

一、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, A^T 为 A 的转置矩阵, 则行列式 $|A^T A|$ _____.

2. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆阵 $A^{-1} =$ _____.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}$, 并且 $PA = B$, 则 $P =$ _____.

4. 设 3 阶矩阵 A 的秩 $r(A) = 1$, $\eta_1 = (-1 \ 3 \ 0)^T$, $\eta_2 = (2 \ -1 \ 1)^T$, $\eta_3 = (5 \ 0 \ k)^T$ 是方程组 $AX = 0$ 的 3 个解向量, 则常数 $k =$ _____.

5. 设 4 阶矩阵 A 满足 $|2E + A| = 0$, $AA^T = 4E$, $|A| < 0$, 其中 E 为 4 阶单位矩阵, 则伴随矩阵 A^* 必有一个特征值为 _____.

6. (注: 仅 3.0 学分的专业做此题) 若实对称矩阵 A 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 合同, 则二次型 $X^T A X$ 的规范形为 _____.

6*. (注: 仅 3.5 学分的专业做此题) 设 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 (a > 0)$ 为一椭圆的方程, 则 a, b, c 满足关系式 _____.

二、计算题 (每小题 14 分, 共 70 分)

7. 设矩阵 X 满足方程 $AX = 2X + B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, 求 X .

8. 讨论当参数 a, b 取何值时, 非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1. \end{cases}$$

(1) 无解; (2) 有唯一解; (3) 有无穷多解, 并在此时用导出组的基础解系表示其通解.

9. 设 $f(x) = x^3 + 3x - 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值和特征向量;