

Оглавление

1	CLANN	2
1.1	Введение	2
1.2	Кинематика	2
1.3	Напряжение и термодинамическая корректность	3
1.4	Архитектура CLaNN и её производные	4
1.4.1	Функция потерь и процесс обучения: физические ограничения и регуляризация	6
1.5	Виртуальный эксперимент	7
1.5.1	Интерполяция и экстраполяция кривых нагружения	10
1.5.2	Виртуальные эксперименты	10
1.6	Заключение	10
A	Эквивалентность QR-факторизации \mathbf{F} и разложения Холецкого $\mathbf{C}=\mathbf{F}^\top\mathbf{F}$ для вычисления логарифмических координат ξ	12
A.1	Постановка и обозначения	12
A.2	Теорема (эквивалентность \mathbf{U} и \mathbf{R})	12
A.3	Координаты ξ через \mathbf{U}	13

Глава 1

CLANN

1.1 Введение

В данной работе представлена термодинамически корректная гиперупругая модель CLaNN (Convex Laplace Neural Network), основанная на выпуклой нейросети и логарифмической параметризации деформации - тензоре Лапласа. Модель обеспечивает физически корректное интерполирование и экстраполирование поля напряжений и объективное описание механического поведения материалов при больших деформациях, что было проверено при помощи обучения модели на синтетических и натурных данных, и валидации получившейся модели на численном эксперименте.

1.2 Кинематика

Основные соотношения

Мы рассматриваем равновесие тонкой несжимаемой гиперупругой мембраны под определенными нагрузками. Деформация мембраны характеризуется деформацией её срединной поверхности. Обозначим через \mathbf{X} и \mathbf{x} положения точек в исходной (недеформированной) Ω_0 и текущей (деформированной) Ω_t конфигурациях срединной поверхности мембраны соответственно. Деформация определяется отображением $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$, поверхностный градиент деформации $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$, а правый тензор Коши—Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$. Для определения меры деформации мы используем тензор Лапласа $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ [5], который может быть вычислен двумя эквивалентными способами: либо через QR-разложение градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ с $\mathbf{U} = \mathbf{R}$, либо через разложение Холецкого правого тензора Коши—Грина $\mathbf{C} = \mathbf{U}^\top \mathbf{U}$ (Приложение А). В этом случае гиперупругий потенциал является функцией от деформации Лапласа $\psi = \psi(\boldsymbol{\xi})$.

Мера деформации Лапласа В двумерном случае вводятся координаты

$$\xi_1 = \ln(u_{11}), \quad \xi_2 = \ln(u_{22}), \quad \xi_3 = \frac{u_{12}}{u_{11}}, \quad u_{ij} - \text{компоненты тензора } \mathbf{U}. \quad (1.1)$$

1.3 Напряжение и термодинамическая корректность

Гиперупругие напряжения вычисляются по цепному правилу дифференцированием энергии ψ по правому тензору деформации Коши-Грина \mathbf{C} :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{r} := \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\xi}}. \quad (1.2)$$

Такое построение имеет ключевые следствия:

- **Объективность:** $\psi(\mathbf{C}) = \psi(\mathbf{Q}^\top \mathbf{C} \mathbf{Q})$ для любой ортогональной \mathbf{Q} , а значит и \mathbf{S} инвариантна к поворотам.
- **Симметрия напряжений:** $\mathbf{S} = \mathbf{S}^\top$ вследствие симметрии \mathbf{C} и корректного применения цепного правила.
- **Термодинамическая корректность:** равенство (1.2) обеспечивает согласованность с вторым законом термодинамики.

Связь тензора Лапласа и второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа

Применяя цепное правило дифференцирования к выражению (1.2) и используя меру деформации Лапласа, получаем аналитические выражения для компонент второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа в двумерном случае:

$$\begin{aligned} S_{11} &= e^{-2\xi_1} (r_1 - 2\xi_3 r_3) + e^{-2\xi_2} r_2 \xi_3^2, \\ S_{22} &= e^{-2\xi_2} r_2, \\ S_{12} &= -e^{-2\xi_2} r_2 \xi_3 + e^{-2\xi_1} r_3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эти соотношения демонстрируют связь между логарифмическими мерами деформации и компонентами напряжений, характерную для гиперупругих материалов. Экспоненциальные множители $e^{-2\xi_i}$ отражают логарифмическую природу выбранной параметризации, а члены, содержащие ξ_3 , описывают сдвиговые эффекты.

Фундаментальные ограничения

В соответствии с принципами термодинамики и механики сплошных сред, гиперупругая модель должна удовлетворять ряду фундаментальных ограничений, обеспечивающих физическую корректность и материальную устойчивость.

Положительность и рост энергии деформации:

$$\psi(\boldsymbol{\xi}) \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3, \quad \psi(\boldsymbol{\xi}) \rightarrow 0 \text{ при } \|\boldsymbol{\xi}\| \rightarrow 0 \quad \psi(\boldsymbol{\xi}) \rightarrow \infty \text{ при } \|\boldsymbol{\xi}\| \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Эти свойства принято записывать через градиент деформации и правый тензор деформации Коши-Грина [1], но они эквивалентны и для $\boldsymbol{\xi}$.

Напряжения в естественной конфигурации

Из условия $\psi(\boldsymbol{\xi}) \rightarrow 0$ при $\|\boldsymbol{\xi}\| \rightarrow 0$ и непрерывности функции энергии следует, что в естественном состоянии напряжения также обращаются в нуль:

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{0} \text{ при } \|\xi\| \rightarrow 0, \quad (1.5)$$

Это условие является прямым следствием определяющего соотношения $\mathbf{S} = 2\partial\psi/\partial\mathbf{C}$ и принципа объективности, согласно которому в отсутствие деформации не может быть внутренних напряжений.

1.4 Архитектура CLaNN и её производные

В рамках предложенного подхода CLaNN (Convex Laplace Neural Network) энергия деформации $\psi(\xi)$ с мерой деформации Лапласа аппроксимируется посредством выпуклой по входу нейронной сетью (Input Convex Neural Network, ICNN) и вычисления 2 тензора напряжения Пиолы-Кирхгофа \mathbf{S} .

Обобщенная архитектура ICNN

ICNN представляет собой класс нейронных сетей, гарантирующих выпуклость выходной функции относительно входных переменных. Общая архитектура ICNN с L скрытыми слоями определяется следующими соотношениями:

$$z_1 = \sigma(\mathbf{W}_1 \xi + \mathbf{b}_1), \quad (1.6)$$

$$z_{i+1} = \sigma(\mathbf{W}_{i+1} z_i + \mathbf{U}_{i+1} \xi + \mathbf{b}_{i+1}), \quad i = 1, \dots, L-1, \quad (1.7)$$

$$\psi = \mathbf{W}_{L+1} z_L + \mathbf{U}_{L+1} \xi + b_{L+1}, \quad (1.8)$$

где σ — выпуклая и неубывающая функция активации (например, ReLU, softplus), $\mathbf{W}_i \geq 0$ — неотрицательные весовые матрицы скрытых слоев, \mathbf{U}_i — произвольные весовые матрицы для прямых связей от входа, \mathbf{b}_i — векторы смещений. Ключевые принципы построения ICNN включают: (1) использование неотрицательных весов в скрытых слоях, (2) применение выпуклых функций активации, (3) линейные связи от входного слоя ко всем последующим слоям.

В данной работе используется упрощенная однослойная архитектура ICNN с одним скрытым слоем и одним выходным нейроном, определяемая следующими соотношениями:

$$s = \mathbf{W}_1 \xi + \mathbf{b}_1, \quad z = \frac{\text{softplus}(\beta s)}{\beta}, \quad \psi = \mathbf{W}_2^\top z + b_2, \quad \mathbf{W}_2 \geq 0. \quad (1.9)$$

Функция активации $\text{softplus}(\beta x)/\beta$ строго выпукла и $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{softplus}(\beta x)/\beta = \max(0, x)$ (ReLU). Условие $\mathbf{W}_2 \geq 0$ сохраняет выпуклость линейной комбинации.

После прохождения через все ребра вычислительного графа и получения ψ происходит автоматическое дифференцирование $\partial\psi/\partial\xi$, которое реализована во всех современных библиотках для машинного обучения, после чего вычисляется тензор

напряжений \mathbf{S} по формуле (1.3).

Размерности весовых параметров сети: $\mathbf{W}_1 \in \mathbb{R}^{h \times 3}$, $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^h$, $\mathbf{W}_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}^h$, $b_2 \in \mathbb{R}$, где h — размерность скрытого слоя.

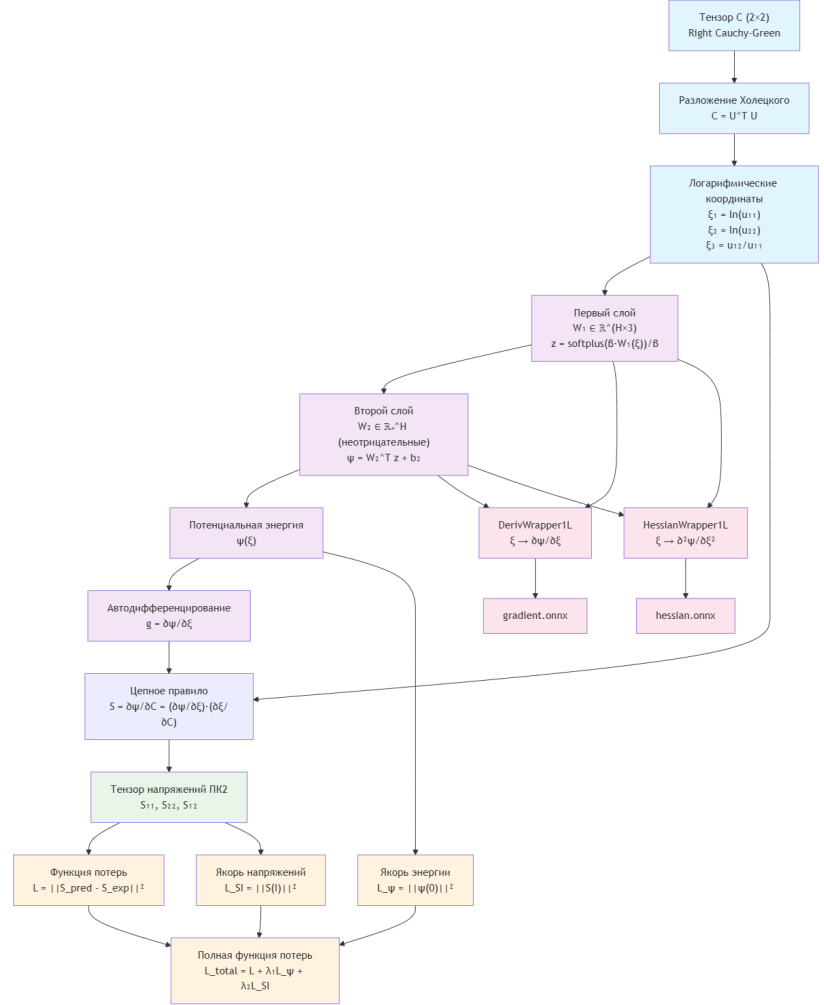


Рис. 1.1. Схема вычислительного процесса CLANN: от входного тензора до функции потерь. Показаны этапы обработки входных данных, вычисления нейросетью, дифференцирования и формирования функции потерь.

Аналитические выражения для производных энергии

Градиент энергии деформации

Аналитическое дифференцирование функции энергии по переменным ξ даёт выражение для градиента:

$$\nabla_{\xi} \psi = \mathbf{W}_1^T (\mathbf{W}_2 \odot \sigma(\beta(\mathbf{W}_1 \xi + \mathbf{b}_1))), \quad (1.10)$$

где $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ - сигмоидальная функция активации, а операция \odot обозначает поэлементное произведение (Hadamard product). Данное выражение демонстрирует, что градиент энергии является линейной комбинацией строк матрицы \mathbf{W}_1^T с весами, определяемыми произведением выходных весов \mathbf{W}_2 и значений функции активации $\sigma(\beta(\mathbf{W}_1 \xi + \mathbf{b}_1))$.

Гессиан энергии деформации

Вторые производные энергии по переменным ξ определяют гессиан, который имеет следующую аналитическую форму:

$$H_{ij} = \sum_h \sigma'_h w_{2,h} W_{h,i} W_{h,j}, \quad (1.11)$$

где $\sigma' = \beta \sigma(1 - \sigma)$ - производная сигмоидальной функции, $\sigma = \text{sigmoid}(\beta s)$, а $s = \mathbf{W}_1 \xi + \mathbf{b}_1$.

Материальная устойчивость и положительная определённость

Из строгой выпуклости $\psi(\xi)$ следует положительная определённость гессиана:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} > 0, \quad (1.12)$$

что обеспечивает положительную определённость касательных модулей упругости $\mathbb{C} = \partial^2 \psi / \partial \mathbf{C}^2$ через цепное правило дифференцирования. Это свойство важно для численной стабильности конечно-элементных расчётов, поскольку гарантирует сходимость метода Ньютона и отсутствие сингулярностей в матрице жёсткости.

1.4.1 Функция потерь и процесс обучения: физические ограничения и регуляризация

Основная функция потерь: минимизация невязки напряжений

В рамках предложенного подхода обучение модели осуществляется путём минимизации функции потерь, которая количественно характеризует невязку между предсказанными и экспериментальными значениями напряжений:

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{S}_{\text{pred}}^{(i)} - \mathbf{S}_{\text{exp}}^{(i)}\|^2. \quad (1.13)$$

Физические ограничения и регуляризация

Для обеспечения физической корректности модели в функцию потерь вводятся дополнительные слагаемые, отражающие принципы механики:

$$L_{\text{SI}} = \|\mathbf{S}(\mathbf{I})\|^2, \quad L_{\psi} = \|\psi(0)\|^2. \quad (1.14)$$

Первое слагаемое L_{SI} обеспечивает выполнение условия естественного состояния: при отсутствии деформации ($\mathbf{C} = \mathbf{I}$) тензор напряжений должен обращаться в нуль. Это условие является прямым следствием принципа объективности и соответствует физическому требованию отсутствия внутренних напряжений в недеформированном состоянии.

Второе слагаемое L_{ψ} гарантирует, что энергия деформации в естественном состоянии равна нулю.

Полная функция потерь и процесс оптимизации

Объединение основного функционала потерь с физическими ограничениями даёт полную функцию потерь:

$$L_{\text{total}} = L + \lambda_{\text{SI}} L_{\text{SI}} + \lambda_{\psi} L_{\psi}. \quad (1.15)$$

Коэффициенты λ_{SI} и λ_{ψ} определяют относительную важность физических ограничений по сравнению с точностью аппроксимации экспериментальных данных. Их выбор является критически важным для баланса между точностью модели и физической корректностью.

Для минимизации полной функции потерь (1.15) используется оптимизатор Adam [2], который широко используется в задачах машинного обучения. Процесс оптимизации включает вычисление градиентов по всем параметрам сети и обновление весов с использованием адаптивных моментов первого и второго порядка.

Такое построение архитектуры CLaNN обеспечивает выполнение всех необходимых физических свойств гиперупругой модели: **термодинамическая корректность** достигается через строгое соблюдение соотношения (1.2), что гарантирует консервативность напряжений $\oint \mathbf{S} : d\mathbf{C} = 0$ и согласованность с законами термодинамики; **материальная устойчивость** обеспечивается строгой выпуклостью функции энергии $\psi(\boldsymbol{\xi})$, гарантируемой архитектурой ICNN с неотрицательными весами $\mathbf{W}_2 \geq 0$ и выпуклой функцией активации, что влечёт положительную определённость гессиана (1.11) и единственность решения; **объективность** автоматически выполняется благодаря параметризации через тензор Коши-Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$, обеспечивая инвариантность относительно поворотов и симметрию напряжений; **положительность энергии** гарантируется комбинацией неотрицательных весов и положительной функции активации, что обеспечивает $\psi(\boldsymbol{\xi}) \geq 0$ и $\psi(\boldsymbol{\xi}) \rightarrow \infty$ при $\|\boldsymbol{\xi}\| \rightarrow \infty$; **численная стабильность** достигается через логарифмическую параметризацию Лапласа (1.1), которая корректно обрабатывает большие деформации и предотвращает нефизичные значения; наконец, **физические ограничения** обеспечиваются через якорные условия в функции потерь (1.14), гарантирующие выполнение условий естественного состояния $\mathbf{S}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ и $\psi(\mathbf{0}) = 0$.

1.5 Виртуальный эксперимент

Мы используем синтетические экспериментальные данные для тестирования CLaNN, для изотропного надувания неоднородной по толщине мембраны. А именно, мы генерируем данные с помощью виртуальных экспериментов на плоских растяжениях образца и используем их в качестве входных данных для обучения CLaNN, без какого-либо дополнительного знания об изотропности/анизотропии образца и форме потенциала.

Обучение модели проводилось на численных экспериментальных данных, полученных при двухосном растяжении образца с геометрией мальтийского креста (Ри-

сунок 1.2). С неогуковской гиперупругой моделью [4]

$$\psi = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3), \quad (1.16)$$

где $\mu = 0.432$ МПа - модуль сдвига, а $I_1 = \text{tr}(\mathbf{C})$ - первый инвариант правого тензора деформаций Коши-Грина \mathbf{C} .

Причем данные для обучения собирались из одного центрального элемента сетки, что соответствует ограничениям эквивалентного натурального эксперимента, в котором невозможно установить без предположения модели материала полное поле напряжения в образце.

Для решения задачи равновесия гиперупругой мембраны используется метод описанный в [3].

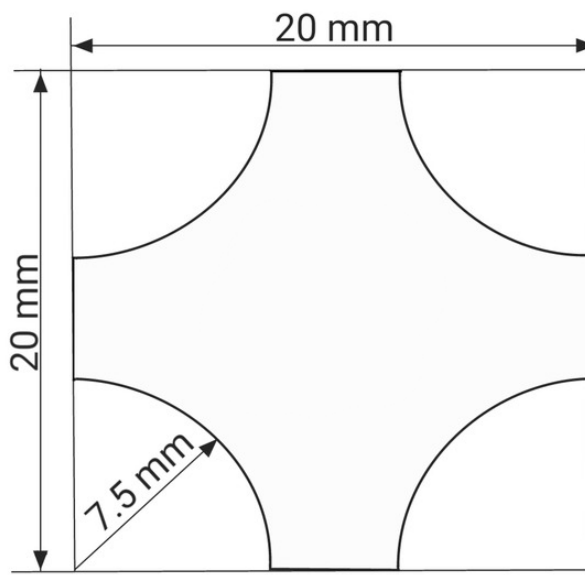


Рис. 1.2. Размеры образца биоматериала в форме мальтийского креста. Радиус вырезов одинаков для всех вырезов

Схематическое представление протоколов показано на рисунке, где $w_i \in [0, 1]$, $i \in \{1, 4\}$ представляет собой процент от заданного максимального смещения u_{\max} для i -го плеча: $w_i = 0$ соответствует закрепленному плечу, а $w_i = 1$ — максимальному смещению. Изменяя w_i , можно получить различные типы экспериментов. В наших виртуальных экспериментах мы постепенно прикладываем смещение с определенным шагом Δs до достижения максимального смещения. Смещение $w_i \cdot n \cdot \Delta s$ прикладывается к i -му плечу на n -м шаге, где $n = 1, \dots, N$, $N = u_{\max}/\Delta s$ — количество шагов. Треугольная сетка для образца является квазиравномерной с размером ячейки $h_{\text{ft}} = 0.25$ мм, максимальное смещение $u_{\max} = 2$ мм и $\Delta s = 0.025$ мм. На каждом шаге мы собираем данные (\mathbf{C}, \mathbf{S}) для всех треугольников, принадлежащих центральной области. Поскольку мы используем линейные (P_1) конечные элементы, значения (\mathbf{C}, \mathbf{S}) постоянны на каждом треугольнике.

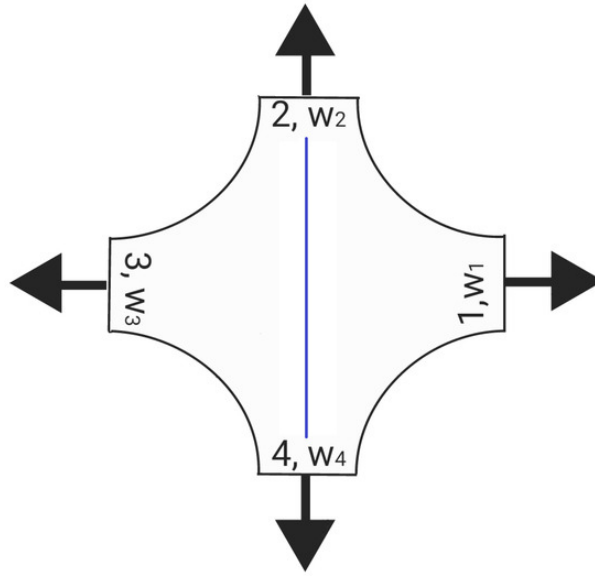


Рис. 1.3. Схематическое представление протоколов. Радиус вырезов одинаков для всех вырезов

Наш предлагаемый тестовый протокол предполагает девять экспериментов:

Таблица 1.1. Протоколы тестовых экспериментов

№	w_1	w_2	w_3	w_4
1	1	1	1	1
2	1	0.75	1	0.75
3	0.75	1	0.75	1
4	1	0.5	1	0.5
5	1	1/3	1	1/3
6	0.75	1	0.75	1
7	1	0.75	1	0.75
8	0.5	1	0.5	1
9	1/3	1	1/3	1

Обучающий набор содержал 90 точек данных правого тензора деформаций Коши-Грина \mathbf{C} и второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа \mathbf{S} .

Гиперпараметры оптимизации:

- Скорость обучения (learning rate): 0.001
- Размер батча (batch size): 128
- Веса физических ограничений: $\lambda_{SI} = 0.1$, $\lambda_{\psi} = 0.1$
- Архитектура: 16 нейронов на скрытом слое

Результаты обучения: Процесс оптимизации показал высокую эффективность: ошибка аппроксимации снизилась на 5 порядков за менее чем 5000 эпох, что

демонстрирует как качество предложенной архитектуры, так и корректность выбора функции потерь. Столь быстрая сходимость обусловлена строгой выпуклостью функции энергии, что обеспечивает единственность минимума и отсутствие локальных минимумов в пространстве параметров.

1.5.1 Интерполяция и экстраполяция кривых нагружения

вставить рисунок

1.5.2 Виртуальные эксперименты

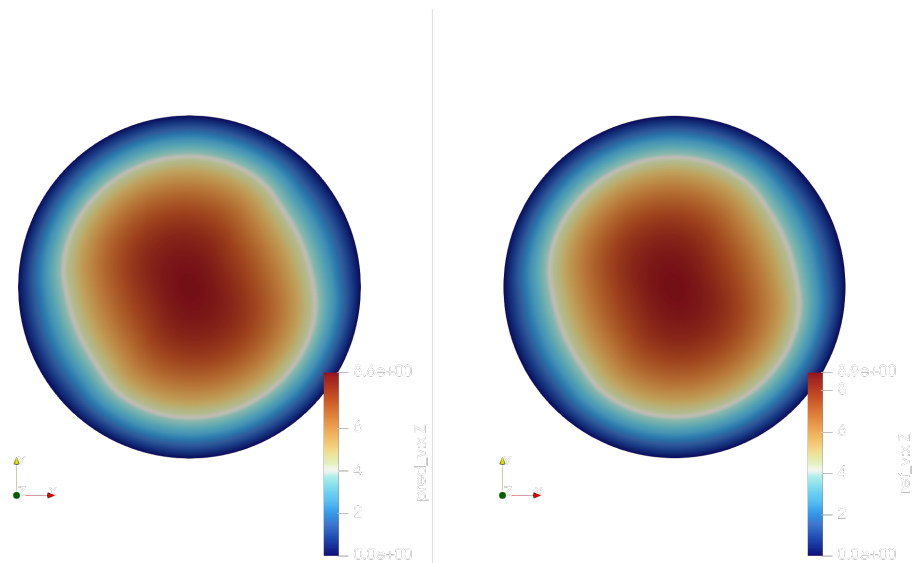


Рис. 1.4. Результаты численного эксперимента: поле деформаций при различных типах нагружения. Показаны компоненты деформации u_{11} , u_{22} и u_{12} для различных конфигураций нагружения.

1.6 Заключение

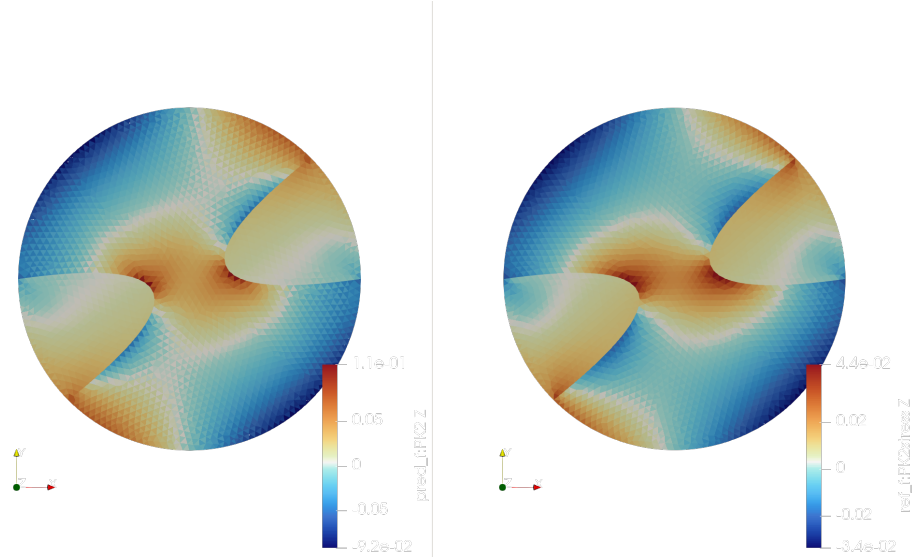


Рис. 1.5. Результаты численного эксперимента: поле напряжений ПК2. Показаны компоненты напряжений S_{11} , S_{22} и S_{12} , вычисленные моделью CLANN для соответствующих деформаций.

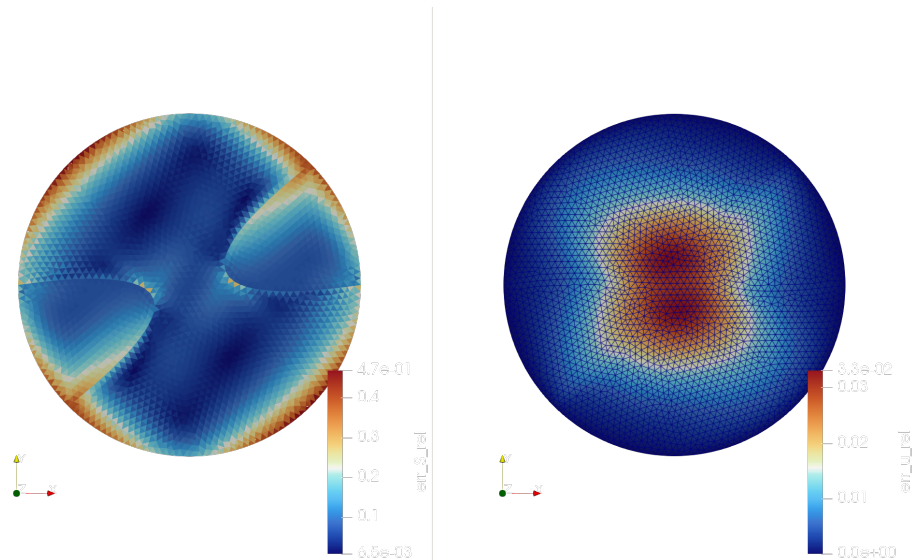


Рис. 1.6. Анализ ошибок численного эксперимента: распределение относительных ошибок между предсказанными и эталонными значениями напряжений. Показаны локальные и глобальные метрики точности модели.

Приложение А

Эквивалентность QR-факторизации \mathbf{F} и разложения Холецкого $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$ для вычисления логарифмических координат $\boldsymbol{\xi}$

А.1 Постановка и обозначения

Рассматривается двумерная гиперупругая кинематика. Пусть:

- $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — градиент деформации, $\det \mathbf{F} > 0$,
- $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$ — правый тензор Коши–Грина (симметричный положительно определённый, SPD),
- Холецкий: $\mathbf{C} = \mathbf{U}^\top \mathbf{U}$, где \mathbf{U} — верхнетреугольная и $\text{diag}(\mathbf{U}) > 0$,
- Логарифмические координаты: $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\ln u_{11}, \ln u_{22}, u_{12}/u_{11})$.

Цель: показать, что при наличии \mathbf{F} можно заменить вычисление $\mathbf{U} = \text{chol}(\mathbf{C})$ на $\mathbf{U} = \mathbf{R}$ из тонкого QR(\mathbf{F}) = $\mathbf{Q}\mathbf{R}$ (с $\text{diag}(\mathbf{R}) > 0$), и получить те же $\boldsymbol{\xi}$.

А.2 Теорема (эквивалентность \mathbf{U} и \mathbf{R})

Пусть $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ невырождённая ($\det \mathbf{F} > 0$). Рассмотрим тонкую QR-факторизацию

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad (\text{A.1})$$

где $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — ортогональная ($\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}$), $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — верхнетреугольная. Выберем стандартную нормализацию $\text{diag}(\mathbf{R}) > 0$. Тогда \mathbf{R} совпадает с фактором Холецкого для \mathbf{C} :

$$\mathbf{R} = \text{chol}(\mathbf{C}), \quad \text{с} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}. \quad (\text{A.2})$$

Доказательство.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F} = (\mathbf{QR})^\top (\mathbf{QR}) = \mathbf{R}^\top \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} \mathbf{R} = \mathbf{R}^\top \mathbf{R}. \quad (\text{A.3})$$

Так как \mathbf{C} — SPD и \mathbf{R} — верхнетреугольная с положительной диагональю, то представление $\mathbf{C} = \mathbf{R}^\top \mathbf{R}$ единственно. По единственности фактора Холецкого (с $\text{diag} > 0$) следует $\mathbf{R} = \text{chol}(\mathbf{C})$. \square

Следствие. Логарифмические координаты $\boldsymbol{\xi}$, определённые через $\mathbf{U} = \text{chol}(\mathbf{C})$, можно эквивалентно вычислять из $\mathbf{U} = \mathbf{R}$ в QR(\mathbf{F}), при условии $\text{diag}(\mathbf{R}) > 0$.

A.3 Координаты $\boldsymbol{\xi}$ через \mathbf{U}

$$\text{Для } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}, \text{diag}(\mathbf{U}) > 0,$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\ln u_{11}, \ln u_{22}, u_{12}/u_{11}). \quad (\text{A.4})$$

Тем самым, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{F}) := \boldsymbol{\xi}(\mathbf{R}(\mathbf{F})) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{U}(\mathbf{C}))$.

Список литературы

- [1] Stuart S Antman. *Nonlinear problems of elasticity*. Springer, 2005.
- [2] Diederik P Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*, 2014.
- [3] Alexey Liogky and Victoria Salamatova. Data-driven anisotropic biomembrane simulation based on the laplace stretch. *Computation*, 12(3):39, 2024.
- [4] R.W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications, 1997.
- [5] Victoria Salamatova and Alexey Liogky. Interpretable data-driven modeling of hyperelastic membranes. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 39(11):e3757, 2023.