Билет 14

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.

***Определение* 0.1** (повтор)**.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутреней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\mathrm{Int}\, A$.

Свойства.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\mathrm{Int}\, A \subset A$, A = Int A
2. $\mathrm{Int}\, A$ - объеденение всех открытых множеств содержащихся в A.

   Доказательство.
   Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое.

   $G \subset \mathrm{Int}\, A$:

   $$\begin{aligned} x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\ &\implies x \in \mathrm{Int}\, A \end{aligned}$$

   $\mathrm{Int}\, A \subset G$: $x \in \mathrm{Int}\, A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. Int A, , G, G ☐

3. $\mathrm{Int}\, A$ - откртое множество

   Доказательство.
   A - объединение открытых множеств, значит открыто. ☐

4. $\mathrm{Int}\, A = A \iff A$ - открыто

   Доказательство.
   Необходимость ($\implies$): $\mathrm{Int}\, A$ открыто. Int A , A = Int A => A - :)

   Достаточность ($\impliedby$): A открыто $\implies$ все точки внутренние $\implies A = \mathrm{Int}\, A$. ☐
   A - , - , A, A = Int A

5. $A \subset B \implies \mathrm{Int}\, A \subset \mathrm{Int}\, B$, A, B,
6. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}\, A \cap \mathrm{Int}\, B$

   Доказательство.
   В сторону $\subset$:

   $$\left.\begin{aligned} A \cap B \subset A &\implies \mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}\, A \\ A \cap B \subset B &\implies \mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}\, B \end{aligned}\right\} \implies \mathrm{Int}(A \cap B) \subset \mathrm{Int}\, A \cap \mathrm{Int}\, B$$

   В сторону $\supset$: B_min(r1,r2) \in A, \in B, \in A ar

   $$x \in \mathrm{Int}\, A \cap \mathrm{Int}\, B \implies \left\{\begin{aligned} x \in \mathrm{Int}\, A &\implies \exists r_1 : B_{r_1}(x) \subset A \\ x \in \mathrm{Int}\, B &\implies \exists r_2 : B_{r_2}(x) \subset B \end{aligned}\right\} \implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies$$
   $$\implies x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$$

   ☐

7. $\operatorname{Int}\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$

   Доказательство.
   Заметим, что $\operatorname{Int} A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. $\square$