高等数学典型例题解析

二重极限的常用求法

北京化工大学数学系 苏贵福

二重极限在多元函数微积分学中发挥着重要作用, 关于二重极限求解方法 的探究是进一步学习多元函数微积分有关概念和方法的基础. 下面将通过典型例题 介绍二重极限的常用的求解方法.

【法A-利用定义验证法求极限】

例1. 设$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, 其中$x^2+y^2\neq 0$. 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

【法A-利用定义验证法求极限】

例1. 设$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$，其中$x^2+y^2\neq 0$. 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

解 (1) 求出累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

【法A-利用定义验证法求极限】

例1. 设$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$，其中$x^2+y^2\neq 0$. 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

解 (1) 求出累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

(2) 用定义验证该累次极限是否为二重极限

【法A-利用定义验证法求极限】

例1. 设$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, 其中$x^2+y^2\neq 0$. 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

解 (1) 求出累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

(2) 用定义验证该累次极限是否为二重极限

事实上, 对任意的$\varepsilon>0$, 要使

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leq|x^2+y^2|\leq|x|^2+|y|^2<\varepsilon$$

【法A-利用定义验证法求极限】

例1. 设$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, 其中$x^2+y^2\neq 0$. 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

解 (1) 求出累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

(2) 用定义验证该累次极限是否为二重极限

事实上, 对任意的$\varepsilon>0$, 要使

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leq|x^2+y^2|\leq|x|^2+|y|^2<\varepsilon$$

于是取$\delta=\sqrt{\varepsilon/2}$, 当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时, 有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$

【法A-利用定义验证法求极限】

例1. 设$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, 其中$x^2+y^2\neq 0$. 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

解 (1) 求出累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

(2) 用定义验证该累次极限是否为二重极限

事实上, 对任意的$\varepsilon>0$, 要使

$$|f(x,y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leq|x^2+y^2|\leq|x|^2+|y|^2<\varepsilon$$

于是取$\delta=\sqrt{\varepsilon/2}$, 当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时, 有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$

故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.■

【法B-利用运算性质求极限】

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin(x^3+y^2)}{\sqrt{e^x+e^y}}$.

【法B-利用运算性质求极限】

例2. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin(x^3+y^2)}{\sqrt{e^x+e^y}}$.

解 利用二重极限的四则运算和符合性质求解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin(x^3+y^2)}{\sqrt{e^x+e^y}} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \sin(x^3+y^2)}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \sqrt{e^x+e^y}} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \sin(0^3+2^2)}{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \sqrt{e^0+e^2}} = \frac{\sin 4}{\sqrt{1+e^2}}.\blacksquare$$

【法C-利用分子分母有理化求极限】

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

【法C-利用分子分母有理化求极限】

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解 先对二元函数进行分子或分母有理化, 再求相应极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}.$$

【法C-利用分子分母有理化求极限】

例3. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解 先对二元函数进行分子或分母有理化, 再求相应极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}.$$

【推荐题目】 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

【法D-利用对数法求极限】

例4. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}$.

【法D-利用对数法求极限】

例4. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}$.

解 当极限是1^∞, 0^0等未定型时, 可通过取对数的方法求相应极限

$$\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}=\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}exp\frac{1}{\sin xy}\ln(1+xy)=\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}exp\frac{xy}{\sin xy}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}.$$

【法D-利用对数法求极限】

例4. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}$.

解 当极限是1^∞, 0^0等未定型时, 可通过取对数的方法求相应极限

$$\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}=\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}exp\frac{1}{\sin xy}\ln(1+xy)=\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}exp\frac{xy}{\sin xy}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}.$$

又因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\frac{xy}{\sin xy}=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}=\ln e=1.$

【法D-利用对数法求极限】

例4. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}$.

解 当极限是1^∞, 0^0等未定型时, 可通过取对数的方法求相应极限

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} exp\frac{1}{\sin xy}\ln(1+xy)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} exp\frac{xy}{\sin xy}\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}.$$

又因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}\frac{xy}{\sin xy}=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}=\ln e=1$. 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}}(1+xy)^{\frac{1}{\sin xy}}=e$.■

【法E-利用两边夹法则求极限】

例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$.

【法E-利用两边夹法则求极限】

例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$.

解 利用极限的两边夹法则, 将会使某些函数的极限求解变得简单

【法E-利用两边夹法则求极限】

例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$.

解 利用极限的两边夹法则, 将会使某些函数的极限求解变得简单

易知当x, y适当大时, 有$x^2<e^x$, $y^2<e^y$. 于是

【法E-利用两边夹法则求极限】

例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$.

解 利用极限的两边夹法则, 将会使某些函数的极限求解变得简单

易知当x, y适当大时, 有$x^2 < e^x$, $y^2 < e^y$. 于是

$$0 < \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = \frac{1}{e^y}\cdot\frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\cdot\frac{y^2}{e^y} \leq \frac{1}{e^y} + \frac{1}{e^x}.$$

【法E-利用两边夹法则求极限】

例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$.

解 利用极限的两边夹法则, 将会使某些函数的极限求解变得简单

易知当x, y适当大时, 有$x^2 < e^x$, $y^2 < e^y$. 于是

$$0 < \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = \frac{1}{e^y}\cdot\frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\cdot\frac{y^2}{e^y} \leq \frac{1}{e^y} + \frac{1}{e^x}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0$.

【法E-利用两边夹法则求极限】

例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$.

解 利用极限的两边夹法则, 将会使某些函数的极限求解变得简单

易知当x, y适当大时, 有$x^2 < e^x$, $y^2 < e^y$. 于是

$$0 < \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = \frac{1}{e^y}\cdot\frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\cdot\frac{y^2}{e^y} \le \frac{1}{e^y} + \frac{1}{e^x}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y} = 0$. 故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = 0$.■

【法E-利用两边夹法则求极限】

例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$.

解 利用极限的两边夹法则, 将会使某些函数的极限求解变得简单

易知当x, y适当大时, 有$x^2 < e^x$, $y^2 < e^y$. 于是

$$0 < \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = \frac{1}{e^y}\cdot\frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\cdot\frac{y^2}{e^y} \le \frac{1}{e^y} + \frac{1}{e^x}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y} = 0$. 故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} = 0$.■

【推荐题目】 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

【法F-利用函数的连续性求极限】

例6. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{2-xy}{x^2+y^2}$.

【法F-利用函数的连续性求极限】

例6. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{2-xy}{x^2+y^2}$.

解 因为$f(x,y)=\frac{2-xy}{x^2+y^2}$是初等函数，其定义域为

$$D=\{(x,y)|x\neq 0, y\neq 0\}.$$

而点$P(0,1)$是D的内点，故存在P的某个领域$U(P)\subset D$ (亦为函数的一个定义区域). 因此此极限 就是函数在$(0,1)$点的函数值:

【法F-利用函数的连续性求极限】

例6. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{2-xy}{x^2+y^2}$.

解 因为$f(x,y)=\frac{2-xy}{x^2+y^2}$是初等函数, 其定义域为

$$D=\{(x,y)|x\neq 0, y\neq 0\}.$$

而点$P(0,1)$是D的内点, 故存在P的某个领域$U(P)\subset D$ (亦为函数的一个定义区域). 因此此极限 就是函数在$(0,1)$点的函数值:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{2-xy}{x^2+y^2}=f(0,1)=\frac{2-xy}{x^2+y^2}\Big|_{(0,1)}=2.\blacksquare$$

【法G-利用极坐标变换求极限】

例7. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

【法G-利用极坐标变换求极限】

例7. 求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

解 利用极坐标变换$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 可使当$(x,y)\to(0,0)$时的极限 转换为$r\to 0^+$的极限.

【法G-利用极坐标变换求极限】

例7. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

解 利用极坐标变换$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 可使当$(x, y) \to (0, 0)$时的极限 转换为$r \to 0^+$的极限.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} = \lim_{r\to 0^+} 2\sqrt{r^2+1} = 2. \blacksquare$$

【法G-利用极坐标变换求极限】

例7. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

解 利用极坐标变换$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 可使当$(x, y) \to (0, 0)$时的极限 转换为$r \to 0^+$的极限.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} = \lim_{r\to 0^+} 2\sqrt{r^2+1} = 2. \blacksquare$$

【推荐题目】 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{xy-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

例8. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

例8. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

解 令$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 则

例8. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

解 令$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} r^2\sin\theta\cos\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.$$

例8. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

解 令$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} r^2\sin\theta\cos\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0^+} r^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.$$

注意到$|\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta| \le 1$, 且 $\lim\limits_{r\to 0^+} r^2 = 0$.

例8. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

解 令$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0^+} r^2\sin\theta\cos\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$

$$=\lim_{r\to 0^+} r^2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta.$$

注意到$|\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta|\le 1$, 且 $\lim\limits_{r\to 0^+} r^2=0$.因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=0$.■

二重极限与一元函数的极限从定义到性质, 以及证明的方式都有很多相似之处. 但也有很明显的不同之处. 对于一元函数而言, 自变量的变化只有左右两种方式, 而二元函数的自变量可以沿着任意曲线趋于某个点, 这是二者最大的区别. 灵活把握这一要点, 再结合具体题目的自身特点, 便能找到合适的方法快速求解二重极限.

(The end)