Билет 04

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 4: Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной).

Теорема 0.1. (Формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$f \in C^2[m,n] \;\; m,n \in \mathbb{Z}$

$\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

Доказательство.

Подставим в формулу $m=k, n=k+1$. Получим:

$f(k)+f(k+1) = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} + \int\limits_k^{k+1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

Выразим отсюда $f(k)$:

$f(k) = \int\limits_k^{k+1} f(t)\,dt + \frac{f(k)-f(k+1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_k^{k+1} f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

Просуммируем от m до $n-1$.

$\sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k) = \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

$f(n) + \sum\limits_{k=m}^{n-1} f(k) = f(n) + \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt =$
$= \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int\limits_m^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_m^n f''(t)\cdot\{t\}(1-\{t\})\,dt$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для $f(k) = ...$

Заметим, что выражение не зависит от k $(f(t+k) = g(t)) \implies$ можно "сдвинуть". Будем считать, что $k=0$. Тогда $\{t\}=t$.

$f(0) = \int\limits_0^1 f(t)\,dt + \frac{f(0)-f(1)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t)\cdot t(1-t)\,dt$

$\int\limits_0^1 f(t)\,dt - \frac{f(0)+f(1)}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f''(t-0)\cdot t(1-t)\,dt$

Верно по лемме из билета 3: $\alpha=0, \beta=1$. □