《概率论与数理统计》习题一答案

(苏贵福 北京化工大学理学院)

11. 对任意三个事件A, B, C, 证明

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

证明 易知$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. 那么

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).\end{aligned}$$

12. 设A, B, C是三个事件, 且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=\frac{1}{8}$. 求(1)事件A, B, C至少有一个发生的概率. (2) 事件A, B, C都不发生的概率.

证明 (1) 因为$P(AB)=P(BC)=0$, 又$ABC\subset AB$. 因此$P(ABC)=0$且

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\=&\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

(2) 事件A, B, C都不发生的概率为$P(\overline{ABC})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{8}$.

19. 两台机床加工同样的零件, 第一台加工后的废品率为0.03，第二台加工后的废品率为0.02. 加工出来的零件放在一起, 已知这批加工后的零件中由第一台机床加工的占$\frac{2}{3}$. 求从这批零件中任取一件得到合格品的概率.

解 设B_i表示事件“第i台机床生产的零件”, 其中$i=1,2$. 而A表示事件”从这批零件中任取一件为合格品”. 根据题意知, $P(B_1)=\frac{2}{3}$, $P(B_2)=\frac{1}{3}$. 另外$P(A|B_1)=0.97$, $P(A|B_2)=0.98$. 于是所求的概率为

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{3}\times\frac{97}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{98}{100}=0.973.$$

21. 为了防止意外, 在矿山内同时设有两个报警系统A与B, 每个系统单独使用时, 其有效的概率分别为: 系统A为0.92, 系统B为0.93. 在系统A失灵的条件下, 系统B有效的概率为0.85. 求

(1) 发生意外时, 这两个系统至少有一个有效的概率.

(2) 系统B失灵的条件下, 系统A有效的概率.

解 设A, B分别表示报警系统A与B有效的事件. 于是$P(A)=0.92$, $P(B)=0.93$, 而$P(B|\overline{A})=0.85$. 那么

(1) $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=1-(1-0.92)(1-0.85)=0.988$.

(2) $P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=1-\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=1-\frac{(1-0.92)(1-0.85)}{0.07}=0.829$.

23. 三人独立地去破译一份密码, 已知每个人能译出密码的概率分别为$\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$. 问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少?

解 设A,B,C分别表示第一、第二以及第三人能破译密码的事件. 于是$P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(C)=\frac{1}{4}$. 又A, B, C相互独立. 因此所求的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)=&1-P(\overline{A\cup B\cup C})\\=&1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})\\=&1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

25. 设三台机器相互独立地运转着, 又第一台、第二台以及第三台机器不发生故障的概率分别为0.9, 0.8, 0.7. 求这三台机器全不发生故障及它们中至少有一台发生故障的概率.

解 设A_i表示事件"第i台机器不发生故障", 其中$i=1,2,3$. 则$P(A_1)=0.9$, $P(A_2)=0.8$, $P(A_3)=0.7$. 于是

(1) 三台机器独立地运转时全不发生故障的概率为

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.9\times0.8\times0.7=0.504.$$

(2) 三台机器中至少有一台发生故障的概率为

$$P(\overline{A_1A_2A_3})=1-P(A_1A_2A_3)=0.496.$$

于是当$a=\frac{1}{6}$时结论成立.

26. 对以往数据分析结果表明, 当机器调整得良好时, 产品的合格率为0.90, 而当机器发生某一故障时, 其合格率为0.30. 每天早上机器启动时, 机器调整良好的概率为0.75. 试求已知某日早上第一件产品是合格品时, 机器调整得良好的概率是多少?

解 设A表示事件"产品合格", B表示事件"机器调整得良好". 则$P(A|B)=0.90$, $P(A|\overline{B})=0.3$, 而$P(B)=0.75$, $P(\overline{B})=0.25$. 于是所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\frac{0.75\times0.90}{0.75\times0.90+0.25\times0.30}=0.90.$$

29. 现有外包装完全相同的优、良、中三个等级的产品, 其数量完全相同, 每次取出一件, 有放回地连续取3次. 试求下列各事件的概率.

(1) A="三件产品都是优级品".

(2) B="三件产品都是同一等级产品".

(3) C="三件产品等级完全不相同".

(4) D="三件产品等级不全相同".

(5) E="三件产品中无优等产品".

解 为表示方便, 设X, Y, Z分别表示优、良、中产品. 由于优、良、中三个等级的产品数量完全相同, 又是有放回地抽取. 因此可视为独立重复试验, 进而$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$. 则

(1) $P(A)=P(X)P(Y)P(Z)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$.

(2) $P(B)=P(XXX\cup YYY\cup ZZZ)=\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}=\frac{1}{9}$.

(3) $P(C)=P(XYZ\cup XZY\cup YXZ\cup\cup YZX\cup ZXY\cup ZYX)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$.

(4) $P(D)=1-P(B)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

(5) 从优、良、中产品中每次取出的产品有3中可能, 3次独立重复抽取的产品等级为3^3个, 但3件产品中没有优等产品, 这样每次取出的等级有2个, 独立重复抽取3次的可能性为2^3, 因此$P(E)=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$.

31. 设A, B, C是三个独立事件, 且$0<P(A)<1$. 试证明$\overline{A\cup B}$与C相互独立.

证明 由事件相互独立的概念, 只需验证$P(\overline{A\cup B}C)=P(\overline{A\cup B})P(C)$. 事实上

$$\begin{aligned}P(\overline{A\cup B}C)=&P(C)-P[(A\cup B)C]=P(C)-P[AC\cup BC]\\=&P(C)-P[P(AC)+P(BC)-P(ABC)]\\=&P(C)-[P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)]\\=&P(C)[1-P(A)-P(B)+P(AB)]\\=&P(C)[1-P(A\cup B)]=P(C)P(\overline{A\cup B}).\end{aligned}$$

32. 假设一工厂生产的每台仪器以概率0.70可以直接出厂, 以概率0.30需进一步调试, 经调试后以概率0.80可以出厂, 以概率0.20定为不合格产品而不能出厂. 现该厂生产了n台仪器(设每台仪器的生产过程是独立的). 试求

(1) 全部仪器能出厂的概率.

(2) 其中恰好有两台仪器不能出厂的概率.

(3) 其中至少有两台仪器不能出厂的概率.

解 根据题意可知

$$\{\text{产品能出厂}\} = \{\text{仪器能直接出厂}\} + \{\text{仪器调试后出厂}\}.$$

因此有

$$P\{\text{每台仪器能直接出厂}\} + P\{\text{调试}\}\{\text{仪器出厂}|\text{调试}\} = 0.7 + 0.3 \times 0.8 = 0.94.$$

那么所求的概率分别为

(1) $P(n\text{台仪器能出厂}) = (0.94)^n$.

(2) 由于$P(\text{每台仪器不能出厂}) = 1 - P(\text{每台仪器能出厂}) = 1 - 0.94 = 0.06$, 故

$P(n\text{台中恰好有两台仪器不能出厂}) = \binom{n}{2}(0.06)^2(0.94)^{n-2}$.

(3) $P(\text{至少有两台仪器不能出厂}) = 1 - P(\text{仪器都不能出厂}) - P(\text{恰好有一台仪器不能出厂}) = 1 - (0.94)^n - \binom{n}{1}(0.06) \times (0.94)^{n-1}$.

$*$ $*$

YOU ONLY LIVE ONCE, BUT IF YOU DO IT RIGHT, ONCE IT ENOUGH!

$*$ $*$