

## 第二节 方 差

- 一、随机变量方差的概念及性质
- 二、重要概率分布的方差
- 三、例题讲解
- 四、小结



# 一、随机变量方差的概念及性质

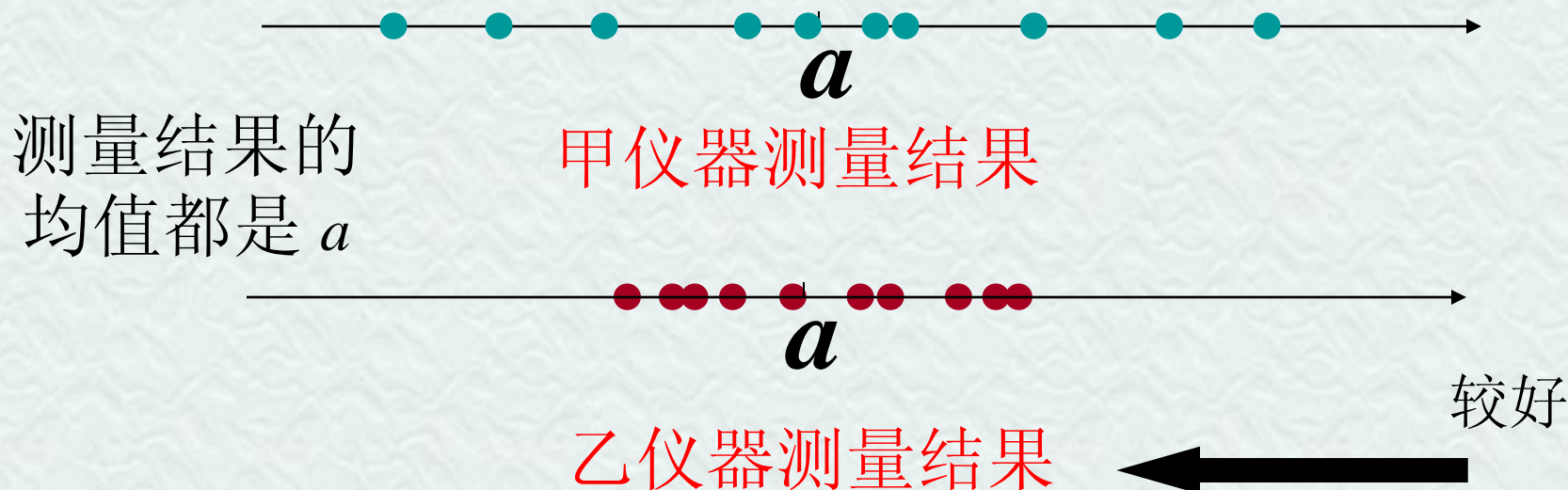
## 1. 概念的引入

随机变量的数学期望，它体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

但是在一些场合，仅仅知道平均值是不够的.



例如，某零件的真实长度为 $a$ ，现用甲、乙两台仪器各测量10次，将测量结果 $X$ 用坐标上的点表示如图：

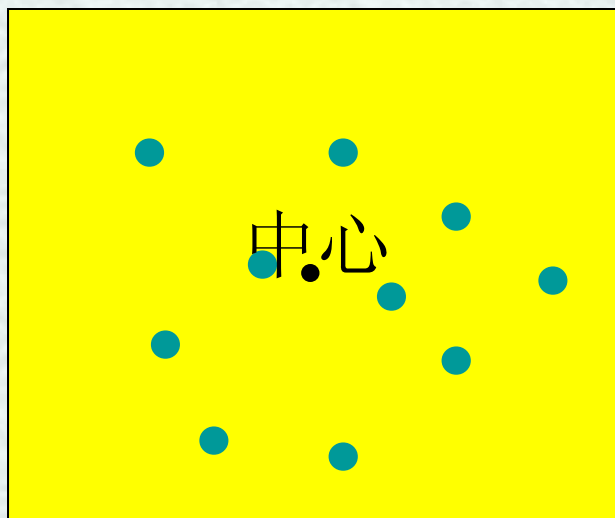


若让你就上述结果评价一下两台仪器的优劣，你认为哪台仪器好一些呢？

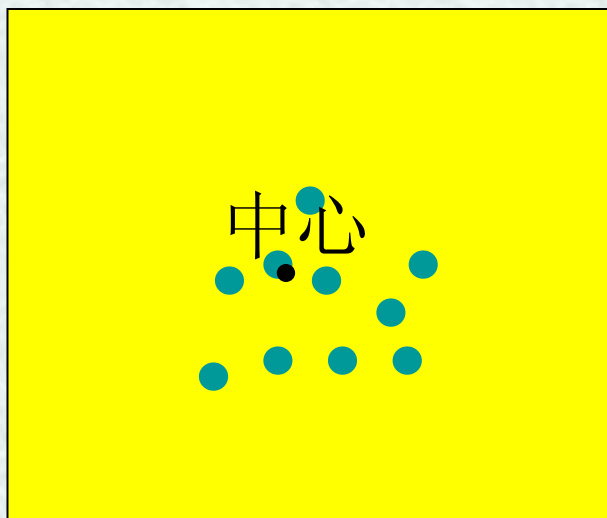
因为乙仪器的测量结果集中在均值附近



又如,甲、乙两门炮同时向一目标射击10发炮弹,其落点距目标的位置如图:



甲炮射击结果



乙炮射击结果

乙炮

你认为哪门炮射击效果好一些呢?

因为乙炮的弹着点较集中在中心附近.



如果平均偏离较小，那么说明这批灯泡的寿命大部分接近它的均值，这也说明灯泡厂的生产是稳定的；这时，如果 $EX$ 比较大，那么灯泡的质量就是比较好的。相反，如果 $X$ 离开 $EX$ 的平均偏离较大，那么即使均值较大，生产质量也是有问题的。

再如在打靶比赛中，不但要求射击准确，而且还要求稳定。如果某射手射击10次，虽然有7次正中靶心，但是另外3次却打歪了，弹孔离靶心很远，甚至子弹射到了靶外打伤了人，这也说明此人的射击技术是有问题的。



那么，用什么量来衡量这种平均偏离程度呢？

人们自然会想到采用 $|X-EX|$ 的平均值 $E|X-EX|$ .

但是式 $E|X-EX|$ 带有绝对值号，运算不便，故采用 $(X-EX)^2$ 的平均值 $E(X-EX)^2$ 来代替 $E|X-EX|$ .

显然， $E(X-EX)^2$ 的大小完全能够反映 $X$ 离开 $EX$ 的平均偏离大小的，这个值就称为 $X$ 的方差.





为此需要引进另一个数字特征,用它来度量  
随机变量取值在其中的中心附近的离散程度.

这个数字特征就是

方差



## 2. 方差的定义

设  $X$  是一个随机变量, 若  $E\{[X - E(X)]^2\}$  存在, 则称  $E\{[X - E(X)]^2\}$  为  $X$  的方差, 记为  $D(X)$  或  $\text{Var}(X)$ , 即...

$$D(X) = \text{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\}.$$

称  $\sqrt{D(X)}$  为标准差或均方差, 记为  $\sigma(X)$ .

采用平方是为了保证一切  
差值  $X - E(X)$  都起正面的作用





### 3. 方差的意义

方差是一个常用来体现随机变量  $X$  取值分散程度的量. 如果  $D(X)$  值大, 表示  $X$  取值分散程度大,  $E(X)$  的代表性差; 而如果  $D(X)$  值小, 则表示  $X$  的取值比较集中, 以  $E(X)$  作为随机变量的代表性好.



## 4. 随机变量方差的计算

### (1) 利用定义计算

由定义知，方差是随机变量 $X$ 的函数  
 $g(X)=[X-E(X)]^2$ 的数学期望。

离散型随机变量的方差

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k,$$

其中  $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$  是  $X$  的分布律。

连续型随机变量的方差

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx,$$

其中  $f(x)$  为  $X$  的概率密度。



## (2) 利用公式计算

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

证明

$$\begin{aligned} D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - E^2(X). \end{aligned}$$





## 5. 方差的性质

(1) 设  $C$  是常数, 则有  $D(C) = 0$ .

证明  $D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0$ .

(2) 设  $X$  是一个随机变量,  $C$  是常数, 则有

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

证明  $D(CX) = E\{[CX - E(CX)]^2\}$

$$= C^2 E\{[X - E(X)]^2\}$$

$$= C^2 D(X).$$



(3) 设  $X, Y$  相互独立,  $D(X), D(Y)$  存在, 则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

证明

$$\begin{aligned} D(X \pm Y) &= E\{[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2\} \\ &= E\{[X - E(X)] \pm [Y - E(Y)]\}^2 \\ &= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 \\ &\quad \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= D(X) + D(Y). \end{aligned}$$



相互独立, 则  $[X - E(X)]$  ,  $[Y - E(Y)]$

相互独立。

$$\begin{aligned} & E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= E[X - E(X)]E[Y - E(Y)] \\ &= E[E(X) - E(X)]E[E(Y) - E(Y)] \\ &= 0 \end{aligned}$$





(4)  $D(X) = 0$  的充要条件是  $X$  以概率 1 取常数  $C$ , 即

$$P\{X = C\} = 1.$$



## 二、重要概率分布的方差

### 1. 两点分布

已知随机变量  $X$  的分布律为

$X$	1	0
$p$	$p$	$1-p$

则有  $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$ ,

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = pq. \end{aligned}$$



## 2. 二项分布

设随机变量  $X$  服从参数为  $n, p$  二项分布, 其分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

则有

$$0 < p < 1.$$

$$E(X) = np.$$





设  $X \sim B(n, p)$ , 则  $X$  表示  $n$  重贝努里试验中的“成功”次数.

若设  $X_i = \begin{cases} 1 & \text{如第 } i \text{ 次试验成功} \\ 0 & \text{如第 } i \text{ 次试验失败} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n$

则  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  是  $n$  次试验中“成功”的次数

$$E(X_i) = P(X_i=1) = p, \quad E(X_i^2) = p,$$

$$\text{故 } D(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$



$$D(X_i) = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

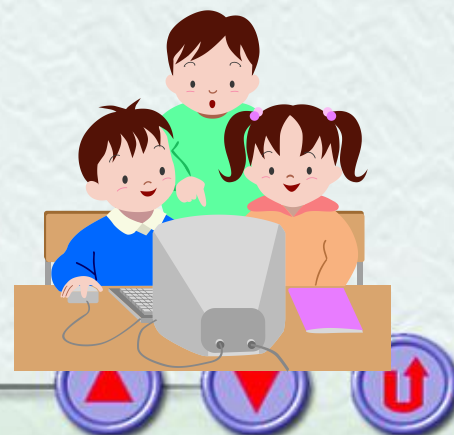
$$i=1, 2, \dots, n$$

由于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立

于是

$$D(X) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$$

$$= np(1 - p)$$



### 3. 泊松分布

设  $X \sim \pi(\lambda)$ , 且分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0.$$

则有

$$E(X) = \lambda$$





$$EX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{for all } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{for } |x| < 1$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

泊松分布的期望和方差都等于参数  $\lambda$ .



## 4. 均匀分布

设  $X \sim U(a, b)$ , 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}$$

**结论** 均匀分布的数学期望位于区间的中点.



$$EX = \frac{a+b}{2} \quad EX^2 = \int_a^b x^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$





## 5. 指数分布

设随机变量  $X$  服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad \text{其中 } \theta > 0.$$

则有

$$E(X) = \theta$$



$$\begin{aligned}
 D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
 &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx - \theta^2 \\
 &= 2\theta^2 - \theta^2 \\
 &= \theta^2.
 \end{aligned}$$



$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{\theta}\lambda x} d\frac{1}{\theta}x$$

$$= -\int_0^{+\infty} x^2 de^{-\frac{1}{\theta}x}$$

$$= -\left[ x^2 e^{-\frac{1}{\theta}x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx^2 \right]$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$$





$$EX^2 = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{\theta}x} dx = -\frac{2}{\frac{1}{\theta}} \int_0^{+\infty} x de^{-\frac{1}{\theta}x}$$

$$= -2\theta \left[ x e^{-\frac{1}{\theta}x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx \right]$$

$$= 2\theta^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\frac{1}{\theta}x} d\lambda x = -2\theta^2 \int_0^{+\infty} de^{-\frac{1}{\theta}x}$$

$$= -2\theta^2 e^{-\frac{1}{\theta}x} \Big|_0^{+\infty} = 2\theta^2$$



## 6. 正态分布

设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$EX = \mu$$



$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

令  $\frac{x - \mu}{\sigma} = t$ , 得

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} d\frac{-t^2}{2}$$

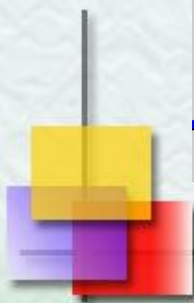
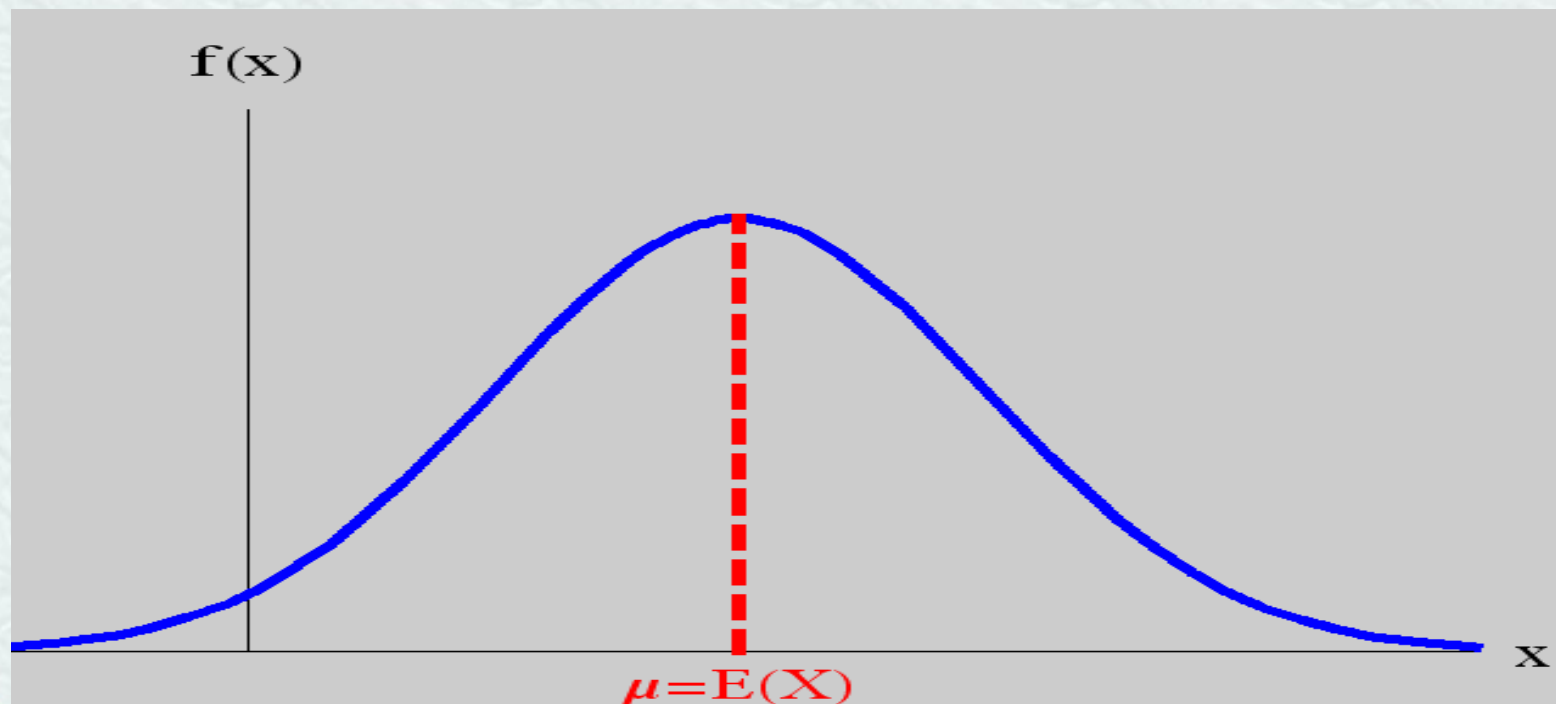
$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left( -te^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$$



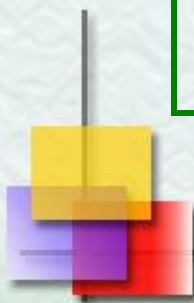


$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

正态分布的期望和方差分别为两个参数  $\mu$  和  $\sigma^2$ .



分 布	参 数	数学期望	方差
两点分布	$0 < p < 1$	$p$	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1,$ $0 < p < 1$	$np$	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda > 0$	$\lambda$	$\lambda$
均匀分布	$a < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta > 0$	$\theta$	$\theta^2$
正态分布	$\mu, \sigma > 0$	$\mu$	$\sigma^2$



## 三、例题讲解

例1 设随机变量  $X$  具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求  $D(X)$ .

解

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^0 x(1+x) dx + \int_0^1 x(1-x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x + x^2 dx + \int_0^1 x - x^2 dx \\ &= \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-1}^0 x^2(1+x) dx + \int_0^1 x^2(1-x) dx \\ &= \int_{-1}^0 x^2 + x^3 dx + \int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= \left( \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

于是  $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{6}.$$



例2 设  $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$ , 求  $D(2X^3 + 5)$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad D(2X^3 + 5) &= D(2X^3) + D(5) \\ &= 4D(X^3) \\ &= 4[E(X^6) - (E(X^3))^2] \end{aligned}$$

$$E(X^6) = (-2)^6 \times \frac{1}{3} + 0^6 \times \frac{1}{2} + 1^6 \times \frac{1}{12} + 3^6 \times \frac{1}{12} = \frac{493}{6},$$



$$[E(X^3)]^2 = \left[ (-2)^3 \times \frac{1}{3} + 0^3 \times \frac{1}{2} + 1^3 \times \frac{1}{12} + 3^3 \times \frac{1}{12} \right]^2$$

$$= \frac{1}{9},$$

故  $D(2X^3 + 5) = 4[E(X^6) - (E(X^3))^2]$

$$= \frac{2954}{9}.$$





## 四、小结

1. 方差是一个常用来体现随机变量  $X$  取值分散程度的量. 如果  $D(X)$  值大, 表示  $X$  取值分散程度大,  $E(X)$  的代表性差; 而如果  $D(X)$  值小, 则表示  $X$  的取值比较集中, 以  $E(X)$  作为随机变量的代表性好.

2. 方差的计算公式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx.$$



### 3. 方差的性质

$$1^{\circ} D(C) = 0;$$

$$2^{\circ} D(CX) = C^2 D(X);$$

$$3^{\circ} D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

