4. 1 - Exercices d'application :

4. 1. 1 - Tremplin de skatepark :

On mène l'étude dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le système étudié est le skater de masse $m = 80$ kg.

On peut négliger les frottements, de sorte que le système est conservatif. $E_m = cte$.

En haut du tremplin, l'énergie potentielle $E_{p,0}$ est donnée par :

$E_{p,0} = mgh_{min}$, en prenant l'origine des énergies potentielles au niveau du sol.

Comme le skater part sans vitesse initiale, on a :

$$E_m = E_{c,0} + E_{p,0} = E_{p,0} = mgh_{min}$$

Au niveau du tremplin, on a : $E_{p,f} = mgh$ et $E_{c,f} = \frac{1}{2}mv_f^2$, d'où :

$$E_m = mgh_{min} = mgh + \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f^2 = \frac{2}{m} \times mg(h_{min} - h)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_f^2 = 2g(h_{min} - h)}$$

Pour que le skater puisse passer le tremplin, il faudra donc avoir $h_{min} > h$.

Au niveau du sol, juste avant le tremplin, on a $E_p = 0$ d'où :

$$E_m = mgh_{min} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh_{min}}}$$

1. En suivant le même raisonnement que précédemment :

$$E_m = mgH.$$

En bas du premier élément, on a $E_{p,1} = 0$ d'où :

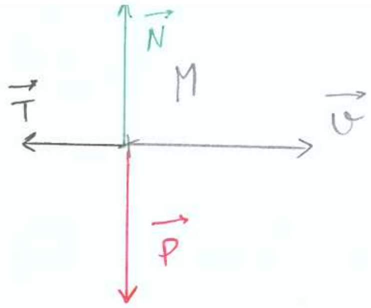
$$E_m = mgH = \frac{1}{2}mv_1^2 \text{ et } \boxed{v_1 = \sqrt{2gH}}$$

2. Pour répondre à cette question, il va nous falloir appliquer le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_{m_{1\to 2}} = W_{nc,1\to 2}$$

où $W_{nc,1\to 2}$ est le travail des forces non conservatives entre 1 et 2.

Le skater est soumis à son poids, à la réaction du support et à la force de frottements, comme présenté sur le schéma ci-dessous.



La réaction normale et le poids sont perpendiculaires à la vitesse et, par conséquent, ne travaillent pas. La seule force qui travaille est $\vec{T}$.

L'applications de la loi fondamentale de la dynamique nous donne ; comme le skater ne décolle pas du support :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -\vec{N} \quad \text{d'où} \quad \|\vec{N}\| = mg$$

En appliquant les lois de Coulomb du frottement solide, on déduit :

$$\vec{T} = -fmg\,\vec{u_x}$$ où $\vec{u_x}$ est le vecteur unitaire orienté suivant la vitesse.

D'où $$W_{nc,1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} -\vec{T}\cdot d\vec{x_k} = \int_{x_1}^{x_2} -fmg\,dx\,\vec{u_x}\cdot\vec{u_x} = -fmg\,(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{nc,1\to 2} = -fmgL}$$

D'où : $$\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2} - \mathcal{E}_{m1} = -fmgL \Rightarrow \mathcal{E}_{m_2} = \mathcal{E}_{m_1} - fmgL$$

$$\mathcal{E}_{m_2} = mgH - fmgL = mg\,(H - fL)$$

Mais nous avons également :

$$\mathcal{E}_{m_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = mg\,(H - fL) \quad \text{d'où} \quad \underline{v_2 = \sqrt{2g\,(H - fL)}}$$

(où on admet $H > fL$)

3. L'énergie mécanique du skater à la fin de la rampe, en notant v_3 sa vitesse, est donnée par : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgh$.

Elle est également donnée par : $$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m \times 2g\,(H - fL)$$

Soit : $\mathcal{E}_m = mg\,(H - fL)$.

On a donc : $$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgh = mg\,(H - fL)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_3^2 = g\,(H - fL - h) \Rightarrow v_3^2 = 2g\,(H - fL - h).$$

Pour que la vitesse ne s'annule pas, on doit donc avoir :

$$2g\,(H - fL - h) > 0 \quad \text{d'où} \quad \underline{H > fL + h}.$$

4.1.2 - Oscillations d'un anneau dans un cerceau :

1. L'étude sera menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on utilisera les coordonnées polaires.
L'anneau étudié est soumis à :
 * son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
 * la réaction du support : $\vec{N} = -N\vec{u_r}$ (avec $N > 0$)

2. L'anneau est astreint à se déplacer sur le cerceau. Le déplacement élémentaire s'écrit alors : $\vec{dl} = Rd\theta\,\vec{u_\theta}$.
Le travail élémentaire de la réaction est ensuite donné par :

$$\delta W_N = \vec{N}\cdot\vec{dl} = -N\vec{u_r}\cdot Rd\theta\,\vec{u_\theta}$$

Et, comme $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ sont orthogonaux : $\delta W_N = 0$

⇒ La réaction du support ne travaille pas.

3. La puissance du poids est donnée par : $\mathcal{P}_P = \vec{P}\cdot\vec{v}$.
Dans la base $\{\vec{u_r}, \vec{u_\theta}\}$, on a : $\vec{P} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$.
La vitesse est quant à elle donnée par

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

D'où : $\mathcal{P}_P = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})\cdot R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} = -mg\sin\theta\,R\dot{\theta}$

$$\boxed{\mathcal{P}_P = -mgR\dot{\theta}\sin\theta}$$

4. Exprimons l'énergie cinétique de l'anneau : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$
Le théorème de la puissance cinétique donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_P \quad \text{soit} \quad mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgR\dot{\theta}\sin\theta$$

$\Rightarrow \dot{\theta}(R\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0$. Comme la solution $\dot{\theta} = 0$ n'est pas acceptable, on en déduit :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

5. Si l'amplitude des oscillations reste faible, on peut supposer :

$$\sin\theta \approx \theta$$

D'où une équation d'évolution :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique de pulsation : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$.

D'où une période : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$

4.1.3 - Oscillation sur plan incliné :

1. On mène l'étude dans le référentiel terrestre, supposé galiléen sur la durée de l'expérience. Le mobile est soumis à son poids $\vec{P}$, la réaction normale du support $\vec{N}$ et la force de rappel élastique $\vec{F_r}$.
Le poids $\vec{P}$ et la force de rappel élastique dérivent d'une énergie potentielle.
On choisit l'origine des énergies potentielles de telle sorte que $\mathcal{E}_p$ soit nulle quand le mobile M est à l'équilibre.

* énergie potentielle élastique :

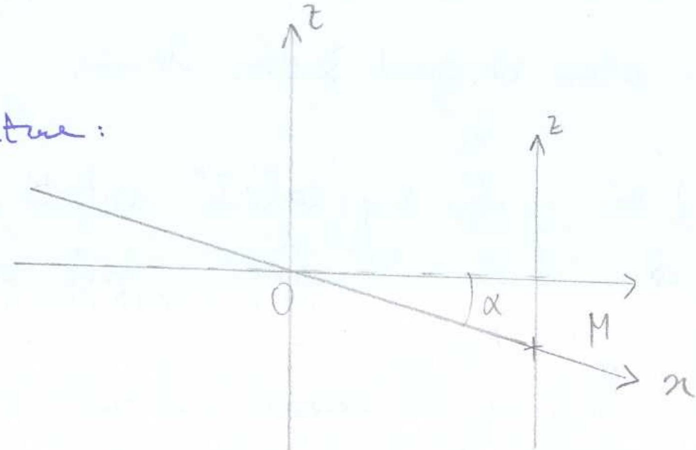
$$\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}kx^2$$

* énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_{p,p} = mgz$$

Avec $z = -x\sin\alpha$

D'où : $\mathcal{E}_{pp} = -mgx\sin\alpha$



On a donc $\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}kx^2 - mgx\sin\alpha}$

On en déduit l'expression de l'énergie mécanique du système :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx\sin\alpha}$$

2. D'après le théorème de l'énergie mécanique, on a :

$\delta \mathcal{E}_m = \delta W_{f,nc}$ où $\delta W_{f,nc}$ est le travail élémentaire des forces non conservatives. La seule force non conservative est la réaction normale $\vec{N} = N\vec{u_y}$ où $\vec{u_y}$ est normal à $\vec{u_x}$ et dirigé vers le haut. Le travail élémentaire de cette force est donné par :

$$\delta W_N = \vec{N} \cdot \vec{dl} = N\vec{u_y} \cdot dx\vec{u_x} = 0$$

$\Rightarrow$ Cette force ne travaille pas. On a donc $d\mathcal{E}_m = 0$, soit $\mathcal{E}_m = cste$

$\Rightarrow$ L'énergie mécanique se conserve :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx\sin\alpha = cste$$

Et initialement : $x = X_0$ et $v = 0$ d'où $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}kX_0^2 - mgX_0\sin\alpha$.

3. On a $\mathcal{E}_m = cste$, d'où $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \frac{1}{2}m \times 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}k \times 2x\dot{x} - mg\dot{x}\sin\alpha = 0$$

D'où $\dot{x}\left(m\ddot{x} + kx - mg\sin\alpha\right) = 0$

D'où : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g\sin\alpha$

On pose $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ d'où $\omega_0^2 x_{eq} = g\sin\alpha \Rightarrow \boxed{x_{eq} = \frac{mg\sin\alpha}{k}}$

Finalement : $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}}$

4. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire avec second membre, on commence par calculer la solution de l'équation différentielle homogène.

$$x_h(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)$$

La solution particulière est donnée par : $x_p = x_{eq}$ d'où

$$x(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + x_{eq}$$

On sait que : $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

$\dot{x} = -\omega_0 C_1\sin(\omega_0 t) + \omega_0 C_2\cos(\omega_0 t)$; $\dot{x}(0) = \omega_0 C_2\cos(\omega_0 t) = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

$x(0) = C_1 + x_{eq} = X_0 \Rightarrow C_1 = X_0 - x_{eq}$

D'où : $\underline{x(t) = (X_0 - x_{eq})\cos(\omega_0 t) + x_{eq}}$

La période des oscillations est ensuite donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad AN : T = 0,70 \text{ s}$$

4.1.4- Amortisseur :

1. On mène l'étude dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
On prend l'origine des énergies potentielles à la position d'équilibre du ressort.
Le point matériel M étudié est soumis à :

* son poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{u_z}$
* la force de rappel élastique : $\vec{F} = -kz\,\vec{u_z}$ ($z = 0$ pour la position d'équilibre du ressort)
* la force de frottement : $\vec{f_r} = -\alpha\dot{z}\,\vec{u_z}$

• Energie potentielle de pesanteur : on calcule le travail élémentaire du poids :

$$\delta W_{\vec{P}} = \vec{P}\cdot\vec{dl} = -mg\,\vec{u_z}\cdot dz\,\vec{u_z} \Rightarrow \delta W_P = -mg\,dz$$

On voit que le poids dérive d'une énergie potentielle :

$$d\mathcal{E}_{pp} = -\delta W_P = mg\,dz$$

Soit $\mathcal{E}_{pp} = \int_0^{\mathcal{E}_p(z)} d\mathcal{E}_{pp} = \int_0^z mg\,dz' \Rightarrow \underline{\mathcal{E}_{pp} = mgz}$

• Energie potentielle élastique : on effectue le même traitement.

$$\delta W_F = \vec{F}\cdot\vec{dl} = -kz\,\vec{u_z}\cdot dz\,\vec{u_z} = -kz\,dz$$

D'où $\delta\mathcal{E}_{p,el} = -\delta W_F = kz\,dz$

$$\mathcal{E}_{p,el} = \int_0^{\mathcal{E}_p(z)} d\mathcal{E}_{p,el} = \int_0^z kz'\,dz' \Rightarrow \underline{\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}kz^2}$$

• Cas de la force de frottements : Pour la force de frottements, on a :

$$\delta W_f = \vec{f_r}\cdot\vec{dl} = -\alpha\dot{z}\vec{u_z}\cdot dz\,\vec{u_z} = -\alpha\left(\frac{dz}{dt}\right)dz$$

⇒ Cette force ne dérive pas d'une énergie potentielle car son travail ne peut pas s'écrire sous la forme d'une différentielle. Calculons sa puissance :

$$\mathcal{P}_f = \vec{f_r}\cdot\vec{v} = -\alpha\dot{z}\,\vec{u_z}\cdot\dot{z}\,\vec{u_z} = -\alpha\dot{z}^2$$

Il s'agit de la puissance des forces non conservatives.

2. Pour trouver l'équation du mouvement, nous allons appliquer le théorème de l'énergie mécanique. On commence par exprimer celle-ci :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz + \frac{1}{2} k z^2$$

Puis : $\frac{dE_m}{dt} = P_{fnc}$ d'où :

$$\frac{1}{2} m \times 2 \dot{z} \ddot{z} + mg\dot{z} + \frac{1}{2} k \times 2 z \dot{z} = -\alpha \dot{z}^2$$

$$\Rightarrow m \dot{z} \ddot{z} + mg\dot{z} + kz\dot{z} + \alpha \dot{z}^2 = 0 \quad \Rightarrow \dot{z}\left(m\ddot{z} + mg + kz + \alpha \dot{z}\right) = 0$$

La solution $\dot{z} = 0$ n'étant pas satisfaisante, on en déduit :

$$\boxed{m\ddot{z} + mg + kz + \alpha \dot{z} = 0}$$

3. L'équation précédente se met sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m} z = -g$$

Soit, par identification :

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \; ; \; \frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}}$$

$$\text{Et } \omega_0^2 z_{eq} = -g \Rightarrow \boxed{z_{eq} = \frac{-mg}{k}}$$

On a donc bien : $\boxed{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{eq}}$

4. $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} = 0{,}71$. On a $Q > \frac{1}{2}$, on est donc en régime pseudo-périodique. Si le véhicule roule sur des défauts de la route, l'habitacle va se mettre à osciller, ce qui peut être désagréable pour les passagers.

4.1.5 - Toboggan

1. Pour répondre à la question, nous allons appliquer le théorème de l'énergie mécanique. $\Delta E_{m\,1\to 2} = W_{fnc,1\to 2}$ où $W_{fnc\,1\to 2}$ est le travail des forces non conservatives sur le chemin $1 \to 2$.

Les forces non conservatives sont :

* la réaction normale du support $\vec{N}$.
* les forces de frottement. $\vec{T}$.

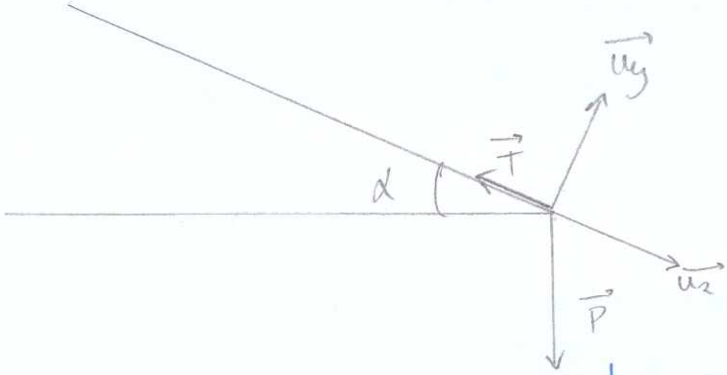
$\vec{N}$ est en tout point orthogonale à la vitesse $\vec{v}$, d'où $W_{\vec{N},1\to2} = 0$. On a donc :

$$\Delta Em_{1\to2} = W_{\vec{T},1\to2}.$$

Commençons par calculer le travail élémentaire de $\vec{T}$:

$$\delta W_{\vec{T}} = \vec{T} \cdot \vec{dl} = -T\vec{u_x} \cdot dx\,\vec{u_x}$$

$$\delta W_{\vec{T}} = -T\,dx$$



$$\text{D'où } W_{\vec{T}_{1\to2}} = \int_{C_{1\to2}} -T\,dx = -TL$$

où L est la longueur du toboggan

On a, de manière évidente : $\frac{h}{L} = \cos\alpha$ soit $L = h/\cos\alpha$

$$\Rightarrow W_{\vec{T},1\to2} = \frac{-Th}{\cos\alpha}$$

Il nous reste à exprimer T afin de répondre complètement à la question.
L'application de la LFD nous donne ; en supposant que l'homme ne décolle pas du toboggan :

$$m\ddot{x}\vec{u_x} = \vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = N\vec{u_y} - T\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y} + mg\sin\alpha\,\vec{u_x}$$

En projetant sur $\vec{u_y}$, on obtient : $N = mg\cos\alpha$.
L'application des lois de Coulomb du frottement solide donne ensuite :

$$T = fN = fmg\cos\alpha$$

D'où :

$$\Delta Em_{1\to2} = W_{\vec{T},1\to2} = \frac{-fmgh\cos\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\Delta Em_{1\to2} = -fmgh}$$

AN : $\Delta Em_{1\to2} = -1{,}4 \cdot 10^3\ J$.

2. On prend l'origine des énergies potentielles au niveau du sol. L'énergie mécanique en haut du toboggan est donnée par : $Em_i = mgh$

L'énergie mécanique en bas du toboggan est ensuite donnée par :

$$\mathcal{E}_{m,f} = \mathcal{E}_m + \Delta\mathcal{E}_{m_{1\to2}} = mg(1-f)h$$

Et $\mathcal{E}_{m,f} = \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{2g(1-f)h}}$ AN: $v_f = 7{,}7 m.s^{-1}$

Sans frottements, on aurait :

$$\mathcal{E}_{m,i} = \mathcal{E}_{m,f}, \text{ soit } mgh = \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{2gh}}$$

AN: $v_f = 9{,}9 m.s^{-1}$ $\longrightarrow$ Le résultat est logique, les frottements entraînent bien une diminution de la vitesse.

4.1.6 - Interaction entre deux atomes :

1. Nous savons que les éventuelles positions d'équilibre sont déterminées par : $\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_{eq}} = 0$. On commence donc par calculer $\frac{dE_p}{dx}$.

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{d}{dx}\left[Ax^{-12} - Bx^{-6}\right] = -12Ax^{-13} + 6Bx^{-7} = \frac{-12A}{x^{13}} + \frac{6B}{x^7}$$

On résout $\frac{dE_p}{dx} = 0$ pour $x \neq 0$, on a :

$$-\frac{12A}{x_{eq}^{13}} + \frac{6B}{x_{eq}^7} = 0 \Rightarrow 6Bx_{eq}^6 = 12A \Rightarrow x_{eq}^6 = \frac{12A}{6B} = \frac{2A}{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{eq} = \left(\frac{2A}{B}\right)^{1/6}}$$

D'après l'allure du graphique, il s'agit clairement d'une position d'équilibre stable (minimum de E_p).

2. A une dimension, le lien entre force et énergie potentielle est donné par :

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} = \frac{12A}{x^{13}} - \frac{6B}{x^7}$$

3. Pour les x "faibles", la force doit être répulsive car les deux atomes ne doivent pas s'interpénétrer. Ceci est cohérent avec l'expression obtenue puisque, pour $x \ll 1$, $F(x) \approx 12A/x^{13} > 0$, qui correspond à une force répulsive.
En revanche, pour x "grand", c'est l'inverse, les atomes doivent s'attirer pour

expliquer la cohésion de la molécule. On a en effet, pour $x \gg 1$: $\frac{B}{x^7} \gg \frac{A}{x^{13}}$
d'où $F \approx \frac{-6B}{x^7} < 0$ qui correspond à une force répulsive.

4. Les oscillations autour d'une position d'équilibre peuvent être assimilées à celles d'un oscillateur harmonique.
Si l'on s'écarte suffisamment peu de la position d'équilibre, on peut écrire le développement limité de l'énergie potentielle :

$$E_p \approx E_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \underbrace{\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_{eq}}}_{=0} + (x-x_{eq})^2 \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} + o\left((x-x_{eq})^2\right)$$

Calculons chacun des termes :

$$E_p(x_{eq}) = \frac{A}{x_{eq}^{12}} - \frac{B}{x_{eq}^6} = A\left(\frac{B}{2A}\right)^{12/6} - B\left(\frac{B}{2A}\right)^{6/6} = \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A}$$

$$\boxed{E_p(x_{eq}) = \frac{-B^2}{4A}}$$

Puis $\frac{d^2E_p}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[-12Ax^{-13} + 6Bx^{-7}\right] = 156Ax^{-14} - 42Bx^{-8}$

D'où $\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} = 156A \times \left(\frac{B}{2A}\right)^{14/6} - 42B\left(\frac{B}{2A}\right)^{8/6}$

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} = 156\frac{B^{14/6}}{2^{14/6}A^{8/6}} - 42\frac{B^{14/6}}{2^{8/6}A^{8/6}} = \frac{156B^{7/3}}{2^{7/3}A^{4/3}} - \frac{42B^{7/3}}{2^{4/3}A^{4/3}}$$

$$\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_{eq}} = \left(\frac{B^{7/3}}{2^{4/3}A^{4/3}}\right)\left(\frac{156}{2} - 42\right) = 36\left(\frac{B^7}{2^4A^4}\right)^{1/3}$$

On a donc :

$$\boxed{E_p(x) \approx \frac{-B^2}{4A} + 36\left(\frac{B^7}{2^4A^4}\right)^{1/3}(x-x_{eq})^2}$$

$$\boxed{\text{D'où } k_{eff} = 36\left(\frac{B^7}{2^4A^4}\right)^{1/3}}$$

5. On réalise l'application numérique, on trouve :

$$\boxed{k_{eff} = 493\ N.m^{-1}}$$

On a alors une fréquence : $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{k_{eff}}{m}}$

$$\boxed{AN : f = 8{,}67.10^{13}\ Hz}$$

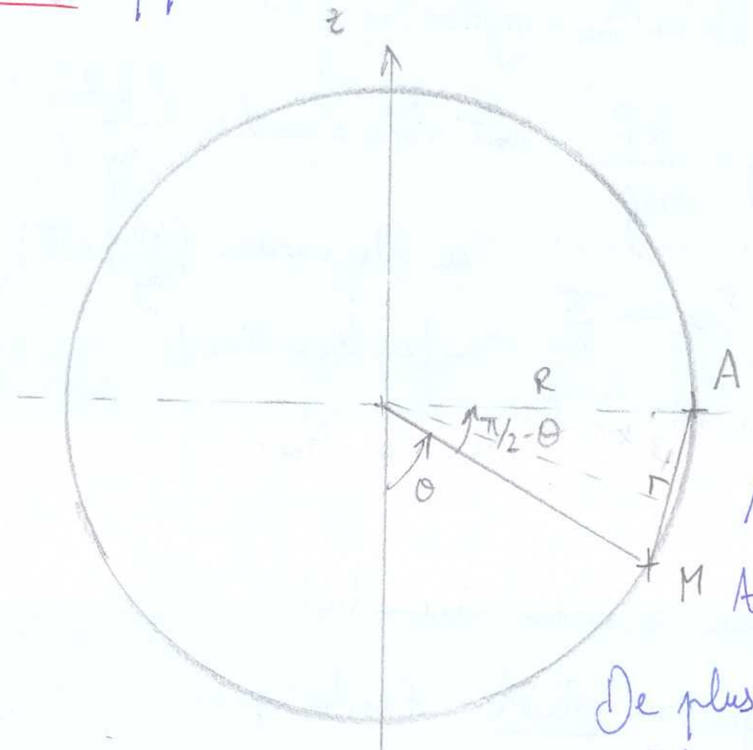
Puis la longueur d'onde est finalement donnée par :

$$\lambda = c/f = \frac{3.10^8}{8{,}67.10^{13}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 3{,}46\ \mu m}$$

4.2 - Exercices de réflexion :

4.2.1 - Bague attachée à un ressort :

1. Représentons la situation sur un schéma :



~~On a : $2\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta = \pi$~~

~~$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$ soit $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$~~

On a : $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{AM}{2R}$

D'où $AM = 2R\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$

$$AM = 2R\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$AM = \sqrt{2}R\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

De plus, on sait que :

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos\theta}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

D'où : $AM^2 = 2R^2\left(\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$

$$AM^2 = 2R^2\left[\frac{1+\cos\theta + 1 - \cos\theta}{2} - \sin\theta\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{AM^2 = 2R^2(1 - \sin\theta)}$$

Comme on considère la longueur à vide du ressort comme négligeable, on a directement :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k \times 2R^2 (1 - \sin\theta) \Rightarrow \boxed{E_{pe} = kR^2 (1 - \sin\theta)}$$

2. On pose $z = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $E_{pp} = 0$ pour $z = 0$, soit $E_{pp} = mgz$. On a ensuite : $z = -R\cos\theta$, d'où :

$$\boxed{E_{pp} = -mgR\cos\theta}$$

3. L'énergie potentielle totale du système est donnée par :

$$E_p = kR^2(1 - \sin\theta) - mgR\cos\theta$$

Les positions d'équilibre sont ensuite données par la relation.

$$\left.\frac{dE_p}{d\theta}\right|_{\theta = \theta_{eq}} = 0$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = -kR^2\cos\theta + mgR\sin\theta \quad \Rightarrow \quad -kR^2\cos\theta_{eq} + mgR\sin\theta_{eq} = 0$$

$$mg\tan\theta_{eq} = kR \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\theta_{eq} = \frac{kR}{mg}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta_{eq} = \arctan\left(\frac{kR}{mg}\right)}$$

ou $\boxed{\theta_{eq} = \arctan\left(\frac{kR}{mg}\right) + \pi}$

4. Si $k \to \infty$, on a $\frac{kR}{mg} \to \infty$ et $\theta_{eq} \to \frac{\pi}{2}$ (ou $\theta_{eq} = 3\pi/2$)

Si $k \to 0$, on a $\frac{kR}{mg} \to 0$ et $\theta_{eq} \to 0$ (ou $\theta_{eq} = \pi$)

Ces résultats sont cohérents.

5. En appliquant un raisonnement logique, on déduit immédiatement que

$\theta_{eq_1} = \arctan\left(\frac{kR}{mg}\right)$ sera un équilibre <u>stable</u> tandis que

$\theta_{eq_2} = \pi + \arctan\left(\frac{kR}{mg}\right)$ sera un équilibre <u>instable</u>.

4.2.2 - Acrobaties :

1. Nous mènerons toute l'étude dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et utiliserons les coordonnées polaires.

La réaction $\vec{R}$ du support est toujours orthogonale à la vitesse et, par conséquent, ne travaille pas. Les autres forces étant toutes conservatives, l'énergie mécanique du système se conserve.

Au point A, la vitesse est nulle, d'où : $E_{mA} = mgh$

(où l'origine des énergies potentielles a été prise au niveau du sol).

Au point O, on a cette fois : $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$

D'où : $mgh = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$

2. Exprimons l'énergie potentielle de pesanteur quand le mobile est dans le cylindre, on a :

$$E_{P} = mga(1-\cos\theta)$$

L'énergie mécanique du système est alors donnée par :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mga(1-\cos\theta) = mgh$$

D'où $\frac{1}{2} m v^2 = mg\left(h - a(1-\cos\theta)\right)$ et $\boxed{v = \sqrt{2g\left(h - a(1-\cos\theta)\right)}}$

3. Pour trouver l'expression de $\vec{R}$, il va falloir appliquer la loi fondamentale de la dynamique. Le mobile est soumis à :

* son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$
* la réaction normale : $\vec{R} = -R\vec{u_r}$

D'où : $m\vec{\gamma} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}) - R\vec{u_r}$ où γ est l'accélération.

Exprimons l'accélération en coordonnées polaires. La position est donnée par : $\vec{r} = a\vec{u_r}$, puis $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ et $\vec{\gamma} = a\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - a\dot{\theta}^2\vec{u_r}$

D'où : $-ma\dot{\theta}^2\vec{u_r} + ma\ddot{\theta}\vec{u_\theta} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}) - R\vec{u_r}$

On projette sur $\vec{u_r}$: $-ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R$ soit :

$$R = mg\cos\theta + ma\dot{\theta}^2$$

Et $v^2 = a^2\dot{\theta}^2 = 2g\left(h - a(1-\cos\theta)\right)$ d'où $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a^2}\left(h - a(1-\cos\theta)\right)$

$$R = mg\cos\theta + \frac{2mg}{a}\left(h - a(1-\cos\theta)\right)$$

$$R = mg\cos\theta + \frac{2mgh}{a} - 2mg + 2mg\cos\theta = mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)$$

On a bien : $\vec{R} = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\vec{e_r}$

4. Si $v = 0$ mais $R \neq 0$, le mobile ne fera pas un tour complet et repartira en arrière.
Si $R = 0$ mais $v \neq 0$, le mobile décolle du support et tombe.

5. Pour que le patineur fasse un tour complet, on doit avoir $R \neq 0\ \forall\theta$ et $v \neq 0\ \forall\theta$.

Soit $\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2 > 0 \Rightarrow \frac{2h}{a} > 2 - 3\cos\theta \Rightarrow h > \frac{a}{2}(2 - 3\cos\theta)$

Cette relation doit être vraie $\forall\theta$, d'où : $h > \frac{5a}{2}$ (cas le plus défavorable)

Puis, pour $v \neq 0$, on doit avoir

$$h - a(1 - \cos\theta) > 0 \Rightarrow h > a(1 - \cos\theta) \Rightarrow h > 2a$$

Cette condition est moins restrictive, on retiendra :

$$h > \frac{5a}{2}$$