7. Mouvements à force centrale

Introduction

Nous avons dans le chapitre précédent étudié le théorème du moment cinétique. Nous allons dans ce chapitre nous intéresser à l'une de ses applications majeures en étudiant le mouvement d'un mobile ponctuel dans un champ de forces centrales. Nous nous placerons pour cela tout au long de ce chapitre dans un référentiel que nous noterons $\mathscr{R}$ et que nous supposerons galiléen.

Ce problème présente une importance majeure dans l'histoire de la physique, puisque la résolution par Newton du problème de Kepler (relevant d'un mouvement à force centrale) grâce aux lois de la dynamique constitue un des triomphes de la mécanique classique. D'autres exemples existent cependant, notamment l'expérience de diffusion de Rutherford qui s'interprète également à l'aide des outils que nous allons développer dans ce chapitre. Avant de nous lancer dans la résolution de problèmes complexes tels que celui-ci, intéressons nous tout d'abord à la définition d'une *force centrale*.

7.1 Force centrale

7.1.1 Définition

Définition 7.1.1 — Force centrale. ....

....

....

R Le centre de force O n'est en réalité que rarement fixe dans le cas des forces gravitationnelles, qui sera largement abordé dans ce chapitre. Le centre du Soleil n'est par exemple pas fixe et se déplace faiblement par rapport au centre de gravité du système solaire. Les résultats développés ici constituent donc une approximation. [1]

Dans toute la suite de ce cours, nous supposerons le centre de force O *fixe* dans le référentiel $\mathscr{R}$ galiléen d'étude.

7.1.2 Exemples

Nous nous proposons de donner ici quelques exemples de forces centrales :

1. Ils présentent cependant une grande généralité, comme vous le verrez dans la suite de votre cursus, le mouvement de deux particules dans un champ de forces gravitationnelles pouvant se ramener à l'étude d'une particule fictive dans un champ de forces centrales.

— **Tension d'un fil** : La tension $\overrightarrow{T}$ exercée par un fil inextensible sur un point matériel M fixé à son extrémité est une force centrale, pour peu que le point d'attache O du fil soit fixe. En effet, $\overrightarrow{T}$ est alors en permanence dirigée vers le point d'attache O.

— **Force de rappel élastique** : Il en va de même pour la force de rappel élastique qui peut s'écrire :

$$\overrightarrow{F}_r = -k\,\overrightarrow{OM}$$

Où $\overrightarrow{OM} = (l - l_0)\,\overrightarrow{u_x}$ désigne l'allongement du ressort, $\overrightarrow{u_x}$ étant orienté dans le sens des allongements positifs. Le point O est généralement fixe, et la force de rappel élastique est donc une force centrale.

— **Force de gravitation** : Considérons la force exercée par une masse m' fixe située à l'origine O d'un repère sur une masse m située au point M. Celle-ci se met alors sous la forme :

$$\overrightarrow{F}_g = -\mathscr{G}mm'\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3}$$

On voit dès lors que la force est en permanence dirigée vers le point O. Comme celui-ci est fixe, il s'agit bien d'une force centrale.

— **Force d'interaction électrostatique** : Considérons la force exercée par une charge q' placée à l'origine O fixe d'un repère sur une charge q placée au point M. De manière analogue au cas précédent, cette force peut s'écrire :

$$\overrightarrow{F}_e = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3}$$

En suivant le même raisonnement que pour le cas de la force gravitationnelle, on déduit qu'il s'agit bien également d'une force centrale.

7.2 Propriétés générales des mouvements à force centrale

7.2.1 Conservation du moment cinétique

Dans toute la suite, nous considérons le cas d'un mobile M de masse m, en mouvement relativement au référentiel galiléen $\mathscr{R}$ sous l'effet d'une force centrale $\overrightarrow{F}$, de centre de force O.

Calculons le moment de la force centrale par rapport au point O :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_{O,F} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$

Or, comme la force est centrale, Elle est dirigée suivant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (ceci est logique, puisqu'elle s'applique au point M et passe par le point O). D'après la définition du produit vectoriel, on a donc :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_{O,F} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

Or, le théorème du moment cinétique calculé par rapport au point O stipule que :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O}{dt} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_{O,F} = \overrightarrow{0}$$

On en déduit que, pour un mouvement à force centrale, *le moment cinétique est une constante du mouvement*, il s'agit donc *d'une intégrale première du mouvement*.

Théorème 7.2.1 — Conservation du moment cinétique. ....

....

....

7.2.2 Conséquences - Planéité du mouvement et loi des aires

Planéité du mouvement

Nous allons démontrer ici que la conservation du moment cinétique entraîne que le mouvement est plan.

Le moment cinétique est constant, *au sens vectoriel du terme*, c'est à dire :

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}$$

Le fait que $\overrightarrow{L}_O$ soit constant entraîne que sa norme, sa direction et sons sens sont constants. Par définition du produit vectoriel, nous déduisons les assertions suivantes :
— $\overrightarrow{OM}$ est en permanence orthogonal à $\overrightarrow{L}_O$.
— $\overrightarrow{v}$ est en permanence orthogonal à $\overrightarrow{L}_O$.
Comme $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{L}_O$, ils sont tous deux contenus dans le plan de normale $\overrightarrow{L}_O$. Or, comme le moment cinétique est constant, le plan de normale $\overrightarrow{L}_O$ est immobile dans $\mathscr{R}$. Il s'ensuit que le mouvement est contenu dans le plan passant par O et orthogonal à $\overrightarrow{L}_O$.

Théorème 7.2.2 ....

....

....

Comme le mouvement est plan, nous choisirons à partir de maintenant les conventions suivantes :
— Nous désignerons par $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ le plan du mouvement. L'axe $\overrightarrow{u_z}$ est alors confondu avec le moment cinétique $\overrightarrow{L}_O$.
— Nous étudierons le mouvement de M dans le plan $z = 0$ en le repérant par ses coordonnées polaires $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM}})$ comme présenté sur la figure 7.1.

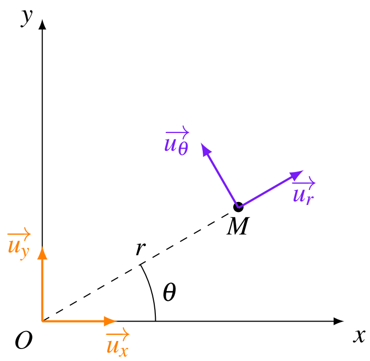

FIGURE 7.1 – Notations

Loi des aires

Nous avons dans la sous partie précédente démontré que le moment cinétique était constant, explicitons mathématiquement cela à l'aide des notations utilisées.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

. . . .

On en déduit que la grandeur $C = r^2\dot{\theta}$ est également constante. Cette constante, mesurée en m².s⁻¹ est appelée *constante des aires*.

Théorème 7.2.3 . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

R La constante des aires C est une grandeur algébrique, son signe sera celui de $\dot{\theta}$. Le signe de C dépendra donc du choix du repère (via l'orientation de θ).

— Si $C > 0$ alors on aura $\dot{\theta} > 0$ et le mouvement s'effectuera dans le sens *direct*.
— Dans le cas contraire où $C < 0$, on a $\theta < 0$ et le mouvement s'effectuera dans le sens *indirect*.

On peut par la suite s'interroger sur l'appellation de cette constante. Pourquoi la dénomination *constante des aires* ? Afin de l'expliquer, considérons la figure 7.2.

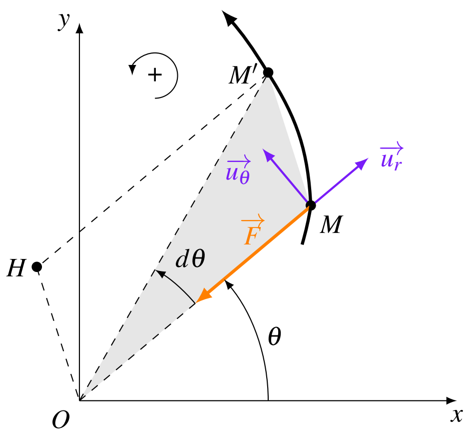

FIGURE 7.2 – Constante des aires

Sur cette figure, on considère deux positions $M(t)$ et $M'(t+dt)$ infiniment proches occupées successivement par le point mobile considéré. Nous allons ici chercher à relier la constance C à l'aire balayée par le vecteur position pendant l'instant infinitésimal dt (surface grisée sur la figure). Comme les points M et M' sont infiniment proches, on peut assimiler la courbe $\widehat{MM'}$ au segment $[MM']$.

La surface à calculer est donc celle du triangle OMM', qui correspond à la moitié de l'aire du parallélogramme $OMM'H$. L'aire d'un parallélogramme peut être calculée grâce au produit vectoriel de deux de ses côtés, on a donc, en notant $d\mathscr{A}$ l'aire du triangle :

$$d\mathscr{A} = \frac{1}{2}\,||\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'}||$$

Or, comme le mobile se déplace à la vitesse $\vec{v}$, on peut noter :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}\,dt$$

On a alors :

$$|d\mathscr{A}| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}||dt = \frac{1}{2m}||m\,\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}||dt$$

On reconnaît l'expression du moment cinétique. Or, nous avons prouvé précédemment la relation :

$$||\vec{L}_O|| = m\,|C|$$

Où C est la constante des aires. On a donc :

$$|d\mathscr{A}| = |\frac{C}{2}|\ dt$$

On introduit la vitesse aréolaire $\frac{d\mathscr{A}}{dt}$ qui correspond à la vitesse à laquelle le vecteur position balaie une aire donnée sur la trajectoire. Autrement dit, pendant le temps dt, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ balaie une aire sur la trajectoire égale à $\frac{d\mathscr{A}}{dt}dt$.

On a donc :

$$|\frac{d\mathscr{A}}{dt}| = |\frac{C}{2}|$$

Nous avons jusqu'ici raisonné avec des valeurs absolues, la relation précédente est en fait algébrique et peut se réécrire :

$$\frac{d\mathscr{A}}{dt} = \frac{C}{2}$$

— Si $C > 0$, la vitesse aréolaire est positive et témoigne du sens direct du mouvement.
— Si $C < 0$, la vitesse aréolaire est cette fois négative et témoigne du sens indirect du mouvement.

Le résultat obtenu ci-dessus est appelé *loi des aires* et s'exprime comme suit.

Loi 7.2.4 — Loi des aires. ....

....

....

....

....

....

....

R Cette relation, comme nous le rappellerons plus loin dans ce chapitre, est également connue sous le nom de *deuxième loi de Kepler*.

Résumé de la démarche

Lors de l'étude d'un mouvement à force centrale, les résultats précédents doivent être obtenus dans l'ordre logique qui suit :

— Comme toutes les forces sont centrales, le moment cinétique est constant.
— Comme le moment cinétique est constant, le mouvement est plan.
— Comme le mouvement est plan, on peut utiliser les cordonnées polaires pour calculer le moment cinétique, et en déduire l'expression de la constante des aires.
— Une fois cette constante déterminée, on peut trouver la loi des aires.

Nous nous sommes intéressés dans la partie précédente à un mouvement à force centrale quelconque. Dans la plupart des problèmes que nous rencontrerons, les forces rencontrées seront de plus *conservatives*. C'est pourquoi nous allons nous intéresser plus en détail à ce type de problème dans la partie suivante.

7.3 Forces centrales conservatives

7.3.1 Forces centrales conservatives et énergie potentielle

Expression générale

Rappelons tout d'abord qu'une force $\overrightarrow{F}$ est *conservative* si elle dérive d'une énergie potentielle $\mathscr{E}_p$, ce qui est le cas si le travail élémentaire de cette force peut s'écrire :

$$\delta W = -d\mathscr{E}_p \qquad \text{soit} \qquad \mathscr{P}_F = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dt}$$

Considérons maintenant un point M en mouvement par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ supposé galiléen sous l'action d'une force centrale de centre O. Cette force pourra s'écrire de manière tout à fait générale, dans une base sphérique :

$$\overrightarrow{F} = F\ \overrightarrow{u_r} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||}$$

Où F peut à priori être une fonction de n'importe quelle variable. Supposons de plus que la force soit invariante par rotation autour de O, cela signifie alors qu'aucune variable angulaire n'intervient dans l'expression de F. F ne pourra dépendre que de la distance au centre de force O, d'où :

$$\overrightarrow{F} = F(r)\ \overrightarrow{u_r}$$

Cette hypothèse peut sembler « brutale », elle est en fait tout à fait logique, si $\overrightarrow{F}$ passe par O quel que soit le point M considéré, il y aura bien invariance par rotation. Ainsi, dans la majorité des cas physiques que nous rencontrerons, les forces centrales ne dépendront que de la variable r.

Calculons la puissance de cette force, grâce à la relation :

$$\mathscr{P}_F = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$$

En coordonnées sphériques, nous avions vu que la vitesse pouvait s'exprimer grâce à la relation :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\ \overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\ \overrightarrow{u_\varphi}$$

On en déduit que la puissance se met sous la forme :

$$\mathscr{P}_F = F(r)\dot{r}$$

Supposons maintenant que $F(r)$ admette une primitive telle que :

$$\int F(r)dr = -\mathscr{E}_p + cste$$

Ce qui est vrai si $F(r)$ est continue, ce qui est toujours le cas en physique. On a alors :

$$F(r) = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dr}$$

Et la puissance peut se réécrire comme :

$$\mathscr{P}_F = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dt}$$

On en déduit qu'une force centrale de la forme $\overrightarrow{F} = F(r)\ \overrightarrow{u_r}$ dérive toujours d'une énergie potentielle.

Théorème 7.3.1 ....

....

....

....

....

Ce théorème généralise les résultats obtenus dans le chapitre d'énergétique, comme nous allons le voir dans la sous partie suivante, en abordant quelques exemples, concernant les forces conservatives usuelles.

Exemple 7.3.2 — Force d'interaction gravitationnelle. La force exercée par un point matériel M_0 de masse m_0, fixe à l'origine O d'un repère sphérique $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta, u_\varphi}\}$ sur un point M de masse m est donnée par l'expression :

$$\overrightarrow{F}_g = -\mathscr{G}\frac{m_0 m}{r^2}\overrightarrow{u_r} = F_g(r)\ \overrightarrow{u_r}$$

Prouvons que cette force est conservative, calculons pour cela le travail élémentaire δW de cette force, on a, en coordonnées sphériques :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Notons que l'énergie potentielle *négative* est caractéristique d'une force *attractive*. On peut également remarquer que, en raison de la faible valeur de la constante fondamentale $\mathscr{G}$, les effets de la force gravitationnelle ne se font ressentir que quand les masses considérées sont très importantes (par exemple, pour la terre, on a $M_T = 5,972.10^{24}$ kg). ■

■ **Exemple 7.3.3 — Force d'interaction coulombienne.** L'expression de la force électrostatique exercée par une charge q_0 placée à l'origine d'un repère sphérique sur une charge q est très semblable à celle de la force d'interaction gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\overrightarrow{u_r} = F_e(r)\,\overrightarrow{u_r}$$

On est une nouvelle fois dans le cas décrit précédemment, l'expression de l'énergie potentielle électrostatique est donc donnée par :

$$\mathscr{E}_p = \int F_e(r)dr = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + cste$$

On choisit une nouvelle fois l'origine des potentiels à l'infini, d'où :

$$\mathscr{E}_p = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Notons que l'énergie potentielle peut dans ce cas là être positive où négative, traduisant le caractère attractif de la force électrostatique dans le cas de charges de signes opposés, et de son caractère répulsif dans le cas de charges de même signe. ■

■ **Exemple 7.3.4** Nous pourrions également appliquer les résultats précédents à la force de rappel élastique, mais ce résultat ayant déjà été établi dans le chapitre d'énergétique, nous ne le traiterons pas de nouveau ici. ■

7.3.2 Mouvements et forces centrales conservatives

Le fait que les forces en présence soient toutes conservatives nous invite à essayer de traiter le problème par une approche énergétique, à travers la notion *d'énergie potentielle effective*.

Énergie potentielle effective

Considérons un point matériel M soumis à une force conservative $\overrightarrow{F}$ de centre de force O. Nous avons établi précédemment que le mouvement était *plan*. On peut donc repérer la position du pont M par ses cordonnées polaires (r,θ) dans la base $\{\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\}$, sa vitesse est alors donnée par la relation :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

L'énergie cinétique du mobile peut alors s'écrire :

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Or, nous avons précédemment introduit la *constante des aires* C, définie par la relation :

$$C = r^2\dot{\theta} \qquad \text{d'où} \qquad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

L'énergie cinétique se réécrit comme une fonction de r uniquement :

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right)$$

Nous considérons un système conservatif, cela implique que l'énergie mécanique se conserve. On peut donc faire apparaître l'intégrale première du mouvement suivante :

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) + \mathscr{E}_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \mathscr{E}_p(r)$$

Car nous avons prouvé précédemment que l'énergie potentielle ne dépendait que de la variable radiale r. Nous avions vu précédemment que, dans le cas d'un problème conservatif à un degré de liberté (unidimensionnel) décrit par la variable q [2], l'énergie mécanique pouvait toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}I(q)\dot{q}^2 + \mathscr{E}_p(q)$$

On remarque que l'expression de l'énergie mécanique peut s'écrire sous la forme de celle d'un problème unidimensionnel conservatif, pour peu que l'on introduise la grandeur :

$$\mathscr{E}_{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} + \mathscr{E}_p(r)$$

appelée *énergie potentielle effective*. On a alors :

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathscr{E}_{p,eff} \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{E}_{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} + \mathscr{E}_p(r) \tag{7.1}$$

Théorème 7.3.5 — Énergie potentielle effective. ....

....

....

....

....

....

....

L'intérêt d'introduire cette grandeur est de nous permettre d'utiliser tous les outils étudiés lors de l'analyse des mouvements unidimensionnels conservatifs. Il va dès lors être facile de mener une étude *qualitative* du mouvement, comme nous allons le faire dans la sous-partie suivante.

2. cf Chapitre « Aspects énergétiques de la mécanique du point ».

Différents types de mouvement

Nous allons voir ici que l'étude du graphe $\mathscr{E}_{p,eff} = f(r)$ va nous permettre d'obtenir des informations précieuses sur la nature du mouvement. Nous ne considérerons ici que le cas d'une *force conservative attractive* de la forme $-\frac{k}{r^2}$,où k est une constante positive, de sorte que l'énergie potentielle $\mathscr{E}_p(r)$ est *négative.*

L'énergie potentielle effective comporte alors deux contributions :

— L'énergie potentielle d'interaction de la force centrale attractive considérée, qui est négative, en $-k/r$.

— Le terme $\frac{mC^2}{2r^2}$ qui est positif.

Aux faibles valeurs de r, le terme en $\frac{1}{r^2}$ va être prépondérant, de sorte que l'énergie potentielle effective sera positive. Quand r tendra vers l'infini, $\mathscr{E}_{p,eff}$ tendra vers 0.[3] Enfin, elle sera négative sur une certaine portion, où le terme en $\frac{-k}{r}$ l'emportera sur le terme en $\frac{1}{r^2}$. Le résultat est présenté sur la figure 7.3.

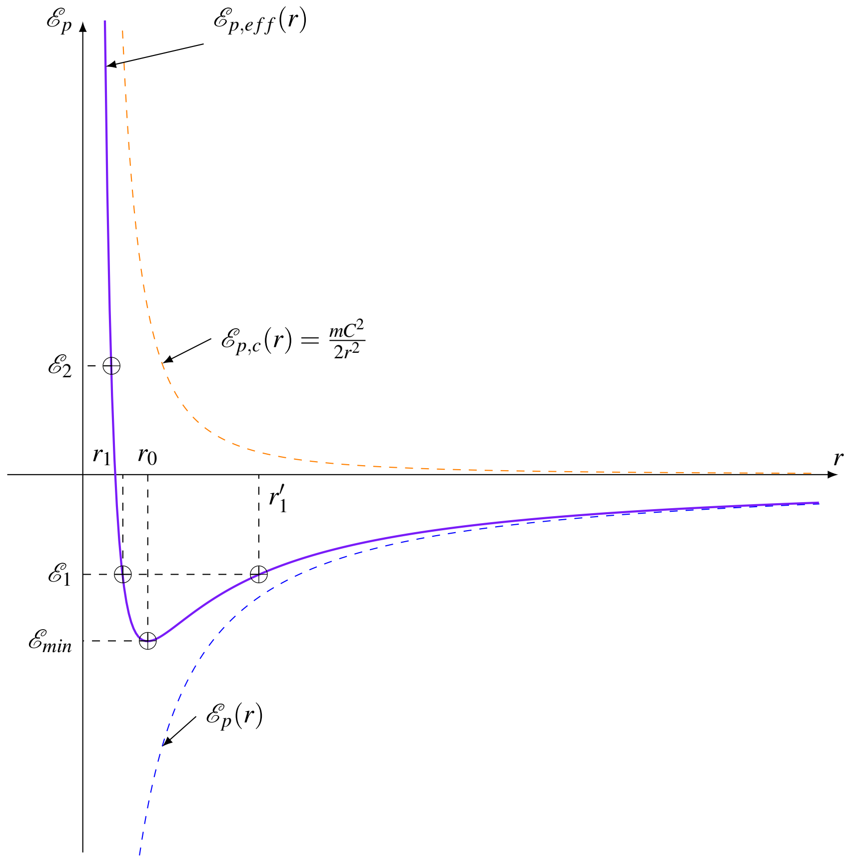

FIGURE 7.3 – Énergie potentielle effective

Nous avons, comme la masse est toujours positive :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathscr{E}_m - \mathscr{E}_{p,eff} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{E}_m \geq \mathscr{E}_{p,eff}$$

L'analyse est ici la même que celle réalisée dans le chapitre d'énergétique lors de la distinction entre état lié et état de diffusion. Plusieurs cas sont possibles en fonction de la valeur de l'énergie mécanique considérée, qui, rappelons le, dépend des conditions initiales.

— Si l'énergie mécanique est inférieure à la valeur $\mathscr{E}_{min}$, aucun mouvement n'est possible, il n'existe aucune solution mathématique des équations du mouvement.

— Lorsqu'on se trouve à la valeur limite $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_{min}$, alors on a obligatoirement $r = r_0$. Le rayon de la trajectoire est constant et le mouvement est forcément *circulaire*. Le mouvement étant borné (la particule ne peut pas partir à l'infini), on parle *d'état lié*.

— Lorsque $\mathscr{E}_m < 0$, comme c'est par exemple le cas pour $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_1$, alors la particule est astreinte à se déplacer dans la zone de l'espace délimitée par l'intervalle $[r'_1; r''_1]$. Le mouvement étant borné, on parle une nouvelle fois d'état lié.

3. En raison du choix de l'origine des potentiels.

— En revanche, si $\mathscr{E}_m > 0$, comme c'est par exemple le cas pour $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_2$, alors on peut avoir $\mathscr{E}_m > \mathscr{E}_{p,eff}$ quelle que soit la valeur de r. L'objet matériel considéré peut partir à l'infini et on parle alors *d'état de diffusion* ou *d'état libre*.

Comme nous le verrons plus tard, dans le cas d'un état lié, la trajectoire est une ellipse [4]. Dans le cas d'un état de diffusion, la trajectoire est hyperbolique (pour $\mathscr{E}_m > 0$) ou parabolique (pour $\mathscr{E}_m = 0$).

L'étude précédente, bien que riche d'enseignements, ne nous donne que des informations qualitatives sur le mouvement. On se propose dans la partie suivante de nous consacrer plus spécifiquement à l'étude d'une force centrale conservative de type gravitationnelle [5], cas où les lois de Kepler nous renseignent sur la nature plus précise du mouvement.

7.4 Mouvements des satellites et des planètes - Lois de Kepler

7.4.1 Lois de Kepler

Nous nous limiterons à partir de maintenant à l'étude de la force d'interaction gravitationnelle. On considérera une masse m_0 située à l'origine du repère, fixe, attirant à elle une masse m repérée par ses coordonnées polaires dans le plan du mouvement. En gardant cela à l'esprit, nous allons maintenant pouvoir énoncer les lois de Kepler.

Les lois de Kepler ont été établies empiriquement au XVII$^{\text{ème}}$ siècle par Johannes Kepler, qui s'appuya pour ce faire sur les observations et relevés expérimentaux de Tycho Brahe, astronome de la cour de Prague. Il existe trois lois de Kepler que nous allons énoncer ci-après.

Loi 7.4.1 — Lois de Kepler. Il existe trois lois de Kepler, connues respectivement sous le nom de *loi des orbites*, *loi des aires* et *loi des périodes*.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

R

— Les lois de Kepler, énoncées ici dans le cas particulier du système solaire et de l'interaction gravitationnelle, sont en réalité valables pour tout problème à force centrale conservative de type $\overrightarrow{F} = -k/r^2\ \overrightarrow{u_r}$. Elles s'appliquent donc également par exemple au mouvement des satellites autour de la Terre.

— La loi des aires a été démontrée précédemment dans le cas général d'un mouvement à force centrale.

4. Voir les lois de Kepler.
5. Les résultats obtenus seront bien sur généralisables à toute force newtonienne attractive, en $-k/r^2$.

7.4.2 Description de la trajectoire elliptique

Commençons par effectuer quelques brefs rappels sur les ellipses. Une ellipse est définie comme le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constante. En appelant F et F' les foyers, l'ellipse est donc définie comme l'ensemble des points M tels que :

$$FM + F'M = cste$$

L'allure d'une ellipse est représentée sur la figure 7.4.

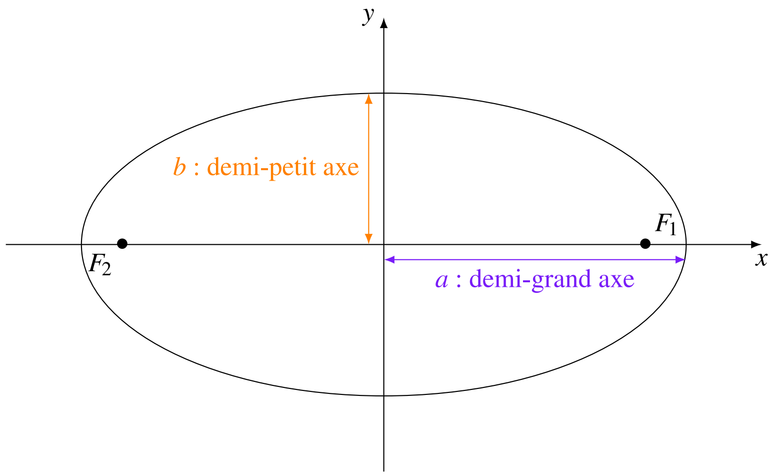

FIGURE 7.4 – Caractéristiques d'une ellipse

Sur cette figure sont représentés les deux foyers de l'ellipse. La longueur a est appelée *demi-grand-axe* et la longueur b est appelée *demi-petit axe*.

Intéressons nous maintenant plus précisément à la trajectoire elliptique d'une planète autour du Soleil. Nous nous référerons pour cela à la figure 7.5.

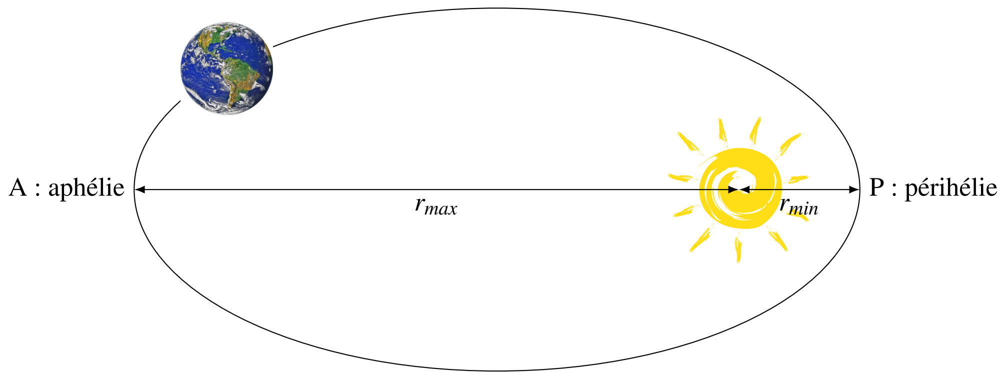

FIGURE 7.5 – Trajectoire elliptique d'une planète

Le Soleil (ou dans le cas de la figure 5 traitant du mouvement d'un satellite autour de la Terre, la Terre), centre de force, est confondu avec l'un des foyers de l'ellipse.

On observe ensuite que la distance de l'objet au centre attracteur varie entre deux valeurs limites, correspondant aux points A et P sur la figure 7.5. Un vocabulaire particulier est associé à ces deux points.

— Si l'on s'intéresse au mouvement d'une planète autour du Soleil (comme sur la figure) :
  — Le point P est appelé *périhélie*.
  — Le point A est appelé *aphélie*.
— Si l'on s'intéresse au mouvement d'un satellite autour de la Terre :
  • Le point P est appelé *périgée.*
  • Le point A est appelé *apogée*.

On remarque que la distance AP correspond à deux fois le demi-grand axe de l'ellipse, d'où la relation :

$$a = \frac{AP}{2}$$

Au point A, la distance r, repérée par rapport au centre de force est maximale mais la vitesse est *minimale*. En effet, l'énergie mécanique est donnée par :

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \mathscr{G}\frac{mm_0}{r} = cste$$

Ainsi, plus r est grand, plus la norme de la vitesse v doit être faible. Réciproquement, en P, le rayon est minimal, la vitesse est donc maximale.

R Ce résultat est cohérent avec la loi des aires, pour balayer des aires égales en un temps égal, il faut que le mobile considéré ait une vitesse plus élevée en P qu'en A.

On notera que, en A et en P, la vitesse est orthoradiale, on a alors $\dot{r} = 0$.

Connaissant maintenant les caractéristiques d'une ellipse, montrons que l'énergie mécanique du mobile suivant une trajectoire elliptique peut s'exprimer uniquement en fonction des caractéristiques de celle-ci.

7.4.3 Énergie mécanique pour une orbite elliptique

Cherchons à donner l'expression de l'énergie mécanique uniquement en fonction du demi-grand axe et de constantes. L'énergie mécanique s'écrit, comme nous l'avons vu précédemment, suivant :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

On vérifie bien, comme nous l'avions prévu, que l'énergie mécanique est *négative*.

L'étude plus approfondie de la trajectoire, et notamment sa méthode d'obtention (méthode de Binet), n'est pas au programme de cette année. Nous allons nous contenter d'étudier ce mouvement dans un cas simple, celui d'un mouvement circulaire.

7.5 Cas particulier - Étude d'un mouvement circulaire

L'étude du cas d'un mouvement circulaire est particulièrement riche d'intérêt, d'une part car de nombreux satellites présentent un mouvement quasiment circulaire autour de la Terre, et d'autre part car la simplicité des calculs permet plus facilement de faire sortir un sens « physique » des équations manipulées.

7.5.1 Mouvement uniforme

Démontrons dans un premier temps que le mouvement est uniforme dans le cas d'une trajectoire circulaire. Rappelons nous que le moment cinétique se conserve. En notant R le rayon de la trajectoire, nous avons donc, en nous plaçant comme précédemment dans une base polaire $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}\}$:

$$\overrightarrow{L}_O = R\overrightarrow{u_r} \wedge R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = R^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{cste}$$

Or, comme la trajectoire est circulaire, le rayon R est constant, il en découle que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est également constante.

Théorème 7.5.1 ....

....

....

....

....

R Ce résultat pouvait également se déduire de la loi des aires.

Cherchons maintenant la *période* du mouvement.

7.5.2 Calcul de la période du mouvement

Appliquons la loi fondamentale de la dynamique au point M de masse m, soumis à la force gravitationnelle qu'exerce sur lui le corps M_0 de masse m_0 situé à l'origine du repère polaire choisi pour décrire le problème. Comme dans l'intégralité de ce chapitre, nous nous plaçons dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen. Nous avons alors :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

On obtient ainsi la troisième loi de Kepler (loi des périodes), pour un mouvement circulaire.

Théorème 7.5.2 — Troisième loi de Kepler pour un mouvement circulaire. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

■ **Exemple 7.5.3 Période de révolution de Hubble** Le télescope spatial Hubble tourne autour de la Terre à une altitude de 590 km suivant une orbite circulaire. Calculons sa période de révolution. Il nous faut tout d'abord déterminer le rayon R de la trajectoire, somme du rayon $R_T \approx 6400$ km de la Terre et de l'altitude h du satellite, comptée à partir du sol. On a donc :

$$R = R_T + h = 6400 + 590 = 6990\ km$$

Afin de déterminer la période de révolution, il nous faut également connaître la masse de la Terre, on prendra $M_T = 5{,}972.10^{24}$ kg. Nous avons alors :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mathscr{G} M_T}} = 5818\ s = 97\ min$$

■

Continuons d'exprimer les grandeurs caractéristiques dans le cas du mouvement circulaire en nous intéressant cette fois à l'expression de l'énergie mécanique.

7.5.3 Énergie mécanique pour une orbite circulaire

Partons de l'expression de l'énergie mécanique, qui se ré-exprimera simplement dans le cas du mouvement circulaire. On a :

....

....

....

....

....

....

....

....

Nous retrouvons une nouvelle fois le résultat obtenu dans le cas de l'ellipse pour $a = R$.

De l'étude du mouvement circulaire, nous pouvons de plus déduire l'expression de plusieurs vitesses caractéristiques appelées *vitesses cosmiques*.

7.5.4 Vitesses cosmiques

Vitesse de parcours de l'orbite

Commençons par déterminer la norme de la vitesse du mobile étudié. Ceci est particulièrement simple, connaissant la valeur de ω. Nous avons en effet :

$$v = R\omega = R\sqrt{\frac{\mathscr{G}m_0}{R^3}} = \sqrt{\frac{\mathscr{G}m_0}{R}}$$

1ère vitesse cosmique - Vitesse de satellisation

La vitesse de satellisation d'un astre, ou première vitesse cosmique, correspond à la vitesse qu'il faudrait communiquer à un objet matériel pour le satelliser sur une orbite circulaire au plus près de l'astre. En dessous de cette vitesse, l'objet considéré ne présente pas une trajectoire circulaire et retombe à la surface de l'astre. Dans le cas de la Terre, de rayon R_T et de masse M_T, cette vitesse de satellisation est donnée par la formule :

$$v_s = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_T}{R_T}}$$

Application numérique

En prenant $M_T = 5,972.10^{24}$ kg et $R_T = 6400$ km, on a :

$$v_s = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_T}{R_T}} = 7,9\ km.s^{-1} \approx 8\ km.s^{-1} \approx 30\ 000\ km.h^{-1}$$

R

- La vitesse de satellisation est calculée pour une orbite de rayon le rayon R_T de la Terre, ce qui est bien entendu irréalisable en pratique. Elle fournit cependant un bon ordre de grandeur pour les satellisations en orbite basse, de 200 km à 2000 km d'altitude.
- De nombreux satellites sont placés en orbite basse, car la communication avec les satellites est alors plus aisée et les coûts de satellisation plus faible. On satellise également à basse altitude les satellites d'observation terrestre afin d'avoir une meilleure résolution pour les photographies.

Deuxième vitesse cosmique - Vitesse de libération

La deuxième vitesse cosmique, ou vitesse de libération, caractéristique d'un astre est la vitesse qu'il faut fournir à un objet depuis la surface de l'astre pour qu'il puisse se libérer de l'attraction gravitationnelle de celui-ci, c'est à dire avoir un mouvement non lié (état de diffusion).

Nous avons précédemment mené une étude énergétique qualitative du mouvement. Nous avions alors vu que le mouvement pouvait être non lié si on respectait la condition :

$$\mathscr{E}_m \geq 0$$

Ceci se traduit par la condition :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathscr{G}mm_0}{R} \geq 0$$

Où R est le rayon de l'astre attracteur, et m_0 sa masse. On doit donc avoir :

$$v \geq \sqrt{\frac{2\mathscr{G}m_0}{R}} = v_L$$

Où v_L est la *vitesse de libération*.

Application numérique dans le cas de la Terre

Nous avons alors :

$$v_L = \sqrt{\frac{2\mathscr{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2}v_s = 11.2\ km.s^{-1} \approx 40\ 000\ km.h^{-1}$$

7.5.5 Satellite géostationnaire

Une dernière application du mouvement à force centrale est le *satellite géostationnaire*. Un satellite géostationnaire est un satellite artificiel qui reste constamment au dessus du même point de la surface terrestre.

Utilisation de ces satellites

Ces satellites sont principalement utilisés dans les télécommunications (télévision, radio, internet pour les zones non couvertes par le réseau classique) ou pour réaliser des observations météorologiques.

Nature de la trajectoire

Nous nous proposons ici de déterminer les caractéristiques de la trajectoire du satellite géostationnaire à partir de considérations simples sur les mouvements à force centrale. On considérera ici la Terre parfaitement sphérique assimilable à un point matériel affublé de sa masse totale et situé en son centre.

— Nous savons tout d'abord, grâce à l'étude menée précédemment, que la trajectoire observée sera une ellipse ou un cercle (qui représente un cas particulier d'ellipse) dont l'un des foyers sera le centre attracteur, ici le centre de la Terre.
— Pour que le satellite reste toujours au dessus d'un même point, il faut de plus que le plan de sa trajectoire soit parallèle à l'équateur. Pour comprendre cela, on pourra s'aider de la figure 7.6.

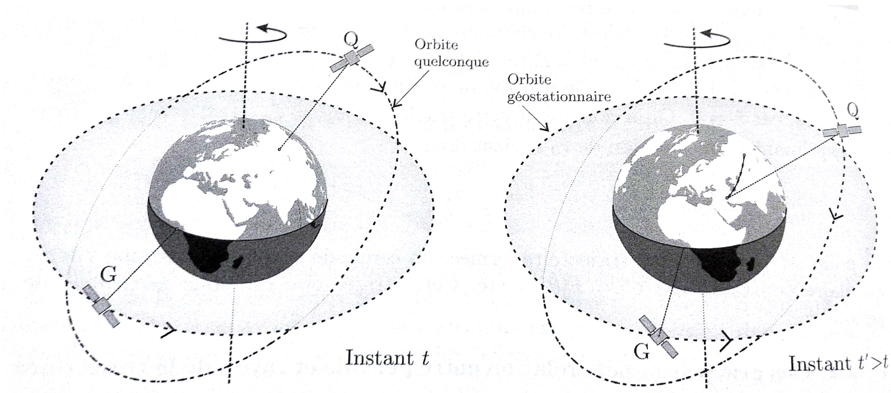

FIGURE 7.6 – Comparaison d'une orbite géostationnaire et d'une orbite quelconque

On voit sur ce schéma que le satellite Q ne peut en aucun cas être à la verticale du même point de la Terre aux instants t et $t' > t$.
— On en déduit que le seul plan possible est le *plan de l'équateur*, puisque c'est le seul plan qui contient le centre attracteur.
— Pour que le satellite soit toujours au dessus du même point de la Terre, il faut que sa vitesse angulaire soit la même que celle de la Terre. On en déduit que la vitesse angulaire du satellite est constante, égale à celle de la Terre.
— Comme le moment cinétique $\overrightarrow{L}_O = M_T r^2 \dot{\theta} \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{cste}$ et que $\dot{\theta} = \omega$ est une constante, on en déduit que le rayon de la trajectoire est constant, on a donc affaire à un mouvement circulaire uniforme.

À retenir 7.5.4 — Satellite géostationnaire. ....

....

....

Calcul de la hauteur h des satellites géostationnaires

On peut déduire facilement le rayon R de la trajectoire par application de la loi des périodes (troisième loi de Kepler). On a :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

En prenant $R_T \approx 6000\ km$. Nous voyons donc que les satellites géostationnaires doivent se situer à une altitude précise. Il s'ensuit que l'orbite géostationnaire est relativement encombrée. Pour cette raison, les satellites sont conçus de telle sorte qu'ils puissent, lorsqu'ils ont cessé de fonctionner, se placer sur une orbite appelée *orbite de rebut*, libérant ainsi la place pour un éventuel nouveau satellite.

Conclusion

Nous avons pu, au cours de ce chapitre, étudié une catégorie particulière de mouvements : les *mouvements à force centrale*, qui correspondent à l'étude d'un mobile soumis uniquement à des forces centrales. Nous avons dégagé de notre étude un résultat fondamental : la *conservation du moment cinétique*, de laquelle découle la *planéité du mouvement* et la *loi des aires.*

Nous nous sommes ensuite intéressés au cas plus particulier des *forces centrales conservatives*, notamment dans le cas d'une interaction attractive newtonienne. Nous avons alors vu qu'une étude énergétique qualitative du système permettait de distinguer deux types de mouvements en fonction de l'énergie mécanique initiale du système : un mouvement dit *lié* où le mobile reste confiné dans une région donnée de l'espace et le mouvement de *diffusion*.

Nous avons poussé ensuite plus loin l'étude des états liés, en nous basant sur les trois lois de Kepler, que nous avons admises. Nous les avons ensuite exploitées dans le cas particulier de mouvements circulaires, permettant ainsi d'introduire les notions de *vitesses cosmiques* et de *satellite géostationnaire*.

Gardons à l'esprit que les trois lois de Kepler ici posées se démontrent à l'aide des lois de la dynamique. Newton confirma d'ailleurs les travaux de Kepler, redémontrant ces lois empiriques à partir de la théorie de la mécanique. Le traitement mathématique à effectuer est cependant un peu complexe pour être abordé ici, et nous réservons cette démonstration à une étude ultérieure.