第五章

相似矩阵及二次型

习 题 解 答

1. 设 $a=(1,0,-2)^T$, $b=(-4,2,3)^T$, c 与 a 正交，且 $b=\lambda a+c$，求 λ 和 c.

解 以 a^T 左乘已知关系式两边得

$$a^Tb=\lambda a^Ta+a^Tc,$$

因 a 与 c 正交，有 $a^Tc=0$; $a\neq 0$，有 $a^Ta\neq 0$，故得

$$\lambda=\frac{a^Tb}{a^Ta}=\frac{-10}{5}=-2;$$

进而

$$c=b-\lambda a=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

2. 试把下列向量组施密特正交化，然后再单位化：

(1) $(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$; (2) $(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

解 (1) $b_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $p_1=\dfrac{b_1}{\|b_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\text{单位化得 } p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}-\frac{14}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

单位化得 $p_3=\dfrac{b_3}{\|b_3\|}=\dfrac{(1,-2,1)^T}{\|(1,-2,1)^T\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$;

注 这里并没有直接对 b_3 单位化，而是对 $(1,-2,1)^T$ 单位化，小小的技巧给计算带来不小的方便.

(2) $b_1=a_1=(1,0,-1,1)^T$，单位化向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},\text{单位化向量为}\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{15}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix},$$

其单位化向量为$\frac{1}{\sqrt{35}}(-1,3,3,4)^{\mathrm{T}}$.

3. 下列矩阵是不是正交矩阵？并说明理由：

(1) $\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}$.

解　(1) 不是，因第 1 个列向量不是单位向量；

(2) 是，因为此矩阵的 3 个列向量构成$\mathbb{R}^3$ 的标准正交基，即它们两两正交，并且都是单位向量.

4. (1) 设 x 为 n 维列向量，$x^{\mathrm{T}}x=1$，令 $H=E-2xx^{\mathrm{T}}$，证明 H 是对称的正交阵.

(2) 设 A,B 都是正交阵，证明 AB 也是正交阵.

证　(1) 对称性：$H^{\mathrm{T}}=(E-2xx^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E-2(xx^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=E-2xx^{\mathrm{T}}=H$.

正交性：
$$\begin{aligned}H^{\mathrm{T}}H&=H^2\ (\text{由 } H \text{ 的对称性})\\&=(E-2xx^{\mathrm{T}})(E-2xx^{\mathrm{T}})\\&=E-4xx^{\mathrm{T}}+4(xx^{\mathrm{T}})(xx^{\mathrm{T}})\\&=E-4xx^{\mathrm{T}}+4x(x^{\mathrm{T}}x)x^{\mathrm{T}}\quad(\text{矩阵乘法结合律})\\&=E\quad(x^{\mathrm{T}}x=1).\end{aligned}$$

注　本题即第二章例 9.

(2) 证一　$(AB)^{\mathrm{T}}(AB)=B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)B=B^{\mathrm{T}}B$　(因 $A^{\mathrm{T}}A=E$)
$=E$　(因 $B^{\mathrm{T}}B=E$)，

由定义知 AB 为正交阵；

证二　因 A,B 为正交阵，故 A,B 均可逆，且 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}},B^{-1}=B^{\mathrm{T}}$. 于是 AB 可逆，且有

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}},$$

从而 AB 是正交阵.

5. 设 a_1,a_2,a_3 为两两正交的单位向量组，$b_1=-\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2+\frac{2}{3}a_3$，$b_2=\frac{2}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2-\frac{1}{3}a_3$，$b_3=-\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2-\frac{2}{3}a_3$，证明 b_1,b_2,b_3 也是两两正交的单位向量组.

证一 $[b_1,b_2]=\left[-\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2+\frac{2}{3}a_3,\frac{2}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2-\frac{1}{3}a_3\right]$

$$=-\frac{2}{9}[a_1,a_1]+\frac{4}{9}[a_2,a_2]-\frac{2}{9}[a_3,a_3]=-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=0,$$

故 b_1 与 b_2 正交，类似可证 b_1 与 b_3，b_2 与 b_3 正交；

又：$[b_1,b_1]=\left[-\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2+\frac{2}{3}a_3,-\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2+\frac{2}{3}a_3\right]$

$$=\frac{1}{9}[a_1,a_1]+\frac{4}{9}[a_2,a_2]+\frac{4}{9}[a_3,a_3]=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=1,$$

故 b_1 为单位向量，类似可证 b_2,b_3 为单位向量.

证二 把题设条件写成矩阵形式

$$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

上式记为 $B=AK$. 因 A 的列向量组为两两正交单位向量组，故 $A^{\mathrm{T}}A=E_3$；因 K 为正交阵，故 $K^{\mathrm{T}}K=E_3$. 于是

$$B^{\mathrm{T}}B=(AK)^{\mathrm{T}}(AK)=K^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)K=K^{\mathrm{T}}K=E_3,$$

这表明 B 的列向量组，即 b_1,b_2,b_3 是两两正交单位向量组.

注 上面所述矩阵 A 和 B 均不一定是方阵，因而不能当作正交阵.

6. 求下列矩阵的特征值和特征向量：

(1) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$； (3) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

解 (1) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_3-(\lambda+2)c_1}\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & \lambda^2-2\\ 5 & -3-\lambda & -7-5\lambda\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } r_3 \text{ 展开}}\begin{vmatrix}-1 & \lambda^2-2\\ 3+\lambda & 7+5\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[c_2\div(1+\lambda)]{c_2-c_1}(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1 & \lambda-1\\ 3+\lambda & 4\end{vmatrix}$$

$$=-(1+\lambda)^3,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$（三重根）.

对于特征值 -1，解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{p}=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$；

注 请读者注意，在求特征值时，尽量避免对三次多项式作因式分解.

(2) $$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 1-\lambda & 3\\ 3 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_2}\begin{vmatrix}-(1+\lambda) & 2 & 3\\ 1+\lambda & 1-\lambda & 3\\ 0 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2+r_1]{c_1\div(1+\lambda)}(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3-\lambda & 6\\ 0 & 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(1+\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 6\\ 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9).$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$；

当 $\lambda_2=0$ 时，解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$；

当 $\lambda_3=9$ 时，解方程 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$A-9E=\begin{pmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-5&5&0\\5&-5&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$
$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得对应的特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$;

(3) 特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&1\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[c_4\leftrightarrow c_2]{r_4\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix}-\lambda&1&&\\1&-\lambda&&\\&&-\lambda&1\\&&1&-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)^2,$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=\lambda_4=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时,解方程 $(A+E)x=0$,由

$$A+E=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得对应的线性无关特征向量为

$$p_1=(0,-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad p_2=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}};$$

当 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 时,解方程 $(A-E)x=0$,由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得对应的线性无关特征向量为

$$p_3=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}},p_4=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

7. 设 A 为 n 阶矩阵,证明 A^{T} 与 A 的特征值相同.

证 A 的特征值是特征多项式 $|A-\lambda E|$ 的根,同样 A^{T} 的特征值是特征多项式 $|A^{\mathrm{T}}-\lambda E|$ 的根,但根据行列式性质 1,这两个特征多项式是相等的.

$$|A-\lambda E|=|(A-\lambda E)^{\mathrm{T}}|=|A^{\mathrm{T}}-\lambda E|,$$

从而它们的根也相同，即 A 与 A^{T} 的特征值也相同.

注 这里特征值相同的含义是：若 λ_0 是 A 的 k 重特征值，那么它恰好也是 A^{T} 的 k 重特征值.

8. 设 n 阶矩阵 A,B 满足 $R(A)+R(B)<n$，证明 A 与 B 有公共的特征值和公共的特征向量.

证 显然 $R(A)<n$. 另一方面，

$$R(A)<n \Leftrightarrow A \text{ 不可逆} \Leftrightarrow 0 \text{ 是 } A \text{ 的特征值};$$

同理，0 也是 B 的特征值，于是 A 与 B 有公共的特征值 0.

A 和 B 对应 $\lambda=0$ 的特征向量依次是方程 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 的非零解. 于是

$$A \text{ 与 } B \text{ 有对应于} \lambda=0 \text{ 的公共特征向量}$$

$$\Leftrightarrow \text{方程组} \begin{cases} Ax=0, \\ Bx=0 \end{cases} \text{有非零解}$$

$$\Leftrightarrow \text{方程} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x=0 \text{ 有非零解} \Leftrightarrow R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}<n.$$

另一方面，由矩阵秩的性质⑤

$$R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=R(A^{\mathrm{T}},B^{\mathrm{T}})\leqslant R(A^{\mathrm{T}})+R(B^{\mathrm{T}})=R(A)+R(B)<n.$$

综上，A 与 B 有公共的特征向量.

9. 设 $A^2-3A+2E=O$，证明 A 的特征值只能取 1 或 2.

证 设 λ 是 A 的特征值，则 $\lambda^2-3\lambda+2$ 是 $A^2-3A+2E=O$ 的特征值. 但是，零矩阵只有特征值 0，故 $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=1$ 或 $\lambda=2$.

注 本题并不是说 A 必须有特征值 1 和 2，例如当 $A=E$ 时，满足题设条件，但 A 只有特征值 1.

10. 设 A 为正交阵，且 $\det A=-1$，证明 $\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

证 $$\lambda=-1 \text{ 是 } A \text{ 的特征值} \Leftrightarrow |A+E|=0,$$

因此只需证 $|A+E|=0$. 而

$$|A+E|=|A+A^{\mathrm{T}}A|=|(E+A^{\mathrm{T}})A|=|A+E|\cdot|A|=-|A+E|,$$

$$\Rightarrow 2|A+E|=0 \Rightarrow |A+E|=0.$$

11. 设 $\lambda\neq 0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m\times n}B_{n\times m}$ 的特征值，证明 λ 也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

证 根据特征值的定义证明.

设 λ 是矩阵 AB 的非零特征值，ξ 是对应于它的特征向量，即有

$$AB\xi=\lambda\xi. \tag{5.2}$$

用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 左乘上式两边，得

$$(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}\xi = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}\xi) = \boldsymbol{B}\lambda\xi = \lambda(\boldsymbol{B}\xi),$$

若 $\boldsymbol{B}\xi\neq\boldsymbol{0}$，则由特征值定义知，$\lambda$ 为 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值. 下面证明 $\boldsymbol{B}\xi\neq\boldsymbol{0}$. 事实上，由 $\lambda\neq0$，$\xi\neq\boldsymbol{0}$，有 $\lambda\xi\neq\boldsymbol{0}$，再由(5.2)式得 $\boldsymbol{AB}\xi\neq\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{B}\xi\neq\boldsymbol{0}$.

12. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3，求 $|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|$.

解 令 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$. 因 1,2,3 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故 $\varphi(1)=3$，$\varphi(2)=2$，$\varphi(3)=3$ 是 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}$ 的特征值. 又：$\varphi(\boldsymbol{A})$ 为 3 阶方阵，这样 $\varphi(1)$，$\varphi(2)$，$\varphi(3)$ 便是 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的全部特征值. 由特征值性质得

$$\det(\varphi(\boldsymbol{A})) = \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3) = 3\times2\times3 = 18.$$

13. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,−3，求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

解 本题与例 8 相仿. 由特征值性质得 $|\boldsymbol{A}|=1\times2\times(-3)=-6$，于是 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-6\boldsymbol{A}^{-1}$，以此代入得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^* + 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = -6\boldsymbol{A}^{-1} + 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}.$$

因为当 λ ($\neq0$)为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值时，$-6\lambda^{-1}+3\lambda+2$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值. 分别取 $\lambda=1,2,-3$ 知 $-1,5,-5$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值，故 $|\boldsymbol{B}|=(-1)\times5\times(-5)=25$.

注 习题 12 和习题 13 中都需给出 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值(如果有重根，还需给出各重根的情况). 因此 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵的条件是不可缺少的.

14. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故

$$\boldsymbol{BA} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A},$$

由定义，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

15. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&x\\4&0&5\end{pmatrix}$ 可对角化，求 x.

解 先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\3&1-\lambda&x\\4&0&5-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\4&5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(6-\lambda),$$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=1$ (二重根)，$\lambda_3=6$ (单重根).

于是 $\boldsymbol{A}$ 可对角化

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量 (由定理 4)

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 对应于二重特征值 1 有两个线性无关的特征向量 (定理 2 的推论)

$\Leftrightarrow$方程$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$（上一章定理 7），

另一方面
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&0&x\\4&0&4\end{pmatrix}\stackrel{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&x-3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是
$$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1\Leftrightarrow x=3.$$

16. 已知 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量.

(1) 求参数 a,b 及特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值；

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能不能对角化？并说明理由.

解 (1) 利用特征值和特征向量的定义.

设 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值是 λ，则由题设，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$，即
$$\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&a-\lambda&3\\-1&b&-2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

于是得到以 a,b,λ 为未知数的线性方程组：
$$\begin{cases}\lambda+1=0,\\a-\lambda+2=0,\\b+\lambda+1=0\end{cases}\Rightarrow\lambda=-1,a=-3,b=0.$$

(2) $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵. 理由是：当 $a=-3,b=0$ 时，容易求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=-(\lambda+1)^3$，故 $\lambda=-1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值. 但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$，从而 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant 1$，故齐次方程
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$
没有 3 个线性无关的解. 于是 $\boldsymbol{A}$ 也就没有 3 个线性无关的特征向量. 由定理 4 知 $\boldsymbol{A}$ 不能相似于对角阵.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解 利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相似对角阵来求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值：
$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&4&2\\0&-3-\lambda&4\\0&4&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-3-\lambda&4\\4&3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-5,\lambda_2=1,\lambda_3=5$，并且它们互不相同，由定理 4 的推论知 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

(2) 对应 $\lambda_1=-5$，解方程 $(\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}6&4&2\\0&2&4\\0&4&8\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}6&0&-6\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$；

对应 $\lambda_2=1$，解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&4&2\\0&-4&4\\0&4&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$；

对应 $\lambda_3=5$，解方程 $(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&4&2\\0&-8&4\\0&4&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&-2&-1\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$.

(3) 令
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\1&0&2\end{pmatrix},$$

则由定理 2，$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-5,1,5),$$

于是
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

求出 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&0&-5\\0&1&2\end{pmatrix}$，代入得

$$\boldsymbol{A}^{100}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{100}&&\\&1&\\&&5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&0&-5\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5^{100}&1&2\cdot5^{100}\\-2\cdot5^{100}&0&5^{100}\\5^{100}&0&2\cdot5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&0&-5\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5^{100}-1\\ 0 & 5^{100} & 0\\ 0 & 0 & 5^{100}\end{pmatrix}.$$

18. 在某国，每年有比例为 p 的农村居民移居城镇，有比例为 q 的城镇居民移居农村. 假设该国总人口数不变，且上述人口迁移的规律也不变. 把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 y_n（$x_n+y_n=1$）.

(1) 求关系式 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等，即 $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\ 0.5\end{pmatrix}$，求 $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$.

解 (1) 这是一个应用问题. 关系式

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$$

可看作是向量 $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ 到 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}$ 的递推关系式，从而有

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}=\cdots=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},$$

即把应用问题归结为求 $\boldsymbol{A}$ 的幂 $\boldsymbol{A}^n$. 遵循这一思路，先求 $\boldsymbol{A}$. 由题设，有

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-p)x_n+qy_n,\\ y_{n+1}=px_n+(1-q)y_n\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p & q\\ p & 1-q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix},$$

故
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-p & q\\ p & 1-q\end{pmatrix}.$$

(2) 再求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量. 易求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=1-p-q$.

对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(q,p)^{\mathrm{T}}$；对应于 $\lambda_2=1-p-q$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\mathrm{diag}(1,r)$，其中 $r=1-p-q$. 因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & r^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2(p+q)}\begin{pmatrix}2q-(q-p)r^n\\ 2p+(q-p)r^n\end{pmatrix},\ r=1-p-q$$

19. 试求一个正交的相似变换矩阵，将下列对称阵化为对角阵；

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

解 (1) 先求特征值：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-4(2-\lambda)+4\lambda$$

$$= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-8(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

再求特征向量：

对应 $\lambda_1=-2$，解方程 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{r}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{r}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{r}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^{\mathrm{T}}$；

对应 $\lambda_2=1$，解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$；

对应 $\lambda_3=4$，解方程 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \stackrel{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \stackrel{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵，且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[c_3-c_2]{r_2+r_3}\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -4\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ -2 & -4 & 9-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\ -2 & 9-\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(\lambda-10),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=10,\lambda_2=\lambda_3=1$（二重根）.

对应 $\lambda_1=10$，解方程 $(A-10E)x=0$，由

$$A-10E=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & -9 & -9\\ 0 & -18 & -18\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_1=\frac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$；

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$，解方程 $(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得线性无关特征向量：$a_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. 将 a_1 和 a_2 正交化得

$$b_1=a_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

再分别单位化得：$p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}},p_3=\frac{1}{3\sqrt{2}}(4,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

令
$$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则 P 是正交阵，且有 $$P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}10 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

20. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}5&&\\&-4&\\&&y\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y；并求一个正交阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$。

解　先求 x,y：

因 A 与 Λ 相似，故 A 的特征值是 $5,-4,y$. 由特征值性质知

$$5+(-4)+y=A\text{ 的特征值之和}$$
$$=A\text{ 的对角元之和}=2+x,$$

得 $y=1+x$.

因 $\lambda=-4$ 是 A 的特征值，有 $|A+4E|=0$.

由
$$|A+4E|=\begin{vmatrix}5&-2&-4\\-2&x+4&-2\\-4&-2&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}5&-2&-4\\-2&x+4&-2\\-9&0&9\end{vmatrix}$$
$$\xlongequal{c_1+c_3}\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-4&x+4&-2\\0&0&9\end{vmatrix}=9(x-4),$$

得 $x=4$. 再代入 $y=1+x$，得 $y=5$. 于是 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_3=5,\lambda_2=-4$.

再求正交阵 P.

对应于 $\lambda_1=\lambda_3=5$，解方程 $(A-5E)x=0$，由

$$A-5E=\begin{pmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $\xi_1=(1,0,-1)^T,\xi_3=(1,-2,0)^T$. 把它们正交化、单位化，得

$$p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},p_3=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix};$$

对应于 $\lambda_2=-4$ 解方程 $(A+4E)x=0$，由

$$A+4E=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}5&-2&-4\\18&0&-18\\-9&0&9\end{pmatrix}$$
$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_2=\frac{1}{3}(2,1,2)^T$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}$ 是正交阵,且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

注 (1) 在寻找 x,y 的关系式时,题解中用了 $\boldsymbol{A}$ 的对角元之和 $=\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元之和以及 $|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=0$,也可利用特征值的另一性质:$|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{A}$ 的特征值之积 $=\boldsymbol{\Lambda}$ 的特征值之积 $=|\boldsymbol{\Lambda}|$,得 $3x+8=4y$.但由 $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|=0$ 不能得到 x,y 的关系式,因 $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}|\equiv 0$.

(2) 因相似对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是给定的,所以要注意 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的排列与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元对应.

21. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$;对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_3=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异,故由定理 2,知向量组 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 线性无关,于是若记矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)$,则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵,且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(2,-2,1)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(2,-2,1)\boldsymbol{P}^{-1},$$

用初等行变换求得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -3\\ -4 & 5 & -3\\ -4 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$

22. 设 3 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$.对应 λ_1,λ_2 的特征向量依次为 $\boldsymbol{p}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 对称,由定理 5,有正交阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)$,使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,-1,0)$.显然 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2$ 可依次取为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 的单位化向量,即

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{q}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 正交,于是 $\boldsymbol{q}_3$ 可取为方程 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的单位解向量

由
$$\begin{pmatrix} p_1^{\mathrm{T}} \\ p_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
可知 $q_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$. 于是

$$\begin{aligned} A &= Q\,\mathrm{diag}(1,-1,0)Q^{\mathrm{T}} \qquad (5.3) \\ &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

23. 设 3 阶对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 与特征值 $\lambda_1 = 6$ 对应的特征向量为 $p_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, 求 A.

解一　用与前两题相同的方法, 这是求解本题及类似题型的基本方法.

(1) 求 A 的对应于特征值 3 的两个线性无关的特征向量 p_2, p_3. 由对称阵特征向量的性质知, p_1 与 p_2 和 p_3 都正交, 即有

$$\begin{cases} p_1^{\mathrm{T}} p_2 = 0, \\ p_1^{\mathrm{T}} p_3 = 0, \end{cases}$$

其系数矩阵 p_1^{T} 的秩等于 1. 于是, p_2, p_3 是它的一个基础解系, 取其为

$$p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2) 把向量组 p_2, p_3 用施密特方法正交化, 得

$$\bar{p}_2 = p_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{p}_3 = p_3 - \frac{[p_3, \bar{p}_2]}{[\bar{p}_2, \bar{p}_2]}\bar{p}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(3) 分别把向量 $p_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ 单位化, 得

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

令 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, 则 Q 为正交矩阵, 并有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(6,3,3),$$

于是 $\quad A = Q\operatorname{diag}(6,3,3)Q^{-1} = Q\operatorname{diag}(6,3,3)Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

解二 因 A 是对称阵，故存在正交阵 Q，使

$$Q^{\mathrm{T}}AQ = Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(6,3,3) = \Lambda,$$

也即

$$A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}, \tag{5.4}$$

并且，若 Q 按列分块为 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则向量 ξ_1 是对应于特征值 $\lambda_1=6$ 的单位特征向量. 于是，由题设

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}. \tag{5.5}$$

由(5.4)式得 $\quad A-3E = Q(\Lambda-3E)Q^{\mathrm{T}}$

$$= (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1^{\mathrm{T}} \\ \xi_2^{\mathrm{T}} \\ \xi_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = 3(\xi_1,\mathbf{0},\mathbf{0})\begin{pmatrix} \xi_1^{\mathrm{T}} \\ \xi_2^{\mathrm{T}} \\ \xi_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$= 3\xi_1\xi_1^{\mathrm{T}} \xlongequal[\text{代人}]{(5.5)\text{式}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

于是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

注 (1) 第 21、22、23 题都是矩阵对角化(特别是对称阵对角化)理论的应用. 比较三题所给条件：第 21 题知 3 个特征值及 3 个特征向量；第 22 题知 3 个特征值及 2 个特征向量，且知 A 对称；第 23 题知一个二重特征值和一个单重特征值及其特征向量，且知 A 对称. 由第 21 题的解法，再利用对称阵的特征向量正交性，便可得第 22、23 题的解法.

(2) 第 22 题求解中，在写出单位特征向量 q_1,q_2 后，由(5.3)式有

$$A = Q\operatorname{diag}(1,-1,0)Q^{\mathrm{T}}$$

$$= (q_1,q_2,q_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^{\mathrm{T}} \\ q_2^{\mathrm{T}} \\ q_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = q_1q_1^{\mathrm{T}} - q_2q_2^{\mathrm{T}},$$

由此可知对应 $\lambda_3=0$ 的特征向量 q_3 是不必具体求出的，因为这时 A 已由 q_1,q_2 确定了. 这是由 0 是 A 的特征值这一特殊情况所带来的方便之处. 由此启发出第 23 题的解二：把求矩阵 A 转换成求 $A-3E$，因为 0 是

征值.

24. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}, a_1\neq 0, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

解 (1) 首先证明 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵, 故 $\boldsymbol{A}$ 可以与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似. 显然 $R(\boldsymbol{A})=1$, 从而 $R(\boldsymbol{\Lambda})=1$, 于是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 只有一个非零对角元, 即 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值.

(2) 其次求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值. 因 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 的对角元之和为 $\sum a_i^2$, 又由特征值性质: $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值之和为它的 n 个对角元之和, 从而由上知 $\sum a_i^2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的(惟一的)非零特征值.

再求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(i) 对应于 $\lambda=0$, 解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2-a_2r_1\\ \cdots \\ r_n-a_nr_1}}{\overset{r_1\div a_1}{\sim}} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

得 $n-1$ 个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -\dfrac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} -\dfrac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n=\begin{pmatrix} -\dfrac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

(ii) 用两种方法求对应于 $\lambda_1=\sum a_i^2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1$.

方法一 由对称矩阵性质知 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 都正交, 即 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是满足 $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_k=0$ $(k=2,\cdots,n)$ 这 $n-1$ 个等式的非零向量. 另一方面, 因 $\boldsymbol{\xi}_k$ 是对应 0 特征值的特征向量, 故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_k=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\xi}_k=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_k)=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_k)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_k=0, k=2,\cdots,n,$$

最后一个式子的成立是因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. (事实上, 从(5.6)式也马上可看出这一点.) 这表明 $\boldsymbol{a}$ 具有 $\boldsymbol{\xi}_1$ 应有的性质, 故可取 $\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{a}$. 至此已求出 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量.

方法二 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a},$$

按定义，即知 A 有非零特征值 $\lambda_1=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$，且对应特征向量为 $\boldsymbol{a}$.

注 方法二事实上给出了求 A 的非零特征值的另一方法.

25. (1) 设 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$，求 $\varphi(A)=A^{10}-5A^9$；

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求 $\varphi(A)=A^{10}-6A^9+5A^8$.

解 (1) 由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-4=(1-\lambda)(5-\lambda)$，求得 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=5$.

对应 $\lambda_1=1$，解方程 $(A-E)x=0$，由

$$A-E=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_1=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$；

对应 $\lambda_2=5$，解方程 $(A-5E)x=0$，由

$$A-5E=\begin{pmatrix}-2&-2\\-2&-2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_2=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(p_1,p_2)=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，则 P 是正交阵，且有

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP&=P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\Rightarrow A=P\Lambda P^{\mathrm{T}}\\
&\Rightarrow\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{\mathrm{T}}\\
&=\frac12\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(1)&0\\0&\varphi(5)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\\
&=\frac12\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&\\&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&2\\1&2-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix}5-\lambda&1&2\\5-\lambda&2-\lambda&2\\5-\lambda&2&1-\lambda\end{vmatrix}\\
&=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2-\lambda&2\\1&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}(5-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1-\lambda&0\\0&1&-(1+\lambda)\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & -(1+\lambda)\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-5),$$
于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=5$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，由定理 5，存在正交阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(-1,1,5)=\boldsymbol{\Lambda},$$

也即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

并且 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是对应特征值 λ_i 的单位特征向量，$i=1,2,3$. 从而有

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{Q}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{Q}\varphi[\mathrm{diag}(-1,1,5)]\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{Q}\,\mathrm{diag}(\varphi(-1),\varphi(1),\varphi(5))\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}12&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\xi}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\\&=12\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}},\end{aligned}\tag{5.7}$$

其中 $\varphi(x)=x^{10}-6x^9+5x^8$, $\varphi(-1)=12,\varphi(1)=0,\varphi(5)=0$. 这样，只需计算出 $\boldsymbol{\xi}_1$，即对应 $\lambda_1=-1$ 的单位特征向量，代入上式即得 $\varphi(\boldsymbol{A})$.

解方程 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

代入(5.7)式，即求得

$$\varphi(\boldsymbol{A})=2\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}.$$

26. 用矩阵记号表示二次型：

(1) $f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$;

(2) $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$;

(3) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$.

解 (1) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$;

(2) $f=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$;

(3) $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

27. 写出下列二次型的矩阵：

(1) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$；　　(2) $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$.

解　(1) 记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\\ &=2x_1^2+x_2^2+x_1x_2+3x_2x_1=2x_1^2+x_2^2+4x_1x_2\\ &=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故 f 的矩阵为 $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$；

(2)与(1)相仿，

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix}\boldsymbol{x},$$

故 f 的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 7\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix}$.

28. 求一个正交变换化下列二次型成标准形：

(1) $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$；　(2) $f=x_1^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

解　(1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$，

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ \end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

对应特征值 $\lambda_1=1$,解方程$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\stackrel{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$;

对应特征值 $\lambda_2=2$,解方程$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\stackrel{r}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

对应特征值 $\lambda_3=5$,解方程$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,由

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\stackrel{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,再作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,

即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\quad 或\quad\begin{cases}x_1=y_2,\\x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\\x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3,\end{cases}$$

便把 f 化为标准形

$$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2;$$

(2) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$,它的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_1\div(1-\lambda)]{r_1+r_3}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-c_1}(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -\lambda & -2\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & -2\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

对应 $\lambda_1=2$,解方程 $(A-2E)x=0$,由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$;

对应 $\lambda_2=1$,解方程 $(A-E)x=0$,由

$$A-E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}$;

对应 $\lambda_3=-1$,解方程 $(A+E)x=0$,由

$$A+E=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$,则 P 为正交阵,再作正交变换 $x=Py$,

即
$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},$$

则化 f 为标准形:$f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

29. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-10yz=1$$

化成标准方程.

解 记二次曲面为 $f=1$,则 f 为二次型,它的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&5&-5\\-2&-5&5\end{pmatrix}.$$

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-5\\-2&-5&5-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_3\div(-\lambda)]{r_3+r_2}(-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-5\\0&1&1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2-c_3}(-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&4&-2\\2&10-\lambda&-5\\0&0&1\end{vmatrix}=(-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&4\\2&10-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-11)$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=11$.

对应于 $\lambda_1=0$,解方程 $Ax=0$,由

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\2&5&-5\\-2&-5&5\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3+r_2\\r_2-2r_1}}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&11&-11\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{T}$;

对应于特征值 $\lambda_2=2$,解方程 $(A-2E)x=0$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&3&-5\\-2&-5&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(4,-1,1)^{T}$;

对应于特征值 $\lambda_3=11$,解方程 $(A-11E)x=0$. 由

$$A-11E=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-6&-5\\-2&-5&-6\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&-6&-5\\0&-22&-22\\0&-11&-11\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得单位特征向量 $p_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^{T}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，并且正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=\frac{4}{3\sqrt{2}}v+\frac{1}{3}w, \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}u-\frac{1}{3\sqrt{2}}v+\frac{2}{3}w, \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}u+\frac{1}{3\sqrt{2}}v-\frac{2}{3}w \end{cases}$$

即为所求，在此变换下，二次曲面的方程化为标准方程 $2v^2+11w^2=1$（它是椭圆柱面）.

30. 证明二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

证 设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，由定理 6，知有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，使

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

又

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\|\boldsymbol{y}\|^2,$$

从而

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}f(\boldsymbol{x})=\max_{\|\boldsymbol{y}\|=1}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\max_{\sum y_i^2=1}(\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2)$$
$$\leqslant\lambda_1\max_{\sum y_i^2=1}\sum y_i^2=\lambda_1.$$

另一方面，取 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，即 $\boldsymbol{y}_0$ 为第 1 个分量是 1 的单位坐标向量，再作正交变换 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_0$，则 $\|\boldsymbol{x}_0\|=\|\boldsymbol{y}_0\|=1$，并且二次型 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的值为

$$f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}_0=\lambda_1.$$

综合以上知

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}f(\boldsymbol{x})=\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1.$$

31. 用配方法化下列二次型成规范形，并写出所用变换的矩阵：

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$；

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

解 (1) 由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2-4x_1x_3+3x_2^2+5x_3^2$$

$$
\begin{aligned}
&=(x_1+x_2-2x_3)^2-x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3+3x_2^2+5x_3^2\\
&=(x_1+x_2-2x_3)^2+2x_2^2+x_3^2+4x_2x_3\\
&=(x_1+x_2-2x_3)^2+2(x_2+x_3)^2-x_3^2,
\end{aligned}
$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-2x_3, \\ y_2=\sqrt{2}(x_2+x_3), \\ y_3=x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2+3y_3, \\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2-y_3, \\ x_3=y_3, \end{cases}$

写成矩阵形式：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，这里 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵. 在此变换下，f 化为规范形：

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

(2) 由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3\\
&=(x_1+x_3)^2+x_3^2+2x_2x_3\\
&=(x_1+x_3)^2-x_2^2+(x_2+x_3)^2,
\end{aligned}
$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_3, \\ y_2=x_2, \\ y_3=x_2+x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2-y_3, \\ x_2=y_2, \\ x_3=-y_2+y_3, \end{cases}$

写成矩阵形式：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，这里 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵. 在此变换下，f 化为规范形：

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=y_1^2-y_2^2+y_3^2.$$

(3) 由于 $f(x)$ 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，配方可得

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+4x_3^2-2x_2x_3\\
&=\left(\sqrt{2}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2+\frac{1}{2}x_2^2+2x_3^2-2x_2x_3+2x_3^2\\
&=\left(\sqrt{2}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2-\sqrt{2}x_3\right)^2+(\sqrt{2}x_3)^2
\end{aligned}
$$

令 $\begin{cases} y_1=\sqrt{2}x_1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2, \\ y_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_2-\sqrt{2}x_3, \\ y_3=\sqrt{2}x_3, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，这里 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，

且易求得

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是在变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 下，f 化为规范形：

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=y_1^2+y_2^2+y_3^2.$$

32．设 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，求 a．

解 根据定理 9（赫尔维茨定理），对 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行讨论，这里

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

于是，

$$\boldsymbol{A}\text{ 正定}\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}>0 \text{ 且 } |\boldsymbol{A}|>0.$$

由 $\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}>0\Rightarrow a^2<1$；由 $|\boldsymbol{A}|=-a(5a+4)>0\Rightarrow -\dfrac{4}{5}<a<0$．合起来，当 $-\dfrac{4}{5}<a<0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 正定，从而 f 正定．

33．判定下列二次型的正定性：

（1）$f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$；

（2）$f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$．

解 （1）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$，它的一阶主子式 $-2<0$；二阶主子式 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=11>0$；三阶主子式 $|\boldsymbol{A}|=-38<0$．由定理 9 知 f 为负定二次型．

（2）f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$，它的一阶主子式 $1>0$；二阶主子式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2>0$；三阶主子式 $|\boldsymbol{A}|=6>0$，由定理 9 知 f 为正定二次型．

34. 证明对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充要条件是：存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{E}$ 合同.

证　充分性：若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，任取 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，就有 $\boldsymbol{Ux}\neq\boldsymbol{0}$，并且 $\boldsymbol{A}$ 的二次型在该处的值

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ux}=[\boldsymbol{Ux},\boldsymbol{Ux}]=\|\boldsymbol{Ux}\|^2>0,$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型是正定的，从而由定义知 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

必要性：因 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，故存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 n 是 $\boldsymbol{A}$ 的阶数，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值. 因 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，故 $\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$. 记对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})$，则有

$$\boldsymbol{\Lambda}_1^2=\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})=\boldsymbol{\Lambda}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q\Lambda}_1)(\boldsymbol{Q\Lambda}_1)^{\mathrm{T}},$$

记 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{Q\Lambda}_1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{U}$ 可逆，并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.