北京化工大学 2019——2020 学年第 2 学期

《线性代数 B》期末考试试卷

课程代码	M	A	T	1	1	4	0	1	T

开卷☑； 共 9 道题； 试题总分： 100 ；答题时间： 2 小时

答题要求

1. 参加考试的学生需按照答题模板要求提前准备好答题纸，特别注意姓名、学号、班级、答卷共几页第几页（没有标注，发生丢失页，学生自己负责）。
2. 答题时不必抄题，但须写清题号，每一页至多写一道题的答案。使用签字笔或圆珠笔作答，答卷独立完成，每题须写出解答主要步骤，无步骤直接写答案不给分。答卷字迹工整清晰，答卷拍照清晰。
3. 提交的答卷转为一个 PDF 上传，文件名格式：**班级-学号-姓名-线性代数 B 试卷。**
4. 按照考试要求独立完成考试。雷同试卷视为无效答卷，成绩为零。

1.（12 分） 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 27 \end{pmatrix}$，且满足

$\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 2\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

2.（12 分）设 4 阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}$，其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子

式（$i, j = 1,2,3,4$），求 $a_1A_{41} + a_2A_{42} + a_3A_{43} + xA_{44}$.

3.（12 分） 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a, 2, 10)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (-2, 1, 5)^T, \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, 1, 4)^T, \boldsymbol{\beta} = (1, b, c)^T$.

试问当 a, b, c 满足什么条件时，

（1） $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示式唯一？

（2） $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示式不唯一？此时，求出其线性表示式.

（3） $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

4.（12 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+s & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2+s & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3+s & 3\\ 4 & 4 & 4 & 4+s\end{pmatrix}$.

（1）讨论 s 取何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关？

（2）在（1）的情形下，求 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

5.（12 分）设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=-3\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-3\boldsymbol{\alpha}_3$.

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

（1）判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化？为什么？

（2）求方阵 $\boldsymbol{A}^{2020}$.

6.（12 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵，各行的元素之和均为 2，向量

$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

（1）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

7.（12 分）设有二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}+x_3^{\ 2}-4x_1x_3+4x_2x_3$.

（1）求出二次型对应矩阵的特征值与特征向量.

（2）求一个正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，将二次型 f 化为标准形.

8.（12 分）

（1）设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，如果 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解，证明：$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}$.

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$，且 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a\neq 0$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

9.（4 分）某宿舍甲、乙、丙、丁四位同学每天把早、中、晚三餐的餐费花销记录在一张表中．假设表 1 记录了这四位同学在某个星期一的餐费情况：

表 1　星期一餐费花销表

餐 / 人	早	中	晚
甲	2	6	8
乙	2	7	7
丙	2	8	6
丁	3	8	9

如果这四位同学星期一的早餐餐费提高 $a\%$，午餐餐费提高 $b\%$，晚餐餐费提高 $c\%$，请用矩阵乘法描述星期一全天每人每餐的餐费花销.