Devoir Maison 3

Applications linéaires remarquables - Corrigé

Exercice 1 (Projecteurs).

1- *Projection sur un espace parallèlement à son supplémentaire.*
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ tels que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{E}$. Soit l'application :

$$\left\{ \begin{array}{cccl} \Phi : & \mathbb{E} & \to & F_1 \times F_2 \\ & x & \mapsto & (x_1, x_2) \ / \ x_1 + x_2 = x \end{array} \right.$$

On rappelle que cette décomposition existe, et est unique.

a) Montrer que Φ est une application linéaire.
Corrigé : Soient $x, y \in \mathbb{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $z = \lambda x + y$. Comme $z \in \mathbb{E}$, on peut le décomposer sur $F_1 \oplus F_2$:

$$\begin{array}{rcl} z & = & z_1 + z_2 \\ & = & \lambda x + y \\ & = & \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ & = & \lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2 \end{array}$$

Comme $\lambda x_1 + y_1 \in F_1$ et $\lambda x_2 + y_2 \in F_2$, il s'agit d'une décomposition de z sur $F_1 \oplus F_2$. Comme cette décomposition est unique, on en déduit que :

$$z_1 = \lambda x_1 + y_1 \text{ et } z_2 = \lambda x_2 + y_2$$

Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(z) & = & (z_1, z_2) \\ & = & (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2) \\ & = & \lambda(x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\ & = & \lambda\Phi(x) + \Phi(y) \end{array}$$

Et donc Φ est bien une application linéaire.

b) Montrer que Φ est un isomorphisme.
Remarque : On n'est pas nécessairement en dimension finie. On est donc obligé de montrer l'injectivité **et** la surjectivité.
Corrigé : Soit $x \in \ker \Phi$, alors $\Phi(x) = (0_{F_1}, 0_{F_2}) = (x_1, x_2)$ et donc $x_1 + x_2 = 0_{F_1} + 0_{F_2} = 0_{\mathbb{E}} + 0_{\mathbb{E}} = 0_{\mathbb{E}}$, donc $\ker \Phi = \{0_{\mathbb{E}}\}$ et <u>donc Φ est injective.</u>
Soit $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$. Posons $x = x_1 + x_2$, on a alors $\Phi(x) = (x_1, x_2)$, donc $\operatorname{Im} \Phi = F_1 \times F_2$ et <u>donc Φ est surjective</u>.
Φ est donc un isomorphisme.

Soient p_1 et p_2 les applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{cccc} p_1 : & F_1 \times F_2 & \to & F_1 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \\ p_2 : & F_1 \times F_2 & \to & F_2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 \end{array}$$

c) Montrer que p_1 et p_2 sont des applications linéaires.
Corrigé : Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in (F_1 \times F_2)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} p_1(\lambda(x_1, x_2) + (y_1, y_2)) & = & p_1(\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2) \\ & = & \lambda x_1 + y_1 \\ & = & \lambda p_1(x_1, x_2) + p_1(y_1, y_2) \end{array}$$

Donc p_1 est bien une application linéaire. La démonstration est la même pour p_2.

On appelle $p = p_1 \circ \Phi$ la *projection sur* F_1 *parallèlement à* F_2, et $q = p_2 \circ \Phi$ la *projection sur* F_2 *parallèlement à* F_1. On peut les voir comme des *endomorphismes* de $\mathbb{E}$.

d) Montrer que $p \circ p = p$.
Corrigé : Soit $x \in \mathbb{E}$, avec sa décomposition sur $F_1 \oplus F_2$: $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} p \circ p(x) & = & p(p(x)) \\ & = & p(p_1(\Phi(x)) \\ & = & p(p_1(x_1, x_2)) \\ & = & p(x_1) \\ & = & p_1(\Phi(x_1)) \\ & = & p_1(x_1, 0) \text{ car la décomposition sur } F_1 \oplus F_2 \text{ de } x_1 \text{ est : } x_1 = x_1 + 0_{\mathbb{E}} \\ & = & x_1 \\ & = & p(x) \end{array}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{E}$, $p \circ p(x) = p(x)$, c'est à dire $p \circ p = p$.

e) Montrer que $\ker p = F_2$.
Corrigé : Soit $x \in \ker p$, avec sa décomposition sur $F_1 \oplus F_2$: $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$\begin{array}{rl} & p(x) = 0 \\ \Longrightarrow & x_1 = 0 \\ \Longrightarrow & x = 0 + x_2 = x_2 \\ \Longrightarrow & x \in F_2 \end{array}$$

Donc $\ker p \subset F_2$.
Soit $x \in F_2$, alors sa décomposition sur $F_1 \oplus F_2$ est : $x = 0_{\mathbb{E}} + x_2$, et donc $p(x) = 0$, donc $F_2 \subset \ker p$.
On en déduit donc que $\ker p = F_2$.

f) Montrer que $\operatorname{Im} p = \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$
Corrigé : Soit $x \in \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$, avec sa décomposition sur $F_1 \oplus F_2$: $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$\begin{array}{rl} & (p - Id_{\mathbb{E}})(x) = 0 \\ \Longrightarrow & p(x) - x = 0 \\ \Longrightarrow & x_1 - x_1 - x_2 = 0 \\ \Longrightarrow & x_2 = 0 \\ \Longrightarrow & x = x_1 \\ \Longrightarrow & x = p(y) \text{ avec } y = x_1 + y_2 \text{ pour n'importe quel choix de } y_2 \in F_2 \end{array}$$

Donc $\forall x \in \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$, $\exists y \in \mathbb{E} \;/\; p(y) = x$, donc $\ker(p - Id_{\mathbb{E}}) \subset \operatorname{Im} p$.
Soit $y \in \operatorname{Im} p$, alors $\exists x \in \mathbb{E} \;/\; p(x) = y$. Alors $p(p(x)) = p(y)$ et donc $p(x) = p(y)$, d'après la question *1-d*. On en déduit que $p(y) = y$, c'est à dire $p(y) - y = 0$, et donc $y \in \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$.
Au final, on a bien $\operatorname{Im} p = \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$.

2- *Projecteurs*

a) Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $p \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tel que $p \circ p = p$. On appelle une telle application un **projecteur**. Montrer que $\ker p \oplus \ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$.
Remarque : Encore une fois, on n'est pas nécessairement en dimension finie. Pas question donc de parler de bases, ou de théorème du rang.
Corrigé :

- Montrons que $\ker p + \ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$:
Soit $x \in \mathbb{E}$, alors $x = p(x) + (x - p(x))$, et posons $a = p(x)$, $b = x - p(x)$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} (p - Id_{\mathbb{E}})(a) & = & p(a) - a \\ & = & p(p(x)) - p(x) \\ & = & p(x) - p(x) \text{ car } p \circ p = p \\ & = & 0 \\ & & \underline{\text{Donc } \ a \in \ker(p - Id_{\mathbb{E}})} \\ p(b) & = & p(x - p(x)) \\ & = & p(x) - p(p(x)) \text{ car } p \in \mathcal{L}(\mathbb{E}) \\ & = & p(x) - p(x) \text{ car } p \circ p = p \\ & = & 0 \\ & & \underline{\text{Donc } \ b \in \ker p} \end{array}$$

On peut donc écrire $x = a+b$ avec $a \in \ker(p-Id_{\mathbb{E}})$ et $b \in \ker p$, donc $\ker p+\ker(p-Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$.
- Montrons que $\ker p \cap \ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \{0_{\mathbb{E}}\}$ Soit $x \in \ker p \cap \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} x \in \ker(p - Id_{\mathbb{E}}) & \Longrightarrow & p(x) - x = 0 \\ & \Longrightarrow & x = p(x) \\ & \Longrightarrow & x = 0 \text{ car } x \in \ker p \end{array}$$

Donc $\ker p \cap \ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \{0_{\mathbb{E}}\}$

On en déduit donc que $\ker p \oplus \ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$.

b) Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $p \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ tel que $\ker p \oplus \ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$. Montrer que $p \circ p = p$ et que $\operatorname{Im} p = \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$.
Corrigé : Soit $x \in \mathbb{E}$. On peut écrire $x = x_k + x_i$ avec $x_k \in \ker p$ et $x_i \in \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} p(x_k) = 0 & \text{et} & p(x_i) = x_i \\ p(x) & = & p(x_k) + p(x_i) \\ & = & 0 + x_i \\ & = & x_i \\ p \circ p(x) & = & p(p(x)) \\ & = & p(x_i)) \\ & = & x_i \\ & = & p(x) \end{array}$$

Donc on a bien $p \circ p = p$.
De plus, si $y \in \operatorname{Im} p$, alors $\exists x \in \mathbb{E} \ / \ y = p(x)$.

$$\begin{array}{rcl} p(y) - y & = & p(p(x)) - p(x) \\ & = & p(x) - p(x) \\ & = & 0 \end{array}$$

Donc $y \in \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$.
Et si $x \in \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$, alors $x = p(x)$ et donc $x \in \operatorname{Im} p$. On en déduit bien $\operatorname{Im} p = \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$.

3- *Applications*

a) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on appelle p_i l'application qui à un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ associe la i-ième coordonnée de x dans la base canonique. Montrer que $\forall i \in [\![1; n]\!]$, p_i est un projecteur, et donner une base de son noyau.
Remarque : Légère corrections dans l'énoncé pour plus de clarté.
Corrigé : Soit $i \in [\![1; n]\!]$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{lrcl} p_i & : \quad \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i = (0, 0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \end{array} \right.$$

On a donc $p(p(x)) = p(x_i) = x_i = p(x)$, donc p est bien un projecteur. Son noyau à pour base : $(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n)$.

b) ~~Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que l'application qui a un polynôme P associe son coefficient dominant est un projecteur. Donner son noyau et une base de son image.~~
Remarque : L'application donnée n'est même pas linéaire, aucune chance que la question soit correcte.

4- Donner un exemple de fonction f telle que $f \circ f = f$ mais qui ne soit pas linéaire.
Corrigé : Ironiquement, l'application précédente. Plus sérieusement, $x \mapsto |x|$ convient.

5- Dans quels cas un projecteur est-il un automorphisme ?
Corrigé : De $\ker p = \{0_{\mathbb{E}}\}$ (pour avoir l'injectivité), ou bien de $\operatorname{Im} p = \mathbb{E}$ (surjectivité), on déduit : $\ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$, d'où l'on déduit $\forall x \in \mathbb{E},\ p(x) = x$, et donc $p = Id_{\mathbb{E}}$. Le seul projecteur qui soit un automorphisme est l'identité.

Exercice 2 (Inovlutions)**.**

1- *Symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel.*
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ tels que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{E}$. Soit l'application :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \Phi : & \mathbb{E} & \rightarrow & F_1 \times F_2 \\ & x & \mapsto & (x_1, x_2) \ / \ x_1 + x_2 = x \end{array} \right.$$

Soit l'application :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \hat{s} : & F_1 \times F_2 & \rightarrow & \mathbb{E} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array} \right.$$

Et enfin, soit $s = \hat{s} \circ \Phi$.

a) Soit p la projection sur F_1 parallèlement à F_2 (*cf exercice 1*). Monter que $s = 2p - Id_{\mathbb{E}}$.
On appelle s la symétrie par rapport à F_1 (parallèlement à F_2).
Corrigé : Soit $x \in \mathbb{E}$, avec sa décomposition sur $F_1 \oplus F_2$: $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} s(x) & = & x_1 - x_2 \\ & = & 2x_1 - x_1 - x_2 \\ & = & 2p(x) - x \\ & = & 2p - Id_{\mathbb{E}} \end{array}$$

On a donc bien $s = 2p - Id_{\mathbb{E}}$.

b) Montrer que $s \circ s = Id_{\mathbb{E}}$.
Corrigé : Soit $x \in \mathbb{E}$, avec sa décomposition sur $F_1 \oplus F_2$: $x = x_1 + x_2$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} s \circ s(x) & = & s(s(x)) \\ & = & s(x_1 - x_2) \\ & = & \hat{s}(\Phi(x_1 - x_2)) \\ & = & \hat{s}(x_1, -x_2) \\ & = & x_1 - (-x_2) \\ & = & x_1 + x_2 = x \end{array}$$

On a donc bien $s \circ s = Id_{\mathbb{E}}$.

c) Montrer que $\operatorname{Im} s = \mathbb{E}$ et $\ker s = \{0\}$. Soit $x \in \ker s$, alors $s(x) = 0$, et donc $s(s(x)) = 0$ et donc $x = 0$, donc $\ker s = \{0_{\mathbb{E}}\}$
Soit $x \in \mathbb{E}$. On a $x = s(s(x))$, donc $x \in \operatorname{Im} s$. On en déduit que $\operatorname{Im} s = \mathbb{E}.$

d) En déduire que s est un automorphisme.
Remarque : La rédaction de cette question a été oubliée lors de l'écriture du sujet.
Corrigé : d'après la question *1-c*, s est injective et surjective. C'est donc un isomorphisme, et d'après sa définition, c'est un endomorphisme. s est donc bien un automorphisme.

e) Montrer que $\ker(s - Id_{\mathbb{E}}) \oplus \ker(s + Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$.
Corrigé : Comme dans l'exercice 1, on ne peut pas utiliser d'argument de dimension ou de théorème du rang, puisque nous n'avons aucune information sur la dimension de $\mathbb{E}$. On peut montrer que $\ker(s - Id_{\mathbb{E}}) + \ker(s + Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$, et que l'intersection est $\{0_{\mathbb{E}}\}$, mais ça peut être délicat. Une autre méthode est de remarquer que $\ker(s - Id_{\mathbb{E}}) = F_1$ et $\ker(s - Id_{\mathbb{E}}) = F_2$.

En effet : prenons $x \in F_1$. Alors $s(x) = x - 0 = x$ et donc $x \in \ker(s - Id_{\mathbb{E}})$.
Réciproquement, prenons $x \in \ker(s - Id_{\mathbb{E}})$, et écrivons sa décomposition sur $F_1 \oplus F_2$: $x = x_1 + x_2$.
Alors $s(x) = x \implies x_1 - x_2 = x_1 + x_2$ et donc, nécessairement, on a $x_2 = 0$, c'est-à-dire $x \in F_1$.
On procède de même pour F_2 et $\ker(s + Id_{\mathbb{E}})$.
En conclusion, puisque $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{E}$, on a alors $\ker(s - Id_{\mathbb{E}}) \oplus \ker(s + Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$.

2- *Symétries*

a) Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ telle que $s \circ s = s$. On appelle une telle application une **symétrie**. Montrer qu'il existe un projecteur p tel que $s = 2p - Id_{\mathbb{E}}$.
Corrigé : On a l'équivalence $s = 2p - Id_{\mathbb{E}} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}(s + Id_{\mathbb{E}})$. Il suffit donc de montrer que p ainsi définie est un projecteur : c'est-à-dire que $p \circ p = p$:

$$\begin{array}{rcl} p \circ p(x) & = & p(p(x)) \\ & = & p\left(\frac{1}{2}(s(x) + x)\right) \\ & = & \frac{1}{2}p((s(x) + x) \\ & = & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(s(s(x) + x) + (s(x) + x)) \\ & = & \frac{1}{4}((s \circ s)(x) + s(x) + s(x) + x) \\ & = & \frac{1}{4}(2s(x) + 2x) \\ & = & \frac{1}{2}(s(x) + x) \\ & = & p(x) \end{array}$$

b) Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ telle que $\ker(s - Id_{\mathbb{E}}) \oplus \ker(s + Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$. Montrer que s est une symétrie.
Corrigé : Soit $x \in \mathbb{E}$, avec sa décomposition sur $\ker(s - Id_{\mathbb{E}}) \oplus \ker(s + Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$: $x = x_s + x_a$.
Alors :

$$\begin{array}{rcl} s(x_s) = x_s & \text{et} & s(x_a) = -x_a \\ s \circ s(x) & = & s(s(x)) \\ & = & s(s(x_s + x_a)) \\ & = & s(x_s - x_a) \\ & = & s(x_s) - s(x_a) \\ & = & x_s + x_a \\ & = & x \end{array}$$

Donc s vérifie bien $s \circ s = Id_{\mathbb{E}}$, c'est donc bien une symétrie (par rapport a $\ker(s - Id_{\mathbb{E}})$, parallèlement à $\ker(s + Id_{\mathbb{E}})$).

3- *Applications*

a) Montrer que l'application de transposition :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & {}^{\mathrm{t}}M \end{array} \right.$$

est une symétrie.
Corrigé : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}M) = M$, l'application de transposition est donc bien une symétrie.

b) En déduire que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Remarque : Soyez malins, n'utilisez pas la démonstration du cours. . .
Corrigé : On a $\ker({}^{\mathrm{t}}\cdot - Id_{\mathbb{E}}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\ker({}^{\mathrm{t}}\cdot + Id_{\mathbb{E}}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (si ce n'est pas évident, démontrez-le à la main. . .). On en déduit donc d'après les questions précédentes que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Montrer que l'application suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcc} \psi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} \psi(f) : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(-x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est une symétrie.
Corrigé : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}(\psi \circ \psi)(f)(x) & = & \psi(f)(-x) \\ & = & f(x)\end{array}$$

Donc $\psi \circ \psi = Id_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, c'est donc bien une symétrie.

d) Décrire simplement son noyau et son image.
Corrigé : Son noyau est $\{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$ et son image est $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, car c'est une symétrie, donc un automorphisme.

e) En déduire que toute fonction réelle se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Corrigé : On remarque que $\ker(\psi - Id)$ est l'ensemble des fonctions paires, et $\ker(\psi + Id)$ celui des fonction impaire, est on conclut de la même manière que pour la question *3-b*.

4- Donner un exemple de fonction f telle que $f \circ f = Id$ mais f ne soit pas linéaire.
Corrigé : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ convient.

Exercice 3 (Homothéties)**.**

Remarque : L'orthographe correcte est bien HOMO<u>THÉT</u>IE, et non «homotéthie » comme j'ai pu l'écrire.
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle **~~homotéthie~~ homothétie** toute application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ telle que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \ / \ \forall x \in \mathbb{E},\ f(x) = \lambda x$$

. On appelle λ le **facteur** de l'~~homotéthie~~ homothétie f.

1- Vérifier qu'une ~~homotéthie~~ homothétie est bien une application linéaire.
Corrigé : Soit f une homothétie de facteur λ, soit $x, y \in \mathbb{E}^2$, et soit $\mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{array}{rcl}f(\mu x + y) & = & \lambda(\mu x + y) \\ & = & \lambda \mu x + \lambda y \\ & = & \mu f(x) + f(y)\end{array}$$

f est donc bien une application linéaire.

2- Montrer que la composée de deux ~~homotéthie~~ homothéties est une ~~homotéthie~~ homothétie.
Corrigé : Soit f, g deux homothétie, de facteurs respectifs λ et μ. Soit $x \in \mathbb{E}$, alors :

$$\begin{array}{rcl}f \circ g(x) & = & f(g(x)) \\ & = & f(\mu x) \\ & = & \lambda \mu x \\ & = & (\lambda\mu)x\end{array}$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{E},\ f \circ g(x) = (\lambda\mu)x$, $f \circ g$ est donc une homothétie de facteur $\lambda\mu$.

3- Montrer que si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ et f sont des ~~homotéthie~~ homothéties, alors $g \circ f = f \circ g$.
Corrigé : On vient de montrer que dans ce contexte, $f \circ g(x) = \lambda \mu x$. Le même calcul nous montre que $g \circ f(x) = \lambda \mu x$ également (la multiplication dans $\mathbb{K}$ est commutative). On a donc $f \circ g = g \circ f$.

4- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ telle que $\forall g \in \mathcal{L}(\mathbb{E}) g \circ f = f \circ g$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{E}, (x, f(x))$ n'est pas une famille libre.
Corrigé : Prenons $x \in \mathbb{E}$. Prenons g la projection sur $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à un supplémentaire de celui-ci (n'importe lequel, ça n'a pas d'importance. . .). Notamment, $g(x) = x$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}f(g(x)) & = & g(f(x)) \\ f(x) & = & g(f(x)) \text{ car } g(x) = x\end{array}$$

Notamment, comme $g(f(x)) = f(x)$, cela veut dire que $f(x)$ est dans l'image de g, c'est-à-dire, $\mathrm{Vect}(x)$. Donc, $(x, f(x))$ n'est pas une famille libre.

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{E}, \exists \lambda_x \ / \ f(x) = \lambda_x x$.
Corrigé : $(x, f(x))$ est liée, donc les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires (cela couvre le cas 0, d'ailleurs). Donc notamment, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K} \ / \ f(x) = \lambda_x x$.
Remarque : (je note λ_x, car ce facteur dépend de x. Enfin, on s'aprète à montrer que non. Mais à ce point là de l'histoire, on ne le sait pas encore...)

c) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2, (\exists m \in \mathbb{K} \ / \ x = my) \implies \lambda_x = \lambda_y$.
Corrigé : Soient x et y deux vecteurs colinéaires, tels que $x = my$. Alors :

$$\begin{aligned} x = my &\implies f(x) = f(my) \\ &\implies \lambda_x x = m f(y) \\ &\implies \lambda_x m y = m \lambda_y y \end{aligned}$$

Alors si $m = 0$, on a $y = 0$ et $x = 0$, ce qui répond immédiatement à la question. Si $m \neq 0$, on peut simplifier par m et alors $\lambda_y = \lambda_x$.

d) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2, (x, y)$ famille libre $\implies \lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.
Corrigé : Soit (x, y) une famille libre de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ &\implies \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y \\ &\implies \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_x x + \lambda_y y \\ &\implies (\lambda_{x+y} - \lambda_x) x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y) y = 0 \end{aligned}$$

Comme (x, y) est une famille libre, alors on a $(\lambda_{x+y} - \lambda_x) = 0$ et $(\lambda_{x+y} - \lambda_y) = 0$, d'où $\lambda_{x+y} = \lambda_y = \lambda_x$.
Remarque : Il y avait une grossière erreur d'énoncé, ici...

e) En déduire que $\exists \lambda \in \mathbb{K} \ / \ \forall x \in \mathbb{E}, \lambda_x = \lambda$.
Corrigé : Soient (x, y) deux vecteurs de $\mathbb{E}$. S'ils forment une famille liée, on est dans le cas de la question *1-c*, et donc $\lambda_x = \lambda_y$. Si (x, y) est une famille libre, alors on est dans le cas de la question *1-d*, et on a à nouveau $\lambda_x = \lambda y$. Donc au final, tous les λ_x pour tous les vecteurs x sont égaux, on va nommer λ ce scalaire commun. C'est-à-dire : $\exists \lambda \in \mathbb{K} \ / \ \forall x \in \mathbb{E}, \lambda_x = \lambda$.

f) En déduire que f est une ~~homotéthie~~ homothétie.
Corrigé : En résumant tout ce qu'on sait, on a $\forall x \in \mathbb{E},\ f(x) = \lambda x$. C'est-à-dire que f est une homothétie.

5- Donner deux symétries s_1 et s_2 distinctes telles que $s_1 \circ s_2$ soit une ~~homotéthie~~ homothétie.
Remarque : Bon, là il faut un peu d'intuition ou de bricolage. Et se rendre compte qu'une homothétie de facteur -1 est une symétrie centrale.
Corrigé : On peut, par exemple, se placer dans $\mathbb{R}^2$, et prendre s_1 la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}((0, 1))$ et s_2 la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}((1, 0))$. Alors $s_1 \circ s_2$ est une symétrie centrale, c'est-à-dire une homothétie de facteur -1.

Exercice 4 (Sur le rang)**.**
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1- Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ un projecteur. Quels sont les valeurs possibles de $\mathrm{rg}\, p$?
Corrigé : Toutes les valeurs de $[\![0; n]\!]$ sont possibles. Pour un exemple de projecteur de rang i, prenez : $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$.

2- Que vaut un projecteur de rang n ?
Corrigé : Soit p un projecteur de rang n. Si on reprend la démonstration du *2-b*, de l'exercice 1, on a alors que $\mathrm{Im}\, p = \ker(p - Id_{\mathbb{E}})$. Mais alors, si p est de rang n, on en déduit que $\ker(p - Id_{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}$, d'où l'on déduit $p = Id_{\mathbb{E}}$.

3- Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ une ~~homotéthie~~ homothétie. Quelles sont les valeurs possibles de $\mathrm{rg}\, h$?
Corrigé : Si λ, le facteur de l'homothétie, vaut 0, alors h est l'application nulle, donc de rang 0. Sinon, l'image d'une base par h est également une base (on vérifie facilement que la famille est libre par exemple, et on a la bonne dimension...) Les seules valeurs possibles pour le rang sont donc 0 et n.

4- Que vaut une ~~homotéthie~~ homothétie de rang 0 ?
Corrigé : Comme toute application linéaire de rang 0, c'est l'application nulle.

5- Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ une symétrie. Quels sont les valeurs possibles de $\operatorname{rg} s$?
Corrigé : On a montré dans l'exercice 2 qu'une symétrie était nécessairement un automorphisme. La seule valeur possible est $\operatorname{rg} s = n$. (L'énoncé disait "pour $\operatorname{rg} n$, ce qui ne veut rien dire...)

Exercice 5 (Pour aller plus loin)**.**

1- Soit p et q deux endomorphismes de $\mathbb{E}$, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

a) Montrer que si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ alors ce sont deux projecteurs de même noyau.
Corrigé : $p \circ q = p$ donc (en substituant q par $q \circ p$), on a $p \circ q \circ p = p$. D'autre part, $p \circ q \circ p = p \circ p$, en composant par p à droite dans la première identité. On en déduit que $p \circ p = p$, donc que p est un projecteur. La démonstration est la même pour q.
Soit $x \in \ker p$, alors $p(x) = 0$ et donc $q(p(x)) = 0$, donc $q(x) = 0$ et donc $x \in \ker q$. On a donc $\ker p \subset \ker q$, et on montre de même que $\ker q \subset \ker p$.

b) On suppose que p et q sont deux projecteurs. Montrer que si $p \circ q = q \circ p$ alors $p \circ q$ est un projecteur. Quel est son noyau ? Son image ?
Corrigé : Calculons :

$$\begin{aligned}(p \circ q) \circ (p \circ q) &= p \circ q \circ p \circ q \\ &= p \circ p \circ q \circ q \text{ car } p \text{ et } q\text{, au milieu, commutent} \\ &= p \circ q \text{ car } p \circ p = p \text{ et de même pour } q\end{aligned}$$

$p \circ q$ est donc bien un projecteur. Soit $x \in \ker p + \ker q$, on peut écrire $\exists (x_p, x_q) \in \ker p \times \ker q \;/\; x = x_p + x_q$, alors :

$$\begin{aligned}p \circ q(x) &= p(q(x_p + x_q) \\ &= p(q(x_p)) + p(q(x_q)) \\ &= q(p(x_p)) + p(0) \\ &= q(0) + 0 \\ &= 0 \\ &\Longrightarrow x \in \ker p \circ q \\ &\Longrightarrow \underline{\ker p + \ker q \subset \ker p \circ q}\end{aligned}$$

Réciproquement, posons $x \in \ker p \circ q$. Comme q est un projecteur, on a (d'après l'exercice 1) : $\ker p \oplus \operatorname{Im} p = \mathbb{E}$, donc on peut décomposer x sur cette somme directe : $x = x_q + x_i$, avec $x_q \in \ker q$ et $x_i \in \operatorname{Im} q$. Alors :

$$\begin{aligned}p \circ q(x) = 0 &\Longrightarrow p(q(x_q + x_i)) = 0 \\ &\Longrightarrow p(q(x_q) + q(x_i)) = 0 \\ &\Longrightarrow p(0 + q(x_i)) = 0 \\ &\Longrightarrow p(x_i) = 0 \text{ car } q(x_i) = x_i \text{ puisque } x_i \in \operatorname{Im} q \\ &\Longrightarrow x_i \in \ker p\end{aligned}$$

On peut donc écrire x comme somme d'un élément de $\ker q$ (ici, x_q), et d'un élément de $\ker p$ (ici, x_i). Donc $\underline{\ker p \circ q \subset \ker p + \ker q}$, d'où $\ker p \circ q = \ker p + \ker q$.
Pour l'image, vu que $p \circ q$ est un projecteur, on a :

$$\begin{aligned}x \in \operatorname{Im} p \circ q &\Longrightarrow p \circ q(x) = x \\ &\Longrightarrow x = p(q(x)) \text{ donc } x \in \operatorname{Im} p \\ &\Longrightarrow x = q(p(x)) \text{ donc } x \in \operatorname{Im} q \\ &\Longrightarrow \underline{x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q}\end{aligned}$$

Réciproquement, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors

$$\begin{array}{ccl} x \in \operatorname{Im} p & \Longrightarrow & p(x) = x \\ x \in \operatorname{Im} q & \Longrightarrow & q(x) = x \\ \text{Donc} & & p(x) = q(x) = x \\ & \Longrightarrow & q(p(x)) = q(q(x)) = q(x) = x \\ & \Longrightarrow & p(q(x)) = x \end{array}$$

Donc on a bien $\underline{x \in \operatorname{Im} p \circ q}$, d'où $\operatorname{Im} p \circ q = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

c) On suppose que p et q sont deux projecteurs. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$. Quel est son noyau ? Son image ? Si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
(p+q) \circ (p+q) &= (p+q) \circ p + (p+q) \circ q \\
&= p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q \\
&= p + 0 + 0 + q \\
&= p + q
\end{aligned}$$

Donc $p+q$ est bien un projecteur. Réciproquement, si $p+q$ est un projecteur, alors

$$\begin{aligned}
(p+q) \circ (p+q) = (p+q) &\Longrightarrow p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + q \\
&\Longrightarrow p + p \circ q + q \circ p + q - p - q = 0 \\
&\Longrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} p \circ p \circ q + p \circ q \circ p &=& 0 \\ p \circ q \circ p + q \circ p \circ p &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} p \circ q + p \circ q \circ p &=& 0 \\ p \circ q \circ p + q \circ p &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow p \circ q = q \circ p
\end{aligned}$$

Comme $p \circ q + q \circ p = 0$ et $p \circ q = q \circ p$, on en déduit $p \circ q = q \circ p = 0$

2- Soient p et q les applications linéaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} p : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x, 2x, z) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{cccc} q : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+3y, 0, z) \end{array} \right.$$

Montrer que p et q sont des projecteurs, mais que $p \circ q \neq q \circ p$ et que $p \circ q$ n'est pas un projecteur.
Corrigé : On vérifie par le calcul que $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$, et le vecteur $(1,1,1)$ par exemple, fournit un contre-exemple suffisant au reste.