Билет 54

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 54: Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.

***Определение* 0.1.**
Пусть $f_n, f\colon E \to \mathbb{R}$ (тут можно и $\mathbb{C}$).

1. Последовательность f_n поточечно сходится к f на множестве E, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in E$.

2. Последовательность f_n равномерно сходится к f на множестве E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Обозначение для равномерной сходимости: $f_n \rightrightarrows f$ (и как-то указывать на каком множестве эта равномерная сходимость: или словами после, или под стрлочками)

Замечание.
Запишем оба определения с помощью кванторов:

1. $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

Получается, что в первом случае N зависит **и** от x, **и** от ε, а во втором - **только** от ε.

Замечание.
Из равномерной сходимости следует поточечная к той же функции. Действительно, если есть универсальный номер, зависящий только от ε, то он подходит и для конкретного x.

Пример.
Пусть $E = (0; 1) \quad f_n(x) = x^n \quad f(x) = 0$, тогда

f_n поточечно сходится к f (какое-то число из $(0, 1)$ в n-ной степени стремится к нулю), однако равномернорной сходимости нет. Условие не выполняется даже для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, поскольку $|x^n - 0| < \frac{1}{2}$ не может выполняться при все $x \in (0; 1)$ ни для какого n, поскольку x мы можем сколь угодно близко подвинуть к 1, и x^n будет сколь угодно близко к 1, в частности больше $\frac{1}{2}$. Мораль: из поточечной сходимости равномерная **не** следует.

Теорема 0.1 (Критерий равномерной сходимости)**.**
Пусть $f_n, f\colon E \to \mathbb{R}$. Тогда

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Доказательство.

"$\Leftarrow$" Запишем правый предел по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

А для супремума верно следующее: $\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, поэтому:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ничего не напоминает? Мне вот определение равномерной сходимости напоминает.

"$\Rightarrow$" Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Синее означает то, что ε является верхней границей для всех $|f_n(x) - f(x)|$, а значит, sup таких разностей будет меньше или равен ε, отсюда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geqslant N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

А это означает то, что sup стремится к нулю при $n \to \infty$ (по определению). $\square$

Следствие.

1. Если $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ при любых $x \in E$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то $f_n \rightrightarrows 0$ на E.

   Доказательство.
   Если разность меньше a_n во всех точках, то $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n \to 0$ при $n \to \infty$ $\square$

2. Если $\exists x_n \in E$ такие, что $f_n(x) - f(x)$ не стремится к нулю, то равномерной сходимости нет.

   Доказательство.
   Это означает, что $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \geqslant |f_n(x) - f(x)| \neq 0$ при $n \to \infty$, а значит, нет стремления к нулю у супремума, критерий равномерной сходимости не выполняется, равномерной сходимости нет. $\square$

Пример.
Пусть $E = (0;1) \quad f_n(x) = x^n \quad f(x) = 0$, возьмем $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, но мы знаем это:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0$$

Раз предел не 0, то равномерной сходимости нет. (Предел может быть только нулем, потому что поточечный предел 0 (иначе пределов было бы несколько, так как равномерная сходимость влекла бы предел к другой функции)). Пример закончился, его явно в билете нет, но пусть будет.