第二章　压力容器应力分析

CHAPTER Ⅱ
STRESS ANALYSIS OF PRESSURE VESSELS

第四节　平板应力分析

2.4 平板应力分析

教学重点：

（1）圆平板对称弯曲微分方程；

（2）承受均布载荷时圆平板中的应力。

教学难点：

圆平板对称弯曲微分方程的推导。

主要内容

2.4.1 概述

应用

平封头：常压容器、高压容器；

储槽底板：可以是各种形状；

换热器管板：薄管板、厚管板；

板式塔塔盘：圆平板、带加强筋的圆平板；

反应器触媒床支承板等。

2.4.1 概述（续）

（1）平板的几何特征及平板分类

几何特征：
- 中面是一平面
- 厚度小于其它方向的尺寸

分类：
- 厚板与薄板
- 大挠度板和小挠度板

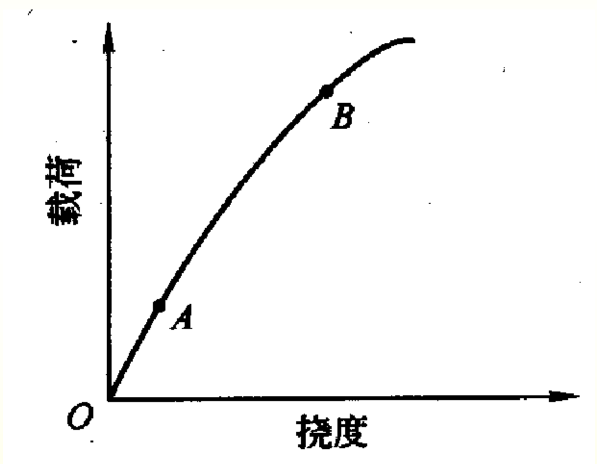
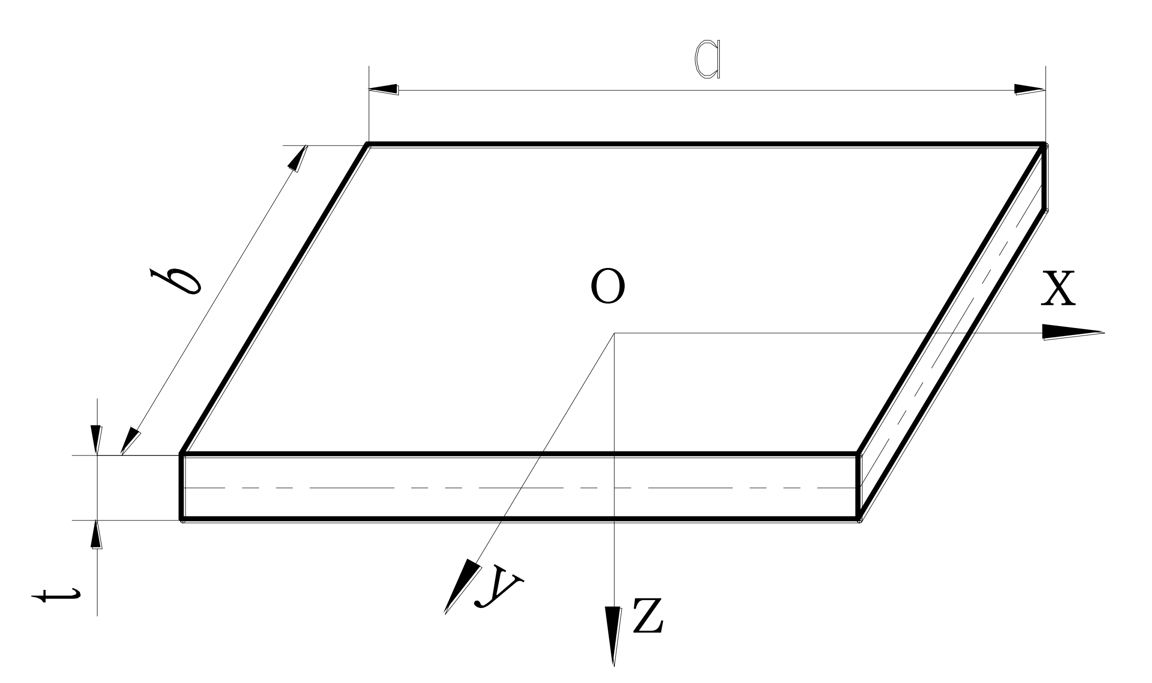


图2-27 平板载荷和扰度关系曲线



t/*b*≤1/5时，

w/*t*≤1/5时，

按小挠度薄板计算

图2-28 薄板

2.4.1 概述（续）

（2）载荷与内力

载荷
- 平面载荷（作用于板中面内的载荷）
- 横向载荷（垂直于板中面的载荷）
- 复合载荷

内力
- 薄 膜 力——中面内的拉、压力和面内剪力，并产生面内变形
- 弯曲内力——弯矩、扭矩和横向剪力，且产生弯扭变形

2.4.1 概述（续）

◆当变形很大时，面内载荷也会产生弯曲内力，而弯曲载荷也会产生面内力，所以，大挠度分析要比小挠度分析复杂的多

◆本书仅讨论弹性薄板的小挠度理论

2.4.1 概述（续）

弹性薄板的小挠度理论建立基本假设---克希霍夫Kirchhoff

① 板弯曲时其中面保持中性，即板中面内各点无伸缩和剪切变形，只有沿中面法线 w 的挠度。

只有横向载荷

②变形前位于中面法线上的各点，变形后仍位于弹性曲面的同一法线上，且法线上各点间的距离不变。

直法线假设

类同于梁的平面假设:变形前原为平面的梁的横截面变形后仍保持为平面，且仍然垂直于变形后的梁轴线。

③平行于中面的各层材料互不挤压，即板内垂直于板面的正应力较小，可忽略不计。

纵向不挤压

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程

分析模型

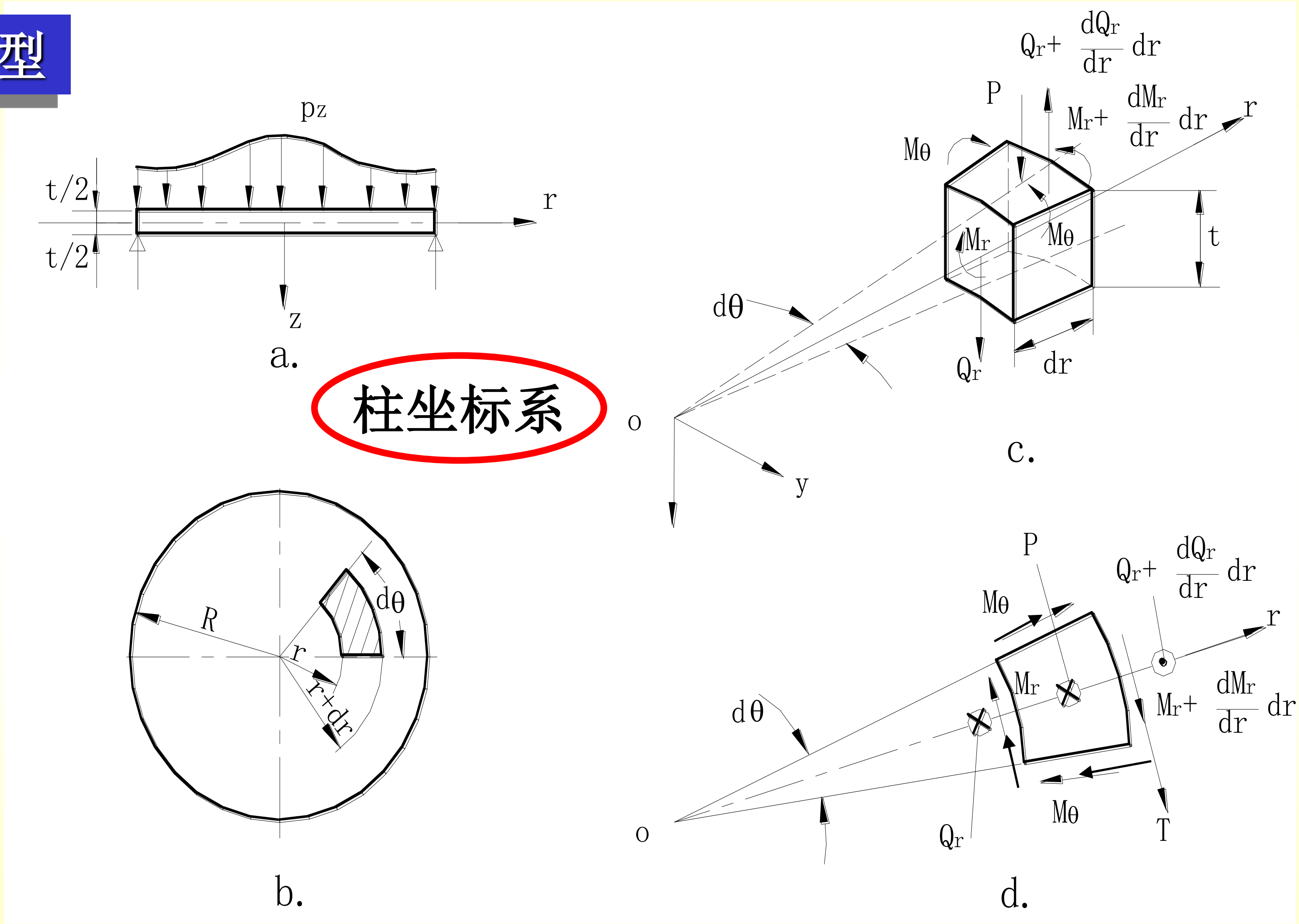


图2-29 圆平板对称弯曲时的内力分量及微元体受力

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

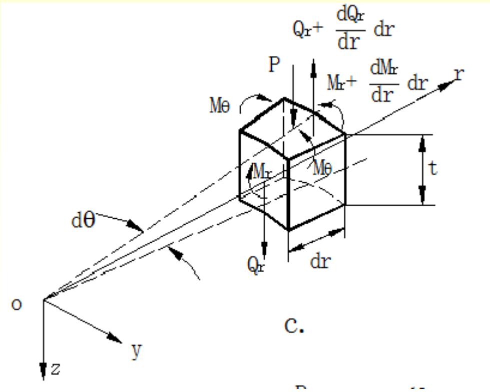
分析模型

半径R，厚度t的圆平板

受轴对称载荷P_z

在r、θ、z圆柱坐标系中

内力：M_r、M_θ、Q_r 三个内力分量



轴对称性

几何对称，载荷对称，约束对称，

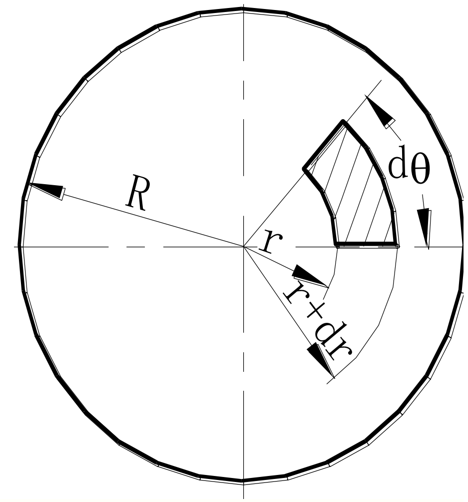
在r、θ、z圆柱坐标系中

挠度 W 只是 r 的函数，而与 θ无关。

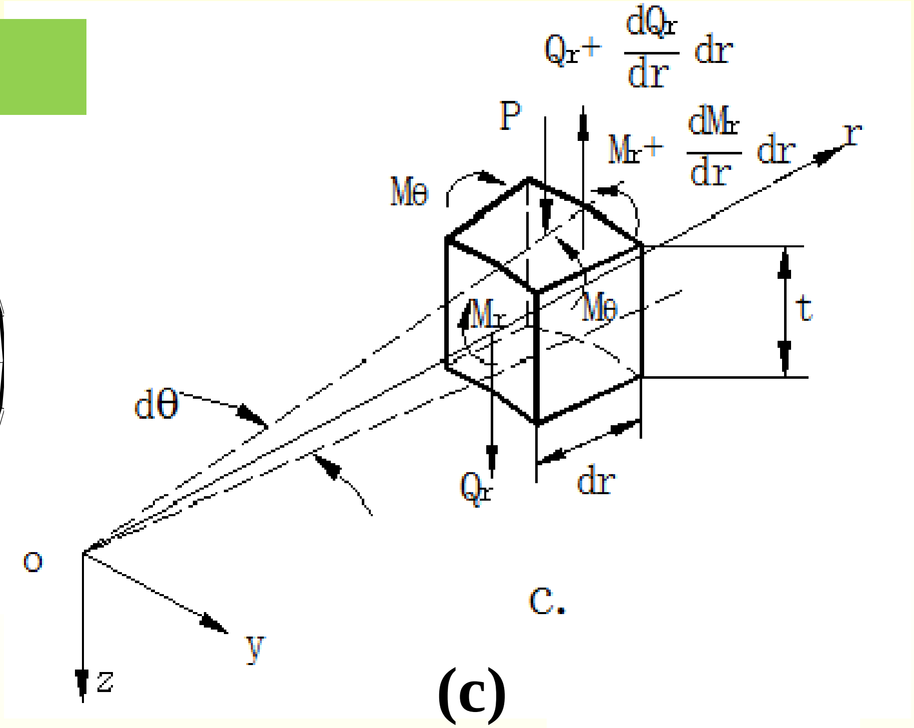
2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

挠度微分方程的建立： 基于平衡、几何、物理方程

内力：M_r、M_θ、Q_r 三个内力分量



(b)



(c)

微元体：

用半径为r和r+dr的两个圆柱面和夹角为dθ的两个径向截面截出板上一微元体

图2-29 圆平板对称弯曲时的内力分量及微元体受力

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

挠度微分方程的建立： 基于平衡、几何和物理方程

微元体内力

- 径向：M_r、$M_r+(dM_r/dr)dr$
- 周向：M_θ、 M_θ
- 横向剪力：Q_r、$Q_r+(dQ_r/dr)dr$

微元体外力　上表面　$P=prd\theta dr$

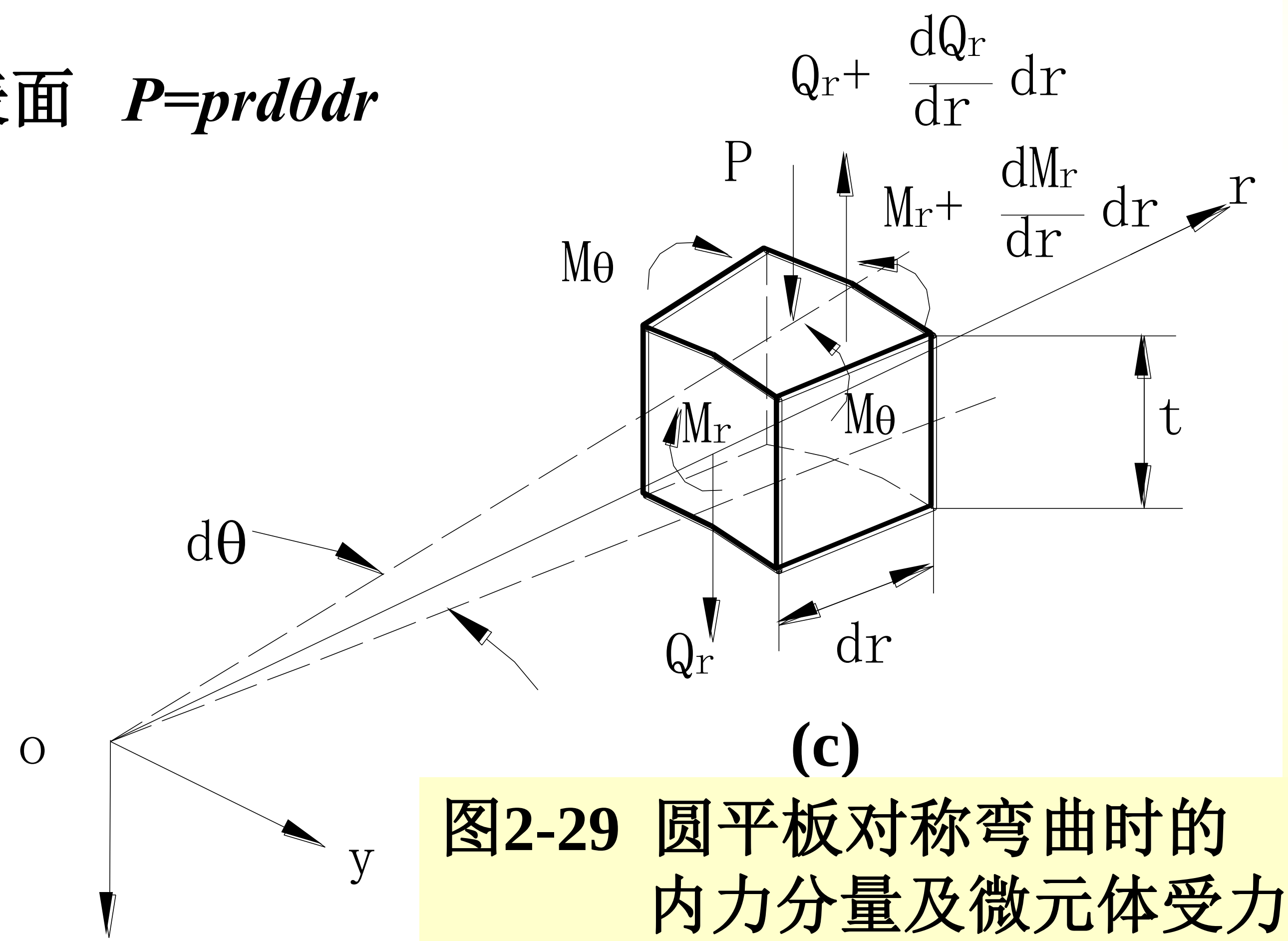


图2-29 圆平板对称弯曲时的内力分量及微元体受力

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

（1）平衡方程

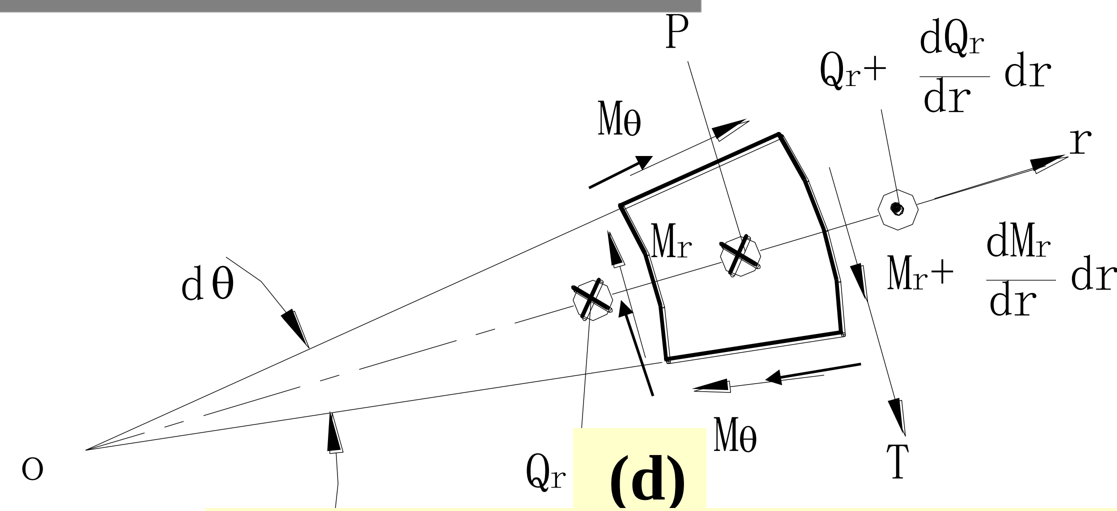


图2-29 圆平板对称弯曲时的内力分量及微元体受力

微体内力与外力对圆柱面切线T的力矩代数和为零，即 $\Sigma M_T=0$

$$\left(M_r+\frac{dM_r}{dr}dr\right)(r+dr)d\theta-M_r r d\theta-2M_\theta dr\sin\frac{d\theta}{2}+Q_r r d\theta dr+p_z r d\theta dr\frac{dr}{2}=0$$

又 $\sin\frac{d\theta}{2}=\frac{d\theta}{2}$

$$\boxed{M_r+\frac{dM_r}{dr}r-M_\theta+Q_r r=0}\qquad（2\text{-}54）$$

包含未知量：$\boldsymbol{M_r}$、$\boldsymbol{M_\theta}$、$\boldsymbol{Q_r}$

圆平板在轴对称载荷下的平衡方程

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

（2）几何方程

W~ε

取 $\overline{AB} = dr$

径向截面上与

中面相距为z，

半径为 r 与 $r + dr$

两点A与B构成的微段

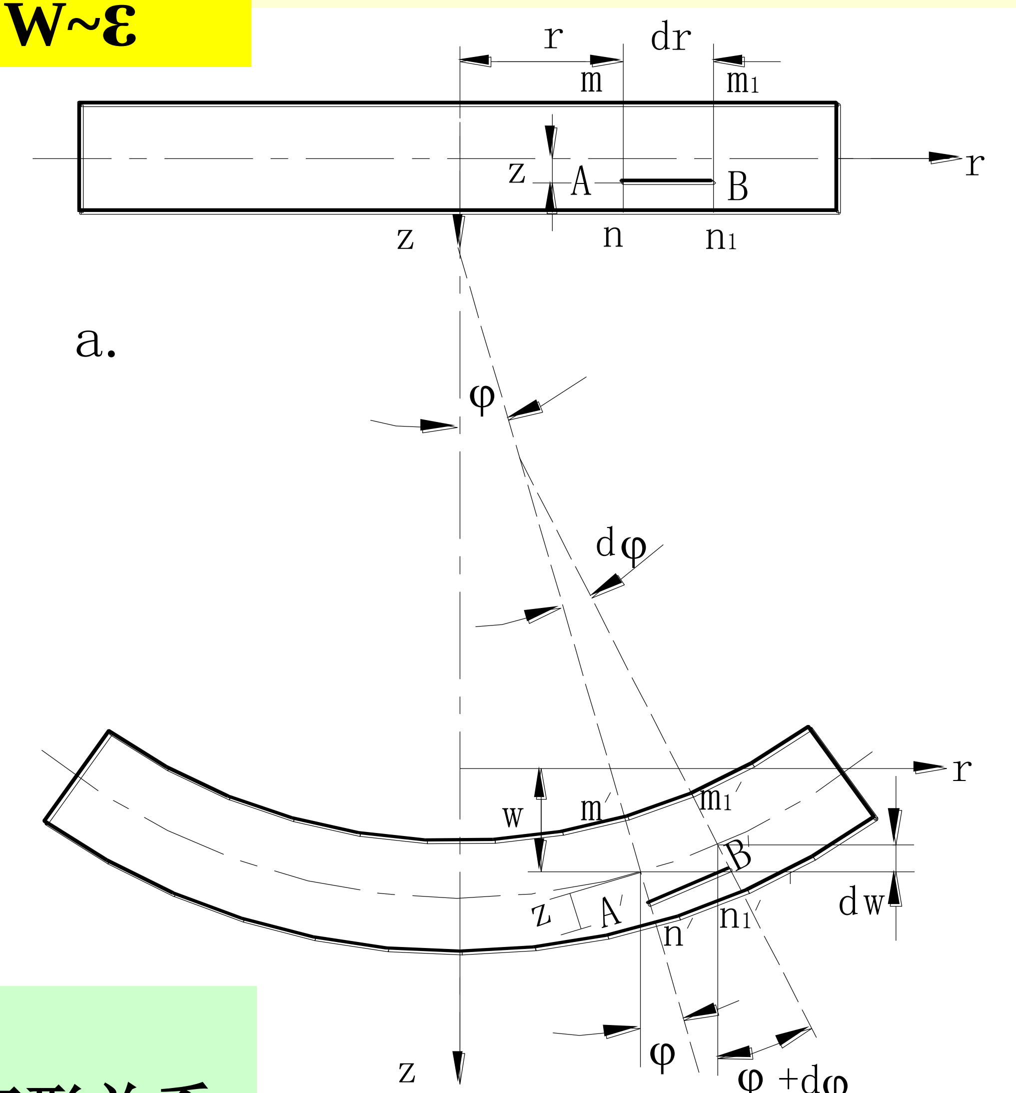


图 2—30
圆平板对称弯曲的变形关系

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

板变形后：

微段径向应变 $\varepsilon_r = \dfrac{z(\varphi + d\varphi) - z\varphi}{dr} = z\dfrac{d\varphi}{dr}$

过A点周向应变 $\varepsilon_\theta = \dfrac{2\pi(r + z\varphi) - 2\pi r}{2\pi r} = z\dfrac{\varphi}{r}$

作为小挠度 $\varphi = -\dfrac{dw}{dr}$

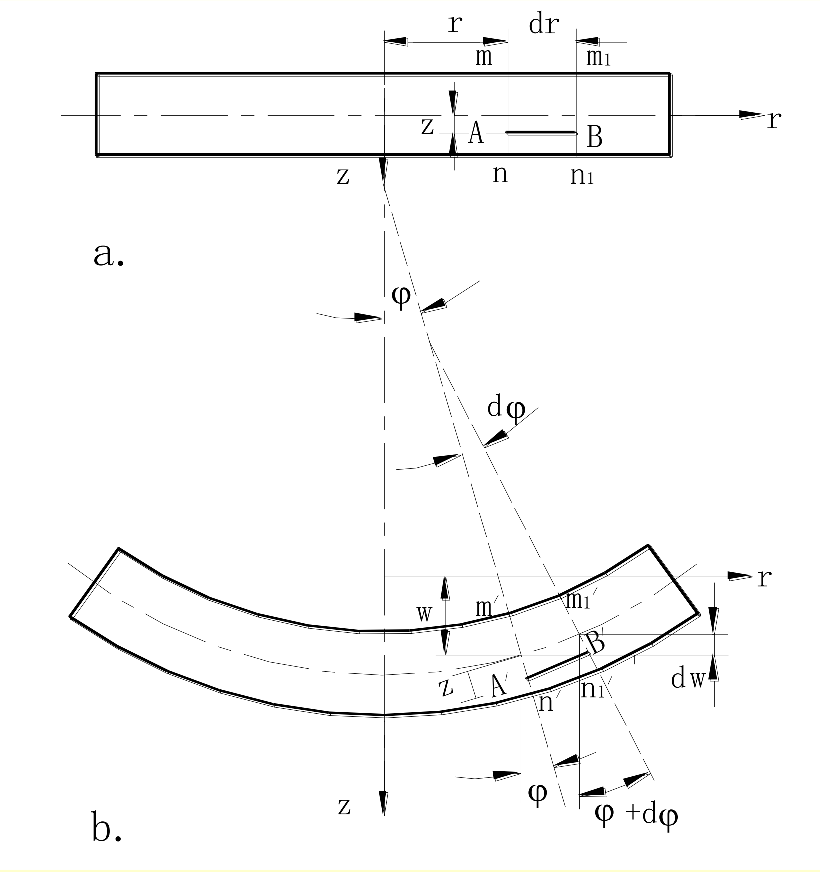
带入以上两式，

应变与挠度关系

几何方程

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_r &= -z\frac{d^2w}{dr^2}\\ \varepsilon_\theta &= -\frac{z}{r}\frac{dw}{dr}\end{aligned}}$$

（2-55）



2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

（3）物理方程

根据第3个假设，圆平板弯曲后，其上任意一点均处于两向应力状态。由广义虎克定律可得圆板物理方程为

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_r+\mu\varepsilon_\theta\right)\\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\theta+\mu\varepsilon_r\right)\end{aligned}} \quad （2\text{-}56）$$

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

（4）圆平板轴对称弯曲的小挠度微分方程

2-55代入2-56式：

$$\varepsilon_r = -z\frac{d^2w}{dr^2}$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{z}{r}\frac{dw}{dr}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r)$$

$$\sigma_r = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu\frac{d^2w}{dr^2}\right) \qquad (2\text{-}57)$$

微分方程
与Z成正比

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

（4）圆平板轴对称弯曲的小挠度微分方程（续）

通过圆板截面上弯矩与应力的关系，将弯矩M_r和M_θ表示成 **w** 的形式。由式（2-57）可见，σ_r 和σ_θ 沿着厚度（即z方向） 均为线性分布， 图2-31中所示为径向应力的分布图。

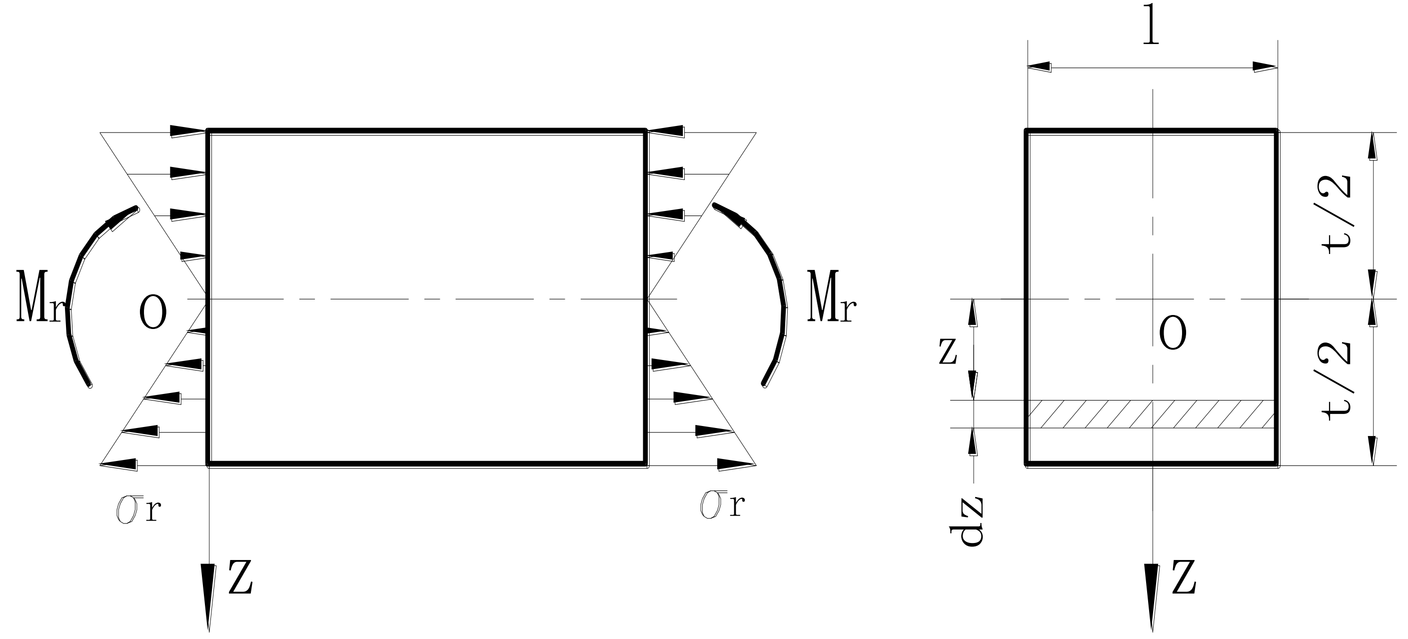
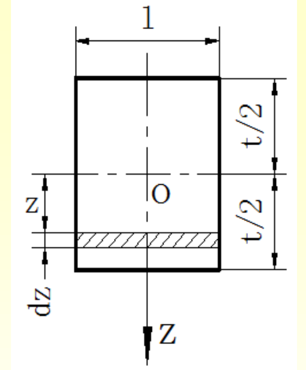


图2-31 圆平板内的应力与内力之间的关系

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）



σ_r、σ_θ 的线性分布力系便组成弯矩 M_r 、M_θ 。

单位长度上的径向弯矩为：

$$M_r=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\sigma_r z dz=-\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right)z^2dz$$

同理

$$M_r=-D\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\frac{dw}{dr}\right) \quad (2\text{-}58a)$$

$$M_\theta=-D'\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\mu\frac{d^2w}{dr^2}\right) \quad (2\text{-}58b)$$

$$\boxed{D'=\frac{Et^3}{12\left(1-\mu^2\right)}}$$

“抗弯刚度”与圆板的几何尺寸及材料性能有关

2.4.2 圆平板对称弯曲微分方程（续）

2-58代入2-57，

得弯矩和应力的关系式为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{12M_r}{t^3}z \\ \sigma_\theta &= \frac{12M_\theta}{t^3}z\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}59)$$

2-58代入平衡方程2-54，得：

$$\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}=\frac{Q_r}{D'}$$

受轴对称横向载荷圆形薄板小挠度弯曲微分方程：

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]=\frac{Q_r}{D'}} \qquad (2\text{-}60)$$

Q_r值可依不同载荷情况用静力法求得

2.4.3 圆平板中的应力

（圆平板轴对称弯曲的小挠度微分方程的应用）

简支
固支

一、承受均布载荷时圆平板中的应力

二、承受集中载荷时圆平板中的应力

2.4.3 圆平板中的应力（续）

一、承受均布载荷时圆平板中的应力

据图2-32，可确定作用在半径为r的圆柱截面上的剪力，即：

$$Q_r=\frac{\pi r^2 p}{2\pi r}=\frac{pr}{2}$$

代入2-60式中

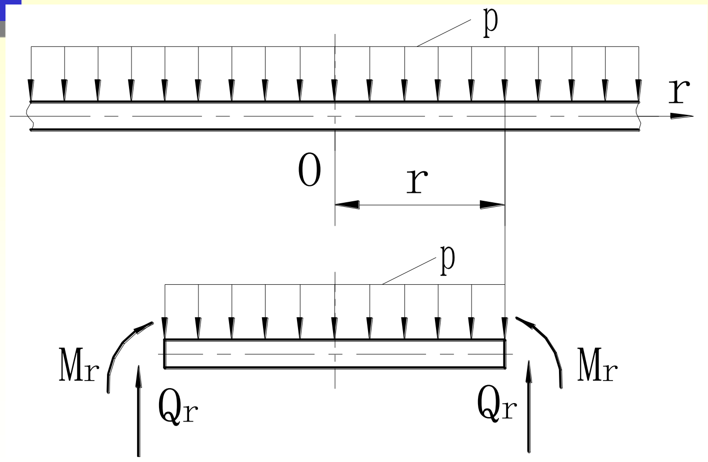


图2-32　均布载荷作用时圆板内Q_r的确定

均布载荷作用下圆平板弯曲微分方程为

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]=\frac{pr}{2D'}$$

对r连续两次积分

得到挠曲面在半径方向的斜率

$$\frac{dw}{dr}=\frac{pr^3}{16D'}+\frac{C_1 r}{2}+\frac{C_2}{r} \quad (2\text{-}61)$$

对r连续三次积分

得到中面在弯曲后的挠度

$$w=\frac{pr^4}{64D'}+\frac{C_1 r^2}{4}+C_2\ln r+C_3 \quad (2\text{-}62)$$

2.4.3 圆平板中的应力（续）

C_1、C_2、C_3均为积分常数。

对于圆平板在板中心处（r=0）挠曲面之斜率与挠度均为有限值，因而要求积分常数$C_2=0$，于是上述方程改写为：

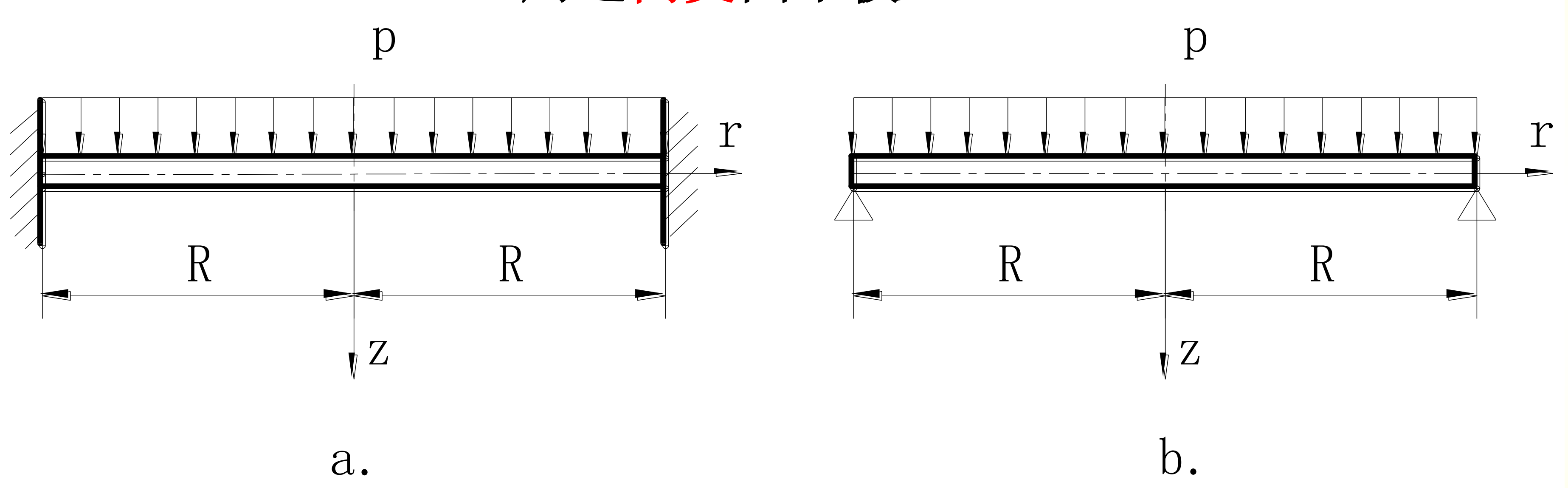
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dw}{dr} &= \frac{pr^3}{16D'} + \frac{C_1 r}{2} \\ w &= \frac{pr^4}{64D'} + \frac{C_1 r^2}{4} + C_3 \end{aligned}} \qquad (2\text{-}63)$$

式中C_1、C_3由边界条件确定。

2.4.3 圆平板中的应力（续）

下面讨论两种典型支承情况(两种边界条件）

- 周边固支圆平板
- 周边简支圆平板



周边固支圆平板　　　　周边简支圆平板

图2-33 承受均布横向载荷的圆板

2.4.3 圆平板中的应力（续）

1. 周边固支圆平板

在支承处不允许有挠度和转角

$$r = R, \quad \frac{dw}{dr} = 0$$

$$r = R, \quad w = 0$$

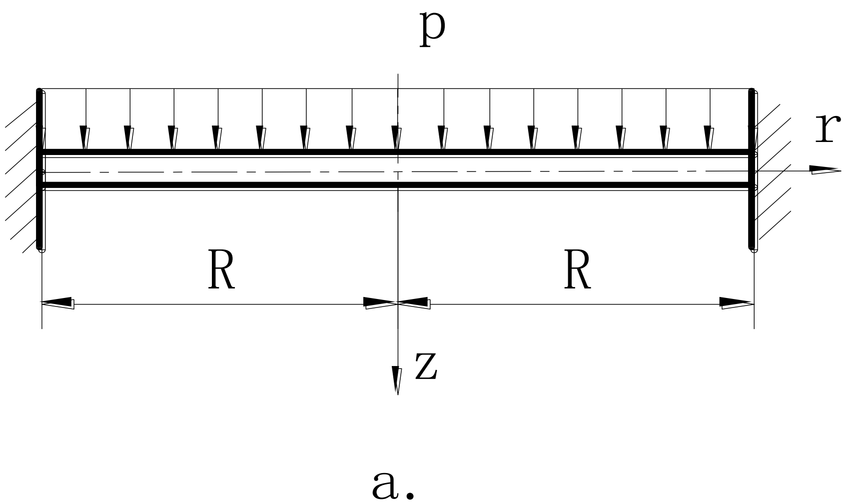


图2-33 周边固支圆平板

将上述边界条件代入式（2-63），解得积分常数：

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{pR^2}{8D'}, \\ C_3 &= \frac{pR^4}{64D'} \end{aligned}\right\}$$

代入式（2-63）

得周边固支平板的斜率和挠度方程

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{pr}{16D'}\left(R^2 - r^2\right)$$

$$w = \frac{p}{64D'}\left(R^2 - r^2\right)^2 \qquad \text{（2-64）}$$

2.4.3 圆平板中的应力（续）

将挠度W对r的一阶导数和二阶导数代入式（2-58），便得固支条件下的周边固支圆平板弯矩表达式：

$$M_r = \frac{p}{16}\left[R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)\right]$$

$$M_\theta = \frac{p}{16}\left[R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)\right] \quad \text{（2-65）}$$

由此（代入2-59）弯曲应力计算试，可得r处上、下板面的应力表达式：

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= \mp\frac{M_r}{t^2/6} = \mp\frac{3}{8}\frac{p}{t^2}\left[R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)\right] \\ \sigma_\theta &= \mp\frac{M_\theta}{t^2/6} = \mp\frac{3}{8}\frac{p}{t^2}\left[R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)\right] \end{aligned}} \quad \text{（2-66）}$$

2.4.3 圆平板中的应力（续）

周边固支圆平板下表面的应力分布，如图2-34(a)所示。

最大应力在板边缘上下表面，即

$$(\sigma_r)_{max} = \pm\frac{3pR^2}{4t^2}$$

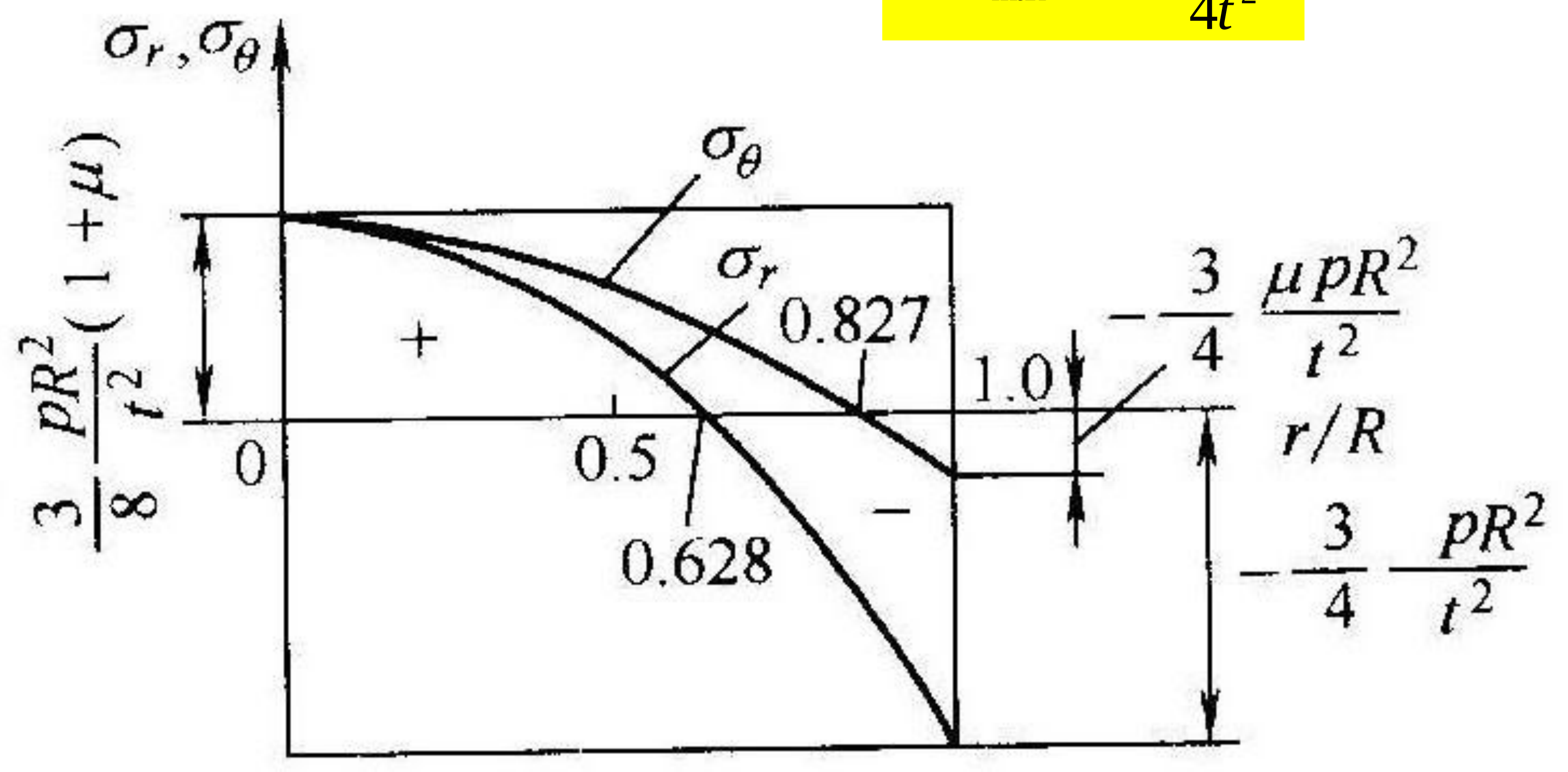


图2-34a 周边固支圆平板的弯曲应力分布（板下表面）

2.4.3 圆平板中的应力（续）

2. 周边简支圆平板

$$r = R, \qquad w = 0$$

$$r = R, \qquad M_r = 0$$

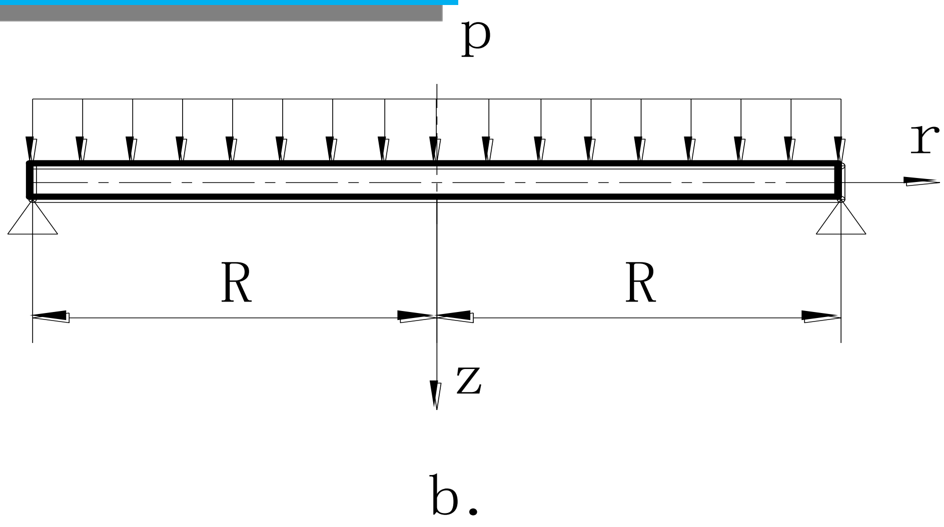


图2-33 承受均布横向载荷的圆平板

将上述边界条件代入式（2-63），解得积分常数C_1、C_3：

代入式（2-63）

得周边简支平板的挠度方程

$$w = \frac{p}{64D'}\left[\left(R^2 - r^2\right)^2 + \frac{4R^2\left(R^2 - r^2\right)}{1+\mu}\right] \qquad (2\text{-}67)$$

2.4.3 圆平板中的应力（续）

弯矩表达式：

$$M_r = \frac{p}{16}(3+\mu)(R^2 - r^2)$$

$$M_\theta = \frac{p}{16}\left[R^2(3+\mu) - r^2(1+3\mu)\right] \quad （2-68）$$

应力表达式：

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_r &= \mp \frac{3}{8}\frac{p}{t^2}(3+\mu)(R^2 - r^2) \\ \sigma_\theta &= \mp \frac{3}{8}\frac{p}{t^2}\left[R^2(3+\mu) - r^2(1+3\mu)\right] \end{aligned}} \quad （2-69）$$

2.4.3 圆平板中的应力（续）

不难发现，最大弯矩和相应的最大应力均在板中心处 $r=0$ ，

$$\begin{cases} (M_r)_{\max} = (M_\theta)_{\max} = \dfrac{pR^2}{16}(3+\mu) \\ (\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = \dfrac{3(3+\mu)}{8}\dfrac{pR^2}{t^2} \end{cases}$$

周边简支板下表面的应力分布曲线见图2-34(b)。

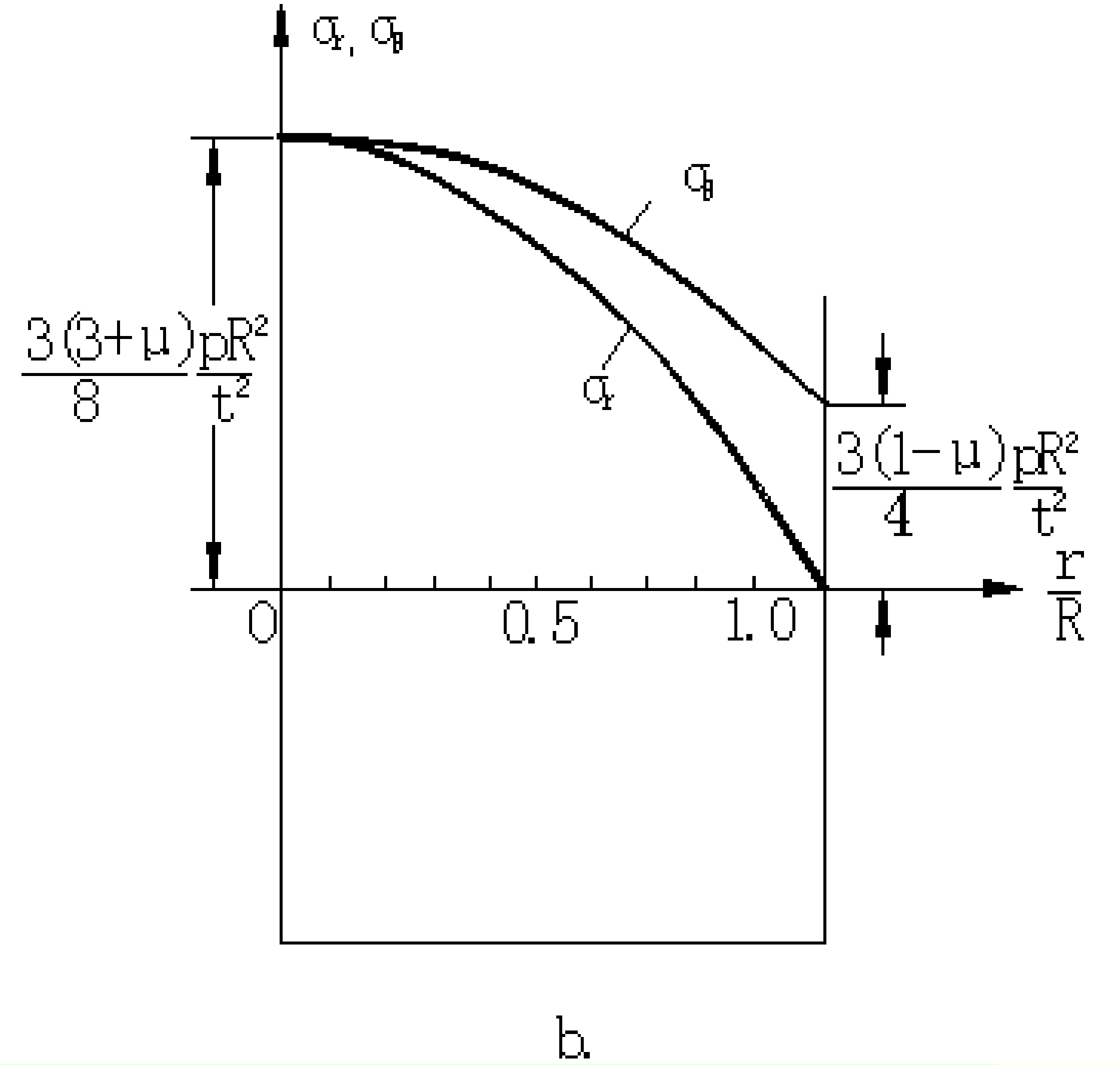


图2-34（b） 周边简支圆板的弯曲应力分布（板下表面）

2.4.3 圆平板中的应力（续）

3. 支承对平板刚度和强度的影响

a. 挠度

周边固支时，最大挠度在板中心 $w_{max}^{f}=\frac{pR^4}{64D'}$ （2-70）

周边简支时，最大挠度在板中心 $w_{max}^{s}=\frac{5+\mu}{1+\mu}\frac{pR^4}{64D'}$ （2-71）

$\mu=0.3$

$\frac{简支}{固支}$ ➡ $\frac{w_{max}^{s}}{w_{max}^{f}}=\frac{5+0.3}{1+0.3}=4.08$

周边简支板的最大挠度远大于周边固支板的挠度。

2.4.3 圆平板中的应力（续）

b. 应力

周边固支圆平板中的最大正应力为支承处的径向应力，其值为

$$(\sigma_r)_{\max}^f = \frac{3pR^2}{4t^2} \quad （2\text{-}72）$$

周边简支圆平板中的最大正应力为板中心处的径向应力，其值为

$$(\sigma_r)_{\max}^s = \frac{3(3+\mu)}{8}\frac{pR^2}{t^2} \quad （2\text{-}73）$$

$$\mu \approx 0.3$$

$$\frac{(\sigma_r)_{\max}^s}{(\sigma_r)_{\max}^f} = \frac{3.3}{2} = 1.65$$

周边简支板的最大正应力大于周边固支板的正应力。

2.4.3 圆平板中的应力（续）

◆挠度反映板的刚度

应力反映板的强度

周边固支的圆平板在刚度和强度

两方面均优于周边简支圆平板

2.4.3 圆平板中的应力（续）

内力引起的切应力：

在均布载荷p作用下，圆板柱面上的最大剪力 $(Q_r)_{\max} = \dfrac{pR}{2}$ ，

（ $r = R$ 处）

近似采用矩形截面梁中最大切应力公式 $\tau_{\max} = \dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{bh}$

得到 $$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{(Q_r)_{\max}}{1 \times t} = \frac{3}{4}\frac{pR}{t}$$

最大正应力与 $\left(R/t\right)^2$ 同一量级；

最大切应力则与 R/t 同一量级。

因而对于薄板R>>t，板内的正应力远比切应力大。

2.4.3 圆平板中的应力（续）

σ_{max} 和 **Wmax与圆平板的材料（*E*、 *μ*）、半径、厚度有关**

- 若构成板的材料和载荷已确定，则减小半径或增加厚度都可减小挠度和降低最大正应力

- 工程中较多的是采用改变其周边支承结构，使它更趋近于固支条件

- 增加圆平板厚度或用正交栅格、圆环肋加固平板等方法来提高平板的强度与刚度

2.4.3 圆平板中的应力（续）

4. 薄圆平板应力特点

- 板内为二向应力 σ_r、 σ_θ 。平行于中面各层相互之间的正应力 σ_z 及剪力 Q_r 引起的切应力 τ 均可予以忽略。

- 正应力 σ_r 、σ_θ 沿板厚度呈直线分布，在板的上下表面有最大值，是纯弯曲应力。

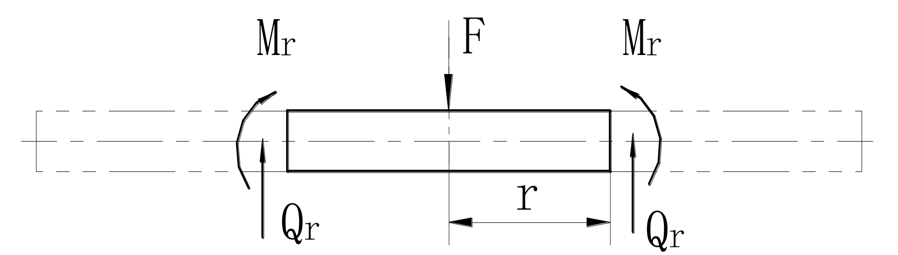
- 应力沿半径的分布与周边支承方式有关，工程实际中的圆板周边支承是介于两者之间的形式。

- 薄板结构的最大弯曲应力 σ_{max} 与 $\left(R/t\right)^2$ 成正比，而薄壳的最大拉（压）应力 σ_{max} 与 R/t 成正比，故在相同 R 条件下，薄板所需厚度比薄壳大。

2.4.3 圆平板中的应力（续）

二、承受集中载荷时圆平板中的应力

挠度微分方程式（2-60）中，剪力 Q_r 可由图2-35中的平衡条件确定：



$$Q_r = \frac{F}{2\pi r}$$

图 2-35 圆板中心承受集中载荷时板中的剪力Q_r

采用与求解均布载荷圆平板应力相同的方法，可求得周边固支与周边简支圆板的挠度和弯矩方程，计算其应力值

2.4.4 承受轴对称载荷时环板中的应力

◆通常的环板仍主要受弯曲，仍可利用上述圆板的基本方程求解环板的应力、应变，只是在内孔边缘上增加了一个边界条件。

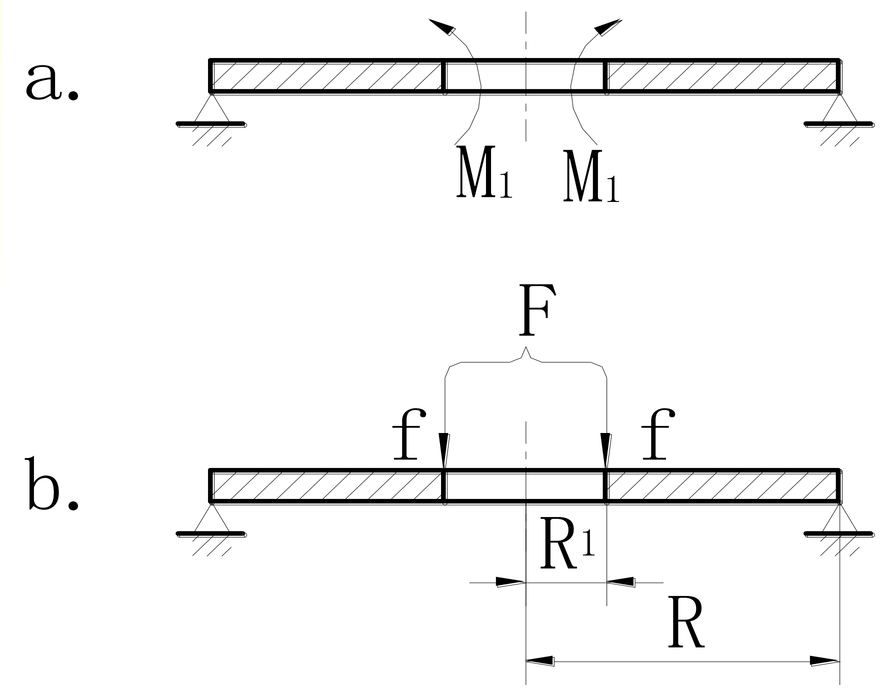


图2-36 外周边简支内周边承受均布载荷的圆环板

◆当环板内半径和外半径比较接近时，环板可简化为圆环。圆环在沿其中心线（通过形心）均布力矩M作用下，矩形截面只产生微小的转角 ϕ 而无其它变形，从而在圆环上产生周向应力。这类问题虽然为轴对称问题，但不能应用上述圆平板的基本方程求解。

2.4.4 承受轴对称载荷时环板中的应力（续）

设圆环的内半径为 R_i、外半径为 R_o、形心处的半径为 R_x、厚度t，沿其中心线（通过形心）均布力矩M的作用，如图2-37所示。文献[40]给出了导出圆环绕其形心的转角 ϕ 和最大应力 $\sigma_{\theta\max}$（在圆环内侧两表面）

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{12MR_x}{Et^3\ln\dfrac{R_o}{R_i}}\\ \sigma_{\theta\max} &= \frac{6MR_x}{t^2R_i\ln\dfrac{R_o}{R_i}}\end{aligned}\right\}\quad（2\text{-}74）$$

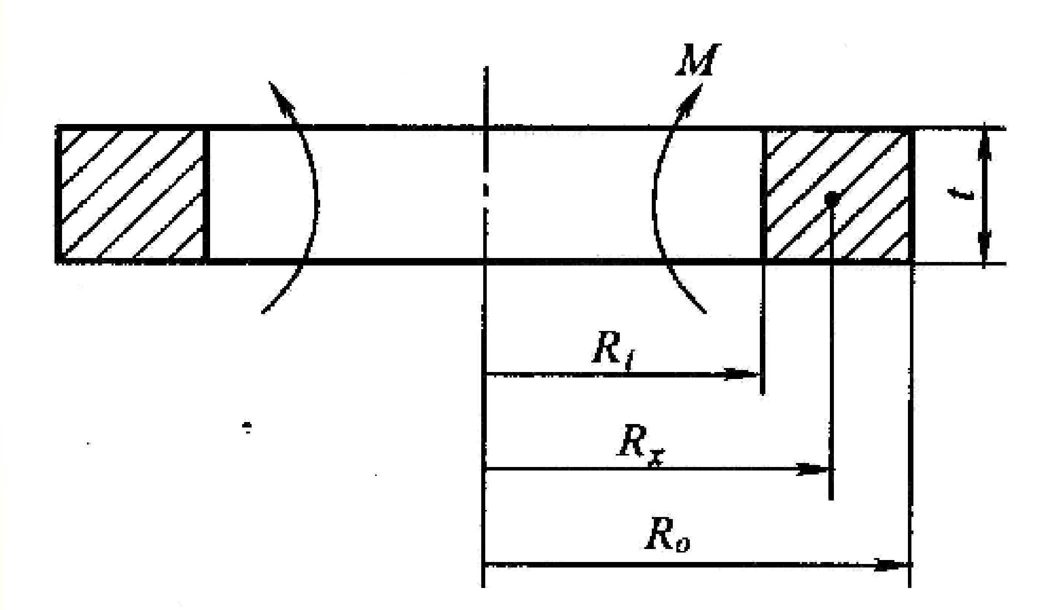


图 2-37 圆环转角和应力分析

作业： P72

10、11、12