Sprawozdanie

Aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna

Autor: Adrian Żerebiec

1.Zadanie

Dla funkcji f(x) zadanej w zadaniu dotyczącym interpolacji wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując: aproksymację średniokwadratową trygonometryczną. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

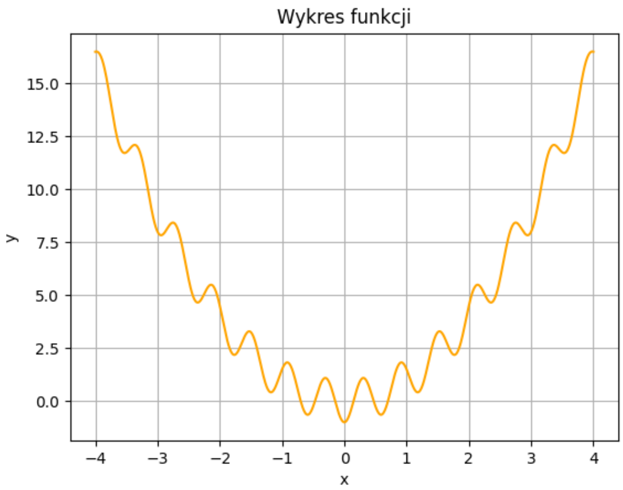
2.Dane techniczne

Zadanie zostało zrealizowane na laptopie z procesorem AMD Ryzen 7 4800H with Radeon Graphics 2.90 GHz z systemem Windows 10, a do tego 8 GB pamięci RAM. Całość została napisana w języku Python3.

3. Funkcja do opracowania

$$f(x) = x^2 - 1 * cos\left(\frac{\pi x}{0.3}\right)$$

$$x \in [-4, 4]$$



Wykres 1: wykres badanej funkcji

4. Wstęp teoretyczny

4.1 Błędy

4.1.1 Największa różnica między wartością funkcji a wartością otrzymanego wielomianu

$$max_k\{|f(x_k) - W(x_k)|\}$$

gdzie $W(x_k)$ reprezentuje wartość wielomianu w punkcie x_k, $f(x_k)$ wartość funkcji w punkcie x_k. Maxium szukamy po punktach na wykresie, w naszym przypadku dla 800 punktów.

4.1.2 Suma kwadratów różnic funkcji i wielomianu

$$\sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - W(x_i))^2$$

gdzie $W(x_i)$ reprezentuje wartość wielomianu w punkcie x_i, $f(x_i)$ wartość funkcji w punkcie x_i, a N to liczba, w których liczymy różnicę.

4.2 Aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna

Szukamy wielomianu uogólnionego następującej postaci:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_j \varphi_k(x)$$

(1)

Jako ciąg funkcji bazowych przyjmujemy:

$$(\varphi_k(x)) = 1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(mx), \cos(mx)$$

(2)

Aby wyznaczyć trygonometryczny wielomian aproksymujący, korzystamy z poniższych wzorów:

$$W_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx))$$

gdzie:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \cos(kx_i)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \sin(kx_i)$$

m to stopień wielomianu, a n to liczba węzłów.

(3)

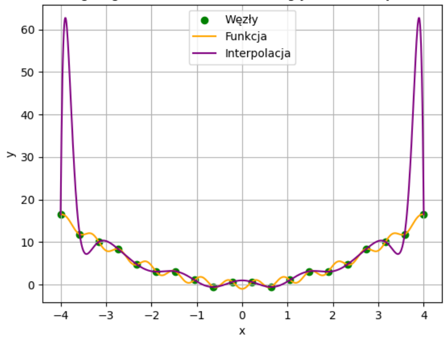
Przy pomocy wzorów (3), możemy wyznaczyć wielomian aproksymacyjny. Aby problem był dobrze uwarunkowany, stopień wielomianu m musi wynosić:

$$m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

(4)

4.3 Efekt Runge'go

W matematycznej dziedzinie analizy numerycznej efekt Runge'go to problem oscylacji na krawędziach przedziału, który występuje podczas stosowania interpolacji wielomianowej z wielomianami wysokiego stopnia na zbiorze punktów interpolacji o równych odstępach. Ściślej mówiąc, jest to występująca oscylacja między kolejnymi węzłami, czyli znaczne pogorszenie jakości interpolacji (aproksymacji) mimo zwiększenia liczby węzłów. Na rysunku 1 możemy zobaczyć występowanie efektu między węzłami 1-2, 2-3, 18-19 i 19-20.



Rysunek 1: przykład Efektu Runge'go

5. Opracowanie

Krótki wstęp

Podobnie jak w przypadku aproksymacji wielomianami algebraicznymi musimy pamiętać, aby układ był dobrze uwarunkowany. Podczas doświadczenia dla kilku liczb węzłów sprawdzałem jaki wpływ ma zwiększenie stopnia wielomianu i na odwrót. To pozwoli nam ocenić czy zwiększanie stopnia jest bardziej optymalne niż zwiększanie liczby węzłów.

5.1 Tabela z błędami

Zanim pokazane zostaną tabele, poniżej przedstawiam oznaczenia jakie są w nich wykorzystane.

Oznaczenia	Wyjaśnienie	Kolor
st	Stopień wielomianu	
n	Liczba węzłów	

Legenda 1: Oznaczenia w tabelach 1 i 2

Legenda pokazuje, że jako jasny pomarańczowy oznaczone są stopnie wielomianu, a niebieskim liczba węzłów. Na szaro są oznaczone przypadki, w których nie jest spełniony warunek:

$$m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \tag{5}$$

Tabela błędów maksymalnych

st\n	10	20	50	100	200	1000
3	7,62	3,94	2,57	2,28	2,62	2,9
4	10,37	5,28	3	2,21	1,82	2,1
5	-	6,09	3,37	2,44	1,99	1,63
6	-	6,61	3,5	2,48	2	1,63
7	-	8,87	3,51	2,4	1,91	1,55
10	-	-	5,24	2,28	1,56	1,28
14	-	-	9,33	5,07	2,93	1,22
15	-	-	9,62	5,03	2,73	0,88
20	-	-	12,62	6,39	3,26	0,76
45	-	-	-	14,53	7,28	1,48

Tabela 1: Tabela z błędami maksymalnymi w zależności od stopnia i liczby węzłów

Tabela błędów średniokwadratowych

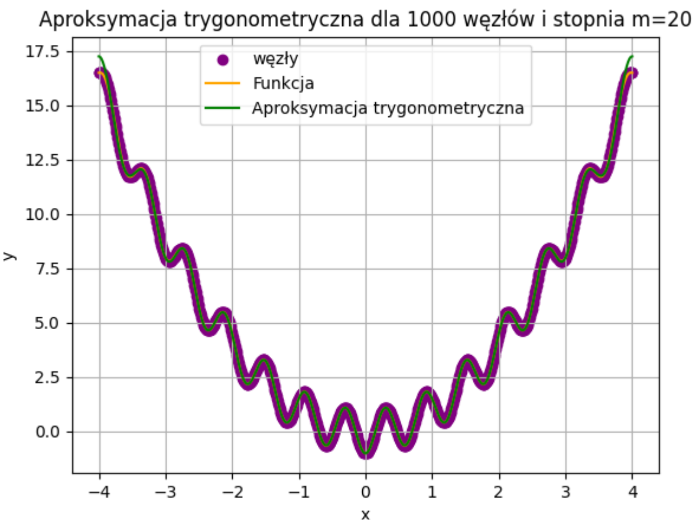
st\n	10	20	50	100	200	1000
3	2,02E+04	2,62E+03	1,14E+03	913,14	857,1	840,12
4	6,40E+03	3,33E+03	1,07E+03	717,6	630,28	603,35
5	-	4,15E+03	1,16E+03	677,46	558	520,83
6	-	4,78E+03	1,29E+03	682,19	530,1	482,5
7	-	7,21E+03	1,45E+03	704,07	519	460,84
10	-	-	1,94E+03	802,53	516,8	426,22
14	-	-	2,32E+03	635,28	209,71	71,71
15	-	-	2,45E+03	624,51	164,89	16,66
20	-	-	3,37E+03	848,26	212,98	9
45	-	-	-	2,10E+03	526,76	21,15

Tabela 2: Tabela z błędami średniokwadratowymi w zależności od stopnia i liczby węzłów

W większości przypadków zwiększenie liczby węzłów powoduje zmniejszenie wartości obydwu błędów: maksymalnego oraz średniokwadratowego. Warto zauważyć, iż zwiększenie stopnia wielomianu niekoniecznie oznacza zmniejszenie błędu. Najmniejsze błędy uzyskujemy dla 15-20 węzłów, co wynika z charakterystyki badanej funkcji.

5.2 Najmniejsze błędy i wyjaśnienie anomalii

Z tabeli 1 możemy odczytać, że najmniejszy błąd maksymalny oraz najmniejszy błąd średniokwadratowy otrzymujemy dla tego samego przypadku. Dzieje się to dla 1000 węzłów oraz 20 stopnia wielomianu, co pokazuje wykres 2.

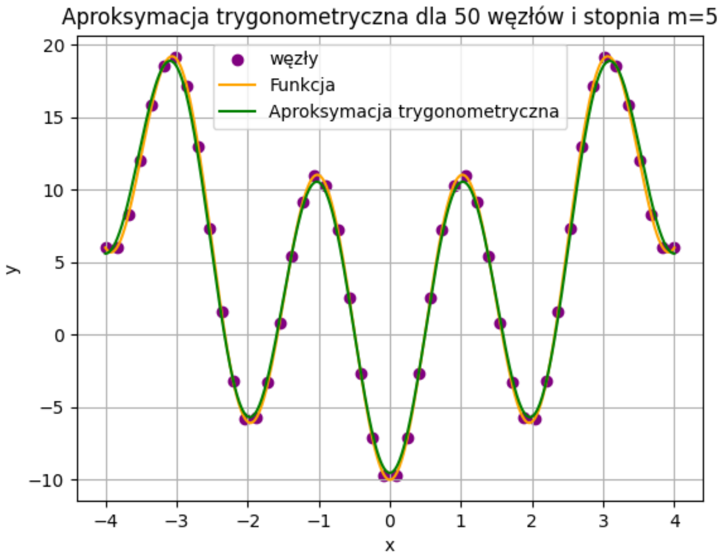


Wykres 2: wykres aproksymacji tryg. dla 1000 węzłów stopnia 20

Jeśli dobrze się przyjrzymy na końcach pojawia się małe wahanie i rozbieżność względem tego, co poszukujemy. Po sprawdzeniu na kilku różnych algorytmach oraz na innych funkcjach, stwierdziłem iż wynika to właśnie z charakterystyki badanej funkcji.

Poniżej również pokazuje, na wykresie 3, inną zbadana przeze mnie funkcje o wzorze:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 10 * cos\left(\frac{\pi x}{1}\right)}$$

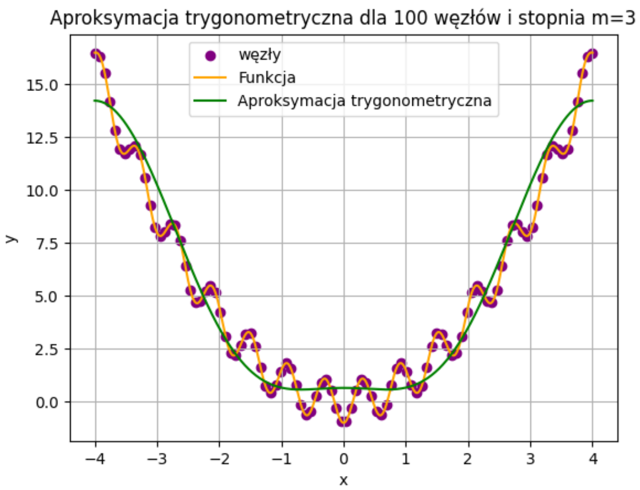


Wykres 3: wykres aproksymacji tryg. dla 50 węzłów stopnia 5

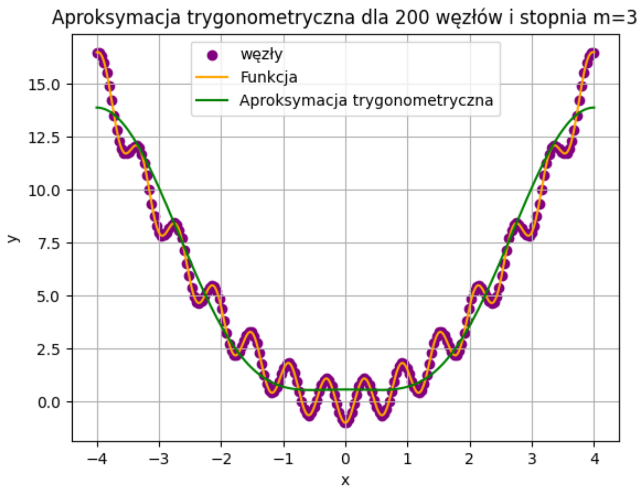
Widzimy, że dla niej już dla pięćdziesięciu węzłów i stopnia 5 otrzymujemy bardzo dobre przybliżenie.

5.3 Zwiększanie liczby węzłów

Jak wywnioskowaliśmy z tabel 1 oraz 2, zwiększanie liczby węzłów zazwyczaj zmniejsza wartości uzyskiwanych błędów. Dobrze potwierdzają to przypadki dla stopnia 3 oraz odpowiednio stu i dwustu węzłów, co widać w tabelach 1 i 2. Zarówno błąd maksymalny jak i błąd średniokwadratowy zmniejszają swoje wartości, dzięki zwiększniu liczby węzłów.



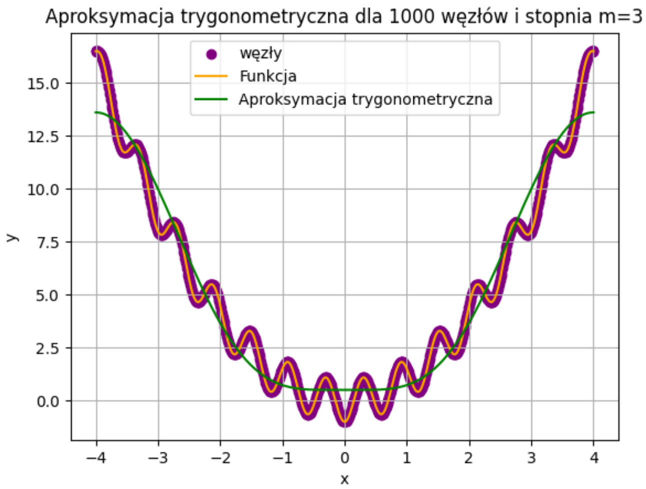
Wykres 4: wykres aproksymacji tryg. dla 100 węzłów stopnia 3



Wykres 5: wykres aproksymacji tryg. dla 200 węzłów stopnia 3

Wykresy 4 i 5 są do siebie bardzo podobne jednak nieznacznie różnią się co wpływa na uzyskaną wartość błędu.

Tak jak wspominaliśmy, dla większości przypadków mamy zmniejszenie błędów dzięki zwiększeniu liczby węzłów. Jednak dla tysiąca węzłów oraz również stopnia 3 obserwujemy nieznaczny wzrost błędu maksymalnego.

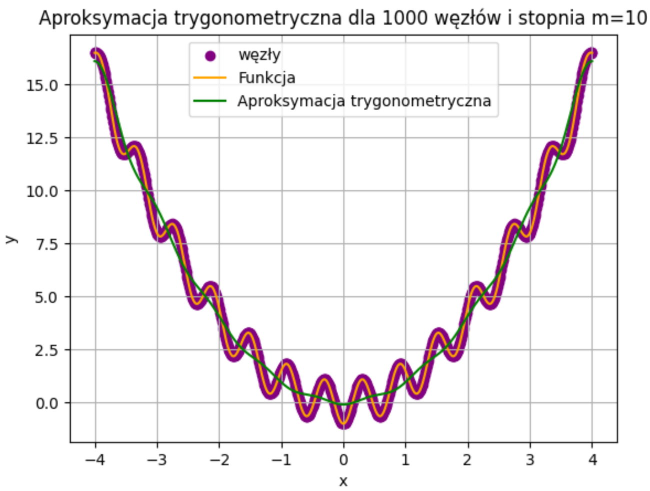


Wykres 6: wykres aproksymacji tryg. dla 1000 węzłów stopnia 3

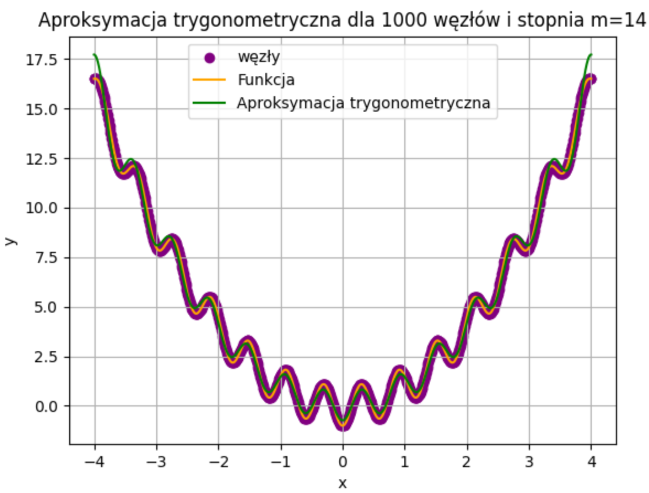
Jak widać na wykresie 6 różnica jest minimalna, niemal niezauważalna, lecz z tabeli 1 wynika, iż mamy w tym przypadku delikatny wzrost błędu maksymalnego. Co ciekawe mimo tego, błąd średniokwadratowy się zmniejszył.

5.4 Zwiększanie stopnnia wielominanu

Na podstawie tabel 1 oraz 2 możemy stwierdzić, że zwiększenie stopnia nie zawsze zmniejsza wartości błędów. Wszytsko zależy od liczby węzłów. Np. jak widać na wykresach 7 i 8, w przypadku tysiąca węzłów zwiększnie stopnia wielomianu z dziesięciu na czternaście znacznie zmniejsza wartości błędów.

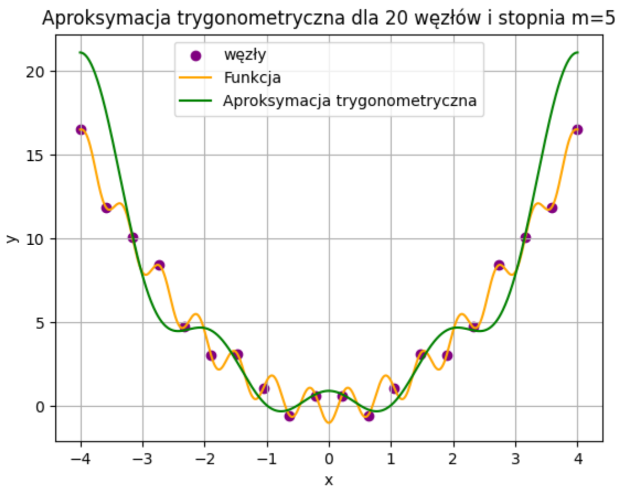


Wykres 7: wykres aproksymacji tryg. dla 1000 węzłów stopnia 10

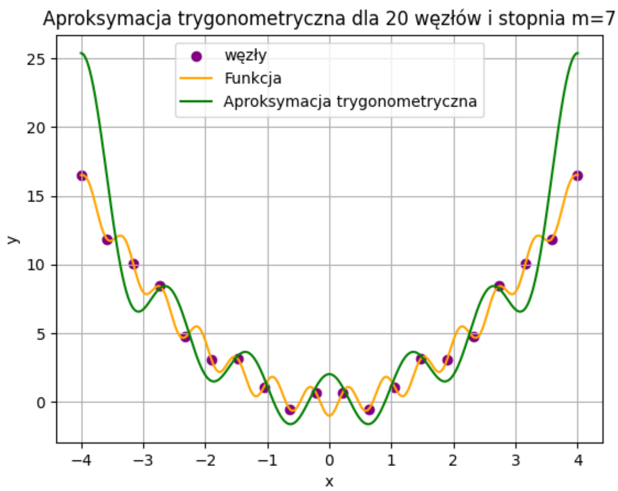


Wykres 8: wykres aproksymacji tryg. dla 1000 węzłów stopnia 14

Jak widać w tabeli 2, zazwyczaj zmniejszenie wartości błędów otrzymujemy około czternastego stopnia, co wynika z charakterystyki badanej funkcji. Jednak w innych przypadkach otrzymujemy wzrost błędów. Dobrze pokazują to wykresy 9 i 10. Widzimy na nich przypadki, gdy liczba węzłów wynosi 20, a stopnie wielomianu to odpowiednio 5 oraz 7.



Wykres 9: wykres aproksymacji tryg. dla 20 węzłów stopnia 5



Wykres 10: wykres aproksymacji tryg. dla 20 węzłów stopnia 7

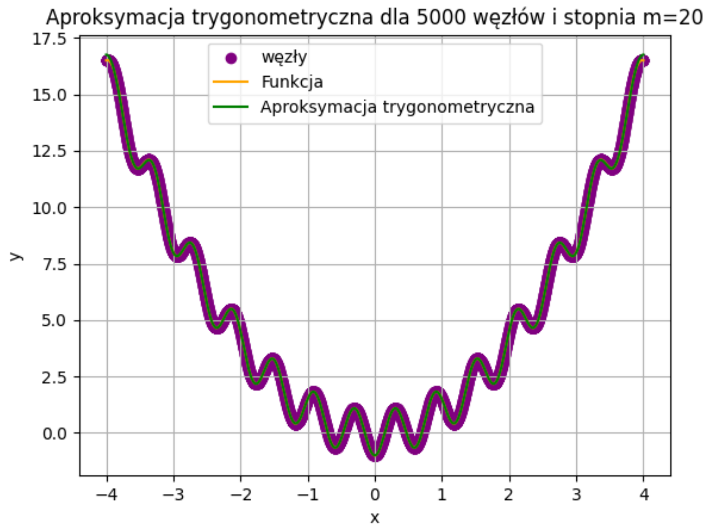
Na wykresach 9 i 10 możemy zauważyć zdecydowaną zmianę kształtu aproksymacji, ale także większe odchylenia w szczególności na krańcach. Jednak poprzez odpowiednie dobranie liczby węzłów do stopnia wielomianu możemy uzyskać lepsze przybliżenie.

5.5 Wyeliminowanie wahania na końcach przedziału

Z obserwacji poczynionych na podstawie tabel 1 i 2, oraz poprzednich punków opracowania, stwierdziłem, iż zdecydowanie zwiększenie liczby węzłów powoduje spadek błędów. Warto zauważyć również, że najmniejszy błąd miała aproksymacja, gdzie stopień wielomianu wynosił dwadzieścia. W związku z tym postanowiłem zbadać dodatkowo przypadki dla dwóch tysięcy węzłów oraz pięciu tysięcy węzłów. Są to już bardzo duże liczby i same obliczenia stają się przez to czasochłonne.

Wykres 11: wykres aproksymacji tryg. dla 2000 węzłów stopnia 20

Jak widzimy na wykresie 11, na samych końcach występują jeszcze delikatne odchylenia. Zwiększamy zatem liczbę węzłów do pięciu tysięcy.



Wykres 12: wykres aproksymacji tryg. dla 5000 węzłów stopnia 20

Na wykresie 12 nie zauważamy już takich odchyleń. Oznacza to, że odpowiednio duża liczba węzłów pozwala nam wyeliminować uzyskiwany efekt.

5.6 Efekt Runge'go

Dla aproksymacji trygonometrycznej efekt Runge'go nie występuje. Wynika to z faktu, że aby cały układ był dobrze uwarunkowany stopień wielomianu musi być zgodny z (4). Nie jest możliwe wystąpienie interpolacji, gdyż aby taka wystąpiła stopień wielomianu musi być równy liczbie węzłów.

6. Wnioski

Zwiększenie liczby węzłów powoduje zazwyczaj zmniejszenie wartości błędu, jednak zwiększenie stopnia nie zawsze pomaga, analogicznie jak w przypadku aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi.

W aproksymacji trygonometrycznej nie doświadczamy efektu Runge'go dlatego, że stopień wielomianu nie może być równy liczbie węzłów, co oznacza, że nie mamy do czynienia z interpolacją.

Zwiększanie stopnia w przypadku mojej funkcji nie poprawia wyników, najlepszy stopień wielomianu to 20.

Aby pozbyć się anomalii na końcach przedziału należy użyć odpowiednio dużej liczby węzłów. Zależy ona jednak od badanej funkcji, gdyż dla niektórych może to być kilkadziesiąt węzłów, a dla innych nawet kilka tysięcy.

Źródła:

- Wykłady doktor Katarzyny Rycerz z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

- strona internetowa: aproksymacja-wielomianami.eprace.edu.pl

- strona internetowa: wikipedia.org o aproksymacji trygonometrycznej