

随机变量的概念

一、随机变量的引入

二、随机变量的概念

一、随机变量的引入

1. 为什么引入随机变量？

概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，为了更方便有力的研究随机现象，就要用数学分析的方法来研究， 因此为了便于数学上的推导和计算，就需将任意的随机事件数量化。当把一些非数量表示的随机事件用数字来表示时， 就建立起了随机变量的概念。

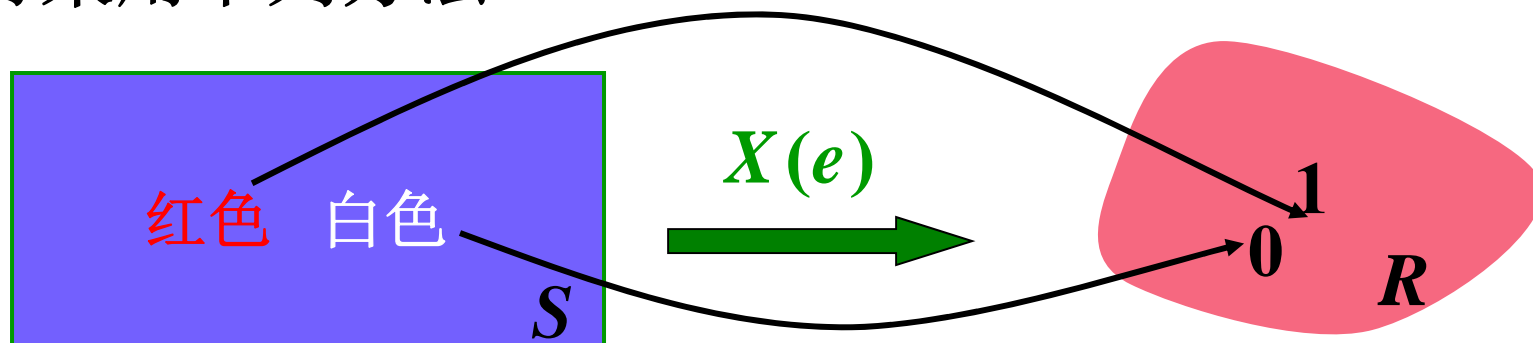
2. 随机变量的引入

实例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球，观察摸出球的颜色。

$S = \{\text{红色、白色}\}$ $\xrightarrow{?}$ 将 S 数量化

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{非数量}}$

可采用下列方法



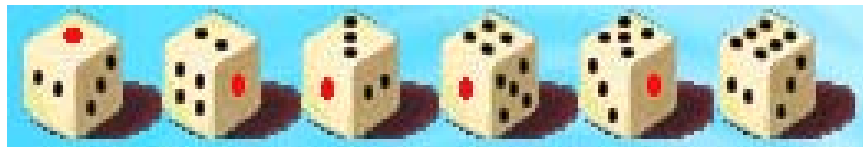
即有 $X(\text{红色})=1$, $X(\text{蓝色})=0$.

$$X(e) = \begin{cases} 1, & e = \text{红色}, \\ 0, & e = \text{白色}. \end{cases}$$

这样便将非数量的 $S=\{\text{红色}, \text{白色}\}$ 数量化了.

实例2 抛掷骰子, 观察出现的点数.

则有



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

样本点本身就是数量

$$X(e) = e \quad \downarrow \quad \text{恒等变换}$$

$$X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3, X(4) = 4, X(5) = 5, X(6) = 6,$$

且有

$$P\{X = i\} = \frac{1}{6} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

二、随机变量的概念

1.定义

设 E 是随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$. 如果对于每一个 $e \in S$, 有一个实数 $X(e)$ 与之对应, 这样就得到一个定义在 S 上的单值实值函数 $X(e)$, 称 $X(e)$ 为随机变量.

2.说明

(1) 随机变量与普通的函数不同

随机变量是一个函数，但它与普通的函数有着本质的差别，普通函数是定义在实数轴上的，而随机变量是定义在样本空间上的（样本空间的元素不一定是实数）。

(2) 随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值，由于试验的各个结果的出现具有一定的概率，因此随机变量的取值也有一定的概率规律。

(3)随机变量与随机事件的关系

随机事件包容在随机变量这个范围更广的概念之内. 或者说 : 随机事件是从静态的观点来研究随机现象, 而随机变量则是从动态的观点来研究随机现象.

实例3 掷一个硬币，观察出现的面，共有两个

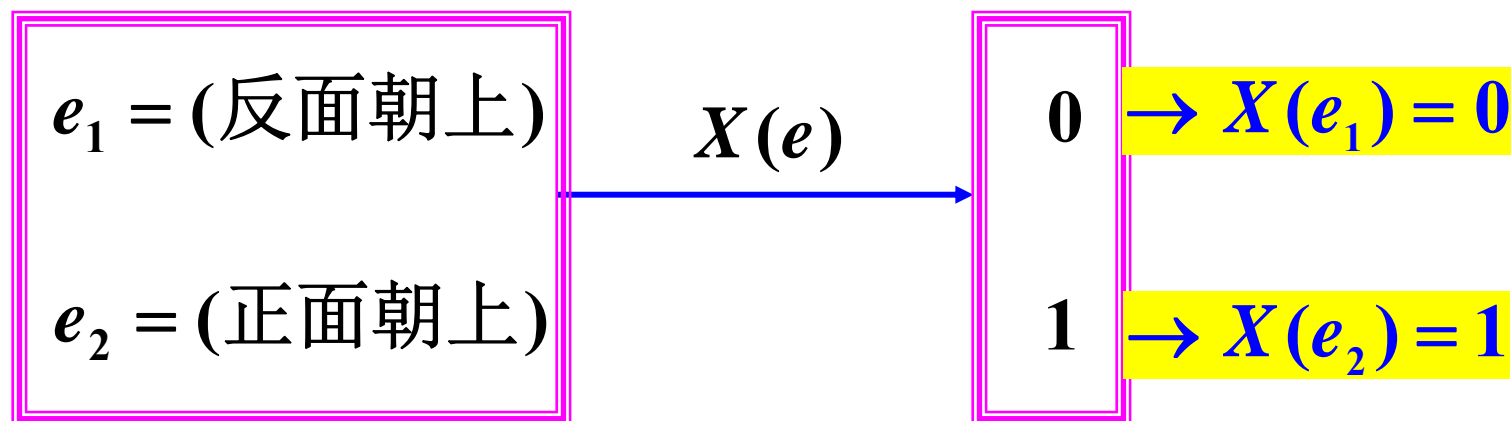
结果： $e_1 = (\text{反面朝上})$,



$e_2 = (\text{正面朝上})$,



若用 X 表示掷一个硬币出现正面的次数，则有



即 $X(e)$ 是一个随机变量.

实例4 在有两个孩子的家庭中, 考虑其性别, 共有 4 个样本点:

$$e_1 = (\text{男}, \text{男}), e_2 = (\text{男}, \text{女}), e_3 = (\text{女}, \text{男}), e_4 = (\text{女}, \text{女}).$$

若用 X 表示该家女孩子的个数时, 则有

$$X(e_1) = 0, \quad X(e_2) = 1, \quad X(e_3) = 1, \quad X(e_4) = 2,$$

可得随机变量 $X(e)$,

$$X(e) = \begin{cases} 0, & e = e_1, \\ 1, & e = e_2, e = e_3, \\ 2, & e = e_4. \end{cases}$$

实例5 设盒中有5个球 (2白3黑), 从中任抽3个, 则

$X(e)$ = 抽得的白球数,

是一个随机变量. 且 $X(e)$ 的所有可能取为:

0, 1, 2.

实例6 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次, 则

$X(e)$ = 射中目标的次数,

是一个随机变量. 且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

0, 1, 2, 3, ..., 30.

实例7 设某射手每次射击打中目标的概率是**0.8**,
现该射手不断向目标射击, 直到击中目标为止, 则

$X(e)$ = 所需射击次数,

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

1, 2, 3,

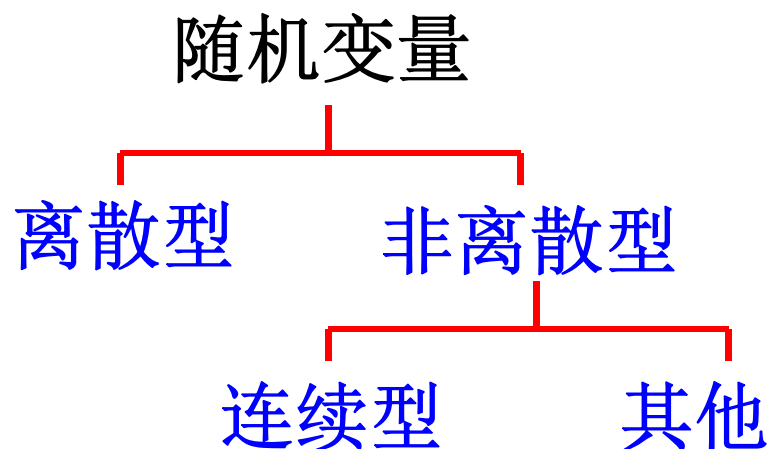
实例8 某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过, 如果某人到达该车站的时刻是随机的, 则

$X(e)$ = 此人的等车时间,

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为: $[0, 5]$.

3.随机变量的分类



(1)离散型 随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个，叫做离散型随机变量.

实例9 观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是 : **1, 2, 3, 4, 5, 6.**

实例10 若随机变量 X 记为 “连续射击, 直至命中时的射击次数”, 则 X 的可能值是:

1, 2, 3, ...

实例11 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次, 则随机变量 X 记为 “击中目标的次数”, 则 X 的所有可能取值为:

0, 1, 2, 3, ..., 30.

(2)连续型 随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

实例12 随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

实例13 随机变量 X 为“测量某零件尺寸时的测量误差”.

则 X 的取值范围为 (a, b) .

离散型随机变量及其分布律

一、离散型随机变量

二、常见离散型的分布律

一、离散型随机变量

定义 随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个，叫做离散型随机变量.

实例1 观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是 : **1, 2, 3, 4, 5, 6.**

实例2 若随机变量 X 记为 “**连续射击, 直至命中时的射击次数**”, 则 X 的可能值是:

1, 2, 3, ...

实例3 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8, 现该射手射了30次, 则随机变量 X 记为“击中目标的次数”,

则 X 的所有可能取值为:

0, 1, 2, 3, ..., 30.

二、离散型随机变量的分布律

定义 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k ($k = 1, 2, \dots$), X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X = x_k\}$ 的概率, 为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

称此为离散型随机变量 X 的分布律.

说明 (1) $p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots;$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

离散型随机变量的分布律也可表示为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

X	x_1	x_2	\cdots	x_n	\cdots
P_k	p_1	p_2	\cdots	p_n	\cdots

例1 设一汽车在开往目的地的道路上需经过四组信号灯, 每组信号灯以 $1/2$ 的概率允许或禁止汽车通过. 以 X 表示汽车首次停下时, 它已通过的信号灯的组数 (设各组信号灯的工作是相互独立的), 求 X 的分布律.

解 设 p 为每组信号灯禁止汽车通过的概率, 则有

X	0	1	2	3	4
P_k	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	$(1-p)^3 p$	$(1-p)^4$

将 $p = \frac{1}{2}$ 代入得

X	0	1	2	3	4
P_k	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625

常见离散型随机变量的概率分布

1. 两点分布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值, 它的分布律为

X	0	1
P_k	$1-p$	p

则称 X 服从**(0-1)分布**或**两点分布**.

实例1 “抛硬币” 试验, 观察正、反两面情况.

$$X = X(e) = \begin{cases} 0, & \text{当 } e = \text{正面}, \\ 1, & \text{当 } e = \text{反面}. \end{cases}$$

随机变量 X 服从 (0-1) 分布.

其分布律为

X	0	1
P_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

实例2 200件产品中, 有190 件合格品, 10 件不合格品, 现从中随机抽取一件, 那么, 若规定

$$X = \begin{cases} 1, & \text{取得不合格品,} \\ 0, & \text{取得合格品.} \end{cases}$$

X	0	1
P_k	$\frac{190}{200}$	$\frac{10}{200}$

则随机变量 X 服从(0-1)分布.

说明

两点分布是最简单的一种分布, 任何一个只有两种可能结果的随机现象, 比如新生婴儿是男还是女、明天是否下雨、种籽是否发芽等, 都属于两点分布.

3. 二项分布

(1) 重复独立试验

将试验 E 重复进行 n 次, 若各次试验的结果互不影响, 即每次试验结果出现的概率都不依赖于其它各次试验的结果, 则称这 n 次试验是相互独立的, 或称为 n 次重复独立试验.

(2) n 重伯努利试验

设试验 E 只有两个可能结果： A 及 \bar{A} , 则称 E 为伯努利试验.

设 $P(A) = p$ ($0 < p < 1$), 此时 $P(\bar{A}) = 1 - p$.

将 E 独立地重复地进行 n 次, 则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验.

实例3 抛一枚硬币观察得到正面或反面. 若将硬币抛 n 次, 就是 n 重伯努利试验.

实例4 抛一颗骰子 n 次, 观察是否 “出现 1 点”, 就是 n 重伯努利试验.

(3) 二项概率公式

若 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 则 X 所有可能取的值为

$$0, 1, 2, \dots, n.$$

当 $X = k$ ($0 \leq k \leq n$) 时,

即 A 在 n 次试验中发生了 k 次.

$$\underbrace{A A \cdots A}_{k \text{ 次}} \underbrace{\overline{A} \overline{A} \cdots \overline{A}}_{n-k \text{ 次}},$$
$$\underbrace{A A \cdots A}_{k-1 \text{ 次}} \overline{A} \underbrace{\overline{A} \overline{A} \cdots \overline{A}}_{n-k-1 \text{ 次}} \cdots \cdots$$

得 A 在 n 次试验中发生 k 次的方式共有 $\binom{n}{k}$ 种,
且两两互不相容.

因此 A 在 n 次试验中发生 k 次的概率为

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{\text{记 } q = 1-p} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

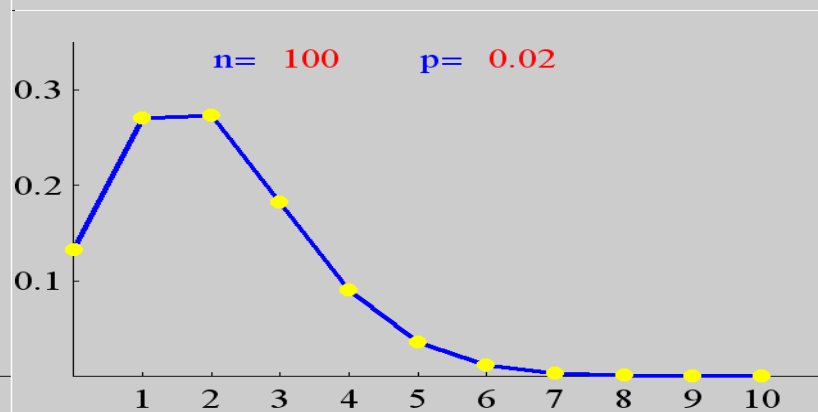
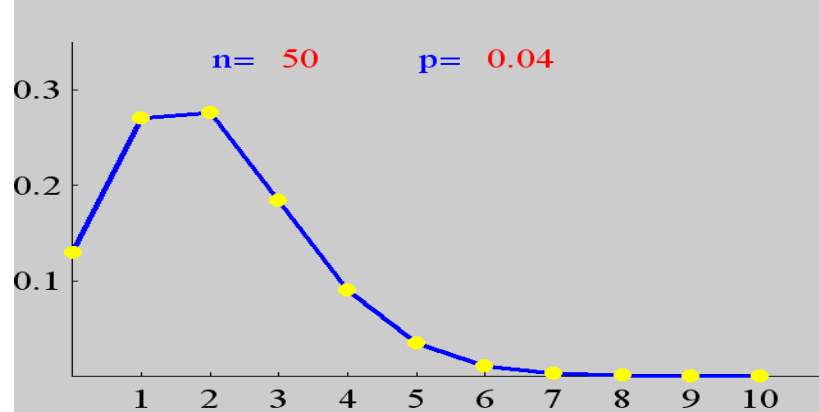
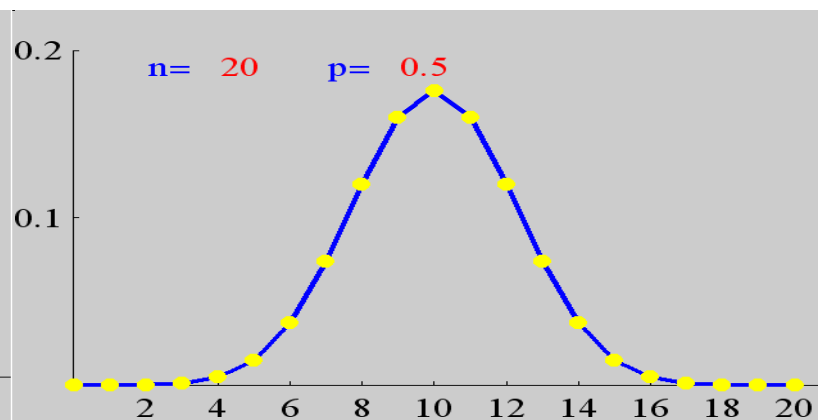
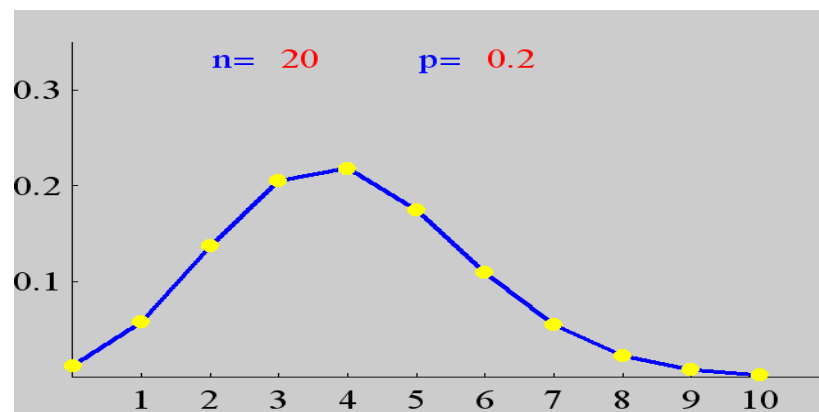
得 X 的分布律为

X	0	1	...	k	...	n
p_k	q^n	$\binom{n}{1} p q^{n-1}$...	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$...	p^n

称这样的分布为二项分布. 记为 $X \sim B(n, p)$.

二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ 两点分布

二项分布的图形



例如 在相同条件下相互独立地进行 5 次射击, 每次射击时击中目标的概率为 0.6 ,则击中目标的次数 X 服从 $B(5,0.6)$ 的二项分布.

X	0	1	2	3	4	5
P_k	$(0.4)^5$	$\binom{5}{1} 0.6 \cdot 0.4^4$	$\binom{5}{2} 0.6^2 \cdot 0.4^3$	$\binom{5}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^2$	$\binom{5}{4} 0.6^4 \cdot 0.4$	0.6^5

例2 规定某种型号电子元件的使用寿命超过**1500**小时的为一级品.已知某一大批产品的一级品率为**0.2**,现在从中随机地抽查**20**只.问**20**只元件中恰有 **k** 只($k = 0, 1, \dots, 20$)一级品的概率是多少?

分析 这是不放回抽样.但由于这批元件的总数很大,且抽查元件的数量相对于元件的总数来说又很小,因而此抽样可近似当作放回抽样来处理.

把检查一只元件是否为一级品看成是一次试验,检查**20**只元件相当于做**20**重伯努利试验.

解 以 X 记 20 只元件中一级品的只数 ,

则 $X \sim B(20, 0.2)$, 因此所求概率为

$$P\{X = k\} = \binom{20}{k} (0.2)^k (0.8)^{20-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 20.$$

$$P\{X = 0\} = 0.012$$

$$P\{X = 4\} = 0.218$$

$$P\{X = 8\} = 0.022$$

$$P\{X = 1\} = 0.058$$

$$P\{X = 5\} = 0.175$$

$$P\{X = 9\} = 0.007$$

$$P\{X = 2\} = 0.137$$

$$P\{X = 6\} = 0.109$$

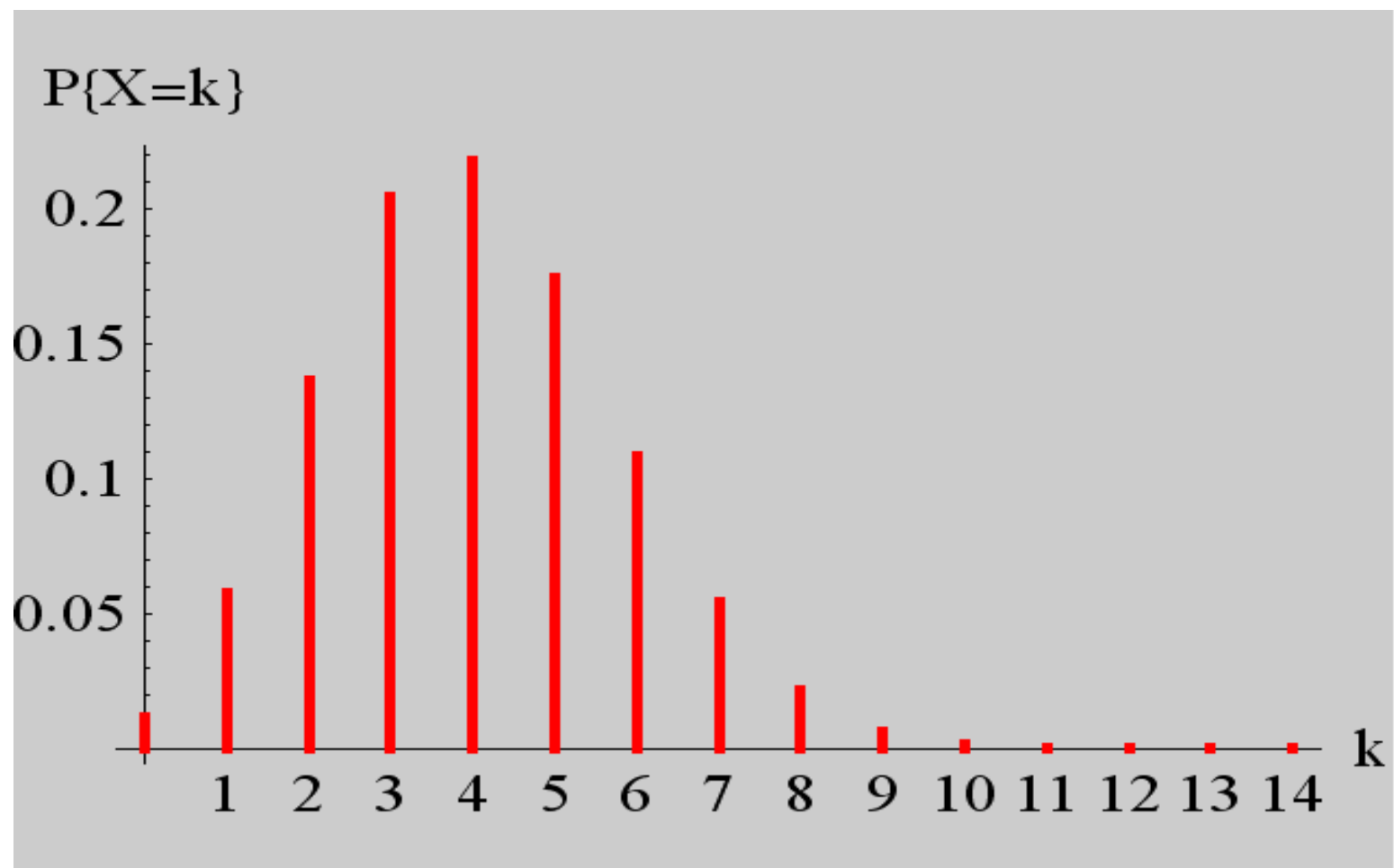
$$P\{X = 10\} = 0.002$$

$$P\{X = 3\} = 0.205$$

$$P\{X = 7\} = 0.055$$

$$P\{X = k\} < 0.001, \quad \text{当 } k \geq 11 \text{ 时}$$

图示概率分布



例3 某人进行射击,设每次射击的命中率为 **0.02**,独立射击 **400** 次,试求至少击中两次的概率.

解 设击中的次数为 X ,

则 $X \sim B(400, 0.02)$.

X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \binom{400}{k} (0.02)^k (0.98)^{400-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 400.$$

因此 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - (0.98)^{400} - 400(0.02)(0.98)^{399} = 0.9972.$$

例4 有一繁忙的汽车站, 每天有大量汽车通过, 设每辆汽车在一天的某段时间内, 出事故的概率为**0.0001**, 在每天的该段时间内有**1000** 辆汽车通过, 问出事故的次数不小于2的概率是多少?

解 设 1000 辆车通过, 出事故的次数为 X , 则

$$X \sim B(1000, 0.0001),$$

故所求概率为 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - 0.9999^{1000} - \binom{1000}{1} \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999}$$

二项分布 $\xrightarrow{np \rightarrow \lambda (n \rightarrow +\infty)}$ 泊松分布

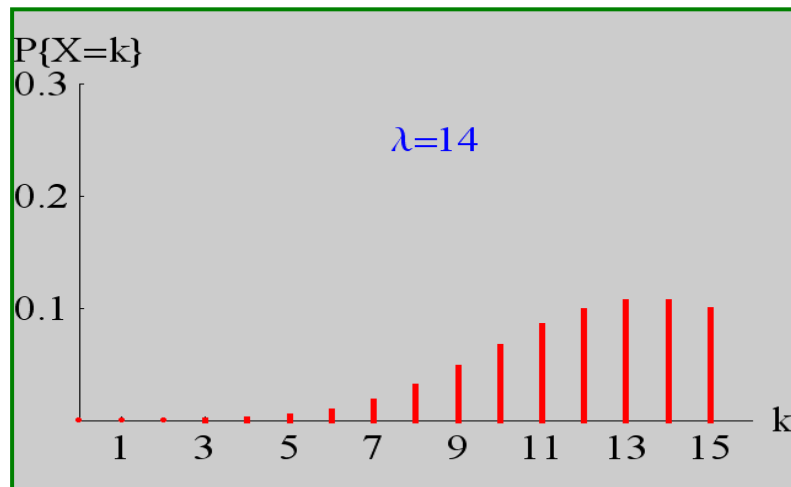
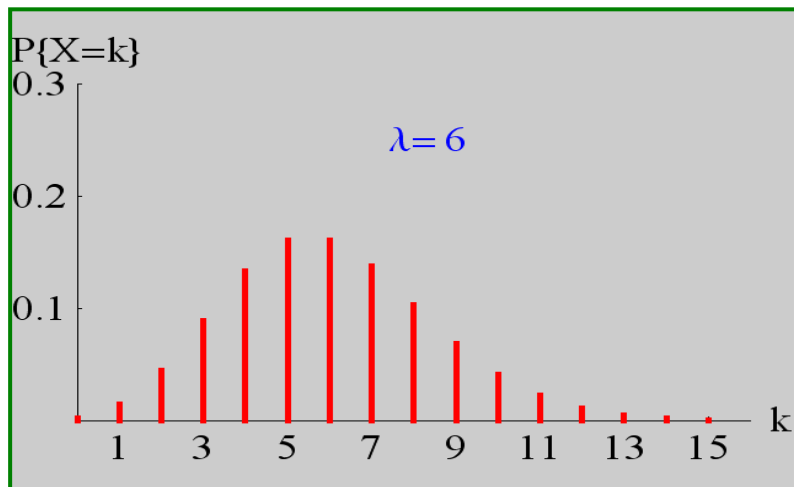
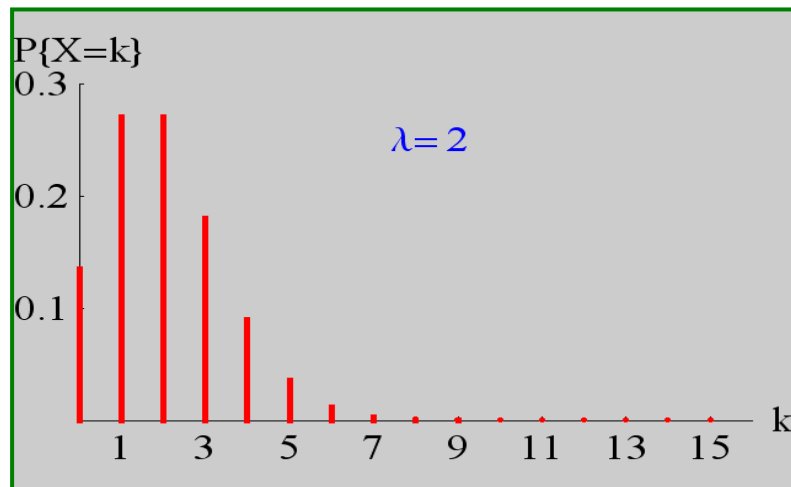
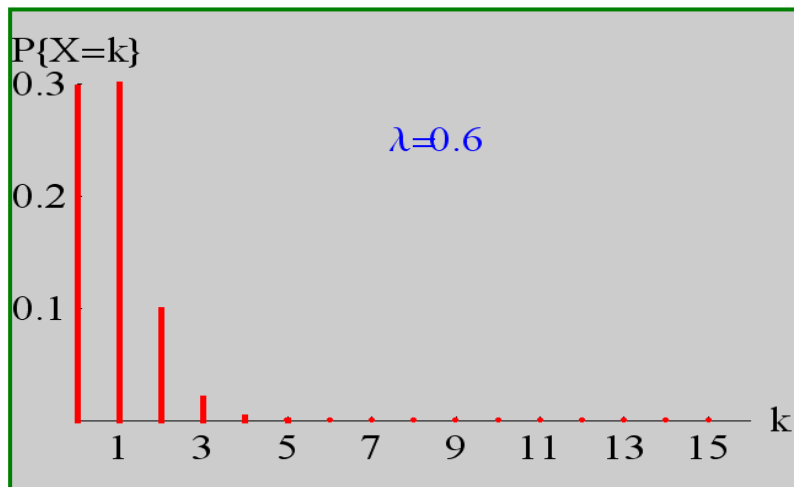
4. 泊松分布

设随机变量所有可能取的值为 $0, 1, 2, \dots$, 而取各个值的概率为

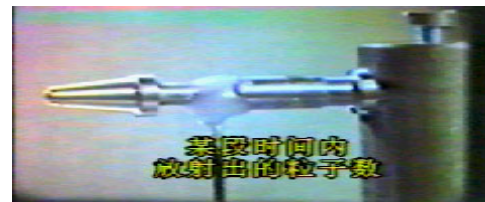
$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数. 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X \sim \pi(\lambda)$.

泊松分布的图形



泊松分布的背景及应用



二十世纪初卢瑟福和盖克两位科学家在观察与分析放射性物质放出的 α 粒子个数的情况时, 他们做了2608次观察(每次时间为7.5秒)发现放射性物质在规定的一段时间内, 其放射的粒子数 X 服从泊松分布.

在生物学、医学、工业统计、保险科学及公用事业的排队等问题中, 泊松分布是常见的. 例如地震、火山爆发、特大洪水、交换台的电话呼唤次数等, 都服从泊松分布.

地震



火山爆发



特大洪水



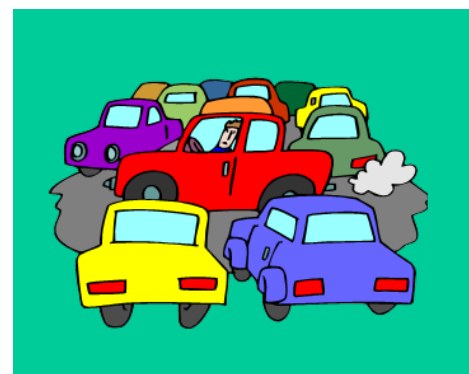
商场接待的顾客数



电话呼唤次数

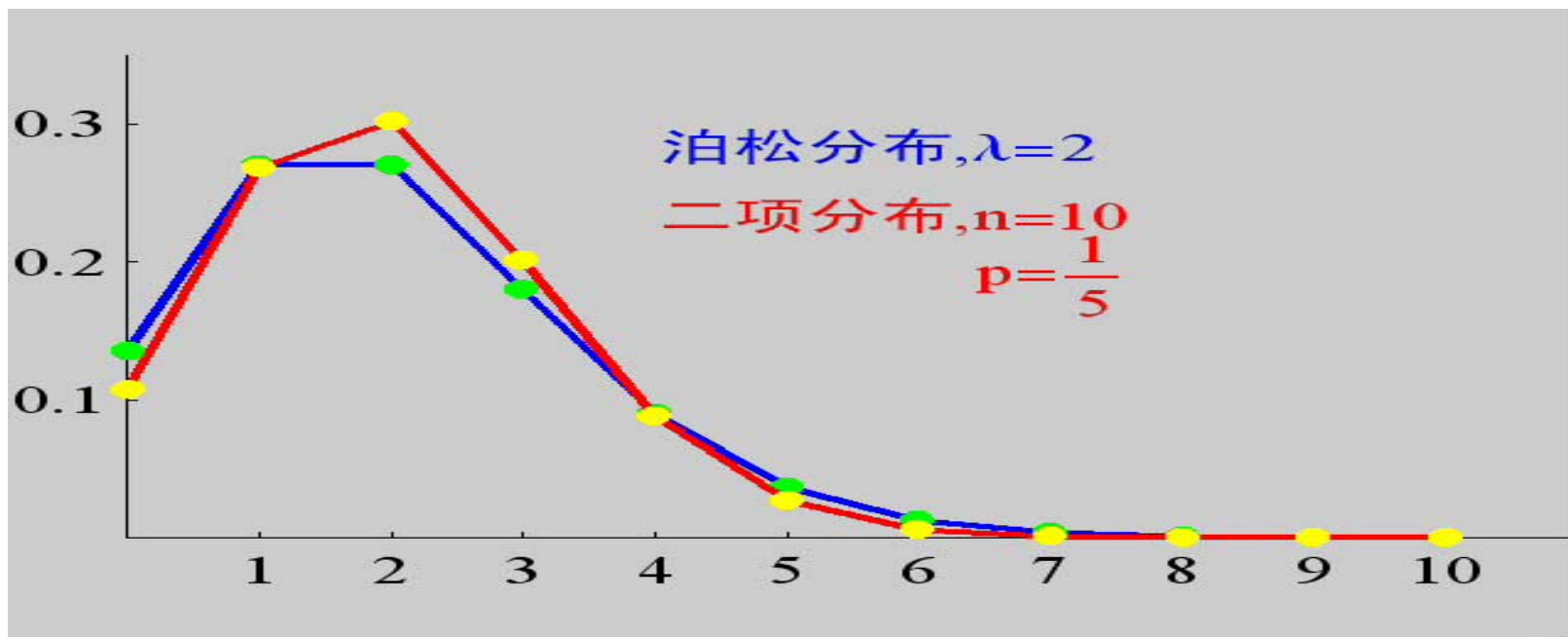


交通事故次数



上面我们提到

二项分布 $np \rightarrow \lambda (n \rightarrow +\infty)$ 泊松分布



例4 有一繁忙的汽车站, 每天有大量汽车通过, 设每辆汽车在一天的某段时间内, 出事故的概率为**0.0001**, 在每天的该段时间内有**1000** 辆汽车通过, 问出事故的次数不小于**2**的概率是多少?

解 设 1000 辆车通过, 出事故的次数为 X , 则

$$X \sim B(1000, 0.0001),$$

所求概率为 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - 0.9999^{1000} - \binom{1000}{1} \cdot 0.0001 \cdot 0.9999^{999}$$

可利用泊松定理计算 $\lambda = 1000 \times 0.0001 = 0.1$,

$$P\{X \geq 2\} \approx 1 - \frac{e^{-0.1}}{0!} - \frac{0.1 \cdot e^{-0.1}}{1!} = 0.0047.$$

合理配备维修工人问题

例5 为了保证设备正常工作,需配备适量的维修工人(工人配备多了就浪费,配备少了又要影响生产),现有同类型设备**300**台,各台工作是相互独立的,发生故障的概率都是**0.01**.在通常情况下一台设备的故障可由一个人来处理(我们也只考虑这种情况),问至少需配备多少工人,才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于**0.01**?

解 设需配备 N 人. 记同一时刻发生故障的设备台数为 X , 那么, $X \sim B(300, 0.01)$. 所需解决的问题是确定最小的 N , 使得

$P\{X \leq N\} \geq 0.99.$ 由泊松定理得

$$P\{X \leq N\} \approx \sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!},$$

故有
$$\sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!} \geq 0.99,$$

即
$$1 - \sum_{k=0}^N \frac{3^k e^{-3}}{k!} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!} \leq 0.01,$$

查表可求得满足此式最小的 N 是8.故至少需配备8个工人,才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01.

例6 设有80台同类型设备, 各台工作是相互独立的发生故障的概率都是 0.01, 且一台设备的故障能由一个人处理. 考虑两种配备维修工人的方法, 其一是由四人维护, 每人负责20台; 其二是由3人共同维护台80. 试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小.

解 按第一种方法

以 X 记“第1人维护的20台中同一时刻发生故障的台数”,

以 A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 表示事件“第 i 人维护的20台中发生故障时不能及时维修”,

则知80台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &\geq P(A_1) \\ &= P\{X \geq 2\}. \end{aligned}$$

而 $X \sim B(20, 0.01)$, 又 $\lambda = np = 0.2$,

$$\text{故有 } P\{X \geq 2\} \approx \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(0.2)^k k^{-0.2}}{k!} = 0.0175.$$

即有 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq 0.0175$.

按第二种方法

以 Y 记80台中同一时刻发生故障的台数.

则有 $Y \sim B(80, 0.01)$,

又 $\lambda = np = 0.8$,

故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{Y \geq 4\} \approx \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(0.8)^k k^{-0.8}}{k!} = 0.0091.$$

5. 几何分布

若随机变量 X 的分布律为

$$\begin{array}{c|cccccc} X & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\ \hline p_k & p & qp & \cdots & q^{k-1}p & \cdots \end{array}, \quad p + q = 1,$$

则称 X 服从几何分布.

实例6 设某批产品的次品率为 p , 对该批产品做有放回的抽样检查, 直到第一次抽到一只次品为止 (在此之前抽到的全是正品), 那么所抽到的产品数 X 是一个随机变量, 求 X 的分布律.

解 X 所取的可能值是 $1, 2, 3, \dots$.

设 A_i 表示“抽到的第 i 个产品是正品”,

$$\begin{aligned} P\{X = k\} &= P(A_1 A_2 \cdots A_{k-1} \overline{A_k}) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_{k-1}) \cdot P(\overline{A_k}) \\ &= \underbrace{(1-p)(1-p) \cdots (1-p)}_{(k-1)} \cdot p = q^{k-1} p. \end{aligned}$$

$(k = 1, 2, \dots)$

所以 X 服从几何分布.

说明 几何分布可作为描述某个试验 “首次成功” 的概率模型.

分布函数及其性质

一、分布函数的概念

二、分布函数的性质

三、例题讲解

一、分布函数的概念

1.概念的引入

对于随机变量 X ，我们不仅要知道 X 取哪些值，要知道 X 取这些值的概率；而且更重要的是想知道 X 在任意有限区间 (a, b) 内取值的概率。

例如 求随机变量 X 落在区间 $(x_1, x_2]$ 内的概率。

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \underbrace{P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\}}_{\text{?}}$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$

$F(x_2) \qquad \qquad \qquad F(x_1)$

分布函数

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

2.分布函数的定义

定义 设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

称为 X 的分布函数.

说明

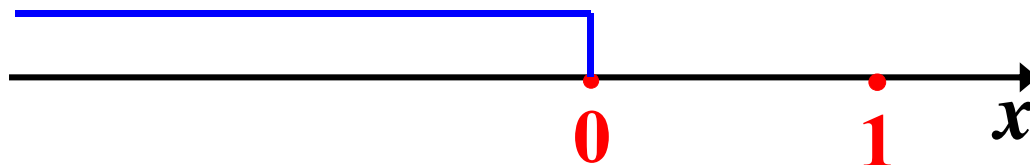
- (1) 分布函数主要研究变量在某一区间内取值的概率情况.
- (2) 分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数.

实例 抛掷均匀硬币, 令

$$X = \begin{cases} 1, & \text{出正面,} \\ 0, & \text{出反面.} \end{cases}$$

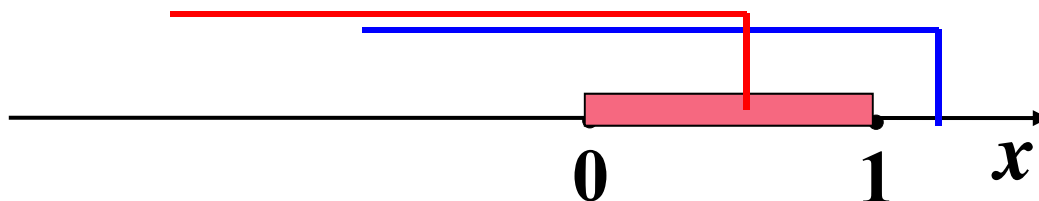
求随机变量 X 的分布函数.

解 $P\{X = 1\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2},$



当 $x < 0$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x < 0\} = 0;$$



当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当 $x \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \leq x\} \\ &= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} \quad \text{得} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

二、分布函数的性质

$$(1) 0 \leq F(x) \leq 1, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$(2) F(x_1) \leq F(x_2), \quad (x_1 < x_2);$$

证明 由 $x_1 < x_2 \Rightarrow \{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}$,

得 $P\{X \leq x_1\} \leq P\{X \leq x_2\}$,

$$\text{又 } F(x_1) = P\{X \leq x_1\}, \quad F(x_2) = P\{X \leq x_2\},$$

故 $F(x_1) \leq F(x_2)$.

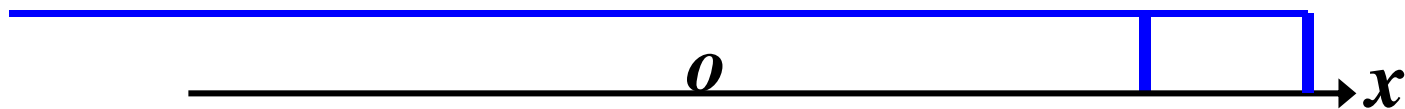
$$(3) F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1;$$

证明 $F(x) = P\{X \leq x\}$, 当 x 越来越小时,
 $P\{X \leq x\}$ 的值也越来越小, 因而当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P\{X \leq x\} = 0$$



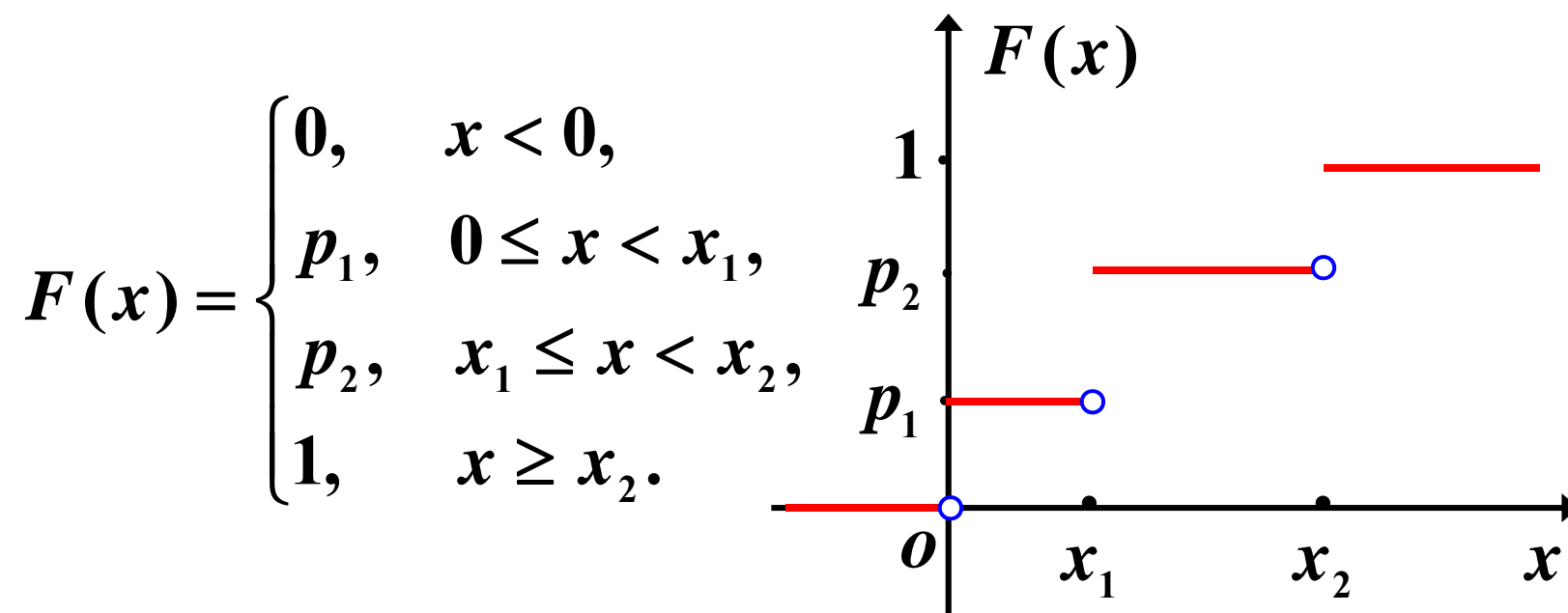
同样, 当 x 增大时 $P\{X \leq x\}$ 的值也不会减小, 而
 $X \in (-\infty, x)$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, X 必然落在 $(-\infty, \infty)$ 内.



所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} P\{X \leq x\} = 1.$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0), \quad (-\infty < x_0 < \infty).$$

即任一分布函数处处右连续.



重要公式

$$(1) P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a),$$

$$(2) P\{X > a\} = 1 - F(a).$$

证明 因为 $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$,

$$\{X \leq a\} \cap \{a < X \leq b\} = \emptyset,$$

所以 $P\{X \leq b\} = P\{X \leq a\} + P\{a < X \leq b\}$,

故 $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a).$

三、例题讲解

例1 将一枚硬币连掷三次, X 表示 “三次中正面出现的次数”, 求 X 的分布律及分布函数, 并求下列概率值 $P\{1 < X < 3\}$, $P\{X \geq 5.5\}$, $P\{1 < X \leq 3\}$.

解 设 H – 正面, T – 反面, 则

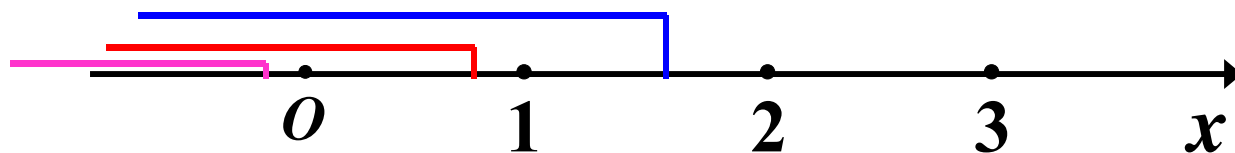
$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\},$$

因此分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

求分布函数

当 $x < 0$ 时,



$$F(x) = P\{X \leq x\} = 0;$$

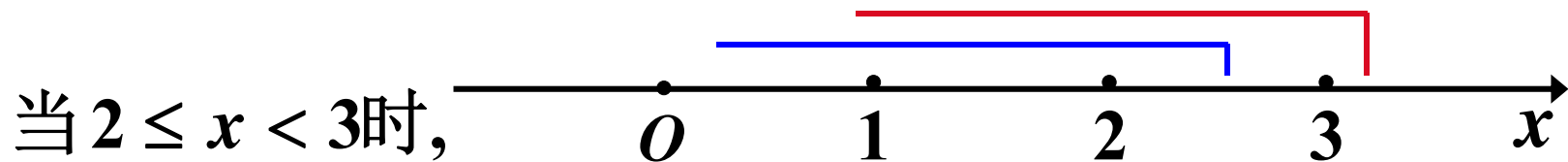
当 $0 \leq x < 1$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} = \sum_{x_i \leq 0} p_i = \frac{1}{8};$$

当 $1 \leq x < 2$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \sum_{x_i \leq 1} p_i = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2};$$



$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \sum_{x_i \leq 2} p_i$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8};$$

当 $x \geq 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} \\ + P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$$

$$= \sum_{x_i \leq 3} p_i = 1.$$

$$\text{所以 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/8, & 0 \leq x < 1, \\ 4/8, & 1 \leq x < 2, \\ 7/8, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$P\{1 < X < 3\} = P\{X \leq 3\} - P\{X \leq 1\} - P\{X = 3\}$$

$$= F(3) - F(1) - P\{X = 3\}$$

$$= 1 - \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$\begin{aligned}P\{X \geq 5.5\} &= 1 - P\{X < 5.5\} \\&= 1 - P\{X \leq 5.5\} + P\{X = 5.5\} \\&= 1 - 1 + 0 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{1 < X \leq 3\} &= P\{X \leq 3\} - P\{X \leq 1\} \\&= F(3) - F(1) \\&= 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例2 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数, 并求 $P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$, $P\left\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\right\}$,
 $P\{2 \leq X \leq 3\}$.

解 由于 X 仅在 $x = -1, 2, 3$ 处概率不为 0, 且

$$F(x) = P\{X \leq x\},$$

$$\text{得} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ P\{X = -1\}, & -1 \leq x < 2, \\ P\{X = -1\} + P\{X = 2\}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$\text{即} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{4}, & -1 \leq x < 2, \\ \frac{3}{4}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

由 $F(x) = P\{X \leq x\}$,

得 $P\{X \leq \frac{1}{2}\} = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$

$$P\left\{\frac{3}{2} < X \leq \frac{5}{2}\right\} = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{2 \leq X \leq 3\} = F(3) - F(2) + P\{X = 2\}$$

$$= 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

不同的随机变量, 它们的分布函数一定也不相同吗?

答 不一定. 例如抛均匀硬币, 令

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{出正面;} \\ -1, & \text{出反面.} \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} -1, & \text{出正面;} \\ 1, & \text{出反面.} \end{cases}$$

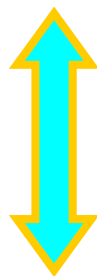
X_1 与 X_2 在样本空间上的对应法则不同, 是两个不同的随机变量, 但它们却有相同的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ 1/2, & -1 < x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

离散型随机变量分布律与分布函数的关系

分布律

$$p_k = P\{X = x_k\}$$



分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

例3 一个靶子是半径为**2m**的圆盘, 设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比, 并设射击都能中靶, 以 **X** 表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量 **X** 的分布函数.

解 当 $x < 0$ 时, $P\{X \leq x\}$ 是不可能事件,

于是 $F(x) = P\{X \leq x\} = 0$;

当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $P\{0 \leq X \leq x\} = kx^2, k$ 是常数.

由 $P\{0 \leq X \leq 2\} = 1$, 得 $4k = 1$, 即 $k = \frac{1}{4}$.

因而 $P\{0 \leq X \leq x\} = \frac{x^2}{4}$.

于是 $F(x) = P\{X \leq x\}$

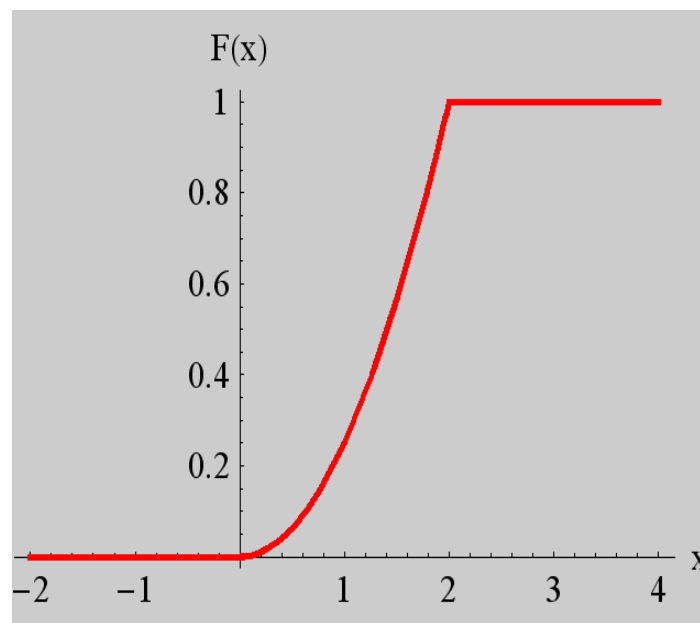
$$= P\{X < 0\} + P\{0 \leq X \leq x\} = \frac{x^2}{4}.$$

当 $x \geq 2$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\} = 1.$$

故 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$



其图形为一连续曲线

若记
$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 < t < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

则
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt.$$

$F(x)$ 恰是非负函数 $f(t)$ 在区间 $(-\infty, x]$ 上的积分,
此时称 X 为连续型随机变量.

注意 两类随机变量的分布函数图形的特点不一样.

连续型随机变量及其概率密度

一、连续型随机变量

二、概率密度的概念与性质

一、连续型随机变量

定义 随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间, 叫做连续型随机变量.

实例1 随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

实例2 随机变量 X 为“测量某零件尺寸时的测量误差”.

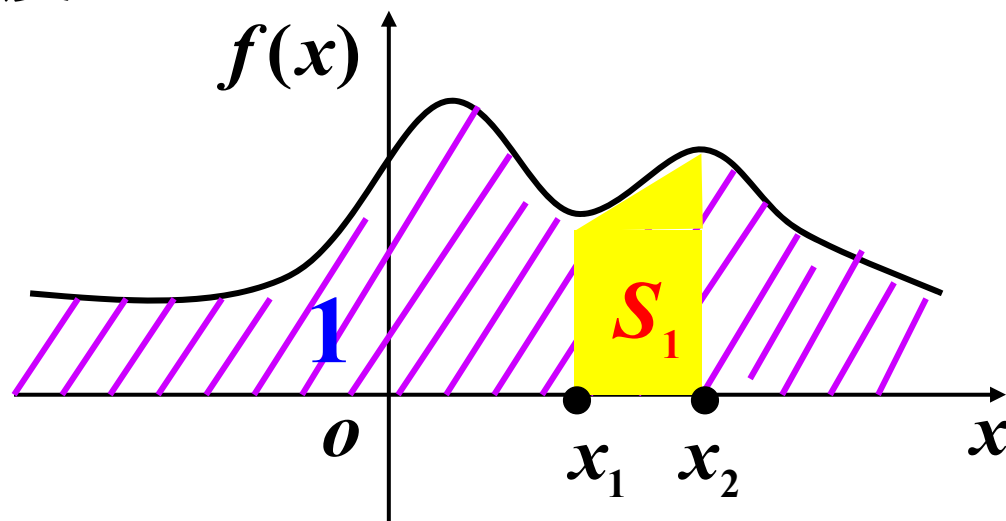
则 X 的取值范围为 (a, b) .

二、概率密度的概念与性质

1.定义 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负函数, 使对于任意实数 x 有 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \mathrm{d}t$, 则称 X 为连续型随机变量, 其中 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度.

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1$$

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \mathrm{d}x$$



性质 (1) $f(x) \geq 0$;

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1;$$

证明 $1 = F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$

$$(3) P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx;$$

证明 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

同时得以下计算公式

$$P\{X \leq a\} = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) \mathrm{d} x,$$

$$P\{X > a\} = 1 - P\{X \leq a\} = 1 - F(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d} x - \int_{-\infty}^a f(x) \mathrm{d} x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d} x + \int_a^{-\infty} f(x) \mathrm{d} x$$

$$= \int_a^{\infty} f(x) \mathrm{d} x.$$

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有 $F'(x) = f(x)$.

注意 对于任意可能值 a , 连续型随机变量取 a 的概率等于零. 即

$$P\{X = a\} = 0.$$

证明 $P\{X = a\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_a^{a+\Delta x} f(x) dx = 0.$

由此可得

$$\begin{aligned} P\{a \leq X \leq b\} &= P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X < b\} \\ &= P\{a < X < b\}. \end{aligned}$$



连续型随机变量取值落在某一区间的概率与区间的开闭无关

注意

若 X 是连续型随机变量, $\{X=a\}$ 是不可能事件, 则有 $P\{X=a\}=0$.

若 $P\{X=a\}=0$,

则不能确定 $\{X=a\}$ 是不可能事件



连续型

若 X 为离散型随机变量,

$\{X=a\}$ 是不可能事件 $\Leftrightarrow P\{X=a\}=0$.



离散型

例1 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k ; (2) 求 X 的分布函数;

(3) 求 $P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1$,

得 $\int_0^3 kx \mathrm{d}x + \int_3^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = 1$, 解之得 $k = \frac{1}{6}$.

(2) 由 $k = \frac{1}{6}$ 知 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \mathrm{d} x$ 得

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x \frac{t}{6} \mathrm{d} t, & 0 \leq x < 3, \\ \int_0^3 \frac{t}{6} \mathrm{d} t + \int_3^x \left(2 - \frac{t}{2} \right) \mathrm{d} t, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

$$\text{即 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{12}, & 0 \leq x < 3, \\ -3 + 2x - \frac{x^2}{4}, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

$$(3) P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\} = F(\frac{7}{2}) - F(1) = \frac{41}{48}.$$

例2 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a, \\ A + B \arcsin \frac{x}{a}, & -a < x \leq a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

求：(1) 系数 A, B 的值；

(2) $P\{-a < X < \frac{a}{2}\}$;

(3) 随机变量 X 的概率密度.

解 (1) 因为 X 是连续型随机变量, 所以 $F(x)$ 连续,

故有
$$F(-a) = \lim_{x \rightarrow -a} F(x),$$

$$F(a) = \lim_{x \rightarrow a} F(x),$$

即
$$A + B \arcsin \left(\frac{-a}{a} \right) = A - \frac{\pi}{2} B = 0,$$

$$A + B \arcsin \left(\frac{a}{a} \right) = A + \frac{\pi}{2} B = 1,$$

解之得 $A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi}.$

所以
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & -a < x \leq a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad P\left\{-a < X < \frac{a}{2}\right\} &= F\left(\frac{a}{2}\right) - F(-a) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{a}{2a}\right) - 0 \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

(3) 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 1/\pi\sqrt{a^2 - x^2}, & -a < x < a, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

常见连续型随机变量的分布

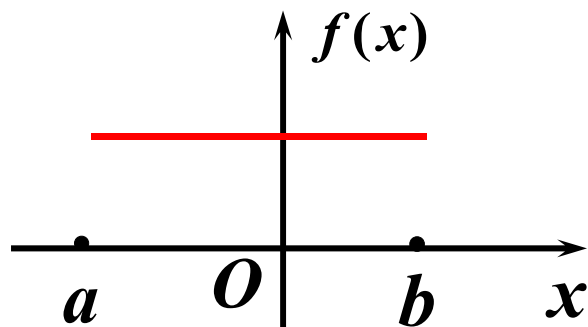
1. 均匀分布

定义 设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

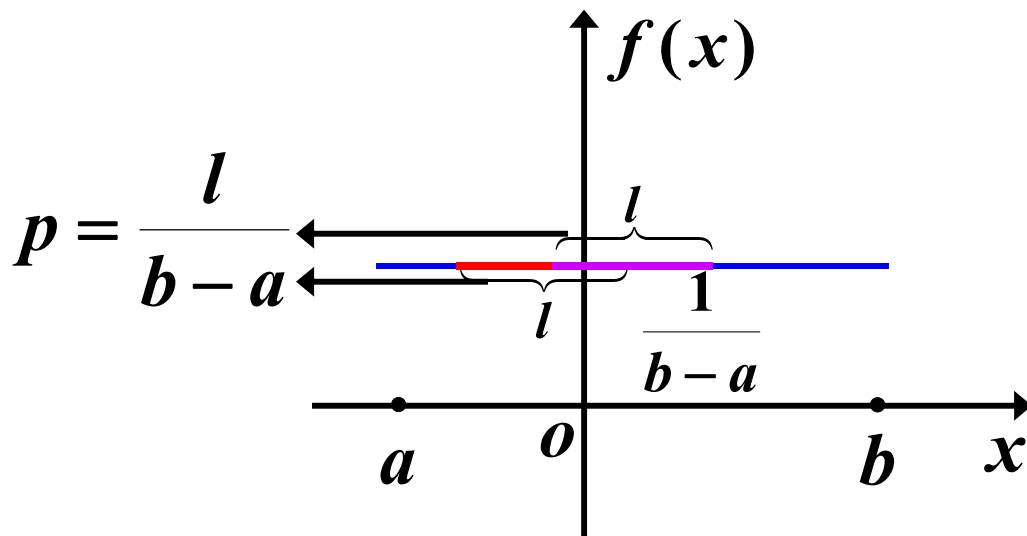
则称 X 在区间 (a,b) 区间上服从均匀分布,
记为 $X \sim U(a,b)$.

概率密度函数图形



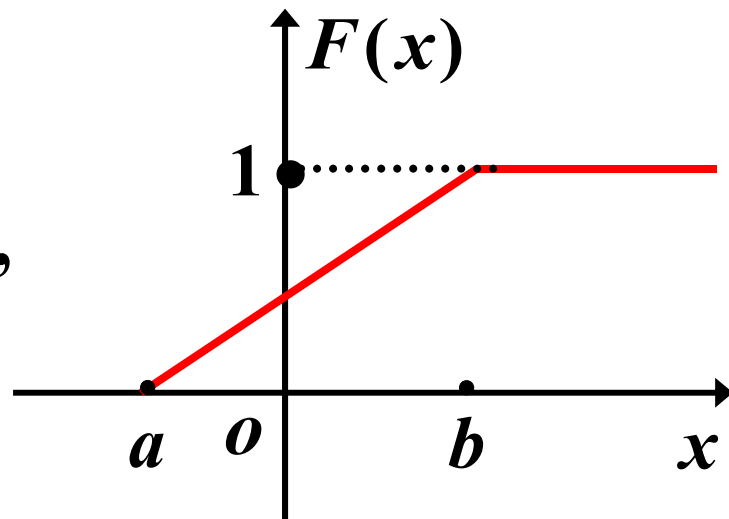
均匀分布的意义

在区间 (a, b) 上服从均匀分布的随机变量 X , 落在区间 (a, b) 中任意等长度的子区间内的可能性是相同的.



分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$



例1 设电阻值 R 是一个随机变量, 均匀分布在 $900\ \Omega \sim 1100\ \Omega$. 求 R 的概率密度及 R 落在 $950\ \Omega \sim 1050\ \Omega$ 的概率.

解 由题意, R 的概率密度为

$$f(r) = \begin{cases} 1/(1100 - 900), & 900 < r \leq 1100, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故有 $P\{950 < R \leq 1050\}$

$$= \int_{950}^{1050} \frac{1}{200} \mathrm{d}r = 0.5.$$

例2 设随机变量 X 在 $[2, 5]$ 上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测, 试求至少有两次观测值大于3 的概率.

解 X 的分布密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 2 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

设 A 表示 “对 X 的观测值大于 3 的次数”,

即 $A = \{X > 3\}$.

由于 $P(A) = P\{X > 3\} = \int_3^5 \frac{1}{3} \mathrm{d}x = \frac{2}{3},$

设 Y 表示3次独立观测中观测值大于3的次数,

则 $Y \sim b\left(3, \frac{2}{3}\right).$

因而有

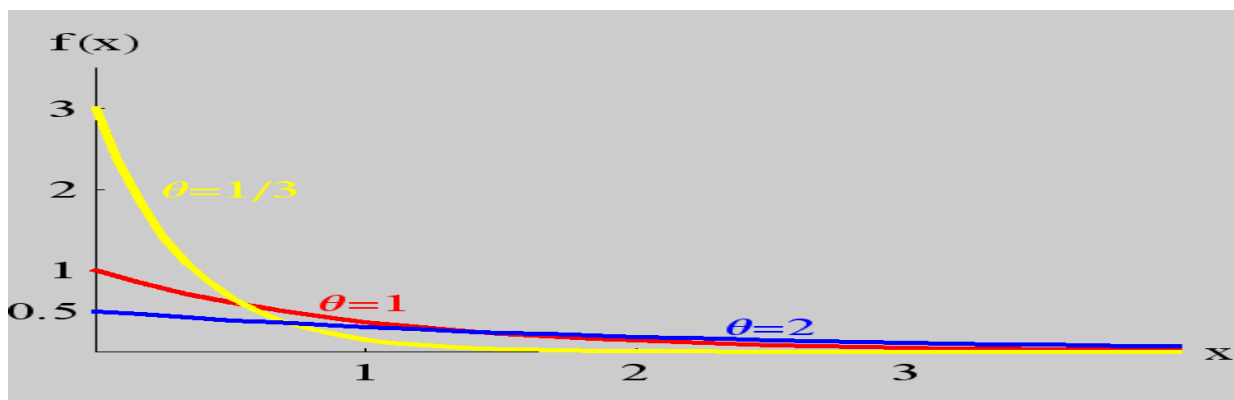
$$\begin{aligned} P\{Y \geq 2\} &= \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \binom{3}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^0 \\ &= \frac{20}{27}. \end{aligned}$$

2. 指数分布

定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为

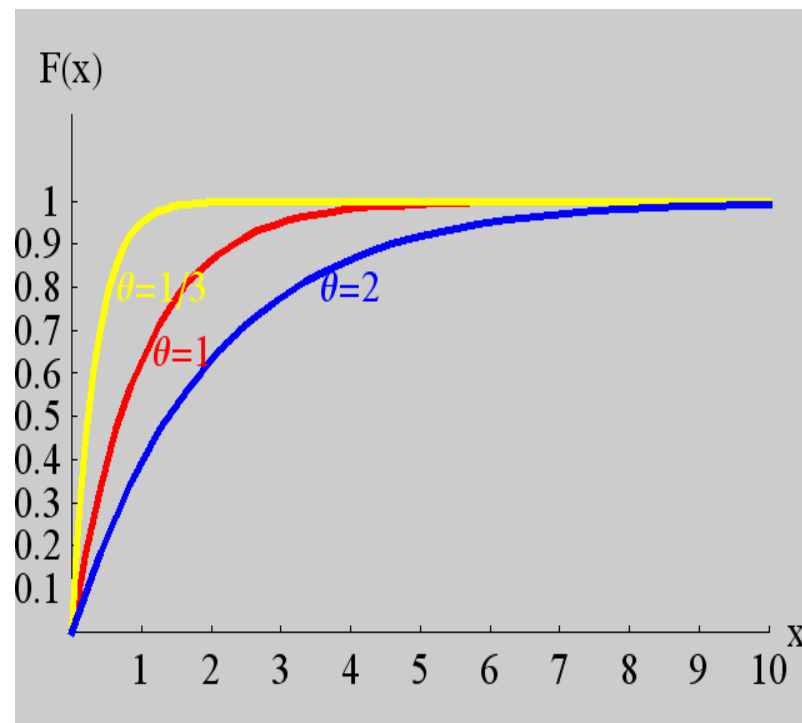
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为常数, 则称 X 服从参数为 θ 的指数分布.



分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



应用与背景

某些元件或设备的寿命服从指数分布. 例如无线电元件的寿命、电力设备的寿命、动物的寿命等都服从指数分布.

例3 设某类日光灯管的使用寿命 X 服从参数为 $\theta=2000$ 的指数分布(单位:小时).

(1) 任取一只这种灯管, 求能正常使用**1000**小时以上的概率.

(2) 有一只这种灯管已经正常使用了**1000** 小时以上, 求还能使用**1000**小时以上的概率.

解 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2000}x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$(1) P\{X > 1000\} = 1 - P\{X \leq 1000\}$$

$$= 1 - F(1000)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

$$(2) P\{X > 2000 | X > 1000\}$$

$$= \frac{P\{X > 2000, X > 1000\}}{P\{X > 1000\}}$$

$$= \frac{P\{X > 2000\}}{P\{X > 1000\}}$$

$$= \frac{1 - P\{X \leq 2000\}}{1 - P\{X \leq 1000\}}$$

$$= \frac{1 - F(2000)}{1 - F(1000)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

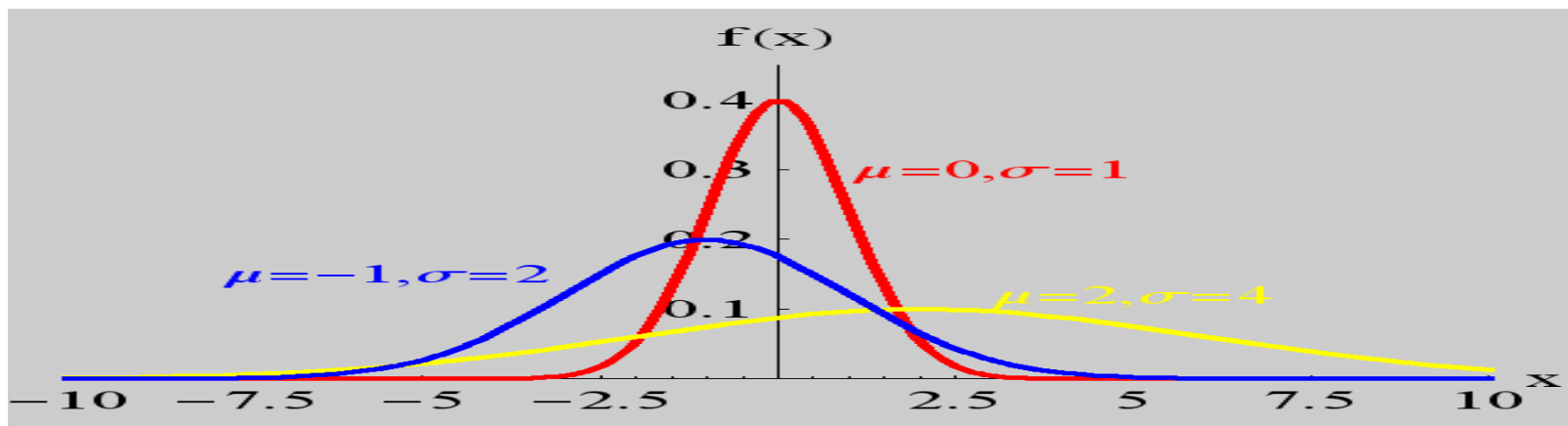
指数分布的重要性质：“无记忆性”。

3. 正态分布(或高斯分布)

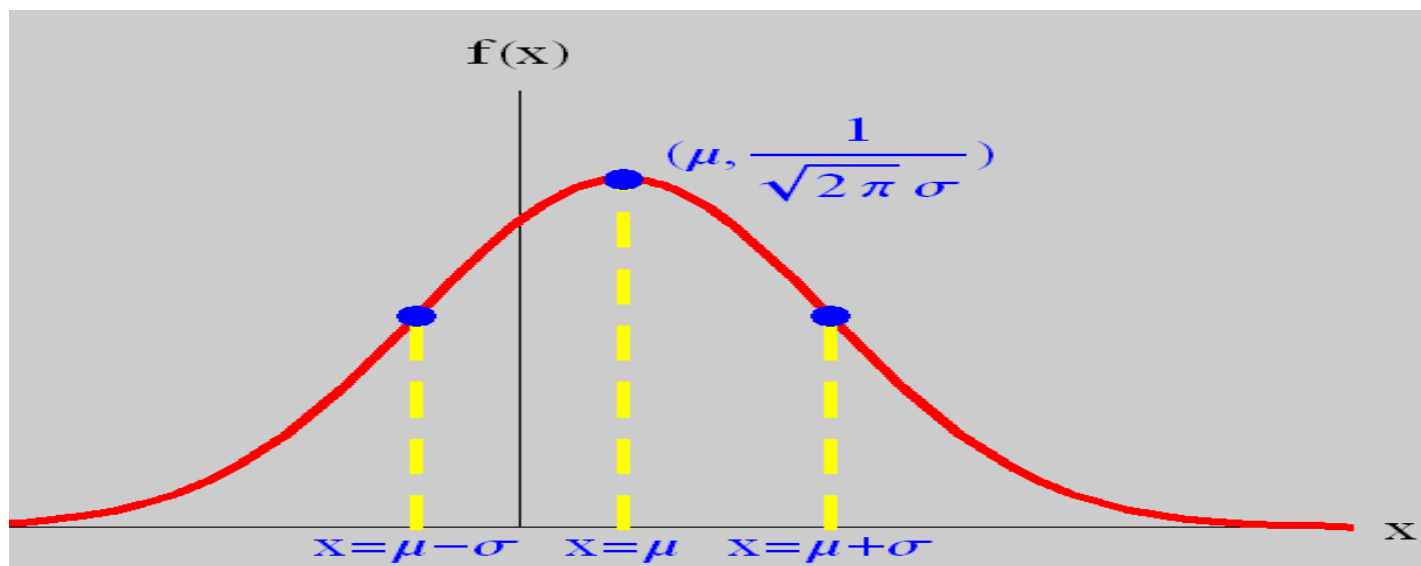
定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为常数, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布或高斯分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



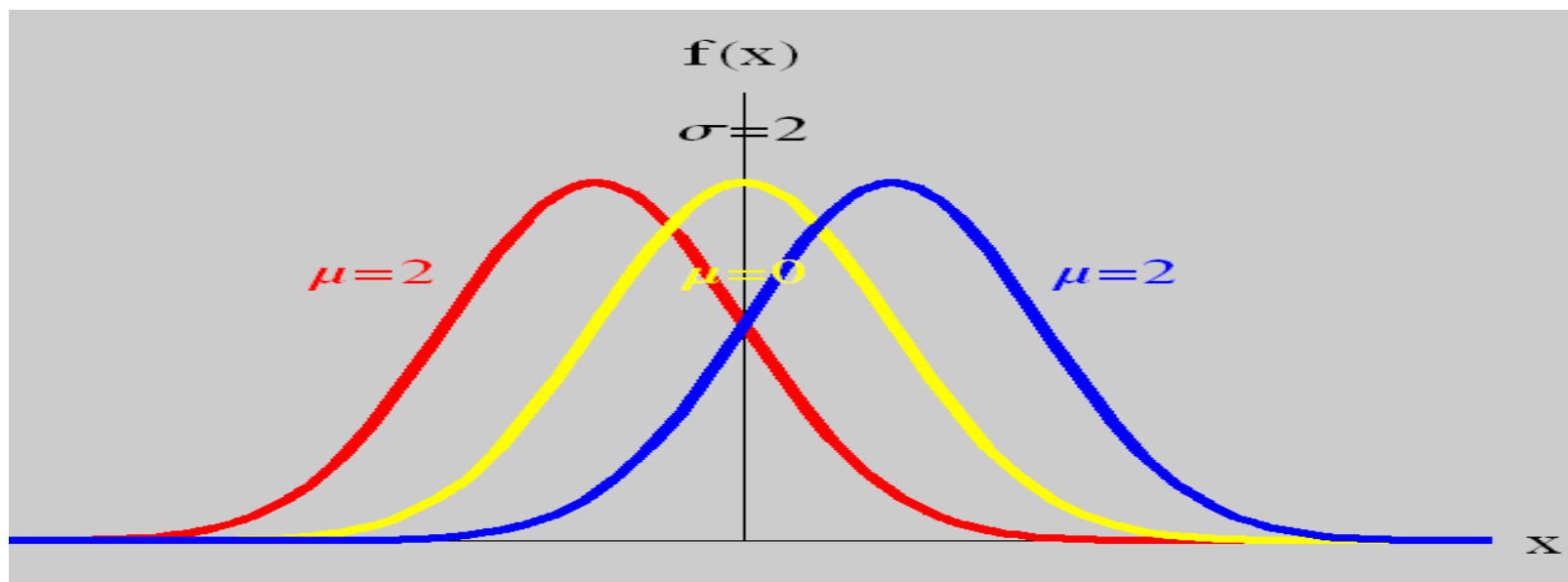
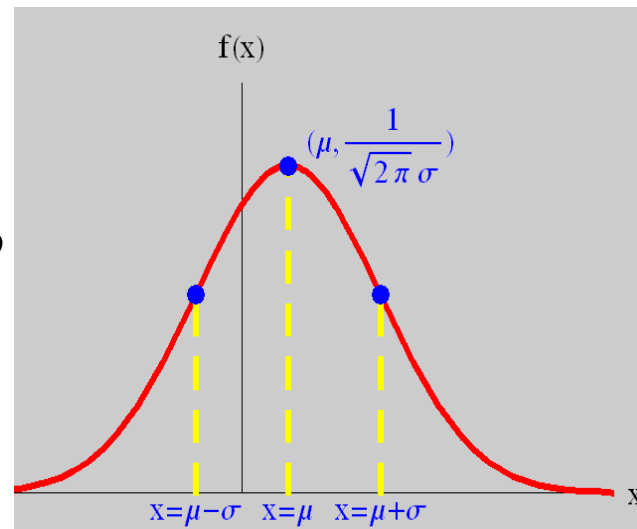
正态概率密度函数的几何特征



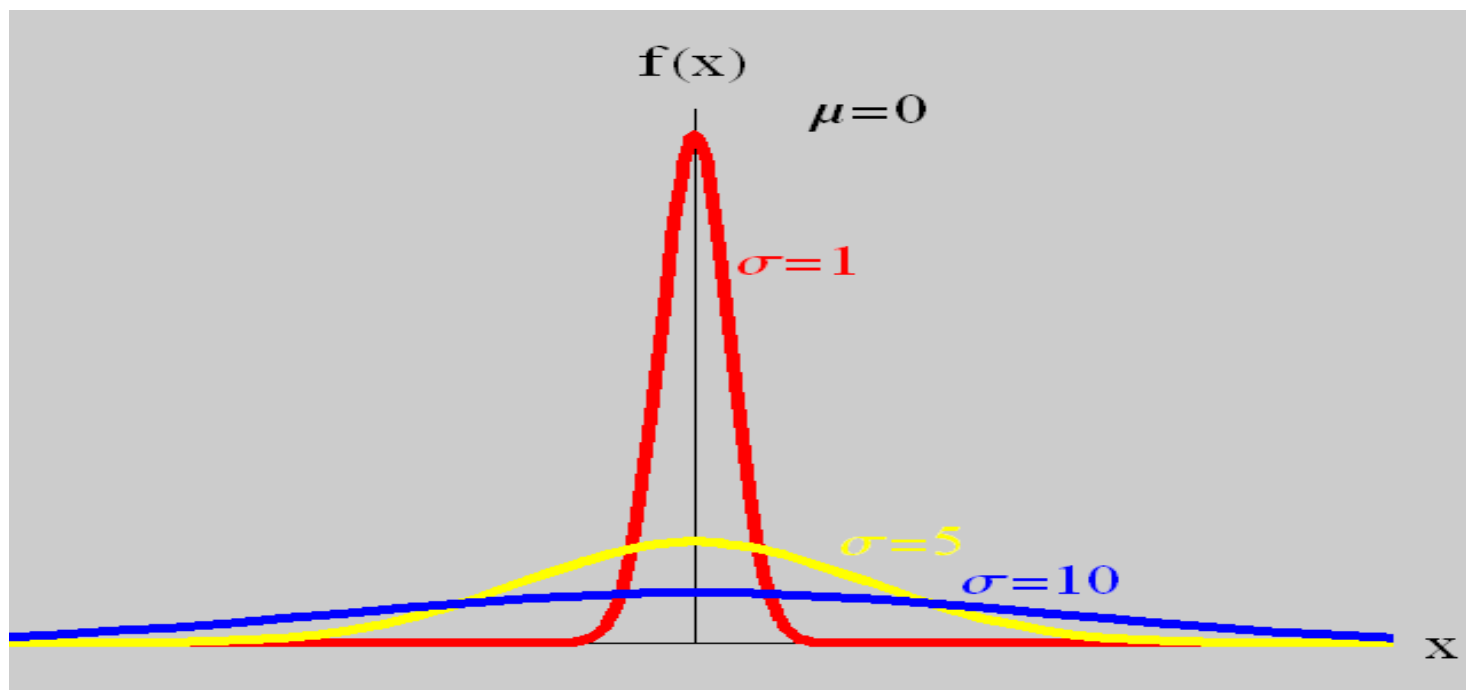
- (1) 曲线关于 $x = \mu$ 对称;
- (2) 当 $x = \mu$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$;
- (3) 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$;
- (4) 曲线在 $x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点;

(5) 曲线以 x 轴为渐近线;

(6) 当固定 σ , 改变 μ 的大小时,
 $f(x)$ 图形的形状不变, 只是沿
着 x 轴作平移变换;

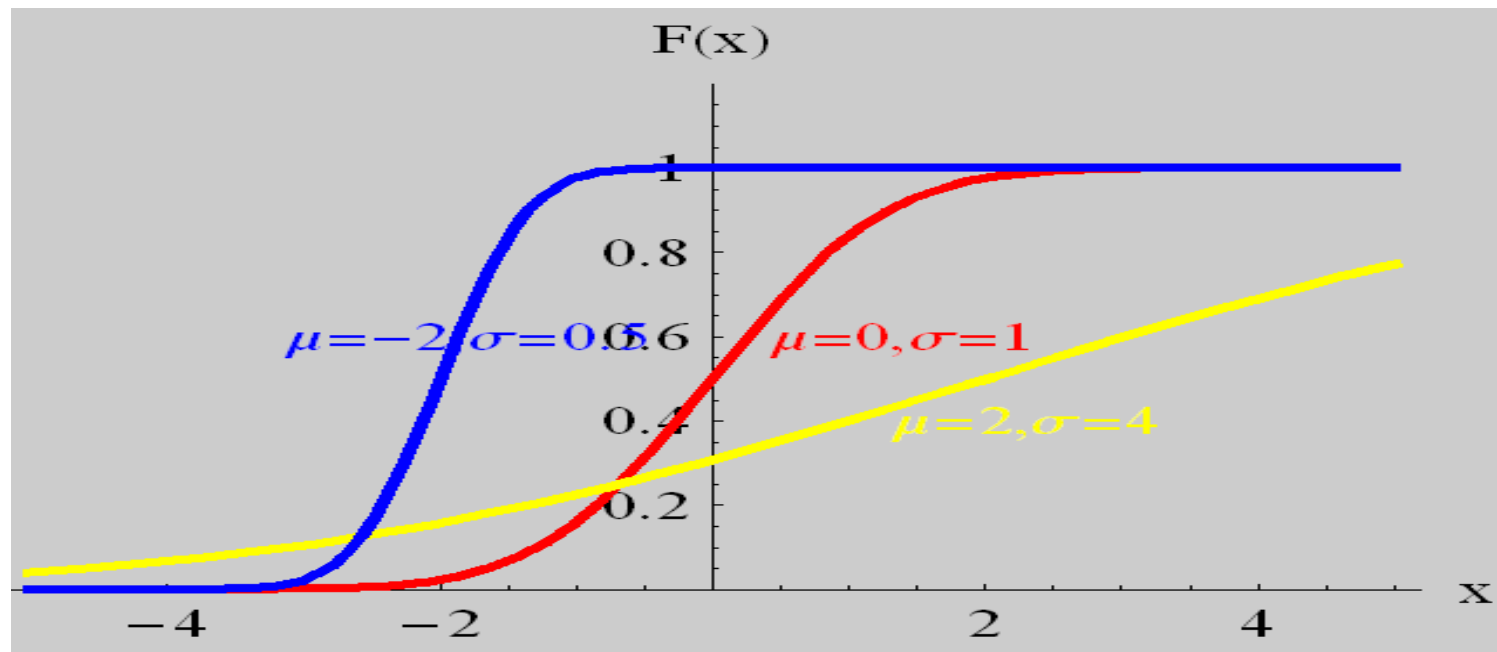


(7) 当固定 μ , 改变 σ 的大小时, $f(x)$ 图形的对称轴不变, 而形状在改变, σ 越小, 图形越高越瘦, σ 越大, 图形越矮越胖.



正态分布的分布函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$



正态分布的应用与背景

正态分布是最常见最重要的一种分布,例如测量误差, 人的生理特征尺寸如身高、体重等 ; 正常情况下生产的产品尺寸:直径、长度、重量高度等都近似服从正态分布.

正态分布下的概率计算

原函数不是
初等函数

$$P\{X \leq x\} = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

= ?

方法一：利用MATLAB软件包计算

方法二：转化为标准正态分布查表计算

标准正态分布

当正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 这样的正态分布称为标准正态分布, 记为 $N(0, 1)$.

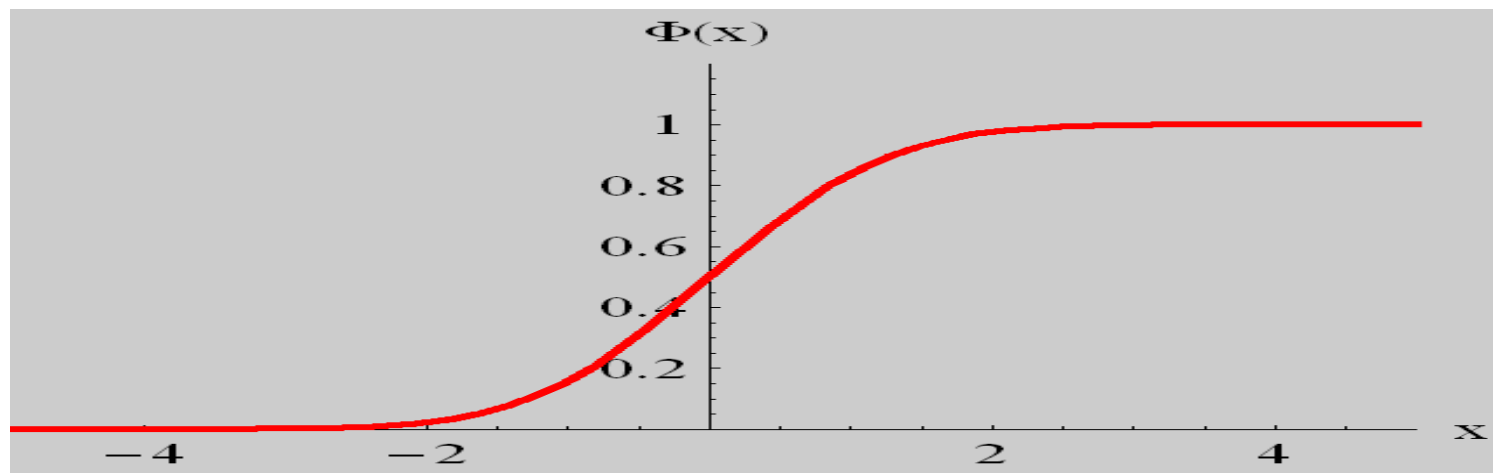
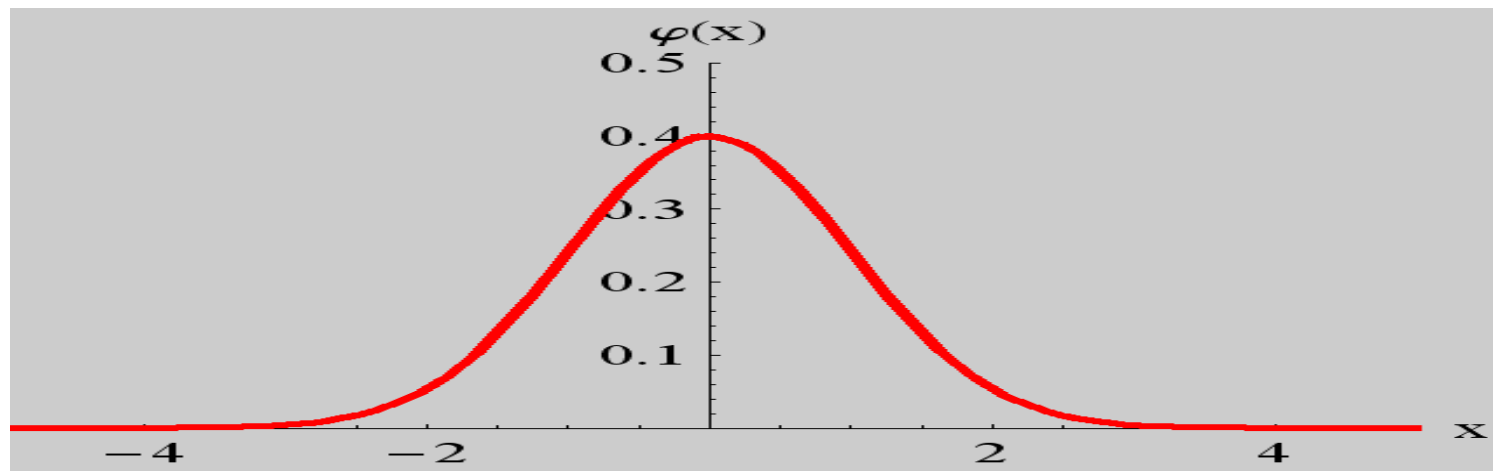
标准正态分布的概率密度表示为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

标准正态分布的分布函数表示为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

标准正态分布的图形



例4 已知 $X \sim N(0,1)$, 求 $P\{1.25 \leq X < 2\}$.

解

$$\begin{aligned} & P\{1.25 \leq X < 2\} \\ &= \Phi(2) - \Phi(1.25) \\ &= 0.9772 - 0.8944 \\ &= 0.0828. \end{aligned}$$

引理 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

证明 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ 的分布函数为

$$P\{Z \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq x\right\} = P\{X \leq \mu + \sigma x\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu + \sigma x} e^{-\frac{(t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

$$\text{令 } \frac{t - \mu}{\sigma} = u, \text{ 得 } P\{Z \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x),$$

故 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

例5 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $P\{c \leq X \leq d\}$.

解
$$P\{c \leq X \leq d\} = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\text{令 } \frac{x-\mu}{\sigma} = u, \quad = \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma du$$

$$= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \mathrm{d} u - \int_{-\infty}^{\frac{c-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \mathrm{d} u \\
&= \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

因而 $P\{c \leq X \leq d\} = F(d) - F(c)$

$$= \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$$

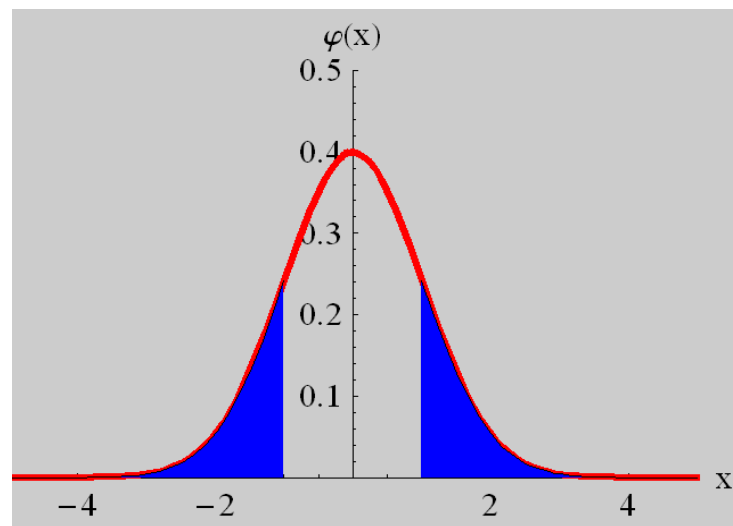
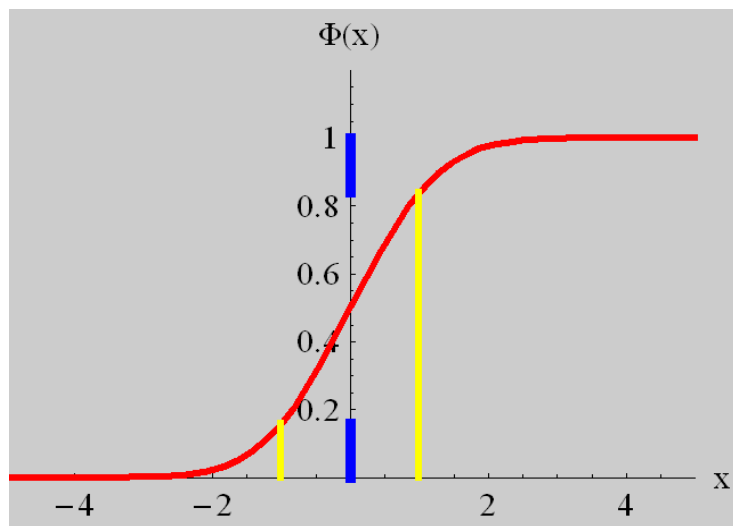
即 $P\{c \leq X \leq d\} = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$

例6 证明 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

证明
$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= 1 - \Phi(x).$$



例7 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内. 调节器整定在 $d^{\circ}\text{C}$, 液体的温度 X (以 $^{\circ}\text{C}$ 计) 是一个随机变量, 且 $X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1) 若 $d = 90$, 求 X 小于 89 的概率.

(2) 若要求保持液体的温度至少为 80°C 的概率不低于 0.99, 问 d 至少为多少?

解 (1) 所求概率为

$$\begin{aligned} P\{X < 89\} &= \Phi\left(\frac{89 - 90}{0.5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \\ &= 1 - 0.9772 = 0.0228. \end{aligned}$$

$$(2) \quad P\{X > 80\} \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - P\{X \leq 80\} \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - F(80) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{80 - d}{0.5}\right) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{80 - d}{0.5}\right) \leq 1 - 0.99 = 0.01,$$

$$\text{即} \quad \frac{80 - d}{0.5} \leq -2.327 \Rightarrow d \geq 81.1635.$$

常见连续型随机变量的分布

{ 均匀分布
正态分布(或高斯分布)
指数分布

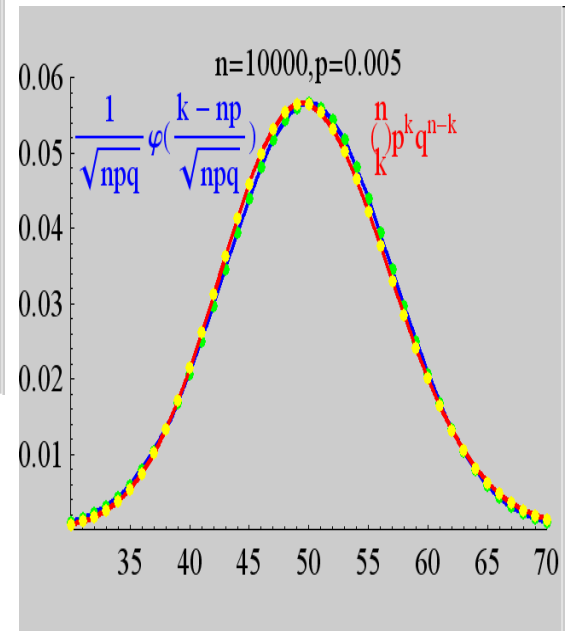
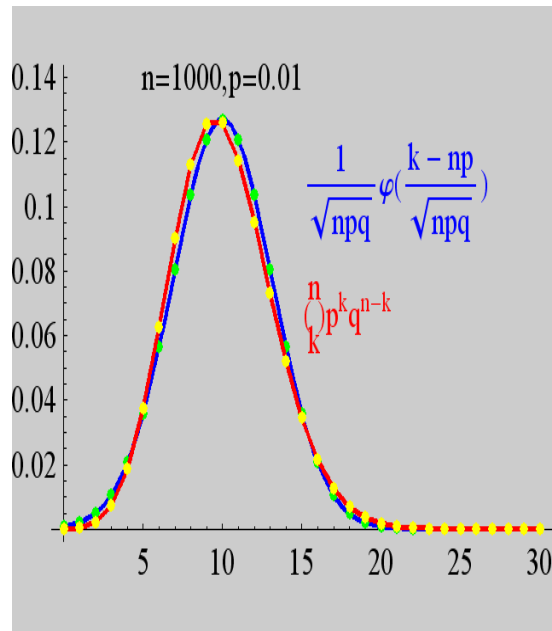
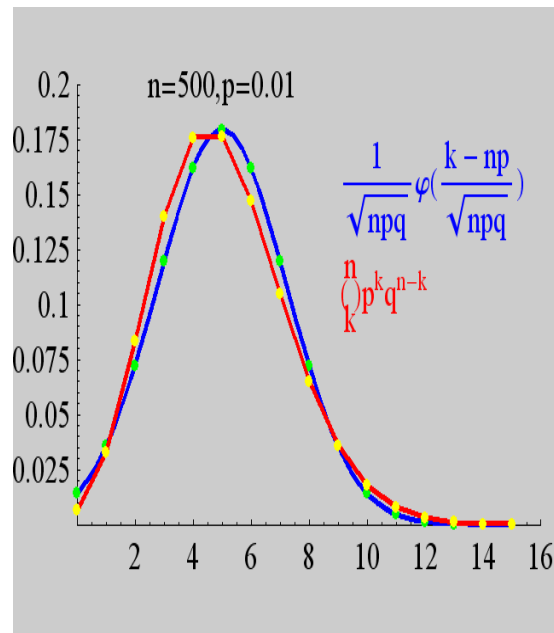
正态分布是概率论中最重要的分布

正态分布有极其广泛的实际背景，例如测量误差，人的生理特征尺寸如身高、体重等，正常情况下生产的产品尺寸：直径、长度、质量、高度，炮弹的弹落点的分布等，都服从或近似服从正态分布。

正态分布是自然界和社会现象中最为常见的一种分布, 一个变量如果受到大量微小的、独立的随机因素的影响, 那么这个变量一般是一个正态随机变量.

另一方面, 有些分布(如二项分布、泊松分布)的极限分布是正态分布. 所以, 无论在实践中, 还是在理论上, 正态分布是概率论中最重要的一种分布.

二项分布向正态分布的转换

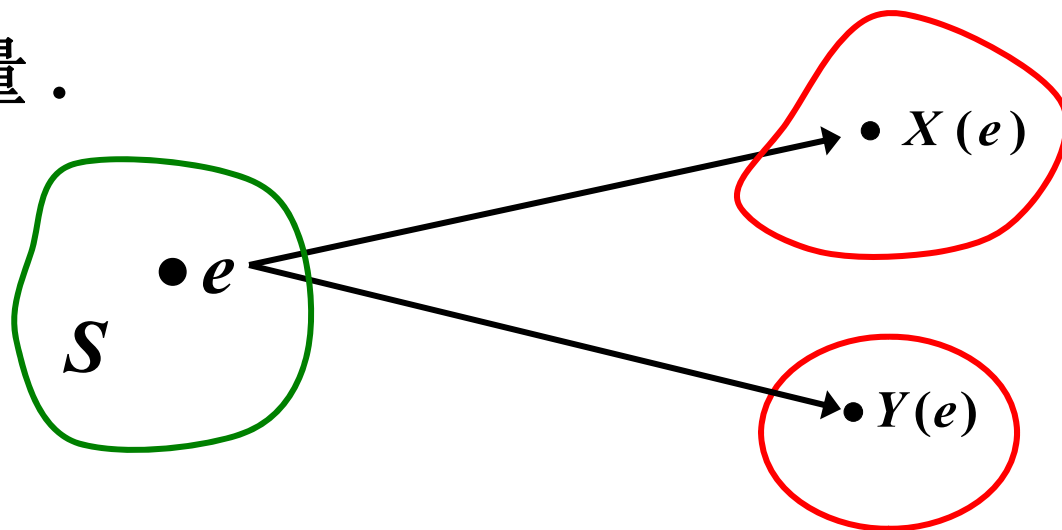


二维随机变量

定义

设 E 是一个随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$, 设 $X = X(e)$ 和 $Y = Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量, 由它们构成的一个向量 (X, Y) , 叫作二维随机向量或二维随机变量.

图示



实例1 炮弹的弹着点的位置 (X, Y) 就是一个二维随机变量.

实例2 考查某一地区学前儿童的发育情况, 则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H, W) .

说明 二维随机变量 (X, Y) 的性质不仅与 X 、 Y 有关, 而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

二维随机变量的分布函数

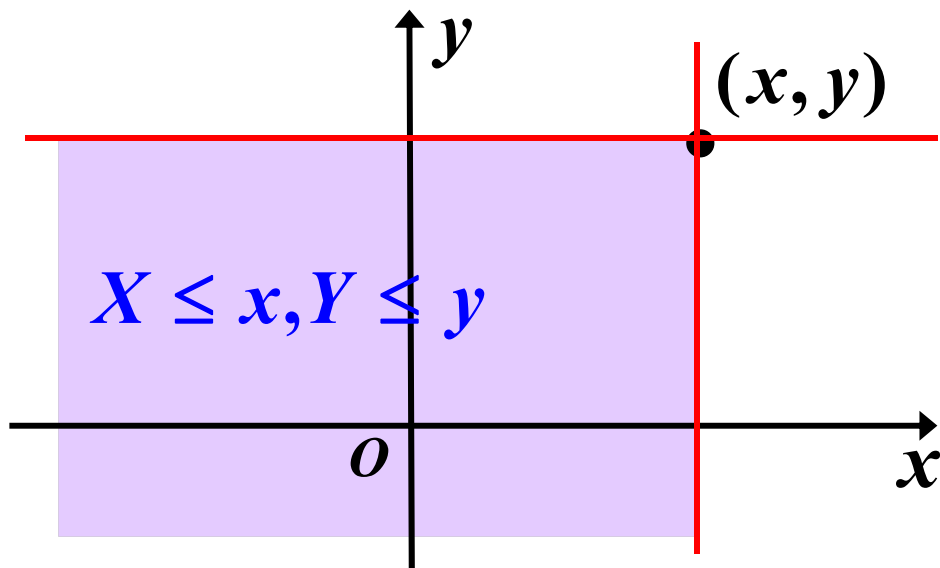
1. 分布函数的定义

设 (X, Y) 是二维随机变量, 对于任意实数 x, y , 二元函数 :

$$F(x, y) = P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\} = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

$F(x, y)$ 的函数值就是随机点落在如图所示区域内的概率.



2. 分布函数的性质

1° $F(x, y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数, 即对于任意固定的 y , 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$,
对于任意固定的 x , 当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

2° $0 \leq F(x, y) \leq 1$, 且有

对于任意固定的 y , $F(-\infty, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$,

对于任意固定的 x , $F(x, -\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$,

$$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0,$$

$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1.$$

3° $F(x, y) = F(x + 0, y)$, $F(x, y) = F(x, y + 0)$,
即 $F(x, y)$ 关于 x 右连续, 关于 y 也右连续.

4° 对于任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$,
有 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0$.

$$\begin{aligned}
&\text{证明} \quad P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \\
&= P\{X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_1, y_1 < Y \leq y_2\} \\
&= P\{X \leq x_2, Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_2, Y \leq y_1\} \\
&\quad - P\{X \leq x_1, Y \leq y_2\} + P\{X \leq x_1, Y \leq y_1\} \geq 0,
\end{aligned}$$

$$\text{故 } F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \geq 0.$$

离散型随机变量及其分布律

1. 定义 若二维随机变量 (X, Y) 所取的可能值是有限对或无限可列多对, 则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.

2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量 (X, Y) 所有可能取的值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots$, 记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

称此为二维离散型随机变量 (X, Y) 的分布律, 或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.

其中 $p_{ij} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

二维随机变量 (X, Y) 的分布律也可表示为

$\begin{matrix} Y \backslash X \\ \end{matrix}$	x_1	x_2	\cdots	x_i	\cdots
y_1	p_{11}	p_{21}	\cdots	p_{i1}	\cdots
y_2	p_{12}	p_{22}	\cdots	p_{i2}	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	\cdots	p_{ij}	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	

例1 设随机变量 X 在 $1, 2, 3, 4$ 四个整数中等可能地取值, 另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数. 试求 (X, Y) 的分布律.

解 $\{X = i, Y = j\}$ 的取值情况是: $i = 1, 2, 3, 4$,
 j 取不大于 i 的正整数. 且由乘法公式得

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{Y = j | X = i\} P\{X = i\} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{4},$$
$$i = 1, 2, 3, 4, \quad j \leq i.$$

于是 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	1 4	1 8	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

例2 从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里，随机抽取两支，若 X 、 Y 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数，求 (X, Y) 的分布律.

解 (X, Y) 所取的可能值是
 $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$.

$$\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28},$$

$$P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{14},$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{14},$$

$$P\{X = 0, Y = 2\} = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28},$$

$$P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{9}{28},$$

$$P\{X = 2, Y = 0\} = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}.$$

故所求分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$3/28$	$9/28$	$3/28$
1	$3/14$	$3/14$	0
2	$1/28$	0	0

例3 一个袋中有三个球, 依次标有数字 1, 2, 2, 从中任取一个, 不放回袋中, 再任取一个, 设每次取球时, 各球被取到的可能性相等, 以 X, Y 分别记第一次和第二次取到的球上标有的数字, 求 (X, Y) 的分布律与分布函数.

解 (X, Y) 的可能取为 $(1, 2), (2, 1), (2, 2)$.

$$P\{X=1, Y=2\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{3}, \quad P\{X=2, Y=1\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X=2, Y=2\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$p_{11} = 0, \quad p_{12} = p_{21} = p_{22} = \frac{1}{3},$$

故 (X, Y) 的分布为

$Y \backslash X$	1	2
1	0	$1/3$
2	$1/3$	$1/3$

下面求分布函数.

(1) 当 $x < 1$ 或 $y < 1$ 时,

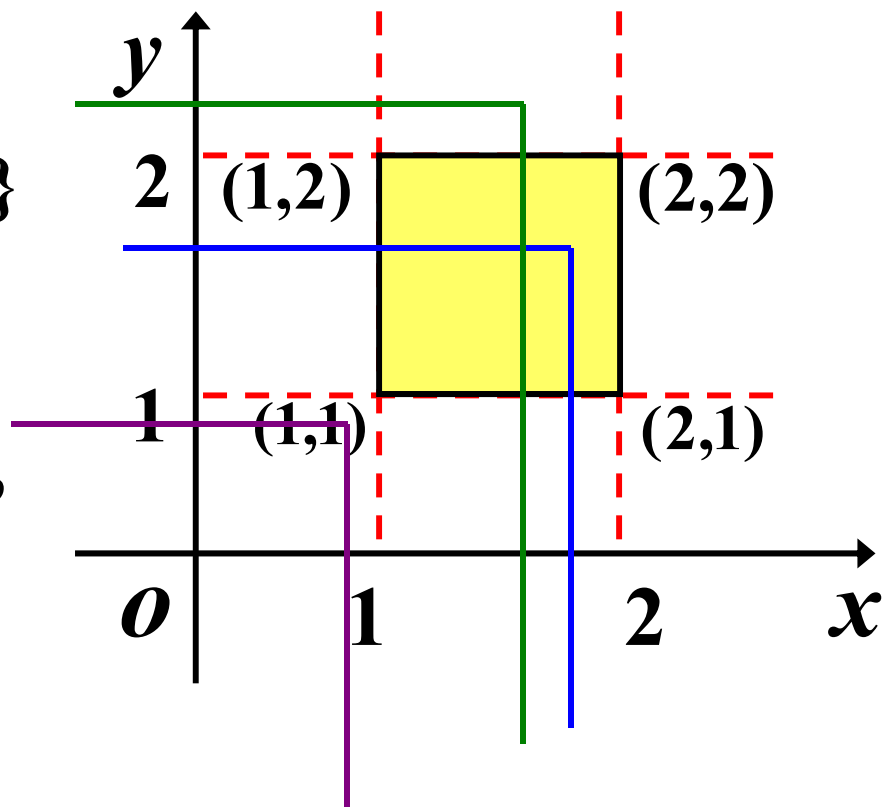
$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = 0;$$

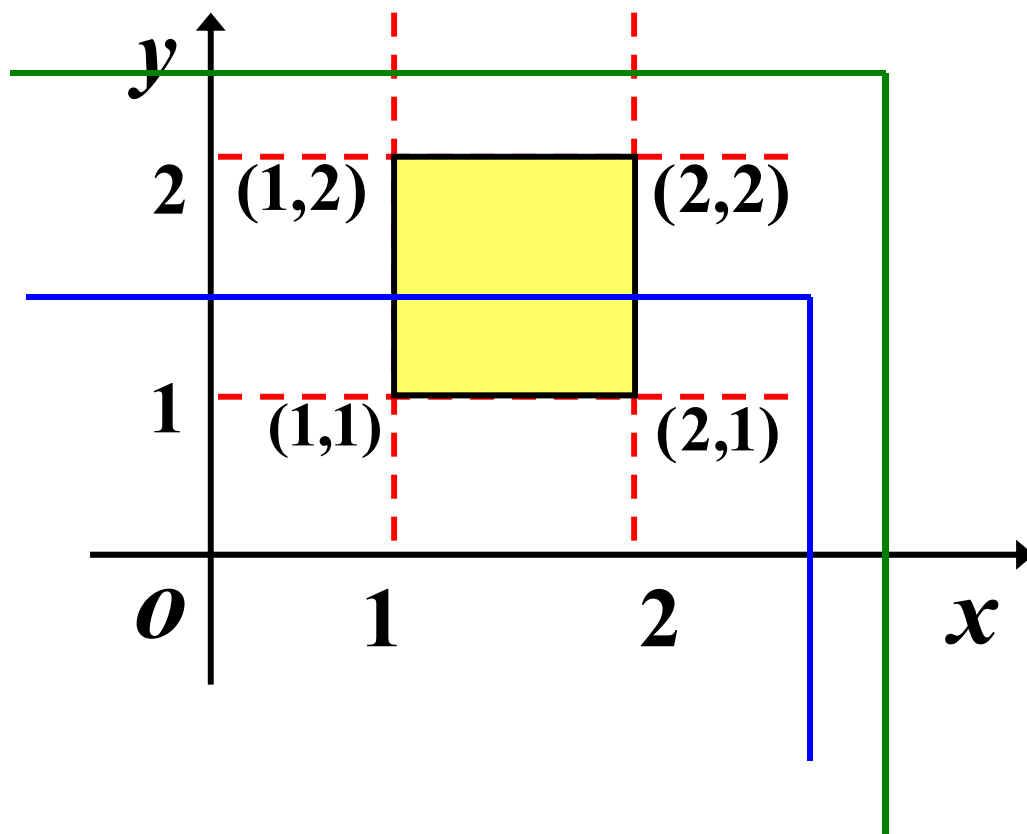
(2) 当 $1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2$ 时,

$$F(x, y) = p_{11} = 0;$$

(3) 当 $1 \leq x < 2, y \geq 2$ 时,

$$F(x, y) = p_{11} + p_{12} = 1/3;$$





(4) 当 $x \geq 2, 1 \leq y < 2$ 时, $F(x, y) = p_{11} + p_{21} = 1/3$;

(5) 当 $x \geq 2, y \geq 2$ 时, $F(x, y) = p_{11} + p_{21} + p_{12} + p_{22} = 1$.

所以 (X, Y) 的分布为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ 或 } y < 1, \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 2, y \geq 2, \text{ 或 } x \geq 2, 1 \leq y < 2, \\ 1, & x \geq 2, y \geq 2. \end{cases}$$

说明

离散型随机变量 (X, Y) 的分布函数归纳为

$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \leq x, y_j \leq y$ 的 i, j 求和.

连续型随机变量及其概率密度

1. 定义

对于二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$, 如果存在非负的函数 $f(x, y)$ 使对于任意 x, y 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) \, du \, dv,$$

则称 (X, Y) 是连续型的二维随机变量, 函数 $f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

2. 性质

(1) $f(x, y) \geq 0$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx \, dy = F(\infty, \infty) = 1$.

(3) 设 G 是 xOy 平面上的一个区域, 点 (X, Y) 落在 G 内的概率为

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) \, dx \, dy.$$

(4) 若 $f(x, y)$ 在 (x, y) 连续, 则有 $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$.

3. 说明

几何上, $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y = 1,$$

表示介于 $f(x, y)$ 和 xOy 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

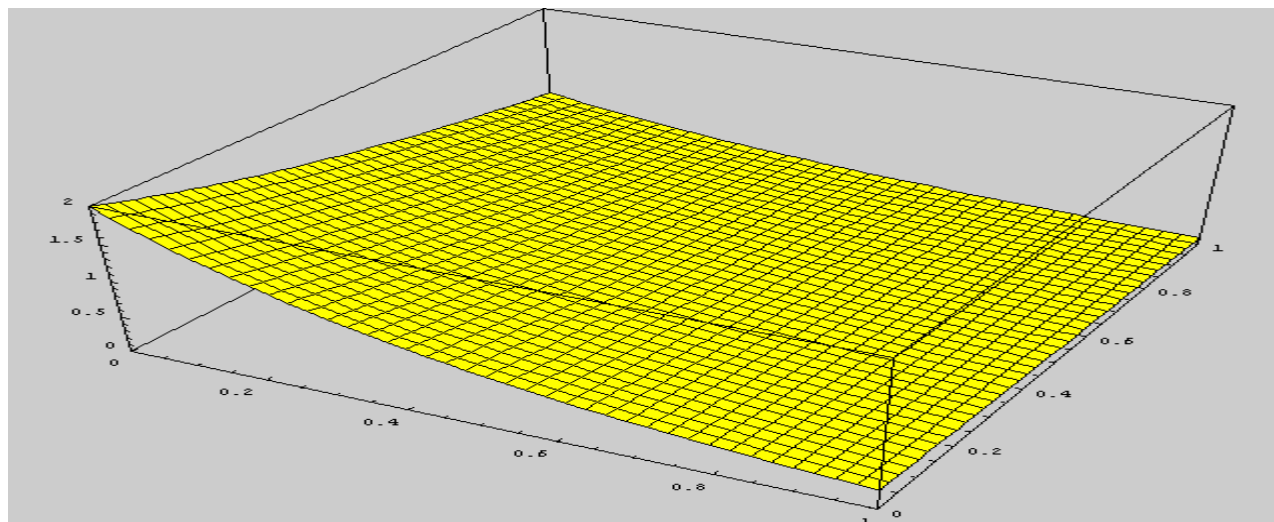
$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y,$$

$P\{(X, Y) \in G\}$ 的值等于以 G 为底, 以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶面的柱体体积.

例1 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x, y)$; (2) 求概率 $P\{Y \leq X\}$.



解 (1) $F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) \mathrm{d} u \mathrm{d} v$

$$= \begin{cases} \int_0^y \int_0^x 2\mathrm{e}^{-(2u+v)} \mathrm{d} u \mathrm{d} v, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

得 $F(x, y) = \begin{cases} (1 - \mathrm{e}^{-2x})(1 - \mathrm{e}^{-y}), & x > 0, y > 0. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(2) 将 (X, Y) 看作是平面上随机点的坐标,

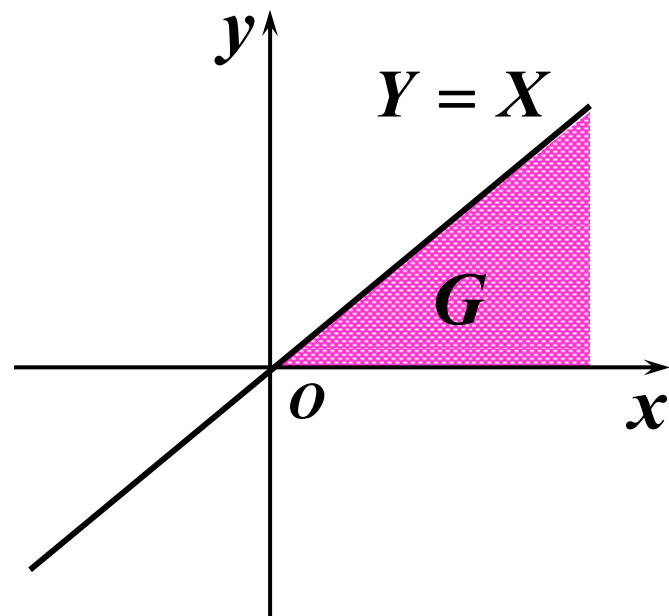
即有 $\{Y \leq X\} = \{(X, Y) \in G\}$,

$$P\{Y \leq X\} = P\{(X, Y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_y^{+\infty} 2e^{-(2x+y)} dx dy$$

$$= \frac{1}{3}.$$



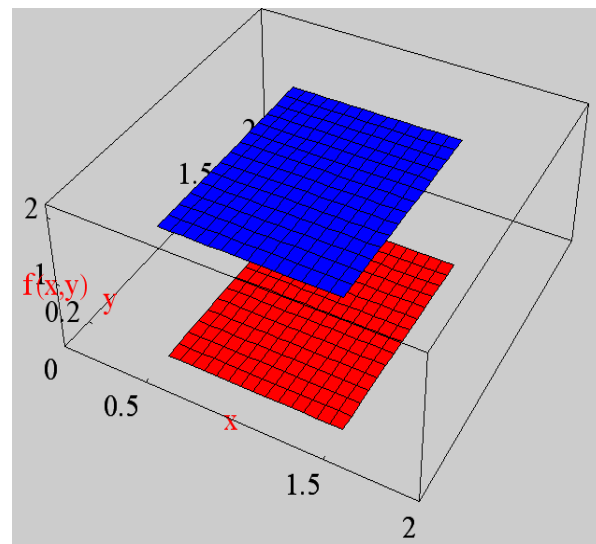
二维均匀分布和二维正态分布

1. 二维均匀分布

定义 设 D 是平面上的有界区域, 其面积为 S , 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

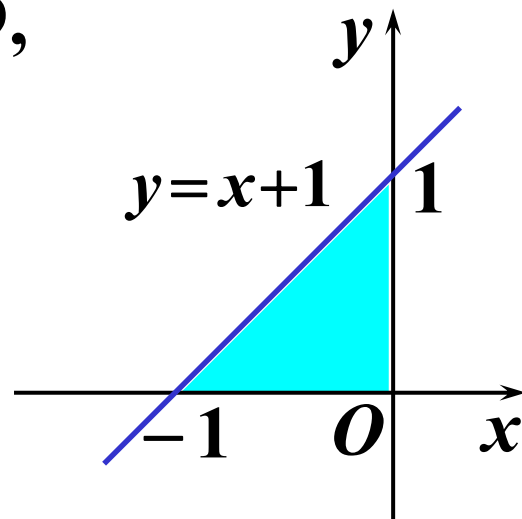
则称 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布.



例1 已知随机变量 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布, 试求 (X, Y) 的概率密度及分布函数, 其中 D 为 x 轴, y 轴及直线 $y = x+1$ 所围成的三角形区域.

解 由 $f(x, y) = \begin{cases} 1/S, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

得 $f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

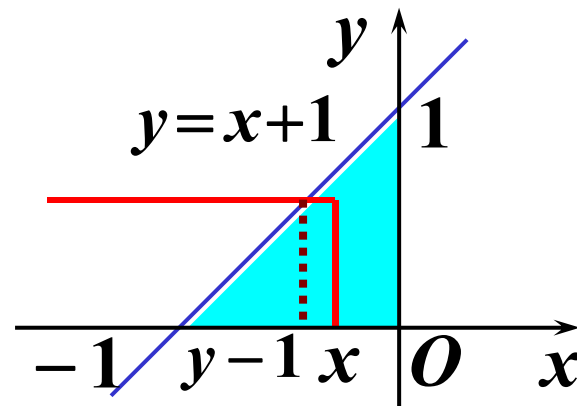


当 $x < -1$ 或 $y < 0$ 时, $f(x, y) = 0$

$$\Rightarrow F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = 0;$$

当 $-1 \leq x < 0, 0 \leq y < x+1$ 时,

$$\Rightarrow F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$



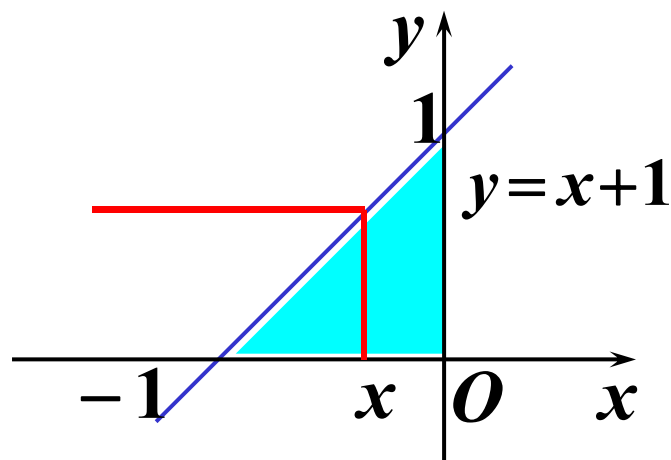
$$= \int_{-1}^{y-1} \mathrm{d}u \int_0^{u+1} 2 \mathrm{d}v + \int_{y-1}^x \mathrm{d}u \int_0^y 2 \mathrm{d}v$$

$$= (2x - y + 2)y;$$

当 $-1 \leq x < 0$, $y \geq x+1$ 时,

$$\Rightarrow F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \mathrm{d} u \mathrm{d} v$$

$$= \int_{-1}^x \mathrm{d} u \int_0^{u+1} 2 \mathrm{d} v = (x+1)^2;$$

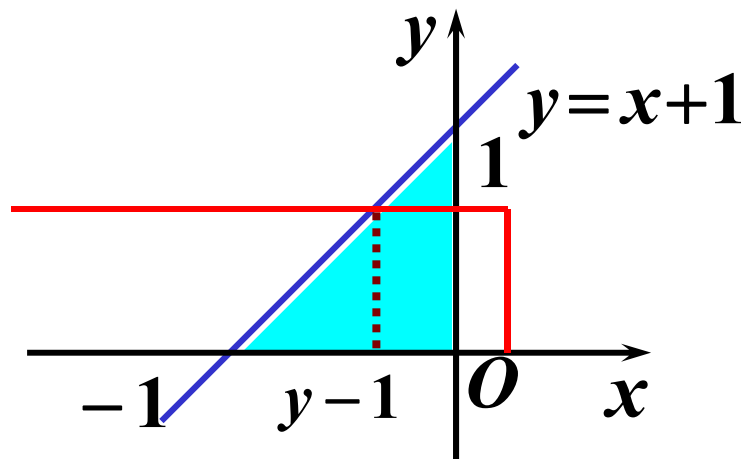


当 $x \geq 0, 0 \leq y < 1$ 时,

$$\Rightarrow F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \mathrm{d} u \mathrm{d} v$$

$$= \int_{-1}^{y-1} \mathrm{d} u \int_0^{u+1} 2 \mathrm{d} v + \int_{y-1}^0 \mathrm{d} u \int_0^y 2 \mathrm{d} v$$

$$= (2 - y)y;$$



当 $x \geq 1, y \geq 1$ 时,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) \mathrm{d} u \mathrm{d} v = \int_{-1}^0 \mathrm{d} u \int_0^{u+1} 2 \mathrm{d} v = 1.$$

所以 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < -1, \text{ 或 } y < 0, \\ (2x - y + 2)y, & -1 \leq x < 0, 0 \leq y < x + 1, \\ (x + 1)^2, & -1 \leq x < 0, y \geq x + 1, \\ (2 - y)y, & x \geq 0, 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

2. 二维正态分布

若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

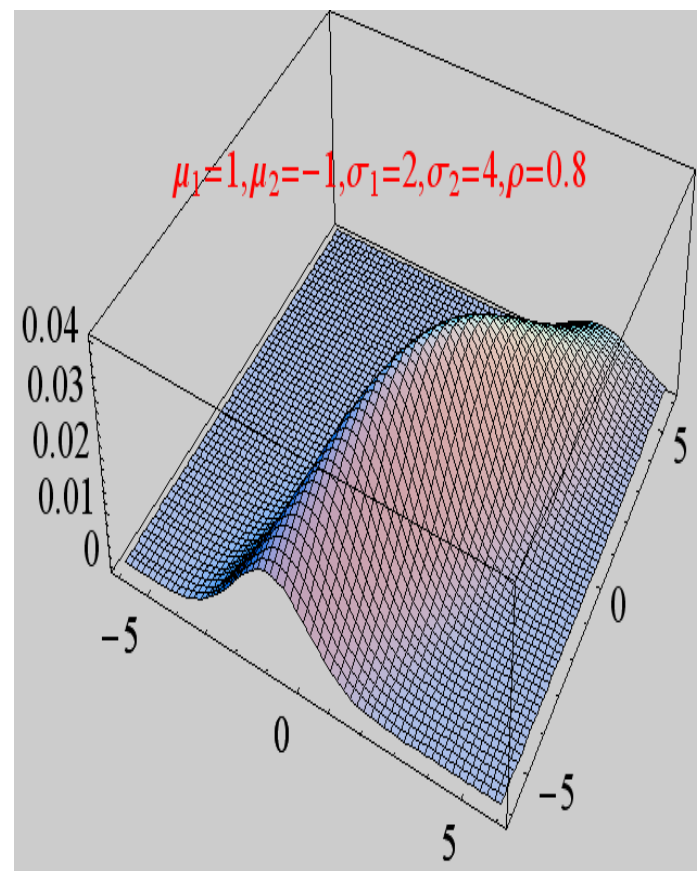
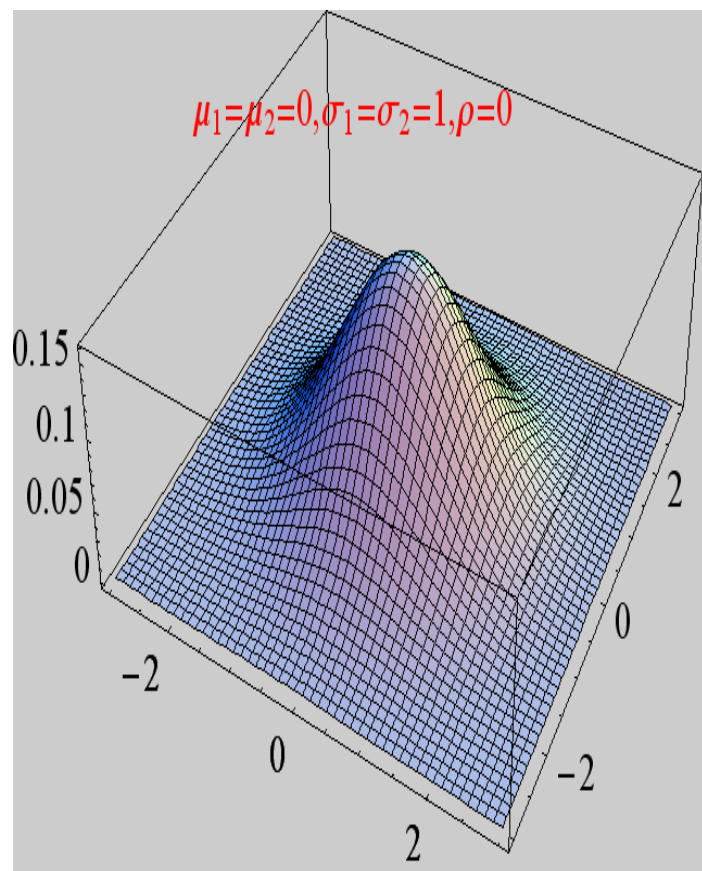
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$
$$(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty),$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 均为常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$.

则称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布. 记为

$$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$$

二维正态分布的图形



边缘分布

一、边缘分布函数

二、离散型随机变量的边缘分布律

三、连续型随机变量的边缘分布

一、边缘分布函数

问题:已知 (X,Y) 的分布,如何确定 X,Y 的分布?



$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, F(x) = P\{X \leq x\},$$

$$P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty) = F_X(x)$$



(X, Y) 关于 X 的边缘分布函数 .

定义 设 $F(x, y)$ 为随机变量 (X, Y) 的分布函数，
则 $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$.

令 $y \rightarrow \infty$, 称 $P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < \infty\} = F(x, \infty)$
为随机变量 (X, Y) 关于 X 的边缘分布函数.

记为 $F_X(x) = F(x, \infty)$.

同理令 $x \rightarrow \infty$,

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = P\{X < \infty, Y \leq y\} = P\{Y \leq y\}$$

为随机变量 (X, Y) 关于 Y 的边缘分布函数.

二、离散型随机变量的边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots.$$

记

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

分别称 $p_{i\bullet}$ ($i = 1, 2, \dots$) 和 $p_{\bullet j}$ ($j = 1, 2, \dots$) 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	\cdots	x_i	\cdots
y_1	p_{11}	p_{21}	\cdots	p_{i1}	\cdots
y_2	p_{12}	p_{22}	\cdots	p_{i2}	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	\cdots	p_{ij}	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, 2, \cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1, 2, \cdots.$$

因此得离散型随机变量关于 X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

例1 已知下列分布律求其边缘分布律.

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	0	1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意

联合分布 \longleftrightarrow 边缘分布

例2 一整数 N 等可能地在 $1, 2, 3, \dots, 10$ 十个值中取一个值. 设 $D = D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F = F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数. 试写出 D 和 F 的联合分布律, 并求边缘分布律.

解

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得 D 和 F 的联合分布律与边缘分布律:

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F = j\}$
0	1/10	0	0	0	1/10
1	0	4/10	2/10	1/10	7/10
2	0	0	0	2/10	2/10
$P\{D = i\}$	1/10	4/10	2/10	3/10	1

或将边缘分布律表示为

D	1	2	3	4
p_k	1/10	4/10	2/10	3/10

F	0	1	2
p_k	1/10	7/10	2/10

三、连续型随机变量的边缘分布

定义 对于连续型随机变量 (X, Y) , 设它的概率密度为 $f(x, y)$, 由于


$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x [\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \mathrm{d}v] \mathrm{d}u,$$

记
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \mathrm{d}v,$$

称其为随机变量 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度.

同理可得 Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}v,$$


$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) \mathrm{d}u.$$



Y 的边缘概率密度.

例3 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

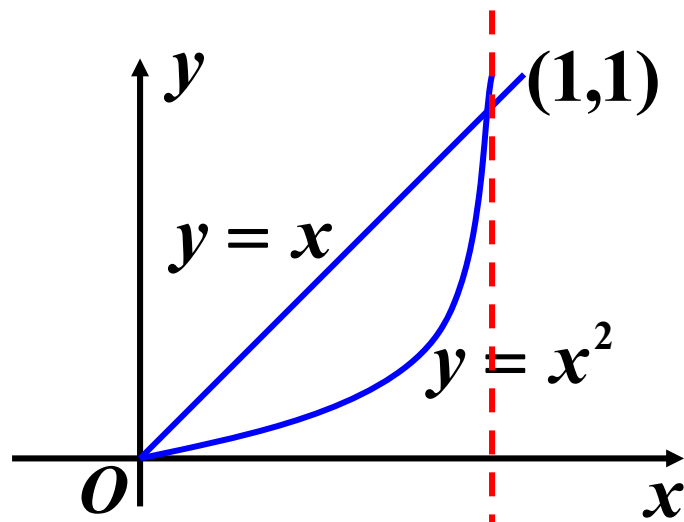
$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

解
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} y$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} y \\ &= \int_{x^2}^x 6 \mathrm{d} y = 6(x - x^2). \end{aligned}$$

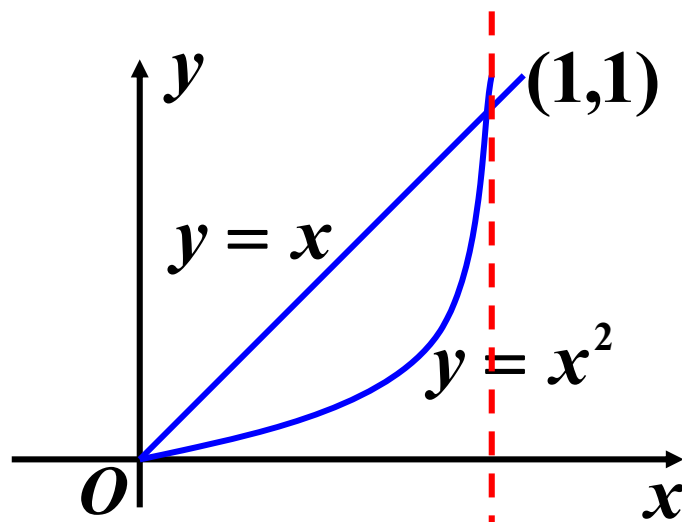


当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} y = 0.$$

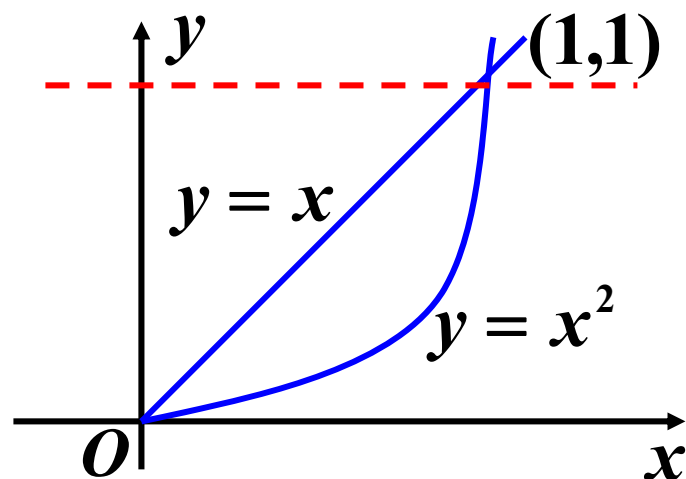
因而得

$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$



当 $0 \leq y \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} x \\ &= \int_y^{\sqrt{y}} 6 \mathrm{d} x \\ &= 6(\sqrt{y} - y). \end{aligned}$$



当 $y < 0$ 或 $y > 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} x = 0$.

得
$$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

例4 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty,$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 都是常数, 且 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$.

试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} y,$ 由于

$$\frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

$$= \left[\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right]^2 - \rho^2 \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right]^2} \mathrm{d} y,$$

令 $t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{y - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right),$

则有

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

即

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

同理可得

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，
并且都不依赖于参数 ρ .

令 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1 + \sin x \sin y),$$

显然, (X, Y) 不服从正态分布, 但是

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量, 其联合分布不一定是二维正态分布.

条件分布

一、离散型随机变量的条件分布

二、连续型随机变量的条件分布

一、离散型随机变量的条件分布

定义 设 (X, Y) 是二维离散型随机变量, 对于固定的 j , 若 $P\{Y = y_j\} > 0$, 则称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

对于固定的 i , 若 $P\{X = x_i\} > 0$, 则称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

其中 $i, j = 1, 2, \dots$.

例1 在一汽车工厂中, 一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是紧固 3 只螺栓, 其二是焊接 2 处焊点. 以 X 表示螺栓紧固得不良的数目, 以 Y 表示焊点焊接得不良的数目.

据积累的资料知 (X, Y) 具有分布律：

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P\{Y = j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X = i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

- (1) 求在 $X = 1$ 的条件下, Y 的条件分布律;
- (2) 求在 $Y = 0$ 的条件下, X 的条件分布律.

解 由上述分布律的表格可得

$$P\{Y = 0|X = 1\} = \frac{P\{X = 1, Y = 0\}}{P\{X = 1\}} = \frac{0.030}{0.045},$$

$$P\{Y = 1|X = 1\} = \frac{P\{X = 1, Y = 1\}}{P\{X = 1\}} = \frac{0.010}{0.045},$$

$$P\{Y = 2|X = 1\} = \frac{P\{X = 1, Y = 2\}}{P\{X = 1\}} = \frac{0.005}{0.045},$$

即在 $X = 1$ 的条件下, Y 的条件分布律为

$Y = k$	0	1	2
$P\{Y = k X = 1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

同理可得在 $Y = 0$ 的条件下, X 的条件分布律为

$X = k$	0	1	2	3
$P\{X = k Y = 0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

例2 一射手进行射击, 击中目标的概率为 p ($0 < p < 1$), 射击到击中目标两次为止. 设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数, 以 Y 表示总共进行的射击次数. 试求 X 和 Y 的联合分布律及条件分布律.

解 由题意知 X 取 m 且 Y 取 n 时, 有

$$P\{X = m, Y = n\} = p \cdot p \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p)}_{(n-2)\text{个}},$$

即得 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X = m, Y = n\} = p^2 q^{n-2},$$

其中 $q = 1 - p$, $n = 2, 3, \cdots$; $m = 1, 2, \cdots, n - 1$.

现在求条件分布律.

$$P\{X = m|Y = n\}, \quad P\{Y = n|X = m\},$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } P\{X = m\} &= \sum_{n=m+1}^{\infty} P\{X = m, Y = n\} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p^2 q^{n-2} \\ &= p^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} q^{n-2} = \frac{p^2 q^{m-1}}{1-q} = pq^{m-1}, \\ &\qquad\qquad\qquad m = 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Y = n\} &= \sum_{m=1}^{n-1} P\{X = m, Y = n\} \\ &= \sum_{m=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} = (n-1)p^2 q^{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots. \end{aligned}$$

所以当 $n = 2, 3, \dots$ 时,

$$\begin{aligned} P\{X = m | Y = n\} &= \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{Y = n\}} \\ &= \frac{p^2 q^{n-2}}{(n-1)p^2 q^{n-2}} = \frac{1}{n-1}, \end{aligned}$$

当 $m = 1, 2, \dots, n-1$ 时,

$$\begin{aligned} P\{Y = n | X = m\} &= \frac{P\{X = m, Y = n\}}{P\{X = m\}} \\ &= \frac{p^2 q^{n-2}}{p q^{m-1}} = p q^{n-m-1}, \\ &\qquad n = m + 1, m + 2, \dots. \end{aligned}$$

二、连续型随机变量的条件分布

定义 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, (X, Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 若对于固定的 y , $f_Y(y) > 0$, 则称 $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y = y$ 的条件下 X 的条件概率密度, 记为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

称 $\int_{-\infty}^x f_{X|Y}(u|y) \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^x \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} \mathrm{d}u$ 为在 $Y = y$ 的条

件下, X 的条件分布函数, 记为

$$P\{X \leq x|Y = y\} \text{ 或 } F_{X|Y}(x|y),$$

$$\text{即 } F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leq x|Y = y\} = \int_{-\infty}^x \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} \mathrm{d}u.$$

同理定义在 $X = x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leq y|X = x\} = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, v)}{f_X(x)} \mathrm{d}v.$$

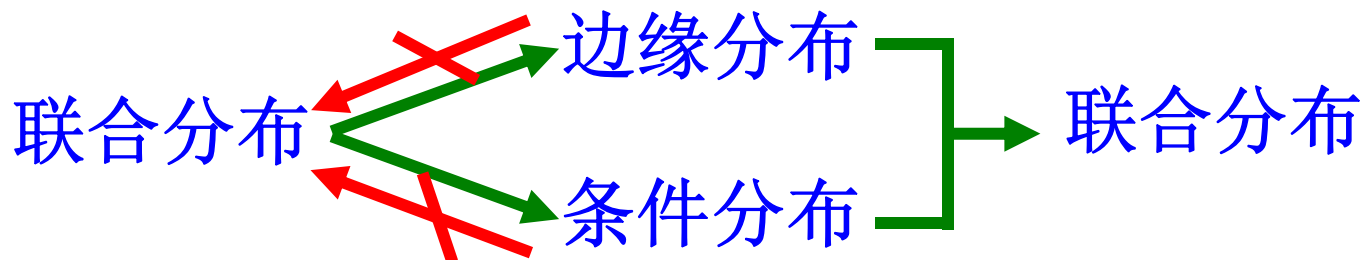
条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(u|y) \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^x [f(u, y) / f_Y(y)] \mathrm{d}u.$$

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(v|x) \mathrm{d}v = \int_{-\infty}^y [f(x, v) / f_X(x)] \mathrm{d}v.$$

说明

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



例3 设 G 是平面上的有界区域,其面积为 A . 若二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

设 (X, Y) 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上服从均匀分布,求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 由题意知随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/\pi, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

又知边缘概率密度为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \mathrm{d} x \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d} x = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}, & -1 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

于是当 $-1 < y < 1$ 时, 有

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

例4 设数 X 在区间 $(0, 1)$ 上随机地取值, 当观察到 $X = x$ ($0 < x < 1$) 时, 数 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机地取值. 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 由题意知 X 具有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对于任意给定的值 x ($0 < x < 1$), 在 $X = x$ 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_{Y|X}(y|x)f_X(x) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

故得 Y 的边缘概率密度

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\ &= \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

相互独立的随机变量

1. 定义

设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及边缘分布函数. 若对于所有 x, y

有 $P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\},$

即 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y),$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

2.说明

(1) 若离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X = i, Y = j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots.$$

X 和 Y 相互独立

$$\iff P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},$$

即 $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}.$

(2) 设连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 边缘概率密度分别为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则有

$$X \text{ 和 } Y \text{ 相互独立} \Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

(3) X 和 Y 相互独立, 则

$f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

例1 已知 (X, Y) 的分布律为

(X, Y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立, 求 α 与 β 的值.

解 将 (X, Y) 的分布律改写为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3} + \alpha + \beta$
$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9} + \alpha$	$\frac{1}{18} + \beta$	$\frac{2}{3} + \alpha + \beta$

(1) 由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \frac{2}{3} + \alpha + \beta = 1$,
 故 α 与 β 应满足的条件是 : $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 且 $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$.

(2) 因为 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$$

特别有

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} + \alpha \right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

$$\text{又 } \alpha + \beta = \frac{1}{3},$$

$$\text{得 } \beta = \frac{1}{9}.$$

例2 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 并且 X 服从 $N(a, \sigma^2)$, Y 在 $[-b, b]$ 上服从均匀分布, 求 (X, Y) 的概率密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立, 所以 $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

$$\text{又 } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2b}, & -b \leq y \leq b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

得 $f(x, y) = \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$

其中 $-\infty < x < \infty, \quad -b \leq y \leq b.$

当 $|y| > b$ 时, $f(x, y) = 0.$

例3 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 (X, Y) 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\} P\{Y=y_j\}.$$

$$P\{X=1, Y=2\} = P\{X=1\}P\{Y=2\} = 0.3 \times 0.6 = 0.18,$$

$$P\{X=1, Y=4\} = P\{X=1\}P\{Y=4\} = 0.3 \times 0.4 = 0.12,$$

$$P\{X=3, Y=2\} = P\{X=3\}P\{Y=2\} = 0.7 \times 0.6 = 0.42,$$

$$P\{X=3, Y=4\} = P\{X=3\}P\{Y=4\} = 0.7 \times 0.4 = 0.28.$$

因此 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

例4 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8-12时, 他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7-9时, 设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率.

解 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间, 由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & 8 < x < 12, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & 7 < y < 9, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

由于 X, Y 相互独立, 得 (X, Y) 的概率密度为

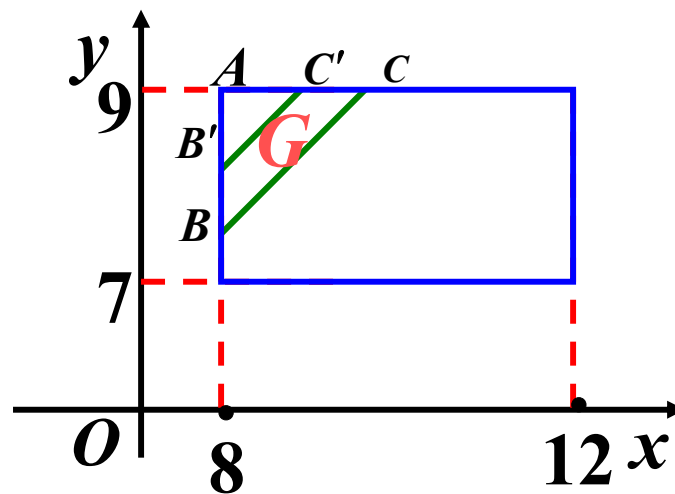
$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} 1/8, & 8 < x < 12, 7 < y < 9, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$P\{|X - Y| \leq 1/12\}$$

$$= \iint_G f(x, y) dx dy$$

$$= \frac{1}{8} \times (G \text{ 的面积}).$$

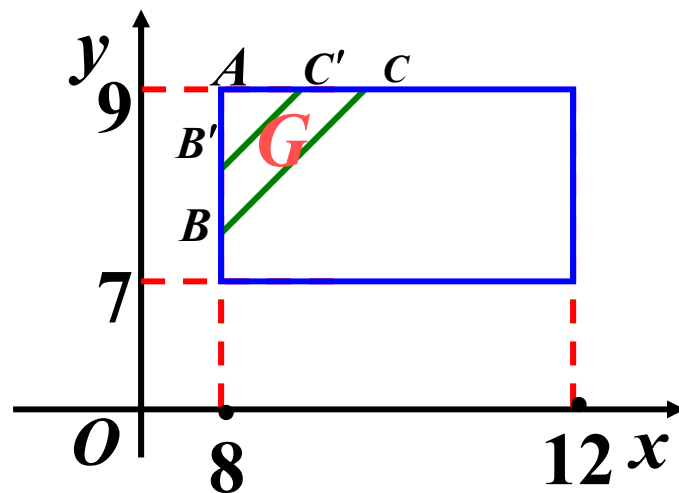


而 G 的面积 = ΔABC 的面积 - $\Delta AB'C'$ 的面积

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{13}{12} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{11}{12} \right)^2 = \frac{1}{6}.$$

于是 $P\{|X - Y| \leq 1/12\}$

$$= \frac{1}{8} \times (G \text{ 的面积}) = \frac{1}{48}.$$



因此负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率为 $\frac{1}{48}$.

多维随机变量

1. 定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S = \{e\}$ ，设 $X_1 = X_1(e), X_2 = X_2(e), \dots, X_n = X_n(e)$ ，是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量。

2. 分布函数

n 维随机变量 (X_1, X_2, \cdots, X_n) 的分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n\},$$

其中 x_1, x_2, \cdots, x_n 为任意实数.

3. 概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 使对于任意实数 x_1, x_2, \dots, x_n 有

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的概率密度函数.

4. 边缘分布函数

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \dots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 关于 X_1 的边缘分布函数.

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, \infty, \infty, \dots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 关于 (X_1, X_2) 的边缘分布函数.

其他依次类推.

5. 边缘概率密度

若 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的概率密度, 则 (X_1, X_2, \dots, X_n) 关于 X_1 , 关于 (X_1, X_2) 的边缘概率密度分别为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_n,$$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_3 dx_4 \cdots dx_n.$$

同理可得 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的 k ($1 \leq k < n$) 维边缘概率密度.

6. 相互独立性

若对于所有的 x_1, x_2, \dots, x_n 有

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的.

若对于所有的 $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ 有

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ = F_1(x_1, x_2, \dots, x_m)F_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}$$

其中 F_1, F_2, F 依次为随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_m), (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 和 $(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 的分布函数, 则称随机变量 (X_1, \dots, X_m) 与 (Y_1, \dots, Y_n) 相互独立.

7. 重要结论

定理 设 (X_1, X_2, \dots, X_m) 和 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 相互独立, 则 $X_i (i=1, 2, \dots, m)$ 和 $Y_j (j=1, 2, \dots, n)$ 相互独立. 又若 h, g 是连续函数, 则 $h(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 相互独立.

随机变量的函数的分布

一、离散型随机变量的函数的分布

二、连续型随机变量的函数的分布

一、离散型随机变量的函数的分布

设 $f(x)$ 是定义在随机变量 X 的一切可能值 x 的集合上的函数, 若随机变量 Y 随着 X 取值 x 的值而取 $y = f(x)$ 的值, 则称随机变量 Y 为随机变量 X 的函数, 记作 $Y = f(X)$.

问题

如何根据已知的随机变量 X 的分布求得随机变量 $Y = f(X)$ 的分布?

例1 设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求 $Y = X^2$ 的分布律.

解 Y 的可能值为 $(-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2$;

即 $0, 1, 4$.

$$\begin{aligned} P\{Y = 0\} &= P\{X^2 = 0\} = P\{X = 0\} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$P\{Y = 1\} = P\{X^2 = 1\} = P\{(X = -1) \cup (X = 1)\}$$

$$= P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{Y = 4\} = P\{X^2 = 4\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{4},$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此归纳出离散型随机变量函数的分布的求法.

离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量,其函数 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量.若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	\cdots	x_k	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_k	\cdots

则 $Y = g(X)$ 的分布律为

$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	\cdots	$g(x_k)$	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_k	\cdots

若 $g(x_k)$ 中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

例2

设

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

解 Y 的分布律为

Y	-4	-1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

二、连续型随机变量的函数的分布

例3 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求随机变量 $Y = 2X + 8$ 的概率密度.

解 第一步 先求 $Y = 2X + 8$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{2X + 8 \leq y\} \\ &= P\left\{X \leq \frac{y-8}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx \end{aligned}$$

第二步 由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F'_y(y) = \left[\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x) dx \right]' = f_X\left(\frac{y-8}{2}\right) \left(\frac{y-8}{2}\right)',$$

所以
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(\frac{y-8}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

例4 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3 e^{-x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Y = X^2$ 和 $Y = 2X + 3$ 的概率密度.

解 先求随机变量 $Y = X^2$ 分布函数,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\ &= \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} f_X(x) dx. \end{aligned}$$

再由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (\sqrt{y})^3 \cdot e^{-(\sqrt{y})^2} + 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \begin{cases} \frac{ye^{-y}}{2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

当 $Y = 2X + 3$ 时, 有 $y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2},$

$$f_Y(y) = F'_y(y) = \left[\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} f_X(x) dx \right]'$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{y-3}{2} \right)^3 e^{-\left(\frac{y-3}{2} \right)^2} \left(\frac{y-3}{2} \right)', & y \geq 3, \\ 0, & y < 3. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{y-3}{2} \right)^3 e^{-\left(\frac{y-3}{2} \right)^2}, & y \geq 3, \\ 0, & y < 3. \end{cases}$$

由上述例题可归纳出计算连续型随机变量的函数的概率密度的方法.

定理 设随机变量 X 的具有概率密度 $f_X(x)$, 其中 $-\infty < x < +\infty$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导, 且恒有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$), 则称 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

例5 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b$ ($a \neq 0$) 也服从正态分布.

证明 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

设 $y = g(x) = ax + b$,

得 $x = h(y) = \frac{y-b}{a}$, 知 $h'(y) = \frac{1}{a} \neq 0$.

$$\text{由公式 } f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

得 $Y = aX + b$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < y < \infty.$$

$$= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a} - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

得 $Y = aX + b$
 $\sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

例6 设电压 $V = A \sin \Theta$, 其中 A 是一个已知的正常数, 相角 Θ 是一个随机变量, 且有 $\Theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 试求电压 V 的概率密度.

解 因为 $v = g(\theta) = A \sin \theta$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒有

$$g'(\theta) = A \cos \theta > 0,$$

所以反函数为 $\theta = h(v) = \arcsin \frac{v}{A},$

$$h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}},$$

又由 $\Theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 知 Θ 的概率密度为

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由定理得 $V = A \sin \Theta$ 的概率密度为

$$\varphi(v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}}, & -A < v < A, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

设 $g(x)$ 是连续函数,若 X 是离散型随机变量,则 $Y = g(X)$ 也是离散型随机变量吗?若 X 是连续型的又怎样?

若 X 是离散型随机变量,它的取值是有限个或可列无限多个,因此 Y 的取值也是有限个或可列无限多个,因此 Y 是离散型随机变量.若 X 是连续型随机变量,那么 Y 不一定是连续型随机变量.

例如， 设 X 在 $(0,2)$ 上服从均匀分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

又设连续函数 $y = g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

则 $Y = g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 可以计算出来：

由于 Y 的取值为 $[0, 1]$, 所以

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$;

当 $y > 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 1$;

当 $0 \leq y \leq 1$ 时,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}$$

$$= \int_{g(x) \leq y} f(x) \mathrm{d} x = \int_{-\infty}^y f(x) \mathrm{d} x$$

$$= \int_0^y \frac{1}{2} \mathrm{d} x = \frac{y}{2}.$$

故 Y 的分布函数为 $F_Y(Y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{y}{2}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$

因为 $F_Y(y)$ 在 $y = 1$ 处间断,

故 $Y = g(X)$ 不是连续型随机变量,

又因为 $F_Y(y)$ 不是阶梯函数,

故 $Y = g(X)$ 也不是离散型随机变量.

两个随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

二、连续型随机变量函数的分布

一、离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1) $X + Y$, (2) $|X - Y|$ 的分布律.

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0				
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$				
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	等价于			
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$				
概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$

概率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(3,-2)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
$ X-Y $	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3

所以 $X + Y, |X - Y|$ 的分布律分别为

$X + Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$ X - Y $	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

结论

若二维离散型随机变量的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$\begin{aligned} P\{Z = z_k\} &= P\{g(X, Y) = z_k\} \\ &= \sum_{z_k = g(x_i y_j)} p_{ij}, \quad k = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

例2 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布为

X	1	3
P	0.3	0.7

Y	2	4
P	0.6	0.4

求随机变量 $Z = X + Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

			P	(X, Y)	$Z = X + Y$
$X \backslash Y$	2	4			
1	0.18	0.12	0.18	(1, 2)	3
3	0.42	0.28	0.12	(1, 4)	5
			0.42	(3, 2)	5
			0.28	(3, 4)	7

可得

所以

$Z = X + Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

例3 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律, 且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z = \max(X, Y)$ 的分布律 .

解 因为 X 与 Y 相互独立,

所以 $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$P\{\max(X,Y) = i\}$$

$$= P\{X = i, Y < i\}$$

$$+ P\{X \leq i, Y = i\}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\max(X,Y) = 0\} = P\{0,0\} = \frac{1}{2^2},$$

$$\begin{aligned} P\{\max(X,Y) = 1\} &= P\{1,0\} + P\{0,1\} + P\{1,1\} \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}. \end{aligned}$$

故 $Z = \max(X,Y)$ 的
分布律为

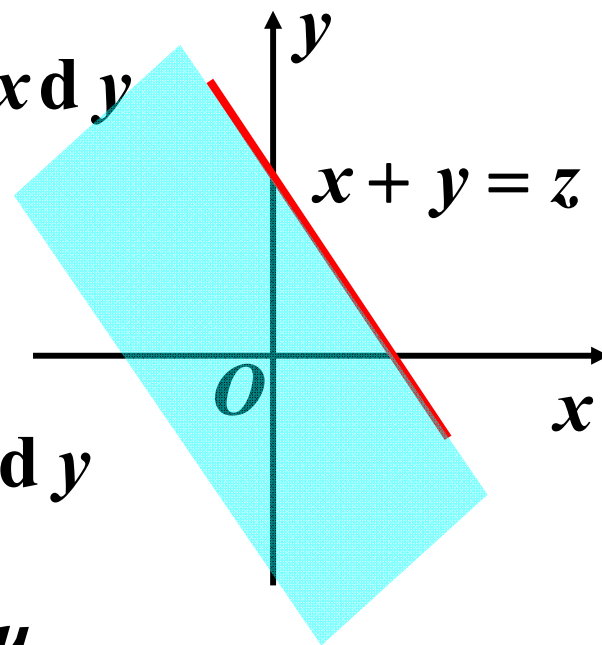
Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

二、连续型随机变量函数的分布

1. $Z=X+Y$ 的分布

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \right] dy \\ &\stackrel{x=u-y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^z f(u-y, y) du \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^z \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y, y) dy \right] du. \end{aligned}$$



由此可得概率密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) \mathrm{d} y.$$

由于 X 与 Y 对称, $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) \mathrm{d} x.$

当 X, Y 独立时, $f_Z(z)$ 也可表示为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d} y,$$

或 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) \mathrm{d} x.$

例4 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布, 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < y < +\infty,$$

由公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx,$

$$\text{得 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x - \frac{z}{2}\right)^2} dx$$

$$\stackrel{t = x - \frac{z}{2}}{=} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.

说明

一般, 设 X, Y 相互独立且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 则 $Z = X + Y$ 仍然服从正态分布, 且有 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.



有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

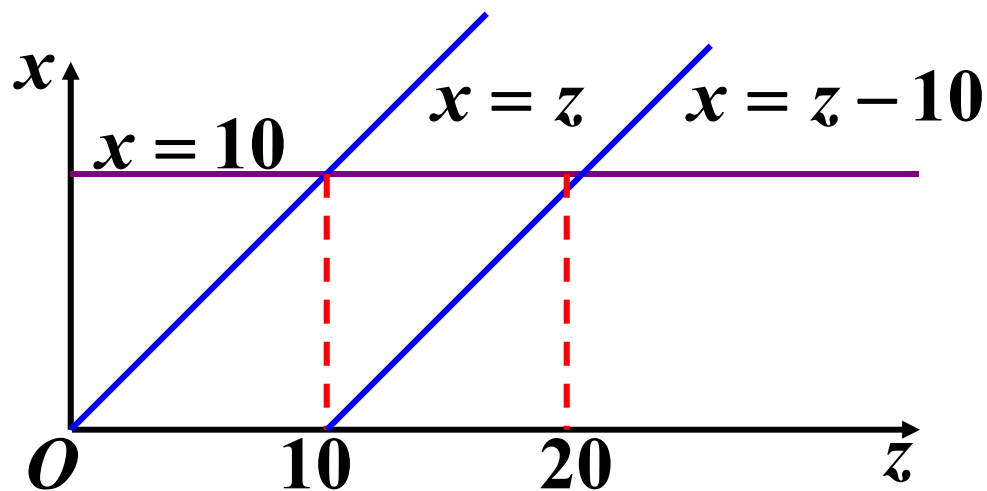
例5 在一简单电路中,两电阻 R_1 和 R_2 串联联接,设 R_1, R_2 相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求电阻 $R = R_1 + R_2$ 的概率密度.

解 由题意知 R 的概率密度为

$$f_R(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)dx.$$



$$\text{当} \begin{cases} 0 < x < 10, \\ 0 < z - x < 10, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 0 < x < 10, \\ z - 10 < x < z, \end{cases} \text{时,}$$

$$f_R(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(z-x)dx \text{ 中被积函数不为零.}$$

此时

$$f_R(z) = \begin{cases} \int_0^z f(x)f(z-x)\mathrm{d}x, & 0 \leq z < 10, \\ \int_{z-10}^{10} f(x)f(z-x)\mathrm{d}x, & 10 \leq z \leq 20, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1)$$

将

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f(z-x) = \begin{cases} \frac{10-(z-x)}{50}, & 0 \leq z-x \leq 10, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

代入 (1) 式得

$$f_R(z) = \begin{cases} (600z - 60z^2 + z^3)/15000, & 0 \leq z < 10, \\ (20-z)^3/15000, & 10 \leq z < 20, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

例6 设 X_1, X_2 相互独立且分别服从参数为 α_1, β ; α_2, β 的 Γ 分布 ($X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta), X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$), X_1, X_2 的概率密度分别为

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)} (\beta x)^{\alpha_1-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \alpha_1 > 0, \beta > 0,$$
$$f_{X_2}(y) = \begin{cases} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)} (\beta y)^{\alpha_2-1} e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \alpha_2 > 0, \beta > 0,$$

试证明 $X_1 + X_2$ 服从参数为 $\alpha_1 + \alpha_2, \beta$ 的 Γ 分布.

证明 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x) dx$

当 $z < 0$ 时, 易知 $f_Z(z) = 0$.

当 $z > 0$ 时, $Z = X_1 + X_2$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x) dx \\ &= \int_0^z \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)} (\beta x)^{\alpha_1-1} e^{-\beta x} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)} [\beta(z-x)]^{\alpha_2-1} e^{-\beta(z-x)} dx \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^z x^{\alpha_1-1} (z-x)^{\alpha_2-1} dx, \quad \text{令 } x = zt, \end{aligned}$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} (\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta z} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt$$

$$\underline{\underline{\Delta}} A(\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta z},$$

其中 $A = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt.$

由概率密度的性质可求得 A ,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} f_Z(z) dz = \frac{A}{\beta} \int_0^{+\infty} (\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta z} d(\beta z) \\ &= \frac{A}{\beta} (\alpha_1 + \alpha_2), \end{aligned}$$

即有 $A = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}.$

于是 $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} (\beta z)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} e^{-\beta z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

因此有 $X_1 + X_2$ 服从参数为 $\alpha_1 + \alpha_2, \beta$ 的 Γ 分布.

此结论可推广到 n 个相互独立的 Γ 分布变量之和的情况.

若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且 X_i 服从参数为 α_i, β ($i = 1, 2, \dots, n$) 的 Γ 分布, 则

$X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 服从参数为 $\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta$ 的 Γ 分布.

2. $Z = \frac{X}{Y}$ 的分布

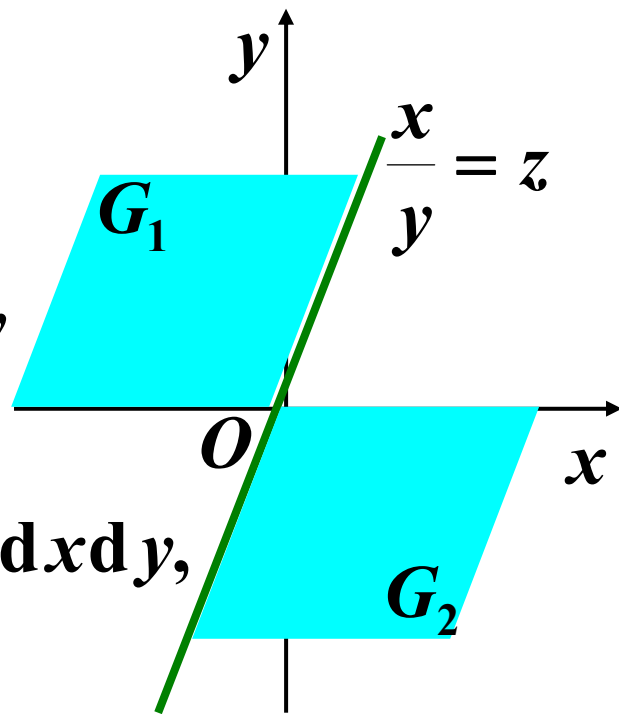
设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = \frac{X}{Y}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{X}{Y} \leq z\right\}$$

$$= \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{yz} f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^0 \int_{yz}^{+\infty} f(x, y) dx dy,$$

令 $u = x/y$,



$$\begin{aligned}\iint_{G_1} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{yz} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^z y f(yu, y) \mathrm{d} u \mathrm{d} y = \int_{-\infty}^z \int_0^{+\infty} y f(yu, y) \mathrm{d} y \mathrm{d} u\end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_{G_2} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y = - \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^0 y f(yu, y) \mathrm{d} y \mathrm{d} u,$$

故有 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$

$$= \iint_{G_1} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y + \iint_{G_2} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

$$= \int_{-\infty}^z \left[\int_0^{+\infty} yf(yu, y) \mathrm{d} y - \int_{-\infty}^0 yf(yu, y) \mathrm{d} y \right] \mathrm{d} u.$$

由此可得概率密度为

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^{+\infty} yf(yz, y) \mathrm{d} y - \int_{-\infty}^0 yf(yz, y) \mathrm{d} y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |y|f(yz, y) \mathrm{d} y. \end{aligned}$$

当 X, Y 独立时,

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|f_X(yz)f_Y(y) \mathrm{d} y.$$

例7 设 X, Y 分别表示两只不同型号的灯泡的寿命, X, Y 相互独立, 它们的概率密度分别为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 $Z = \frac{X}{Y}$ 的概率密度函数.

解 由公式

$$f_Z(z) = \int_0^{+\infty} y f(yz, y) dy - \int_{-\infty}^0 y f(yz, y) dy,$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

得所求密度函数 (当 $z > 0$ 时)

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^{+\infty} 2ye^{-yz}e^{-2y} dy \\ &= \int_0^{+\infty} 2ye^{-y(2+z)} dy = \frac{2}{(2+z)^2}, \end{aligned}$$

(当 $z \leq 0$ 时) $f_Z(z) = 0$,

得

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{(2+z)^2}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

3. $M = \max(X, Y)$ 及 $N = \min(X, Y)$ 的分布

设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$,

$$\begin{aligned} \text{则有 } F_{\max}(z) &= P\{M \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} \\ &= P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\} = F_X(z)F_Y(z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= P\{N \leq z\} = 1 - P\{N > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\} \end{aligned}$$

$$= 1 - [1 - P\{X \leq z\}] \cdot [1 - P\{Y \leq z\}]$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

故有

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

推广

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个相互独立的随机变量，
它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i) (i = 1, 2, \dots, n)$
则 $M = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 及 $N = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$
的分布函数分别为

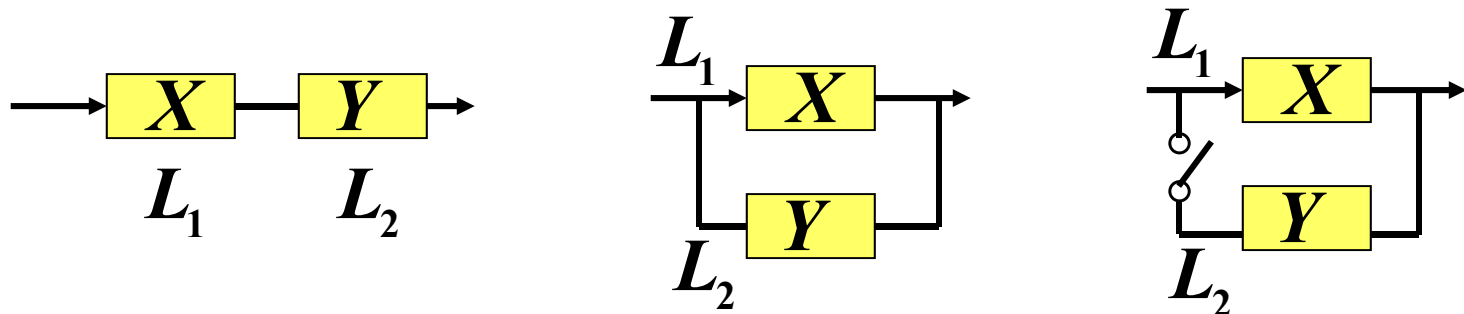
$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)].$$

若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$ ，则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

例8 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成, 连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y , 已知概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 且 $\alpha \neq \beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 (i) 串联情况

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时, 系统 L 就停止工作, 所以这时 L 的寿命为 $Z = \min(X, Y)$.

$$\text{由 } f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{由 } f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0; \end{cases} \Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \beta e^{-\beta y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

(ii) 并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时, 系统 L 才停止工作, 所以这时 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$.

$Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha + \beta)z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

(iii) 备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 才开始工作, 因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和, 即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时, $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} dy \\ &= \alpha \beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} dy = \frac{\alpha \beta}{\beta - \alpha} [e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}]. \end{aligned}$$