

☞ Analyse Asymptotique : Contrôle ☞

Exercice 1. *Calcul de développements limités*

- 1- Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{\tan x}$
- 2- Calculer le développement limité en $+\infty$ à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x}$
- 3- Calculer le développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \cos(\ln(x))$

Exercice 2. *Analyse asymptotique*

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in] -1; +\infty[\setminus \{0\}, f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

- 1- Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .
- 2- Donner l'équation de la tangente en 0 à f .
- 3- Donner la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.
- 4- Donner un développement asymptotique à deux termes en $+\infty$ de f
- 5- Donner l'équation de l'asymptote à f en $+\infty$
- 6- Donner la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote
- 7- Que dire de la courbe de f en -1 ?

Exercice 3. *Calcul de limite*

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x}$$

Exercice 4. *Équivalent*

Donner un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$u_n = \sqrt{\sin \frac{1}{n}} - \sqrt[4]{\frac{1}{n} \tan \frac{1}{n}}$$

Bonus : donner un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 5. *Polynômes irréductibles*

- 1- Donner la décomposition en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ de $X^{2n} - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2- Donner la décomposition en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ de $X^{2n} - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.