点积分

王刘彭

2017.04.27

目录

1 函数的积分表达

考虑任一点 $\mathbf{x}$ 的函数 $u(\mathbf{x})$, 它的积分表达式可以写成

$$u(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}' \tag{1}$$

式中, $\delta(\mathbf{x})$ 是狄拉克 δ 函数. 根据 $\delta(\mathbf{x})$ 的性质可知 $u(\mathbf{x})$ 的积分表达是精确成立的, 但在数值计算中使用这个积分表达式是很困难的.

1977 年 Gingold 和 Moraghan [1] 在 SPH 法中提出一种有限积分表达式来近似 $u(\mathbf{x})$:

$$u_h(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}')W(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}' \tag{2}$$

其中 $u_h(\mathbf{x})$ 是 $u(\mathbf{x})$ 的近似, 其中 $W(\mathbf{x}'-\mathbf{x})$ 称为权函数 (核函数或光滑函数).

W 满足如下性质:

1. 半正定性, 即
$$W(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x}' \in \Omega$$
2. 紧支性, 即
$$W(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}' \notin \Omega$$
3. 归一性, 即
$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}' = 1$$

2 点积分

Yoo 等人 [2] 提出了一种基于 Voronoi 图的点积分.

记 V_L 为节点 $\mathbf{x}_L$ 的 Voronoi 单元, $\mathbf{x}_L$ 所在区域

$$\Omega_L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in \Omega \cup V_L\}$$

定义 $W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_L)$ 是一个阶梯函数, 具体如下:

$$W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_L) = \begin{cases} A_L^{-1} & x \in \Omega_L \\ 0 & x \notin \Omega_L \end{cases} \tag{3}$$

其中 A_L 是 Ω_L 的 Lebesgue 测度 (长度、面积或体积).

记 $\tilde{\nabla}\phi_I(x_L)$ 为 $\nabla\phi_I(x_L)$ 的近似, 由(2)可知

$$\tilde{\nabla}\phi_I(\mathbf{x}_L) = \int_{\Omega} W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_L)\nabla\phi_I(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

所以

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}\phi_I(\mathbf{x}_L) &= \frac{1}{A_L}\int_{\Omega_L}\nabla\phi_I(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{A_L}\int_{\partial\Omega_L}\phi_I(\mathbf{x})\mathbf{n}\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中 $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向量.
对于 Ω 的划分 $\Omega_h = \sum\limits_L \Omega_L$, 刚度矩阵 $\mathbf{M}$ 的元素 M_{IJ}

$$
\begin{aligned}
M_{IJ} &= \int_{\Omega_h}\nabla\phi_I(\mathbf{x})\nabla\phi_J(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \sum_L\int_{\Omega_L}\nabla\phi_I(\mathbf{x})\nabla\phi_J(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \sum_L A_L\int_{\Omega_L}A_L^{-1}\nabla\phi_I(\mathbf{x})\nabla\phi_J(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \sum_L A_L\int_{\Omega_L}W(\mathbf{x}-\mathbf{x}_L)\nabla\phi_I(\mathbf{x})\nabla\phi_J(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \sum_L A_L\tilde{\nabla}\phi_I(\mathbf{x})\tilde{\nabla}\phi_J(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \sum_L A_L^{-1}\int_{\partial\Omega_L}\phi_I\mathbf{n}\mathrm{d}s\int_{\partial\Omega_L}\phi_J\mathbf{n}\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{5}
$$

参考文献

[1] Robert A Gingold and Joseph J Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 181(3):375–389, 1977.

[2] J.W. Yoo, B. Moran, and J.S. Chen. Stabilized conforming nodal integration in the natural-element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(5):861–890, 2004.