常微分方程

Xinyi

2023 年 12 月 14 日

1 奇解与包络

情形 1.1. 不存在奇解
$f_y(x,y)$ 存在且有界，也就是解的存在唯一性定理在定义区间上全部满足

情形 1.2. 包络线及奇解的求法
是包络线一定是奇解

情形 1.3. C-判别

$$\begin{cases} \Phi(x,y,c)=0 \\ \Phi c'(x,y,c)=0 \end{cases}$$

情形 1.4. p-判别

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ Fp'(x,y,p)=0 \end{cases}$$

2 平面定性理论

只学平面系统，易于对特征根情况分类

3 课后题背诵

例子 3.1. 在条形区域 $a \leqslant x \leqslant b, |y| < +\infty$ 上, 假设方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的所有解都唯一, 对其中任意两个解 $y_1(x), y_2(x)$, 如果有 $y_1(x_0) < y_2(x_0)$, 则必有 $y_1(x) < y_2(x), x_0 \leqslant x \leqslant b$.

证明. 反证法：假设存在 $x\prime$, 使得 $y_1(x') \geq y_2(x')$。
若第一种情况 $y_1(x') = y_2(x') = y'$，
而根据解的存在唯一性，知过点 (x', y') 的解应为唯一解，矛盾。
若第二种情况 $y_1(x') > y_2(x')$，
而根据连续性，可知 $y_1(x') = y_2(x')$ 矛盾。故假设不成立，证毕。 □

例子 3.2. *.3 1. 试证明: 对任意的 x_0 及满足条件 $0 < y_0 < 1$ 的 y_0, 方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$ 的满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的解 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在.*

证明. 首先找特解：y=0,y=1 是方程在 $(-\infty, +\infty)$ 上的特解。

定义 3.1. 特解不依赖于任何常数

易知方程的右端函数满足解的延展定理和存在唯一性定理条件

问题 3.1. 延展定理和存在唯一性定理的条件究竟一样不一样

现在考虑过初值 x_0, y_0 的解，根据唯一性，该解不能穿过直线 y=0 和 y=1。因此只能向左右两侧延展，从而初值解在 $-\infty, +\infty$ 上存在。 □

例子 3.3. 设

定义 3.2. 这是一个定义的例子。

定理 3.1. 这是一个定理的例子。

4 证明

提供一些证明的例子。

证明. 这是一个证明的例子。 □

5 例子

展示一些数学例子。

例子 5.1. 这是一个例子。

6 一边学 latex 一边学常微分

tip 6.1. 自定义环境
newenvironment 定义 *name* 显示 *name[num]beforeafter*

tip 6.2. 如果你想在文本中显示一个反斜杠，可以使用两个反斜杠

同时，两个反斜杠也有换行作用