Chapitre 9

Variable aléatoire

À l'origine, les mathématiques du hasard ont émergé d'un besoin très concret : comprendre et anticiper les résultats des jeux de dés, de cartes.
En 1654, Pascal et Fermat s'interrogent sur ces situations où l'issue dépend du hasard.
De fil en aiguille, leurs idées donnent naissance à une nouvelle discipline : la théorie des probabilités.

Avec le temps, cette théorie s'est enrichie d'outils plus puissants. Parmi eux, il y a la variable aléatoire. Elle permet de traduire en langage mathématique les résultats possibles d'une expérience aléatoire — comme le nombre obtenu en lançant un dé ou le gain réalisé dans un jeu.
Étudier ces variables, c'est donc apprendre à mieux mesurer l'incertitude et à prendre des décisions dans des contextes où le hasard intervient.

Blaise Pascal
(1623 -1662)

I- Variable aléatoire et la loi de Probabilité

1- Définition

Dans cette partie, on rappelle quelques définitions liées à une expérience aléatoire.

Définition

La probabilité d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance » qu'a un évènement de se produire.

Définitions

- Une **ISSUE** : chacun des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- L'**UNIVERS** : ensemble des issues d'une expérience aléatoire, noté Ω.
- Un **EVENEMENT** est un sous-ensemble de l'univers possibles.
- Un **évènement élémentaire** est un évènement constitué d'une seule issue.

Définitions

- L'**événement impossible** est la partie vide, noté $\emptyset$, lorsque aucune issue ne le réalise.
- L'**événement certain** est Ω, lorsque toutes les issues le réalisent.
- L'**événement contraire** de A noté $\overline{A}$ est l'ensemble des éventualités de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Faire les exercices 1 et 2 de la feuille de TD

2- Variable aléatoire

Définition

Une **variable aléatoire**, notée X, est une fonction définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle associe un nombre réel à chaque issue de l'univers des possibles.

Faire l'exercice 3 de la feuille de TD

3- La loi de probabilité

Définition

Soit une variable aléatoire définie sur un univers Ω et prend les valeurs suivant $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

Remarques :

- $P(X = x_i)$ peut se noter p_i
- *La somme des probabilités d'une loi de probabilité est égale à 1*

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Remarque : en supérieur, on définit la loi de probabilité de manière suivante.
Soit X est une variable aléatoire sur (Ω, P), un espace probabilisé fini.
On appelle *loi de la variable aléatoire X* la loi P_X sur $X(\Omega)$ définie par :

$$P_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0\,,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}$$

Faire les exercices 4 et 5 de feuille du TD

II- Espérance, Variance, Écart-type

Dans cette partie, on considère X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et prend les valeurs $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X = x_i)$

1- Espérance

Définition

L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Remarque : L'espérance est la *moyenne* de la série des x_i pondérés par les probabilités p_i.

En répétant un grand nombre fois une expérience, d'après la loi des grands nombres, on peut affirmer que les fréquences tendent vers les probabilités théoriques.

Par conséquent, la moyenne des résultats se rapprochent de l'espérance de la loi de probabilité.

Lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience, l'espérance est alors la moyenne que l'on peut espérer.

On parle d'un jeu **équitable** lorsque son espérance est nulle.

2- Variance

Définition

La **variance** de la variable aléatoire X est :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$

3- Écart-type

Définition

L'**écart-type** de la variable aléatoire X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque : L'écart type est une caractéristique de **dispersion.** C'est une moyenne quadratique des écart des valeurs avec l'espérance.

Faire l'exercice 6 de la feuille de TD

III- Hors programme

Propriétés de linéarité

Soit X une variable aléatoire. Soit a et b deux nombres réels. On a :

$$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Formule de supérieur

Théorème – Formule des probabilités totales

Soit (Ω , P) un espace probabilisé fini et soit $(A_i)_{i\in [\![1,n]\!]}$ un système complet d'évènement.
Pour tout évènement B de Ω, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

Remarque : Si on a $P(A_i)_{i\in [\![1,n]\!]} \neq 0$, on peut réécrire cette formule de la manière suivante :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B)$$

Cela vient du formule de probabilité conditionnelle : $P_{A_i}(B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$

Soit écrit différemment : $P(A_i \cap B) = P(A_i) P_{A_i}(B)$