2-枚举

2.A) 科幻nished套连接的nishing 7。 一组 *Ë* 说 **科幻nished** 一旦存在一个整数 *ñ* ∈ ñ 和双射 *φè* → � 1; *ñ* 。

他们这么说 *ñ* 是 **枢机主教** 的 *E* : 是的元件的数量 *E*，红衣主教笔记 (*E*) , | *E* |，或 # *E*.

注5。 • 按照惯例，∅ 是一个有限集合基数0。

- 一组是说 *在无限* 如果没有网络连接nished。
- 他们呼吁 **独生子** 一组基数1。
- 对于无限 *Ë* 枢机主教 *N*，还有一个双射 � 1; *ñ* → *E*，允许数目的元素 *Ë* 写： *E* = {一 1 有 2。。。，有 *N*}。

实施例4。

- 卡 ({ *A* , *B* , *C* , *d*}) = 4 •卡 (� 0; *ñ*) = *N* + 1 •卡 (� 磷; *ñ*) = *ñ* - *p* + 1

8号提案。 是否 *Ë* 一个有限集合，和 *Ë* ⊂ *E*. 然后 *Ë* 是一个有限集合和：

卡 (*Ë*) 卡 (*E*)

随着当且仅当平等 *E* = *Ë*。

示例1。

推论1。 如果 *˚F* 包括在 *Ë* 是 *˚F* 在无限，然后 *Ë* 在无限。

建议9。 让 *Ë* 和 *˚F* 两套无限，和 *f* : *E* → *F* . Alors :

1- *f* est injective = ⇒ Card(*E*) � Card(*F*)

2- *f* est surjective = ⇒ Card(*E*) � Card(*F*)

3- *f* est bijective = ⇒ Card(*E*) = Card(*F*)

Démonstration 2.

Proposition 10. Soient E et F deux non vides, avec E fini, et $f : E \to F$.

1- $f(E)$ est fini, et Card($f(E)$) � Card(E).

2- Card($f(E)$) = Card(E) $\Leftrightarrow$ f est injective. 3- f est surjective $\Leftrightarrow$ F est fini et Card($f(E)$)
= Card(F).

Démonstration 3.

Théorème 7. *Soient E et F deux ensembles finis, de même cardinal, et* $f : E \to F$. *Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1- f est injective. 2- f est
surjective. 3- f est
bijective.

Démonstration 4.

Théorème 8. *Soient E et F deux ensembles finis, alors les ensembles suivants sont également finis, et on peut calculer leur cardinal :*

- $E \cup F$, *avec* $\# E \cup F = \#E + \#F - \# E \cap F$
- $E \cap F$, *avec* $\# E \cap F = \#E + \#F - \# E \cup F$
- $E \times F$, *avec* $\# E \times F = \#E \times \# F$
- F^E, *avec* $\# F^E = \# F^{\# E}$
- P(E), *avec* $\#$P(E) = $2^{\# E}$

2.b) Listes Définition 8. Soit E un ensemble fini, on appelle p- **liste** ou p- **uplet** tout élément de E^p, avec :

$$E^p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) / \forall\, i \in \text{�}\ 1;\ p\ \text{�},\ x_i \in E\}$$

Remarque 6. Attention, c'est une notion distincte d'un sous-ensemble de E à p éléments. D'une part, on peut avoir p � Card(E), d'autre part, certains éléments d'un p- uplet peuvent se répéter, et enfin, *l'ordre des éléments est important.*

Théorème 9. *Soit E un ensemble fini.*

$$\text{Card}(E^p) = \text{Card}(E)^p$$

2.c) Arrangements et permutations Remarque 7. Dans une p- liste, certains éléments peuvent se répéter. Si l'on veut choisir une p- liste d'éléments *sans répétitions,* cela revient à choisir un sous-ensemble F de E avec p éléments, ou encore à donner un ensemble F à p éléments, et une fonction injective de E dans F *(* fonction correspondant au "choix" ou non de l'élément de E*).*

Définition 9. Soient E un ensemble, et p un entier naturel. On appelle p- arrangement d'éléments de E toute p- liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Proposition 11. Soit E un ensemble fini de cardinal n, p un entier. Le nombre de p- arrangements d'éléments de E est noté A_{pn} et :

$$A_{pn} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p � n \text{ et 0 sinon.}$$

Remarque 8. Un p- arrangement est un p- uplet sans répétitions, mais l'ordre des éléments est important. Par exemple ; (1, 4, 2) et (1, 2, 4) sont deux 3-arrangements différents de � 1; 4 �.

Proposition 12. Soient E et F deux ensembles finis, de cardinaux respectifs n et p. Soit I l'ensemble des applications injectives de E dans F . Alors :

$$\mathrm{Card}(I) = A_{pn}$$

Démonstration 5.

Définition 10. Soit E un ensemble fini, on appelle **permutation** de E toute bijection $\phi : E \to E$.
L'ensemble des permutations de E est noté S_E. De plus, si $E =$ � 1; n �, on note $S_E = S_n$.

Remarque 9. ($\sigma(E)$, $\circ$) est un groupe (non-abélien).

Théorème 10. *Si E est un ensemble fini, alors σ(E) est fini également et*

$$\mathrm{Card}(S_E) = \mathrm{Card}(E)!$$

en particulier, on a

$$\mathrm{Card}(S_n) = n!$$

Démonstration 6.

2.d) Combinaison Définition 11. Soit E un ensemble. On appelle p- **combinaison** de E une partie de E ayant exactement p éléments.

Remarque 10. Si on prend une p- combinaison particulière, il s'agit d'un sous-ensemble de E, donc d'une part, l'ordre des éléments n'a pas d'importance, et d'autre part, il n'y a pas de répétitions.

Théorème 11. *Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit $p \in [\![0; n]\!]$. Alors le nombre de p- combinaison de E est :*

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

On le lit «p parmi n ».

Remarque 11. La dernière écriture nous indique que moralement, une combinaison est un arrangement dont on ne regarde pas l'ordre.

Remarque 12. Par convention, si $p > n$, on posera $\binom{n}{p} = 0$.

Proposition 13. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in [\![0; n]\!]$. On a alors :

1- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

3- $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

2.e) Exercices Exercice I-5. Une fourmi se déplace sur les arêtes d'un tétraèdre. Chaque seconde, elle part d'un sommet pour aller à un autre sommet relié par une arête. Combien y a-t-il de chemins possibles en n secondes ? Même question pour un cube, et pour un dodécaèdre.

Exercice I-6. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; 3]\!]$?

Exercice I-7. On tire simultanément 8 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Combien d'entre eux contiennent deux carrés ?

Exercice I-8. Soient n et p deux entiers naturels non-nuls. Combien y a-t-il de listes de p entiers strictement croissantes ?

Exercice I-9. On veut organiser des matchs entre $2n$ équipes de basket, chaque équipe disputant un match (c'est à dire, on veut construire n paires d'équipes). Combien y a-t-il de manière possible d'organiser ces matchs ?

Exercice I-10. Montrer que :

1- $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

2- $\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{n+m}{p}$

3- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

4- $\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$

5- $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$