1.d) Indépendance

Définition 22. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. On dit que A et B sont **indépendants** sitôt que :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, c'est équivalent à :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$$

Proposition 19. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$. Sont équivalents :

- A et B sont indépendants ;
- $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
- A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Définition 23. *Indépendance mutuelle.*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'événements de Ω. Ces événements sont dit **mutuellement indépendants** sitôt que *pour toute sous-famille* $(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}),\ k \leqslant p$, on a :

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \mathbb{P}(A_{i_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Remarque 21. Attention avec l'indépendance mutuelle :

- Il est évident, d'après la définition, que toute sous-famille d'événements mutuellement indépendants est une famille d'événement mutuellement indépendants.
- En particulier, une famille d'événements mutuellement indépendants est une famille d'événements indépendants deux-à-deux (sous-famille de taille 2).
- En revanche, la réciproque est **fausse** : on peut avoir des familles d'événements deux-à-deux indépendants, sans qu'ils soient mutuellement indépendants ; voir l'exemple suivant.

Exemple 13. On lance deux dés à 6 faces, équilibrés. On considère les trois événements suivants :

- A : «Le premier dé donne un chiffre pair ».
- B : «Le second dé donne un chiffre pair ».
- C : «La somme des chiffres des deux dés donne un nombre pair ».

On a alors :

Proposition 20. Dans une famille d'événements mutuellement indépendants, on peut remplacer tout événement par son événement contraire, et on obtient encore une famille d'événements mutuellement indépendants.

Exemple 14. Si (A, B, C) est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors :

$$(A, B, \overline{C}), \quad (\overline{A}, B, \overline{C}), \quad \ldots$$

sont également des familles d'événements mutuellement indépendants.

1.e) Exercices

Exercice II-11. Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement, sans remise, 3 boules de cette urne.

1- Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans notre tirage ?

2- Quelle est la probabilité que la première boule de notre tirage soit noire, *sachant que* au moins une boule du tirage est noire ?

3- Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit noire ?

Exercice II-12. Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé, B n'étant ni négligeable, ni certain. Montrer que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})$$

Exercice II-13. On dispose de 10 cartes numérotées de 1 à 10. On le mélange, et on pioche à la suite les 3 premières cartes :

1- On le mélange, et on pioche à la suite les 3 premières cartes : quelle est la probabilité de tirer les numéros en ordre croissant ?

2- On pioche la première carte, on note le numéro, on mélange de nouveau le paquet de cartes, et on pioche une nouvelle carte (on dit qu'on pioche *avec* remise). Quelle est la probabilité de tirer 2 numéros en ordre croissant ?

3- Et en ordre strictement croissant ?

4- Mêmes questions que *b)* et *c)* mais en tirant 3 cartes (toujours avec remise).

Exercice II-14. Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, l'autre donne un 6 une fois sur deux, et ses autres faces sont équilibrées. On tire au hasard un dé dans la pochette, et on le lance.

1- On obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit équilibré ?

2- On obtient 5. Quelle est la probabilité que le dé soit équilibré ?

2- Variables aléatoires sur un univers fini

2.a) Variables aléatoires

Définition 24. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** sur Ω toute application :

$$\left\{ \begin{array}{llll} X: & \Omega & \rightarrow & E \\ & \omega & \mapsto & X(w) \end{array} \right.$$

où E est un ensemble de nombre (généralement, $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$, parfois $\mathbb{C}$). Quand $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle**.

Exemple 15.
- Par exemple, le «score » d'une carte à jouer peut être définit par la variable aléatoire suivante :

  ⋮

- On peut aussi modéliser des expériences plus complexes. Prenons le jeu de la roulette, au casino. L'univers est $\Omega = [\![0;36]\!]$. Par exemple, on peut modéliser la mise de 10£ sur la case 8 par une variable aléatoire X. Alors, si le 8 tombe, on remporte 36 fois la mise (donc 350£ au total), mais si n'importe quel autre case tombe, on perd 10£ (on remporte -10£...). On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{llll} X: & [\![0;36]\!] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & 8 & \mapsto & 350 \\ & k & \mapsto & -10 \text{ si } k \neq 8 \end{array} \right.$$

Définition 25. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit X une variable aléatoire sur Ω. On utilisera les notations suivantes :
- Si $A \in \mathcal{P}(E)$, on notera $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$ l'événement $X^{-1}(A)$.
- Si $x \in E$, on notera $(X = x)$ ou $\{X = x\}$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$.
- Si $x \in E$, on notera $(X \leqslant x)$ ou $\{X \leqslant x\}$ l'événement $X^{-1}(]-\infty; x])$.
- Si $x \in E$, on notera $(X < x)$ ou $\{X < x\}$ l'événement $X^{-1}(]-\infty; x[)$.
- Si $x \in E$, on notera $(X \geqslant x)$ ou $\{X \geqslant x\}$ l'événement $X^{-1}([x; +\infty[)$.
- Si $x \in E$, on notera $(X > x)$ ou $\{X > x\}$ l'événement $X^{-1}(]x; +\infty[)$.

Définition 26. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soit X une variable aléatoire sur Ω. Alors l'application :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \mathbb{P}_X: & \mathcal{P}(E) & \rightarrow & [0;1] \\ & A \mapsto & \mathbb{P}(X \in A) = P(X^{-1}(A)) & \end{array} \right.$$

définit une probabilité sur Ω, que l'on appelle **loi (de probabilité)** de la variable aléatoire X.

Exemple 16. Si on reprend l'exemple précédent, la loi de X est définie par :

$$\mathbb{P}_X(\{350\}) = \ldots \qquad \mathbb{P}_X(\{350\}) = \ldots$$

D'une manière générale, pour définir une loi de probabilité, on a uniquement besoin de connaître les probabilités des événements élémentaires. On peut le représenter sous forme d'un tableau :

x	-10	350
$\mathbb{P}(X = x)$	$\ldots$	$\ldots$

Exemple 17. On tire une carte au hasard d'un paquet de 52 cartes. Si c'est un coeur, on gagne 4 points. Si c'est un chiffre perd, on perd 2 points. Si c'est une tête, on gagne un point. La variable aléatoire qui modélise cette expérience est :

Démonstration 16. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est bien une probabilité sur Ω. En effet :

Définition 27. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. L'application

$$Y = f \circ X$$

est alors également une variable aléatoire sur Ω. On la note en général $f(X)$, et on l'appelle **l'image** de la variable aléatoire X par le fonction Y.

Exemple 18. On place dans une urne 12 boules, numérotées de 1 à 12, indiscernables au toucher. Les boules numérotées de 1 à 5 sont rouges, celles de 6 à 9 sont vertes, et les dernières sont bleues.
Si on tire une boule rouge, on perd 10 points. Si on tire une boule verte, on perd 5 points. Enfin, si on tire une boule bleue, on gagne 10 points. Dans une première version du jeu, on compte les points après un tirage. La loi de probabilité de X modélisant cette expérience est :

Dans une seconde version du jeu, on tire un boule, puis on élève ses points au carré pour obtenir son score. La loi de probabilité de Y modélisant cette expérience est :

2.b) Lois usuelles

Définition 28. *Loi uniforme.*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et $X : \Omega \to \{x_1, \ldots, x_p\}$ une variable aléatoire sur Ω. On dit que X **suit une loi uniforme** sitôt que :

$$\forall i \in [\![1; p]\!],\ \mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{p}$$

C'est-à-dire qu'on a équiprobabilité de tous les événements $(X = x_i)$. On note cette situation :

$$X \sim \mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n)$$

Définition 29. *Loi uniforme.*
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et $X : \Omega \to \{0; 1\}$ une variable aléatoire sur Ω. On dit que X **suit une loi de Bernoulli** *de paramètre* p sitôt que :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

On note cette situation :

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Remarque 22. Une variable aléatoire à valeur dans $\{0; 1\}$ suit **toujours** une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$.
En particulier, si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, on a la fonction indicatrice de A : $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.
Enfin, si une expérience n'a que deux issues (par exemple, S en cas de succès, E en cas d'échec), alors la variable aléatoire qui à S associe 1 et à E associe 0 suit une loi de Bernoulli.

Définition 30. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et X une variable aléatoire sur Ω. On dit que X **suit une loi binomiale** *de paramètre* $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sitôt que :

$$X : \Omega \to [\![0; n]\!] \text{ et } \forall f \in [\![0; n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note cette situation :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Remarque 23. On vera plus tard dans ce chapitre qu'en ajoutant n fois des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, on obtient une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p.