第三节　随机变量的分布函数

一、分布函数的概念

二、分布函数的性质

三、例题讲解

四、小结

一、分布函数的概念

用随机变量描述随机事件，研究其概率。那如何计算呢。在随机变量的定义中，我们强调事件要具有确定的概率,实数 x，这是函数关系。为进一步描述随机变量的实质我们把 这个函数关系叫分布函数。

1.概念的引入

对于随机变量X, 我们不仅要知道X取哪些值, 要知道X取这些值的概率；而且更重要的是想知道X在任意有限区间(a,b)内取值的概率.

例如 求随机变量 X 落在区间 $(x_1, x_2]$内的概率.

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \boxed{P\{X \le x_2\}} - \boxed{P\{X \le x_1\}}$$

$$\boxed{P\{X \le x_2\}} \to F(x_2), \quad \boxed{P\{X \le x_1\}} \to F(x_1)$$

?

$F(x_2)$ $F(x_1)$ 分布函数

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

2.分布函数的定义

定义　设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

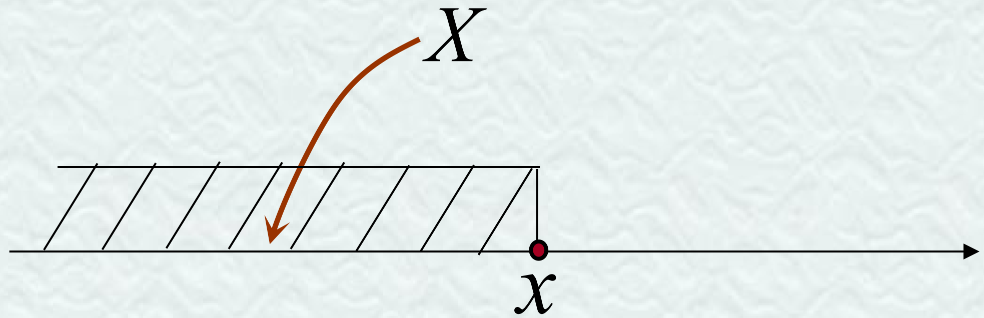
称为 X 的分布函数.

说明

(1) 分布函数主要研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

(2)分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数.

$F(x)$ 的几何意义



如果将 X 看作数轴上随机点的坐标，那么分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X 落在区间 $(-\infty, x]$ 的概率。

$$F(x) = P(X \le x), \quad -\infty < x < \infty$$

问： 在上式中，X , x 皆为变量．二者有什么区别？ x 起什么作用？ $F(x)$ 是不是概率？

X 是随机变量，x是参变量.

$F(x)$ 是$r.v$，表示X 取值不大于 x 的概率.

对随机变量引入分布率，前面我们还引入了一个分布函数，既然他们都是对随机变量的描述，那他们之间一定有个天然的联系。他们有什么关系呢。根据概率分布我们立刻得到了分布函数。

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k < x} P_k$$

定义分布函数的意义：

1. 分布函数是实数到实数的映射

2. 只要能够写出分布函数，则由对应地随机试验所产生的所有可能的随机事件概率均可知

所有的随机事件9种形式，对应地分布函数入下：

随机事件9种形式

(1) $P\{X \le a\} = F(a)$

(2) $P\{X > a\} = 1 - P\{X \le a\} = 1 - F(a)$

(3) $P\{X < a\} = F(a-0) = \lim\limits_{x \to a^-} F(x)$

(4) $P\{X \ge a\} = 1 - P\{X < a\} = 1 - F(a-0)$

(5) $P\{X = a\} = P\{X \le a\} - P\{X < a\} = F(a) - F(a-0)$

随机事件9种形式

(6) $P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}=F(b)-F(a)$

(7) $P\{a\le X<b\}=P\{X<b\}-P\{X<a\}=F(b-0)-F(a-0)$

(8) $P\{a<X<b\}=P\{X<b\}-P\{X\le a\}=F(b-0)-F(a)$

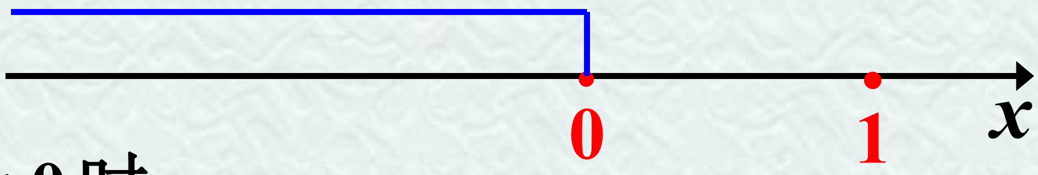
(9) $P\{a\le X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a-0).$

实例 抛掷均匀硬币, 令

$$X=\begin{cases}1, & \text{出正面},\\ 0, & \text{出反面}.\end{cases}$$

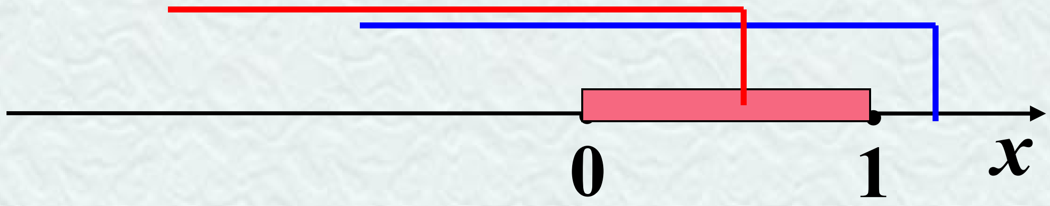
求随机变量 X 的分布函数.

解 $p\{X=1\}=p\{X=0\}=\dfrac{1}{2}$,



当 $x<0$ 时,

$$F(x)=P\{X\le x<0\}=0;$$



当 $0 \le x < 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当 $x \ge 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X=0\} + P\{X=1\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

得 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

二、分布函数的性质

$(1)\ 0 \le F(x) \le 1, \quad x \in (-\infty, \infty);$

$(2)\ F(x_1) \le F(x_2), \quad (x_1 < x_2);$

证明 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\},$

得 $P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\},$

又 $F(x_1) = P\{X \le x_1\}, \quad F(x_2) = P\{X \le x_2\},$

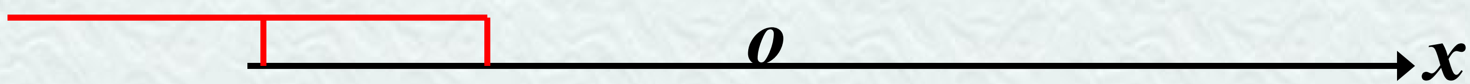
故 $F(x_1) \le F(x_2).$

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1;$

证明 $F(x)=P\{X\le x\}$, 当 x 越来越小时，

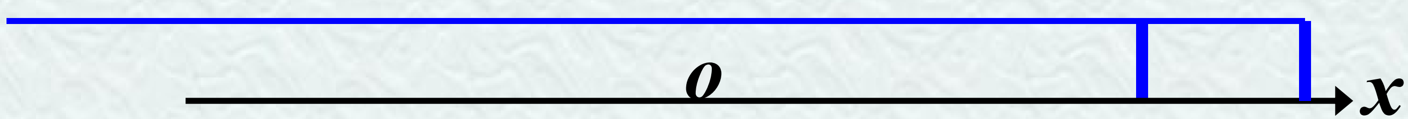
$P\{X\le x\}$的值也越来越小，因而当 $x\to-\infty$时,有

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}P\{X\le x\}=0$$



同样,当 x 增大时 $P\{X\le x\}$的值也不会减小，而

$X\in(-\infty,x)$, 当 $x\to\infty$时, X 必然落在 $(-\infty,\infty)$内.

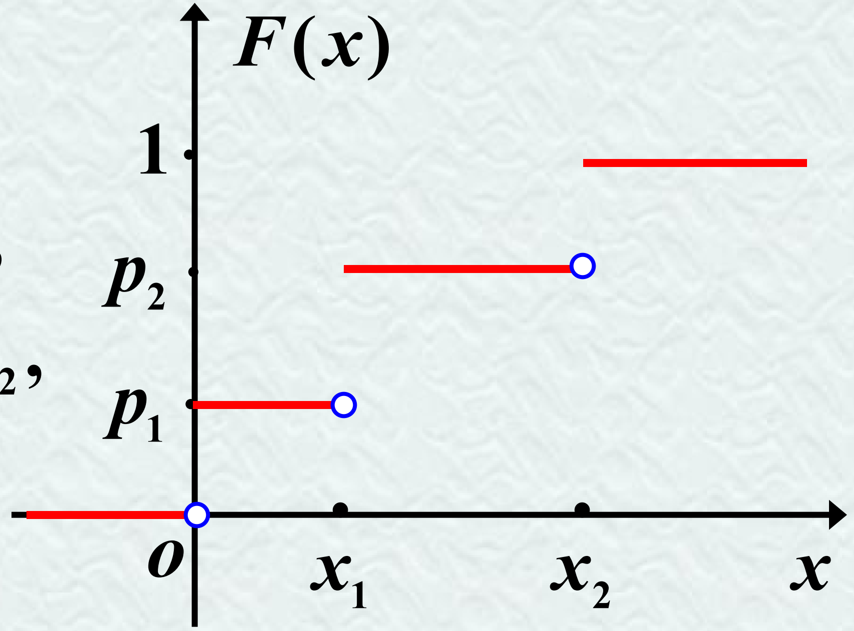


所以 $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} P\{X \le x\} = 1.$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0), \quad (-\infty < x_0 < \infty).$

即任一分布函数处处**右连续**.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ p_1, & 0\le x<x_1,\\ p_2, & x_1\le x<x_2,\\ 1, & x\ge x_2.\end{cases}$$



从上图中可以看出，凡是有跳跃间断点的地方，它刚好就是x的一个取值点，那么这个取值点的概率是多少呢，就是这个分布函数的跃度，它跳跃多少就为随机变量在这点取值。

重要公式

(1) $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$,

(2) $P\{X > a\} = 1 - F(a)$.

证明 因为 $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$,

$$\{X \leq a\} \cap \{a < X \leq b\} = \varnothing,$$

所以 $P\{X \leq b\} = P\{X \leq a\} + P\{a < X \leq b\}$,

故 $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a)$.

三、例题讲解

例1 将一枚硬币连掷三次，X 表示“三次中正面出现的次数”，求 X 的分布律及分布函数，并求下列概率值 $P\{1<X<3\}, P\{X\geq 5.5\}, P\{1<X\leq 3\}$.

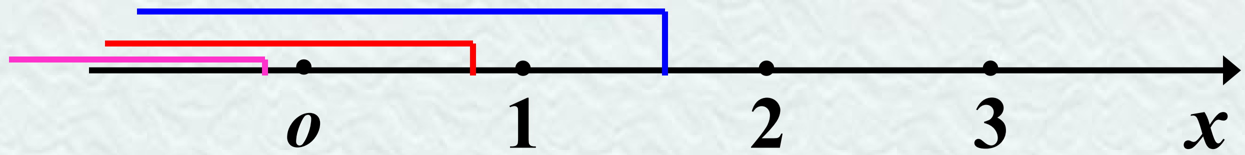
解 设 H – 正面，T – 反面，则

$$S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},$$

因此分布律为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

求分布函数



当 $x < 0$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = 0;$$

当 $0 \le x < 1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \sum_{x_i \le 0} p_i = \frac{1}{8};$$

当 $1 \le x < 2$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \sum_{x_i \le 1} p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2};$$

当 $2 \le x < 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \sum_{x_i \le 2} p_i$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};$$

当 $x \ge 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$+ P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$$

$$= \sum_{x_i \le 3} p_i = 1.$$

所以 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/8, & 0\le x<1,\\ 4/8, & 1\le x<2,\\ 7/8, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$

$$P\{1<X<3\} = P\{X\le 3\}-P\{X\le 1\}-P\{X=3\}$$

$$= F(3)-F(1)-P\{X=3\}$$

$$= 1-\frac{4}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

$$P\{X \geq 5.5\} = 1 - P\{X < 5.5\}$$

$$= 1 - P\{X \leq 5.5\} + P\{X = 5.5\}$$

$$= 1 - 1 + 0 = 0.$$

$$P\{1 < X \leq 3\} = P\{X \leq 3\} - P\{X \leq 1\}$$

$$= F(3) - F(1)$$

$$= 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

例2 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数，并求 $P\{X \le \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\}$, $P\{2 \le X \le 3\}$.

解 由于 X 仅在 $x = -1, 2, 3$ 处概率不为 0, 且

$$F(x) = P\{X \le x\},$$

得 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ P\{X=-1\}, & -1\le x<2,\\ P\{X=-1\}+P\{X=2\}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{4}, & -1\le x<2,\\ \dfrac{3}{4}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

由 $F(x) = P\{X \le x\}$,

得 $P\{X \le \frac{1}{2}\} = F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$,

$$P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \le X \le 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

离散型随机变量分布律与分布函数的关系

分布律 $p_k = P\{X = x_k\}$

$\Updownarrow$

分布函数 $F(x) = P\{X \le x\} = \sum\limits_{x_k \le x} p_k$

四、小结

1.离散型随机变量的分布函数

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_i \le x} p_k .$$

2.分布律与分布函数的关系