d) Représenter graphiquement $z(t)$ en faisant apparaître son amplitude et sa période.

(e) La description du saut à l'élastique ainsi réalisée est-elle satisfaisante ? Pourquoi ?

2. On considère maintenant que l'air exerce sur le sauteur une force de frottement de type Stokes, caractérisée par un coefficient de frottement $\alpha = 2.10^{-4}\ N.s.m^{-1}$.
   (a) Appliquer la loi fondamentale de la dynamique au système afin de déduire la nouvelle équation du mouvement.
   (b) On suppose que le sauteur a une masse $m = 70\ kg$ et une longueur à vide de 50 mètres. Quelle doit être la condition sur k pour pouvoir observer des oscillations ?
   (c) En supposant la condition précédente vérifiée, résoudre l'équation du mouvement avec les mêmes conditions initiales que précédemment.
   (d) On suppose de plus que $z(t)$ ne doit pas dépasser 100 mètres, au risque de mettre en danger la vie du sauteur. Quelle condition sur k cela implique-t-il ?

1.1.4 Système de suspension d'une voiture

On s'intéresse au mouvement de translation vertical d'une voiture vide de masse m. L'origine de l'axe vertical ascendant Oz repère la position du centre de masse de la voiture dans la situation où celle-ci est en équilibre, immobile. La suspension du véhicule peut être modélisée par un ressort de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce une force de frottement de type $\vec{f} = -\alpha\frac{dl}{dt}\,\vec{u_z}$ où l est la longueur du ressort considéré. La situation est présentée en figure 1.3.

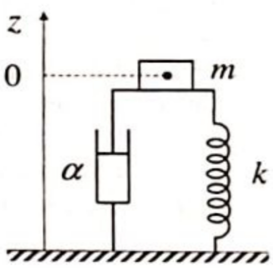

FIGURE 1.3 – Système de suspension d'une voiture

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
2. Déterminer la valeur du coefficient α en fonction de m et k pour que le régime d'amortissement des oscillations soit critique lorsque la voiture est vide.
3. La voiture contient maintenant des passagers dont la masse totale est m_p. Quel est alors le régime d'amortissement ?
4. Pour que la voiture soit confortable, on souhaite une pseudo-période $t = 1$ s adaptée à l'organisme humain. Quelle raideur k doit avoir le ressort si $m = 1500\ kg$ et $m_p = 300\ kg$?

1.1.5 Étude d'une résonance mécanique

On considère un mobile M de masse m se déplaçant suivant un axe horizontal Ox. Il est soumis à l'action d'un ressort fixé au point A, de raideur k et de longueur à vide négligeable (on aura toujours $l \gg l_0$), ainsi qu'à celle d'un amortisseur fluide fixé au point mobile B, avec $x_B = b_0 + b\cos(\omega t)$, comme présenté en figure 1.4. Cet amortisseur exerce sur le mobile une force de frottement donnée par :

$$\overrightarrow{f} = -h\,(\dot{x} - \dot{x}_B)\,\overrightarrow{u_x}\ . \tag{1.2}$$

où h est une constante caractéristique de l'amortisseur. On utilisera pour résoudre la notation complexe. On notera $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$ la position du mobile.

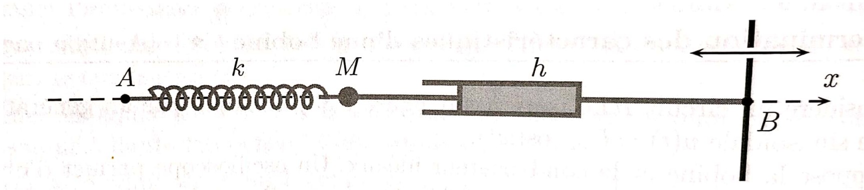

FIGURE 1.4 – Étude d'une résonance mécanique

1. Appliquer la loi fondamentale de la dynamique au mobile M et en déduire l'équation différentielle du mouvement. On introduira une pulsation caractéristique ω_0 et le facteur de qualité Q dont on précisera les expressions.
2. En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{x_m}$ des oscillations.
3. Calculer l'amplitude x_m des oscillations ainsi que leur phase à l'origine φ.
4. Peut-il y avoir résonance du système ?

1.2 Exercices de réflexion

1.2.1 Mobile lié à deux ressorts

Un ressort est fixé à deux murs opposés par deux ressorts de raideurs respectives k_1 et k_2 et de longueurs à vide $l_{0,1}$ et $l_{0,2}$, comme présenté en figure 1.5. Les points de fixation sont placés aux abscisses $x = 0$ et $x = L$, tel que présenté en figure 1.5. On néglige dans cet exercice tout phénomène de frottement.

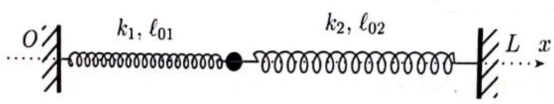

FIGURE 1.5 – Mobile relié à deux ressorts

1. À priori, les ressorts ont, à la situation d'équilibre, des longueurs différentes de leurs longueurs à vide. Déterminer la valeur de x à l'équilibre.
2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ du mobile M en prenant l'origine O à la position d'équilibre de celui-ci.
3. En déduire la fréquence des oscillations observées.
4. En écrivant la force totale exercée par les deux ressorts sur le mobile M, prouver que l'association des deux ressorts est équivalente à un ressort unique dont on précisera les caractéristiques (longueur à vide et raideur).
5. Utiliser la réponse à la question précédente pour retrouver le résultat de la question 3.

1.2.2 Mise en résonance d'un pont

Nous nous intéresserons dans cet exercice à la description d'un pont londonien, le *Millenium Bridge*, qui s'est fait particulièrement remarquer lors de son inauguration en raison de l'apparition d'un mouvement de balancier de la passerelle lors du passage des piétons. Ce phénomène entraîna la fermeture du pont seulement deux jours après son inauguration. L'idée de cet exercice est de modéliser le pont par un oscillateur mécanique, afin de comprendre le phénomène physique mis en jeu et de trouver un moyen de le contrer.

On modélise donc le pont par un oscillateur amorti constitué d'une masse m qu'on assimile à un point matériel G dont la position est repérée par la position x dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}$ lié au sol. L'origine O se situe au niveau du sol, et l'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, ainsi que par un amortisseur de coefficient de frottement fluide α, exerçant sur m une force $\overrightarrow{F}_f = -\alpha \frac{dx}{dt}\, \overrightarrow{u_x}$, avec $\alpha > 0$. On note $l(t) = OG$ la longueur du ressort à l'instant t. L'ensemble est soumis à l'accélération g de la pesanteur avec $g = 9,81 m.s^{-2}$. On représente le dispositif en figure 1.6.

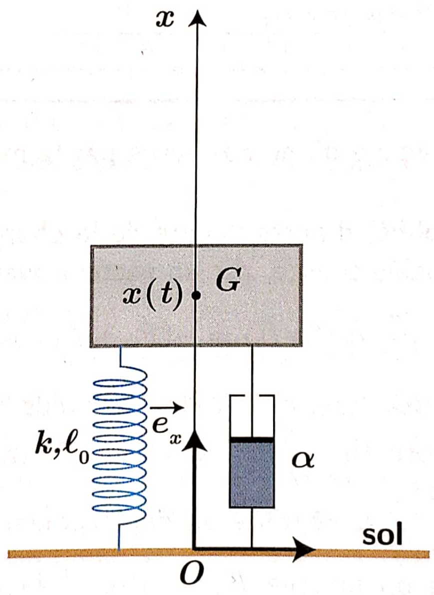

FIGURE 1.6 – Modélisation du pont par un oscillateur amorti

1. En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, établir l'équation :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0 \tag{1.3}$$

   dans laquelle on a $X(t) = x(t) - x_{eq}$ où x_{eq} est une constante que l'on exprimera en fonction de g, ω_0 et l_0. On précisera les expressions et significations de ω_0 et Q.
2. Le système est mis en vibration avec les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = X_0 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dX}{dt}(t=0) = V_0 \neq 0. \tag{1.4}$$

   Déterminer l'expression de $X(t)$ (en fonction de ω_0, X_0, V_0, t et éventuellement Q) pour les cas :
   (a) $Q \to \infty$,
   (b) $Q > \frac{1}{2}$,
   et commenter les résultats obtenus.
3. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle à la vitesse que l'on écrit $\overrightarrow{F}_v = \beta \frac{dX}{dt}\, \overrightarrow{u_x}$ avec $\beta > 0$. Quelle peut être la conséquence de ce phénomène ?

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu avec le sol. Il en résulte que le piéton exerce une force sur le sol, comme présenté sur la figure 1.7.

D'après l e graphique précédent et en appliquant un modèle simplifié, on peut écrire la force exercée par le piéton sur le pont comme :

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_0 + \overrightarrow{F}_1 \cos(2\pi f t) = -(F_0 + F_1 \cos(2\pi f t))\, \overrightarrow{u_x}. \tag{1.5}$$

La force $\overrightarrow{F}_0$ ne dépend pas du temps et correspond au poids du piéton , tandis que $\overrightarrow{F}_1$ représente l'action due à la marche. La fréquence f correspond à celle d'une marche normale. On prendra dans la suite du problème $F_1 = 0,4 F_0$.

4. Que devient l'équation différentielle caractéristique de l'oscillateur sous l'effet du forçage créé par le piéton ? On écrira l'équation en fonction de la variable x.
5. Récrire cette équation en introduisant la variable :

$$Y(t) = X(t) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}\ . \tag{1.6}$$

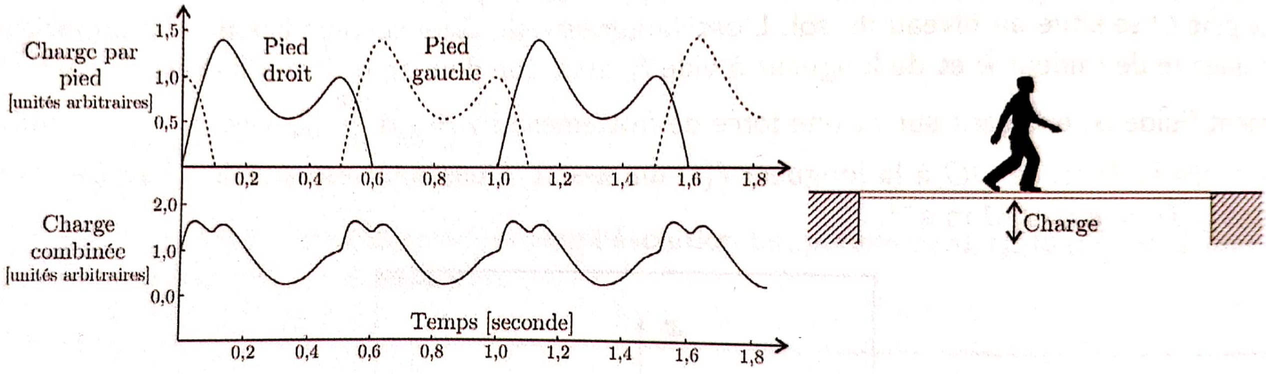

FIGURE 1.7 – Forçage d'une passerelle par le passage d'un piéton

On associe à $Y(t)$ la grandeur complexe $\underline{Y} = \underline{Y_m} e^{j\omega t}$ et à F_1 la grandeur complexe $\underline{F_1} = F_1 e^{j\omega t}$. On introduit ensuite l'excitation $\underline{E} = \underline{F_1}/m$. On notera $\underline{H}$ le rapport $\frac{\underline{Y}}{\underline{E}}$ appelé *fonction de transfert*.

6. Exprimer $\underline{H}$ en fonction de Q, ω_0 et $z = \frac{\omega}{\omega_0}$.
7. Montrer qu'un phénomène de résonance peut se produire sous une condition sur Q qu'il faudra établir. Pour quelle pulsation, notée ω_r, observe-t-on ce phénomène ?
8. Exprimer $|H|(\omega_r)$, gain de la fonction de transfert à la résonance, dans la limite $Q \gg 1$.
9. Comment peut-on expliquer le problème du Millenium Bridge ?