

Билет 62

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 62: Пример ряда, который сходится равномерно и абсолютно, но не сходится равномерно абсолютно. Признак Динни	1
-----	--	---

0.1. Билет 62: Пример ряда, который сходится равномерно и абсолютно, но не сходится равномерно абсолютно. Признак Динни

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \text{ на } (0, 1).$$

Равномерная сходимость: по признаку Лейбница с $b_n(x) = \frac{x^n}{n}$

Абсолютная сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Но этот ряд не сходится равномерно абсолютно.

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{10}$

$$\forall n \quad \exists x \in (0, 1) \quad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k} \geq n \left(\frac{x^{2n}}{2n} \right) = \frac{x^{2n}}{2} \geq \frac{1}{10}$$

Утверждение 0.1.

K - компакт.

$$\begin{cases} u_n \in C(K) & u_n \geq 0 \\ S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) & S \in C(K) \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum u_n$ - равномерно сходится.

Доказательство.

помним, все ряды - функциональные

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n$ - убывают по n при фиксированном x , непрерывна как разность непрерывных функций.

Хотим показать что $r_n \Rightarrow 0$.

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \quad \forall x \in K \quad r_n < \varepsilon$

Пусть такого n не существует. Тогда $\forall n \quad \exists x_n \in K \quad r_n(x_n) \geq \varepsilon$

x_n - последовательность из K . Тогда у неё есть сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x_0$ (т.к. K - компакт). Рассмотрим r_m :

$$n_k \geq m \Rightarrow \varepsilon \leq r_{n_k}(x_{n_k}) \leq r_m(x_{n_k}) \rightarrow r_m(x_0) \geq \varepsilon - \text{верно при всех } m.$$

Значит, $\sum u_n$ - расходится, что неверно. Значит, наше предположение неверно, и $r_n \Rightarrow 0$. \square