2016-2017年度下

《高等数学》期中试卷解析

北京化工大学数学系 苏贵福

一. 填空题I (每小题3分, 共30分)

1. 设函数 $f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$, 则$f(x+y,x-y)=$?

一. 填空题I (每小题3分, 共30分)

1. 设函数 $f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$, 则$f(x+y,x-y)=$?

解 令$s=x+y$, $t=x-y$, 则有

$$f(s,t)=\frac{st}{s+t}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)+(x-y)}=\frac{x^2-y^2}{2x}$$

一. 填空题I (每小题3分, 共30分)

1. 设函数 $f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$, 则$f(x+y,x-y)=?$

解 令$s=x+y$, $t=x-y$, 则有

$$f(s,t)=\frac{st}{s+t}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)+(x-y)}=\frac{x^2-y^2}{2x}$$

2. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(1+xe^y\right)^{\frac{2y+x}{x}}=?$

一. 填空题I (每小题3分, 共30分)

1. 设函数 $f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$, 则$f(x+y,x-y)=?$

解 令$s=x+y$, $t=x-y$, 则有

$$f(s,t)=\frac{st}{s+t}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)+(x-y)}=\frac{x^2-y^2}{2x}$$

2. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(1+xe^y\right)^{\frac{2y+x}{x}}=?$

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(1+xe^y\right)^{\frac{2y+x}{x}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{2y+x}{x}\ln\left(1+xe^y\right)}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{2y+x}{x}xe^y}=e^{2e}.$

推荐题目: 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

推荐题目: 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

3. 设函数$u(x,y)=\frac{x}{y^2}$, 试求$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=?$

3. 设函数$u(x,y)=\frac{x}{y^2}$, 试求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=?$

解 易知$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, 进而有$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{2}{y^3}$.

3. 设函数$u(x,y)=\frac{x}{y^2}$, 试求$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=?$

解 易知$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, 进而有$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{2}{y^3}$.

4. 已知$z=z(x,y)$是由方程$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$所确定的函数, 试求全微分$dz$.

3. 设函数$u(x,y)=\frac{x}{y^2}$, 试求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ =?

解 易知$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, 进而有$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\right)=-\frac{2}{y^3}$.

4. 已知$z=z(x,y)$是由方程$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$所确定的函数, 试求全微分$dz$.

解 方程两端分别对x和y求导数

$$-2\cos x\sin x-2\cos z\sin z\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}$$
$$-2\cos y\sin y-2\cos z\sin z\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}$$

因此$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}dx-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}dy$.

第4题考点:

1. 函数可微的必要条件: 如果函数$z = f(x, y)$在点$P(x, y)$可微分, 那么该函数在点$P(x, y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$必存在, 且函数$z = f(x, y)$在点$P(x, y)$处的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

2. 隐函数的求导法则: 方程的两端同时对某一变量求导, 其余变量可视为常量.

第5题考点：

复合函数求导法则: 如果函数$u=\varphi(t)$及$v=\psi(t)$都在点t可导, 函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数, 那么复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$在点t可导, 且其导数为

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

第6题考点：

方向导数的存在性: 如果函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微分, 那么函数在该点沿任意方向$\vec{l}$的方向导数存在, 且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\cos\beta$$

其中$\cos\alpha$与$\cos\beta$是方向$\vec{l}$的方向余弦.

5. 设$z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$. 则$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(e,e)} =?$

5. 设$z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$. 则$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(e,e)}$ =?

解 由复合函数求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3$$

又当$x = e, y = e$时, 有$u = 1$, $v = e$. 因此$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(e,e)} = \frac{2}{e} + \frac{3}{e} = \frac{5}{e}$.

5. 设$z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$. 则$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(e,e)} =$?

解 由复合函数求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + \frac{u^2}{v} \cdot 3$$

又当$x = e, y = e$时, 有$u = 1$, $v = e$. 因此$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(e,e)} = \frac{2}{e} + \frac{3}{e} = \frac{5}{e}$.

6. 函数$z = \ln(x + \frac{y}{2})$在点$(1, 3)$处沿$\vec{a} = (1, 1)$方向的方向导数是?

5. 设$z=u^2\ln v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=3x-2y$. 则$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(e,e)}=?$

解 由复合函数求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3$$

又当$x=e, y=e$时, 有$u=1$, $v=e$. 因此$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(e,e)}=\frac{2}{e}+\frac{3}{e}=\frac{5}{e}$.

6. 函数$z=\ln(x+\frac{y}{2})$在点$(1,3)$处沿$\vec{a}=(1,1)$方向的方向导数是?

解 函数在$(1,3)$的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,3)}=\frac{1}{x+\frac{y}{2}}\Big|_{(1,3)}=\frac{2}{5}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,3)}=\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{y}{2}}\Big|_{(1,3)}=\frac{1}{5}$$

与$\vec{a}$同向的单位向量为$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. 因此$\frac{\partial z}{\partial\vec{a}}\Big|_{(1,3)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

7. 设积分区域D的面积为S, D上点的极坐标为(ρ, θ), 则 $\iint_D \rho d\rho d\theta = ?$

7. 设积分区域D的面积为S, D上点的极坐标为(ρ, θ), 则 $\iint_D \rho d\rho d\theta = ?$

解 由题意知 $\iint_D \rho d\rho d\theta = \iint_D dxdy = S.$

7. 设积分区域D的面积为S, D上点的极坐标为(ρ,θ), 则 $\iint_D \rho d\rho d\theta =?$

解 由题意知 $\iint_D \rho d\rho d\theta = \iint_D dxdy = S$.

8. 已知区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2\}$, 由二重积分的几何意义求积分 $\iint_D \sqrt{2-x^2-y^2}dxdy$.

7. 设积分区域D的面积为S, D上点的极坐标为(ρ, θ), 则 $\iint_D \rho d\rho d\theta = ?$

解 由题意知 $\iint_D \rho d\rho d\theta = \iint_D dxdy = S$.

8. 已知区域$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2\}$, 由二重积分的几何意义求积分 $\iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2} dxdy$.

解 根据题意, 该二重积分表示以$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$为曲顶, 以D为底的曲顶柱体的体积. 这里相应的曲顶柱体为半球体, 故

$$\iint_D \sqrt{2 - x^2 - y^2} dxdy = \frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

9. 设C为一条由点$A(x_1, y_1)$到点$B(x_2, y_2)$的光滑曲线弧. 若在曲线C上任意一点处的线密度的大小等于该点的纵坐标的平方, 则这段曲线弧的质量的计算公式为?

9. 设C为一条由点$A(x_1, y_1)$到点$B(x_2, y_2)$的光滑曲线弧. 若在曲线C上任意一点处的线密度的大小等于该点的纵坐标的平方, 则这段曲线弧的质量的计算公式为?

解 所求弧段的质量为$M = \int_C y^2 ds$.

9. 设C为一条由点$A(x_1, y_1)$到点$B(x_2, y_2)$的光滑曲线弧. 若在曲线C上任意一点处的线密度的大小等于该点的纵坐标的平方, 则这段曲线弧的质量的计算公式为?

解 所求弧段的质量为$M = \int_C y^2 ds$.

10. 设L为圆周$x^2 + y^2 + 2y = 0$, 则$\oint_L (y^4 x + x^5 + 2) ds =$?

9. 设C为一条由点$A(x_1, y_1)$到点$B(x_2, y_2)$的光滑曲线弧. 若在曲线C上任意一点处的线密度的大小等于该点的纵坐标的平方, 则这段曲线弧的质量的计算公式为?

解 所求弧段的质量为$M = \int_C y^2 ds$.

10. 设L为圆周$x^2 + y^2 + 2y = 0$, 则$\oint_L (y^4 x + x^5 + 2) ds =$?

解 根据积分可加性

$$\oint_L (y^4 x + x^5 + 2) ds = \oint_L y^4 x ds + \oint_L x^5 ds + \oint_L 2 ds$$

注意到积分区域关于y轴对称, 此时若被积函数为关于x的奇函数, 则相应曲线积分等于零. 因此

$$\oint_L (y^4 x + x^5 + 2) ds = \oint_L 2 ds = 4\pi.$$

二. 填空题II (每小题4分, 共52分)

1. 设$z=e^{2x}f(x,x+2y)$为可微函数, 则$\frac{\partial z}{\partial x}=?$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$

二. 填空题II (每小题4分, 共52分)

1. 设$z = e^{2x}f(x, x+2y)$为可微函数, 则$\frac{\partial z}{\partial x}$ =?, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ =?

解 先求z关于x的一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x}f + e^{2x}\left(f_1' + f_2'\right).$$

进而有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2e^{2x}f_2' \cdot 2 + e^{2x}\left(f_{12}'' \cdot 2 + f_{22}'' \cdot 2\right) \\ &= 2e^{2x}\left(2f_2' + f_{12}'' + f_{22}''\right).\end{aligned}$$

二. 填空题II (每小题4分, 共52分)

1. 设$z=e^{2x}f(x,x+2y)$为可微函数, 则$\frac{\partial z}{\partial x}=?$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$

解 先求z关于x的一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x}f+e^{2x}\left(f_1'+f_2'\right).$$

进而有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2e^{2x}f_2'\cdot 2+e^{2x}\left(f_{12}''\cdot 2+f_{22}''\cdot 2\right)\\&=2e^{2x}\left(2f_2'+f_{12}''+f_{22}''\right).\end{aligned}$$

推荐题目. 设函数$z=f(x^2+y^2)$, 其中f具有二阶导数, 试求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设函数$z=z(x,y)$由方程$z=\varphi(x-y,y-z)$所确定, 其中$\varphi(u,v)$具有一阶连续偏导数, 则$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=?$

2. 设函数$z=z(x,y)$由方程$z=\varphi(x-y,y-z)$所确定, 其中$\varphi(u,v)$具有一阶连续偏导数, 则$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=?$

解 求出z关于x,y的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi_1'+\varphi_2'\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\varphi_1'}{1+\varphi_2'}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi_1'\cdot(-1)+\varphi_2'\cdot\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi_2'-\varphi_1'}{1+\varphi_2'}$$

于是有$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi_2'}{1+\varphi_2'}$.

2. 设函数$z=z(x,y)$由方程$z=\varphi(x-y,y-z)$所确定, 其中$\varphi(u,v)$具有一阶连续偏导数, 则$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=?$

解 求出z关于x,y的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi_1'+\varphi_2'\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\varphi_1'}{1+\varphi_2'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi_1'\cdot(-1)+\varphi_2'\cdot\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi_2'-\varphi_1'}{1+\varphi_2'}$$

于是有$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi_2'}{1+\varphi_2'}$.

推荐题目. 设Φ具有连续偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$所确定的函数$z=f(x,y)$满足$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

3. 若$f(x,y)=e^{-x}\cos(y-x^2)$, 则$f''_{22}(x,x^2)=$?

3. 若$f(x,y)=e^{-x}\cos(y-x^2)$, 则$f''_{22}(x,x^2)=?$

解 首先求出f关于第一个位置的导数

$$\begin{aligned} f_1' &= -e^{-x}\cos(y-x^2)-e^{-x}\sin(y-x^2)\cdot(-2x) \\ &= -e^{-x}\cos(y-x^2)+2xe^{-x}\sin(y-x^2) \end{aligned}$$

求出f_1'关于第二个位置的导数

$$f''_{12}=e^{-x}\sin(y-x^2)+2xe^{-x}\cos(y-x^2).$$

因此$f''_{12}(x,x^2)=e^{-x}\sin(x^2-x^2)+2xe^{-x}\cos(x^2-x^2)=2xe^{-x}$.

4. 曲线 $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ 在点$(2, 3, \sqrt{5})$处的切线方程为?

4. 曲线 $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ 在点$(2, 3, \sqrt{5})$处的切线方程为?

解法1 确定曲线的两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1\Big|_{(2,3,\sqrt{5})} = (2x, -2y, 2z)\Big|_{(2,3,\sqrt{5})} = (4, -6, 2\sqrt{5})$$

$$\vec{n}_2\Big|_{(2,3,\sqrt{5})} = (1, 0, 0)\Big|_{(2,3,\sqrt{5})} = (1, 0, 0)$$

则曲线在点$(2, 3, \sqrt{5})$处的切向量为

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -6 & 2\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2\sqrt{5}, 6).$$

因此所求切线为$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{2\sqrt{5}} = \frac{z-\sqrt{5}}{6}$.

解法2 曲线方程的两端对z求导

$$\begin{cases} 2x\dfrac{dx}{dz} - 2y\dfrac{dy}{dz} + 2z = 0 \\ \dfrac{dx}{dz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{z}{y} \\ \dfrac{dx}{dz} = 0 \end{cases}$$

则曲线在点$(2, 3, \sqrt{5})$处的切向量$\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, 1\right)\Big|_{(2,3,\sqrt{5})} = \left(0, \frac{\sqrt{5}}{3}, 1\right)$. 因此所求切线为$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{\sqrt{5}} = \frac{z-\sqrt{5}}{3}$.

解法2 曲线方程的两端对z求导

$$\begin{cases} 2x\dfrac{dx}{dz} - 2y\dfrac{dy}{dz} + 2z = 0 \\ \dfrac{dx}{dz} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{z}{y} \\ \dfrac{dx}{dz} = 0 \end{cases}$$

则曲线在点$(2,3,\sqrt{5})$处的切向量$\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, 1\right)\Big|_{(2,3,\sqrt{5})} = \left(0, \frac{\sqrt{5}}{3}, 1\right)$. 因此所求切线为$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{\sqrt{5}} = \frac{z-\sqrt{5}}{3}$.

推荐题目. 已知曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$，试求它在点$(1,1,1)$处的切线方程与法平面方程.

第4题考点：

1. 空间曲线Γ在点P处的切线方程: 设空间曲线Γ的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \qquad t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

那么曲线Γ在P点的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

2. 向量的叉积: 设向量γ是由两个向量α与β按下述规则确定: (1) $|\gamma| = |\alpha| \cdot |\beta| \sin(\alpha, \beta)$; (2) 向量$\gamma$的方向垂直于由 α与β所确定的平面.

5. 设$f(x,y)$是连续函数，则二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^{2\sqrt{y}} f(x,y)dx$交换积分次序后为?

5. 设$f(x,y)$是连续函数, 则二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^{2\sqrt{y}} f(x,y)dx$交换积分次序后为?

解 画出积分区域$D=\{(x,y)|0\le y\le 1, y\le x\le 2\sqrt{y}\}$的草图. 将$y$-型积分化为$x$-型积分

$$\int_0^1 dy \int_y^{2\sqrt{y}} dx = \int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{x} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{1} f(x,y)dy.$$

5. 设$f(x,y)$是连续函数, 则二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^{2\sqrt{y}} f(x,y)dx$交换积分次序后为?

解 画出积分区域$D=\{(x,y)|0\le y\le 1, y\le x\le 2\sqrt{y}\}$的草图. 将$y$-型积分化为$x$-型积分

$$\int_0^1 dy \int_y^{2\sqrt{y}} dx = \int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{x} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{1} f(x,y)dy.$$

6. 设区域D是由$x^2+y^2\le 1$, $x^2+y^2\le 2x$及$y\ge 0$所围成, 则二重积分 $\iint_D f(x^2+y^2)dxdy$化为极坐标系下的累次积分为?

5. 设$f(x,y)$是连续函数, 则二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^{2\sqrt{y}} f(x,y)dx$交换积分次序后为?

解 画出积分区域$D=\{(x,y)|0\le y\le 1, y\le x\le 2\sqrt{y}\}$的草图. 将$y$-型积分化为$x$-型积分

$$\int_0^1 dy \int_y^{2\sqrt{y}} dx = \int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{x} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{1} f(x,y)dy.$$

6. 设区域D是由$x^2+y^2\le 1$, $x^2+y^2\le 2x$及$y\ge 0$所围成, 则二重积分 $\iint_D f(x^2+y^2)dxdy$化为极坐标系下的累次积分为?

解 画出区域D的草图, 则

$$\iint_D f(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^1 f(\rho^2)\rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho^2)\rho d\rho.$$

7. 将三次积分 $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} dy \int_0^x f(x,y,z)dz$化为柱坐标系下的三次积分为?

7. 将三次积分 $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 dy \int_0^x f(x,y,z)dz$化为柱坐标系下的三次积分为?

解 原式$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho d\rho \int_0^{\rho\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz.$

7. 将三次积分 $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 dy \int_0^x f(x,y,z)dz$化为柱坐标系下的三次积分为?

解 原式$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho d\rho \int_0^{\rho\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz.$

8. 设L是从$O(0,0)$沿曲线$x^2+y^2+2x=0$到点$A(-1,1)$的一段弧, 则对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$化为对弧长的曲线积分为?

7. 将三次积分 $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 dy \int_0^x f(x,y,z)dz$化为柱坐标系下的三次积分为?

解 原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho d\rho \int_0^{\rho\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)dz.$

8. 设L是从$O(0,0)$沿曲线$x^2+y^2+2x=0$到点$A(-1,1)$的一段弧, 则对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化为对弧长的曲线积分为?

解 曲线L上一点处的切向量为$\left(1, \frac{-(1+x)}{y}\right)$, 相应的单位切向量为$(-y, 1+x)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy &= \int_L \Big(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\Big)ds \\ &= \int_L \Big(-yP(x,y)+(1+x)Q(x,y)\Big)ds\end{aligned}$$

第8题考点:

1. 两类曲线积分之间的关系:

$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta)ds.$

2. 第一类曲线积分的计算:

$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \quad (\alpha<\beta).$

3. 第二类曲线积分的计算:

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy\\ =&\int_\alpha^\beta \left\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\right\}dt\end{aligned}$$

9. 已知$dz = x^2dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$, 则函数$z(x, y) =$?

9. 已知$dz = x^2dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$, 则函数$z(x, y) =?$

解 对上式两边积分

$$z(x, y) = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2) dy$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3$$

9. 已知$dz = x^2dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$, 则函数$z(x, y) = ?$

解 对上式两边积分

$$
\begin{aligned}
z(x,y) &= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2)dy \\
&= \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3
\end{aligned}
$$

10. 设L是从点$A(a, 0)$经曲线$y = \sqrt{ax - x^2}$到点$O(0, 0)$的一段弧, 则

$\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy = ?$

9. 已知$dz = x^2dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$, 则函数$z(x, y) = ?$

解 对上式两边积分

$$z(x,y) = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2)dy$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3$$

10. 设L是从点$A(a, 0)$经曲线$y = \sqrt{ax - x^2}$到点$O(0, 0)$的一段弧, 则
$\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy = ?$

解 由题意知$P(x, y) = e^x \sin y - my \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m$,

$$Q(x,y) = e^x \cos y - m \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y.$$

因此 $\displaystyle\int_L (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy = \iint_D m dxdy = \frac{1}{8}m\pi a^2.$

11. 设Σ是平面$2x+2y+z=2$被三个坐标面所截的第一卦限部分, 则曲面积分$\iint_{\Sigma}(2x+2y+z)dS=?$

11. 设Σ是平面$2x+2y+z=2$被三个坐标面所截的第一卦限部分, 则曲面积分$\iint_\Sigma (2x+2y+z)dS=?$

解 $\iint_\Sigma (2x+2y+z)dS=\iint_\Sigma 2dS=2\iint_D \sqrt{1+4+4}dxdy=3.$

11. 设Σ是平面$2x+2y+z=2$被三个坐标面所截的第一卦限部分，则曲面积分$\iint_\Sigma(2x+2y+z)dS=?$

解 $\iint_\Sigma(2x+2y+z)dS=\iint_\Sigma 2dS=2\iint_D\sqrt{1+4+4}dxdy=3.$

12. 设在xOy平面上有一密度为μ的均匀薄片，占有平面区域D，位于点$P(1,0,1)$处有一质量为m的质点A，则该薄片对质点A的引力在z轴上投影的积分表达式为?

11. 设Σ是平面$2x+2y+z=2$被三个坐标面所截的第一卦限部分, 则曲面积分$\iint_{\Sigma}(2x+2y+z)dS=?$

解 $\iint_{\Sigma}(2x+2y+z)dS=\iint_{\Sigma}2dS=2\iint_{D}\sqrt{1+4+4}dxdy=3.$

12. 设在xOy平面上有一密度为μ的均匀薄片, 占有平面区域D, 位于点$P(1,0,1)$处有一质量为m的质点A, 则该薄片对质点A的引力在z轴上投影的积分表达式为?

解 此题的详细解答省略

$$-\iint_{D}\frac{Gm\mu}{\left[(x-1)^2+y^2+1\right]^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

三. 计算题 (本小题6分)

设区域Ω由$x^2+y^2+z^2\le 2z$与$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$所围成, 试求三重积分

$\iiint_\Omega \left(e^{y^2}\sin x+3z\right)dv$.

三. 计算题 (本小题6分)

设区域Ω由$x^2+y^2+z^2\le 2z$与$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$所围成, 试求三重积分 $\iiint_\Omega\left(e^{y^2}\sin x+3z\right)dv$.

解 由对称性及奇偶性

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega\left(e^{y^2}\sin x+3z\right)dv &= \iiint_\Omega e^{y^2}\sin x dv+\iiint_\Omega 3z dv\\ &= \int_0^1 3zdz\iint_{D_{z_1}}d\sigma+\int_1^2 3zdz\iint_{D_{z_2}}d\sigma\\ &= \int_0^1 3z\cdot\pi z^2dz+\int_1^2 3z\cdot\pi(2z-z^2)dz\\ &= \frac{7\pi}{2}\end{aligned}$$

四. 计算题 (本小题7分)

求曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$的一张切平面, 使其在三个坐标轴上的截距之积为最大.

四. 计算题 (本小题7分)

求曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$的一张切平面, 使其在三个坐标轴上的截距之积为最大.

解 曲面的法向量为$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$, 则在点$(x,y,z)$处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(X-x)+\frac{1}{2\sqrt{y}}(Y-y)+\frac{1}{2\sqrt{z}}(Z-z)=0,$$

即$\frac{X}{\sqrt{x}}+\frac{Y}{\sqrt{y}}+\frac{Z}{\sqrt{z}}=1$, 它在坐标轴上的截距分别为$\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$.

下面求函数$H(x,y,z)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt{z}$的最大值, 等价于求函数$H^2(x,y,z)=xyz$的最大值.

构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-1\right).$$

相应的偏导数为

$$\begin{cases} F_x = yz + \lambda \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \\ F_y = xz + \lambda \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = 0 \\ F_z = xy + \lambda \dfrac{1}{2\sqrt{z}} = 0 \\ F_\lambda = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{9}$$

因此，当$x = y = z = \frac{1}{9}$时截距之积取得最大，此时相应的切平面方程为$3x + 3y + 3z = 1$. ■

五. 计算题 (本小题5分)

设L是区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$的正向边界, $f(x)$是正值连续函数. 证明$I=\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx$.

五. 计算题 (本小题5分)

设L是区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$的正向边界, $f(x)$是正值连续函数. 证明$I=\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx$.

证法1 已知$P(x,y)=-\frac{y}{f(x)}$, $Q(x,y)=xf(y)$. 则由格林公式

$$I=\iint_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)d\sigma.$$

由对称性知$\iint_D f(y)d\sigma=\iint_D f(x)d\sigma$, 因此

$$I=\iint_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)d\sigma\ge\iint_D 2\left(f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\right)d\sigma=2\iint_D d\sigma=2.\blacksquare$$

证法2 区域D的边界分解为:$L_1 = (0,1) \to (0,0)$, $L_2 = (1,1) \to (0,1)$, $L_3 = (1,0) \to (1,1)$, $L_4 = (0,0) \to (1,0)$. 则由积分可加性

$$\begin{aligned} I &= \oint_L xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \\ &= \int_{L_1+L_2+L_3+L_4} xf(y)dy - \frac{y}{f(x)}dx \\ &= \int_1^0 0dy + \int_1^0 \frac{-1}{f(x)}dx + \int_0^1 f(y)dy + \int_0^1 0dx \\ &= \int_0^1 \left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right)dx \end{aligned}$$

注意到$f(x)$是正值函数, 因此

$$I \geq \int_0^1 2\left(f(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\right)dx = 2.\blacksquare$$