3- Compléments

3.a) Théorème des degrés étagés

Proposition 17. *Liberté d'une famille de polynômes*
Posons $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $I \subset \mathbb{N}$, et soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$, tels que P_i est un polynôme de degré i. Alors :

La famille $(P_i)_{i\in I}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Autrement dit,

une famille de polynôme de degré tous distincts est libre.

Démonstration 16.

Remarque 25. Dans cette situation, on a donc, si $j \notin I$, et Q un polynôme de degré j : $Q \notin \mathrm{Vect}((P_i)_{i\in I})$.

Théorème 7. *Théorème des degrés étagés*

Soit $(P_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ une famille de polynômes telle que : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ P_i$ est de degré i.
Alors :

$(P_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ *est une base de* $\mathbb{K}_n[X]$

Démonstration 17.

3.b) Décomposition de matrice

Théorème 8. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

4- Exercices

Exercice II-3. *Sous-espaces vectoriels*

1- Parmi les parties suivantes, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? Lorsque c'est possible, donner une base. Justifier.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leqslant y\}$
b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy = 0\}$
c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\}$
d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 1\}$
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - y^2 = 0\}$
f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 = 0\}$

2- Parmi les parties suivantes, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Justifier.

a) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)$ bornée $\}$
b) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)$ convergente $\}$
c) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)$ monotone $\}$
d) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ (u_n)$ arithmétique $\}$
e) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$

Exercice II-4. *Intersection*

Soient $\mathbb{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$ et $\mathbb{G} = \{(a-b, a+b, a-3b) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

1- Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2- Déterminer $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$. Quel est sa dimension ?

Exercice II-5. *Supplémentaires*

1- Soient $\mathbb{F} = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(0) = f'(0) = 0\}$ et $\mathbb{G} = \{x \mapsto ax + b \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

a) Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donner leurs dimensions.
b) Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires.

2- Soit $\mathbb{H} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(0) + f(1) = 0\}$

a) Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
b) Donner un supplémentaire de $\mathbb{H}$, et sa dimension.

3- Montrer que les matrices symétriques et antisymétriques forment deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quels sont leur dimension ?

Exercice II-6. *Famille libre*

1- On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions suivantes : $f_1(x) = \cos(x)$, $f_2(x) = x\cos(x)$, $f_3(x) = \sin(x)$, $f_4(x) = x\sin(x)$. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

2- Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $g_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$, fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(g_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

3- Soit $F = (e_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille libre d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$, et $a \in E$. Montrer que $a \notin \mathrm{Vect}(F) \implies (e_i + a)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{E}$.

Exercice II-7. *Polynômes*

1- Soient $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$, $P_3 = X^2 + X$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

2- Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$. Montrer que $(P_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice II-8. *Dimension d'un sous-espace vectoriel*
Soit $\mathbb{E}$ un esapce vectoriel de dimension n.

1- Soit $\mathbb{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ de dimension $n-1$, et soit $a \notin \mathbb{H}$ un vecteur de $\mathbb{E}$. Montrer que $\mathbb{H} + \mathrm{Vect}(a) = \mathbb{E}$.

2- Soit $\mathbb{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ de dimension $n-1$, et $\mathbb{G}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ de dimension 1. Montrer que soit $\mathbb{G} \subset \mathbb{H}$, soit $\mathbb{H} \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$.

3- Soient P_1 et P_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{E}$. On suppose $P_1 \neq P_2$. Montrer que $P_1 \cap P_2$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{E}$.

Exercice II-9. *Supplémentaires communs*
Soit $\mathbb{E}$ un esapce vectoriel de dimension n.

1- Soient $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ de dimension $n-1$. Montrer qu'ils ont un supplémentaire commun.

2- Montrer que deux sous-espaces vectoriels de même dimension ont toujours un supplémentaire commun.

Exercice II-10. *Dans l'espace*

1- Soit $\mathbb{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u, v) avec $u = (1, 1, 1)$ et $v = (0, 1, 1)$. Donner un supplémentaire de $\mathbb{F}$.

2- Soit $\mathbb{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par $\mathbb{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + 3y - z = 0\}$. Donner un supplémentaire de $\mathbb{F}$, et une base adaptée à la décomposition.

Exercice II-11. Soit $F = \{f : x \mapsto (ax^2 + bx + c)\cos(x) \ / \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2- Donner une base de F et sa dimension.