Билет 15

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

***Определение* 0.1.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется замкнутым, если $X \setminus A$ - открыто.

Свойства.

1. $\varnothing, X$ - замкнуты.

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

□

   Так как $\forall \alpha \quad X \setminus A_\alpha$ - открытое, то $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ - открытое, значит $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ - замкнутое.

3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство.

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$$

□

   $X \setminus A_k$ открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ - замкнуто.

4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.

   Доказательство.
   Покажем что $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) > r\}$ - открыто.

   Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. $\tilde{r} = \rho(x, a) - r$. Тогда докажем что $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing$:

   Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$, тогда $\rho(x, y) < \tilde{r}$, $\rho(y, a) < r$.

$$\rho(x, a) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a).$$

   Получили противоречие, значит $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, значит $X \setminus \overline{B}_r(a)$ - открытое. □

***Определение* 0.2.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Замыкание множества $A \subset X$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Обозначается $\operatorname{Cl} A$ или $\overline{A}$.

Теорема 0.1.

$$\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

Доказательство.

Будем доказывать в виде $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$:

Знаем, что $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ по всем U_α таким, что $U_\alpha \subset (X \setminus A)$ и U_α открыто.

Пусть C - замкнутое множество, такое, что $A \subset C$. Тогда $X \setminus C$ - открытое, и $(X \setminus A) \subset (X \setminus C) \implies \exists \alpha \quad U_\alpha = X \setminus C$.

Аналогично в другую сторону - $\forall \alpha \quad X \setminus U_\alpha$ - замкнутое надмножество A.

Пусть $C_\alpha = X \setminus U_\alpha$.

$$X \setminus \operatorname{Cl} A = X \setminus \bigcap_\alpha C_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus C_\alpha) = \bigcup_\alpha U_\alpha = \operatorname{Int}(X \setminus A). \qquad \square$$