Билет 89

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 89: Теорема об обратной функции. 1

0.1. Билет 89: Теорема об обратной функции.

Теорема 0.1 (Теорема об обратной функции).

$f : D \to R^n, D \subset R^n$ открытое, $x_0 \in D, f$ непрерывно диффер
$= f(x_0)$, матрица $A := f'(x_0)$ обратима. Тогда существуют окр
$(\cdot) y_0$, т.ч. $f : U \to V -$ обратима и $f^{-1} : V \to U -$ непрерывна.

F, R n R n, p, F p

Доказательство.

$$G_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x))$$

Выберем $B_r(x_0)$, т.ч. $||A^{-1}||\ ||A - f'(x)|| \leqslant \frac{1}{2}$ при $x \in B_r(x_0)$

Тогда $f'(x)$ при $x \in B_r(x_0)$ - обратимое отображение

$$||G'_y(x)|| = ||E + A^{-1}(-f'(x))|| = ||E - A^{-1}f'(x)|| = ||A^{-1}(A - f'(x))|| \leqslant$$
$$\leqslant ||A^{-1}||\ ||A - f'(x)|| \leqslant \frac{1}{2} \text{ при } x \in B_r(x_0)$$

$$||G_y(x) - G_y(\tilde{x})|| \leqslant \frac{1}{2}||x - \tilde{x}|| \text{ при } x, \tilde{x} \in B_r(x_0) \implies G_y - \text{сжатие}$$

подберем $B_R(y_0)$ так, чтобы $G_y(B_r(x_0)) \subset B_r(x_0)$

$$||G_y(x) - x_0|| \leqslant ||G_y(x_0) - x_0|| + ||G_y(x_0) - G_y(x)|| = ||A^{-1}(y - f(x_0))|| + ||G_y(x_0) - G_y(x)|| \leqslant$$
$$\leqslant ||A^{-1}||||y - y_0|| + \frac{1}{2}||x - x_0|| < ||A^{-1}|| \cdot R + \frac{r}{2} < r$$

R <= r/2 / ||A^-1||

по т. Банаха у G_y есть неподвижная точка т.е.

$$x \in B_r(x_0), \text{ т.ч.} x = G_y(x) = x + A^{-1}(y - f(x)) \implies A^{-1}(y - f(x)) = 0 \implies y = f(x)$$

$$\implies \text{ если } y \in B_R(y_0), \text{ то найдется } x \in B_r(x_0) \text{ т.ч. } y = f(x)$$

y G_y x , f(x) = y

$U := f^{-1}(V), V := B_R(y_0), f : U \to V$ биекция, осталось доказать непрерывность f^{-1}

$$f(x) = y, f(\tilde{x}) = \tilde{y}, G_y(x) = x, G_{\tilde{y}}(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

: 2 . p(x,y) <= p(f(x), g(x))/ (1-lambda)

$$||f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y})|| = ||x - \tilde{x}|| \leqslant 2||G_y(x) - G_{\tilde{y}}(x)|| =$$

$$= 2||x - A^{-1}(y - f(x)) - (x - A^{-1}(\tilde{y} - f(x)))|| = 2||A^{-1}(\tilde{y} - f(x) - (y - f(x)))|| =$$

$$= 2||A^{-1}(\tilde{y} - y)|| \leqslant 2||A^{-1}||\ ||\tilde{y} - y||$$

f^(-1)

Отсюда видно, что если $\tilde{y}$ близко к y, то $f^{-1}(\tilde{y})$ близко к $f^{-1}(y)$, и значит у нас есть непрерывность

□