第十一章

曲线积分与曲面积分

习题 11-1 对弧长的曲线积分

1. 设在 xOy 面内有一分布着质量的曲线弧 L，在点 (x,y) 处它的线密度为 $\mu(x,y)$. 用对弧长的曲线积分分别表达：

(1) 这曲线弧对 x 轴、对 y 轴的转动惯量 I_x、I_y；

(2) 这曲线弧的质心坐标 $\bar{x}$、$\bar{y}$.

解 (1) 设想将 L 分成 n 个小弧段，取出其中任意一段记作 ds（其长度也记作 ds），(x,y) 为 ds 上一点，则 ds 对 x 轴和对 y 轴的转动惯量近似等于

$$dI_x = y^2\mu(x,y)ds,\quad dI_y = x^2\mu(x,y)ds.$$

以此作为转动惯量元素并积分，即得 L 对 x 轴、对 y 轴的转动惯量：

$$I_x = \int_L y^2\mu(x,y)ds,\quad I_y = \int_L x^2\mu(x,y)ds.$$

(2) ds 对 x 轴和对 y 轴的静矩近似等于

$$dM_x = y\mu(x,y)ds,\quad dM_y = x\mu(x,y)ds.$$

以此作为静矩元素并积分，即得 L 对 x 轴、对 y 轴的静矩：

$$M_x = \int_L y\mu(x,y)ds,\quad M_y = \int_L x\mu(x,y)ds.$$

从而 L 的质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int_L x\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds},\quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int_L y\mu(x,y)ds}{\int_L \mu(x,y)ds}.$$

2. 利用对弧长的曲线积分的定义证明性质 3.

证 设对积分弧段 L 任意分割成 n 个小弧段，第 i 个小弧段的长度为 Δs_i，(ξ_i,η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点. 按假设，有

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\ (i=1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta s_i\}\to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\int_L f(x,y)ds \leqslant \int_L g(x,y)ds.$$

又 $f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$，$-f(x,y) \leqslant |f(x,y)|$，利用以上结果，得

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_L |f(x,y)|\,\mathrm{d}s,$$

$$-\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s \leqslant \int_L |f(x,y)|\,\mathrm{d}s,$$

即

$$\left|\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_L |f(x,y)|\,\mathrm{d}s.$$

3. 计算下列对弧长的曲线积分：

(1) $\oint_L (x^2+y^2)^n \mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(2) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段；

(3) $\oint_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界；

(4) $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

(5) $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧；

(6) $\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s$，其中 Γ 为折线 $ABCD$，这里 A,B,C,D 依次为点 $(0,0,0)$，$(0,0,2)$，$(1,0,2)$，$(1,3,2)$；

(7) $\int_L y^2\mathrm{d}s$，其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

(8) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解　(1)
$$\oint_L (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2\pi}a^{2n+1}\mathrm{d}t=2\pi a^{2n+1}.$$

(2) 直线 L 的方程为 $y=1-x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1[x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}.$$

（6）Γ 由直线段 AB、BC 和 CD 组成，其中

$$AB: x=0, y=0, z=t(0\leqslant t\leqslant 2); \quad BC: x=t, y=0, z=2(0\leqslant t\leqslant 1);$$

$$CD: x=1, y=t, z=2(0\leqslant t\leqslant 3).$$

于是

$$\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s=\int_{AB}x^2yz\mathrm{d}s+\int_{BC}x^2yz\mathrm{d}s+\int_{CD}x^2yz\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^2 0\mathrm{d}t+\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_0^3 2t\,\mathrm{d}t=9.$$

（7）$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$

$$=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t,$$

$$\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{u=\frac{t}{2}}16a^3\int_0^{\pi}\sin^5u\mathrm{d}u$$

$$=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5u\mathrm{d}u\text{①}=32a^3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{256}{15}a^3.$$

（8）$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$

$$=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}\mathrm{d}t=at\mathrm{d}t,$$

$$\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]\cdot at\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}a^3(1+t^2)t\mathrm{d}t=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

4. 求半径为 a，中心角为 2φ 的均匀圆弧（线密度 $\mu=1$）的质心.

解　取坐标系如图 11－2 所示，则由对称性知

$$\bar{y}=0.$$

又 $M=\int_L\mu\mathrm{d}s=\int_L\mathrm{d}s=2\varphi a$（也可由圆弧的弧长公式直接得出），

故

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\mu\mathrm{d}s}{M}=\frac{\int_{-\varphi}^{\varphi}a\cos t\cdot a\mathrm{d}t}{2\varphi a}$$

$$=\frac{2a^2\sin\varphi}{2\varphi a}=\frac{a\sin\varphi}{\varphi},$$

① 参阅教材上册第五章第三节例 12.

所求圆弧的质心的位置为$\left(\dfrac{a\sin\varphi}{\varphi},0\right)$.

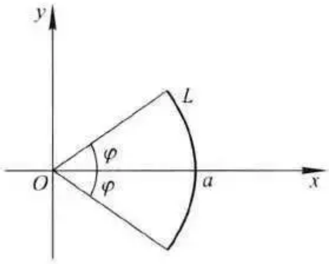

图 11 - 2

5. 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$,其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$,它的线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求:

(1) 它关于 z 轴的转动惯量 I_z;

(2) 它的质心.

解 (1) $$I_z=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_L (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{2\pi} a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=a^2\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

(2) 设质心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

$$M=\int_L \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2),$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{M}\int_L x(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi} a\cos t(a^2+k^2t^2)\cdot\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a\sqrt{a^2+k^2}}{M}\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

由于 $$\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\cos t\,\mathrm{d}t=\left[(a^2+k^2t^2)\sin t\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin t\cdot 2k^2t\,\mathrm{d}t$$

$$F_y = \oiint_{\Sigma} \rho z\cos\beta \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial y}\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}v = 0,$$

$$F_z = \oiint_{\Sigma} \rho z\cos\gamma \mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho z)}{\partial z}\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} \rho\mathrm{d}v = \rho V$$

(V 为 Ω 的体积),故合力

$$\boldsymbol{F} = \rho V\boldsymbol{k},$$

此力的方向铅直向上,大小等于被物体排开的液体的重力.

习题 11-7 斯托克斯公式 *环流量与旋度

1. 试对曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leqslant 1, P = y^2, Q = x, R = z^2$ 验证斯托克斯公式.

解 按右手法则,Σ 取上侧,Σ 的边界 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 1$,从 z 轴正向看去,取逆时针方向.

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} (1 - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} (1 - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}} \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 (1 - 2\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3}\rho^3\sin\theta\right]_0^1\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta = \pi.$$

Γ 的参数方程可取为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 1$, t 从 0 变到 2π,故

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}(-\sin^3 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = \pi,$$

两者相等,斯托克斯公式得到验证.

***2.** 利用斯托克斯公式,计算下列曲线积分:

(1) $\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$,其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$,若从 x 轴的正向看去,这圆周是取逆时针方向;

(2) $\oint_{\Gamma}(y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$,其中 Γ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1(a > 0, b > 0)$,若从 x 轴正向看去,这椭圆是取逆时针方向;

(3) $\oint_{\Gamma} 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z$,其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$,若从 z 轴正向看去,这圆周是取逆时针方向;

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{k}\text{(由于各二阶偏导数连续)}$$
$$=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

总习题十一

1. 填空:

(1) 第二类曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 化成第一类曲线积分是________,其中 α,β,γ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的________的方向角;

(2) 第二类曲面积分 $\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成第一类曲面积分是________,其中 α,β 与 γ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的________的方向角.

解 (1) 由教材本章第二节的公式(2-3),可知第一个空格应填: $\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$;第二个空格应填:切向量.

(2) 由教材本章第五节的公式(5-9),可知第一个空格应填: $\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$;第二个空格应填:法向量.

2. 下题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

设曲面 Σ 是上半球面: $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$,曲面 Σ_1 是曲面 Σ 在第一卦限中的部分,则有( ).

(A) $\iint_\Sigma x\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$　　(B) $\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$

(C) $\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$　　(D) $\iint_\Sigma xyz\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S$

解 应选(C).先说明(A)不对.由于 Σ 关于 yOz 面对称,被积函数 x 关于 x 是奇函数,所以 $\iint_\Sigma x\mathrm{d}S=0$.但在 Σ_1 上,被积函数 x 连续且大于零,所以 $\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S>0$.因此 $\iint_\Sigma x\mathrm{d}S\neq 4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$.类似可说明(B)和(D)不对.再说明(C)正确.由于 Σ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称,被积函数 z 关于 x 和 y 均为偶函数,故 $\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S$;而在 Σ_1 上,字母 x,y,z 是对称的.故 $\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$,因此有 $\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=4\iint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$.

3. 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$,其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$;

故
$$\bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S}{A}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2},$$

所求的质心为 $\left(0,0,\dfrac{a}{2}\right)$.

9. 设 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在闭区域 D 上都具有二阶连续偏导数,分段光滑的曲线 L 为 D 的正向边界曲线. 证明:

(1) $\iint\limits_{D}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}(\mathbf{grad}\ u\cdot\mathbf{grad}\ v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_{L}v\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$;

(2) $\iint\limits_{D}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial n}-v\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$,

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 u 与 v 沿 L 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数,符号 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称二维拉普拉斯算子.

证　(1) 如图 11－17, $\boldsymbol{n}$ 为有向曲线 L 的外法线向量, $\boldsymbol{\tau}$ 为 L 的切线向量. 设 x 轴到 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的转角分别为 φ 和 α,则 $\alpha=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$,且 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 $\cos\varphi,\sin\varphi$; $\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\sin\alpha$. 于是

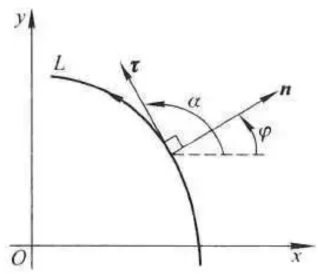

图 11－17

$$\begin{aligned}\oint_{L}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s&=\oint_{L}v(u_x\cos\varphi+u_y\sin\varphi)\mathrm{d}s\\&=\oint_{L}v(u_x\sin\alpha-u_y\cos\alpha)\mathrm{d}s\ (\cos\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}x,\sin\alpha\mathrm{d}s=\mathrm{d}y)\\&=\oint_{L}vu_x\mathrm{d}y-vu_y\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{格林公式}}\iint\limits_{D}\left[\frac{\partial(vu_x)}{\partial x}-\frac{\partial(-vu_y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \iint_D [(u_x v_x + v u_{xx}) + (u_y v_y + v u_{yy})] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D v(u_{xx} + u_{yy}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D (u_x v_x + u_y v_y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D v \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D (\mathbf{grad}\ u \cdot \mathbf{grad}\ v) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

把上式右端第二个积分移到左端即得所要证明的等式.

(2) 在(1)证得的等式中交换 u,v 的位置,可得

$$\iint_D u \Delta v \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D (\mathbf{grad}\ v \cdot \mathbf{grad}\ u) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s,$$

在此式的两端分别减去(1)中等式的两端,即得所需证明的等式.

***10.** 求向量 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域 $\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ 的边界曲面流向外侧的通量.

解　通量 $\Phi = \oiint_\Sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \oiint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\xlongequal{\text{高斯公式}} \iiint_\Omega \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) \mathrm{d}v$$

$$= \iiint_\Omega (1 + 1 + 1) \mathrm{d}v = 3 \iiint_\Omega \mathrm{d}v = 3 \cdot 1 = 3.$$

11. 求力 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线 Γ 所作的功,其中 Γ 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界,从 z 轴正向看去,沿顺时针方向.

解　$W = \oint_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z.$

下面用两种方法来计算上面这个积分.

解法一　化为定积分直接计算. 如图 11－18, Γ 由 AB,BC,CA 三条有向线段组成,

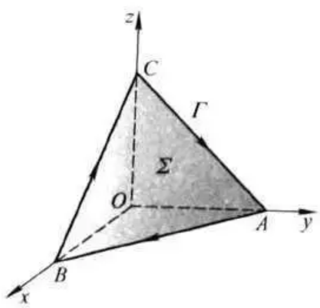

图 11－18

$$AB: z = 0, x = t, y = 1 - t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1;$$
$$BC: y = 0, x = t, z = 1 - t, t \text{ 从 } 1 \text{ 变到 } 0;$$
$$CA: x = 0, y = t, z = 1 - t, t \text{ 从 } 0 \text{ 变到 } 1.$$

于是

$$\int_{AB} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_{AB} y\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$
$$\int_{BC} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_{BC} x\mathrm{d}z = \int_1^0 t\cdot(-1)\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$
$$\int_{CA} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_{CA} z\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

因此
$$W = \oint_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = \frac{3}{2}.$$

*解法二　利用斯托克斯公式计算. 取 Σ 为平面 $x + y + z = 1$ 的下侧被 Γ 所围的部分,则 Σ 在任一点处的单位法向量为 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,由斯托克斯公式得

$$\oint_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$
$$= \iint_\Sigma \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}S = \sqrt{3}\iint_\Sigma \mathrm{d}S$$
$$= \sqrt{3}\cdot(\Sigma \text{ 的面积}) = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$