

Билет 44

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 44: ! Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.	1
-----	--	---

0.1. Билет 44: ! Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

Теорема 0.1 (признак Даламбера).

$$a_n > 0$$

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд расходится.
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d < 1$, то ряд сходится.
3. Пусть $d^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
 Если $d^* < 1$, то ряд сходится.
 Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_n \leq a_{n+1}$
 \implies начиная с некоторого места члены ряда возрастают, $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots$
 $\implies a_n \not\rightarrow 0 \implies$ ряд расходится
2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq d \implies a_{n+1} \leq d \cdot a_n$ начиная с некоторого места.
 $\implies a_{n+k} \leq d^k \cdot a_n$ при всех k
 \implies при всех $k \geq n$ $a_k \leq d^{k-n} \cdot a_n = d^k \cdot \frac{a_n}{d^n} = d^k \cdot \text{const}$
 $\implies a_k = \mathcal{O}(d^k)$
 $\sum_{n=1}^{\infty} d^k$ – это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} d^k$ сходится, тогда по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.
3. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* < 1$
 $d := \frac{d^*+1}{2} < 1$
 \implies начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d < 1 \implies$ попали в первый пункт, сходится
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* > 1$
 \implies с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$
 \implies ряд расходится.

□

Замечание.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ при } x > 0$$

По Даламберу.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$$

\Rightarrow ряд сходится

По Коши.

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \rightarrow 0$$

\Rightarrow ряд сходится

Теорема 0.2 (Связь между признаками Коши и Даламбера).

$$a_n > 0$$

Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: d$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ и он равен d

Доказательство.

Будем рассматривать не сами выражения, а их логарифмы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln d$$

Хотим доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \ln d$

Применяем Штольца!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln d$$

□