Билет 26

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 26: ε-сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

TODO: Сети и Хаусдорфа опять не видно не у меня не у Ани.

***Определение* 0.1.**

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^d$.

Замкнутый параллелепипед: $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед: $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_d, b_d)$.

Теорема 0.1 (О вложенных параллелепипедах)**.**

Пусть $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ - замкнутые параллелепипеды.

Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n \neq \varnothing$.

Доказательство.

Обозначим $P_n =: [a^{(n)}, b^{(n)}]$.

По теореме о вложенных отрезках:

$$\forall k \in [1, n] \quad \exists c_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}] \quad .$$

Тогда, $c = (\forall n \quad c_1, \ldots, c_d) \in P_n$ □

Теорема 0.2.

Замкнутый куб (замкнутый параллелепипед, все координаты углов которого равны для данного угла) в $\mathbb{R}^d$ - компакт.

Доказательство.

Пусть K - замкнутый куб и U_α - его открытое покрытие. Предположим что выбрать конечное нельзя.

Разобьём K на 2^d кубов, со стороной равной половине стороны K. U_α - открытое покрытие каждого такого куба.

Хотя-бы один маленький куб нельзя будет покрыть конечным покрытием, назовём его K_1, повторим для него, получим последовательность $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$.

По теореме о вложенных параллелепипедах, $\exists c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

$\exists \alpha_0 \quad c \in U_{\alpha_0}$, U_{α_0} открытое $\implies \exists r > 0 \quad B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$.

Заметим, что длина ребра $K_n = \frac{l}{2^n} \to 0$ (l - длина ребра K) $\implies$ максимальное расстояние между точками - $\sqrt{d}\frac{l}{2^n} \to 0$ (какой-то факт о евклидовой метрике).

Тогда, $\exists n \quad \sqrt{d}\frac{l}{2^n} < r$. Значит, $\exists n \quad K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$. Но это противоречит тому, что для K_n нельзя выбрать конечное покрытие. Значит K - компакт.

□

Теорема 0.3.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ с евклидовой метрикой. Тогда следующие услвия эквивалентны:

1. K - компакт

2. K - замкнуто и ограничено

3. K секвенциально компактно.

Доказательство.

$1 \implies 2$ и $1 \implies 3$ уже были.

$2 \implies 1$: K ограничено $\implies K \subset B_r(a) \subset$ куб. K - замкнутое подмножество компакта $\implies$ K - компакт.

$3 \implies 2$:

Пусть K не замкнуто. Тогда есть предельная точка не в K. Можем выбрать сходящуюся к ней последовательность, но тогда любая подполседовательность сходится к ней $\implies$ не можем выбрать сходящуюся к точке из K. Противоречие $\implies$ K замкнуто.

Пусть K не ограничено $\implies \forall n > 0 \quad K \not\subset B_n(0)$.

Тогда, можем выбрать последовательность вида $x_n \in K \setminus B_n(0)$. Тогда $\rho(0, x_n) \geqslant n$.

Выберем сходящуюся к $a \in K$ подпоследовательность x_{n_k}. Тогда x_{n_k} ограничена, причём ограничивающий шар с центром в a точно существует: $x_{n_k} \in B_r(a) \implies \rho(x_{n_k}, a) < r \overset{\triangle}{\implies} \rho(x_{n_k}, 0) < r + \rho(0, a)$. Противоречине, значит K ограничено. $\square$

Замечание.

$3 \implies 1$ верно для произвольного пространства, но доказательство сложное.

$2 \implies 1$ в общем случае неверно:

Рассмотрим $\mathbb{R}$ с метрикой лентяя. $[0, 1] \subset B_2(0)$, и есть замкнутость.

Но из $\bigcup_{x \in [0,1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$ нельзя выбрать конечное покрытие, так-как каждый шар содержит лишь одну точку.

Теорема 0.4 (Больцано-Вейерштрасса)**.**

Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

$\{x_n\}$ ограничено $\implies \{x_n\} \subset B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ - замкнуто и ограничено $\implies$ компакт $\implies$ секвенциально компактно $\implies$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. $\square$