

Électrocinétique 4

Régime sinusoïdal forcé et résonance

Introduction

Dans la partie précédente, nous nous sommes intéressés à la réponse d'oscillateurs amortis en régime libre ou soumis à une excitation constante. Le but ici est d'étendre cette étude au cas où le système est soumis à une excitation sinusoïdale. Ce cas présente une importance considérable dans la pratique, puisque tout signal périodique peut se ramener à une superposition de signaux sinusoïdaux. Ainsi, l'étude de l'oscillateur en régime sinusoïdal forcé présente une *grande généralité* puisqu'elle permet, à terme, d'étudier des systèmes soumis à tout type d'excitation périodique.

1 Position du problème

1.1 Mise en évidence expérimentale

Considérons un circuit RLC soumis, comme présenté sur la figure 1, non pas à un échelon de tension comme dans le chapitre précédent, mais à une tension sinusoïdale de pulsation ω de la forme $e(t) = E \cos(\omega t)$.

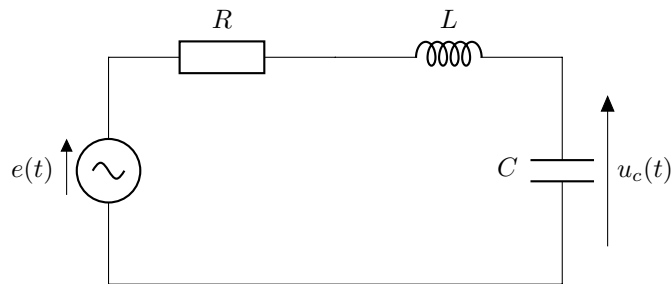


FIGURE 1 – Circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale

On observe ensuite la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur, dont l'évolution est représentée en figure 2, et on réalise les observations expérimentales suivantes :

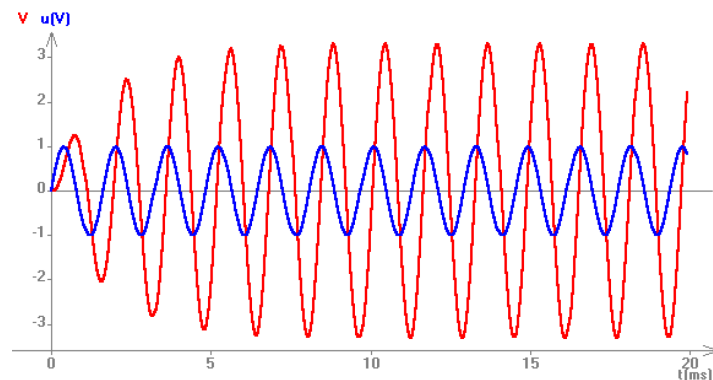


FIGURE 2 – Observation de la tension excitatrice et de la tension aux bornes du condensateur

Observations expérimentales

-
-
-
-
-
-

Le but de ce chapitre sera de rendre compte de ces observations. Pour cela, étudions plus en détail ce que nous appellerons le *régime sinusoïdal forcé*.

1.2 Régime sinusoïdal forcé

Écrivons dans un premier temps l'équation différentielle caractérisant l'évolution de $u_c(t)$. On applique pour cela la loi des mailles au circuit, en notant que la tension $e(t)$ est maintenant sinusoïdale. On obtient alors l'équation suivante.

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = \frac{E}{LC} \cos(\omega t)$$

La résolution de cette équation s'effectue en plusieurs étapes :

1. On résout d'abord l'équation homogène (sans second membre) :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0.$$

2. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme du second membre.
 3. La solution générale s'exprime ensuite comme la somme des deux solutions précédentes.
- La *solution homogène* $u_{c,h}$ sera la même que celle vue dans le chapitre précédent lors de l'étude du circuit RLC en régime libre. Elle caractérise le *régime transitoire*.
 - La *solution particulière* sera en revanche différente. L'expérience réalisée précédemment nous invite à chercher cette solution sous la forme d'une fonction sinusoïdale du type :

$$u_{c,p}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Où U_m et φ sont, comme nous le verrons plus tard, des fonctions de ω . Cette solution caractérise quant à elle le *régime établi*.

La solution générale correspondra à la somme des deux solutions précédentes :

$$u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p}(t)$$

La solution homogène correspond à la solution d'un *régime libre amorti*, son amplitude va donc diminuer au fil du temps de manière exponentielle. Ainsi, après un certain temps caractéristique du régime transitoire, on pourra considérer que $u_{c,p} \gg u_{c,h}$.

On ne s'intéresse dès lors plus qu'à la solution particulière correspondant au régime établi, c'est le *régime sinusoïdal forcé*.

Régime sinusoïdal forcé

-
-
-
-

Il nous faut maintenant trouver l'expression de la solution particulière sinusoïdale. Il nous faudra pour cela un nouvel outil, que nous allons aborder en étudiant plus en détail les signaux sinusoïdaux.

2 Les signaux sinusoïdaux et leurs représentations

2.1 Définitions et caractéristiques

Définition 1. *Signal sinusoïdal*

Les signaux périodiques sont également caractérisés par leur *valeur moyenne* et leur *valeur efficace* :

Définition 2. *Valeurs moyenne et efficace****Valeurs moyenne et efficace d'un signal sinusoïdal***

On comprend, grâce à la formule suivante, l'intérêt de la valeur efficace, la valeur moyenne ne permettant pas de caractériser le signal de manière pertinente.

Démonstration 1. Valeurs efficace et moyenne d'un signal sinusoïdal► **Valeur moyenne :**

.....

.....

.....

► **Valeur efficace :**

.....

.....

.....

Remarque Le signal délivré par les prises électriques usuelles est un signal sinusoïdal de fréquence 50 Hz que l'on appelle communément « 220 volt ». Cette valeur correspond à la *valeur efficace* du signal et non pas à son amplitude. Cette dernière est donnée par : $U_m = \sqrt{2}U_{eff} = \sqrt{2} \times 220 = 325V$.

Lien entre valeurs efficaces et puissance La puissance instantanée reçue par un dipôle traversé par un courant $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ et soumis à une tension $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$, tel que représenté en figure 3 en convention récepteur, est donnée par : $P(t) = u(t)i(t)$. On s'intéresse généralement à la valeur moyenne de la puissance reçue par le dipôle, qu'on appelle *puissance active*.

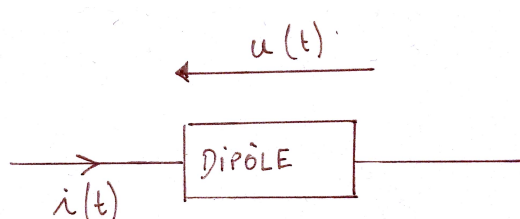


FIGURE 3 – Puissance active en régime sinusoïdal

Théorème 1. Puissance active en régime sinusoïdal

.....

.....

.....

.....

.....

Démonstration 2. Puissance active

.....

.....

.....

.....

2.2 Différence de phase entre deux signaux synchrones

Soient deux signaux synchrones¹ $u_1(t) = U_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = U_{2m}\cos(\omega t + \varphi_2)$.

Définition 3. Différence de phase

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Remarque Lorsqu'on étudie plusieurs signaux synchrones, on en choisit généralement un comme origine des phases, tous les déphasages sont alors évalués par rapport à ce signal particulier.

On présente dans le tableau 1 quelques exemples de différences de phases caractéristiques.

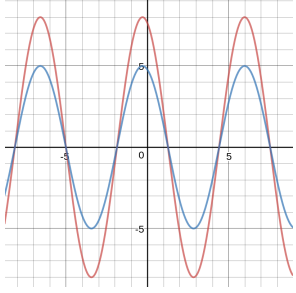
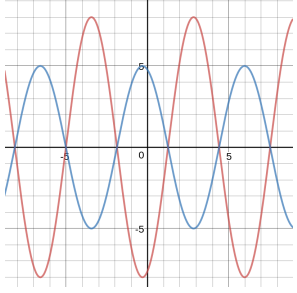
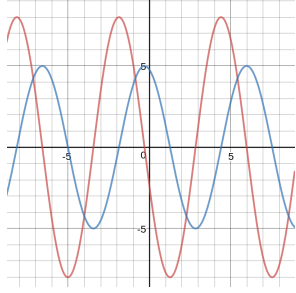
$\Delta\varphi = 0$	$\Delta\varphi = \pm\pi$	$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$
		
Signaux en phase	Signaux en opposition de phase	Signaux en quadrature de phase

TABLE 1 – Quelques cas particuliers de déphasage (u_2 est en bleu et u_1 en rouge)

Voyons maintenant diverses méthodes permettant de représenter ces signaux sinusoïdaux.

2.3 Représentation de Fresnel

La représentation de Fresnel est un outil graphique permettant de manipuler des fonctions sinusoïdales de même fréquence. On associera à toute fonction sinusoïdale un vecteur appelé *vecteur de Fresnel*.

1. i.e. des signaux de même pulsation

Définition 4. Vecteur de Fresnel

.....

.....

.....

.....

.....

.....

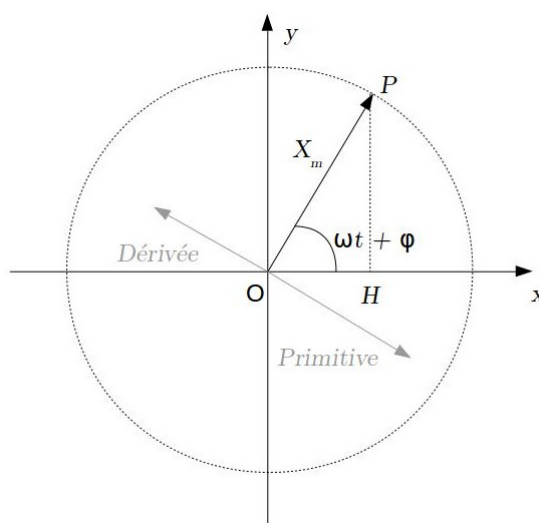


FIGURE 4 – Représentation de Fresnel d'un signal sinusoïdal

Voyons maintenant comment manipuler des signaux grâce à cette représentation :

Addition de deux signaux synchrones

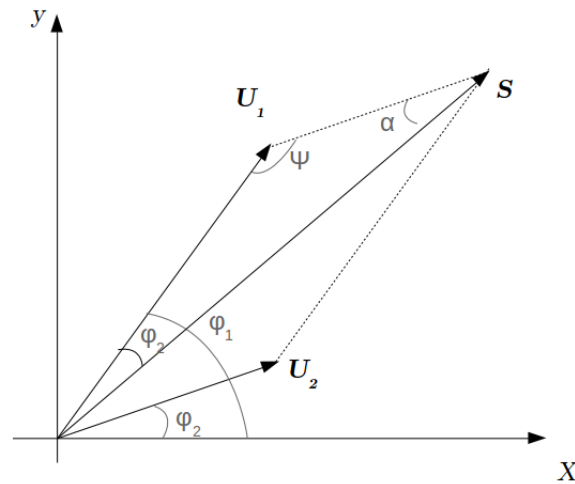
.....

.....

.....

.....

Exemple 1. Calculons grâce à la représentation de Fresnel la somme de deux signaux sinusoïdaux $u_1(t) = U_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = U_{2m}\cos(\omega t + \varphi_2)$. On note \vec{U}_1 le vecteur associé au signal 1, et \vec{U}_2 le vecteur associé au signal 2. Reste alors à effectuer la construction graphique présentée ci dessous ^a :



a. Nous nous sommes placés en $t=0$ pour plus de lisibilité

La représentation de Fresnel permet également de déterminer graphiquement la dérivée et la primitive de signaux sinusoïdaux.

Théorème 2. Dérivation et intégration en représentation de Fresnel^a

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

^a. Voir la figure 4

Démonstration 3. Dérivation et Intégration en représentation de Fresnel

.....

.....

.....

.....

.....

.....

La représentation de Fresnel, bien qu'utile pour obtenir *graphiquement* des résultats, ne nous aide pas pour déterminer la solution particulière de l'équation caractéristique qui nous intéresse (voir partie 1). Il nous faut pour cela un nouvel outil : *la représentation complexe*.

2.4 Représentation complexe d'un signal sinusoïdal**2.4.1 Notations**

- ▶ On note j le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$. De plus, on a $\frac{1}{j} = -j$ et $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$.
- ▶ Le conjugué du nombre complexe \underline{z} sera noté \underline{z}^* .
- ▶ On rappelle qu'un nombre complexe \underline{z} peut se noter de deux façons différentes :
 - *Forme cartésienne* : $\underline{z} = a + jb$ avec $a = \Re(\underline{z})$ et $b = \Im(\underline{z})$.
 - *Forme polaire* : $\underline{z} = \rho e^{j\theta}$, avec ρ le *module*, nombre réel positif et θ l'*argument*.
- ▶ Le module est lié aux parties réelle et imaginaire par la relation : $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ et l'argument par la relation $\theta = \arctan \frac{b}{a}$. (⚠ Pour appliquer cette formule, a doit être positif, sinon, il faut effectuer le schéma dans le plan complexe pour ne pas se tromper.)
- ▶ On a également $\rho e^{j\theta} = \rho(\cos\theta + j \sin\theta)$.
- ▶ Le complexe conjugué de \underline{z} est donné en représentation cartésienne par $\underline{z}^* = a - jb$.

2.4.2 Représentation complexe

Définition 5. Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple 2.

- ▶ A la tension réelle $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$, on associera la grandeur complexe $\underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$.
- ▶ A l'intensité réelle $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$, on associera la grandeur complexe $\underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$.

Remarques

- ▶ Seule la partie réelle de $\underline{x}(t)$ a un sens physique, il ne faudra pas oublier dans les calculs que le but final est toujours la détermination du signal réel $x(t)$.
- ▶ On peut remarquer que la représentation de Fresnel correspond à la représentation dans le plan complexe du signal $\underline{x}(t)$. Les deux représentations sont donc équivalentes.

2.4.3 Dérivation et intégration en représentation complexe

Théorème 3. Dérivation et intégration en représentation complexe

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Démonstration 4. Dérivation et intégration en représentation complexe

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Remarque On retrouve ici les résultats obtenus avec la représentation de Fresnel :

- Pour la dérivation, le vecteur représentatif de $\frac{dx}{dt}$ dans le plan complexe est de norme ωX_m et déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au vecteur représentatif de $x(t)$ (à cause du facteur multiplicatif j).
- Pour l'intégration, le vecteur représentatif de $\int x(t)dt$ est de norme $\frac{X_m}{\omega}$ et déphasé de $\frac{-\pi}{2}$ par rapport au vecteur représentatif de $x(t)$ (à cause du facteur multiplicatif $\frac{1}{j} = -j$).

2.4.4 Moyenne d'un produit et puissance d'un signal sinusoïdal en notation complexe**Théorème 4. Moyenne d'un produit en notation complexe**

.....

.....

.....

.....

.....

Démonstration 5. Moyenne d'un produit en notation complexe

.....

.....

.....

.....

.....

On peut déduire de cela comment calculer la puissance active reçue par un dipôle en représentation complexe :

Puissance active en notation complexe

.....

.....

.....

.....

.....

2.4.5 Bilan - Intérêt de la représentation complexe

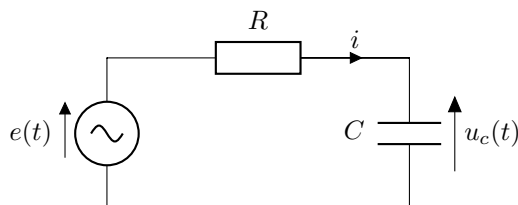
Bilan

Remarque Bien que l'utilisation de la notation complexe soit commode, il faut bien garder à l'esprit qu'il ne s'agit que d'un artifice de calcul. Il ne faudra pas oublier de repasser aux grandeurs réelles une fois la résolution terminée dans le corps des complexes.

Afin de souligner l'intérêt de cette méthode, exerçons nous sur un exemple simple.

Exemple 3. Circuit RC en régime sinusoïdal forcé

On se propose d'étudier le circuit RC, représenté ci-dessous, en régime sinusoïdal forcé. On cherche à déterminer l'évolution de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur. La tension $e(t)$ est sinusoïdale et est choisie comme origine des phases, de sorte que : $e(t) = E \cos(\omega t)$. On s'intéresse uniquement au régime établi, qu'on sait sinusoïdal et on recherche donc les solutions sous la forme $u_c(t) = U_{c,m} \cos(\omega t + \varphi_u)$.



12

Définition 6. Impédance complexe d'un dipôle linéaire passif

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

En notant comme précédemment $\underline{u}(t) = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(t) = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}$, on peut réécrire l'impédance :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} = |\underline{Z}| e^{j\varphi}$$

Avec $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ l'avance de phase de la tension par rapport à l'intensité et $|\underline{Z}| = Z$ l'impédance (exprimée en Ω). Le module de \underline{Z} relie les amplitudes des signaux sinusoïdaux ou leurs valeurs efficaces par $U_m = Z I_m$ ou $U_{eff} = Z I_{eff}$.

Remarque On distingue souvent les parties réelle et imaginaire de \underline{Z} suivant $\underline{Z} = R + jX$ où R est appelée *résistance* et X *réactance*. Si $X > 0$, le dipôle est dit inductif et si $X < 0$, le dipôle est dit capacitif.

Définition 7. Admittance complexe

.....

.....

.....

.....

L'argument de l'admittance correspond cette fois à l'avance de phase de l'intensité sur la tension.

Remarque De la même manière que pour l'impédance, on distingue parties réelle et imaginaire de \underline{Y} suivant $\underline{Y} = G + jB$ où G est la conductance et B la susceptance.

3.1.2 Impédances des composants usuels**❖ Résistor :**

.....

.....

Impédance complexe d'un résistor

.....

.....

.....

.....

On remarque que le comportement d'un résistor est indépendant de la fréquence.

❖ Condensateur idéal :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Impédance et admittance complexes d'un condensateur idéal

.....

.....

.....

.....

.....

Intéressons nous au comportement en fréquence du condensateur :

- ▶ Aux basses fréquences, lorsque ω tend vers 0, le module de l'impédance tend vers l'infini, le condensateur se comporte alors comme un circuit ouvert (puisque $I_m = \frac{U_m}{Z}$ tend vers 0).
- ▶ A haute fréquence, lorsque ω tend vers l'infini, le module de l'impédance tend vers 0, le condensateur se comporte alors comme un court-circuit (puisque $|U_m| = U_m = Z I_m$ tend vers 0).

❖ Bobine idéale :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Impédance et admittance complexes d'une bobine idéale

.....

.....

.....

.....

.....

Le comportement fréquentiel d'une bobine est le suivant :

- A basse fréquence, lorsque ω tend vers 0, le module de l'impédance tend vers 0 et la bobine se comporte comme un court-circuit.
- A haute fréquence, lorsque ω tend vers l'infini, le module de l'impédance tend vers 0 et la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

Remarque On comprend, après avoir calculé l'impédance caractéristique d'une bobine et d'un condensateur, pourquoi un dipôle dont l'impédance présente une partie imaginaire négative est qualifié de *capacitif* ($\Im(\underline{Z}_C) < 0$) et pourquoi un dipôle dont l'impédance présente une partie imaginaire positive est qualifié d'*inductif* ($\Im(\underline{Z}_L) > 0$).

Bilan On présente dans le tableau 2 l'impédance et le comportement en fréquence des composants usuels.

Dipôle	$\underline{Z}(\omega)$	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow \infty$
Résistor	$\underline{Z} = R$	$Z = R$	$Z = R$
Condensateur	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$	$Z \rightarrow \infty$ (interrupteur ouvert)	$Z \rightarrow 0$ (court-circuit)
Bobine	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$Z \rightarrow 0$ (court-circuit)	$Z \rightarrow \infty$ (interrupteur ouvert)

TABLE 2 – Impédance des composants usuels

3.2 Lois de Kirchhoff en régime sinusoïdal

3.2.1 Loi des nœuds

Considérons un nœud N d'un réseau électrique sur lequel arrivent p branches parcourues par des courants i_k (voir figure 5). Nous avons vu dans un chapitre précédent que la loi des nœuds se notait, dans le cadre de l'ARQS, $\sum_{k=1}^p \epsilon_k i_k = 0$ où $\epsilon_k = +1$ si le courant est orienté vers N et $\epsilon_k = -1$ si le courant s'éloigne de N .

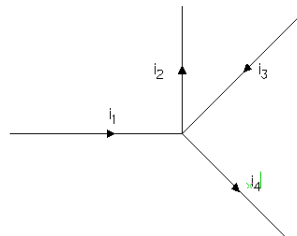


FIGURE 5 – Loi des nœuds

Cherchons comment cette loi se transpose en notation complexe, en notant comme précédemment $\underline{i}_k = \underline{I}_{m,k} e^{j\omega t}$.

.....

.....

.....

Théorème 5. Loi des nœuds en régime sinusoïdal forcé

.....

.....

.....

.....

3.2.2 Loi des mailles

Considérons une maille orientée comportant p dipôles. Nous avons vu, dans un chapitre précédent, que la loi des mailles s'écrivait alors, dans le cadre de l'ARQS, $\sum_{k=1}^p \epsilon_k u_k = 0$ avec u_k la tension aux bornes du dipôle k , $\epsilon_k = +1$ si elle est dans le sens positif choisi pour la maille et $\epsilon_k = -1$ sinon.

Cherchons comment cette loi se transpose en notation complexe, en notant comme précédemment $\underline{u}_k = \underline{U}_{m,k} e^{j\omega t}$:

.....

Théorème 6. Loi des mailles en régime sinusoïdal forcé

.....

Exemple 4. Reprenons l'exemple du circuit RC et établissons cette fois l'équation caractéristique directement à l'aide de la loi des mailles en notation complexe et des impédances complexes. On note \underline{I}_m l'amplitude complexe de l'intensité dans le circuit et $\underline{U}_{c,m}$ l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur. On cherche à exprimer \underline{U}_m

.....

Nous voyons grâce à cet exemple l'intérêt de la notion d'impédance complexe, qui permet de généraliser aux circuits en régime sinusoïdal forcé les lois de l'électrocinétique. Quand les circuits deviennent plus complexes, il peut être cependant difficile de déduire simplement des lois des mailles et des nœuds les grandeurs qui nous intéressent. On simplifie alors souvent les circuits en ayant recours à la notion d'impédance équivalente.

3.3 Association d'impédances en régime sinusoïdal forcé

3.3.1 Association en série

Considérons p dipôles associés en série, chaque dipôle k ayant une impédance complexe \underline{Z}_k . Comme les lois de l'électrocinétique se transposent aux amplitudes complexes, on en déduit que les règles d'association des impédances complexes seront les mêmes que celles vues en régime continu pour les résistances.

Théorème 7. Association en série de dipôles linéaires passifs

.....

.....

.....

.....

.....

3.3.2 Association en parallèle

Considérons p dipôles linéaires passifs d'admittances \underline{Y}_k associés en parallèle. Pour les mêmes raisons que précédemment, on transpose directement les lois d'association des résistances en parallèle aux impédances complexes.

Théorème 8. Association en parallèle de dipôles linéaires passifs

.....

.....

.....

.....

.....

Prenons maintenant quelques exemples afin de nous exercer aux calculs d'impédances complexes.

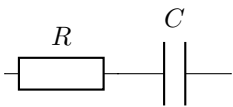
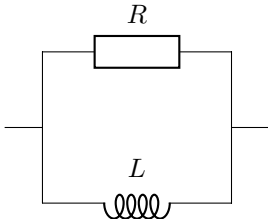
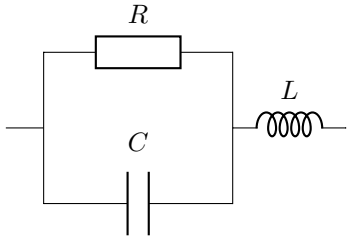
	
	
	

TABLE 3 – Exemples d'associations d'impédances

Comme les lois de Kirchhoff et les lois d'association des impédances se transposent en représentation complexe, les résultats obtenus pour les diviseurs de tension et de courant vont également rester valables en représentation complexe.

3.4 Diviseurs de tension et de courant

3.4.1 Diviseur de tension

On considère le diviseur de tension présenté en figure 6 où \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 représentent les impédances complexes de deux dipôles linéaires passifs.

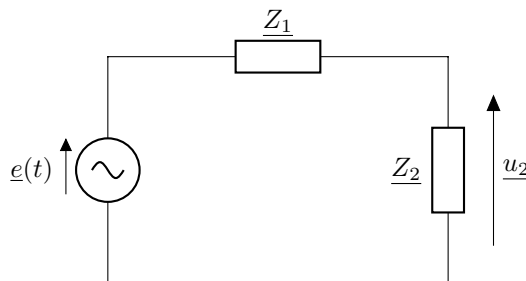


FIGURE 6 – Diviseur de tension en régime sinusoïdal forcé

Théorème 9. *Diviseur de tension en régime sinusoïdal forcé*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.4.2 Diviseur de courant

On conserve les mêmes notations que précédemment et on s'intéresse au diviseur de courant présenté en figure 7.

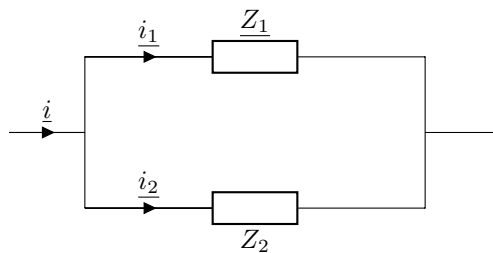


FIGURE 7 – Diviseur de courant en régime sinusoïdal forcé

Théorème 10. Diviseur de courant en régime sinusoïdal forcé

Exemple 5. Reprenons une nouvelle fois l'exemple du circuit RC , mais en le considérant cette fois ci comme un diviseur de tension. On a :

Grâce aux connaissances et aux techniques abordées lors des deux parties précédentes, nous allons pouvoir nous réintéresser à notre exemple introductif, le circuit RLC série, ce qui nous mènera à la notion de *résonance*.

4 Résonance d'intensité dans un circuit RLC série

On s'intéresse une nouvelle fois au circuit RLC série abordé en partie 1, comme représenté sur la figure 8. On se propose d'établir l'expression de l'intensité $i(t)$ en fonction de la fréquence excitatrice.

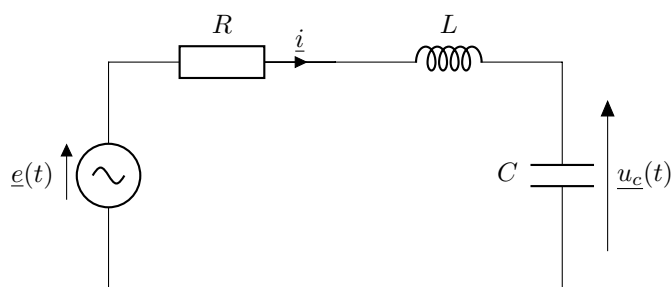


FIGURE 8 – Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

4.1 Calcul de l'intensité du courant en régime établi

Pour déterminer l'intensité dans le circuit, deux possibilités s'offrent à nous :

- On peut déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de l'intensité dans le circuit et passer ensuite en notation complexe pour la résoudre. On applique pour cela la loi des mailles avec les signaux réels :

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t)$$

$$\frac{de(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t)$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt}$$

Avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la pulsation propre et $\xi = \frac{R}{2}\sqrt{C/L}$ le taux d'amortissement, lié au facteur de qualité Q par la relation $\xi = \frac{1}{2Q}$.

Il faudrait ensuite passer en notation complexe pour déduire l'intensité $i(t)$.

- On peut également utiliser directement la représentation complexe et appliquer la loi des mailles aux amplitudes complexes des signaux. On associe à $i(t)$ la grandeur complexe $\underline{i} = \underline{I_m} e^{j\omega t}$ et à $e(t)$ la grandeur $\underline{e} = E e^{j\omega t}$ ($e(t)$ est choisi comme origine des phases). L'application de la loi des mailles donne alors directement :

.....

.....

.....

.....

Réexprimons cette dernière expression en fonction de la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et du facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Amplitude complexe de l'intensité dans le circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

On peut finalement déduire du calcul précédent le module et l'argument de \underline{I}_m :

Module et argument de \underline{I}_m

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Afin de visualiser l'allure de ces grandeurs, représentons le module et l'argument de \underline{I}_m en fonction de la pulsation réduite x , comme présenté en table 4.

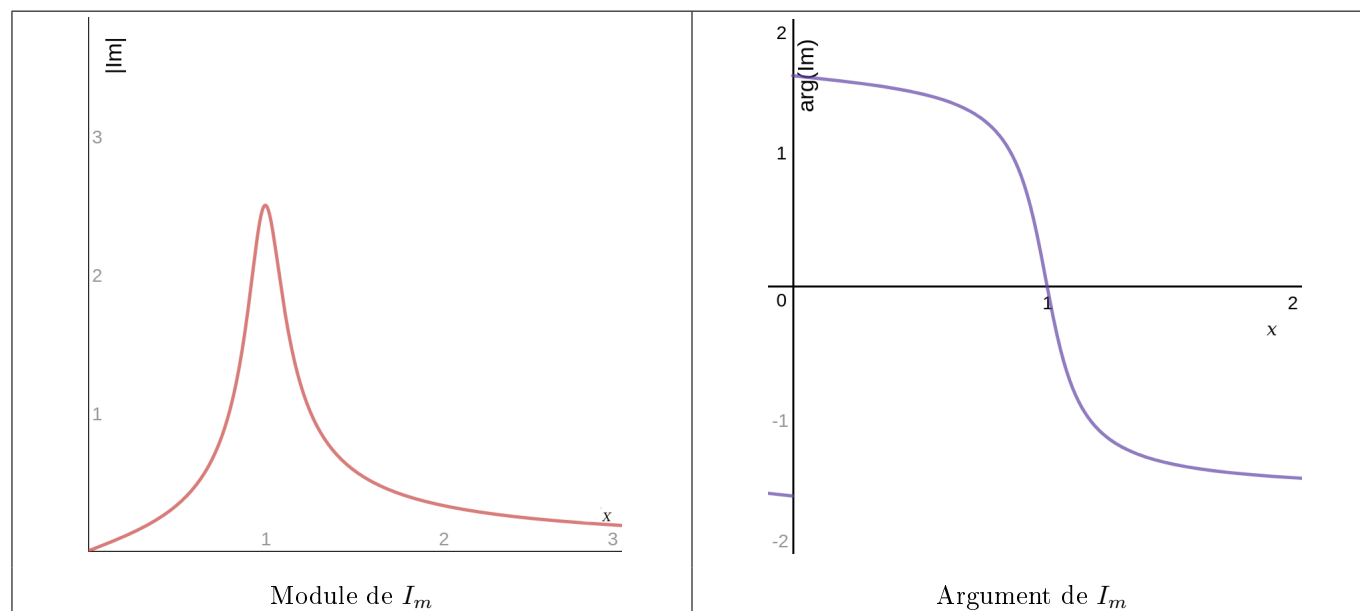


TABLE 4 – Module et argument de \underline{I}_m représentés pour $Q = 5$, $R = 100\Omega$, $C = 1\mu F$ et $L = 0,4mH$.

Nous voyons grâce au graphique de gauche que le module de \underline{I}_m , c'est à dire l'amplitude de l'intensité dans le circuit passe par un maximum pour $w = 1$, c'est le phénomène de *résonance* que nous allons détailler dans la partie suivante. Mais tout d'abord, vérifions grâce à une étude aux limites que nos résultats sont compatibles avec les graphiques présentés.

Étude aux limites du module

- Lorsque $\omega \rightarrow 0$, on a $I_m \approx I_0 w$. La pente à l'origine n'est donc pas nulle, c'est bien ce que l'on observe sur le graphique.
- Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, on a $I_m \approx \frac{I_0}{x}$, l'intensité tend vers 0 à la manière d'une fonction inverse.
- Lorsque $\omega = \omega_0$, c'est à dire $w = 1$, on a $I_m = I_{m,max} = Q I_0$.

Étude aux limites de la phase

-
-
-

-
-
-
-
-
-

Ces comportements correspondent bien à ce que l'on observe sur les graphiques.

4.2 Résonance d'intensité

On constate que, lorsque la pulsation réduite vaut 1, c'est à dire, lorsque $\omega = \omega_0$, l'amplitude de l'intensité passe par un maximum, quelle que soit la valeur des composants, donné par :

$$I_{m,max} = QI_0 = \frac{QE}{L\omega_0} = \frac{E}{R} \quad \text{pour} \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On constate que l'amplitude de l'intensité à la résonance est proportionnelle au facteur de qualité, et donc inversement proportionnelle à la résistance. L'intensité à la résonance est donc d'autant plus grande que l'amortissement est faible. On constate également que l'intensité et la tension excitatrice du générateur sont en phase à la résonance (en effet, $\arctan(0) = 0$).

Définition 8. *Résonance en intensité*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ceci va nous amener à une définition plus large du phénomène de résonance :

Définition 9. *Résonance*

.....

.....

.....

.....

.....

Étudions plus en détail l'expression de I_m .

$$I_m = I_0 \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}$$

Faisons varier Q (par exemple en jouant sur R), et observons le résultat, présenté dans la figure 9, où Q varie de bas en haut de 1 à 5.

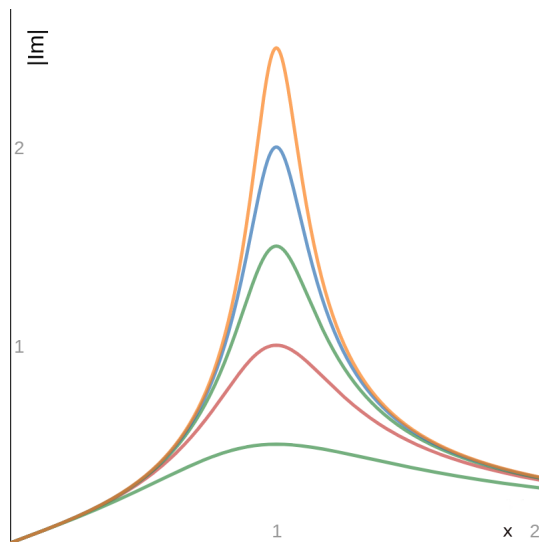


FIGURE 9 – $I_m = f(x)$ pour Q variant de 1 à 5

On constate que, plus le facteur de qualité est élevé, plus la valeur maximale de I_m est élevée (ce qui est logique, puisque $I_{m,max} = QI_0$) et plus le pic de résonance est étroit. Nous allons maintenant voir comment cette largeur de résonance est liée au facteur de qualité.

4.3 Largeur de résonance et facteur de qualité - Acuité

Définition 10. *Largeur de la courbe de résonance - acuité*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Théorème 11. *Acuité de la résonance facteur de qualité*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nous venons de voir qu'il existait une résonance d'intensité dans le circuit RLC en régime sinusoïdal forcé. La question qui se soulève dès lors est : existe-t-il également une résonance en tension aux bornes du condensateur ? C'est à cette question que nous chercherons à répondre dans la partie suivante.

5 Résonance en tension du circuit RLC série

5.1 Calcul de la tension aux bornes du condensateur

On s'intéresse toujours au circuit présenté en figure 8, mais on souhaite cette fois exprimer la tension aux bornes du condensateur. On peut pour cela appliquer la formule du pont diviseur de tension aux amplitudes complexes. On obtient alors :

.....

.....

.....

On introduit comme précédemment la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$ et la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

.....

.....

.....

Soit finalement :

Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur

Remarque Nous aurions également pu calculer $\underline{U}_{c,m}$ grâce à \underline{I}_m et à la relation $\underline{U}_{c,m} = \underline{Z}_C \underline{I}_m$.

5.2 Étude du module - Résonance en tension

Le module de l'amplitude complexe est donné par :

Module de l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur

On peut d'ores et déjà remarquer que $U_{c,m}(0) = E$, ce qui correspond bien à la solution particulière du régime continu. On remarque également que $\lim_{x \rightarrow \infty} u_{c,m}(x) = 0$. La question est maintenant de savoir si cette amplitude passe par un maximum, pour savoir s'il y a ou non résonance. On introduit pour cela la fonction $f(x) = (1 - x^2)^2 + (x/Q)^2$ et on dérive $U_{c,m}(x)$ par rapport à x :

Résonance en tension d'un circuit RLC série

Afin de visualiser le phénomène de résonance, la figure 10 présente $U_{c,m}$ en fonction de w pour différentes valeurs de Q .

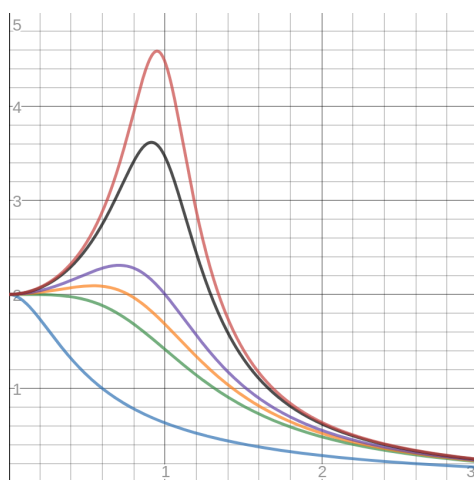


FIGURE 10 – $U_{c,m} = f(x)$ pour $Q = 0, 1 ; 0, 3 ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; 1 ; 3 ; 5$ et $E = 2 \text{ V}$

On observe bien qu'il n'y a pas de résonance pour $Q \leq 1/\sqrt{2}$.

Nous nous sommes intéressés au module de $\underline{U}_{c,m}$, étudions maintenant l'argument.

5.3 Étude de la phase

Rappelons dans un premier temps l'expression de $\underline{U}_{c,m}$:

$$\underline{U}_{c,m} = \frac{E}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$$

Étude aux limites

-
-
-

On constate que cette fois-ci, à la résonance, la tension aux bornes du condensateur est en retard de phase de $\pi/2$ ar rapport à la tension excitatrice. Cette étude asymptotique est compatible avec le résultat présenté sur la figure 11.

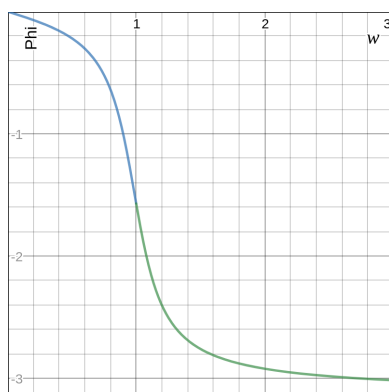


FIGURE 11 – Évolution de φ en fonction de w pour $Q = 3$

Conclusion

Ce chapitre nous a permis, grâce à l'introduction de nouveaux outils tels que la représentation complexe, d'étudier des systèmes en régime sinusoïdal forcé et de découvrir la notion de *résonance*. Ce dernier concept présente une grande généralité en physique puisqu'il apparaît dans de nombreux domaines. Nous ne l'avons ici abordé que d'un

point de vue électrocinétique mais nous verrons, dès le semestre suivant, son analogie mécanique. À noter que de tels phénomènes de résonances se manifestent dans d'autres domaines de la physique, par exemple en optique (on peut penser à l'interféromètre de Fabry-Pérot et aux cavités résonantes) ou en physique quantique, avec la résonance magnétique nucléaire.