Билет 44

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 44: Признак Даламбера. Примеры. Связь между признаками Коши и Даламбера.

Теорема 0.1 (признак Даламбера).
$a_n > 0$

1. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то ряд расходится.
2. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d < 1$, то ряд сходится.
3. Пусть $d^* = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

   Если $d^* < 1$, то ряд сходится.

   Если $d^* > 1$, то ряд расходится.

Доказательство.

1. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \leqslant a_{n+1}$

   $\implies$ начиная с некоторого места члены ряда возрастают, $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ...$

   $\implies a_n \not\to 0 \implies$ ряд расходится
2. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant d \implies a_{n+1} \leqslant d \cdot a_n$ начиная с некоторого места.

   $\implies a_{n+k} \leqslant d^k \cdot a_n$ при всех k

   $\implies$ при всех $k \geqslant n$ $a_k \leqslant d^{k-n} \cdot a_n = d^k \cdot \frac{a_n}{d^n} = d^k \cdot const$

   $\implies a_k = \mathcal{O}(d^k)$

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^k$ – это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^k$ сходится, тогда по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.
3. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* < 1$

   $d := \frac{d^*+1}{2} < 1$

   $\implies$ начиная с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} < d < 1 \implies$ попали в первый пункт, сходится

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d^* > 1$

   $\implies$ с некоторого номера $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$

   $\implies$ ряд расходится.

$\square$

Замечание.
Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1$

Пример.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при $x > 0$

По Даламберу.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

По Коши.

$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

Теорема 0.2 (Связь между признаками Коши и Даламбера)**.**

$a_n > 0$

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: d$, то существует и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ и он равен d

Доказательство.

Будем рассматривать не сами выражения, а их логарифмы.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \iff \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln d$

Хотим доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \ln d$

Применяем Штольца!

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{(n+1)-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = \ln d$

□