北京化工大学
Beijing University of Chemical Technology

信号与系统

连续信号的线性卷积

主讲教师：张凤元

主要内容 CONTENTS

1 连续时间信号的线性卷积

--连续时间信号线性卷积的定义

--线性卷积的运算

--线性卷积的基本特性

-- 线性卷积运算示例

1.1 连续时间信号的卷积定义

设有两个函数 $f_1(t)$和 $f_2(t)$,积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

称为 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的卷积积分，简称卷积，记为:

$$f(t)=f_1(t)\otimes f_2(t) \qquad \text{或} \qquad f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

1.2 线性卷积的运算步骤

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

1. $f_1(t)\rightarrow f_1(\tau),\ f_2(t)\rightarrow f_2(\tau)$，信号自变量记为$\tau$；

2. $f_2(\tau)\xrightarrow{\text{倒置}} f_2(-\tau)\xrightarrow{\text{时延}} f_2(t-\tau)$;

3.对应相乘：$f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)$；

4.乘积的积分:$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$。

1．交换律

$$f_1(t)\otimes f_2(t)=f_2(t)\otimes f_1(t)$$

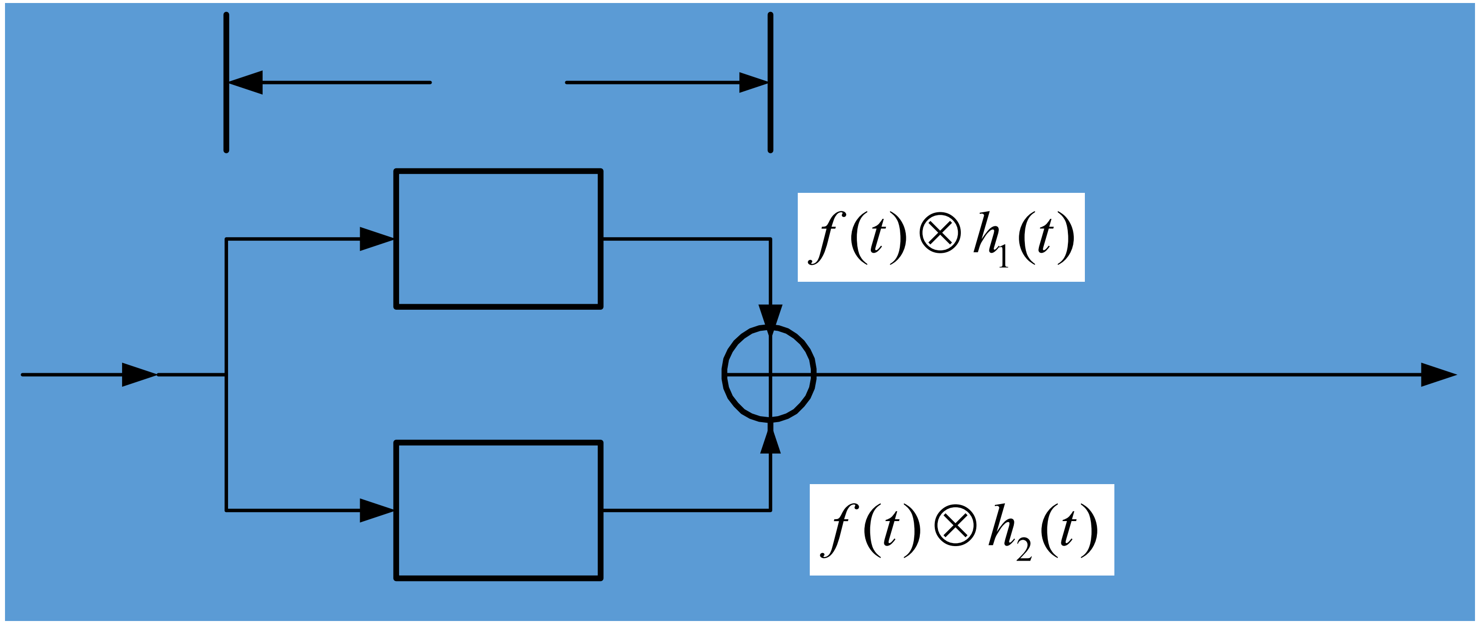
2．分配律

$$f_1(t)\otimes[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)\otimes f_2(t)+f_1(t)\otimes f_3(t)$$

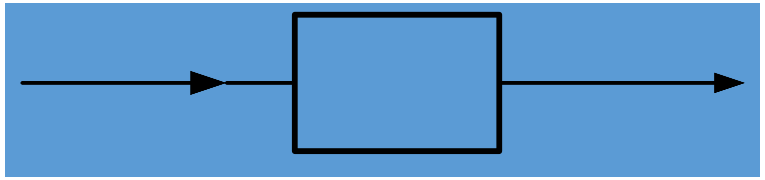
3．结合律

$$f(t)\otimes f_1(t)\otimes f_2(t)=f(t)\otimes[f_1(t)\otimes f_2(t)]$$

分配律：



$$f(t)\otimes h_1(t)+f(t)\otimes h_2(t)$$
$$=f(t)\otimes[h_1(t)+h_2(t)]$$
$$=f(t)\otimes h(t)=g(t)$$

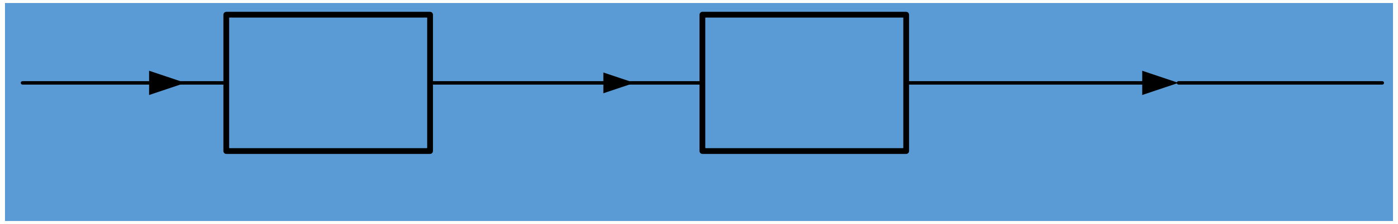


$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

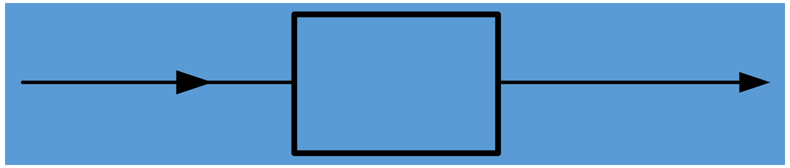
结论： 子系统并联时，总系统的冲激响应等于各子系统冲激响应的和。

1.5 卷积特性的物理意义

结合律：



$$
\begin{aligned}
& f(t)\otimes h_1(t)\otimes h_2(t) \\
& = f(t)\otimes[h_1(t)\otimes h_2(t)] \\
& = f(t)\otimes h(t)
\end{aligned}
$$



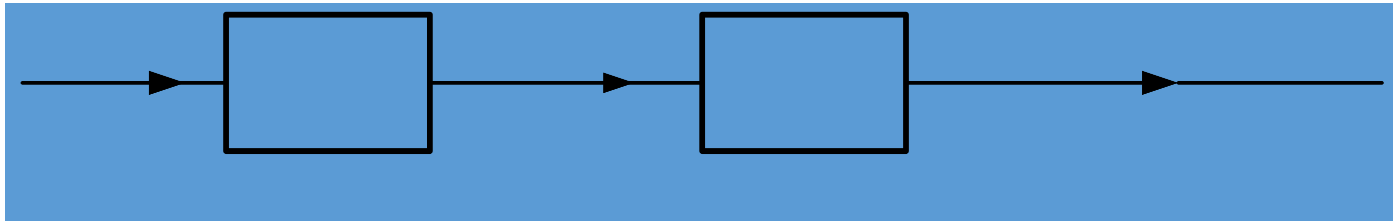
$$h(t)=h_1(t)\otimes h_2(t)$$

结论：时域中，子系统级联时，总的冲激响应等于子系统冲激响应的卷积。

交换律：

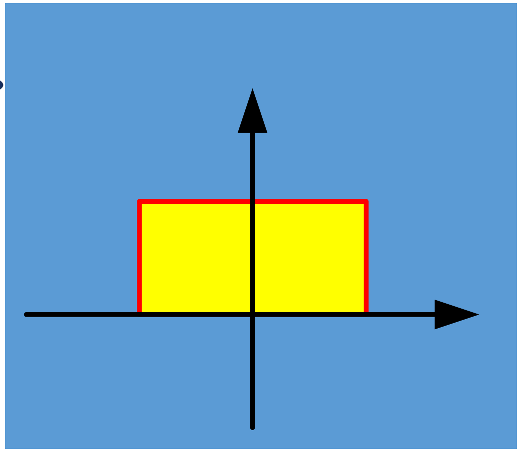
$$h_1(t)\otimes h_2(t)=h_2(t)\otimes h_1(t)$$

结论： 时域中，子系统级联时级联次序可交换。

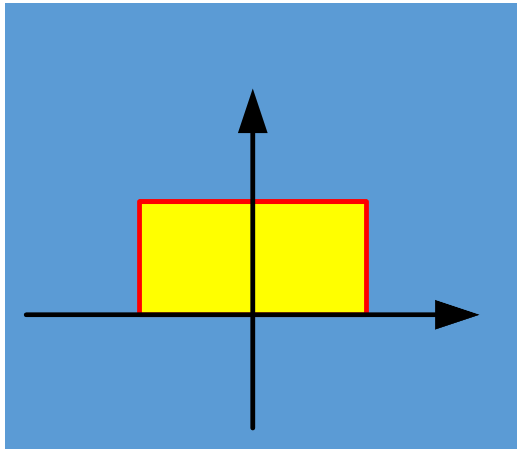


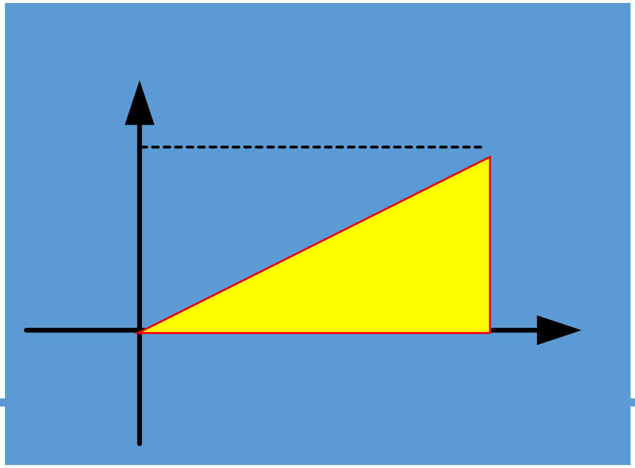
例1：已知 $f_1(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$ ， $f_2(t)=\dfrac{t}{2}$， $(0\le t\le 3)$ 计算 $g(t)=f_1(t)\otimes f_2(t)$ 。

解答

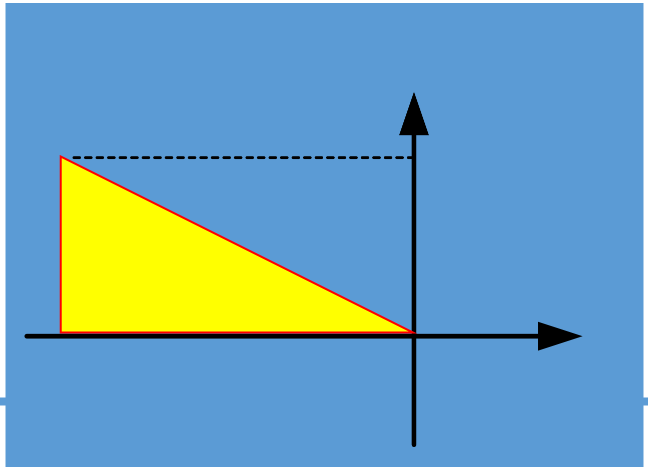


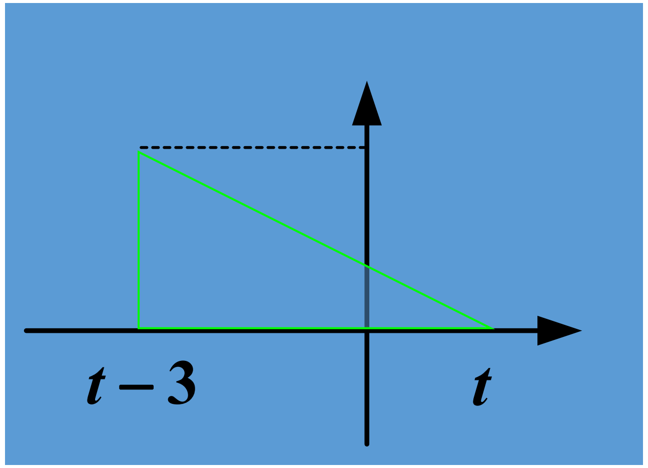
$t\rightarrow\tau$



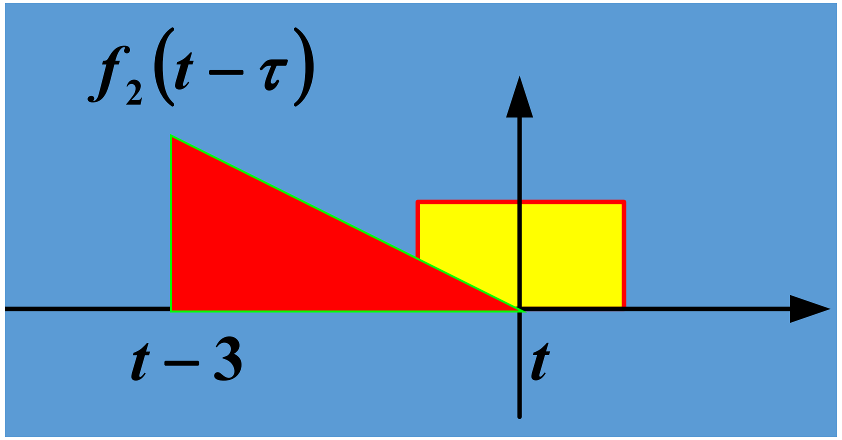


$t\rightarrow t-\tau$

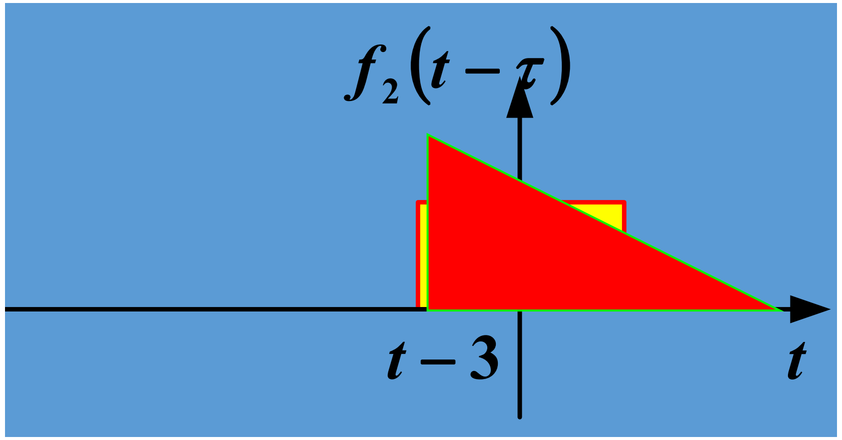




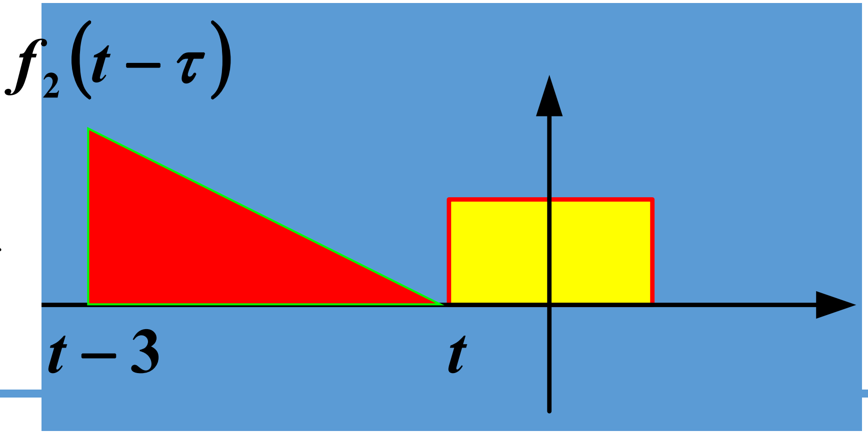
t ：移动的距离



t=0　　$f_2(t-\tau)$ 未移动



t>0　　$f_2(t-\tau)$ 右移

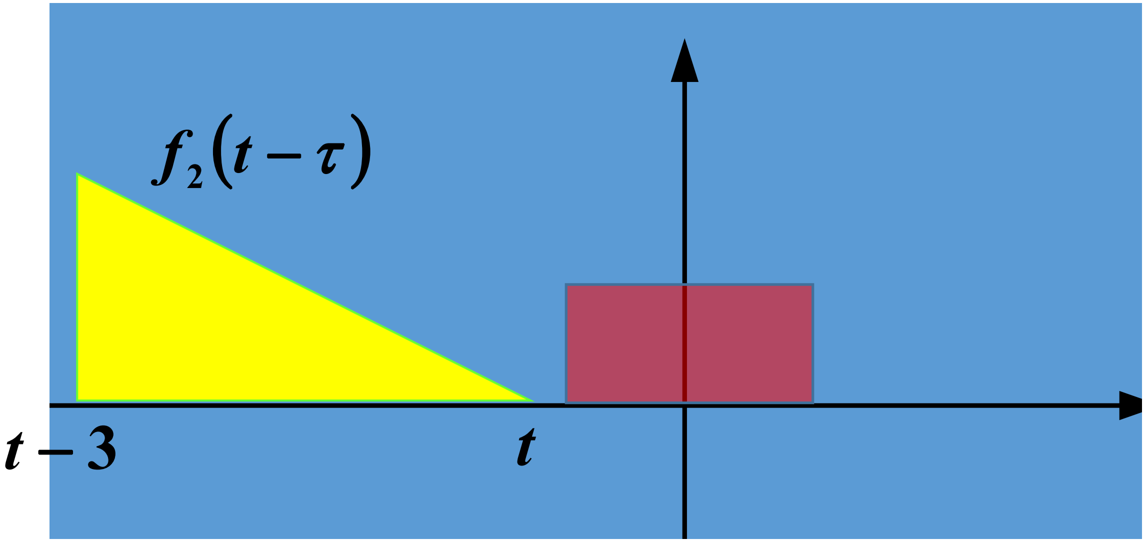


t<0　　$f_2(t-\tau)$ 左移

（1）当$t \le -1$时，

两波形没有公共处，二者乘积为0，即积分为0。

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = 0$$

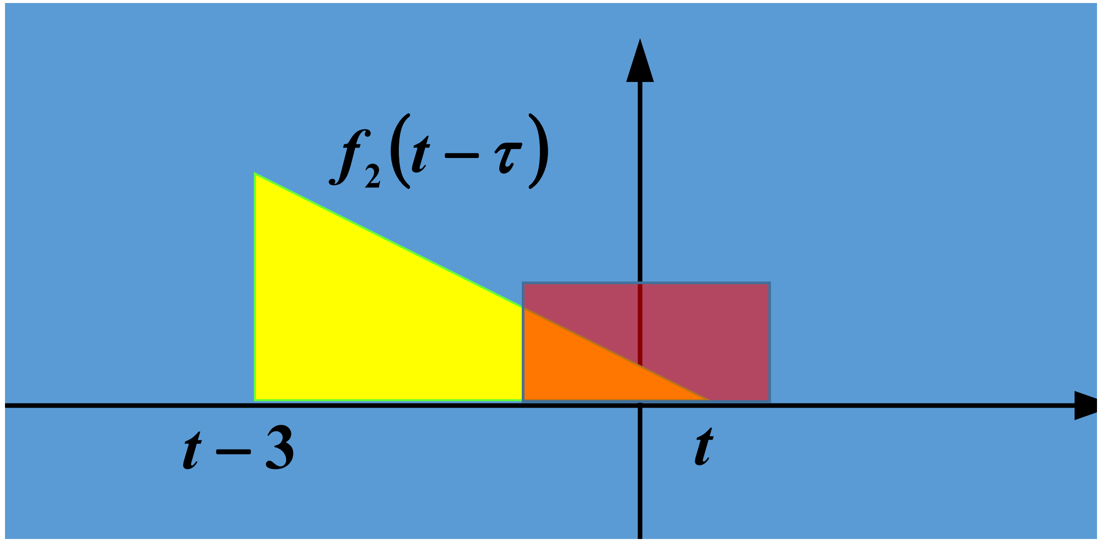


（2）当$-1 < t \le 1$时，

$$g(t) = \int_{-1}^{t} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

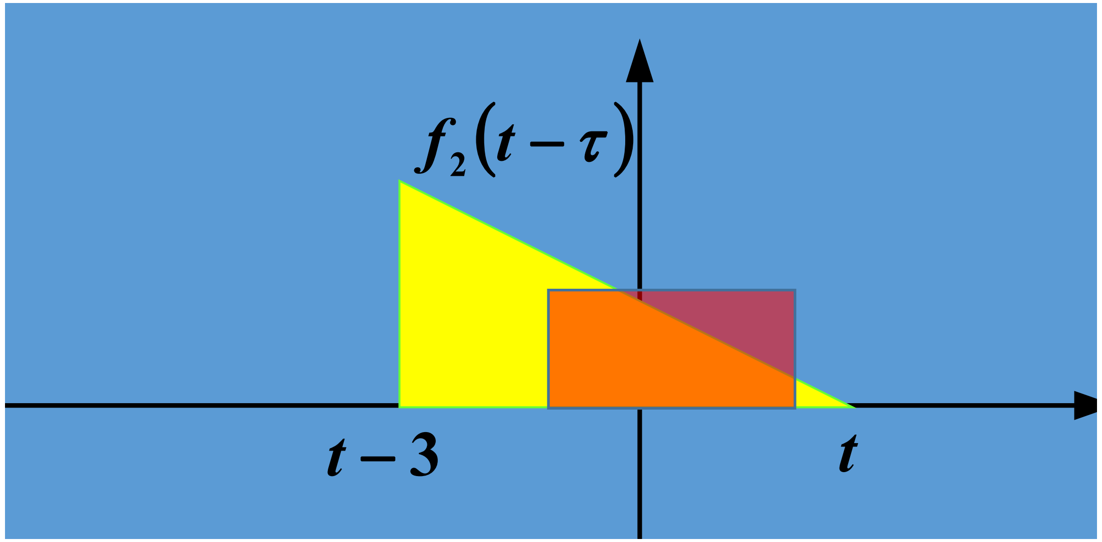
$$= \int_{-1}^{t} 1.\frac{1}{2}.(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \left(\frac{\tau}{2} - \frac{\tau^2}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{t} = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$



（3）当$1<t\le 2$时，

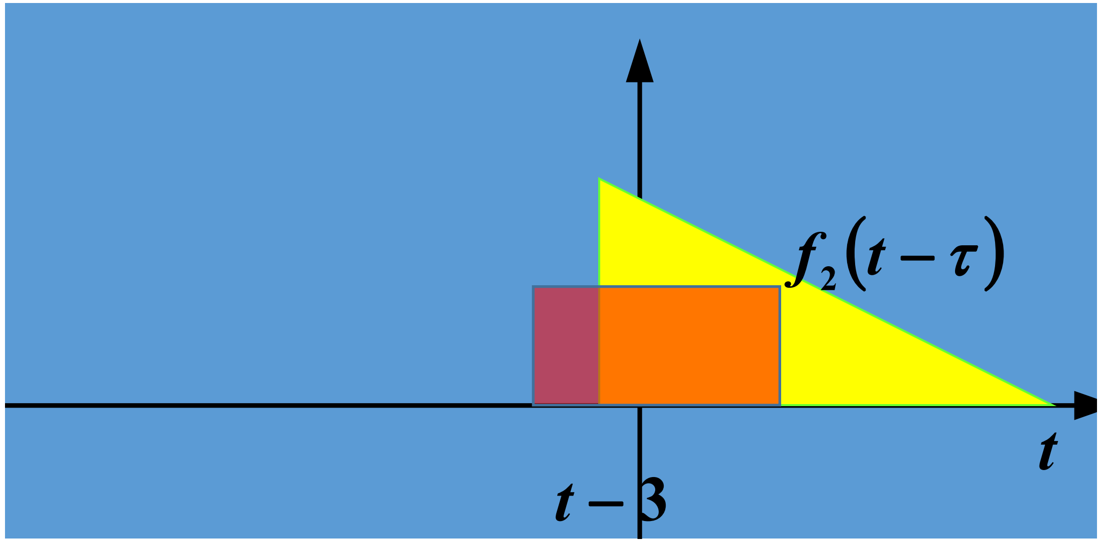
$$g(t)=\int_{-1}^{1}\cdot\frac{1}{2}.(t-\tau)\,d\tau=t$$



（4）当$2<t\le 4$时，

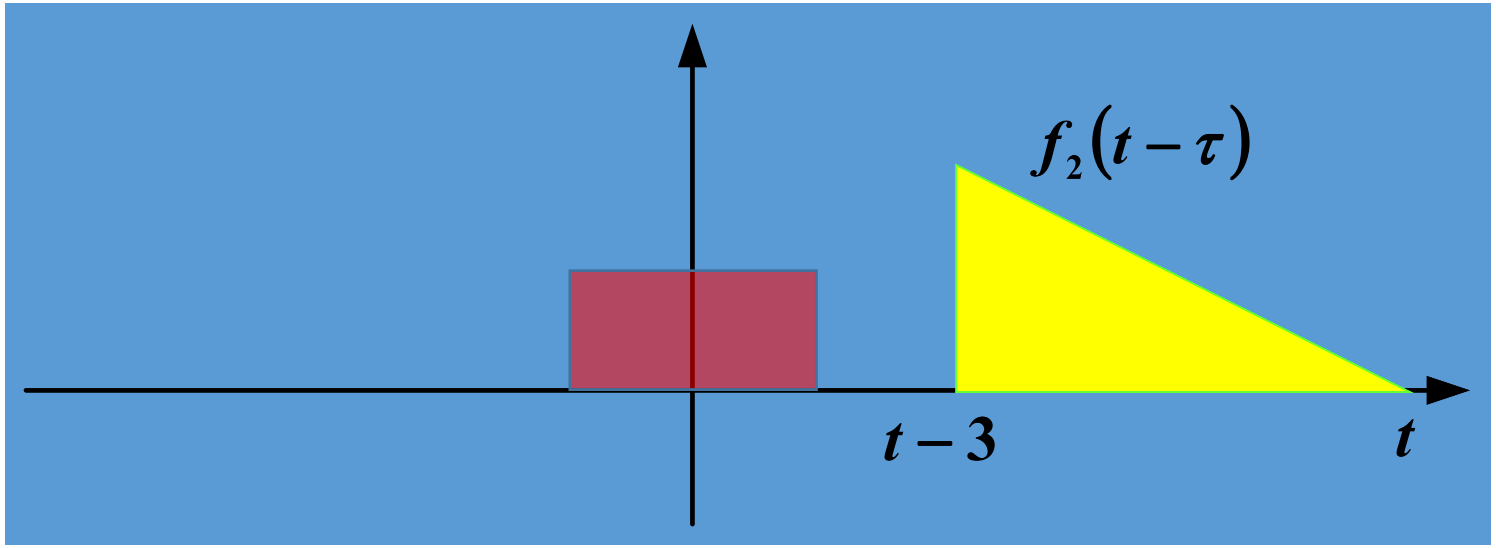
$$g(t)=\int_{t-3}^{1}1.\frac{1}{2}.(t-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau$$

$$=-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}+2$$



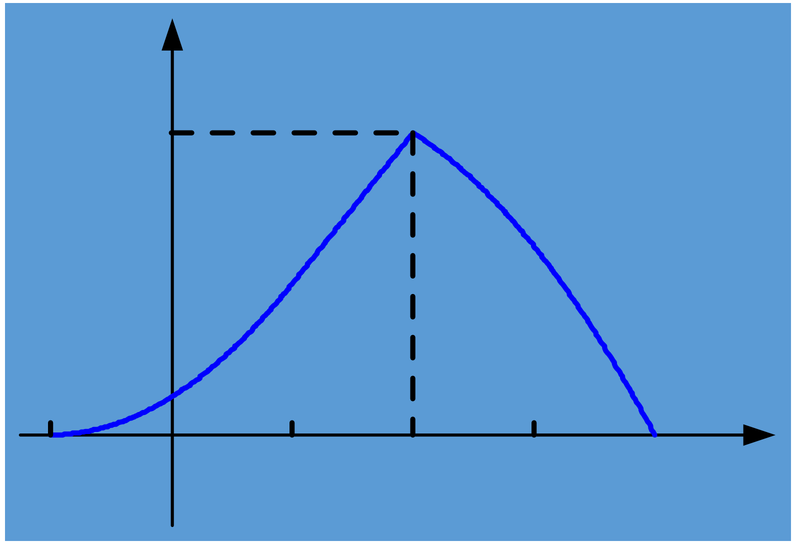
(5) 当 $4 \le t$ 时，

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = 0$$



卷积结果：

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4} & -1 \le t \le 1 \\ t & 1 \le t \le 2 \\ -\dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{2} + 2 & 2 \le t \le 4 \\ 0 & \text{其它} t \end{cases}$$



卷积结果区间：

一般规律：

$f_1(t)$	[A, B]
$f_2(t)$	[C, D]
$g(t)$	[A+C, B+D]

$$
\begin{array}{rrr}
 & f_1(t) & -1 \quad\quad 1 \\
+ & f_2(t) & 0 \quad\quad 3 \\
\hline
 & g(t) & -1 \quad\quad 4
\end{array}
$$

当 $f_1(t)$ 或 $f_2(t)$为非连续函数时，卷积需分段，积分限分段确定。

序列$x(n)$和$h(n)$的线性卷积$y(n)$定义为：

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

称为$x(n)$和$h(n)$的卷积和，简称卷积，记为：

$$y(n)=x(n)\otimes h(n) \qquad \text{或} \qquad y(n)=h(n)*x(n)$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{对比} \quad y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

1.9 离散线性卷积的运算步骤

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

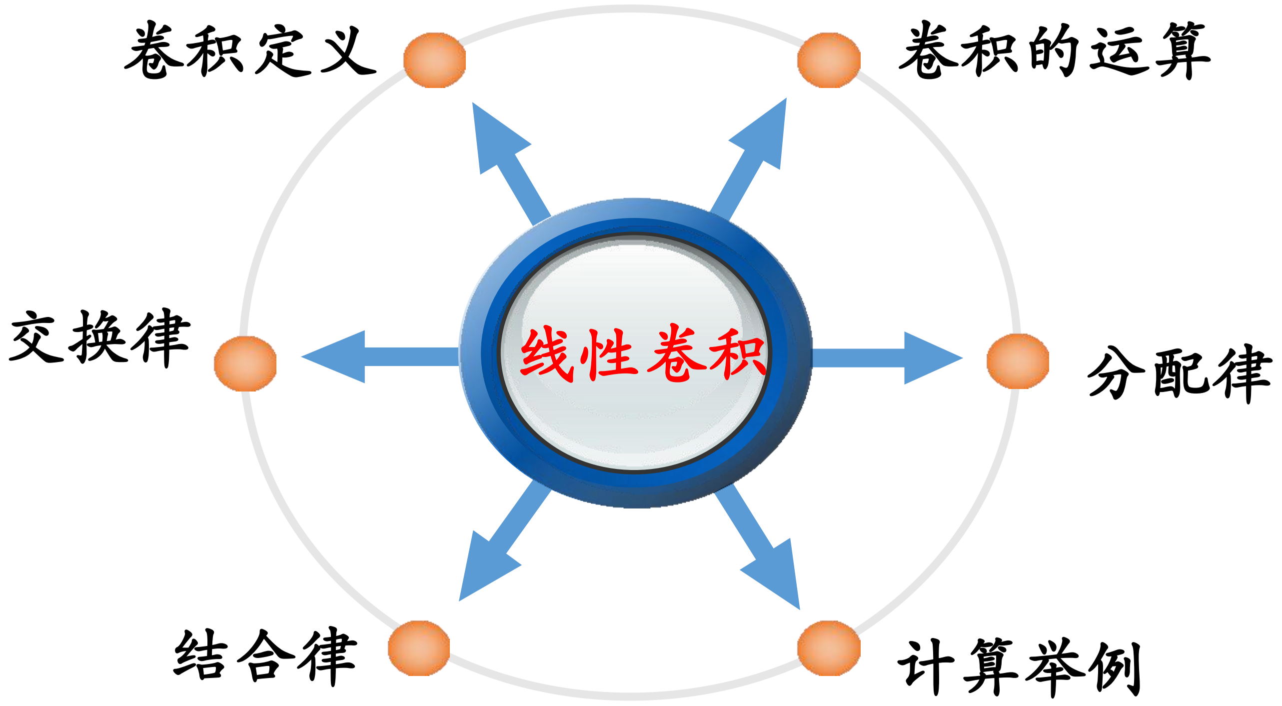
1. $x(n)\to x(m)$，自变量n改为m；

2. $h(n)\to h(m)\xrightarrow{\text{倒置}}h(-m)\xrightarrow{\text{时延}}h(n-m)$；

3. 对应相乘：$x(m)\cdot h(n-m)$；

4. 乘积的求和：$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\cdot h(n-m)$.

连续时间信号的线性卷积




谢谢大家，下讲再见！
北京化工大学
新闻网