第二章

矩阵及其运算

习 题 解 答

1. 计算下列乘积：

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；　　(2) $(1,2,3)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1,2)$；　　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$；

(5) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}_{3\times 1}$；

(2) $(1,2,3)_{1\times 3}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = (10)_{1\times 1} = 10$；

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1}(-1,2)_{1\times 2} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$；

(4) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}_{2\times 4}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 1\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}_{4\times 3}=\begin{pmatrix}6 & -7 & 8\\ 20 & -5 & -6\end{pmatrix}_{2\times 3}$;

(5) $(x_1,x_2,x_3)_{1\times 3}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}_{3\times 3}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}_{3\times 1}$

$=(x_1,x_2,x_3)_{1\times 3}\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}_{3\times 1}$

$=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{12}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+a_{13}x_3x_1$
$\quad+a_{23}x_3x_2+a_{33}x_3^2$

$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3.$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 8\\ 0 & -5 & 6\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}.$$

是 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=3\begin{pmatrix}0 & 5 & 8\\ 0 & -5 & 6\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0 & 15 & 24\\ 0 & -15 & 18\\ 6 & 27 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 13 & 22\\ -2 & -17 & 20\\ 4 & 29 & -2\end{pmatrix};$$

因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，故

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 8\\ 0 & -5 & 6\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}.$$

3. 已知两个线性变换

$$\begin{cases}x_1= & 2y_1+ & & y_3,\\ x_2= & -2y_1+3y_2+2y_3,\\ x_3= & 4y_1+y_2+5y_3,\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1=-3z_1+z_2,\\ y_2=2z_1+z_3,\\ y_3=-z_2+3z_3,\end{cases}$$

求从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换.

解 依次将两个线性变换写成矩阵形式:

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BZ},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&2\\4&1&5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\2&0&1\\0&-1&3\end{pmatrix}$ 分别为对应的系数矩阵;$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$. 在这些记号下,从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换的矩阵形式为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BZ})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{CZ},$$

这里矩阵

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&3&2\\4&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&0\\2&0&1\\0&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1&3\\12&-4&9\\-10&-1&16\end{pmatrix},$$

即有

$$\begin{cases}x_1=-6z_1+z_2+3z_3,\\x_2=12z_1-4z_2+9z_3,\\x_3=-10z_1-z_2+16z_3.\end{cases}$$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$,问:

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗?

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗?

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗?

解 (1) 因 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}$,故 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$,但由(1),$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,故 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}\neq2\boldsymbol{AB}$,从而$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2$,但由(1),$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,故 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$,从而$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

5. 举反例说明下列命题是错误的:

(1) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) 若 $A^2=A$，则 $A=O$ 或 $A=E$；

(3) 若 $AX=AY$，且 $A\neq O$，则 $X=Y$.

解 (1) 取 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，有 $A^2=O$，但 $A\neq O$；

(2) 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，有 $A^2=A$，但 $A\neq O$ 且 $A\neq E$；

(3) 取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$Y=A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，有 $AX=AY$，且 $A\neq O$，但 $X\neq Y$.

6. (1) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$，求 $A^2,A^3,\cdots,A^k$；(2) 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求 A^4.

解 (1) 直接计算得 $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$，

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix},$$

一般可得
$$A^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

事实上，当 $k=1$ 时，(2.3)式显然成立，

设当 $k=n$ 时，(2.3)式成立，那么当 $k=n+1$ 时，

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\(n+1)\lambda&1\end{pmatrix}.$$

由数学归纳法，知(2.3)式成立；

(2) $A^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&\\&\lambda&1\\&&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&\\&\lambda&1\\&&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\&\lambda^2&2\lambda\\&&\lambda^2\end{pmatrix}$，

$$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\&\lambda^2&2\lambda\\&&\lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\&\lambda^2&2\lambda\\&&\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^4&4\lambda^3&6\lambda^2\\&\lambda^4&4\lambda^3\\&&\lambda^4\end{pmatrix}.$$

注 可证 $A^n=\begin{pmatrix}\lambda^n&C_n^1\lambda^{n-1}&C_n^2\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&C_n^1\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}=\lambda^{n-2}\begin{pmatrix}\lambda^2&n\lambda&\dfrac{n(n-1)}{2}\\0&\lambda^2&n\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$ $(n\geqslant 2)$.

7. (1) 设 $A=\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}$，求 A^{50} 和 A^{51}；

(2) 设 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解 (1) $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}=10\boldsymbol{E}$,于是

$$\boldsymbol{A}^{50}=(\boldsymbol{A}^2)^{25}=(10\boldsymbol{E})^{25}=10^{25}\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{A}^{51}=\boldsymbol{A}^{50}\boldsymbol{A}=10^{25}\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}=10^{25}\boldsymbol{A}=10^{25}\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix};$$

(2) $\boldsymbol{A}^{100}=\underbrace{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})}_{100个}=\boldsymbol{a}\underbrace{(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})\cdots(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})}_{99个}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$,

因 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=-8$,故由上式知 $\boldsymbol{A}^{100}=(-8)^{99}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=-8^{99}\begin{bmatrix}2&4&8\\1&2&4\\-3&-6&-12\end{bmatrix}$.

8. (1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵,证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称阵;

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称阵,证明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

证 (1) 根据矩阵乘积的转置规则,有

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\ (因\ \boldsymbol{A}\ 为对称阵),$$

故由定义知 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为对称阵;

(2) 因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$,故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\ 为对称阵&\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\&\Leftrightarrow\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

9. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{bmatrix}$;　　(4) $\begin{bmatrix}a_1&&&0\\&a_2&&\\&&\ddots&\\0&&&a_n\end{bmatrix}(a_1a_2\cdots a_n\neq0)$.

解 (1) 由二阶方阵的求逆公式(教材例 11)得

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix};$$

(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix};$$

(3) 因 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & -4 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并且

$$M_{11}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-4,\quad M_{21}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-2,\quad M_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=0,$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=13,\quad M_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=6,\quad M_{32}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1,$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-32,\quad M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-14,\quad M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2,$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}M_{11} & -M_{21} & M_{31}\\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32}\\ M_{13} & -M_{23} & M_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ -13 & 6 & -1\\ -32 & 14 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ -16 & 7 & -1\end{pmatrix};$$

(4) 因 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，故 $a_i\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$. 于是矩阵 $\boldsymbol{B}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}\right)$是有意义的，并且因

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}\right)\\&=\operatorname{diag}(1,1,\cdots,1)=\boldsymbol{E}_n,\end{aligned}$$

由定理 2 的推论，知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}\right)$.

注 本题结论值得记取，可当作公式用.

10. 已知线性变换

$$\begin{cases}x_1=2y_1+2y_2+y_3,\\ x_2=3y_1+y_2+5y_3,\\ x_3=3y_1+2y_2+3y_3.\end{cases}$$

求从变量 x_1,x_2,x_3 到变量 y_1,y_2,y_3 的线性变换.

解 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，则线性变换的矩阵形式为 $\boldsymbol{x}=$

Ay,其中 A 为它的系数矩阵.因 $\det A=\begin{vmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{vmatrix}=1\neq 0$,故 A 是可逆矩阵,于是从变量 x_1,x_2,x_3 到变量 y_1,y_2,y_3 的线性变换的矩阵形式为

$$y=A^{-1}x.$$

又,$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=A^*=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}$,

于是

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\text{即}\quad\begin{cases}y_1=-7x_1-4x_2+9x_3,\\y_2=\ \ 6x_1+3x_2-7x_3,\\y_3=\ \ 3x_1+2x_2-4x_3.\end{cases}$$

11. 设 J 是元素全为 1 的 $n(\geqslant 2)$ 阶方阵.证明 $E-J$ 是可逆矩阵,且 $(E-J)^{-1}=E-\dfrac{1}{n-1}J$,这里 E 是与 J 同阶的单位矩阵.

证 因

$$J^2=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n&\cdots&n\\\vdots&&\vdots\\n&\cdots&n\end{pmatrix}=nJ,$$

于是 $(E-J)(E-\dfrac{1}{n-1}J)=E-J-\dfrac{1}{n-1}J+\dfrac{1}{n-1}J^2=E-\dfrac{n}{n-1}J+\dfrac{n}{n-1}J=E$,由定理 2 的推论,$E-J$ 是可逆矩阵,且 $(E-J)^{-1}=E-\dfrac{1}{n-1}J$.

注 判断矩阵 B 是否为 A 的逆矩阵,最直接、最简单的方法就是验证 AB(或者 BA)是否等于单位矩阵,就像判断 3 是否为 $\dfrac{1}{3}$ 的逆,只需验证 $\dfrac{1}{3}\times 3$ 是否等于 1 一样.下两题及例 2.1 都是这一思想的应用.

12. 设 $A^k=O$ (k 为正整数),证明 $E-A$ 可逆,并且其逆矩阵 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

证 因

$$\begin{aligned}(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})&=E+A+\cdots+A^{k-1}-A-A^2-\cdots-A^k\\&=E-O=E,\end{aligned}$$

由定理 2 的推论知 $E-A$ 可逆,且其逆矩阵 $(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}$.

13. 设方阵 A 满足

$$A^2-A-2E=O, \tag{2.4}$$

证明 A 及 $A+2E$ 都可逆,并求 A^{-1} 及 $(A+2E)^{-1}$.

解 先证 A 可逆.由(2.4)式得

$$A(A-E)=2E,$$

也就是
$$A\left(\frac{1}{2}(A-E)\right)=E.$$

由定理 2 的推论知 A 是可逆的，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$；

再证 $A+2E$ 可逆．由

$$(A+2E)(A-3E)=A^2-A-6E=2E-6E=-4E,$$

即
$$(A+2E)\left[\frac{1}{4}(3E-A)\right]=E,$$

同理，知 $A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{4}(3E-A)$．

14．解下列矩阵方程：

(1) $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$；　　(2) $X\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$；

(4) $AXB=C$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$．

解　(1) 因矩阵 $\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ 的行列式等于 1，不为零，故它可逆，从而用它的逆矩阵左乘方程两边，得

$$\begin{aligned}X&=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix};\end{aligned}$$

(2) 记矩阵方程为　$XA_{3\times3}=B_{2\times3}$，因

$$\det A=\begin{vmatrix}2&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_3}\begin{vmatrix}3&0&0\\2&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=3\neq0,$$

故 A 可逆，用 A^{-1} 右乘方程的两边得

$$X=BA^{-1}.$$

又，

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&3&-2\\-3&3&0\end{pmatrix},$$

于是
$$X=BA^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&3&-2\\-3&3&0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6&6&3\\-8&15&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\-\frac{8}{3}&5&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

(3) 记 $A=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$,则矩阵方程可写为
$$AXB=C.$$

因 $|A|=6\neq0, |B|=2\neq0$,故 A,B 均可逆.依次用 A^{-1} 和 B^{-1} 左乘和右乘方程两边得
$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}12&12\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}.$$

(4) 因 $|A|=3, |B|=1$,故 A,B 均是可逆矩阵,且
$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-1\\-5&2\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

分别用 A^{-1} 和 B^{-1} 左乘和右乘方程两边得
$$X=A^{-1}CB^{-1}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&-3&-4\\9&-5&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}23&-7&-13\\-22&5&14\end{pmatrix}.$$

15. 分别应用克拉默法则和逆矩阵解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1,\\2x_1+2x_2+5x_3=2,\\3x_1+5x_2+x_3=3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\x_1+2x_2+4x_3=3,\\x_1+3x_2+9x_3=5.\end{cases}$

解 (1) (i)用克拉默法则

因系数矩阵的行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{vmatrix}=15\neq0$,由克拉默法则,方程组有惟一

解，且

$$x_1=\frac{1}{15}\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{vmatrix}=\frac{15}{15}=1,\quad x_2=\frac{1}{15}\begin{vmatrix}1&1&3\\2&2&5\\3&3&1\end{vmatrix}=0,$$

$$x_3=\frac{1}{15}\begin{vmatrix}1&2&1\\2&2&2\\3&5&3\end{vmatrix}=0;$$

(ii) 用逆矩阵方法

因$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，于是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&5\\3&5&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-23&13&4\\13&-8&1\\4&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}15\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

即有 $x_1=1,x_2=0,x_3=0$；

(2) (i)用克拉默法则

因系数矩阵的行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=2\neq 0$，由克拉默法则方程组有惟一解，且

$$x_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2&1&1\\3&2&4\\5&3&9\end{vmatrix}=\frac{4}{2}=2,\quad x_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&4\\1&5&9\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

$$x_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&5\end{vmatrix}=\frac{1}{2};$$

(ii) 用逆矩阵方法

因$|\boldsymbol{A}|=2\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$，易求得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix},$$

代入得
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{2}$，求 $|(2\boldsymbol{A})^{-1} - 5\boldsymbol{A}^*|$.

解 因 $|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{2} \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆．于是由
$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} \text{及} (2\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1},$$
得
$$(2\boldsymbol{A})^{-1} - 5\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} - \frac{5}{2}\boldsymbol{A}^{-1} = -2\boldsymbol{A}^{-1},$$
两端取行列式得
$$|(2\boldsymbol{A})^{-1} - 5\boldsymbol{A}^*| = |-2\boldsymbol{A}^{-1}| = (-2)^3|\boldsymbol{A}|^{-1} = -16.$$

注 先化简矩阵，再取行列式，往往使计算变得简单．

17. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B} \Rightarrow (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$.

因 $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，它的行列式 $\det(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) = 2 \neq 0$，故它是可逆矩阵．用 $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^{-1}$ 左乘上式两边得
$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解　由方程 $AB+E=A^2+B$，合并含有未知矩阵 B 的项，得

$$(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E).$$

又，$A-E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，其行列式 $\det(A-E)=-1\neq0$，故 $A-E$ 可逆，用 $(A-E)^{-1}$左乘上式两边，即得

$$B=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}.$$

19．设 $A=\mathrm{diag}(1,-2,1)$，$A^*BA=2BA-8E$，求 B.

解　由于所给矩阵方程中含有 A 及其伴随阵 A^*，因此仍从公式 $AA^*=|A|E$着手．为此，用 A 左乘所给方程两边，得

$$AA^*BA=2ABA-8A,$$

又，$|A|=-2\neq0$，故 A 是可逆矩阵，用 A^{-1}右乘上式两边，得

$$|A|B=2AB-8E\Rightarrow(2A+2E)B=8E\Rightarrow(A+E)B=4E.$$

注意到 $A+E=\mathrm{diag}(1,-2,1)+\mathrm{diag}(1,1,1)=\mathrm{diag}(2,-1,2)$是可逆矩阵，且

$$(A+E)^{-1}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right),$$

于是

$$B=4(A+E)^{-1}=\mathrm{diag}(2,-4,2).$$

20．已知 A 的伴随阵 $A^*=\mathrm{diag}(1,1,1,8)$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，求 B.

解　先化简所给矩阵方程：

$$\begin{aligned}&ABA^{-1}=BA^{-1}+3E\\ \Rightarrow&(A-E)BA^{-1}=3E\\ \Rightarrow&(A-E)B=3A.\end{aligned}$$

若能求得 A 并且 $A-E$ 为可逆矩阵，就可解得

$$B=3(A-E)^{-1}A, \tag{*}$$

下面计算 A．由题意知 A 是可逆矩阵，由 $AA^*=|A|E$，两边取行列式得 $|A||A^*|=|A|^4$，即 $|A|^3=|A^*|=8$，故 $|A|=2$，于是

$$\begin{aligned}A&=2(A^*)^{-1}=2\mathrm{diag}(1,1,1,8)^{-1}\\&=2\mathrm{diag}\left(1,1,1,\frac{1}{8}\right)=\mathrm{diag}\left(2,2,2,\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

据此，$A-E=\mathrm{diag}\left(1,1,1,-\frac{3}{4}\right)$是可逆矩阵，（因 $|A-E|=-\frac{3}{4}\neq0$）

并且

$$(A-E)^{-1}=\mathrm{diag}\left(1,1,1,-\frac{4}{3}\right).$$

将上述结果代入(*)式,得

$$B=3\operatorname{diag}\left(1,1,1,-\frac{4}{3}\right)\operatorname{diag}\left(2,2,2,\frac{1}{4}\right)=\operatorname{diag}(6,6,6,-1).$$

注 (1) 这里为大家提供了一条当 A 是可逆矩阵时,由 A^* 求 A 的常规途径;

(2) 本题中 A(或 A^*)为可逆矩阵的条件是必需的.因为当 A 不是可逆矩阵时,未必能由它的伴随矩阵 A^* 来确定 A.例如

$$\begin{bmatrix}2&&\\&\frac{1}{2}&\\&&0\end{bmatrix}\text{和}\begin{bmatrix}3&&\\&\frac{1}{3}&\\&&0\end{bmatrix}\text{的伴随矩阵均为}\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}.$$

21. 设 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中 $P=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}$,$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$,求 A^{11}.

解 本题与教材例 15 相仿.因 $P^{-1}AP=\Lambda$,故 $A=P\Lambda P^{-1}$.

于是

$$\begin{aligned}A^{11}&=P\Lambda^{11}P^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}^{11}\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&2^{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\-1&-1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2^{13}&4+2^{13}\\-1-2^{11}&-4-2^{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,731&2\,732\\-683&-684\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

22. 设 $AP=P\Lambda$,其中 $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}$,$\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&1&\\&&5\end{bmatrix}$,

求 $\varphi(A)=A^8(5E-6A+A^2)$.

解 因 $|P|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{vmatrix}=-6\neq0$,故 P 是可逆矩阵.于是,由 $AP=P\Lambda$ 得 $A=P\Lambda P^{-1}$,并且记多项式 $\varphi(x)=x^8(5-6x+x^2)$,有

$$\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}.$$

因 Λ 是三阶对角阵,故

$$\varphi(\Lambda)=\operatorname{diag}(\varphi(-1),\varphi(1),\varphi(5))=\operatorname{diag}(12,0,0),$$

于是

$$\varphi(A)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{6}P^*\right)$$

$$= -2\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= -2\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= 4\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

注 由于 $\varphi(\boldsymbol{A})$除(1,1)元外均是0,故在求 $\boldsymbol{P}^*$ 时,只需计算 $\boldsymbol{P}$ 的(1,1)元、(2,1)元、(3,1)元的代数余子式 A_{11},A_{21}和 A_{31}.

23. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,证明其伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆,且$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

证 因 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 及$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,由定理2的推论知 $\boldsymbol{A}^*$可逆,且

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A},$$

另一方面,因 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}$.

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘此式两边得

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A},$$

比较上面两个式子,即知结论成立.

24. 设 n 阶矩阵$\boldsymbol{A}$ 的伴随阵为$\boldsymbol{A}^*$,证明:

(1) 若$|\boldsymbol{A}|=0$,则$|\boldsymbol{A}^*|=0$;

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

证 (1) 因

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}, \tag{2.5}$$

当$|\boldsymbol{A}|=0$时,上式成为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

要证$|\boldsymbol{A}^*|=0$,用反证法:设$|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$,由矩阵可逆的充要条件知,$\boldsymbol{A}^*$是可逆矩阵,用$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$左乘上式等号两边,得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.于是推得 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式,亦即 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有元素均为零.这导致 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$.此与 $\boldsymbol{A}^*$ 为可逆矩阵矛盾.这一矛盾说明,当$|\boldsymbol{A}|=0$时,$|\boldsymbol{A}^*|=0$.

(2) 分两种情形:

情形1:$|\boldsymbol{A}|=0$.由(1),$|\boldsymbol{A}^*|=0=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$,结论成立;

情形2:$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.在(2.5)式的两边取行列式,得

$$|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n|=|\boldsymbol{A}|^n.$$

于是
$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

注 本题(2)的结果值得记取.

25. 计算 $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$.

解 与教材例 17 相同,本题练习分块矩阵乘法. 记

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}, B_{12}=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}, B_{22}=\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix},$$

则

$$\text{原式}=\begin{pmatrix}A_{11}&E_2\\O&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_2&B_{12}\\O&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{11}B_{12}+B_{22}\\O&A_{22}B_{22}\end{pmatrix}.$$

又
$$\begin{aligned}A_{11}B_{12}+B_{22}&=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}7&-1\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2\\2&-4\end{pmatrix},\end{aligned}$$
$$A_{22}B_{22}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&3\\0&-9\end{pmatrix},$$

故
$$\text{原式}=\begin{pmatrix}1&2&5&2\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{pmatrix}.$$

26. 设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$,求 $|A^8|$ 及 A^4.

解 若记 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$,其中 $A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2&0\\2&2\end{pmatrix}$,则 A 成为一个分块对角矩阵. 于是

$$|A^8|=|A|^8=(|A_1||A_2|)^8=|A_1|^8|A_2|^8=10^{16},$$
$$A^4=\begin{pmatrix}A_1^4&O\\O&A_2^4\end{pmatrix}.$$

因 $A_1^2=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}=25E$,故 $A_1^4=5^4E$; $A_2=2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$,故 $A_2^4=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$

习题 6). 代入即得

$$A^4=\begin{pmatrix}5^4&0&0&0\\0&5^4&0&0\\0&0&2^4&0\\0&0&2^6&2^4\end{pmatrix}.$$

27. 设 n 阶矩阵 A 与 s 阶矩阵 B 都可逆, 求 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}$.

解 因 A 和 B 均可逆, 作分块阵 $\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$, 由分块矩阵乘法规则,

$$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_n&O\\O&E_s\end{pmatrix}=E_{n+s}.$$

于是 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 可逆, 且 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$.

28. 求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{5}\\2&1&0\\4&3&0\end{pmatrix}$.

解 (1) 将 A 分块为 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$, 其中 $A_1=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}8&3\\5&2\end{pmatrix}$, 因 $|A_1|=1$, $|A_2|=1$, 故它们均可逆. 于是由分块对角矩阵的性质, 有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix};$$

(2) 将 A 分块为 $\begin{pmatrix}O&A_1\\A_2&O\end{pmatrix}$, 其中 $A_1=\frac{1}{5}$, $A_2=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}$,
因 A_1, A_2 均可逆, 由题 27 得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}O&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\0&-2&1\\5&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&3&-1\\0&-4&2\\10&0&0\end{pmatrix}.$$