北京化工大学
Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

第四章 连续时间信号的复频域分析

主讲教师：张凤元

主要内容 CONTENTS

1 连续时间信号的复频域分析

-- 拉普拉斯变换的定义

--拉斯变换的收敛域

--拉普拉斯逆变换

--单边拉普拉斯变换

--拉普拉斯变换的物理意义

对于一般信号 $f(t)$ ，可能存在傅里叶变换，也可能不存在傅里叶变换。

对于不满足 $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t=$ 有限值　(充分条件) 的信号 $f(t)$ ，乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$,

即得 $f(t)\cdot e^{-\sigma t}$,如果在σ的某个取值范围内，$f(t)\cdot e^{-\sigma}$的傅里叶变换存在，即：

$$F\left[f(t)\cdot e^{-\sigma t}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$$=F(\sigma+j\omega)$$

令$:\sigma + j\omega = s$

则有 $F\left[f(t)\cdot e^{-\sigma t}\right] = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$

$s=\sigma + j\omega$，具有频率的量纲，称为复频率。

我们把 $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$，称为信号 $f(t)$的双边拉普拉斯变换。

为和单边变换加以区别，双边拉氏变换也可以记为：$F_B(s)$。

单边拉氏变换的定义：$F(s) = L\left[f(t)\right] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$

信号 $f(t)$的双边拉普拉斯变换,是在σ的某个取值范围内存在,

在复平面内对应的$s=\sigma+j\omega$ 的范围，就称为信号拉普拉斯变换的收敛域。

记为：ROC(region of convergence)，也就是使得 $F(s)$ 存在的 s 区域。

如果有 $\lim\limits_{s\to p_i} F(s)=\infty$， 则称$s=p_i$是$F(s)$的一个极点。

如果有 $\lim\limits_{s\to d_k} F(s)=0$， 则称$s=d_k$是$F(s)$的一个零点。

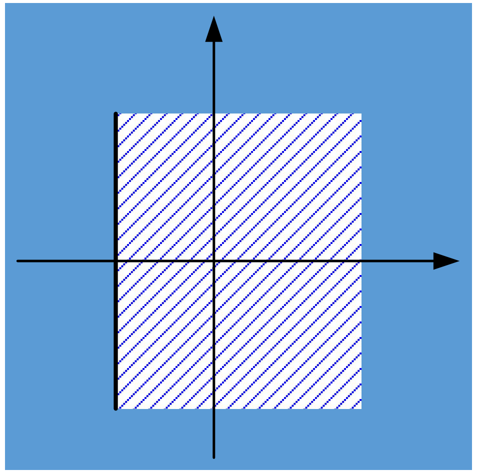
极点在s平面用“×”表示,零点在s平面用“。”表示;

将$F(s)$的全部零、极点在s平面画出来，就是$F(s)$的零、极点图。

例1 求右边信号 $f(t)=e^{-2t}\quad(t>0)$ 拉氏变换的收敛域。

解：令 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\cdot e^{-\sigma t}=0$

即 $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-2t}\cdot e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty} e^{-(2+\sigma)t}=0$



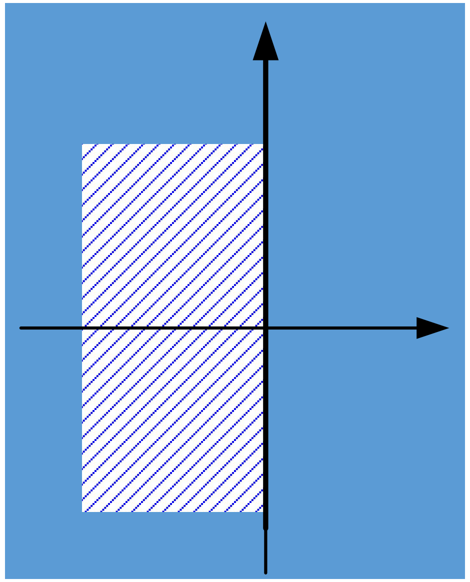
则应该满足条件 $\sigma+2>0$, 即 $\sigma>-2=\sigma_0$

σ_0 : 称为收敛坐标　　在s平面，$\sigma=\sigma_0$: 称为收敛轴

该单边信号的收敛域为在s平面中，收敛轴右侧的全部区域。

结论：对于任意的右边信号，拉氏变换存在时，存在收敛轴 $\sigma=\sigma_0$ ，收敛域是收敛轴右侧的全部区域（不含收敛轴）。

例2 求左边信号$f(t)=u(-t)$ 拉氏变换的收敛域。



解：令 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\cdot e^{-\sigma t}=0$

即 $\lim\limits_{t\to-\infty} 1\cdot e^{-\sigma t}=0$

则应该满足条件 $\sigma<0$, 即 $\sigma<0=\sigma_0$

σ_0 :称为收敛坐标　在s平面，$\sigma=\sigma_0$:称为收敛轴

该单边信号的收敛域为在s平面中收敛轴左侧的全部区域。

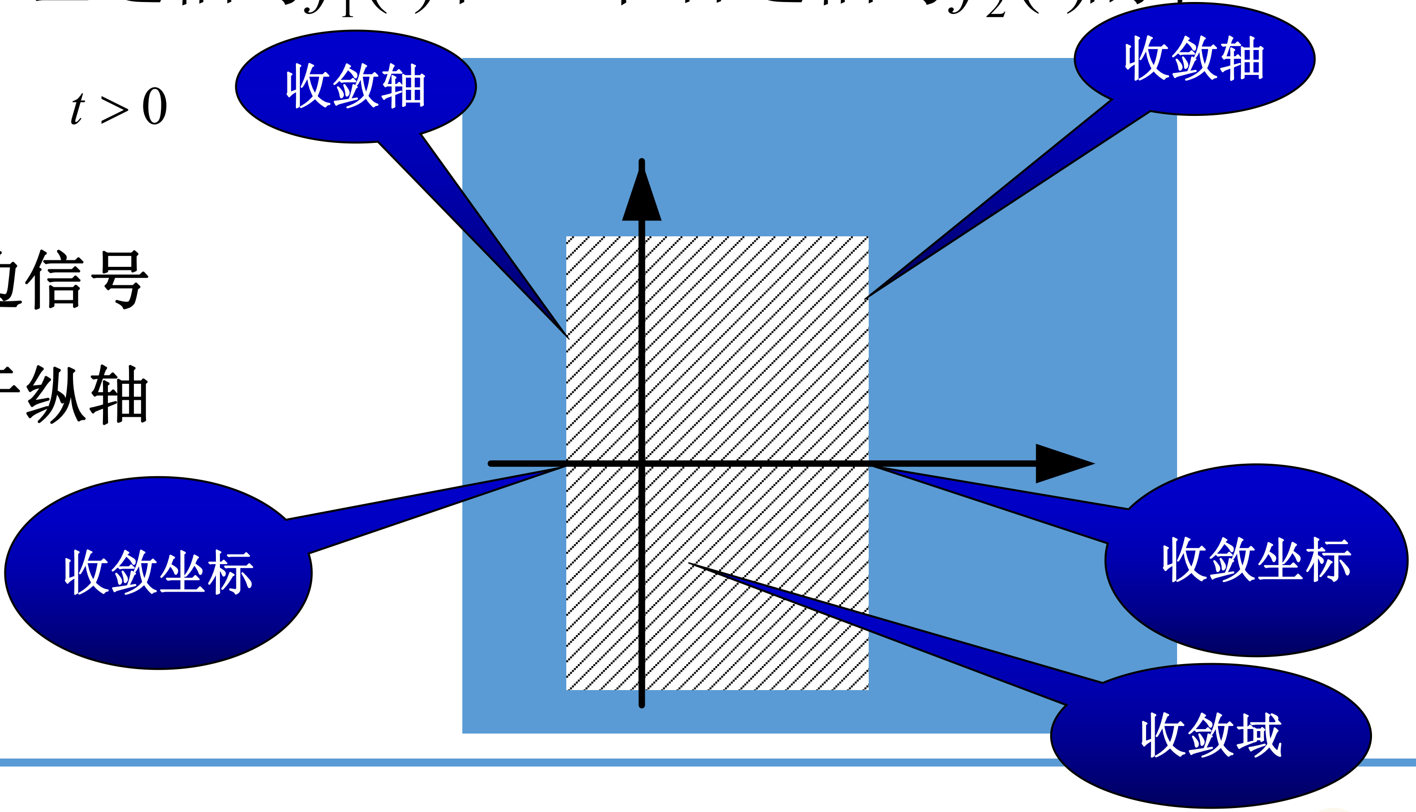
结论：对于任意的左边信号，拉氏变换存在时，存在收敛轴 $\sigma=\sigma_0$ ，收敛域是收敛轴左侧的全部区域（不含收敛轴）。

例3 求全时域的双边信号$e^{pt}=\begin{cases} e^{\beta t} & t<0 \\ e^{\alpha t} & t>0 \end{cases}$ ($\beta>\alpha$ 为实数）的收敛域。

解：双边信号可以看做是一个左边信号$f_1(t)$和一个右边信号$f_2(t)$的和。

$f_1(t)=e^{\beta t} \quad t<0 \qquad f_2(t)=e^{\alpha t} \quad t>0$

双边信号的收敛域是两个单边信号收敛域的公共部分。是平行于纵轴的条形区域。



由于 $f(t)e^{-\sigma t}$ 是 $F(\sigma+j\omega)$ 的傅里叶反变换 ,所以有：

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}\,\mathrm{d}\,\omega=\frac{1}{2\pi\ j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

其中 $:s=\sigma+j\omega$ $\quad \mathrm{d}\,s=j\,\mathrm{d}\,\omega$ $\quad$ 对 $\omega:\int_{-\infty}^{\infty}\ \Rightarrow$ 对 $s:\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}$

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t)=L^{-1}\left[f(t)\right]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s$$

记作：$f(t)\leftrightarrow F(s)$

上两式称为双边拉氏变换，反变换的积分是沿着平行于$j\omega$轴的一条直线

$$s:\sigma-j\infty\to\sigma+j\infty$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+j\omega)\cdot e^{\sigma t}\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}F(\sigma+j\omega)\cdot e^{\sigma t}\cdot e^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}F(\sigma+j\omega)\cdot e^{\sigma t}\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0}F(\sigma-j\omega)\cdot e^{\sigma t}\cdot e^{-j\omega t}d(-\omega)+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}F(\sigma+j\omega)\cdot e^{\sigma t}\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}[F(\sigma-j\omega)\cdot e^{-j\omega t}+F(\sigma+j\omega)\cdot e^{j\omega t}]e^{\sigma t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{\sigma t}2\cdot|F(s)|\cos(\omega t+\theta)\,d\omega$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{|F(s)|\cdot e^{\sigma t}d\omega}{\pi}\cos(\omega t+\theta)$$

把$f(t)$分解成无限多个

变幅 振 荡之和,

振幅随$|F(s)|\cdot e^{\sigma t}$变化.

连续和　振幅　余弦

对于信号$f(t)$,采用 0_系统 ,定义其单边拉氏变换为：

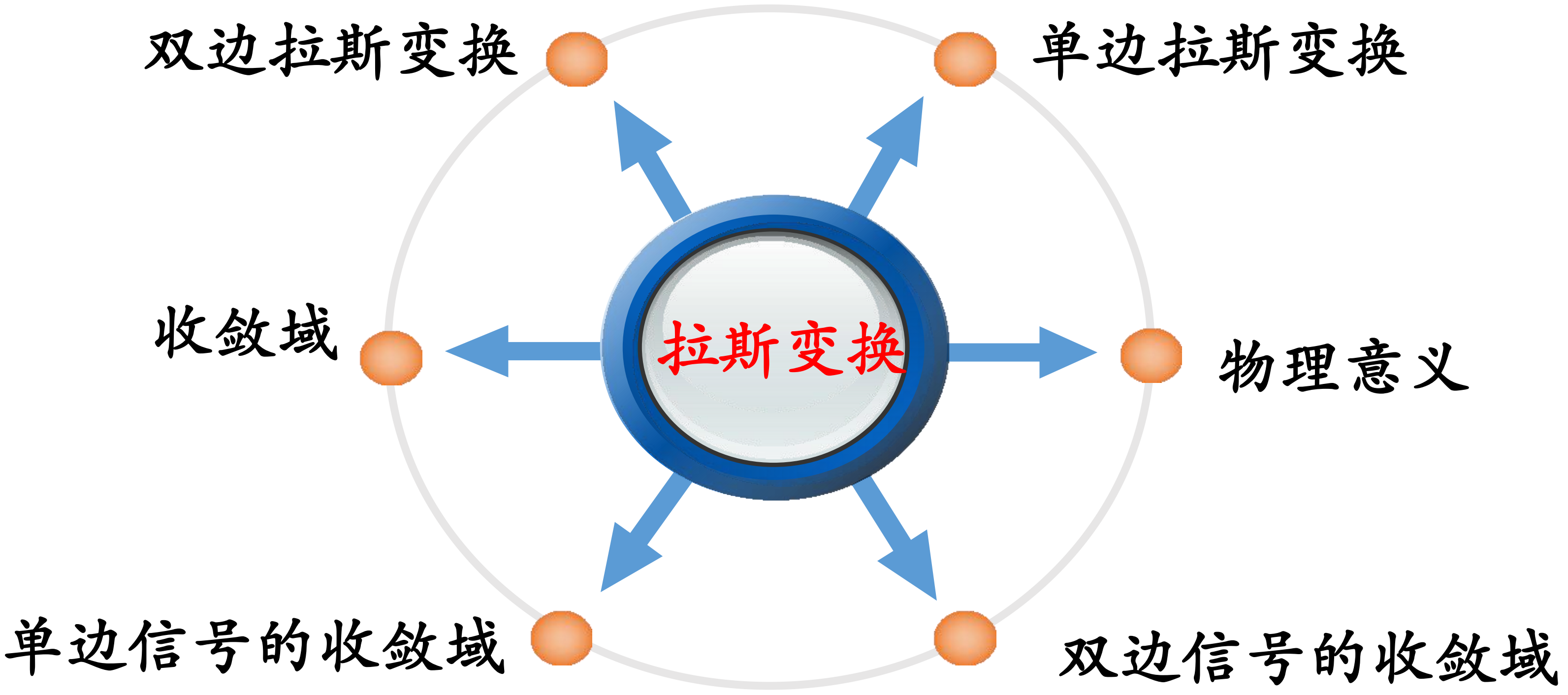
$$\begin{cases} F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ f(t)=L^{-1}\left[f(t)\right]=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \end{cases}$$

记作： $L\left[f(t)\right]=F(s)$ ，$L^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)$

一般地，$f(t)$称为原函数，$F(s)$称为象函数。

实际中，一般信号为因果信号，即满足：$t<0$时，$f(t)=0$，**此时，单边和双边变换结果象函数是一样的。**

连续时间信号的复频域分析



谢谢大家，下讲再见！