Interpolacja i efekt Runge'go

Sprawozdanie

Autor: Adrian Żerebiec

1. Zadanie

Dla jednej z poniższych funkcji (podanej w zadaniu indywidualnym) wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

2. Dane techniczne

Zadanie zostało zrealizowane na laptopie z procesorem AMD Ryzen 7 4800H with Radeon Graphics 2.90 GHz z systemem Windows 10, a do tego 8 GB pamięci RAM. Całość została napisana w języku Python3.

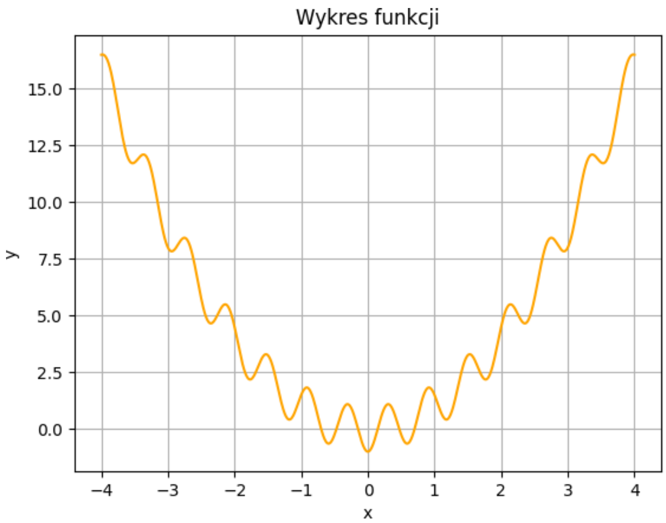
3. Funkcja do opracowania

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - m * cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)}$$

m = 1

k = 0.3

$x \in [-4,4]$



Wykres 1: wykres badanej funkcji

4. Wstęp teoretyczny

4.1 Rozkład węzłów

W doświadczeniu wykorzystujemy rozkład równoodległy uwzględniający początek oraz koniec układu, oraz rozkład Czebyszewa obliczane z następującego wzoru:

$$x_k = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

4.2. Interpolacja Lagrange'a

Licznik d:

$d = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_k)\dots(x - x_n)$

Mianownik m:

$m = (x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_n)$

$$L_k(x) = \frac{d}{m} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{(x_k - x_i)},$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{f(x_k)}_{\text{współczynniki}} \underbrace{L_k(x)}_{\text{baza Lagrange'a}}$$

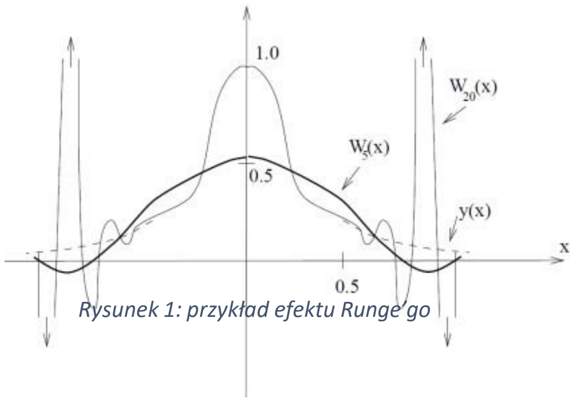
4.3 Interpolacja Newtona

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1 \dots, x_n](x - x_0)\dots(x_{k-1})$$

gdzie $f[x_i,\ x_{i+1}, \dots x_{i+k}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots . x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots . x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$

4.4 Efekt Runge'go

Pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów *n* przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście *n,* zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów. Takie zachowanie się wielomianu interpolującego jest zjawiskiem typowym dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów.



Rysunek 1: przykład efektu Runge'go

4.5 Błędy

Wyróżniamy dwa rodzaje błędów:

- Największa różnica między wartością funkcji a wartością otrzymanego wielomianu

$$max_k\{|f(x_k) - W(x_k)|\}$$

gdzie $W(x_k)$ reprezentuje wielomian

- Suma kwadratów różnic funkcji i wielomianu

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - W(x_i))^2$$

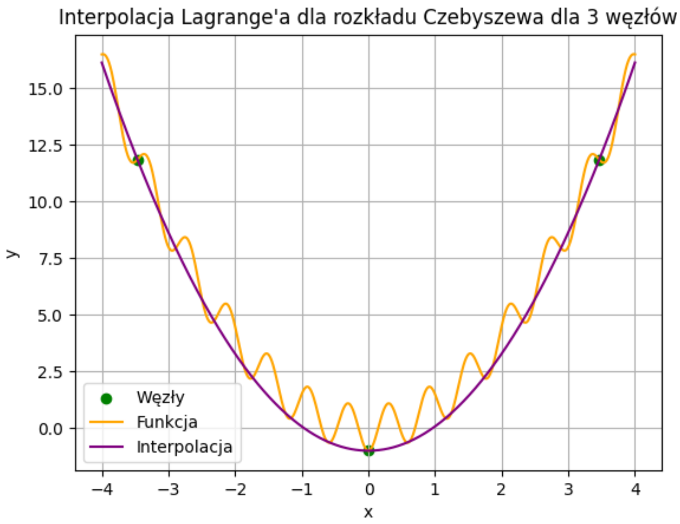
5. Opracowanie wyników

Błędy były liczone w sprawozdaniu dla dokładnie 801 punków.

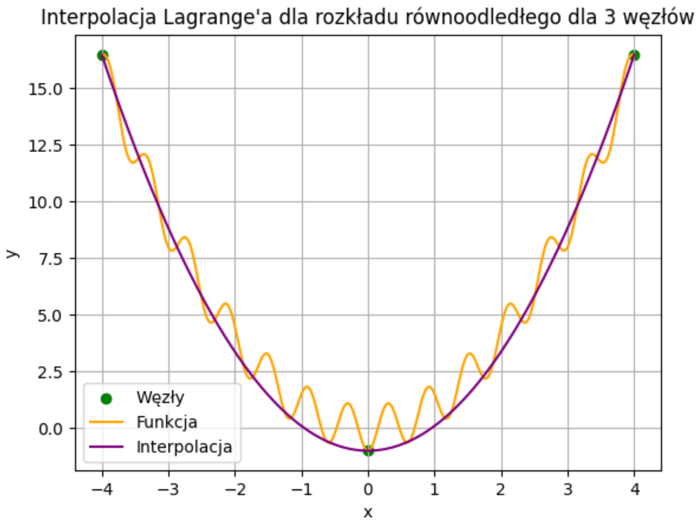
5.1 Metoda Lagrange'a

5.1.1 Wyniki dla małej ilości węzłów

Dla małej ilości węzłów możemy zauważyć, że nasz wielomian interpolowany bardziej przypomina zwykłą funkcję kwadratową niż oczekiwaną przez nas funkcję. Sytuacja wraz ze wzrostem ilości węzłów ulega zmianie. Analogicznie sytuacja ma się dla np. 7 węzłów.

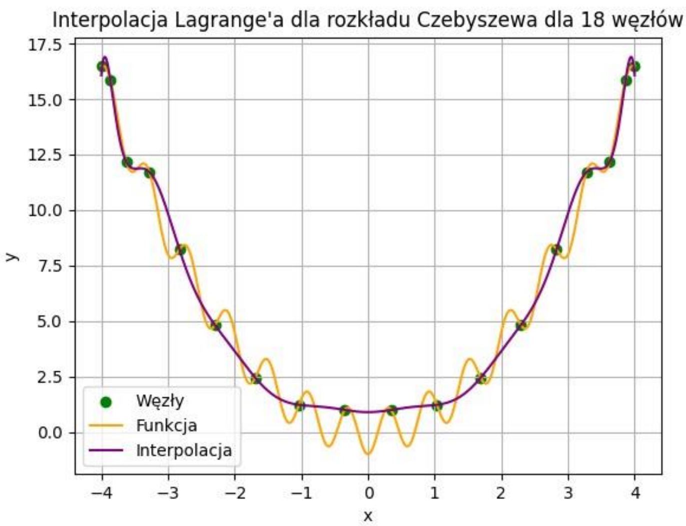


Wykres 2: Interpolacja Lagrange'a dla rozmieszczenia Czebyszewa dla 3 węzłów

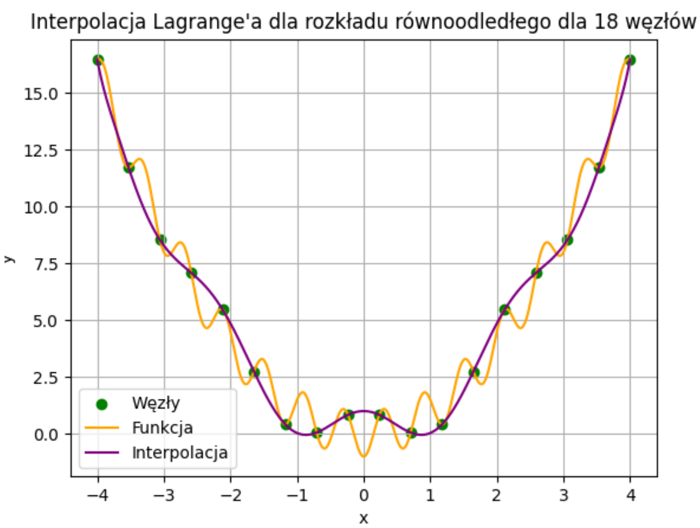


Wykres 3: Interpolacja Lagrange'a dla rozmieszczenia równoodległego dla 3 węzłów

Zwiększając liczbę węzłów na 18 widzimy, iż wykresy interpolacji Lagrange'a w obu przypadkach powoli zmieniają kształt i zaczynają przypominać badaną funkcję.



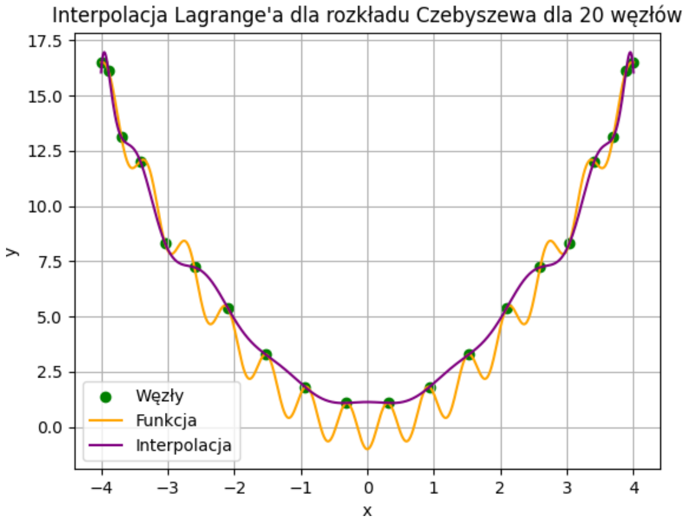
Wykres 4: Interpolacja Lagrange'a dla rozmieszczenia Czebyszewa dla 18 węzłów



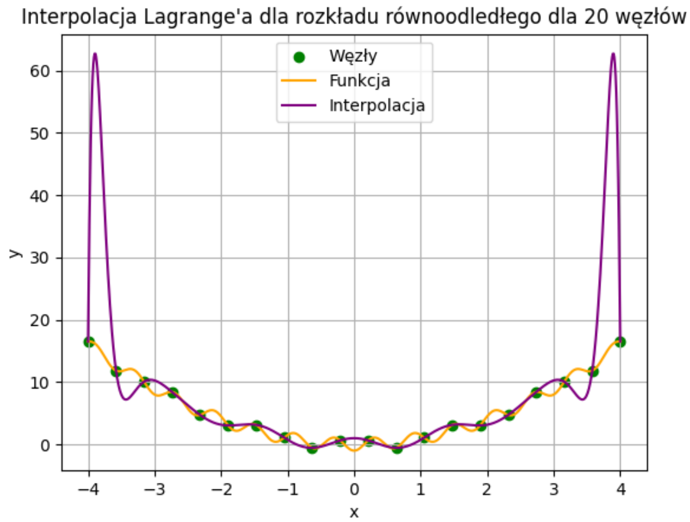
Wykres 5: Interpolacja Lagrange'a dla rozmieszczenia równoodległego dla 18 węzłów

5.1.2 Większa ilość węzłów

Ciekawe zjawisko możemy zaobserwować dla równoodległego rozmieszczenia węzłów. Już przy 20 węzłach pojawia się efekt Runge'go. Natomiast co warto zauważyć dla rozmieszczenia Czebyszewa nawet dla 99 węzłów nie pojawia się ten efekt.



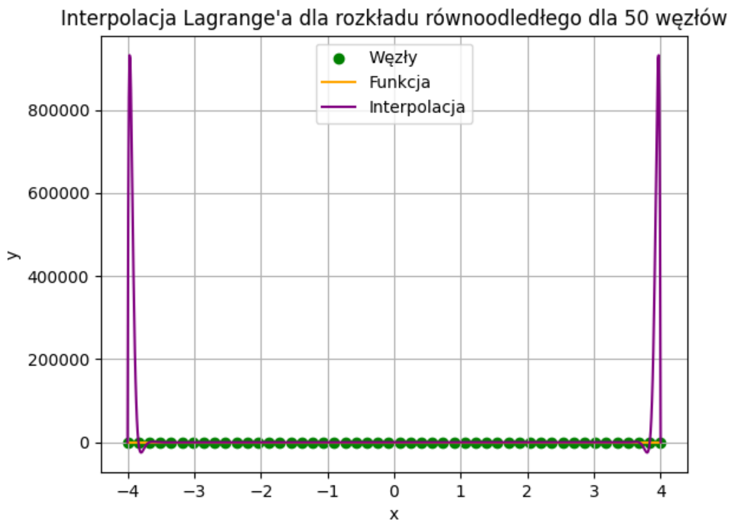
Wykres 6: Interpolacja Lagrange'a dla rozmieszczenia Czebyszewa dla 20 węzłów



Wykres 7: Interpolacja Lagrange'a dla rozmieszczenia równoodległego dla 20 węzłów

Wynika to z faktu, iż węzły rozmieszczone zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa są skupione bardziej na krańcach przedziału, co pozwala uniknąć odchyleń na poziomie rozmieszczenia równoodległego.

Im większa ilość węzłów tym bardziej interpolacja Lagrange'a rozjeżdża się z badaną przez nas funkcją.



Wykres 8: Interpolacja Lagrange'a dla rozmieszczenia równoodległego dla 50 węzłów

Dla 50 węzłów wartości sięgają nawet około 93 tysięcy, ale co warto zauważyć wartości w środku

5.1.3 Błędy pomiarów oraz analiza

Liczba węzłów	Maksymalny rów.	Maksymalny Czeb.	Średniokwad. rów.	Średniokwad. Czeb
2.0	17.4986	9.2226	118213.815	25669.2657
3.0	1.9906	1.9926	745.3623	798.2131
4.0	1.3558	2.2556	427.272	997.975
5.0	2.3199	2.016	1023.5993	939.0267
6.0	2.1565	1.6674	821.5419	469.1086
7.0	1.9798	1.9908	816.5977	807.8662
8.0	1.9869	2.0688	703.1364	642.4559
9.0	2.4081	1.9183	985.9479	555.7718
10.0	1.8866	2.2866	584.6248	903.6722
15.0	1.9869	2.0248	703.1559	800.926
18.0	1.9985	1.8947	777.3426	590.2963
19.0	5.5017	2.1958	1735.0704	716.9545
20.0	46.5538	2.1315	74836.6284	879.8532
25.0	91764.6502	2.0384	217405052493.6736	622.2518
30.0	374124.1765	2.1987	2969449508988.1416	546.236
35.0	10725727.7076	1.9561	2010115324218817.8	428.8549
40.0	6862024.1126	1.2789	723853003400575.9	183.0236
45.0	5106855.9807	0.9268	350197008615664.94	3.2247
50.0	945294.4421	0.053	10781273627892.959	0.0198
55.0	128934.484	0.0027	134359830226.0316	0.0
60.0	10894.7234	0.0001	704384756.4132	0.0
65.0	394.5823	0.0	668037.9146	0.0
70.0	117.9131	0.0	75476.2248	0.0
75.0	3514.0219	0.0	36399110.7009	0.0
80.0	144857.4145	0.0	50879303928.5258	0.0
85.0	5366390.9784	0.0	56594217843615.84	0.0
90.0	532322869.2324	0.0	3.6771505108749056e+17	0.0
95.0	15591924251.164	0.0	2.8707192513005575e+20	0.0
100.0	142719257764.0156	0.0	4.023073397088451e+22	0.0

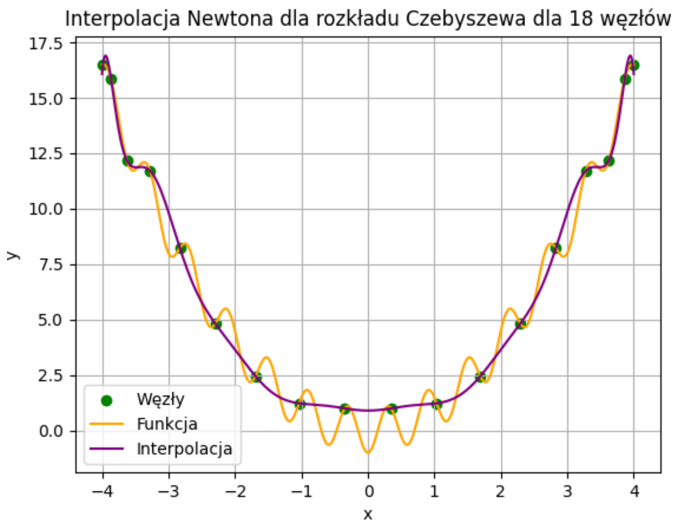
Tabela 1: wyniki błędów dla interpolacji Lagrange'a

Analizując powyższe wyniki możemy zauważyć, że dla rozkładu według miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa im więcej węzłów, tym większa dokładność wielomianu uzyskanego z interpolacji Lagrange'a. Sytuacja inaczej wygląda dla rozkładu równoodległego. W nim dla 20 węzła wartość błędu zacznie wzrasta. Pojawia się szukany właśnie efekt Runge'go.

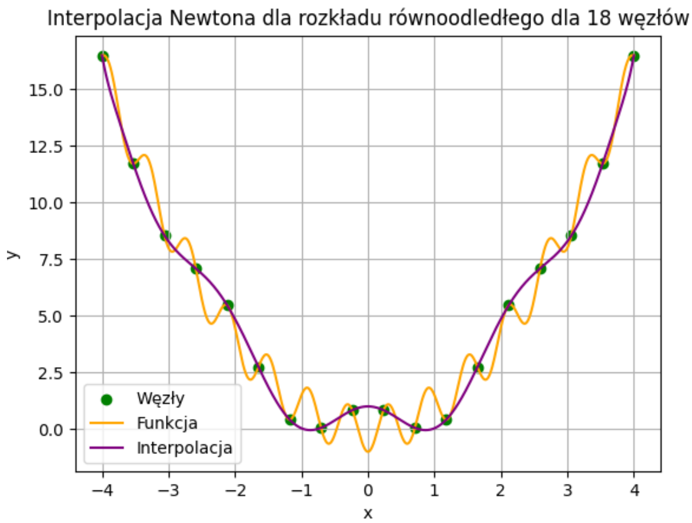
5.2 Metoda Newtona

5.2.1 Wyniki dla małej ilości węzłów

Analogicznie jak dla metody Lagrange'a najpierw warto zobaczyć wykresy dla małej ilości węzłów. Również tak samo jak dla interpolacji Lagrange'a wzrasta dokładność wykresów wraz ze wzrostem ilości węzłów.



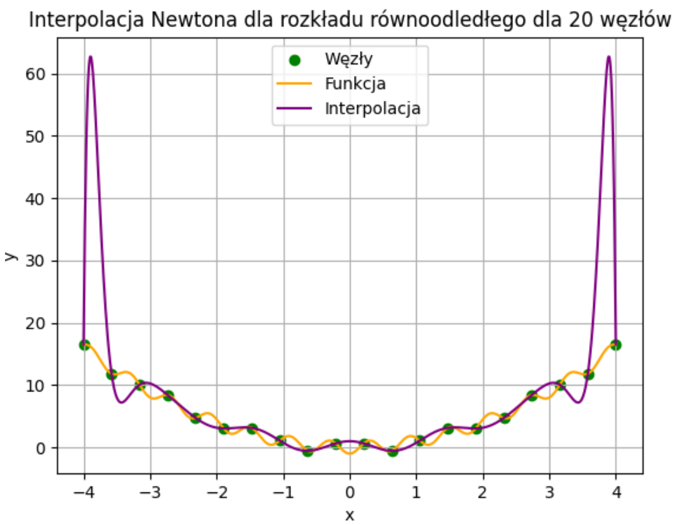
Wykres 9: Interpolacja Newton'a dla rozmieszczenia Czebyszewa dla 19 węzłów



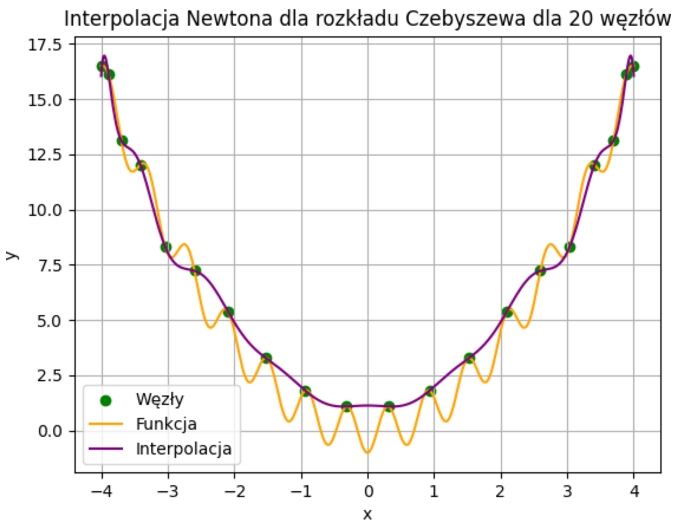
Wykres 10: Interpolacja Newton'a dla rozmieszczenia równoodległego dla 19 węzłów

5.2.2 Większa ilość węzłów

Tak samo jak dla podpunktu 5.1.2 widzimy, że dla równoodległych węzłów już przy 20 nasz wielomian się rozjeżdża i pojawia się efekt Runge'go. Natomiast dla rozkładu według zer wielomianu Czebyszewa wynik coraz bardziej przypomina badaną funkcję.



Wykres 11: Interpolacja Newton'a dla rozmieszczenia równoodległego dla 20 węzłów



Wykres 12: Interpolacja Newton'a dla rozmieszczenia Czebyszewa dla 20 węzłów

5.2.3 Błędy i analiza

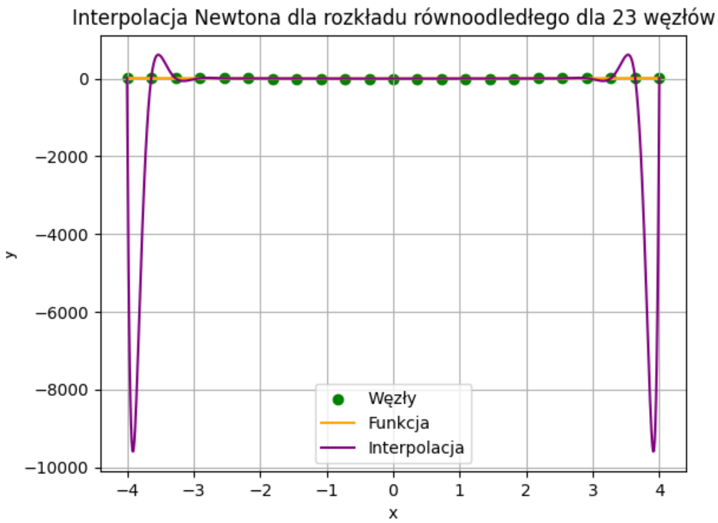
Liczba węzłów	Maksymalny rów.	Maksymalny Czeb.	Średniokwad. rów.	Średniokwad. Czeb
2.0	17.4986	9.2226	118213.815	25669.2657
3.0	1.9906	1.9926	745.3623	798.2131
4.0	1.3558	2.2556	427.272	997.975
5.0	2.3199	2.016	1023.5993	939.0267
6.0	2.1565	1.6674	821.5419	469.1086
7.0	1.9798	1.9908	816.5977	807.8662
8.0	1.9869	2.0688	703.1364	642.4559
9.0	2.4081	1.9183	985.9479	555.7718
10.0	1.8866	2.2866	584.6248	903.6722
15.0	1.9869	2.0248	703.1559	800.926
18.0	1.9985	1.8947	777.3426	590.2963
19.0	5.5017	2.1958	1735.0704	716.9545
20.0	46.5538	2.1315	74836.6284	879.8532
25.0	91764.6502	2.0384	217405052495.9006	622.2519
30.0	374124.1756	2.1987	2969449501495.955	546.2357
35.0	10725727.634	1.9561	2010115320403658.2	428.9836
40.0	6862024.2203	2.2074	723853079550807.8	236.3198
45.0	5106855.9807	78.0332	350196210753550.56	40340.707
50.0	944267.1762	1389.239	10783288064028.092	10848539.3815
55.0	121625.9407	32662.557	136519591420.7456	5289057194.7983
60.0	55702.0376	295795.4648	13939985144.0159	268460221495.4445
65.0	323628.9151	3912667.4746	277414407857.0174	40739292477035.59
70.0	2016596.4186	6220214.7623	15571607847464.316	327731146546127.75
75.0	4550664.9688	63813356.7778	86951858657127.75	2.175784715057294e+16
80.0	16775176.0743	224728818.9043	1562661765359615.2	4.6831812901339104e+17
85.0	29693140.2734	7329491832.4363	4021833323493555.5	2.172630392312706e+20
90.0	19533974395.7244	5935672841539.669	1.1988159557397247e+21	1.1789501352032588e+26
95.0	1947238251505.5227	432410501258057.06	6.26403002713916e+24	4.4854003584802445e+29
100.0	466655669750507.1	7.809414265552731e+16	7.93850538718256e+29	4.14437729947638e+34

Tabela 2: błędy dla interpolacji Newton'a

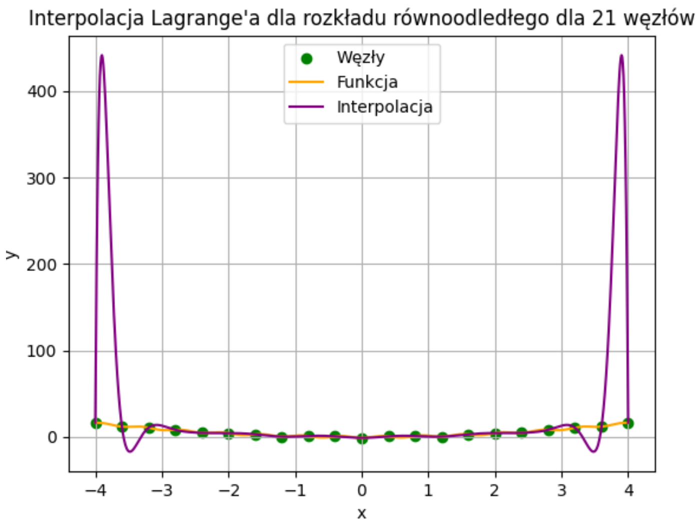
Powyższe wyniki potwierdzają, iż dla interpolacji Newton'a dla rozkładu Czebyszewa pojawia się efekt Runge'go. Jak widać dzieje się to między 40 a 45 węzłem. Dokładniej analizując wykresy można odczytać, iż jest to dokładnie dla 41 węzła gdzie pojawia się duże odchylenie, jednak jest ono efektem arytmetyki komputerowej a nie efektem Runge'go. Co ciekawe błędy maksymalne są większe również dla równoodległego rozkładu niż dla odpowiednika w interpolacji Lagrange'a.

5.3 Efekt Runge'go

Jak wcześniej zauważyliśmy efekt Runge'go pojawia się dla rozkładu równoodległego przy 20 węzłach dla obu interpolacji: Newton'a i Lagrange'a. Efekt Runge'go nie występuje dla rozkładu zgodnego z zerami wielomianu Czebyszewa przy interpolacji Lagrange'a. Dla interpolacji Newton'a w przypadku rozkładu Czebyszewa od 37 węzła występują błędy arytmetyki komputerowej. Poniżej różne przykłady efektu dla rozmieszczenia równoodległego.



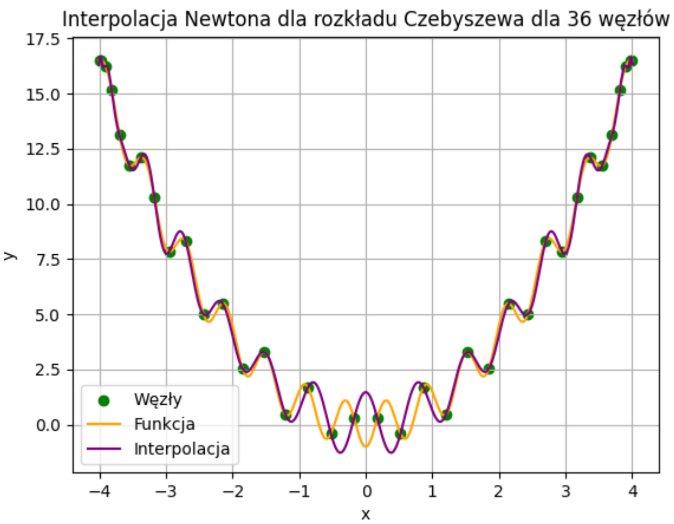
Wykres 13: Interpolacja Newton'a dla rozmieszczenia równoodległego dla 23 węzłów



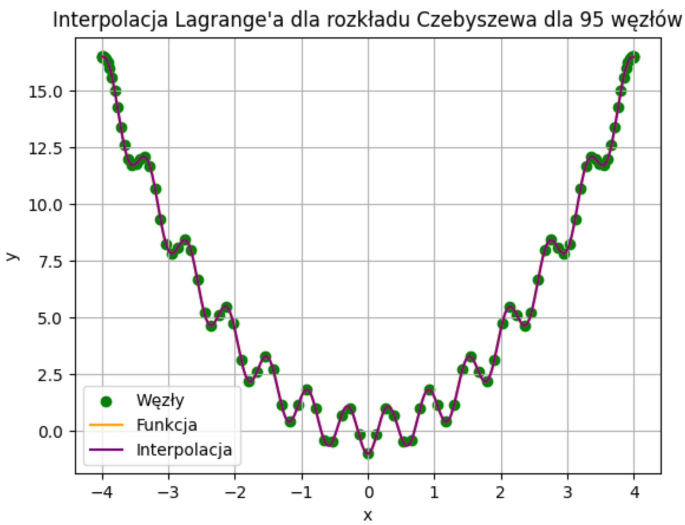
Wykres 14: Interpolacja Lagrange'a dla rozmieszczenia równoodległego dla 21 węzłów

5.4 Najlepiej pasująca funkcja oraz krótkie porównanie

Najlepiej dopasowanymi funkcjami dla rozkładu Czebyszewa są odpowiednio: 95 węzłów w interpolacji Lagrange'a i 36 dla interpolacji Newton'a i są to wartości odczytane z tabel 1 oraz 2. Dla rozkładu równoodległego jak też da się odczytać z tabel najlepszą funkcją jest ta dla 19 węzłów, czyli ostania przed wystąpieniem efektu Runge'go.



Wykres 15: Interpolacja Newton'a dla rozmieszczenia Czebyszewa dla 36 węzłów



Wykres 16: Interpolacja Lagrange'a dla rozmieszczenia Czebyszewa dla 95 węzłów

Ogólnie rzecz biorąc dla interpolacja Newton'a i Lagrange'a daje zbliżone wyniki. Sytuacja dotyczy jednak tylko i wyłącznie rozkładu równoodległego. Dla rozkładu Czebyszewa występują znaczące różnice wynikające z arytmetyki komputerowej. Dotyczą one przede wszystkim interpolacji Newton'a.

6. Wnioski

Dla równomiernego rozkładu węzłów bardzo trudno będzie uzyskać wielomian interpolujący będący dobrym przybliżeniem badanej funkcji. W celu zmniejszania występującego efektu Runge'go warto zastosować rozkład zgodny z zerami wielomianu Czebyszewa. Nie jesteśmy w stanie uzyskać idealnego przybliżenia interpolowanej funkcji, ponieważ musimy wziąć pod uwagę niedokładność obliczeń wykonywanych z wykorzystaniem liczb zmiennoprzecinkowych, które są obarczone błędem zaokrąglenia.

Wzrostowi stopnia wielomianu interpolującego, towarzyszy wzrost dokładności przybliżenia interpolowanej funkcji, ale tylko gdy korzystamy z węzłów rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa. Taki wzrost dokładności jest jednak widoczny do pewnego momentu, po którym dokładność się pogarsza, ze względu na niedokładność obliczeń, wykonywanych przy pomocy liczb zmiennoprzecinkowych.

7. Źródła

Wykład numer 2 dr Rycerz z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Wikipedia – strony o interpolacji Lagrange'a oraz Newton'a