第三章

矩阵的初等变换与线性方程组

习题解答

1. 用初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_1-2r_2 \\ r_3+2r_2}]{r_2\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1+r_2 \\ r_3+r_2}]{r_2\times(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_3+3r_2 \\ r_4+5r_2}]{r_1-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-2r_1}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_1-2r_2 \\ r_3+8r_2 \\ r_4+7r_2}]{r_2\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_3]{r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{PA}$ 为行最简形.

解 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & [illegible] & [illegible] & [illegible] & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{r_1-2r_2\\ r_3+6r_2}]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-3&2&0\\0&1&2&3&2&-1&0\\0&0&0&0&7&-6&1\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-3&2&0\\2&-1&0\\7&-6&1\end{pmatrix}$，并且 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形为 $\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5&3&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$，(1) 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}$ 为行最简形；(2) 求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{QA}^{\mathrm{T}}$ 为行最简形.

解 (1) $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-5&3&1&1&0\\2&-1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&4&1&3\\2&-1&1&0&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&4&1&3\\0&1&7&2&5\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&7\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行最简形；

(2) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-5&2&1&0&0\\3&-1&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\3&-1&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&-1&-3&-5&0\\0&1&-1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&3&5&0\\0&0&-4&-7&1\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&5&0\\-4&-7&1\end{pmatrix}$，并且 $\boldsymbol{QA}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行最简形.

4. 试利用矩阵的初等变换，求下列方阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$.

解 记所给的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_1-2r_2]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}3&0&9&-1&2&0\\0&1&-4&1&-1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1-9r_3\\r_2+4r_3}]{r_3\div 2}\begin{pmatrix}3&0&0&\frac{7}{2}&2&-\frac{9}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\div 3}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-1&-1&2\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

因 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{E}$，由定理 1 的推论，知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{3}{2}\\-1&-1&2\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix};$$

(2) $$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}3&-2&0&-1&1&0&0&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\\1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\3&-2&0&-1&1&0&0&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&4&9&5&1&0&-3&0\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_2]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0&1&2\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-2r_3\\r_4+2r_3}]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&0&4&6\\0&1&0&-1&-2&0&6&9\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_4]{\substack{r_1+r_4\\ r_2+r_4}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&-2&-4\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix},$$

因 $A\stackrel{r}{\sim}E$，由定理 1 之推论，知 A 可逆，并且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{pmatrix}.$$

5．试利用矩阵的初等行变换，求解习题二题 15 之(2)．

解　对此方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&2&4&3\\1&3&9&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&3&1\\0&1&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{\substack{r_1-r_2\\ r_3-r_2}}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&3&1\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

由此得到解为 $x_1=2,x_2=-\frac{1}{2},x_3=\frac{1}{2}$．

6．(1) 设 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$，求 X 使 $AX=B$；

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$，求 X 使 $XA=B$；

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$AX=2X+A$，求 X．

解　(1) 与教材例 3 相仿，若 A 是可逆矩阵，则可求得矩阵方程的解为 $X=A^{-1}B$，而判断 A 是否可逆进而求解这两件事可通过 (A,B) 的行最简形一起解决：即若 $A\stackrel{r}{\sim}E$，则 A 可逆，并且初等行变换把 A 变为 E 的同时把 B 变为 $A^{-1}B$．

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}4&1&-2&1&-3\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-2\\2&2&1&2&2\\3&1&-1&3&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-2\\0&2&3&6&6\\0&1&2&9&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-2\\0&1&2&9&5\\0&0&-1&-12&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+r_3\\r_2-2r_3}]{r_3\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&10&2\\0&1&0&-15&-3\\0&0&1&12&4\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}$.

(2) 因 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，对照(1)，可用初等行变换先求得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，再转置求得 $\boldsymbol{X}$. 计算如下：

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}0&2&-3&1&2\\2&-1&3&2&-3\\1&3&-4&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&3&-4&3&1\\0&-7&11&-4&-5\\0&2&-3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+4r_3}\begin{pmatrix}1&3&-4&3&1\\0&1&-1&0&3\\0&2&-3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&3&-8\\0&1&-1&0&3\\0&0&-1&1&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-r_3\\r_3\times(-1)}]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-4\\0&1&0&-1&7\\0&0&1&-1&4\end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&7\\-1&4\end{pmatrix}$，从而 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-4&7&4\end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$. 欲解此方程，需要(i)判断 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵；(ii)进一步求 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$. 这两件事可由 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 的行最简形一揽子解决.

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}-1&-1&0&1&-1&0\\0&-1&-1&0&1&-1\\-1&0&-1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+r_1\\r_2\times(-1)}]{r_1\times(-1)}\begin{pmatrix}1&1&0&-1&1&0\\0&1&1&2&-1&1\\0&1&-1&-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&2&-1\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&-2&-2&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+r_3\\r_2-r_3}]{r_3\div(-2)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1&-1&0\end{pmatrix},$$

上述结果表明 $A-2E\overset{r}{\sim}E$，故 $A-2E$ 可逆，且

$$X=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

7. 在秩是 r 的矩阵中，有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式？有没有等于 0 的 r 阶子式？

解 在秩是 r 的矩阵中等于 0 的 $r-1$ 阶子式可能有，也可能没有；等于 0 的 r 阶子式可能有，也可能没有. 例如：

(i) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，有等于 0 的 1 阶子式（简称 1 阶零子式，下同），但没有 2 阶零子式；

(ii) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 的秩为 2，没有 1 阶零子式，也没有 2 阶零子式；

(iii) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，有 1 阶零子式，也有 2 阶零子式；

(iv) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的秩为 2，没有 1 阶零子式，但有 2 阶零子式.

8. 从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B，问 A，B 的秩的关系怎样？

解 由矩阵秩的性质⑤，有

$$R(A)-1\leqslant R(B)\leqslant R(A).$$

9. 求作一个秩是 4 的方阵，它的两个行向量是

$$(1,0,1,0,0),(1,-1,0,0,0).$$

解 因 $\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩为 2，故满足要求的方阵可以取为

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

注 (1) 显然所求矩阵应是 5 阶方阵；

(2) 有无限多个 5 阶方阵满足要求，我们给出的是最简单、最朴素的方法；

在秩为 2 的行向量组下面，再适当地铺上两个台阶，以构成含四个有效台阶的行向量组．

10．求下列矩阵的秩：

(1) $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{pmatrix}$．

解 (1) $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\3&1&0&2\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$

$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&4&-6&5\end{pmatrix}\overset{r_3-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

故它的秩为 2；

(2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-7r_1}}{\overset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&2\\0&-7&11&9&-7\\0&-21&33&27&-22\end{pmatrix}$

$\overset{r_3-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&2\\0&-7&11&9&-7\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$，

于是它的秩为 3；

(3) $\begin{pmatrix}2&1&8&3&7\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\1&0&3&2&0\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2&0\\2&-3&0&7&-5\\3&-2&5&8&0\\2&1&8&3&7\end{pmatrix}$

$\underset{\substack{r_3-3r_1\\r_4-2r_1}}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&0\\0&-3&-6&3&-5\\0&-2&-4&2&0\\0&1&2&-1&7\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3+2r_2\\r_4+3r_2}}{\overset{r_2\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&7\\0&0&0&0&14\\0&0&0&0&16\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4-16r_3]{r_3\div 14}\begin{pmatrix}1&0&3&2&0\\0&1&2&-1&7\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是它的秩为 3.

11. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,证明 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证 必要性即定理 2,故只需证明充分性.设 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r$,那么矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的标准形

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

于是 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{F},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{F}$,从而由等价关系的对称性和传递性,知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}$,问 k 为何值,可使

(1) $R(\boldsymbol{A})=1$; (2) $R(\boldsymbol{A})=2$; (3) $R(\boldsymbol{A})=3$.

解一 因 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵,故 $R(\boldsymbol{A})=3\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$.因

$$|\boldsymbol{A}|=-6(k-1)^2(k+2),$$

所以当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时,$R(\boldsymbol{A})=3$.

当 $k=-2$ 时,$R(\boldsymbol{A})\leqslant 2$,又 $\boldsymbol{A}$ 的左上角二阶子式不为零,故 $R(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,于是 $R(\boldsymbol{A})=2$;

当 $k=1$ 时,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

知 $R(\boldsymbol{A})=1$.

解二 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-kr_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&2(k-1)&-3(k^2-1)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&0&-3(k-1)(k+2)\end{pmatrix},$$

于是,(1) 当 $k=1$ 时,$R(\boldsymbol{A})=1$;(2) 当 $k=-2$ 时,$R(\boldsymbol{A})=2$;(3) 当 $k\neq 1$ 且 $k\neq -2$ 时,$R(\boldsymbol{A})=3$.

13. 求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

解　对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换,化为行最简形.

(1) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 2r_1}{\overset{r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \underset{r_3 \div (-3)}{\overset{r_2 \times (-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1 - r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \underset{r_2 - 3r_3}{\overset{r_1 + r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

于是 $R(\boldsymbol{A}) = 3$,故方程组有 $4 - R(\boldsymbol{A}) = 1$ 个自由未知数;并且同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_4 = 0, \\ x_3 - \frac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

取 x_4 为自由未知数,得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

(2) $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \underset{r_3 - 5r_1}{\overset{r_2 - 3r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 + 4r_2}}{\overset{r_2 \div (-4)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取 x_2 和 x_4 为自由未知数,得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

得 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

(3) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&-1&-7\\3&1&2&-7\\4&1&-3&6\\1&-2&5&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-3r_1\\r_3-4r_1\\r_4-2r_1}]{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-2&5&-5\\0&7&-13&8\\0&9&-23&26\\0&7&-11&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&5&-5\\0&7&-13&8\\0&2&-10&18\\0&0&2&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\div 2\\r_1+2r_2\\r_3-7r_2}]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&-5&13\\0&1&-5&9\\0&0&22&-55\\0&0&2&-5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+5r_3\\r_2+5r_3\\r_4-2r_3}]{r_3\div 22}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{7}{2}\\0&0&1&-\frac{5}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

取 x_4 为自由未知数，得

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_4,\\x_2=\frac{7}{2}x_4,\\x_3=\frac{5}{2}x_4,\end{cases}\quad\text{即有通解}\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbb{R}).$$

(4) $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4&-5&7\\2&-3&3&-2\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&7&-8&9\\2&-3&3&-2\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-4r_1\\r_4-7r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&7&-8&9\\0&-17&19&-20\\0&-17&19&-20\\0&-51&57&-60\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4-3r_2\\r_2\div(-17)}]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&7&-8&9\\0&1&-\frac{19}{17}&\frac{20}{17}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-7r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{17}&\frac{13}{17}\\0&1&-\frac{19}{17}&\frac{20}{17}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

取 x_3 和 x_4 为自由未知数，得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=\frac{3}{17}x_3-\frac{13}{17}x_4,\\x_2=\frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4,\end{cases}$$

即得通解 $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{3}{17}\\\frac{19}{17}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-\frac{13}{17}\\-\frac{20}{17}\\0\\1\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

14．求解下列非齐次线性方程组：

(1) $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2,\\3x_1-x_2+2x_3=10,\\11x_1+3x_2=8;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}2x+3y+z=4,\\x-2y+4z=-5,\\3x+8y-2z=13,\\4x-y+9z=-6;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+y-z+w=1,\\4x+2y-2z+w=2,\\2x+y-z-w=1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}2x+y-z+w=1,\\3x-2y+z-3w=4,\\x+4y-3z+5w=-2.\end{cases}$

解　本题中分别以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示方程组的系数矩阵和增广矩阵.

(1) $$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-11r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&-30&33&96\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-6\end{pmatrix}.$$

因 $R(\boldsymbol{A})=2,R(\boldsymbol{B})=3,R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$，知方程组无解；

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\1&-2&4&-5\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&4&-5\\2&3&1&4\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\end{pmatrix}$

$$\underset{\substack{r_3-3r_1\\r_4-4r_1}}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&4&-5\\0&7&-7&14\\0&14&-14&28\\0&7&-7&14\end{pmatrix}\underset{\substack{r_3-14r_2\\r_4-7r_2}}{\overset{r_2\div 7}{\sim}}\begin{pmatrix}1&-2&4&-5\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2<3$，故方程组有无限多解，并且有 $3-R(\boldsymbol{A})=1$ 个自由未知数. 选 z 为自由未知数，得到同解方程组：

$$\begin{cases}x+2z=-1,\\y-z=2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2z-1,\\y=z+2,\end{cases}$$

即得
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbb{R});$$

(3) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}$

$$\underset{r_3-2r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}2&1&-1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2\times(-1)}{\overset{r_1\div 2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

选 y,z 为自由未知数，得到同解方程组

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2},\\w=0,\end{cases}$$

即得
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R});$$

$$(4)\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&4&-3&5&-2\\3&-2&1&-3&4\\2&1&-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&-14&10&-18&10\\0&-7&5&-9&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\div(-14)]{r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-4r_2}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{6}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

选 z,w 为自由未知数,得同解方程组

$$\begin{cases}x=\frac{1}{7}z+\frac{1}{7}w+\frac{6}{7},\\ y=\frac{5}{7}z-\frac{9}{7}w-\frac{5}{7},\end{cases}$$

即得
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{9}{7}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\-\frac{5}{7}\\0\\0\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

15. 写出一个以

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\1\end{pmatrix}\tag{3.2}$$

为通解的齐次线性方程组.

解 把(3.2)式改写为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_1-2c_2\\-3c_1+4c_2\\c_1\\c_2\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2=x_4\text{代入}]{\text{以 }c_1=x_3,}\begin{pmatrix}2x_3-2x_4\\-3x_3+4x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

由此知所求方程组有 2 个自由未知数 x_3,x_4,且对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \end{cases}$$

它以(3.2)式为通解.

注 (1) 有无限多个齐次方程组以(3.2)式为通解表示式,这里给出比较简单的一个,即系数矩阵为行最简形.

(2) 本题与习题四题 23 相仿,是同一问题的两种提法.

16. 设有线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2\lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

问 λ 为何值时(1) 有惟一解;(2) 无解;(3) 有无限多解? 并在有无限多解时求其通解.

解 记此方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,那么当 $\lambda \neq 2$,且 $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ 时 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$,有惟一解;当 $\lambda = -\frac{1}{2}$ 时,$R(\boldsymbol{A}) = 2$,而 $R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$,故方程组无解;当 $\lambda = 2$ 时,

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2 < 3$,故方程组有无限多解,且同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 3, \\ x_3 = 1, \end{cases} \quad 得通解 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

17. λ 取何值时,非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解;(2) 无解;(3) 有无限多解? 并在有无限多解时求其通解.

解 仿照教材例 13,本题也有两种解法,且以行列式解法较为简单,故这里只用此法解之.

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为(可参看习题一题 8(2))

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}\xlongequal[r_1\div(\lambda+2)]{r_1+r_2+r_3}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}(\lambda+2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，即当 $\lambda\neq 1,\lambda\neq -2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$，方程组有惟一解；

当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵成为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

可见，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1<3$，于是方程组有无限多解．因同解方程为 $x_1=-x_2-x_3+1$，

故通解为 $$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

当 $\lambda=-2$ 时，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\underset{\substack{r_2-r_1\\ r_3+2r_1}}{\overset{r_3\leftrightarrow r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 3 & -3 & 9\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

可见 $R(\boldsymbol{A})=2,R(\boldsymbol{B})=3,R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$，于是方程组无解．

18．非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2,\\ x_1-2x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases}$$

当 λ 取何值时有解？并求出它的通解．

解　这里系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，但 $\boldsymbol{A}$ 中不含参数，故以对增广矩阵作初等行变换为宜，求解如下：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ -2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_1}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda\\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\underset{r_3-3r_2}{\overset{r_2\div(-3)}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3}(1-\lambda)\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda+2)\end{pmatrix}.$$

因 $R(\boldsymbol{A})=2$，故当 $R(\boldsymbol{B})=2$，即当 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时，方程组有解.

当 $\lambda=1$ 时，

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

选 x_3 为自由未知数，得同解方程组$\begin{cases}x_1=x_3+1,\\x_2=x_3,\end{cases}$

即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbb{R});$$

当 $\lambda=-2$ 时，

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&-2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

选 x_3 为自由未知数，得
$$\begin{cases}x_1=x_3+2,\\x_2=x_3+2,\end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\quad(c\in\mathbb{R}).$$

19. 设
$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-(\lambda+1),\end{cases}$$
问 λ 为何值时，此方程组有惟一解、无解或有无限多解？并在有无限多解时求其通解.

解 由于系数矩阵是方阵，其行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[c_3+c_2]{r_3+r_2}\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\2&5-\lambda&1-\lambda\\0&1-\lambda&2(1-\lambda)\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&2&0\\2&5-\lambda&1-\lambda\\0&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{c_3-2c_2}(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-4\\2&5-\lambda&\lambda-9\\0&1&0\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}2-\lambda&-4\\2&\lambda-9\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq 10$时，方程组有惟一解；

当$\lambda=10$时，增广矩阵成为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ -2 & -4 & -5 & -11\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\underset{\substack{r_3+r_1\\ r_2+4r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & -18 & -18 & 9\\ 0 & -9 & -9 & -9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -5 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

可见$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\boldsymbol{B})=3$，$R(\boldsymbol{A})\neq R(\boldsymbol{B})$，方程组无解；

当$\lambda=1$时，增广矩阵成为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & -2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

知$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1$，方程组有无限多解，且其通解为

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad (c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

20. 证明$R(\boldsymbol{A})=1$的充分必要条件是存在非零列向量$\boldsymbol{a}$和非零行向量$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$.

证　先证充分性．设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，并不妨设$a_1b_1\neq 0$.

按矩阵秩的性质⑦，由$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$有$R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{a})=1$；另一方面，$\boldsymbol{A}$的$(1,1)$元$a_1b_1\neq 0$，知$R(\boldsymbol{A})\geqslant 1$．于是$R(\boldsymbol{A})=1$.

再证必要性．设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$R(\boldsymbol{A})=1$，并不妨设$a_{kl}\neq 0$.

因$R(\boldsymbol{A})=1$，知$\boldsymbol{A}$的所有二阶子式均为零，故对$\boldsymbol{A}$的任一元a_{ij}（$i\neq k$，$j\neq l$）有

$$\begin{vmatrix}a_{ij} & a_{il}\\ a_{kj} & a_{kl}\end{vmatrix}=0，即\ a_{kl}a_{ij}=a_{il}a_{kj}.$$

上式当$i=k$或$j=l$时也显然成立．于是

$$\begin{pmatrix}a_{1l}\\ a_{2l}\\ \vdots\\ a_{ml}\end{pmatrix}(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})=(a_{il}a_{kj})_{m\times n}=(a_{kl}a_{ij})_{m\times n}=a_{kl}\boldsymbol{A}.$$

令 $a=\frac{1}{a_{kl}}\begin{pmatrix}a_{1l}\\a_{2l}\\\vdots\\a_{ml}\end{pmatrix}$，$b^{\mathrm{T}}=(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})$，则因 $a_{kl}\neq 0$，故 a，b^{T} 分别是非零列向量和非零行向量，且有 $A=ab^{\mathrm{T}}$.

21．设 A 为列满秩矩阵，$AB=C$，证明方程 $Bx=0$ 与 $Cx=0$ 同解.

证 若 x 满足 $Bx=0$，则 $ABx=0$，即 $Cx=0$；

若 x 满足 $Cx=0$，即 $ABx=0$，因 A 为列满秩矩阵，由定理 4 知方程 $Ay=0$ 只有零解，故 $Bx=0$.

综上即知方程 $Bx=0$ 与 $Cx=0$ 同解.

22．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明方程 $AX=E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=m$.

证 按定理 6 知，方程 $AX=E_m$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(A,E_m)$，而 (A,E_m) 含 m 行，有 $R(A,E_m)\leqslant m$；又 $R(A,E_m)\geqslant R(E_m)=m$，因此 $R(A,E_m)=m$，所以方程 $AX=E_m$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=m$.