学风朋辈引领行动中心

期中复习资料-高数

审校：彭书泽、邵柏岩、杨智江、
刘国威、王乐宁、蒋月儿、尤晨宇
整理：严啸

扫描右侧二维码
关注学风朋辈微信平台
获取课程资料动态

学风朋辈的全称为：北京化工大学学风朋辈引领行动中心，英文名称为：Student Peer Center of Beijing University of Chemical Technology (简称“SPC”)。北京化工大学学风朋辈引领行动中心是由我校学生工作办公室、校团委领导的学生组织。

学风朋辈的主要工作是按照学校学风建设的总体要求，开展包括朋辈学业辅导、学业咨询、资源共享、难点解答、学风营造等与学生学业发展相关的工作。

学风朋辈的宗旨是服务我校学生学业发展，致力于营造积极向上、你争我赶、公平竞争的校园学习文化氛围，定时更新学习资源和有效信息，秉承我校校训“宏德博学，化育天工”，用热情及责任进一步推动我校学风建设工作。

按照学习学风建设的总体目标，学风朋辈在发展过程中不断寻求自身的改革创新，根据自身发展需求，现下设朋辈辅导部、发展咨询部、推广宣传部、秘书处、人事部、事务拓展部共六大职能部门。

学风朋辈自成立已开展了多项精品活动：“朋辈学业辅导”、“学业咨询工作坊”、“学习资料发放”、“学霸答疑”、“学霸经验分享会”。同时，本着强化我校学生专业知识技能，提高学生学习主动性和积极性的服务宗旨，学风朋辈已承办了多次学业发展辅导中心“团体工作坊”活动、“学业·职业规划大赛”等特色活动。学风朋辈正以更加积极的姿态协助我校不断完善教学过程中教与学的环节。

为了及时有效地为我校学子进行学业辅导，分享学习资源。学风朋辈创建了学委网，并拥有自己的微信公众平台（BUCTSPC），定时更新学习资源和有效信息，方便广大学生的学习和生活。

八、向量代数与空间解析几何

1、向量及其线性运算

【必备知识点】

（1）、掌握向量的基本概念及其线性运算

（2）、向量$\mathbf{r}=(x，y，z)$的模：$|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

点$A=(x_1，y_1，z_1)$与点 $B=(x_1，y_1，z_1)$的距离：

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

（3）、方向余弦$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1$

（4）、向量的投影具有与坐标相同的性质：

a、$(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ (φ为$\boldsymbol{a}$与 u 轴的夹角；

b、$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$

c、$(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$

【例题】

（1）、已知$\vec{a}=-\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$，$\vec{b}=\overrightarrow{3\imath}+\vec{\jmath}$, 向量$|\vec{c}|=r$（常数），求当$|\vec{c}|$满足关系式：$\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$时，r的最小值。

参考答案：$r_{min}=1$

2、数量积 向量积

【必备知识点】

数量积

（1）、数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$

（2）、数量积也叫点积或内积。

（3）、任何向量$\boldsymbol{a}$，有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$

（4）、当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时，向量在向量的方向上的投影 $\mathrm{Prj}_a b$，有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}$

$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a\cdot\cdot\,\boldsymbol{b}$

当$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$向量在向量的方向上的投影 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$，有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$

$\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{e}_b\cdot\cdot\,\boldsymbol{a}$

（5） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

（6）若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

（7）1. 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ 2. 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot c=\boldsymbol{a}\cdot c+\boldsymbol{b}\cdot c$

3. 数乘结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

向量积

（1）向量积：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$

（2）向量积也叫叉积和外积

（3）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，并且$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$符合右手定则

（4） $\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

（5）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$的充要条件，两个向量都不为 0 时，$\sin\theta=0$，$\theta$=0 或 π

（6）1. 反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 2. 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

3. 结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

3、平面及其方程

【必备知识点】

（1）、平面的点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

M_0（x_0，y_0，z_0）为平面上一点，$\mathbf{n}=$（A，B，C）为平面的法向量

（2）、平面的一般方程：$Ax+By+Cz+D=0.$

其中，x，y，z的系数为为平面一个法向量的坐标

（3）、平面的截距式方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

a，b，c为平面在x、y、z轴上的截距

（4）、两平面的夹角：$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2+{C_1}^2}+\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2+{C_2}^2}}$

两平面垂直$\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$

【例题】

（1）、已知点$A(1,2,5)$，$B(-2,0,-3)$，$C(1,-3,0)$，求点D（4，3，0）关于平面ABC的对称点。

参考答案：平面ABC：$2x+y-z+1=0$，对称点：$(-4,-2,4)$

4、空间直线及其方程

【必备知识点】

（1）、空间直线的参数方程与对称式方程

过空间已知点可作且只能作一条直线与已知直线平行，故当直线 L 上一点 $M_0(x_0,y_o,z_0)$及其方向向量 s=（m,n,p），和空间一点 M（x,y,z）

$$\begin{cases} x=x_0+tm \\ y=y_o+tn \\ z=z_0+tp \end{cases} \quad 或 \quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad （对称式方程或点向式方程）$$

（参数方程）

（2）、空间直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

交线 L 同时垂直于两个平面的法向量，取 L 的方向向量$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_2$

（3）、空间两直线的关系

两直线方程：

L_1：$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$　　L_2：$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$

方向向量分别是：$s_1=(m_1,n_1,p_1)$，$s_2=(m_2,n_2,p_2)$

则两直线夹角：$\cos\psi=\frac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1||s_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}+\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

（4）、直线与平面的关系

设有直线 L：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$　　平面：$Ax+By+Cz+D=0$

方向向量$s=(m,n,p)$　　法向量$n=(A,B,C)$

若相交于一点：A m+B n+Cp ≠0　　平行或直线含于平面=0

【例题】求过点（1，-2,3）且与平面 2x+y-5z=1 垂直的直线的参数方程与对称式方程。

解：由于所求直线与平面 2x+y-5z=1 垂直，故可取平面的法向量作为直线的方向向量，即取 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}$=（2,1，-5），可得直线的参数方程：

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=3-5t \end{cases}$$

对称式方程：$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-5}$

5、曲面及其方程

【必备知识点】

（1）、曲面方程：如果曲面S与三元方程F（x，y，z）$=0$，有下列关系：

a、曲面S上任意一点的坐标都满足方程。

b、不在曲面的点的坐标都不满足方程。

那F（x，y，z）$=0$就叫做曲面S的方程，曲线S叫做方程的图形。

（2）、旋转曲面：以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面，这条直线叫旋转曲面的轴。

设有平面曲线L：$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

a、曲线L绕x轴旋转所成的旋转曲面方程为$f\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

b、曲线L绕y轴旋转所成的旋转曲面方程为$f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$

球面：$x^2+y^2+Z^2=R^2$圆锥面：$a^2(x^2+y^2)=z^2$（以z轴为旋转轴）

旋转双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$（以$z$轴为旋转轴）

（3）、柱面：平行于定直线并沿定直线c移动的直线L所形成的曲面

这条定曲线叫做柱面的准线，动直线叫做柱面的母线

圆柱面:$x^2+y^2=R^2$ 抛物柱面：$x^2=2py$（p>0）椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

（4）、二次曲面：

三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$双曲抛物面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

【例题】

直线L:$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$绕 z 轴旋转一周，求旋转曲面的方程。

【解析】

方法一：设直线上一点$M_1(1,y_1,z_1)$有$y_1=z_1$旋转后M_1到达$M(x,y,z)$位置

且$z=z_1$，故$r^2=1+y_1^2=x^2+y^2$

即所求曲面方程为$x^2+y^2-z^2=1$

方法二:写成参数式（t 为参数）

设（x,y,z）为曲面上任一点

$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$则$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + t^2 \\ z = t \end{cases}$

所以曲面方程为$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

6、空间曲线及其方程

【必备知识点】

（1）、空间曲线的参数方程：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 空间曲线的一般方程：$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

（2）、在xoy面上投影曲线为$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$，在yoz面上的投影曲线为$\begin{cases} R(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$，在xoz面上投影曲面为$\begin{cases} T(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

【例题】

求空间曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = z \end{cases}$在三个坐标面上的投影曲线方程。

【解析】

先确定投影面，得：

在yoz面上：$\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ 在xoz面上：$\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$ 在xoy面上：$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

九、多元函数微分法及应用

2、偏导数

【必备知识点】

（1） 以二元函数$z=f(x,y)$为例，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定（即看作常量），这时它就是 x 的一元函数，这函数对 x 的导数，就称为二元函数$z=f(x,y)$对于 x 的偏导数，对 y 的偏导数同理可知。

（2） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$为$z=f(x,y)$在点（$x_0,y_0$）处对 x 的偏导数，记作$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，或者$f_x(x_0,y_0)$。

（3） 高阶偏导数：如果函数$z=f(x,y)$的偏导数的偏导数也存在，那么它们是原函数的二阶偏导数，同理可得三阶、四阶……n 阶偏导数。

（4） 如果函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$以及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等。

【常见题型与详解】

1. 求$z(x,y)=sinxcosy+lnxy$的一阶偏导数和二阶偏导数

$z_x=cosycosx+\frac{1}{x}$

$z_y=-sinxsiny+\frac{1}{y}$

$z_{xy}=-cosxsiny$

$z_{yx}=-cosxsiny$

$z_{xx}=-cosysinx-\frac{1}{x^2}$

$z_{yy}=-sinxcosy-\frac{1}{y^2}$

方法总结：求函数$z=f(x,y)$的偏导数与求一元函数的方法一样，只需将一个变量看作在变动，而将另一个变量看作常数。

2. 求$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$在(0, 0)处的偏导数。

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

【例题】

1.$z=f(x)$,求$\frac{\partial z}{\partial y}$

因为 z 是 x 的函数，而不是 y 的函数，所以$\frac{\partial z}{\partial y}$=0

2.已知$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2y^2+1}$,求 u 的表达式

解：易得知$\partial \mathrm{u}=\frac{1}{x^2y^2+1}\partial x,$

左右两边同时积分，得 $\mathrm{u}=\frac{1}{y}$arctanxy+f(y)

3、全微分

【必备知识点】

（1）、函数$\mathrm{z}=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$在点$(\mathrm{x},\mathrm{y})$的全微分为：$\mathrm{dz}=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

推广到三元函数：$\mathrm{u}=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$在点（x，y，z）的全微分为：$\mathrm{du}=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

（2）、全微分在近似计算中的应用：$\mathrm{f}(\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x},\mathrm{y}+\Delta\mathrm{y})\approx\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

【例题】

（1） 求下列函数的全微分：

1. $\mathrm{z}=e^{\frac{y}{x}}$ $\mathrm{dz}=-\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}(\frac{y}{x}dx-dy)$

2. $\mathrm{z}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\mathrm{dz}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx-xdy)$

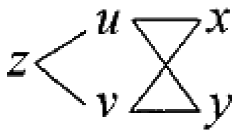
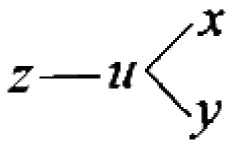
3. $\mathrm{u}=x^{yz}$ $\mathrm{dz}=\mathrm{yz}x^{yz-1}dx+zx^{yz}\cdot lnxdy+yx^{yz}\cdot lnxdz$

4、多元复合函数的求导法则

【必备知识点】

对于多元复合函数求其偏导数的时候，可首先将多元复合函数进行分类为一阶和高阶，对一阶偏导数运用链式法则可以求解，而对高阶来说，也可以转化成一阶来解决，这个过程也要使用链式法则，我们从最简单的一阶开始。

在这里我们只讨论一元，二元互相复合的情况，请读者根据以下表格所绘，自行比较发现规律，并且推广总结二元以上的规律。

函数关系	求导公式	结构图
$z=f(u,v)$ $u=\varphi(t)$ $v=\psi(t)$	$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$	
$z=f(u,v)$ $u=\varphi(x,y)$ $v=\psi(x,y)$	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$	
$z=f(u,v)$ $u=\varphi(x,y)$	$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}$	

【常见题型与详解】

例 1．设函数 $z=u^v$，而 $u=3x^2+y^2$，$v=4x+2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}6x+u^v\ln u\cdot 4$

$$=6x(4x+2y)(3x^2+y^2)^{4x+2y-1}+4(3x^2+y^2)^{4x+2y}\ln(3x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}2y+2u^v\ln u$$

$$=2y(4x+2y)(3x^2+y^2)^{4x+2y-1}+2(3x^2+y^2)^{4x+2y}\ln(3x^2+y^2) .$$

例 2. 设复合函数 $z=f(2x+3y,\frac{x}{y})$，其中 $f(u,v)$ 对 u,v 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2f_1'+\frac{1}{y}f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2f_1'+\frac{1}{y}f_2')=2\frac{\partial f_1'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}f_2')$$

$$=2(f_{11}''\cdot 3+f_{12}''(-\frac{x}{y^2}))-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}(f_2''\cdot 3+f_{22}''(-\frac{x}{y^2}))$$

$$=6f''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}+\frac{3y-2x}{y^2}f''_{12}-\frac{1}{y^2}f'_2.$$

此处可以明显的看出，求二阶偏导数实际上是再求一次偏导数的过程，所以再次应用链式法则即可

【反思与总结】

复合函数求偏导数步骤：

（1）搞清复合关系——画出复合关系图；

（2）分清每步对哪个变量求导，固定了哪些变量；

（3）对某个自变量求导，应注意要经过一切与该自变量有关的中间变量而最后归结到该自变量.

5、隐函数的求导公式

【必备知识点】

1、隐函数存在定理

（1） 方程 F(x,y)=0 可确定函数 y=f(x)，且$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$;

（2） 方程 F(x,y,z)=0 可确定函数 z=f(x,y)，且$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

（3） 方程组的情形（将隐函数存在定理做的一个推广）

$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$可以确定函数$\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$,J=$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_U & G_v\end{vmatrix}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u，v)}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

（4）特例：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$可确定函数$\begin{cases}y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$

【常见题型与详解】

（1） 设$x^2+y^2+z^2-4z=0$, 求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

解：设$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$, 则$F_x=2x,F_y=2z-4$. 当 z≠2 时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-x}$$

再一次对 x 求偏导数，得$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2-z+x\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)+x(\frac{x}{2-z})}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$

（2） 设$\begin{cases}x+y+z=0\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$, 求$\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz}$

解：对方程组的两个方程分别对 z 求导可得到

$$\begin{cases}\frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}+1=0\\2x\frac{dx}{dz}+2y\frac{dy}{dz}+2z=0\end{cases}$$

将$\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz}$看成未知量，解方程组可得到$\frac{dx}{dz}=\frac{y-z}{x-y}$,$\frac{dy}{dz}=\frac{z-x}{x-y}$

(2011 高数期中第 4 题)设$x+y+z-e^{x+y+z}=0$确定隐函数$z=f(x,y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$为

解：依题意，方程两边分别对 x 和 y 求导可得

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}-e^{x+y+z}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{x+y+z}-1}{1-e^{x+y+z}}=-1$$

$1+\frac{\partial z}{\partial y}-e^{x+y+z}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{x+y+z}-1}{1-e^{x+y+z}}=-1$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-2$$

【反思与总结】

隐函数的求导问题在历年期中考试中均有涉及，主要以一到两道填空题的形式出现，难度不大，大家关键要掌握隐函数求导的公式，尤其是方程组的情形，多加以练习就能熟练掌握。

6、多元函数微分学的几何应用

【必备知识点】

（1）空间曲线的切线与法平面

空间曲线 $x=\varphi(t),y=\Psi(t),z=\omega(t)$在点 $M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程（其中 M 点对应参数t_0）

$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\Psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\Psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(z-z_0)=0$

【常见题型与详解】

求曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$在点（1，1，1）处的切线及法平面方程

解：$x_t'=1,y_t'=2t,z_t'=3t^2$代入点 M 的坐标得切向量为（1，2，3）

切线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

法平面为（x-1）+2(y-1)+3(z-1)=0

即 x+2y+3z=6

（2）曲面的切平面与法线

曲面$F(x,y,z)=0$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程：

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$，法线方程

$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

【常见题型与详解】

（2011 期中考试第 8 题）求曲面 z=xy 上的一点 M____，使该点处的法线垂直于平面 x+3y-z+9=0

解：设 F=z-xy，$F_x=-y,F_y=-x,F_z=1$，平面的法向量为（1，3，-1）

依题意有该点处的切向量平行于平面的法向量，则

$$\frac{-y}{1}=\frac{-x}{3}=\frac{1}{-1}$$

解得 x=3，y=1，z=3，即点 M（3，1，3）

7、方向导数与梯度

【必备知识点】

（1）方向导数的定义：函数的增量$f(x+\Delta x，y+\Delta y)-f(x,y)$与$PP'$两点间的距离$\rho=$

$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$之比值，当P′沿着l趋向于P时，如果此时极限存在，则称这极限为函数在P点沿方向l的方向导数。记为：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

定理　如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$是可微分的，那末函数在该点沿任意方向 L 的方向导数都存在，且有$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$中$\varphi$为$x$轴到方向 L 的转角.

【例题】求函数$z=xe^{2y}$在点P（1，0）处从点P（1，0）到点Q（$2,-1$）的方向的方向导数。

解：这里方向$\vec{l}$即为$\overrightarrow{PQ}=\{1,1\}$故 x 轴到方向$\vec{l}$的转角$\varphi=-\frac{\pi}{4}$。

因为　$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.e^{2y}\right|_{(1,0)}=1$；$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)}=\left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)}=2$

故所求方向导数为：

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

（2）梯度的定义：设函数$z=f(x,y)$在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数则对于每一点$P(x,y)\in D$，都可以定出一个向量成为函数$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$这向量称为函数$z=f(x,y)$在点 P(x, y)的梯度，记为：

$$gradf(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

设$\vec{e}=\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}$是方向$\vec{l}$上的单位向量。

（3）方向导数和梯度的关系：梯度的方向是方向导数变化最快方向。

注意：变化不一定是增大的还有可能是变小的，要看具体的情况而定！

（4）梯度的基本运算公式

(1). $\mathrm{grad}C=\vec{0}$

(2). $\mathrm{grad}(Cu)=C\mathrm{grad}(u)$

(3). $\mathrm{grad}(u\pm v)=\mathrm{grad}\,u\pm\mathrm{grad}\,v$

(4). $\mathrm{grad}(uv)=u\mathrm{grad}\,v+v\mathrm{grad}\,u$

(5). $\mathrm{grad}(f(u))=f'(u)\mathrm{grad}\,u$

8、多元函数的极值及其求法

【必备知识点】求二元函数的极值

其一般步骤为：

（1）令$\begin{cases}f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{cases}$，解得函数$f(x,y)$的驻点

（2）求出f_{xx},f_{xy},f_{yy}

（3）利用判别式$AC-B^2$的符号判断驻点是否为极值点。

【例题】求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值。

解：第一步　求驻点

解方程组$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点：（1，0）（1,2）（-3,0）（-3,2）

第二步 判别　求二阶偏导数

$f_{xx}(x,y)=6x+6 \quad f_{yx}(x,y)=0 \quad f_{yy}(x,y)=-6y+6$

在点（1,0）处 A=12　　B=0　　C=6

$\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2=12\times 6>0 \quad A>0$

$f(1,0)=-5$为极小值

同理可判断其他点是否为极值点。

十、重积分

2、二重积分的计算法

【必备知识点】

在直角坐标系和极坐标系下化二重积分为二次积分计算的基本步骤如下：

⑴、作出积分区域 D 的图形；

⑵、根据被积函数的结构和积分区域的几何形状选取坐标系；

⑶、选择适当的积分次序，原则是二次积分的计算简单，积分区域少分片或不分片；

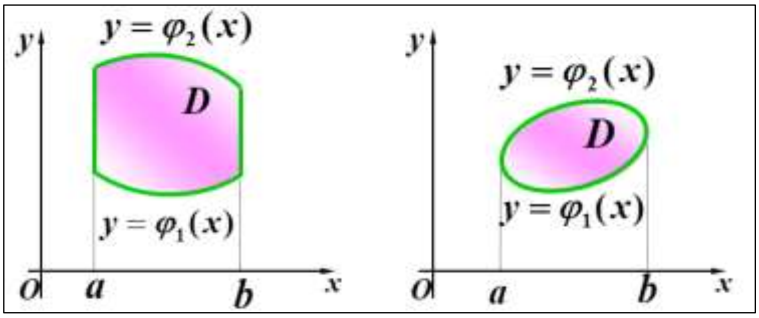
⑷、外层积分限是常量，内层积分限是外层积分变量的函数。无论是直角坐标系还是在极坐标系，二次积分限必须上限大于下限。

⑸、由内到外计算二次积分。

1. 在直角坐标系下化二重积分为二次积分

(1) 积分区域为：$a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.其中函数$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$在区间$[a, b]$上连续。

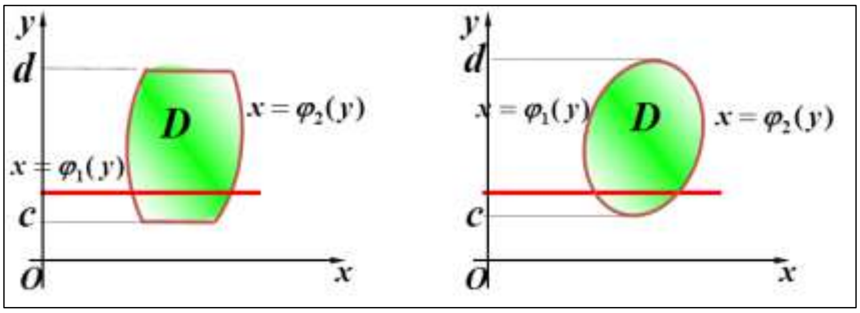
X—型



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) 积分区域为：$c \le y \le d, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$.其中函数$\varphi_1(y)$，$\varphi_2(y)$在区间$[c, d]$上连续。

Y—型



$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x$$

注：特殊地，D为矩形区域：$a \le x \le b, c \le y \le d$,

则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

如D是上述区域，且$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$

则$\iint\limits_D \mathrm{f}_1(x)f_2(y)dxdy = \int_a^b(\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\ dy)dx = \int_a^b f_1(x)dx\int_c^d f_2(y)\ dy$

即等于两个定积分的乘积。

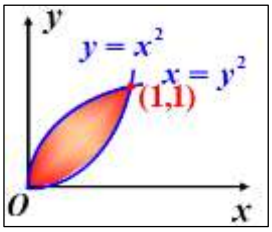
【例题】

�1:$\iint\limits_D (x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是抛物线$y=x^2$和$x=y^2$所围成的闭区域。

解：两曲线的交点:$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow$（0,0）和（1,1），积分区域既是$X$型又是$Y$型

方法一：先积y后积x,$\iint\limits_D(\mathrm{x}^2+y)dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)dy$

$=\int_0^1[x^2(\sqrt{x}-x^2)+\frac{1}{2}(x-x^4)]\mathrm{d}x = \frac{33}{140}$



方法二：先对x积分后对y积分

$\iint\limits_D(\mathrm{x}^2+y)dxdy = \int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x^2+y)dx = \frac{33}{140}$

2. 交换积分次序

步骤：（1）将已给的二次积分的积分限得出相应的二重积分的积分区域，并画出草图；

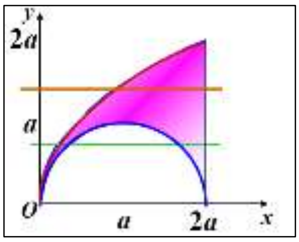
（2）按相反顺序写出相应的二次积分.

【例题】

例1：交换积分次序：$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y(a>0)$

解：由$y=\sqrt{2ax}\Rightarrow x=\dfrac{y^2}{2a}$，$y=\sqrt{2ax-x^2}\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$

积分区域如右图所示：



在$0\le y\le a$区域，从左至右引一条平行于x轴的直线，该直线先从抛物线$x=\dfrac{y^2}{2a}$穿入，从左半圆弧$x=a-\sqrt{a^2-y^2}$穿出，然后又从右半圆弧$x=a+\sqrt{a^2-y^2}$穿入，从直线$x=2a$穿出。

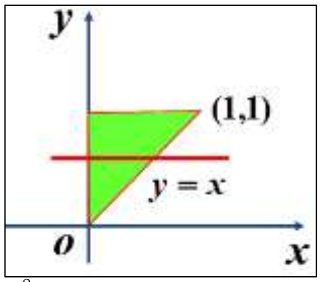
在$a\le y\le 2a$区域，同样从左至右引一条平行于x轴的直线，该直线从抛物线穿入，从直线$x=2a$穿出。

$$\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^a dy\int_{\text{抛}}^{\text{圆左}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^a dy\int_{\text{圆右}}^{\text{直线}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\text{抛}}^{\text{直线}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx+\int_a^{2a}dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)dx$$

例2：计算二次积分：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\sin y^2\mathrm{d}y.$

分析：$\sin y^2$对y的积分不能用基本积分法算出，而它对x的积分可用基本积分法算出，所以需要交换积分次序。



解：积分区域D:$\begin{cases}0\le x\le 1\\ x\le y\le 1,\end{cases}$如右图所示

改写区域D为$\begin{cases}0\le y\le 1\\ 0\le x\le y\end{cases}$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\sin y^2\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sin y^2\mathrm{d}x=\int_0^1(\sin y^2)\cdot x\Big|_0^y\mathrm{d}y=\int_0^1 y\sin y^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sin y^2\mathrm{d}y^2=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

注：当 f(x,y) 在考虑的区域上连续时，二次积分才可以交换积分次序！

如果遇到以下积分：

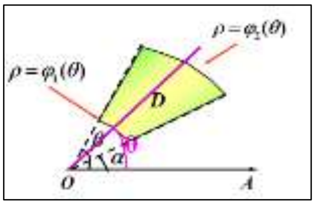
$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\int\sin x^2\mathrm{d}x,\int\cos x^2\mathrm{d}x,\int e^{-x^2}\mathrm{d}x,\int e^{x^2}\mathrm{d}x,\int e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x,\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$等，一定要放在后面积分。

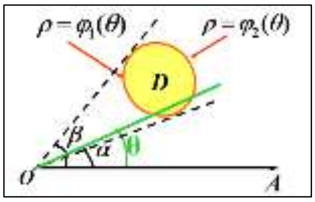
3.利用极坐标系计算二**重积分**

【必备知识点】

熟练运用公式：$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

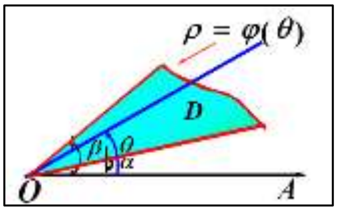
(1) 积分区域D：$\alpha \le \theta \le \beta$，$\varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta)$

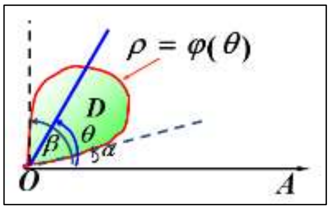




$$\iint\limits_{D} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

(2) 积分区域D（曲边扇形）：$\alpha \le \theta \le \beta, 0 \le \rho \le \varphi(\theta)$



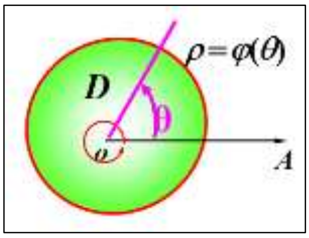


$$\iint\limits_{D} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

(3) 积分区域D:$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \rho \le \varphi(\theta)$

$$\iint\limits_{D} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta =$$

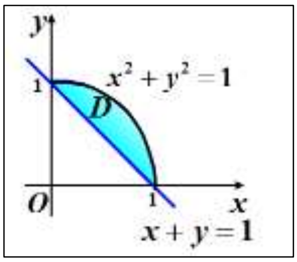
$$\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$



【例题】

例1：写出积分$\iint_D f(x,y)dxdy$的极坐标二次积分形式，其中积分区域D

$\{(x,y)|\ 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2},0\le x\le 1\}$



解：在极坐标系下$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，圆的方程为$\rho=1$，

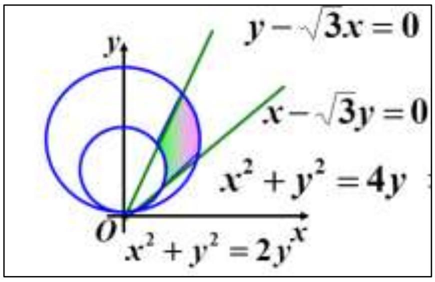
直线方程为$\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$.

自原点引一条射线，穿过积分区域D，该射线从直线穿入，从圆弧穿出。

则有$\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\le\rho\le 1,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

例2：计算$\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$为由圆$x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$及直线$x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$所围成的平面闭区域。



解：$\mathrm{y}-\sqrt{3}x=0\Rightarrow\theta_2=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0\Rightarrow\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$

$x^2+y^2=2y$化为极坐标方程：$\rho=2\sin\theta$

$x^2+y^2=4y$化为极坐标方程：$\rho=4\sin\theta$

$\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{3},2\sin\theta\le\rho\le 4\sin\theta$

$$\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\cdot\rho d\rho=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right)$$

4.二重积分的计算规律：

(1) 交换积分次序：

先依给定的积分次序写出积分域D的不等式，并画出D的草图；再确定交换积分次序后的积分限。

(2) 如果被积函数为$f(x^2+y^2)$, $f(x^2-y^2)$, $f(\dfrac{y}{x})$, $f(\arctan\dfrac{y}{x})$或积分域为圆域、扇形域、圆环域时，则用极坐标计算。

3、三重积分

1. 在直角坐标系下计算三重积分

【必备知识点】

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

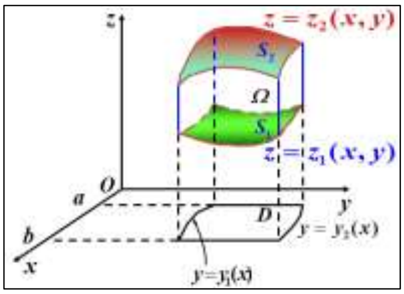
思想是在直角坐标系下将三重积分化为三次积分。

$$\begin{cases}\text{投影法：先一后二法}\\ \text{截面法：先二后一法}\end{cases}$$

A.投影法：将积分区域Ω在xOy面上投影得到闭区域D:$\begin{cases}a \le x \le b\\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\end{cases}$

z的积分限是关于x和y的函数，则有

$z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)$



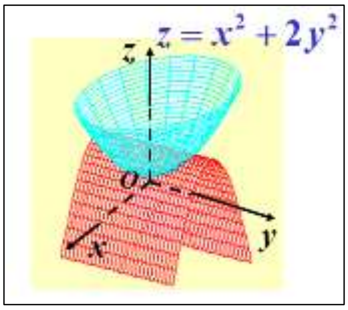
从而Ω可以表示为$\begin{cases}a \le x \le b\\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\\ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\end{cases}$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dV = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

【例题】

例1：化三重积分$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$为三次积分其中积分区域为由曲面$z = x^2 + 2y^2$及$z = 2 - x^2$所围成的闭区域。

解：联立两个曲面方程，得交线投影域D



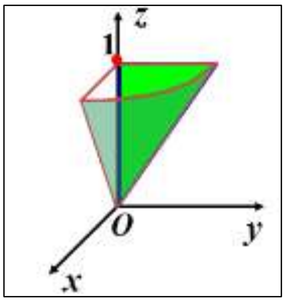
由$\begin{cases}z = x^2 + 2y^2\\ z = 2 - x^2\end{cases} \Rightarrow D$: $x^2 + y^2 \le 1$

故Ω:$\begin{cases}-1 \le x \le 1\\ -\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2}\\ x^2 + 2y^2 \le z \le 2 - x^2\end{cases}$

$$\therefore I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z)\mathrm{d}z$$

例2：计算$\iiint\limits_V \frac{xy}{\sqrt{z}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$为锥面$z^2 = x^2 + y^2$与平面$z = 1$所围成的区域在第一卦限内的部分.

解：画出积分区域的草图，通过观察被积函数结构发现采用先对x积分，后对有y, z积分的方法更简单。



将V向yOz面投影得平面区域：

$D_{yz} = \{(y, z) \mid 0 \le y \le z, 0 \le z \le 1\}$，对任一

$(y, z) \in D_{yz}$，x的取值为$0 \le x \le \sqrt{z^2 - y^2}$。

$$\therefore\ I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z \int_0^z y\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z \int_0^z y\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} x\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\mathrm{d}z\int_0^z \frac{y}{2}[z^2 - y^2]\mathrm{d}y = \frac{1}{8}\int_0^1 z^{\frac{7}{2}}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{36}.$$

【必备知识点】

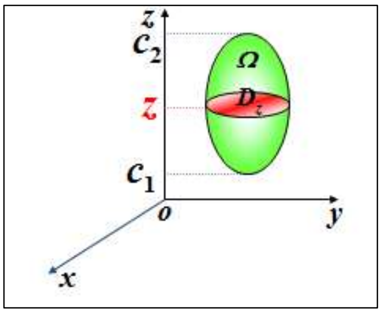
B.截面法：

(1) 把积分区域Ω向某轴(如z轴)投影，得到投影区间$[c_1, c_2]$；

(2)对于$z \in [c_1, c_2]$，用过（0,0，z)且平行于xOy面的平面去截Ω，得到截面D_z；

(3)计算二重积分$\iint\limits_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其结果为$z$的函数$F(z)$；

(4) 最后计算定积分$\int_{c_1}^{c_2} F(z)\mathrm{d}z$.



注：当被积函数仅与变量 z 有关，且截面易知时，

用截面法比较简单。

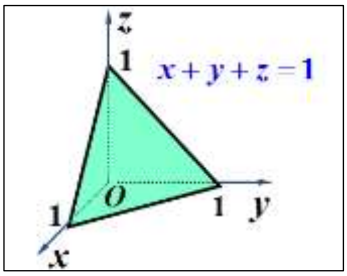
【例题】

例1：计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中Ω为三个坐标面及平面$x+y+z=1$所围成的闭区域 .

分析：由于被积函数只与z有关，优先考虑截面法求解。

解：截面法（先二后一法）

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D_z=\{(x,y)\mid x+y\le 1-z\}$$



$$\because\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(1-z)(1-z)$$

$$原式=\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{24}.$$

2. 利用柱面坐标系计算三重积分

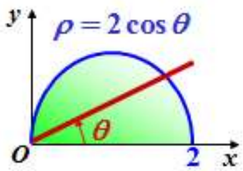
【必备知识点】

熟练运用公式$\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}z$

$$\Omega:\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta\\ \rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\\ z_1(\rho,\theta)\le z\le z_2(\rho,\theta)\end{cases}$$

【例题】

例1：计算$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v$, 其中Ω由半圆柱面$x^2+y^2-2x=0(y\ge 0)$及平面$y=0,z=0,z=a>0$所围成。



解：将积分区域Ω向xOy面投影，得到区域D，如右图所示

$$x^2+y^2-2x=0\Rightarrow\rho=2\cos\theta$$

$$柱坐标系下\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\rho\le 2\cos\theta,\\ 0\le z\le a\end{cases}$$

$$原式=\iiint\limits_{\Omega} z\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^a z\mathrm{d}z=\frac{8}{9}a^2.$$

注：利用柱面坐标系计算三重积分通常是先积 z, 再积 ρ， 后积 θ 。

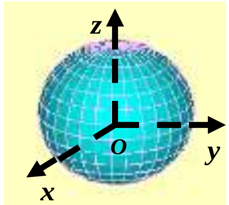
3. 利用球坐标系计算三重积分

【必备知识点】

熟练运用公式：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi d\theta d\varphi dr$$

如积分区域为球域，则Ω:$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \mathrm{r} \le R \end{cases}$



$$\iiint_{\Omega} f\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi d\theta d\varphi dr$$

【例题】

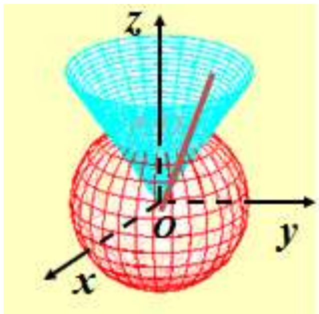
例1：求曲面$x^2+y^2+z^2 \le 2a^2$与$z \ge \sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体的体积。

解：Ω由锥面和球面围成，采用球坐标系

将$x^2+y^2+z^2=2a^2$化为极坐标方程$\mathrm{r}=\sqrt{2}a$，

再将$z=\sqrt{x^2+y^2}$化为极坐标方程$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$。

$$\Omega:\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0 \le r \le \sqrt{2}a \end{cases}$$



$$V=\iiint_{\Omega} 1\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}a} r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

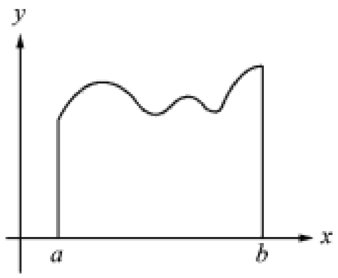
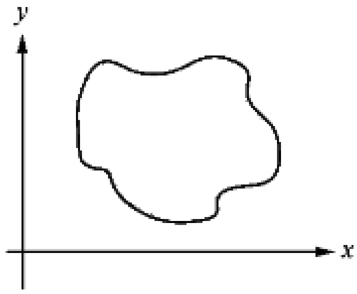
$$=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{(\sqrt{2}a)^3}{3}\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)a^3.$$

当积分域为球形域或是球的一部分；或上半部分是球面下半部分是顶点在原点的锥面，被积函数具有 f($x^2+y^2+z^2$)的形式时，用球坐标系计算三重积分更简便。

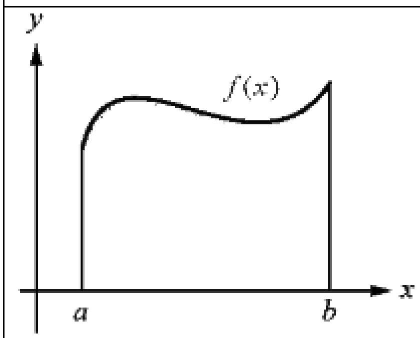
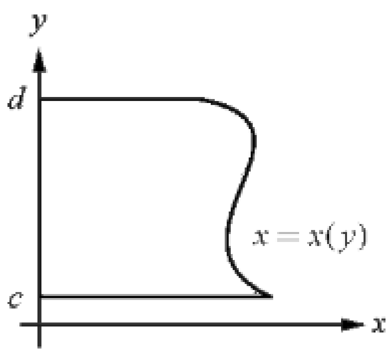
4、重积分的应用

【必备知识点】

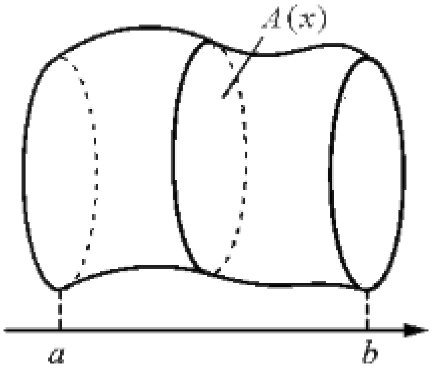
1. 求面积

图形类型	公式
求曲边梯形的面积 	$A=\int_a^b f(x)dx.$
求有界闭区域的面积 	$A=\iint\limits_D dxdy.$

2. 求旋转体的体积

旋转体类型	公式
	绕 X 轴旋转时 $V_x=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx.$ 绕 Y 轴旋转时 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dy.$
	绕 Y 轴旋转时 $V_y=\pi\int_c^d [x(y)]^2 dy.$

3. 对截面面积进行积分得到体积

	$V=\int_a^b A(x)dx.$

4. 求弧长

分类	弧长
从 a 到 b 的曲线 y=f（x）	$L=\int_a^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx.$
从 c 到 d 的曲线 x=g（y）	$L=\int_c^d\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}dy=\int_c^d\sqrt{1+(x')^2}dy.$
参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\alpha\le t\le\beta$	$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt.$

5. 求曲面的面积

曲面由 Z=f（x,y）给出，求这个曲面在 XOY 平面上的投影区域 D 的面积

若 f（x,y）在 D 上有连续偏导数$f_x(x,y)$和$f_y(x,y)$则 S 的面积是：

$$A=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy.$$