Билеты по матану

Автор1, ..., АвторN

18 июня 2020 г.

Содержание

1. Интегральное исчисление

А разве можно всё упростить, всё обобщить? И вообще, разве по чужому желанию можно обобщать и упрощать?

Джером Дэвид Сэлинджер, "Над пропастью во ржи"

Привет, Путник! Я рад сопровождать тебя в начале твоего долгого и тяжёлого пути к (не) отчислению. Запасись терпениеим. А лучше корвалолом.

1.1. Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

***Определение* 1.1.**

Дробление отрезка $[a, b]$ – это набор точек τ, такой что

$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

Ранг (мелкость) дробления – $\max\limits_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = |\tau|$

Оснащение – набор точек, такой что

$\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

Пара (τ, ξ) – оснащённое дробление

***Определение* 1.2.**

Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \mapsto R$ и оснащённое дробление (τ, ξ)

$S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$

Какой короткий и классный билет :)

Ну, удачи...

1.2. Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.

Теорема 1.1.

$|S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|)$

(ω_f – модуль непрерывности)

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta &:= S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\, dt| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(t)|\, dt \qquad \text{по определению } \omega_f : |\xi_k - t| < |\tau| \Rightarrow |f(\xi_k) - f(t)| < |\omega_f(|\tau|)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_f(|\tau|)\, dt \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f(|\tau|)(x_{k+1}-x_k) \\
&\leqslant \omega_f(|\tau|)(b-a)
\end{aligned}$$

□

Следствие.

$f \in C([a,b])$, тогда

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = \int\limits_a^b f$

Доказательство.

$f \in C([a,b]) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \omega_f(x) = 0 \Rightarrow \lim \omega_f(|\tau_n|)(b-a) = 0$

□

***Определение* 1.3.**

Функция интегрируема по Риману, если:

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = I$

И для всех последовательностей I – одинаковый

I – интеграл Римана

1.3. Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$. Формула трапеций.

Пример.

$S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$

Ограничим $S_n(p)$ сверху: $S_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

Чтобы ограничить снизу, возьмем только вторую половину слагаемых. Заметим, что каждое слагаемое $\geq \frac{n}{2}$. Получаем: $S_n(p) > \frac{n}{2}(\frac{n}{2})^p = \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}}$

$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} < S_n(p) < n^{p+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(\frac{k}{n})^p = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$

$f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\; f(t) = t^p$

$\xi_k = \frac{k}{n}$

Мелкость дробления $\frac{1}{n} \to 0$.

$\implies \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} \to \int\limits_0^1 t^p\,dt = \frac{1}{p+1} \implies S_n(p) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Лемма.

$f \in C^2[a,b]$. Тогда:

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$

Доказательство.

$\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'\,dt = f(t)(t-\gamma)\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt =$

$= \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t - \frac{\alpha+\beta}{2})\,dt$

$((t-\alpha)(\beta-t))' = \alpha+\beta-2t = -2(t-\gamma)$

$\Delta = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(-\frac{1}{2})((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt =$

$= \frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\Big|_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$ □

Теорема 1.2 (оценка погрешности в ф-ле трапеций)**.**

$f \in C^2[a,b]$ и $\tau-$ дробление. Тогда:

$\left|\int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left|\int\limits_a^b f - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2}\right)\right| S \leqslant \frac{(b-a)^2}{8n^2}\int\limits_a^b |f''|$$

Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t-x_{k-1})(x_k-t)\,dt$$

$$|t-x_{k-1}|\,|x_k-t| \leqslant \frac{(x_k-x_{k-1})^2}{4} \leqslant \frac{|\tau|^2}{4}$$

$$|\Delta| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\,(t-x_{k-1})(x_k-t)\,dt \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\,\frac{|\tau|^2}{4}\,dt = \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$$

□

1.4. Билет 4: NAME

1.5. Билет 5: NAME

1.6. Билет 6: NAME

1.7. Билет 7: NAME

1.8. Билет 8: NAME

1.9. Билет 9: NAME

1.10. Билет 10: NAME

1.11. Билет 11: NAME

2. Метрические и нормированные пространства

2.1. Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

***Определение* 2.1.**

Метрическое пространства - пара $\langle X, \rho \rangle$, где X - множество, $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ - метрика, ρ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, и $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника, $\triangle$)

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}$: $\langle \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \rangle$.

Пример.

«Метрика лентяя» на произвольном множестве: $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

Пример.

Обычная метрика на $\mathbb{R}^2$ - длина отрезка: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Пример.

Множество - точки на поверхности сферы, метрика - кратчайшая дуга межту точками.

Пример.

Манхэттанская метрика на $\mathbb{R}^2$: $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Пример.

Французкая железнодорожная метрка: Есть центральный объект, от него есть несколько «лучей».

Если A и B на одном луче, то $\rho(A, B) = AB$

Если на разных: $\rho(A, B) = AP + PB$, где P - центральный объект.

Доказательство.

При условии что расстояния между объектами на одном луче являются метрикой, докажем что ФЖМ - метрика:

Если A и B находятся на одном луче, всё тривиально следует из того, что расстояние на луче - метрика.

Пусть A, B - на разных лучах $\implies A \neq B$, $A, B \neq P$.

$$\rho(A, B) = AP + PB > 0 \impliedby AP, PB > 0.$$
$$\rho(A, B) = AP + PB = PB + AP = BP + PA = \rho(B, A).$$

Пусть C лежит на одной ветке с A:

$$\rho(A,C)+\rho(C,B)=AC+(CP+PB)=(AC+CP)+PB\geqslant AP+PB=\rho(A,B).$$

Пусть C лежит на собственной ветке:

$$\rho(A,C)+\rho(C,B)=(AP+PC)+(CP+PB)\geqslant AP+PB=\rho(A,B).$$ □

***Определение* 2.2.**

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство.

Открытым шаром радиуса $r\in\mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a\in X$ называется $B_r(a)=\{x\in X\mid\rho(a,x)<r\}$.

Замкнутым шаром радиуса $r\in\mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a\in X$ называется $\overline{B}_r(a)=\{x\in X\mid\rho(a,x)\leqslant r\}$.

Свойства.

$B_{r_1}(a)\cap B_{r_2}(a)=B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$

Если $a\neq b$, то $\exists r>0\quad B_r(a)\cap B_r(b)=\varnothing$.

Доказательство.

Возьмём $r=\frac{\rho(a,b)}{2}$.

Пусть $x\in B_r(a)\cap B_r(b)$.

Тогда $\rho(a,x)<\frac{\rho(a,b)}{2}$ и $\rho(x,b)<\frac{\rho(a,b)}{2}$.

Но тогда $\rho(a,x)+\rho(x,b)<\rho(a,b)$, противоречие с $\triangle$. □

Аналогичная пара свойств есть и у $\overline{B}$.

2.2. Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.

***Определение* 2.3.**

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство, $A\subset X$.

Точка $a\in A$ называется внутренней если $\exists r>0\quad B_r(a)\subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int}A$.

***Определение* 2.4.**

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство, $A\subset X$.

A называется открытым, если все его точки внутренние.

Свойства.

Пусть $\langle X,\rho\rangle$ - метрическое пространство.

1. $\varnothing$, X - открытые множества.

2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

   Доказательство.

   Пусть $\forall\alpha\in I\quad A_\alpha$ - открытое множество. $A:=\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$. Возьмём точку a, $\exists\beta\in I\quad a\in A_\beta$.

   Так-как A_β открытое, $\exists r>0\quad B_r(a)\subset A_\beta\subset A$. □

3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

   Доказательство.
   Пусть $I = [1; n]$, $\forall k \in I \quad a \in A_k$, A_k - открытое.

   Тогда $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$.

   Пусть $r = \min\limits_k r_k > 0$.

   Тогда $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. □

4. $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$ - открытое множество.

   Доказательство.
   Пусть $x \in B_r(a)$, $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$.

   Покажем что $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$:

$$\begin{aligned} y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y, x) < \tilde{r} \\ &\implies \rho(y, x) < r - \rho(x, a) \\ &\implies \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \\ &\overset{\triangle}{\implies} \rho(y, a) < r \\ &\implies y \in B_r(a) \end{aligned}$$ □

2.3. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.

Определение* 2.5** (повтор).***
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int} A$.

Свойства.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\operatorname{Int} A \subset A$

2. $\operatorname{Int} A$ - объеденение всех открытых множеств содержащихся в A.

   Доказательство.
   Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое.

   $G \subset \operatorname{Int} A$:

$$\begin{aligned} x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\ &\implies x \in \operatorname{Int} A \end{aligned}$$

   $\operatorname{Int} A \subset G$: $x \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. □

3. $\operatorname{Int} A$ - откртое множество

   Доказательство.
   A - объединение открытых множеств, значит открыто. $\square$

4. $\operatorname{Int} A = A \iff A$ - открыто

   Доказательство.
   Необходимость ($\Longrightarrow$): $\operatorname{Int} A$ открыто.

   Достаточность ($\Longleftarrow$): A открыто $\implies$ все точки внутренние $\implies$ $A = \operatorname{Int} A$. $\square$

5. $A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$

6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

   Доказательство.
   В сторону $\subset$:

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \\ A \cap B \subset B \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B \end{array}\right\} \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$$

   В сторону $\supset$:

$$x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \implies \left\{\begin{array}{l} x \in \operatorname{Int} A \implies \exists r_1 : B_{r_1}(x) \subset A \\ x \in \operatorname{Int} B \implies \exists r_2 : B_{r_2}(x) \subset B \end{array}\right\} \implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies$$
$$\implies x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$$

$\square$

7. $\operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$

   Доказательство.
   Заметим, что $\operatorname{Int} A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. $\square$

2.4. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

***Определение* 2.6.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется замкнутым, если $X \setminus A$ - открыто.

Свойства.

1. $\varnothing, X$ - замкнуты.

2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

   Доказательство.

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

$\square$

Так как $\forall\alpha \quad X \setminus A_\alpha$ - открытое, то $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ - открытое, значит $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ - замкнутое.

3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

Доказательство.

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus A_k)$$

□

$X \setminus A_k$ открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ - замкнуто.

4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.

Доказательство.
Покажем что $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x,a) > r\}$ - открыто.

Пусть $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$. $\tilde{r} = \rho(x,a) - r$. Тогда докажем что $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing$:

Пусть $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$, тогда $\rho(x,y) < \tilde{r}$, $\rho(y,a) < r$.

$$\rho(x,a) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(x,y) + \rho(y,a) < \tilde{r} + r = \rho(x,a).$$

Получили противоречие, значит $B_{\tilde{r}}(x) \cap B_r(a) = \varnothing \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$, значит $X \setminus \overline{B}_r(a)$ - открытое. □

***Определение* 2.7.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Замыкание множества $A \subset X$ - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Обозначается $\operatorname{Cl} A$ или $\overline{A}$.

Теорема 2.1.

$$\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

Доказательство.
Будем доказывать в виде $X \setminus \operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$:

Знаем, что $\operatorname{Int}(X \setminus A) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ по всем U_α таким, что $U_\alpha \subset (X \setminus A)$ и U_α открыто.

Пусть C - замкнутое множество, такое, что $A \subset C$. Тогда $X \setminus C$ - открытое, и $(X \setminus A) \subset (X \setminus C) \implies \exists\alpha \quad U_\alpha = X \setminus C$.

Аналогично в другую сторону - $\forall\alpha \quad X \setminus U_\alpha$ - замкнутое надмножество A.

Пусть $C_\alpha = X \setminus U_\alpha$.

$$X \setminus \operatorname{Cl} A = X \setminus \bigcap_\alpha C_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus C_\alpha) = \bigcup_\alpha U_\alpha = \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

□

2.5. Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

Свойства.

1. $A \subset \operatorname{Cl} A$
2. $\operatorname{Cl} A$ - замкнутое множество

   Доказательство.
   По определению, $\operatorname{Cl} A$ - пересечение замкнутых множетв. □

3. $\operatorname{Cl} A = A \iff A$ замкнуто

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A = \operatorname{Cl} A &\iff X \setminus A = X \setminus \operatorname{Cl} A \\ &\iff X \setminus A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\iff X \setminus A \text{ открыто} \\ &\iff A \text{ замкнуто} \end{aligned}$$ □

4. $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies (X \setminus B) \subset (X \setminus A) \\ &\implies \operatorname{Int}(X \setminus B) \subset \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\implies X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B) \\ &\implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$ □

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} \operatorname{Cl}(A \cup B) &= X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus (A \cup B) \\ &= X \setminus \operatorname{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= X \setminus (\operatorname{Int}(X \setminus A) \cap \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)) \cup (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$ □

6. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$

   Доказательство.
   $\operatorname{Cl} A$ замкнуто по свойству 2, равенство следует из свойства 3. □

Теорема 2.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in \operatorname{Cl} A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \varnothing.$$

Доказательство.

Необходимость ($\implies$):

Предположим что $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \varnothing$.

Тогда $a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A$, значит $a \in \operatorname{Int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \implies a \notin \operatorname{Cl} A$.

Достаточность ($\impliedby$):

Пусть $a \notin \operatorname{Cl} A$, тогда $\exists F$ - замкнутое надмножество A, такое, что $a \notin F \implies a \in X \setminus F$. При этом, $X \setminus F$ открыто.

Тогда $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$.

Но тогда $B_r(a) \cap A = \varnothing$. $\square$

Следствие.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$, а $U \subset X$ - открытое множетсво. При этом $A \cap U = \varnothing$.

Тогда $\operatorname{Cl} A \cap U = \varnothing$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Cl} A \cap U &\implies x \in U \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \\ &\implies B_r(x) \cap A \subset U \cap A = \varnothing \\ &\implies x \notin \operatorname{Cl} A \\ &\implies x \notin \operatorname{Cl} A \cap U \end{aligned}$$

Получили противоречие, значит таких x не существует. $\square$

***Определение* 2.8.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Проколотой окрестностью радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центров в $a \in X$ называется $\mathring{B}_r(a) := B_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in X \mid 0 < \rho(x, a) < r\}$.

***Определение* 2.9.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$a \in A$ называется предельной точкой, если $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$.

Множества предельных точек множества A обозначается A'.

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} a \in \operatorname{Cl} A &\iff \forall r > 0 \quad B_a(a) \cap A \neq \varnothing \\ &\iff \left[\begin{array}{l} a \in A \\ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \end{array}\right. \\ &\iff \left[\begin{array}{l} a \in A \\ a \in A' \end{array}\right. \end{aligned}$$

□

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} a \in A' &\implies \forall r \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \\ &\implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \varnothing \\ &\implies a \in B' \end{aligned}$$

□

3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\ B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\ &\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)' \end{aligned}$$

   Покажем другое включение: возьмём $x \in (A \cup B)'$.

   Пусть $x \notin A'$: Тогда $\exists R > 0 \quad \mathring{B}_R(x) \cap A = \varnothing$.

   Заметим, что $\forall 0 < r \leqslant R \quad \mathring{B}_r(x) \cap A \subset B_R(x) \cap A = \varnothing$, значит $\forall r > 0 \quad \exists 0 < R_r < r \quad B_{R_r}(x) \cap A = \varnothing$.

   Так-как $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, значит $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing$. Тогда

$$\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap B \supset \mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing.$$

   Значит, $x \in B'$ □

4. $A' \subset A \iff A$ - замкнутое

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A \text{ - замкнутое} &\iff A = \operatorname{Cl} A \\ &\iff A = A \cup A' \\ &\iff A' \subset A \end{aligned}$$

□

Теорема 2.3.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек.}$$

Доказательство.

Необходимость ($\Longrightarrow$):

Знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$, возьмём точку $x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A$, возьмём $r_2 = \rho(x_1, a)$, знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$, можем взять точку оттуда, и вообще повторять бесконечное число раз.

Достаточность ($\leqslant$): $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$ $\Longrightarrow$ $a \in A'$. □

2.6. Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

***Определение* 2.10.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $Y \subset X$.

Тогда пара $\left\langle Y, \rho|_{Y \times Y} \right\rangle$ называется метрическим подпространством X.

Далее, при разговое о подпростравах обычно будет указываться только множество, а метрика использоваться та-же что и для основного пространства.

Теорема 2.4.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $\exists G$ открытое в X, такое, что $A = G \cap Y$

Доказательство.

Необходимость ($\Longrightarrow$):

$$\begin{aligned} A \text{ - открыто в } Y &\Longrightarrow \forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B^Y_{r_a}(a) \subset A \\ &\Longrightarrow A = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(A) \subset \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) =: G \end{aligned}$$

G - подходящее множество - оно открыто как объединение открытых, покажем что $A = G \cap Y$:

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y.$$

$$G \cap Y = Y \cap \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(a) = A.$$

Достаточность ($\Longleftarrow$):

Пусть $A = G \cap Y$. Возьмём $a \in A$.

$$\begin{aligned} G \text{ открыто в } X &\Longrightarrow \exists r > 0 \quad B^X_r(a) \subset G \\ &\Longrightarrow B^X_r(a) \cap Y \subset G \cap Y \\ &\Longrightarrow B^Y_r(a) \subset A \\ &\Longrightarrow A \text{ открыто в } Y \end{aligned}$$

□

Теорема 2.5.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\exists F$ замкнутое в X, такое, что $A = F \cap Y$.

Доказательство.

$F := X \setminus G$, где G - открытое в X такое, что $G \cap Y = Y \setminus A$ существование которого экивалентно открытости $Y \setminus A \iff$ замкнутости A.

$$\begin{aligned} F \cap Y &= (X \setminus G) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \setminus G \\ &= Y \setminus G \\ &= Y \setminus (G \cap Y) \\ &= Y \setminus (Y \setminus A) \\ &= A \end{aligned}$$

□

2.7. Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

***Определение* 2.11.**

Нормированным пространством над $\mathbb{R}$ называется пара $\langle X, \|\cdot\|\rangle$, где X - линейное пространство над $\mathbb{R}$ (далее одно и тоже обозначение используется для линейного пространства и его множества векторов), а $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ - норма, обладающая следующими свойствами $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad$.

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ $(\triangle)$

Пример.

$X = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$

Пример.

На $X = \mathbb{R}^d$ можно задать бесконечно много норм:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}.$$

$$\|x\|_n = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^n}.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in 1,\dots,d} |x_i|.$$

Пример.

$X = C[a,b]$, $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Доказательство.

Докажем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= \max_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \\ &= |f(x_0)+g(x_0)| \\ &\leqslant |f(x_0)+|g(x_0)| \\ &\leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \\ &= \|f\|+\|g\|\end{aligned}$$

□

***Определение* 2.12.**

Пусть X - линейное пространство, тогда функция $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \mapsto \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если удовлетворяет следующим свойствам $\forall x,y,z\in X \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \quad :$

1. $\langle x,x\rangle \geqslant 0$ и $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=\vec{0}$.
2. $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$
3. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
4. $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

Замечание.

Аналогичные определения можно дать над $\mathbb{C}$, тогда надо ещё потребовать $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$, и третий пункт примет вид $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

Пример.

$X=\mathbb{R}^d$, $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i y_i$

Пример.

Пусть $w_1,\dots,w_d>0$, тогда

$X=\mathbb{R}^d$, $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} w_i x_i y_i$

Пример.

$X=C[a,b]$, $\langle f,g\rangle = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$

Свойства.

1. $\langle \lambda x+\mu y,z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$ и $\langle x,\lambda y+\mu z\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \mu\langle x,z\rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$

   Доказательство.

   Пусть $t\in\mathbb{R}$.

   $$\langle x+ty,x+ty\rangle \geqslant 0.$$

   $$\langle x+ty,x+ty\rangle = \langle x,x\rangle + 2t\langle x,y\rangle + t^2\langle y,y\rangle.$$

   Это квадратное уровнение имеет корень только если $x+ty=0$, значит не более одного корня. Его дискриминат $\leqslant 0$:

   $$(2\langle x,y\rangle)^2 - 4\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle \leqslant 0 \implies \langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle.$$

   □

3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ - норма

Доказательство.

(a) Первое свойство переносится напрямую, из аналогичных свойств для $\langle x, x\rangle$ и $\sqrt{}$.

(b) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = \lambda\|x\|$

(c)

$$\begin{aligned}
\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| &\iff \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} \\
&\overset{.^2}{\iff} \langle x+y, x+y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\
&\iff \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\iff \langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \\
&\iff \langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

Последнее неравенство - неравенство Коши-Буняковского. □

Свойства.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - метрика

Доказательство.

(a) Первое свойство переходит прямо

(b) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)|\|x - y\| = \rho(x, y)$

(c) $\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$ ($\triangle$ для нормы).

□

2. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$

Доказательство.

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|x - y\| + \|y\|.$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

$$\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

$$\|y\| \leqslant \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

□

2.8. Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

***Определение* 2.13.**

Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $x_n \in X$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

***Определение* 2.14.**

Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $E \subset X$.

E называется ограниченным если $\exists r > 0 \quad \exists a \in X \quad E \subset B_r(a)$.

Свойства.

1. Предел единственнен

   Доказательство.
   Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$.

   Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$, $a \neq b \implies \varepsilon > 0$, возьмём $N = \max\{N_a, N_b\}$, где N_a, N_b - N из соответствующих определений предела при подстановке ε.

   Тогда, $\rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_N, b) < \varepsilon$.

   Но тогда $\rho(a,b) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(a, x_N) + \rho(x_N, b) < 2\varepsilon = \rho(a,b)$. Противоречие, значит предел единственненн. □

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$

   Доказательство.
   Определения посимвольно совпадают. □

3. Если последовательность имеет предел, она ограничена

   Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = a &\implies \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0\\ &\implies \rho(x_n, a) \text{ - ограниченная последовательность вещественных чисел}\\ &\implies \exists R > 0 \quad \rho(x_n, a) < R\\ &\implies \{x_n\} \subset B_R(a)\end{aligned}$$
□

4. Если a - предельная точка множества A, то можно выбрать последовательность $x_n \in A$, такую что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и $\rho(x_n, a)$ строго монотонно убывает.

   Доказательство.
   По определению предельной точки, $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \neq \varnothing$.

   Пусть $r_1 = 1$, $r_n = \min\{\frac{1}{n}, \rho(x_{n-1}, a)\}$, $x_n \in \mathring{B}_{r_n}(a)$ - такой x_n всегда можно выбрать, так-как окрестность непуста. Тогда $\rho(x_n, a) < r \implies \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \implies \rho(x_n, a) \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и при этом $\rho(x_n, a) < r_n < \rho(x_{n-1}, a)$. □

2.9. Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

Теорема 2.6.

Пусть $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ - нормированное пространство, $x_n, y_n, a, b \in X$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, $\lambda_n \to \lambda$.

Тогда:

$$\|x_n - a\| \to 0.$$
$$\|y_n - b\| \to 0.$$

1. $x_n + y_n \to a + b$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \\ &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\overset{\triangle}{\leqslant} \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \\ &\to 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$ □

2. $\lambda_n x_n \to \lambda a$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n(x_n - a) + (\lambda_n - \lambda)a\| \\ &\leqslant \|\lambda_n(x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda)a\| \\ &= |\lambda_n|\|x_n - a\| + |(\lambda_n - \lambda)|\|a\| \\ &\to |\lambda| \cdot 0 + 0 \cdot \|a\| = 0 \end{aligned}$$ □

3. $x_n - y_n \to a - b$

   Доказательство.
   $-y_n = -1 \cdot y_n \implies -1 \cdot b = -b$, $x_n + (-y_n) \to a + (-b) = a - b$. □

4. $\|x_n\| \to \|a\|$

   Доказательство.

$$0 \leqslant |\|x\| - \|a\|| \leqslant \|x - a\| \to 0.$$ □

5. Если задано скалярное произведение и $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle a, b\rangle$.

Доказательство.
Заметим следующий факт:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle - \left(\langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle\right)\right)\\ &= \frac{1}{4}\cdot 4\langle x,y\rangle\\ &= \langle x,y\rangle\end{aligned}$$

Теперь:

$$\begin{aligned}\langle x_n, y_n\rangle - \langle a,b\rangle &= \langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, b\rangle + \langle x_n, b\rangle - \langle a,b\rangle\\ &= \langle x_n, y_n - b\rangle - \langle x_n - a, y_n\rangle\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x_n+y_n-b\|^2 - \|x_n-y_n+b\|^2 - \|x_n-a+y_n\|^2 + \|x_n-a-y_n\|^2\right)\\ &\to \frac{1}{4}\left(\|a\|^2-\|a\|^2-\|b\|^2+\|b\|^2\right) = 0\end{aligned}$$

□

***Определение* 2.15.**
Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)})$.

Тогда x_n покоординатно сходится к x_0, если

$$\forall k \in [1,d] \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}.$$

Теорема 2.7.
В $\mathbb{R}^d$ с евклидовой нормой сходимость по норме эквивалентна координатной.

Доказательство.
Необходимость (норма $\implies$ коорд):

$$\forall k \in [1,d] \quad 0 \leqslant (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \leqslant \sum_{j=1}^{d}(x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \to 0.$$

Достаточноость (коорд $\implies$ норма)

$$0 \leqslant \|x - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{d}(x_n^{(k)} - x_0^{(k)}) \to 0.$$

□

2.10. Билет 21: Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота $\mathbb{R}^d$

Тут что-то странное с порядком билетов, рекомендуется сначала прочитать билет 22

***Определение* 2.16.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространоство.

Последовательность x_n называется фундаментальной

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма.

Фундаментальная последовательность ограничена

Доказательство.

Подставим $\varepsilon = 1$, получим $\forall n \geqslant N \quad \rho(x_N, x_n) < 1 \implies x_n \in B_1(N)$, пусть

$$r = \max\{1, \max_{k<N}\{\rho(x_N, x_k)\}\}.$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B_r(x_N)$. □

TODO: Это все свойства фундаментальной последовательнсоти?

***Определение* 2.17.**

Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Лемма.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Пусть $x_n \in X$ - фундаментальна, а $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant M \quad \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$x_n \text{ - фундаментальна } \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Пусть $L = \max\{N, n_M\}$.

Тогда $\forall n > L \quad \exists k \quad \rho(x_n, a) < \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$.

Значит, $\rho(x_n, a) \to 0 \implies x_n \to a$. □

Следствие.

1. $\mathbb{R}^d$ - полное

   Доказательство.

   Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$ - фундаментальная последовательность.

   Тогда x_n ограничена $\implies \exists x_{n_k}$ - сходящаяся к точке из $\mathbb{R}^d$ подпоследовательность (Больцано-Вейерштрасс из следующего билета), пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}^d$. □

2. K - компакт в $\langle X, \rho \rangle \implies \langle K, \rho \rangle$ - полное.

   Доказательство.

   K - компакт, $x_n \in K$ - фундаментальна.

   $\exists x_{n_k} \in K \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in K \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in K$. □

2.11. Билет 22: Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

***Определение* 2.18.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Семейство множеств $U_\alpha \subset X$ называется открытым покрытием множества A (покрытием A открытыми множествами), если

1. $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
2. $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha$ - открытое.

***Определение* 2.19.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется компактом, если из любого отркытого покрытия можно выбрать конечное открытое покрытие.

Теорема 2.8.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространтсво, $Y \subset X$ - подпространство.

Тогда компактность $K \subset Y$ в Y и в X равносильны.

Доказательство.

$Y \implies X$:

Пусть $G_\alpha \subset X$ - открытое покрытие K в X.

Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ - открытое покрытие K в Y.

Можем выбрать конечное U_{α_k}.

$U_{\alpha_k} \subset G_{\alpha_k} \implies G_{\alpha_k}$ - конечное открытое покрытие.

$X \implies Y$:

Пусть $U_\alpha \subset Y$ - открытое покрытие K в Y.

Тогда $\exists G_\alpha$ открытое в $X \quad U_\alpha = G_\alpha \cap Y$.

$U_\alpha \subset G_\alpha \implies G_\alpha$ - открытое покрытие K в X.

Значит, можем выбрать конечное G_{α_k}. Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^{n} (G_{\alpha_k} \subset Y) = Y \cap \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k} \supset Y \cap K = K.$$

Значит, U_{α_k} - конечное покрытие K в Y. □

Теорема 2.9.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, K - компакт. Тогда

1. K - замкнуто

   Доказательство.

   Возьмём $a \in X \setminus K$.

   Заметим, что $\forall x \in K \quad B_{\frac{\rho(x,a)}{2}} \cap B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) = \varnothing$.

Возьмём открытое покрытие K: $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$.

Выберем конечное: $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$.

Тогда, при $r := \min\limits_{k}\{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$, $B_r(a) \cap K = \varnothing \implies B_r(a) \subset X \backslash K \implies a \in \mathrm{Int}(X \backslash K) \implies X \backslash K$ открыто $\implies K$ замкнуто. $\square$

2. K - ограничено

Доказательство.
Возьмём $a \in K$.

Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ - открытое покрытие.

Выберем конечное: $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{n_k}(a) = B_r(a)$, $r := \max\limits_{k}\{n_k\}$. $\square$

Следствие.
Если K - компакт и $\tilde{K} \subset K$ - замкнуто, то $\tilde{K}$ - компакт.

Доказательство.
Пусть U_α - открытое покрытие $\tilde{K}$.

Тогда, если добавить к нему $X \setminus \tilde{K}$ (которое открыто так-как $\tilde{K}$ замкнуто), получится открытое покрытие K. Выберем конечное.

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K} \implies \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \supset \tilde{K} \qquad \square.$$

2.12. Билет 23: Теорема о пересечении семейства компак- тов. Следствие о вложенных компактах.

Теорема 2.10.
Пусть K_α - семейство компактов, и для любого конечного набора компактов пересечение непусто.

Тогда $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \varnothing$.

Доказательство.
Предположим $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha = \varnothing$.

Тогда $\exists \alpha_0 \in I \quad K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in I}^{\alpha \neq \alpha_0} K_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I}^{\alpha \neq \alpha_0} (X \setminus K_\alpha)$ - получилось открытое покрытие.

Выберем конечное: $K_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (X \setminus K_{\alpha_k}) = X \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{n} K_{\alpha_k}$.

Но тогда $\bigcap\limits_{k=0}^{n} K_{\alpha_k} = \varnothing$, противоречие. $\square$

Следствие.
Пусть $K_1 \supset K_2 \supset K_3, \ldots$ - непустые компакты.

Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \varnothing$.

Доказательство.

Пересечение конечного числа компактов - компакт с максимальным номером $\neq \varnothing$. □

2.13. Билет 24: NAME

2.14. Билет 25: NAME

2.15. Билет 26: NAME

2.16. Билет 27: NAME

2.17. Билет 28: NAME

2.18. Билет 29: NAME

2.19. Билет 30: NAME

2.20. Билет 31: NAME

2.21. Билет 32: NAME

2.22. Билет 33: NAME

2.23. Билет 34: NAME

2.24. Билет 35: NAME

2.25. Билет 36: NAME

2.26. Билет 37: NAME

2.27. Билет 38: NAME

2.28. Билет 39: NAME

3. Числовые и функциональные ряды

3.1. Билет 40: NAME

3.2. Билет 41: NAME

3.3. Билет 42: NAME

3.4. Билет 43: NAME

3.5. Билет 44: NAME

3.6. Билет 45: NAME

3.7. Билет 46: NAME

3.8. Билет 47: NAME

3.9. Билет 48: NAME

3.10. Билет 49: NAME

3.11. Билет 50: NAME

3.12. Билет 51: NAME

3.13. Билет 52: NAME

3.14. Билет 53: NAME

3.15. Билет 54: NAME

3.16. Билет 55: NAME

3.17. Билет 56: NAME

3.18. Билет 57: NAME

3.19. Билет 58: NAME

3.20. Билет 59: NAME

3.21. Билет 60: NAME

3.22. Билет 61: NAME

3.23. Билет 62: NAME

3.24. Билет 63: NAME

3.25. Билет 64: NAME

3.26. Билет 65: NAME

3.27. Билет 66: NAME

R – радиус сходимости, $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$r < R \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ воспользуемся признаком Вейерштрасса. $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$, $|a_n| r^n$ сходится $\implies$ по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ сходится равномерно. □

Замечание.

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

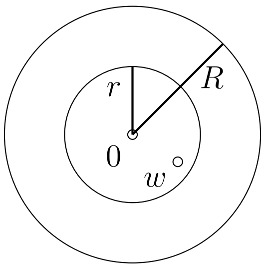
Контрпимер $R = 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, хвост ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightrightarrows 0$, т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаминатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку w из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окресности. Берем r, т.ч. $|w| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| < r$ ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция $\implies$ в круге $|z| < r$ сумма непрерывна $\implies$ есть непрерывность суммы и в w. В силу произольности w сумма непрерывна в любой точке $|z| < R$.



□

Теорема 3.2 (Абеля)**.**

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на отрезке $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Применим признак Абеля. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (нет зависимости от x), $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \implies$ равномерно огранич., $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает, тогда по признаку Абеля $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно. □

Следствие.

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если выполнены условия теоремы, то $f(x) \in C[0, R]$, т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности, $\lim\limits_{x \to R-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

3.29. Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in (0, +\infty)$. Тогда $\overline{\lim}\, x_n y_n = \lim x_n \overline{\lim}\, y_n$.

Доказательство.

$A = \lim x_n, B = \overline{\lim}\, y_n, C = \overline{\lim}\, x_n y_n$. (Напоминание: верхний предел это наибольший из частичных).

$\exists n_k$, т.ч. $x_{n_k} y_{n_k} \to C$. $\lim x_{n_k} y_{n_k} = \lim x_{n_k} \lim y_{n_k}$, равенство есть, т.к. существует предел слева и предел x_{n_k}. Из равенства следует, что $\lim y_{n_k} = \frac{C}{A} \leqslant B \implies C \leqslant AB$.

$\exists m_k$, т.ч. $y_{n_k} \to B$. $\lim x_{m_k} y_{m_k} = \lim x_{m_k} \lim y_{m_k} \implies \lim x_{m_k} y_{m_k} = AB \leqslant C$.

Итого равенство. □

Следствие.

Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ совпадают.

Доказательство.

Домножение на z не влияет на радиус, поэтому докажем для рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^n$.

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}}, R_2 = \frac{1}{\overline{\lim}\, \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}}, R_3 = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{n}}$$

$\lim \sqrt[n]{n+1} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$, по лемме можем вытащить из под верхнего предела и окажется, что $R_1 = R_2 = R_3$. □

Теорема 3.3 (Почленное интегрирование степенного ряда)**.**

R – радиус сходимости ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Тогда при $|x - x_0| < R$ $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ и полученный ряд имеет тот же радиус сходимости.

Доказательство.

На $[x_0, x]$ ряд сходится равномерно (теорема из билета 67) $\implies f \in C[x_0, x]$ и можно интегрировать почленно $\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{x_0}^{x} (t - x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$. □

3.30. Билет 69: Комплексная диффернцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

***Определение* 3.1.**

$f : E \mapsto \mathbb{C}, E \subset \mathbb{C}, z_0 \in \mathrm{Int} E$. Если существует $k \in \mathbb{C}$, такое что $f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$ при $z \to z_0$, то f – **комплексно-дифференцируема в точке** z_0 и k – **производная** f в точке z_0.

Замечание.

1. $k = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =: f'(z_0)$

2. Существование производной равносильно дифференцированию

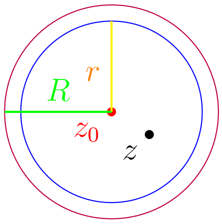
Теорема 3.4.

R – радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

Тогда f – бесконечно дифференцируема в круге $|z-z_0| < R$ и

$f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$

Доказательство.



Докажем индукцию по m. Рассмотрим $m = 1$ и $z_0 = 0$ (про z_0 для простоты). Возьмем $|z| < R$ и подберем такое r, что $|z| < r < R$ (картинка выше для пояснения). Возьмем $|w| < r$

$$f'(z) = \lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim_{w\to z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nw^n - a_nz^n}{w-z} = \lim_{w\to z}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})$$

Первое равенство – просто вынесли ряд. Второе – просто поделили (что-то похожее на алгебре делали). Осталось доказать равномерную сходимость по $|w| < r$ последнего ряда, чтобы поменять местами предел и сумму. Проверять будем с помощью признака Вейерштрасса:

$$|a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})| \leqslant |a_n|(|w|^{n-1} + |w|^{n-2}|z| + \dots + |z|^{n-1}) \leqslant |a_n|nr^{n-1}$$

Второе неравенство, так как $|w| < r$ и $z < r$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|nr^{n-1}$ сходится, так как у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nnz^{n-1}$ радиус сходимости $R > r$. Значит применился признак сходимости и мы можем поменять местами сумму с предлом.

$$\lim_{w\to z}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{w\to z} a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nz^{n-1}$$

Если применить эту форму m раз, то получим искомую формулу. □

3.31. Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

Теорема 3.5 (единственность разложения функции в степенной ряд)**.**

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ при $|z-z_0| < R$ – радиус сходимости.

Тогда ряд раскладывается единственным образом, причем коэффициенты в этом ряду будут выглядеть так: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство.

По предыдущей теореме:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$$

Подставим $z = z_0$. Тогда все слагаемые кроме первого занулятся и получим:

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1 \cdot a_m = m!a_m$$

. Отсюда $a_m = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

***Определение* 3.2.**

Ряд Тейлора функции f в точке z_0 называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

***Определение* 3.3.**

Функция называется **аналитической** в точке z_0, если она является суммой своего ряда Тейлора для точки z_0 в окрестности точки z_0.

Ряд Тейлора мы можем писать только, если функция бесконечно дифферинцируема. Но бывают бесконечно дифференцируемые функции, которые не являются аналитическими, например:

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим точки $x \neq 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$$

Идем по индукции $(n \to n+1)$, проверяем есть ли формула для разных производных:

База: Для f: $f = P_0 e^{-1/x^2}$, то есть $P_0 \equiv 1$

Переход:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2})' =$$

$$= P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2}\frac{1}{x^3} + P_n'(x)x^{-3n}e^{-1/x^2} + P_n(x)(-3n)x^{-3n-1}e^{-1/x^2} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3n+3}}P_{n+1}(x)$$

Найдем $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$ Докажем по индукции $(n-1 \to n)$, что $f^{(n)}(0) = 0$.

Переход:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} \underset{y=1/x}{=} \lim_{y\to\infty} e^{-y^2}y^{3n+1}P_n\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$P_n\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[y\to\infty]{} P_n(0)$ – константа

$e^{-y^2}y^{3n+1} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$, так как e^{-y^2} убывает быстрее.

Значит ряд Тейлора равен 0, но функция не 0 в точках $x \neq 0$. Значит функция не аналитическая.

3.32. Билет 71: NAME

3.33. Билет 72: NAME

4. Функции нескольких переменных

4.1. Билет 73: NAME

4.2. Билет 74: NAME

4.3. Билет 75: NAME

4.4. Билет 76: NAME

4.5. Билет 77: NAME

4.6. Билет 78: NAME

4.7. Билет 79: NAME

4.8. Билет 80: NAME

4.9. Билет 81: NAME

4.10. Билет 82: NAME

4.11. Билет 83: NAME

4.12. Билет 84: NAME

4.13. Билет 85: NAME

4.14. Билет 86: NAME

4.15. Билет 87: NAME

4.16. Билет 88: NAME

4.17. Билет 89: NAME

4.18. Билет 90: NAME

4.19. Билет 91: NAME

4.20. Билет 92: NAME

4.21. Билет 93: NAME

4.22. Билет 94: NAME

4.23. Билет 95: NAME

4.24. Билет 96: NAME

4.25. Билет 97: NAME

4.26. Билет 98: NAME

5. Теория меры

5.1. Билет 99: NAME

5.2. Билет 100: NAME

5.3. Билет 101: NAME

5.4. Билет 102: NAME