Билет 29

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 29: Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения.

Теорема 0.1.

Пусть $\langle X, \rho_X\rangle$, $\langle Y, \rho_Y\rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывна, $K \subset X$ - компакт.

Тогда $f(K)$ компакт.

Доказательство.

Возьмём открытое покрытие $f(K)$, назовём его U_α.

Тогда $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ - открытое покрытие K.

Выберем конечное V_{α_k}.

Тогда $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{\alpha_k} \implies f(K) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} f(V_{\alpha_k}) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$. □

Теорема 0.2 (Вейерштрасса)**.**

Пусть $\langle X, \rho_X\rangle$, $\langle Y, \rho_Y\rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывна, $K \subset X$ - компакт.

Тогда $\exists u, v \in K \quad \forall x \in K \quad f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$.

Доказательство.

$f(K)$ - компакт $\implies$ замкнут и ограничен.

Ограничен $\implies$ $\inf f$ и $\sup f$ - конечные.

Предположим что $b := \sup f \notin f(K)$.

Тогда можем взять последовательность $x_n \in f(K)$, $x_n \to b$. Тогда b - предельная точка $f(K)$. $b \in f(K)' \subset \mathrm{Cl}\, f(K) = f(K)$. Противоречие. Значит $b \in f(K) \implies \exists v \in K \quad f(v) = b$. Аналогично для $\inf f$. □

Теорема 0.3.

Пусть $\langle X, \rho_X\rangle$, $\langle Y, \rho_Y\rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$, f непрерывная биекция, X - компакт.

Тогда f^{-1} непрерывна.

Доказательство.

Пусть $g := f^{-1}$.

Пусть $U \subset X$ - открытое множество.

Заметим, что $f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$ (так-как биекция).

$X \setminus U$ - замкнутое подмножество компакт $\implies$ компакт $\implies$ $f(X \setminus U)$ замкнуто $\implies$ $Y \setminus f(X \setminus U)$ - открыто.

$f(U) = g^{-1}(U)$, значит для g прообраз открытого открыт $\implies$ g непрерывно. □