Darcy-forchheimer Equation 的块中心差分方法

李奥

October 9, 2018

目录

1 二维问题

1.1 符号

符号说明	
符号	意义
Ω	$(0,1)\times(0,1)$(二维区域)
p	压强 (压力)
$\mathbf{u}$	流体速度
μ	黏性系数
K	渗透张量
k	正数且 K = kI(I 是单位矩阵)
β	非线性项系数
ρ	流体密度
$f(\mathbf{x})$	$f(\mathbf{x})\in L^2(\Omega)$, a scalar function
nx	x 方向剖分的段数
ny	y 方向剖分的段数
h_x	x 方向剖分的步长
h_y	y 方向剖分的步长
NC	单元个数
NE	边的个数

1.2 模型

$$\begin{cases} (\dfrac{\mu}{k}+\beta\rho|\mathbf{u}|)\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f} & in\ \ \Omega=(0,1)\times(0,1) \\ \nabla\cdot\mathbf{u}=g & in\ \ \Omega \\ \mathbf{u}=0 & on\ \ \partial\Omega \end{cases}$$

且有

$$\int_\Omega g dxdy=0$$

记 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, 那么有

$$\begin{cases} (\dfrac{\mu}{k}+\beta\rho|\mathbf{u}|)u+\nabla_x p=f_x & (i) \\ (\dfrac{\mu}{k}+\beta\rho|\mathbf{u}|)v+\nabla_y p=f_y & (ii) \\ \partial_x u+\partial_y v=g & (iii) \end{cases}$$

利用一阶向前差分把方程变成差分方程,现在从 $edge$ 和 $cell$ 的角度考虑模型。

对于 (i), 从内部纵向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到内部纵向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$. 左右两边的 $cell$ 所对应的 p 分别记为 p_l、p_r.u 为 $edge$ 的中点,记为 u_m。按照 $mesh$ 里的编号规则排序。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$(\mu/k + \beta * \rho * |\mathbf{u}|)_m \cdot u_m + \frac{p_r - p_l}{h_x} = f_x \tag{1}$$

对于 (ii), 从内部横向 $edge$ 的角度考虑: 我们需要找到内部横向 $edge$ 所对应的左手边的 $cell$ 和右手边的 $cell$. $cell$ 所对应的 p 与 (1) 中的相同。v 为 $edge$ 的中点,记为 v_m。

则每条内部边上所对应的差分方程为:

$$(\mu/k + \beta * \rho * |\mathbf{u}|)_m \cdot v_m + \frac{p_l - p_r}{h_y} = f_y \tag{2}$$

对于 (iii), 从 $cell$ 的角度考虑: 由于单元是四边形单元, 我们记单元所对应边的局部编号为 [0,1,2,3] (StructureQuadMesh.py 里的网格),第 i 个单元所对应的边记为 $e_{i,0}, e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}$。

则 (iii) 式第 i 个单元所对应的差分方程为:

$$\frac{u_{e_{i,1}} - u_{e_{i,3}}}{h_x} + \frac{v_{e_{i,2}} - v_{e_{i,0}}}{h_y} = g_i \tag{3}$$

现在我们先求解 p, 再求解 $\mathbf{u}$.

对于 (1) 我们有

$$u_m = \frac{f_x - \frac{p_r - p_l}{h_x}}{(\mu/k + \beta * \rho * |\mathbf{u}|)_m}$$

对于 (2) 我们有

$$v_m = \frac{f_y - \frac{p_l - p_r}{h_y}}{(\mu/k + \beta * \rho * |\mathbf{u}|)_m}$$

因此有

$$\frac{\frac{f_x - \frac{p_r - p_l}{h_x}}{(\mu/k+\beta*\rho*|\mathbf{u}|)_{e_{i,1}}} - \frac{f_x - \frac{p_r - p_l}{h_x}}{(\mu/k+\beta*\rho*|\mathbf{u}|)_{e_{i,3}}}}{h_x} + \frac{\frac{f_y - \frac{p_l - p_r}{h_y}}{(\mu/k+\beta*\rho*|\mathbf{u}|)_{e_{i,2}}} - \frac{f_y - \frac{p_l - p_r}{h_y}}{(\mu/k+\beta*\rho*|\mathbf{u}|)_{e_{i,0}}}}{h_y} = g_i$$

其中 $e_{i,0}, e_{i,1}$ 的 p_l 与 $e_{i,2}, e_{i,3}$ 的 p_r 是相同的,我们记 $(p_l)_{e_{i,1}}$,$(p_r)_{e_{i,3}}$,$(p_r)_{e_{i,2}}$,$(p_l)_{e_{i,0}}$ 为 p_i,$(\mu/k + \beta * \rho * |\mathbf{u}|)_{e_{i,1}}$ 为 $C_{e_{i,1}}$, 其余的类似。且有: 若 e 为边界边时,则这条边对应的式子等于 0.

则上式变为

$$\frac{\frac{f_x-\frac{p_r-p_i}{h_x}}{C_{e_{i,1}}}-\frac{f_x-\frac{p_i-p_l}{h_x}}{C_{e_{i,3}}}}{h_x}+\frac{\frac{f_y-\frac{p_l-p_i}{h_y}}{C_{e_{i,2}}}-\frac{f_y-\frac{p_i-p_r}{h_y}}{C_{e_{i,0}}}}{h_y}=g_i$$

整理后得:

$$(\frac{1}{h_y^2C_{e_{i,0}}}+\frac{1}{h_x^2C_{e_{i,1}}}+\frac{1}{h_y^2C_{e_{i,2}}}+\frac{1}{h_x^2C_{e_{i,3}}})p_i=g_i-\frac{h_xf_x-p_r}{h_x^2C_{e_{i,1}}}+\frac{h_xf_x+p_l}{h_x^2C_{e_{i,3}}}-\frac{h_yf_y-p_l}{h_y^2C_{e_{i,2}}}+\frac{h_yf_y+p_r}{h_y^2C_{e_{i,0}}}$$

再求解 $\mathbf{u}$:

$$u_m=(f_x-\frac{p_r-p_l}{h_x})/C_m$$
$$v_m=(f_y-\frac{p_l-p_r}{h_y})/C_m$$

参考文献