2016-2017年度上

线性代数期末复习(一)

北京化工大学数学系 苏贵福

一、填空题(每小题4分，共20分)

一、填空题(每小题4分，共20分)

1. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & x^2 \end{vmatrix} = 0$的全部根是(　　　　　).

一、填空题(每小题4分，共20分)

1. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & x^2 \end{vmatrix} = 0$的全部根是(　　　　).

解 根据行列式的性质

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & x^2-1 \end{vmatrix} = x^2 - 9 = 0.$$

一、填空题(每小题4分，共20分)

1. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & x^2 \end{vmatrix} = 0$的全部根是(　　　　　).

解 根据行列式的性质

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & x^2-1 \end{vmatrix} = x^2 - 9 = 0.$$

故上述方程的全部根为$-3, +3$.

2. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 则$AA^T =$(   ), 其中$A^T$为矩阵$A$的转置矩阵.

2. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 则$AA^T =$(   ), 其中$A^T$为矩阵$A$的转置矩阵.

解 根据转置矩阵的概念

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{bmatrix}$, 则$AA^T=($ $)$, 其中A^T为矩阵A的转置矩阵.

解 根据转置矩阵的概念

$$A^T=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&-1\end{bmatrix}\Rightarrow AA^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&-1\\-1&2\end{bmatrix}.$$

补充题1: 在上述条件下求$|A^TA|$.

3. 已知向量组$\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (0, 2, 5)^T$, $\mathbf{a}_3 = (2, 4, 7)^T$. 那么该向量组的秩为(　　　　　　); 一个极大线性无关组为(　　　　　　).

3. 已知向量组$\mathbf{a}_1=(1,1,1)^T$, $\mathbf{a}_2=(0,2,5)^T$, $\mathbf{a}_3=(2,4,7)^T$. 那么该向量组的秩为(　　　　　); 一个极大线性无关组为(　　　　　).

解 构造矩阵$A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)$, 并对其施行初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3).$$

3. 已知向量组$\mathbf{a}_1=(1,1,1)^T$, $\mathbf{a}_2=(0,2,5)^T$, $\mathbf{a}_3=(2,4,7)^T$. 那么该向量组的秩为(　　　　); 一个极大线性无关组为(　　　　).

解 构造矩阵$A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)$, 并对其施行初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3).$$

因为$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$线性无关, 且$\mathbf{b}_3=2\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$.

3. 已知向量组$\mathbf{a}_1 = (1,1,1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (0,2,5)^T$, $\mathbf{a}_3 = (2,4,7)^T$. 那么该向量组的秩为(　　　　　　); 一个极大线性无关组为(　　　　　　).

解 构造矩阵$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, 并对其施行初等行变换

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3).$$

因为$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$线性无关, 且$\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$. 故$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$是原向量组的一个极大线性无关组, 进而$R(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 2$.

3. 已知向量组$\mathbf{a}_1=(1,1,1)^T$, $\mathbf{a}_2=(0,2,5)^T$, $\mathbf{a}_3=(2,4,7)^T$. 那么该向量组的秩为(　　　　　); 一个极大线性无关组为(　　　　　).

解 构造矩阵$A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)$, 并对其施行初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3).$$

因为$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2$线性无关, 且$\mathbf{b}_3=2\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$. 故$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$是原向量组的一个极大线性无关组, 进而$R(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3)=2$. 同理, $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$是原向量组的一个极大线性无关组.

4. 若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是可逆矩阵$A_{n\times n}$的特征值, 则矩阵A^T的特征值为(   ); 矩阵A^*的特征值为(   ); 矩阵A^{-1}的特征值为(   ), 其中A^*和A^{-1}分别表示矩阵A的伴随矩阵和逆矩阵.

4. 若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是可逆矩阵$A_{n\times n}$的特征值, 则矩阵A^T的特征值为(   ); 矩阵A^*的特征值为(   ); 矩阵A^{-1}的特征值为(   ), 其中A^*和A^{-1}分别表示矩阵A的伴随矩阵和逆矩阵.

分析 设A是n阶方阵, 则A与A^T具有相同的特征值.

4. 若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是可逆矩阵$A_{n\times n}$的特征值, 则矩阵A^T的特征值为(　　　　　　); 矩阵A^*的特征值为(　　　　　　); 矩阵A^{-1}的特征值为(　　　　　　), 其中A^*和A^{-1}分别表示矩阵A的伴随矩阵和逆矩阵.

分析 设A是n阶方阵, 则A与A^T具有相同的特征值.

λ^m是A^m的特征值$(m \in Z)$, 对应的特征向量不变.

A^{-1}的特征值是$\frac{1}{\lambda}$, A^*的特征值是 $\frac{|A|}{\lambda}$, 对应的特征向量不变.

5. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-4x_1x_2+ax_2^2+2x_3^2+2x_3x_4+bx_4^2$是正定的, 则参数 a和b的取值范围分别是(　　　　　　).

5. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-4x_1x_2+ax_2^2+2x_3^2+2x_3x_4+bx_4^2$是正定的, 则参数 a和b的取值范围分别是(　　　　　　).

解 二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ -2 & a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & b\end{bmatrix}$$

5. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-4x_1x_2+ax_2^2+2x_3^2+2x_3x_4+bx_4^2$是正定的, 则参数 a和b的取值范围分别是(   ).

解 二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{bmatrix}$$

矩阵A正定的充要条件是其各个顺序主子式全大于零, 即

$$|D_2|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & a \end{vmatrix}=a-4>0\Rightarrow a>4.$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = 2b - 1 > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}.$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = a(2b-1) > 0 \Rightarrow a > 0, b > \frac{1}{2} \text{ 或 } a < 0, b < \frac{1}{2}.$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = 2b - 1 > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}.$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = a(2b-1) > 0 \Rightarrow a > 0, b > \frac{1}{2} \text{ 或 } a < 0, b < \frac{1}{2}.$$

故$a > 0$且$b > \frac{1}{2}$.

二、计算题(每小题12分，共24分)

二、计算题(每小题12分，共24分)

1. 计算下列行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & a_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & a_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

其中$x_i \neq a_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

二、计算题(每小题12分, 共24分)

1. 计算下列行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & a_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & a_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

其中$x_i \neq a_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

解: 行列式D_n的第$2, 3, \cdots, n$行依次减去第1行, 得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 - a_1 & a_2 - x_2 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 - a_1 & 0 & a_3 - x_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 - a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n - x_n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 - a_1 & a_2 - x_2 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 - a_1 & 0 & a_3 - x_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 - a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n - x_n \end{vmatrix}$$

又因为$x_i \neq a_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 那么

$$D_n = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\cdots(x_n - a_n) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x_1 - a_1} & \frac{x_2}{x_2 - a_2} & \frac{x_3}{x_3 - a_3} & \dots & \frac{x_n}{x_n - a_n} \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

将上式右端行列式的第$2,3,\cdots,n$列加到第1列, 得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{x_1-a_1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{x_i}{x_i-a_i} & \frac{x_2}{x_2-a_2} & \frac{x_3}{x_3-a_3} & \dots & \frac{x_n}{x_n-a_n} \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

将上式右端行列式的第$2,3,\cdots,n$列加到第1列, 得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{x_1-a_1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{x_i}{x_i-a_i} & \frac{x_2}{x_2-a_2} & \frac{x_3}{x_3-a_3} & \dots & \frac{x_n}{x_n-a_n} \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

于是, 有

$$\begin{aligned} D_n &= \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\left(\frac{a_1}{x_1-a_1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{x_i}{x_i-a_i}\right)\cdot(-1)^{n-1} \\ &= \prod_{i=1}^{n}(a_i-x_i)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i-x_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\left(-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i-a_i}\right)\cdot(-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

2. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. 求矩阵方程$A^*X=2X+A^{-1}$, 其中$A^*$和$A^{-1}$分别表示矩阵$A$的伴随矩阵和逆矩阵.

2. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. 求矩阵方程$A^*X=2X+A^{-1}$, 其中$A^*$和$A^{-1}$分别表示矩阵$A$的伴随矩阵和逆矩阵.

解: 因为$A^*A=AA^*=|A|E$, 因此

2. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$. 求矩阵方程$A^*X=2X+A^{-1}$, 其中$A^*$和$A^{-1}$分别表示矩阵$A$的伴随矩阵和逆矩阵.

解: 因为$A^*A=AA^*=|A|E$, 因此

$$\begin{aligned}A^*X=A^{-1}+2X \Leftrightarrow & AA^*X=AA^{-1}+2AX\\ \Leftrightarrow & |A|EX=E+2AX\\ \Leftrightarrow & |A|X-2AX=E\\ \Leftrightarrow & (|A|E-2A)X=E\\ \Leftrightarrow & X=(|A|E-2A)^{-1}\end{aligned}$$

由于

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

由于

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

那么

$$|A|E - 2A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

由于

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

那么

$$|A|E - 2A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

下面求$|A|E - 2A$的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 2 & -2 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -2 & 2 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{\frac{1}{4}} & \mathbf{\frac{1}{4}} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{4}} & \mathbf{\frac{1}{4}} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{\frac{1}{4}} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{1}{4}} \end{bmatrix}$$

因此

$$X = (|A|E - 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

补充题1: 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. 试求矩阵方程$AX = 2X - A^2 - E$.

三、讨论题(每小题12分，共24分)

三、讨论题(每小题12分, 共24分)

1. 设有线性方程组

$$\begin{cases} x - 3y - z &= 0 \\ x - 4y + az &= b \\ 2x - y + 3z &= 5 \end{cases} \tag{1}$$

试问当a, b取何值时, 方程组有唯一解?无解?无穷多解, 并在此时求出相应的通解.

三、讨论题(每小题12分, 共24分)

1. 设有线性方程组

$$\begin{cases} x-3y-z & = & 0 \\ x-4y+az & = & b \\ 2x-y+3z & = & 5 \end{cases} \tag{1}$$

试问当a, b取何值时, 方程组有唯一解?无解?无穷多解, 并在此时求出相应的通解.

解: 对线性方程组的增广矩阵施行初等变换

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & \mathbf{0} \\ 1 & -4 & a & \mathbf{b} \\ 2 & -1 & 3 & \mathbf{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & a+2 & \mathbf{b+1} \end{bmatrix} = B$$

根据矩阵B讨论:

根据矩阵B讨论:

- 当$a+2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -2$时, 方程组有唯一解;
- 当$a+2=0$且$b+1\neq 0 \Leftrightarrow a=-2$且$b\neq -1$时, 方程组无解;
- 当$a+2=0$且$b+1=0 \Leftrightarrow a=-2$且$b=-1$时, 方程组有无穷解.

根据矩阵B讨论:

- 当$a+2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq -2$时, 方程组有唯一解;
- 当$a+2=0$且$b+1\neq 0 \Leftrightarrow a=-2$且$b\neq -1$时, 方程组无解;
- 当$a+2=0$且$b+1=0 \Leftrightarrow a=-2$且$b=-1$时, 方程组有无穷解.

此时对相应方程组的增广矩阵施行初等行变换, 即

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

由此可知, $R(A) = 2 < 3 = n$, 故线性方程组(1)的导出组有基础解系, 而且基础解系含有$n - R(A) = 3 - 2 = 1$个解向量.

由此可知, $R(A)=2<3=n$, 故线性方程组(1)的导出组有基础解系, 而且基础解系含有$n-R(A)=3-2=1$个解向量.

与原方程组及其导出组同解方程组分别为

$$\begin{cases} x=3-2z \\ y=1-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2z \\ y=-z \end{cases}$$

由此可知, $R(A)=2<3=n$, 故线性方程组(1)的导出组有基础解系, 而且基础解系含有$n-R(A)=3-2=1$个解向量.

与原方程组及其导出组同解方程组分别为

$$\begin{cases} x=3-2z \\ y=1-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2z \\ y=-z \end{cases}$$

于是通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall k \in R$$

由此可知, $R(A)=2<3=n$, 故线性方程组(1)的导出组有基础解系, 而且基础解系含有$n-R(A)=3-2=1$个解向量.

与原方程组及其导出组同解方程组分别为

$$\begin{cases} x=3-2z \\ y=1-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2z \\ y=-z \end{cases}$$

于是通解为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall k \in R$$

补充题1: 课本习题5.3第6题.

2. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -x & -1 & x \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. 试问当变量$x$为何值时, 该方阵可以对角化?并求出可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

2. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -x & -1 & x \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. 试问当变量$x$为何值时, 该方阵可以对角化?并求出可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP = \Lambda$.

解: (1) 求A的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \Leftrightarrow$求$|A - \lambda E| = 0$的根$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

2. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -x & -1 & x \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. 试问当变量$x$为何值时，该方阵可以对角化?并求出可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=\Lambda$.

解: (1) 求A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \Leftrightarrow$求$|A-\lambda E|=0$的根$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ -x & -1-\lambda & x \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & x \\ 1-\lambda & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & x \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & x \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(-1-\lambda)^2=0$$

故A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=1.$

(2) 求属于$\lambda_1=\lambda_2=-1$的特征向量$X \Leftrightarrow$求 $(A-\lambda_1 E)X=0$的非零解X.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\bullet)$$

根据定理6.7, A可以对角化$\Leftrightarrow R(A-\lambda_1 E)X=n-n_i=1 \Leftrightarrow x=0$.

故线性方程组的基础解系含有$n-R(A-\lambda_1 E)=3-1=2$个解向量.

(2) 求属于$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$的特征向量$X \Leftrightarrow$求 $(A - \lambda_1 E)X = 0$的非零解X.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\bullet)$$

根据定理6.7, A可以对角化$\Leftrightarrow R(A - \lambda_1 E)X = n - n_i = 1 \Leftrightarrow x = 0$. 故线性方程组的基础解系含有$n - R(A - \lambda_1 E) = 3 - 1 = 2$个解向量.

于是方程组$(\bullet) \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2x_1 + x_2$. 取$x_1, x_2$为自由变量. 得到

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) 求属于$\lambda_3 = 1$的特征向量$X \Leftrightarrow$求方程组 $(A - \lambda_3 E)X = 0$的通解X.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得通解为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4) 作可逆矩阵

$$P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为$|P| = -1$, 所以P可逆，且有

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

补充题1: 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角阵Λ. 试确定参数a的值, 并求可逆矩阵P使得$P^{-1}AP = \Lambda$.

四、证明题(每小题12分，共12分)

四、证明题(每小题12分, 共12分)

1. 已知三维向量空间$\mathbb{R}^3$的两个基为

(I) $\mathbf{a}_1 = (1,1,1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,1)^T$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,1)^T$.

(I) $\mathbf{b}_1 = (1,0,1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (1,1,0)^T$, $\mathbf{b}_3 = (0,1,1)^T$.

证明由基(I)到基(II)的过渡矩阵为$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

四、证明题(每小题12分, 共12分)

1. 已知三维向量空间$\mathbb{R}^3$的两个基为

(I) $\mathbf{a}_1 = (1,1,1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,1)^T$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,1)^T$.

(I) $\mathbf{b}_1 = (1,0,1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (1,1,0)^T$, $\mathbf{b}_3 = (0,1,1)^T$.

证明由基(I)到基(II)的过渡矩阵为$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

解 取R^3中的标准正交基

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

从而

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

于是有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

从而

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

又因为

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

因此

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

所以基I到基II的过渡矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

补充题1: 设4维向量组$\mathbf{a}_1 = (1+a, 1, 1,)^T$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T$, $\mathbf{a}_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T$, $\mathbf{a}_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$. 证明:

(1) 当$a = 0$时, $\mathbf{a}_1$是该向量组的一个极大无关组.

(2) 当$a = -10$时, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$是该向量组的一个极大无关组.

补充题2: 设A, B是两个n阶非零矩阵, 满足 $AB = 0$且伴随矩阵$A^* \neq 0$. 若$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX = 0$的基础解系, $\mathbf{a}$是任意一个n维列向量. 试证明$B\mathbf{a}$可以由$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$, 并说明何时表示唯一.

补充题2: 设A, B是两个n阶非零矩阵, 满足 $AB = 0$且伴随矩阵$A^* \neq 0$. 若$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX = 0$的基础解系, $\mathbf{a}$是任意一个n维列向量. 试证明$B\mathbf{a}$可以由$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$, 并说明何时表示唯一.

解: ($\bullet$) 说明$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$线性无关.

补充题2: 设A, B是两个n阶非零矩阵, 满足 $AB=0$且伴随矩阵$A^*\neq 0$. 若$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX=0$的基础解系, $\mathbf{a}$是任意一个n维列向量. 试证明$B\mathbf{a}$可以由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k,\mathbf{a}$, 并说明何时表示唯一.

解: (•) 说明$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k,\mathbf{a}$线性无关.

不失一般性, 假设$B\mathbf{a}\neq 0$. 设存在一组数$l_1,l_2,\cdots,l_k,l$使得

$$l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+\cdots+l_k\mathbf{a}_k+l\mathbf{a}=\mathbf{0}. \tag{2}$$

补充题2: 设A,B是两个n阶非零矩阵, 满足 $AB=0$且伴随矩阵$A^*\neq 0$. 若$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX=0$的基础解系, $\mathbf{a}$是任意一个n维列向量. 试证明$B\mathbf{a}$可以由$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k,\mathbf{a}$, 并说明何时表示唯一.

解: (•) 说明$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k,\mathbf{a}$线性无关.

不失一般性, 假设$B\mathbf{a}\neq 0$. 设存在一组数$l_1,l_2,\cdots,l_k,l$使得

$$l_1\mathbf{a}_1+l_2\mathbf{a}_2+\cdots+l_k\mathbf{a}_k+l\mathbf{a}=\mathbf{0}. \tag{2}$$

在(2)两端左乘B, 则有

$$l_1(B\mathbf{a}_1)+l_2(B\mathbf{a}_2)+\cdots+l_k(B\mathbf{a}_k)+l(B\mathbf{a})=\mathbf{0}. \tag{3}$$

因$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX = 0$的基础解系,

因$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX = 0$的基础解系,故$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\cdots$,$\mathbf{a}_k$线性无关, 且

$$B\mathbf{a}_1 = B\mathbf{a}_2 = \cdots = B\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{4}$$

因$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX=0$的基础解系,故$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\cdots$,$\mathbf{a}_k$线性无关, 且

$$B\mathbf{a}_1 = B\mathbf{a}_2 = \cdots = B\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{4}$$

于是由(4)和(3)得$l(B\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, 而$B\mathbf{a} \neq 0$. 故$l = 0$.

因$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX=0$的基础解系,故$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\cdots$,$\mathbf{a}_k$线性无关, 且

$$B\mathbf{a}_1 = B\mathbf{a}_2 = \cdots = B\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{4}$$

于是由(4)和(3)得$l(B\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, 而$B\mathbf{a} \neq 0$. 故$l=0$. 这时(2)可变为

$$l_1\mathbf{a}_1 + l_2\mathbf{a}_2 + \cdots + l_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{5}$$

因$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX = 0$的基础解系,故$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\cdots$,$\mathbf{a}_k$线性无关, 且

$$B\mathbf{a}_1 = B\mathbf{a}_2 = \cdots = B\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{4}$$

于是由(4)和(3)得$l(B\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, 而$B\mathbf{a} \neq 0$. 故$l = 0$. 这时(2)可变为

$$l_1\mathbf{a}_1 + l_2\mathbf{a}_2 + \cdots + l_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{5}$$

由$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\cdots$,$\mathbf{a}_k$线性无关, 可知

$$l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0. \tag{6}$$

这就证明了$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}$线性无关. □

(●●) 说明$k = n - 1$.

(●●) 说明$k = n - 1$.

设$B = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$, 由$AB = 0$可得

$$AB_1 = AB_2 = \cdots = AB_n = 0. \tag{7}$$

(●●) 说明$k = n - 1$.

设$B = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$, 由$AB = 0$可得

$$AB_1 = AB_2 = \cdots = AB_n = 0. \tag{7}$$

因此B的每一列是$AX = 0$的解, 进而

$$R(B) = R(B_1, B_2, \cdots, B_n) \leq n - R(A). \tag{8}$$

(●●) 说明$k = n - 1$.

设$B = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$, 由$AB = 0$可得

$$AB_1 = AB_2 = \cdots = AB_n = 0. \tag{7}$$

因此B的每一列是$AX = 0$的解, 进而

$$R(B) = R(B_1, B_2, \cdots, B_n) \leq n - R(A). \tag{8}$$

由$A^* \neq 0$知$R(A^*) \geq 1$, 从而$R(A) \geq n - 1$.

(●●) 说明$k = n - 1$.

设$B = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$, 由$AB = 0$可得

$$AB_1 = AB_2 = \cdots = AB_n = 0. \tag{7}$$

因此B的每一列是$AX = 0$的解, 进而

$$R(B) = R(B_1, B_2, \cdots, B_n) \leq n - R(A). \tag{8}$$

由$A^* \neq 0$知$R(A^*) \geq 1$, 从而$R(A) \geq n - 1$.

由$B = (B_1, B_2, \cdots, B_n) \neq 0$知$AX = 0$有非零解, 从而$R(A) < n$.

(●●) 说明$k = n - 1$.

设$B = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$, 由$AB = 0$可得

$$AB_1 = AB_2 = \cdots = AB_n = 0. \tag{7}$$

因此B的每一列是$AX = 0$的解, 进而

$$R(B) = R(B_1, B_2, \cdots, B_n) \leq n - R(A). \tag{8}$$

由$A^* \neq 0$知$R(A^*) \geq 1$, 从而$R(A) \geq n - 1$.

由$B = (B_1, B_2, \cdots, B_n) \neq 0$知$AX = 0$有非零解, 从而$R(A) < n$.

故$R(A) = n - 1$. 于是由(8)得$R(B) = 1$.

由$R(B)=1$可得, 线性方程组$BX=0$必存在基础解系, 且基础解系含有$n-R(B)=n-1$个解向量.

由$R(B)=1$可得, 线性方程组$BX=0$必存在基础解系, 且基础解系含有$n-R(B)=n-1$个解向量.

而已知$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX=0$的基础解系.

由$R(B)=1$可得, 线性方程组$BX=0$必存在基础解系, 且基础解系含有$n-R(B)=n-1$个解向量.

而已知$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX=0$的基础解系.

故$k=n-1$. □

综合(•)与(••)可知, 由n个n维向量构成的向量组

$$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}$$

线性无关.

由$R(B)=1$可得, 线性方程组$BX=0$必存在基础解系, 且基础解系含有$n-R(B)=n-1$个解向量.

而已知$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX=0$的基础解系.

故$k=n-1$. □

综合(•)与(••)可知, 由n个n维向量构成的向量组

$$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}$$

线性无关. 进而是$\mathbb{R}^n$的一个基.

由$R(B)=1$可得, 线性方程组$BX=0$必存在基础解系, 且基础解系含有$n-R(B)=n-1$个解向量.

而已知$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX=0$的基础解系.

故$k=n-1$. □

综合(•)与(••)可知, 由n个n维向量构成的向量组

$$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}$$

线性无关. 进而是$\mathbb{R}^n$的一个基.

故$\mathbb{R}^n$中的向量$B\mathbf{a}$一定可由基$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}$线性表示.

由$R(B)=1$可得, 线性方程组$BX=0$必存在基础解系, 且基础解系含有$n-R(B)=n-1$个解向量.

而已知$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k$是齐次线性方程组$BX=0$的基础解系.

故$k=n-1$. $\square$

综合(•)与(••)可知, 由n个n维向量构成的向量组

$$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}$$

线性无关. 进而是$\mathbb{R}^n$的一个基.

故$\mathbb{R}^n$中的向量$B\mathbf{a}$一定可由基$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}$线性表示.

(唯一性可用反证法说明)

五、探索题(每小题20分, 共20分)

五、探索题(每小题20分，共20分)

1. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$可通过正交变换$X=PY$化为标准形$y_1^2+y_2^2+by_3^2$.

(1) 写出二次型的矩阵A.

(2) 求参数a和b的值.

(3) 求出满足条件的正交矩阵P.

(4) 求矩阵A^k，其中k为正整数.

解: (1) 二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & a \end{bmatrix}$$

解: (1) 二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & a \end{bmatrix}$$

(2) 由二次型的标准型知, A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = b.$

因此, 根据特征值的性质得

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 5 + a \Leftrightarrow b = 5 + a$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = |A| \Leftrightarrow b = 6a - 20.$$

解得$a = 5,\ b = 10.$

(3) 求满足条件的正交矩阵P.

求属于特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$的特征向量.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

亦即

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

亦即

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

取x_2, x_3为自由未知量，解得通解为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

取

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求属于特征值$\lambda_3=10$的特征向量.

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

亦即

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

亦即

$$\begin{cases} 2x_1+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

解得通解为

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k_3\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad k_3\in\mathbb{R}$$

取

$$\mathbf{p}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

解得通解为

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k_3 \in \mathbb{R}$$

取

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

因为$\mathbf{p}_1$与$\mathbf{p}_3$正交，$\mathbf{p}_1$与$\mathbf{p}_3$正交．因此只需对将向量$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$施密特正交化，对$\mathbf{p}_3$单位化．

取

$$\beta_1 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \mathbf{p}_2 - \frac{(\mathbf{p}_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 18 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

取

$$\beta_1 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \mathbf{p}_2 - \frac{(\mathbf{p}_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 18 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

下面将$\beta_1, \beta_2, \mathbf{p}_3$单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{|\mathbf{p}_3|}\mathbf{p}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

于是正交矩阵P为

$$P = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

补充题1: 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$. 它的矩阵$A$的特征值 之和为1, 特征值之积为-12.

(1) 求参数a和b的值.

(2) 求正交变换$X=QY$, 把$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准二次型.

(3) 求矩阵A^{2017}的特征值与特征向量.

补充题2: 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + ax_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2bx_2x_3 \quad (b > 0)$$

经正交替换化为标准形二次项$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$.

(1) 求二次型矩阵A以及参数a, b的值.

(2) 求满足条件的正交变换$X = QY$.

(3) 求矩阵A^{2017}的特征值与特征向量.