ü ç 第2章：Ë 空间 V 和ectoriels 一 pplication 该 inéaires ü

目录

我 - 可伸缩矢量空间 **3**

第1组和身体。。 3

2-矢量空间和子空间。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。 五

3-家族的载体。。 10

4-基础的向量空间。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。。 12

介绍

对于habil LER各种向量空间，没有什么比一个好热的线性组合。

我们迄今研究了很多数学对象共享某些基本属性。它们可以一起加入，而“脂肪”和“缩小”。即让他们 *线性组合。* 实数和复数是一个例子，载体以及矩阵。这也适用于多项式，和连续函数，例如的情况。因此，对于这些属性的对象家庭全部有效定理将在每种情况下，它邀请我们在这个比较笼统的概念工作有效。

此类对象的家庭被称为 向量空间， 因为这些元素的行为“为载体”。我们将看到，这个工具很一般，非常方便双方，并允许我们展现了很多有趣的结果，几乎是无限的应用。实际上，在物理和化学基础，单向使用的所有数学中的另一个，在向量空间。

此外，我们会看到，这些空间有一定的结构（ *线性）*， 和空间应用的另一个研究中保持这种结构（ *线性申请）* 是向量空间的研究极其肥沃的工具。

我 - 可伸缩矢量空间

第1组和车身

定义1。 *二元运算*
˚ 是 **内部构成法则** 所有 *G*（ 简短的 *LCI*）当且仅当它是一个应用程序

g ^ˆ g ^Ñ g ^

实施例1。

- 该`除了 真实的，复杂的，矩阵功能。。。
- 乘法 真实的，复杂的，矩阵功能。。。
- 矢量产品^ 在载体 [R 3
- 组成 ˝ 实际功能
- 应用 ķ : P *X*，*Y* q THN *X* ķ *那里* “ 2 *XY* 3 “ *那里* Ë *x* 真实
- 。。。

两个向量的标量积 [R 2 通过利弊，不是内部组合物法。

定义2。 *组*
p *G*，Q 是 **组** 当且仅当满足下列条件，VERI网络编辑：

- g ^ 是 *设定元件*
- ˚ 是 *内部构成法则* 的 g ^
- p *G*，Q VERI网络爱德 **组公理：**
  1- ˚ 是 **联想**， 也就是说：

  @p *A*，*B*，*C* q P构成 g ^ 3 *有* ˚p *b* ˚ *ç*q“P *有* ˚ *b*q˚ *ç*

  2- ˚ 在 g ^ 一 **中性元素** *E*，也就是说：

  d *Ë* P ∊{@g P *G*，*克* ˚ *Ë* “ *Ë* ˚ g ^“ g ^

  3-任何项目 g ^ 在 g ^ 一 **对称** 为 ˚，也就是说：

  @ g ^ P *G*，d ^ *h* P ∊{*克* ˚ ^ *h* “ ^ *h* ˚ g ^ “ *Ë*

定义3。 如果 p *G*，Q 是一组是 ˚ 是 **可交换** 在 *G*，也就是说：

@p *A*，*B* q P构成 *G*，*有* ˚ *b* “ *b* ˚ *有*

然后说，p *G*，Q 是 **阿贝尔组**（ 或有时 *交换基团*）

实施例2。

- p ž` q 是阿贝尔群，但 p ž q 是不是一个组（2没有对称 在 Z）。
- p Q`Q，P Q·，Q，P R，`Q，P [R·，Q，P ç`Q，P ç·，q 是交换群。
- p GL *ñ* p [R Q，Q 是一个组，但 是不可交换的。 p GL *ñ* p [R Q，Q' 是不是一个组，`在此情况下的LCI。
- p 中号 *N*，*P* p ç Q，Q' 是一个组。
- 所有功能 [R 在 [R 类 ç 1 严格递增的，是一组对法律 ˝。 它是不可交换的。

注意：1。 当存在关于内部构成法则时，或当没有可能混淆的上下文和清晰，可以指出的滥用 *g* ^ 该组 p *G*，Q， 和发音念得好。

注2。 道德上的基团是一组其中一个可以"结合"的两个元件，以获得第三，这仍然是在该组，加上三个条件：与Laquel元素的优先级被组合没关系，存在着"没有差别"当与彼此组合，每个组合是与该组的另一元件联合"可逆"的元素。

更抽象，存在的情况下，用于添加的特定定义，可以加，减，剩余的总零和y所属的组。

注3。 当LCI`注意，经常存在的相对 *g* ^ 由 " *克*， 和中性0 *G*. 当观察到法 或者，经常存在的相对 *g* ^ 由 *g* ^-1 和中性1 *G*.

定义4。 *体*

p K，`，q 是 **体** 当且仅当满足下列条件，VERI网络编辑：

1- p K，` q 是 *阿贝尔群*， 但是应当理解的是，身份元素0 2- p ķ ZT 0 ü，Q 是 *组*

3-法 是 **分配的** 相对于'，即：

@p *A*，*B*，*C* q P构成 ķ3 *有* p *b*`*C* q" *有 b*`*有 ç* 和 p *b*`*C* q *有*" *b 有*`*C 有*

定义5。 如果 p K，`，q 是主体和 p ķ ZT 0 ü，Q 是一个交换基团，所述 p K，`，q 是 *交换*。

实施例3。 p Q，`，Q，P R，`，Q，P C，`，q 是可交换的领域。 p Z ,.`，q 是不是身体。所有 ^ h "" ^ *已*`*b* 我 " *ç*" *d* 我

ç" *d* 我 *有*" *b* 我 {p *A*，*B*，*C*，*d* q P构成 [R4 （子集 中号 2 p ç q）配备了`法律 ^

是一个非交换体。

注4。 道德上，主体是在哪一个可以加，乘，减和元素划分在一起的组件。大多数我们将使用将是可交换的尸体。在电子FF ECT，我们将使用principalements [R 或 ç 独立注意 K.

练习I-1。 演示 p H，`，q 先前定义为一体，并显示非交换性的一个例子。

练习I-2。 演示 PT 0,1 U，¯ `¯ q 是一个字段，其中¯ ` 和¯ 指的是加法和乘法模2。

2-矢量空间和子空间

定义6。 *向量空间*
是否 p K , `ķ ^ ķ q 可交换的字段，中性元素和` 分别为0ķ 和1K. 他们呼吁 向量空间 上 K（ 或 K- 矢量空间），而三元组 p E , ` , Q 这样的：

- p Ë ` ē q 是阿贝尔群，中性0E ,
- ¨ 是 外部构成法则（ 或者也可以， *外部定律）：*

$$¨ : ķ Ë Ñ Ë$$
$$p \lambda X q \quad \text{THN } \lambda ¨ X$$

这VERI科幻ES 向量空间的公理：

1- *通过中性稳定性：@ X* P E ， 1ķ ¨ *X* “ *X*

2- *分配左：@ p X , Y* q P构成 Ë2 @ *λ* P ķ *λ* ¨p *X* ` Ē *那里* q“ *λ* ¨ *X* ` Ē *λ* ¨ *那里*

3- *分配权：@ X* P Einstein @ Home p *λ* , *μ* q P构成 ķ2 p *λ* ` ķ *μ* q¨ *X* “ *λ* ¨ *X* ` Ē *μ* ¨ *X*

4- *关联：@ X* P Einstein @ Home p *λ* , *μ* q P构成 ķ2 p *λ* ^ ķ *μ* q¨ *X* “ *λ* ¨p *μ* ¨ *X* q

的元素 ķ 被称为 纯量 矢量空间的，的元素 Ë 是 向量。

注5。 为了减轻的符号，我们允许自己要注意：1ķ 1 *λ* ^ ķ *μ* 由 *λμ* , *λ* ¨ *X* 由 *λx* ,
` ķ ^ K , E ` 通过，，和` 也。最后，当背景是非常明显的，注意0ķ 和0 Ē 由0虽然这是不一样的数学对象。用这个符号，公理成为：

1- @ *X* P E ， 1 *X* “ *X*

2- @ p *X* , *Y* q P构成 Ë2 @ *λ* P ķ *λ* p *X* “ *Y* q“ *λx* ` *λy*

3- @ *X* P Einstein @ Home p *λ* , *μ* q P构成 ķ2 p ` *Mλ* q *X* “ *λx* ` *μX*

4- @ *X* P Einstein @ Home p *λ* , *μ* q P构成 ķ2 p *λμ* q *X* “ *λ* p *μX* q

最后，虽然不建议这样做，有时你permettera由标量的权利，而不是左繁殖。

最后，当` 法律，¨¨ 标量和身体都从上下文清楚，我们可以在得分省略了，说说“向量空间 Ë ”。

注6。 注意，这不是这两个向量相乘的问题。我们没有定义了乘法 电子！

实施例4。

- p R , ` , Q , P [R2 , ` , Q , P [R *N* , ` , Q 同 *ñ* ED 1是 R- 向量空间。
- p [RN , ` , Q , P [RR , ` , Q（ 所有套房 [R 和功能 [R 在 R） 也 R- 向量空间。
- p C , ` , Q 是 C- 向量空间，并且也是 R- 向量空间。但 p R , ` , Q 是不是 C- 向量空间。
- p ç 0 p *我* q'Q， 该组的连续函数在间隔 *我* 价值观 [R 是 R- 向量空间。
- 中号 *N* , *P* p ķ q 是 K- 向量空间。
- [R [*X*] 所有待定多项式 *X* 以COE FFI cient真实的，是一个 R- 向量空间。

注7。 一个向量空间，事实上，它可以是一个日益基“膨胀”，和“缩小”与标量乘的对象，和计算预期行为。

定义7。 *线性组合*
是否 p E , ` , Q 一 K- 向量空间 p *X*1 。。。， *Xp* q *p* 向量 E. 他们呼吁 线性组合 形式的这些载体中的任何载体：

$$\lambda_1 X_1 ` ¨¨¨ ` \lambda_p X_p \text{同 } p \lambda_1 \text{。。。}, \lambda_p q \text{ P构成 } ķ_p$$

这也是说，p ÿ λ 我 X 我是的线性组合（缩写CL）p X 我 q 我P◆1; p。
我“1

实施例5。

- *中号*“ˆ 1“ 1 2 0 是的线性组合 p $\ddot{E}_{I,J}$ q $_{I,J}$P◆1,2◆2.
  在电子FF ECT，*中号*“ 1 $\ddot{E}_{1.1}$' p” 1 q $\ddot{E}_{1.2}$' 2 $\ddot{E}_{2.1}$。

- *P*“ 2 X_2' X“ 图3是的线性组合 p X_2 X1 Q值。

定义8。 *子空间*
是否 p E，`，Q 一 K- 向量空间。他们说，˚F 是 子空间 的 p E，`，Q 如果：

- ˚F 谩 Ë
- p 楼` Q 是 K- 向量空间

注8。 需要注意的是简写 ˚F 是SEV之一 E. 注意必须在法律（因此中性元素）都是一样的！

然而，不是redépontrer向量空间公理 ˚F 我们将使用下面的定理，这使我们能够绘制矢量空间结构的直接好处网络t E.

定理1。 *子空间的表征要么* ˚F 谩 E. *以便* ˚F *是的线性子空间* p E，`，Q *它是必要的，苏FFI吨为：*

1- ˚F ‰^ h
2- ˚F *是线性组合稳定的，也就是说：*

@ λ P 沃顿知识 p X，Y q P构成 ˚F 2 λx回答`y P ˚F

示例1。

实施例6。 子空间的例子。证明上述定理提出以下建议是一个很好的锻炼。

- Ť 0 Ë ü 是一个向量的子空间 Ë
- TP 2 *有*“ 3 B，A，A`b q { A，B P [R 2 ü 是一个向量的子空间 [R 4。

- [R 2 *X]* 所有待定多项式 *X* 到COE FFI实系数，度小于或等于的
  2，是的子空间 [R [*X]*。
- 所有方阵大小 *N*，在以COE FFI cient ķ 无痕是SEV之一
  中号 *ñ* p ķ Q值。
- 一 *ñ* p ķ q 是SEV之一 中号 *ñ* p ķ Q值。
- 该套系统的解决方案 *ñ* 方程 *p* 均质未知是SEV的 [R *ñ*。
  （它可被限制为特定的情况下）

建议1。 *在矢量空间中的计算规则*

- @ *X* P E，0 ķ ¨ *X* " 0 E 和@ *λ* P ķ *λ* ¨ 0 E " 0 E
- @p *λX* q P构成 ķ E，*λ* ¨ *X* " 0 E 一 *λ* " 0 ķ 或 *X* " 0 E
- @p *λX* q P构成 ķ E，p" *λ* q¨ *X* " *λ* ¨P" *X* Q"'P *λx* q
- @ *ñ* P N - [*X* P E，*ñ* ¨ *X* " *NX* " *X* '"" *X* looooomooooon 。

  ñ 时间

建议2。 *稳定性路口*
是否 p ^ *h* 我 q 我 P 我 一个家族的子空间 K- 向量空间 E. 然后

Č
^ *h* 我 是一个向量的子空间 Ë
我 P 我

示例2。

实施例7。 在向量空间 [R 3 通过三个维度的空间点样 p *X*，*Y*，*Z* q 计划方程
X " 0 *那里* " 0是两个矢量的子空间。它们的交点是右方向矢量 p 0 0,1 q
还一个向量空间。所有功能 ç 8 p *我* [R q 是的子空间矢量 ç 0 p *我* [R Q值。

注9。 请注意，这不是工会如此。拿 Ť *.lambda.i N*，*λ* P [R ü 和 Ť *μ{* TR p *中号* q" 0 ü 作为子空间 中号 2 p [R q 例如。。。

这是线性组合不能保证是在联合。我们需要一个更强有力的条件，如在提案刚过，一个数学工具最适合于矢量空间，统一的线性结构：总和。

建议3。 是否 ˚F 1 和 ˚F 2 双载体子空间 E. 然后 ˚F 1 ÿ ˚F 2 是一个向量的子空间 Ë 当且仅当 ˚F 1 谡 ˚F 2 或 ˚F 2 谡 ˚F 1。

示例3。

定义9。 *线性跨度*
是否 p E , ` ， Q 一 K- 向量空间，并让 一 的一部分 E. 它定义了 **子空间的跨越** 一位著名的Vect p 一q 通过：

VECT p 一q“ č ˚F
一谩 FF SEV的
Ë

也就是说，所有子空间的交集 Ë 含 *A.*
这是包容的感觉， *最小* 子空间 Ë 含 *A.*

建议4。 是否 p E , ` ， Q 一 K- 向量空间，并让 一 的一部分 E.

+
ÿ
VECT p 一Q“# *X*P *E{*d *ñ*P ñ·, DP *有*1 . . . , *有ñ*q P*构成* 一*N*, DP *λ*1 . . . , *λñ*q P*构成* ķ*ñN* *λ我 有我*“ *X*
我“1

也就是说，的Vect p 一q 通过的元件的所有线性组合形成 *A.* 他们也说，这是 一 *通过关闭（* 或饱和的 ）的线性组合。

样品4。

注10。 我们通过扩大本的Vect定义 p *A , B* q“ VECT p 一ÿ *乙* q 当 一和 *乙* 有两个部分组成 E.

实施例8。 [R 2 *X]*“ VECT p 1 *X , X*2 q

定义10。 *两个子空间的总和*
是否 p E , ` ， Q 一 K- 向量空间，并 V 1 V 2 双载体子空间 E. 它定义了 **总之，**
记 V 1` V 2 作为矢量空间：

V 1` V 2 “T *X*1` *X*2 { *X*1 P V 1 *X*2 P V 2 ü

注11。 因此，我们 V 1` V 2 “ VECT p V 1 V 2 q

实施例9。 两个直disctinctes矢量的总和的矢量地图。

注12。 如果 V 1 谩 V 2 然后 V 1` V 2 “ V 2。

定义11。 *附加矢量子空间*
是否 p E , ` ，Q 一 K- 向量空间，并 V 1 V 2 双载体子空间 E. 他们说
另外 如果：

#
V 1` V 2 “ EV 1 X V 2 “T 0 ü

值得注意的是 V 1 “ V 2 “ E.

注13。 警告，一个子空间一般不会额外 *唯一的。* 这是情况 Ť 0 ü 和 E.

建议5。 如果 V 1 “ V 2 “ E， 然后

@ X P E，d P！ X 1 X 2 q P构成 V 1 ˆ V 2 { X 1` X 2 “ X

样品5。

注14。 这种独特的分解成子空间向量可以在较大的子空间的家庭下面的概念被推广。

定义12。 *直接和向量子空间*
让 V 1 V 2。。。，V ñ ñ 向量子空间 E. 他们说，Ë 是 **直和** 的 p V 我 q 只要：

@ X P E，d P！ X 1。。。，X ñ q P构成 V 1 ˆˆˆ V N { X 1` ˆˆˆ` X ñ “ X

值得注意的是 Ë “ V 1 “ V 2 ‘ˆˆˆ‘ V ñ “‘ 求 “ 1 V 我

注15。 我们说的空间 V 我 *是直接总和* 如果 ñ

ÿ
V 我 “‘ 求 “ 1 V 我。
我 “ 1

因此，另外两个领域是直接费。

建议6。 让 V 1 V 2。。。，V ñ ñ 向量子空间 E. 这些空间是直和当且仅当

@p X 1。。。，X ñ q P构成 V 1 ˆˆˆ V N，X 1` ˆˆˆ` X ñ “ 0 一个@ 我 P � 1; ñ ，X 我 “ 0

样品6。

实施例10。 [R 3 " VECT PTP 1 0,0 QUQ" VECT PTP 0 1,0 QUQ" VECT PTP 0 0,1 QUQ

" VECT PTP 1 0,0 QUQ" VECT PTP 2 " 1,0 QUQ" VECT PTP 0 1,3 QUQ

定义13。 是否 p Ë` E，¨ Ë q 和 p ˚F` ˚F ¨ ˚F q 两 K- 向量空间。它定义 **矢量空间产物** 结构 p Ë 楼` ¨¨¨ q `法律，¨ 上定义 Ë ˚F 通过：

p X_1 *那里* 1 q`p $X_2$ *那里* 2 q"P $X_1$` Ë X_2 *那里* 1` ˚F *那里* 2 q

λ ¨p *X*，*Y* q"P λ ¨ E *X*，λ ¨ ˚F *那里* q

同样，我们可以缓解`评级 E，˚F，¨ E，¨ ˚F 当上下文允许（大部分）。

实施例11。 [R ^ [R " [R 2 不仅作为一个整体，也可作为空间矢量。一个还可以定义例如向量空间 ç 2 ^ *[R [X]*，由两个复杂三元和COE FFI cient真正的多项式，如果你愿意。。。

建议7。 是否 *X* 一组，让 p 楼` Q — K- 向量空间。那么集合：

˚F p *X* ˚F Q"Ť *F：X* Ñ ˚F ü

具有以下结构：K- 对于`法向量空间 ¨ 下一篇：

@ *X* P *X* p ˚*F* 1` ˚*F* 2 QP *X* q" ˚*F* 1 p *X* q` ˚*F* 2 p *X* q

@ *X* P *X* p λ ¨ ˚*F* QP *X* q" λ*F* p *X* q

（当它被用来直接评分"光" ……）

实施例12。 的间隔的所有功能 *我* 在 R： ˚F p *我* [R Q值。 所有的套房复值 ç ñ。。。

3-家族的载体的

在本节中，我们将考虑 K- 向量空间 p E，`，Q 和家庭 p *X* *我* q *我* P ◆ 1; *p* 的 *p* 向量 E.

定义14。 它定义了 *由家庭产生的矢量空间* p *X* *我* q *我* P ◆ 1; *p* 如通过由这些矢量的组所跨越的空间矢量 p *X* *我* q *我* P ◆ 1; *p*：

VECT PP *X* *我* q *我* P ◆ 1; *p* ◆ q" VECT PT X_1 X_2。。。，X_p UQ

还表示，p *X* *我* q *我* P ◆ 1; *p* *创建* 这个向量空间。

定义15。 *发生家庭*

家庭 p *X* *我* q *我* P ◆ 1; *p* 表达 **发电机** 的 Ë 很快就滋生 E： 也就是到时再说

Ë " VECT PP *X* *我* q *我* P ◆ 1; *p* ◆ q

这相当于：

@ XP E，DP λ我 q 我P � 1; p P ķ p{ X“ p ÿ λ我 X我 我“1

实施例13。

- p 1，I q 是发生家庭 ç 如 R- 向量空间。
- p 1 2 I，E 2I{π 3 q 是发生家庭 ç 如 R- 向量空间。
- p 1 q 是发生家庭 ç 如 C- 向量空间。
- p 1 X，X 2。。。，X ñ q 是发生家庭 [R N[X]。
- p 1→2→3 π，Ë q 不是发生家庭 [R 如 Q- 向量空间。
- TP 1 0,0 Q，P 0 1,0 Q，P 0 0,1 那 是发生家庭 [R 3。

定义16。 *免费家庭*
家庭 p X我 q 我P � 1; p 表达 免费 Ë 只要它的载体 线性无关
也就是说：

@p λ1 λ2。。。，λp q P构成 ķ p，ÿ p λ我 X我“ 0 一个@ 我P � 1; p，X我“ 0 我“1

（这意味着，p VECT空间 p X我 q 是直接总和。）

定义17。 *针织系列*
家庭 p X我 q 我P � 1; p 表达 有关 只要她 *是不是免费的（* 我们也说了向量 *线性相关）* 即当

DP λ1 λ2。。。，λp q P构成 ķ p{P ÿ λ我 X我“ 0 p λ1 λ2。。。，λp q‰p 0 0。。。，0 q 我“1

8号提案。

1-含有零向量0家庭 Ë 是必然的联系。2-两个向量的家庭是相关的，当且仅当它们是共线的

3.当且仅当一个向量是的线性组合矢量的家族被链接
别人。

样品7。

实施例14。 • p 1 X 2 X`3 q 链接 [R 3[X]

- p 1 X q 是免费的 [R 2 X]
- PP 1 0,0 Q，P 0 1,0 Q，P 0 0,1 QQ 是免费的 [R 3

注16。 下面的定理，可已经提到的，是对向量空间的维理论的基础上，我们将在后面看到。

定理。 ***如果一个向量空间具有发电的家庭 ñ 元素，那么整个法米尔免费最多 ñ 元素。***