

# Sprawozdanie

## Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Autor: Adrian Żerebiec

### 1. Zadanie.

Dla funkcji  $f(x)$  zadanej w zadaniu dotyczącym interpolacji wyznaczyć jej wartości w  $n$  dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując: aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

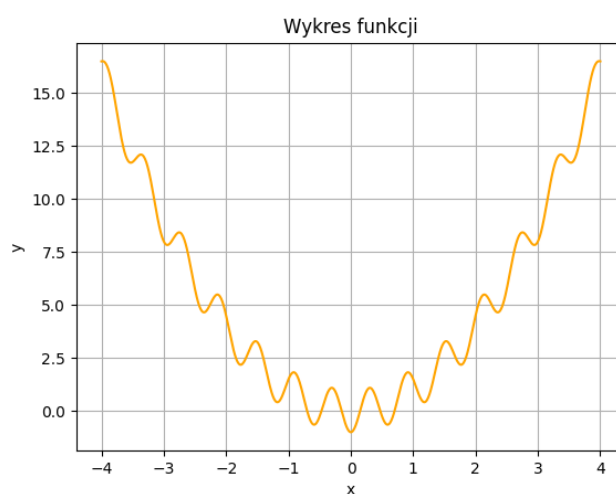
### 2. Dane techniczne

Zadanie zostało zrealizowane na laptopie z procesorem AMD Ryzen 7 4800H with Radeon Graphics 2.90 GHz z systemem Windows 10, a do tego 8 GB pamięci RAM. Całość została napisana w języku Python3.

### 3. Funkcja do opracowania

$$f(x) = x^2 - m * \cos\left(\frac{\pi x}{0.3}\right)$$

$$x \in [-4, 4]$$



Wykres 1: wykres badanej funkcji

### 4. Wstęp teoretyczny

#### 4.1 Błędy

##### 4.1.1 Największa różnica między wartością funkcji a wartością otrzymanego wielomianu

$$\max_k \{|f(x_k) - W(x_k)|\}$$

gdzie  $W(x_k)$  reprezentuje wartość wielomianu w punkcie  $x_k$ ,  $f(x_k)$  wartość funkcji w punkcie  $x_k$ . Maximum szukamy po punktach na wykresie, w naszym przypadku dla 800 punktów.

##### 4.1.2 Suma kwadratów różnic funkcji i wielomianu

$$\sum_{i=1}^N (f(x_i) - W(x_i))^2$$

gdzie  $W(x_i)$  reprezentuje wartość wielomianu w punkcie  $x_i$ ,  $f(x_i)$  wartość funkcji w punkcie  $x_i$ , a  $N$  to liczba, w których liczymy różnicę.

## 4.2 Opis aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi

### Szukanie wielomianu uogólnionego

Dane:

$n$  – liczba węzłów aproksymacji:

$(x_i, y_i) = (x_i, F(x_i))$ , gdzie  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

układ funkcji bazowych:  $\varphi_j(x)$ , gdzie  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$

(1)

Szukamy uogólnionego wielomianu w postaci:

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x)$$

(2)

Wyznaczamy wartości współczynników  $a_j$  (dla  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ ), takie dla których spełniony jest poniższy warunek:

$$\min! \|F(x) - f(x)\| = \min! \sum_{i=0}^n w(x_i) \left[ F(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) \right]^2$$

gdzie:

$$F(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) \Leftrightarrow F(x_i) - f(x)$$

$w(x_i)$  – jest to waga danego węzła (im większa waga względem pozostałych węzłów, tym funkcja aproksymująca będzie bardziej minimalizować odległość w danym węźle od wartości aproksymowanej funkcji),

(3)

### Wyznaczanie wzoru na obliczenie wartości współczynników $\{a_j\}$

Przyjmujemy:

$$H(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n w(x_i) \left[ F(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) \right]^2$$

(4)

Obliczając pochodne cząstkowe pierwszego rzędu dla kolejnych współczynników  $a_k$

( $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ ) i przyrównując je do zera ( $\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0$ ), otrzymamy układ  $m + 1$  równań liniowych o  $m + 1$  niewiadomych. Układ ten składa się z równań:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=0}^n w(x_i) \left[ F(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) \right] \varphi_k(x_i) = 0$$

(5)

Jeżeli za funkcje bazowe przyjmiemy ciąg jednomianów postaci  $\varphi_j(x) = x^j$ , gdzie  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ , po wstawieniu  $\varphi_j(x)$  do wzoru (2), otrzymamy następującą funkcję aproksymującą:

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j \quad (6)$$

W przypadku, gdy funkcja  $F(x)$  zadana jest na zbiorze dyskretnym (w postaci kolejnych punktów  $\{x_i\}$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ), uwzględniając wzór (5) oraz przyjmując, że  $\varphi_j(x) = x^j$ , otrzymujemy:

$$\sum_{i=0}^n w(x_i) \left[ F(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right] x_i^k = 0$$

gdzie  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$

(7)

Wykonując odpowiednie własności działań oraz podstawienia uzyskujemy:

$$b_k = \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) x_i^k$$

$$g_{k,j} = \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^{j+k}$$

(8)

Po uwzględnieniu powyższych podstawień, otrzymujemy ostateczną postać równania:

$$b_k = \sum_{j=0}^m g_{k,j} a_j$$

(9)

### Obliczanie wartości współczynników $\{a_j\}$

Korzystając z wyznaczonego wyżej równania (9), możemy zapisać układ równań w postaci macierzowej, pozwalający na obliczenie wartości współczynników  $a_j$ .

$$\begin{bmatrix} g_{0,0} & g_{0,1} & g_{0,2} & \cdots & g_{0,m} \\ g_{1,0} & g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m,0} & g_{m,1} & g_{m,2} & \cdots & g_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(10)

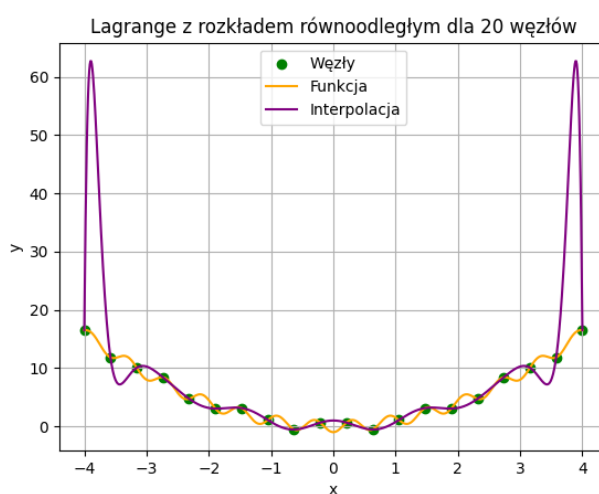
Otrzymujemy zatem:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n w(x_i) & \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i & \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^m \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i & \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^2 & \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^3 & \cdots & \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^m & \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^{m+1} & \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^{m+2} & \cdots & \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) x_i^m \end{bmatrix} \quad (11)$$

Z powyższego układu równań obliczamy wartości współczynników  $\{a_j\}$ , które podstawiamy do wzoru na funkcję aproksymującą (6).

### 4.3 Efekt Runge'go

W matematycznej dziedzinie analizy numerycznej efekt Runge'go to problem oscylacji na krawędziach przedziału, który występuje podczas stosowania interpolacji wielomianowej z wielomianami wysokiego stopnia na zbiorze punktów interpolacji o równych odstępach. Ściślej mówiąc, jest to występująca oscylacja między kolejnymi węzłami, czyli znaczne pogorszenie jakości interpolacji (aproksymacji) mimo zwiększenia liczby węzłów. Na rysunku 1 możemy zobaczyć występowanie efektu między węzłami 1-2, 2-3, 18-19 i 19-20.



Rysunek 1: przykład Efektu Runge'go

## 5. Opracowanie wyników

### Twierdzenie 1.

Jeżeli  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (wartości współrzędnych  $x$  kolejnych węzłów aproksymacji) są parami różne oraz stopień wielomianu jest nie większy niż liczba węzłów aproksymacji, to  $\det G \neq 0$  ma dokładnie jedno rozwiązanie.

### Krótki wstęp

Podczas doświadczenia postanowiłem sprawdzić także przypadki, w których Twierdzenie 1. nie jest spełnione. Robię to jedynie z ciekawości, aby zobaczyć co dzieje się z błędami oraz wykresami. W praktyce jednak należy starać się, aby liczba węzłów była większa lub równa stopniowi wielomianu. Dodatkowo niektóre przypadki porównałem z interpolacjami Lagrange'a dla rozkładu równoodległego, aby stwierdzić czy w analogicznych momentach występuje efekt Runge'go. W doświadczeniu jednak chcemy w szczególności sprawdzić jaki wpływ na wyniki ma zwiększenie liczby węzłów lub stopnia wielomianu. Dzięki temu dowiemy się jak to, wpływa na jakość oraz wartości błędów w aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi.

## 5.1 Tabele z błędami maksymalnymi oraz średniokwadratowymi

Zanim pokazane zostaną tabele, poniżej przedstawiam oznaczenia jakie są w nich wykorzystane.

Oznaczenia	Wyjaśnienie	Kolor
st	Stopień wielomianu	
n	Liczba węzłów	

Legenda 1: Oznaczenia w tabelach 1 i 2

Legenda pokazuje, że jako jasny pomarańczowy oznaczone są stopnie wielomianu, a niebieskim liczba węzłów. Dodatkowo jasny szary kolor w tabelach pokazuje przypadki, w których Twierdzenie 1 nie jest spełnione.

### Tabela błędów maksymalnych

st \ n	4	6	10	15	20	30	40	50
2	1,35	1,14	1,19	1,93	1,03	1,08	1,1	1,11
3	1,33	1,14	1,19	1,93	1,05	1,09	1,1	1,11
4	6,27	2,17	1,14	1,99	1,06	1,09	1,12	1,13
6	2,49	3,98	1,35	1,99	1,26	1,07	1,06	1,06
7	2,32	2,54	1,4	1,99	1,27	1,07	1,07	1,07
8	29,89	2,64	1,87	1,99	1,37	1,09	1,08	1,09
10	35,65	4,32	68,35	1,99	2,27	1,07	1,04	1,05
15	20,45	6,46	3,96	1,99	10,64	1,35	1,15	1,16
25	84,5	6,61	193,08	1,99	486,73	166,96	14,29	1,19

Tabela 1: Tabela błędów maksymalnych w zależności od stopnia funkcji oraz liczby węzłów

### Tabela błędów średniokwadratowych

st \ n	4	6	10	15	20	30	40	50
2	421,57	406,54	403,09	696,32	404,86	401,68	401,57	401,57
3	422,84	406,63	403,14	696,54	404,88	401,69	401,58	401,58
4	9,27E+03	830,59	399,96	709,18	403,35	398,51	397,9	397,75
6	965,42	2,18E+03	407,25	708,9	408,64	394,9	393,33	392,66
7	868,17	8,94E+02	407,48	708,01	408,16	394,41	392,83	392,17
8	1,26E+05	960,04	551,59	708,9	454,47	392,6	389,9	388,47
10	2,44E+0,5	1,16E+03	3,67E+05	708,9	581,66	393,66	389,1	387,28
15	4,81E+04	5,33E+03	971,84	708,88	4,65E+03	408,82	380,23	379,56
25	9,87E+05	3,70E+03	1,34E+06	708,62	5,27E+06	4,70E+05	2,43E+03	335,49

Tabela 2: Tabela błędów średniokwadratowych w zależności od stopnia funkcji oraz liczby węzłów

Z Tabel 1 i 2 możemy wywnioskować, iż wysokie stopnie wielomianu zazwyczaj powodują, w szczególności dla małych liczb węzłów znaczny wzrost wartości błędów. To pokazuje, że warto odpowiednio dobierać stopień wielomianu do liczby węzłów, tak aby stopień nie był większy od liczby węzłów.

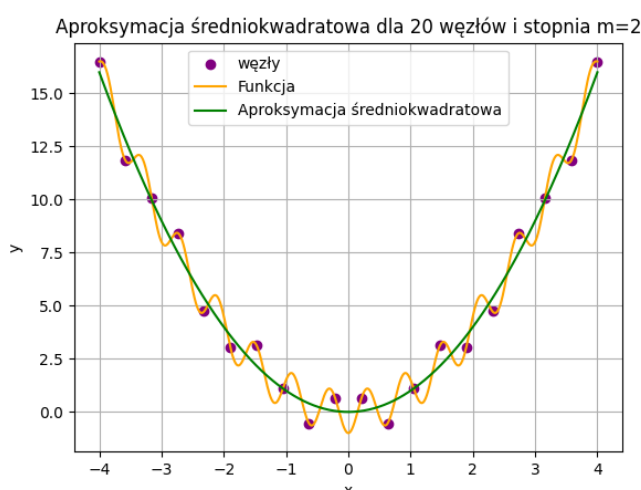
Widać także, że wyniki oznaczone kolorem szarym odbiegają od pozostałych, gdyż w ich przypadku niespełnione jest Twierdzenie 1. Niektóre wartości wydają się nawet dobre, natomiast jest to kwestia przypadku, gdyż po prostu tak ułożyły się węzły, że pasowały do wielomianu. Natomiast już samo to, że mając wyższy stopień niż liczbę węzłów, powoduje, iż mamy w mniej równań niż powinniśmy.

Zwiększając liczbę węzłów dla poszczególnych stopni wielomianu wyniki zazwyczaj się poprawiają i dla większej liczby węzłów błędy są mniejsze. Dla 50 węzłów otrzymane błędy są stosunkowo małe, często najmniejsze spośród wszystkich dotyczących jednego stopnia wielomianu.

Inaczej ma się sytuacja, jeśli zwiększamy stopień wielomianu dla ustalonej liczby węzłów. Wtedy tylko do pewnego momentu poprawiają się wyniki, a następnie znacznie pogarszają.

## 5.2 Dokładniejsza analiza wyników

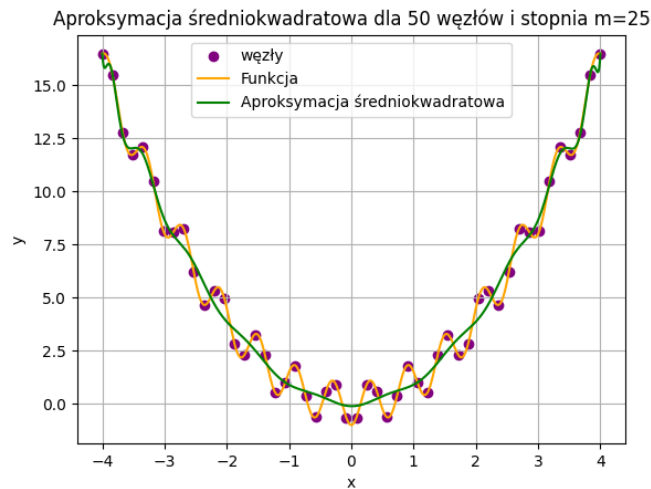
Wnioskując z Tabel 1 oraz 2, najmniejszy błąd maksymalny występuje dla przypadku, gdy stopień wielomianu jest równy 2, a liczba węzłów to 20.



Wykres 2: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla dwudziestu węzłów oraz stopnia wielomianu równego dwa

Z wykresu 1 wynika, iż jest to bardzo ciekawy przypadek. Wykres aproksymacji przecina tylko kilka węzłów. Stopień wielomianu jest zbyt mały dla tej ilości węzłów, aby wykres aproksymacji przypominał badaną funkcję, natomiast można powiedzieć, że bardzo dobrze 'uśrednia', czyli przechodzi niemalże przez sam środek naszej funkcji.

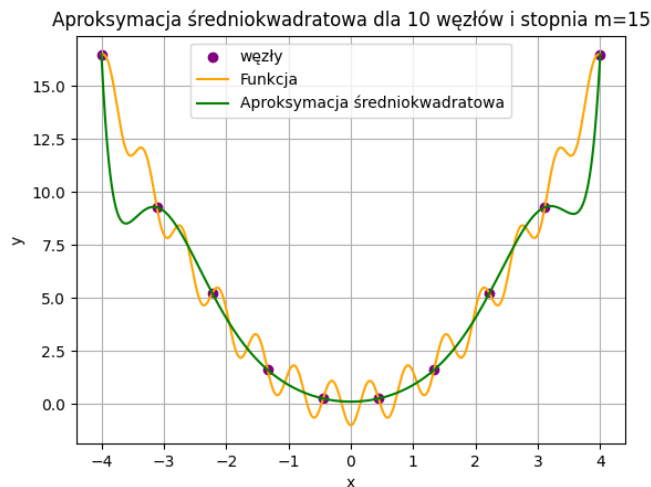
Sprawdźmy zatem przypadek, w którym mamy najmniejszy błąd średniokwadratowy. Z Tabeli 2 odczytujemy, że dzieje się tak dla 25. Stopnia wielomianu oraz pięćdziesięciu węzłów.



Wykres 3: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla pięćdziesięciu węzłów oraz stopnia wielomianu równego dwadzieścia pięć

Z Wykresu 2 możemy wyciągnąć podobne wnioski jak dla Wykresu 1. Stopień wielomianu jest zbyt mały, natomiast uzyskaliśmy najmniejszy błąd. Zatem zwiększenie liczby węzłów powoduje zmniejszenie wartości błędu przy odpowiednio dobranym stopniu wielomianu.

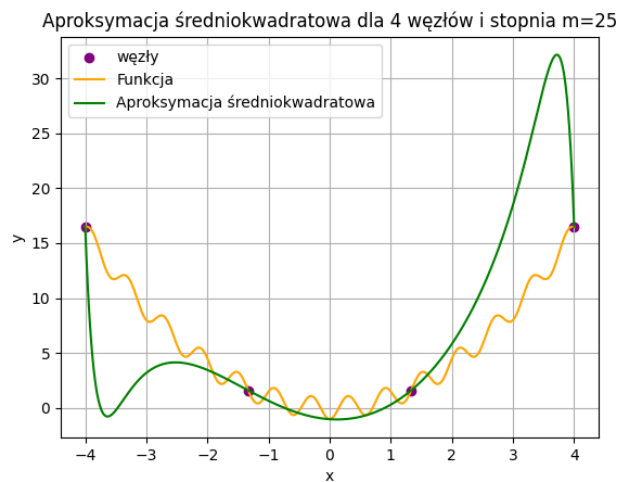
Sprawdźmy zatem przypadki, kiedy stopień wielomianu jest większy od liczby węzłów, gdyż tam sytuacja będzie najprawdopodobniej odwrotna, czyli wykres aproksymacji kosztem wartości błędów, będzie zdecydowanie bardziej przypominał badaną funkcję.



Wykres 4: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla dziesięciu węzłów oraz stopnia wielomianu równego piętnaście

Z wykresu 4 możemy zauważyć, że tym razem wykres aproksymacji przechodzi przez wszystkie wyznaczone wcześniej węzły. Tak jak myślałem, pojawiają się odchylenia, w tym przypadku między węzłami 1-2 oraz 9-10. Wynikają one z tego, że stopień wielomianu jest za duży, w porównaniu do liczby węzłów.

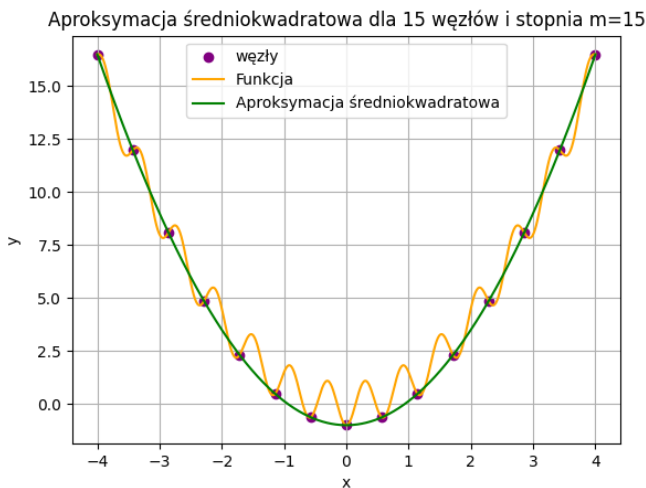
Sprawdźmy zatem przypadek dla czterech węzłów oraz 25. Stopnia wielomianu.



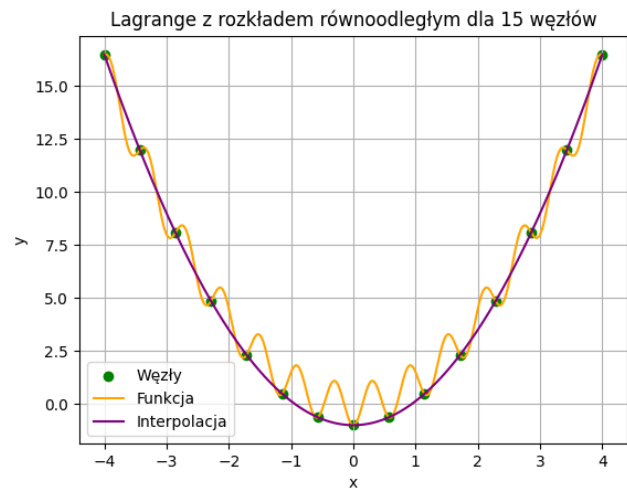
Wykres 5: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla czterech węzłów oraz stopnia wielomianu równego dwadzieścia pięć

Analogicznie jak dla Wykresu 4, na Wykresie 5 widzimy, że stopień wielomianu jest zbyt duży w porównaniu do liczby węzłów. Przez to powstają odchylenia na ostatnich przedziałach (czyli między węzłami 0-1 oraz przedostatnim i ostatnim).

Został nam do sprawdzenia przypadek, gdzie liczba węzłów równa jest stopniowi wielomianu. Jest to moment, gdy mamy do czynienia z interpolacją. Wykres 6 jest analogiczny do Wykresu 7 będącym wykresem interpolacji Lagrange'a dla 15 węzłów.



Wykres 6: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla piętnastu węzłów oraz stopnia wielomianu równego piętnaście

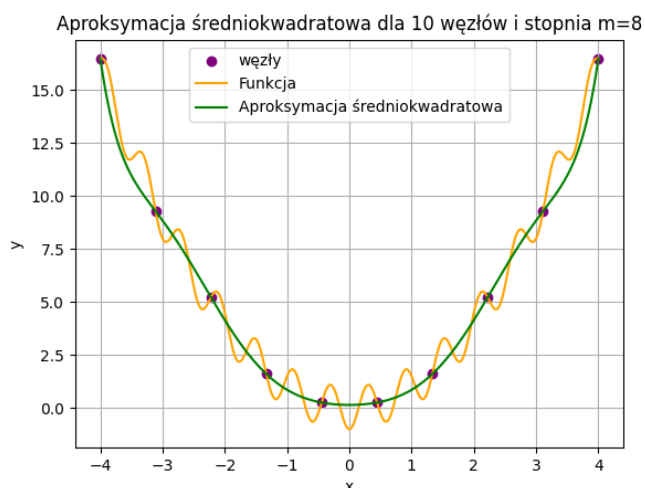


Wykres 7: Interpolacja Lagrange'a z rozkładem równoodległym dla piętnastu węzłów

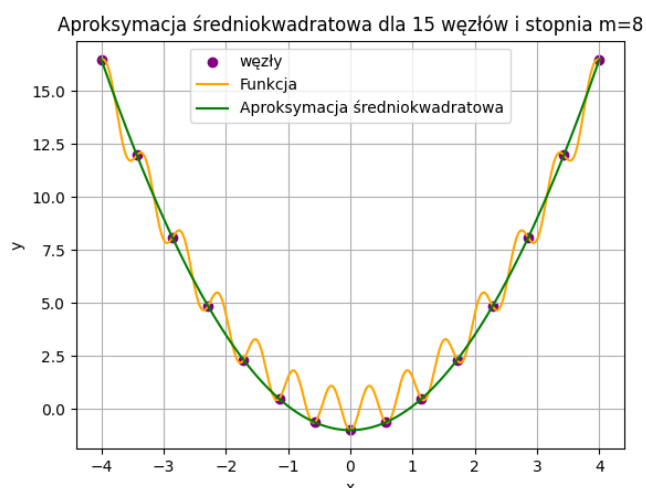
W przypadku zilustrowanym przez Wykres 6, widzimy, że nie przypomina on badanej funkcji. W przeciwieństwie do poprzednich wykresów, jednak przechodzi przez wszystkie węzły oraz nie obserwujemy znacznych odchył.



### 5.3 Taki sam stopień wielomianu a różna liczba węzłów



Wykres 8: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla dziesięciu węzłów oraz stopnia wielomianu równego osiem

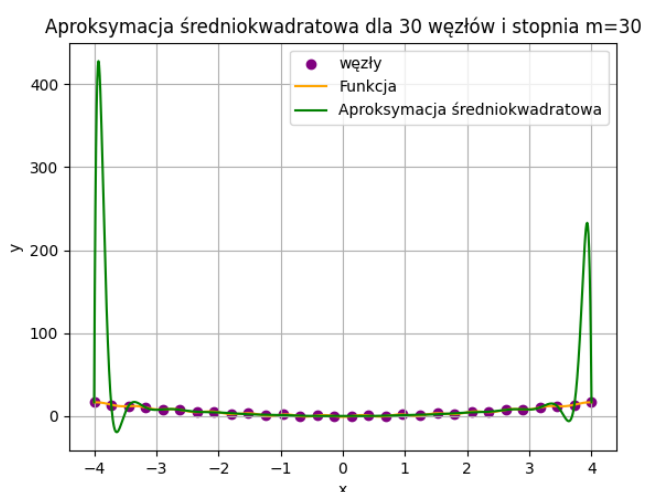


Wykres 9: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla piętnastu węzłów oraz stopnia wielomianu równego osiem

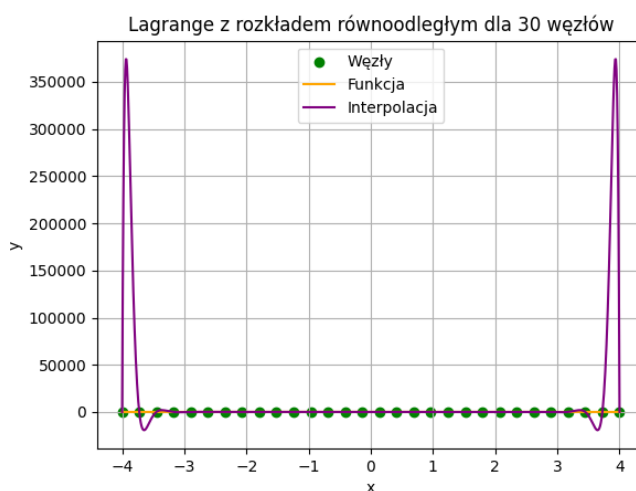
Jak wynika z wykresów 8 oraz 9, liczba węzłów ma wpływ na wykres aproksymacji. Ze względu na inne położenie węzłów, wykres przebiega przez trochę inne miejsca i w związku z tym wynika różnica w wykresach. Jak stwierdziliśmy na podstawie Tabel 1 oraz 2, zwiększenie liczby węzłów działa pozytywnie na jakość aproksymacji, gdyż otrzymujemy mniejsze błędy maksymalne oraz średnio kwadratowe.

### 5.3 Efekt Runge'go czy jednak błędy arytmetyki komputerowej?

Z racji, że efekt Runge'go występuje tylko w interpolacji, musimy zbadać te przypadki, w których stopień wielomianu równy jest liczbie węzłów.

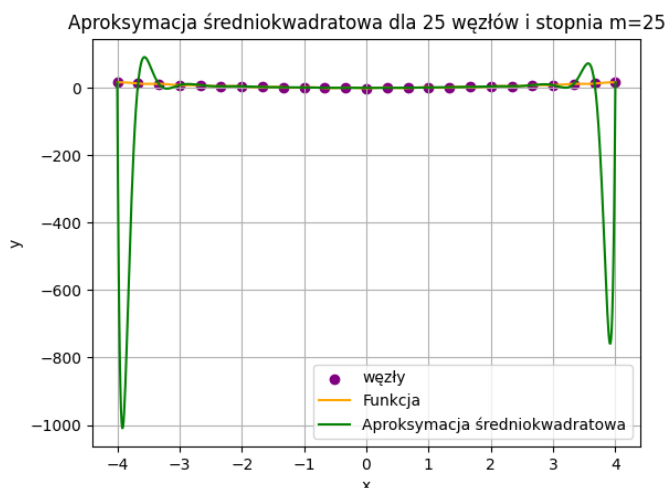


Wykres 10: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla trzydziestu węzłów oraz stopnia wielomianu równego trzydziści

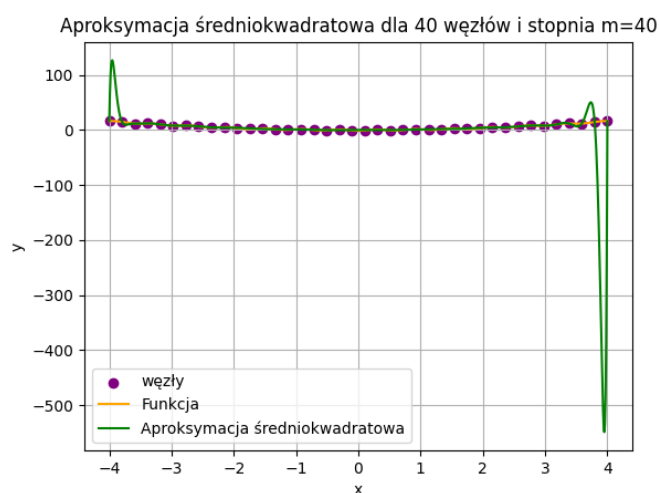


Wykres 11: Wykres interpolacji Lagrange'a z rozkładem równoodległym dla trzydziestu węzłów

Z wykresu 10 widać, że mamy do czynienia z efektem Runge'go. Pojawia się on na pierwszych dwóch i ostatnich dwóch przedziałach stworzonych z węzłów. Jest to sytuacja bardzo podobna do interpolacji Lagrange'a z rozkładem równoodległym, co pokazane jest na wykresie 11. Sam kształt jest zbliżony, jednak istotną różnicą jest wielkość oscylacji. Nie zmienia to jednak faktu, że ów efekt występuje dla aproksymacji ze stopniem wielomianu równym liczbie węzłów. Poniżej przedstawiam jeszcze inne przykłady, w których występuje efekt Runge'go.



Wykres 12: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla dwudziestu węzłów oraz stopnia wielomianu równego dwudziestego piątego



Wykres 13: Wykres aproksymacji średniokwadratowej dla czterdziestu węzłów oraz stopnia wielomianu równego czterdzieści

## 6. Wnioski

Zwiększenie liczby węzłów zmniejsza zazwyczaj wartość błędów. Jednak konieczne do tego jest to, aby spełniać Twierdzenie 1, czyli dbać o to, żeby liczba węzłów była co najmniej równa stopniowi wielomianu.

W przypadkach, gdy mamy stopień równy liczbie węzłów mamy do czynienia z interpolacją, w które występuje bardzo często efekt Runge'go.

Nieprzestrzeganie Twierdzenia 1 prowadzi do bardzo dziwnych wyników i dużych błędów, gdyż mamy za mało równań, aby otrzymać wszystkie potrzebne współczynniki.

Zwiększenie stopnia wielomianu przy ustalonej liczbie węzłów tylko do pewnego momentu poprawia jakość aproksymacji. W momencie, kiedy Twierdzenie 1 przestaje być spełnione wyniki znacznie się pogarszają, choć są pewne wyjątki, gdyż może zdarzyć się, że aproksymacja dopasuje się do wykresu.

## 7. Źródła

- 1) Wykład Doktor Katarzyny Rycerz z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
- 2) Anglojęzyczna Wikipedia na tematy: efektu Runge'go oraz aproksymacji średniokwadratowej