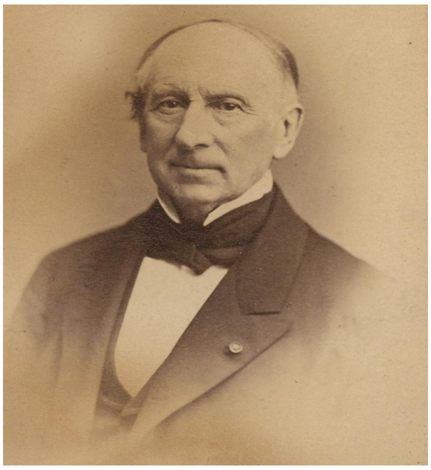
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



Augustin Louis Cauchy
(1789 -1857)

I- Qu'est ce que c'est une *équation différentielle*

1- Définition

Définition

Une ***équation différentielle*** est une équation dont l' inconnue est une fonction ; l'équation est dite *différentielle* car elle se présente sous la forme d'une relation entre la ou les dérivé(s) de la fonction et la fonction elle-même.

Remarque : on écrira la fonction sans le variable.
Exemple : $y'+y=0$ au lieu d'écrire $y'(x)+y(x)=0$

Définition

L'*ordre* d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée apparaissant dans l'équation.

Exemple : Donner l'ordre des équations différentielles suivantes :

- $y''' + y' - 7y = 0$
- $x^2y'' + y' + y = \cos(x)$
- $y''''' = e^x$ on notera $y^{(5)} = e^x$
- $y' - y = \sin(x)$
- $8y''' + y' = y$
- $y'+\frac{y}{\tau}=\frac{E}{\tau}$

Remarque : Dans ce chapitre nous étudierons les équation différentielles du premier ordre.

$$\boxed{(E) : \; y'(t) = ay(t) + h(t)}$$

- $y(t)$ est une fonction dérivable que l'on cherche à trouver.
- $a \in \mathbb{R}^*$ est une constante (non nulle)
- $h(t)$ est une fonction donnée.

2- Équation homogène

Définition

On note $\boxed{(E_H) : \; y'(t) = ay(t)}$ l'équation **homogène** associée à (E). On l'obtient en « supprimant » le terme $h(t)$, seul terme qui ne contient pas y ou y'.

Remarque : on notera S_H , la solution de l'équation homogène.
Exemple : $y' + 4y = 0$ est une équation différentielle homogène.
Et, on a la solution homogène : $S_H = \{ x \mapsto ke^{-4x} \setminus k \in \mathbb{R} \}$

Faire les exercices 1 et 2 de feuille du TD

3- Solution particulière et Solution générale

Définition

- Une fonction vérifiant (E) est appelée ***solution particulière,*** notée S_p, de (E).

- Il y a une infinité de solutions en générale.

On appelle ***solution générale*** de (E) une formule donnant un paramétrage de toutes les fonction solutions de (E).

Exemple : on a (E) : $y' + 2y = 4$
Ainsi, on a $S_p = 2$ et $S = \{ x \mapsto ke^{-2x} + 2 \setminus k \in \mathbb{R} \}$

II-Résolution d'une *équation différentielle*

Lorsque l'on résout une *équation différentielle,* on cherches séparément **la solution particulière (S_p)** et **la solution homogène (S_h)** de l'équation différentielle. Ainsi, la solution générale de cette équation est donc la somme de ces deux solutions.

$$\boxed{y = S_p + S_h}$$

1- Solutions particulières de $y'(t) + ay(t) = c$

La solution particulière correspond le cas où ***h(t) = c , constante*** .(appelé second membre)

Proposition

Lorsque le **seconde membre** est une **constante** (notée *c*), équation différentielle *(E)* admet toujours une **solution particulière constante.**

Méthode 1 : Pour trouver la solution particulière, on pose $y(t) = c$.
Donc $y' = 0$. Ce qui nous donne l'équation suivante : $ay(t) = c$

On obtient alors : $\boxed{y(t) = \frac{c}{a}}$

Faire l'exercice 3 de feuille du TD

Remarque : La solution particulière constante forme une asymptote de n'importe quelle autre solution de l'équation différentielle.
Physiquement, cette asymptote corresponde à une situation d'équilibre. Particulièrement, pour la circuit RC (ou touts autres circuits électroniques) c'est le régime permanente.

2-Solutions de l'équation homogène $y'(t) + ay(t) = 0$

La solution particulière correspond le cas où ***h(t) = c , constante .***(appelé second membre)

Proposition

Les solutions d'une **équation différentielle homogène** (E_h) : $y' + ay = 0$ sont les fonction $x \mapsto ke^{-ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$
On peut appeler ces solutions : **solutions homogènes**

Remarque : L'écart entre deux solutions particulières d'une équation différentielle (E) : $y' + ay = h$ est une solution de l'équation homogène associée (E_h) : $y' + ay = 0$

Méthode 2 : Pour trouver la solution particulière, on pose $y(t) = c$.
Donc $y' = 0$. Ce qui nous donne l'équation suivante :

On obtient alors : $\boxed{y(t) = \frac{c}{a}}$

Faire l'exercice 4 de feuille du TD

2- Solutions générale d'une *équation différentielle*

Méthode 3 : Les trois étapes à suivre pour résoudre une *équation différentielle* :

Exemple : (E) : $y' = 4y + 12$

1. **Trouver les solutions homogènes :**
   On a donc l'équation homogène associé : (E_0) : $y' = 4y$ donc $a = 4$
   Ainsi, les solution homogènes sont : $ke^{at} = ke^{4t}$

2. **Trouver une solution particulière :**
   On suppose que $y = constante$ (i.e. $y' = 0$)
   Donc $0 = 4y + 12$ D'où $4y = -12$
   Ainsi la solution particulière $y = -3$

3. Afin d'obtenir les solutions générales **on superpose** (ajoute) **les solutions générales et la solution particulière** :
   Les solution générales sont : $t \mapsto -3 + ke^{4t}$

1.

Attention : Ne pas confondre la fonction y et la variable t (souvent utilisée en physique et chimie pour montrer la variation au cours du temps)

Remarque : Avant de commencer, on vérifie si l'équation différentielle est linéarisée, c'est à dire on vérifie si la constante devant y'(la fonction dérivée) est égale à **1.** Si ce n'est pas le cas, on linéarise l'équation différentielle :

Exemple : (E) : $2y' = 8y + 24$ → Ici, l'équation différentielle n'est pas linéarisée

On divise alors pas 2 : (E) : $\frac{2}{2}y' = \frac{8}{2}y + \frac{24}{2}$ d'où (E) : $y' = 4y + 12$

Faire l'exercice 5 de feuille du TD

II- Conditions initiales (ou particulières)

1- Condition initiale ou particulière

Définition

En physique et chimie, on appelle **condition initiale,** une valeur de la fonction lorsque t=0 et condition particulière lorsque $t \neq 0$.

Remarque : La condition initiale (ou particulière) permet de choisir LA fonction qui satisfait le problème posé parmi les solutions générales ainsi que fixer la valeur de k.

Méthode 4 : Afin de déterminer la valeur de k, on remplace la variable t et $y(t)$ par les valeurs données, ainsi on en déduit la valeur de k (on parle de *problème de Cauchy d'ordre 1*) .
Alors, il suffit de réécrire la solution en remplaçant la valeur de k par sa valeur trouvé.
Exemple : Trouver la solution qui vérifié $y(t=0) = -2$, pour l'équation suivante : (E) : $y' = 4y + 12$

On a trouvé que les solutions générales sont de la forme $y(t) = -3 + ke^{4t}$

On évalue (calcule) pour $t = 0$

$$y(t=0) = -3 + ke^{4\times 0} = -3 + k\times 1 = -2$$

Donc $k = -2 + 3 = \mathbf{1}$

Ainsi, on trouve $y(t) = -3 + \mathbf{1}e^{4t}$

Faire l'exercice 6 de feuille du TD

2- Dynamique des solutions (physique-chimie)

Définition

En physique et chimie, on appelle τ (tau), constante de temps caractéristique.

On dit que ce nombre est homogène à un temps et est égale à $\boxed{\frac{-1}{a}}$.

Lorsque l'on a une équations différentielle de forme $y' + ay = c$, on obtient les solutions générales de la forme : $y(t) = \frac{-c}{a} + ke^{at}$

On note $\tau = \frac{-1}{a}$, donc l 'équation devient $y(t) = c\tau + ke^{\frac{-t}{\tau}}$

Faire l'exercice 7 de feuille du TD

Définition

On appelle :

→ **Régime transitoire** l'intervalle de temps [0 ; 5τ[.
→ Régime permanent l'intervalle de temps [5τ ; +∞[.