Билет 59

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 59: ! Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствие. Примеры. . . 1

0.1. Билет 59: ! Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствие. Примеры.

Теорема 0.1 (Признак сравнения).

$u_n, v_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\forall x \in E$ $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится, можно применить признак Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\, \forall p \in \mathbb{N}\, \forall x \in E \text{ выполняется } \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k(x) \right| < \varepsilon$$

Из условия теоремы можно записать неравенство на частичные суммы.

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k(n) \right| \geqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \geqslant \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right|$$

Получили, что критерий Коши выполняется для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, значит он сходится равномерно.

□

Теорема 0.2 (Признак Вейерштрасса).

$u_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\exists \{a_n\} : |u_n(x)| \leqslant a_n \,\forall x \in E$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

$v_n(x) := a_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - равномерно сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - равномерно сходится по признаку сравнения. □

Следствие.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ - равномерно сходится, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

Воспользуемся признаком сравнения для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ □

Пример.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ - равномерно сходится на $\mathbb{R}$

Доказательство.

$\{a_n\} := \frac{1}{n^2}$. Воспользуемся признаком Вейерштрасса для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}$ и a_n □

Замечание.

Абсолютная и равномерная сходимости - разные вещи.

1. Ряд сходится абсолютно, но не сходится равномерно.

Пример.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ на $(-1; 1)$

Доказательство.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^n| = \frac{1}{1-|x|}$ - геометрическая прогрессия. Действительно, такой ряд сходится абсолютно. По критерию Коши докажем, что равномерной сходимости нет.

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geqslant N \, \exists p \in \mathbb{N} \, \exists \overline{x} \in E : \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_n(\overline{x}) \right| \geqslant \varepsilon$$

При выполнении такого условия равномерной сходимости не будет. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = 0$, $\overline{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. □

2. Ряд сходится равномерно, но не сходится абсолютно.

   Пример.
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится равномерно, но нет абсолютной сходимости.

3. Также бывает, что ряд сходится абсолютно, равномерно, но ряд из модулей не сходится равномерно. Пример в следующем вопросе. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$