I – Relations de comparaison O, o, $\sim$

Exercice I-1. Parmi les suites suivantes, dire lesquelles sont dominées par/sont négligeables devant/sont équivalentes à quelles autre :

1– $u_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$

2– $v_n = n^2 \mathrm{e}^{-n}$

3– $w_n = 3n^3 + \dfrac{1}{2n}$

4– $x_n = \ln(n) + \ln(2n)$

5– $y_n = n^2 \ln(2n)$

6– $z_n = \dfrac{1}{n}$

Corrigé : On peut commencer par classer les suites selon leur limite, pour éviter de devoir toutes les comparer. Les suites de terme u_n et z_n tendent vers 0, et les suites de termes w_n, x_n et y_n tendent vers $+\infty$, de manière évidente. v_n est un peu plus compliquée, mais on a vu dans la partie **1.c)** qu'une exponentielle dominait toujours une polynomiale : on a donc $v_n \to 0$. Ensuite, il s'agit de comparer ces suites de manière intelligente, afin de faire le moins de calculs possible. Intuitivement, v_n va décroître très vite (à cause de l'exponentielle), et u_n va décroître plus vite que z_n. Confirmons cela :

– On a $\dfrac{v_n}{u_n} = (n^4+n^3+n^2)\mathrm{e}^{-n} = n^4\mathrm{e}^{-n} + n^3\mathrm{e}^{-n} + n^2\mathrm{e}^{-n}$. Chacun de ces termes tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, par domination de l'exponentielle sur les polynômes. Donc $\dfrac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on a $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.

– On a $\dfrac{u_n}{z_n} = \dfrac{1}{n^3+n^2+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(z_n)$.

Notamment, chacun des $o(\cdot)$ ci-dessus implique également un $\mathcal{O}(\cdot)$ Il nous reste à « ranger » w_n, x_n, et y_n. Intuitivement, x_n est du logarithmique (croissance très lente), y_n est « un peu plus » que polynômiale d'ordre 2, mais « moins » que polynômiale d'ordre 3, et w_n est polynômiale d'ordre 3 plus un terme qui ne va pas compter. On va confirmer ça par le calcul :

– $\dfrac{y_n}{w_n} = \dfrac{n^2\ln(n)}{3n^3+\frac{1}{2n}} = \dfrac{\ln(n)+\ln(2)}{3n+\frac{1}{2n^3}}$.

On a de manière évidente (voir **Remarque 7.**) $\ln(n)+\ln(2) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$ et $3n + \dfrac{1}{2n^3} \underset{n\to\infty}{\sim} 3n$, et comme l'équivalence est compatible avec la multiplication (et donc, la division) :

$$\frac{y_n}{w_n} = \frac{\ln(n)+\ln(2)}{3n+\frac{1}{2n^3}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{3}\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\dfrac{y_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

Remarque. Le procédé que je viens d'utiliser – trouver des équivalents simples pour enlever des termes dans une somme) – est très fréquent. Il repose entièrement sur la **Remarque 7.** et par la suite je le noterai de la manière suivante :

$$\frac{n^2\ln(n)}{3n^3+\frac{1}{2n}} = \frac{\ln(n)+\ln(2)}{3n+\frac{1}{2n^3}} = \frac{\ln(n)+\overbrace{\cancel{\ln(2)}}^{\mathcal{O}(\cdot)}}{3n+\underbrace{\cancel{\dfrac{1}{2n^3}}}_{\mathcal{O}(\cdot)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{3}\frac{\ln(n)}{n}$$

Parfois même, sans mentionner le $o(\cdot)$ s'il alourdit trop la notation. Notez bien que l'on passe d'une **égalité** ($=$) à une **équivalence** ($\sim$) : certaines propriétés seront perdues (stabilité par la somme, par exemple !). Cependant, comme on étudie la limite, qui elle est conservée, ce n'est pas un problème ici. Mais il faut être vigilent !

– Enfin, comparons x_n et y_n :

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\ln(n)+\ln(2n)}{n^2\ln(2n)} = \frac{\ln(n)}{n^2\ln(2n)} + \frac{1}{n^2}$$

Le deuxième terme de la somme tend évidemment vers 0, montrons que c'est le cas du premier aussi :

$$\frac{\ln(n)}{n^2\ln(2n)} = \frac{1}{n^2}\frac{\ln(n)}{\ln(n)+\underbrace{\cancel{\ln(2)}}_{\mathcal{O}(\cdot)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\frac{\ln(n)}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a donc $\dfrac{x_n}{y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car somme de deux termes tendant vers 0), et donc $x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(y_n)$.

Enfin, on a évidemment $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o(x_n)$ car la première suite tend vers 0, et la seconde vers $+\infty$. On peut donc, comparer désormais toutes les suites.

Exercice I-2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles non-nulles à partir d'un certain rang.

1– On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(w_n)$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(w_n)$.

2– On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

. . . .

Corrigé :

1– D'après les définitions, on a :

$$\begin{array}{ll} (*) & \exists A\in\mathbb{R}^+ \ /\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N_1 \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant A \\ (**) & \exists B\in\mathbb{R}^+ \ /\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N_2 \implies \left|\dfrac{v_n}{w_n}\right| \leqslant B \end{array}$$

Soit $N_3 = \max(N_1, N_2)$ et $n \geqslant N_3$. Alors

$$\begin{aligned} \left|\frac{u_n}{w_n}\right| &= \left|\frac{u_n}{v_n}\times\frac{v_n}{w_n}\right| \\ &= \left|\frac{u_n}{v_n}\right|\times\left|\frac{v_n}{w_n}\right| \\ &\leqslant AB \text{ car } n\geqslant N_1 \text{ et } n\geqslant N_2 \end{aligned}$$

Donc, si l'on pose $C = AB$, on a $\exists C\in\mathbb{R}^+ \ /\ \exists N_3\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N_3 \implies \left|\dfrac{u_n}{w_n}\right| \leqslant C$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(w_n)$ $\square$

2– D'après les définitions, on a :

$$\begin{array}{ll} (*) & \forall\varepsilon>0,\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N_1 \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| < \varepsilon \\ (**) & \forall\varepsilon>0,\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N_2 \implies \left|\dfrac{v_n}{w_n}\right| < \varepsilon \end{array}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $N_3 = \max(N_1, N_2)$ et $n \geqslant N_3$. Alors

$$\begin{aligned} \left|\frac{u_n}{w_n}\right| &= \left|\frac{u_n}{v_n}\times\frac{v_n}{w_n}\right| \\ &= \left|\frac{u_n}{v_n}\right|\times\left|\frac{v_n}{w_n}\right| \\ &\leqslant \varepsilon\times\varepsilon \text{ car } n\geqslant N_1 \text{ et } n\geqslant N_2 \end{aligned}$$

Or, $\varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, donc on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_4 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_4 \implies \left|\frac{u_n}{w_n}\right| < \varepsilon$$

et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\,(w_n)$ □

Exercice I-3. Démontrer le **Théorème 3.** :
Théorème. *Résultats d'encadrement*

1– Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée.

2– Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également bornée.

. . . .

Corrigé :

1– D'après les définitions, on a :

$$\begin{array}{ll} (*) & \exists A \in \mathbb{R}^+ \ /\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant A \\ (**) & \exists B \in \mathbb{R}^+ \ /\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \implies |v_n| \leqslant B \end{array}$$

Soit $N_3 = \max(N_1, N_2)$ et $n \geqslant N_3$. Alors

$$\begin{array}{rcl} |u_n| & = & \left|\dfrac{u_n}{v_n} \times v_n\right| \\ & = & \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \times |v_n| \\ & \leqslant & AB \text{ car } n \geqslant N_1 \text{ et } n \geqslant N_2 \end{array}$$

Donc, si l'on pose $C = AB$, on a $\exists C \in \mathbb{R}^+ \ /\ \exists N_3 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_3 \implies |u_n| \leqslant C$, et donc la suite de terme u_n est bornée. □

2– On peut le faire de manière intelligente : si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, et on applique le résultat précédent.
Alternativement, on peut le faire « à la main » : d'après les définitions, on a :

$$\begin{array}{ll} (*) & \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \implies \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon \\ (**) & \exists B \in \mathbb{R}^+ \ /\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_2 \implies |v_n| \leqslant B \end{array}$$

Soit $\varepsilon \in]0;1[$, $N_3 = \max(N_1, N_2)$ et $n \geqslant N_3$. Alors

$$\begin{array}{rcl} |u_n| & = & \left|\dfrac{u_n}{v_n} \times v_n\right| \\ & = & \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \times |v_n| \\ & \leqslant & (\varepsilon + 1)|v_n| \text{ car } n \geqslant N_1 \\ & \leqslant & 2B \text{ car } n \geqslant N_2 \text{ et } \varepsilon < 1 \end{array}$$

Donc, si l'on pose $C = 2B$, on a $\exists C \in \mathbb{R}^+ \ /\ \exists N_3 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_3 \implies |u_n| \leqslant C$, et donc la suite de terme u_n est bornée. □

Exercice I-4. Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont dominées par/sont négligeables devant/sont équivalentes à quelles autre, en $-\infty$, 0, et $+\infty$:

1– $f : x \mapsto 3x^2 + 2x - 3$

2– $g : x \mapsto x^2 \ln(x) + \ln^2(x)$

3– $h : x \mapsto x^{-4} e^x$

4– $i : x \mapsto (x+1)^{-1} - (x-1)^{-1}$

5– $j : x \mapsto \ln(x^2 + 3x + 1) - \ln^2(2x)$

6– $k : x \mapsto x^3 (\ln x)^{-1}$

. . . .

Corrigé : Comparaison en $-\infty$:
Seules f, h et i sont bien définies au voisinage de $-\infty$. De plus, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} i(x) = 0$$

Donc, on sait déjà que f va largement dominer les deux autres, qui sont les seules qu'il nous reste à comparer. Vu l'exponentielle dans h, on se dit que c'est elle qui sera dominée. Confirmons cela :

$$\begin{aligned} \frac{h(x)}{i(x)} &= \frac{x^2-1}{x^4} e^x \\ &\underset{x\to-\infty}{\sim} x^{-2} e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc on a bien $h(x) \underset{x\to-\infty}{=} o(i(x))$ et $i(x) \underset{x\to-\infty}{=} o(f(x))$, et on déduit les $\mathcal{O}$ également.

Comparaison en 0 :
$k(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$, et sera négligeable devant toutes les autres. $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} -3$, et $i(x) \xrightarrow[x\to0]{} 2$, donc elles se dominent ($\mathcal{O}$) mutuellement (sans être équivalentes), et seront négligeables devant toutes les suivantes, qui tendent vers $\pm\infty$. A première vue, on va avoir, par ordre de « est négligeable devant » : j, g, puis h. Prouvons cela :

$$\begin{aligned} \frac{j(x)}{g(x)} &= \frac{\ln(x^2+3x+1) - \ln^2(2x)}{x^2 \ln(x) + \ln^2(x)} \\ &\underset{x\to0}{\sim} -\frac{\ln^2(2x)}{\ln^2(x)} \xrightarrow[x\to0]{} -\ln^2(2) \\ & \text{ce n'est pas une négligeablilté, comme on pensait, mais une domination.} \\ \frac{g(x)}{h(x)} &= \frac{x^6 \ln(x) + x^4 \ln^2(x)}{e^x} \\ &\underset{x\to0}{\sim} \frac{x^6 \ln(x)}{e^x} \xrightarrow[x\to0]{} 0 \end{aligned}$$

Donc, pour résumer :

$$\begin{array}{llll} k(x) \underset{x\to0}{=} o(g(x)) & k(x) \underset{x\to0}{=} o(f(x)) & i(x) \underset{x\to0}{=} \mathcal{O}(f(x)) & f(x) \underset{x\to0}{=} \mathcal{O}(i(x)) \\ i(x) \underset{x\to0}{=} o(j(x)) & f(x) \underset{x\to0}{=} o(j(x)) & j(x) \underset{x\to0}{=} \mathcal{O}(g(x)) & j(x) \underset{x\to0}{=} \mathcal{O}(g(x)) \\ g(x) \underset{x\to0}{=} o(h(x)) & j(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln^2(2) g(x) & & \end{array}$$

Comparaison en $+\infty$:
Ici, on aura du travail, car seule i tend vers 0 et sera négligeable devant le reste. Toutes les autres fonctions tendent vers $\pm\infty$. Pour se simplifier la vie, on peut passer toutes les fonctions en équivalents en $+\infty$. Je les range déjà « dans l'ordre » pour plus de clarté :

$$j(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \ln^2(2x),\ f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} 3x^2,\ g(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^2 \ln(x),\ k(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^3 \ln^{-1}(x),\ h(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{-4} e^x$$

Une fois ceci écrit, on conclut facilement que on a bien chaque fonction négligeable devant la suivante dans cette liste.

Exercice I-5. *Démonstrations*

1– Démontrer la **Remarque 12.** (uniquement dans le cas $a \in \mathbb{R}$)
Remarque.
– Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(f(x))$.
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ si et seulement si $f(x) - g(x) = \underset{n\to+\infty}{o}(f(x))$.

2– Démontrer le **Théorème 4.** (en s'inspirant de la démonstration du **Théorème 2.**)
Théorème. *Équivalence et compatibilité*
La relation $\underset{x\to a}{\sim}$ est une **relation d'équivalence** (réflexive, symétrique et transitive). De plus, elle est **compatible avec le produit, la division, et les puissances**.

3– Démontrer le **Théorème 5.** (pour le *2–*, uniquement dans le cas ou $l \in \mathbb{R}$)
Théorème. *Résultats d'encadrement et de limites*

a) Si $f(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(g(x))$ et g bornée au voisinage de a, alors f est également bornée au voisinage de a.

b) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$

....

Corrigé :

1– Démonstrations basiques, je donne juste les arguments principaux :
- Si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, elle est bornée (par le ε qu'on prend dans la défintion) au voisinage de 0 (celui qu'on prend dans la définition), de manière évidente.
- Si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$, elle est bornée (par le $\varepsilon + 1$ avec le ε qu'on prend dans la défintion) au voisinage de 0 (celui qu'on prend dans la définition), de manière évidente. Donc $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \implies f(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(g(x))$, et comme $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \implies g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$, on conclut directement avec $g(x) = \underset{x\to a}{\mathcal{O}}(f(x))$.
- Pour le premier, il suffit d'écrire la définition et de multiplier par $g(x)$ des deux côté. Pour le deuxième, il suffit d'utiliser la symétrie.

2–
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$; on a évidemment $0 = \underset{x\to a}{o}(f(x))$ et on conclut par $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.
- $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \implies g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ on est obliger de repasser par la démonstration, mais si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$, alors évidement $\dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $\dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $a(x) \underset{x\to a}{\sim} b(x)$, alors $\dfrac{f(x)a(x)}{g(x)b(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{a(x)}{b(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$, et on a la compatibilité avec le produit. La division, le puissances, ect... découlent de là.

3–
a) Par les définitions :

$$\exists A \geqslant 0, \exists V \in \mathcal{V}(a) \;/\; \forall x \in V,\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant A$$
$$\exists B \geqslant 0, \exists V' \in \mathcal{V}(a) \;/\; \forall x \in V',\ |g(x)| \leqslant B$$

Notons que, par définition, $V''V \cap V' \in \mathcal{V}(a)$, et donc si on pose $C = AB$:

$$\exists C \geqslant 0, \exists V'' \in \mathcal{V}(a) \;/\; \forall x \in V'',\ |f(x)| \leqslant C$$

b) Par les définitions (pour $l \in \mathbb{R}^*$) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a) \;/\; \forall x \in V,\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists V' \in \mathcal{V}(a) \;/\; \forall x \in V',\ |g(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

Notons que, par définition, $V''V \cap V' \in \mathcal{V}(a)$, et donc si on prend $x \in V''$:

$$\begin{array}{rcl} |f(x)-l| & = & |f(x)-g(x)+g(x)-l| \\ & \leqslant & \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right| |g(x)| + |g(x)-l| \\ & < & \varepsilon|g(x)|+\varepsilon \\ & < & \varepsilon(l+\varepsilon+1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \end{array}$$

Ce qui permet de conclure. La démonstration est similaire pour les cas $l = \pm\infty$.

Exercice I-6. Donner un équivalent simple des suites suivantes, et donner leurs limites :

1– $(n+3\ln n)\mathrm{e}^{-n-1}$

2– $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$

3– $\dfrac{2n^3-\ln n+4}{n^2+1}$

4– $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$

5– $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$

6– $\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$

. . . .

Corrigé :

1– On a $(n+\underbrace{\cancel{3\ln n}}_{\mathcal{O}(\cdot)}) \underset{n\to\infty}{\sim} n$, et donc $(n+3\ln n)\mathrm{e}^{-n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{e}n\mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2– On a $n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n$ et $\ln(n^2+1) = \ln(n^2) + \underbrace{\cancel{\ln(1+\frac{1}{n^2})}}_{\mathcal{O}(\cdot)} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n^2) = 2\ln(n)$ (On a un $\mathcal{o}(\cdot)$ car la suite tend vers 0, alors que l'autre terme de la somme tend vers $+\infty$). On conclut :

$$\frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

3– On simplifie : $\dfrac{2n^3-\overbrace{\cancel{\ln n+4}}^{\mathcal{O}(\cdot)}}{n^2+\underbrace{\cancel{1}}_{\mathcal{O}(\cdot)}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2n^3}{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

4– Posons $u_n = \dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$. En réduisant au même dénominateur :

$$u_n = \frac{n+1}{(n-1)(n+1)} - \frac{(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n+1-n+1}{n^2-1} = \frac{2}{n^2-\cancel{1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

5– Posons $v_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$. Alors :

$$v_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

Or, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ (faire le quotient et regarder la limite…), donc $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ 0.

6– Soit $w_n = \sqrt{\ln(n+1)-\ln(n)}$, alors :

$$w_n = \sqrt{\ln\left((\frac{n+1}{n}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Or, $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\mathrm{e}) = 1$, donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. L'équivalence étant compatible avec la multiplication, elle l'est aussi avec les puissances, notamment la puissance $\dfrac{1}{2}$, donc on en déduit que $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque. Dans le dernier point, on a utilisé 3 choses importantes :

1– $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$. Résultat classique que vous avez dû voir l'an dernier. Il est bon de jeter un œil à la démonstration si besoin.

2– D'une manière générale, si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\ln(1+a_n) \sim a_n$. On l'a montré ici, la démonstration est toujours la même. On pourra utiliser ce résultat librement.

3– L'équivalence est compatible avec les puissances, ça découle de la compatibilité avec la multiplication, et on peut le démontrer sans problème à la manière du **Théorème 1.**

Exercice I-7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels tels que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

1– Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2– Donner un équivalent simple de u_n.

. . . .

Corrigé :

1– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite décroissante, soit elle tend vers une limite l (si elle est minorée), soit elle diverge vers $-\infty$. Dans le deuxième cas, on a forcément $u_n + u_{n+1};\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, ce qui contredit $u_n + u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, et donc $u_n + u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2l$, or $u_n + u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $2l = 0$ et $l = 0$. On a donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, donc :

$$\begin{array}{rl}
\forall n \in \mathbb{N}^* & u_{n-1} \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \\
\Longrightarrow & u_{n-1} + u_n \geqslant 2u_n \geqslant u_n + u_{n+1} \\
\Longrightarrow & \underbrace{n(u_{n-1} + u_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \geqslant 2nu_n \geqslant \underbrace{n(u_n + u_{n+1})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \\
\Longrightarrow & 2nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1
\end{array}$$

D'où $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$

Exercice I-8. Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$.

1– Montrer que $u_{n-2} \underset{n\to+\infty}{=} o\,(n!)$

2– Montrer que $(n-1)! \underset{n\to+\infty}{=} o\,(n!)$

3– En déduire $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n!$

. . . .

Corrigé :

1– On a $u_{n-2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} k!$. Or, $\forall k \in [\![0; n-2]\!]$, $\dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)n}$ Donc :

$$\frac{u_{n-2}}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(n-1)n} \leqslant (n-1)\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que $u_{n-2} \underset{n\to+\infty}{=} o\,(n!)$.

2– On a $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(n-1)! \underset{n\to+\infty}{=} o\,(n!)$

3– On a $u_n = u_{n-2} + (n-1)! + n!$, donc $u_n - n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ d'après les questions du dessus. Donc, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n!$.

Exercice I-9. Donner un équivalent simple aux fonctions suivantes :

1– $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1$ quand $x \to +\infty$

2– $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}$ quand $x \to +\infty$

3– $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ quand $x \to +\infty$

4– $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2}$ quand $x \to 0$

5– $\tan x - \sin x$ quand $x \to 0$

6– $\mathrm{e}^x + x - 1$ quand $x \to 0$

. . . .

Corrigé :

1– $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln(x)}$

En effet : $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1 = \dfrac{\ln(x) + \ln(1+1/x)}{\ln(x)} - 1 = \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

Remarque : On utilise encore une fois $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, que l'on peut obtenir soit avec le développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1+u)$ en 0, soit que l'on démontre de la même manière que dans l'**Exercice 6**.

2– $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$

En effet : $\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} = \dfrac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)}}$. Traitons le numérateur et le dénominateur de la fraction séparément. D'une part :

$$\begin{aligned}
\ln(x+1) - \ln(x-1) &= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \\
&\underset{x\to\infty}{\sim} \frac{2}{x-1} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

Pour le dénominateur, même si le résultat est le même que si on additionnait les équivalents, cette opération n'est pas autorisée : on doit donc le démontrer à la main :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)}}{2\sqrt{\ln(x)}} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}} + \sqrt{\frac{\ln(x-1)}{\ln(x)}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} + \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{1 + \frac{\ln(1-1/x)}{\ln(x)}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} \\
&\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \\
\Longrightarrow \sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)} &\underset{x\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\ln(x)}
\end{aligned}$$

Et comme l'équivalence est compatible avec la multiplication (et donc avec les fractions), on trouve le résultat :

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2/x}{2\sqrt{\ln(x)}} = \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

3– $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$

En effet :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} &= \frac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{2}{\underbrace{x\left(\sqrt{1+1/x^2}+\sqrt{1-1/x^2}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}2}}\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

4– $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2} \underset{x\to0}{\sim} x^2$

En effet : on peut utiliser la même méthode qu'à la question précédente. On peut aussi le faire avec des développements limités par exemple :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2} &= 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\underset{x\to0}{o}(x^4)\right)\\
&= x^2+\frac{1}{4}x^4\underset{x\to0}{o}(x^4)\\
&\underset{x\to0}{\sim} x^2
\end{aligned}$$

5– $\tan x-\sin x \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^3}{2}$

En effet : ici aussi, on peut le faire rapidement avec des développement limités :

$$\begin{aligned}
\tan x-\sin x &= x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to0}{o}(x^3)-x+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to0}{o}(x^3)\\
&= \frac{x^3}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^3)\\
&\underset{x\to0}{\sim} \frac{x^3}{2}
\end{aligned}$$

6– $\mathrm{e}^x+x-1 \underset{x\to0}{\sim} 2x$

En effet : avec le développement limité :

$$\mathrm{e}^x+x-1=0+2x+\underset{x\to0}{o}(x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$$

Remarque : les trois premières questions sont également faisables par des développements limités. Vous constaterez en le faisant que c'est beaucoup plus rapide, et beaucoup plus systématique (cela ne recquiert pas d'astuces : il suffit de faire le développement limité de chaque fonction, et c'est réglé !)

Exercice I-10. 1– Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $[1;a[$ avec $a\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$. On suppose que

$$f(x)\xrightarrow[x\to a]{}1 \text{ et } g(x)(f(x)-1)\xrightarrow[x\to a]{} l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$$

Étudier la limite de $f(x)^{g(x)}$ quand $x\to a$.

2– En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}$

....

Corrigé :

1– On a $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln(f(x))}$ Or, $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}1$, donc :

$$\ln(f(x))=\ln(1+\underbrace{(f(x)-1)}_{\xrightarrow[x\to a]{}0}) \underset{x\to a}{\sim} f(x)-1$$

Par compatibilité de $\sim$ avec la multiplication, on a $g(x)\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} g(x)(f(x)-1)$, et par composition de limite, on peut conclure :

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^l$$

(en considérant "$\mathrm{e}^{+\infty}$" $= +\infty$ et "$\mathrm{e}^{-\infty}$" $= 0$)

2– On utilise le résultat précédent avec : $a = +\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

et $g(x) = \ln(x)$, et

$$l = \lim_{x\to+\infty} g(x)(f(x)-1) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right) = \ln(2)$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)} = \mathrm{e}^{\ln 2} = 2$$

II – Développements limités

Exercice II-11. Donner les développements limités suivants :

1– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$

2– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

3– $DL_4(0)$ de $x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$

4– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

5– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{\operatorname{sh} x} - \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

6– $DL_4(1)$ de $x \mapsto x^{\frac{1}{\ln x - 1}}$

7– $DL_4(+\infty)$ de $x \mapsto (x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}$

8– $DL_3(\frac{\pi}{6})$ de $x \mapsto \ln(2\sin x)$

. . . .

Corrigé :

1– $\sqrt{2} + \dfrac{x^2}{4\sqrt{2}} - \dfrac{5x^4}{64\sqrt{2}} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

2– $-\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{180} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

3– $1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dfrac{2x^4}{3} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

4– $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4x^4}{189} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

5– $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^4}{24} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

6– $1 - (x-1) + \dfrac{1}{12}(x-1)^4 + \underset{x\to1}{o}((x-1)^4)$

7– $\dfrac{2}{3x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

8– $\sqrt{3}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^2 + \dfrac{4\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3}{\sqrt{3}} + \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{o}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)^4\right)$

Exercice II-12. Donner les développements limités suivants :

1– $DL_4(1)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

2– $DL_5(0)$ de $x \mapsto (\operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} 2x) - \operatorname{ch} x$

3– $DL_3(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

4– $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$

5– $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$

6– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^{2x}-1}$

7– $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $x \mapsto \ln(\sin x)$

8– $DL_2(+\infty)$ de $x \mapsto x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right)$

9– $DL_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{1+x}}$

10– $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

. . . .

Corrigé :

1– $(x-1) - \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \dfrac{11}{6}(x-1)^3 - \dfrac{25}{12}(x-1)^4 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^4\right)$

2– $-1 + x - 2x^2 - \dfrac{11x^3}{6} - \dfrac{2x^4}{3} + \dfrac{361x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$

3– $-x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$

4– $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} - \dfrac{7\mathrm{e}x^3}{16} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$

5– $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x^3}{90} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$

6– $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3x}{4} + \dfrac{7x^2}{12} - \dfrac{3x^3}{8} + \dfrac{97x^4}{360} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$

7– $-\dfrac{\ln(2)}{2} + \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{o}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3\right)$

8– $\dfrac{1}{4\sqrt{2}x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

9– $1 + x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$

10– $x + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$

Exercice II-13. Soit $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R}^* & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array}\right.$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

. . . .

Corrigé : Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est évidemment $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (ce n'est pas évident qu'elle le soit en 0, mais nous allons le montrer). Montrons par récurrence sur n que $f^{(n)}$ est continue et de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f^{(n)}: \quad \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \\ 0 & \mapsto & 0 \text{ prolongée par continuité} \end{array}\right. \qquad , P_n \in \mathbb{R}[X]$$

Pour $n = 0$, pas de problèmes, car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$.

Supposons la propriété vraie au rang n, alors $f^(n)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $\forall x \neq 0$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{-1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

En posant $P_{n+1} = -X^2P_n' + 2X^3P_n$, on a $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et :

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \underset{y=1/x^2}{=} \lim_{y\to+\infty} P_{n+1}(\sqrt{y})\mathrm{e}^{-y} = 0$$

par les relations de dominations classique (l'exponentielle décroissante domine tous les polynômes). On a le même résultat en 0^-, et donc on peut prolonger $f^{(n+1)}$ par continuité en posant $f^{(n+1)}(0) = 0$. La récurrence est ainsi établie.
En conclusion, on a f de classe $\mathcal{C}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On peut désormais appliquer la formule de Taylor–Young à l'ordre n sur f, et comme $f^{(k)}(0) = 0$ $\forall k \in [\![0; n]\!]$, on trouve :

$$f(x) = 0 + 0 + \cdots + 0 + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

C'est donc une fonction dont le développement limité en 0 est nul à tout ordre, qui est $\mathcal{C}^\infty$, mais qui n'est pas nulle.

Exercice II-14. Donner le développement limité à l'ordre 10 en 0 de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$

Corrigé : En partant du développement limité de $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$, on établit :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8 + \underset{t\to 0}{o}(t^9)$$

donc

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t = x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + \underset{x\to 0}{o}(x^{10}) \text{ et } \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t = x^2 - \frac{1}{10}x^{10} + \underset{x\to 0}{o}(x^{10})$$

enfin :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \underset{x\to 0}{o}(x^{10})$$

Exercice II-15. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1– Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

2– f admet-elle un développement limité en 0 ? A quel ordre maximal ?

Corrigé :

1– Par composition de fonction dérivables, f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (ce n'est pas évident qu'elle le soit en 0, mais nous allons le montrer). De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $n \leqslant 2$, donc $x^{n-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bornée. La limite est la même en 0^+ et 0^-, donc on peut poser f dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. On a donc f dérivable sur $\mathbb{R}$.

2– Notons que, puisque $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bornée, on a $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{}$ et donc $\dfrac{f(x)}{x^{n-1}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

On en déduit que $f(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^{n-1})$, et que donc, f admet un développement limité (nul) à l'ordre $n-1$.

Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n. Comme le développement limité jusque l'ordre $n-1$ est nul, cela revient à dire que :

$$\exists a \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = ax^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Mais alors $x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\sim} ax^n$ et donc $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\sim} a$. Cela revient à dire $\lim_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = a \in \mathbb{R}$, ce qui est notoirement faux. Par l'absurde, on en déduit que f n'admet pas de développement limité à l'ordre n, et donc que l'ordre maximal est $n-1$.

III – Applications des développements limités

Exercice III -16. *Calcul de limites*

Déterminer les limites suivantes :

1– $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x}$

2– $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x + \sin x}{x \ln x}$

3– $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}$

4– $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

5– $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}}\right)^{\frac{1}{2-x}}$ $\star$

6– $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \ln(x)\ln(1-x)$

. . . .

Corrigé :

1– $+\infty$, car la fonction considérée est équivalente à x en $+\infty$.

2– 0, car la fonction considérée est équivalente à $\dfrac{2}{\ln x}$ en 0^+.

3– 1, car la fonction considérée est égale à $\exp\left(\dfrac{(\ln x)^2}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)\right)$, puis on conclut par composition de limite

4– $\dfrac{1}{3}$, en mettant $\dfrac{1}{x^2}$ en facteur puis utilisant les développement limités.

5– $\dfrac{1}{3} 6^{4/13} 5^{5/26}$, ou toute autre écriture équivalente. Celui-ci mérite un peu plus d'explications :

Soit $f(x) = \left(\dfrac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}}\right)^{\frac{1}{2-x}}$, sa limite en 2 est la forme indéterminée « 1^0 ». On doit donc chercher à comprendre à quelle « vitesse » chaque partie évolue, comparativement. Pour simplifier un peu l'écriture, on va poser :

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}}, \text{ ainsi } f(x) = \exp\left(\frac{1}{2-x}\ln(g(x))\right)$$

On remarque alors qu'il nous faut un développement limité de $\ln(g(x))$ à l'ordre 1 en 2. En effet, puisque $g(2) = 1$, on a $\ln(g(2)) = 0$, et donc si on a un développement limité à l'ordre 1 en 2, on peut écrire :

$$\ln(g(x)) = 0 + a(x-2) + \underset{x \to 2}{o}(x-2)$$

Puis :

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{2-x}(0 + a(x-2) + \underset{x \to 2}{o}(x-2))\right) = e^{-a + \underset{x \to 2}{\mathcal{O}}(1)} \xrightarrow[x \to 2]{} e^{-a}$$

Ce qui sera suffisant pour conclure. Comme on a $\ln(g(x)) = \ln(2^x + 3^x) - \ln(2^{x+1} + 5^{x/2})$, on va commencer par chercher le développement limité en 2, à l'ordre 1, de ces quatres fonctions de la famille exponentielle :

- $2^x = e^{x\ln 2}$. Par la formule de Taylor, on écrit le développement limité en 2 de $x \mapsto e^x$:

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2) \tag{1}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2^x = e^{x\ln 2} &= (e^2 + e^2(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2))^{\ln 2} \\ &= \underbrace{(e^2)^{\ln(2)}}_{=2^2=4}(1 + \underbrace{(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)}_{u \xrightarrow[x\to 2]{} 0})^{\ln 2}) \\ &= 4(1 + \ln 2(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)) \end{aligned} \tag{2}$$

En utilisant, pour obtenir l'équation (2), le développement limité de $(1+u)^\alpha$ en 0, à l'ordre 1 : $1 + \alpha u + \underset{u\to 0}{o}(u)$. On a bien u qui tend vers 0 quand x tend vers 2, donc cette opération se fait bien. On vérifie au passage le premier terme de notre développement limité : quand x tend vers 2, 2^x tend bien vers 4. Ce genre de vérifications seront faite tout du long du calcul pour nous éviter le plus d'erreurs possibles.

- $3^x = e^{x\ln 3}$. On va ré-utiliser l'équation (1), mais attention cette fois-ci au $\ln 3$.

$$\begin{aligned} 3^x = e^{x\ln 3} &= (e^2 + e^2(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2))^{\ln 3} \\ &= \underbrace{(e^2)^{\ln(3)}}_{=3^2=9}(1 + \underbrace{(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)}_{u \xrightarrow[x\to 2]{} 0})^{\ln 3}) \\ &= 9(1 + \ln 3(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)) \end{aligned} \tag{3}$$

En ayant pris ici $\alpha = \ln(3)$. Notre u tend bien vers 0 quand x tend vers 2, et le premier terme est correct : $3^x \xrightarrow[x\to 2]{} 9$.

- $2^{x+1} = 2 \times 2^x$, donc d'après (2) on a directement :

$$2^{x+1} = 8(1 + \ln 2(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)) \tag{4}$$

- $5^{x/2} = e^{x\frac{1}{2}\ln 5}$. On va donc avoir la même méthode, avec cette fois-ci le terme $\dfrac{\ln 5}{2}$:

$$\begin{aligned} 5^{x/2} = e^{x\frac{\ln 5}{2}} &= (e^2 + e^2(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2))^{\frac{\ln 5}{2}} \\ &= (\underbrace{e^2)^{\frac{\ln 5}{2}}}_{=e^{\ln 5}=5}(1 + \underbrace{(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)}_{u \xrightarrow[x\to 2]{} 0})^{\frac{\ln 5}{2}}) \\ &= 5\left(1 + \frac{\ln 5}{2}(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

On peut maintenant utiliser les équations (2), (3), (4), et (5) pour poursuivre le calcul de $\ln(g(x))$. D'une part :

$$\begin{aligned} \ln(2^x + 3^x) &= \ln\Big(4(1 + \ln 2(x-2)) + 9(1 + \ln 3(x-2)) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)\Big) && \text{par (2) et (3)} \\ &= \ln\Big(13 + (4\ln 2 + 9\ln 3)(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)\Big) \\ &= \ln(13) + \ln\Bigg(1 + \underbrace{\frac{4\ln 2 + 9\ln 3}{13}(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2)}_{u \xrightarrow[x\to 2]{} 0}\Bigg) && ,\ln(1+u) = u + \underset{u\to 0}{o}(u) \\ &= \ln(13) + \frac{4\ln 2 + 9\ln 3}{13}(x-2) + \underset{x\to 2}{o}(x-2) && (6) \end{aligned}$$

On vérifie au passage notre limite quand x tend vers 2 (qui fait $\ln(13)$, c'est bien le résultat attendu), puis on fait la même chose pour le second terme :

$$\begin{aligned}
\ln(2^{x+1}+5^{x/2}) &= \ln\left(8(1+\ln 2(x-2))+5\left(1+\frac{\ln 5}{2}(x-2)\right)+\underset{x\to 2}{o}(x-2)\right) \quad \text{par (4) et (5)}\\
&= \ln\left(13+(8\ln 2+\frac{5}{2}\ln 5)(x-2)+\underset{x\to 2}{o}(x-2)\right)\\
&= \ln(13)+\ln\left(1+\underbrace{\frac{16\ln 2+5\ln 5}{26}(x-2)+\underset{x\to 2}{o}(x-2)}_{u\xrightarrow[x\to 2]{}0}\right)\\
&= \ln(13)+\frac{16\ln 2+5\ln 5}{26}(x-2)+\underset{x\to 2}{o}(x-2) \qquad (7)
\end{aligned}$$

En utilisant également le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 1 en 0 (valide car on a bien $u\xrightarrow[x\to 2]{}0$) pour la dernière ligne. On vérifie le terme constant, $\ln(13)$, comme attendu. En calculant (6) − (7), on trouve donc $\ln(g(x))$:

$$\begin{aligned}
\ln(g(x)) &= \ln(13)+\frac{4\ln 2+9\ln 3}{13}(x-2)-\ln(13)-\frac{16\ln 2+5\ln 5}{26}(x-2)+\underset{x\to 2}{o}(x-2)\\
&= 0+\left(\frac{4\ln 2+9\ln 3}{13}-\frac{16\ln 2+5\ln 5}{26}\right)+\underset{x\to 2}{o}(x-2)\\
&= \frac{1}{26}(-8\ln 2+18\ln 3-5\ln 5)(x-2)\underset{x\to 2}{o}(x-2) \qquad (8)
\end{aligned}$$

On a bien la forme dont on parlait au début, et la bonne limite en 2. Le reste n'est maintenant plus que calculs :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(\frac{1}{2-x}\ln(g(x))\right) \quad \text{et on injecte (8)}\\
&= \exp\left(\frac{-1}{\cancel{x-2}}\left(\frac{1}{26}(-8\ln 2+18\ln 3-5\ln 5)\cancel{(x-2)}+\underset{x\to 2}{o}\cancel{(x-2)}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{26}(8\ln 2-18\ln 3+5\ln 5)+\underset{x\to 2}{o}(1)\right)\\
&= \mathrm{e}^{\frac{8}{26}\ln 2}\times\mathrm{e}^{\frac{-18}{26}\ln 3}\times\mathrm{e}^{\frac{5}{26}\ln 5}\times\exp(\underset{x\to 2}{o}(1))\\
&= 2^{4/13}\times\frac{3^{4/13}}{3}\times 5^{5/26}\underbrace{\exp(\underset{x\to 2}{o}(1))}_{\to 1}\\
&\xrightarrow[x\to 2]{} \frac{1}{3}6^{4/13}5^{5/26}
\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat annoncé.

6– Soit on fait les développements limités en 1^-, soit on remarque que c'est la même limite qu'en 0^+ par un changement de variable $x\to 1-x$. Dans tous les cas, on trouve 0.

Exercice III-17. *Branches infinies*

1– Soit $f : x\mapsto x^2\,\mathrm{Arctan}(1+x^2)$.

a) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré 2, que l'on appellera P.

b) La courbe $y=f(x)$ est-elle au-dessus ou en-dessous de $y=P(x)$ en $+\infty$?

2– Soit $g : x\mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$.

a) Montrer que g possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation.

b) La courbe $y=g(x)$ est-elle au-dessus ou en-dessous de son asymptote en $+\infty$?

. . . .

Corrigé :

1– a) Il nous faut un développement (limité ou asymptotique) de $\text{Arctan}(1+x^2)$ en $+\infty$. On commence par remarquer que $\text{Arctan}(1+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \text{Arctan}(x^2)$. Donc, on va chercher le développement limité de $\text{Arctan}(y)$ en $y \to +\infty$, puis substituer x^2. Il est donné dans l'**Exemple 8** du cours mais nous allons le redémontrer ici. On part de l'identité :

$$\text{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right)$$

De plus, quand $y \to +\infty$, $\frac{1}{y} \to 0$ et on a d'après les développements limités usuels :

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}\right)^3 + \underset{y\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{y^3}\right)$$

Donc, $\text{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}\right)^3 + \underset{y\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{y^3}\right)$ forme notre développement limité en $+\infty$. Il ne nous reste plus qu'à dérouler la suite :

$$\begin{array}{rrcl}
 & \text{Arctan}(y) & = & \frac{\pi}{2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}\right)^3 + \underset{y\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{y^3}\right) \\
\Longrightarrow & \text{Arctan}(y) & \underset{y\to+\infty}{\sim} & \frac{\pi}{2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} \\
\Longrightarrow & \text{Arctan}(x^2) & \underset{x\to+\infty}{\sim} & \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^6} \\
\Longrightarrow & \text{Arctan}(1+x^2) & \underset{x\to+\infty}{\sim} & \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^6} \\
\Longrightarrow & x^2\,\text{Arctan}(x^2) & \underset{x\to+\infty}{\sim} & x^2\frac{\pi}{2} - 1 + \underbrace{\frac{1}{3x^4}}_{\mathcal{O}(1)} \\
\Longrightarrow & f(x) & \underset{x\to+\infty}{\sim} & \underbrace{x^2\frac{\pi}{2} - 1}_{\overset{\text{def}}{=}P(x)}
\end{array}$$

b) On l'a vu, le terme suivant du développement asymptotique est $\frac{1}{3x^4}$, qui est toujours positif. Cela veut donc dire que, au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ est supérieur à $P(x)$, donc la courbe $y = f(x)$ est *au-dessus* de sa branche parabolique $y = P(x)$.

2– a) Ici aussi, on va commecer par chercher un développement limité (ou asymptotique) de g en $+\infty$. On pose donc $y = \frac{1}{x}$ et on a :

$$g\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{3}{y}+1}} = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{1-y}{3+y}} = \frac{1}{\sqrt{3}y}(1-y)^{1/2}(1+\frac{y}{3})^{-1/2}$$

Avec $y \to 0$, on utilise les développements limités usuels :

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{1}{y}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}y}\left(1 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} - \frac{y^3}{16} + \underset{y\to 0}{o}(y^3)\right)\left(1 - \frac{y}{6} + \frac{y^2}{24} - \frac{5y^3}{432} + \underset{y\to 0}{o}(y^3)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}y}\left(1 - \frac{y}{2} - \frac{y}{6} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^2}{24} + \frac{y^2}{12} - \frac{y^3}{16} - \frac{5y^3}{432} - \frac{y^3}{48} + \frac{y^3}{48} + \underbrace{\ldots}_{\mathcal{O}(y^3)} + \underset{y\to 0}{o}(y^3)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}y}\left(1 - \frac{2y}{3} - \frac{2y^3}{27} + \underset{y\to 0}{o}(y^3)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3y} - \frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{2\sqrt{3}y^2}{81} + \underset{y\to 0}{o}(y^2)
\end{aligned}$$

On a donc : $g(x) = \underbrace{\frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9}}_{(1)} - \underbrace{\frac{2\sqrt{3}}{81x^2}}_{(2)} + \underset{y\to 0}{o}(\frac{1}{x^2})$. Grâce au terme (1), on reconnaît que la courbe $y = g(x)$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = \dfrac{\sqrt{3}x}{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. (On a d'ailleurs la même asymptote en $-\infty$.)

b) Le terme (2) : $-\dfrac{2\sqrt{3}}{81x^2}$ étant toujours négatif, on en déduit que la courbe est en-dessous de l'asymptote (ce qui est également vrai en $-\infty$).

Exercice III-18. *Développement asymptotique*
Calculer :

1– Le développement asymptotique de $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ en 0 à la précision $x^{5/2}$.

2– Le développement asymptotique de $x \mapsto \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x$ en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$.

. . . .

Corrigé :

1– Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$. En utilisant le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0, on trouve :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ &= \sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{2} + \frac{x^2\sqrt{x}}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^{5/2}) \end{aligned}$$

2– Soit $f : x \mapsto \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^x$. On commence, comme à chaque fois qu'on voit une puissance, par mettre le terme sous forme exponentielle, et faire apparaître des formes connues :

$$f(x) = \exp\left(x\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right) = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

Si $x \to +\infty$, alors $\dfrac{1}{x} \to 0$, donc on peut appliquer le développement limité usuel suivant :

$$f(x) = \exp\left(x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right) = \exp\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Hors de question ici d'appliquer le développement limité en 0 de e^x ; le terme dans la parenthèse ne tend pas vers 0 ! Soit on applique le développement limité de e^{1+x} en 0, soit celui de e^x en 1 (c'est pareil, et on ne connaît ni l'un ni l'autre). Ecrivons le développement limité de e^x en 1 à l'aide de la formule de Taylor (on profite du calcul facile de la dérivée n-ième de l'exponentielle) :

$$\begin{aligned} e^x &= e^1 + e^1(x-1) + \frac{1}{2!}e^1(x-1)^2 + \frac{1}{3!}e^1(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}((x-1)^3) \\ &= e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}((x-1)^3) \end{aligned}$$

Et on peut alors composer nos développements limités pour obtenir :

$$\begin{aligned} f(x) &= e + e\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2}\right) + \frac{e}{2}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2}\right)^2 + \underbrace{\frac{e}{6}\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2}\right)^3}_{o(1/x^2)} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= e - \frac{e}{2x} + \frac{11e}{24x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

IV – Exercices

Exercice IV-19. Soient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi_- :]-1;0] & \to & [0;+\infty[\\ x & \mapsto & x-\ln(1+x)\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl}\varphi_+ : [0;+\infty[& \to & [0;+\infty[\\ x & \mapsto & x-\ln(1+x)\end{array}\right.$$

1– Montrer que φ_- et φ_+ sont des bijections

2– Donner un équivalent de φ_- et φ_+ au voisinage de 0

3– En déduire un équivalent de φ_-^{-1} et φ_+^{-1} au voisinage de 0

4– Donner un développement asymptotique à trois termes au voisinage de 0 de φ_- et φ_+

5– Donner un développement asymptotique à trois termes au voisinage de 0 de φ_-^{-1} et φ_+^{-1}

....

Corrigé : Plus tard ;)

Exercice IV-20. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + \ln(x)$.

1– Montrer que pour tout entier n, il existe un unique x_n tel que $f(x_n) = n$.

2– Former le développement asymptotique de la suite x_n à la précision $\dfrac{\ln n}{n}$

....

Corrigé :

1– f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, donc continue et dérivable, de dérivée $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$, elle est donc strictement croissante. Par ailleurs :

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} = -\infty \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Donc f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et en conséquence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! x_n \ / \ f(x_n) = n$$

2– Commençons par encadrer x_n : on a :

$$\left.\begin{array}{rcl} f(n) & = & n + \ln(n) > n \\ f(x_n) & = & n \\ f(n-\ln n) & = & n - \ln n + \ln(n - \ln n) < n \end{array}\right. \implies n - \ln n < x_n < n \text{ car } f \text{ est croissante}$$

On en déduit donc :

$$\underbrace{\frac{n - \ln n}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} < \frac{x_n}{n} < 1$$

Donc $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$, c'est-à-dire $x_n = n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)$. Pour obtenir le terme suivant du développement asymptotique, on va ré-injecter ce résultat dans notre équation de départ :

$$\begin{array}{rcl} f(x_n) & = & n \\ \implies x_n & = & n - \ln(x_n) \\ & = & n - \ln(n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)) \\ & = & n - \ln(n) - \ln(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)) \\ & = & n - \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \end{array}$$

En utilisant le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0. On a avancé dans notre développement asymptotique, mais pas encore à la précision voulue. Donc, on recommence :

$$\begin{array}{rcl} f(x_n) & = & n \\ \implies x_n & = & n - \ln(x_n) \\ & = & n - \ln(n - \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)) \\ & = & n - \ln(n) - \ln\left(1 - \dfrac{\ln n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \\ & = & n - \ln(n) + \dfrac{\ln n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) \end{array}$$

Comme on a $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ on peut écrire :

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Ce qui nous donne le développement asymptotique à la précision demandée.

Exercice IV -21. Soit la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

Corrigé : Plus tard ;)

Exercice IV -22. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$.

1– Donner un développement limité (ou asymptotique) à l'ordre 2 de f en 0, $+\infty$ et $-\infty$.

2– Donner les équations des tangentes et branches infinies de f

3– Donner la position relative de la courbe $y = f(x)$ à ces trois courbes au voisinage des points considérés.

Corrigé :

1– a) <u>En 0 :</u> $f(x) = \dfrac{1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)}{1+x+1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\underset{x\to0}{o}(x^2)}\left(1+\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)$ Ensuite, on utilise le DL de $\dfrac{1}{1+u}$ sur le terme du milieu, puis on fait le produit et on continue :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}-\cancel{\frac{x^2}{4}}+\cancel{\frac{x^2}{4}}\right)\left(1+\frac{x^2}{2}\right)+\underset{x\to0}{o}(x^2)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)+\underset{x\to0}{o}(x^2)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}+\underset{x\to0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

b) <u>En $+\infty$:</u> On commence par poser $y = \dfrac{1}{x}$, et calculer :

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2}}{\frac{1}{y}+1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2}} = \frac{\frac{y}{|y|}\sqrt{1+y^2}}{1+y+\frac{y}{|y|}\sqrt{1+y^2}}$$

Comme $y>0$, on a $\dfrac{y}{|y|} = 1$, et donc :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{y}\right) &= \frac{\sqrt{1+y^2}}{y+1+\sqrt{1+y^2}}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{y}{4}+\frac{y^2}{8}+\underset{y\to0}{o}(y^2)
\end{aligned}$$

en réutilisant le calcul précédent. On peut alors repasser en la variable x :

$$f(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$$

c) <u>En $-\infty$:</u> Il faut être plus vigilent : on a $\dfrac{y}{|y|} = -1$, et donc cette fois-ci :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{y}\right) &= \frac{-\sqrt{1+y^2}}{1+y-\sqrt{1+y^2}} = \frac{-1-\frac{y^2}{2}+\underset{y\to 0}{o}(y^3)}{\cancel{1}+y-\cancel{1}-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{8}+\underset{y\to 0}{o}(y^4)} \\ &= -\left(1+\frac{y^2}{2}+\underset{y\to 0}{o}(y^3)\right)\left(\frac{1}{y}\times\frac{1}{1-\frac{y}{2}+\frac{y^3}{8}+\underset{y\to 0}{o}(y^3)}\right) \end{aligned}$$

Notons qu'à cause du terme en $\dfrac{1}{y}$ qui apparaît (suite à l'annulation du terme constant 1), on est obligé d'aller prendre des développement limité à un ordre supérieur à 2, non seulement pour $\sqrt{1+y^2}$, mais aussi pour le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = -\dfrac{y}{2}+\dfrac{y^3}{8}+\underset{y\to 0}{o}(y^3)$ qui va suivre, que l'on va devoir pousser à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\frac{y}{2}+\frac{y^3}{8}+\underset{y\to 0}{o}(y^3)} &= 1-\left(-\frac{y}{2}+\frac{y^3}{8}\right)+\left(-\frac{y}{2}+\frac{y^3}{8}\right)^2-\left(-\frac{y}{2}+\frac{y^3}{8}\right)^3+\underset{y\to 0}{o}(y^3) \\ &= 1+y\frac{1}{2}+y^2\frac{-1}{2}+y^3\left(\frac{-1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\underset{y\to 0}{o}(y^3) \\ &= 1+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}+\underset{y\to 0}{o}(y^3) \end{aligned}$$

On peut donc reprendre le calcul précédent :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{y}\right) &= -\frac{1}{y}\left(1+\frac{y^2}{2}+\underset{y\to 0}{o}(y^3)\right)\left(1+\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}+\underset{y\to 0}{o}(y^3)\right) \\ &= \frac{1}{y}\left(-1-\frac{y}{2}-\frac{3y^2}{4}-\frac{y^3}{4}+\underset{y\to 0}{o}(y^3)\right) \\ &= -\frac{1}{y}-\frac{1}{2}-\frac{3y}{4}-\frac{y^2}{4}+\underset{y\to 0}{o}(y^2) \end{aligned}$$

Et on peut repasser en la variable x :

$$f(x) = -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4x}-\frac{1}{4x^2}+\underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Notons que, avec le terme $-x$, il s'agit là d'un développement asymptotique et non d'un développement limité.

2– et 3– :

a) <u>En 0 :</u> $f(x) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On a donc une tangente d'équation $y = -\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$, et le terme suivant étant positif, la courbe de f est au-dessus de cette tangente.

b) <u>En $+\infty$:</u> $f(x) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{8x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^2\right)$. On a donc une asymptote d'équation $y = \dfrac{1}{2}$, et le terme suivant étant négatif, la courbe de f est en-dessous de cette asymtote.

c) <u>En $-\infty$:</u> $f(x) = -x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4x}-\dfrac{1}{4x^2}+\underset{x\to-\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On a donc une asymptote d'équation $y = -x-\dfrac{1}{2}$, et le terme suivant étant positif, la courbe de f est au-dessus de cette asymtote.
