Devoir Maison 2

Corrigé

Exercice 1 (Sous-espaces vectoriels de dimension finie)**.**
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soient U, V, W trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.

1- Montrer que si $\dim U + \dim V > n$, alors $U \cap V$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{E}}\}$
Corrigé : D'après la formule de Grassman, on a $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$. Comme $U + V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, on a nécessairement $\dim(U + V) \leqslant n$. D'où :

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) > n - n \geqslant 0$$

Donc $U \cap V$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{E}}\}$.

2- On suppose que $\dim U + \dim V + \dim W > 2n$, que dire de $U \cap V \cap W$?
Corrigé : D'après la formule de Grassman, et le fait que $\dim(U + V) \leqslant n$, on a $\dim(U \cap V) \geqslant \dim U + \dim V - n$. Donc

$$\dim(U \cap V) + \dim W \geqslant \dim U + \dim V + \dim W - n > n$$

On peut donc appliquer la question 1 avec $U \cap V$ d'une part et W d'autre part, ce qui donne :

$$\dim(U \cap V \cap W) > 0$$

Et donc $U \cap V \cap W$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{E}}\}$.

Exercice 2 (Supplémentaires)**.**
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$. Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sous-espaces-vectoriels de $\mathbb{E}$.

1- On suppose que $\dim \mathbb{F}_1 = \dim \mathbb{F}_2$. On veut montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathbb{G}$ de $\mathbb{E}$ tel que :

$$\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

a) Que dire si $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$?
Corrigé : D'après le cours, pour tout sous-espace vectoriel, il existe un supplémentaire. Donc, $\exists \mathbb{G} \ / \ \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$. Comme $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$, on a immédiatement

$$\exists \mathbb{G} \ / \ \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

b) Que dire si $\dim \mathbb{F}_1 = n$?
Corrigé : Si $\dim \mathbb{F}_1 = n$, alors $\mathbb{F}_1 = \mathbb{E}$. Comme on a $\dim \mathbb{F}_1 = \dim \mathbb{F}_2$, on a alors aussi $\mathbb{F}_2 = \mathbb{G}$. En posant $\mathbb{G} = \{0_{\mathbb{E}}\}$, on a directement

$$\exists \mathbb{G} \ / \ \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

c) Si $\mathbb{F}_1 \neq \mathbb{F}_2$ et $\dim \mathbb{F}_1 < n$, montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{E}$ tel que $\mathbb{F}_1$ soit en somme directe avec $\mathrm{Vect}(x)$, et $\mathbb{F}_2$ également.
Corrigé : Puisque $\mathbb{F}_1 \neq \mathbb{F}_2$, et que ces espaces sont de même dimension, on peut dire que

$\mathbb{F}_1 \nsubseteq \mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_2 \nsubseteq \mathbb{F}_1$ (autrement, on aurait alors $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2 \ldots$).
Donc :

$$\begin{array}{rl} & \exists x_1 \in \mathbb{E} \ / \ x_1 \in \mathbb{F}_1 \text{ et } x_1 \notin \mathbb{F}_2 \\ \text{et} & \exists x_2 \in \mathbb{E} \ / \ x_2 \notin \mathbb{F}_1 \text{ et } x_2 \in \mathbb{F}_2 \end{array}$$

Prenons alors le vecteur $x = x_1 + x_2$. Si $x \in \mathbb{F}_1$, alors $x - x_1 = x_2 \in \mathbb{F}_1$ par stabilité des espaces vectoriels par combinaison linéaire, ce qui est absurde. Donc $x \notin \mathbb{F}_1$. De même, on montre $x \notin \mathbb{F}_2$.
On en déduit que $\mathbb{F}_1$ et $\mathrm{Vect}(x)$ sont en somme directe, et $\mathbb{F}_2$ est aussi en somme directe avec $\mathrm{Vect}(x)$. (Si vous en doutez, utilisez la proposition 6 du chapitre 2 d'algèbre linéaire et le fait que $x \notin \mathbb{F}_1 \ldots$).

d) Conclure avec une récurrence.
Corrigé : On va faire une récurrence (finie) sur $p = n - \dim \mathbb{F}_1$, la dimension d'un supplémentaire de $\mathbb{F}_1$ (qui est donc, la dimension d'un supplémentaire de $\mathbb{F}_2$).
Initialisation : Si $p = 0$, on a donc $\dim \mathbb{F}_1 = n = \dim \mathbb{F}_2$. On a montré dans la question *1-b)* qu'alors

$$\exists \mathbb{G} \ / \ \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

Hypothèse de récurrence : On pose (H_p) : si $\dim \mathbb{F}_1 = \dim \mathbb{F}_2 = n - p$, alors $\exists \mathbb{G} \ / \ \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$.
Démonstration de récurrence : On suppose que (H_p) est vraie. Soient $\mathbb{F}_1$ et $\mathbb{F}_2$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ de dimension $n - (p+1) = n - p - 1$ (on prend, naturellement, $p < n$.

- Soit $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$, et alors d'après la question *1-a*, on a :

$$\exists \mathbb{G} \ / \ \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

- Soit $\mathbb{F}_1 \neq \mathbb{F}_2$, et alors d'après la question *1-c*, on a :

$$\exists x \in \mathbb{E} \ / \ \mathbb{F}_1' = \mathbb{F}_1 \oplus \mathrm{Vect}(x) \text{ et } \mathbb{F}_2' = \mathbb{F}_2 \oplus \mathrm{Vect}(x)$$

Alors $\mathbb{F}_1'$ et $\mathbb{F}_2'$ sont des espaces vectoriels de dimension $n - p - 1 + 1 = n - p$, je peux donc appliquer l'hypothèse de récurrence (H_p), donc :

$$\exists \mathbb{G}' \ / \ \mathbb{F}_1' \oplus \mathbb{G}' = \mathbb{F}_2' \oplus \mathbb{G}' = \mathbb{E}$$

En posant $\mathbb{G} = \mathbb{G}' \oplus \mathrm{Vect}(x)$, j'obtiens :

$$\exists \mathbb{G} \ / \ \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

C'est à dire (H_{p+1})

Conclusion : Comme (H_0) est vraie et $\forall p \in [\![0; n-1]\!]$, $(H_p) \implies (H_{p+1})$, on a donc $\forall p \in [\![1; n]\!]$, (H_n) est vraie, ce qu'on voulait démontrer.

2- On suppose que $\dim \mathbb{F}_1 < \dim \mathbb{F}_2$. Montrer qu'il existe deux sous-espace vectoriel $\mathbb{G}_1$ et $\mathbb{G}_2$ de $\mathbb{E}$ tel que :

$$\mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G}_1 = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G}_2 = \mathbb{E} \text{ et } \mathbb{G}_2 \subset \mathbb{G}_1$$

Corrigé : D'après le théorème de la base incomplète, je peux compléter $\mathbb{F}_1$ en un sous-espace vectoriel $\mathbb{F}_1'$ de $\mathbb{E}$ qui soit de même dimension que $\mathbb{F}_2$. Définissons donc $\mathbb{G}_0$ tel que $\mathbb{F}_1' = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G}_0$.
On applique alors la question *1-d* aux espaces $\mathbb{F}_1'$ et $\mathbb{F}_2$, de même dimension :

$$\exists \mathbb{G} \ / \ \mathbb{F}_1' \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

C'est-à-dire :

$$\exists \mathbb{G} \ / \ \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G}_0 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$$

On pose alors $\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}$ et $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} \oplus \mathbb{G}_0$, ce qui répond à la question posée.

Problème

On cherche à résoudre, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M^2 = I_2$$

I - Préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1- Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Corrigé : La démonstration est dans le cours.

2- Décomposer la matrice A suivante comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 5 & -2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé : On calcule $\dfrac{1}{2}(A +^{\mathrm{t}} A)$ et $\dfrac{1}{2}(A -^{\mathrm{t}} A)$:

$$\frac{1}{2}(A +^{\mathrm{t}} A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7/2 & 9/2 \\ 2 & -2 & 1/2 & 3/2 \\ 7/2 & 1/2 & 2 & -1 \\ 9/2 & 3/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{1}{2}(A -^{\mathrm{t}} A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1/2 & 7/2 \\ 2 & 0 & -1/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1 \\ -7/2 & -5/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II - Analyse

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = I_2$.

1- Soient $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = S + A$. Montrer qu'on a nécessairement :

$$\begin{cases} A^2 + S^2 & = I_2 \\ AS + SA & = \mathbf{0}_2 \end{cases}$$

Corrigé : On a $M = A + S$, donc $M^2 = (A+S)^2 = A^2 + AS + SA + S^2 = I_2 = I_2 + \mathbf{0}_2$
Comme ${}^{\mathrm{t}}(A^2 + S^2) = ({}^{\mathrm{t}}A^2 +^{\mathrm{t}} S^2) = ((-A)^2 + S^2) = A^2 + S^2$, on en déduit que $(A^2 + S^2) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
Comme ${}^{\mathrm{t}}(AS + SA) = ({}^{\mathrm{t}}S^{\mathrm{t}}A +^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}S) = S \times (-A) + (-A) \times S = -SA - AS$, on en déduit que $AS + SA \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.
Puisque la décomposition en matrice symétrique et antisymétrique est unique, on en déduit :

$$\begin{cases} A^2 + S^2 & = I_2 \\ AS + SA & = \mathbf{0}_2 \end{cases}$$

2- En déduire que AS est une matrice symétrique
Corrigé : On a ${}^{\mathrm{t}}(AS) =^{\mathrm{t}}S^{\mathrm{t}}A = -SA = AS$ (par la deuxième équation de la question *1-*), on en déduit que $AS \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

3- On pose $S = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que $d = 0$ ou $a = -b$.
Corrigé : $AS = \begin{pmatrix} dc & db \\ -da & -dc \end{pmatrix}$ est un matrice symétrique. Donc $db = -ab$, d'où l'on déduit $d = 0$ ou $a = -b$.

4- En déduire que toutes les solutions de $M^2 = I_2$ sont soit I_2, soit $-I_2$, soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\phi\cos\theta & \operatorname{ch}\phi\sin\theta + \operatorname{sh}\phi \\ \operatorname{ch}\phi\sin\theta - \operatorname{sh}\phi & -\operatorname{ch}\phi\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } (\theta,\phi) \in [0; 2\pi[\times\mathbb{R}$$

Corrigé : 1$^{\text{er}}$ cas : $b \neq -a$.

$$M^2 = I_2 \implies \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ac+bc \\ ac+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a^2+c^2 &= 1 \\ b^2+c^2 &= 1 \\ c(a+b) &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = b \text{ car } a \neq -b \\ ac = 0 \\ a^2+c^2 = 1 \end{cases}$$

Si $c = 0$, alors on en déduit $a^2 = 1$, d'où $a = b = \pm 1$ et donc $M = \pm I_2$.
Si $a = 0$, alors on en déduit $c^2 = 1$, d'où $c = \pm 1$ et donc $M = \pm I_2$.
2$^{\text{e}}$ cas : $a = -b$.

$$M^2 = I_2 \implies \begin{pmatrix} a^2+c^2-d^2 & 0 \\ 0 & a^2+c^2-d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies a^2+c^2-d^2 = 1$$

Comme $\operatorname{sh}(\cdot)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $\exists!\phi \in \mathbb{R} \;/\; d = \operatorname{sh}\phi$. On a alors :

$$\begin{aligned} & a^2+c^2-d^2 = 1 \\ \Rightarrow\; & a^2+c^2-\operatorname{sh}^2\phi = 1 \\ \Rightarrow\; & a^2+c^2 = 1+\operatorname{sh}^2\phi \\ \Rightarrow\; & a^2+c^2 = \operatorname{ch}^2\phi \\ \Rightarrow\; & \left(\frac{a}{\operatorname{ch}\phi}\right)^2 + \left(\frac{c}{\operatorname{ch}\phi}\right)^2 = 1 \text{ car } \operatorname{ch}\phi \neq 0 \;\; \forall\phi\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Comme on a une somme de deux carrés valant 1, alors on peut identifier les termes à un sinus et un cosinus :

$$\exists\theta \in [0; 2\pi[\;/\; \frac{a}{\operatorname{ch}\phi} = \cos\theta,\; \frac{c}{\operatorname{ch}\phi} = \sin\theta$$

Donc on a au final :

$$\begin{cases} a &= \cos\theta\operatorname{ch}\phi \\ b &= -\cos\theta\operatorname{ch}\phi \\ c &= \sin\theta\operatorname{ch}\phi \\ d &= 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\phi\cos\theta & \operatorname{ch}\phi\sin\theta + \operatorname{sh}\phi \\ \operatorname{ch}\phi\sin\theta - \operatorname{sh}\phi & -\operatorname{ch}\phi\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } (\theta,\phi) \in [0; 2\pi[\times\mathbb{R}$$

III - Synthèse

Vérifier ques les matrices trouvées à la question précédentes sont bien solutions de l'équation de départ.
Corrigé : Chaque matrice trouvée précedemment est solution de $M^2 = I_2$. En effet, pour $M = \pm I_2$, c'est évident. Pour le dernier cas, on calcule «à la main » :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\phi\cos\theta & \operatorname{ch}\phi\sin\theta + \operatorname{sh}\phi \\ \operatorname{ch}\phi\sin\theta - \operatorname{sh}\phi & -\operatorname{ch}\phi\cos\theta \end{pmatrix} \\ \implies M^2 &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2\phi\cos^2\theta + \operatorname{ch}^\phi\sin^2\theta - \operatorname{sh}^2\phi & 0 \\ 0 & (-\operatorname{ch}\phi)^2\cos^2\theta + \operatorname{ch}^\phi\sin^2\theta - \operatorname{sh}^2\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2\phi - \operatorname{sh}^2\phi & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}^2\phi - \operatorname{sh}^2\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

L'ensembe des solutions de $M^2 = I_2$ est :

$$\{-I_2; I_2\} \cup \left\{ M = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\phi\cos\theta & \operatorname{ch}\phi\sin\theta + \operatorname{sh}\phi \\ \operatorname{ch}\phi\sin\theta - \operatorname{sh}\phi & -\operatorname{ch}\phi\cos\theta \end{pmatrix},\; (\phi,\theta) \in \mathbb{R}\times[0; 2\pi[\right\}$$