Билет 13

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.

***Определение* 0.1.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int} A$.

***Определение* 0.2.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

1. $\varnothing$, X - открытые множества.

2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

   Доказательство.
   Пусть $\forall \alpha \in I \quad A_\alpha$ - открытое множество. $A := \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Возьмём точку a, $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$.

   Так-как A_β открытое, $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$. $\square$

3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

   Доказательство.
   Пусть $I = [1; n]$, $\forall k \in I \quad a \in A_k$, A_k - открытое.

   Тогда $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$.

   Пусть $r = \min\limits_k r_k > 0$.

   Тогда $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. $\square$

4. $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$ - открытое множество.

   Доказательство.
   Пусть $x \in B_r(a)$, $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$.

   Покажем что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$:

$$\begin{aligned} y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y, x) < \tilde{r} \\ &\implies \rho(y, x) < r - \rho(x, a) \\ &\implies \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \\ &\overset{\triangle}{\implies} \rho(y, a) < r \\ &\implies y \in B_r(a) \end{aligned}$$

$\square$