

Sprawozdanie

Zagadnienie Hermite'a

Autor: Adrian Żerebiec

1. Zadanie

Podobną analizę przeprowadź dla zagadnienia Hermite'a. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. $n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20$). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa*. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

2. Dane techniczne

Zadanie zostało zrealizowane na laptopie z procesorem AMD Ryzen 7 4800H with Radeon Graphics 2.90 GHz z systemem Windows 10, a do tego 8 GB pamięci RAM. Całość została napisana w języku Python3.

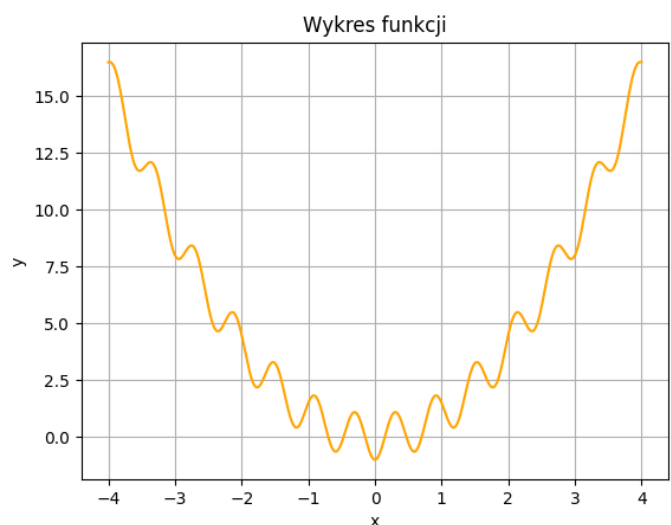
3. Funkcja do opracowania

$$f(x) = x^2 - m * \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

$$m = 1$$

$$k = 0.3$$

$$x \in [-4, 4]$$



Wykres 1: badana funkcja

4. Wstęp teoretyczny

4.1 Rozkład węzłów

W doświadczeniu wykorzystujemy rozkład równoodległy uwzględniający początek oraz koniec układu, oraz rozkład Czebyszewa obliczane z następującego wzoru:

$$x_k = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a) \cos\left(\frac{2k - 1}{2n} \pi\right), \quad k = 1, \dots, n.$$

4.2 Zagadnienie Hermite'a

Do rozwiązania zagadnienia interpolacji Hermite'a wykorzystano następujący wzór:

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^n b_l \cdot p_l(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{m_i-1} b_{(s(i)+j)} \cdot p_{(s(i)+j)}(x)$$

Aby znaleźć współczynniki b_l wykorzystujemy tablicę ilorazów różnicowych analogicznie jak w interpolacji Newtona'a

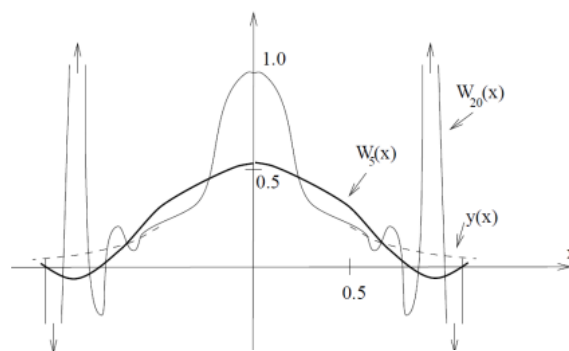
Przykład dla $m_1 = 3$

x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$f[x_0, x_1, x_1]$		
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$\frac{f''(x_1)}{2!}$	$f[x_0, x_1, x_1, x_1]$	
...
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_0, \dots, x_n]$

4.3 Efekt Runge'go

Pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów.

Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n , zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów. Takie zachowanie się wielomianu interpolującego jest zjawiskiem typowym dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów.



Rysunek 1: wizualizacja efektu Runge'go

4.4 Błędy

Wyróżniamy dwa rodzaje błędów:

- Największa różnica między wartością funkcji a wartością otrzymanego wielomianu

$$\max_k \{|f(x_k) - W(x_k)|\}$$

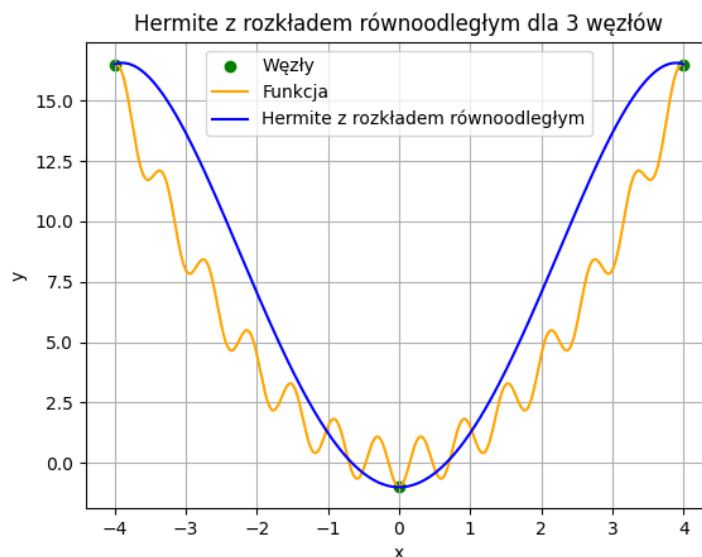
gdzie $W(x_k)$ reprezentuje wielomian

- Suma kwadratów różnic funkcji i wielomianu

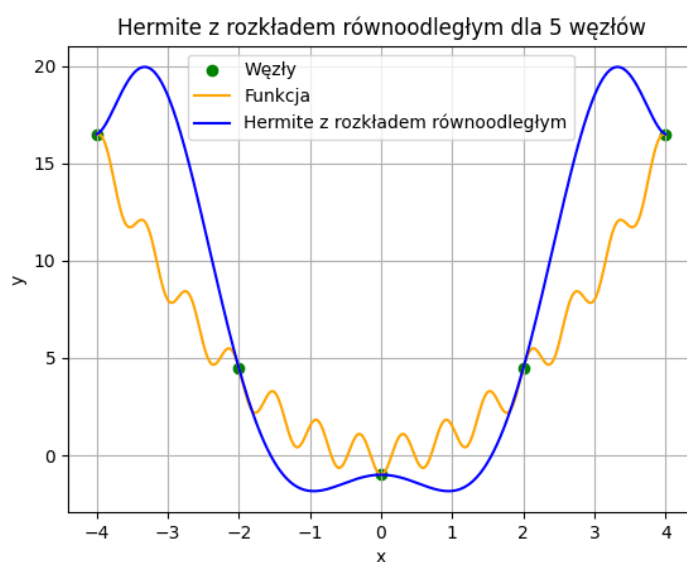
$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - W(x_i))^2$$

5. Opracowanie wyników

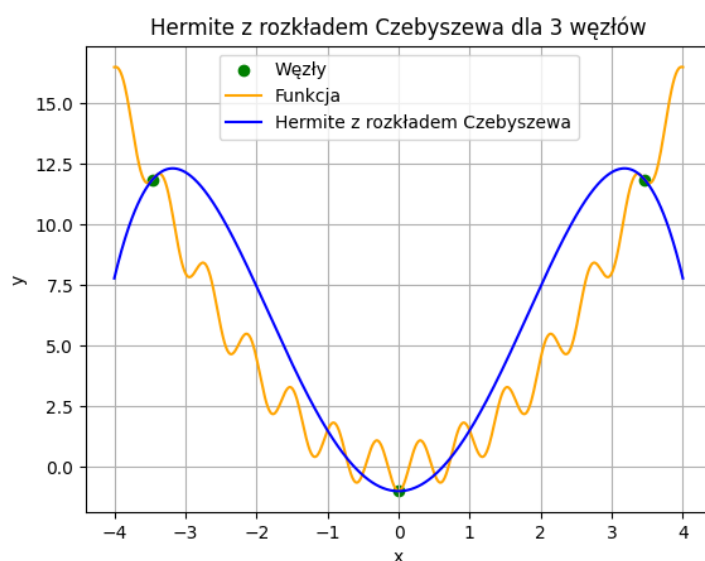
5.1 Małe liczby węzłów



Dla małej liczby węzłów, takiej jak na wykresie 2, widzimy, że wynik interpolacji znacząco odbiega od wykresu badanej funkcji. Zwiększając liczbę węzłów możemy zauważyć jednak poprawę, chociaż efekt nadal nie jest idealny, co widać na wykresie 3.

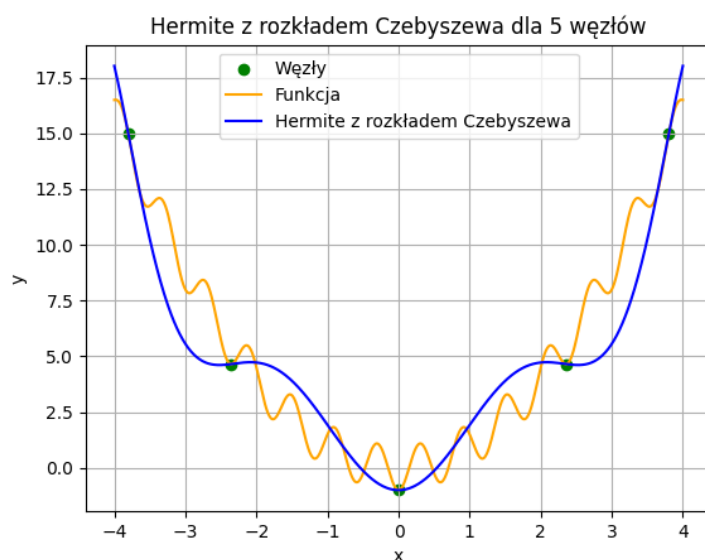


Analogicznie sytuacja wygląda dla rozkładu Czebyszewa, co widać na wykresie 4.



Wykres 4: interpolacja Hermite'a dla rozkładu Czebyszewa dla 3 węzłów

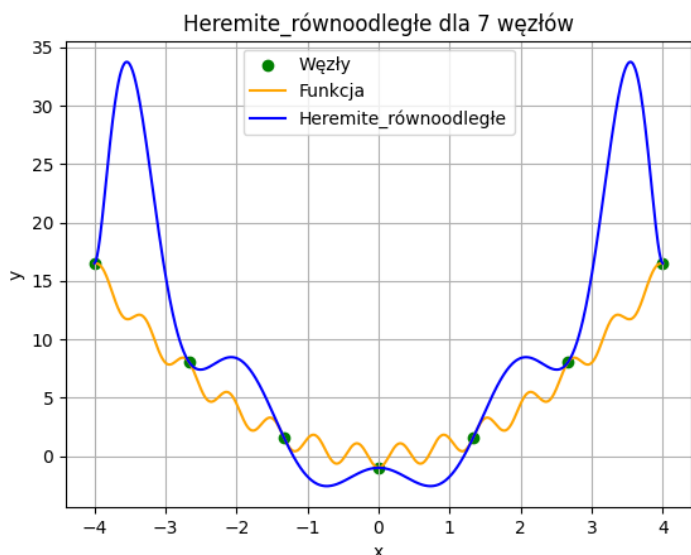
Tak samo, jak dla rozkładu równoodległego, Wykres 5 reprezentujący interpolację Hermite'a dla rozkładu Czebyszewa, poprawia się dla większej liczby punktów, i również tak samo jak na Wykresie 3, wynik interpolacji nie jest idealnie taki sam jak badana funkcja.



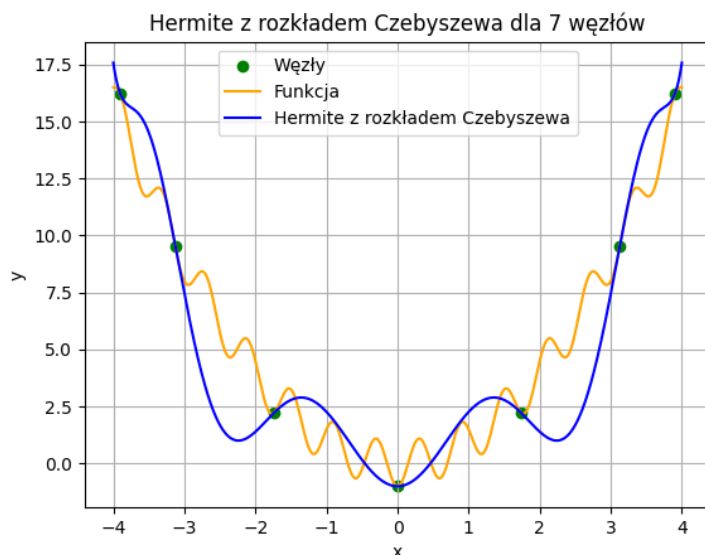
Wykres 5: interpolacja Hermite'a dla rozkładu Czebyszewa dla 5 węzłów

5.2 Większa ilość węzłów i efekt Runge'go

Przy większej liczbie węzłów, a dokładniej już dla 7 pojawia się wyraźny efekt Runge'go dla rozkładu równoodległego, co wynika z Wykresu 6. Dla analogicznej liczby węzłów w rozkładzie Czebyszewa nie występuje efekt Runge'go, co widać na Wykresie 7.

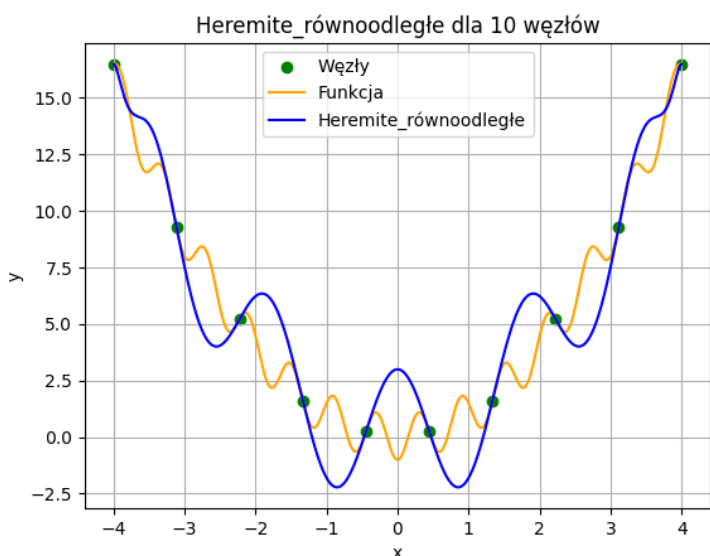


Wykres 6: interpolacja Hermite'a dla rozkładu równoodległego dla 7 węzłów

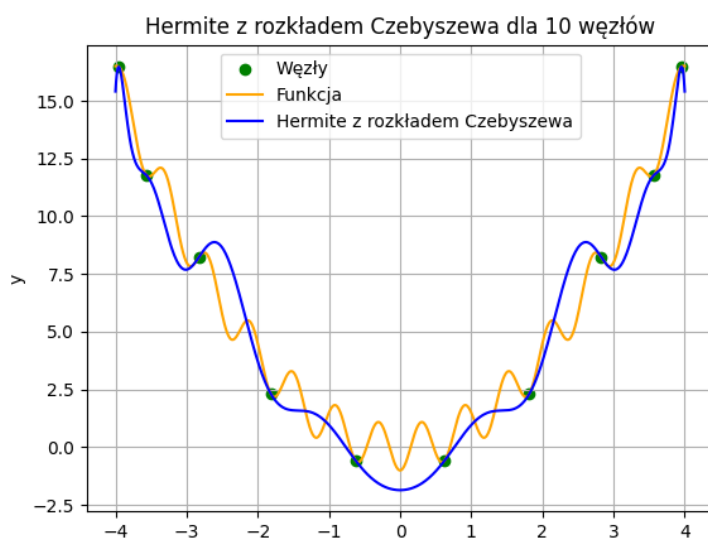


Wykres 7: interpolacja Hermite'a dla rozkładu Czebyszewa dla 7 węzłów

Od tego momentu efekt utrzymuje się już ciągle, z jednym wyjątkiem. Dla 10 węzłów nie występuje efekt Runge'go, co obrazuje Wykres 8, a wynik interpolacji przypomina badaną funkcję. Na Wykresie 9 natomiast widać, że wynik interpolacji coraz bardziej zbliża się do wyglądu badanej funkcji.

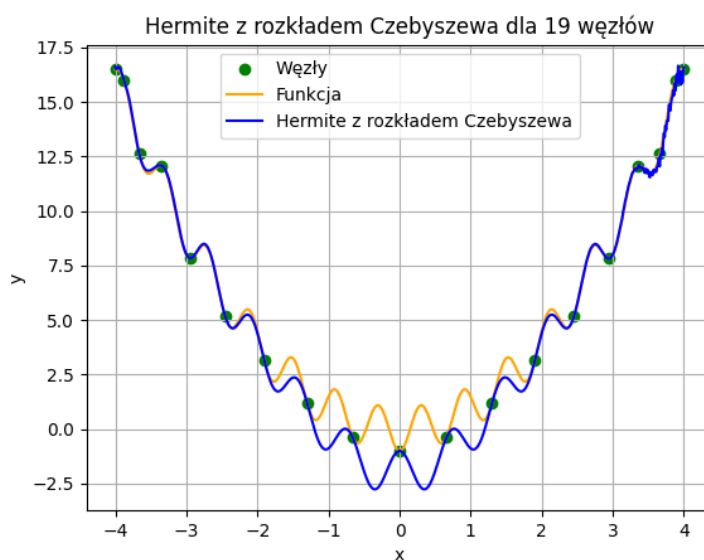


Wykres 8: interpolacja Hermite'a dla rozkładu równoodległego dla 10 węzłów



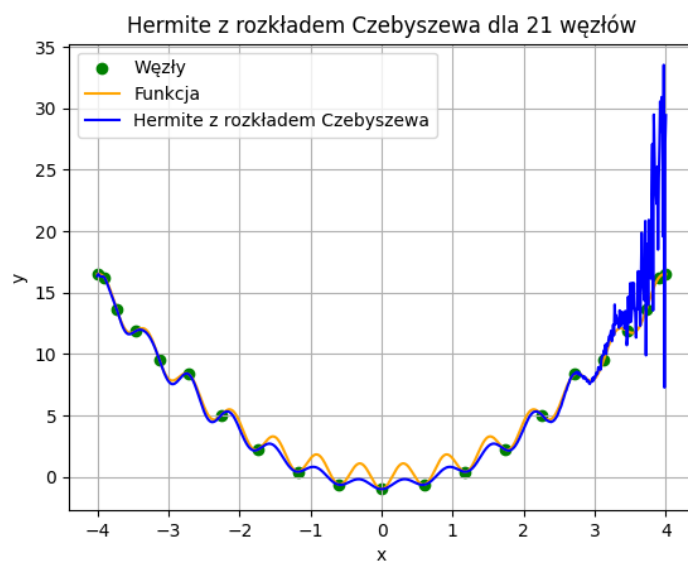
Wykres 9: interpolacja Hermite'a dla rozkładu Czebyszewa dla 10 węzłów

Dla rozkładu Czebyszewa efekt Runge’go nie pojawia się, za to pojawiają się błędy wynikające z arytmetyki komputerowej. Dla interpolacji Hermite’a z rozkładem równoodległym, błędy zawarte w Tabeli 1 są tak duże że nie ma sensu porównywać wyników z rozkładem Czebyszewa dla tak dużej liczby węzłów jak 19 albo 21. Poniżej możemy zobaczyć na Wykresie 10, że w wielu miejscach wynik interpolacji pokrywa się już z badaną funkcją.



Wykres 10: interpolacja Hermite’a dla rozkładu Czebyszewa dla 19 węzłów

Błędy arytmetyki wyraźnie widać dla 21 węzłów – Wykres 11. Ten stan utrzymuje się także dla każdej kolejnej liczby węzłów, jednak co warto zauważyć do momentu wystąpienia błędów Hermite z rozkładem Czebyszewa w znacznej części pokrywał się z zadaną funkcją.



Wykres 11: interpolacja Hermite’a dla rozkładu Czebyszewa dla 21 węzłów

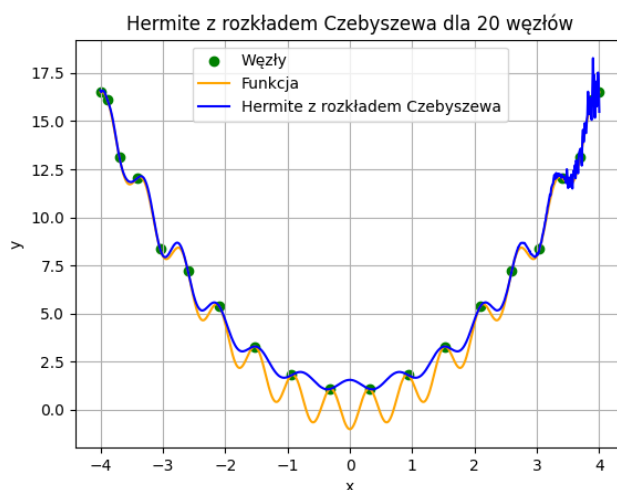
5.3 Błędy

Obliczanie błędów odbyło się dla 801 punktów.

Liczba węzłów	Maksymalny rów.	Maksymalny Czeb.	Średniokwad. rów.	Średniokwad. Czeb.
3	5.68	8.83	7.09e+03	7.34e+03
4	10.05	4.72	3.42e+04	4.94e+03
5	10.53	4.12	1.98e+04	2.72e+03
6	8.65	11.04	1.17e+04	1.26e+04
7	22.03	5.08	5.11e+04	4.13e+03
8	45.71	5.81	1.84e+05	6.52e+03
9	26.79	5.36	5.11e+04	4.91e+03
10	4.00	3.29	3.27e+03	1.51e+03
11	81.81	3.15	3.55e+05	1.55e+03
12	1.11e+03	3.55	5.70e+07	1.46e+03
13	5.27e+03	3.52	1.17e+09	1.30e+03
14	5.99e+03	4.25	1.37e+09	2.29e+03
15	3.50e+04	4.42	4.30e+10	1.56e+03
16	1.83e+05	4.18	1.08e+12	1.58e+03
17	4.67e+05	3.74	6.50e+12	1.34e+03
18	8.17e+05	4.93	1.85e+13	1.27e+03
19	1.09e+06	3.81	3.07e+13	1.06e+03
20	1.17e+06	2.56	3.32e+13	581.67
21	1.05e+06	22.88	2.50e+13	2.74e+03
22	7.96e+05	24.86	1.37e+13	5.90e+03
23	5.26e+05	218.75	5.64e+12	1.55e+05
24	3.05e+05	407.35	1.80e+12	8.71e+05
25	1.58e+05	1.98e+03	4.55e+11	1.34e+07
26	7.30e+04	5.15e+03	9.24e+10	1.58e+08
27	3.04e+04	8.20e+03	1.62e+10	3.52e+08
28	1.33e+04	5.23e+04	2.56e+09	9.81e+09
29	3.93e+04	1.18e+05	3.93e+09	4.73e+10
30	3.06e+04	3.33e+05	4.13e+09	5.87e+11
40	2.18e+07	2.65e+08	2.11e+15	4.29e+17
50	1.59e+14	6.26e+16	6.93e+28	2.02e+34

Tabela 1: tabela z błędami maksymalnymi oraz średniokwadratowymi dla interpolacji Hermite'a

Warto zauważyć iż rozkład równoodległy ma bardziej skrajne wyniki i błędy są zdecydowanie większe niż wyniki interpolacji dla rozkładu Czebyszewa. Co więcej, w rozkładzie Czebyszewa skrajne wyniki pojawiają się przy 21 węzłach. Wynikają one z błędów arytmetyki komputerowej. Tabela też pokazuje, że najlepszy wynik uzyskujemy dla 20 węzłów. Tak jak wspomniane zostało w punkcie 5.2 sprawozdania widać, że dla 10 węzłów w rozkładzie równoodległym nie ma wielkich wychyleń i nie występuje efekt Runge'go

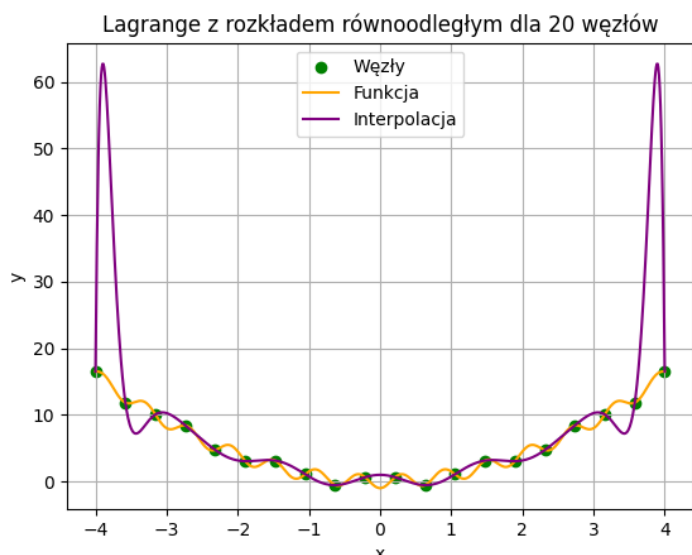


Wykres 12: interpolacja Hermite'a dla rozkładu Czebyszewa dla 20 węzłów

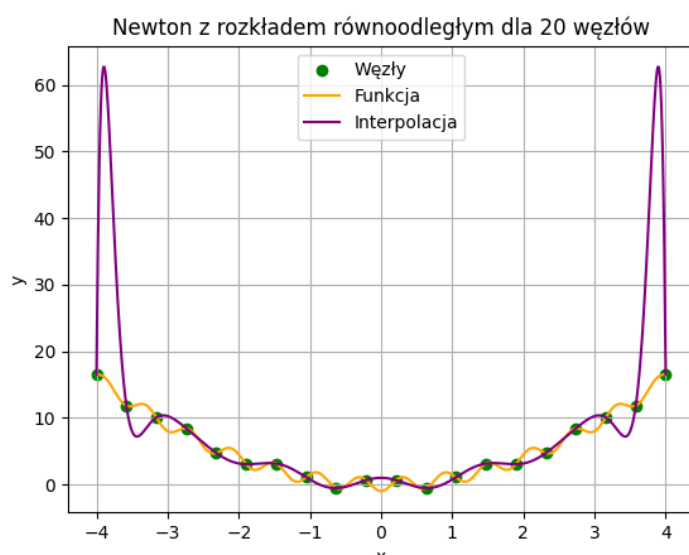
Jak widać na wykresie 12, pojawiają się wahania i oscylacje w okolicach $x=4$, natomiast jest to interpolacja o najmniejszym błędzie maksymalnym oraz średniokwadratowym.

5.4 Porównanie z innymi interpolacjami

W przeciwieństwie do interpolacji Newton'a i Lagrange'a z rozkładem równoodległym efekt Runge'go pojawia się dla mniejszej liczby węzłów, gdyż już dla 7, co widać na Wykresie 6, gdzie tam taka sytuacja miała miejsce dla 20 węzłów (pokazane na wykresach 13 i 14), zatem gdy tam efekt występował dla wielomianu stopnia 19 tutaj dla stopnia już 13.

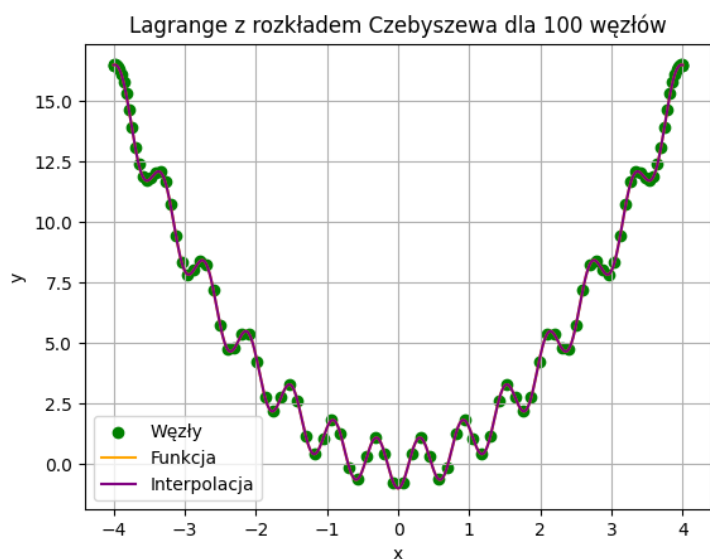


Wykres 13: interpolacja Lagrange'a dla rozkładu równoodległego dla 20 węzłów

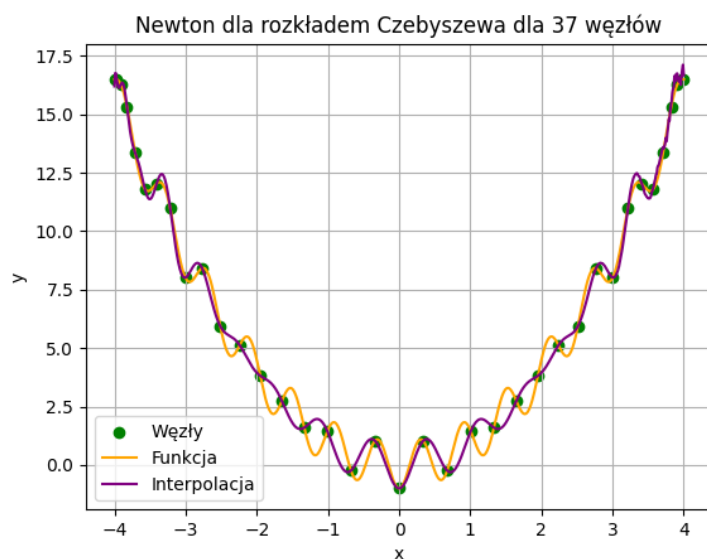


Wykres 14: interpolacja Newton'a dla rozkładu równoodległego dla 20 węzłów

Jeśli chodzi o rozkład Czebyszewa to tutaj podobnie jak dla interpolacji Newton'a trudno ocenić czy występuje efekt Runge'go, gdyż odpowiednio dla wielomianu stopnia 36 (widać to w okolicach $x=4$ na Wykresie 16) oraz dla wielomianu stopnia 37 (Wykres 10) pojawiają się błędy arytmetyki komputerowej. Co ciekawe dla interpolacji Lagrange'a taki problem nie występuje nawet dla 100 węzłów, co pokazuje Wykres 15.



Wykres 15: interpolacja Lagrange'a dla rozkładu Czebyszewa dla 100 węzłów



Wykres 16: interpolacja Newton'a dla rozkładu Czebyszewa dla 37 węzłów

6. Wnioski

Analogicznie jak dla interpolacji Lagrange'a i Newton'a wyniki dla rozkładu równoodległego są znacznie bardziej niedokładne niż dla rozkładu Czebyszewa.

Interpolacja Hermite'a dla rozkładu równoodległego jest mniej dokładna niż analogiczna dla rozkładu według zer wielomianu Czebyszewa.

W rozkładzie równoodległym już dla trzynastego stopnia wielomianu pojawia się efekt Runge'go, gdzie dla interpolacji Newtona oraz Lagrange'a było to dopiero dla stopnia dziewiętnastego.

Podsumowując, najbardziej dokładną metodą przybliżeń jest interpolacja Lagrange'a dla rozkładu Czebyszewa, gdyż błędy występujące w niej były niemal marginalne, a efekt Runge'go nie występował, zatem wyniki interpolacji są najlepsze.

7. Źródła

Wykład 2 i 3 dr Katarzyny Rycerz z przedmiotu MOWNiT

Wikipadia o interpolacji Hermite'a