

# Оглавление

<b>1</b>	<b>CLANN</b>	<b>2</b>
1.1	Введение . . . . .	2
1.2	Кинематика деформаций . . . . .	2
1.3	Напряжения и термодинамическая корректность . . . . .	2
1.4	ICNN: архитектура и обучение . . . . .	3
1.4.1	Функция потерь и обучение . . . . .	5
1.4.2	? Численные аспекты и интеграция в МКЭ . . . . .	5
1.5	Численные эксперименты . . . . .	6
1.5.1	Валидация на синтетических данных . . . . .	6
1.5.2	Сравнение с классическими моделями . . . . .	6
1.6	Натурные эксперименты . . . . .	6
1.6.1	Экспериментальная установка . . . . .	6
1.6.2	Результаты и валидация . . . . .	6
1.7	Заключение . . . . .	6
	<b>Список литературы</b>	<b>7</b>

# Глава 1

## CLANN

### 1.1 Введение

В данной работе представлена термодинамически корректная гиперупругая модель CLANN (Convex Laplace Artificial Neural Network), основанная на выпуклой нейросети и логарифмической параметризации деформации - тензоре Лапласа. Модель обеспечивает физически корректное интерполирование и экстраполирование поля напряжений и объективное описание механического поведения материалов при больших деформациях, что было проверено при помощи обучения модели на синтетических и натуральных данных, и валидации получившейся модели на численном эксперименте.

### 1.2 Кинематика деформаций

**Основные соотношения** Пусть  $\mathbf{F}$  — градиент деформации, а правый тензор Коши—Грина  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$ . В параметризации Холецкого  $\mathbf{C} = \mathbf{U}^\top \mathbf{U}$ , где  $\mathbf{U}$  — верхнетреугольный тензор.

**Мера деформации Лапласа** В двумерном случае вводятся координаты

$$\xi_1 = \ln(u_{11}), \quad \xi_2 = \ln(u_{22}), \quad \xi_3 = \frac{u_{12}}{u_{11}}. \quad (1.1)$$

### 1.3 Напряжения и термодинамическая корректность

**Гиперупругие напряжения** Гиперупругие напряжения получаются дифференцированием энергии по мере деформации:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{r} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (1.2)$$

Такое построение гарантирует объективность и консервативность напряжений.

**Компоненты напряжений в двумерном случае** Для выбранной параметризации в 2D справедливы выражения

$$\begin{aligned} S_{11} &= e^{-2\xi_1} (r_1 - 2\xi_3 r_3) + e^{-2\xi_2} r_2 \xi_3^2, \\ S_{22} &= e^{-2\xi_2} r_2, \\ S_{12} &= -e^{-2\xi_2} r_2 \xi_3 + e^{-2\xi_1} r_3. \end{aligned} \quad (1.3)$$

**Механические ограничения гиперупругости.**

**Положительность и рост энергии:**

$$\psi(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \psi(\xi) \rightarrow \infty \text{ при } \|\xi\| \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Это обеспечивается  $\mathbf{W}_2 \geq 0$ , положительной активацией и выпуклостью.

**Симметрия и объективность:**

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad \psi = \psi(\mathbf{C}) \Rightarrow \text{инвариантность относительно поворотов.} \quad (1.5)$$

**Консервативность напряжений:**

$$\oint \mathbf{S} : d\mathbf{C} = 0. \quad (1.6)$$

## 1.4 ICNN: архитектура и обучение

**Строго выпуклая энергия** Энергия деформации  $\psi(\xi)$  задаётся входной выпуклой нейросетью (ICNN):

$$z = \frac{\text{softplus}(\beta \mathbf{W}_1 \xi)}{\beta}, \quad \psi = \mathbf{W}_2^\top z + b_2, \quad \mathbf{W}_2 \geq 0. \quad (1.7)$$

Отсюда гессиан  $\mathbf{H} = \partial^2 \psi / \partial \xi^2$  положительно определён.

**Аналитический градиент архитектуры ICNN** Аналитическая форма градиента ICNN имеет вид

$$\nabla_\xi \psi = \mathbf{W}_1^\top (w_2 \odot \sigma(\beta(\mathbf{W}_1 \xi))), \quad (1.8)$$

где  $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$  - сигмоида.

**Аналитический гессиан** Аналитическая форма гессиана ICNN имеет вид

$$H_{ij} = \sum_h \sigma'_h w_{2,h} W_{h,i} W_{h,j}, \quad \sigma' = \beta \sigma(1 - \sigma), \quad \sigma = \text{sigmoid}(\beta s), \quad s = \mathbf{W}_1 \xi + \mathbf{b}_1. \quad (1.9)$$

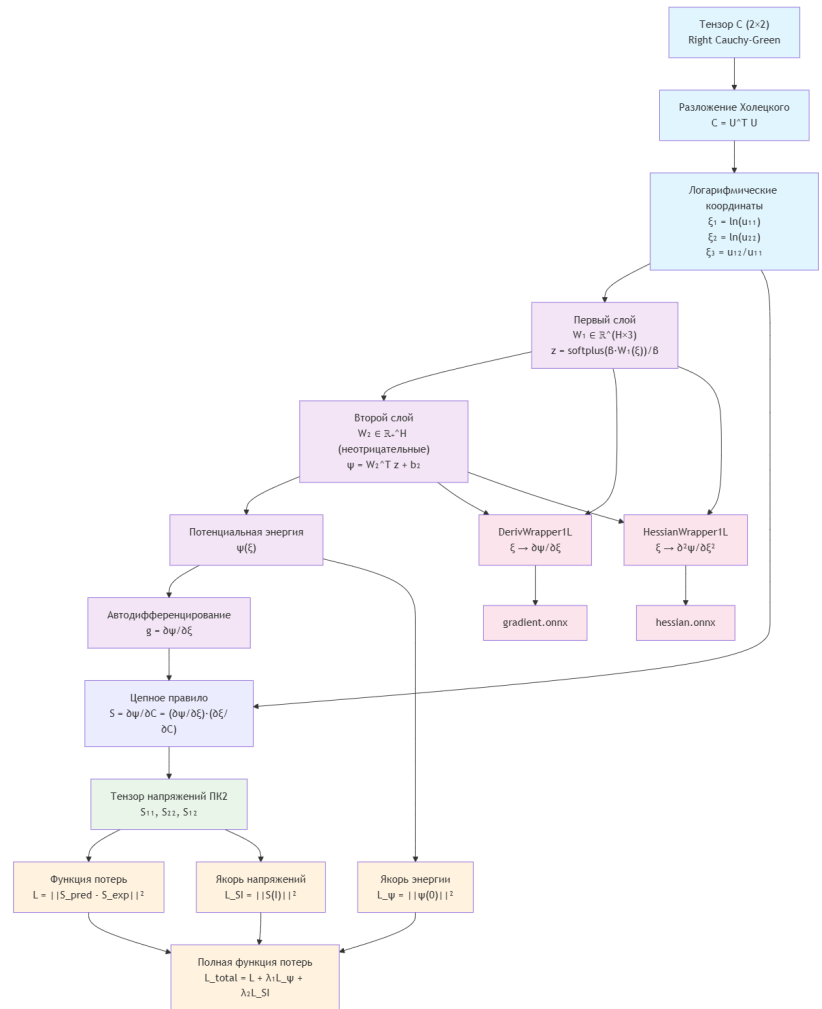


Рис. 1.1. Схема вычислительного процесса CLANN: от входного тензора до функции потерь. Показаны этапы обработки входных данных, вычисления нейросетью, дифференцирования и формирования функции потерь.

### 1.4.1 Функция потерь и обучение

Основная функция потерь

$$L = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{S}_{\text{pred}}^{(i)} - \mathbf{S}_{\text{exp}}^{(i)}\|^2. \quad (1.10)$$

Якорные слагаемые

$$L_{\text{SI}} = \|\mathbf{S}(\mathbf{I})\|^2, \quad L_{\psi} = \|\psi(0)\|^2. \quad (1.11)$$

Полная функция потерь:

$$L_{\text{total}} = L + \lambda_{\text{SI}} L_{\text{SI}} + \lambda_{\psi} L_{\psi}. \quad (1.12)$$

### 1.4.2 ? Численные аспекты и интеграция в МКЭ

Разложение Холецкого

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^{\top} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \text{cholesky\_upper}(\mathbf{C}).$$

Автоматическое дифференцирование и экспорт

Используются автодифференцирование для  $\mathbf{r} = \partial\psi/\partial\xi$  и аналитические формулы для  $\mathbf{S}$  и гессиана; возможен экспорт вычислителей в онлайн-форматы.

**Физическая корректность и стабильность ICNN**

Архитектура ICNN обеспечивает несколько ключевых свойств, критически важных для физической корректности модели:

**Объективность:** Модель инвариантна относительно поворотов благодаря параметризации через инварианты деформации. Это гарантирует, что предсказания напряжений не зависят от выбора системы координат.

**Выпуклость энергии:** Строгая выпуклость  $\psi(\xi)$  обеспечивает единственность решения задачи минимизации энергии и положительную определённость касательной жёсткости. Это критически важно для стабильности численного решения в конечно-элементных расчётах.

**Положительность энергии:** Ограничение  $\mathbf{W}_2 \geq 0$  вместе с положительной активацией softplus гарантирует, что  $\psi(\xi) \geq 0$  для всех допустимых деформаций, что соответствует физическому принципу положительности энергии деформации.

**Стабильность численного решения:** Положительная определённость гессиана  $\mathbf{H} = \partial^2\psi/\partial\xi^2$  обеспечивает сходимость метода Ньютона при решении нелинейных уравнений равновесия. Это свойство особенно важно при больших деформациях, когда классические модели могут терять устойчивость.

**Регуляризация и обобщающая способность:** Выпуклая структура ICNN естественным образом предотвращает переобучение и обеспечивает плавную интерполяцию между точками обучения. Модель способна к экстраполяции за пределы диапазона обучающих данных благодаря физически обоснованной структуре энергии.

**Эффективность вычислений:** Аналитические выражения для градиента и гессиана позволяют избежать дорогостоящего численного дифференцирования, что критично для интеграции в конечно-элементные пакеты и реального времени расчётов.

**Термодинамическая корректность:** прямое вычисление напряжений из автоматического дифференцирования функции энергии по формуле (1.2) гарантирует термодинамическую корректность.

## 1.5 Численные эксперименты

### 1.5.1 Валидация на синтетических данных

### 1.5.2 Сравнение с классическими моделями

## 1.6 Натурные эксперименты

### 1.6.1 Экспериментальная установка

### 1.6.2 Результаты и валидация

## 1.7 Заключение

# Литература