# 第十章
# 重积分

## 习题 10－1　二重积分的概念与性质

**1.** 设有一平面薄板(不计其厚度),占有 $xOy$ 面上的闭区域 $D$,薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷,且 $\mu(x,y)$ 在 $D$ 上连续,试用二重积分表达该薄板上的全部电荷 $Q$.

解　用一组曲线网将 $D$ 分成 $n$ 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$,其面积也记为 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$. 任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$,则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电荷 $\Delta Q_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 通过求和、取极限,便得到该板上的全部电荷为

$$Q=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i$ 的直径$\}$.

注　以上解题过程也可用元素法简化叙述如下:

设想用曲线网将 $D$ 分成 $n$ 个小闭区域,取出其中任意一个记作 $\mathrm{d}\sigma$(其面积也记作 $\mathrm{d}\sigma$),$(x,y)$ 为 $\mathrm{d}\sigma$ 上一点,则 $\mathrm{d}\sigma$ 上分布的电荷近似等于 $\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$,记作

$$\mathrm{d}Q=\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\quad(\text{称为电荷元素}),$$

以 $\mathrm{d}Q$ 作为被积表达式,在 $D$ 上作重积分,即得所求的电荷为

$$Q=\iint_D\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

**2.** 设 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_1=\{(x,y)\mid-1\leqslant x\leqslant1,-2\leqslant y\leqslant2\}$;又 $I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 $D_2=\{(x,y)\mid0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant2\}$. 试利用二重积分的几何意义说明 $I_1$ 与 $I_2$ 之间的关系.

解　由二重积分的几何意义知,$I_1$ 表示底为 $D_1$、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 $\Omega_1$ 的体积;$I_2$ 表示底为 $D_2$、顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 $\Omega_2$ 的体积(图 10－1). 由于位于 $D_1$ 上方的曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 关于 $yOz$ 面和 $zOx$ 面均对称,故 $yOz$ 面和 $zOx$ 面将 $\Omega_1$ 分成四个等积的部分,其中位于第一卦限的部分即为 $\Omega_2$. 由此可知

$$I_1=4I_2.$$

注　(1) 本题也可利用被积函数和积分区域的对称性来解答. 设 $D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,-2\leqslant y\leqslant2\}$. 由于 $D_1$ 关于 $y$ 轴对称,被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 $x$ 是偶函

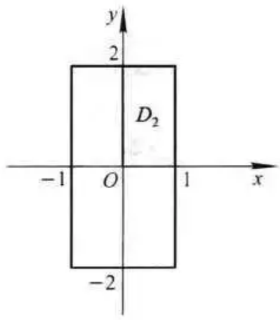


图 10-1

数,故

$$I_1 = \iint_{D_1} (x^2+y^2)^3 \mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_3} (x^2+y^2)^3 \mathrm{d}\sigma.$$

又由于 $D_3$ 关于 $x$ 轴对称,被积函数 $(x^2+y^2)^3$ 关于 $y$ 是偶函数,故

$$\iint_{D_3} (x^2+y^2)^3 \mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_2} (x^2+y^2)^3 \mathrm{d}\sigma = 2I_2.$$

从而得

$$I_1 = 4I_2.$$

(2) 利用对称性来计算二重积分还有以下两个结论值得注意:

如果积分区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称,而被积函数 $f(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数,即 $f(x,-y)=-f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0;$$

如果积分区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称,而被积函数 $f(x,y)$ 关于 $x$ 是奇函数,即 $f(-x,y)=-f(x,y)$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = 0.$$

**3.** 利用二重积分定义证明:

(1) $\iint_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$(其中 $\sigma$ 为 $D$ 的面积);

(2) $\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$(其中 $k$ 为常数);

(3) $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=D_1\cup D_2$,$D_1$,$D_2$ 为两个无公共内点的闭区域.

证　(1) 由于被积函数 $f(x,y)\equiv 1$,故由二重积分定义得

$$\iint_D \mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$$

$$= \frac{368}{105}\mu.$$

**14.** 设在 $xOy$ 面上有一质量为 $M$ 的质量均匀的半圆形薄片，占有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2, y\geqslant 0\}$，过圆心 $O$ 垂直于薄片的直线上有一质量为 $m$ 的质点 $P$，$OP=a$. 求半圆形薄片对质点 $P$ 的引力.

解 求解本题时，所有的分析和计算过程均与习题 10－4 的第 13 题雷同，故这里略去详细的计算步骤.

积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$.

由于 $D$ 关于 $y$ 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_x=0$. 又薄片的面密度 $\mu=\dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\dfrac{2M}{\pi R^2}$，于是

$$\begin{aligned}
F_y &= Gm\mu\iint_D \frac{y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma \\
&\xlongequal{\text{极坐标}} Gm\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho \\
&= 2Gm\mu\int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{4GmM}{\pi R^2}\left(\ln\frac{\sqrt{R^2+a^2}+R}{a}-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_z &= -Gam\mu\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -Gam\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho \\
&= -\frac{2GamM}{R^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right) \\
&= -\frac{2GmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right),
\end{aligned}$$

所求引力为 $\boldsymbol{F}=(0,F_y,F_z)$.

**15.** 求质量分布均匀的半个旋转椭球体 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}\leqslant 1, z\geqslant 0\right\}$的质心.

解 设质心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性知质心位于 $z$ 轴上，即 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 由于

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega z\mathrm{d}v &= \int_0^b z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ \left(\text{其中 } D_z=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)\right\}\right) \\
&= \int_0^b \pi a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)z\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$= \pi a^2 \int_0^b \left( z - \frac{z^3}{b^2} \right) dz = \frac{\pi a^2 b^2}{4},$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^2 b = \frac{2\pi a^2 b}{3},$$

因此

$$\bar{z} = \frac{\frac{\pi a^2 b^2}{4}}{\frac{2\pi a^2 b}{3}} = \frac{3b}{8},$$

即质心为$\left(0,0,\frac{3b}{8}\right)$.

*16. 一球形行星的半径为 $R$,其质量为 $M$,其密度呈球对称分布,并向着球心线性增加. 若行星表面的密度为零,则行星中心的密度是多少?

解 设行星中心的密度为 $\mu_0$,则由题设,在距球心 $r(0 \leqslant r \leqslant R)$ 处的密度为 $\mu(r) = \mu_0 - kr$. 由于 $\mu(R) = \mu_0 - kR = 0$,故 $k = \frac{\mu_0}{R}$,即

$$\mu(r) = \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

于是,

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{r \leqslant R} \mu_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 \sin\varphi \, dr d\varphi d\theta \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr \\ &= 4\pi\mu_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr = \frac{\mu_0 \pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

因此得

$$\mu_0 = \frac{3M}{\pi R^3}.$$