

概率论与数理统计

第一章 概率论的基本概念

北京化工大学数学系

苏贵福

自然界和社会上发生的现象是多种多样的. 有一类现象, 在一定条件下必然发生, 这类现象 称为确定性现象.

在自然界和社会上存在着另外一种现象. 这类现象在一定条件下, 可能出现这样的结果, 也可能出现那样的结果, 而在试验/观察之前无法预知确切的结果. 但这种现象在大量 重复试验/观察下, 呈现出固有的规律性, 称其为统计规律性.

- 这种在个别试验中其结果呈现出不确定性, 在大量 重复试验中其结果又具有统计规律性的现象, 我们称其为随机现象.
- 《概率论与数理统计》是研究和揭示现实生活中各种随机现象统计规律性的一门数学学科.

概率论与数理统计

1.1 随机事件及样本空间

一. 随机事件及相关概念

定义1.1 为了揭示随机现象的规律性, 将具有如下特点的试验称为
随机试验 (Random Experiment):

- (1) 在相同条件下可以重复地进行;
- (2) 每次试验结果不止一个, 但试验的所有可能的结果预先确定;
- (3) 每次试验之前不能确定哪一种结果会出现.

随机试验简称试验, 一般用 E 表示.

- 将一枚硬币抛掷三次, 观察正面朝上的次数.
- 记录北京化工大学官方微信平台一分钟内接到的咨询次数.

定义1.2 (1) 随机试验的每一个可能结果称为 基本事件 (Simple event).

(2) 在随机试验中可能发生也可能不发生, 而在大量试验中呈现统计规律性 的事件称为随机事件(Random event).

(3) 在每次随机试验中一定发生的事件称为必然事件 U (Certain event); 必然不发生的事件称为不可能事件 \emptyset (Impossible event).

- 基本事件是随机事件中最简单的一类.
- 由基本事件复合而成的事件称为复合事件.
- 一次试验中一个复合事件发生, 当且仅当构成该复合事件的任意一个基本事件发生.

二. 随机事件的关系及运算

定义1.3 设 A 和 B 是两个基本事件:

- (1) 若事件 A 发生必导致事件 B 发生, 则称事件 B 包含事件 A , 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.
- (2) 事件 A 与 B 至少有一个发生所构成的 事件称为事件 A 与 B 的和事件, 记作 $A \cup B$.
 $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$
- (3) 事件 A 与 B 同时发生所构成的 事件称为事件 A 与 B 的积事件, 记作 $A \cap B$ 或 AB .
 $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

定义1.4 设 A 和 B 是两个基本事件:

- (1) 若事件 A 与 B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与 B 互斥或互不相容.
- (2) 若事件 A 与 B 满足 $A \cup B = U$ 且 $AB = \emptyset$, 则事件称 A 与 B 为互逆事件, 记作 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$.
- (3) 由事件 A 发生而事件 B 不发生所构成的事件称为事件 A 与 B 的差事件, 记作 $A - B$.

性质1.1 设 A, B, C 是随机事件, 则有如下性质:

- 若 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 且 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 且 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

三. 样本空间

定义1.5 随机试验 E 的所有可能结果, 即基本事件全体组成的集合称为 E 的样本空间, 记作 U .

- 样本空间的每一个元素/基本事件称为样本空间的样本点.
- 由一个样本点构成的单点集就是基本事件.
- 样本空间的任一子集是随机事件. 在每次试验中 当且仅当该子集中的一个样本点出现时, 称该事件发生.
- 样本空间的元素是由试验目的确定的.
- 样本空间的概率论最基本的概念, 它把事件与集合联合在一起, 用集合表示事件.

例1 从一批产品中每次无放回的抽取产品进行检验, 事件 A_i 表示第 i ($i = 1, 2, 3$) 次取到合格产品. 试用事件的运算符号表示如下事件.

- 三次都取到合格产品. $A_1 A_2 A_3$
- 三次中至少有一次取到合格产品. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- 三次中恰好有两次取到合格产品. $A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3$
- 三次中最多有一次取到合格产品. $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_2 \bar{A}_3$
- 三次中都不多于两次取到合格产品. $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$