2017-2018第二学期高等数学试卷简答

1. 填空题(3分*6=18分)

1．向量 $\vec{a}=(1,2,3)$ 在向量 $\vec{b}=(1,-2,2)$ 上的投影 $\mathbf{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$ 为 ____**1**____。

考点：向量的夹角公式 (P16) & 投影 (14)

2．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sqrt{2-e^{xy}}-1}{xy^2}=$ ____$-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$____。

考点：多元函数极限求法 (P60)

3．函数$u=xy+yz+zx$在点$P(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$处的全微分$du|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$ $\underline{\quad \boldsymbol{dx+dy+dz} \quad}$。

考点：全微分的概念 (P72)

4．已知对于 xoy 面内任意闭曲线 L 上都有 $\oint_L (x+2y)dx+(ax+y)dy=0$ 则

$a=$ $\underline{\quad \mathbf{2} \quad}$。

考点：格林公式 (P204)

5. 设 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 位于第一卦限内部分上侧，则对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$ 化为对面积的曲面积分为 $\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(P(x,y,z)+Q(x,y,z)+R(x,y,z))\,dS$。

考点：两类曲面积分之间的关系 (P230)

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \le x < 0 \\ 1+x^2, & 0 \le x < \pi\end{cases}$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于 **0**。

考点：收敛定理 (P311)

2. 解答题(6分*7=42分)

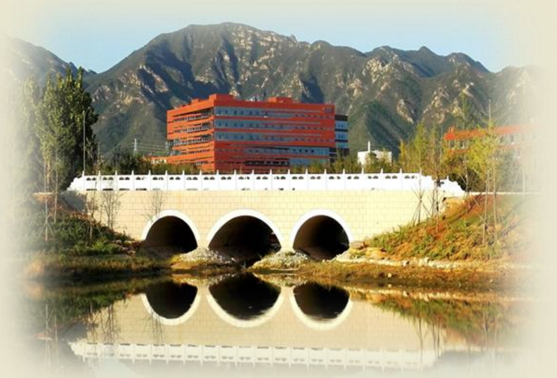
1. 求过点 $P(1,1,1)$ 且与直线 $e:\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$ 平行的直线方程。

考点: 空间直线的方程 (P30) & 向量积 (P17)

解 已知直线的方向向量为 $\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(2,0,-2),\cdots\cdots$ 3分

故所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{-2}.\cdots\cdots$ 3分

注:可以在直线上取两点，得出方向向量。



2. 计算积分 $\int_0^{\pi} dx \int_0^{x} \frac{\sin y}{\pi - y} \mathrm{d}y.$

考点：二重积分的计算

解 积分区域表示为 $D:\begin{cases} y \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$ …… 2分

原式 $= \int_0^{\pi} dy \int_y^{\pi} \frac{\sin y}{\pi - y} dx = \int_0^{\pi} \sin y \, dy = 2.$ …… 4分

3． 设函数 $z=z(x,y)$ 存在连续偏导数，利用变换 $\begin{cases} u=2x+3y \\ v=x-y \end{cases}$

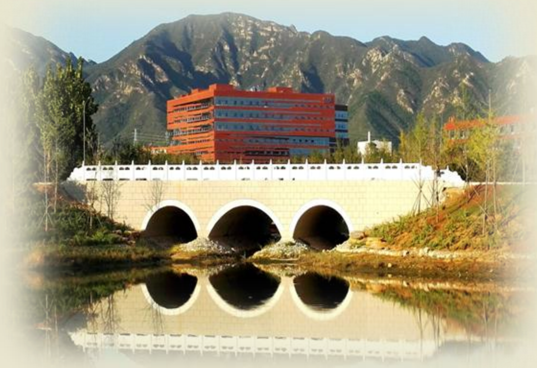
将方程 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为关于变量 u, v 的方程。

考点：复合函数链式法则 (P79)

解 对x和y分别求偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \cdots\cdots\ 2分$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=3\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v},\quad \cdots\cdots\ 2分$$



代入原方程得，$\dfrac{\partial z}{\partial v}=0.\cdots\cdots\ 2分$

4. 计算积分$\oint_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$，其中 $L: x^2 + y^2 = 1$，取逆时针方向。

考点：格林公式 (P204) & 第二类曲线积分的计算 (P197)

解1 圆的参数方程为$L:\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$, $\theta: 0 \to 2\pi$. ……2分. 代入曲线积分

原式 $= \int_0^{2\pi} [\cos\theta(\sin\theta)' - \sin\theta(\cos\theta)']\, d\theta = 2\pi$. …… 4分

解2 根据格林公式，原式 $= \oint_L xdy - ydx = \iint_D 2dxdy = 2\pi$.（每个等号2分）

5．求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x^2+y^2-z^2=4 \end{cases}$ 在点 $P(2,1,1)$ 处的切线方程。

考点：空间曲线的切线方程 (P96)

解 方程两边对 x 求导，得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0 \\ 2x+2y\dfrac{dy}{dx}-2z\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \quad \cdots\cdots 2分$$

解得，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}, \dfrac{dz}{dx}=0\cdots\cdots1分$. 在$P(2,1,1)$处的切向量为$\vec{T}|_P=(1,-2,0)\cdots\cdots 1分$.

切线方程为：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{0}.\cdots\cdots2分$

6．验证微分形式 $\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dy$ 在右半平面（$x>0$）内为某函数的全微分，并求出这样一个函数。

考点：曲线积分与路径无关的条件 (P210)

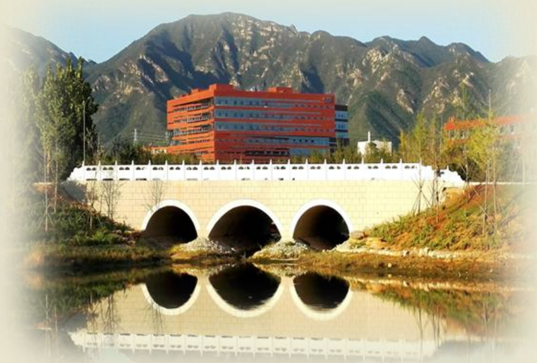
解 设 $P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=-\frac{x-y}{x^2+y^2}$. 计算得 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, …… 2分

因而 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是某二元函数的全微分。

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dy \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$=\int_1^x\frac{1}{x}\,dx-\int_0^y\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-arctan\frac{y}{x}. \cdots\cdots 2\text{分}$$



7. 求函数 $f(x,y) = 3axy - x^3 - y^3$ 的极值，其中 a 为非零常数。

解 经计算可知

考点：多元函数的极值 (P113)

$$\begin{cases} f_x = 3ay - 3x^2 = 0 \\ f_y = 3ax - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

得两个驻点 $P(0,0)$ 和 $Q(a,a)$ ······ 2分.

在 $P(0,0)$ 处，$A = 0, B = 3a, C = 0, AC - B^2 = -9a^2 < 0$

故 $P(0,0)$ 不是极值点. ······ 2分.

在点 $Q(a,a)$ 处，$A = -6a, B = 3a, C = -6a, AC - B^2 = 27a^2 > 0$

故当 $a > 0$ 时, $A < 0$, $f(a,a) = a^3$ 为极大值。

当 $a < 0$ 时, $A > 0$, $f(a,a) = a^3$ 为极小值。······ 2分

3. 解答题(7分*5=35分)

1. 求函数 $u=e^{-z}+\int_0^{xy} e^{-t^2}dt$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿着曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 P 的外法线方向的方向导数。

考点: 方向导数 (P104) & 梯度 (P106) & 曲面的法向量 (P101)

解 令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$，则 $F_x=4x, F_y=6y, F_z=2z,$

从而曲面在 P 点的单位外法向量为 $\vec{n}_0=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$. …… 2分.

另一方面 $\frac{\partial u}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}, \frac{\partial u}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}, \frac{\partial u}{\partial z}=-e^{-z}$. …… 2分

故函数 u 点 P 处的梯度为 $grad\ u=(e^{-1},e^{-1},-e^{-1})$, …… 1分.

方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\frac{4}{\sqrt{14}}e^{-1}$. …… 2分

2．计算积分 $\iint_{\Sigma} xyz\, dS$， 其中 Σ 为曲面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分。

考点：关于面积的曲面积分计算 (P220)

解 $z = 1 - x - y,$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \sqrt{3}\ dxdy. \ \cdots\cdots\ 2分.$$

$$投影区域D:\begin{cases} 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \ \cdots\cdots\ 1分.$$

$$原积分 = \iint_D xy(1-x-y)dxdy \cdots\cdots\ 2分$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{120} \cdots\cdots\ 2分$$

3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 的收敛性，若收敛请指明是绝对收敛还是条件 收敛。

解 $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. 故$\{u_n\}$单调减少…… 2分

且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

考点：交错级数 (P204) 绝对和条件收敛 (P265)

故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛. …… 2分.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$, ……2分 及$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$发散知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

故原级数条件收敛.…… 1分。

4．计算积分 $\iint\limits_{\Sigma} y^2z^2dydz + x^2z^2dzdx + x^2y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

考点：高斯公式 (P232) & 二重积分的计算 (P147)

解 添加辅助面 Σ_1: $z=0, (x^2+y^2\le 1)$, 取下侧. ······ 1分。

由 Gauss 公式 原积分 $=\iint_{\Sigma} y^2z^2dydz + x^2z^2dzdx + x^2y^2dxdy \cdots\cdots$ 1分

$$= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} 0dxdydz + \iint_{D} x^2y^2dxdy \cdots\cdots 2分$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^4 \cdot \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot \rho\, d\rho \cdots\cdots 2分$$

$$= \frac{2}{3}\left(\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, d\theta\right) = \frac{\pi}{24} \cdots\cdots 1分$$

5. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)n!}x^{n+2}$ 的收敛域及和函数。

解 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+3)(n+1)} = 0$

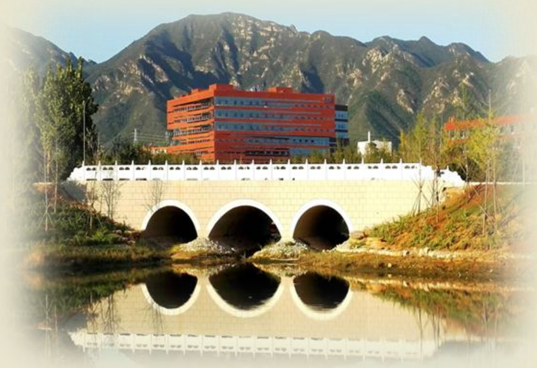
得收敛域为$(-\infty,+\infty)\cdots\cdots$ 2分

考点：幂级数的收敛域 (P275) & 和函数性质 (P279)

设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)n!}x^{n+2}$.

则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}\right)=x\cdot e^{x},\cdots\cdots$ 2分

$$S(x)=S(0)+\int_0^x xe^x\,dx=(x-1)e^x+1,\quad x\in(-\infty,+\infty).\cdots\cdots\ 2分$$



4. 解答题(5分)

设函数 $z=f(x,y)$ 满足 $dz=2xdx-2ydy$，且 $f(1,1)=2$，求函数 $f(x,y)$ 在 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$ 上的最大值与最小值。

解 $dx = d(x^2)-d(y^2) = d(x^2-y^2)$, $z = x^2-y^2+C$,

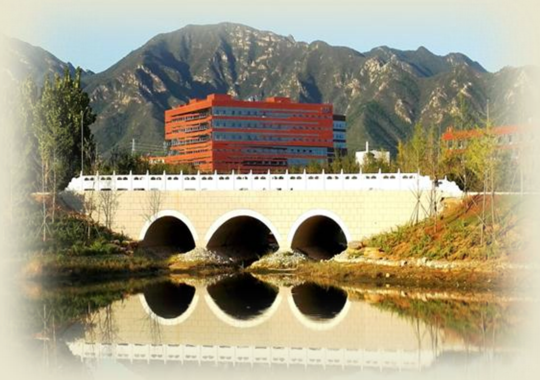
由 $f(1,1) = 2$ 得 $C = 2$

故 $f(x,y) = x^2-y^2+2.\cdots\cdots 1$分

由 $\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = -2y = 0 \end{cases}$ 得内部极值可疑点 $(0,0)$, $f(0,0) = 2\cdots\cdots 1$分

下面考虑边界上的极值

设 $L(x,y) = x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$



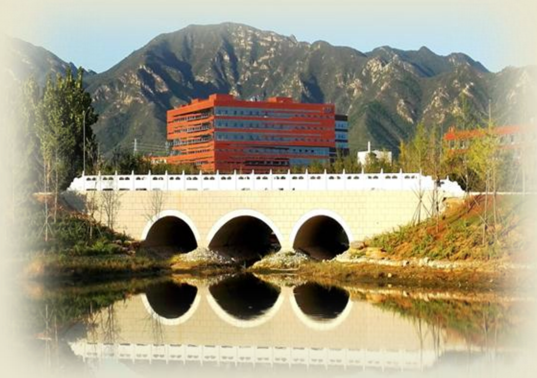
考点：条件极值 (P116) & 拉格朗日插值法 (P116)

由 $\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x = 0 \\ L_y = -2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0 \cdots\cdots \ 2分 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$

得$(-1,0),(1,0),(0,-2),(0,2)$

而且$f(-1,0) = f(1,0) = 3, f(0,-2) = f(0,2) = -2$

故$f(x,y)$在D上的最大值为3，最小值为-2. $\cdots\cdots$ 1分




祝同学们考试顺利！
北京化工大学