ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Complément du cours - Équation différentielle en Physique-Chimie

Programme de Classe de Terminale Générale – Spécialité Physique-Chimie	
[Ils fournissent l'opportunité de faire émerger la cohérence d'ensemble du programme sur] des notions transversales (modèles, variations et bilans, réponse à une action, évolution temporelle régie par une équation différentielle du premier ordre, temps caractéristiques, etc.) (préambule-p.2)	
- En classe terminale, il s'agit de passer de l'étude limitée au cas de durées discrètes (multiples entiers du temps de demi-vie) à une loi d'évolution d'une population de noyaux régie par une équation différentielle linéaire du premier ordre .(p.7) -Établir l'expression de l'évolution temporelle de la population de noyaux radioactifs. Exploiter la loi et une courbe de décroissance radioactive. (p.8)	Capacité Mathématique Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec un second membre constant.
- L'étude de l'évolution temporelle de la température d'un système au contact d'un thermostat est l'occasion de proposer une modélisation par une équation différentielle du premier ordre et d'introduire la notion de temps caractéristique (p.15) - Effectuer un bilan d'énergie pour un système incompressible échangeant de l'énergie par un transfert thermique modélisé à l'aide de la loi de Newton fournie. Établir l'expression de la température du système en fonction du temps. (p.16)	Capacité numérique (hors programme) :
-Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge par une source idéale de tension et dans le cas de sa décharge. (p.20)	Tracer la courbe théorique à l'aide d'un langage informatique ici .

Avant de commencer

Je vous rappelle que, en physique-chimie :
→ Lorsque les variables ne dépendent pas du temps (en régime continue), on les note avec des MAJUSCULES afin de montrer qu'elles ne varient pas i.e.* elles sont constantes.
→ Lorsque les variables dépendent du temps (en régime variable), on les note avec des minuscules afin de montrer qu'elles varient i.e. elles ne sont pas constantes.

*i.e.(*id est* , en latin) : c'est-à-dire

I- Circuit RC (Résistance + Condensateur)

1- Rappels du cours

Intensité d'un courant électrique

En régime variable, c'est-à-dire lorsque les variables dépendent du temps, l'intensité $i(t)$ du courant électrique, en un point du circuit, s'exprime de manière suivante:

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt} \qquad \begin{cases} i(t) : \text{intensité (A)} \\ t : \text{temps (s)} \\ q(t) : \text{charge électrique (C)} \end{cases}$$

Relation entre $q(t)$ et $u_C(t)$

La charge $q(t)$ dans l' armature d'un condensateur est proportionnelle à la tension $u_C(t)$ à ses bornes.

$$q(t)=C\times u_C \qquad \begin{cases} C : \text{Capacité (F)} \\ u_C : \text{tension (V)} \\ q(t) : \text{charge électrique (C)} \end{cases}$$

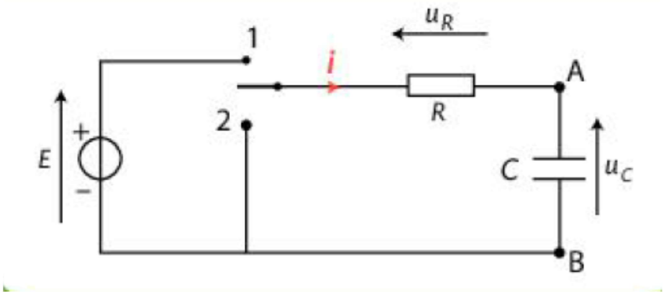
L'intensité i(t) aux bornes d'un condensateur

Ainsi, on cherche la relation entre l'intensité et la tension aux bornes du condensateur.

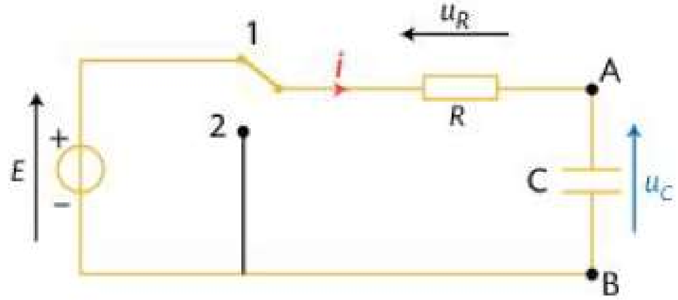
$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt} \quad \text{donc} \quad i(t)=\frac{d(C\times u_C(t))}{dt}$$

Or capacité C est une constante d'où $\boxed{i(t)=C\,\frac{du_C(t)}{dt}}$

2- Équation différentielle de la charge et la solution



E est un source de tension idéale, donc E est constante.
À $t < 0$s, le condensateur est déchargé soit $u_C\ (t = 0) = 0$ V .
À $t = 0$s, on ferme l'interrupteur à la position 1.



Établissons l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C\ (t)$ aux bornes d'un condensateur :

1- Loi des mailles appliquée au circuit : $u_R + u_C - E = 0$ (*)

2- Loi d'Ohm aux bornes de R : $u_R = R \times i$

3- Relation qui relie $i(t)$ et $u_C\ (t)$: $i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$

4- On remplace l'expression de u_R dans (*) : $u_R + u_C - E = RC \times \frac{du_C}{dt} + u_C - E = 0$

Donc $RC \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E$

En divisant par RC : $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$
on pose $\tau = RC$, temps caractéristique du circuit, homogène à un temps. D'où :

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}}$$

On reconnais une équation différentielle linéaire d'ordre premier à coefficients constants, de type :

$$y' + ay = constante$$

<u>Détermination de la solution</u> de l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C\,(t)$:

On cherche la solution de l'équation différentielle sous la forme :

$$u_C(t) = Solution\ particulière + Solution\ homogène$$

1- Détermination des solutions de l'équation homogène (E_H) : $\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau}u_C=0$

Donc : $\frac{du_C}{dt}=-\frac{1}{\tau}u_C$

Les solution générales sont donc : $\boxed{u_C(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$

2- Détermination de la solution particulière :

On suppose que la fonction u_C est constante. D'où $\frac{du_C}{dt}=0$

Donc : $\frac{u_C}{\tau}=\frac{E}{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{u_c=E}$

3- Détermination de A (constante) :

On a trouvé donc : $\boxed{u_C(t)=E+Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$

Or, d'après la condition initiales, on a $u_C\,(t = 0) = 0$ V. (1)

Calculons $u_C\,(t = 0)$: $u_C(t=0)=E+Ae^{-\frac{0}{\tau}}=E+A\times 1=E+A$ (2)

Donc, d'après (1) et (2) , on a $A+E=0$ d'où $\boxed{A=-E}$

On remplace A : $\boxed{u_C(t)=E-Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$

En factorisant on trouve : $\boxed{u_C(t)=E(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}$

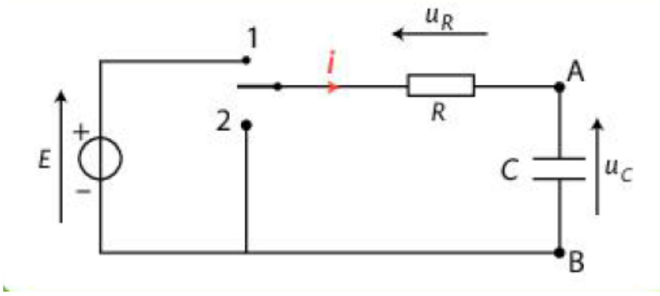
4 – On peut éventuellement vérifier la solution :

On dérive $u_C\,(t)$: $\frac{du_C}{dt}=\frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}}$

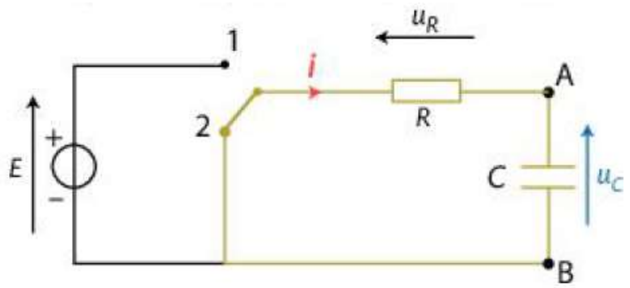
On éjecte dans l'équation :
$$\begin{aligned}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau}u_C &= \frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{\tau}\times E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= \frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{\tau}\times(E-Ee^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= \frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{\tau}\times(E-Ee^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= \frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{E}{\tau}-\frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{E}{\tau}+[(\frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}})-(\frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}})] \\ &= \frac{E}{\tau}\end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié la solution.

3- Équation différentielle de la décharge et la solution



E est un source de tension idéale, donc E est constante.
À $t < 0$s, le condensateur est déchargé soit $u_C\,(t = 0) = E$ V .
À $t = 0$s, on ferme l'interrupteur à la position 2.



Établissons l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C\,(t)$ aux bornes d'un condensateur :

1- Loi des mailles appliquée au circuit : $u_R + u_C = 0$ (*)

2- Loi d'Ohm aux bornes de R : $u_R = R \times i$

3- Relation qui relie $i(t)$ et $u_C\,(t)$: $i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$

4- On remplace l'expression de u_R dans (*) : $u_R + u_C = RC \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

Donc $RC \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

En divisant par RC : $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = 0$
on pose $\tau = RC$, temps caractéristique du circuit, homogène à un temps. D'où :

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0}$$

On reconnais une équation différentielle linéaire d'ordre premier à coefficients constants, de type :

$$y' + ay = constante$$

<u>Détermination de la solution </u>de l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$:

On cherche la solution de l'équation différentielle sous la forme :

$$u_C(t) = Solution\ homogène$$

1- Détermination des solutions de l'équation homogène (E_H) : $\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau}u_C=0$

Donc : $\frac{du_C}{dt}=-\frac{1}{\tau}u_C$

Les solution générales sont donc : $\boxed{u_C(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$

2- Détermination de A (constante) :

On a trouvé donc : $\boxed{u_C(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$

Or, d'après la condition initiales, on a $u_C(t=0) = E$ V. (1)

Calculons $u_C(t=0)$: $u_C(t=0)=Ae^{-\frac{0}{\tau}}=A\times1=A$ (2)

Donc, d'après (1) et (2), on a : $\boxed{A=E}$

On remplace A : $\boxed{u_C(t)=Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$

3 – On peut éventuellement vérifier la solution :

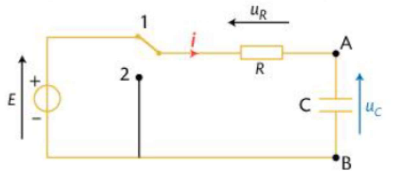
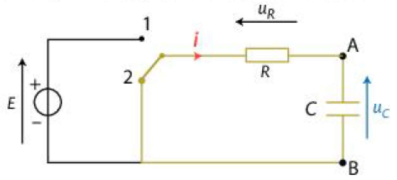
On dérive $u_C(t)$: $\frac{du_C}{dt}=\frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}}$

On éjecte dans l'équation : $\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{\tau}u_C=\frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{1}{\tau}\times E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$=\left(\frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}}\right)-\left(\frac{E}{\tau}\times e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$
$$=0$$

Ainsi, on a vérifié la solution :

4 - Que retenir ?

La charge	La décharge
 $u_R+u_C-E=0$	 $u_R+u_C=0$
$\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{RC}=\frac{E}{RC}$ ou $\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{\tau}=\frac{E}{\tau}$ avec $\tau=RC$	$\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{RC}=0$ ou $\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{\tau}=0$ avec $\tau=RC$
$u_C(t)=E(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$	$u_C(t)=Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

II- Loi de décroissance radioactive et la loi de vitesse d'ordre 1

1- Rappels du cours

La radioactivité est la désintégration spontanée et aléatoire d'un noyau instable vers un état stable, en émettant des particules (α ou, β^+ ou β^-) et des rayonnements de gamma γ.

$\boxed{1 \text{ Bq} = 1 \text{ désintegration.s}^{-1}}$ (Bq : Becquerel)

Activité d'un échantillon $A(t)$

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}$$

De plus $A(t)$ est proportionnelle à nombre de noyaux radioactives $N(t)$.

$$A(t) = \lambda \times N(t)$$

- $A(t)$: l'activité radioactive (Bq)
- λ : constante radioactive (s^{-1})
- $N(t)$: Nombre de noyaux radioactifs

Temps de demi-vie radioactive $t_{1/2}$

Le temps de demi-vie est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactif qui sont présents à l'état initial, N_0, se soient désintégrés.

Par définition, on a : $N(t_{1/2}) = \dfrac{N_0}{2}$

Vitesse volumique de disparition

Pour un réactif noté R et sa concentration $[R](t)$, sa vitesse de disparition est notée :

$$v_D(R)_t = -\frac{d[R](t)}{dt}$$

- $[R](t)$: concentration de R (en $mol.L^{-1}$)
- v_D :vitesse de disparition (en $mol.L^{-1}.s^{-1}$)

Lorsque la réaction est d'ordre 1 par rapport à un (seul) réactif R, la vitesse de disparition est proportionnelle à la concentration de R.

$$v_D(R)_t = k \times [R](t)$$

- $v_D(R)_t$:vitesse de disparition (en $mol.L^{-1}.s^{-1}$)
- k : constante de vitesse (en s^{-1})
- $[R]$: Concentration de R (en $mol.L^{-1}$)

2- La loi de décroissance radioactive

a-Équation différentielle

On cherche à déterminer le nombre de noyaux non désintégrés à un instant *t*.
On a initialement un nombre N_0 de noyaux non désintégrés .

D'après les deux définitions, on a : $A(t)=-\frac{dN(t)}{dt}$ et $A(t)=\lambda\times N(t)$

On peut donc écrire : $\lambda\times N(t)=-\frac{dN(t)}{dt}$

D'où : $\boxed{\frac{dN(t)}{dt}+\lambda\times N(t)=0}$

On reconnais une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sans seconde membre, soit de type : $y'+y=0$.

b- La solution de l'équation différentielle

On résout l'équation différentielle suivante : $\frac{dN(t)}{dt}+\lambda\times N(t)=0 \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt}=-\lambda\times N(t)$

On a trouve donc : $\underline{N(t)=A\times e^{-\lambda t}}$
On cherche alors la constante A à l'aide de la condition initiale : $N(t=0)=N_0$
D'autre part, on a : $N(t=0)=A\times e^{-\lambda\times 0}=A\times 1=A$
Par identification, on trouve : $A=N_0$
Ainsi, on remplace A : $\boxed{N(t)=N_0\times e^{-\lambda t}}$

Remarque : L'activité vérifie également même loi de décroissance :
On a : $A(t)=\lambda\times N(t)$ or $N(t)=N_0\times e^{-\lambda t}$. D'où $A(t)=\lambda\times N_0\times e^{-\lambda t}$
On pose $A_0=\lambda\times N_0$, on peut donc écrire $\boxed{A(t)=A_0\times e^{-\lambda t}}$

3- Temps de demi-vie $t_{1/2}$

On cherche à déterminer le temps de demi-vie $t_{1/2}$.

On a par définition : $N(t_{1/2})=\frac{N_0}{2}$, et d'autre part : $N(t=t_{1/2})=N_0\times e^{-\lambda t_{1/2}}$

Donc $\frac{N_0}{2}=N_0\times e^{-\lambda t_{1/2}}$, en simplifiant N_0, Il nous reste : $\frac{1}{2}=e^{-\lambda t_{1/2}}$

Or $\frac{1}{2}=e^{-\lambda t_{1/2}} \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{2})=\ln(e^{-\lambda t_{1/2}}) \Leftrightarrow \ln(1)-\ln(2)=-\lambda\times t_{1/2} \Leftrightarrow 0-\ln(2)=-\lambda\times t_{1/2}$

Donc $\ln(2)=\lambda\times t_{1/2}$. Finalement $\boxed{t_{1/2}=\frac{\ln(2)}{\lambda}}$

En enseignement-scientifique, nous avons vu une méthode graphique pour déterminer le temps demi-vie $t_{1/2}$, pour les datations. Ici, nous avons vu la méthode théorique par des calculs.
Ainsi pour faire la datation d'un objet, c'est-à-dire pour trouver l'âge d'un utilise la formule suivante :

$$t=\frac{t_{1/2}}{\ln(2)}\times\ln(\frac{N_0}{N(t)})$$

Le moins dans l'expression signifie « avant ».

Démonstration :
On a $N(t)=N_0\times e^{-\lambda t}$. Et, on cherche à extraire le temps :

$$N(t)=N_0\times e^{-\lambda t}\Leftrightarrow e^{-\lambda t}=\frac{N(t)}{N_0}\Leftrightarrow\ln(e^{-\lambda t})=\ln(\frac{N(t)}{N_0})\Leftrightarrow-\lambda\times t=\ln(\frac{N(t)}{N_0})\Leftrightarrow \underline{t=-\frac{1}{\lambda}\times\ln(\frac{N(t)}{N_0})}$$

Or, on $t_{1/2}=\frac{\ln(2)}{\lambda}\Leftrightarrow\frac{t_{1/2}}{\ln(2)}=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow-\frac{t_{1/2}}{\ln(2)}=-\frac{1}{\lambda}$ d'où $\boxed{t=-\frac{t_{1/2}}{\ln(2)}\times\ln(\frac{N(t)}{N_0})}$

Petit parenthèse : Pour ceux qui suivront leur étude de chimie en supérieur, nous verrons (en L1) que la loi décroissance radioactive est un cas particulier des lois cinétique avec ordre globale 1. Et, nous verrons que tout réaction chimique d'ordre globale de 1 a pour expression de temps de demi-réaction $t_{1/2}=\frac{\ln(2)}{\lambda}$,(la démonstration sera analogue à celle qu'on a faite plus haut).

4- La loi de vitesse d'ordre 1

On verra que ce partie est totalement analogue à la partie précédente. Car la loi de décroissance radioactive est un cas particulier de la loi de vitesse d'ordre 1.

On a initialement une concentration de $[R]_0$ de réactif R . On cherche à prévoir son évolution :

D'après les deux définitions, on a : $v_D(R)_t=-\frac{d[R](t)}{dt}$ et $v_D(R)_t=k\times[R](t)$

On peut donc écrire : $k\times[R](t)=-\frac{d[R](t)}{dt}$

D'où : $\boxed{\frac{d[R](t)}{dt}+k\times[R](t)=0}$

On reconnais une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sans seconde membre, soit de type : $y'+y=0$.

Ainsi, on cherche la solution du problème posé :

On résout l'équation différentielle suivante : $\frac{d[R](t)}{dt}+k\times[R](t)=0 \Leftrightarrow \frac{d[R](t)}{dt}=-k\times[R](t)$

On a trouve donc : $[R](t)=A\times e^{-k\times t}$

On cherche alors la constante A à l'aide de la condition initiale : $[R](t=0)=N_0$

D'autre part, on a : $[R](t=0)=A\times e^{-k\times 0}=A\times 1=A$

Par identification, on trouve : $A=[R]_0$

Ainsi, on remplace A : $\boxed{[R](t)=[R]_0\times e^{-k\times t}}$

5 - Que retenir ?

La Loi de décroissance radioactive	La loi de vitesse d'ordre 1
$\frac{dN(t)}{dt}+\lambda\times N(t)=0$	$\frac{d[R](t)}{dt}+k\times[R](t)=0$
Solution de l'équation différentielle : $N(t)=N_0\times e^{-\lambda t}$ vérifiée également par l'activité : $A(t)=A_0\times e^{-\lambda t}$	$[R](t)=[R]_0\times e^{-k\times t}$
L'expression de temps de demi-vie $t_{1/2}=\frac{\ln(2)}{\lambda}$ (à CONNAÎTRE)	L'expression de temps de demi-réaction. $t_{1/2}=\frac{\ln(2)}{\lambda}$ (à ne pas connaître)
Formule de datation (les deux expressions sont équivalents) $t=\frac{t_{1/2}}{\ln(2)}\times\ln(\frac{N_0}{N(t)})$ ou $t=-\frac{t_{1/2}}{\ln(2)}\times\ln(\frac{N(t)}{N_0})$	

III- Évolution d'un système au contact d'un thermostat

1- Rappels du cours

Premier Principe de Thermodynamique

Pour un système fermé, au repos macroscopique, la variation de l'énergie interne est égale à :

$$\Delta U = W + Q \qquad \begin{cases} W : \text{travail (J)} \\ Q : \text{transfert thermique (J)} \\ \Delta U : \text{variation d'énergie interne (J)} \end{cases}$$

Variation d'énergie interne d'un système incompressible

Lorsqu'un système est incompressible, la variation ΔU de son énergie interne est proportionnelle à la variation de sa température.

$$\Delta U = m \times c \times \Delta T \qquad \begin{cases} m : \text{masse (en kg)} \\ c : (\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}) \\ T : \text{température en Kelvin (K)} \\ \Delta U : \text{variation d'énergie interne (J)} \end{cases}$$

Transfert thermique (Définition)

$$Q = \Phi \times \Delta t \qquad \begin{cases} \Phi : \text{flux thermique échangé (W)} \\ Q : \text{Énergie thermique échangée (J)} \\ \Delta t : \text{durée de l'échange (s)} \end{cases}$$

Loi phénoménologique de NEWTON

Le flux thermique conducto-convectif entre un système incompressible de température T à travers un surface S, à instant t donné vaut :

$$\Phi_{th,cc} = h \times S \times (T_{th} - T(t)) \qquad \begin{cases} \Phi_{th,cc} : \text{flux thermique (W)} \\ S : \text{surface d'échange (m}^2\text{)} \\ h : \text{coefficient de transfert thermique (W.K}^{-1}.\text{m}^{-2}\text{)} \end{cases}$$

2- Équation différentielle et sa solution

On étudie un système au repos macroscopique, incompressible, de masse m, de capacité thermique massique c, et en contacte sur une surface d'aire S avec un fluide de température $T_{ext}<T_i$.
Un suppose que l'échange d'énergie a lieu uniquement par transfert thermique conducto-convectif.
On sait que la températures initiale du système est T_i .
On cherche à étudier l'évolution de température T d'un système au cours du temps.

Cette équation différentielle, est la plus "difficile" de l'année. Donc, je vous invite à suivre le raisonnement suivant :

1- On applique le premier principe de la thermodynamique entre l'état initiale et finale au système :
$\Delta U_{I\to F}=W+Q$ or le système est incompressible donc $W = 0\,J$
D'où $\underline{\Delta U_{I\to F}=Q}$ (1)

2- Variation de l'énergie interne du système : $\Delta U_{I\to F}=m\times c\times\Delta T$ (2)

3- Définition du transfert thermique : $Q=\Phi\times\Delta t$
D'après la loi phénoménologique de Newton on a $\Phi=h\times S\times(T_{ext}-T(t))$
Donc $Q=\Phi\times\Delta t=h\times S\times(T_{ext}-T(t))\times\Delta t$ (3)

Donc d'après (1) et (3), on a : $\underline{\Delta U_{I\to F}=Q=h\times S\times(T_{ext}-T(t))\times\Delta t}$

4- D'après (1) et (2) on, obtient : $\Delta U_{I\to F}=Q=m\times c\times\Delta T$
Or à l'aide de (3), on a obtenu une expression de Q. D'où: $\underline{Q=h\times S\times(T_{ext}-T(t))\times\Delta t=m\times c\times\Delta T}$

Soit $\underline{\dfrac{\Delta T}{\Delta t}=\dfrac{h\times S}{m\times c}\times(T_{ext}-T(t))}$

Lorsque Δt tend vers zéro, la limite de $\left(\dfrac{\Delta T}{\Delta t}\right)$ est égale à la dérivée de T par rapport au temps t que nous noterons $\dfrac{dT(t)}{dt}$. Ainsi, l'égalité que nous avons obtenue s'écrive de la manière suivante :

$$\frac{dT(t)}{dt}=\frac{h\times S}{m\times c}\times T_{ext}-\frac{h\times S}{m\times c}\times T(t)$$

Ainsi on trouve l'équation différentielle vérifié par $T(t)$: $\boxed{\dfrac{dT(t)}{dt}+\dfrac{h\times S}{m\times c}\times T(t)=\dfrac{h\times S}{m\times c}\times T_{ext}}$

On peut l'écrire également sous la forme canonique : $\boxed{\dfrac{dT(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}\times T(t)=\dfrac{T_{ext}}{\tau}}$ avec $\tau=\dfrac{m\times c}{h\times S}$

On, reconnaît donc l'équation différentielle de la forme : $y'+ay=b$

On peut donc résoudre l'équation différentielle :

On cherche la solution de l'équation différentielle sous la forme :

$$T(t) = \textit{Solution particulière} + \textit{Solution homogène}$$

1- Détermination des solutions de l'équation homogène $(E_H) : \frac{dT(t)}{dt} + \frac{h \times S}{m \times c} \times T(t) = 0$

Donc : $\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{h \times S}{m \times c} \times T(t)$

Les solution générales sont donc : $\boxed{T(t) = Ae^{-\frac{h \times S}{m \times c} \times t}}$

,

2- Détermination de la solution particulière :

On suppose que la fonction u_C est constante. D'où $\frac{dT(t)}{dt} = 0$

Donc : $\frac{h \times S}{m \times c} \times T(t) = \frac{h \times S}{m \times c} \times T_{ext} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T(t) = T_{ext}}$

3- Détermination de A (constante) :

On a trouvé donc : $\boxed{T(t) = T_{ext} + Ae^{-\frac{h \times S}{m \times c} \times t}}$

Or, d'après la condition initiales, on a $T(t = 0) = T_i$. (1)

Calculons $T(t = 0)$: $T(t) = T_{ext} + Ae^{-\frac{h \times S}{m \times c} \times 0} = T_{ext} + A \times 1 = T_{ext} + A$ (2)

Donc, d'après (1) et (2) , on a $A + T_{ext} = T_i$ d'où $\boxed{A = T_i - T_{ext}}$

On remplace A : $\boxed{T(t) = T_{ext} + (T_i - T_{ext})e^{-\frac{h \times S}{m \times c} \times t}}$

On peut écrire également: $\boxed{T(t) = T_{ext} + (T_i - T_{ext})e^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec $\tau = \frac{m \times c}{h \times S}$, le temps caractéristique (en s)

Ainsi, on a trouvé la solution de l'équation différentielle

❑

3 - Que retenir ?

Expression de l'équation différentielle	$T(t) = T_{ext} + Ae^{-\frac{h \times S}{m \times c} \times t}$ ou $T(t) = T_{ext} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$
La solution du problème	$T(t) = T_{ext} + (T_i - T_{ext})e^{-\frac{h \times S}{m \times c} \times t}$ ou $T(t) = T_{ext} + (T_i - T_{ext})e^{-\frac{t}{\tau}}$
Expression de temps caractéristique homogène à un temps (en s)	$\tau = \frac{m \times c}{h \times S}$