Chapitre 5

Probabilité conditionnelle et indépendance

En théorie des probabilités, la probabilité conditionnelle et l'indépendance sont essentielles pour analyser des événements incertains. Elles permettent de modéliser des situations où un événement influence, ou non, la probabilité d'un autre. La première actualise nos croyances selon de nouvelles informations, tandis que la seconde indique une absence de lien entre deux événements.

Un moment clé dans le développement de ces concepts est l'apparition du théorème de Bayes, du nom de Thomas Bayes, mathématicien et théologien anglais du XVIIIe siècle. Son travail, introduit une méthode pour mettre à jour les probabilités à partir d'informations nouvelles. Ce théorème marque une étape majeure dans la formalisation de la probabilité conditionnelle et ouvre la voie à ce qu'on appelle aujourd'hui le raisonnement bayésien.

Historiquement, les origines de la discipline remontent au XVIIe siècle avec Pascal et Fermat, puis ont été rigoureusement formalisées au XXe siècle par Kolmogorov. Aujourd'hui, ces notions sont omniprésentes en statistique, finance, biologie ou intelligence artificielle, où elles offrent des outils puissants pour analyser des phénomènes complexes.

Андрей Николаевич Колмогоров
(Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov)
(1903 - 1987)

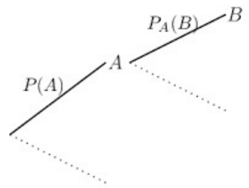
I- Probabilité Conditionnelle

Définition

Soit A et B deux évènements. Soit $P(A) \neq 0$.
La probabilité de B sachant que A est réalisé est la probabilité notée $P_A(B)$, et définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarque : Cela découle de $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.



Remarque : On dit généralement « la probabilité de B sachant A » pour désigner $P_A(B)$, c'est-à-dire « la probabilité que l'événement B se produise en supposant que l'événement A a déjà eu lieu ».

Remarque : On utilise également la notation suivante, pour la probabilité de B sachant que A est réalisé : $P(A \mid B)$.
Attention, ici, $A \mid B$ n'est pas un évènement.

Faire les exercices 1, 2 et 3 de la feuille de TD

II- Arbre de Probabilité

Définition

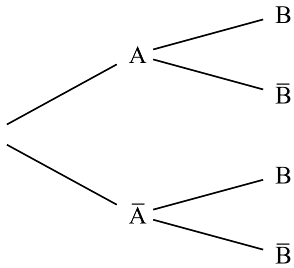
Un **arbre de probabilités** pondéré commence par une **racine** de laquelle partent plusieurs **branches**. À l'extrémité de chaque branche, on trouve un événement. Pour chaque événement, on construit un **nœud** duquel partent plusieurs branches. Plusieurs branches qui se suivent en partant de la racine sont appelées un **chemin**.

Remarques - Règles :
- À chaque nœud, la somme des probabilités des branches qui en partent est toujours égale à 1.
- La probabilité d'un chemin complet (jusqu'à une extrémité) est égale au produit des probabilités le long des branches empruntées.
- La probabilité d'un événement correspond à la somme des probabilités des chemins (ou branches complètes) sur lesquels cet événement se réalise *(formule des probabilité totale)*.

Propriétés

Soit A et B deux évènements. Soit $P(A) \neq 0$. On a :

- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
  (formule de probabilité totale)



Faire les exercices 4 et 5 de la feuille de TD

III- Évènements indépendants

Définition

Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle.
A et B sont indépendant lorsque on a :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$$

Propriétés

On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque on a :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{ou} \quad P_B(A) = P(A)$$

Ces deux égalités découlent de la définition.

Méthode 1 : Pour montrer que deux évènements sont indépendants, il suffit de montrer une de deux égalités.
Justification : « $P_A(B) = P(B)$ » signifie que la réalisation de l'évènement A n'a pas d'influence sur l'évènement B. Ces évènements sont donc indépendant.

Mais, on préfère montrer que l'égalité suivante est vérifiée : $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$

Remarque : Si A et B sont deux évènements indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Faire les exercices 6 et 7 de la feuille de TD