图论

翁文涛

1212 最小生成树

- N个点M条边的无向连通图，每条边有一个权值，求该图的最小生成树。

解法

- 模版题。
- 旨在对图论算法有大致认识。
  - 没有太具体的数学形式
  - 小规模->大规模的转化

几种最小生成树算法

- Kruskal
- 对边进行排序，贪心从小到大把边加入。假如一条边连接两个不连通的点则连上。

- 时间复杂度$O(m\log m)$。
- 可以证明很多有趣的结论。
  - 最小瓶颈生成树。

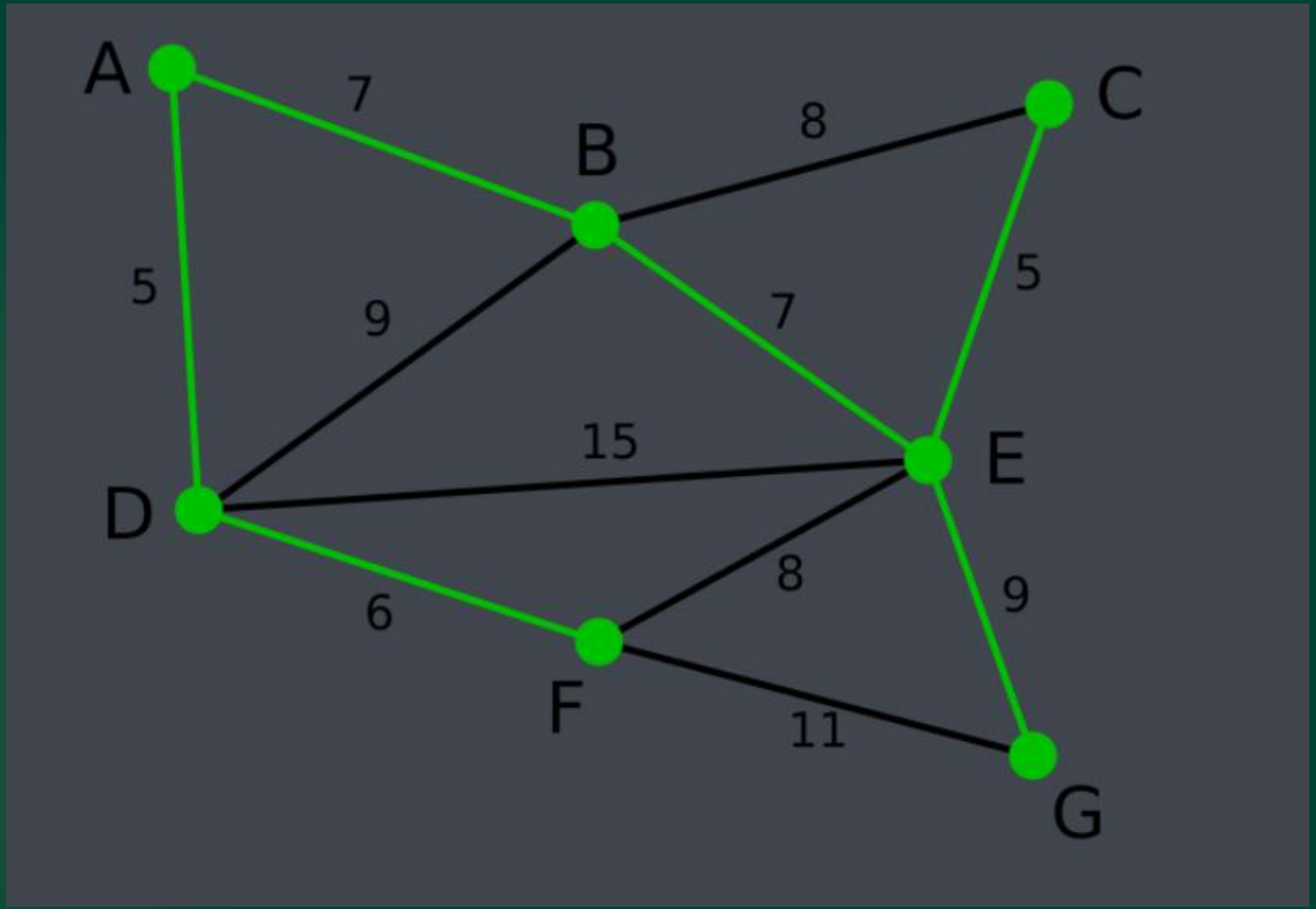
Prim

- 从一个点的联通块开始，不停扩张。每次找到一条连接这个联通块和其他点权值最小的边，把他加进联通块当中。
- 用处： 边数为n^2级别，可能可以结合题目性质使用数据结构优化。
- 加入一个点时，利用数据结构考虑这个点对剩下点标号的影响。（相当于把边的更新用数据结构考虑）

Boruvka算法

- 一开始每个点都是单独联通块。
- 每个阶段，每个联通块找到一条连接它和其他联通块的最小的边，连起来。
- 每次最小的联通块的大小至少乘2。最多log层。
- 用处：$O(n^2)$级别边数。利用数据结构优化每层连边的复杂度。

算法演示



1459 迷宫游戏

- 你来到一个迷宫前。该迷宫由若干个房间组成，每个房间都有一个得分，第一次进入这个房间，你就可以得到这个分数。还有若干双向道路连结这些房间，你沿着这些道路从一个房间走到另外一个房间需要一些时间。游戏规定了你的起点和终点房间，你首要目标是从起点尽快到达终点，在满足首要目标的前提下，使得你的得分总和尽可能大。现在问题来了，给定房间、道路、分数、起点和终点等全部信息，你能计算在尽快离开迷宫的前提下，你的最大得分是多少么？

解法

- 把迷宫抽象为一副图。图上的点为迷宫上的位置，图上的边为迷宫的道路。
- 边的权值设定为每条道路通过的时间。最短的从起点出发到终点的时间=图上，起点到终点的最短路。
- 使用Dijkstra或SPFA即可解决。

遗留问题

- 原题除了要求最短的时间，还需要在最短时间的同时，最大化总得分。
- 重新定义距离标号D[i]。D[i]现在是双关键字，D[i]={dis,value}，第一个为起点到这个点的距离，第二个为起点到这个点的得分。

- 每次在最短路更新的时候，相当于用一个二元组{x,y}去更新另外一个二元组{a,b}。

- 1. 最短时间：x<=a
- 2. 最大得分：在保证1同时，y>=a。

- 同样可以使用Dijkstra或SPFA来维护。

1649齐头并进

- 在一个叫奥斯汀的城市，有n个小镇（从1到n编号），这些小镇通过m条双向火车铁轨相连。当然某些小镇之间也有公路相连。为了保证每两个小镇之间的人可以方便的相互访问，市长就在那些没有铁轨直接相连的小镇之间建造了公路。在两个直接通过公路或者铁路相连的小镇之间移动，要花费一个小时的时间。
- 现在有一辆火车和一辆汽车同时从小镇1出发。他们都要前往小镇n，但是他们中途不能同时停在同一个小镇（但是可以同时停在小镇n）。火车只能走铁路，汽车只能走公路。
- 现在请来为火车和汽车分别设计一条线路；所有的公路或者铁路可以被多次使用。使得火车和汽车尽可能快的到达小镇n。即要求他们中最后到达小镇n的时间要最短。输出这个最短时间。(最后火车和汽车可以同时到达小镇n，也可以先后到达。)

解法

- 这道题首先需要把题目读清楚。
- 每两个点间，要么有道路，要么有铁路。
- 要么火车能直接到n，要么公交能直接到n。

解法

- 这样只需要分类讨论，是巴士走长的那条还是火车走长的那条。
- 直接使用最短路。这里每条边的长度都是1，可以直接BFS。
- BONUS:铁路和道路是给定的若干条边。

1445 变色DNA

- 有一只狼可以变成N种颜色之一，将这些颜色标号为0,1,2...N-1。这只狼的基因中存在一个变色矩阵，记为colormap，如果colormap[i][j]='Y'则这只狼可以在某一个夜晚从颜色i变成颜色j（一晚不可以变色多次），如果colormap[i][j]='N'则不能在一个晚上从i变成j色。进一步研究发现，这只狼每次变色并不是随机变的，它有一定策略，在每个夜晚，如果它没法改变它的颜色，那么它就不变色，如果存在可改变的颜色，那它变为标号尽可能小的颜色（可以变色时它一定变色，哪怕变完后颜色标号比现在的大）。现在这只狼是颜色0，你想让其变为颜色N-1，你可以花费1的代价，将狼的变色矩阵中的某一个colormap[i][j]='Y'改变成colormap[i][j]='N'。问至少花费多少总代价改变狼的基因，让狼按它的变色策略可以从颜色0经过若干天的变色变成颜色N-1。如果一定不能变成N-1，则输出-1.

解法

- 首先把问题抽象为一个图上的问题。图上每个点对应着一种颜色，而图上的边对应就是可能的颜色转换。
- 每次颜色转变首选最小的颜色。怎么让每次转变能随便选颜色？
- 只需要把排要变的颜色前全部删掉即可。

解法

- 为什么这样合法？
  - 不会多次变成同一种颜色。
- 每一条边的权值赋值为排目标颜色前的颜色数量（要把他们全部删掉）。
- 使用最短路求出从初始颜色变换成最终颜色的最小代价。

1640天气晴朗的魔法

- N名魔法师按阵法站好，之后选取N - 1条魔法链将所有魔法师的魔力连接起来，形成一个魔法阵。
- 魔法链是做法成功与否的关键。每一条魔法链都有一个魔力值V，魔法最终的效果取决于阵中所有魔法链的魔力值的和。
- 由于逆天改命的魔法过于暴力，所以我们要求阵中的魔法链的魔力值最大值尽可能的小，与此同时，魔力值之和要尽可能的大。
- 现在给定魔法师人数N，魔法链数目M。求此魔法阵的最大效果。

解法

- 首先考虑最小化最大边的条件。最小化瓶颈生成树。
- 考虑枚举一条最大的边，我们需要考虑最大边不超过这条边的情况下，这个图能不能搞出一棵生成树。
- 直接把在这条边之前的边全部加入，判断这幅图是否联通。

解法

- 回忆Kruskal算法。其本质就是不断从小到大加边，加到某条边形成生成树就停止。
- 那么这条停止的边就是最小可能的最大边。
- 需要固定这条最大边的情况下，最大化所选边的长度总和。

- 只需要把所全面的所有边拉出来，跑一个最大生成树即可。
- 注意，当有多条边权值等于最大这条边时，应该把所有等于这个值的边都包含进来。
- 算法流程：最小生成树，求出最小的最大边。再倒过来做一遍最大生成树。

1815 调查任务

- Ibn是战忽中心——一个绝密的军事组织的一个军官，今天他接到了一个紧急任务：调查敌国X国某些城市的经济情况。
  X国有**N**个城市，由**M**条单向道路连接，其中**S**城是X国的首都。每个城市i有一个发达指数**a[i]**，我们定义城市i的经济状况为首都S到城市i任意一条路径上两个不同的城市x,y的a[x] mod a[y]的最大值。（**x和y必须在同一条路径上，x，y可以是i或者S**）
- Ibn当然能轻松地完成这个任务，但他想考考你。

解法

- 首先考虑一排数，怎么求出a[x] mod a[y]的最大值。
- 若a[x] >= a[y]，则a[x] mod a[y] < a[y].
- 若a[x] < a[y]，则a[x] mod a[y] = a[x].
- 因此一排数的取模最大值恰好为严格次大值（不需要考虑顺序）。

解法

- 注意题目中的路径不要求一个点只经过一次。
- 假如题目中的图是一个DAG（有向无环图）。可以先拓扑排序。对于一个DAG，可以根据拓扑序，顺序使用DP来维护次大值。
- 使用二元组(Mx,Smx)来存储最大值与次大值。可合并。

解法

- 现在原题可能有环。考虑把强联通分量缩点。
- 使用Tarjan算法把强联通分量都找出来。对于同一个强联通分量，可以随便绕，因此相当于对一堆点维护出最大值和次大值。
- 变成有向无环图问题。

1535深海探险

- 第一次射击的分析结果会反映在一张由n个点和m条边组成的无向图上。现在让我们来确定这张图是不是可以被认为是章鱼怪。
-
- 为了简单起见，我们假设章鱼怪的形状是这样，他有一个球形的身体，然后有很多触须连接在他的身上。可以表现为一张无向图，在图中可以被认为由三棵或者更多的树（代表触须）组成，这些树的根在图中处在一个环中（这个环代表球形身体）。
-
- 题目保证，在图中没有重复的边，也没有自环。

解法

- 这道题要求我们判断给定的这幅图，是否是一个环套树。也就是恰好一个环，其他都是伸出去的树。
- 首先环套树需要是一个联通图。可以先把所有的边连起来，再使用一个DFS就能判断是否每个点都能遍历到。
- 对于一个联通图，他是环套树的充要条件是什么？

解法

- 考虑一棵树的情况。树是一个边数=n-1的联通图。
- 一个环套树，必然是要长成树+一条边的情况。而树+一条边也必然是一棵环套树。
- 注意原题中没有重边。且仅要求环的大小>=3。因此直接判断n=m即可。

1833 环

- 有一个有向图。这张图有n个点和m条有向边。他很好奇不相交的环（简单环）来覆盖所有点的方案数。

解法

- 考虑不相交的环覆盖所有的点对应什么情况。
- 设一个数组C。对于每个环，假设点i的下一个点为j，则把C[i]设为j。
- 由于环是不相交的且覆盖所有点，C[i]必然有唯一的值。且C[i]之间互不相同。

- 那么数组C对应一个1->n的点的排列。且一个合法的不相交环覆盖一一对应一个排列数组C。

- 但有的边是不存在的。因此一个合法的数组C，就要求i和C[i]间有边。

- 考虑使用状压DP。设F[i][S]表示考虑前i个点，C[1]...C[i]包含了S集合里的点，方案数是多少。

- 每次转移，就枚举C[i]的值，判断C[i]是否在S中出现，且i与C[i]之间有边。
- 总复杂度为O(n * 2^n)。（总状态数为2^n，转移复杂度O(n)）。
- 注意这个其实等价于求一个给定二分图的完美匹配数。

1967 路径定向

- 给出一个有向图，要求给每条边重定向，使得定向后出度等于入度的点最多，输出答案和任意一种方案

解法

- 首先所有有奇数条边的点都是不可能重新分配使得入度=出度。
- 一个有欧拉回路的有向图，所有的点的入度都等于出度。
- 一个所有点的度数都是偶数的无向连通图。必然有欧拉回路。

http://codeforces.com/contest/105/problem/B

解法

- 直接把原图当成无向图。把原图中的奇数点，按顺序两个两个这样连。那么图中就没有奇数度数的点了。
  - 问题：有没有可能恰好有奇数个奇数度数的点？
  - 这个图总度数恰好为偶数。必然有偶数个奇数度数点。
- 对于新图，找到它的欧拉回路。欧拉回路上的边都是有方向的。

解法

- 根据欧拉回路的方向，重新把原来的无向图的边的方向定向。这个有向图有欧拉回路，且满足所有点的入度都等于出度。
- 那么对于原来度数为偶数的点，它的条件就能满足。而本来就不可能满足的点，就不需要再考虑它了。

欧拉回路-Hierholzer算法

- 首先判断原图连通，且无奇数度数点。
- 维护一个栈。随便选取一个偶数点出发。每次，枚举这个当前点连出去的没走过的边，递归下去。回溯的时候把起点塞到栈里即可。
- 倒序输出栈中的数就得到一条欧拉回路了。

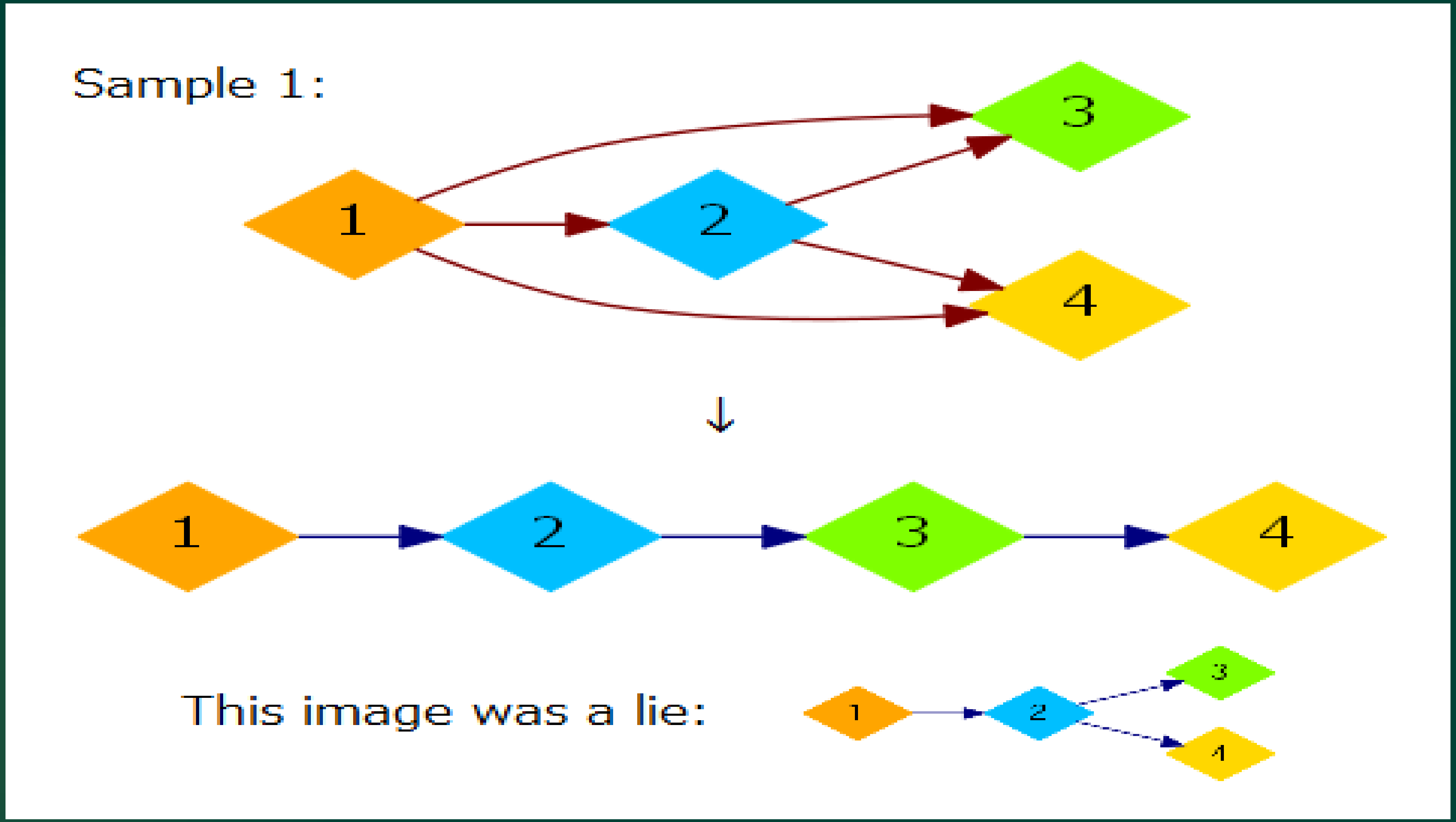
1456 小K的技术

- 在王国中有n个城市，标记为1到n。
- 由于小K的研究，我们最终能过在两个城市之间建立传输管道，一个传输管道能单向连接两个城市，即，一个从城市x到城市y的传输管道不能被用于从城市y传输到城市x。在每个城市之间的运输系统已经建立完善，因此，如果从城市x到城市y的管道和从城市y到城市z的管道都被已经被建立，人们能够立即从x到z。
- 小K也研究了国家政治，他认为在这m对城市(ai, bi) (1 ≤ i ≤ m)之间的传输尤其重要。他正在计划为每个重要城市对(ai, bi)建立传输管道，通过使用一个或多个传输管道，我们可以从城市ai到城市bi（但不需要从城市bi到城市ai）。我们要找出必须建立的传输管道的最小数。至今，还没有传输管道被建立，在每个城市之间也没有其他有效的传输方式。

解法

- 考虑最直接的一种构造方法，对于题目中给定的m对点，我们都把他们之间的边连上。得到一个有向图。

- 但这样会造成边的浪费。



Sample 1:
1
2
3
4
↓
1
2
3
4
This image was a lie:
1
2
3
4

解法

- 问题转变为：给定一副有向图，需要找另外一幅图，使得给定图的连通性在这幅图中依然存在。（注意不是删掉原图的边）
- 假如给定的图是一个DAG，则可以对这个图进行拓扑排序。把点按照拓扑排序排成一条链就能满足原来的所有需求了。而且这也是代价最小的一种方案。

解法

- 假如原图不是一个DAG，有环。回忆之前有向图的题目，我们通常会把强联通分量缩成一个点，图就变成一个DAG了。
- 这里类似的，先把强联通缩点，再拓扑排序，把强联通当成一个点来对待。
- 对于单独一个强联通分量，一个环就能表示其强联通性。