第一章

函数与极限

习题 1－1　映射与函数

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，即定义域为$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq \pm 1$，即定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，即定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0\Rightarrow |x|<2$，即定义域为$(-2,2)$.

(5) $x\geqslant 0$，即定义域为$[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即定义域为$\left\{x\ \middle|\ x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(7) $|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$，即定义域为$[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0\Rightarrow x>-1$，即定义域为$(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$，即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

注　本题是求函数的自然定义域，一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求出这些定义域的交集，即得所求定义域. 下列简单函数及其定义域是经常用到的：

$y=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$，$P(x)\neq 0$；

$y=\sqrt[2n]{x}$，$x\geqslant 0$；

$y=\log_a x$，$x>0$；

$y=\tan x, x \neq \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbf{Z}$;

$y=\cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$;

$y=\arcsin x, |x| \leqslant 1$;

$y=\arccos x, |x| \leqslant 1$.

2. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1) 不同,因为定义域不同.

(2) 不同,因为对应法则不同,$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

(3) 相同,因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同,因为定义域不同.

3. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geqslant \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

解 $$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2)=0.$$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

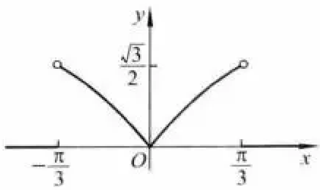

图 1-1

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y=\frac{x}{1-x}, (-\infty, 1)$;

（2）$y=x+\ln x,(0,+\infty)$.

证　（1）$y=f(x)=\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x},(-\infty,1)$.

设 $x_1<x_2<1$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1-x_2}-\frac{1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

（2）$y=f(x)=x+\ln x,(0,+\infty)$.

设 $0<x_1<x_2$. 因为

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证　设 $-l<x_1<x_2<0$，则 $0<-x_2<-x_1<l$，由 $f(x)$ 是奇函数，得 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$，从而 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明：

（1）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

（2）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证　（1）设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 均为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x),g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

（2）设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$. 于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 均为奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x),g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$. 于是

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]$$

(5) $y=\sin^2 x$.

解　(1) 是周期函数,周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数,周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数,周期 $l=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数,周期 $l=\pi$.

9. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$;　　(4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$;　　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

分析　函数 f 存在反函数的前提条件为:$f:D\to f(D)$ 是单射.本题中所给出的各函数易证均为单射,特别(1)、(4)、(5)、(6)中的函数均为单调函数,故都存在反函数.

解　(1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$,即反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,即反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$,即反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,即反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=e^{y-1}-2$,即反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,即反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

解　设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在 $M>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X,$$

故

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M,下界 $-M$.

反之,设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1,下界 K_2,即

$$K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1,\quad x\in X.$$

取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$,则有

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有界.

11. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$;

(4) $y=\mathrm{e}^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$;

(5) $y=u^2,u=\mathrm{e}^x,x_1=1,x_2=-1$.

解 (1) $y=\sin^2 x,y_1=\dfrac{1}{4},y_2=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x,y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},y_2=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2},y_1=\sqrt{2},y_2=\sqrt{5}$.

(4) $y=\mathrm{e}^{x^2},y_1=1,y_2=\mathrm{e}$.

(5) $y=\mathrm{e}^{2x},y_1=\mathrm{e}^2,y_2=\mathrm{e}^{-2}$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$;　　(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解 (1) $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$.

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2n\pi,(2n+1)\pi],n\in\mathbf{Z}$.

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow x\in[-a,1-a]$.

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow$ 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$x\in[a,1-a]$;当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为 $\varnothing$.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|=1,\\-1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=\mathrm{e}^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解
$$f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\0, & x=0,\\-1, & x>0.\end{cases}$$

解　当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$S(t)=\frac{1}{2}t^2$，

当 $1<t\leqslant 2$ 时，$S(t)=1-\frac{1}{2}(2-t)^2=-\frac{1}{2}t^2+2t-1$，

当 $t>2$ 时，$S(t)=1$.

故

$$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\frac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

16. 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式，并求

(1) 90 °F 的等价摄氏温度和 −5 °C 的等价华氏温度；

(2) 是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？

解　设 $F=mC+b$，其中 m,b 均为常数.

因为 $F=32°$ 相当于 $C=0°$，$F=212°$ 相当于 $C=100°$，所以

$$b=32,\quad m=\frac{212-32}{100}=1.8.$$

故 $F=1.8C+32$ 或 $C=\frac{5}{9}(F-32)$.

(1) $F=90°$，　$C=\frac{5}{9}(90-32)\approx 32.2°$.

$C=-5°$，　$F=1.8\times(-5)+32=23°$.

(2) 设温度值 t 符合题意，则有

$$t=1.8t+32,\quad t=-40.$$

即华氏 $-40°$ 恰好也是摄氏 $-40°$.

17. 已知 Rt$\triangle ABC$ 中，直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15，动点 P 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to B\to A$ 方向移动；动点 Q 从 C 出发，沿三角形边界按 $C\to A\to B$ 方向移动，移动到两动点相遇时为止，且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x，$\triangle CPQ$ 的面积为 y，试求 y 与 x 之间的函数关系.

解　因为 $AC=20$，$BC=15$，所以，$AB=\sqrt{20^2+15^2}=25$.

由 $20<2\cdot 15<20+25$ 可知，点 P、Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x+2x=15+20+25$，得 $x=20$. 即当 $x=20$ 时，点 P、Q 相遇. 因此，所求函数的定义域为 $(0,20)$.

(1) 当 $0<x<10$ 时，点 P 在 CB 上，点 Q 在 CA 上(图 1－5).

由$|CP|=x,|CQ|=2x$,得

$$y=x^2.$$

(2) 当$10\leqslant x\leqslant 15$时,点$P$在$CB$上,点$Q$在$AB$上(图1-6).

$$|CP|=x,\quad |AQ|=2x-20.$$

设点Q到BC的距离为h,则

$$\frac{h}{20}=\frac{|BQ|}{25}=\frac{45-2x}{25},$$

得$h=\frac{4}{5}(45-2x)$.故

$$y=\frac{1}{2}xh=\frac{2}{5}x(45-2x)=-\frac{4}{5}x^2+18x.$$

(3) 当$15<x<20$时,点P、Q都在AB上(图1-7).

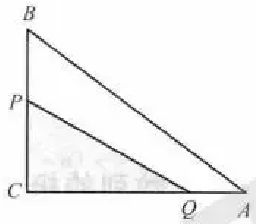

图 1-5

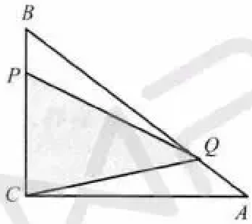

图 1-6

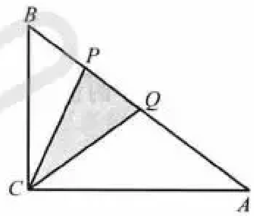

图 1-7

$$|BP|=x-15,\quad |AQ|=2x-20,\quad |PQ|=60-3x.$$

设点C到AB的距离为h',则

$$h'=\frac{15\cdot 20}{25}=12,$$

得

$$y=\frac{1}{2}|PQ|\cdot h'=-18x+360.$$

综上可得

$$y=\begin{cases}x^2, & 0<x<10,\\ -\frac{4}{5}x^2+18x, & 10\leqslant x\leqslant 15,\\ -18x+360, & 15<x<20.\end{cases}$$

18. 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据①以及指数模型来推测2020年的世界人口.

① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.

（6）收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=0$.

（7）$\left\{n-\frac{1}{n}\right\}$发散.

（8）$\left\{[(-1)^n+1]\frac{n+1}{n}\right\}$发散.

2.（1）数列的有界性是数列收敛的什么条件？

（2）无界数列是否一定发散？

（3）有界数列是否一定收敛？

解　（1）必要条件.

（2）一定发散.

（3）未必一定收敛，如数列$\{(-1)^n\}$有界，但它是发散的.

3. 下列关于数列$\{x_n\}$的极限是a的定义，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

（1）对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$x_n-a<\varepsilon$成立；

（2）对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，有无穷多项x_n，使不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立；

（3）对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<c\varepsilon$成立，其中c为某个正常数；

（4）对于任意给定的$m\in\mathbf{N}_+$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\frac{1}{m}$成立.

解　（1）错误. 如对数列$\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}$，$a=1$. 对任给的$\varepsilon>0$（设$\varepsilon<1$），存在$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，$(-1)^n+\frac{1}{n}-1\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$，但$\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\right\}$的极限不存在.

（2）错误. 如对数列

$$x_n=\begin{cases}n, & n=2k-1,\\ 1-\frac{1}{n}, & n=2k,\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}_+,\quad a=1.$$

对任给的$\varepsilon>0$（设$\varepsilon<1$），存在$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$且$n$为偶数时，$|x_n-a|=\frac{1}{n}<\varepsilon$成立，但$\{x_n\}$的极限不存在.

（3）正确. 对任给的$\varepsilon>0$，取$\frac{1}{c}\varepsilon>0$，按假设，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<c\cdot\frac{1}{c}\varepsilon=\varepsilon$成立.

(4) 正确. 对任给的 $\varepsilon>0$, 取 $m\in\mathbf{N}_+$, 使 $\frac{1}{m}<\varepsilon$. 按假设, 存在 $N\in\mathbf{N}_+$, 当 $n>N$ 时, 不等式 $|x_n-a|<\frac{1}{m}<\varepsilon$ 成立.

*4. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$? 求出 N, 使当 $n>N$ 时, x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时, 求出数 N.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 证明如下:

因为

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

要使 $|x_n-0|<\varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 所以 $\forall\,\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$), 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 就有 $|x_n-0|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1\ 000$. 即若 $\varepsilon=0.001$, 只要 $n>1\ 000$, 就有 $|x_n-0|<0.001$.

*5. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

证　(1) 因为要使 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$, 只要 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 所以 $\forall\,\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$), 取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 就有 $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) 因为 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{4n}$, 要使 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$, 只要 $\frac{1}{4n}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{1}{4\varepsilon}$, 所以 $\forall\,\varepsilon>0\left(不妨设\ \varepsilon<\frac{1}{4}\right)$, 取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]$, 则当 $n>N$ 时, 就有 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

注　本题中所采用的证明方法是:先将 $|x_n-a|$ 等价变形, 然后适当放大, 使 N 容易由放大后的量小于 ε 的不等式中求出. 这在按定义证明极限的问题中是经常采用的.

(3) 当 $a=0$ 时, 所给数列为常数列, 显然有此结论. 以下设 $a\neq0$. 因为

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{2n^2},$$

习题 1-3 函数的极限

1. 对图 1-8 所示的函数 $f(x)$,求下列极限,如极限不存在,说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 0$.

(2) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 不存在,因为 $f(0^+) \neq f(0^-)$.

2. 对图 1-9 所示的函数 $f(x)$,下列陈述中哪些是对的,哪些是错的?

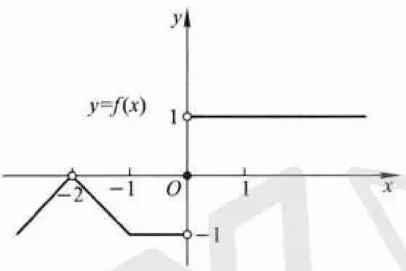

图 1-8

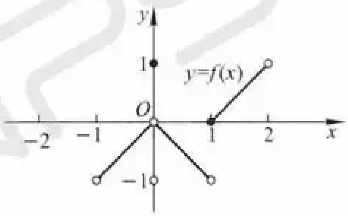

图 1-9

(1) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$不存在;

(2) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$;

(4) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$;

(5) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$不存在;

(6) 对每个 $x_0 \in (-1,1)$,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

解 (1) 错,$\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 存在与否,与 $f(0)$的值无关.事实上,$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

(2) 对,因为 $f(0^+) = f(0^-) = 0$.

(3) 错,$\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 的值与 $f(0)$的值无关.

(4) 错,$f(1^+) = 0$,但 $f(1^-) = -1$,故$\lim\limits_{x\to1} f(x)$不存在.

(5) 对,因为 $f(1^-) \neq f(1^+)$.

(6) 对.

3. 对图 1-10 所示的函数,下列陈述中哪些是对的,哪些是错的?

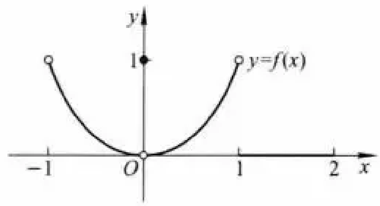

图 1 - 10

(1) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$;

(6) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$;

(7) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$;

(8) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$.

解　(1) 对.

(2) 对,因为当 $x<-1$ 时,$f(x)$无定义.

(3) 对,因为 $f(0^+)=f(0^-)=0$.

(4) 错,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$的值与 $f(0)$的值无关.

(5) 对.

(6) 对.

(7) 对.

(8) 错,因为当 $x>2$ 时,$f(x)$ 无定义,$f(2^+)$ 不存在.

4. 求$f(x)=\dfrac{x}{x}$,$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$当$x\to 0$时的左、右极限,并说明它们在$x\to 0$时的极限是否存在.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$,$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1$.

因为$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)$,所以$\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ 不存在.

***5.** 根据函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$;

若 $f(x_0)<0$, 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续, 所以取 $\varepsilon=-\frac{1}{2}f(x_0)>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<-\frac{1}{2}f(x_0)$, 即

$$\frac{3}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{1}{2}f(x_0)<0.$$

因此, 不论 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$, 总存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$, 当 $x\in U(x_0)$ 时, $f(x)\neq 0$.

*7. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in \mathbf{Q},\\ 0, & x\in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$$

证明: (1) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续;

(2) $f(x)$ 在非零的 x 处都不连续.

证　(1) $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x-0|=|x|<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(2) 我们证明: $\forall\ x_0\neq 0$, $f(x)$ 在 x_0 不连续.

若 $x_0=r\neq 0$, $r\in\mathbf{Q}$, 则 $f(x_0)=f(r)=r$.

分别取一有理数列 $\{r_n\}: r_n\to r(n\to\infty)$, $r_n\neq r$; 取一无理数列 $\{s_n\}: s_n\to r(n\to\infty)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_n=r, \lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

而 $r\neq 0$, 由函数极限与数列极限的关系知 $\lim\limits_{x\to r}f(x)$ 不存在, 故 $f(x)$ 在 r 处不连续.

若 $x_0=s$, $s\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. 同理可证: $f(x_0)=f(s)=0$, 但 $\lim\limits_{x\to s}f(x)$ 不存在, 故 $f(x)$ 在 s 处不连续.

*8. 试举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

$x=0,\pm 1,\pm 2,\pm\frac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\frac{1}{n},\cdots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点, 且它们都是无穷间断点.

解　设 $f(x)=\cot(\pi x)+\cot\frac{\pi}{x}$, 显然 $f(x)$ 具有所要求的性质.

习题 1-9　连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 求函数 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解　$f(x)$ 在 $x_1=-3, x_2=2$ 处无意义,所以这两个点为间断点,此外函数到处连续,连续区间为 $(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$.

因为

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}=\frac{(x^2-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x^2-1}{x-2},$$

所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to -3}f(x)=-\frac{8}{5},\quad \lim_{x\to 2}f(x)=\infty.$$

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续,证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad \psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证　$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$,

$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$.

又,若 $f(x)$ 在点 x_0 连续,则 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续;由连续函数的和、差仍连续,故 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$;　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+5)}=\sqrt{5}$.

(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=(\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\sin 2\alpha)^3=\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}2\cos 2x)=\ln\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)=\ln 1=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}}=2$.

$$|MK| \to 0\ (x \to +\infty) \Rightarrow |MK_1| \to 0\ (x \to +\infty),$$

即

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0, \tag{1}$$

从而

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] + b = 0 + b = b, \tag{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}[f(x) - kx] + k = 0 + k = k. \tag{3}$$

反之,若(2)、(3)成立,则(1)成立,即 $L: y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

2°若 $k = 0$,设 $L: y = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线,如图 1－19 所示. 按定义有 $|MK| \to 0\ (x \to +\infty)$,而 $|MK| = |f(x) - b|$,故有

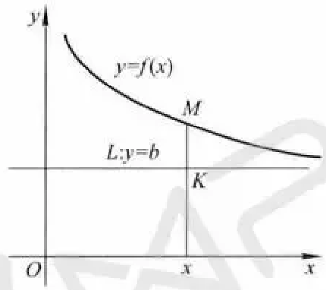

图 1－19

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \tag{4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0. \tag{5}$$

反之,若(4)、(5)成立,即有 $|MK| = |f(x) - b| \to 0\ (x \to +\infty)$,故 $y = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

(2) 因为

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x - 1)}{x} e^{\frac{1}{x}} = 2,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to \infty} [(2x - 1)e^{\frac{1}{x}} - 2x] = \lim_{x \to \infty} 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - \lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$= 2\lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 2\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} - 1 = 2\ln e - 1 = 1,$$

所以,所求曲线的斜渐近线为 $y = 2x + 1$.