第四节　连续型随机变量及其概率密度

一、概率密度的概念与性质

二、常见连续型随机变量的分布

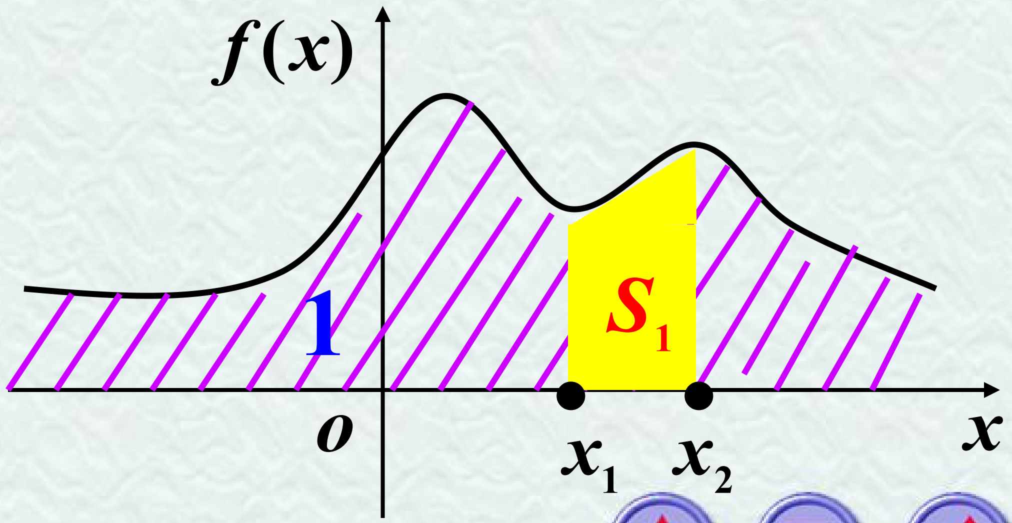
三、小结

一、概率密度的概念与性质

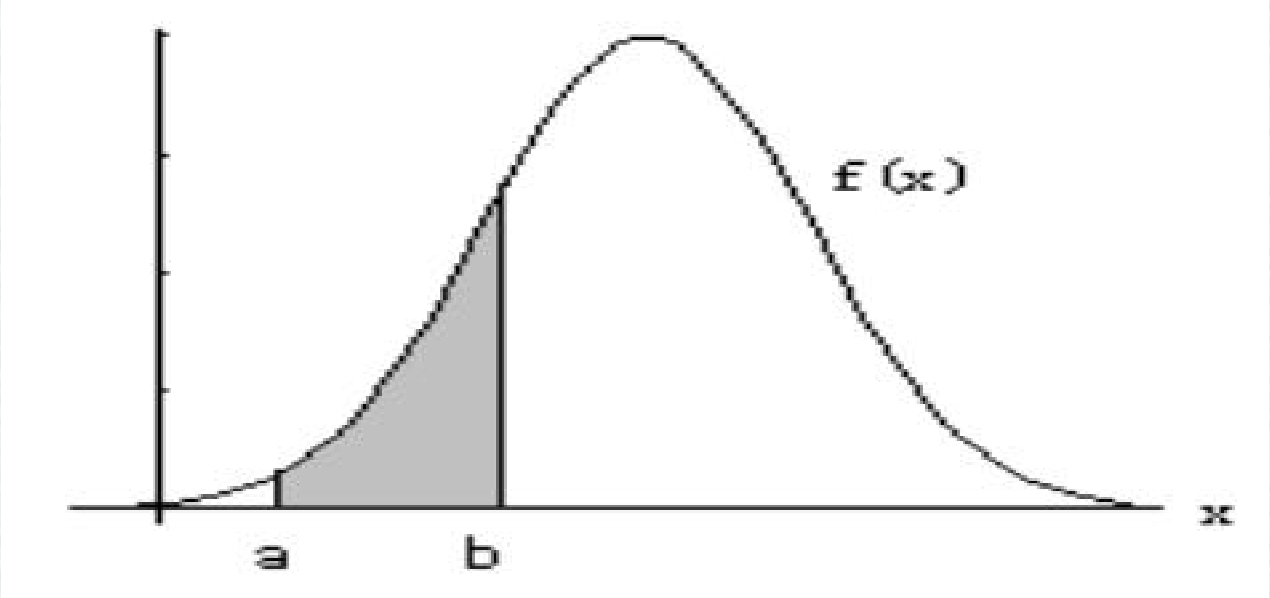
1.定义 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负函数, 使对于任意实数 x 有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, 则称 X 为连续型随机变量, 其中 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度.

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

$$S_1=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$



密度函数的几何意义:



$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(t)dt$$

即 $y = f(x)$，$y = f(a)$，$y = f(b)$，x 轴所围成的曲边梯形面积。

性质 (1) $f(x) \geq 0;$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1;$

证明 $1 = F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$

(3) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x;$

证明 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同时得以下计算公式

$$P\{X \le a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

$$P\{X > a\} = 1 - P\{X \le a\} = 1 - F(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{a}^{-\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续,则有 $F'(x) = f(x)$.

可微性

即在$f(x)$的连续点

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X \le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$P(x < X \le x + \Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$

$f(x)$表示X落在点x附近的概率的多少

注意 对于任意可能值 a ,连续型随机变量取 a 的概率等于零.即

$$P\{X = a\} = 0.$$

证明 $P\{X = a\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \int_a^{a+\Delta x} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

由此可得

$$P\{a \le X \le b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X < b\}.$$

连续型随机变量取值落在某一区间的概率与区间的开闭无关

注意

若X是连续型随机变量，$\{X=a\}$是不可能事件，则有 $P\{X=a\}=0.$

若 $P\{X=a\}=0,$

则不能确定 $\{X=a\}$ 是不可能事件

连续型

若 X 为离散型随机变量,

$\{X=a\}$ 是不可能事件 $\Leftrightarrow P\{X=a\}=0.$

离散型

要 点 重 申

只有连续型随机变量 X 才存在概率密度 $f(x)$，它与分布函数 $F(x)$ 的相互关系是

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad , \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

“连续随机变量的点概为零”，“离散随机变量的点概不尽为零”。

要 点 重 申

连续随机变量 X 在任何区间上的取值概率与区间的开闭与否无关, 它恒等于概率密度在该区间上的积分，即

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

离散随机变量 X 在区间上的取值概率与区间的开与闭有关:

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) + P\{X = x_1\}$$

例1 设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=Ae^{-|x|}\quad,-\infty<x<+\infty$$

求 (1) 常数A；(2) 概率 $P\{-1<X<1\}$；

(3) 分布函数 $F(x)$.

解 $\because\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx$

$$=\int_{-\infty}^{0}Ae^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}Ae^{-x}dx$$

$$=A-(-A)=2A\quad,$$

$$\therefore\ A=0.5$$

$$P\{-1 < X < 1\} = 0.5\int_{-1}^{1} e^{-|x|}dx$$

$$= \int_{0}^{1} e^{-x}dx$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.5\int_{-\infty}^{x} e^{-|t|}dt$$

$$= \begin{cases} 0.5e^{x} & , x < 0 \\ 1 - 0.5e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

例2 设随机变量 K 的概率密度为

$$f(k)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & 0<k<6\\ 0, & 其它\end{cases}$$

试求方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率.

解 方程要有实根, 则根的判别式 ≥ 0, 即有

$$\Delta=16K^2-16(K+2)=16(K-2)(K+1)\geq 0$$

可见 $K\geq 2$ 或 $K\leq -1$. 于是, 所求的概率为

$$P\{(K\leq -1)\cup(K\geq 2)\}=\int_{-\infty}^{-1}f(k)dk+\int_{2}^{+\infty}f(k)dk$$

$$=0+\int_{2}^{6}\frac{1}{6}dk$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

例3 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k; (2) 求 X 的分布函数;

(3) 求 $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$,

得 $\int_0^3 kx\,\mathrm{d}x + \int_3^4 (2-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x = 1$, 解之得 $k = \frac{1}{6}$.

(2) 由 $k = \frac{1}{6}$ 知 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \le x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \le x \le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x$ 得

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \int_0^x \frac{x}{6}\,\mathrm{d}x, & 0\le x<3, \\ \int_0^3 \frac{x}{6}\,\mathrm{d}x+\int_3^x \left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x, & 3\le x<4, \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$$

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

(3) $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}=F(\frac{7}{2})-F(1)=\frac{41}{48}.$

例4 **设X的分布函数为**

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ Ax^2, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

(1) 确定常数 A; (2) $P\{-\frac{1}{2}\le X\le \frac{1}{2}\}$;

(3) 求 X的密度函数.

解 (1) 由 $f(x)$ 的连续性

$$F(1-0)=F(1+0)=1$$

$$Ax^2=1 \qquad \therefore \quad A=1$$

$$(2)\ P\left\{-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

$$(3)\ f(x)=F'(X)=\begin{cases}2x & 0<x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

二、常见连续型随机变量的分布

1. 均匀分布——几何概型

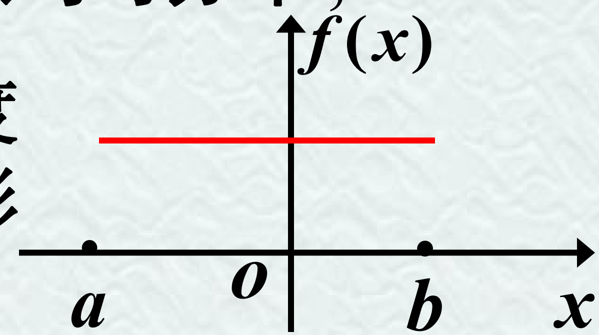
定义　设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

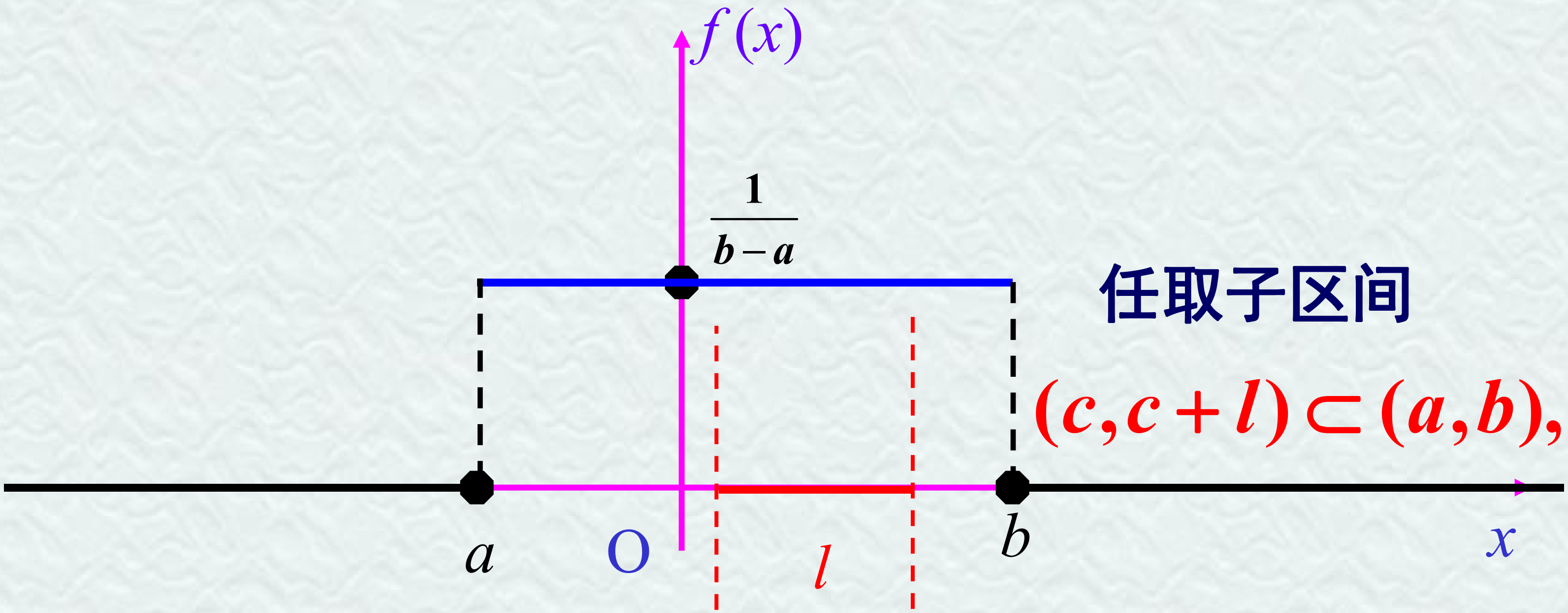
则称 X 在区间 (a,b) 区间上服从均匀分布，

记为　$X \sim U(a,b)$.

概率密度
函数图形



密度函数 $f(x)$ 的图象



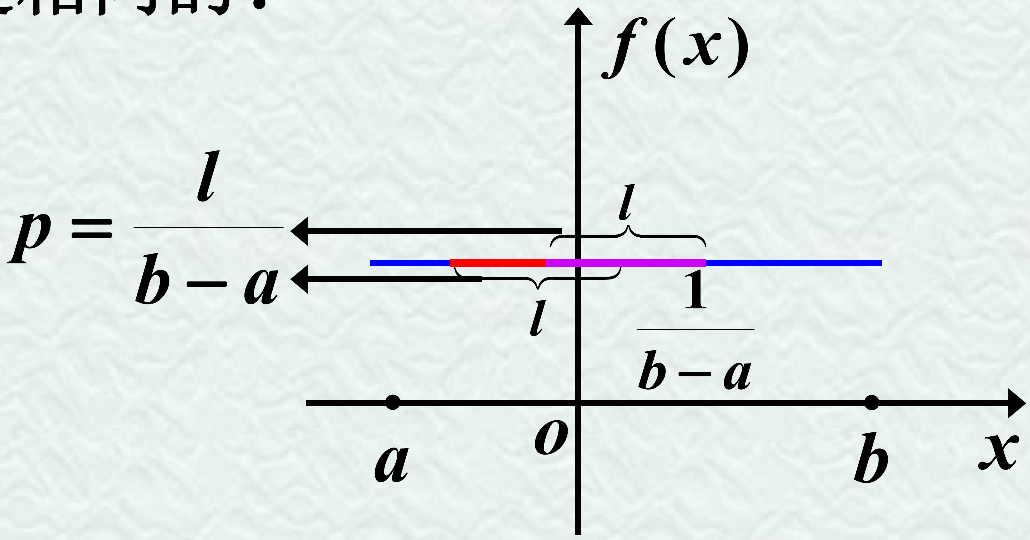
任取子区间

$(c, c+l) \subset (a, b)$,

$$P\{c < X \le c+l\} = \int_c^{c+l} f(x)dx = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a}dx = \frac{l}{b-a}.$$

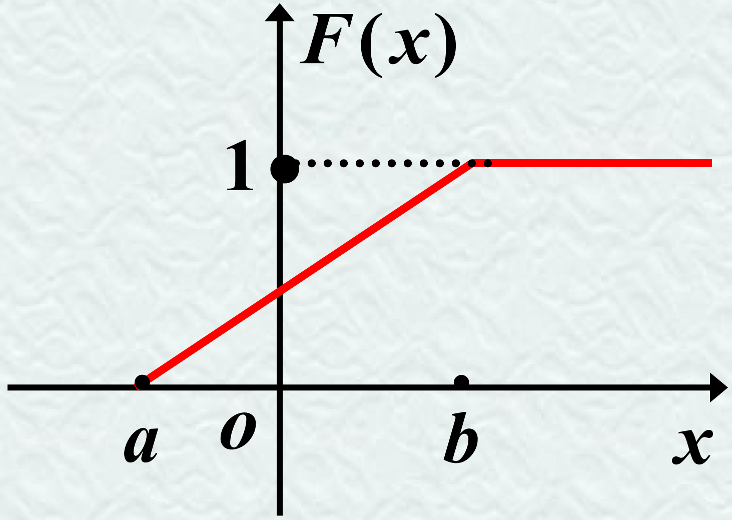
均匀分布的意义

在区间(a,b)上服从均匀分布的随机变量X,落在区间(a,b)中任意等长度的子区间内的可能性是相同的.



分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$



例5 设电阻值 R 是一个随机变量，均匀分布在 $900\,\Omega \sim 1100\,\Omega$. 求 R 的概率密度及 R 落在 $950\,\Omega \sim 1050\,\Omega$ 的概率.

解 由题意,R 的概率密度为

$$f(r)=\begin{cases} 1/(1100-900), & 900 < r \le 1100, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故有 $$P\{950 < R \le 1050\} = \int_{950}^{1050} \frac{1}{200}\,\mathrm{d}r = 0.5.$$

例6 设随机变量 X 在 $[2, 5]$ 上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测,试求至少有两次观测值大于3 的概率.

解 X 的分布密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\le x\le 5,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

设 A 表示"对 X 的观测值大于 3",

即 $A=\{X>3\}$.

由于 $P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,

设Y表示3次独立观测中观测值大于3的次数,

则 $Y\sim b\left(3,\frac{2}{3}\right)$.

因而有

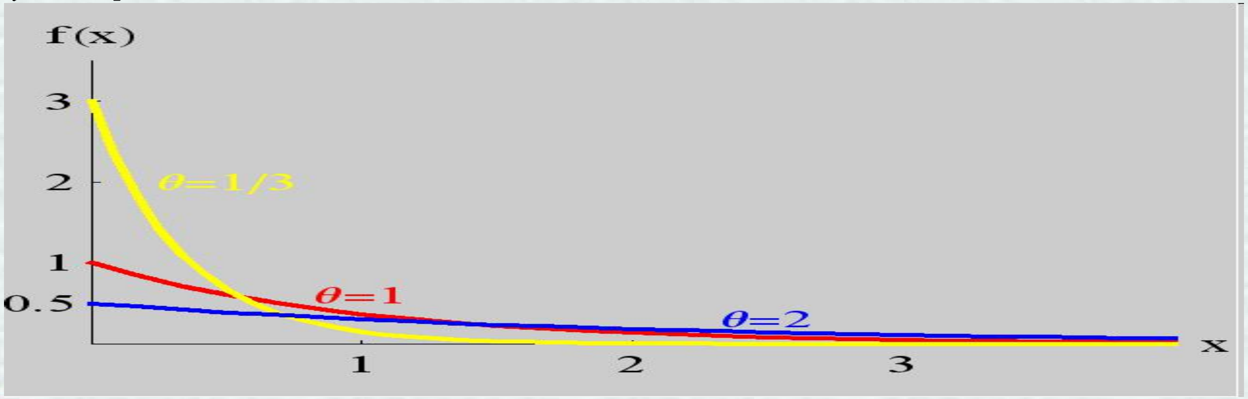
$$P\{Y\geq 2\}=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^0=\frac{20}{27}.$$

2. 指数分布

定义　设连续型随机变量 X 的概率密度为

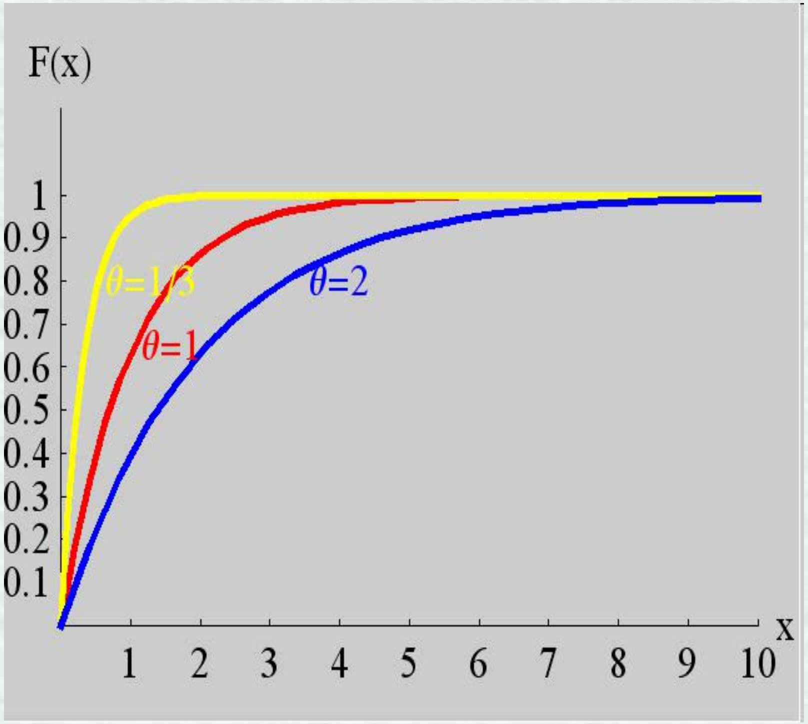
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为常数,则称 X 服从参数为 θ 的指数分布.



分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$



应用与背景

某些元件或设备的寿命服从指数分布.例如无线电元件的寿命 、电力设备的寿命、动物的寿命等都服从指数分布.

例5 设某类日光灯管的使用寿命 X 服从参数为 $\theta=2000$ 的指数分布(单位:小时).

(1)任取一只这种灯管, 求能正常使用1000小时以上的概率.

(2) 有一只这种灯管已经正常使用了1000 小时以上,求还能使用1000小时以上的概率.

解 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2000}x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$(1)\ P\{X > 1000\} = 1 - P\{X \le 1000\}$$

$$= 1 - F(1000)$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

$$(2)\ P\{X > 2000 \mid X > 1000\}$$

$$= \frac{P\{X > 2000, X > 1000\}}{P\{X > 1000\}}$$

$$= \frac{P\{X > 2000\}}{P\{X > 1000\}}$$

$$= \frac{1 - P\{X \le 2000\}}{1 - P\{X \le 1000\}}$$

$$= \frac{1 - F(2000)}{1 - F(1000)}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

指数分布的重要性质 :“无记忆性”.

例6 设$X \sim E(\lambda)$指数分布，且X落入(1,2)内概率最大，则λ=（　）

解

$$L(\lambda) = P(1 < X \le 2) = \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\int_1^2 e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -e^{-\lambda x} \Big|_1^2$$

$$= e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

找最值，求导找驻点

$$\frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \ln 2$$

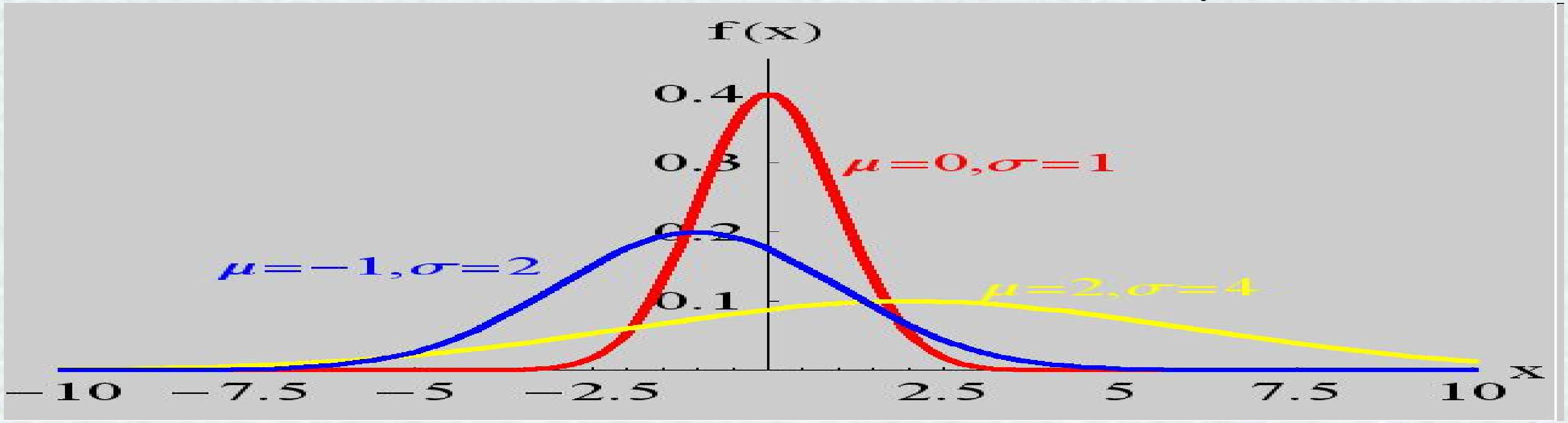
驻点唯一就是极值点

3. 正态分布(或高斯分布)

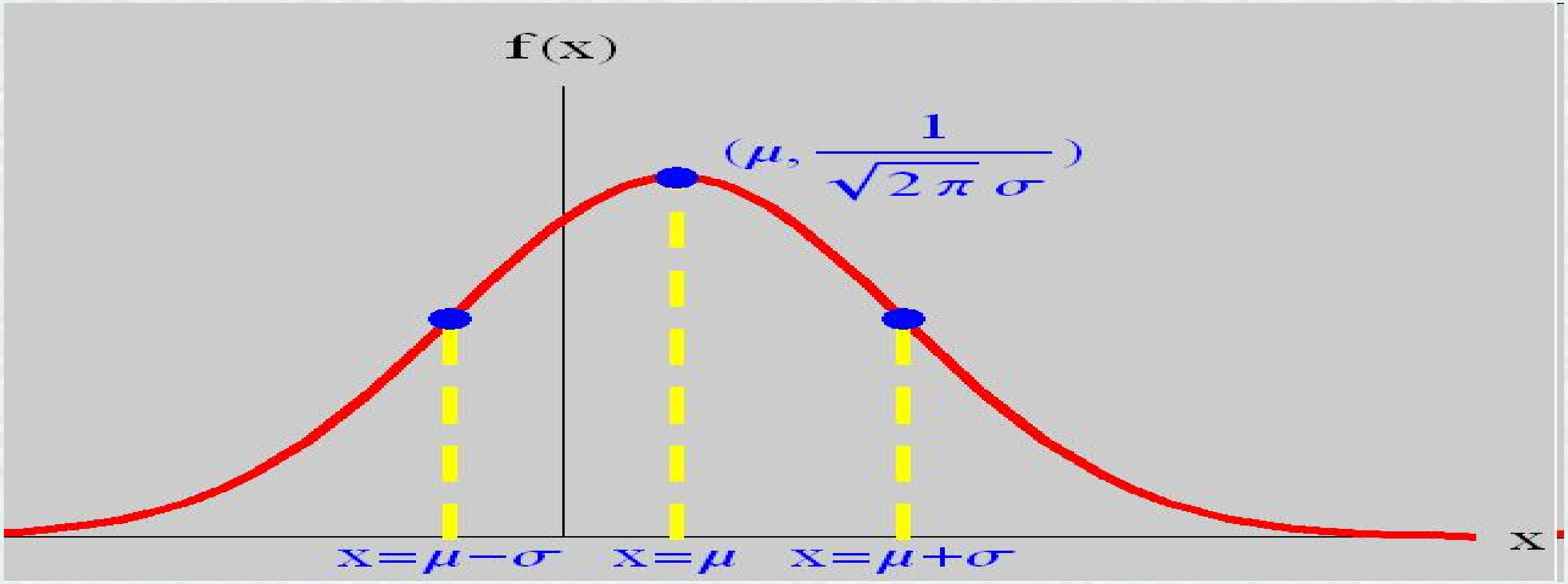
定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数,则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布或高斯分布,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.



正态概率密度函数的几何特征



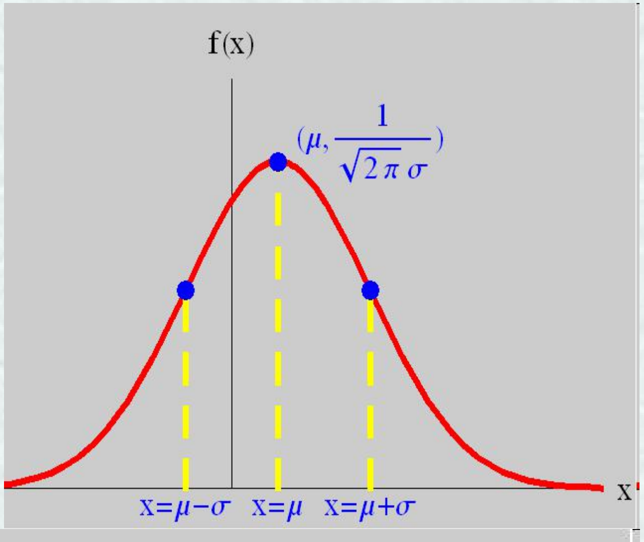
(1) 曲线关于 $x=\mu$ 对称; $p\{X>\mu\}=p\{X<\mu\}=p\{X\ge\mu\}=p\{X\le\mu\}=\frac{1}{2}$

(2) 当 $x=\mu$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$;

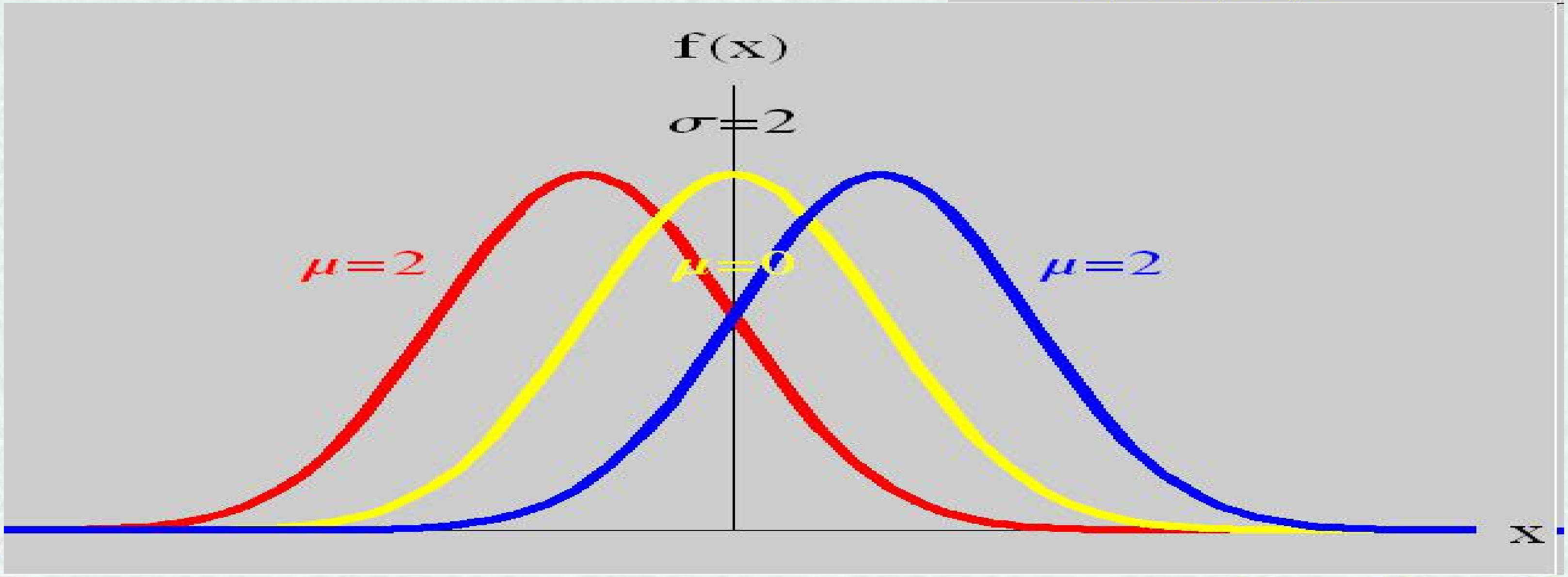
(3) 当 $x\to\pm\infty$ 时, $f(x)\to 0$;

(4) 曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点;

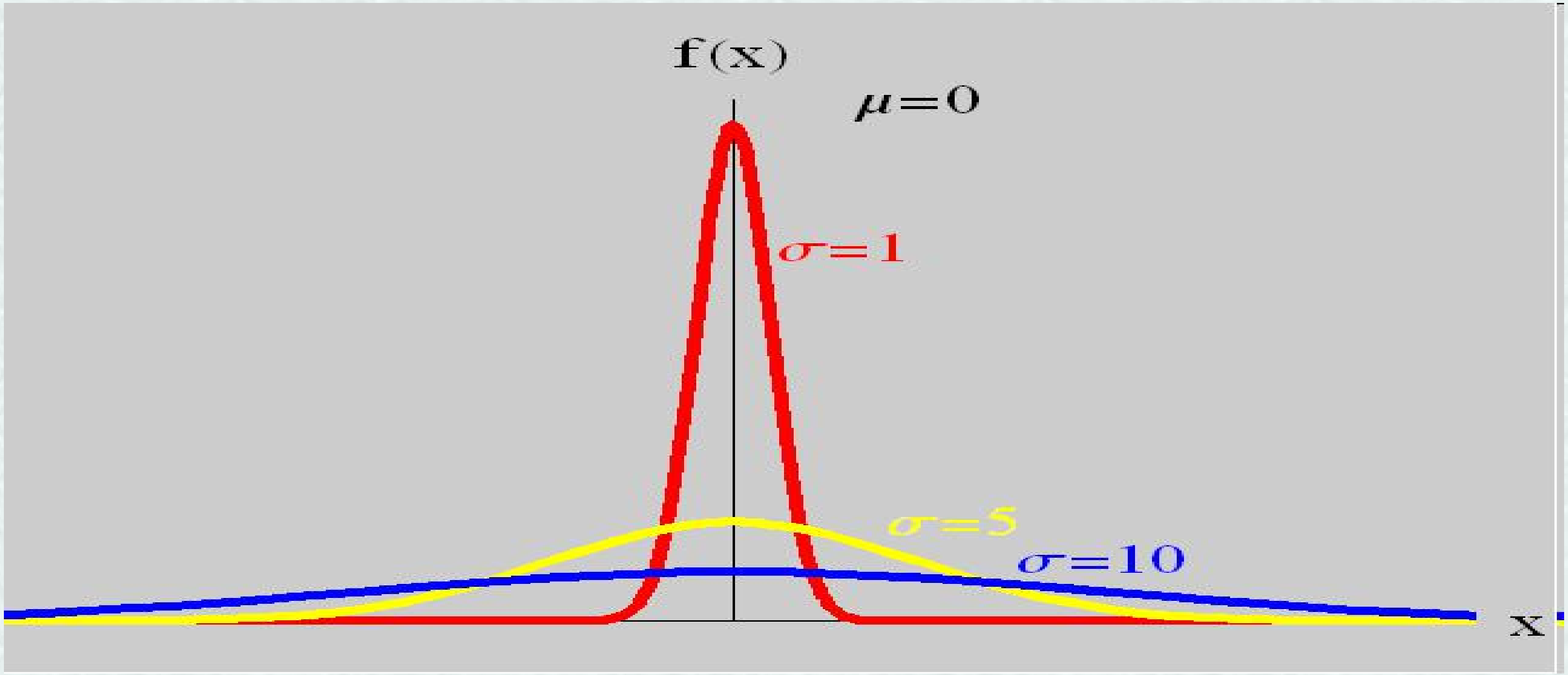
(5) 曲线以 x 轴为渐近线;



(6) 当固定 σ, 改变 μ 的大小时, $f(x)$ 图形的形状不变,只是沿着 x 轴作平移变换;



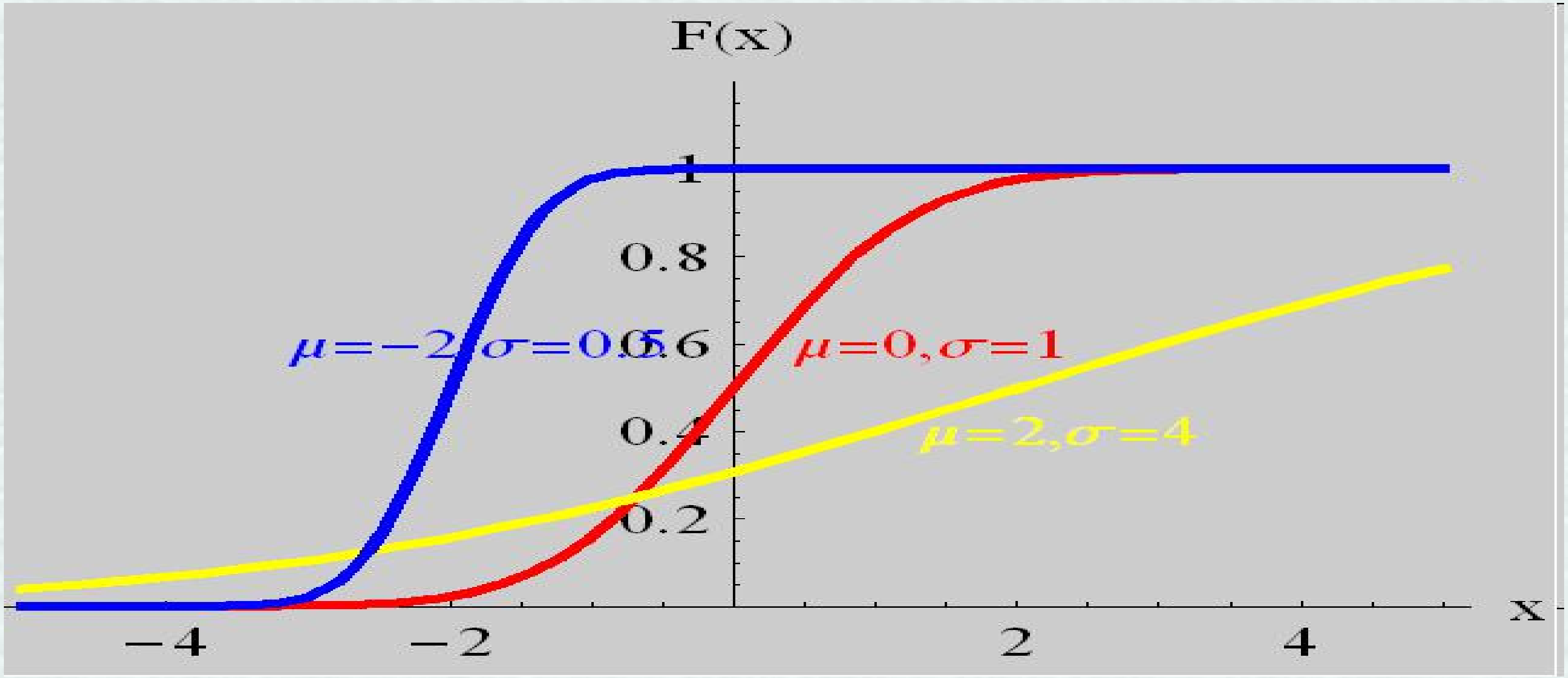
(7) 当固定 μ, 改变 σ 的大小时, $f(x)$ 图形的对称轴不变,而形状在改变, σ 越小,图形越高越瘦, σ 越大,图形越矮越胖.



正态分布密度函数图形演示

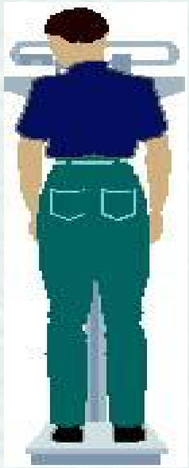
正态分布的分布函数

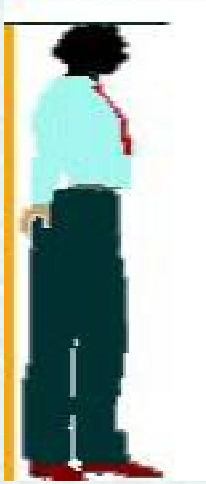
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$$

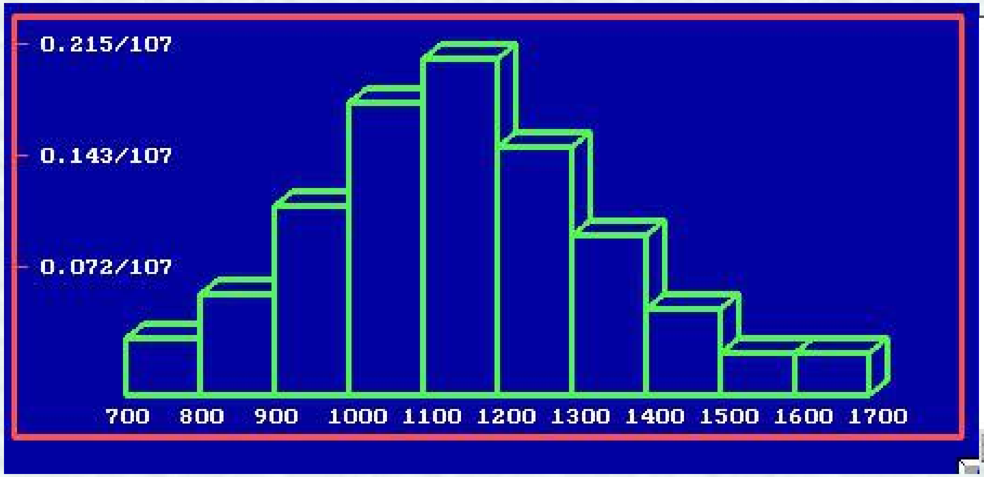


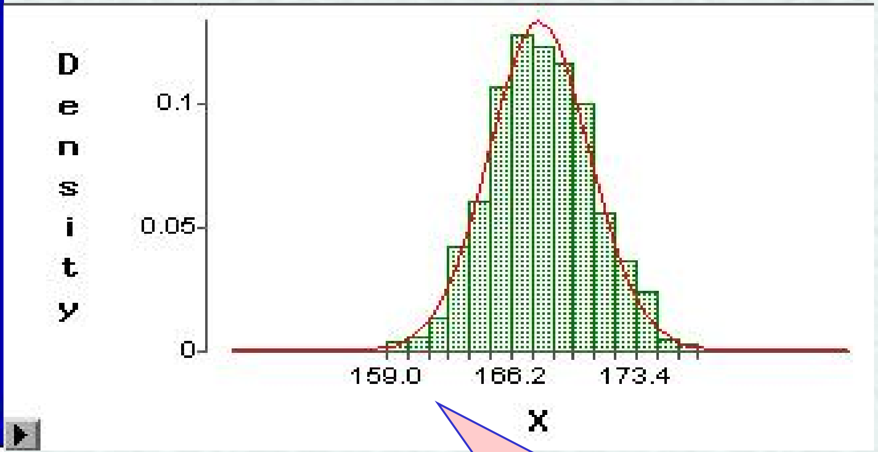
正态分布的应用与背景

正态分布是最常见最重要的一种分布,例如测量误差, 人的生理特征尺寸如身高、体重等；正常情况下生产的产品尺寸:直径、长度、重量高度等都近似服从正态分布.









拟合的正态密度曲线

这是我们用某大学男大学生的身高的数据画出的频率直方图. 可见，男大学生的身高应服从正态分布.

若影响某一数量指标的随机因素很多，每一因素独立，但每个因素所起的作用不大.

服从正态分布

正态分布的应用与背景

正常条件下各种产品的质量指标，如零件的尺寸；纤维的强度；电子元器件的信号噪声、电压、电流；农作物的产量，小麦的穗长、株高；射击目标的水平或垂直偏差，测量误差，生物学中同一群体的形态指标，经济学中的股票价格、产品的销量等等，都服从或近似服从正态分布.

正态分布下的概率计算

原函数不是初等函数

$$P\{X \le x\} = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\boxed{\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t}$$

$$= ?$$

转化为标准正态分布查表计算——标准化

步骤：

1.不是标准正态首先标准化

2.利用标准正态对称性

3.有表查表计算，无表前两步可以计算出来

标准正态分布

当正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的 $\mu=0,\sigma=1$ 时,这样的正态分布称为标准正态分布,记为 $N(0,1)$.

标准正态分布的概率密度表示为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty,$$

标准正态分布的分布函数表示为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<\infty.$$

标准正态分布的应用——解决积分问题

利用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1$

求 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}$

找不到 e^{-x^2} 原函数的初等函数表达形式

?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \underline{\underline{\text{令} x = \frac{t}{\sqrt{2}}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\pi}$$

引理 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

证明 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的分布函数为

$$P\{Z\le x\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le x\right\}=P\{X\le\mu+\sigma x\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t,$$

令$\dfrac{t-\mu}{\sigma}=u$,得 $P\{Z\le x\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u=\Phi(x)$,

故 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

例7 已知 $X \sim N(0,1)$,求 $P\{1.25 \le X < 2\}$.

解 $P\{1.25 \le X < 2\}$

$= \Phi(2) - \Phi(1.25)$

$= 0.9772 - 0.8944$

$= 0.0828.$

例7

已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \Phi(3)=0.998, P\{|X-\mu|<3\} =$ ______________.

解

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\} = P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| < \frac{3\sigma}{\sigma}\right\}$$

$$= P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| < 3\right\} = 2\Phi(3)-1$$

例8 已知 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $P\{c \le X \le d\}$.

解 $$P\{c \le X \le d\} = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = u$,
$$= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma \,\mathrm{d}u$$

$$= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \mathrm{d}u - \int_{-\infty}^{\frac{c-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \mathrm{d}u$$

$$= \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$$

因而 $P\{c \le X \le d\} = F(d) - F(c)$

$$= \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$$

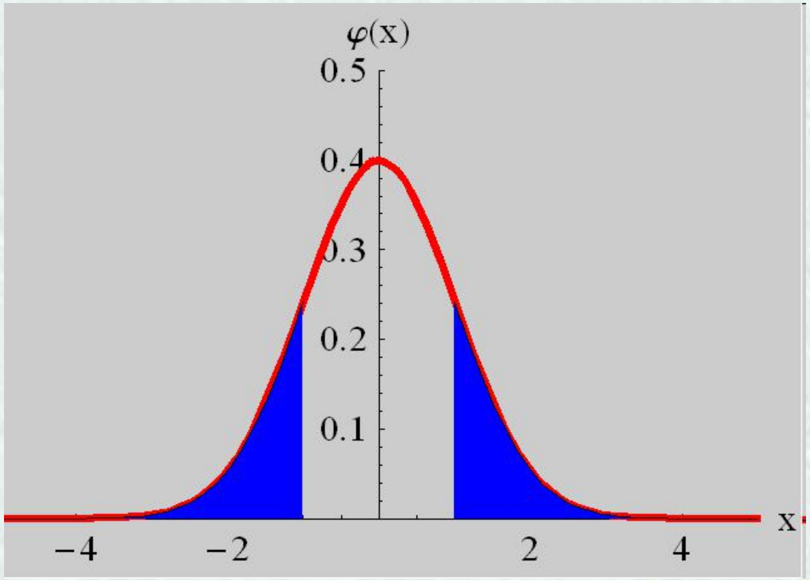
即 $P\{c \le X \le d\} = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$

例9 证明 $\Phi(-x)=1-\Phi(x).$

证明 $\Phi(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=1-\Phi(x).$$



标准正态分布的性质

1.密度函数关于y轴对称，偶函数 $\phi(-x)=\phi(x).$

2. $\Phi(0)=\frac{1}{2}.$

3. $\Phi(-x)=1-\Phi(x).$

4. $P\{|X|\le a\}=2\Phi(a)-1$

$P\{|X|\le a\}=1-2\Phi(-a)$

$=1-2(1-\Phi(a))=2\Phi(a)-1$

例9 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内. 调节器整定在 $d^{\circ}C$, 液体的温度 X(以$^{\circ}C$计)是一个随机变量, 且$X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1) 若$d = 90$, 求 X 小于 89 的概率.

(2) 若要求保持液体的温度至少为 $80^{\circ}C$ 的概率不低于 0.99, 问d至少为多少?

解 (1) 所求概率为

$$P\{X < 89\} = \Phi\left(\frac{89-90}{0.5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

(2) $P\{X > 80\} \geq 0.99$

$$\Rightarrow 1 - P\{X \leq 80\} \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - F(80) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) \leq 1 - 0.99 = 0.01,$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

即 $\dfrac{80-d}{0.5} \leq -2.327 \Rightarrow d \geq 81.1635.$

例10

$X \sim N(2,\sigma^2)$ ，$P\{2 < X \le 4\} = 0.3$ ，$P\{X < 0\} =$ ____________

解

$$P\{X > \mu\} = P\{X < \mu\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{2 < X \le 4\} = P\{0 < X \le 2\}$$

$$P\{X < 0\} = P\{X < 2\} - P\{0 \le X < 2\}$$

$$= P\{X < 2\} - P\{2 < X \le 4\}$$

$$= \frac{1}{2} - 0.3 = 0.2$$

三、小结

1. 连续型随机变量 $\underbrace{F(x)}_{\text{分布函数}} = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{\text{概率密度}} \mathrm{d}t$

2. 常见连续型随机变量的分布

- 均匀分布
- 正态分布(或高斯分布)
- 指数分布