Chapitre 0

Le langage mathématiques et quelques notations

I - Quantificateurs

1 – « Pour tout … » $\forall$

2 – « Il existe... » $\exists$

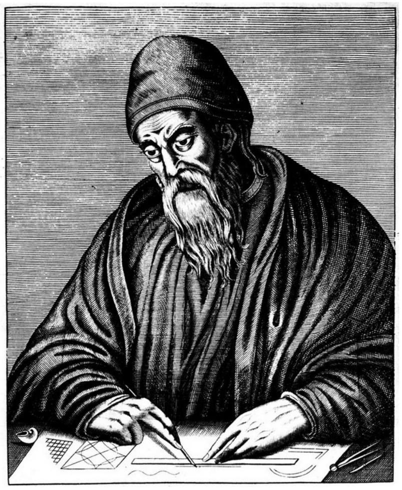
II - Modes de raisonnement classiques

1 - Récurrence

2 - Absurde

III - Quelques notations

Le langage mathématique peut être vu comme un outil très précis, un peu comme une boîte à outils qui sert à construire des phrases vraies. Ce n'est pas seulement des chiffres et des calculs, mais surtout une manière très rigoureuse de réfléchir et de communiquer. En mathématiques, on veut être sûr de ce qu'on affirme : un énoncé est soit vrai, soit faux, jamais entre les deux.



Euclide d'Alexandrie
300 av. J.-C.

Par exemple, si on dit que dans un triangle rectangle, la somme des carrés des deux petits côtés est égale au carré du plus grand côté (l'hypoténuse), ce n'est pas juste une idée qu'on lance : c'est un théorème, qu'on peut démontrer avec des règles logiques. Mais pour que tout cela ait du sens, il faut d'abord savoir précisément ce qu'est un triangle, ce qu'est un carré, ou encore ce qu'on appelle une égalité.
C'est pour ça que les mathématiques commencent toujours par des définitions. Une fois qu'on a bien défini les objets qu'on étudie, on peut formuler des propriétés ou des théorèmes, qu'on va ensuite démontrer, c'est-à-dire prouver qu'ils sont toujours vrais.

En résumé, faire des mathématiques, c'est comme jouer à un jeu où les règles sont très strictes : on ne peut pas se tromper de mot, ni dire des choses vagues. Tout doit être clair, logique, et précis.

Dans ce chapitre, nous allons aborder deux raisonnements mathématiques essentiels. Cependant, il n'y en a qu'un seul que vous devez maîtriser conformément au programme : ***le raisonnement par récurrence****.*

I- Quantificateurs

1- « Pour tout … » $\forall$

« $\forall x \in E, \ldots$ » se lit « pour tout *x* appartient à *E* tel que ... ».
Cela signifie que la propriété que l'on annonce est *vraie* quelque soit la valeur de *x*.
Exemple : « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » est vrai.

Remarque : Lorsque l'on veut démontrer « pour tout *x* » on fixe un élément quelconque dans *E,* et on démontre la propriété.
Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 \geq 0 > -1$,donc $x^2 \neq -1$.

2- « Il existe... » $\exists$

« $\exists x \in E, \ldots$ » se lit « il existe (au moins) *x* appartient à *E* tel que ... ».
Cela signifie que la propriété que l'on annonce est *vraie* quelque soit la valeur de *x*.
Exemple : « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ » est vrai. Car $0^2 \leq 0 \; et \; 0 \in \mathbb{R}$.

Remarque : Lorsque l'on veut démontrer « il existe », il suffit de donner un éléments *x* de *E* qui a la propriété attendue.

« $\exists ! x \in E, \ldots$ » se lit « il existe **unique** *x* appartient à *E* tel que ... ».

II- Modes de raisonnement classiques

1- Récurrence

Définition

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une propriété *P(n)* qui dépende de *n* est vraie pour tout *n* entier naturel.
La récurrence se déroule en trois étapes :

- **Initialisation :** On montre que la propriété est vraie au rang initiale. Souvent, on vérifie pour $n = 0$ ou $n=1$.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie **pour un certaine rang** ***n***, et on démontre la propriété au rang suivant soit $n+1$.
- **Conclusion** : La propriété est donc vraie par le principe de récurrence.

Remarque : Pour vous faciliter la compréhension, on peut penser à la *chute de dominos*. Lorsque l'on fait tomber la première pièce, les autres pièces tombent une après l'autre. C'est le principe de récurrence.

Attention : Dans l'étape de l'initialisation ou de l'hérédité, on n'écrit jamais : « *On suppose que la propriété est vraie pour tout n entier relatif.* ». C'est ce que l'on souhaite démontrer *!!!*

Un exemple de rédaction de récurrence : Formule de la somme de n entier naturels successifs.
Je vous rappelle que, en Première, vous avez appris dans le chapitre des Suites (arithmétiques), la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Rédaction de Récurrence :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons H_n , la propriété suivante :

$$H_n : \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

INITIALISATION : On vérifie que H_0, la propriété au rang initiale ($n = 0$), est vraie.

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 \quad et \quad \frac{0(0+1)}{2} = 0 \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{0} k = \frac{0(0+1)}{2}.$$

Ainsi, H_0 est vraie.

HÉRÉDITÉ : On suppose que la propriété H_n est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons H_{n+1}.

- D'une part, en remplaçant n par $n+1$:

$$\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

- D'autre par, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \boxed{\sum_{k=0}^{n} k} + (n+1)$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n^2+n)+(2n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

Alors, $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$, donc H_{n+1} est vraie.

CONCLUSION : Il y a initialisation et hérédité, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, H_n\, est\ vraie$.

i.e. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2- Absurde

Définition

Le raisonnement par l'absurde pour une propriété *P vraie* consiste à supposer que "non P", puis on cherche à aboutir à une contradiction.

<u>L'exemple le plus connu</u> : $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. C'est-à-dire $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Rédaction : Par l'absurde, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
i.e. $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sqrt{2} = \frac{a}{b}$, où a et b sont premiers entre-eux.
On a donc, $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$ $\quad i.e. \quad 2b^2 = a^2$
Donc a^2est pair d'où a est pair. Ainsi on peut écrire a de la manière suivante $\exists k \in \mathbb{Z}, a = 2k$.
Alors $2b^2 = 4k^2$ i.e. $b^2 = 2k^2$, donc b^2 est pair ainsi b est pair.
C'est donc *absurde*.
Conclusion : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

III – Quelques notations

Dans cette partie, vous trouverez une liste de certaines notations et de symboles qui peuvent vous être utiles durant l'année de Terminale, ou encore en Supérieur.

Symbole	Signification
$\forall$	Pour tout
$\exists$	Il existe
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^*$	Ensemble des nombres réels non nul
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réel positif
$\in$	Appartient à
$\notin$	N'appartient pas à
$\subset$	Inclus dans
$\not\subset$	N'est pas inclus dans
$\cup$	Union
$\cap$	Intersection

Symbole	Signification
$\Rightarrow$	Implication
$\Leftrightarrow$	Équivalent
[...;...]	Intervalle
$[\![\cdots ; \cdots]\!]$	Intervalle d'entier
Σ	Somme
!	Factorielle
Π	Produit
Lim	Limite
$\lVert\vec{u}\rVert$	Norme d'un vecteur
(u_n)	Suite
$P(X=x)$	Loi de probabilité
$P_A(B)$	Probabilité conditionnelle
$\binom{n}{k}$ ou C_n^k	Combinaison (k parmi n)