第七章

微分方程

习题 7-1　微分方程的基本概念

1. 试说出下列各微分方程的阶数：

(1) $x(y')^2-2yy'+x=0$；　　(2) $x^2y''-xy'+y=0$；

(3) $xy'''+2y''+x^2y=0$；　　(4) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$；

(5) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$；　　(6) $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

解　(1) 一阶；(2) 二阶；(3) 三阶；(4) 一阶；(5) 二阶；(6) 一阶.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

(1) $xy'=2y, y=5x^2$；

(2) $y''+y=0, y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-2y'+y=0, y=x^2e^x$；

(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0, y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$.

解　(1) 由 $y=5x^2$，得 $y'=10x$，$xy'=10x^2=2y$，故 $y=5x^2$ 是所给微分方程的解.

(2) 由 $y=3\sin x-4\cos x$，得 $y'=3\cos x+4\sin x$，进而得

$$y''=-3\sin x+4\cos x,$$

于是

$$y''+y=(-3\sin x+4\cos x)+(3\sin x-4\cos x)=0,$$

故 $y=3\sin x-4\cos x$ 是所给微分方程的解.

(3) 由 $y=x^2e^x$，得 $y'=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$，进而得

$$y''=(2+2x)e^x+(2x+x^2)e^x=(2+4x+x^2)e^x,$$

于是

$$y''-2y'+y=[(2+4x+x^2)-2(2x+x^2)+x^2]e^x=2e^x\neq0,$$

故 $y=x^2e^x$ 不是所给微分方程的解.

(4) 由 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$，得 $y'=\lambda_1C_1e^{\lambda_1x}+\lambda_2C_2e^{\lambda_2x}$，进而得

$$y''=\lambda_1^2C_1e^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2e^{\lambda_2x},$$

于是

$$\begin{aligned}&y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y\\=&\lambda_1^2C_1e^{\lambda_1x}+\lambda_2^2C_2e^{\lambda_2x}-\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)C_1e^{\lambda_1x}-\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)C_2e^{\lambda_2x}+\\&\lambda_1\lambda_2C_1e^{\lambda_1x}+\lambda_1\lambda_2C_2e^{\lambda_2x}=0,\end{aligned}$$

即

$$(D^3+3D^2+2D)x=-e^t. \qquad ③$$

方程③对应齐次方程的特征方程为 $r(r^2+3r+2)=0$,有根 $r_1=0, r_2=-1, r_3=-2$. 而 $f(t)=-e^t$, $\lambda=1$ 不是特征方程的根,故令 $x^*=Ae^t$ 是方程③的特解,代入③中并消去 e^t,可得 $A=-\frac{1}{6}$,即 $x^*=-\frac{1}{6}e^t$,于是方程③的通解为

$$x=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}-\frac{1}{6}e^t.$$

又由方程①得

$$\begin{aligned}(D+1)y&=-(D+1)^2x=-D^2x-2Dx-x\\&=-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t,\end{aligned}$$

即 $y'+y=-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t$,可解得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int dt}\left[\int\left(-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\right)e^{\int dt}dt+C_4\right]\\&=e^{-t}\left[\int\left(-C_1e^t-C_3e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}\right)dt+C_4\right]\\&=-C_1+C_3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t+C_4e^{-t}.\end{aligned}$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}-\frac{1}{6}e^t,\\ y=C_4e^{-t}-C_1+C_3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t.\end{cases}$$