学风朋辈引领行动中心

期末复习资料-线代

编写：
杨秀慧、许多、张玉山
谭九七、蒋文韬、陈朋
汇总：陈朋

扫描右侧二维码
关注学风朋辈微信平台
获取课程资料动态

本资料版权归学风朋辈所有

1　矩阵及其运算

重点: 矩阵及分块矩阵的运算及其性质，方阵的行列式、逆矩阵、伴随矩阵及其相关性质

难点: 分块矩阵、逆矩阵、伴随矩阵及其相关性质定理

1.1　矩阵的概念

1.1.1　矩阵的概念

定义（矩阵）p2

1.1.2　几种特殊矩阵

(1) 对角矩阵
(2) 数量矩阵
(3) 单位矩阵
(4) 上（下）三角形矩阵
(5) 行阶梯形矩阵
(6) 简化行阶梯形矩阵

注: 这些都是矩阵的基础知识，请熟记

1.2　矩阵的运算

1.2.1　矩阵的加法

定义（矩阵的加法）p7

注:

(1) 只有同型矩阵才可相加，其结果与原来矩阵同型
(2) 定义负矩阵，即类似矩阵的加法得到矩阵的减法

1.2.2　矩阵的数乘

定义（矩阵的数乘）p7

注: 矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算

1.2.3 矩阵的乘法

定义（矩阵的乘法）p8

注: 矩阵乘法满足结合律与分配律，但一般没有交换律和消去律，具体请翻阅书本 p10

1.2.4 方阵的幂与多项式

定义（方阵的幂）p10

定义（方阵的多项式）p10

1.2.5 矩阵的转置

定义（矩阵的转置）p12

注: 转置在接下来的单元会用到，请熟记规律。可将矩阵的转置看成是对矩阵的一种运算, 其满足以下规律

(1) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

(2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

(3) $(\lambda\mathbf{A})^T = \lambda\mathbf{A}^T$

(4) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

定义（对称矩阵与反对称矩阵）p13

注: 由定义可得以下结论

(1) 对称矩阵和反对称矩阵都是方阵

(2) 对称矩阵的和，差仍是对称矩阵

(3) 对称矩阵的乘积不一定是对称矩阵

1.3 逆矩阵

定义（矩阵的逆）设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 $\mathbf{B}$，使得 $\mathbf{AB}$ =$\mathbf{BA} = \mathbf{EB}$，则称矩阵 $\mathbf{A}$ 为可逆的. 矩阵 $\mathbf{B}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵. 记为：$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$

定理 1.1（**唯一性**）若 $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵，则 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵是唯一的

注:p16 例 1.13 请熟记

定理 1.2 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 可逆，数 $k \neq 0$，则

(1) $\mathbf{A}^{-1}$ 可逆，且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

(2) $k\mathbf{A}$ 可逆，且 $(k\mathbf{A})^{-1} = k^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(3) $\mathbf{AB}$ 可逆，且 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(4) $\mathbf{A}^T$ 可逆，且 $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

1.4 分块矩阵

1.4.1 分块矩阵的概念

定义（分块矩阵）p18

1.4.2 分块矩阵的运算 p20-21

(1) 加法
(2) 数乘
(3) 转置（**注**: 分块矩阵不仅形式上行转置，而且每一个子块也进行转置）
(4) 乘法

定义（分块对角阵）p22

性质：

$\mathbf{A} = diag(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_s), \mathbf{B} = diag(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_S)$. 则有

(1) $\mathbf{AB} = diag(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{A}_s\mathbf{B}_s)$,
(2) $\mathbf{A}^k = diag(\mathbf{A}_1^k, \mathbf{A}_2^k, \ldots, \mathbf{A}_s^k), k$ 为正整数
(3) $\mathbf{A}^{-1} = diag(\mathbf{A}_1^{-1}, \mathbf{A}_2^{-1}, \ldots, \mathbf{A}_s^{-1})$.
(4) $\mathbf{A}^k = diag(\mathbf{A}_1^k, \mathbf{A}_2^k, \ldots, \mathbf{A}_s^k), k$ 为任意整数

1.5 矩阵的初等变换与初等矩阵

1.5.1 初等变换

定义（初等行变换）p25

定理 1.3 任意 $m \times n$ 矩阵 **A** 总可以经过有限次初等行变换化为行阶梯形矩阵.

定理 1.4 任意 $m \times n$ 行阶梯形矩阵 **A** 总可以经过有限次初等行变换化为简化行阶梯形矩阵.

定义（标准型矩阵）p30

定理 1.5 任意 $m \times n$ 矩阵总可以经过初等变换化为标准形矩阵.

定义（矩阵等价）p31

注：矩阵的等价是一种关系，它具有以下性质：

(1) 反身性：$\mathbf{A} \cong \mathbf{A}$ 等价
(2) 对称性：若 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$，则 $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}$
(3) 传递性：若 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$，$\mathbf{B} \cong \mathbf{C}$, 则 $\mathbf{A} \cong \mathbf{C}$

定理 1.6 任何矩阵都有与它行等价的行阶梯形矩阵和简化行阶梯形矩阵.

定理 1.7 任何一个 $m \times n$ 矩阵都等价于一个如下形式的标准形：

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

此标准形由三个数 m, n 和 r 唯一确定，其中 r 是行阶梯矩阵的非零行数.

1.5.2 初等矩阵

定义（矩阵等价）p32

定理 1.8 用一个 m 阶初等矩阵左乘一个 $m \times n$ 矩阵等价于对 $\mathbf{A}$ 作一次同名的初等行变换；

用一个 n 阶初等矩阵右乘一个 $m \times n$ 矩阵等价于对 $\mathbf{A}$ 作一次同名的初等列变换.

注：此定理可用来极大的简化计算。

定理 1.9 初等矩阵可逆，其逆矩阵还是同名初等矩阵

定理 1.11 矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价的充要条件是

存在初等方阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_s, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_t$, 使得 $\mathbf{A} = \mathbf{P}_s \ldots \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{B}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 \ldots \mathbf{Q}_t$

1.6 用初等变换求逆矩阵

定理 1.12 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，则以下命题是等价的

(1) $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵

(2) $\mathbf{A}$ 与单位矩阵等价

(3) $\mathbf{A}$ 可以表示成有限个初等矩阵的乘积

(4) $\mathbf{A}$ 可经过有限次初等行（或列）变换化为单位矩阵

证明见 p37, 最好可以自己证明出来

2 行列式

2.1 行列式的定义

2.1.1 n 级排列

(1) 基本概念：排列，逆序，逆序数，排列的奇偶性

(2) 主要结论：

(a) n 级排列共有 $n!$ 个，其中奇偶排列各占一半

(b) 对换改变排列的奇偶性

(c) 任意一个 n 级排列都可以经过一些对换变成自然顺序，并且所作对换的数与这个排列有相同的奇偶性

2.1.2 n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

注：上三角、下三角、对角行列式都等于其主对角线元素乘积

2.2 行列式性质

(1) 转置不变

(2) 换行（列）变号

(3) 两行（列）对应相等则为零

(4) k 乘某一行（列）等于 k 乘行列式（与矩阵相比较）

(5) 有零行则为零

(6) 行（列）成比例值为零

(7) 拆分性质（每一步只能动某一行或列）

(8) 倍加不变

2.3 行列式按行（列）展开

2.3.1 余子式、代数余子式

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\cdots,n)$$
$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

2.4 特殊行列式

(1) 对称行列式:$a_{ij}=a_{ji}$ ，反对称行列式:$a_{ij}=-a_{ji}$

注：奇数反对称行列式的值为零

(2) 对称三对角行列式（p71、p73，由递推公式求解）

(3) 范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$

(4) 克拉默法则

n 元线性方程组的系数行列式 D 不等于零, 则有唯一解，且 $X_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots n)$，其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.5 行列式与方阵

2.5.1 运算性质

(1) $\left|\mathbf{A}^T\right|=|\mathbf{A}|$

(2) $|\lambda\mathbf{A}|=\lambda^n|\mathbf{A}|$

(3) $|\mathbf{A}^m|=|\mathbf{A}|^m$

(4) $|\mathbf{A}^{-1}|=|\mathbf{A}|^{-1}$ ($\mathbf{A}$可逆)

(5) $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

(6) $\left|\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix}\right|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

2.5.2 非奇异方阵：$|\mathbf{A}| \neq 0$；奇异方阵：$|\mathbf{A}| = 0$

2.5.3 伴随矩阵

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{n1} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \mathbf{A}_{2n} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

2.5.4 两个定理

(1) 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，则 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$

(2) n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\mathbf{A}|$，且 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$

3　矩阵的初等行变换和线性方程组的判定与求解

3.1　求解基本步骤

(1) 写出线性方程组的增广矩阵 $(\mathbf{A}\vdots b)$

(2) 用矩阵的行初等变换将其化为行最简形为止

(3) 写出行最简形对应的线性方程组

(4) 确定非自由未知数（各非零行中首个非零元 1 对应的未知数）和自由未知数（除非自由未知数外的未知数），并将其移至方程右端即可得通解

3.2　典例解析

例 3.2.1 求解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

解：方程组所对应的增广矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_2]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3-\frac{3}{2}r_2 \\ \frac{1}{2}r_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_3 \\ r_1+3r_3 \\ -r_3}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1+r_2 \\ \frac{1}{2}r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ 对应的

方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

3.3　矩阵的秩

3.3.1　基本结论

(1) 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则有 $0 \leqslant r(\mathbf{A}) \leqslant \min\{m, n\}$

(2) $r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}) = r(k\mathbf{A})(k \neq 0)$

(3) $\mathbf{A} \neq 0 \leftrightarrow r(\mathbf{A}) \geqslant 1$，即 $\mathbf{A}$ 中存在 r 阶子式不等于零 $\leftrightarrow r(\mathbf{A}) \geqslant r$

(4) $r(\mathbf{A}_n)=n\leftrightarrow|\mathbf{A}|\neq 0$，即矩阵是满秩矩阵的充要条件是该矩阵可逆

(5) 初等变换不改变矩阵的秩

(6) 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{P}$ 为 m 阶可逆矩阵，$\mathbf{Q}$ 为 n 阶可逆矩阵，有 $r(\mathbf{PAQ})=r(\mathbf{PA})=r(\mathbf{AQ})=r(\mathbf{A})$

3.3.2 典例解析

例 3.3.1 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\3&6&9&6\\4&8&12&R\end{pmatrix}$ 能否适当的 R 使 $(1)r(\mathbf{A})=1\quad(2)r(\mathbf{A})=2\quad(3)r(\mathbf{A})=3$

解:对矩阵进行初等变换 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\3&6&9&6\\4&8&12&R\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&R-8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&0&0&R-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 故当 $R=8$ 时，$r\left(\mathbf{A}\right)=1$；$R\neq 8$ 时，$r\left(\mathbf{A}\right)=2$；无论 R 为多少，$r\left(\mathbf{A}\right)\neq 3$

例 3.3.2 设三阶矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$ 若 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵的秩为 1，则必有（）

$(A)a=b$ 或 $a+2b=0\quad(B)a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

$(C)a\neq b$ 或 $a+2b=0\quad(D)a\neq b$ 或 $a+2b\neq 0$

答案 C

解:根据 $\mathbf{A}$ 与其伴随矩阵 $\mathbf{A}^*$ 的秩之间的关系知,$r(\mathbf{A})=2$,故有 $\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{vmatrix}=(a+2b)\left(a-b\right)^2=0$，即有 $a+2b=0$ 或 $a=b$

3.4 线性方程组

3.4.1 线性方程组的判定

(1) 齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 总是有解的：零解或非零解。方程组只有零解 $\leftrightarrow r\left(\mathbf{A}\right)=n$；方程组有非零解 $\leftrightarrow r\left(\mathbf{A}\right)<n$（特别地，当 $m=n$ 时，即方程个数等于未知数个数时，方程只有零解）

(2) 齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\beta$ 的解有三种可能情形：无解，有唯一解，有无穷多解。

方程组无解：$r\left(\mathbf{A}\right)\neq r(\mathbf{A}|b)$

方程组有唯一解：$r\left(\mathbf{A}\right)=r(\mathbf{A}\vert b)=n$

方程组有无穷多解：$r\left(\mathbf{A}\right)=r(\mathbf{A}\vert b)<n$（特别地，当 $m=n$ 时，即方程个数等于未知数个数时，方程组有唯一解 $\leftrightarrow|\mathbf{A}|\neq 0$；当 $|\mathbf{A}|=\mathbf{0}$ 时，方程组可能无解也可能有解）

例 3.4.1 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵，若齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解，则 $\mathbf{A}^*\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 的解是（）

解：齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\leftrightarrow|\mathbf{A}|\neq\mathbf{0}\leftrightarrow r(\mathbf{A})=n\leftrightarrow\mathbf{A}\leftrightarrow r(\mathbf{A}^*)=n$，所以 $\mathbf{A}^*\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 只有零解，因此 $\mathbf{X}=\mathbf{0}$

例 3.4.2 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\mathbf{A}^T$ 是 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组（I）$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 和（II）$\mathbf{A}^T\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 必有（）

(A) 方程组 II 的解是 I 的解，I 的解也是 II 的解

(B) 方程组 II 的解是 I 的解，但 I 的解不是 II 的解

(C) 方程组 I 的解不是 II 的解，II 的解也不是 I 的解

(D) 方程组 I 的解是 II 的解，但 II 的解不是 I 的解

解：$r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$，故选 A

3.4.2 （非）齐次线性方程组的基础解系和通解

(1) 若齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=r$，而方程组中未知数的个数为 n，则方程组的一个基础解系存在，且含有 $n-r$ 个解向量，求解步骤如下：

第一步：对系数矩阵 $\mathbf{A}$ 进行初等行变换，化为行最简形式，得到同解方程组

第二步：根据同解方程和矩阵的秩，确定自由未知量（其个数 $s=n-r$），并求出基础解系；

第三步：写出基础解系的线性组合，即是方程组的通解

(2) 若非齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\beta$ 的秩 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}\vert\beta)=r$，而方程组中未知数的个数为 n，则对增广矩阵进行初等行变换，使其成为行最简形式。将这个矩阵中最后一列的前 r 个分量依次作为特解的 r 个分量，其余 $n-r$ 个分量全部取零，可得所求非齐次线性方程组的一个特解

例 3.4.3 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$，且方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量，求方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系和通解。

解：由题设知，方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 是一个四元的齐次线性方程组，其基础解系含有两个线性无关的解向量，所以有 $R(\mathbf{A})=4-2=2$，为此对系数矩阵 $\mathbf{A}$ 作初等行变换，得

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\0&t-2&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1-2t&2-2t\\0&1&t&t\\0&0&-(t-1)^2&-(t-1)^2\end{pmatrix}\to$$

记为$\mathbf{B}$。要使 $r(\mathbf{A})=2$，必有 $t=1$，此时 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 已是行最简阶梯形。可见，$r(\mathbf{A})=2<4$，所以原方程组有无穷多个解，且基础解系含有 4-2=2 个解向量，原方程组同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3-x_4\\x_3=x_3\\x_4=x_4\end{cases}$，

即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}x_4$

令 $x_3=k_1$，$x_4=k_2$，则原方程组的通解为

$x=k_1(1\quad -1\quad 1\quad 0)^T+k_2(0\quad -1\quad 0\quad 1)^T$

其中 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 为基础解系，k_1，k_2 为任意常数

例 3.4.4 设 $\partial_1,\partial_2,\partial_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\beta$ 的三个解向量，且秩 $r(\mathbf{A})=3,\partial_1+\partial_2=(2\quad -2\quad 0\quad 6)^T,\partial_2+\partial_3=(1\quad 0\quad 1\quad 3)^T$，求线性方程组 $\mathbf{AX}=\beta$ 的通解。

解：因为 $n=4$，$r(\mathbf{A})=3$，所以对应的齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系含有 $4-3=1$ 个向量。因为 ∂_1,∂_3 为方程组 $\mathbf{AX}=\beta$ 的解，可得

$\partial_3-\partial_1=(\partial_2+\partial_3)-(\partial_1+\partial_2)=(-1\quad 2\quad 1\quad -3)$

所得的即为对应的齐次线性方程组的解向量，因而为其一个基础解系，

$\mathbf{A}(\partial_1+\partial_2)=\mathbf{A}\partial_1+\mathbf{A}\partial_2=\beta+\beta=2\beta$ 故 $\mathbf{A}\left(\frac{\partial_1+\partial_2}{2}\right)=\beta$

所以 $\frac{\partial_1+\partial_2}{2}=(1\quad -1\quad 0\quad 3)^T$ 是 $\mathbf{AX}=\beta$ 的一个特解。根据非齐次线性方程组解的结构定理，得 $\mathbf{AX}=\beta$ 的通解是 $\frac{\partial_1+\partial_2}{2}+k(\partial_3-\partial_1)=(-1\quad -1\quad 0\quad 3)^T+k(-1\quad 2\quad 1\quad -3)^T,k$ 为任意常数。.

4 n 维向量与向量组的线性相关性

1 n 维向量的概念（涉及向量的线性运算的题目会出现在填空题中）

2 向量组的线性相关性的定义及其等价命题（课本 p127 定理 4.2）

针对方阵的重要推论

(1) n 个 n 维向量线性相关的充要条件是行列式为零

(2) $n+1$ 个 n 维向量必线性相关

3 向量组的线性表示（p130 定理 4.4）

4 向量组等价的证明（定义证明法）和性质

5 求向量组的极大无关组：

(1) 抽象向量组：定义法（定义见课本 p136 定义 4.8）

(2) 初等变换法：化成行最简

6 求向量组及其矩阵的秩：初等变换后非零行数

7 秩的若干重要推论（p140 页定理）：此部分只要求掌握结论，多出现在填空题中

8 n 维向量空间的相关概念：向量空间，子空间，基，维数，坐标

常见题型

(1) 求向量在基下坐标表示（课本 p145 例 4.17）

(2) 求向量空间下的一组基（主要依据为 p147 定理 4.18）

9 n 维向量空间的基变换和坐标变换

常见题型：求两组基之间的过渡矩阵（p145 例 4.18）

10 向量内积，长度等概念：填空题有涉及，正交向量组。常见题型为求空间的一组标准正交基（先求出一组基，然后又用斯密特正交化方法，课本 p153）

11 正交矩阵的判定（出现在选择题中，主要依据为 p145，定理 4.22）

5 矩阵的特征值与相似对角化

5.1 特征值与特征向量

5.2 相似矩阵

5.3 实对称矩阵的对角化

5.4 基本要求

(1) 理解方阵的特征值及特征向量的概念，熟练掌握求方阵的特征值及特征向量的方法

(2) 了解相似矩阵的概念，以及两个相似矩阵的特征多项式之间的关系，掌握 n 阶方阵相似于对角阵的充分必要条件

(3) 掌握实对称矩阵的特征值与特征向量的性质，了解对于 n 阶实对称阵 $\mathbf{A}$，必存在正交阵 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 为对角阵

5.5 重点

方阵的特征值、特征向量的概念及其求法，矩阵对角化

5.6 难点

实对称矩阵及其相关性质，方阵的相似对角化

5.7 主要题型

5.7.1 关于矩阵的特征值与特征向量的问题

(1) 求矩阵的特征值与特征向量解法（即一般步骤）：

(a) 求特征方程 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ 的全部根，即为矩阵 $\mathbf{A}$ 的全部特征值；

(b) 对每一特征值 λ_i, 求出齐次线性方程组 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{X}=0$ 的一个基础解系 η_1,η_2,...,η_{n-r}, 其中 r 为 $\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 的秩；则 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_i 的全部特征向量为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+...k_{n-r}\eta_{n-r}$，其中 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+...k_{n-r}\eta_{n-r}$ 为不全为零的任意数。

例 5.7.1 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 求 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量

解：$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+16-7=(\lambda-1)(\lambda-9)=0$ 所以 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=9.$

对 $\lambda_1=1$,$\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 因此属于特征值的全部特征向量为 $k_1\alpha_1(k_1\neq 0)$; 对 $\lambda_2=9$，$9\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 相应齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$，因此属于特征值 $\lambda_2=9$ 的全部特征向量为 $k_2\alpha_2(k_2\neq 0)$.

(2) 已知特征值和特征向量反求矩阵问题即特征值与特征向量的性质及有关定理（见 p194-p197）

例 5.7.2 设 4 阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足条件：$|3\mathbf{E}+\mathbf{A}|=0$，$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=2\mathbf{E}$,$|\mathbf{A}|<0$，求 $\mathbf{A}^*$ 的一个特征值。

解：因为 $|\mathbf{A}|<0$，故 $\mathbf{A}$ 可逆，由 $|3\mathbf{E}+\mathbf{A}|=0$ 知 -3 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，从而 $-\frac{1}{3}$ 是 $\mathbf{A}^{-1}$ 的一个特征值，又由 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T=2\mathbf{E}$ 得 $\left|\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right|=|2\mathbf{E}|=16$, 即 $|\mathbf{A}|^2=16$ 于是 $|\mathbf{A}|=\pm 4$, 但 $|\mathbf{A}|<0$, 因此 $|\mathbf{A}|=-4$, 故 $\mathbf{A}^*$ 有一个特征值为 $\frac{4}{3}$。

例 5.7.3 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方程，$tr(\mathbf{A})=7$, 特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，求：另一特征值 λ_3，及行列式 $|\mathbf{A}|$,$|\mathbf{A}^2|$,$|\mathbf{A}^{-1}|$,$\left|\mathbf{A}^T\right|$.

解：$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(\mathbf{A})=7\Longrightarrow\lambda_3=3;$

$|\mathbf{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=9;|\mathbf{A}^2|=|\mathbf{A}|^2=81;|\mathbf{A}^{-1}|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}=\frac{1}{9};$

$\left|\mathbf{A}^T\right|=|\mathbf{A}|=9.$

5.7.2 关于矩阵的相似对角化问题

(1) 由相似求参数

例 5.7.4 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, 且 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$, 求 a,b.

解 $\begin{cases} |\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|\Rightarrow 3a-4=b \\ tr(\mathbf{A})=tr(\mathbf{B})\Rightarrow 5+a=3+b \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases}$

(2) 求矩阵能否对角化，求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使之成为对角阵

例 5.7.5 判断矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-4 & -10 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 1\end{pmatrix}$ 能否相似对角化，若能，求可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P^{-1}AP}$ 为对角阵

答案：$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -5\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$，$\mathbf{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$（过程略）

(3) 利用对角矩阵计算矩阵的方幂

例 5.7.6 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{A}^{100}$

6 二次型

1 二次型的定义和两种表示方法（和号表示法与矩阵形式的表示方法）

2 可逆线性变换的定义和性质。

3 矩阵合同的重要结论：

(1) 若矩阵 **A** 与矩阵 **B** 合同，则 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$

(2) 若矩阵 **A** 与矩阵 **B** 合同且 **A** 为对称矩阵，则 **B** 也为对称矩阵

(3) 若两个对称矩阵 **A** 和 **B** 相似，则 **A** 与 **B** 合同，反之不真。

4 标准型的概念和三种表示方法：正交变换法，拉格朗日配方法，初等变换法（此处多用于表达题）

5 二次型的规范形，二次型的秩，惯性定理的定义（填空题）

* 两个同阶实对称矩阵合同的充要条件是他们有相同的秩及相同的惯性指数。

6 二次型的正定性的证明（重点）

(1) 对抽象的二次型，常用定义法证明（课本 p247 页）

(2) 特征值全大于零

(3) 顺序子式全大于零

(4) 正惯性指数为 n

(5) 二次型对应的矩阵与单位矩阵合同。

（此处例题可见 2014 年，2013 年线代卷解答题部分）

(6) 证明矩阵的正定：方法同上，但是要注意证明矩阵的对称性