一. (25 分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\-4&3&0&0\\1&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的特征多项式和全部特征值.

(2) 求 A 的 Smith 标准型.

(3) 求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式.

(4) 求 A 的 Jordan 标准形 J 和可逆矩阵 P.

二. (15 分) 已知矩阵 $A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\|A\|_{m_1}, \|A\|_F, \|A\|_{m_\infty}, \|A\|_1, \|A\|_\infty$.

(2) 判断 A 是否为收敛矩阵, 说明理由.

(3) 判断 Neumann 级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ 的敛散性. 若收敛, 试求其和.

三. (15 分) 用 Givens 变换求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

四. (15 分) 试求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的奇异值分解.

五. (10 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 e^{At}, $\cos At$, $\sin A$.

六. (20 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的满秩分解.

(2) 求 A^+.

(3) 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax = b$ 是否相容, 若相容, 求其通解, 若不相容, 求其全部最小二乘解.

(4) 设 A 是 $m \times n$ 阶复矩阵, b 是 m 维复向量, 证明: 不相容线性方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解唯一当且仅当 $\operatorname{rank} A = n$, 即列满秩.