## Équation homogène

Exercice 1: Associer les équations à leur équation homogène.

| | |
|---|---|
| $(E_1)$: $y' = 5y - 10$ | $(E_{h1})$: $y' + 4y = 0$ |
| $(E_2)$: $y' + 4y = 4$ | $(E_{h2})$: $y' + \tan(x)y = 0$ |
| $(E_3)$: $5y' + 5y = -8$ | $(E_{h3})$: $y' - 5y = 0$ |
| $(E_4)$: $\cos(x)y' + \sin(x)y = \tan(x)$ | $(E_{h4})$: $y' + y = 0$ |

(1,3)-(2,1)-(3,4)-(4,2)

Exercice 2: Donner l'équation homogène des équations suivantes.

$(E_1)$: $y' = -y + 1$ $\Rightarrow (E_{h\text{-}1}) : y' + y = 0$
$(E_2)$: $2y' - 4y = 64$ $\Rightarrow (E_{h\text{-}2}) : y' - 2y = 0$
$(E_3)$: $y' = -2y$ $\Rightarrow (E_{h\text{-}3}) : y' + 2y = 0$
$(E_4)$: $3y' + 15y = 12$ $\Rightarrow (E_{h\text{-}4}) : y' + 5y = 4$
$(E_5)$: $y' + y = \cos(2t)$ $\Rightarrow (E_{h\text{-}5}) : y' + y = 0$

## Résolution des équations différentielles

Exercice 3 : Trouver une solution particulière aux équations suivantes.

$(E_1)$: $y' = 2y + 10$

On a : $y' - 2y = 10$

On suppose que $y$ est une fonction constante i.e. $y' = 0$

D'où $-2y = 10$

Donc $y = -5$ $S_p = -5$

$(E_2)$: $4y' = -3y + 15$

On a : $y' + 3y = 15$

On suppose que $y$ est une fonction constante i.e. $y' = 0$

D'où $3y = 15$

Donc $y = \dfrac{15}{3}$ $S_p = 5$

$(E_3)$: $8y' + 4y - 3 = 0$

On a : $y' + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{8}$

On suppose que $y$ est une fonction constante i.e. $y' = 0$

D'où $\dfrac{1}{2}y = \dfrac{3}{8}$

Donc $y = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{8}$ $S_p = \dfrac{3}{4}$

Exercice 4 : Résoudre les équations homogènes de l'*exercice 2*.

$(E_{h\text{-}1}) : y' + y = 0$

Solutions de l'équation : $y(x) = ke^{-x}$

Ensemble de solution : $\{x \longmapsto ke^{-x} \mid k \in \mathbb{R}\}$

$(E_{h\text{-}2}) : y' - 2y = 0$

Solutions de l'équation : $y(x) = ke^{2x}$

Ensemble de solution : $\{x \longmapsto ke^{2x} \mid k \in \mathbb{R}\}$

$(E_{h\text{-}3}) : y' + 2y = 0$

Solutions de l'équation : $y(x) = ke^{-2x}$

Ensemble de solution : $\{x \longmapsto ke^{-2x} \mid k \in \mathbb{R}\}$

$(E_{h\text{-}4}) : y' + 5y = 4$

Solutions de l'équation : $y(x) = ke^{-5x}$

Ensemble de solution : $\{x \longmapsto ke^{-5x} \mid k \in \mathbb{R}\}$

$(E_{h\text{-}5}) : y' + y = 0$

Solutions de l'équation : $y(x) = ke^{-x}$

Ensemble de solution : $\{x \longmapsto ke^{-x} \mid k \in \mathbb{R}\}$

Exercice 5 :

a) ($E_1$) : $y' = 3y + 6$

*On cherche la solution homogène :*

On écrit l'équation homogène : ($E_{h\text{-}1}$) : $y' - 3y = 0$

Les solutions sont donc : $y(x) = ke^{3x}$

*On cherche la solution particulière :*

On suppose que $y$ est une fonction constante i.e. $y' = 0$

D'où $-3y = 6$

Donc $y = -2$ $\quad S_p = -2$

On en déduit donc l'ensemble de solution : $\{x \longmapsto ke^{-2x} - 2 \mid k \in \mathbb{R}\}$

Soit : $\quad y(x) = ke^{3x} - 2$

b) ($E_2$) : $y' + 2y + 10 = 0$

*On cherche la solution homogène :*

On écrit l'équation homogène : ($E_{h\text{-}2}$) : $y' + 2y = 0$

Les solutions sont donc : $y(x) = ke^{-2x}$

*On cherche la solution particulière :*

On suppose que $y$ est une fonction constante i.e. $y' = 0$

D'où $2y = -10$

Donc $y = -5$ $\quad S_p = -5$

On en déduit donc l'ensemble de solution : $\{x \longmapsto ke^{-2x} - 5 \mid k \in \mathbb{R}\}$

Soit : $\quad y(x) = ke^{-2x} - 5$

c) ($E_3$) : $4y' = 10y + 3$

*On cherche la solution homogène :*

On écrit l'équation homogène : ($E_{h\text{-}1}$) : $y' - \dfrac{10}{4}y = 0$

Les solutions sont donc : $y(x) = ke^{\frac{5}{2}x}$

*On cherche la solution particulière :*

On suppose que $y$ est une fonction constante i.e. $y' = 0$

D'où $-10y = 3$

Donc $y = -\dfrac{3}{10}$ $\quad S_p = -\dfrac{3}{10}$

On en déduit donc l'ensemble de solution : $\{x \longmapsto ke^{\frac{5}{2}x} - \dfrac{3}{10} \mid k \in \mathbb{R}\}$

Soit : $\quad y(x) = ke^{\frac{5}{2}x} - \dfrac{3}{10}$

Exercice 6 :

(Dans cet exercice je ne donne que les réponses)

($E_1$): $y' + y = 1$ $\quad$ et $\quad y(0) = 2$

Les solutions : $y(x) = ke^{-x} + 1$

Recherche de la valeur de $k$ :

On sait que $\quad y(0) = 2$

et $\quad y(0) = ke^{-0} + 1 = k \times 1 + 1 = k + 1$

Par identification : $k + 1 = 2$ donc $k = 1$

La solution est donc : $y(x) = e^{-x} + 1$

($E_2$): $4y' - y = 0$ $\quad$ et $\quad y(0) = 5$

Les solutions : $y(x) = ke^{\frac{1}{4}x}$

Recherche de la valeur de $k$ :

On sait que $\quad y(0) = 5$

et $\quad y(0) = ke^{0} = k \times 1 = k$

Par identification : $k = 5$

La solution est donc : $y(x) = 5e^{\frac{1}{4}x}$

(E$_3$): $2y' - 5 = -y$ et $y(0) = 3$

Les solutions : $y(x) = ke^{-\frac{1}{2}x} + 5$

Recherche de la valeur de $k$ :

On sait que $y(0) = 3$

et $y(0) = ke^{-0} + 5 = k \times 1 + 5 = k + 5$

Par identification : $k + 5 = 3$ donc $k = -2$

La solution est donc : $y(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 5$

(E$_4$): $y' + 2y = 12$ et $y(0) = -4$

Les solutions : $y(x) = ke^{-2x} + 6$

Recherche de la valeur de $k$ :

On sait que $y(0) = -4$

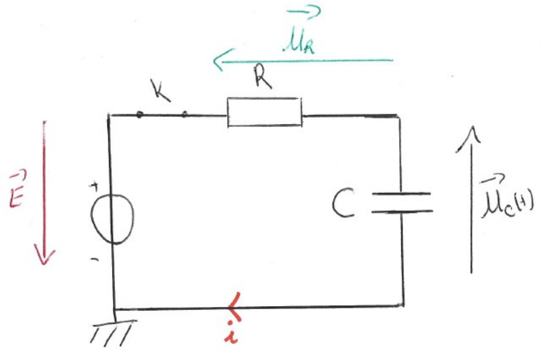
et $y(0) = ke^{-0} + 6 = k \times 1 + 6 = k + 6$

Par identification : $k + 6 = -4$ donc $k = 2$

La solution est donc : $y(x) = 2e^{-x} + 6$

Exercice 7 : *Circuit RC*

1- À $t >$ 0s, on a :




2- La loi des mailles : $\boxed{U_R + U_C = E}$

Montrons que $i(t) = C\dfrac{dU_C(t)}{dt}$

On a, d'après la définition : $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$

Or $q(t) = C \times U_C$

D'où $\boxed{i(t) = \dfrac{dCU_C(t)}{dt} = C\dfrac{dU_C(t)}{dt}}$ (Car C=constante)

3- On établie l'équation différentielle.

On a, d'après de la question précédente : $U_R + U_C = E$

D'après la loi d'Ohm, on a $U_R = R \times i(t)$

Or, $i(t) = C\dfrac{dU_C(t)}{dt}$, d'après la question précédente.

D'où : $U_R = RC\dfrac{dU_C(t)}{dt}$

Donc, on obtient : $RC\dfrac{dU_C(t)}{dt} + U_C = E$

En linéarisant l'équation différentielle, on trouve :

$$\boxed{\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = \frac{E}{RC}}$$

On remarque que $\underline{\tau = RC}$

On cherche la solution de l'équation différentielle sous la forme :

$$u_C(t) = S_H + S_P$$

Détermination des solutions de l'équation homogène :

$$(E_H) : \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$$

Donc : $\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{\tau} u_C$ d'où $S_H$: $u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Détermination de la solution particulière :

On suppose que la fonction $u_C$ est constante. D'où $\frac{du_C}{dt} = 0$

Donc : $\frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ d'où $S_P$ : $u_c = E$

Ainsi, les solution générales sont $\boxed{u_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$

5- On cherche à trouver la constante A :

On a d'après la question précédente : $u_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Or, d'après la condition initiales, on a $u_C$ $(t = 0) = 0$ V. (1)

Calculons $u_C$ $(t = 0)$ : $u_C(t=0) = E + Ae^{-\frac{0}{\tau}} = E + A \times 1 = E + A$ (2)

Donc, d'après (1) et (2) , on a $A + E = 0$ d'où $A = -E$

En remplaçant A, on a la solution : $u_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

En factorisant on trouve : $\boxed{u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

On vérifie la solution :

On dérive $u_C$ $(t)$ : $\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}}$

On éjecte dans l'équation : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \times E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$$= \frac{E}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \times (E - Ee^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$= \frac{E}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \times (E - Ee^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$= \frac{E}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{\tau} - \frac{E}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= \frac{E}{\tau} + [(\frac{E}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}}) - (\frac{E}{\tau} \times e^{-\frac{t}{\tau}})]$$

$$\boxed{= \frac{E}{\tau}}$$

Ainsi, on a vérifié la solution.

On obtient le graphique suivant en exécutant un code python :