2016----2017高数（上）期中试题

一、填空（3分×27=81分）

1. 设$f(x)$的定义域是$(1,2]$，则$f(\frac{1}{x+1})$的定义域是________

解：$\because 1<\frac{1}{1+x}\le 2,\quad \therefore \frac{1}{2}\le 1+x<1$ 即 $-\frac{1}{2}\le x<0$

定义域为$[-\frac{1}{2},0)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^{x}-e^{-x}}$的值等于________

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^{x}-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{1}{2}$

3. 设$f(x)=x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$，则$f(x)$在$x=0$处是________类间断点.

解：因为$\left|\sin^2(\frac{1}{x})\right|\le 1$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} x\sin^2(\frac{1}{x})=0$

$x=0$是第一类可去间断点

4.设$y=\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$，则$y'=$________

解：$y'=\dfrac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}=\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{4\sqrt{\sin\frac{x}{2}}}$

5.设$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则$dy=$ ______

解：$dy=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx \quad =\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

6. 设$y=2^x$，则y的n阶导数$y^{(n)}=$ ______

$y'=2^x\ln 2,\quad y''=2^x(\ln 2)^2\cdots, y^{(n)}=2^x(\ln 2)^n$

7. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$，则 $a =$ ________

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\frac{3a}{x-a}} = e^{3a} = 8$

$a = \ln 2$

8. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(1)=0,\ f'(1)=a$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-3h)}{h} =$ ______

解：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-3h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\cdot(-3)$

$= -3f'(1) = -3a$

9. 设$f(x)$有直至$n+1$阶的导数，则$f(x)$的泰勒多项式

$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$中系数

$a_n=$ ______

解： $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

10. $f(x)=x^3-3x^2+6$的极大值$=$ ____

解： $y'=3x^2-6x=0,\quad y''=6x-6$

$x=0,x=2$

$y''(0)=-6<0,\quad y''(2)=6>0$

$y_{极大}=f(0)=6$

二、填空（每空4分,4分×13=52分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{x^3}$的值等于________

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-3\cos 3x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2}=\frac{9}{2}$$

$$2.\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x+\sin x)^{2x}-1}{x^2}=\underline{\qquad\qquad}$$

解：$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x+\sin x)^{2x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x\ln(\cos x+\sin x)}-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\ln(\cos x+\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(\cos x+\sin x)}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x-1}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\cos x}{1}=2$$

3.设$y=\sqrt{x^2-1}$，则$y''\big|_{x=2}=$________

解： $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}, y''=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(x^2-1)}=\dfrac{-1}{(x^2-1)^{3/2}}$

$$y''\big|_{x=2}=-\frac{\sqrt{3}}{9}$$

4. 设单调连续可导的函数$y=f(x)$，有$f(0)=1, f'(0)=2$，

则其反函数的导数$\dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=1}=$________

解：$\dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=1}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}}=\dfrac{1}{2}$

5. 设$f(x)$为可导的函数，且$f(0)=0, f'(0)=2,$

$y = f[f(f(\sin f(x)))]$,则$y'(0)=$ ________

解：$y' = f'[f(f(\sin f(x)))]f'(f(\sin f(x)))$

$\cdot f'(\sin f(x))\cos f(x) f'(x)$

$$y'(0) = f'[f(f(\sin f(0)))]f'(f(\sin f(0)))$$

$$\cdot f'(\sin f(0))\cos f(0) f'(0)$$

$$=16$$

6. 设函数$y=y(x)$由方程$e^{x+y}+\cos(xy)=0$确定，则

$\dfrac{dy}{dx}=$ ____________.

解：方程两边求微分得

$$e^{x+y}(dx+dy)-\sin(xy)(ydx+xdy)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{x+y}-y\sin(xy)}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$$

7.设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\ln(1+t^2)+1 \\ y=2\arctan t-(1+t)^2 \end{cases}$确定，

则$\dfrac{dy}{dx}=$________，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}=$________

解：$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2\mathrm{t}}{1+t^2}$　　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}-2(1+t)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{2}{1+t^2}-2(1+t)}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{t}-\frac{(1+t)(1+t^2)}{t}=-(1+t+t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(1+2t)\frac{1+t^2}{2t}\qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}=-\frac{25}{4}$$

8.设$f(x_0-\Delta x)-f(x_0)$与$\sin 2\Delta x$为$\Delta x\to 0$时的等价无穷小，则$f'(x_0)=$ ________

解：
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\sin 2\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\cdot\frac{(-\Delta x)}{\sin 2\Delta x}$$

$$=f'(x_0)(-\frac{1}{2})=1$$

$$f'(x_0)=-2$$

9 .曲线$y = e^{-\frac{x^2}{8}}$的凸区间为________

解： $y' = -\dfrac{1}{4} x e^{-\frac{x^2}{8}}$,

$$y'' = -\frac{1}{4} e^{-\frac{x^2}{8}} + \frac{1}{16} x^2 e^{-\frac{x^2}{8}} = \frac{1}{16} e^{-\frac{x^2}{8}} (x^2 - 4)$$

凸区间为（−2, 2）

10.曲线$y = 1 + \dfrac{36x}{(x+3)^2}$的一条水平渐近线方程为________

解： $\lim\limits_{x\to\infty}[1 + \dfrac{36x}{(x+3)^2}] = \lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^2 + 42x + 9}{(x+3)^2}] = 1$

$y = 1$为一条水平渐近线

11. 已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos 3x}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$______

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos 3x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2}=-\frac{9}{2}$$

12. 设$f(x)=\ln x$按照$x-2$的幂展开成n阶泰勒公式，则其拉格朗日余项$R_n(x)=$ ________

解：$$f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2}{x^3},\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$R_n(x)=\frac{\frac{(-1)^n n!}{\xi^{n+1}}}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}=\frac{(-1)^n}{(n+1)\xi^{n+1}}(x-2)^{n+1}$$

ξ在x与2之间

三、解答题（8分）

设$f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，求$f'(x)$，并讨论$f'(x)$的连续性。

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

$x\neq 0,\quad f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}+x\dfrac{-2x^{-3}}{1+\dfrac{1}{x^4}}=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x^4+1}$

$$f'(x)=\begin{cases} \arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x^4+1} & x\neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & x=0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{x^4+1} & x\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2} & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^4+1}\right)=\frac{\pi}{2}=f'(0)$$

$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续

四、证明题（10分）

1.证明对任意自然数n，都有不等式：$\dfrac{1}{n+1} < \ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$

证明：令$f(x) = \ln x$

则$f(x)$在$[n, n+1]$上满足拉格朗日中值定理条件，且有

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi},\quad 其中 n < \xi < n+1$$

所以$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{n}$　　　$\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \dfrac{1}{n}$

即 $\dfrac{1}{n+1} < \ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$

2.设$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \ (n = 1, 2, \cdots\cdots)$,试证明数列$\{a_n\}$是收敛的

证：$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n}) < 0$　　数列单调减小

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

$$> \ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{3}) + \cdots + \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln n$$

$$= \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n - \ln n$$

$$= \ln(n+1) - \ln n > 0$$

数列单调减小有下界,$\{a_n\}$收敛

4.（5分）证明函数$f(x)=e^x-(ax^2+bx+1)$至多只有三个零点

证：假设$f(x)$有4个不同的零点，

不妨设 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$, 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$

则由罗尔中值定理知,

在 $(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4)$内各存在一点$\xi_1$，$\xi_2$，$\xi_3$，使

$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$ 再由罗尔中值定理知,

在 $(\xi_1,\xi_2),(\xi_2,\xi_3)$内各存在一点$\eta_1$，$\eta_2$使

$f''(\eta_1)=f''(\eta_2)=0$ 还由罗尔中值定理知,

在 (η_1,η_2)内存在一点τ使$f'''(\tau)=0$

但$f'''(x)=e^x\neq 0$, 矛盾。