# Билет 88

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

## 0.1. Билет 88: Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым

**Теорема 0.1** (Оценка на норму обратного отображения).
Если $A : R^n \mapsto R^n$ линейное, $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$ $\forall x \in R^n$ и $m > 0$, тогда $A$ - обратим и $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}$

**Доказательство**.
Нужно проверить иньективность (точки не склеиваются). Так как $A$ линейно, нужно проверить, что $A$ ничего не переводит в ноль, кроме нуля. То есть доказать, что $Ax = 0 \iff x = 0$.

Если $Ax = 0$, то $\|Ax\| = 0 \geqslant m\|x| \implies x = 0$.

Раз точки не склеиваются, значит $\exists A^{-1}$. Осталось оценить ее норму. Пусть $y = A^{-1}x$, тогда...

$$\|A^{-1}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leqslant \sup_{y\neq 0} \frac{\|y\|}{m\|y\|} = \frac{1}{m}$$

Что и требовалось доказать. □

**Теорема 0.2** (Оценка на норму разности значений дифференцируемого отображения).
$f : R^n \mapsto R^m$ дифференцируема в $B_r(a)$ и $\|f'(x)\| \leqslant \alpha \quad \forall x \in B_r(a)$, тогда $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha\|x - y\|$

**Доказательство**.
$\varphi(t) := \langle f(x + t(y - x)), f(y) - f(x)\rangle$.

Воспользуемся линейностью скалярного произведения. Далее применим формулу Лагранжа и возьмем $\xi \in (0, 1)$.

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$$

$$\varphi'(\xi) = \langle ...\rangle' = \langle (f(x + t(y - x)))', f(y) - f(x)\rangle = \langle f'(x + t(y - x))(x + t(y - x))'_t, f(y) - f(x)\rangle =$$

$$= \langle f'(x + t(y - x))(y - x), f(y) - f(x)\rangle$$

Подставим функцию. Оценим скалярное произведение. Замечание: точка $(x + \xi(y - x))$ находится между $x$ и $y$, а значит живет в шаре $B_r(a)$. Тогда $f'(x + \xi(y - x))$ - это произведение матрицы на вектор.

$$\varphi'(\xi) = \langle f'(x + \xi(y - x), f(y) - f(x))\rangle \leqslant \|f'(x + \xi(y - x))\|\|f(y) - f(x)\| \leqslant \alpha\|y - x\|\|f(y) - f(x)\|$$

Вспомним, откуда мы начинали.

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = \varphi'(\xi) \leqslant \alpha\|y - x\|\|f(y) - f(x)\|$$

Тогда можно сократить $\|f(y) - f(x)\|$ и теорема будет доказана. □

**Теорема 0.3** (Об обратимости оператора близкого к обратимому).
$A : R^n \mapsto R^n$ обратим и $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда $B$ - обратим, $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\|A^{-1}\| - \|B - A\|}$ и $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|B-A\|}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B - A\|}$

**Доказательство**.

Воспользуемся неравенством треугольника.

$$\|Bx\| \geqslant \|Ax\| - \|(B-A)x\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|\|x\| = \|x\|(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|)$$

Откуда взялся предпоследний переход? Заметим, что $\|(B-A)x\| \leqslant \|B-A\|\|x\|$. Так же подметим, что

$$\|A^{-1}\|\|Ax\| \geqslant \|A^{-1}Ax\| = \|x\| \iff \|Ax\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$$

Пусть $m := (\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|B-A\|)$. Тогда $\|Bx\| \geqslant m\|x\|, \forall x \in R^n \implies B$ - обратима и $B^{-1} \leqslant \frac{1}{m}$ по предыдущим теоремам.

Воспользуемся линейностью.

B^-1 - A^-1 $= B^{-1}(AA^{-1} - BA^{-1}) = B^{-1}(A-B)A^{-1}.$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\| \leqslant \frac{\|A-B\|\|A^{-1}\|}{m}$$

Что и требовалось доказать. $\square$

*Замечание.*

Замечание: самое главное в этой формуле то, что $\|B-A\|$ находится в числителе. Это означает, что при $B \to A$ последовательность обратных будет стремится к обратным. Остальное в этой формуле маловажно.