2018-2019年度上

线性代数期末复习(二)

北京化工大学数学系 苏贵福

1. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & t & t \\ 1 & t & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且方程组$AX = 0$的基础解系含有两个线性无关的解向量. 求方程$AX = 0$的通解.

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{bmatrix}$, 且方程组$AX=0$的基础解系含有两个线性无关的解向量. 求方程$AX=0$的通解.

解 根据题设, 方程组$AX=0$是一个4元齐次线性方程组, 并且其基础解系含有两个线性无关 的解向量, 故$R(A)=4-2=2$.

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{bmatrix}$, 且方程组$AX=0$的基础解系含有两个线性无关的解向量. 求方程$AX=0$的通解.

解 根据题设, 方程组$AX=0$是一个4元齐次线性方程组, 并且其基础解系含有两个线性无关 的解向量, 故$R(A)=4-2=2$. 下面对方程组的系数矩阵作初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1-2t&2-2t\\0&1&t&t\\0&0&-(t-1)^2&-(t-1)^2\end{bmatrix}=B.$$

要使$R(A)=2$, 必有$t=1$. 此时

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

要使$R(A)=2$, 必有$t=1$. 此时

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由$R(A)=2<4$可知, 原线性方程组有无穷多个解, 且基础解系含有$n-R(A)=4-2=2$个解向量.

要使$R(A)=2$, 必有$t=1$. 此时

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由$R(A)=2<4$可知, 原线性方程组有无穷多个解, 且基础解系含有$n-R(A)=4-2=2$个解向量. 与B对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$$

取自由未知量为

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取自由未知量为

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此线性方程组的通解为$\xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, 其中$k_1, k_2 \in \mathbb{R}^n$.

2. 设4元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, η_1, η_2, η_3 是它的3个解向量, 且$\eta_1 + \eta_2 = (1, 2, 2, 1)^T$, $\eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$. 求该线性方程组的通解.

2. 设4元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, η_1, η_2, η_3 是它的3个解向量, 且$\eta_1 + \eta_2 = (1, 2, 2, 1)^T$, $\eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$. 求该线性方程组的通解.

解 设非齐次线性方程组为$AX = b$, 相应的导出组为$AX = 0$.

2. 设4元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, η_1, η_2, η_3 是它的3个解向量, 且$\eta_1 + \eta_2 = (1, 2, 2, 1)^T$, $\eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$. 求该线性方程组的通解.

解 设非齐次线性方程组为$AX = b$, 相应的导出组为$AX = 0$.

因为$AX = b$有三个解η_1, η_2, η_3, 故$R(A) = R(A, b)$.

2. 设4元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, η_1, η_2, η_3 是它的3个解向量, 且$\eta_1 + \eta_2 = (1, 2, 2, 1)^T$, $\eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$. 求该线性方程组的通解.

解 设非齐次线性方程组为$AX = b$, 相应的导出组为$AX = 0$.

因为$AX = b$有三个解η_1, η_2, η_3, 故$R(A) = R(A, b)$.

进一步地, 有$R(A) = R(A, b) = 3 < 4 = n$.

2. 设4元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, η_1, η_2, η_3 是它的3个解向量, 且$\eta_1 + \eta_2 = (1, 2, 2, 1)^T$, $\eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$. 求该线性方程组的通解.

解 设非齐次线性方程组为$AX = b$, 相应的导出组为$AX = 0$.

因为$AX = b$有三个解η_1, η_2, η_3, 故$R(A) = R(A, b)$.

进一步地, 有$R(A) = R(A, b) = 3 < 4 = n$.

从而$AX = 0$有基础解系, 且基础解系含有$n - R(A) = 4 - 3 = 1$个解向量. (•)

由性质5.3知, $\xi_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = (\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2})^T$ 也是$AX = b$的特解.

2. 设4元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, η_1, η_2, η_3 是它的3个解向量, 且$\eta_1 + \eta_2 = (1,2,2,1)^T$, $\eta_3 = (1,2,3,4)^T$. 求该线性方程组的通解.

解 设非齐次线性方程组为$AX = b$, 相应的导出组为$AX = 0$.

因为$AX = b$有三个解η_1, η_2, η_3, 故$R(A) = R(A, b)$.

进一步地, 有$R(A) = R(A, b) = 3 < 4 = n$.

从而$AX = 0$有基础解系, 且基础解系含有$n - R(A) = 4 - 3 = 1$个解向量. $(\bullet)$

由性质5.3知, $\xi_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = (\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2})^T$ 也是$AX = b$的特解.

由性质5.4知, $\xi_2 = \eta_3 - \xi_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})^T$ 是$AX = 0$的解. $(\bullet\bullet)$

2. 设4元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3, η_1, η_2, η_3 是它的3个解向量, 且$\eta_1 + \eta_2 = (1, 2, 2, 1)^T$, $\eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$. 求该线性方程组的通解.

解 设非齐次线性方程组为$AX = b$, 相应的导出组为$AX = 0$.

因为$AX = b$有三个解η_1, η_2, η_3, 故$R(A) = R(A, b)$.

进一步地, 有$R(A) = R(A, b) = 3 < 4 = n$.

从而$AX = 0$有基础解系, 且基础解系含有$n - R(A) = 4 - 3 = 1$个解向量. $(\bullet)$

由性质5.3知, $\xi_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = (\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2})^T$ 也是$AX = b$的特解.

由性质5.4知, $\xi_2 = \eta_3 - \xi_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})^T$ 是$AX = 0$的解. $(\bullet\bullet)$

由$(\bullet)$与$(\bullet\bullet)$知, $\xi^* = k\xi_2$是导出组的通解.

3. 已知向量 $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$的特征向量.

(1) 确定参数a, b的值以及特征向量ξ对应的特征值λ.

(2) 问A可否对角化, 并说明理由.

3. 已知向量 $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的特征向量.

(1) 确定参数a, b的值以及特征向量ξ对应的特征值λ.

(2) 问A可否对角化, 并说明理由.

解 (1) 求几个参数的值

3. 已知向量 $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的特征向量.

(1) 确定参数a, b的值以及特征向量ξ对应的特征值λ.

(2) 问A可否对角化, 并说明理由.

解 (1) 求几个参数的值

根据题设有$A\xi = \lambda\xi$, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. 已知向量 $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的特征向量.

(1) 确定参数a, b的值以及特征向量ξ对应的特征值λ.

(2) 问A可否对角化, 并说明理由.

解 (1) 求几个参数的值

根据题设有$A\xi = \lambda\xi$, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

解得$\lambda = -1,\ a = -3,\ b = 0.$

此时矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

此时矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(2) 求A的特征值

此时矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(2) 求A的特征值

矩阵A的特征方程为

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3$$

此时矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(2) 求A的特征值

矩阵A的特征方程为

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

解得矩阵A的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1.$

(3) 求A的特征向量

(3) 求A的特征向量

求线性方程组$(-E-A)X=0$的非零解

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

(3) 求A的特征向量

求线性方程组$(-E-A)X=0$的非零解

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

容易验证$R(-E-A)=2$, 故线性方程组(1)存在基础解系, 且基础解系只含有一个解向量. 也就是说A只有一个线性无关的解向量, 因此不可对角化.

补充题1: 设4维向量组$\mathbf{a}_1 = (1+a, 1, 1,)^T$, $\mathbf{a}_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T$, $\mathbf{a}_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T$, $\mathbf{a}_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$. 证明:

(1) 当$a = 0$时, $\mathbf{a}_1$是该向量组的一个极大无关组.

(2) 当$a = -10$时, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$是该向量组的一个极大无关组.

补充题1: 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$. 它的矩阵$A$的特征值 之和为1, 特征值之积为-12.

(1) 求参数a和b的值.

(2) 求正交变换$X=QY$, 把$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准二次型.

(3) 求矩阵A^{2017}的特征值与特征向量.

补充题2: 设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+ax_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+2bx_2x_3 \quad (b>0)$$

经正交替换化为标准形二次项$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

(1) 求二次型矩阵A以及参数a,b的值.

(2) 求满足条件的正交变换$X=QY$.

(3) 求矩阵A^{2017}的特征值与特征向量.

4. 设n阶矩阵A及s阶矩阵B都可逆. 则

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

4. 设n阶矩阵A及s阶矩阵B都可逆. 则

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

解 为了表示方便, 设 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ 可以分块为 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$.

4. 设n阶矩阵A及s阶矩阵B都可逆. 则

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

解 为了表示方便, 设 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ 可以分块为 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$. 于是

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix}$$

4. 设n阶矩阵A及s阶矩阵B都可逆. 则

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

解 为了表示方便, 设 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ 可以分块为 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$. 于是

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix}$$

进一步地, 有

$$AX_3 = E_n \Rightarrow X_3 = A^{-1} \qquad AX_4 = 0 \Rightarrow X_4 = 0$$

$$BX_1 = 0 \Rightarrow X_1 = 0 \qquad BX_2 = E_s \Rightarrow X_2 = B^{-1}$$

证毕! ■

5. 设A是3阶矩阵, 将A的第2行加到第1行得到B, 再将B的第1列的 -1倍加到第2列得到C. 若记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则$C = ?$

5. 设A是3阶矩阵, 将A的第2行加到第1行得到B, 再将B的第1列的 -1倍加到第2列得到C. 若记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则$C =$?

解 由题设可知

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

5. 设A是3阶矩阵, 将A的第2行加到第1行得到B, 再将B的第1列的 -1倍加到第2列得到C. 若记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则$C=?$

解 由题设可知

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$C = B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PAP^{-1}$$

6. 设A, B都是n阶方阵，且$AB = 0$. 则$R(A) + R(B) \leq n$.

6. 设A, B都是n阶方阵, 且$AB = 0$. 则$R(A) + R(B) \leq n$.

证明 不妨设$R(A) = x$, $R(B) = y$.

6. 设A, B都是n阶方阵，且$AB = 0$. 则$R(A) + R(B) \leq n$.

证明 不妨设$R(A) = x$, $R(B) = y$. 由$AB = 0$可知，矩阵$B = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$的每个列向量$B_i$ 都是$AX = 0$的解向量.

6. 设A, B都是n阶方阵，且$AB = 0$. 则$R(A) + R(B) \leq n$.

证明 不妨设$R(A) = x$, $R(B) = y$. 由$AB = 0$可知，矩阵$B = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$的每个列向量$B_i$ 都是$AX = 0$的解向量.

当$R(A) = x = n$时，$AX = 0$有唯一的零解，即$B_i = 0$, 故$B = 0$. 于是 $R(B) = 0$, 从而

$$R(A) + R(B) = n + 0 = n$$

当$R(A) = x < n$时，$AX = 0$存在基础解系，且该基础解系含有$n - x$个解向量. 故$R(B_1, B_2, \cdots, B - n) \leq n - x$. 即

$$R(A) + R(B) \leq n$$

7. 设A为n阶方阵, A^*是其伴随矩阵. 则

$$R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$$

7. 设A为n阶方阵, A^*是其伴随矩阵. 则

$$R(A^*) = \begin{cases} n & R(A) = n \\ 1 & R(A) = n-1 \\ 0 & R(A) < n-1 \end{cases}$$

证明 我们分为如下三种情况分析:

7. 设A为n阶方阵, A^*是其伴随矩阵. 则

$$R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$$

证明 我们分为如下三种情况分析:

(1) 若$R(A)=n$, 则$|A|\neq 0$. 于是由$AA^*=|A|E$得, $|A||A^*|=|A^n|$. 因此 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$, 故$R(A^*)=n$.

7. 设A为n阶方阵, A^*是其伴随矩阵. 则

$$R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$$

证明 我们分为如下三种情况分析:

(1) 若$R(A)=n$, 则$|A|\neq 0$. 于是由$AA^*=|A|E$得, $|A||A^*|=|A^n|$. 因此 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$, 故$R(A^*)=n$.

(2) 若$R(A)=n-1$, 则A中至少有一个$n-1$阶子式不为零, 而A^*中的元素都是 A的$n-1$阶子式或其相反数.

7. 设A为n阶方阵, A^*是其伴随矩阵. 则

$$R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$$

证明 我们分为如下三种情况分析:

(1) 若$R(A)=n$, 则$|A|\neq 0$. 于是由$AA^*=|A|E$得, $|A||A^*|=|A^n|$. 因此 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$, 故$R(A^*)=n$.

(2) 若$R(A)=n-1$, 则A中至少有一个$n-1$阶子式不为零, 而A^*中的元素都是 A的$n-1$阶子式或其相反数. 故A^*中至少有一个元素不为零, 则$R(A^*)\geq 1$. $(\bullet)$

又因为当$R(A)=n-1$时, 有$|A|=0$, 进而$AA^*=|A|E=0$.

又因为当$R(A) = n-1$时, 有$|A| = 0$, 进而$AA^* = |A|E = 0$. 于是$R(A) + R(A^*) \le n$. 故 $R(A^*) \le n - R(A) = n - (n-1) = 1$. (●●)

又因为当$R(A)=n-1$时, 有$|A|=0$, 进而$AA^*=|A|E=0$. 于是$R(A)+R(A^*)\leq n$. 故 $R(A^*)\leq n-R(A)=n-(n-1)=1$. (••)

由(•)与(••)可知, $R(A^*)=1$.

又因为当$R(A)=n-1$时，有$|A|=0$，进而$AA^*=|A|E=0$. 于是$R(A)+R(A^*)\le n$. 故 $R(A^*)\le n-R(A)=n-(n-1)=1$. $(\bullet\bullet)$

由$(\bullet)$与$(\bullet\bullet)$可知，$R(A^*)=1$.

(3) 若$R(A)<n-1$，则A中的所有$n-1$阶子式都为零，即$A^*=0$，故$R(A^*)=0$. ■

8. 设3阶矩阵A的特征值为$-1, 2, 3$. 则$|E+\frac{1}{6}A^*|=$?.

8. 设3阶矩阵A的特征值为$-1, 2, 3$. 则$|E + \frac{1}{6}A^*| = ?$.

证明 根据题意可知, $|A| = -1 \cdot 2 \cdot 3 = -6.$

8. 设3阶矩阵A的特征值为$-1, 2, 3$. 则$|E+\frac{1}{6}A^*| = ?$.

证明 根据题意可知, $|A| = -1 \cdot 2 \cdot 3 = -6.$

所以A^*的特征值为

$$\frac{|A|}{-1} = \frac{-6}{-1} = 6$$
$$\frac{|A|}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$
$$\frac{|A|}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

8. 设3阶矩阵A的特征值为$-1, 2, 3$. 则$|E+\frac{1}{6}A^*|=?$.

证明 根据题意可知, $|A|=-1\cdot 2\cdot 3=-6$.

所以A^*的特征值为

$$\frac{|A|}{-1}=\frac{-6}{-1}=6$$
$$\frac{|A|}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$
$$\frac{|A|}{3}=\frac{-6}{3}=-2$$

从而$E+\frac{1}{6}A^*$的特征值为$1+\frac{1}{6}\cdot 6=2$, $1+\frac{1}{6}\cdot(-3)=\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{6}\cdot(-2)=\frac{2}{3}$. 因此

$$|E+\frac{1}{6}A^*|=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

9. 设n阶矩阵A满足$|aE+bA|=0$且$|A|=c\neq 0$. 试求A^*的一个特征值.

9. 设n阶矩阵A满足$|aE+bA|=0$且$|A|=c\neq 0$. 试求A^*的一个特征值.

证明 由$|aE+bA|=0$得, $f_A(\lambda)=|-\frac{a}{b}E-A|=0$,

9. 设n阶矩阵A满足$|aE+bA|=0$且$|A|=c\neq 0$. 试求A^*的一个特征值.

证明 由$|aE+bA|=0$得, $f_A(\lambda)=|-\frac{a}{b}E-A|=0$, 故$\lambda=-\frac{a}{b}$是$A$的一个特征值.

9. 设n阶矩阵A满足$|aE+bA|=0$且$|A|=c\neq 0$. 试求A^*的一个特征值.

证明 由$|aE+bA|=0$得, $f_A(\lambda)=|-\frac{a}{b}E-A|=0$, 故$\lambda=-\frac{a}{b}$是$A$的一个特征值.

又因为$|A|=c\neq 0$, 所以A^*的一个特征值为

$$\frac{|A|}{\lambda}=\frac{c}{-\frac{a}{b}}=-\frac{bc}{a}.$$

10. 设A为4阶方阵, 且$|3E+A|=0$, $AA^T=2E$, $|A|<0$. 则求伴随矩阵A^*的一个特征值.