Chapitre 1

Polynôme du second degré

I- Second degré

1 - Forme canonique
2 – Résolution d’équation du second degré
3 – Somme et produit des racines

II- Fonction polynomiale

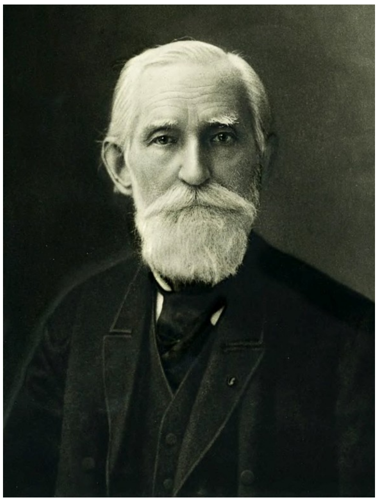
1- Factoriser un polynôme
2- Signe d’un polynôme
3- Fonction polynomiale

III- Hors programme

1- Les racines d’un polynôme dans le cas $\Delta < 0$
2- Polynômes

Depuis l’Antiquité, les mathématiciens cherchent à résoudre des équations où le carré d’un nombre apparaît. Les Grecs, puis Diophante d’Alexandrie, ont posé les bases de ce que l’on appelle aujourd’hui l’algèbre. Diophante introduit l’idée d’une inconnue, ouvrant la voie à la résolution symbolique des équations. Des siècles plus tard, le savant Al-Khwarizmi donnera des méthodes précises pour résoudre ces équations, dans un ouvrage dont le titre, Al-jabr, donnera naissance au mot algèbre.

Aujourd’hui, les polynômes jouent un rôle essentiel dans les mathématiques et dans le monde réel. On les utilise pour modéliser des trajectoires, prévoir des tendances économiques, simuler la croissance d’une population ou encore décrire le mouvement des planètes. En physique, en économie, en ingénierie, en sciences naturelles, et en particulier en informatique pour les interpolations, ils servent à représenter des phénomènes complexes à l’aide de formules simples.



Пафнутий Львович Чебышёв
(Pafnouti Lvovitch Tchebychev)
(1821 - 1894)

L’un des objectifs de ce cours est de vous familiariser avec le langage mathématique. Dans chaque chapitre, certaines notations seront présentées de deux façons : en français et en langage mathématique.

I- Seconde degré

On appelle polynôme du second degré tout polynôme de la forme :

ax^2+bx+c où a,b,c sont des nombres réels avec $a \neq 0$

Soit $\exists a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$

1- Forme Canonique

Propriétés

Pour tout polynôme de second degré, il existe deux réels α et β tels que :

$$ax^2 + bx + c = a[(x-\alpha)^2] + \beta$$

On appelle ***forme canonique*** : $a[(x-\alpha)^2] + \beta$
On appelle ***forme développée*** : $ax^2 + bx + c$

Faire l'exercice 1 de la feuille de TD

Définition

Le nombre $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$ est appelé le ***discriminant*** du polynôme.

Propriétés

Pour une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, les coordonnées du sommet sont (α,β).
On a donc valeurs suivant :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-\Delta}{4a}$$

Remarque : On peut retrouver la valeur de β en évaluant le polynôme en α, c'est-à-dire :

si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors $\beta = f(\alpha)$.

Faire l'exercice 2 de la feuille de TD

2- Résolution d'équation du second degré

Définition

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées ***racines*** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

On souhaite résoudre l'équation suivante : $ax^2 + bx + c = 0$.
Dans l'exercice 1 de TD, on a montré que cette expression peut être écrite de manière suivante :
Soient a , b et c sont trois nombres réels, tel que $a \neq 0$.

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{-\Delta}{4a^2}\right] = 0 \qquad \textit{(où } a \neq 0\textit{)}.$$

Donc cette équation est égale à zéro si et seulement si : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{-\Delta}{4a^2} = 0$ *(où $a \neq 0$).*

On obtient donc : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-\Delta}{4a^2}$ *(où $a \neq 0$).* [*]

On a donc trois cas possible (on procède par un disjonction de cas) :

- *Cas où $\Delta > 0$* : l'équation devient à résoudre [*] :

C'est-à-dire :

Soit : $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{(2a)^2}}$

Donc $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Soit : $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{(2a)^2}}$

Donc $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \frac{-b}{2a} + \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- *Cas où $\Delta = 0$* : l'équation [*] devient : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

  soit $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{0}$. D'où $x = \frac{-b}{2a}$. *On dit que l'équation admet une solution double.*

- *Cas où $\Delta < 0$* : alors $\frac{-\Delta}{4a^2} < 0$. Or, un carré ne peut être négatif. Donc l'équation n'admet pas de solution (réel / dans $\mathbb{R}$).

Propriétés

Le signe du discriminant Δ détermine le nombre de de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation a 2 solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a 1 solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution (réelle / dans $\mathbb{R}$).

Faire l'exercice 3 de la feuille de TD

Remarque : Les racines d'un polynôme du second degré correspondent aux abscisses des points où la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des abscisses, c'est-à-dire les valeurs de x telles que, pour x réel, $f(x) = 0$.

3- Somme et produit des racines

Définition

Si un polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes, alors :

Leur somme vaut : $\dfrac{-b}{a}$ et leur produit vaut : $\dfrac{c}{a}$

Remarque :

Soit x_1 et x_2 deux solutions distinctes d'un polynôme du seconde degré tel que : $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \cdot x_2 = P \end{cases}$, Alors ce polynôme peut s'écrire sous la forme : $x^2 - Sx + P$.

Démonstration :

Soit x_1 et x_2 deux solutions distinctes d'un polynôme du seconde degré tel que : $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \cdot x_2 = P \end{cases}$.

$$\text{Alors } \begin{cases} x_2 = S - x_1 \\ x_1 \cdot (S - x_1) = P \end{cases}.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_2 = S - x_1 \\ -x_1^2 + (S.x_1) = P \end{cases}.$$

$$\text{Autrement écrit : } \begin{cases} x_2 = S - x_1 \\ x_1^2 + (-S.x_1) + P = 0 \end{cases}.$$

En résolvant alors l'équation $x_1^2 + (-S.x_1) + P = 0$, on trouve les deux racines x_1 et x_2.

Faire les exercices 4, 5 et 6 de la feuille de TD

II- Fonction polynomiale

1- Factoriser un polynôme

Faire l'exercice 7 de la feuille de TD

Propriétés

Pour tout polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, où a,b,c et x sont des réels tel que $a \neq 0$.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme se factorise en $a\,(x - x_1).(x - x_2)$, où x_1 et x_2 les racines du polynôme.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme se factorise en $a\,(x - x_0)^2$, où x_0 et la racine du polynôme.
- Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de factorisation possible (dans $\mathbb{R}$).

2- Signe d'un polynôme

Afin d'étudier le signe d'un polynôme, on utilise généralement sa forme factorisée. On procède alors par disjonction de cas :

- *Cas où $\Delta > 0$* : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1).(x - x_2)$, où x_1 et x_2 les racines du polynôme.
  On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		a		a		a	
$(x - x_1)$		+	0	-		-	
$(x - x_2)$		+		+	0	-	
$a(x - x_1).(x - x_2)$		a	0	-a	0	a	

- *Cas où $\Delta = 0$* : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine du polynôme.
  Or $a(x - x_0)^2 \geq 0$, donc le signe du polynôme est celui de a.

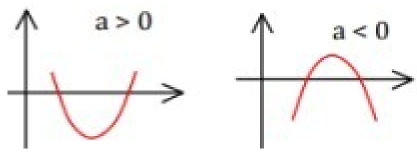
- *Cas où $\Delta < 0$* : Le polynôme ne s'annule pas et est de signe constant, celui de a.

Propriétés

Pour tout polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, où a,b,c et x sont des réels tel que $a \neq 0$.

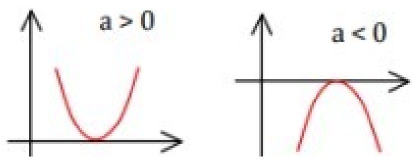
- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	-Signe de a	0	Signe de a	



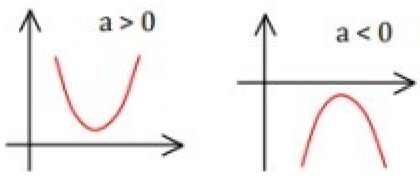
- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	



- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	



3- Fonction polynomiale

Définition

Une fonction polynomiale est une fonction qui est définie par un polynôme.

Faire les exercices 8 et 9 de la feuille de TD

III- Hors programme

1- Les racines d'un polynôme dans le cas 0 < Δ [Mathématiques expertes]

Pour trouver les racines d'un polynôme lorsque son discriminant est négatif, il faut d'abord définir ce qu'est la racine carrée d'un nombre négatif. Pour cela, on introduit l'ensemble des nombres complexes.

Définition: Ensemble de nombres complexe, noté $\mathbb{C}$, est constitué de tous les nombres z de la forme $a + ib$, avec a et b deux nombres réel, et iune constante telle que **$i^2 = -1$**.

On a définie donc la racine carrée pour les nombres négatif.
Soit b un nombre réel, on a $\sqrt{-b} = \sqrt{(-1).b} = \sqrt{(i^2).b} = i.\sqrt{b}$.
Exemple : $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1).4} = \sqrt{(i^2).2^2} = i.\sqrt{2} = 2i$

Notation : *Lorsqu'on écrit rigoureusement, il est interdit de mettre des nombres négatifs sous une racine carrée.*

On obtient donc la propriété suivante :

Propriétés

Soit a,b et c des nombres réels, où a ≠ 0.
On cherche à résoudre l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$.
Soit Δ est le discriminant de l'équation tel que $\delta^2 = \Delta$.

- Si Δ = 0, alors l'équation admet une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si Δ ≠ 0, alors l'équation admet deux solutions distinctes de la forme :

$$x_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Faire l'exercice 10 de la feuille de TD

2- Polynômes (une définition « pure » de mathématiques)

Définition

Soit P est un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels).
P est définie de la manière suivante :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \quad ,a_k \text{ un entier, avec } k \in [\![1,n]\!]$$

On appelle **degré de *P***, noté deg(P), est l'exposant le plus élevé de X ayant un coefficient non nul.
Donc, ici, $\deg(P) = n$, où $n \in \mathbb{N}$.