第五章

定积分

习题 5-1　定积分的概念与性质

*1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y = x^2 + 1$，两直线 $x = a$、$x = b(b > a)$ 及 x 轴所围成的图形的面积.

解　由于函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，因此可积，为计算方便，不妨把 $[a,b]$ 分成 n 等份，则分点为 $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}(i = 0,1,2,\cdots,n)$，每个小区间长度为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$，取 ξ_i 为小区间的右端点 x_i，则

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)^2 + 1\right]\frac{b-a}{n}\\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^2+1) + 2\frac{a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\ &= (b-a)(a^2+1) + a(b-a)^2\frac{(n+1)}{n} + (b-a)^3\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，上式极限为

$$(b-a)(a^2+1) + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 = \frac{b^3-a^3}{3} + b - a,$$

即为所求图形的面积.

*2. 利用定积分定义计算下列积分：

(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x(a < b)$；　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　由于被积函数在积分区间上连续，因此把积分区间分成 n 等份，并取 ξ_i 为小区间的右端点，得到

$$\begin{aligned}(1)\ \int_a^b x\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[a + \frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]\\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.\end{aligned}$$

(2) $\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(e^{\frac{1}{n}})^{n+1}-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{n+1}{n}}-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}}-1)} = e-1.$$

3. 利用定积分的几何意义,证明下列等式:

(1) $\int_0^1 2x dx = 1$;　　(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$;　　(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

证　(1) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1 2x dx$表示由直线$y=2x$、$x=1$及x轴围成的图形的面积,该图形是三角形,底边长为1,高为2,因此面积为1,即$\int_0^1 2x dx = 1$.

(2) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$表示的是由曲线$y=\sqrt{1-x^2}$以及x轴、y轴围成的在第 Ⅰ 象限内的图形面积,即单位圆的四分之一的图形,因此有$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

(3) 由于函数$y=\sin x$在区间$[0,\pi]$上非负,在区间$[-\pi,0]$上非正.根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$表示曲线$y=\sin x(x\in[0,\pi])$与$x$轴所围成的图形$D_1$的面积减去曲线$y=\sin x(x\in[-\pi,0])$与$x$轴所围成的图形$D_2$的面积,显然图形$D_1$与$D_2$的面积是相等的,因此有$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$.

(4) 由于函数$y=\cos x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上非负.根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$表示曲线$y=\cos x\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$与$x$轴和$y$轴所围成的图形$D_1$的面积加上曲线$y=\cos x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\right)$与$x$轴和$y$轴所围成的图形$D_2$的面积,而图形$D_1$的面积和图形$D_2$的面积显然相等,因此有$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

4. 利用定积分的几何意义,求下列积分:

(1) $\int_0^t x dx\ (t>0)$;　　(2) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$;

(3) $\int_{-1}^{2}|x|dx$;　　(4) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$.

解　(1) 根据定积分的几何意义,$\int_0^t x dx$表示的是由直线$y=x$,$x=t$以及x轴所

由此结论成立.

12. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明

(1) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x)\geqslant 0$,且 $f(x)\not\equiv 0$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$;

(2) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x)\geqslant 0$,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$,则在 $[a,b]$ 上,$f(x)\equiv 0$;

(3) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x)\leqslant g(x)$,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,则在 $[a,b]$ 上,$f(x)\equiv g(x)$.

证　(1) 根据条件必定存在 $x_0\in[a,b]$,使得 $f(x_0)>0$. 由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续可知,存在 $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$,使得当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时 $f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{2}$. 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x+\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x,$$

由定积分性质得到:

$$\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,\quad \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_\alpha^\beta\frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x=\frac{\beta-\alpha}{2}f(x_0)>0,\quad \int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故得到结论 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$.

(2) 用反证法. 如果 $f(x)\not\equiv 0$,则由(1)得到 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$,与假设条件矛盾,因此结论成立.

(3) 因为 $h(x)=g(x)-f(x)\geqslant 0$,且

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0,$$

由(2)可得在 $[a,b]$ 上

$$h(x)\equiv 0,$$

从而结论成立.

13. 根据定积分的性质及第 12 题的结论,说明下列各对积分哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$?

(2) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$?

(3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2(\ln x)^2\mathrm{d}x$?

(4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$?

(5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x$?

解　(1) 在区间$[0,1]$上$x^2 \geqslant x^3$,因此$\int_0^1 x^2 dx$比$\int_0^1 x^3 dx$大.

(2) 在区间$[1,2]$上$x^2 \leqslant x^3$,因此$\int_1^2 x^3 dx$比$\int_1^2 x^2 dx$大.

(3) 在区间$[1,2]$上由于$0 \leqslant \ln x \leqslant 1$,得$\ln x \geqslant (\ln x)^2$,因此$\int_1^2 \ln x dx$比$\int_1^2 (\ln x)^2 dx$大.

(4) 由教材第三章第一节例1可知,当$x > 0$时,$\ln(1+x) < x$,因此$\int_0^1 x dx$比$\int_0^1 \ln(1+x) dx$大.

(5) 由于当$x > 0$时$\ln(1+x) < x$,故此时有$1 + x < e^x$,因此$\int_0^1 e^x dx$比$\int_0^1 (1+x) dx$大.

习题 5－2　　微积分基本公式

1. 试求函数$y = \int_0^x \sin t dt$当$x = 0$及$x = \frac{\pi}{4}$时的导数.

解　$\frac{dy}{dx} = \sin x$,因此$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$,$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表达式$x = \int_0^t \sin u du$,$y = \int_0^t \cos u du$所确定的函数对x的导数$\frac{dy}{dx}$.

解　$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$.

3. 求由$\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$所决定的隐函数对$x$的导数$\frac{dy}{dx}$.

解　方程两端分别对x求导,得$e^y \frac{dy}{dx} + \cos x = 0$,故$\frac{dy}{dx} = -e^{-y}\cos x$.

4. 当x为何值时,函数$I(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt$有极值?

解　容易知道$I(x)$可导,而$I'(x) = xe^{-x^2} = 0$只有惟一解$x = 0$. 当$x < 0$时$I'(x) < 0$,当$x > 0$时$I'(x) > 0$,故$x = 0$为函数$I(x)$的惟一的极值点(极小值点).

5. 计算下列各导数:

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$;　　(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$.

(7) $\int_0^{\pi} x^2\,|\cos x|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2\cos x dx$

$$= [x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4.$$

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1}+e^{3-x}} = \frac{1}{e^2}\int_0^{+\infty}\frac{d(e^{x-1})}{e^{2x-2}+1} = \frac{1}{e^2}[\arctan(e^{x-1})]_0^{+\infty}$

$$= \frac{1}{e^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{e}\right).$$

(9) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$;

$$= [\arcsin(2x-1)]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}} = \int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} = \int_1^{\frac{3}{2}}\frac{d(2x-1)}{\sqrt{(2x-1)^2-1}}$$

$$= \left[\ln(2x-1+\sqrt{(2x-1)^2-1})\right]_1^{\frac{3}{2}} = \ln(2+\sqrt{3}).$$

因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}} + \int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

(10) 当 $x < -1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\,dt = \int_0^{-1} dt + \int_{-1}^{x} t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3};$$

当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\,dt = \int_0^x dt = x;$$

当 $x > 1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\,dt = \int_0^1 dt + \int_1^x t^3 dt = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}.$$

因此

$$\int_0^x \max\{t^3,t^2,1\}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{3}, & x<-1,\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{4}, & x>1. \end{cases}$$

12. 设 $f(x)$ 为连续函数,证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

证 $$\int_0^x\left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\left[t\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right]_0^x-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$
$$=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

本题也可利用原函数性质来证明,记等式左端的函数为 $F(x)$、右端的函数为 $G(x)$,则

$$F'(x)=\left(x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right)'=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$G'(x)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

即 $F(x)$、$G(x)$ 都为函数 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 的原函数,因此它们至多只差一个常数,但由于 $F(0)=G(0)=0$,因此必有 $F(x)=G(x)$.

13. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{\mathrm{d}t}{f(t)},x\in[a,b].$$

证明:(1) $F'(x)\geqslant 2$;(2) 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

证 (1) $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geqslant 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2.$

(2) $F(a)=\displaystyle\int_b^a\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}=-\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}<0$,$F(b)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t>0$,由闭区间上连续函数性质可知 $F(x)$ 在区间 (a,b) 内必有零点,根据(1)可知函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加,从而零点惟一,即方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

14. 求 $\int_0^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x$,其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

解 $\int_0^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=u+1} \int_{-1}^1 f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{e}^u} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u}$

$$= \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}{1+\mathrm{e}^{-u}} + [\ln(1+u)]_0^1$$

$$= [-\ln(1+\mathrm{e}^{-u})]_{-1}^0 + \ln 2 = \ln(1+\mathrm{e}).$$

15. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续不变号. 证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{积分第一中值定理}).$$

证 不妨设 $g(x)\geqslant 0$，由定积分性质可知 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. 记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M、最小值为 m，则有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

故有

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x = M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 时，由上述不等式可知 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$，故结论成立.

当 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ 时，有

$$m\leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant M,$$

由闭区间上连续函数性质，知存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x},$$

从而结论成立.

***16**. 证明：$\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,(n>1)$，并用它证明：

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Gamma(n+1) \quad (n\in\mathbf{N}).$$

证 当 $n>1$ 时，

$$\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^{n-1}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx$$

$$= \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx.$$

记 $I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx$,则

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx = \frac{2n+1-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx$$

$$= n\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx = nI_{n-1},$$

因此有

$$I_n = n!I_0 = n!\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = n!\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}n! = \frac{1}{2}\Gamma(n+1).$$

*17. 判断下列反常积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$;　　(2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$;

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}dx$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$.

解 (1) $x=0$ 为被积函数 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$ 的瑕点,而 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\cdot f(x)=1$,因此 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛;又由于 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^3}}$,而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛,故 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛.

(2) $x=2$ 为被积函数 $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 的瑕点,而

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)^{\frac{1}{3}}\cdot f(x)=\frac{1}{2},$$

因此 $\int_2^3 f(x)dx$ 收敛;又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\cdot f(x)=1$,因此 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛,故 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛.

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}dx = \int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d(\sin x) = \left[\frac{\sin x}{\ln x}\right]_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}dx$

$$= \int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}dx - \frac{\sin 2}{\ln 2},$$

又由于 $\left|\dfrac{\sin x}{x\ln^2 x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x\ln^2 x}$，而 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_2^{+\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x\ln^2 x}\right|\mathrm{d}x$ 收敛，即 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛，因此 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) $x=0$，$x=1$，$x=2$ 为被积函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 的瑕点，$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{2}{3}}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{\frac{1}{3}}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to2}f(x)(x-2)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$，故 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\cdot f(x)=1$，因此 $\int_3^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛.

*18. 计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ $(\alpha\geqslant0)$.

解 (1) $x=0$ 为被积函数 $f(x)=\ln\sin x$ 的瑕点，而

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cot x}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{\tan x}=0,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛.

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，而

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-u}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}-\ln\cos u\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\mathrm{d}u,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln\sin 2x-\ln 2)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}x\\&\xlongequal{u=2x}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\mathrm{d}u-\frac{\pi}{4}\ln 2,\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

（2）记被积函数为$f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$，则当$\alpha=0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=\dfrac{1}{2}$，当$\alpha>0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=0$，因此当$\alpha\geqslant0$时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$收敛.

令$x=\dfrac{1}{t}$，得到$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_{+\infty}^0\frac{-t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$，又

$$\int_{+\infty}^0\frac{-t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)},$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}&=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}[\arctan x]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$