第二章

导数与微分

习题 2－1　　导数概念

1. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔$[0,t]$上转过角度θ，从而转角θ是t的函数：$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的，那么称$\omega=\dfrac{\theta}{t}$为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的，应怎样确定该物体在时刻t_0的角速度？

解　物体在时间间隔$[t_0,t_0+\Delta t]$上的平均角速度

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta(t_0+\Delta t)-\theta(t_0)}{\Delta t}.$$

在时刻t_0的角速度

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{\omega}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\theta'(t_0).$$

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却. 若物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻t的冷却速度？

解　物体在时间间隔$[t,t+\Delta t]$上平均冷却速度

$$\overline{v}=\frac{\Delta T}{\Delta t}=\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}.$$

在时刻t的冷却速度

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=T'(t).$$

3. 设某工厂生产x件产品的成本为

$$C(x)=2\,000+100x-0.1x^2(\text{元}),$$

函数$C(x)$称为成本函数，成本函数$C(x)$的导数$C'(x)$在经济学中称为边际成本. 试求

(1) 当生产 100 件产品时的边际成本；

(2) 生产第 101 件产品的成本，并与(1)中求得的边际成本作比较，说明边际成本的实际意义.

解　(1) $C'(x)=100-0.2x$,

$C'(100)=100-20=80(\text{元/件})$.

(2) $C(101)=2\,000+100\times101-0.1\times(101)^2=11\,079.9(\text{元})$,

$C(100)=2\,000+100\times100-0.1\times(100)^2=11\,000(\text{元})$,

$C(101)-C(100)=11\,079.9-11\,000=79.9(\text{元})$.

$$y''=-2\cos 2x\cdot\ln x-\sin 2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2\cos x(-\sin x)\cdot x-\cos^2 x}{x^2}$$

$$=-2\cos 2x\cdot\ln x-\frac{2\sin 2x}{x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

(2) $$y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2}=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$y''=-\frac{3}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x)=\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}.$$

*10. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$;　　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

解　(1) $y'=\dfrac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}$, $y''=\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2}$, $\cdots$,

$$y^{(n)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) 由 $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ 知

$$y^{(n)}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}=\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)^{(n)}=2\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$=\frac{2\cdot(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

11. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$.

解　把方程两边分别对 x 求导，得

$$e^y y'+y+xy'=0. \tag{1}$$

将 $x=0$ 代入 $e^y+xy=e$，得 $y=1$，再将 $x=0,y=1$ 代入(1)式得 $y'|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$，在(1)式两边分别关于 x 再求导，可得

$$e^y y'^2+e^y y''+y'+y'+xy''=0. \tag{2}$$

将 $x=0,y=1,y'|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$ 代入(2)式，得 $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$.

12. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3\theta,\\ y=a\sin^3\theta;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2},\\ y=\arctan t.\end{cases}$

解　(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}=-\tan\theta$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta.$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

13. 求曲线$\begin{cases}x=2e^t,\\ y=e^{-t}\end{cases}$在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

解　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{-e^{-t}}{2e^t}=-\dfrac{1}{2e^{2t}}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{2}$.

$t=0$ 对应的点为(2,1),故曲线在点(2,1)处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2),$$

即 $x+2y-4=0$. 法线方程为 $y-1=2(x-2)$，　即 $2x-y-3=0$.

14. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

解　由 $f(x)$ 连续,令关系式两端 $x\to0$,取极限得

$$f(1)-3f(1)=0,\quad f(1)=0.$$

又

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=8,$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$

$$\xlongequal{令\ t=\sin x}\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{t\to0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}$$

$=4f'(1)$,

故 $f'(1)=2$.

由于 $f(x+5)=f(x)$，于是 $f(6)=f(1)=0$.

$$f'(6)=\lim_{x\to 0}\frac{f(6+x)-f(6)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=f'(1)=2,$$

因此，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$，即 $(6,0)$ 处的切线方程为

$$y-0=2(x-6),$$

即 $2x-y-12=0$.

15. 当正在高度 H 飞行的飞机开始向机场跑道下降时，如图 2－7 所示，从飞机到机场的水平地面距离为 L. 假设飞机下降的路径为三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图形，其中 $y|_{x=-L}=H, y|_{x=0}=0$. 试确定飞机的降落路径.

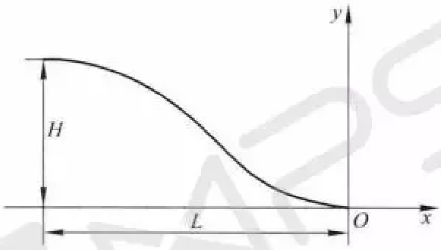

图 2－7

解　设立坐标系如图 2－7 所示. 根据题意，可知

$$y|_{x=0}=0\Rightarrow d=0,$$
$$y|_{x=-L}=H\Rightarrow -aL^3+bL^2-cL=H.$$

为使飞机平稳降落，尚需满足

$$y'|_{x=0}=0\Rightarrow c=0,$$
$$y'|_{x=-L}=0\Rightarrow 3aL^2-2bL=0.$$

解得 $a=\dfrac{2H}{L^3}, b=\dfrac{3H}{L^2}$. 故飞机的降落路径为

$$y=H\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3+3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right].$$

16. 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶，乙船以 8 km/h 的速率向南行驶. 在中午 12 点整，乙船位于甲船之北 16 km 处. 问下午 1 点整两船相离的速率为多少？

解　设从中午 12 点整起，经过 t 小时，甲船与乙船的距离为

$$s=\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2},$$

故速率

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{2(16-8t)\cdot(-8)+72t}{2\sqrt{(16-8t)^2+(6t)^2}}.$$

当 $t=1$ 时(即下午1点整)两船相离的速率为

$$v|_{t=1}=\frac{-128+72}{20}=-2.8(\text{km/h}).$$

17. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解　利用 $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$,取 $x=0.02$,得

$$\sqrt[3]{1.02}\approx 1+\frac{1}{3}\times(0.02)=1.007.$$

18. 已知单摆的振动周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,其中 $g=980\ \text{cm/s}^2$,l 为摆长(单位为 cm).设原摆长为 20 cm,为使周期 T 增大 0.05 s,摆长约需加长多少?

解　由 $\Delta T\approx \mathrm{d}T=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\Delta l$,得

$$\Delta l=\frac{\sqrt{gl}}{\pi}\mathrm{d}T\approx\frac{\sqrt{gl}}{\pi}\Delta T,$$

故

$$\Delta l|_{l=20}\approx\frac{\sqrt{980\times 20}}{3.14}\times 0.05\approx 2.23(\text{cm}).$$

即摆长约需加长 2.23 cm.