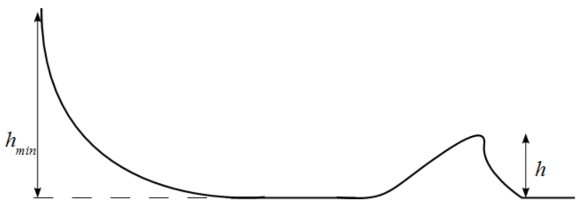
4. Énergétique du point matériel

4.1 Exercices d'application

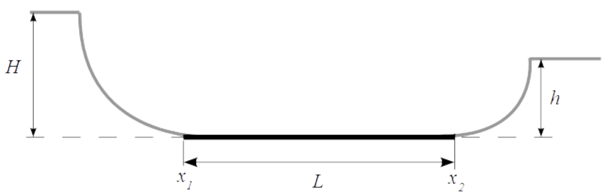
4.1.1 Tremplin de skatepark

On considère un skater de masse $m = 80$ kg qui s'entraîne dans un skatepark sur deux éléments différents.

Dans un premier temps, il s'élance d'une rampe de lancement à une hauteur h_{min} comme indiqué sur le schéma. Les modules sont faits de tels sortes qu'on peut négliger les frottements. Quelle doit être la hauteur h_{min} pour que le skater passe au-delà du tremplin de hauteur $h = 70$ cm ? Quelle est sa vitesse au niveau du sol juste avant le tremplin ?



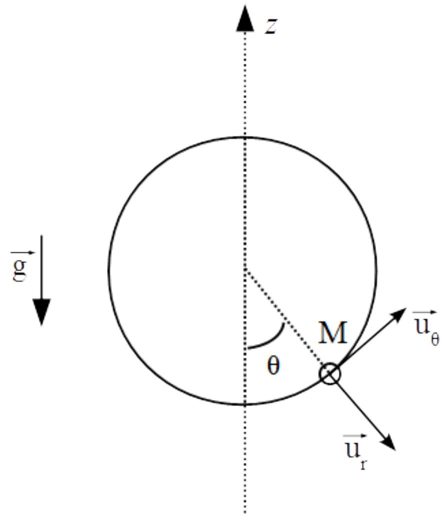
Il s'entraîne ensuite entre deux éléments de "quarter-pipe" (éléments en gris sur le schéma). Il part du premier (hauteur H) et souhaite arriver sur le deuxième (hauteur h) sans pousser. Comme pour le tremplin, les deux éléments en gris sont faits de telle sorte que les frottements sont négligés. Par contre, entre les deux, le skater passe par une partie de bitume de longueur $L = 5,5$ m où il perd de la vitesse à cause des frottements solides de ces roues.



On donne le coefficient de frottement des roues sur le bitume $f = 0,2$ et l'accélération de pesanteur $g = 9,81$ m.s^{-1}

1. Quelle est la vitesse du skateur en x_1 au bas du premier élément gris ?
2. Que vaut-elle en x_2 au pied du second élément gris, en admettant que le skateur ne s'est pas arrêté avant ?
3. Le deuxième "quater-pipe" est à une hauteur $h = 1,2$ m. Déterminer la hauteur H minimale que doit avoir la rampe de départ.

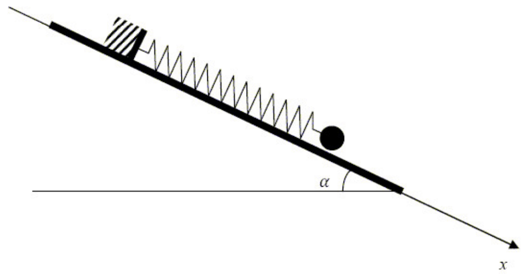
4.1.2 Oscillation d'un anneau dans un cerceau.



Un anneau de masse m peut glisser sans frottement le long d'un cerceau le long d'un cercle de rayon R. Sa position est repérée par l'angle θ.

1. Quelles sont les forces exercées sur l'anneau ?
2. Montrer que le travail d'une des forces est nul.
3. Déterminer la puissance de l'autre force en fonction de l'angle θ.
4. Déterminer l'équation du mouvement à l'aide du théorème de la puissance cinétique.
5. Quelle est la période des oscillations si l'amplitude d'oscillation est faible ?

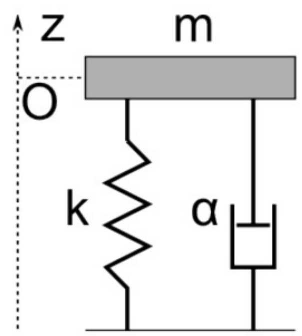
4.1.3 Oscillation sur plan incliné



On considère un point M de masse m lié à l'extrémité d'un ressort de raideur k de longueur à vide ℓ_0, l'autre extrémité restant fixe.Le support fixe du système est sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On néglige les frottements fluides et solides. Le repère choisi est le repère $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y)$ comme indiqué sur la figure. L'origine O coïncide avec sa position d'équilibre. A $t = 0$, on écarte M d'une distance $X_0 = 8,0$ cm par rapport à la position d'équilibre et lâché sans vitesse initiale.
Données : $m = 250$ g ; $k = 20$ N.m^{-1}.

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle totale de M. En déduire l'expression de l'énergie mécanique.
2. Montrer que l'énergie mécanique se conserve et déterminer sa valeur en fonction des données du problèmes.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement de M sous la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$. En déduire les expressions de ω_0 et x_{eq}.
4. Donner sa solution et calculer la période des oscillations.

4.1.4 Amortisseur



On considère l'amortisseur d'un véhicule. Chaque roue supporte un quart de la masse de la voiture assimilé à un point M de masse $m = 500$ kg, et est reliée à un amortisseur dont le ressort a une constante de raideur $k = 2,5.10^4$ N/m. Le point M subit aussi un frottement visqueux $\overrightarrow{f_v} = -\alpha\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse verticale de M et $\alpha = 5,0.10^3$ kg.s^{-1}. On considère le mouvement suivant l'axe $0z$ où l'origine O est prise au niveau du sol.

1. Déterminer les énergies potentielles, si elles existent, des forces qui s'exercent sur le point M. En déduire la ou les forces non conservative(s). Déterminer la puissance des forces non conservatives.
2. En déduire l'équation du mouvement.
3. Écrire l'équation sous la forme : $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{eq}$. En déduire ω_0, Q et z_{eq}.
4. Que vaut le facteur de qualité ? Dans quel régime se trouve-t-on ? Discuter des conséquences si le véhicule roule sur des défauts de la route.

4.1.5 Toboggan

Un adulte de masse $m = 70$ kg descend d'un toboggan d'une hauteur $h = 5$ m faisant un angle $\alpha = 45°$ avec le sol. La personne glisse sur le toboggan et subit des frottements solides dont le coefficient est : $f = 0,4$.

1. Calculer la variation d'énergie mécanique due aux frottements entre le haut et le bas du toboggan.
2. Déterminer la vitesse de la personne en bas du toboggan. Comparer à celle qu'il aurait sans frottement.

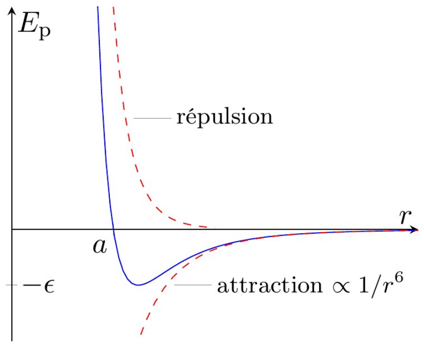
4.1.6 Interaction entre deux atomes.

On considère la molécule de HCl. Le chlore peut être considéré comme fixe en O et l'atome d'hydrogène pris comme système est mobile le long de l'axe x dans la partie $x > 0$. Le deuxième atome est soumis de la part du premier à une force dérivant de l'énergie potentielle :

$$E_p(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6},$$

où A et B sont des constantes réelles positives. On donne l'allure de cette énergie potentielle en trait plein sur le graphe ci-dessous.

$$E_p(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6}$$



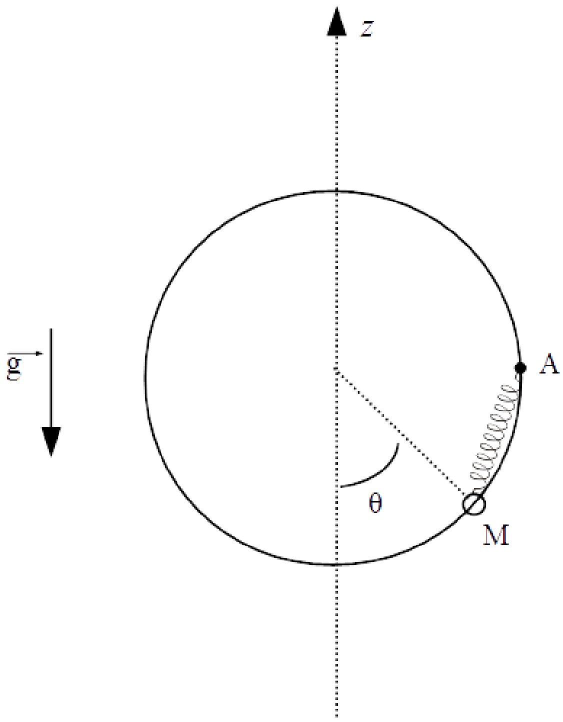
1. Donner la position d'équilibre ainsi que sa stabilité (d'après l'allure du graphe).
2. Calculer l'expression de la force subie par l'atome d'hydrogène.
3. Cette force est-elle attractive ou répulsive ? Est-ce cohérent avec la question 2) ?
4. L'atome d'hydrogène oscille légèrement autour de sa position d'équilibre. Quelle type d'oscillation est-ce ? Montrer qu'on peut écrire l'énergie potentielle comme une énergie potentielle élastique effective et déterminer la constante de raideur effective k_{eff} en fonction de A et B.
5. La distance séparant les deux atomes à l'équilibre est $x_0 = 127$ pm. On donne également $A = 1{,}94.10^{-138}$ USI et $B = 9{,}26.10^{-79}$ USI. Que vaut la constante de raideur effective ? Quelle est la fréquence d'oscillation pour un atome d'hydrogène de masse $m = 1.66.10^{-27}$ kg ? Quelle est la longueur d'onde correspondante ?

4.2 Exercices de réflexion

4.2.1 Bague attachée à un ressort

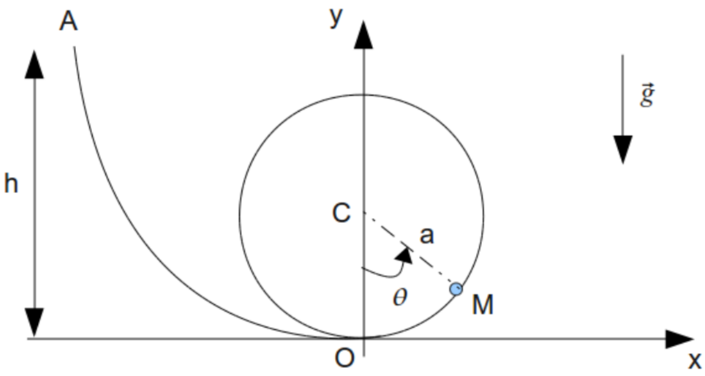
Un anneau de masse m peut glisser sans frottement sur un cerceau fixe de rayon R. L'anneau est de plus accroché à l'extrémité d'un ressort fixé au point A. Le ressort à une raideur k et une longueur à vide très faible que l'on peut considérer comme nulle. Le point où est situé l'anneau est noté M et repéré par l'angle θ.

1. Montrer que la distance AM vérifie : $AM^2 = 2R^2(1 - \sin\theta)$. En déduire l'énergie potentielle élastique E_{pe}
2. Montrer que l'énergie potentielle de pesanteur peut s'écrire $E_{pp} = -mgR\cos\theta$.
3. En déduire les positions d'équilibre de l'anneau sur le cercle.
4. Vérifier la cohérence du raisonnement dans les cas limites d'un ressort de très grande raideur et de très faible raideur.
5. Quelle est la stabilité des équilibres ?



4.2.2 Acrobaties

Un adepte du roller, assimilé à un point matériel M de masse m, se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, situé à une hauteur h au dessus de O, point le plus bas de la rampe. A partir de O la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (Oxy), et éventuellement faire le tour complet. Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.



On note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_y}$ l'accélération de la pesanteur, et on désigne par $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ le vecteur unitaire radial par rapport au cercle.

1. Déterminer la norme v_0 de la vitesse du patineur lorsqu'il arrive au point O.
2. Déterminer la norme v de la vitesse du patineur en un point M quelconque sur le cercle, repéré par l'angle θ.
3. Montrer que la réaction exercée par le support cylindrique sur le patineur est :

$$\overrightarrow{R} = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\overrightarrow{e_r}$$

4. Que se passe-t-il si en un certain point du cylindre, v s'annule avec R non nulle ? Que se passe-t-il si c'est la réaction R qui s'annule avec v non nulle ?
5. Déterminer la valeur minimale que doit avoir la hauteur h pour que le patineur puisse faire un tour complet du cylindre.