Sprawozdanie

Funkcje sklejane

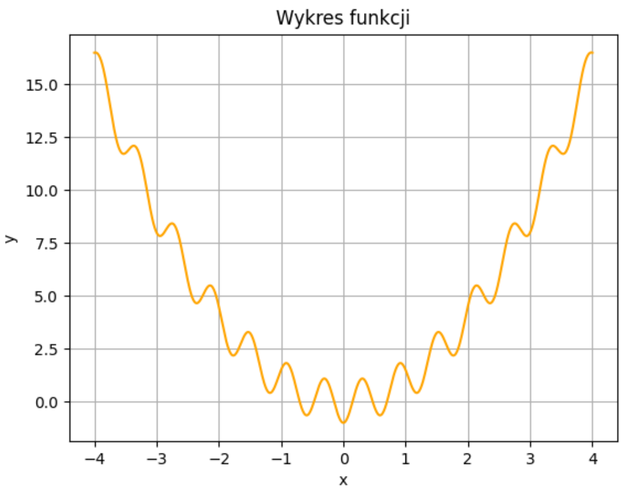
Autor: Adrian Żerebiec

1.Zadanie

Dla funkcji f(x) zadanej w zadaniu dotyczącym interpolacji wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia. Dla obu rodzajów funkcji (2-go i 3-go stopnia) należy wykonać obliczenia dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych. Podobnie jak poprzednio określić dokładność interpolacji – dla różnej liczby przedziałów i dla różnych warunków brzegowych. Porównać interpolację funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki. Opisać dokładnie przyjęte warunki brzegowe.

2.Dane techniczne

Zadanie zostało zrealizowane na laptopie z procesorem AMD Ryzen 7 4800H with Radeon Graphics 2.90 GHz z systemem Windows 10, a do tego 8 GB pamięci RAM. Całość została napisana w języku Python3.



Wykres 1: wykres badanej funkcji

3. Funkcja do opracowania

$$f(x) = x^2 - m * cos\left(\frac{\pi x}{0.3}\right)$$

$$x \in [-4, 4]$$

4.Wstęp teoretyczny

4.1 Błędy

4.1.1 Największa różnica między wartością funkcji a wartością otrzymanego wielomianu

$$max_k\{|f(x_k) - W(x_k)|\}$$

gdzie $W(x_k)$ reprezentuje wartość wielomianu w punkcie x_k, $f(x_k)$ wartość funkcji w punkcie x_k. Maxium szukamy po punktach na wykresie, w naszym przypadku dla 800 punktów.

4.1.2 Suma kwadratów różnic funkcji i wielomianu

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - W(x_i))^2$$

gdzie $W(x_i)$ reprezentuje wartość wielomianu w punkcie x_i, $f(x_i)$ wartość funkcji w punkcie x_i, a n to liczba, w których liczymy różnicę.

4.2 Metody interpolacji

4.2.1 Funkcja sklejana drugiego stopnia

Równanie funkcji sklejanej drugiego stopnia, zapisujemy jako

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad i \in [1, 2, \dots, n-1] \tag{1}$$

gdzie każda część funkcji jest określona na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$
($i \in [1, 2, \dots, n-1]$ – indeksuję węzły od 1 do n, a więc otrzymam $n-1$ funkcji $S_i(x)$).

Aby **(1)** była funkcją sklejaną drugiego stopnia, musi spełniać następujące warunki:

1. $S_i(x_i) = y_i$ dla $i \in [1, 2, \dots, n-1]$
2. $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$ dla $i \in [1, 2, \dots, n-2]$
3. $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})$ dla $i \in [1, 2, \dots, n-2]$

(2)

Z warunku 1. otrzymujemy:

$$S_i(x_i) = a_i(x_i - x_i)^2 + b_i(x_i - x_i) + c_i = c_i$$

$$y_i = c_i \tag{3}$$

Różniczkując wyrażenie **(1)** względem x, otrzymujemy:

$$S'_i(x) = 2a_i(x - x_i) + b_i \tag{4}$$

To pozwala na wykorzystanie warunku 3.:

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})$$

$$2a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + b_{i+1} = 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i$$

$$2a_i(x_{i+1} - x_i) = b_{i+1} - b_i$$

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \tag{5}$$

Wykorzystując 1. warunek oraz 2. warunek, a także, korzystając ze wzoru **(5)**, otrzymujemy:

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$$

$$a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i$$

$$y_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$y_{i+1} = (x_{i+1} - x_i)\left(\frac{b_{i+1} - b_i}{2} + b_i\right) + y_i$$

$$b_i + b_{i+1} = 2\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{6}$$

Przesuwając indeks w dół o 1, otrzymujemy:

$$b_{i-1} + b_i = 2\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$b_{i-1} + b_i = 2\gamma_i, \qquad \gamma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

(7)

Jedynymi niewiadomymi są teraz wartości współczynników b_i, ponieważ wartości c_i są znane **(3)**, a wartości a_i obliczymy, znając wartości b_i (**(5)**). Otrzymujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \qquad \ldots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases}$$

(8)

Układ ten ma n niewiadomych, lecz tylko $n - 1$ równań. W powyższym układzie równań obliczać także będziemy b_n, mimo, że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć $S_n(x)$. Ma to na celu umożliwienie obliczenia współczynnika a_{n-1}, który obliczamy ze wzoru **(5)**. Dodajemy więc warunek brzegowy, aby obliczyć układ równań.

4.2.2 Warunki brzegowe

Natural Spline

$$S_1'(x_1) = 0 \quad \text{lub} \quad S_{n-1}'(x_n) = 0$$

(9)

Ponieważ brakuje nam jednego równania, możemy uwzględnić jeden z powyższych warunków. Dalsze przekształcenia wykonuję dla $S_1'(x_1) = 0$.

Korzystając z **(4)**, otrzymujemy:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = 0$$

$$b_1 = 0$$

(10)

Po uwzględnieniu warunku brzegowego, otrzymujemy układ równań, przy pomocy którego już jesteśmy w stanie wyliczyć szukane wartości współczynników b_i.

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \qquad \ldots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases}$$

(11)

Teraz bardzo łatwo rozwiązać układ równań **(11)** w sposób iteracyjny. Przekształcamy równania, korzystając z wyznaczonych w równaniach wartości współczynników b_i:

$$
\begin{gathered}
b_1 = 0 \\
b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \rightarrow b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = 2\gamma_2 \\
b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \rightarrow b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2(\gamma_3 - \gamma_2) \\
b_3 + b_4 = 2\gamma_4 \rightarrow b_4 = 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3 + \gamma_2) \\
\dots \\
b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \rightarrow b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \gamma_{n-3} - \cdots)
\end{gathered}
\tag{12}
$$

W ogólności:

$$
\begin{gathered}
b_1 = 0 \\
b_i = 2\sum_{j=2}^{i}(-1)^{j+i}\gamma_j,\ i \in \{2, 3, 4, \dots, n\}
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Pozostałe współczynniki obliczamy z wyznaczonych wcześniej wzorów **(3)** oraz **(5)**.

Clamped Spline

W przypadku tego warunku brzegowego, przyjmuje się, że jedna z pierwszych pochodnych na krańcach jest znana lub przybliżona, przy pomocy ilorazów różnicowych, tzn.:

$$
S_1'(x_1) = f_1' \quad \text{lub} \quad S_{n-1}'(x_n) = f_{n-1}'
\tag{14}
$$

Do wyznaczenia przybliżonej wartości pochodnej, najlepiej skorzystać z ilorazu różnicowego.

$$
S_1'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}
\tag{15}
$$

Korzystając ze wzoru **(4)**, możemy przekształcić powyższe równanie:

$$
2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \gamma_2
\tag{16}
$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, otrzymujemy układ równań, przy pomocy którego już jesteśmy w stanie wyliczyć szukane wartości współczynników b_i.

$$
\begin{cases}
b_1 = \gamma_2 \\
b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\
b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\
\quad \dots \\
b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\
b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n
\end{cases}
\tag{17}
$$

Powyższy układ równań możemy znów obliczyć w sposób iteracyjny, otrzymując równania postaci:

$$
\begin{gathered}
b_1 = \gamma_2 \\
b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \rightarrow b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = \gamma_2 \\
b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \rightarrow b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2\gamma_3 - \gamma_2 \\
b_3 + b_4 = 2\gamma_4 \rightarrow b_4 = 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3) + \gamma_2 \\
\dots \\
b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \rightarrow b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \gamma_{n-3} - \cdots)
\end{gathered}
\tag{18}
$$

W ogólności:

$$
\begin{gathered}
b_1 = b_2 = \gamma_2 \\
b_i = 2(\textstyle\sum_{j=3}^{i} (-1)^{j+i} \gamma_j) + (-1)^i \gamma_2, \; i \in \{3, 4, \dots, n\}
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Pozostałe współczynniki obliczamy z wyznaczonych wcześniej wzorów **(3)** oraz **(5)**.

4.3 Funkcja sklejana 3. stopnia

Równanie funkcji sklejanej trzeciego stopnia, możemy zapisać jako:

$$
S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \;\; i \in [1, 2, \dots, n-1]
\tag{20}
$$

gdzie każdy z segmentów funkcji jest określony na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$.

Aby **(20)** była funkcją sklejaną trzeciego stopnia, musi spełniać warunki:

1. $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$
2. $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$
3. $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$
4. $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$

(21)

Ponieważ funkcja $S_i(x)$ jest funkcją sześcienną, $S_i''(x)$ jest liniowa na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$. Wprowadźmy oznaczenia $h_i = x_{i+1} - x_i$. Funkcję $S_i''(x)$ możemy więc zapisać w postaci zależności liniowej:

$$
S_i''(x) = S_i''(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{h_i} = S_i''(x_{i+1})\frac{x - x_i}{h_i}
\tag{22}
$$

Całkując obustronnie funkcję $S_i''(x)$, otrzymujemy:

$$
S_i(x) = \frac{S_i''(x_i)}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{S_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x)
\tag{23}
$$

Korzystając z warunków interpolacji, możemy wyznaczyć wartości stałych całkowania. Po ich wyznaczeniu, otrzymujemy wzór:

$$S_i(x) = \frac{S_i''(x_i)}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{S_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S_i''(x_{i+1})h_i}{6}\right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{S_i''(x_i)h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x)$$

(24)

Zauważmy, że w powyższym wzorze jedynie nie znamy $S_i''(x)$. W celu jego wyznaczenia, korzystamy z warunku ciągłości pierwszej pochodnej, a więc różniczkujemy $S_i(x)$:

$$S_i'(x) = -\frac{h_i}{3}S_i''(x_i) - \frac{h_i}{6}S_i''(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

(25)

Dla przejrzystości wprowadzamy symbole $\sigma_i = \frac{1}{6}S_i''(x_i)$ oraz $\Delta_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$.

(26)

Po wstawieniu do **(25)**, uzyskujemy:

$$S_i'(x) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i)$$

(27)

Natomiast, z drugiej strony:

$$S_{i-1}'(x) = \Delta_{i-1} + (2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

(28)

Z warunku ciągłości $S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i)$ otrzymujemy końcową postać równania:

$$\Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$
$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$$

(29)

Jak możemy zauważyć, mamy n niewiadomych σ_i, ale $n-2$ równań. Musimy dodać zatem dwa warunki brzegowe.

4.3.2 Warunki brzegowe

Cubic Function

Przyjmujemy, że:

$C_1(x)$ – funkcja trzeciego stopnia przechodząca przez pierwsze 4 punkty

$C_n(x)$ – funkcja trzeciego stopnia przechodząca przez ostatnie 4 punkty

Z założeń wynika więc, że:

$$S'''(x_1) = C_1''' \text{ oraz } S'''(x_n) = C_n'''$$

(30)

Teraz możemy wyznaczyć przybliżoną wartości 3. pochodnych funkcji $C_1(x)$ i $C_n(x)$:

$$\Delta_i^{(1)} = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \qquad \Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(1)}-\Delta_i^{(1)}}{x_{i+2}-x_i} \qquad \Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)}-\Delta_i^{(2)}}{x_{i+3}-x_i}$$

(31)

Przybliżenie pochodnej $f_i^{(n)}$ otrzymujemy mnożąc $n! \cdot \Delta_i^{(n)}$, więc:

$$S'''(x_1) = C_1''' = 3! \cdot \Delta_1^{(3)} = 6 \cdot \Delta_1^{(3)}$$

$$S'''(x_n) = C_n''' = 3! \cdot \Delta_{n-3}^{(3)} = 6 \cdot \Delta_{n-3}^{(3)}$$

(32)

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy 2 brakujące warunki:

$$\begin{cases} -h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{\mathrm{n-3}}^{(3)} \end{cases}$$

(33)

Ostatecznie, układ równań, który otrzymujemy, po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, ma postać macierzy:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2\Delta_{\mathrm{n-3}}^{(3)} \end{bmatrix}$$

(34)

Natural Spline

$$S''(x_1) = S''(x_n) = 0$$

(35)

Korzystając z **(26)**, mamy $\sigma_i = \frac{1}{6}S_i''(x_i)$. Uwzględniając powyższe równanie, otrzymujemy:

$$S''(x_1) = S_1''(x_1) = 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = 0$$

$$S''(x_n) = S_n''(x_n) = 0 \Leftrightarrow \sigma_n = 0$$

(36)

Znamy więc już 2 wartości niewiadomych ($\sigma_1 = \sigma_n = 0$). Po dodaniu powyższych 2 równań do $n-2$ równań z punktu **(29)**, otrzymujemy układ równań postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(37)

5.Opracowanie wyników

Doświadczenie przeprowadziłem dla dwóch rodzajów funkcji sklejanej oraz wybrałem także po dwa przypadki brzegowe. Aby przeprowadzić analizę wyników, wybrałem kilka najważniejszych przypadków, w szczególności tych, w których błędy bardzo różnią się od pozostałych. Dodatkowo porównałem między sobą obydwie funkcje oraz warunki brzegowe.

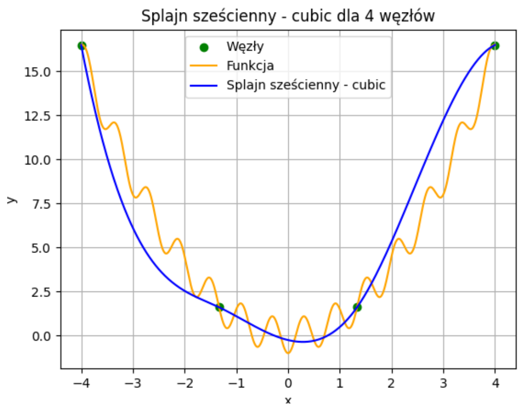
W poniższych tabelach (1 oraz 2) znajdują się błędy np. natural – maksymalny to błąd maksymalny dla warunku brzegowego natural.

5.1 Błędy dla funkcji sklejanej trzeciego stopnia

Liczba węzłów	Natural - maksymalny	Natural - średniokwadratowy	Cubic - maksymalny	Cubic - średniokwadratowy
4	1.95	712.95	4.22	2.80e+03
5	2.10	879.43	2.07	709.91
6	1.93	711.98	2.14	796.21
7	2.05	850.93	2.05	824.84
8	1.99	715.40	1.99	699.29
9	1.81	720.98	2.09	752.39
10	1.33	420.11	1.45	422.36
11	1.88	734.62	2.04	759.29
12	1.99	806.31	2.02	813.89
13	1.99	831.83	2.00	829.48
14	2.00	954.69	2.00	951.91
15	1.99	704.63	1.99	702.94
16	2.00	751.29	2.00	750.37
17	1.81	758.92	1.82	758.33
18	1.99	755.63	1.99	755.94
19	1.86	742.60	1.83	746.27
20	1.93	717.62	1.93	728.52
21	1.87	678.09	1.88	699.79
22	1.79	622.63	1.79	656.32
23	1.68	552.14	1.89	595.58
24	1.56	470.07	1.91	518.16
25	1.41	381.28	1.87	427.86
26	1.28	288.10	1.75	328.07
27	1.20	165.64	1.59	196.22
28	1.11	351.61	1.40	372.41
29	1.00	178.18	1.20	190.47
30	0.90	122.28	1.00	128.09
31	0.80	86.68	0.83	88.06
32	0.71	62.03	0.70	60.72
33	0.63	44.67	0.60	41.92
34	0.56	32.36	0.50	29.04
35	0.50	23.61	0.42	20.24
36	0.44	17.37	0.35	14.23
37	0.40	12.88	0.29	10.11
38	0.36	9.64	0.24	7.29
39	0.32	7.28	0.20	5.33
40	0.29	5.55	0.16	3.97
50	0.13	0.58	0.14	0.50
60	0.07	0.12	0.10	0.13
70	0.05	0.04	0.06	0.04
80	0.03	0.01	0.04	0.02
90	0.02	0.01	0.03	0.01
100	0.02	0.00	0.02	0.00

Tabela 2: wartości błędów maksymalnych oraz średniokwadratowych dla różnych warunków brzegowych w funkcji sklejanej trzeciego stopnia

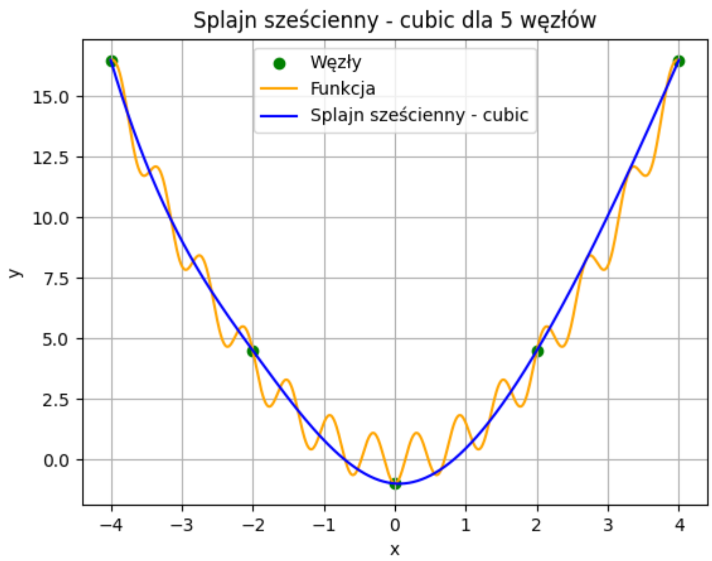
Analizując wyniki przedstawione w Tabeli 1, możemy zauważyć, iż wyniki dla obu warunków brzegowych są do siebie zbliżone, jednak dla czterech węzłów mamy duże różnice. Dla coraz większych liczb węzłów błędy się zmniejszają, zmierzając powoli do małych wartości sięgających około 0. Trudno dokładnie określić, który z przypadków brzegowych radzi sobie lepiej, gdyż zależy to od liczby węzłów, co widać np. dla pięciu oraz sześciu węzłów. Widać także, że dla wszystkich przypadków nie pojawiają się znaczne odchylenia, co przekonuje nas o braku błędów arytmetyki komputerowej. Na wykresie 2 dodatkowo widać, że dla czterech węzłów warunek cubic nie najlepiej sobie radzi, a błąd w nim jest zdecydowanie większy niż dla warunku natural.



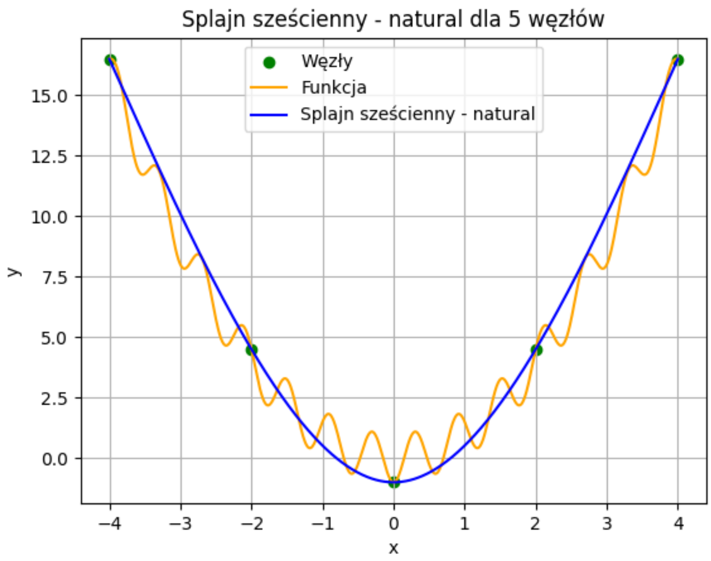
Wykres 2: funkcja sklejana trzeciego stopnia – cubic dla 4 węzłów

5.2 Analiza poszczególnych przypadków

Dla małej liczby węzłów, tak jak w interpolacjach Hermite'a, Lagrange'a oraz Newton'a, wynik interpolacji nie przypomina badanej funkcji. Warto również zauważyć, że dla obu warunków brzegowych wynik jest bardzo podobny, co widać na wykresach 3 oraz 4.

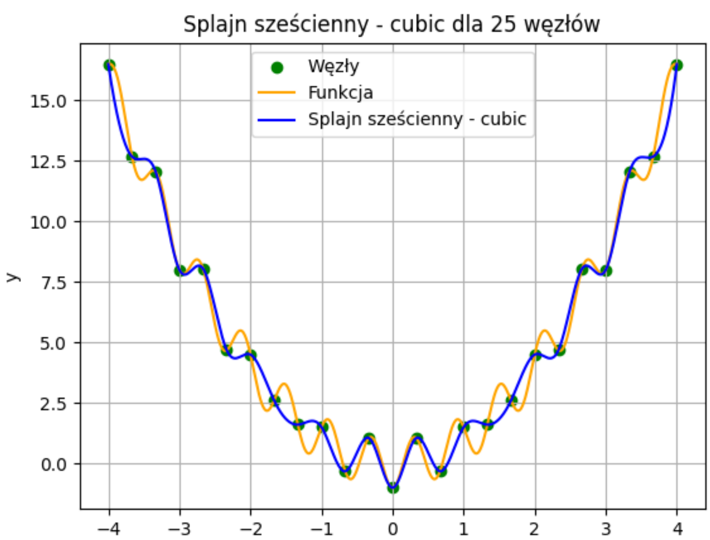


Wykres 3: Funkcja sklejana trzeciego stopnia – Cubic dla 5 węzłów

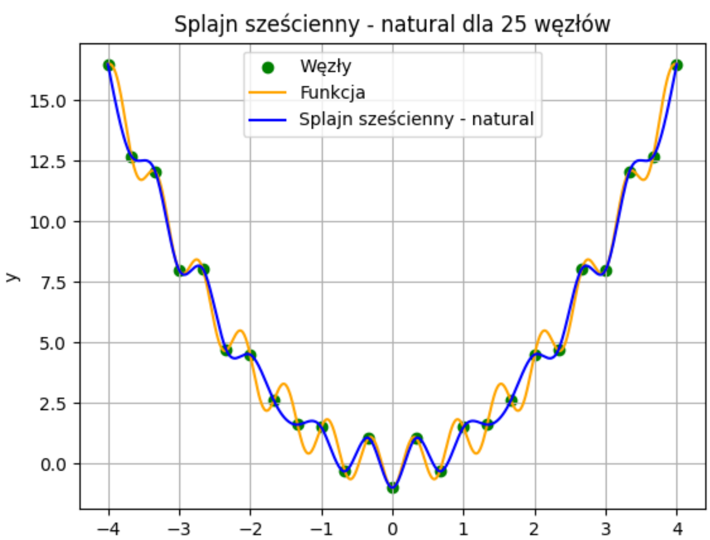


Wykres 4: Funkcja sklejana trzeciego stopnia –natural dla 5 węzłów

Po zwiększeniu liczby węzłów widzimy, że w obydwu przypadkach, pokazanych na wykresach 5 oraz 6, jest znacząca poprawa wyników i coraz bardziej przypomina to badaną funkcję. Z Tabeli 1 wynika, że im więcej węzłów weźmiemy, tym w tym przypadku otrzymamy lepszy wynik interpolacji.



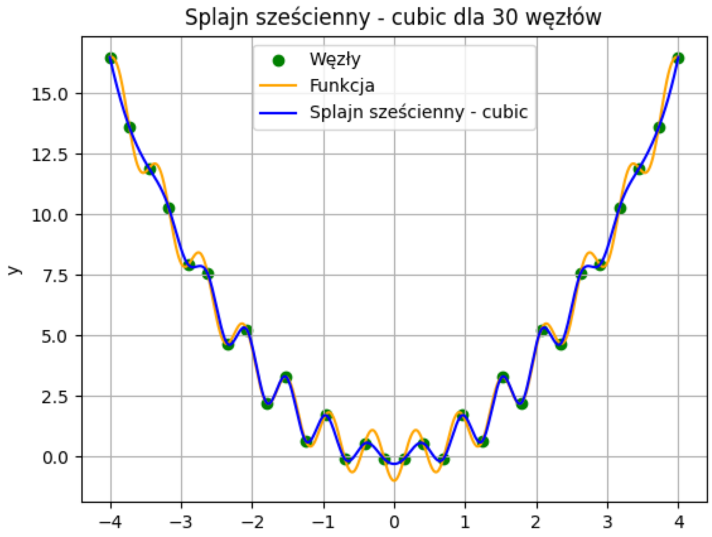
Wykres 5: Funkcja sklejana trzeciego stopnia – cubic dla 25 węzłów



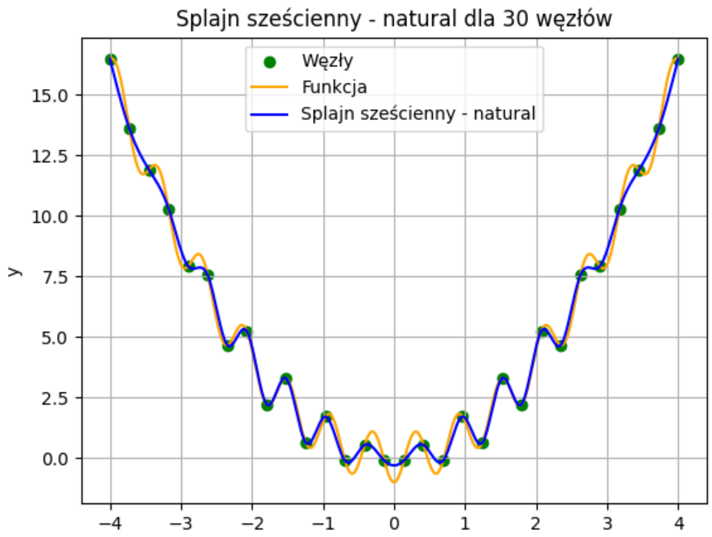
Wykres 6: Funkcja sklejana trzeciego stopnia – natural dla 25 węzłów

Wykresy 5 oraz 6, mimo różnych warunków brzegowych, są do siebie bardzo podobne, zatem widać, że przypadek brzegowy dla takiej liczby węzłów jest coraz mniej ważny.

Warto zwrócić uwagę w Tabeli 1, iż między trzydziestoma a czterdziestoma węzłami wartości błędów znacznie maleją.

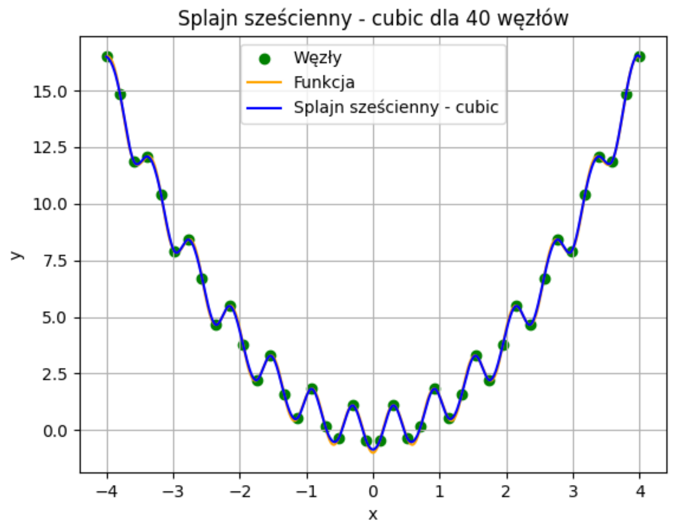


Wykres 7: Funkcja sklejana trzeciego stopnia – cubic dla 30 węzłów

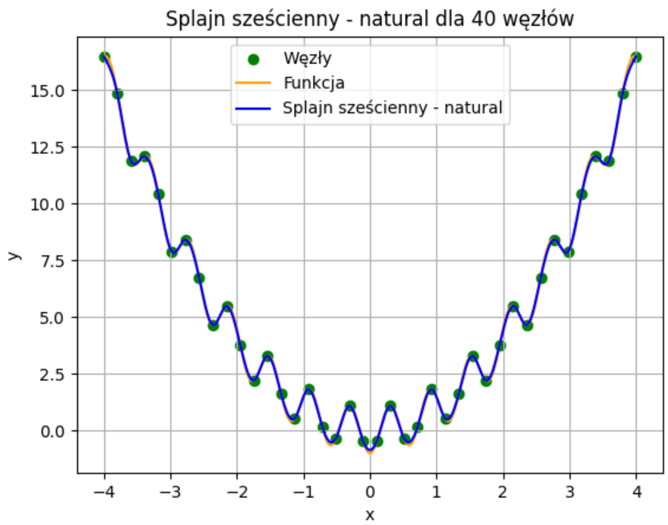


Wykres 8: Funkcja sklejana trzeciego stopnia – natural dla 30 węzłów

Z wykresów 7 oraz 8 wynika, że dla trzydziestu węzłów jest nadal zbyt mało przedziałów, aby uzyskać dobre dopasowanie. Natomiast z wykresów 9 i 10 można wyciągnąć wniosek, iż to właśnie między trzydziestoma a czterdziestoma węzłami pojawia się moment, gdy liczba węzłów jest wystarczająca, do tego, aby błędy znacznie się zmniejszyły, a wynik interpolacji był bardzo podobny do badanej funkcji.



Wykres 9: Funkcja sklejana trzeciego stopnia – cubic dla 40 węzłów



Wykres 10: Funkcja sklejana trzeciego stopnia – natural dla 40 węzłów

Z Tabeli 1 wynika, że od tego momentu zwiększając liczbę węzłów, tylko delikatnie zmniejszają się wartości błędów, a sam wynik interpolacji jest coraz dokładniejszy.

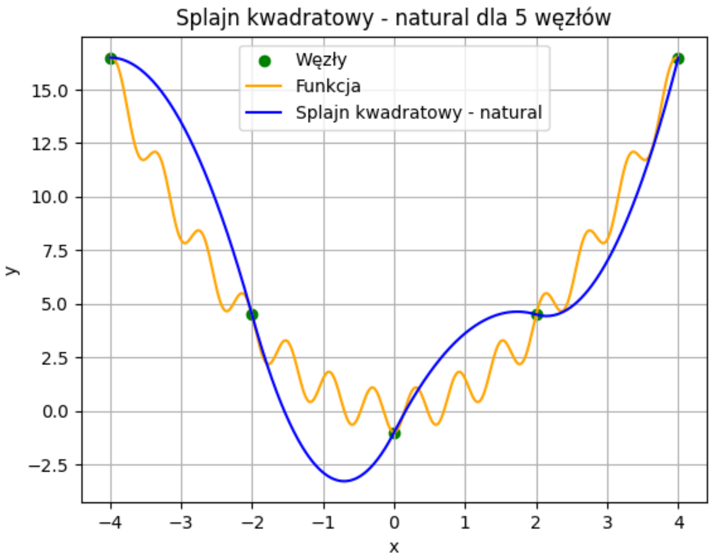
5.4 Tabela z błędami dla funkcji drugiego stopnia

Liczba węzłów	Natural - maksymalny	Natural - średniokwadratowy	Clamped - maksymalny	Clamped - średniokwadratowy
4	6.57	1.46e+04	3.02	2.19e+03
5	5.50	5.49e+03	2.50	1.01e+03
6	6.20	8.44e+03	3.26	1.52e+03
7	3.83	3.11e+03	2.16	863.40
8	3.82	3.40e+03	2.22	773.30
9	4.22	4.09e+03	2.43	1.03e+03
10	3.97	3.28e+03	2.17	706.34
11	3.10	1.24e+03	2.84	1.08e+03
12	3.08	1.43e+03	2.12	820.38
13	3.18	1.42e+03	2.07	831.43
14	3.19	1.62e+03	2.09	960.76
15	3.19	1.33e+03	2.06	705.84
16	3.14	1.46e+03	1.99	758.28
17	3.05	1.44e+03	1.89	774.01
18	3.32	1.58e+03	2.12	804.11
19	3.31	1.60e+03	2.13	841.50
20	3.29	1.87e+03	2.13	939.40
21	3.80	2.01e+03	2.66	1.06e+03
22	4.14	2.60e+03	3.04	1.38e+03
23	4.66	3.07e+03	3.61	1.77e+03
24	5.50	4.87e+03	4.50	3.03e+03
25	7.09	7.10e+03	6.13	4.94e+03
26	10.58	2.01e+04	9.68	1.59e+04
27	22.71	7.74e+04	21.85	6.94e+04
28	3.06	2.08e+03	2.25	996.71
29	10.93	2.01e+04	11.70	2.37e+04
30	5.88	4.69e+03	6.60	6.42e+03
31	3.89	2.49e+03	4.57	3.81e+03
32	2.83	1.20e+03	3.47	2.10e+03
33	2.14	794.76	2.75	1.53e+03
34	1.74	480.32	2.31	1.05e+03
35	1.43	350.89	1.97	827.87
36	1.19	237.73	1.70	623.20
37	1.02	183.83	1.51	515.65
38	0.88	133.60	1.34	410.39
39	0.77	107.30	1.20	348.72
40	0.67	81.83	1.08	287.49
50	0.26	14.46	0.51	76.47
60	0.14	4.75	0.30	29.09
70	0.09	2.14	0.20	13.28
80	0.06	1.16	0.14	6.83
90	0.05	0.72	0.10	3.84
100	0.04	0.48	0.08	2.30

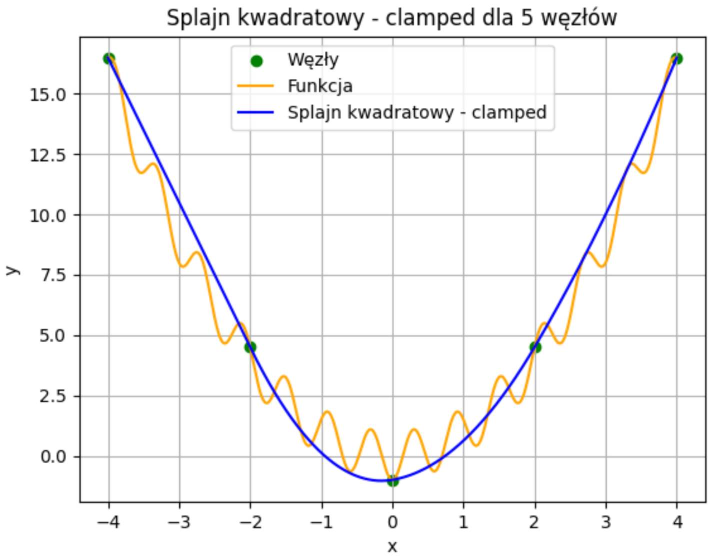
Tabela 2: wartości błędów maksymalnych oraz średniokwadratowych dla różnych warunków brzegowych w funkcji sklejanej drugiego stopnia

W przeciwieństwie do funkcji sklejanej trzeciego stopnia (Tabela 1), widać, iż wartości błędów są zależne od warunków brzegowych. Clamped radzi sobie lepiej aż do dwudziestu ośmiu węzłów. Od tego momentu wartości błędów są mniejsze dla warunku brzegowego natural. Warto także zauważyć, iż dla dwudziestu siedmiu węzłów wartości błędów są bardzo duże. Wynika to jednak z oscylacji, w tym przypadku funkcja sklejana drugiego stopnia radzi sobie zdecydowanie gorzej od tej trzeciego stopnia.

5.4 Analiza poszczególnych przypadków

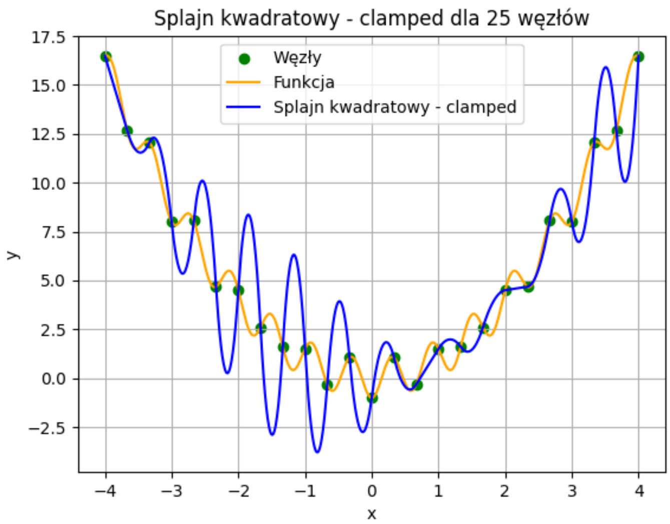


Wykres 11: Funkcja sklejana drugiego stopnia – natural dla 5 węzłów

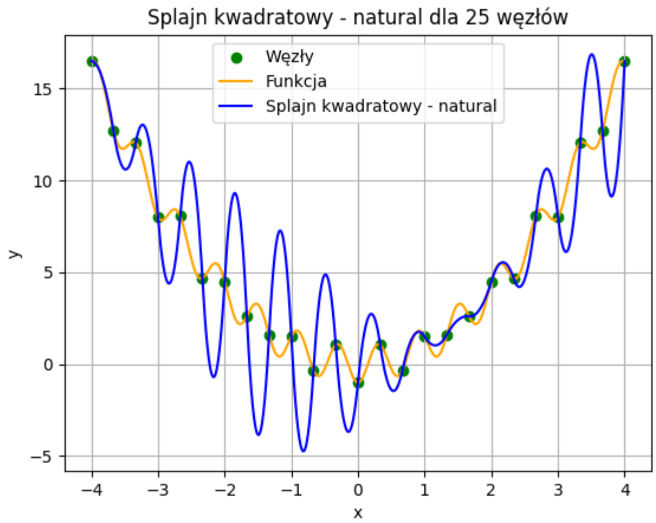


Wykres 12: Funkcja sklejana drugiego stopnia – clamped dla 5 węzłów

Z wykresów 11 oraz 12 widać, iż funkcja sklejana drugiego stopnia radzi sobie o wiele gorzej niż sześcienna dla małej ilości węzłów. Można to zobaczyć spoglądając na wykresy 3 i 4. Warto także dodać, że warunek brzegowy clamped daje wyraźnie lepszy wynik, bardziej podobny do tych z wykresów 3 oraz 4. Warunek brzegowy natural, daje bardzo niedokładny wynik, lecz wynika to z charakterystyki funkcji kwadratowej. Warto również zauważyć wpływ warunku brzegowego na kształt poszczególnych wykresów. Warunek clamped daje nam wykres, który jest bardziej spłaszczony przy krańcach w przeciwieństwie do warunku natural.



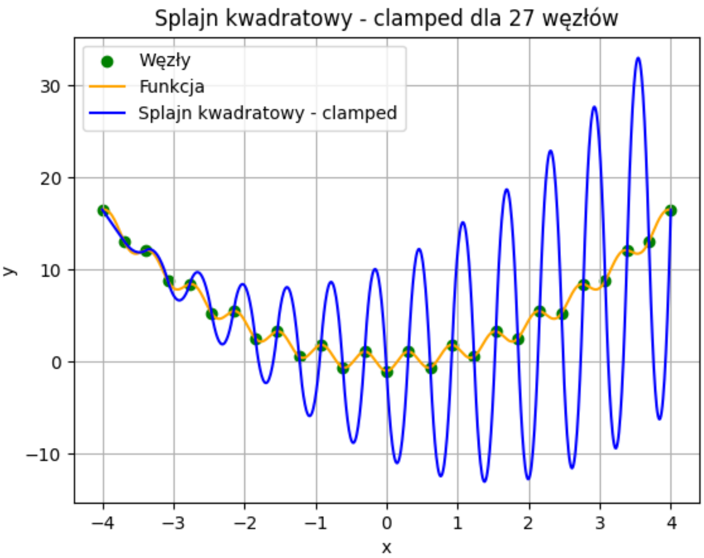
Wykres 13: Funkcja sklejana drugiego stopnia – clamped dla 25 węzłów



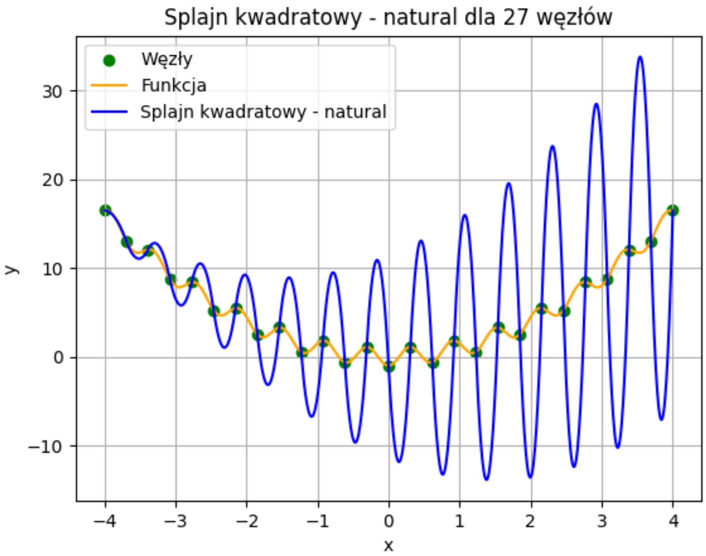
Wykres 14: Funkcja sklejana drugiego stopnia – natural dla 25 węzłów

Wykresy 13 oraz 14, pokazują poprawę, natomiast liczba węzłów nadal jest zbyt mała, aby wyniki były poprawne. Widać również oscylacje w obu przypadkach, chociaż oba wykresy są do siebie podobne.

Z Tabeli 2 wynika, iż największe błędy dla obydwu przypadków brzegowych mamy dla dwudziestu siedmiu węzłów. Z wykresów 15 i 16 można wywnioskować, że dla tej liczby węzłów występują największe oscylacje.

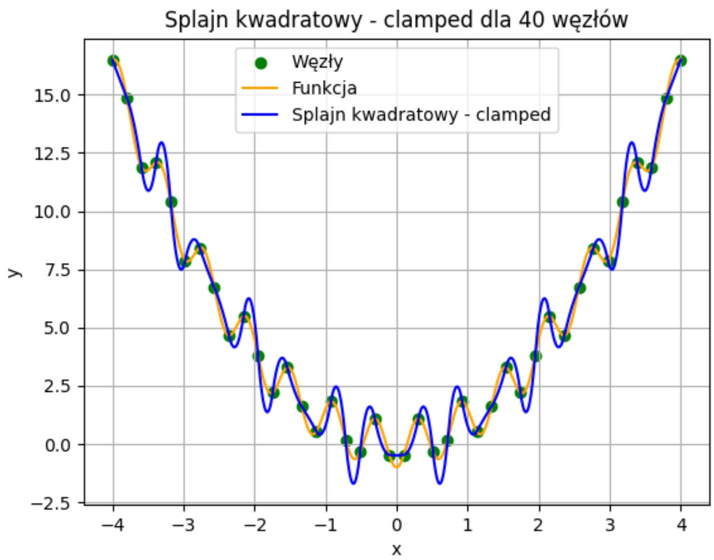


Wykres 14: Funkcja sklejana drugiego stopnia – clamped dla 27 węzłów

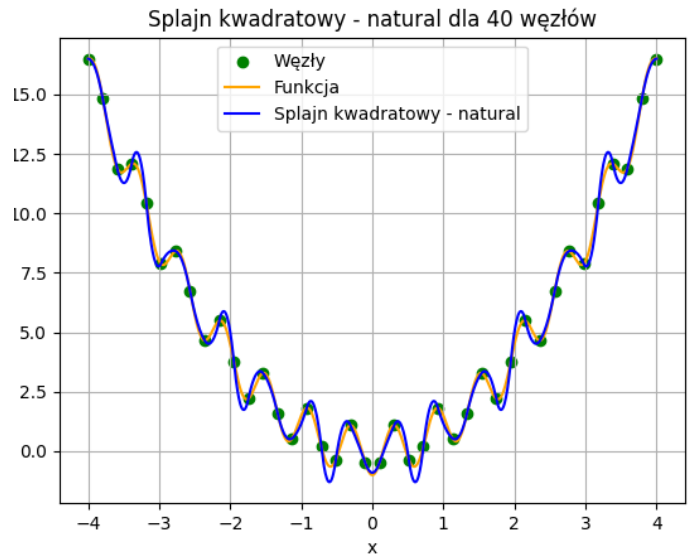


Wykres 15: Funkcja sklejana drugiego stopnia – natural dla 27 węzłów

Z Tabeli 2, można także odczytać, że podobnie jak dla funkcji sklejanej trzeciego stopnia, wartości błędów najbardziej zmniejszają się między trzydziestoma a czterdziestoma węzłami. Właśnie, wtedy liczba węzłów staje się na tyle duża, że oscylacje znikają, a błędy bardzo maleją, co można zaobserwować także na wykresach 16 i 17.



Wykres 16: Funkcja sklejana drugiego stopnia – clamped dla 40 węzłów



Wykres 17: Funkcja sklejana drugiego stopnia – natural dla 40 węzłów

5.7 Porównanie funkcji sklejanych

5.7.1 Ogólne porównanie funkcji sklejanych

Dla małej ilości węzłów widać wielkie różnice. Funkcje sklejane drugiego stopnia radzą sobie o wiele gorzej niż te trzeciego stopnia, co można wywnioskować z Tabel 1 oraz 2. Dla większej ilości węzłów, czyli np. 25 nadal sytuacja jest gorsza w tych drugiego stopnia, gdyż możemy zauważyć oscylacje, które nie występują w funkcji sklejanej trzeciego stopnia. Widać to wykresie 16, a na żadnym wykresie z funkcji sklejanej sześciennej tego nie było. Jednak dla dużych ilości węzłów sytuacja się poprawia i oscylacje ustają.

5.7.2 Porównanie warunków brzegowych w funkcjach sklejanych

W funkcji sklejanej trzeciego stopnia różnice między warunkami brzegowymi są minimalne, co widać w Tabeli 1. Jedynym wyjątkiem jest przypadek dla czterech węzłów, gdyż tam warunek natural radzi sobie lepiej. Porównując, jednak ogólnie różnice między nimi są małe i czasami mniejsze błędy ma jeden warunek a czasami drugi.

W funkcji sklejanej drugiego stopnia sytuacja wygląda nieco inaczej. Jak pokazuje Tabela 2, do dwudziestu dziewięciu węzłów lepsze wyniki daje nam warunek clamped. Błędy jakie, on generuje są mniejsze niż dla warunku natural. Jednak zwiększając liczbę węzłów, sytuacja się zmienia i lepsze wyniki daje nam warunek natural. Dzieje się tak, gdyż clamped pozwala nam kontrolować poziom krzywizny w obszarach krańcowych. Natural może natomiast powodować duże oscylacje dla małych ilości węzłów.

6. Wnioski

Analiza pozwoliła dostrzec różnicę między dokładnością przybliżenia interpolowanej funkcji przez funkcję sklejaną drugiego stopnia a dokładnością przybliżenia dla funkcji trzeciego stopnia. W większości sprawdzonych przypadków, funkcja trzeciego stopnia dawała znacznie lepsze przybliżenie niż funkcja drugiego stopnia, w szczególności dla małej liczby węzłów.

Można również zauważyć, wpływ warunków brzegowych na wartości błędów przybliżeń oraz kształty wykresów.

Dla małych liczb węzłów funkcja sklejana drugiego stopnia jest bardziej zależna od wybranego warunku brzegowego niż trzeciego stopnia. Dodatkowo funkcja trzeciego stopnia ma mniejsze wartości błędów w porównaniu do tej drugiego stopnia.

Przy większej liczbie węzłów różnica między funkcją sklejaną drugiego stopnia a trzeciego nadal jest widoczna. Nie są to ogromne różnice, jednak możemy stwierdzić, iż funkcja sklejana trzeciego stopnia radzi sobie lepiej z interpolacją.

7. Źródła

1) Wykład Doktor Katarzyny Rycerz z przedmioty Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

2) Wikipedia na temat funkcji sklejanych