第四章

向量组的线性相关性

习 题 解 答

1. 已知向量组

$$A: \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}; \quad B: \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}4\\4\\1\\3\end{pmatrix},$$

证明 B 组能由 A 组线性表示,但 A 组不能由 B 组线性表示.

证 因 B 组能由 A 组线性表示$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})$;

A 组不能由 B 组线性表示$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})>R(\boldsymbol{B})$;

于是,B 组能由 A 组线性表示且 A 组不能由 B 组线性表示$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})>R(\boldsymbol{B})$.具体计算如下:

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}2&0&4&0&3&2\\1&-2&4&1&0&3\\1&1&1&2&1&0\\2&1&3&3&2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&2&1&0\\0&1&-1&1&0&-1\\0&0&0&-2&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是 $R(\boldsymbol{B})=2,R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=3$,并且上式右端矩阵的后三列所构成矩阵与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 行等价,继续对它作初等行变换,得

$$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=3$.合起来有 $R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})=3>R(\boldsymbol{B})=2$.

2. 已知向量组

$$A:\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\quad B:\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

证明 A 组与 B 组等价.

证 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$.因 A 组与 B 组等价$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$(或 $R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$),故求矩阵$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$的行阶梯形以计算 3 个矩阵的秩.由

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}-1&1&3&0&1\\0&2&2&1&1\\1&1&-1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&0\\0&2&2&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即知 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})=2$,且 $R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.又 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 不成比例,故 $R(\boldsymbol{A})=2$.因此,向量组 A 与 B 等价.

3. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

(1) $\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

解 记(1)、(2)中向量所构成的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 由 $\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}-1&2&1\\3&1&4\\1&0&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow R(\boldsymbol{A})<3=$ 向量的个数

$\Rightarrow$ 向量组(1)线性相关（由定理 4）；

(2) 由 $\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&4&0\\0&0&2\end{vmatrix}=22\neq 0\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=3=$ 向量的个数

$\Rightarrow$ 向量组(2)线性无关（由定理 4）.

4. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关？

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}.$$

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$，则

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}a&1&1\\a+1&a+1&0\\1&-1&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-c_2}\begin{vmatrix}a-1&1&1\\0&a+1&0\\2&-1&a\end{vmatrix}=(a+1)^2(a-2).$$

于是当 $a=-1$ 或 $a=2$ 时 $\det\boldsymbol{A}=0$，即 $R(\boldsymbol{A})<3$．由定理 4 知此时向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 线性相关.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，这里 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为 n 维列向量．证明(1) $R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；(2) 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 线性相关时，$R(\boldsymbol{A})\leqslant 1$

证 (1) 由矩阵秩的性质

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{a})+R(\boldsymbol{b})\leqslant 1+1=2$；

(2) 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 线性相关时，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为零向量，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，结论成立；若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不全为零向量，不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，因此时 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 成比例，有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$（$\lambda$ 可能为 0），于是 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=(1+\lambda^2)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$，从而有

$$R(\boldsymbol{A})=R((1+\lambda^2)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{a})=1.$$

6. 设 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关，求向量 $\boldsymbol{b}$ 用 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$ 线性表示的表示式.

解一 因 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关，故存在不全为零的常数 k_1，k_2，使

$$k_1(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})+k_2(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow(k_1+k_2)\boldsymbol{b}=-k_1\boldsymbol{a}_1-k_2\boldsymbol{a}_2.$$

因 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关,可知 $k_1+k_2\neq 0$.不然,由上式得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow k_1=k_2=0,$$

这与 k_1,k_2 不全为零矛盾.于是由(4.3)式,得

$$\boldsymbol{b}=-\frac{k_1}{k_1+k_2}\boldsymbol{a}_1-\frac{k_2}{k_1+k_2}\boldsymbol{a}_2,k_1,k_2\in\mathbb{R},k_1+k_2\neq 0.$$

解二 因 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关,故 $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}),\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关,即 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 线性相关.又因 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{0}$,于是存在 λ 使

$$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)\Rightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}_1-(\lambda+1)\boldsymbol{a}_2,\lambda\in\mathbb{R}.$$

这与解一的结果相同.事实上在解一中,若记 $\lambda=-\dfrac{k_1}{k_1+k_2}$,则 $\dfrac{k_2}{k_1+k_2}=\lambda+1$.

注 $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$ 可能为零向量.

7. 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性相关,$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 也线性相关,问 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 是否一定线性相关?试举例说明之.

解 向量组 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ 不一定线性相关.例如令

$$\text{向量组 I}:\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\quad \text{向量组 II}:\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

则这两向量组均线性相关,但向量组 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$线性无关.

8. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,则 $\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

成立,则 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 全为零时,等式

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

才能成立,则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关,$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ 亦线性相关,则有不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0},\quad\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$$

同时成立.

答 命题(1)是错误的,例如:取向量 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,则向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性相关,因它含有零向量,但 $\boldsymbol{a}_1$ 并不能由 $\boldsymbol{a}_2$ 线性表示.

注 向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量能由其余向量线性表示，但并不指明是哪一个向量，更不是说任一个向量可由其余向量线性表示．

命题(2)是错误的，例如：取 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$；再取 $\lambda_1=\lambda_2=1$，则有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$$

成立，但 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 也线性无关．

注 关系式 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0}$ (λ_i 不全为 0)只能说明向量组 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m$ 线性相关．

命题(3)是错误的，例如：取 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，此时若有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2=\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_2\\\lambda_1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

成立，只有 $\lambda_1=\lambda_2=0$，但向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 都线性相关．

注 题设条件只能说明 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m$ 线性无关．

命题(4)是错误的，例如：取 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，则向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 均线性相关．但对此两向量组不存在不全为零的数 λ_1,λ_2，使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0},\quad \lambda_1\boldsymbol{b}_1+\lambda_2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$$

同时成立，因由上面第一式可得

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}\lambda_2\\0\end{pmatrix},$$

于是，$\lambda_2=0$，同理由第二式得 $\lambda_1=0$．

注 题设条件是说齐次方程 $(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 及 $(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 都有非零解，而结论则是说这两个齐次方程有公共的非零解．

9．设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{b}_4=\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$，证明向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 线性相关．

证一 $\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3-\boldsymbol{b}_4$

$$=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)-(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+(\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4)-(\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{0},$$

由定义，知向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 线性相关．

证二 两向量组线性表示的矩阵形式为

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)\boldsymbol{K},$$

其中 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$.

因 $\qquad \det\boldsymbol{K}=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}}1-1=0$,故 $R(\boldsymbol{K})<4$.

由矩阵秩的性质⑦知

$$R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4)\leqslant R(\boldsymbol{K})<4,$$

由定理 4,向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 线性相关.

注 从证明可见,不管 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 是否线性相关,$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_4$ 总是线性相关的.

10. 设 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_r$,且向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关,证明向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

证 先把 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性表示的关系式写成矩阵形式:

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\&\ddots&\vdots\\0&&1\end{pmatrix}\xlongequal{\triangle}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)\boldsymbol{K}.$$

因 $\det\boldsymbol{K}=1$,故 $\boldsymbol{K}$ 是可逆矩阵,由矩阵秩的性质④,知

$$R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r).$$

又因 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关,由定理 4 知 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r)=r$,从而有 $R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r)=r$.再次应用定理 4 知向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 线性无关.

11. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关,判断向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 的线性相关性:

(1) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=5\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2$;

(2) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3$;

(3) $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$.

解 (1) $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&0&5\\1&2&3\\0&3&0\end{pmatrix}$, 而 $\begin{vmatrix}1&0&5\\1&2&3\\0&3&0\end{vmatrix}=6\neq0$,

于是 $R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=3$,$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性无关;

(2) $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, 而 $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq0$

于是，与(1)同理，b_1,b_2,b_3 线性无关；

(3) $(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，而 $\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0$，

于是，$R(b_1,b_2,b_3)\leqslant 2$，$b_1,b_2,b_3$ 线性相关.

注 本习题针对教材例 6. 尽管也可用其他方法求解，但无疑证三是最方便的，其好处在于可程式化处理这类问题.

12. 设向量组 $B:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 能由向量组 $A:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为

$$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K,$$

其中 K 为 $s\times r$ 矩阵，且 A 组线性无关. 证明 B 组线性无关的充要条件是矩阵 K 的秩 $R(K)=r$.

证一 记 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_s)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_r)$，则有

$$B=AK. \tag{4.4}$$

必要性：设向量组 B 线性无关，知 $R(B)=r$. 又由 $B=AK$，知 $R(K)\geqslant R(B)$. 但 K 含 r 列，有 $R(K)\leqslant r$，于是

$$r=R(B)\leqslant R(K)\leqslant r, \text{即 } R(K)=r, K \text{ 为列满秩矩阵.}$$

充分性：设 $R(K)=r$. 要证 B 组线性无关. 由于

$$\begin{aligned}Bx=0&\Leftrightarrow AKx=0\\&\Rightarrow Kx=0\ (\text{因 } R(A)=s,\text{根据上章定理 4})\\&\Rightarrow x=0\ (\text{因 } R(K)=r,\text{根据上章定理 4}),\end{aligned}$$

因此，向量组 B 线性无关.

证二 由(4.4)式，因 $R(A)=s$，A 为列满秩矩阵，根据上章例 9 知 $R(B)=R(K)$. 于是

$$B \text{ 组线性无关}\Leftrightarrow R(B)=r\Leftrightarrow R(K)=r.$$

13. 求下列向量组的秩，并求一个最大无关组：

(1) $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}9\\100\\10\\4\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\\-8\end{pmatrix}$；

(2) $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\-6\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix}$.

解 (1) 对(a_1,a_2,a_3)作初等行变换，求它的行阶梯形：

$$(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&9&-2\\2&100&-4\\-1&10&2\\4&4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_4-4r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&9&-2\\0&82&0\\0&19&0\\0&-32&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&9&-2\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

由此可知 $R(a_1,a_2,a_3)=2$，并且 a_1,a_2 是它的一个最大无关组；

(2) $$(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\\3&-6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&-9&-5\\0&-18&-10\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&9&5\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可知 $R(a_1,a_2,a_3)=2$，并且 a_1,a_2 是它的一个最大无关组.

14. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用最大无关组线性表示：

(1) $\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$.

解 (1) 记 $A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$，因

$$A=\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_2\\r_2-3r_1}]{r_4-r_1}\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&1&3&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_3]{r_4-r_2}\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-17r_3}\begin{pmatrix}25&31&0&9\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-31r_2}\begin{pmatrix}25&0&0&40\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\div 25}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{8}{5}\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

从 A 的行最简形可知：a_1,a_2,a_3 是 A 的列向量组的一个最大无关组，且

$$\boldsymbol{a}_4=\frac{8}{5}\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3;$$

(2) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_3-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_4\div(-2)\\r_3\leftrightarrow r_4}}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&0&4&-1\\0&2&0&6&-2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_1-r_2}{\overset{r_2\div 2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

从 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形可知：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关线，且

$$\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{a}_5=-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3.$$

15. 设向量组

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

的秩为 2，求 a,b.

解　对含参数 a 和 b 的矩阵 $(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ 作初等行变换，以求其行阶梯形.

$$(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&3&3&b\\1&1&1&3\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&a&2\\0&-1&3-2a&b-4\\0&-1&1-a&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&a&2\\0&-1&3-2a&b-4\\0&0&a-2&5-b\end{pmatrix},$$

于是
$$R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)=2$$
$$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=2\Leftrightarrow a=2 \text{ 且 } b=5.$$

注　把含参数的列放在不含参数的列后面，常可简化计算.

16. 设向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2;B:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3;C:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4$ 的秩为 $R_A=R_B=2$,

$R_C=3$,求向量组 $D:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,2\boldsymbol{a}_3-3\boldsymbol{a}_4$ 的秩.

解 $\left.\begin{array}{l}R_A=2\Rightarrow \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2 \text{ 线性无关}\\ R_B=2\Rightarrow \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3 \text{ 线性相关}\end{array}\right\}$

$\xrightarrow{\text{由定理}5(3)}$ $\boldsymbol{a}_3$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$(惟一地)线性表示为 $\boldsymbol{a}_3=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2$;将此结果代入向量组 D 得

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,2\boldsymbol{a}_3-3\boldsymbol{a}_4)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,2k_1\boldsymbol{a}_1+2k_2\boldsymbol{a}_2-3\boldsymbol{a}_4)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4)\begin{pmatrix}1&0&2k_1\\0&1&2k_2\\0&0&-3\end{pmatrix},$$

因 $\begin{vmatrix}1&0&2k_1\\0&1&2k_2\\0&0&-3\end{vmatrix}=-3\neq 0$,故 $R_D=R_C=3$.

17. 设有 n 维向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,证明它们线性无关的充要条件是:任一 n 维向量都可由它们线性表示.

证一 必要性:任给 n 维向量 $\boldsymbol{b}$,则 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}$ 线性相关(因它所含向量个数大于向量的维数).又因 $\boldsymbol{A}$ 组线性无关,由定理 5(3),可知向量 $\boldsymbol{b}$ 必可由 $\boldsymbol{A}$ 组(惟一地)线性表示.

充分性:设任一 n 维向量能由 A 组线性表示,特别,n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 能由 A 组线性表示.

于是有
$$n=R(\boldsymbol{E})\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant n$$
$$\Rightarrow R(\boldsymbol{A})=n\xrightarrow{\text{由定理}4} A\text{ 组线性无关}.$$

证二 设 A_0 是 A 的一个最大无关组,则有

A 组线性无关$\Leftrightarrow A_0$ 组即为 A 组$\Leftrightarrow A_0$ 组含 n 个向量

$\Leftrightarrow A_0$ 组为 $\mathbb{R}^n$ 的一个最大无关组

$\Leftrightarrow$任一 n 维向量可由 A_0 组线性表示

$\Leftrightarrow$任一 n 维向量可由 A 组线性表示(因 A_0 组与 A 组等价).

注 证一主要依据教材第二节内容,而证二则依据第三节内容,它借助最大无关组作为过渡,使证明显得相当简洁.读者应对每一步的充分必要推理问个为什么.

18. 设向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,且 $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$,证明存在某个向量 $\boldsymbol{a}_k(2\leqslant k\leqslant m)$,使 $\boldsymbol{a}_k$ 能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1}$ 线性表示.

证一 因为向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,由定义知,存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}. \tag{4.5}$$

按足标从大到小考察上式中系数 λ_i. 设其第一个不为零的数为 λ_k, 也即 $\lambda_k\neq 0$, 但 $\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_m=0$. 此足标 $k\geqslant 2$. 如若不然, 该式成为 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{0}$. 由 $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{0}$ 知 $\lambda_1=0$, 此与这些系数不全为零矛盾. 这时(4.5)式成为

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}, \text{且 } \lambda_k\neq 0, k\geqslant 2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}_k=-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\boldsymbol{a}_1-\cdots-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\boldsymbol{a}_{k-1},$$

于是上述向量 $\boldsymbol{a}_k$ 即满足要求.

证二 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$. 由题设, $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关, 故 $R(\boldsymbol{A})<m$. 设 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形, 则 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 中一定存在不含首非零元的列 $\widetilde{\boldsymbol{a}}_k$. 注意到 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的第 1 列含首非零元, 故 $k\geqslant 2$. 因 $\widetilde{\boldsymbol{a}}_k$ 能由 $\widetilde{\boldsymbol{a}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{a}}_{k-1}$ 线性表示, 故 $\boldsymbol{A}$ 中对应的 $\boldsymbol{a}_k$ 也能由 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{k-1}$ 线性表示.

19. 设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1= \quad\quad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+ \quad\quad \boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\end{cases}$$

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

证 列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 依次构成矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 于是有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}, \tag{4.6}$$

其中系数矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$,

其行列式 $|\boldsymbol{K}|=(n-1)(-1)^{n-1}\neq 0$ $(n\geqslant 2)$(见第 1 章习题 8(2)), 故 $\boldsymbol{K}$ 可逆. 由(4.6)式即得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^{-1}$, 此表明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示(其表示的系数矩阵为 $\boldsymbol{K}^{-1}$), 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

注 当 $|\boldsymbol{K}|=0$ 时, 不能得出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 不等价的结论.

20. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$, 且向量组 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关.

(1) 记 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, 求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$;

(2) 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解 (1) 因矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量组线性无关, 故 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. 本题的困难在于没有具体给出 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的元素, 而仅是它们之间的一些关系式. 下面就利用这些关系式来计算 $\boldsymbol{B}$.

$$AP=A(x,y,z)=(Ax,Ay,Az).$$

因 $Ax=y, Ay=z, Az=A^3x=3Ax-A^2x=3y-z$，故

$$\begin{aligned}AP&=(y,z,3y-z)\\&=(x,y,z)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

于是
$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

(其实矩阵 B 就是向量组 Ax, Ay, Az 由向量组 x, y, z 线性表示的系数矩阵).

(2) 由 $B=P^{-1}AP$，两边取行列式，便有 $|A|=|B|=0$.

21. 求下列齐次线性方程组的基础解系：

(1) $\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0,\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0,\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0,\\3x_1+5x_2+4x_3-2x_4=0,\\8x_1+7x_2+6x_3-3x_4=0;\end{cases}$

(3) $nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n=0$.

解 (1)

$$A=\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\2&4&5&-1\\3&8&6&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\0&20&-15&-5\\0&32&-24&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+8r_2]{r_2\div(-5)}\begin{pmatrix}1&-8&10&2\\0&-4&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&-4&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可知原方程的同解方程为

$$\begin{cases}x_1+4x_3=0,\\-4x_2+3x_3+x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-4x_3,\\x_4=4x_2-3x_3.\end{cases}$$

分别取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$.

(2) $$A=\begin{pmatrix}2&-3&-2&1\\3&5&4&-2\\8&7&6&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}2&-3&-2&1\\7&-1&0&0\\14&-2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+3r_2\\ r_3+2r_2}]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}-19&0&-2&1\\-7&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可得同解方程

$$\begin{cases}-19x_1-2x_3+x_4=0,\\-7x_1+x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=7x_1,\\x_4=19x_1+2x_3.\end{cases}$$

分别取$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\7\\0\\19\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$.

注 解本题时，矩阵的初等行变换与第 3 章中的比较，已有了一些变化，要求概念掌握得更加清晰，初等变换运用得更加娴熟.

(3) $\boldsymbol{A}=(n,n-1,\cdots,1)$，可见 $R(\boldsymbol{A})=1$，从而有 $n-R(\boldsymbol{A})=n-1$ 个线性无关的解构成此方程的基础解系，并且由

$$x_n=-nx_1-(n-1)x_2\cdots-2x_{n-1},$$

分别取

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

代入上式就得到基础解系：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\-n\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\-(n-1)\end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

22. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}$，求一个 4×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $R(\boldsymbol{B})=2$.

解 设 $\boldsymbol{B}$ 按列分块为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$，先分析 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 具有的性质. 因 $R(\boldsymbol{B})=2$，故 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 线性无关.

又因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})\Rightarrow\boldsymbol{Ab}_1=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{Ab}_2=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解；并且这方程的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=2$. 于是可知 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 还是它的一个基础解系.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\-5&1&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}-8&0&1&-1\\-5&1&0&-2\end{pmatrix}$$

得
$$\begin{cases} x_2 = 5x_1 + 2x_4, \\ x_3 = 8x_1 + x_4, \end{cases}$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得此方程的一个基础解系为

$$\boldsymbol{b}_1 = (1,5,8,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b}_2 = (0,2,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

于是，令 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

就满足题目的要求.

23. 求一个齐次线性方程，使它的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (0,1,2,3)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = (3,2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

解 设所求齐次线性方程为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}.$$

首先考虑此方程有多少个未知数？有多少个方程？因 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是 4 维的，故方程有 4 个未知数，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 4. 另一方面，因基础解系含 2 个向量，故由定理 7 知 $R(\boldsymbol{A}) = 4 - 2 = 2$，因此方程的个数 $\geqslant 2$ 个. 这样，我们只需构造一个满足题设要求而行数最少的矩阵，也即 $\boldsymbol{A}$ 取为 2×4 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A}) = 2$.

记 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$，那么

$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系

$\Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，且 $R(\boldsymbol{A}) = 2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$，且 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = 2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的两个列向量是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系（因 $R(\boldsymbol{B}) = 2$）.

由 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{r}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$，

得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = (2,-3,0,1)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 可取为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

对应齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\2x_1-3x_2+x_4=0.\end{cases}$$

24. 设四元齐次线性方程组

$$\mathrm{I}:\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0;\end{cases}\qquad \mathrm{II}:\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2-x_3+x_4=0,\end{cases}$$

求(1) 方程组Ⅰ与Ⅱ的基础解系;(2) Ⅰ与Ⅱ的公共解.

解 (1) 求方程组Ⅰ的基础解系:系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix},$$

其基础解系可取为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}};$$

求方程组Ⅱ的基础解系:系数矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$,故可取其基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 为Ⅰ与Ⅱ的公共解,下面用两种方法求 $\boldsymbol{x}$ 的一般表达式.

方法一 $\boldsymbol{x}$ 是Ⅰ与Ⅱ的公共解$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}$ 是方程组Ⅲ的解,这里方程组Ⅲ为Ⅰ与Ⅱ合起来的方程组,即

$$\mathrm{III}:\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0,\\x_1-x_2+x_3=0,\\x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$$

其系数矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

取其基础解系为$(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$,于是Ⅰ与Ⅱ的公共解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{R}.$$

方法二 以Ⅰ的通解 $\boldsymbol{x}=(-c_1,c_1,c_2,c_1)^{\mathrm{T}}$代入Ⅱ得

$$\begin{cases}-c_1-c_1+c_2=0,\\ c_1-c_2+c_1=0\end{cases} \Rightarrow \quad c_2=2c_1.$$

这表明Ⅰ的解中所有形如$(-c_1,c_1,2c_1,c_1)^{\mathrm{T}}$的解也是Ⅱ的解,从而是Ⅰ和Ⅱ的公共解.于是Ⅰ和Ⅱ的公共解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{R}.$$

25. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,证明

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$$

提示:利用矩阵秩的性质⑥和⑧.

证

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\\ &\Rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}\\ &\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n \quad (\text{矩阵秩的性质⑧}).\end{aligned}$$

另一方面,由矩阵秩的性质⑥,知

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}))=R(\boldsymbol{E})=n,$$

因 $R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$,故由以上两个不等式知,$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

26. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶($n\geqslant2$)矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,证明

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n,\text{当 } R(\boldsymbol{A})=n,\\ 1,\text{当 } R(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0,\text{当 } R(\boldsymbol{A})\leqslant n-2.\end{cases}$$

证 (1) 当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时,$|\boldsymbol{A}|\neq0$.由公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,得

$$n=R(\boldsymbol{E})=R(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})\leqslant R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n,$$

从而

$$R(\boldsymbol{A}^*)=n;$$

注 这里也可引用习题二题24的结论.

(2) 当 $R(\boldsymbol{A})\leqslant n-2$ 时,由矩阵秩的定义知 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式亦即 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素均为零,即 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$,从而 $R(\boldsymbol{A}^*)=0$;

(3) 当 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 时,由矩阵秩的定义,$\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不为零,也即 $\boldsymbol{A}^*$ 中至少有一个元素不为零,故 $R(\boldsymbol{A}^*)\geqslant1$.

另一方面,因 $R(\boldsymbol{A})=n-1$,有$|\boldsymbol{A}|=0$.由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}.$$

由矩阵秩的性质⑧得

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant n,$$

把 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 代入上式，得 $R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$.综合以上两个关于 $R(\boldsymbol{A}^*)$的不等式，便有 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$.

注 本题的结论很有用，值得记取.

27. 求下列非齐次线性方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系：

(1) $\begin{cases} x_1+x_2=5, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=1, \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11, \\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6. \end{cases}$

解 (1) 增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{r_3-5r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1-r_2 \\ r_3+2r_2}}{\overset{r_2\times(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_1-2r_3 \\ r_2+2r_3}}{\overset{r_3\div(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

据此，得原方程组的同解方程

$$\begin{cases} x_1=-x_3-8, \\ x_2=x_3+13, \\ x_4=2. \end{cases}$$

取 $x_3=0$ 得特解 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$；取 $x_3=1$ 得对应齐次方程基础解系 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) 增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-5r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & -56 \\ 0 & 14 & -2 & 7 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1-2r_2 \\ r_3+2r_2}}{\overset{r_2\div(-4)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & -7 & 1 & -\frac{7}{2} & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+9x_2+4x_4=-17,\\ -7x_2+x_3-\dfrac{7}{2}x_4=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-9x_2-4x_4-17,\\ x_3=7x_2+\dfrac{7}{2}x_4+14.\end{cases}$$

令 $x_2=x_4=0$ 得特解 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-17\\0\\14\\0\end{pmatrix}$,分别令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,得对应齐次方程的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\\frac{7}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

28. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3,已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量,且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},$$

求该方程组的通解.

解 记该非齐次方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,对应齐次方程为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$. 因 $R(\boldsymbol{A})=3$,由定理 7 知此齐次方程的基础解系由 1 个非零解构成,也即它的任一非零解都是它的基础解系. 另一方面,记向量 $\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\xi}&=\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)\\&=2\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2-\boldsymbol{A\eta}_3=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

且直接计算得 $\boldsymbol{\xi}=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$. 这样,$\boldsymbol{\xi}$ 就是它的一个基础解系. 根据非齐次方程组解的结构知,原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_1=k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{R}.$$

29. 设有向量组 $A:\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\alpha\\2\\10\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ 及向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix}$,问 α,β 为何值时

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示;

(2) 向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示,且表示式惟一;

（3）向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式不惟一，并求一般表示式.

解 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$，那么方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{4.7}$$

有解$\Leftrightarrow\boldsymbol{b}$ 可由向量组 A 线性表示，因而本题可以归结为含参数的非齐次线性方程的求解(可参看第 3 章相关习题).

（1）当方程(4.7)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}\neq 0, \quad 即\ \alpha\neq -4\ 时,$$

方程(4.7)有惟一解，从而向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 A 组线性表示，且表示式惟一；

（2）当 $\alpha=-4$ 时，增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-5r_1}]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & -1 & -1-5\beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta \end{pmatrix},$$

于是当 $\beta\neq 0$ 时，方程(4.7)无解，从而向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由 A 组线性表示；

（3）当 $\alpha=-4,\beta=0$时，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2<3$，方程(4.7)有无限多解，从而向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 A 组线性表示，且表示式不惟一.

因方程(4.7)的通解为

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ -(2c+1) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

故 $\boldsymbol{b}$ 由向量组 A 线性表示的一般表示式为

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} c \\ -(2c+1) \\ 1 \end{pmatrix}=c\boldsymbol{a}_1-(2c+1)\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3, \quad c\in\mathbb{R}.$$

30. 设

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\quad(a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3),$$

证明三直线$\begin{cases}l_1:a_1x+b_1y+c_1=0,\\l_2:a_2x+b_2y+c_2=0,\\l_3:a_3x+b_3y+c_3=0\end{cases}$相交于一点的充要条件为向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性无关,且向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关.

证 三直线 l_1,l_2,l_3 相交于一点

$\Leftrightarrow$非齐次方程$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\boldsymbol{c}$ 有惟一解

$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=2$

$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性无关,且向量组 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关.

31. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$,其中 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$. 向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$,求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解 显然这是一个四元方程.先决定系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.因 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关,故 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 3$.又

$\boldsymbol{a}_1$ 能由 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示

$\Rightarrow\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性相关

$\Rightarrow\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性相关(部分相关则整体相关)

$\Rightarrow R(\boldsymbol{A})\leqslant 3$.

综合上面两个不等式,有 $R(\boldsymbol{A})=3$,从而对应齐次方程的基础解系所含向量个数为 $4-3=1$.进一步,

$\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3\Leftrightarrow\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解

$\Rightarrow\boldsymbol{x}=(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是它的基础解系,

又 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,

于是由非齐次线性方程解的结构,原方程的通解为

$$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},c\in\mathbb{R}.$$

32. 设 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应

的齐次线性方程组的一个基础解系，证明

(1) $\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关；(2) $\boldsymbol{\eta}^*,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r}$线性无关.

证 (1) 设有关系式

$$k_0\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=\mathbf{0}, \tag{4.8}$$

用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式两边，并注意题设条件，得

$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=\boldsymbol{A}(k_0\boldsymbol{\eta}^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})\\&=k_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{A}\xi_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A}\xi_{n-r}=k_0\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

但 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，由上式知 $k_0=0$，于是，(4.8)式成为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=\mathbf{0}.$$

因向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是对应齐次方程的基础解系，从而线性无关，于是 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，由定义知 $\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关.

(2) 设有关系式

$$\lambda_0\boldsymbol{\eta}^*+\lambda_1(\boldsymbol{\eta}^*+\xi_1)+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\eta}^*+\xi_{n-r})=\mathbf{0},$$

也即 $$(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}^*+\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}=\mathbf{0}.$$

由(1)，向量组 $\boldsymbol{\eta}^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关，故 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-r}=0$ 并且 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=0$，于是 λ_0 也等于 0，故所给向量组线性无关.

注 显然，因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}^*+\xi_i)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{A}\xi_i=\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{\eta}^*+\xi_i$ 是原方程组的解. 于是本题的意义在于：若有解的非齐次线性方程的系数矩阵的秩为 r，则它有 $n-r+1$个线性无关的解. 而习题 34 则进一步揭示它恰好有 $n-r+1$ 个线性无关的解，并且它的任一解都可由它们线性表示.

33. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 s 个解，$k_1,\cdots,k_s$ 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$. 证明 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是它的解.

证 因 $$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}&=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)\\&=k_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+k_s(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_s)\\&=k_1\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}+\cdots+k_s\boldsymbol{b}=(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

34. 设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为r，向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关的解(见 32 题之注). 试证它的任一解可表示为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\quad(\text{其中 } k_1+\cdots+k_{n-r+1}=1).$$

证 首先，由 33 题可知，上式向量 $\boldsymbol{x}$ 是方程的解.

其次，设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是方程的任一解，记向量 $\xi_i=\boldsymbol{\eta}_i-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$，$i=1,2,\cdots,n-r$，则 ξ_i 是对应齐次方程的解，且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关(其理由与习题 32 的证明完全类似，可作为练习)，于是它就是对应齐次方程的一个基础解系. 進而$\boldsymbol{\beta}$

就可由它以及$\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$线性表示，即存在数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-r}$，使

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\ &=\lambda_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})+\cdots+\lambda_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_{n-r}-\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})+\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\ &=\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+(1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r})\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}\\ &=\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+\lambda_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+\lambda_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},\end{aligned}$$

上式中，$\lambda_{n-r+1}\xlongequal{\triangle}1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r}$，即$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-r+1}=1$.

注 此题事实上给出了非齐次线性方程组的通解的另一表达式.

35. 设$V_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}满足\ x_1+\cdots+x_n=0\}$,

$V_2=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}满足\ x_1+\cdots+x_n=1\}$,

问V_1,V_2是不是向量空间？为什么？

解 (1) V_1是向量空间，理由是

(i) V_1非空：$(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in V_1$;

(ii) V_1对于向量的加法和数乘封闭.事实上，

$$\forall\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,$$

则有$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}},\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)^{\mathrm{T}}$.

因
$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)=\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{k=1}^{n}y_k=0+0=0,$$
$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k)=\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k=\lambda\cdot 0=0,$$
故
$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_1,\qquad \lambda\boldsymbol{x}\in V_1.$$

(2) V_2不是向量空间.事实上，取

$$\boldsymbol{a}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{b}=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in V_2,$$

那么$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\overline{\in} V_2$，即$V_2$对向量加法不封闭.

36. 由$\boldsymbol{a}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$所生成的向量空间记作$L_1$，由$\boldsymbol{b}_1=(2,-1,3,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}_2=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$所生成的向量空间记作$L_2$，试证$L_1=L_2$.

证 因对应分量不成比例，故$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$线性无关，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$也线性无关.又因

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&-1&1\\0&1&3&-1\\0&1&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\r_4+r_2}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-3&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是$R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=2$，由定理2的推论，向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$与$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$等价，从而

$$L_1 = L_2.$$

37. 验证 $\boldsymbol{a}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$ 为$\mathbb{R}^3$的一个基，并把$\boldsymbol{v}_1=(5,0,7)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}_2=(-9,-8,-13)^{\mathrm{T}}$ 用这个基线性表示.

解　本题本质上就是例 10 及习题 14. 只不过是以向量空间的语言来叙述. 因

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\-1&1&1&0&-8\\0&3&2&7&-13\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&3&2&7&-13\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\div(-2)]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&3&5&-9\\0&3&4&5&-17\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-4r_3]{r_1-3r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&8&-3\\0&3&0&9&-9\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_2]{r_2\div 3}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&3&-3\\0&0&1&-1&-2\end{pmatrix},$$

据此可知$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$，从而 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=3$，故 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 是$\mathbb{R}^3$的一个基；$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$用此基线性表示式为

$$\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3.$$

38. 已知$\mathbb{R}^3$的两个基为

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\text{ 及 }\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}.$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$；(2) 设向量 $\boldsymbol{x}$ 在前一基中的坐标为$(1,1,3)^{\mathrm{T}}$，求它在后一基中的坐标.

解　(1) 记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)$. 因 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 与 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 均为$\mathbb{R}^3$ 的基，故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶可逆矩阵. 由过渡矩阵定义，

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{P}\text{ 或 }\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}.$$

利用第 3 章介绍的方法可求 $\boldsymbol{P}$ 如下：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(2) 由 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,这里 y_1,y_2,y_3 是 $\boldsymbol{x}$ 在后一基中的坐标,得

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)^{-1}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

因 $\boldsymbol{P}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$,故 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.