切比雪夫不等式

定理 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$, 则对于任意正数 ε, 不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立.

切比雪夫不等式

证明 取连续型随机变量的情况来证明.

设 X 的概率密度为 $f(x)$, 则有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^2.$$

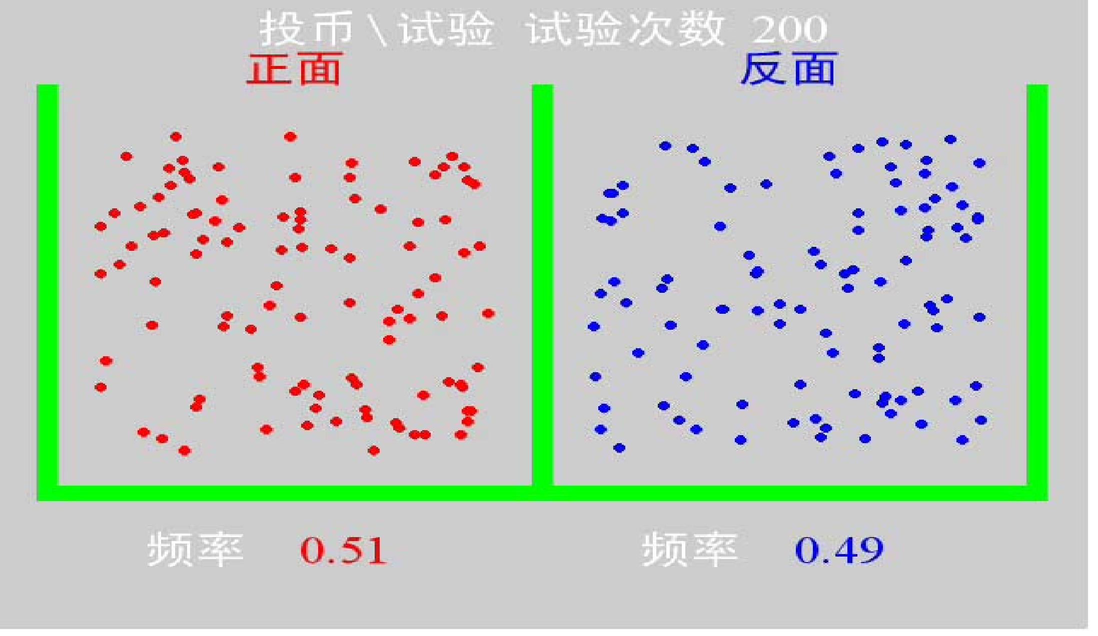
得 $$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

切比雪夫大数定律（特殊情况）

实例　频率的稳定性

随着试验次数的增加，事件发生的频率逐渐稳定于某个常数.



启示:从实践中人们发现大量测量值的算术平均值有稳定性.

定理（切比雪夫定理的特殊情况）

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 且具有相同的数学期望和方差：$E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 作前 n 个随机变量的算术平均

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$ 则对于任意正数 ε 有

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\{|\overline{X} - \mu| < \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.}$$

证明 $$E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu,$$

$$D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n},$$

由切比雪夫不等式可得

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n},$$

在上式中令 $n\to\infty$，并注意到概率不能大于1，则

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

关于定理的说明:

当 n 很大时,随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的算术平均

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 接近于数学期望

$$E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_k) = \mu,$$

（这个接近是概率意义下的接近）

即在定理条件下，n 个随机变量的算术平均，当n无限增加时，几乎变成一个常数.

定理的另一种叙述:

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 且具有相同的数学期望和方 差: $E(X_k)=\mu,\ D(X_k)=\sigma^2$ $(k=1,2,\cdots)$, 则序列 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 依概率收敛于 μ,

即 $\overline{X}\xrightarrow{P}\mu$.

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是一个随机变量序列 , a 是一个常数 , 若对于任意正数 ε 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n-a|<\varepsilon\}=1$, 则称序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 依概率收敛于 a , 记为

$$Y_n \xrightarrow{P} a$$

依概率收敛序列的性质:

设 $X_n \xrightarrow{P} a, \quad Y_n \xrightarrow{P} b,$

又设函数 $g(x,y)$ 在点 (a,b) 连续,

则 $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b).$

证明 因为 $g(x,y)$ 在 (a,b) 连续,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0,$$

使得当 $|x-a| + |y-b| < \delta$ 时,

$$|g(x,y) - g(a,b)| < \varepsilon,$$

于是 $\{|g(X_n, Y_n) - g(a,b)| \geq \varepsilon\}$

$$\subset \{|X_n - a| + |Y_n - b| \geq \delta\}$$

$$\subset \left\{|X_n - a| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \cup \left\{|Y_n - b| \geq \frac{\delta}{2}\right\},$$

因此 $P\{|g(X_n, Y_n) - g(a,b)| \geq \varepsilon\}$

$$\leq P\left\{|X_n - a| \geq \frac{\delta}{2}\right\} + P\left\{|Y_n - b| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|g(X_n, Y_n) - g(a,b)| < \varepsilon\} = 1.$ [证毕]

例1 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，具有如下分布律：

X_n	$-na$	0	na
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

问是否满足切比雪夫定理？

解 独立性依题意可知，检验是否具有数学期望？

$$E(X_n) = -na^2 \cdot \frac{1}{2n^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + na^2 \cdot \frac{1}{2n^2}$$

$$= 0,$$

说明每一个随机变量都有数学期望,

检验是否具有有限方差?

因为

X_n^2	$(na)^2$	0	$(na)^2$
P	$\dfrac{1}{2n^2}$	$1-\dfrac{1}{n^2}$	$\dfrac{1}{2n^2}$

所以 $E(X_n^2) = 2(na)^2 \cdot \dfrac{1}{2n^2} = a^2,$

所以 $D(X_n) = E(X_n^2) - [E(X_n)]^2 = a^2.$

说明离散型随机变量有有限方差,

故满足切比雪夫定理的条件.

伯努利大数定律

定理（伯努利大数定理）

设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, p 是事件 A 在每次试验中发生的概率, 则对于任意正数 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

证明 引入随机变量

$$X_k = \begin{cases} 0, & \text{若在第}k\text{次试验中}A\text{不发生,} \\ 1, & \text{若在第}k\text{次试验中}A\text{发生,}\ k = 1,2,\cdots. \end{cases}$$

显然 $n_A = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$,

因为$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$是相互独立的,

且X_k服从以p为参数的$(0-1)$分布,

所以$E(X_k) = p, \quad D(X_k) = p(1-p), \quad k = 1, 2, \cdots.$

根据定理一有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - p\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

即 $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

关于伯努利定理的说明:

伯努利定理表明事件发生的频率 $\frac{n_A}{n}$ 依概率收敛于事件的概率 p, 它以严格的数学形式表达了频率的稳定性.

故而当 n 很大时，事件发生的频率与概率有较大偏差的可能性很小．在实际应用中，当试验次数很大时，便可以用事件发生的频率来代替事件的概率.

辛钦大数定律

定理（辛钦定理）

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望 $E(X_k) = \mu \ (k = 1, 2, \cdots)$, 则对于任意正数 ε, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

关于辛钦定理的说明:

（1）与定理一相比，不要求方差存在;

（2）伯努利定理是辛钦定理的特殊情况.

例1 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，且 $E(X_k)=0, D(X_k)=\sigma^2, k=1,2,\cdots$，证明对任意正数 ε 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k{}^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

解 因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立的，

所以 $X_1{}^2, X_2{}^2, \cdots, X_n{}^2, \cdots$ 也是相互独立的，

由 $E(X_k)=0$，得 $E(X_k{}^2) = D(X_k) + [E(X_k)]^2 = \sigma^2$，

由辛钦定理知

对于任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k{}^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

中心极限定理

一、基本定理

二、典型例题

一、基本定理

定理一（独立同分布的中心极限定理）

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望和方差：$E(X_k) = \mu$, $D(X_k) = \sigma^2 > 0\ (k = 1, 2, \cdots)$, 则随机变量之和的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le x \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x).$$

定理一表明:

当 $n\to\infty$, 随机变量序列 Y_n 的分布函数收敛于标准正态分布的分布函数.

定理二(李雅普诺夫定理)

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立, 它们具有数学期望和方差:

$$E(X_k) = \mu_k, \quad D(X_k) = \sigma_k^2 \neq 0 \ (k = 1, 2, \cdots),$$

记

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2,$$

若存在正数 δ, 使得当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \to 0,$$

则随机变量之和的标准化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{B_n}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{B_n} \le x\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x).$$

定理二表明:

无论各个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$服从什么分布,只要满足定理的条件,那么它们的和 $\sum_{k=1}^{n} X_k$ 当 n 很大时,近似地服从正态分布.

定理三(德莫佛－拉普拉斯中心极限定理)

设随机变量 $\eta_n\ (n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 n, p $(0<p<1)$的二项分布, 则对于任意 x, 恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x).$$

证明 已知 $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$,

其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的、服从同一(0—1)分布的随机变量, 分布律为

$$P\{X_k = i\} = p^i(1-p)^{1-i}, \qquad i = 0, 1.$$

因为 $E(X_k)=p,\ D(X_k)=p(1-p)\quad (k=1,2,\cdots,n)$,

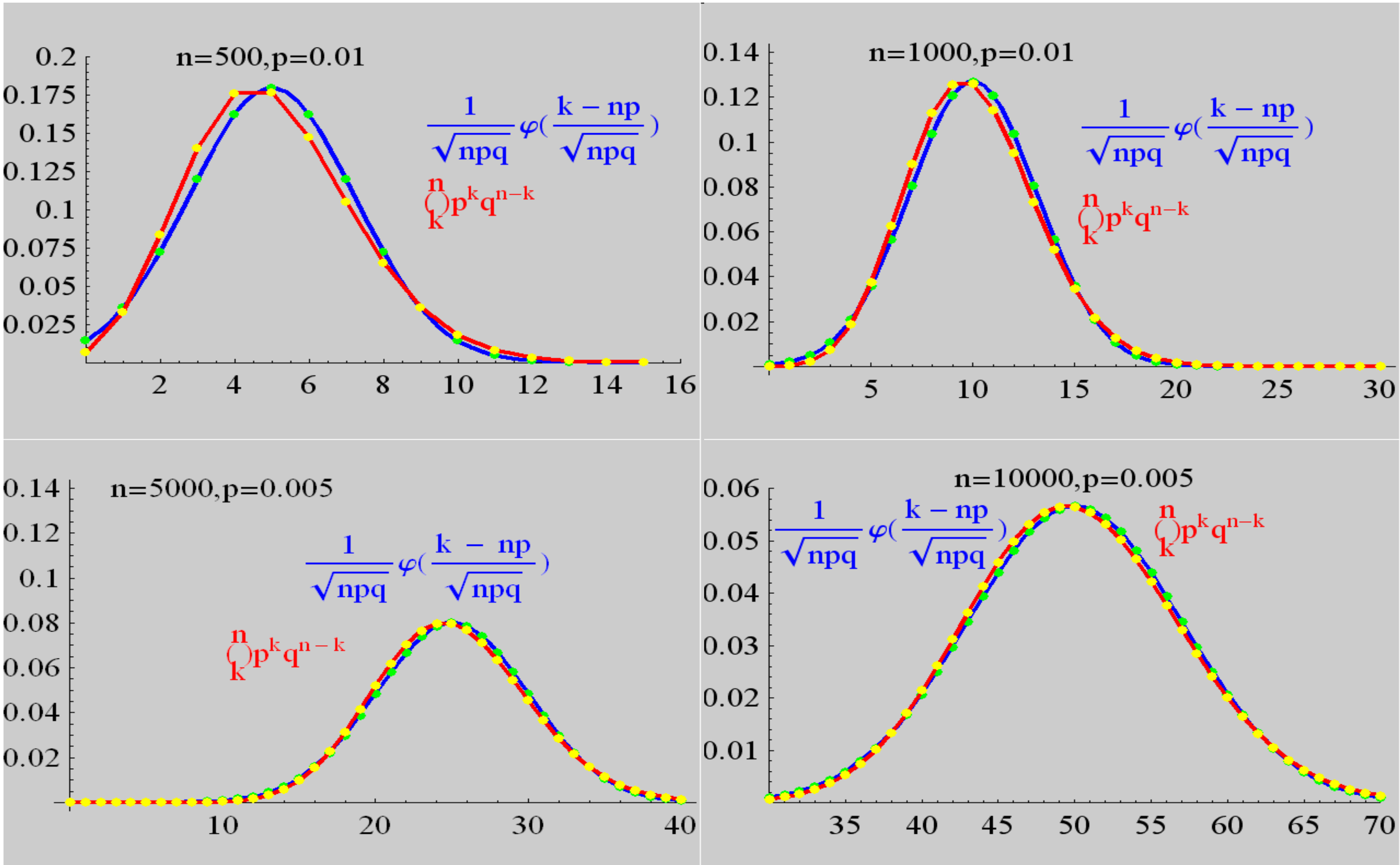
根据定理四得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x).$$

定理三表明:正态分布是二项分布的极限分布，当n充分大时，可以利用该定理来计算二项分布的概率.

下面的图形表明:正态分布是二项分布的逼近.



二、典型例题

例1 一加法器同时收到 20 个噪声电压 V_k $(k = 1,2,\cdots 20)$, 设它们是相互独立的随机变量, 且都在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布, 记 $V = \sum_{k=1}^{20} V_k$, 求 $P\{V > 105\}$ 的近似值.

解 因为 $E(V_k) = 5$，$D(V_k) = \dfrac{100}{12}$ $(k = 1, 2,\cdots,20)$.

由定理四，随机变量 Z 近似服从正态分布 $N(0,1)$,

其中 $$Z=\frac{\sum_{k=1}^{20}V_k-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}=\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}$$

$$P\{V>105\}=P\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>\frac{105-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\}$$

$$=P\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}>0.387\}=1-P\{\frac{V-100}{\sqrt{\frac{100}{12}}\sqrt{20}}\le 0.387\}$$

$$\approx 1-\int_{-\infty}^{0.387}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1-\Phi(0.387)=0.348.$$

例2 一船舶在某海区航行，已知每遭受一次海浪的冲击，纵摇角大于 3° 的概率为1/3，若船舶遭受了90 000次波浪冲击，问其中有29 500～30 500次纵摇角大于 3° 的概率是多少？

解 将船舶每遭受一次海浪的冲击看作一次试验，并假设各次试验是独立的，在90 000次波浪冲击中纵摇角大于 3° 的次数为 X，

则 X 是一个随机变量，且 $X \sim b\left(90000, \frac{1}{3}\right)$.

分布律为 $P\{X=k\}=\binom{90000}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{90000-k}$,

$$k=1,\cdots,90000.$$

所求概率为

$$P\{29500<X\leq 30500\}=\sum_{k=29501}^{30500}\binom{90000}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{90000-k}.$$

直接计算很麻烦，利用德莫佛－拉普拉斯定理

$$P\{29500<X\leq 30500\}$$

$$=P\left\{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$\approx \int_{\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \Phi\left(\frac{30500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{29500-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

因为$n = 90000$， $p = \dfrac{1}{3}$,

所以$P\{29500 < X \le 30500\}$

$$\approx \Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 0.9995.$$

例3　某保险公司的老年人寿保险有1万人参加, 每人每年交200元. 若老人在该年内死亡, 公司付给家属1万元. 设老年人死亡率为0.017, 试求保险公司在一年内的这项保险中亏本的概率.

解　设 X 为一年中投保老人的死亡数,

则 $X \sim B(n, p)$,

其中 $n = 10000, \quad p = 0.017,$

由德莫佛一拉普拉斯定理知,

保险公司亏本的概率

$$P\{10000X > 10000 \times 200\} = P\{X > 200\}$$

$$= P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{200 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} > 2.321\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(2.321) \approx 0.01 .$$

例4 对于一个学生而言，来参加家长会的家长人数是一个随机变量. 设一个学生无家长、1名家长、2名家长来参加会议的概率分别为0.05，0.8，0.15. 若学校共有400名学生，设各学生参加会议的家长数相互独立，且服从同一分布.（1）求参加会议的家长数 X 超过450的概率；（2）求有1名家长来参加会议的学生数不多于340的概率.

解 (1) 以 X_k $(k=1,2,\cdots,400)$ 记第 k 个学生来参加会议的家长数，

则 X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0.05	0.8	0.15

易知 $E(X_k)=1.1,\ \ D(X_k)=0.19\quad (k=1,2,\cdots,400)$

而 $X=\sum_{k=1}^{400} X_k$，根据独立同分布的中心极限定理，

随机变量 $$\frac{\sum_{k=1}^{400} X_k-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}=\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$$

近似服从正态分布 $N(0,1)$,

$$P\{X>450\}=P\left\{\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}>\frac{450-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}\le 1.147\right\}\approx 1-\Phi(1.147)=0.1357;$$

(2) 以 Y 记有一名家长来参加会 议的学生数，

则 $Y \sim B(400, 0.8)$， 由德莫佛一拉普拉斯定理知，

$$P\{X \le 350\}$$

$$= P\left\{\frac{Y - 400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}} \le \frac{340 - 400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{Y - 400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}} \le 2.5\right\}$$

$$\approx \Phi(2.5) = 0.9938 .$$

例5 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 X_i 在区间 $(-1, 1)$ 上服从均匀分布 $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 试证当 n 充分大时, 随机变量 $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 近似服从正态分布, 并指出其分布参数.

证 记 $Y_i = X_i^2$, $(i = 1,2,\cdots,n)$

$$E(Y_i) = E(X_i^2) = D(X_i) = \frac{1}{3},$$

$$D(Y_i) = E(Y_i^2) - [E(Y_i)]^2$$

$$= E(X_i^4) - [E(Y_i)]^2.$$

因为 $E(X_i^4)=\int_{-1}^{1}x_i^4\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x_i=\frac{1}{5}$,

所以 $D(Y_i)=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{45}$,

因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,

所以 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立.

根据独立同分布的中心极限定理,

$$n\cdot Z_n=\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i$$

近似服从正态分布 $N\left(\frac{n}{3},\frac{4n}{45}\right)$,

故 Z 近似地服从正态分布 $N\left(\frac{1}{3},\frac{4}{45n}\right)$.