

# Sprawozdanie

## Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

Autor: Adrian Żerebiec

### 1. Dane techniczne

Zadanie zostało zrealizowane na laptopie z procesorem AMD Ryzen 7 4800H with Radeon Graphics 2.90 GHz z systemem Windows 10, a do tego 8 GB pamięci RAM. Całość została napisana w języku Python3.

### 2. Wstęp teoretyczny do zadań

#### 2.1 Kryteria stopu

##### Kryterium 1

Pierwsze kryterium stopu porównywało normę z różnicy dwóch ostatnio obliczonych wektorów, będących przybliżeniem rozwiązania z zadaną wartością  $\rho$ . Kryterium to nazywamy przyrostowym i ma ono postać:

$$\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho \quad (1)$$

##### Kryterium 2

Drugie kryterium określone jest, przy pomocy poniższego wzoru i jest to kryterium rezydualne:

$$\|Ax^{(i)} - b\| < \rho \quad (2)$$

Normę liczyłem z wykorzystaniem normy Euklidesowej danej wzorem:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (3)$$

## 2.2 Kryterium wyznaczania błędów

Jako kryterium do wyznaczania wartości błędów dla obliczonego wektora  $x$ , wykorzystałem normę euklidesową. Dokładny wykorzystany wzór ma postać:

$$\|x - \bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}$$

gdzie:

$x$  – obliczony wektor,  $\bar{x}$  – zadany wektor  $x$ ,  $x_i$  –  $i$ . współrzędna wyznaczonego wektora  $x$ ,  $\bar{x}_i$  –  $i$ . współrzędna zadanego wektora  $\bar{x}$ .

(4)

## 3. Zadanie 1.

Metodą Jacobiego rozwiąż układ równań liniowych  $Ax=b$  (przyjmując jako niewiadomą wektor  $x$ ), przyjmując kolejno kryterium stopu:

1)  $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

2)  $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$

Obliczenia wykonaj dla różnych rozmiarów układu  $n$ , dla różnych wektorów początkowych, a także różnych wartości  $\rho$  w kryteriach stopu. (Podaj, jak liczono normę.) Wyznacz liczbę iteracji oraz sprawdź różnicę w czasie obliczeń dla obu kryteriów stopu. Sprawdź dokładność obliczeń.

**Układ:**

$k = 7$

$m = 0.5$

$$\begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{i,j} = \frac{m}{n-i-j+0.5} \quad \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

gdzie  $i, j = 1, \dots, n$

## 3.1 Opracowanie wyników

Liczbę  $n$  rozumiemy jako rozmiary układów. W zadaniu przetestowałem rozmiary takie jak: 3,4,5,6,7,8,9,10,15,20,25,30,40,50,60,70,80,90,100,150,200,250, 300,400,500. Dodatkowo liczyłem liczbę iteracji dla wybranego  $\rho$  oraz mierzyłem czas wykonywania algorytmu Jacobiego. Jako kryterium stopu wykorzystałem (1) oraz (2). Dodatkowo zbadałem 2 różne wektory początkowe. Pierwszy z nich jest wypełniony zerami oraz drugi wypełniony samymi setkami. Jako wyniki rozumiemy zatem: liczbę iteracji, czas wykonania oraz uzyskane błędy liczone z wykorzystaniem kryterium błędów (4).

### 3.1.1 Wyniki dla wektora wypełnionego zerami

Postanowiłem porównać parametry (czas, liczba iteracji, wartości błędów) dla różnych wartości  $\rho$ :  $10^{-3}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-10}$ ,  $10^{-12}$ ,  $10^{-14}$ ,  $10^{-16}$ . Możemy przewidywać, iż zmniejszanie  $\rho$  spowoduje wzrost liczby iteracji, ale za to najprawdopodobniej otrzymamy mniejsze wartości błędów.

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	5	8	11	14	16	19	22
4	6	9	13	16	19	22	27
5	6	9	14	17	20	23	28
6	7	10	14	18	21	24	27
7	6	10	14	17	20	24	28
8	7	10	15	18	21	24	28
9	7	10	14	17	21	24	29
10	7	10	15	18	21	24	29
15	7	10	15	18	21	24	28
20	7	10	15	18	21	24	-
25	7	10	15	18	21	24	30
30	7	10	15	18	21	24	29
40	7	11	15	18	21	24	33
50	8	11	15	18	21	25	-
60	8	11	15	18	21	25	-
70	8	11	15	18	22	25	-
80	8	11	15	19	22	25	30
90	8	11	15	19	22	25	-
100	8	11	15	19	22	25	-
150	8	11	16	19	22	25	-
200	8	11	16	19	22	25	-
250	8	11	16	19	22	25	-
300	8	11	16	19	22	25	-
400	8	11	16	19	22	25	-
500	8	11	16	19	22	25	-

Tabela 1: Tabela z liczbą iteracji w zależności od  $\rho$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (1)

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	6	9	12	15	17	20	22
4	7	10	14	17	21	24	25
5	8	11	15	18	22	25	27
6	8	11	16	19	22	25	27
7	8	11	16	19	22	25	27
8	8	11	16	19	22	25	-
9	8	11	16	19	22	25	29
10	8	11	16	19	22	25	-
15	8	11	16	19	22	25	-
20	9	12	16	19	22	26	-
25	8	11	16	19	22	25	-
30	9	12	16	19	23	26	-
40	9	12	16	20	23	26	-
50	9	12	17	20	23	26	-
60	9	12	17	20	23	27	-
70	9	12	17	20	23	26	-
80	9	12	17	20	23	27	-
90	9	12	17	20	23	27	-
100	9	12	17	20	23	-	-
150	9	12	17	20	23	-	-
200	9	12	17	20	23	-	-
250	9	12	17	20	23	-	-
300	9	13	17	20	23	-	-
400	10	13	17	20	23	-	-
500	10	13	17	20	23	-	-

Tabela 2: Tabela z liczbą iteracji w zależności od  $\rho$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (2)

Jak widać z tabel 1 oraz 2 kryterium stopu (2) potrzebuje zazwyczaj większej liczby iteracji niż kryterium (1). Dodatkowo widzimy, że dla bardzo małych  $\rho$  kryterium (2) radzi sobie zdecydowanie gorzej co pokazują puste pola, gdzie liczba iteracji potrzebna do uzyskania wyników przekracza maksymalną ustawioną liczbę, wynoszącą 3000. Co oczywiste, zmniejszenie  $\rho$  powoduje zwiększenie liczby iteracji.

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	0,00016	0,0001	0,00016	0,00014	0,00016	0,00017	0,00019
4	5,21E-05	6,81E-05	9,22E-05	0,00011	0,00012	0,00015	0,00017
5	5,08E-05	7,86E-05	0,00011	0,00011	0,00013	0,00015	0,00018
6	5,71E-05	7,28E-05	9,88E-05	0,00015	0,00014	0,00015	0,0002
7	5,10E-05	7,34E-05	9,70E-05	0,00012	0,00013	0,00016	0,00018
8	5,64E-05	7,23E-05	0,0001	0,00012	0,00014	0,00016	0,00018
9	8,21E-05	7,27E-05	0,00013	0,00011	0,00021	0,00016	0,00021
10	5,77E-05	8,60E-05	0,0001	0,00012	0,00015	0,00016	0,00018
15	5,90E-05	7,94E-05	0,00011	0,00012	0,00014	0,00016	0,00022
20	5,97E-05	7,52E-05	0,00012	0,00015	0,00014	0,00016	-
25	6,27E-05	8,11E-05	0,00012	0,00016	0,00017	0,00018	0,00023
30	7,28E-05	8,62E-05	0,00011	0,00013	0,00015	0,00017	0,00023
40	7,47E-05	9,72E-05	0,00013	0,00013	0,00016	0,0002	0,00028
50	8,90E-05	0,0001	0,00014	0,00015	0,00019	0,0002	-
60	8,81E-05	0,00011	0,00014	0,00015	0,00017	0,00019	-
70	8,10E-05	0,00011	0,00034	0,00015	0,00018	0,00021	-
80	0,00012	0,00018	0,00028	0,00017	0,00026	0,0002	0,00031
90	0,00015	0,00021	0,00023	0,00029	0,00021	0,00022	-
100	0,00149	0,00228	0,00382	0,00338	0,0036	0,00495	-
150	0,00193	0,00374	0,00345	0,00454	0,00333	0,00485	-
200	0,00135	0,00236	0,004	0,00419	0,00405	0,00429	-
250	0,00225	0,00193	0,00361	0,00321	0,00404	0,00476	-
300	0,00245	0,00329	0,00534	0,00614	0,00503	0,00576	-
400	0,0026	0,00453	0,004	0,00623	0,00584	0,00591	-
500	0,0041	0,00468	0,00719	0,00809	0,00704	0,00704	-

Tabela 3: Tabela z czasami w zależności od  $p$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (1)

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	6,20E-05	8,23E-05	0,0001	0,00013	0,00014	0,00016	0,00017
4	6,47E-05	8,61E-05	0,00011	0,00013	0,00016	0,00019	0,00021
5	7,23E-05	9,36E-05	0,00012	0,00014	0,00017	0,0002	0,00021
6	7,20E-05	9,30E-05	0,00013	0,00015	0,00019	0,00019	0,00022
7	7,17E-05	9,36E-05	0,00013	0,00015	0,00017	0,00019	0,00021
8	7,15E-05	9,43E-05	0,00013	0,00015	0,00017	0,00019	-
9	7,59E-05	9,32E-05	0,00013	0,00018	0,0002	0,00021	0,00023
10	7,29E-05	9,44E-05	0,00013	0,00015	0,00017	0,0002	-
15	7,42E-05	9,52E-05	0,00013	0,00015	0,0002	0,00022	-
20	8,18E-05	0,0001	0,00013	0,00015	0,00017	0,0002	-
25	0,00011	9,88E-05	0,00014	0,00016	0,00018	0,00023	-
30	8,41E-05	0,00011	0,00014	0,00017	0,00019	0,00022	-
40	8,59E-05	0,00011	0,00014	0,00017	0,00023	0,00023	-
50	9,10E-05	0,00011	0,00015	0,00017	0,0002	0,00024	-
60	9,49E-05	0,00012	0,00025	0,00018	0,00024	0,00024	-
70	0,00011	0,00012	0,00023	0,00019	0,00021	0,00024	-
80	0,0001	0,00013	0,00018	0,00019	0,00022	0,00025	-
90	0,00011	0,00013	0,00018	0,0002	0,00023	0,00029	-
100	0,00238	0,00401	0,00678	0,0058	0,00724	-	-
150	0,00274	0,01395	0,00615	0,00632	0,00867	-	-
200	0,00272	0,0046	0,00592	0,00622	0,00725	-	-
250	0,00476	0,03114	0,00766	0,00725	0,00769	-	-
300	0,00386	0,00641	0,00881	0,00918	0,00859	-	-
400	0,00539	0,00753	0,00659	0,00926	0,00989	-	-
500	0,00591	0,00877	0,01171	0,01298	0,01415	-	-

Tabela 4: Tabela z czasami w zależności od  $p$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (2)

Jak widzimy w tabelach 3 i 4, w tym przypadku czas dla kryterium (1) są lepsze niż dla kryterium (2). Jak widać zwiększenie rozmiaru lub zmniejszenie  $p$  powoduje wzrost czasu obliczeń, gdyż potrzebujemy większej liczby iteracji.

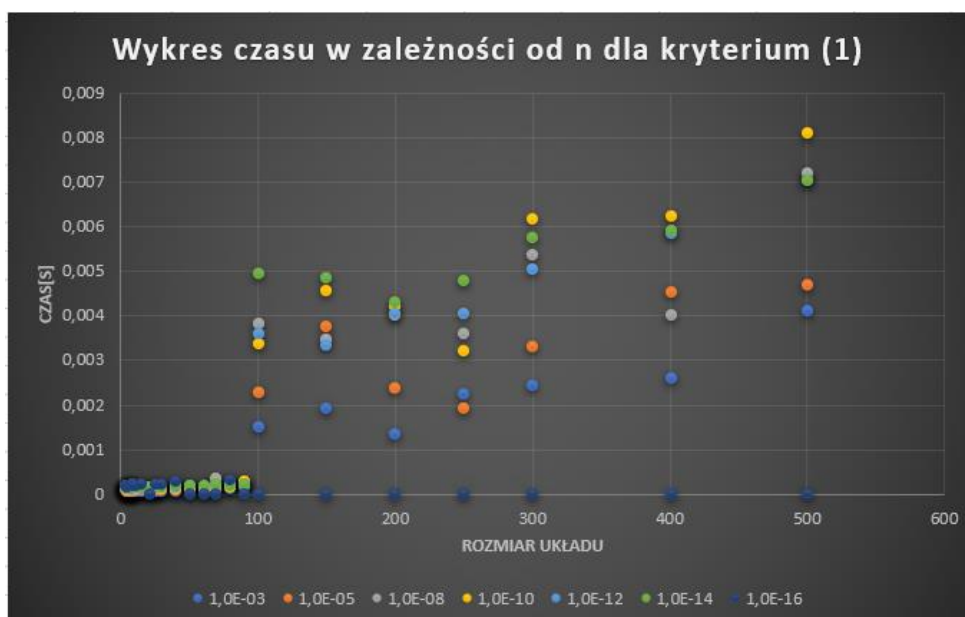
n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	6,09E-04	1,94E-06	6,44E-09	2,24E-11	5,32E-13	2,02E-15	0,00
4	3,53E-04	2,75E-06	5,89E-09	6,96E-11	8,64E-13	1,07E-14	2,48E-16
5	9,37E-04	1,05E-05	5,99E-09	6,77E-11	7,69E-13	8,80E-15	1,11E-16
6	2,63E-04	3,07E-06	8,11E-09	2,15E-11	2,52E-13	2,81E-15	0,00
7	1,25E-03	3,27E-06	8,59E-09	9,98E-11	1,16E-12	3,03E-15	1,11E-16
8	3,00E-04	3,45E-06	2,03E-09	2,35E-11	2,71E-13	3,45E-15	3,85E-16
9	3,32E-04	3,78E-06	9,75E-09	1,12E-10	2,91E-13	3,46E-15	2,48E-16
10	3,65E-04	4,20E-06	2,47E-09	2,85E-11	3,29E-13	4,09E-15	4,00E-16
15	4,61E-04	5,28E-06	3,07E-09	3,52E-11	4,05E-13	4,83E-15	2,94E-16
20	5,41E-04	6,16E-06	3,56E-09	4,07E-11	4,65E-13	5,54E-15	-
25	6,12E-04	6,95E-06	4,00E-09	4,56E-11	5,21E-13	5,97E-15	6,66E-16
30	6,77E-04	7,69E-06	4,42E-09	5,03E-11	5,73E-13	6,81E-15	9,87E-16
40	7,88E-04	2,01E-06	5,13E-09	5,83E-11	6,63E-13	7,80E-15	1,03E-15
50	1,99E-04	2,26E-06	5,75E-09	6,52E-11	7,41E-13	2,25E-15	-
60	2,19E-04	2,48E-06	6,31E-09	7,16E-11	8,12E-13	2,30E-15	-
70	2,37E-04	2,68E-06	6,82E-09	7,73E-11	1,97E-13	2,62E-15	-
80	2,53E-04	2,87E-06	7,30E-09	1,86E-11	2,11E-13	2,99E-15	1,51E-15
90	2,69E-04	3,05E-06	7,75E-09	1,97E-11	2,24E-13	2,96E-15	-
100	2,84E-04	3,21E-06	8,17E-09	2,08E-11	2,36E-13	3,76E-15	-
150	3,49E-04	3,95E-06	2,25E-09	2,55E-11	2,89E-13	4,25E-15	-
200	4,03E-04	4,56E-06	2,60E-09	2,94E-11	3,35E-13	4,66E-15	-
250	4,51E-04	5,10E-06	2,91E-09	3,29E-11	3,73E-13	5,80E-15	-
300	4,95E-04	5,59E-06	3,19E-09	3,60E-11	4,09E-13	6,73E-15	-
400	5,72E-04	6,46E-06	3,68E-09	4,16E-11	4,73E-13	8,92E-15	-
500	6,40E-04	7,23E-06	4,12E-09	4,65E-11	5,30E-13	8,34E-15	-

Tabela 5: Tabela z błędami w zależności od  $p$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (1)

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	8,93E-05	2,88E-07	9,70E-10	3,44E-12	8,26E-14	2,02E-15	0,00
4	6,86E-05	5,71E-07	1,33E-09	1,61E-11	4,64E-14	1,07E-14	0,00E+00
5	4,70E-05	5,30E-07	1,34E-09	1,52E-11	3,89E-14	8,80E-15	1,11E-16
6	5,97E-05	6,95E-07	4,18E-10	4,88E-12	5,71E-14	2,81E-15	0,00
7	6,38E-05	7,40E-07	4,40E-10	5,12E-12	5,97E-14	3,03E-15	0,00
8	6,76E-05	7,79E-07	4,59E-10	5,30E-12	6,16E-14	3,45E-15	-
9	7,47E-05	8,52E-07	4,96E-10	5,70E-12	6,61E-14	3,46E-15	2,48E-16
10	8,25E-05	9,48E-07	5,57E-10	6,43E-12	7,46E-14	4,09E-15	-
15	1,04E-04	1,19E-06	6,92E-10	7,94E-12	9,14E-14	4,83E-15	-
20	2,74E-05	3,12E-07	8,02E-10	9,17E-12	1,05E-13	5,54E-15	-
25	1,37E-04	1,56E-06	9,01E-10	1,03E-11	1,17E-13	5,97E-15	-
30	3,42E-05	3,89E-07	9,94E-10	1,13E-11	2,90E-14	6,81E-15	-
40	3,98E-05	4,51E-07	1,15E-09	2,95E-12	3,36E-14	7,80E-15	-
50	4,47E-05	5,07E-07	2,90E-10	3,30E-12	3,75E-14	2,25E-15	-
60	4,91E-05	5,56E-07	3,19E-10	3,62E-12	4,07E-14	2,30E-15	-
70	5,31E-05	6,02E-07	3,44E-10	3,90E-12	4,42E-14	2,62E-15	-
80	5,69E-05	6,44E-07	3,68E-10	4,18E-12	4,71E-14	2,99E-15	-
90	6,04E-05	6,84E-07	3,91E-10	4,43E-12	4,99E-14	2,96E-15	-
100	6,38E-05	7,22E-07	4,12E-10	4,67E-12	5,31E-14	-	-
150	7,83E-05	8,86E-07	5,05E-10	5,72E-12	6,40E-14	-	-
200	9,05E-05	1,02E-06	5,84E-10	6,61E-12	7,35E-14	-	-
250	1,01E-04	1,15E-06	6,53E-10	7,39E-12	8,18E-14	-	-
300	1,11E-04	2,82E-07	7,15E-10	8,09E-12	8,91E-14	-	-
400	2,88E-05	3,26E-07	8,26E-10	9,34E-12	1,02E-13	-	-
500	3,22E-05	3,64E-07	9,24E-10	1,04E-11	1,13E-13	-	-

Tabela 6: Tabela z błędami w zależności od  $p$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (2)

W tabelach 5 i 6 możemy zauważyć, że dla dużych  $p$  lepiej radzi sobie kryterium (2). Osiąga ono wyniki średnio rząd wielkości mniejsze niż kryterium (1). Jednak im mniejsza wartość  $p$  tym bardziej zbliżone wyniki otrzymujemy. Dla  $p = 10^{-14}$  otrzymane błędy są niemal identyczne.



Wykres 1: Wykres czasu w zależności od rozmiaru dla każdego  $\rho$  dla kryterium (1)

Dodatkowo umieściłem wykres 1, który lepiej obrazuje zmianę czasu. Widzimy, że zwiększenie rozmiaru bardzo wpływa na czas. Warto zauważyć, że dla  $\rho = 10^{-10}$  otrzymaliśmy najgorsze czasy, co może wynikać także z obliczeń komputera, natomiast bezsprzecznie im mniejsza wartość  $\rho$  tym więcej czasu potrzeba.

### 3.1.2 Wyniki dla wektora wypełnionego setkami

Tak samo jak dla punktu 3.1.1 postanowiłem sprawdzić czasy wykonania, liczbę iteracji oraz uzyskane błędy dla różnych wartości  $\rho$ . Wykorzystałem te same, które w poprzednim podpunkcie, gdyż to pozwoli nam sprawdzić, jaki wpływ wektor początkowy na uzyskiwane wyniki.

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	8	11	14	17	20	22	25
4	9	12	17	20	23	26	29
5	9	12	17	20	23	26	29
6	9	12	17	20	23	26	29
7	9	12	17	20	23	26	30
8	9	12	17	20	23	26	30
9	9	12	17	20	23	26	31
10	9	12	17	20	23	26	30
15	9	12	17	20	23	27	30
20	9	12	17	20	23	26	32
25	9	12	17	20	23	27	31
30	9	12	17	20	23	26	32
40	10	13	17	20	23	26	32
50	10	13	17	20	23	26	-
60	10	13	17	20	23	27	-
70	10	13	17	20	23	27	-
80	10	13	17	20	23	27	32
90	10	13	17	20	23	27	-
100	10	13	17	20	23	27	-
150	10	13	17	21	24	27	-
200	10	13	18	21	24	27	33
250	10	13	18	21	24	27	33
300	10	13	18	21	24	27	-
400	10	13	18	21	24	27	-
500	10	13	18	21	24	27	-

Tabela 7: Tabela z liczbą iteracji w zależności od  $\rho$  oraz n dla kryterium stopu (1)

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	9	12	16	18	21	23	25
4	10	13	18	21	24	27	-
5	10	13	18	21	24	28	-
6	10	13	18	21	24	28	29
7	10	13	18	21	24	28	29
8	10	13	18	21	24	28	-
9	10	14	18	21	25	28	31
10	10	13	18	21	24	28	-
15	11	14	18	22	25	28	-
20	11	14	18	21	25	28	-
25	11	14	18	22	25	28	-
30	11	14	18	21	25	28	-
40	11	14	18	22	25	28	-
50	11	14	19	22	25	28	-
60	11	14	19	22	25	28	-
70	11	14	19	22	25	28	-
80	11	14	19	22	25	29	-
90	11	14	19	22	25	28	-
100	11	14	19	22	25	-	-
150	11	14	19	22	25	-	-
200	11	14	19	22	25	-	-
250	11	14	19	22	25	-	-
300	11	14	19	22	25	-	-
400	12	15	19	22	25	-	-
500	12	15	19	22	25	-	-

Tabela 8: Tabela z liczbą iteracji w zależności od  $\rho$  oraz n dla kryterium stopu (2)



Jak widzimy w tabelach 7 oraz 8, podobnie jak dla tabel 1 i 2, kryterium (1) potrzebuje mniejszej liczby iteracji do otrzymania wyników. Warto jednak zauważyć, że wektor z wartościami oddalonymi od zer, ogólnie potrzebuje więcej iteracji. Średnio wychodzi nam, że potrzebujemy 2 iteracje więcej niż dla wektora z zerami. Sprawdźmy zatem czasy dla tego przypadku.

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	1,04E-04	1,16E-04	1,35E-04	1,50E-04	1,65E-04	1,83E-04	1,97E-04
4	7,04E-05	8,53E-05	1,12E-04	1,29E-04	3,29E-04	1,64E-04	1,82E-04
5	6,88E-05	8,40E-05	1,12E-04	1,30E-04	1,69E-04	1,63E-04	1,85E-04
6	7,37E-05	8,80E-05	1,13E-04	1,30E-04	1,51E-04	1,66E-04	1,82E-04
7	6,85E-05	8,80E-05	1,12E-04	1,30E-04	1,47E-04	1,64E-04	1,90E-04
8	6,74E-05	8,34E-05	1,13E-04	1,31E-04	1,45E-04	1,66E-04	1,90E-04
9	6,79E-05	8,38E-05	1,12E-04	1,30E-04	1,46E-04	1,63E-04	1,94E-04
10	6,91E-05	8,44E-05	1,13E-04	1,31E-04	1,48E-04	1,64E-04	1,88E-04
15	7,30E-05	9,18E-05	1,16E-04	1,40E-04	1,59E-04	1,73E-04	1,90E-04
20	7,19E-05	8,60E-05	1,15E-04	1,33E-04	1,48E-04	1,66E-04	2,04E-04
25	7,23E-05	8,88E-05	1,19E-04	1,46E-04	1,60E-04	1,84E-04	2,12E-04
30	7,21E-05	9,20E-05	1,29E-04	1,37E-04	1,55E-04	1,70E-04	2,10E-04
40	9,01E-05	1,03E-04	1,22E-04	1,45E-04	1,62E-04	1,85E-04	-
50	9,27E-05	1,08E-04	1,39E-04	1,59E-04	1,75E-04	1,91E-04	-
60	9,75E-05	1,07E-04	1,47E-04	1,56E-04	1,88E-04	2,09E-04	-
70	1,03E-04	1,31E-04	1,39E-04	1,63E-04	1,79E-04	2,04E-04	6,38E-03
80	9,66E-05	1,24E-04	1,73E-04	1,69E-04	1,79E-04	2,05E-04	2,44E-04
90	1,11E-04	1,31E-04	1,48E-04	1,58E-04	1,89E-04	2,27E-04	-
100	2,54E-03	3,29E-03	3,62E-03	3,89E-03	4,56E-03	5,24E-03	-
150	2,32E-03	2,58E-03	3,42E-03	3,58E-03	3,98E-03	4,82E-03	-
200	2,19E-03	3,13E-03	3,52E-03	4,54E-03	4,57E-03	4,51E-03	6,24E-03
250	2,98E-03	3,07E-03	4,82E-03	4,77E-03	5,12E-03	5,68E-03	7,24E-03
300	3,07E-03	3,82E-03	4,46E-03	5,06E-03	5,86E-03	5,78E-03	-
400	3,59E-03	3,88E-03	5,67E-03	5,35E-03	6,94E-03	6,06E-03	-
500	4,74E-03	5,25E-03	5,50E-03	6,25E-03	7,19E-03	7,48E-03	-

Tabela 9: Tabela z czasami w zależności od  $p$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (1)

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	8,72E-05	1,01E-04	1,37E-04	1,43E-04	2,53E-04	5,98E-16	2,00E-04
4	8,73E-05	1,08E-04	1,41E-04	1,64E-04	4,09E-04	1,89E-15	-
5	8,73E-05	1,06E-04	1,41E-04	1,66E-04	1,83E-04	2,22E-16	-
6	8,92E-05	1,07E-04	1,42E-04	1,65E-04	1,83E-04	4,71E-16	2,18E-04
7	8,65E-05	1,05E-04	1,46E-04	1,65E-04	1,89E-04	4,44E-16	2,20E-04
8	8,64E-05	1,05E-04	1,41E-04	1,63E-04	1,82E-04	6,84E-16	-
9	8,65E-05	1,13E-04	1,42E-04	1,63E-04	1,90E-04	6,28E-16	2,38E-04
10	8,88E-05	1,11E-04	1,44E-04	1,68E-04	1,89E-04	6,08E-16	-
15	9,55E-05	1,15E-04	1,46E-04	1,75E-04	1,91E-04	6,28E-16	-
20	9,43E-05	1,15E-04	1,44E-04	1,65E-04	2,00E-04	6,08E-16	-
25	9,75E-05	1,22E-04	1,54E-04	1,76E-04	1,97E-04	8,67E-16	-
30	9,86E-05	1,19E-04	1,49E-04	1,70E-04	2,02E-04	9,29E-16	-
40	9,90E-05	1,22E-04	1,59E-04	1,84E-04	2,03E-04	1,09E-15	-
50	1,09E-04	1,26E-04	1,66E-04	1,90E-04	2,14E-04	1,16E-15	-
60	1,07E-04	1,30E-04	1,71E-04	1,92E-04	2,17E-04	1,34E-15	-
70	1,11E-04	1,35E-04	1,78E-04	1,99E-04	2,27E-04	1,58E-15	-
80	1,15E-04	1,38E-04	1,84E-04	2,10E-04	2,32E-04	1,51E-15	-
90	1,28E-04	1,46E-04	1,90E-04	2,16E-04	2,44E-04	1,74E-15	-
100	3,29E-03	3,65E-03	5,17E-03	5,85E-03	6,65E-03	-	-
150	3,03E-03	3,93E-03	5,00E-03	5,96E-03	6,97E-03	-	-
200	2,94E-03	4,21E-03	5,14E-03	6,11E-03	6,79E-03	-	-
250	3,25E-03	4,48E-03	6,11E-03	6,24E-03	7,04E-03	-	-
300	4,51E-03	4,81E-03	7,30E-03	7,20E-03	7,70E-03	-	-
400	5,01E-03	5,75E-03	6,98E-03	6,94E-03	7,48E-03	-	-
500	5,83E-03	7,30E-03	7,72E-03	9,84E-03	1,01E-02	-	-

Tabela 10: Tabela z czasami w zależności od  $p$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (2)

Z tabel 9 i 10 możemy wyciągnąć pewne wnioski. Wraz ze wzrostem iteracji potrzebujemy więcej czasu, aby dokonać poszczególnych obliczeń. Nie są to duże różnice, gdyż tak jak sprawdziliśmy wcześniej, średnio wykonujemy dwie iteracje więcej.

n\ro	1,0E-03	1,0E-05	1,0E-08	1,0E-10	1,0E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	4,63E-04	1,93E-06	8,06E-09	3,36E-11	1,40E-13	3,74E-15	0
4	4,83E-04	5,92E-06	4,02E-09	5,07E-11	6,41E-13	8,05E-15	2,48E-16
5	3,87E-04	4,54E-06	2,81E-09	3,38E-11	4,09E-13	4,80E-15	1,11E-16
6	5,81E-04	6,90E-06	4,46E-09	5,53E-11	6,93E-13	8,64E-15	0
7	5,15E-04	5,83E-06	3,49E-09	4,17E-11	5,08E-13	6,45E-15	1,11E-16
8	6,38E-04	7,30E-06	4,53E-09	5,56E-11	6,96E-13	8,88E-15	3,85E-16
9	5,89E-04	6,51E-06	3,83E-09	4,60E-11	5,67E-13	7,30E-15	2,48E-16
10	6,81E-04	7,57E-06	4,58E-09	5,61E-11	7,05E-13	9,04E-15	4,00E-16
15	7,34E-04	7,73E-06	4,42E-09	5,33E-11	6,65E-13	2,14E-15	2,94E-16
20	8,25E-04	8,55E-06	4,89E-09	5,93E-11	7,43E-13	9,61E-15	4,58E-16
25	8,84E-04	9,08E-06	5,13E-09	6,19E-11	7,71E-13	2,25E-15	6,66E-16
30	9,45E-04	9,61E-06	5,40E-09	6,48E-11	8,02E-13	1,01E-14	9,87E-16
40	2,26E-04	2,35E-06	5,89E-09	6,95E-11	8,46E-13	1,07E-14	1,03E-15
50	2,48E-04	2,57E-06	6,38E-09	7,43E-11	8,94E-13	1,10E-14	-
60	2,69E-04	2,78E-06	6,80E-09	7,82E-11	9,28E-13	2,83E-15	-
70	2,89E-04	2,98E-06	7,22E-09	8,23E-11	9,69E-13	3,35E-15	-
80	3,07E-04	3,16E-06	7,58E-09	8,56E-11	9,98E-13	2,90E-15	1,51E-15
90	3,25E-04	3,33E-06	7,95E-09	8,92E-11	1,03E-12	3,31E-15	-
100	3,42E-04	3,49E-06	8,27E-09	9,21E-11	1,06E-12	3,73E-15	-
150	4,15E-04	4,21E-06	9,75E-09	2,38E-11	2,71E-13	3,93E-15	-
200	4,78E-04	4,81E-06	2,42E-09	2,64E-11	2,97E-13	5,33E-15	3,24E-15
250	5,33E-04	5,34E-06	2,66E-09	2,89E-11	3,21E-13	4,00E-15	4,34E-15
300	5,83E-04	5,82E-06	2,88E-09	3,10E-11	3,45E-13	8,07E-15	-
400	6,71E-04	6,67E-06	3,28E-09	3,51E-11	3,86E-13	1,10E-14	-
500	7,48E-04	7,42E-06	3,63E-09	3,88E-11	4,22E-13	1,00E-14	-

Tabela 11: Tabela z błędami w zależności od  $p$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (1)

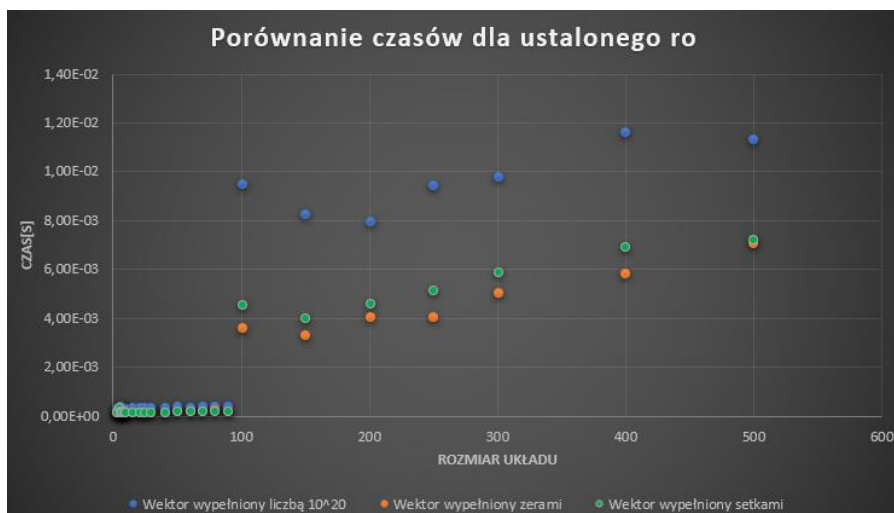
n\ro	1,00E-03	1,00E-05	1,00E-08	1,00E-10	1,00E-12	1,0E-14	1,0E-16
3	7,46E-05	3,11E-07	2,09E-10	5,41E-12	2,26E-14	5,98E-16	0
4	1,11E-04	1,37E-06	9,35E-10	1,18E-11	1,49E-13	1,89E-15	-
5	8,78E-05	1,03E-06	6,43E-10	7,75E-12	9,40E-14	2,22E-16	-
6	1,32E-04	1,58E-06	1,03E-09	1,28E-11	1,61E-13	4,71E-16	0
7	1,15E-04	1,32E-06	7,96E-10	9,58E-12	1,17E-13	4,44E-16	0
8	1,43E-04	1,66E-06	1,04E-09	1,29E-11	1,62E-13	6,84E-16	-
9	1,31E-04	3,29E-07	8,75E-10	1,06E-11	3,06E-14	6,28E-16	2,48E-16
10	1,51E-04	1,70E-06	1,05E-09	1,30E-11	1,64E-13	6,08E-16	-
15	3,51E-05	3,83E-07	1,01E-09	2,86E-12	3,62E-14	6,28E-16	-
20	3,89E-05	4,22E-07	1,12E-09	1,37E-11	4,06E-14	6,08E-16	-
25	4,14E-05	4,47E-07	1,17E-09	3,32E-12	4,18E-14	8,67E-16	-
30	4,40E-05	4,72E-07	1,23E-09	1,49E-11	4,34E-14	9,29E-16	-
40	4,89E-05	5,22E-07	1,34E-09	3,66E-12	4,54E-14	1,09E-15	-
50	5,37E-05	5,70E-07	3,27E-10	3,89E-12	4,76E-14	1,16E-15	-
60	5,82E-05	6,14E-07	3,45E-10	4,06E-12	4,90E-14	1,34E-15	-
70	6,24E-05	6,56E-07	3,64E-10	4,24E-12	5,13E-14	1,58E-15	-
80	6,64E-05	6,95E-07	3,80E-10	4,38E-12	5,21E-14	1,51E-15	-
90	7,01E-05	7,32E-07	3,97E-10	4,55E-12	5,40E-14	1,74E-15	-
100	7,37E-05	7,66E-07	4,11E-10	4,68E-12	5,53E-14	-	-
150	8,94E-05	9,19E-07	4,78E-10	5,34E-12	6,11E-14	-	-
200	1,03E-04	1,05E-06	5,35E-10	5,89E-12	6,82E-14	-	-
250	1,14E-04	1,16E-06	5,88E-10	6,43E-12	7,05E-14	-	-
300	1,25E-04	1,26E-06	6,34E-10	6,90E-12	8,04E-14	-	-
400	3,09E-05	3,14E-07	7,21E-10	7,78E-12	9,04E-14	-	-
500	3,44E-05	3,49E-07	7,98E-10	8,57E-12	9,70E-14	-	-

Tabela 12: Tabela z błędami w zależności od  $p$  oraz  $n$  dla kryterium stopu (2)

Zwiększenie odległości punktów od zer w wektorze, nie wpłynęło bardzo istotnie na otrzymane błędy, co można zauważyć porównując tabele 11 i 12 z tabelami 5 oraz 6. Wynika to z faktu, iż algorytm musi wykonać teraz większą liczbę iteracji, dzięki czemu obliczone błędy nie odbiegają zbytnio w porównaniu do wektora wypełnionego zerami.

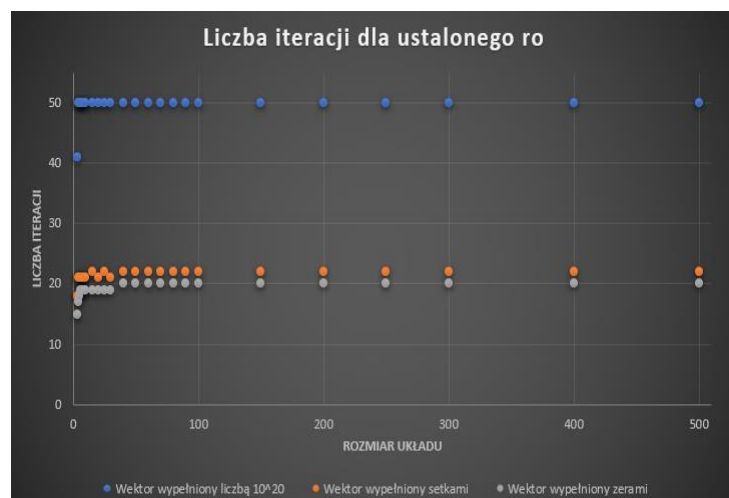
### 3.1.3 Porównanie wyników dla różnych wektorów początkowych

Dodatkowo z ciekawości postanowiłem sprawdzić wektor wypełniony dużo większymi wartościami i sprawdzić, ile iteracji będzie potrzebował do uzyskania wyników. W związku z tym wybrałem wektor wypełniony liczbą  $10^{20}$ .



Wykres 2: Wykres zależności czasu od rozmiaru układu dla ustalonego  $\rho = 10^{-12}$  dla kryterium (1)

Jak widzimy na wykresie 2, przy ustalonym  $\rho$ , im większymi liczbami wypełniony jest nasz wektor początkowy, tym więcej czasu potrzebujemy obliczenia, a wynika to oczywiście z większej liczby potrzebnych iteracji. Jak widzimy, jednak nawet tak znaczne zwiększenie wartości w wektorze nie wpływa bardzo na uzyskane czasy. Są one większe, nie aż tak bardzo jakbyśmy mogli przewidywać. Warto też zwrócić uwagę na to, że wektor wypełniony setkami ma lepszy czas niż ten wypełniony zerami. Wynika to z szybkości obliczeń komputera, ale wszystko zależy od uruchomienia, gdyż innym razem uzyskałem czasy o wiele słabsze np. dla  $n=500$  i dla  $\rho = 10^{-10}$  otrzymałem  $1,16E-02$ , czyli czas bardzo bliski temu uzyskanemu dla wektora zer.



Na wykresie 3 widać liczbę iteracji dla ustalonego  $\rho$ . Zwiększenie wartości w wektorze początkowym zwiększa nam liczbę iteracji. Gdy weźmiemy bardzo duże wartości, to liczba iteracji wzrośnie ponad dwukrotnie.

Wykres 3: Wykres zależności liczby iteracji od rozmiaru układu dla ustalonego  $\rho = 10^{-10}$  dla kryterium (2)

## 4. Zadanie 2

Dowolną metodą znajdź promień spektralny macierzy iteracji (dla różnych rozmiarów układu – takich, dla których znajdowane były rozwiązania układu). Sprawdź, czy spełnione są założenia o zbieżności metody dla zadanego układu. Opisz metodę znajdowania promienia spektralnego. Dla przypomnienia poniżej ponownie pokazuje zadany układ.

**Układ:**

$$k = 7$$

$$m = 0.5$$

$$\begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{i,j} = \frac{m}{n-i-j+0.5} \quad \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

gdzie  $i, j = 1, \dots, n$

### 4.1 Sposób znajdowania promienia spektralnego

#### Wyznaczanie macierzy iteracji

Musimy rozwiązać układ:

$$Ax = b$$

gdzie:

- $A$  jest macierzą o wymiarach  $n \times n$ ,
- $x$  jest wektorem  $n$  niewiadomych,
- $b$  jest wektorem danych.

(5)

Zapisujemy macierz  $A$  w postaci sumy macierzy:

$$A = B + R$$

gdzie:

- $B$  jest macierzą, dla której łatwo można wyznaczyć macierz odwrotną  $B^{-1}$
- $R$  jest pozostałą częścią macierzy  $A$  ( $R = A - B$ ),

(6)

Po połączeniu wzorów (5) oraz (6) i odpowiednich przekształceniach, otrzymujemy:

$$B \cdot x = -(A - B) \cdot x + b$$

(7)

Równanie (7) zapisujemy iteracyjnie i przekształcamy:

$$x^{(i+1)} = I - B^{-1} \cdot A \cdot x^{(i)} + B^{-1} \cdot b$$

(8)



Macierz  $I - B^{-1} \cdot A$  oznaczamy jako  $M$  i jest to nasza macierz iteracji:

$$M = I - B^{-1} \cdot A \quad (9)$$

### Obliczanie promienia spektralnego

Promień spektralny macierzy to wartość własna macierzy, która ma największą wartość bezwzględną. Wartości własne macierzy  $A$  to pierwiastki wielomianu charakterystycznego, czyli:

$$\omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

gdzie:

- $\lambda$  jest wartością własną macierzy  $A$ ,
- $I$  jest macierzą jednostkową.

(11)

Warunek potrzebny do sprawdzenia zbieżności układu to:

$$\rho(M) < 1 \quad (12)$$

Zatem musimy sprawdzić czy promień spektralny macierz jest mniejszy od 1, a to pozwoli nam rozstrzygnąć, czy metoda jest zbieżna.

### 4.2 Otrzymane wyniki

n	Promień spektralny	Czy spełniony warunek?
3	0,160957017	TAK
4	0,232952108	TAK
5	0,233582546	TAK
6	0,234657872	TAK
7	0,235258337	TAK
8	0,235547272	TAK
9	0,236037873	TAK
10	0,236096939	TAK
15	0,236991491	TAK
20	0,237219201	TAK
25	0,237511677	TAK
30	0,237590915	TAK
40	0,237773554	TAK
50	0,237881518	TAK
60	0,237952655	TAK
70	0,238003004	TAK
80	0,238040494	TAK
90	0,238069484	TAK
100	0,238092569	TAK
150	0,23816125	TAK
200	0,238195288	TAK
250	0,238215632	TAK
300	0,238229168	TAK
400	0,238246071	TAK
500	0,238256208	TAK

Tabela 13: Tabela z wartościami promienia spektralnego oraz sprawdzeniem czy warunek jest spełniony

Jak widzimy w tabeli 13, dla zadanego w zadaniu 1 układu promień spektralny spełnia warunek zbieżności. Warto zauważyć, że wartość promienia spektralnego nie zależy od rozmiary układu, gdyż różnice między kolejnymi przypadkami są minimalne. Oznacza to także, że brak wyników w poprzednim zadaniu dla bardzo małego  $\rho$  wynikał z błędów zaokrągleń, gdyż jak widzimy warunek zbieżności jest spełniony.

## 5. Wnioski

Zmniejszenie  $\rho$  powoduje wzrost dokładności obliczeń, kosztem liczby iteracji oraz potrzebnego czasu. Analogicznie, zwiększenie wymiaru układu powoduje wzrost liczby iteracji oraz potrzebnego czasu.

Kryterium (2) daje nam dokładniejsze wyniki niż kryterium stopu (1), jednak potrzebuje do tego więcej iteracji oraz nieznacznie więcej czasu.

Jeśli wybierzemy zbyt małą wartość  $\rho$  najprawdopodobniej potrzeba będzie bardzo dużej liczby iteracji, aby uzyskać wynik. Tak jak w naszym przypadku dla  $\rho = 10^{-14}$  pojawiają się z tym problemy, gdzie liczba potrzebnych do obliczeń iteracji przekracza maksymalną ustaloną ich liczbę.

Dla każdej z wartości  $n$  warunek zbieżności został spełniony. Dodatkowo możemy zauważyć, że wartości są bardzo zbliżone, a różnice pojawiają się dopiero kilka miejsc po przecinku. W większości z tych przypadków wartość wynosi około 0,238.

Wybór wektora początkowego ma duże znaczenie dla liczby iteracji i potrzebnego czasu. Jeśli jest to wektor z wartościami znacznie oddalonymi od zera, to liczba potrzebnych iteracji wzrasta, tak samo jak czas potrzebny algorytmowi. Zmianie nie ulegają błędy, gdyż ze względu na dużą liczbę iteracji są one zbliżone do tych uzyskanych dla wektora zer.

## 6. Źródła

Wykłady doktor Katarzyny Rycerz z przedmiotu „Metody obliczeniowe w Nauce i Technice”

Wikipedia na temat metody Jacobiego oraz promienia spektralnego