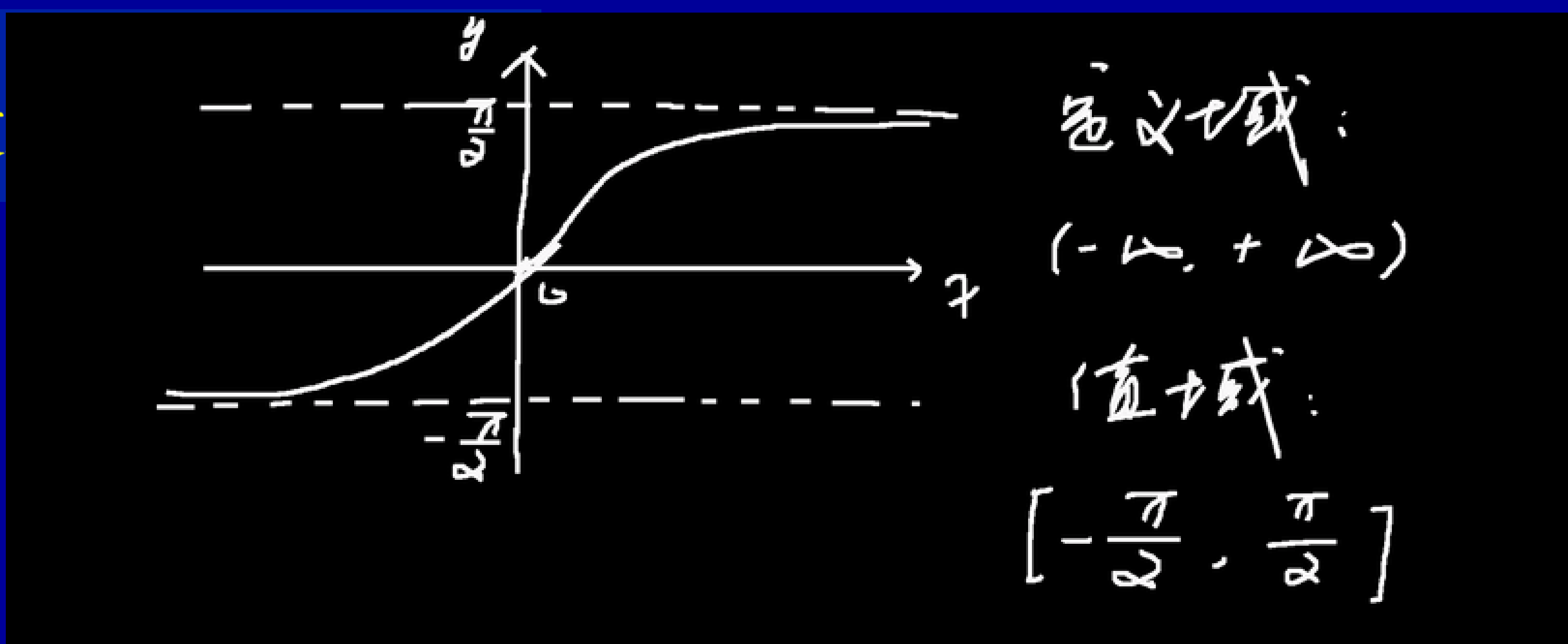
2018－2019－2高数期中复习

一. 填空题(3分×6=18分)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}=$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\arctan\frac{1}{x^2+y^2}=0$$ (有界与无穷小乘积)

2.设



➢梯度与方向导数的关系

$$f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta \xrightarrow{\vec{\mathbf{e}}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)} \mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)\cdot\vec{\mathbf{e}}_l$$

$$\theta=(\widehat{\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0),\vec{\mathbf{e}}_l})$$

$$|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|\cos\theta$$

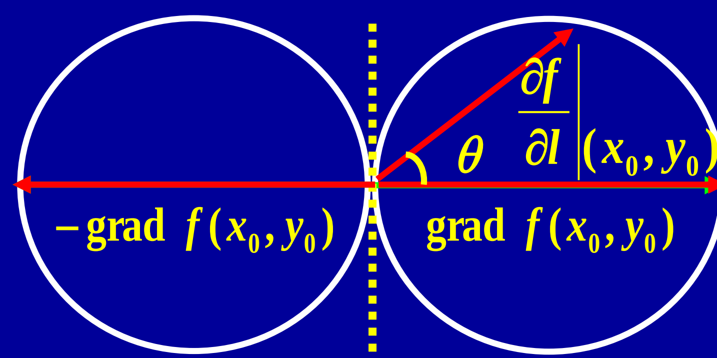
梯度的投影

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}\begin{cases}\text{最大值}\ |\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)| \longleftarrow \theta=0\\ \text{最小值}-|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)| \longleftarrow \theta=\pi\\ 0 \longleftarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

●注释

梯度是一个向量

$$\begin{cases}\text{方向: 方向导数最大值的方向}\\ \text{大小: 方向导数的最大值}\end{cases}$$



3. 函数$z = x^2 + \frac{1}{2} y^2$在点$(1,2)$处方向导数的最大值为?

$$\underbrace{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2x\Big|_{(1,2)} = 2 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = y\Big|_{(1,2)} = 2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{最大} = \left| grad\, f(1,2) \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{最大} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

二. 计算题(6分×7=42分)

1.设函数$z = z(x, y)$由方程$2\sin(x+2y-3z) = x+2y-3z$确定,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=?$

隐函数存在性定理 (P87)

解:令$F = 2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$

$$\begin{cases} F_x = 2\cos(x+2y-3z)-1 \\ F_y = 4\cos(x+2y-3z)-2 \\ F_z = -6\cos(x+2y-3z)+3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2\cos(x+2y-3z)-1+4\cos(x+2y-3z)-2}{-6\cos(x+2y-3z)+3} = 1$$

2015－2016－2同类型考题

设$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2=f(2z)$确定，且$f(x)$二阶可导，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$F=x^2+y^2+z^2-f(2z)$

则 $F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z-2f'(2z)$

因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{f'(2z)-z},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{f'(2z)-z}$

故 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{0-x[f''(2z)\cdot 2\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}]}{[f'(2z)-z]^2}=\frac{xy[1-2f''(2z)]}{[f'(2z)-z]^3}$$

2.计算积分 $I=\int_0^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \frac{1}{1+y^4}dy.$

解：$I=\int_0^1 dx\int_{\sqrt[3]{x}}^1 \frac{1}{1+y^4}dy=\int_0^1 dy\int_0^{y^3} \frac{1}{1+y^4}dx$

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+y^4}y^3dy$$

$$=\frac{1}{4}\ln(1+y^4)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 2$$

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 1\le y\le \sqrt[3]{x}\}$

$=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1, 0\le x\le y^3\}$

$2015-2016-2$同类型考题

设D是由$x^2+(y-1)^2\le 1, y\ge |x|$所确定的平面区域,则二重积分$\iint\limits_D f(x^2+y^2)dxdy$在极坐标系下的二次积分为?

解：$x^2+(y-1)^2=1$在极坐标下的方程为$\rho=2\sin\theta$

$$I=\iint\limits_D f(x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho f(\rho^2)d\rho$$

4. 求曲面$z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$在点$(1,9,4)$处的切平面方程.

解：令$F=z-\sqrt{x}-\sqrt{y}$
$$\begin{cases} F_x=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ F_y=-\dfrac{1}{2\sqrt{y}} \\ F_z=1 \end{cases}$$

因此$(1,9,4)$处的法向量为$(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6},1)$

则切平面方程为：$-\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{6}(y-9)+(z-4)=0$

即 $3x+y-6z+12=0$

2015－2016－2同类型考题

求曲线$\begin{cases} x+y+z+z^2=0 \\ x+y^2+z+z^3=2 \end{cases}$在点$(-4,2,1)$处的切线方程与法平面方程.

解：$\vec{n}_1\big|_{(-4,2,1)}=(1,1,1+2z)\big|_{(-4,2,1)}=(1,1,3),$

$\vec{n}_2\big|_{(-4,2,1)}=(1,2y,1+3z^2)\big|_{(-4,2,1)}=(1,4,4),$

则在$(-4,2,1)$处的切向量为 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=(-8,-1,3)$

故切线方程为 $\dfrac{x+4}{-8}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{3}$

法平面方程为 $-8(x+4)-(y-2)+3(z-1)=0$

即 $8x+y-3z+33=0$

三. 解答题(7分×5=35分)

1\. 求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x+1$的极值.

解:令$f_x=3x^2+6x-9=0,\quad f_y=-3y^2+6y=0$

得驻点$(1,0),\quad (1,2),\quad (-3,0),\quad (-3,2)$

又因为 $f_{xx}=6x+6,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=-6y+6$

在$(1,0)$点$A=12>0, AC-B^2=12\times 6>0$,有极小值$-4$

在$(1,2)$点$A=12>0, AC-B^2=12\times(-6)<0$,无极值

在$(-3,0)$点$A=-12<0, AC-B^2=-12\times 6<0$,无极值

在$(-3,2)$点$A=-12<0, AC-B^2=-12\times(-6)>0$,

有极大值32

2. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}[(x-1)^2+y^2+z^2]dxdydz$,其中

$\Omega=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\le 1\}$.

解: $$\iiint\limits_{\Omega}[(x-1)^2+y^2+z^2]dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi(r^2+1)dr$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi(\frac{1}{5}r^5+\frac{1}{3}r^3)\Big|_0^1 d\varphi$$

$$=-\frac{16\pi}{15}\cos\varphi\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{32}{15}\pi$$

5. 某建筑物的构件由半径为2的半球面截去顶部(截面圆半径为1)后与半径为1的半球面拼接而成,求构件的面积.

解:设半径为2的球面方程为$x^2+y^2+z^2=4$

所求面积为$A=2\pi+\iint\limits_D\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}dxdy$

$$=2\pi+\iint\limits_D\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy=2\pi+\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{2rdr}{\sqrt{4-r^2}}$$

$$=2\pi-2\pi2\sqrt{4-r^2}\Big|_1^2=2\pi+4\sqrt{3}\pi$$

曲面面积公式:$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$

很享受和你们一起携手共进的一年！

未来的生活有很多可能性，也有很多值得你们拼搏的机会！

祝愿每一个纯正且聪慧的你！

把握自己，实现梦想，做一个让自己和家人都幸福的你！

SEE YOU ALL !