第六章

定积分的应用

习题 6－2　定积分在几何学上的应用

1. 求图 6－1 中各阴影部分的面积：

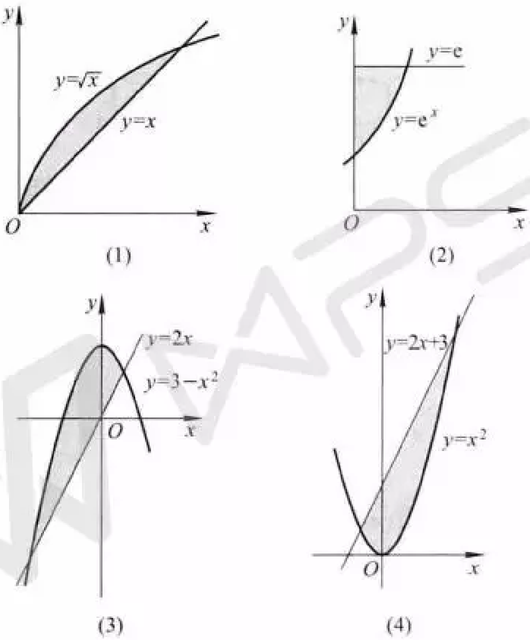

图 6－1

解　(1) 解方程组$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x, \end{cases}$得到交点坐标为(0,0)和(1,1).

如果取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为[0,1]，相应于[0,1]上的任一小区间[$x,x+\mathrm{d}x$]的窄条面积近似于高为$\sqrt{x}-x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

如果取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为[0,1]，相应于[0,1]上的任一小区间[y, $y+\mathrm{d}y$]的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $y-y^2$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(y-y^2)\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

(2) 取 x 为积分变量，则易知 x 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{e}-\mathrm{e}^x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=[\mathrm{e}x-\mathrm{e}^x]_0^1=1.$$

如果取 y 为积分变量，则易知 y 的变化范围为 $[1,\mathrm{e}]$，相应于 $[1,\mathrm{e}]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $\ln y$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\mathrm{d}y=[y\ln y]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

(3) 解方程组 $\begin{cases}y=2x,\\ y=3-x^2,\end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-3,-6)$ 和 $(1,2)$.

如果取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-3,1]$，相应于 $[-3,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $(3-x^2)-2x=-x^2-2x+3$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_{-3}^1(-x^2-2x+3)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^1=\frac{32}{3}.$$

如果用 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[-6,3]$，但是在 $[-6,2]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $\frac{y}{2}-(-\sqrt{3-y})=\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}$ 的窄矩形的面积，在 $[2,3]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、宽为 $\sqrt{3-y}-(-\sqrt{3-y})=2\sqrt{3-y}$ 的窄矩形的面积，因此有

$$\begin{aligned}A&=\int_{-6}^2\left(\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}\right)\mathrm{d}y+\int_2^3 2\sqrt{3-y}\mathrm{d}y\\&=\left[\frac{y^2}{4}-\frac{2}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-6}^2+\left[-\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3=\frac{32}{3},\end{aligned}$$

从这里可看到本小题以 x 为积分变量较容易做. 原因是本小题中的图形边界曲线，若分为上下两段的话，则为 $y=2x$ 和 $y=3-x^2$；而分为左右两段的话，则为 $x=-\sqrt{3-y}$ 和 $x=\begin{cases}\frac{y}{2}, & -6\leqslant y<2,\\ \sqrt{3-y}, & 2\leqslant y\leqslant 3,\end{cases}$ 其中右段曲线的表示相对比较复杂，也就导致计算形式复杂.

(4) 解方程组 $\begin{cases}y=2x+3,\\ y=x^2,\end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-1,1)$ 和 $(3,9)$，与(3)相同的原因，本小题以 x 为积分变量计算较容易. 取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-1,3]$，相应于 $[-1,3]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $2x+3-x^2$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

因此曲线弧对这质点引力的水平方向分量、铅直方向分量分别为

$$F_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}}3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3Ga^2\cos^4 t\sin t\mathrm{d}t=3Ga^2\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}Ga^2,$$

$$F_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}}3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3Ga^2\cos t\sin^4 t\mathrm{d}t=3Ga^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}Ga^2,$$

因此所求引力 $\boldsymbol{F}=\left(\frac{3}{5}Ga^2,\frac{3}{5}Ga^2\right)$,即大小为$\frac{3\sqrt{2}}{5}G\,a^2$,方向角为$\frac{\pi}{4}$.

14. 某建筑工地打地基时,需用汽锤将桩打进土层.汽锤每次击打,都要克服土层对桩的阻力而作功.设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k,k>0$).汽锤第一次击打将桩打进地下 a m.根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$.问:

(1) 汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限,则汽锤至多能将桩打进地下多深?

解 (1) 设第 n 次击打后,桩被打进地下 x_n,第 n 次击打时,汽锤克服阻力所作的功为 $W_n(n\in\mathbf{N}^*)$.由题设,当桩被打进地下的深度为 x 时,土层对桩的阻力的大小为 kx,所以

$$W_1=\int_0^{x_1}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}x_1^2=\frac{k}{2}a^2,$$

$$W_2=\int_{x_1}^{x_2}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{k}{2}(x_2^2-a^2).$$

由 $W_2=rW_1$,可得

$$x_2^2-a^2=ra^2,$$

即 $x_2^2=(1+r)a^2$.

$$W_3=\int_{x_2}^{x_3}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_3^2-x_2^2)=\frac{k}{2}[x_3^2-(1+r)a^2],$$

由 $W_3=rW_2=r^2W_1$,可得

$$x_3^2-(1+r)a^2=r^2a^2,$$

从而

$$x_3=\sqrt{1+r+r^2}a,$$

即汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下$\sqrt{1+r+r^2}a$ m.

(2) $W_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} kx\mathrm{d}x = \frac{k}{2}(x_n^2 - x_{n-1}^2)$，由 $W_n = rW_{n-1}$，可得

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = r(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2),$$

由(1)知 $x_2^2 - x_1^2 = ra^2$，因此 $x_n^2 - x_{n-1}^2 = r^{n-1}a^2$，从而由归纳法，可得

$$x_n = \sqrt{1 + r + \cdots + r^{n-1}}\,a,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}} = \frac{a}{\sqrt{1-r}},$$

即若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下 $\frac{a}{\sqrt{1-r}}$ m.