第六章

线性空间与线性变换

习 题 解 答

1. 验证：

(1) 2 阶矩阵的全体 S_1；

(2) 主对角线上的元素之和等于 0 的 2 阶矩阵的全体 S_2；

(3) 2 阶对称矩阵的全体 S_3，

对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间，并写出各个空间的一个基.

解 (1) 显然 S_1 对于矩阵的加法和数乘是封闭的，并且满足线性运算的八条规律，由定义，S_1 对于矩阵的加法和数乘构成线性空间. 在 S_1 中取向量组

$$\pi_1: \boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

那么向量组 π_1 线性无关. 事实上，若有

$$\lambda_{11}\boldsymbol{E}_{11}+\lambda_{12}\boldsymbol{E}_{12}+\lambda_{21}\boldsymbol{E}_{21}+\lambda_{22}\boldsymbol{E}_{22}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\lambda_{ij}=0, i=1,2; j=1,2;$$

另一方面，对于任意 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in S_1$，

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+a_{12}\boldsymbol{E}_{12}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+a_{22}\boldsymbol{E}_{22},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 可由 π_1 线性表示. 综上，向量组 π_1 是 S_1 的一个基(从而 S_1 的维数为 4).

(2) 显然 S_2 中矩阵的加法和数乘满足线性运算的八条规律. 又，

$$\forall\,\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & -x\end{pmatrix}\in S_2, \forall\,\lambda\in\mathbb{R},$$

(i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a+x & b+y\\ c+z & -(a+x)\end{pmatrix}\in S_2$，故 S_2 对加法封闭；

(ii) $\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \lambda c & -\lambda a\end{pmatrix}\in S_2$，故 S_2 对数乘封闭，由上可知 S_2 对上述线性运算构成线性空间.

取向量组

$$\pi_2: \widetilde{\boldsymbol{E}}_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

与(1)类似，可证向量组 π_2 线性无关，且

$\forall\, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in S_2$，$\boldsymbol{A}$ 可由 π_2 线性表示为

$$\boldsymbol{A}=a\,\widetilde{\boldsymbol{E}}_{11}+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}.$$

于是向量组 π_2 是 S_2 的一个基(因而其维数为 3).

(3) 因为对称矩阵的和与数乘仍是对称矩阵，即 S_3 对于矩阵加法和数乘是封闭的，与(2)同理，S_3 对于上述线性运算构成线性空间.

取向量组

$$\pi_3:\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{\boldsymbol{E}}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

那么(i)向量组 π_3 线性无关，事实上，若有

$$\lambda_{11}\boldsymbol{E}_{11}+\lambda_{12}\widetilde{\boldsymbol{E}}_{12}+\lambda_{22}\boldsymbol{E}_{22}=\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{pmatrix}=\boldsymbol{O} \Rightarrow \lambda_{11}=\lambda_{12}=\lambda_{22}=0;$$

(ii) $\forall\, \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in S_3$，则 $\boldsymbol{A}$ 可由 π_3 线性表示为

$$\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}_{11}+b\,\widetilde{\boldsymbol{E}}_{12}+d\boldsymbol{E}_{22},$$

故向量组 π_3 是 S_3 的一个基(从而它的维数为 3).

2. 验证：与向量 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 不平行的全体 3 维数组向量，对于数组向量的加法和数乘运算不构成线性空间.

证 事实上，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 均是 $\mathbb{R}^3$ 中与向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 不平行的向量，但它们的和

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

平行于 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，即该集合对于向量的加法不封闭，故不构成向量空间.

3. 在线性空间 $P[x]_3$ 中，下列向量组是否为一个基？

(1) Ⅰ：$1+x,\ x+x^2,\ 1+x^3,\ 2+2x+x^2+x^3$；

(2) Ⅱ：$-1+x,\ 1-x^2,\ -2+2x+x^2,\ x^3$.

解 (1) 设 $k_1(1+x)+k_2(x+x^2)+k_3(1+x^3)+k_4(2+2x+x^2+x^3)=\boldsymbol{0}$ 得 $(k_1+k_3+2k_4)+(k_1+k_2+2k_4)x+(k_2+k_4)x^2+(k_3+k_4)x^3=\boldsymbol{0}$. 因 $1,x,x^2,x^3$ 线性无关，故上式中它们的系数均为 0，即有关于未知数 k
齐次方程，其系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知其秩为 3，故齐次方程有非零解，从而向量组 Ⅰ 线性相关，不是基；

(2) 类似地，对于向量组 Ⅱ，设

$$k_1(-1+x)+k_2(1-x^2)+k_3(-2+2x+x^2)+k_4x^3=0,$$

因 $1, x, x^2, x^3$ 线性无关可得齐次线性方程

$$\begin{cases} -k_1+k_2-2k_3=0, \\ k_1+2k_3=0, \\ -k_2+k_3=0, \\ k_4=0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

它的系数矩阵秩为 4，故只有零解，从而向量组 Ⅱ 线性无关，且含 4 个向量，故是 $P[x]_3$ 的一个基.

4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(7,3,1)^{\mathrm{T}}$ 在基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(6,3,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,0)^{\mathrm{T}}$$

中的坐标.

解 由定义，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 中的坐标就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示式中的系数，也就是方程 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 的解. 由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\overset{r_1-3r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} -8 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_1+2r_2 \\ r_2-2r_1}}{\overset{r_3+r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3+5r_2 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}}{\overset{r_1-2r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

于是，$\boldsymbol{\alpha}$ 在所给基中的坐标为 $(1,-2,6)^{\mathrm{T}}$.

5. 在 $\mathbb{R}^3$ 中取两个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}; \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

试求坐标变换公式.

解 记 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}, \quad (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)=\boldsymbol{B}$,

于是有 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$,

即从基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 故由定理 2 得坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

用矩阵的初等行变换求 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$:

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & -6 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -6 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -7 & -18 \\ 0 & -7 & -10 & -7 & -9 & -30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-7r_2 \\ r_2\times(-1)}]{r_1+2r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -3 & -8 & -11 & -29 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 28 & 40 & 96 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+3r_3 \\ r_2-2r_3}]{r_3\div 4} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 13 & 19 & 43 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -13 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 10 & 24 \end{array}\right),$$

于是所求坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & 43 \\ -9 & -13 & -30 \\ 7 & 10 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

6. 在 $\mathbb{R}^4$ 中取两个基

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1,1)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,0)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,2,1)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_4=(6,6,1,3)^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

(1) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵;

(2) 求向量 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 在后一个基中的坐标;

(3) 求在两个基中有相同坐标的向量.

解 (1) 显然有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix},$$

所以过渡矩阵为
$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}.$$

(2) 设向量在后一个基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$下的坐标为$(x_1',x_2',x_3',x_4')^{\mathrm{T}}$,则由坐标变换公式,有

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

(3) 设向量y在两个基下有相同的坐标$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$,由坐标变换公式,并仍记坐标向量$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$为$\boldsymbol{y}$,则
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{y},$$
即$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$.易求得此齐次线性方程系数矩阵的秩$R(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})=3$,从而解空间的维数等于1,且$\boldsymbol{\xi}=(1,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$为它的一个基础解系.故所求向量为
$$k(1,1,1,-1)^{\mathrm{T}},k\text{ 为任意常数}.$$

7. 设线性空间S_1(习题六第1题(1))中向量
$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2&-1\\4&1\end{pmatrix}.$$

(1) 问$\boldsymbol{b}_1$能否由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$线性表示?$\boldsymbol{b}_2$能否由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$线性表示?

(2) 求由向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$所生成的向量空间$L$的维数和一个基.

解 写出$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$在基$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$中的坐标所构成的矩阵

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\2&-1&3&-1\\1&1&3&4\\0&1&1&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&-3\\0&1&1&-5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

可见(1)$R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=2$,故$\boldsymbol{b}_1$可由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$惟一地线性表示为$\boldsymbol{b}_1=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$;

$R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2)=3>R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=2$,故 $\boldsymbol{b}_2$ 不能由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性表示.

(2) 进一步 $R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)=R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2)=3$,于是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2$ 线性无关,且可作为由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ 所生成空间的一个基.

8. 说明 xOy 平面上变换 $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$的几何意义,其中

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$;(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$;(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$;(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

解 (1) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$,故 T 把向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$关于 y 轴反射;

(2) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$,故 T 把向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$向 y 轴投影;

(3) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$,故 T 把向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$关于直线 $y=x$ 反射;

(4) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$,故 T 把向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$先关于直线 $y=x$ 反射,再关于 x 轴反射;或者把向量绕原点顺时针方向旋转 90°.

9. n 阶对称阵的全体 V 对于矩阵的线性运算构成一个$\frac{1}{2}n(n+1)$维线性空间. $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵,以 $\boldsymbol{A}$ 表示 V 中的任一向量,变换

$$T(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

称为合同变换.试证合同变换 T 是 V 中的线性变换.

证 $\forall\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in V,\forall k\in\mathbb{R}$,由变换 T 的定义,有

$$[T(\boldsymbol{A})]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=T(\boldsymbol{A}),$$

因此 $T(\boldsymbol{A})\in V$,即 T 是 V 中的变换.又

$$T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=T(\boldsymbol{A})+T(\boldsymbol{B});$$

$$T(k\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=kT(\boldsymbol{A}).$$

由线性变换的定义知 T 是 V 中的线性变换.

注 首先要证明 T 是 V 中的变换才谈得上去证明 T 是线性的.

10. 函数集合

$$V_3=\{\boldsymbol{\alpha}=(a_2x^2+a_1x+a_0)\mathrm{e}^x\mid a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}\}$$

对于函数的线性运算构成 3 维线性空间.在 V_3 中取一个基

$$\boldsymbol{\alpha}_1=x^2\mathrm{e}^x,\boldsymbol{\alpha}_2=x\mathrm{e}^x,\boldsymbol{\alpha}_3=\mathrm{e}^x,$$

求微分运算 D 在这个基下的矩阵.

解 根据微分运算的规则,容易看出 D 是 V_3 中的一个线性变换.直接计算基向量在 D 下的像,即可求得 D 在上述基下的矩阵:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathrm{D}(x^2\mathrm{e}^x)=x^2\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathrm{D}(x\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathrm{D}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

于是有
$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$

上式中等号右端的矩阵就是 D 在上述基下的矩阵.

11. 2 阶对称矩阵的全体

$$V_3=\left\{\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_2&x_3\end{bmatrix}\middle|\, x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

对于矩阵的线性运算构成 3 维线性空间. 在 V_3 中取一个基

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

在 V_3 中定义合同变换

$$T(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

求 T 在基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 下的矩阵.

解 对于 $i=1,2,3$, 把 $\boldsymbol{A}_i$ 看做 V_3 中的向量, 并记为 $\boldsymbol{\alpha}_i$, 分别计算基向量在 T 下的像如下:

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{\alpha}_1)&=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{\alpha}_2)&=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{\alpha}_3)&=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

从而
$$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{bmatrix},$$

即 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵是 $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$.