Билет 05

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 5: Оценка сумм вида $\sum_{k=1}^{n} k^p$ при различных p. Постоянная Эйлера.

Будем использовать формулу Эйлера-Маклорена

Пример.

1. $S_p(n) := \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$

   Пусть $f(t) = t^p$, тогда $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$

   $S_p(n) = \int\limits_1^n t^p\,dt + \frac{1+n^p}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt$

   $\int\limits_1^n t^p\,dt = \frac{t^{p+1}}{p+1}\Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}$

   Случай $-1 < p < 1$

   $0 \leqslant \int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n t^{p-2} = \frac{1}{4}\ \frac{t^{p-1}}{p-1}\Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4(1-p)}\left(1 - \frac{1}{n^{1-p}}\right) \leqslant \frac{1}{4(1-p)}$

   $S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$

   Случай $p > 1$

   $0 \leqslant \int\limits_1^n p(p-1)t^{p-2}\{t\}(1-\{t\})\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n t^{p-2} = \frac{n^{p-1}-1}{4(p-1)} = O(n^{p-1})$

2. **Гармонический ряд**

   $H_n = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

   Пусть $f(t) = \frac{1}{t}$, тогда $f''(t) = \frac{2}{t^3}$

   По формуле Эйлера-Маклорена

   $H_n = \int\limits_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1+1/n}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_1^n \frac{2}{t^3}\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

   $a_n := \int\limits_1^n \frac{1}{t^3}\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

   $a_{n+1} = a_n + \int\limits_n^{n+1} \frac{1}{t^3}\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt \geqslant a_n \Rightarrow$ это возрастающая последовательность.

   $a_n = \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3}\,dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_1^n \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \leqslant \frac{1}{8} \Rightarrow$ предел последовательности существует. $\Rightarrow a := \lim a_n \Rightarrow a_n = a + o(1)$

   $H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1)$ в пределе $\frac{1}{2n}$ сокращается $o(1)$, и все кроме логарифма – постоянная Эйлера-Маскерони.

   $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0.5772156649\ldots$