Théorème 1. *Toute matrice A est équivalente à une* ***unique*** *matrice échelonnée réduite.*

Démonstration 1. On va d'abord démontrer l'unicité. L'existence découle de l'algorithme de Gauss-Jordan que nous allons expliquer après. L'idée principale de la démonstration de l'unicité repose sur le fait que l'équivalence par ligne reste entre deux matrices quand on leur enlève les mêmes colonnes. Il suffit de s'assurer qu'elles restent sous forme échelonnée réduite, et on peut alors procéder par récurrence sur le nombre de colonne. Nous allons utiliser les 3 lemmes suivants :

Lemme 1 : Soient A et B deux matrices équivalentes par lignes, soit $\mathcal{I} = j_1, j_2, \dots, j_l$ un ensemble de l indices distincts de colonne de A ou B. Soient U_A et U_B les matrices obtenues à partir de A et B en enlevant les colonnes dont l'indice est dans $\mathcal{I}$. On a :

$$U_A \underset{L}{\sim} U_B$$

En effet, les opérations élémentaires sur les lignes sont indépendantes des colonnes. La même suite d'opération élémentaire sur les lignes qui permet de passer de A à B permet donc également de passer de U_A à U_B. □

Lemme 2 : Soit A une matrice échelonnée réduite, et C_j une colonne particulière de A. Soit U_A la matrice obtenue en enlevant toutes les colonnes $C_k, k > j$ de A (toutes les colonnes stricement plus à droite). Alors U_A est échelonnée réduite.
En effet, on vérifie facilement que les quatre propriétés nécessaires pour être échelonnée réduite d'après les définitions sont "transmise" de A à U_A lorsqu'on enlève le bloc des colonnes de la colonne $j + 1$ (inclue) à la dernière. □

Lemme 3 : Soit A une matrice échelonnée réduite, et C_p la dernière colonne de A. Soit U_A la matrice obtenue en enlevant toutes les colonnes $C_k, k < p$, <u>ne contenant pas de pivot</u> de A (toutes les colonnes sans pivot avant la dernière). Alors U_A est échelonnée réduite, avec la forme suivante :

Si C_p est une colonne avec pivot :

$$U_A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & C_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(avec éventuellement des lignes de 0 en dessous)

Si C_p est une colonne sans pivot :

$$U_A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & C_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_i \end{pmatrix} \end{array}$$

(avec éventuellement des lignes de 0 en dessous)

En effet, si on enlève toutes les colonnes sans pivot, il ne nous reste que celles qui en ont. Et on a donc autant de ligne avec pivot que de colonnes avec pivot si on ne compte pas la dernière colonne. D'où la diagonale de 1 jusque la dernière colonne, et les zéros partout ailleurs. □

Nous voilà maintenant armés pour notre démonstration par récurrence, sur le nombre de colonne.

Initialisation Soient A et B deux matrices échelonnées réduites, équivalentes par lignes, avec une seule colonne. Notons qu'il n'y a que deux matrices de ce type :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou bien } M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, toutes les opérations élémentaires sur les lignes appliquées à M_0 donnent M_0. Donc si $A = M_0$, comme $A \underset{L}{\sim} B$, alors $B = M_0$ et donc $A = B$. Et de même, si $B = M_0$ alors $A = B$. Le dernier cas possible est

$A = M_1$ et $B = M_1$, ce qui donne bien $A = B$. Donc,

$$\begin{cases} A, B \text{ échelonnées réduites} \\ A \underset{L}{\sim} B \\ A, B \text{ avec 1 colonne} \end{cases} \Longrightarrow \quad A = B$$

Hypothèse de récurrence On va ici faire une récurrence *forte*, avec l'hypothèse suivante :

$$(H_p) \begin{cases} A, B \text{ échelonnées réduites} \\ A \underset{L}{\sim} B \\ A, B \text{ avec au plus } p \text{ colonnes} \end{cases} \Longrightarrow \quad A = B$$

Démonstration de récurrence Supposons (H_p), et pour montrer l'implication par l'absurde, on va supposer de plus :

$$\begin{cases} A, B \text{ échelonnées réduites} \\ A \underset{L}{\sim} B \\ A, B \text{ avec } p+1 \text{ colonnes} \end{cases} \quad \text{et} \quad A \neq B (\text{hypothèse à contredire})$$

Comme $A \neq B$, il existe une colonne “la plus a gauche” qui soit différente entre A et B, donc on peut définir $j_0 = \min\{j \in [\![1, p+1]\!] \ / \ C_j^A \neq C_j^B\}$ en notant C_j^A la j-ème colonne de la matrice A. On a alors deux cas possibles

1- Si $j_0 < p + 1$ (ce n'est pas la dernière colonne qui est différente).
On pose $\mathcal{I} = [\![j_0 + 1; p]\!]$, et on pose U_A et U_B les matrices obtenues en enlevant toutes les colonnes strictement à droite de la colonne j_0. D'après les lemmes 1 et 2, on a :

$$\begin{cases} U_A, U_B \text{ échelonnées réduites} & \text{(Lemme 2)} \\ U_A \underset{L}{\sim} U_B & \text{(Lemme 1)} \\ U_A, U_B \text{ avec au plus } p \text{ colonnes} & \text{(car on en a enlevé au moins une)} \end{cases}$$

Et donc d'après l'hypothèse de récurrence, $U_A = U_B$. Mais les dernières colonnes de ces matrices sont $C_{j_0}^A$ et $C_{j_0}^B$, qui étaient supposées être différentes ! On arrive donc a une absurdité dans ce cas.

2- Si $j_0 = p + 1$ (seule la dernière colonne est différente). On pose U_A et U_B les matrices obtenues à partir de A et B en y supprimant toutes les colonnes sans pivot (sans considérer la dernière colonne). Il y a alors deux possibilités :

a) Si l'on a enlevé des colonnes, alors d'après le lemme 3, U_A et U_B sont échelonnées réduites, et équivalentes d'après le lemme 1. De plus, elles ont un nombre de colonne inférieur ou égal à p, et donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, et en déduire que $U_A = U_B$. Mais de nouveau, les dernières colonnes de ces matrices sont $C_{j_0}^A$ et $C_{j_0}^B$, qui étaient supposées être différentes ! On arrive donc a une absurdité dans ce cas.

b) Si l'on a pas enlevé de colonnes, alors on a U_A et U_B qui sont de la forme suivante :

Si C_{p+1} est une colonne avec pivot :

$$A, B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & C_{p+1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(avec éventuellement des lignes de 0 en dessous)

Si C_{p+1} est une colonne sans pivot :

$$A, B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & C_{p+1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_1^{A,B} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_i^{A,B} \end{pmatrix} \end{array}$$

(avec éventuellement des lignes de 0 en dessous)

Et alors 3 cas sont possibles :

i. Dans les deux matrices, la dernière colonne est une colonne avec pivot. Mais alors elles sont les mêmes, ce qui contredit notre hypothèse $A \neq B$!

ii. Seule l'une des deux a une dernière colonne avec pivot, l'autre non. Disons que c'est A (le raisonnement serait le même si c'était B), et voyons nos deux matrices comme les matrices augmentées d'un système de $i+1$ équations à p inconnues : la dernière colonne est alors celle des constantes du système. On a donc :

$$(E_A) = \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & = & 0 \\ 0 & = & 1 \end{array} \right. \quad (E_B) = \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & c_1^B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & = & c_1^B \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

On remarque alors que le premier système n'as pas de solutions, tandis que le deuxième en a une. Mais alors, les matrices ne pourraient pas être équivalentes d'après la proposition 3 ! Ce cas est donc impossible.

iii. Aucune des deux matrices n'a sa dernière colonne qui est avec un pivot. Alors, de nouveau, on va voir nos matrices comme matrices augmentées d'un système linéaire ; on a donc :

$$(E_A) = \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & c_1^A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & = & c_i^1 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \quad (E_B) = \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & c_1^B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i & = & c_i^B \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Les matrices étant équivalentes par lignes, ces systèmes ont même solution, ce qui veut dire que $\forall k \in [\![1, i]\!], c_k^A = c_k^B$. Ce qui veut donc dire que les dernières colonnes sont égales, et donc que les matrices sont égales, ce qui est absurde.

En conclusion, dans tous les cas que l'on considère, l'hypothèse $A \neq B$ est absurde : c'est donc que $A = B$, et nous avons alors démontré (H_{p+1}).

Conclusion On a donc démontré que, si deux matrices A et B sont équivalentes par lignes et échelonnées réduites, alors elles sont égales. Cela nous prouve l'unicité que l'on cherchait car alors, si une matrice M était équivalente par ligne à deux matrices échelonnées réduites A et B différente, cela serait une contradiction directe avec ce que nous venons de démontrer.

Remarque. Dans la démonstration précédente, nous nous sommes juste occupés de l'**unicité** d'une telle matrice. Pour démontrer l'**existence**, nous allons avoir besoin d'expliciter la méthode qui permet de transformer une matrice donnée en une matrice échelonnée réduite. C'est l'objet de l'algorithme suivant :

Définition 10. Pour passer d'une matrice à une matrice échelonnée réduite, on utilise l'**algorithme de Gauss-Jordan**, que l'on va détailler. Considérons une matrice A à n ligne et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

`étape 1.` *Faire apparaître le premier pivot*

L'objet de cette première étape est de faire apparaître le pivot de la ligne 1.

a. On considère la première colonne, en partant de la gauche, telle qu'au moins un des coefficient soit non-nul : C_{j_1}.
Mathématiquement : $j_1 = \min\{j \in [\![1; p]\!] \;/\; \exists i \in [\![1; n]\!] \;/\; a_{i,j} \neq 0\}$

b. Si besoin, on permute la première ligne L_1 avec une autre ligne $L_i, i > 1$ de sorte à ce que le coefficient aux coordonnées $(1, j_1)$ soit non-nul.
Mathématiquement : si $a_{1,j_1} = 0$, alors on effectue $L_1 \leftrightarrow L_i$ avec $i \;/\; a_{i,j_1} \neq 0$ (ce i existe, on s'en est assuré à l'étape `1.a`).

c. On utilise une multiplication pour mettre ce coefficient à 1 : ce sera notre premier **pivot**.
Mathématiquement, on effctue : $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{1,j_1}} L_1$ (on s'est assuré de la légalité de cette opération à l'étape 1.b).

d. On utilise le pivot pour mettre à 0 tous les autres coefficients de sa colonne.
Mathématiquement, on effectue $\forall i \leqslant 2, L_i \leftarrow L_i - a_{i,j_1} L_1$.

`étape 2.` *Faire apparaître les pivots suivants*
À ce point de l'algorithme, on a forcément déjà trouvé au moins un pivot. Notons g le nombre de pivot trouvés, et notons C_{j_g} la colonne du dernier pivot trouvé. On va donc chercher à faire apparaître un pivot sur la ligne $g+1$.

a. On considère la **prochaine** colonne, en partant de la gauche telle qu'au moins un des coefficient **sous** le g-ème coefficient soit non-nul : $C_{j_{g+1}}$.
Mathématiquement : $j_{g+1} = \min\{j \in [\![j_g + 1; p]\!] \ / \ \exists i \in [\![g+1; n]\!] \ / \ a_{i,j} \neq 0\}$

b. Si besoin, on permute la ligne L_{g+1} avec une autre ligne $L_i, i > g+1$ de sorte à ce que le coefficient aux coordonnées $(g+1, j_{g+1})$ soit non-nul.
Mathématiquement : si $a_{g+1,j_{g+1}} = 0$, alors on effectue $L_{g+1} \leftrightarrow L_i$ avec $i \ / \ a_{i,j_{g+1}} \neq 0$ (ce i existe, on s'en est assuré à l'étape 2.a).

c. On utilise une multiplication pour mettre ce coefficient à 1 : ce sera notre prochain **pivot**.
Mathématiquement, on effctue : $L_{g+1} \leftarrow \dfrac{1}{a_{g+1,j_{g+1}}} L_{g+1}$ (on s'est assuré de la légalité de cette opération à l'étape 2.b).

d. On utilise le pivot pour mettre à 0 tous les coefficients en-dessous dans sa colonne.
Mathématiquement, on effectue $\forall i \leqslant g+2, L_i \leftarrow L_i - a_{i,j_{g+1}} L_{g+1}$.

`étape 3.` On répète l'étape 2 jusqu'à ce que **il n'y ait plus que des lignes nulles sous le dernier pivot**.

`étape 4.` *Elimination des coefficients au-dessus des pivots*
On utilise les pivots pour mettre à 0 les coefficients qui sont au-dessus, dans chaque colonne qui contient un pivot.
Mathématiquement, pour chaque pivot de position a_{i_g,j_g}, on fait $\forall i < i_g, L_i \leftarrow L_i - a_{i,j_g} L_{j_g}$

Exemple 8. Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{2} L_2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \frac{3}{11} L_3 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_1 & \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_3 \\ L_2 & \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_3 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{29}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{50}{33} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{112}{33} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{50}{33} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{112}{33} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{50}{33} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \text{ échelonnée réduite.}$$

Démonstration. On peut maintenant montrer la partie “**existence**” de notre théorème. Il suffit pour cela de montrer que l'algorithme de Gauss-Jordan termine, et qu'il produit toujours une matrice échelonnée réduite.

L'algorithme termine : en effet, l'`étape 1` n'est faite qu'une fois, et à chaque fois qu'on effectue l'`étape 2`, on augmente strictement le nombre de pivots trouvés dans la matrice de 1. Comme il y a au maximum un pivot par ligne et par colonne (Remarque 7), il y a au plus $\min(n, p)$ passages de l'algorithme dans l'`étape 2` : on est donc sur de passer à l'étape suivante. De même, l'`étape 4` est reproduite une fois par pivot, donc au plus $\min(n, p)$ fois également. L'algorithme termine donc forcément.

Le résultat est une matrice échelonnée réduite : il nous suffit de montrer que les quatres points de la définition d'une matrice échelonnée réduite sont vérifiés :

1- *Si une ligne est nulle, alors toutes les lignes suivantes sont nulles* : l'algorithme traite successivement toutes les lignes non nulles, et ne s'arrête que quand il n'y a plus de lignes, ou bien que toutes les lignes après la dernière traitée sont nulles (`etape 3`). Comme l'`étape 4` n'agit pas sur les lignes après la dernière ligne avec pivot, cette condition sera vérifiée à la fin de l'execution de l'algorithme.

2- *Si une ligne est non-nulle, alors son premier coefficient non-nul est situé stricement à droite du premier coefficient non-nul de la ligne précédente* : les `étapes 1.a` et `2.a` garantissent que l'on traite les pivots de gauche à droite, cette condition sera donc vérifiée à la fin de l'execution de l'algorithme.

3- *Les pivots de chaque ligne valent* 1 : cela nous est garanti par les `etapes 1.c` et `2.c`. Comme ce sont les seules étapes qui modifient les coefficient d'une ligne avec pivot, cette condition sera vérifiée à la fin de l'execution de l'algorithme.

4- *Les pivots sont les seuls éléments non-nuls de leur colonne* : cela nous est garanti par les `étapes 1.d` et `2.d` pour les éléments en-dessous du pivot, et par l'`étape 4` pour les éléments au dessus de chaque pivot. Il faut noter que l'ordre dans lequel on effectue les étapes de l'algoritme nous assure que les éléments “intentionnellement” mis à 0 lors des `étapes 1.d, 2.d, 4` le restent tout du long de l'execution de l'algorithme. Ainsi, cette condition sera vérifiée à la fin de l'execution de l'algorithme.

En conséquence, l'algorithme termine toujours, et produit alors nécessairement une matrice échelonnée réduite. Comme on peut appliquer cet algorithme à toute matrice, alors pour toute matrice il existe une matrice équivalente par ligne qui soit échelonnée réduite. □

Remarque 8.

- Dans la pratique, on est libre de permuter les lignes comme on veut au moment des `étapes 1.b, 2.b`. Pour éviter l'apparition de fractions, il est avantageux de placer les lignes qui ont déjà un coefficient 1 ou -1 dans la colonne considérée.
- Lorsqu'on effectue cet algoritme avec un ordinateur, il est avantageux de choisir le plus grand pivot possible (en valeur absolue) : cela permet de réduire les erreurs d'arrondis, qui auront tendance à se propager.

- Quand on effectue cet algorithme “à la main”, les erreurs les plus fréquentes sont les erreurs de signe et de somme de fractions. Soyez vigilent !

3- Solutions d’un système

Trouver une matrice échelonnée réduite équivalente par ligne à celle d’un système donné et la partie la plus difficile de la résolution d’un système. Ceci fait, on a *presque* terminé. Voyons maintenant comment, en pratique, s’occuper de la fin de la résolution.

Définition 11. Soient (E) un système d’équations linéaires, M sa matrice augmentée, M' la matrice échelonnée réduite équivalente par ligne à M, et (E') le système linéaire associé à M'.

- les inconnues de (E') (et donc de (E)) associées aux *pivots* de M' sont appelées **inconnues principales du système**.
- les autres (quand il y en a) sont appelées **inconnues secondaires**, ou bien **paramètres** du système.

Exemple 9. Considérons le système $(E) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -2x & - & 4y & + & 2z & + & 3t & + & 9u & = & -1 \\ & & & & z & + & t & + & 5u & = & 1 \\ x & & + 2y & - & z & - & t & - & 3u & = & 0 \end{array}\right.$ d’inconnues (x, y, z, t, u).

Sa matrice augmentée associée est :

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -4 & 2 & 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} M' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

et M' représente le système $(E') : \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y \qquad + 2u & = & 1 \\ z \quad + 2u & = & 2 \\ t + 3u & = & -1 \end{array}\right.$.

Les **inconnues principales** de ces systèmes sont donc (x, z, t) et les **paramètres** (ou *inconnues secondaires*) sont y et u.

Définition 12. Soient (E) un système d’équations linéaires, M sa matrice augmentée, M' la matrice échelonnée réduite équivalente par ligne à M, et (E') le système linéaire associé à M'.

- Le système ((E) ou (E')) est dit **compatible** quand la matrice M' n’a pas de pivot dans sa dernière colonne.
- Le système ((E) ou (E')) est dit **incompatible** dans le cas contraire.

Théorème 2.
- *Un système incompatible n’admet pas de solutions.*
- *Un système compatible admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions où l’on peut exprimer les inconnes principales en fonction des paramètres.*

Exemple 10. Reprenons le système de l’exemple précédent. Il est compatible, et on peut le transformer de la manière suivante :

$$(E') : \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y \qquad + 2u & = & 1 \\ z \quad + 2u & = & 2 \\ t + 3u & = & -1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2y - 2u \\ z & = & 2 - 2u \\ t & = & -1 - 3u \end{array}\right.$$

(on isole les inconnues principales en retranchant de part et d’autre de chaque équations les termes faisant apparaître les paramètres). On peut alors écrire l’ensemble des solutions

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(E)} &= \{(1 - 2y - 2u, y, 2 - 2u, 1 - 3u, u), (y, u) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(1, 0, 2, -1, 0) + y(-2, 1, 0, 0, 0) + u(-2, 0, -2, -3, 1), (y, u) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

Méthode 1. Résolution d'un système d'équation linéaires

I- ....

II- ....

III- ....

IV- ....

V- ....

Définition 13. Soit (E) un système d'équations linéaires. On appelle **rang** de (E) le **nombre de pivot** de la matrice échelonnée réduite equivalente à la matrice augmentée associée à (E).

Proposition 4. Soit (E) un système linéaire de n équations à p inconnues.

- Le rang de (E), r, est égal au nombre d'inconnues principales de (E).
- Le nombre de paramètres est égal à $p - r$.
- On a toujours $r \leqslant \min(n, p)$.

Exemple 11. Dans les exemples 9 et 10, le système considéré est de rang 3 (car il y a 3 inconnues principales sur les 5 : x, z, et t) Le nombre de paramètre (y et u) vaut bien $5 - 3 = 2$.

Théorème 3. *Soient (E) un système d'équations linéaires, et (H) le système homogène associé à (E). Soit v une solution particulière de (E) ($v \in \mathcal{S}_E$), alors :*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_E &= \{v + h, h \in \mathcal{S}_H\} \\ &= v + \mathcal{S}_H \end{aligned}$$

C'est à dire que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des solutions de (H) auxquelles on "ajoute" une solution particulière de (E).

Remarque 9. Cela simplifie la résolution d'un système d'équations linéaires. En effet, plutôt que de chercher à résoudre (E), on a juste à chercher à résoudre (H) (qui a forcément au moins une solution), et ensuite on voit plus facilement les solutions de (E). Notamment, dans le cas où il y a au moins un paramètre, alors on peut exprimer (H) uniquement en fonction des paramètres, et trouver une solution particulière de (E) en prenant tous les paramètres égaux à 0, ce qui simplifie largement le travail.

Méthode 2. Résolution d'un système d'équation linéaires via le système homogène

I- ....

II- ....

III- ....

IV- ....

V- ....

Exercices

Exercice I-1. Dire si chacun des systèmes suivants sont linéaires ou non. Si c'est le cas, donner le système homogène associé et la matrice augmentée associée, préciser le nombre d'équations et le nombre d'inconnues.

1- $(E_1)\begin{cases} 3x + 2y - t = 4 \\ 5x - y + 3z + 2t - u = 9 \\ 5y - 3t + 2u = -1 \\ -x + 7y + 5t = 0 \\ -z - 2t + 4u = 1 \end{cases}$

2- $(E_2)\begin{cases} 3x - 2t + 9 = 3y - 2x + t + 1 \\ 2z - 6x = 4x + 9y - 3 \\ 4t - 3u = 2u + 2x + y \end{cases}$

3- $(E_3)\begin{cases} -3x - 4y + 9 = 2(z+8) - 3(x+y) \\ (4z - 2t)(x+1) = 2x - 3y + z + t \end{cases}$

4- $(E_4)\begin{cases} 2x - 2y + 7t = 3(x-1) + 2t \\ -7t + 2z + zt = (z-6)(t+4) \end{cases}$

5- $(E_5)\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = x + y \end{cases}$

Exercice I-2. Montrer les équivalences par lignes suivantes (on pourra, au choix, transformer l'une matrice en l'autre, ou alors les deux en une même matrice) :

1- $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

3- $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5- $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Exercice I-3. Pour chaque matrice, donner une matrice équivalente par ligne qui soit échelonnée réduite (on utilisera avec précision l'algorithme de Gauss-Jordan)

1- $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

2- $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & -4 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3- $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -7 & 9 \\ 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

4- $D = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5- $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice I-4. Justifier l'existence ou non des solutions aux systèmes suivants et, le cas échéant, donner l'ensemble des solutions.

1- $(E_1) \begin{cases} 3x + 2y - t = 4 \\ 5x - y + 3z + 2t - u = 9 \\ 5y - 3t + 2u = -1 \\ -x + 7y + 5t = 0 \\ -z - 2t + 4u = 1 \end{cases}$

3- $(E_3) \begin{cases} 2x - 3y + 2t - 4z & = 1 \\ 4x - 2y + 3t & = 2 \\ 2z + 4y - 4t & = 0 \\ 2x - y + 2y - 3t & = 2 \\ x - z + t & = -1 \end{cases}$

2- $(E_2) \begin{cases} 3x - 2t + 9 & = 3y - 2x + t + 1 \\ 2z - 6x & = 4x + 9y - 3 \\ 4t - 3u & = 2u + 2x + y \end{cases}$

4- $(E_4) = \begin{cases} 3x - y + 2z - t + u + v & = 1 \\ 4x + z - 2u & = 3 \\ y - 3t + v & = -1 \end{cases}$

Exercice I-5. Démontrer la Proposition 4.