

Билет 43

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 43: ! Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.	1
---	---

0.1. Билет 43: ! Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.

Теорема 0.1 (признак Коши).

$$a_n \geq 0$$

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ начиная с некоторого места, то ряд расходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ начиная с некоторого места, то ряд сходится
3. $q' := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ <1, >1

Если $q' < 1$ сходится, то и ряд сходится.

Если $q' > 1$ расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.

Судя по формулировке билета, первые два пункта доказывать не нужно, но доказательство у них быстрое, так что пусть тоже будет.

1. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies a_n \geq 1 \implies a_n \not\rightarrow 0$, не выполняется необходимое условие. ‘

2. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies a_n \leq q^n$

Воспользуемся признаком сравнения с $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Значит, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

3. (a) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q' > 1 \implies$ найдется подпоследовательность a_{n_k} , такая что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = q' > 1$

\implies найдется такая окрестность, что при достаточно больших k все $a_{n_k} \in (1, \dots)$ (важно, что промежуток точно больше 1)

$$\implies a_{n_k} > 1$$

$$\implies a_n \not\rightarrow 0, \text{ ряд расходится}$$

- (b) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q' < 1$

$$\implies (\text{по определению верхнего предела}) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} = q' < 1$$

\implies можно выбрать окрестность $(\dots, \frac{q'+1}{2}) \subset (\dots, 1)$, такую что начиная с некоторого момента все $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k}$ попадают в эту окрестность, то есть $\sup_{k \geq n} \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$

$\implies \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$ при достаточно больших k , тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по доказанному в пункте 2.

□

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ при } x > 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \rightarrow 0$$

\implies ряд сходится

Замечание.

Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходится

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ — сходится

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n+1}} = 1$$