Билет 41

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 41: Критерий Коши. Абсолютная сходимость. Группировка членов ряда. Свойства

Теорема 0.1 (Критерий Коши)**.**

X – полное нормированное пространство.

$$\sum a_n \text{ сходится } \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n > N \quad \left\| \sum_{k=n}^{m} a_k \right\| < \varepsilon$$

Доказательство.

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum a_n \text{ – сходится } \iff \exists \text{ конечный } \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$\iff (\text{полнота } X)\ S_n \text{ – фундаментальная последовательность}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \|S_m - S_n\| < \varepsilon$$

$$\|S_m - S_{n-1}\| = \left\| \sum_{k=n}^{m} a_k \right\|$$

□

***Определение* 0.1** (Абсолютная сходимость)**.**

$x_n \in X$ – нормированное пространство

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ – абсолютно сходится, если } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \text{ – сходится}$$

Теорема 0.2.

X – полное нормированное пространство

Если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – абсолютно сходится, то

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – сходится

   Доказательство.

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \text{ – сходится} \implies (\text{Критерий Коши для } \|x_n\|)\ \forall \varepsilon \quad \exists N \quad m, n \geqslant N \quad \sum_{k=n}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$$

   $$\varepsilon > \sum_{k=n}^{m} \|x_k\| \geqslant \left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\|$$

   $$\implies \forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n, m \geqslant N \quad \left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\| < \varepsilon$$

   $$\implies (\text{Критерий Коши для } x_n)\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ – сходится}$$

   !

   □

2. $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$

   Доказательство.

   $$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

   $$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \to \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \text{ и } \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \to \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$$

$$\implies \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$$

□

***Определение* 0.2** (Группировка членов ряда)**.**
$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + x_5) + x_6 + (x_7 + x_8) + \dots$

Замечание.

1. Если исходный ряд сходился, то ряд получившийся после группировки сходится к той же сумме.

2. В обратную сторону верно не всегда

   Пример. $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$

Теорема 0.3 (Когда верно в обратную сторону)**.**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

1. Если $\lim x_n = 0$ и количество слагаемых в каждой группе $\leqslant M$

   Доказательство.
   S_{n_k} – подпоследовательность чатичных сумм $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$

   (группировка – всего лишь выбор подпоследовательности частичных сумм)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n_k}) + (x_{n_k+1} + \dots + x_{n_k+r} + \dots$$

$$\|S_{n_k+r} - S\| = \|S_{n_k} - S + x_{n_k+1} + \dots + x_{n_k+r}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \dots + \|x_{n_k+r}\|$$

   Выберем K, т.ч. если $k \geqslant K$, то $\|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$

   Выберем N, т.ч. если $n \geqslant N$, то $\|x_n\| < \varepsilon$

   Если выполняется и то, и то, тогда:

   $\|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \dots + \|x_{n_k+r}\| < \varepsilon(M + 1)$

   Значит $\forall\varepsilon > 0$ мы можем выбрать N_1, т.ч. $\forall n \geqslant N_1 \quad \|S_n - S\| < \varepsilon$ □

2. Для числовых рядов. Если все члены ряда в группе одного знака.

   Доказательство.
   $S_{n_k} \to S$

   $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k \geqslant K \quad |S_{n_k} - S| < \varepsilon$

   $N := n_K$

   если $n \geqslant N$:

для некоторого k: $n_k \leqslant n < n_{k+1}$

$S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + ... + x_n$

если в группе все члены $\geqslant 0$, то $S_n \geqslant S_{n_k}$

$S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1} - ... - x_{n+1}$

$S_{n_{k+1}} \geqslant S_n$

Тогда $|S_n - S| < \varepsilon$

Если в группе отрицательные члены

$S_{n_k} \geqslant S_n \geqslant S_{n_{k+1}}$

Тогда в этом случае тот же вывод

$|S_n - S| < \varepsilon$

$\square$