学风朋辈引领行动中心

期末复习资料-高数

编写：
陆宇洋、谢婷婷、何玮琪、皮鑫蕊
臧济北、严啸、雷万顺、储昊东、
审校：姜子音、王祎平、蒋月儿、
刘国威、朱文鹏、王乐宁、梁广、
彭书泽、尤晨宇、邵柏岩

学风朋辈的全称为：北京化工大学学风朋辈引领行动中心，英文名称为：Student Peer Center of Beijing University of Chemical Technology（简称“SPC”）。

学风朋辈隶属于北京化工大学学生工作办公室，接受指导教师管理。对所辖二级学生组织进行管理，对院级学业辅导组织进行指导。学风朋辈的二级学生组织包括化学工程学院学业指导中心、信息科学与技术学院学业指导中心、生命学院学业指导中心、理学院学业指导中心、英国皇家化学会北京化工大学分会等，共同为全体学生服务。

学风朋辈的主要工作是按照学校学风建设的总体要求，开展包括朋辈学业辅导、学业咨询、资源共享、难点解答、学风营造等与学生学业发展相关的工作。

学风朋辈的宗旨是服务我校学生学业发展，致力于营造积极向上、你争我赶、公平竞争的校园学习文化氛围，定时更新学习资源和有效信息，秉承我校校训“宏德博学，化育天工”，用热情及责任进一步推动我校学风建设工作。

按照学习学风建设的总体目标，学风朋辈在发展过程中不断寻求自身的改革创新，根据自身发展需求，现下设朋辈辅导部、发展咨询部、推广宣传部、秘书处、人事部、事务拓展部共六大职能部门。

学风朋辈自成立已开展了多项精品活动：“朋辈学业辅导”、“学业咨询工作坊”、“学习资料发放”、“学霸答疑”、“学霸经验分享会”。同时，本着强化我校学生专业知识技能，提高学生学习主动性和积极性的服务宗旨，学风朋辈已承办了多次学业发展辅导中心“团体工作坊”活动、“学业•职业规划大赛”等特色活动。学风朋辈正以更加积极的姿态协助我校不断完善教学过程中教与学的环节。

为了及时有效地为我校学子进行学业辅导，分享学习资源。学风朋辈创建了学委网，并拥有自己的微信公众平台（BUCTSPC），定时更新学习资源和有效信息，方便广大学生的学习和生活。

四、不定积分

1、不定积分的概念与性质

【必备知识点】

1. 若定义在区间 I 上的函数f(x)及可导函数F（x）满足关系：对任一 x∈I, 都有F'（x）=f（x）或 dF（x）=f（x）dx, 则称F（x）为f(x)在区间 I 上的一个原函数。

2. 原函数存在定理：如果函数 f（x）在区间 I 上连续，则在区间 I 上存在可导函数 F（x），使对任一 x∈I，都有F' （x） = f(x)（连续函数一定有原函数，不连续的函数可能有原函数）

3. 若F（x）是 f（x）的一个原函数，则对任一常数 C。 F（x）+C 都是 f（x）的原函数。

4. 若F（x）是 f（x）的一个原函数，则 f（x）的其他原函数G（x）与F（x）的关系是$G(x)=F$（x）+C（C 为某一个常数）

f（x）的全体原函数组成的集合（原函数族）：

$$\{F(x)+C \mid -\infty<C<+\infty\}$$

5. 若F（x）是 f（x）在区间 I 上的一个原函数，则 f（x）的不定积分可表示为

$\int f$（x）dx $=F(x)+C$

★基本积分表

$$\int kdx=kx+C$$

$$\int x^{\mu}\,dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=arctan\ \ x+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arcsin\ \ x+C$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int\sin x dx=-\cos x+C$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}=\int\csc^2 x\,dx=\cot x+C$$

$$\int\sec x\tan x\,dx=\sec x+C$$

$$\int\csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$$

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

【例题】

$\int x^2\sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

★不定积分的性质

线性： $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ **（可推广到有限代数和）**

$\int k\ f(x)dx = k\int f(x)dx$ （k≠0，k 为常数）

【例题】

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$$

$$= \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx$$

$$= \int \frac{(1+x^2)(x^2-1)+1}{1+x^2}dx$$

$$=\int x^2\,dx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

注意：计算不定积分时$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$比较常见，且常见于分数，应注意它的使用。

2、换元积分法

【必备知识点】

1、 第一类换元法又称凑微分法。

设$f(u)$具有原函数，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx = \left[\int f(u)\,du\right]_{u=\varphi(x)}$

2、 第二类换元法包括三角代换、倒代换和简单无理函数代换法。

设$x=\psi(t)$是单调的可导函数，并且$\psi'(t)\neq 0$，又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，则有换元公式$\int f(x)\,dx = [f[\psi(t)]\psi'(t)]_{t=\psi^{-1}(x)}$，其中$\psi^{-1}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数。

【常见题型与详解】

一、第一换元法：利用复合函数，设置中间变量，再利用基本积分表求解。

（基本凑微分法）

例 1、求：$\int \cos 2x\,dx$

令$u=2x$，则$dx=\frac{1}{2}du$

所以：原式 $=\frac{1}{2}\int\cos u\,du=\frac{1}{2}\sin u+C=\frac{1}{2}\sin 2x+C$

（多步凑微分法）

例 2、求$\int\frac{dx}{xlnxlnlnx}$

$$原式=\int\frac{1}{lnlnx}\cdot\frac{dlnx}{lnx}=\int\frac{dlnlnx}{lnlnx}=\ln|lnlnx|+C$$

（联合凑微分法）同时利用两个或两个以上的积分公式凑成微分

例 3、求$\int\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$

$$原式=\int\frac{d(x+\cos x)}{x+\cos x}=\ln|x+\cos x|+C$$

例 4、求$\int\frac{\mathrm{dx}}{1+\cos^2\mathrm{x}}$

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{dx}}{\sin\left(\mathrm{x}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)d\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\end{aligned}$$

二、第二换元法

①三角代换（三角代换的目的是化掉根式）

$$关于\sqrt{a^2-x^2}\ \ 令x=asint\ \ \left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)\ \ 则\ \ cost=\sqrt{1-x^2}\qquad t=arcsin\frac{x}{a}$$

$$关于\sqrt{x^2+a^2}\ \ 令x=atant\ \ \left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)\ \ 则\ \ sec^2t=tan^2t+1\quad t=arctan\frac{x}{a}$$

$$关于\sqrt{x^2-a^2}\ \ 令x=asect\left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)\ \ 则\ \ sec^2t=tan^2t+1\ \ t=arctan\frac{x}{a}$$

$$得到\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc\,sin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+\mathrm{C}$$

②倒代换（设$x=\frac{1}{t}$或$t=\frac{1}{x}$））

$$\int \frac{dx}{x(1+x^n)}(令x=\frac{1}{t} \quad dx=-\frac{1}{t^2}dt)=-\int \frac{t^{n-1}dt}{1+t^n}=-\frac{1}{n}\int \frac{1}{1+t^n}d(1+t^n)$$
$$=-\frac{1}{n}\ln|1+t^n|+C=-\frac{1}{n}\ln|1+\frac{1}{x^n}|+C$$

③简单无理函数代换法

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx(令t=\sqrt{x-1},则x=t^2+1,dx=2tdt)$$
$$=\int \frac{t}{t^2+1}2tdt=2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt$$
$$=2\int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2t-2arc\tan t+C=2\sqrt{x-1}$$
$$-2arc\tan\sqrt{x-1}\quad +C$$

3、分部积分法

【知识点详解】

（1）$\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx$即$\int u\,dv=uv-\int v\,du$

PS. u、v必须均为连续可导函数

（2）应用分部积分，关键在于对u和v的选取，原则：

1）. 容易由v'得到v

2）$\int v\,du$比$\int u\,dv$更容易积出

小技巧：当被积函数中出现反三角函数，对数函数，幂函数，指数函数，三角函数时，优先选取为u的顺序：反，对，幂，指，三

【常见题型与详解】

求$\int x\arctan x\,dx$

$$\int x\arctan x\,dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+c$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+c$$

【例题 2】求$\int e^x\sin x\,dx$

解题思路：看到两个初等函数，很自然的想到运用分部积分，由于e^x的导数即为本身，故我们把e^x看做v'，运用分部积分后得到$e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$，又出现了指数函数与三角函数乘积的形式，心态崩溃！不急，再来一次，同样将e^x看做v'，再分部积分一次又出现了$\int e^x\sin x\,dx$，现在移项即可解决了。

详解：

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\right)$$
$$2\int e^x\sin x\,dx=e^x(\sin x-\cos x)故\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$$

故$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$　　注意，必须加上常数c

总结：本题采用的方法我们称之为回归法，即通过两次分部积分后，右端出现一个与原积分相同的积分，再通过移项解得原积分。在有些题中，我们会多次使用分部积分，此时一定要注意符号问题，仔细作答。

【例题 3】求$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

解题思路：看到$\sqrt[3]{x}$，我们即要想到用换元的方法，令$t=\sqrt[3]{x}$, 则$x=t^3$, 则$dx=3t^2dt$，此时原式化为$3\int t^2e^t dt$，用分部积分法即可轻易求解，但一定记得最后将 t 换回$\sqrt[3]{x}$。

详解：

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx\text{（令}t=\sqrt[3]{x}\text{）}=e^t dt=3t^2e^t-6\int te^t\,dt=3t^2e^t-6\left(te^t-\int e^t dt\right)$$

$$=(3t^2-6t+6)e^t+c=\left(3x^{\frac{3}{2}}-6\sqrt[3]{x}+6\right)e^{\sqrt[3]{x}}+c$$

总结：求解不定积分时，我们经常会综合使用换元法和分部积分法进行计算。题目中出现幂次含有根号时，通常需要换元。

4、有理函数的积分

【知识点详解】

两个多项式的商$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$称为有理式。当分子多项式$p(x)$的次数小于分母多项式$Q(x)$的次数时，称这个有理式为真分式，反之则为假分式。

假分式 $\underset{\text{多项式除法}}{=\!=\!=}$ 多项式+真分式（即通过多项式除法，可以将一个假分式化成一个多项式加一个真分式） 对于真分式的不定积分，可将分母化为两个多项式的乘积，积分。如下例

$\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$，分母明显可化为$(x-3)(x-2)$，故可设$\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-2}$，现在即要求解出 A 和 B, 常用两种方法：

1) 去分母法　两式均乘$(x-3)(x-2)$，则可化为$(A+B)x-2A-3B=x+1$，故$A+B=1, 2A+3B=-1$, 即可求出 A、B

2）赋值法，得到$(A+B)x-2A-3B=x+1$后，赋值，令x等于两个特值，也可解出 A.B

【例题 1】求$\int\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$

解题思路:看题即可知道这个假分式需要用多项式除法，化简后出现真分式，再用去分母法即可解决

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx=$$

$$\int\left(x^2+x+1+\frac{x^2+x-8}{x^3-x}\right)dx=\int\left(x^2+x+1+\frac{x^2+x-8}{x(x+1)(x-1)}\right)dx$$

$$=\int\left(x^2+x+1+\frac{8}{x}-\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+8In|x|-3In|x-1|-4In|x+1|+c$$

总结：遇到此类题型，步骤均为 多项式除法，去分母，求不定积分。而对于那些分母不能因式分解的，一般不考或说明不用这个方法。

【例题 2】求解 $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

看到这个式子，发现不能凑微分，然后发现 $\sqrt{x^2-9}$

①我们很自然的想到直接令这个式子为 u，则 $x=\pm\sqrt{u^2+9}$，$dx=\pm\frac{u}{\sqrt{u^2+9}}$，带入原式即可计算

详解：

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx\text{（令}u=\sqrt{x^2-9}\text{）}=\int\frac{u}{\sqrt{u^2+9}}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2+9}}du=\int\frac{u^2}{u^2+9}du=\int\left(1-\frac{9}{u^2+9}\right)du$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{\left(\frac{u}{3}\right)^2+1}\right)du=u-3\arctan\frac{u}{3}+c=\sqrt{x^2+9}-3\arctan\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}+c$$

总结：如果被积函数中含有简单根式 $\sqrt[n]{ax+b}$或$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，可以直接令这个式子为 u，这样就可将原积分换为有理函数的积分。

②可以联想到三角函数之间的转化，则另 $x=3secx$，$dx=3secutanudu$

【例题 3】求 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

思路：看到这样的三角函数有理式，我们首先想到的是凑微分，但这个题不可以凑出来，故我们采用万能公式 $u=\tan\frac{x}{2},\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},dx=\frac{2}{1+u^2}du$ 代换求解。由于该方法比较复杂，且考试中一般不会出现。故在此只给出思路，有兴趣的同学可参考教材 216 页，自行研究。

五、定积分

1、定积分的概念与性质

【必备知识点】

一. 定积分的定义：设函数$f(x)$定义在$[a,b]$上，若对$[a,\ b]$的任意一种分发$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，令$\varDelta x_i=x_i-x_{i-1}$，任取$\xi_i\in[x_i,\ x_{i-1}]$，只要$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\varDelta x_i\}\to 0$时$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\varDelta x_i$总趋于一个确定的极限 I，则称此极限 I 为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$即$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\varDelta x_i$。

二. 定积分的性质（设下列积分都存在）：

1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x)=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}(x)$

2. $\int_a^b\ kf(x)\,\mathrm{d}(x)=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x)$ （k 为常数）

3. $\int_a^b[f(x)\pm g(x)\,\mathrm{d}(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x)\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}(x)$

4. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x)=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}(x)+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}(x)$ $(a<c<b)$

5.设 M 及 m 分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值和最小值，则

$$\mathrm{m(b\text{-}a)}\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x)\le M(b-a)$$

6. 定积分中值定理：若$f(x)\in[a,b]$,则至少存在一点$\xi\in[a,b]$,使$\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}(x)=f(\xi)(b-a)$

【总结】

上述定积分的性质是解决定积分相关问题的基础，同学们一定要熟练掌握，其中性质①-④常常应用于计算题中，性质⑤-⑨常常应用于证明题中，其中性质⑧和性质⑨甚至偶尔会成为证明题的核心考点，需要特别注意一下。

2、微积分基本公式

【必备知识点】

牛顿-莱布尼兹公式（重点!） $\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$, 其中$F\acute{(}x)=\ f(x)$

牛顿-莱布尼兹公式是计算定积分的最基本方法，其重要性不言而喻，因为牛顿-莱布尼兹公式的存在，计算定积分的问题的关键就回归到求原函数的问题上，大大简化了定积分的计算程序

【例题】

计算$\int_0^{\pi}$ （$|cosx|+2x^2$ ）dx

【解析】解答本题的核心思路还是先求被积函数的原函数，再套用牛顿-莱布尼兹公式算出结果，注意利用定积分的区间可加性去掉绝对值符号，利用线性性质将系数提到积分号外部，可简化计算过程

原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cosx\,dx + 2\int_0^{\pi} x^2dx = [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\mathrm{sinx}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{2}{3}[x^3]_0^{\pi} = 2 + \frac{2}{3}\pi^3$

【必备知识点】

变限积分函数（积分上限函数）

⑴变上限函数 $\Phi(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt$的性质

①若$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$\Phi(x)$在$[a,b]$上连续

②若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\Phi(x)$在$[a,b]$上可导，且$\Phi'(x) = f(g(x))g'(x)$（变上限函数求导时依然遵循**复合函数的求导法则**，一定要 a 注意!!!）

③变上限函数$\Phi(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt$中**真正的变量**是**积分上限$g(x)$**而不是被积函数中的变量，变上限函数的定义域，就是使得$g(x)$的范围恰好对应被积函数$f(x)$的可积区间的 x 的取值范围

【反思】

变上限函数从图像上来看，代表 $[a,\ x]$内曲线$f(x)$下封闭图形面积的代数值，变上限函数$\Phi(x)$导数的几何意义是：在 x 变化时，曲线$f(x)$下图形面积的代数值的变化率，就是曲线在 x 点的高度$f(x)$

⑵一般的变限函数$\mu(x) = \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} f(t)dt$的求导公式

$\mu'(x) = f[\beta(x)]\beta'(x) - f[\alpha(x)]\alpha'(x)$

说实话，这个公式有时候我自己都没法熟练运用（学神可以无视这句话= =）……不过我们在实际应用中，可以采取另一种处理方法，来看一道例题

【例题】

求$\Phi(x)=\int_x^{x^2} f(t)dt(x<0)$的导数

【解析】解答此题可直接套用一般的变限函数的求导公式，也可以将题目中的函数，结合 x 的取值范围，通过取一个适当的“分点”，将原函数转化为两个变上限函数的和，再分别求导，可以简化计算过程

$$\Phi(\mathrm{x}) = \int_0^{x^2} f(t)dt + \int_x^0 f(t)dt = \int_0^{x^2} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$$

$$\Phi'(\mathrm{x}) = 2xf(\mathrm{x}^2) - f(x) = (2x-1)f(x)$$

【总结与反思】

借助上面这道例题中的处理方法，我们就可以不用再强行记住一般变限函数的求导公式了，注意，题目中“分点”的选取没有特别要求，只要选取积分上下限之间的某个常数就可以了。

值得一提的是，如果遇到形如$\Phi(x)=\int_a^x xf(t)dt$或者$\mu(x) = \int_0^1 f(xt)dt$之类的函数，求导数时，将第一个函数中的$f(t)$前的 x 提到积分号外面，再按两个函数乘积的求导法则求导，后者采取**换元法**，令 $y = xt, dy = xdt$(因为是对t求微分，故可以暂且把x当做定值处理)，$u(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy$(注意“换元同时要换限”)，再按两个函数商的求导法则求导

【必备知识点】

定积分中值问题（高能题预警!）

⑴解题基本思路

①构造辅助函数

②利用微分中值定理，积分中值公式，泰勒公式及闭区间上连续函数的性质（最大最小值定理，介值定理）构建已知量与待求等式之间的关系

③利用定积分的性质及计算方法

⑵注意：定积分中值问题，向来是考试中的“拉分题”，命题人的脑洞有多大，这种题目就有多难，虽然它有总体的解题思路，但是很多同学在拿到题目之后依然不知如何下手，对于这种现状…我的建议也只能是“平时多练”。这类题目对同学们的基础能力和观察能力要求比较高，没有特别固定的套路，在考试时遇到了很多情况下都是“见招拆招”，不过幸运的是，这种题目只会在试卷中出现一题，大概占 7-8 分，而且有时并不是特别难，虽然拿不到满分，但至少不会一分都拿不到，而且如果你平时练习的多的话，其实你会发现，这类题也没有想象中的那么难

【常见题型与详解】

通常为证明题，没有固定的出题类型，下面举出两个比较经典的证明题

【例 1】（2010-2011 期末考试）已知$f(x)$在$[0,1]$上可微，且满足$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}xf(x)dx$，证明：存在 ξ ∈（0, 1），有$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

【解析】根据该题给出的目标等式，判断应该通过构造辅助函数，再应用罗尔定理完成证明

证：令$\mathrm{F}(x)=xf(x)$, 则$F'(x)=\mathrm{f}(x)+xf'(x)$

下面我们开始找满足罗尔定理条件的两个“特殊点”

对$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}xf(x)dx$应用积分中值公式，得$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}xf(x)dx=\xi f(\xi),\xi\in(0,\frac{1}{3})$

故$\mathrm{F}(1)=f(1)=\xi f(\xi)$, 而$F(\xi)=\xi f(\xi)$, 所以 $\mathrm{F}(1)=\mathrm{f}(\xi)$

由罗尔定理，一定存在 $\mu\in(\xi,1)$ 使得$\mathrm{F}'(\mu)=0$

即$f(\mu)+\mu f'(\mu)=0$， $\mu\in(0,1)$，证毕

【总结与反思】

a、积分中值公式的运用在本题中最大的优势，就是在去掉积分号的同时，又为后面微分中值定理的应用做了铺垫，一举两得

b、本题构造辅助函数的一般做法:先将题目中的目标等式中的 ξ 改成 x，得

$$f(x)+xf'(x)=0 \qquad (1)$$

①若$f(x)$在$[0,1]$上处处为 0，则$f'(x)$在$[0,1]$上处处为 0，此时题目中的目标等式显然成立

②若$f(x)$在$[0,1]$上不恒为 0，则当$f(x)$不为 0 时（由于$f(x)$在$[0,1]$上的连续性，此时一定能找到不为 0 的 x 使得$f(x)$不为 0），在 ⑴式等号两边同时除以$xf(x)$，得

$$\frac{1}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)}=0$$

对这个等式两边同时求不定积分，得 $\ln[xf(x)]=\ln C, C>0$

$$xf(x)=\mathrm{C}$$

把常数 C 改写为F（x），得　$\mathrm{F}(x)=xf(x)$, 此时很容易验证 $\mathrm{F}'(x)=f(x)+xf'(x)$

于是我们就求得了等式⑴等号左边的函数的一个原函数$\mathrm{F}(x)=xf(x)$

【例 2】（2009-2010 期末考试）设$f(x)$在$[-a,a]$上有四阶连续导数，（即$\mathrm{f}^{(4)}(x)$存在且连续）

求：

⑴将$f(x)$展开成带拉格朗日余项的 3 阶麦克劳林公式

⑵当$f(0)=f^{(2)}(0)=0$时，至少存在一点$\lambda\in[-a,a]$，使$a^5f^{(4)}(\lambda)=60\int_{-a}^{a}f(x)dx$成立

【解析】第⑴题按麦克劳林公式定义写出即可，第⑵题要运用第⑴题中已经写出的麦克劳林公式，进行进一步解答

解：⑴ $f(x)=f(0)+f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(0)x^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi x)x^4,\xi\in(0,1)$

⑵当$f(0)=f^{(2)}(0)=0$时，$f(x)=f^{(1)}(0)x+\frac{1}{6}f^{(3)}(0)x^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi x)x^4,\xi\in(0,1)$

对等式两边同求$[-a,a]$上的定积分，得

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}f^{(1)}(0)xdx+\frac{1}{6}\int_{-a}^{a}f^{(3)}(0)x^3dx+\frac{1}{24}\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\xi x)x^4dx,\xi\in(0,1)$$

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\frac{1}{24}\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\xi x)x^4dx,\xi\in(0,1)$$

由于$f^{(4)}(x)$在$(-a,a)$上连续，故$f^{(4)}(x)$在$(-a,a)$上有最大值和最小值，分别记为 M, m

由闭区间上连续函数的最大值最小值定理可知，存在$\mu=\xi x\in[-a,a]$，有$m\le f^{(4)}(\mu)\le M$

得$\int_{-a}^{a}mx^4dx\le\frac{1}{24}\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\mu)x^4dx\le\int_{-a}^{a}Mx^4dx$（定积分的性质⑥）

对上式进行化简，得到 $ma^5\le 60\int_{-a}^{a}f(x)dx\le Ma^5$

由介值定理，一定存在$\lambda\in[-a,a]$，使得 $a^5f^{(4)}(\lambda)=60\int_{-a}^{a}f(x)dx$成立，证毕

【总结与反思】定积分中值问题虽灵活多变，但我们面对它时不要惊慌失措，仔细观察目标等式的特点，结合已学的知识，见招拆招，采取合适的策略加以应对，应对这类题型，最好的办法，就是平时“多练”，熟悉了套路之后，再面对这类问题时，就不会束手无策了。

【练习】

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且有$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}dx$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，

使得$\xi f'(\xi)=2\xi f(\xi)$（方法类似于例 1）

3、定积分的换元法和分部积分法

【必备知识点】

（1）、定理 假设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$满足条件：

1、$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；

2、$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域$R_\varphi=[a,b]$，

则有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

上面的公式就叫做定积分的换元公式。

【常见题型与详解】

定积分的换元与前面所学的不定积分换元非常相似，易错点就是忘记换元后积分上下限的变化（即换元必换限），以下是最常见的几种代换方法。

【例 1】 $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$（三角换元）

令$\mathrm{x}=\sqrt{2}\sin t$,

当$\mathrm{x}=0$时$\mathrm{t}=0$, 当$\mathrm{x}=\sqrt{2}$时$\mathrm{t}=\frac{\pi}{2}$（换元后注意改变积分的上下限），

则原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{dt}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\,\mathrm{dt}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t+1$(降幂)

$=\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}+[t]\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}=\frac{\pi}{2}$

（1）、$\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

令$\mathrm{t}=\sqrt{5-4x}$, 即$\mathrm{x}=\frac{5-t^2}{4}$, $\mathrm{dx}=-\frac{t}{2}dt$,

则原式$=\int_3^1\frac{t^2-5}{8}dt=\left[\frac{t^3}{24}-\frac{5}{8}t\right]_3^1=\frac{1}{6}$

这里值得注意的是当出现$\sqrt{\mathrm{C}\pm x^2}$时使用三角代换，而类似$\sqrt{5-4x}$中的x只有一次方，不能进行三角代换，可以尝试将其进行整体的换元。

（2）、$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$（倒代换）

令$x=\frac{1}{t}$,

当$x=1$时$t=1$, 当$x=\sqrt{3}$时$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $dx=\frac{-1}{t^2}dt$

则原式$=\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\frac{-1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{dt}{\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}}=-\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{d(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{1+t^2}\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}=\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

（3）、$\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|dx$（周期函数的代换）

令$\mathrm{t}=\mathrm{x}+1$,

则原式$=\int_1^{2\pi+1}|\sin t|\,dt=\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=4$（由函数图像能够快速得到答案）

运算技巧$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^{T}f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)$, 其中T为$f(x)$的周期

（4）、$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$（含有指数、对数的代换）

令$\mathrm{x}=e^t$,

则原式=$\int_0^2\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=\int_0^2\frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}}=\left[2\sqrt{1+t}\right]_0^2=2\sqrt{3}-2$

在处理定积分的换元法一类的试题时要牢记常用的求导公式，熟记原函数与导数之间的转换。

【必备知识点】

由不定积分的分部积分法，可得

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[\int u(x)v'(x)dx\right]_a^b$$
$$=\left[u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx\right]_a^b$$
$$=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$$

简记作

$$\int_a^b udv=[uv]_a^b-\int_a^b vdu$$

以上则是定积分的分部积分公式，与不定积分的分部积分公式比较可知，定积分的公式就是在不定积分的基础上加入了积分上下限以及数值的计算。

【常见题型与详解】

（1）、$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2 x}dx$

原式$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}xdx(\cot x)=[-x\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot x\,dx$

$$=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+[\ln\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

（2）、$\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

原式$=\int_1^4 2\ln x\,d\sqrt{x}=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^4-\int_1^4\frac{2}{\sqrt{x}}dx$

$$=8\ln 2-\left[4\sqrt{x}\right]_1^4=4(2\ln 2-1)$$

（3）、$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$

原式$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx+\int_1^e\ln x\,dx=-[x\ln x]_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx+[x\ln x]_1^e-\int_1^e dx$

$$=2-\frac{2}{e}$$

4、反常积分

【必备知识点】

（1）、无穷限反常积分：

设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，任取$t>a$, 作定积分$\int_a^t f(x)dx$，再求极限：

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx,$$

这个对变上限定积分的算式称为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的反常积分，记为

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$。

同理当$f(x)$在区间$(-\infty，b]$和区间$(-\infty，+\infty)$上作定积分时，也称作无穷限的反常积分。

（2）、无界函数的反常积分：

瑕点：如果函数$f(x)$在点a的任一领域内都无界，那么点a称为函数$f(x)$的瑕点（也称为无界间断点），无界函数的反常积分又称为瑕积分。

设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，点a为$f(x)$的瑕点。任取$t>a$, 做定积分$\int_t^b f(x)dx$, 再求极限

$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$, 这个对变下限的定积分求极限的算式称为函数f(x)在区间$(a,b]$上的反常积分，仍然记为$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

（3）、当上述极限$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$、$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$等存在时称为反常积分收敛，反之，若极限不存在，则称反常积分发散。

【常见题型与详解】

证明反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}(a>0)$当p > 1时收敛，当p ≤ 1时发散.

通过观察我们可以发现当p = 1时是一种特殊情况，因为$\frac{1}{x}$的积分是$\ln x$, 而当p等于其他数时$\frac{1}{x^p}$的积分则是幂函数，所以进行分类讨论：

当p = 1时，原式$=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_a^{+\infty}=+\infty$ →反常积分发散

当p ≠ 1时，原式$=\int_a^{+\infty}x^{-p}\,dx=\left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_a^{+\infty}$

（因为x的系数$-p+1$的正负关系到$x\to+\infty$时的取值，所以要继续分类讨论）

当1 − p > 0,即p < 1时，上式$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}-\frac{a^{-p+1}}{-p+1}=+\infty$ →反常积分发散

当1 − p < 0, 即p > 1时，上式$=-\frac{a^{-p+1}}{-p+1}$ →反常积分收敛

综上：当$p \leq 1$时$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$发散，当$p > 1$时$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$收敛

【例题】

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x-\lim_{x\to-\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

$$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left[arcsin\frac{a}{x}\right]_0^a=\lim_{x\to a^-}arcsin\frac{a}{x}-0=\frac{\pi}{2}$$

六、定积分的应用

1、定积分的元素法

【必备知识点】

(1) 根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间[a, b];

(2) 任取一小区间并记$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[a,b]$,求出相应于这小区间的部分量$\Delta U$的近似值 dU,并将其表示为$\mathrm{d}U=f(x)\mathrm{d}x$

(3) 以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式

在区间[a, b]上作定积分，得$U=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$即为所求量 U 的积分表达式.

这个方法通常称为元素法(微元法).

2、定积分在几何上的应用

【必备知识点】

（1）直角坐标系下平面图形的面积$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

（2）极坐标系下求平面图形的面积$A=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[r(\theta)]^2\mathrm{d}\theta$

（3）旋转体的体积 $V=\int_\alpha^\beta\pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$

（4）已知平行截面面积的立体的体积$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$

（5）参数方程情形弧长$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},(\alpha\le t\le\beta)$，$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$

【常见题型与详解】

求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$的全长.

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases},\ (0\le t\le 2\pi)$$

根据对称性知$s=4s_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a$

注意：在此极坐标和直角坐标方程都难以表达的情况下，我们采用参数方程来表达这个曲线，这时要会灵活用参数方程，可以的话画出图像，比如在这里用了三角函数的三次方。

【例题】

求曲线$y=\int_0^x\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$的弧长

答案　弧长为 4

3、定积分在物理上的应用

【必备知识点】

（1）变速直线运动做功

从物理学知道，如果物体在作直线运动的过程中有一个不变的力 F 作用在这物体上，且这力的方向与物体运动的方向一致，那么，在物体移动了距离 s 时，力 F 对物体所作的功为$W = F \cdot s$，如果物体在运动过程中所受的力是变化的，则需要对 W 微分，$dW = F \cdot ds$,再两边同时积分，即$\mathrm{W} = \int_a^b Fds$,其中$\mathrm{s} \in$ （a, b）

【例题】在底半径为 3 米，高为 5 米的圆柱形水桶中存满水，要把桶内的水全部吸出，求所做的功

【解析】先建立直角坐标系，水的密度为$\mu = 1000kg/m^3$

设想：水分层抽出，在区间$x\epsilon[0,5]$上任取小区间$[x, x+dx]$,与之对应的水层重$\mu\pi 3^2 dx$，把它提到桶口所做功近似的等于$dW = (g\mu\pi 3^2 dx) \cdot x = g\mu\pi 3^2 xdx$,要求总功即两边同时积分，

$W = \int_0^5 g\mu\pi 3^2 xdx = 112500g\pi$(焦耳)

（2）水压力

从物理学知道，在水深为h处的压强为$p = \rho gh$,这里的ρ是水的密度，g是重力加速度。如果有一个面积为A的平板水平的放置在水深为h处，那么，平板一侧所受的水压力为$P = p \cdot A$
如果平板铅直放置在水中，那么，由于水深不同的点处压强p不相等，平板一侧所受的水压力就不能用上述方法计算，根据物体形状所用的方法不同，但只要记住$\mathrm{dP} = \rho \mathrm{gh} \cdot \mathrm{dS}$。

（3）引力

从物理学知道，质量分别为m_1、m_2，相距为r的两质点间的引力的大小为$\mathrm{F} = \mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}$，其中 G 为引力系数，引力的方向沿着两质点的连线方向。
如果要计算一根细棒对一个质点的引力，那么，由于细棒上的各点与该质点的距离是变化的，且各点对该质点的引力方向也是变化的，因此不能用上述公式来计算。此时，$\mathrm{dF} = \mathrm{G}\frac{m_1 dm_2}{r^2}$，两边同时积分，即$F = \int_a^b G\frac{m_1 dm_2}{r^2}$，注意力是一个向量，只有同方向的力才具有叠加性，因此要将dF分解到各坐标轴上，即得dF_x，dF_y，得合力$\mathrm{F} = \{dF_x，dF_y\}$

【例题】一个半径为 R 的圆环，线密度为ρ，l为过圆环中心且垂直圆环所在平面的直线，l上距圆环中心a处有一质量为m的质点，求圆环对质点的引力。

【解析】$\mathrm{F}\left(0，0，-\frac{2k\pi am\rho R}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$，取圆环中心为坐标原点，xOy面在圆环面上，质点坐标为（0，0，a），取圆心角θ为积分变量，$\theta \in [0，2\pi]$，引力元素$\mathrm{dF} = \frac{km\rho Rd\theta}{R^2+a^2}$，往坐标轴上投影，由对称性的$F_x = F_y = 0$，$\mathrm{F_z} = -\int_0^{2\pi}\frac{km\rho Rad\theta}{(R^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$

七、微分方程

1、微分方程的基本概念

【必备知识点】

微分方程：表示未知函数（y），未知函数的导数（y'或$\frac{dy}{dx}$）与自变量（x）之间关系的方程

解微分方程：建立微分方程后，通过计算找出未知函数，就叫解微分方程

积分方程的积分曲线：一阶$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y_{|x=x_0} = y_0 \end{cases}$，几何意义是过定点的积分曲线

二阶$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y_{|x=x_0} = y_0 . y'_{|x=x_0} = y_0' \end{cases}$，几何意义是过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线

【例题】试求下列微分方程在指定形式下的解：$y'' + 3y' + 2y = 0$，形如$y = e^{rx}$的解。

【解析】 将$y = e^{rx}$求y'和y''，得$y' = re^{rx}$，$y'' = r^2 e^{rx}$，

将y, y', y''代入微分方程中，得：$r^2 + 3r + 2 = 0$，即$(r + 2)(r + 1) = 0$

解得$r_1 = -2, r_2 = -1$，所以$y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{-x}$

【例题】微分方程的通解是否包含它的所有解?

【解析】微分方程的通解不一定包含它的所有解，下面举一个反例：

例如微分方程$(x-4)y^4 dx - x^3(y^2 - 3)dy = 0$

其通解为$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} = C$，其中$C$为任意常数，

但它不能包含方程的解：$x = 0$或$y = 0$

2、可分离变量的微分方程

【必备知识点】可分离变量的微分方程：如果一个一阶微分方程能写成$g(y)dy = f(x)dx$的形式，就是说，能把微分方程写成一端只含y的函数和dy，另一端只含x的函数和dx，那么原方程就成为可分离变量的微分方程。（等式的每一边仅是一个变量的函数与这个变量的微分之积，两端积分即可得通解）（记得$y' = \frac{dy}{dx}$）

分离变量求通解的步骤：1. 分离变量，把方程化为$\psi(y)dy = \varphi(x)dx$的形式；
2. 将上式两边积分$\int \psi(y)dy = \int \varphi(x)dx + C$；

其中C为任意常数，由上式确定的函数$y = y(x, C)$就是方程的通解（隐式通解）

【例题】求$x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$的通解。

【解析】分离变量$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{x}{1+x^2}dx$

两边积分$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx$

$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}C$

$\ln(1+y^2)=\ln C(1+x^2)$ $\quad\therefore 1+y^2=C(1+x^2)$为方程的通解（隐式通解）

【例题】求方程$xy'=y\ln y$的通解

【解析】分离变量$\frac{1}{y\ln y}=\frac{1}{x}$

两边积分$\int\frac{1}{y\ln y}dy=\int\frac{1}{x}dx$

$\ln\ln y=\ln x+\ln C=\ln Cx \quad \ln y=Cx \quad y=e^{Cx}$

【例题】有高为 1 米的半球形容器，水从它的底部小孔流出，小孔横截面积为 1 平方厘米，开始时容器内盛满了水，求水从小孔流出该过程中容器水面的高度h（水面与孔口中心间的距离）随时间t的变化规律

【解析】由力学知识得，水从孔口流出的流量为$Q=\frac{dV}{dt}=0.62\cdot S\sqrt{2gh}$

即$dV=0.62\sqrt{2gh}dt$，另外，设在时间间隔$[t，t+dt]$内
水面高度由h降到$h+dh$，故$dV=-\pi^2r^2dh$

而$\mathrm{r}=\sqrt{100^2-(100-h)^2}=\sqrt{200h-h^2}-\pi(200h-h^2)dh=0.62\sqrt{2gh}dt$

$\mathrm{t}=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}\sqrt{h^3}-\frac{2}{5}\sqrt{h^5}\right)+C$

$\because h|_{t=0}=100 \qquad \therefore C=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times10^5$

所求规律为$\mathrm{t}=\frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}\left(7\times10^5-10^3\sqrt{h^3}+3\sqrt{h^5}\right)$

3、齐次方程

【必备知识点】

（1） 定义：如果一阶微分方程可化为$\frac{dy}{dx}=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$的形式，那么就称这方程为齐次方程。

【常见题型与详解】

（1）已知$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$,求其通解。

解：令$x=3\sec u \qquad dx=3\sec u\tan u\,du$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{9\sec u^2-9}}{3\sec u}3\sec u\tan u\,du=\int 3\tan u^2\,du=3\int(\sec u^2-1)du$$
$$=3\tan u-3u+C$$

当$x>3$时， $x=3\sec u \quad (0<u<\frac{\pi}{2})$

原式$=3\sqrt{x^2-9}-3arccos\frac{3}{x}+C$

当$x<-3$时, $x=3\sec u \quad (\frac{\pi}{2}<u<\pi)$

原式$=-3\int(\sec u^2-1)\,du=-3\tan u+3u+C=3\sqrt{x^2-9}+3arccos\frac{3}{x}+C$

（2）求齐次方程$(y^2-3x^2)dy+2xydy=0, y/_{x=0}=1$的特解。

解： 整理，得 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{3-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{2y}{x}}$

令$\mathrm{u}=\frac{y}{x}$， 则$\mathrm{y}=\mathrm{ux}$， 所以， $y'=u+xu'$

代入原方程得， $u+xu'=\frac{3-u^2}{2u}$

即 $\frac{2u}{3(1-u^2)}du=\frac{dx}{x}$

两边同时积分，得 $-\frac{1}{3}\ln|1-u^2|=ln|x|+lnC_1$

所以 $C_1x=(1-u^2)^{-\frac{1}{3}}$

所以 $\mathrm{C}x^{-3}=1-u^2$

即 $x^3-xy^2=C$

将$\mathrm{x}=0,\mathrm{y}=1$代入，得 $\mathrm{C}=0$

所以， $x^3-xy^2=0$

【例题】

求下列微分方程的通解

（1）$y'+x=\sqrt{x^2+y}$

答案：$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=x^3+\frac{3}{2}xy+C$

（2）$(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$

答案：$x^3-2y^3=Cx$

（3）求$(x^2+2xy-y^2)dx+(y^2+2xy-x^2)dy=0, y/_{x=1}=1$的特解。

答案：$\frac{x+y}{x^2+y^2}=1$

4、一阶微分线性微分方程

【必备知识点】

（1） 方程$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}+P(x)y=Q(x)$ ⋆叫做一阶线性微分方程，因为它对于未知函数y及其导数是一次方程。

（2） 如果$\mathrm{Q(x)}\equiv 0$,那么方程⋆称为齐次的，如果$\mathrm{Q(x)}\neq 0$,那么方程⋆称为非齐次的。

【常见题型与详解】

（1）求$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{y}{2(lny-x)}$的通解

原方程可化为 $\frac{dx}{dy}=\frac{2(lny-x)}{y}$，

即 $\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{2lny}{y}$ ①

对于 $\frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=0$

分离变量得， $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{-2x}$

两边积分，得 $\ln y=-\frac{1}{2}lnx-\frac{1}{2}lnC_1$

所以 $x=C_2\frac{1}{y^2}$

令 $x=u\frac{1}{y^2}$ ②

则 $\frac{dx}{dy}=u'\frac{1}{y^2}-2y^{-3}u$ ③

将②③代入①整理得，$du=2ylnydy$

两边积分得 $u=xy^2=y^2lny-\frac{1}{2}y^2+C_3$

即 $x=\ln y-\frac{1}{2}+Cy^{-2}$ （C 是任意常数)

求解方法：先求其对应的齐次方程的通解，再使用常数变易法求该非齐次方程的通解。

或者，利用通解公式：$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$

（2）求$\frac{d\rho}{d\theta}+3\rho=2$的通解。

解：整理，得 $\frac{d\rho}{2-3\rho}=d\theta$

两边同时积分得， $-\frac{1}{3}ln|2-3\rho|=\theta+C_1$

所以， $2-3\rho=\pm e^{-3(\theta+C_1)}$

所以， $\rho=Ce^{-3\theta}+\frac{2}{3}$

【例题】

（1）求$\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$的通解。

答案：$y=e^{-x}(x+c)$

（2） 求$\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{cosx},y/_{x=\frac{\pi}{2}}=-4$的特解。

答案：$ysinx+5e^{cosx}=1$

5、可降阶的高阶微分方程

【必备知识点】

高阶微分方程：二阶及二阶以上的微分方程

（1）、$y^{(n)}=f(x)$ 型微分方程

对该方程左右两侧同时积 n-1 次分，则可将之降低至一阶，用前面章节所学内容可解。

（2）、$y''=f(x,y')$ 型微分方程

思路是将该式看成是关于 y' 的方程，设 $y'=p$ 可以得到$p'=f(\ x,p\ )$，两侧同时积分得

$p=u(x,C1)$, 将y'代回并再次两侧求积分可得通解$y=\int u(x,c1)\,dx+C2$
（3）、$y''=f(y,y')$

思路是令$p=y'$, 再利用复合函数求导得出$y''=p\frac{dp}{dy'}$, 代入可得方程$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$，其通解为

$y'=p=u(y,C_1)$, 分离变量并积分得$\int\frac{dy}{u(y,C_1)}=x+C_2$

【常见题型与详解】

（1）、求微分方程$y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C$

解题思路：对所给方程连续积分三次，即可得到通解。

答案：$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$

（2）、求微分方程$(1+x^2)y''=2xy'$，满足初值条件$y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$
解题思路：设$y'=p$, 代入方程并分离变量，两边积分，代入初值条件可得常数项取值。得出关于y'的公式后再两端积分，代入初值条件，可得答案。
答案：$y=x^3+3x+1$

（3）、求微分方程$\int\frac{dy}{u(y,C_1)}=x+C_2$ 的通解.

解题思路：设$y'=p$, 并将$y''=p\frac{dp}{dy'}$代入方程，变量分离，两端积分。整理后得关于y'和 y 的方程，分离变量两端积分，可得答案。
答案：$y=C_2e^{C_1x}$

6、高阶线性微分方程

【必备知识点】

（1）、二阶线性微分方程举例

物体自由振动的微分方程，强迫振动的微分方程，串联电路的振荡方程

（2）、二阶线性微分方程的形式：$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$

当方程右端 f(x)≡0 时方程为齐次；当方程右端 f(x)≠0 时方程为非齐次；

（3）线性微分方程的解的结构

对于其次方程：

定理 1：

如果函数$y_1(x)$ 与$y_2(x)$是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是该方程的解，其中C_1，C_2 是任意常数。

定理 2：

如果$y_1(x)$ 与$y_2(x)$是方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的两个线性无关的特解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 就是该方程的通解，其中C_1，C_2 是任意常数。

推论：

如果$y_1(x)$，$y_2(x)$，……，$y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性方程$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ 的 n 个线性无关的解，那么，此方程的通解为$y=C_1y_1(x)+$

$C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$, 其中$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$为任意常数。

对于非齐次线性方程：

定理 3：

设$y^*(x)$是二阶非齐次线性方程$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$的一个特解，$Y(x)$是与该方程组对应的齐次方程的通解，则$y = Y(x) + y^*(x)$是该二阶非齐次线性微分方程的通解。

定理 4：（叠加原理）

设非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$的右端 $f(x)$是两个函数之和，即$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$与$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$的特解，则$y_1^*(x) + y_2^*(x)$就是原方程的解。