第一章

行列式

习 题 解 答

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & & \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式 $=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8$
$\quad -1\times(-4)\times(-1)-2\times(-1)\times8-0\times1\times3=-4$;

(2) 原式 $=acb+bac+cba-c^3-a^3-b^3$
$\quad =3abc-a^3-b^3-c^3$;

(3) 原式 $=1\cdot b\cdot c^2+1\cdot c\cdot a^2+1\cdot a\cdot b^2-1\cdot b\cdot a^2-1\cdot c\cdot b^2-1\cdot a\cdot c^2$
$\quad =bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-cb^2-ac^2$
$\quad =c^2(b-a)+ab(b-a)-c(b^2-a^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$;

(4) 原式 $=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-(x+y)^3-x^3-y^3$
$\quad =-2(x^3+y^3)$.

2. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(1) 1 2 3 4；　　　　(2) 4 1 3 2；

(3) 3 4 2 1；　　　　(4) 2 4 1 3；

(5) 1 3 … $(2n-1)$ 2 4 … $(2n)$；

(6) 1 3 … $(2n-1)$ $(2n)$ $(2n-2)$ … 2.

解 (1) 此排列为标准排列，其逆序数为 0；

(2) 此排列的首位元素 4 的逆序数为 0，第 2 位元素 1 的逆序数为 1，第 3 位元素 3 的逆序数为 1，末位元素 2 的逆序数为 2，故它的逆序数为 $0+1+1+2=4$；

(3) 此排列的前两位元素的逆序数均为 0，第 3 位元素 2 的逆序数为 2；末位元素 1 的逆序数为 3，故它的逆序数为 $0+0+2+3=5$；

(4) 类似于上面，此排列的从首位元素到末位元素的逆序数依次为 0,0,2,1，故它的逆序数为 $0+0+2+1=3$；

(5) 注意到这 $2n$ 个数的排列中，前 n 位元素的逆序数均为 0. 第 $n+1$ 位元素 2 与它前面的 $n-1$ 个数构成逆序对，故它的逆序数为 $n-1$；同理，第 $n+2$ 位元素 4 的逆序数为 $n-2$……末位元素 $2n$ 的逆序数为 0. 故此排列的逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+0=\frac{1}{2}n(n-1)$；

(6) 与(5)相仿，此排列的前 $n+1$ 位元素的逆序数均为 0；第 $n+2$ 位元素 $(2n-2)$ 的逆序数为 2；第 $n+3$ 位元素 $2n-4$ 与它前面的 $2n-3, 2n-1, 2n, 2n-2$ 构成逆序对，故它的逆序为 4……末位元素 2 的逆序数为 $2(n-1)$，故此排列的逆序数为 $2+4+\cdots+2(n-1)=n(n-1)$.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 由行列式定义知这项必还含有分别位于第 3 行和第 4 行的两元素，而它们又分别位于第 2 列和第 4 列，即 a_{32} 和 a_{44} 或 a_{34} 和 a_{42}. 注意到排列 1324

与 1342 的逆序数分别为 1 与 2，故此行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解　(1)

$$D \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-10r_1]{r_2-4r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+7r_2]{r_3+15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix}$$

$=0$（因第 3、4 行成比例）；

(2) $$D \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$（因有两行相同）；

(3) $$D \xrightarrow[\substack{r_2 \div d \\ r_3 \div f}]{r_1 \div a} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 \div c \\ c_3 \div e}]{c_1 \div b} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef;$$

(4) $D \xlongequal{r_2+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0;$

(5) $D \xlongequal{r_1+ar_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按} c_1 \text{展开}} (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_3+dc_2} \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按} r_3 \text{展开}} (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1+ab & ad \\ -1 & 1+cd \end{vmatrix}$

$= (1+ab)(1+cd) + ad.$

(6) $D \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3\div(-1)]{\text{按} c_1 \text{展开}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_2-c_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 16.$

注 本题中哪怕是求三阶或四阶行列式都运用了行列式的各种基本的计算手段，请读者留意.

5．求解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$，其中 a,b,c 互不相等.

解 (1) 左式 $\xlongequal[r_1\div(x+3)]{r_1+r_2} (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow{c_2-c_1}(x+3)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & x-1 & 1\\ -1 & 2 & x+1\end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ 2 & x+1\end{vmatrix}=(x+3)(x^2-3).$$

于是方程的解为 $x_1=-3, x_2=\sqrt{3}, x_3=-\sqrt{3}$；

(2) 注意到方程左式为 4 阶范德蒙德行列式，由例 12 的结果得

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c)=0.$$

因 a,b,c 互不相等，故方程的解为 $x_1=a, x_2=b, x_3=c$.

6. 证明：

(1) $\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\ 2a & a+b & 2b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a-b)^3$；

(2) $\begin{vmatrix}ax+by & ay+bz & az+bx\\ ay+bz & az+bx & ax+by\\ az+bx & ax+by & ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x & y & z\\ y & z & x\\ z & x & y\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}=0$；

(4) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4\end{vmatrix}$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$；

(5) $\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & 0\\ 0 & 0 & x & -1\\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

证 (1) 左式 $\xrightarrow[c_2-c_3]{c_1-c_3}\begin{vmatrix}a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2\\ 2(a-b) & a-b & 2b\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\xrightarrow{c_1-2c_2}\begin{vmatrix}(a-b)^2 & ab-b^2 & b^2\\ 0 & a-b & 2b\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$=(a-b)^3=$ 右式；

(2) 将左式按第 1 列拆开得

$$
\text{左式} = \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = aD_1 + bD_2,
$$

其中
$$
D_1 = \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 \div a]{c_3 - bc_1} a \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[c_2 \div a]{c_2 - bc_3} a^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \xlongequal[c_2 \div b]{c_2 - ac_1} b \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[c_3 \div b]{c_3 - ac_2} b^2 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} \xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_1]{c_3 \leftrightarrow c_2} b^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},
$$

于是
$$
D = aD_1 + bD_2 = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \text{右式}.
$$

(3) 左式
$$
\xlongequal[\substack{c_3 - c_2 \\ c_2 - c_1}]{c_4 - c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[c_3 - c_2]{c_4 - c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{（因有两列相同）};
$$

(4) 左式
$$
\xlongequal[\substack{r_3 - ar_2 \\ r_2 - ar_1}]{r_4 - a^2 r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\text{各列提取公因子}]{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}
$$

$$\xlongequal[r_2-br_1]{r_3-b(b+a)r_2}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&c-b&d-b\\0&x&y\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}c-b&d-b\\x&y\end{vmatrix},$$

其中$x=c^2(c+a)-bc(b+a)=c(c^2+ac-b^2-ab)=c(a+b+c)(c-b)$,

$y=d^2(d+a)-bd(b+a)=d(a+b+d)(d-b)$.

故 $$\begin{vmatrix}c-b&d-b\\x&y\end{vmatrix}=(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1&1\\c(a+b+c)&d(a+b+d)\end{vmatrix}$$
$$=(c-b)(d-b)[d(a+b+d)-c(a+b+c)]$$
$$=(c-b)(d-b)[(d-c)(a+b)+d^2-c^2]$$
$$=(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d),$$

因此,左式$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)=$右式.

(5) 证一　按第1列展开得

$$D=x\begin{vmatrix}x&-1&0\\0&x&-1\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}-a_0\begin{vmatrix}-1&0&0\\x&-1&0\\0&x&-1\end{vmatrix}$$

$$=x\left\{x\begin{vmatrix}x&-1\\a_2&a_3\end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix}-1&0\\x&-1\end{vmatrix}\right\}+a_0$$ (对上式第1个行列式继续按第1列展开)

$$=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0;$$

证二　按最后一行展开得

$$D=-a_0\begin{vmatrix}-1&0&0\\x&-1&0\\0&x&-1\end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix}x&0&0\\0&-1&0\\0&x&-1\end{vmatrix}$$
$$-a_2\begin{vmatrix}x&-1&0\\0&x&0\\0&0&-1\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}x&-1&0\\0&x&-1\\0&0&x\end{vmatrix}$$
$$=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0.$$

7. 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$,把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90°、或依副对角线翻转,依次得

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{n1}&\cdots&a_{nn}\\\vdots&&\vdots\\a_{11}&\cdots&a_{1n}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}a_{1n}&\cdots&a_{nn}\\\vdots&&\vdots\\a_{11}&\cdots&a_{n1}\end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix}a_{nn}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{11}\end{vmatrix},$$

证明 $D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D, D_3=D$.

证 (1) 通过对换行将 D_1 变换成 D,从而找出 D_1 与 D 的关系.

D_1 的最后一行是 D 的第 1 行,把它依次与前面的行交换,直至换到第 1 行,共进行 $n-1$ 次交换;这时最后一行是 D 的第 2 行,把它依次与前面的行交换,直至换到第 2 行,共进行 $n-2$ 次交换……直至最后一行是 D 的第 $n-1$ 行,再通过一次交换将它换到第 $n-1$ 行,这样就把 D_1 变换成 D,共进行

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1)$$

次交换,故 $D_1=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D$.

注 上述对换行(列)的方法,在解题时经常用到.它的特点是在把最后一行换到某一行的同时,保持其余 $n-1$ 个行之间原有的先后次序(但行的序号可能改变),见例 6 之析.

(2) 计算 D_2.注意到 D_2 的第 $1,2,\cdots,n$ 行恰好依次是 D 的第 $n,n-1,\cdots,1$ 列,故若把 D_2 上下翻转得 $\widetilde{D}_2$,则 $\widetilde{D}_2$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 行依次是 D 的第 $1,2,\cdots,n$ 列,即 $\widetilde{D}_2=D^{\mathrm{T}}$.于是由(1)

$$D_2=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\widetilde{D}_2=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D^{\mathrm{T}}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D.$$

(3) 计算 D_3.注意到若把 D_3 逆时针旋转 90°得 $\widetilde{D}_3$,则 $\widetilde{D}_3$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 列恰好是 D 的第 $n,n-1,\cdots,1$ 列,于是再把 $\widetilde{D}_3$ 左右翻转就得到 D.由(1)之注及(2),有

$$D_3=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\widetilde{D}_3=D.$$

注 本例的结论值得记取,即对行列式 D 作转置、依副对角线翻转、旋转 180°所得行列式不变,作上下翻转、左右翻转、逆(顺)时针旋转 90°所得行列式为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D$.

8. 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式):

(1) $D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$,其中对角线上元素都是 a,未写出的元素都是 0;

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

提示:利用范德蒙德行列式的结果.

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$,其中未写出的元素都是 0;

(5) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$;

(6) $D_n=\det(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=|i-j|$;

(7) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$,其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

(1) 解一　化 D_n 为上三角形行列式

$$D_n \xlongequal{r_n+r_1} \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ a+1 & & a+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-c_n} \begin{vmatrix} a-1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & a+1 \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2-1),$$

上式中最后那个行列式为上三角形行列式;

解二　把 D_n 按第二行展开,因 D_n 的第二行除对角线元素外全为零,故有

$$D_n = a\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}, \text{即 } D_n = aD_{n-1},$$

于是有 $$D_n = aD_{n-1} = \cdots = a^{n-2}\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2-1);$$

(2) 本题中 D_n 是教材例 8 中行列式的一般形式，它是一个非常有用的行列式，在以后各章中有不少应用.

解 利用各列的元素之和相同，把从第二行起的各行统统加到第一行，再提取公因式.

$$D_n \xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - ar_1} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a];$$

(3) **解** 把所给行列式上下翻转，即为范德蒙德行列式，若再将它左右翻转，由于上下翻转与左右翻转所用交换次数相等，故行列式经上下翻转再左右翻转(相当于转 180°，参看题 7)其值不变. 于是按范德蒙德行列式的结果，可得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n+1}(i-j);$$

(4) **解** 本题与例 11 相仿，解法也大致相同，用递推法.

$$D_{2n}\underset{c_2\leftrightarrow c_{2n}}{\overset{r_2\leftrightarrow r_{2n}}{=\!=\!=\!=\!=}}\left|\begin{array}{cc|c} a_n & b_n & 0 \\ c_n & d_n & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & D_{2(n-1)} \end{array}\right| \overset{\text{由例 10}}{=\!=\!=\!=}(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)},$$

即有递推公式

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)}.$$

另一方面,归纳基础为 $D_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}=a_1d_1-b_1c_1$,利用这些结果,递推得

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)\cdots(a_1d_1-b_1c_1)=\prod_{k=1}^{n}(a_kd_k-b_kc_k);$$

(5) 解　把所有的行(第一行除外)都加到第一行,并提取第一行的公因子,得

$$D_n=(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\underset{c_n-c_1}{\overset{c_2-c_1}{\underset{\cdots}{=\!=\!=\!=}}}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1+a_1+a_2+\cdots+a_n;$$

(6) 解

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\underset{\substack{r_{n-1}-r_{n-2}\\ \cdots \\ r_2-r_1}}{\overset{r_n-r_{n-1}}{=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{c_2+c_n\\ \cdots \\ c_{n-1}+c_n}}{\overset{c_1+c_n}{=\!=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix} n-1 & n & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2};$$

(7) 解　将原行列式化为上三角形行列式. 为此,从第 2 行起,各行均减去第 1 行,得与例 1.3 相仿的行列式

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1 + \frac{a_1}{a_i}c_i} \begin{vmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $b = 1 + a_1 + a_1\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} = a_1\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$. 于是

$$D_n = a_1 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

9. 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 的(i,j)元的代数余子式记作 A_{ij}，求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

解 与例 13 相仿，$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$等于用 1,3,−2,2 替换 D 的第 3 行对应元素所得行列式，即

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4 + c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{按 } c_4 \text{ 展开}]{r_2 \div (-2)} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 + r_2} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 24.$$