随机变量的数学期望

引例1　分赌本问题(产生背景)

A, B 两人赌技相同，各出赌金**100**元, 并约定先胜三局者为胜，取得全部 **200** 元. 由于出现意外情况，在 A 胜 **2** 局 B 胜**1** 局时, 不得不终止赌博，如果要分赌金, 该如何分配才算公平?

分析　假设继续赌两局，则结果有以下四种情况：

$A\ A$	$A\ B$	$B\ A$	$B\ B$
A胜B负	A胜B负	B胜A负	B胜A负
A胜B负	B胜A负	A胜B负	B胜A负

把已赌过的三局（A 胜2局B 胜1局）与上述结果相结合，即 A、B 赌完五局，

前三局：　A 胜 2 局 B 胜 1 局

后二局：　$\boxed{A\ A \quad A\ B \quad B\ A}$　$\boxed{B\ B}$

A 胜　　B 胜

故有，在赌技相同的情况下，A, B 最终获胜的可能性大小之比为 $3:1,$

即A 应获得赌金的 $\frac{3}{4}$，而 B 只能获得赌金的$\frac{1}{4}$.

因此，A 能“期望”得到的数目应为

$$200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150(\text{元}),$$

而B 能“期望”得到的数目，则为

$$200\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{4}=50(\text{元}).$$

若设随机变量 X 为: 在 A 胜2局B 胜1局的前提下, 继续赌下去 A 最终所得的赌金.

则X 所取可能值为: $\quad 200 \qquad 0$

其概率分别为: $\quad \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{4}$

因而A期望所得的赌金即为X的 "期望" 值,

等于 $$200\times\frac{3}{4}+0\times\frac{1}{4}=150(\text{元}).$$

即为 X **的可能值与其概率之积的累加.**

引例2　射击问题

设某射击手在同样的条件下，瞄准靶子相继射击90次，(命中的环数是一个随机变量)．射中次数记录如下

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问：该射手每次射击平均命中靶多少环?

解 平均射中环数 $= \dfrac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}$

$$= \frac{0\times 2+1\times 13+2\times 15+3\times 10+4\times 20+5\times 30}{90}$$

$$= 0\times\frac{2}{90}+1\times\frac{13}{90}+2\times\frac{15}{90}+3\times\frac{10}{90}+4\times\frac{20}{90}$$

$$+5\times\frac{30}{90}$$

$$= \sum_{k=0}^{5} k\cdot\frac{n_k}{n} = 3.37.$$

设射手命中的环数为随机变量 Y .

$$\boxed{\text{平均射中环数}} = \sum_{k=0}^{5} k \cdot \boxed{\frac{n_k}{n}}$$

随机波动

频率随机波动

“平均射中环数”的稳定值=？

$$\sum_{k=0}^{5} k \cdot \frac{n_k}{n} \xrightarrow{n\text{ 逐渐增大}} \sum_{k=0}^{5} k \cdot p_k$$

随机波动 → 稳定值

“平均射中环数”等于

射中环数的可能值与其概率之积的累加

1. 离散型随机变量的数学期望

定义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

分赌本问题

A 期望所得的赌金即为 X 的数学期望

$$E(X) = 200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}).$$

射击问题

“平均射中环数”应为随机变量Y的数学期望

$$E(Y) = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 + 4 \times p_4 + 5 \times p_5.$$

关于定义的几点说明

（1）$E(X)$是一个实数, 而非变量, 它是一种加权平均, 与一般的平均值不同 ， 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称均值.

（2）级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变 ， 之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值, 它不应随可能值的排列次序而改变.

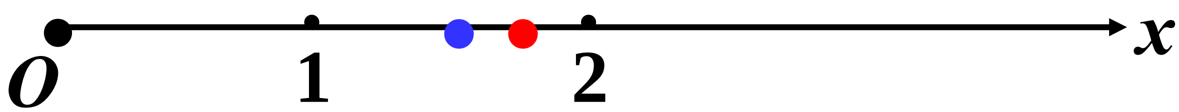
（3）随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

假设

X	1	2
p	0.02	0.98

随机变量 X 的算术平均值为 $\dfrac{1+2}{2}=1.5,$

$$E(X)=1\times 0.02+2\times 0.98=1.98.$$



它从本质上体现了随机变量X取可能值的平均值.

当随机变量 X 取各个可能值是等概率分布时，X 的期望值与算术平均值相等.

实例1 谁的技术比较好?

甲、乙两个射手, 他们射击的分布律分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好?

解 设甲、乙射手击中的环数分别为 X_1, X_2 .

$$E(X_1) = 8\times 0.3 + 9\times 0.1 + 10\times 0.6 = 9.3(\text{环}),$$

$$E(X_2) = 8\times 0.2 + 9\times 0.5 + 10\times 0.3 = 9.1(\text{环}),$$

故甲射手的技术比较好.

实例2　发行彩票的创收利润

某一彩票中心发行彩票 10万张，每张2元. 设头等奖1个，奖金 1万元，二等奖2个, 奖金各 5 千元;三等奖 10个，奖金各1千元；四等奖100个，奖金各100元；五等奖1000个，奖金各10 元. 每张彩票的成本费为 0.3 元，请计算彩票发行单位的创收利润.

解　设每张彩票中奖的数额为随机变量X，则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

每张彩票平均能得到奖金

$$E(X) = 10000 \times \frac{1}{10^5} + 5000 \times \frac{2}{10^5} + \cdots + 0 \times p_0$$

$$= 0.5(\text{元}),$$

每张彩票平均可赚

$$2 - 0.5 - 0.3 = 1.2(\text{元}),$$

因此彩票发行单位发行 10 万张彩票的创收利润为

$$100000 \times 1.2 = 120000(\text{元}).$$

实例3　如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金，想投资于某项目，预估成功的机会为 30%，可得利润8万元 ， 失败的机会为70，将损失 2 万元．若存入银行，同期间的利率为5% ，问是否作此项投资?

解　设 X 为投资利润，则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$$E(X) = 8 \times 0.3 - 2 \times 0.7 = 1(\text{万元}),$$

存入银行的利息：$10 \times 5\% = 0.5\ (\text{万元})$,

故应选择投资.

实例4　商店的销售策略

某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式，记使用寿命为 X（以年计），规定：

$X \le 1$，一台付款 1500 元；$1 < X \le 2$，一台付款 2000 元；$2 < X \le 3$，一台付款 2500 元；$X > 3$，一台付款 3000元.

设寿命 X 服从指数分布，概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{-x/10}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

试求该商店一台家用电器收费 Y 的数学期望.

解 $$P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx = 1 - e^{-0.1} = 0.0952,$$

$$P\{1 < X \le 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx$$

$$= e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861,$$

$$P\{2 < X \le 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} \, dx$$

$$= e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779,$$

$$P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}\frac{1}{10}e^{-x/10}\,dx$$

$$=e^{-0.3}=0.7408.$$

因而一台收费 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

得 $E(Y)=2732.15,$

即平均一台家用电器收费 2732.15 元.

实例5　分组验血

在一个人数很多的团体中普查某种疾病，为此要抽验 N 个人的血，可以用两种方法进行．

(i) 将每个人的血分别去化验，这就需化验 N 次．

(ii) 按 k 个人一组进行分组，把从 k 个人抽来的血混合在一起进行化验，如果这混合血液呈阴性反应，就说明 k 个人的血都呈阴性反应，这样，这 k 个人的血就只需验一次．若呈阳性，则再对这 k 个人的血液分别进行化验，这样，k 个人的血共最多需化验 $k+1$ 次．

假设每个人化验呈阳性的概率为 p，且这些人的化验反应是相互独立的. 试说明当 p 较小时，选取适当的 k，按第二种方法可以减少化验的次数. 并说明 k 取什么值时最适宜.

解 由于血液呈阳性反应的概率为 p,

所以血液呈阴性反应的概率为 $q = 1 - p$,

因而 k 个人的混合血呈阴性反应的概率为 q^k,

k 个人的混合血呈阳性反应的概率为 $1 - q^k$.

设以 k 个人为一组时，组内每人的血化验的次数为 X,

则 X 为一随机变量，且其分布律为

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{k+1}{k}$
p_k	q^k	$1-q^k$

X 的数学期望为

$$E(X)=\frac{1}{k}q^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}.$$

N 个人平均需化验的次数为 $N\left(1-q^k+\frac{1}{k}\right).$

因此,只要选择 k 使

$$1-q^k+\frac{1}{k}<1,$$

则 N 个人平均需化验的次数 $< N$.

当 p 固定时,选取 k 使得

$$L=1-q^k+\frac{1}{k}$$ 小于1且取到最小值 ,

此时可得到最好的分组 方法.

实例6 按规定,某车站每天 8:00 ~ 9:00, 9:00 ~ 10:00 都恰有一辆客车到站,但到站的时刻是随机的,且两者到站的时间相互独立. 其规律为

到站时刻	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

(i) 一旅客 8:00 到车站,求他候车时间的数学期望.

(ii) 一旅客 8:20 到车站,求他候车时间的数学期望.

解 设旅客的候车时间为 X(以分计).

(i) X的分布律为

X	10	30	50
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{3}{6} + 50 \times \frac{2}{6}$$

$$= 33.33(\text{分}).$$

(ii) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$

候车时间的数学期望为

$$E(X)=$$

$$10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+70\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+90\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}$$

$$=27.22(\text{分}).$$

2.连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$$

绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x .$$

实例7　顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间X(以分计)服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}\,\mathrm{d}\,x$

$=5$(分钟).

因此，顾客平均等待5分钟就可得到服务.

数学期望的性质

1. 设 C 是常数，则有 $E(C)=C$.

2. 设 X 是一个随机变量, C 是常数，则有

$$E(CX)=CE(X).$$

3. 设 X, Y 是两个随机变量，则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量，则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

说明 连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似.

实例　一机场班车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$ (设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立).

解　引入随机变量 X_i，

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车}, \\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, 10.$$

则　$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$.

则有 $P\{X_i=0\}=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$， $P\{X_i=1\}=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$，

$$i=1,2,\cdots,10.$$

由此 $E(X_i)=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$， $i=1,2,\cdots,10.$

得

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1+X_2+\cdots+X_{10}) \\ &= E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10}) \\ &= 10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right] = 8.784(\text{次}). \end{aligned}$$

随机变量函数的数学期望

1. 离散型随机变量函数的数学期望

设随机变量 X 的分布律为

$X = x_k$	-1	0	1	2
$P\{X=x_k\}=p_k$	p_1	p_2	p_3	p_4

若 $Y = g(X) = X^2$,求 $E(Y)$.

解 先求 $Y = X^2$ 的分布律

$Y = X^2$	0	1	4
p	p_2	$p_1 + p_3$	p_4

则有 $E(Y)=E(g(X))=E(X^2)$

$$=0\cdot p_2+1\cdot(p_1+p_2)+4\cdot p_4$$

$$=0\cdot p_2+(-1)^2\cdot p_1+1^2\cdot p_2+2^2\cdot p_4$$

$$=\sum_{k=1}^{4}g(x_k)P\{X=x_k\}.$$

因此离散型随机变量函数的数学期望为

若 $Y=g(X)$, 且 $P\{X=x_k\}=p_k$, $k=1,2,\cdots,$

则有 $$E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k.$$

2. 连续型随机变量函数的数学期望

若 X 是连续型的, 它的概率密度为$f(x)$, 则

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d} x.$$

3. 二维随机变量函数的数学期望

(1) 设 X, Y 为离散型随机变量, $g(x, y)$ 为二元函数,

则 $$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}.$$

其中(X,Y)的概率密度为 p_{ij}.

(2) 设 X, Y 为连续型随机变量, $g(x, y)$ 为二元函数, 则

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

其中 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$.

实例1 设 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求 : $E(X), \quad E(Y), \quad E(Y/X), \quad E[(X-Y)^2]$.

解 X 的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X)=1\times0.4+2\times0.2+3\times0.4=2.$

Y 的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得 $E(Y)=-1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3=0.$

由于

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	(1,−1)	(1,0)	(1,1)	(2,−1)	(2,1)	(3,0)	(3,1)
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

于是

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=-1\times0.2+0\times0.1+1\times0.1-\frac{1}{2}\times0.1+\frac{1}{2}\times0.1+0\times0.3+\frac{1}{3}\times0.1$$

$$=-\frac{1}{15}.$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

得 $E[(X-Y)^2]=4\times0.3+1\times0.2+0\times0.1+9\times0.4$

$$=5.$$

实例2 某公司计划开发一种新产品市场，并试图确定该产品的产量．他们估计出售一件产品可获利 m 元，而积压一件产品导致 n 元的损失．再者，他们预测销售量 Y(件)服从指数分布其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-y/\theta}, & y>0, \\ 0, & y\le 0.\end{cases}\quad \theta>0,$$

问若要获得利润的数学期望最大，应生产多少件产品(m, n, θ 均为已知)?

解 设生产 x 件，则获利 Q 是 x 的函数：

$$Q = Q(x) = \begin{cases} mY - n(x - Y), & \text{若 } Y < x, \\ mx, & \text{若 } Y \ge x. \end{cases}$$

$$E(Q) = \int_0^{+\infty} Q f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int_0^{x} [my - n(x - y)] \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta}\,\mathrm{d}\,y + \int_x^{+\infty} mx \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-y/\theta}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= (m + n)\theta - (m + n)\theta \mathrm{e}^{-x/\theta} - nx,$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} E(Q) = (m + n)\mathrm{e}^{-x/\theta} - n = 0,$

得 $$x=-\theta\ln\left(\frac{n}{m+n}\right).$$

又 $$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}E(Q)=\frac{-(m+n)}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}<0,$$

因此,当$x=-\theta\ln\left(\frac{n}{m+n}\right)$时,

$E(Q)$ 取得最大值.

实例3 (卖报问题) 设某卖报人每日的潜在卖报数 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布. 如果每卖出一份报可得报酬 a, 卖不掉而退回则每份赔偿 b, 若某日报卖人买进 n 份报, 试求其期望所得. 进一步, 再求最佳的卖报份数.

解 若记其真正卖报数为 η, 则 η 与 ξ 的关系如下:

$$\eta = \begin{cases} \xi, & \xi < n \\ n, & \xi \geq n \end{cases},$$

则 η 的分布为

$$P\{\eta = k\} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, & k < n, \\ \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \dfrac{\lambda^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda}, & k = n. \end{cases}$$

记所得为ζ,则 ζ 与η的关系如下：

$$\zeta = g(\eta) = \begin{cases} a\eta - b(n-\eta), & \eta < n, \\ an, & \eta = n. \end{cases}$$

因此期望所得为

$$M(n) = E[g(\eta)]$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}[ka-(n-k)b]+\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right)na$$

$$=(a+b)\lambda\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}-n(a+b)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+na$$

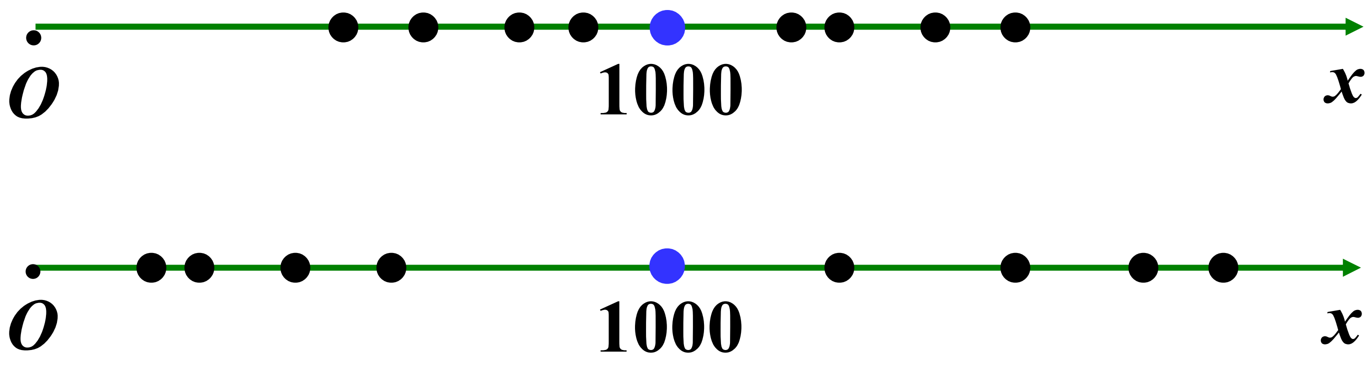
当a,b,λ给定后，求 n 使 $M(n)$ 达到极大.

随机变量的方差

1. 概念的引入

方差是一个常用来体现随机变量取值分散程度的量.

实例 有两批灯泡, 其平均寿命都是 $E(X)=1000$时.



2. 方差的定义

设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差，记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$，即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差，记为 $\sigma(X)$.

3. 方差的意义

方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大, 表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 作为随机变量的代表性好.

4. 随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为X的概率密度.

(2) 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证明

$$\begin{aligned}D(X)&=E\{[X-E(X)]^2\}\\&=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2\\&=E(X^2)-E^2(X).\end{aligned}$$

方差的性质

(1) 设 C 是常数，则有 $D(C)=0.$

证明 $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2$

$$=C^2-C^2=0.$$

(2) 设 X 是一个随机变量，C 是常数，则有

$$D(CX)=C^2D(X).$$

证明 $D(CX)=E\{[CX-E(CX)]^2\}$

$$=C^2E\{[X-E(X)]^2\}$$

$$=C^2D(X).$$

(3) 设 X, Y 相互独立，$D(X), D(Y)$ 存在，则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

证明

$$\begin{aligned} D(X \pm Y) &= E\{[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2\} \\ &= E\{[X - E(X)] \pm [Y - E(Y)]\}^2 \\ &= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 \\ &\quad \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= D(X) + D(Y). \end{aligned}$$

推广　若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则有

$$D(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n).$$

(4) $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C, 即

$$P\{X = C\} = 1.$$

常用分布的数学期望和方差

1. 两点分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X)=1\cdot p+0\cdot q=p,$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)-p^2$$

$$=pq.$$

2. 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n),$$

$$0<p<1.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p + (1-p)]^{n-1}$$

$$= np.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+ np$$

$$= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$

3. 泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\cdots, \quad \lambda > 0.$$

则有

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$= \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda.$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]$$

$$=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda$$

$$=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$.

泊松分布的期望和方差都等于参数 λ.

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \dfrac{1}{b-a}x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(a+b).$$

结论 均匀分布的数学期望位于区间的中点.

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} \mathrm{d}\,x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad \text{其中}\ \theta>0.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x$$

$$=-xe^{-x/\theta}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x=\theta.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x-\theta^2$$

$$=2\theta^2-\theta^2$$

$$=\theta^2.$$

指数分布的期望和方差分别为θ 和 θ^2.

6. 正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

则有 $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d} x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t \Rightarrow x = \mu + \sigma t,$

所以 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

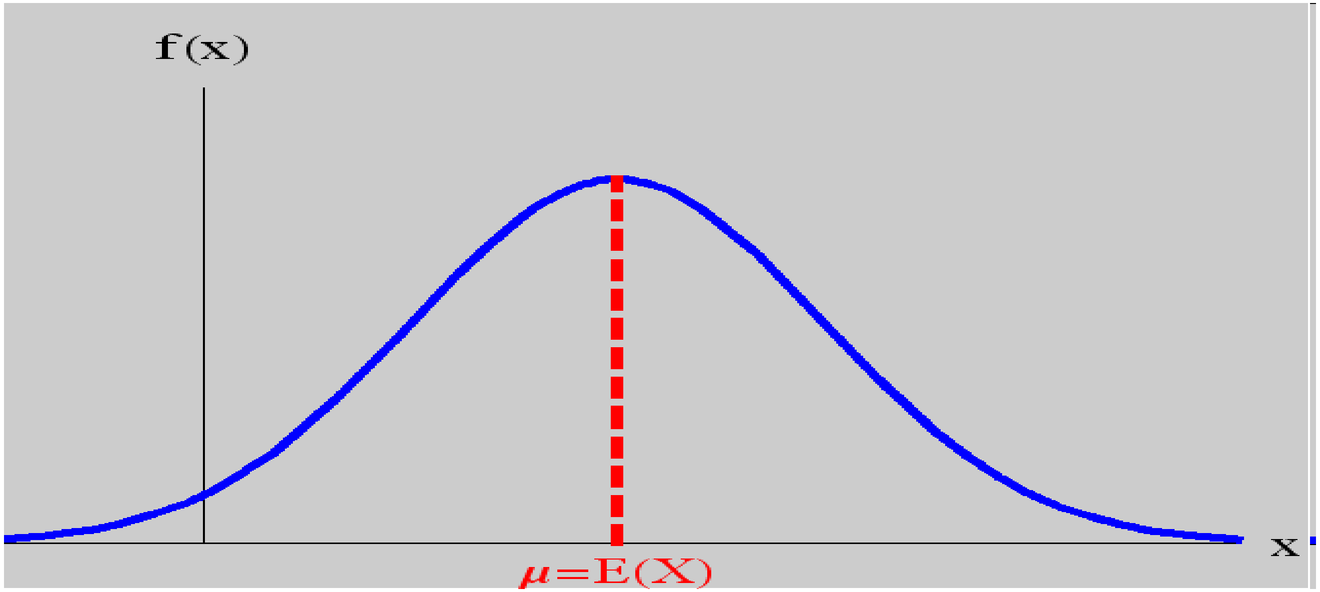
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$,得

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=0+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\sigma^2.$$

正态分布的期望和方差分别为两个参数 μ 和 σ^2.



分　　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0 < p < 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1,$ $0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda > 0$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta > 0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu, \sigma > 0$	μ	σ^2

例1　设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x<0,\\ 1-x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $D(X)$.

解　$E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,\mathrm{d}\,x+\int_{0}^{1}x(1-x)\,\mathrm{d}\,x=0,$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\,\mathrm{d}\,x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{6},$$

于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}.$$

例2 设活塞的直径(以cm计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, 气缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X, Y 相互独立. 任取一只活塞, 任取一只气缸, 求活塞能装入气缸的概率.

解 因为 $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$,

所以 $X - Y \sim N(-0.10, 0.0025)$,

故有 $P\{X < Y\} = P\{X - Y < 0\}$

$$= P\left\{\frac{(X-Y)-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}} < \frac{0-(-0.10)}{\sqrt{0.0025}}\right\}$$

$$= \Phi(2) = 0.9772.$$

例3 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2$ 的方差 $D(Y)$.

解 $$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-2,$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^4\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24,$$

因为 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$,

所以 $D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2$

$$=\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24-\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)^2$$

$$=20-2\pi^2.$$

例4 设 $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$，求 $D(2X^3+5)$.

解 $$D(2X^3+5) = D(2X^3) + D(5)$$

$$= 4D(X^3)$$

$$= 4[E(X^6) - (E(X^3))^2]$$

$$E(X^6) = (-2)^6 \times \frac{1}{3} + 0^6 \times \frac{1}{2} + 1^6 \times \frac{1}{12} + 3^6 \times \frac{1}{12}$$

$$= \frac{493}{6},$$

$$[E(X^3)]^2 = \left[(-2)^3 \times \frac{1}{3} + 0^3 \times \frac{1}{2} + 1^3 \times \frac{1}{12} + 3^3 \times \frac{1}{12}\right]^2$$

$$= \frac{1}{9},$$

故 $D(2X^3 + 5) = 4[E(X^6) - (E(X^3))^2]$

$$= \frac{2954}{9}.$$

切比雪夫不等式

定理 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数 ε，不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立.

切比雪夫不等式

证明 取连续型随机变量的情况来证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$，则有

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} = \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} f(x) \mathrm{d} x$$

$$\leq \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} \frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2} f(x) \mathrm{d} x$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) \mathrm{d} x$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^2.$$

得 $$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

协方差及相关系数及其性质

一、协方差与相关系数的概念及性质

二、相关系数的意义

一、协方差与相关系数的概念及性质

1. 问题的提出

若随机变量 X 和 Y 相互独立,那么

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

若随机变量 X 和 Y 不相互独立

$$D(X+Y)=?$$

$$D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2$$

$$=D(X)+D(Y)+2\boxed{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}.$$

协方差

2. 定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差. 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

而

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$$

称为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

3. 说明

(1) X 和 Y 的相关系数又称为标准 协方差,它是一个无量纲的量.

(2) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$
$$= E[X - E(X)]E[Y - E(Y)]$$
$$= 0.$$

(3) 若随机变量 X 和 Y 相互独立

$$\Rightarrow D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$
$$+ 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$
$$= D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) = D(X) + D(Y).$$

4. 协方差的计算公式

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$;

(2) $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

证明 (1) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$

$$= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y).$$

$$(2) D(X+Y) = E\{[(X+Y) - E(X+Y)]^2\}$$

$$= E\{[(X - E(X)) + (Y - E(Y)]^2\}$$

$$= E\{[X - E(X)]^2\} + E\{[Y - E(Y)]^2\}$$

$$+ 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

$$= D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

5. 性质

$$(1)\ \mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X);$$

$$(2)\ \mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y),\quad a,b\ \text{为常数};$$

$$(3)\ \mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y).$$

例1 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 试求 X 与 Y 的相关系数.

解 由 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\ -\infty<y<+\infty.$$

$$\Rightarrow E(X)=\mu_1,\ E(Y)=\mu_2,\ D(X)=\sigma_1^2,\ D(Y)=\sigma_2^2.$$

而

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),\quad u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1},$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi},$$

故有$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$.

于是 $$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho.$$

结论

(1) 二维正态分布密度函数中,参数 ρ 代表了 X 与 Y 的相关系数;

(2) 二维正态随机变量 X 与 Y 相关系数为零等价于 X 与 Y 相互独立.

例2 已知随机变量 X, Y 分别服从 $N(1,3^2)$, $N(0,4^2)$, $\rho_{XY} = -1/2$, 设 $Z = X/3 + Y/2$.

(1) 求 Z 的数学期望和方差.

(2) 求 X 与 Z 的相关系数.

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立?为什么?

解 (1)由$E(X) = 1$, $D(X) = 9$, $E(Y) = 0$, $D(Y) = 16$.

得 $$E(Z) = E\left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y)$$

$$= \frac{1}{3}.$$

$$D(Z) = D\left(\frac{X}{3}\right) + D\left(\frac{Y}{2}\right) + 2\,\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$= 1 + 4 - 2 = 3.$$

(2) $\operatorname{Cov}(X,Z)=\operatorname{Cov}\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\operatorname{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=3-3=0.$$

故 $\rho_{XY}=\operatorname{Cov}(X,Z)\big/(\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)})=0.$

(3) 由二维正态随机变量相关系数为零和相互独立两者是等价的结论，可知：X 与 Z 是相互独立的.

二、相关系数的意义

1. 问题的提出

问 a, b 应如何选择，可使 $aX+b$ 最接近 Y?

接近的程度又应如何来衡量?

设 $e = E[(Y-(a+bX))^2]$

则 e 可用来衡量 $a+bX$ 近似表达 Y 的好坏程度.

当 e 的值越小,表示 $a+bX$ 与 Y 的近似程度越好.

确定 a,b 的值,使 e 达到最小.

$$
\begin{aligned}
e &= E[(Y-(a+bX))^2] \\
&= E(Y^2)+b^2E(X^2)+a^2-2bE(XY)+2abE(X) \\
&\quad -2aE(Y).
\end{aligned}
$$

将 e 分别关于 a,b 求偏导数,并令它们等于零,得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial e}{\partial a}=2a+2bE(X)-2E(Y)=0, \\
\dfrac{\partial e}{\partial b}=2bE(X^2)-2E(XY)+2aE(X)=0.
\end{cases}
$$

解得 $b_0=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$, $a_0=E(Y)-E(X)\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{D(X)}$.

将 a_0, b_0 代入 $e = E[(Y-(a+bX))^2]$ 中,得

$$\min_{a,b} e = E[(Y-(a+bX))^2]$$

$$= E[(Y-(a_0+b_0X))^2]$$

$$= (1-\rho_{XY}^2)D(Y).$$

2. 相关系数的意义

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时 e 较小, 表明 X, Y 的线性关系联系较紧密.

当 $|\rho_{XY}|$ 较小时,X,Y 线性相关的程度较差.

当 $\rho_{XY} = 0$ 时,称 X 和 Y 不相关.

例3 设 θ 服从 $[0,2\pi]$ 的均匀分布，$\xi=\cos\theta$, $\eta=\cos(\theta+a)$，这里 a 是常数，求 ξ 和 η 的相关系数？

解 $$E(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=0,$$

$$E(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x+a)\,\mathrm{d}x=0,$$

$$E(\xi^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$E(\eta^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x+a)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$E(\xi\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\cos(x+a)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos a,$$

由以上数据可得相关系 数为 $\rho=\cos a.$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}a=0\text{时},\rho=1,\xi=\eta,\\ \text{当}a=\pi\text{时},\rho=-1,\xi=-\eta,\end{array}\right\}\text{存在线性关系.}$$

当 $a=\frac{\pi}{2}$或$a=\frac{3\pi}{2}$时,$\rho=0$, ξ与η不相关.

但 $\xi^2+\eta^2=1$, 因此 ξ与η不独立.

3. 注意

（1）不相关与相互独立的关系

相互独立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 不相关

（2）不相关的充要条件

1° $\quad X, Y$ 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0;$

2° $\quad X, Y$ 不相关 $\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0;$

3° $\quad X, Y$ 不相关 $\Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y).$

4. 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \le 1.$

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是：存在常数 a, b 使

$$P\{Y = a + bX\} = 1.$$

证明 (1) $\min\limits_{a,b} e = E[(Y-(a+bX))^2]$

$$= (1-\rho_{XY}^2)D(Y) \ge 0$$

$$\Rightarrow 1-\rho_{XY}^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow |\rho_{XY}| \le 1.$$

(2) $|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是，存在常数 a,b 使

$$P\{Y=a+bX\}=1.$$

事实上，$|\rho_{XY}|=1 \Rightarrow E[(Y-(a_0+b_0X))^2]=0$

$$\Rightarrow 0=E[(Y-(a_0+b_0X))^2]$$

$$=D[Y-(a_0+b_0X)]+[E(Y-(a_0+b_0X))]^2$$

$$\Rightarrow D[Y-(a_0+b_0X)]=0,$$

$$E[Y-(a_0+b_0X)]=0.$$

由方差性质知

$P\{Y-(a_0+b_0X)=0\}=1$, 或 $P\{Y=a_0+b_0X\}=1.$

反之,若存在常数 a^*,b^* 使

$$P\{Y=a^*+b^*X\}=1 \Leftrightarrow P\{Y-(a^*+b^*X)=0\}=1,$$

$$\Rightarrow P\{[Y-(a^*+b^*X)]^2=0\}=1,$$

$$\Rightarrow E\{[Y-(a^*+b^*X)]^2\}=0.$$

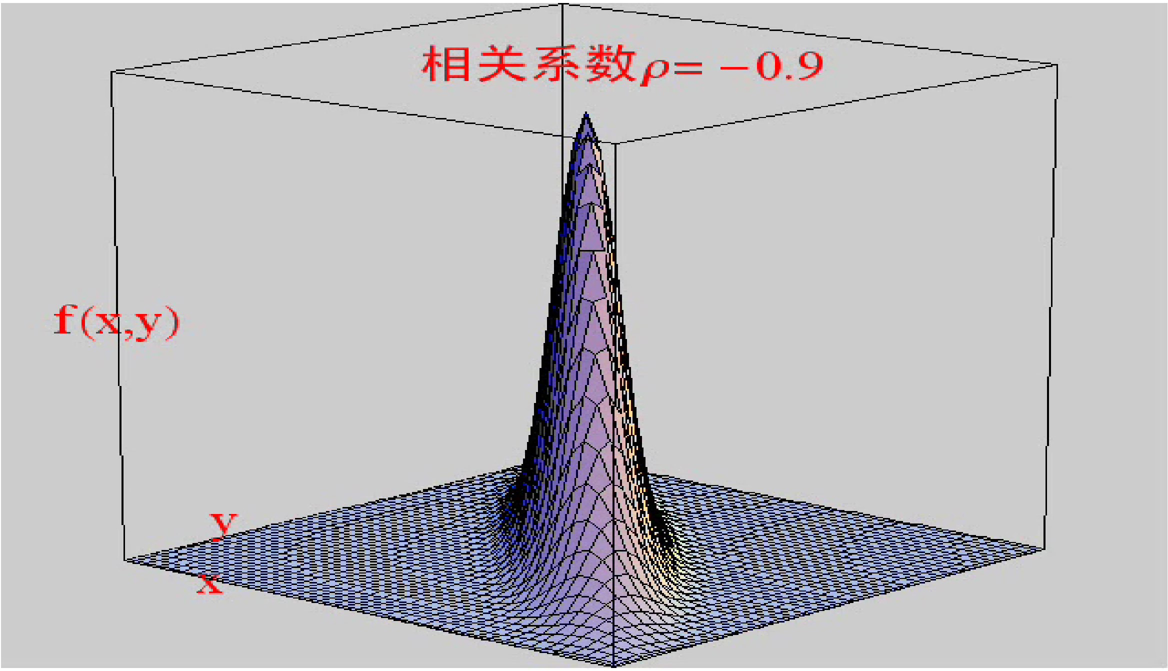
故有

$$0=E\{[Y-(a^*+b^*X)]^2\}\geq \min_{a,b} E[(Y-(a+bX))^2]$$

$$=E\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\}=(1-\rho_{XY}^2)D(Y)$$

$$\Rightarrow |\rho_{XY}|=1.$$

二维正态随机变量 (X,Y) 的概率密度曲面与相关系数 $\rho_{XY}=\rho$ 的关系.



矩、协方差矩阵

一、基本概念

二、n 维正态变量的性质

一、基本概念

1.定义

设 X 和 Y 是随机变量，若 $E(X^k),\quad k=1,2,\cdots$ 存在，称它为 X 的 k **阶原点矩**，简称 k **阶矩**.

若 $\quad E\{[X-E(X)]^k\},\quad k=2,3,\cdots$ 存在，称它为 X 的 k **阶中心矩**.

若 $\quad E(X^kY^l),\quad k,l=1,2,\cdots$ 存在，称它为 X 和 Y 的 $k+l$ **阶混合矩**.

若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\},k,l=1,2,\cdots$ 存在，称它为 X 和 Y 的 $k+l$ **阶混合中心矩**.

2. 说明

(1) 以上数字特征都是随机变量函数的数学期望;

(2) 随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩, 方差为二阶中心矩, 协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$是 X 与 Y 的二阶混合中心矩;

(3) 在实际应用中,高于 4 阶的矩很少使用.

三阶中心矩$E\{[X-E(X)]^3\}$主要用来衡量随机变量的分布是否有偏.

四阶中心矩$E\{[X-E(X)]^4\}$主要用来衡量随机变量的分布在均值附近的陡峭程度如何.

3. 协方差矩阵

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n$$

都存在，则称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量的**协方差矩阵**.

例如　二维随机变量 (X_1, X_2) 的协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

其中　$c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\},$

$$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\},$$

$$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\},$$

$$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\}.$$

由于 $c_{ij} = c_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，所以协方差矩阵为对称的非负定矩阵．

以二维随机变量 (X_1, X_2) 为例.

由于

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}.$$

引入矩阵 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$

及 (X_1, X_2) 的协方差矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

由此可得

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

由于

$$
\begin{aligned}
&(X-\mu)^{\mathrm{T}} C^{-1}(X-\mu) \\
&=\frac{1}{\det C}(x_1-\mu_1, x_2-\mu_2)\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} \\
&=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right].
\end{aligned}
$$

于是 (X_1, X_2) 的概率密度可写成

$$f(x_1, x_2)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^{\mathrm{T}} C^{-1} (X-\mu)\right\}.$$

推广

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度可表示为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^{\mathrm{T}} C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

其中 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

二、n 维正态变量的性质

1. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的每一个分量 X_i，$i = 1, 2, \cdots, n$ 都是正态变量；

反之，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态变量，且相互独立，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态变量.

2. n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意的线性组合 $l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n$ 服从一维正态分布（其中 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 不全为零）.

3. 若 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布，设 $Y_1, \cdots, Y_k$ 是 $X_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 的线性函数，则 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$ 也服从多维正态分布． 线性变换不变性

4. 设 $(X_1, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布，则"$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立"与"$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关"是等价的．