第十二章

无穷级数

习题 12－1　常数项级数的概念和性质

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot 2n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

解　(1) $\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$.

(3) $\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots$.

(4) $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\frac{5!}{5^5}+\cdots$.

2. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

解　设级数的部分和为 s_n.

(1) 因为

$$s_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1,$$
$$\lim_{n\to\infty} s_n=\infty,$$

所以根据定义可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

再积分,得

$$xs(x)=-\int_0^x \ln(1-x)\,dx=(1-x)\ln(1-x)+x,$$

于是

$$s(x)=\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1,\quad x\in(-1,0)\cup(0,1).$$

由于幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛,故和函数分别在 $x=\pm1$ 处左连续与右连续,于是

$$s(1)=\lim_{x\to1^-}s(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1=1.$$

因此

$$s(x)=\begin{cases}1+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

10. 求下列数项级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}$.

解　(1) 利用 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x,x\in(-\infty,+\infty)$,取 $x=1$,有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=e$.

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2e.$$

注　本题也可通过先求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^{n-1}$ 的和函数 $s(x)$,再求出 $s(1)$,得到所求的数项级数的和.

(2) 因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sin x,\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$,故取 $x=1$,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\sin 1,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 1 + \sin 1).$$

注 本题也可通过先求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数 $s(x)$，再求出 $s(1)$，得到所求的数项级数的和.

11. 将下列函数展开成 x 的幂级数：

(1) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$； (2) $\frac{1}{(2-x)^2}$.

解 (1) 因

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

而

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad x\in[-1,1],$$

故

$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \int_0^x (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right]\mathrm{d}x$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}, \quad x\in[-1,1].$$

(2) 因

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)', \quad x\neq 2.$$

而

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n, \quad x\in(-2,2).$$

故

$$\frac{1}{(2-x)^2} = \left(\frac{1}{2-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right)' = \left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1}, \quad x\in(-2,2).$$

12. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\in[-\pi,0), \\ \mathrm{e}^x, & x\in[0,\pi). \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

解　$f(x)$ 满足收敛定理的条件,且除了 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 外处处连续.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi};$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\cos nx\Big|_0^{\pi}+n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi}+\frac{n}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\sin nx\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi}-n^2a_n,\end{aligned}$$

故

$$a_n=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}\quad(n=1,2,\cdots);$$

而

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}\mathrm{e}^x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\sin nx\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x\right)=-na_n\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

于是

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{n^2+1}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\pi}+1}{n^2+1}n\sin nx\right],$$
$$x\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbf{Z}\}.$$

13. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant h,\\0, & h<x\leqslant\pi\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

解　(1) 展开成正弦级数:

将 $f(x)$ 作奇延拓,得 $\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,\pi],\\0, & x=0,\\-f(-x), & x\in(-\pi,0),\end{cases}$ 再将 $\varphi(x)$ 作周期延拓,得 $\Phi(x)$,则 $\Phi(x)$ 满足收敛定理的条件,且在 $(0,\pi]$ 上 $\Phi(x)\equiv f(x)$,并有间断点 $x=0,x=h$.

$a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2(1-\cos nh)}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx,\quad x\in(0,h)\cup(h,\pi].$$

（2）展开成余弦级数：

将 $f(x)$ 作偶延拓，得 $\psi(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,\pi],\\ f(-x), & x\in(-\pi,0],\end{cases}$ 再将 $\psi(x)$ 作周期延拓得 $\Psi(x)$，则 $\Psi(x)$ 满足收敛定理的条件，在 $[0,\pi]$ 上 $\Psi(x)\equiv f(x)$，且有间断点 $x=h$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^h dx=\frac{2h}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^h\cos nx\,dx=\frac{2\sin nh}{n\pi}\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx,\quad x\in[0,h)\cup(h,\pi].$$