Билет 63

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 63: Теорема о перестановке пределов и о перестановке предела и суммы.

Теорема 0.1 (О перестановке пределов).

$f_n, f : E \mapsto \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ на E, a – предельная точка E, $b_n := \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Тогда существуют $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и они равны.

Доказательство.

Сначала докажем сходимость b_n. Проверим, что b_n фундаментальна.

По критерию Коши для равномерной сходимости имеем:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$
Сделаем переход к пределу в неравенстве(устремим $x \to a$, строгое неравенство превратилось в нестрогое), получим:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m \geq N\ |b_n - b_m| \leq \varepsilon$
А это и есть определение фундаментальной последовательности! Значит, b_n фундаментальна. Значит, по критерию Коши для последовательностей имеет конечный предел.

Пусть $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$. Осталось проверить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда автоматически докажем существование и равенство.
Посмотрим на разность $|f(x) - b|$. Творчески оценим её по неравенству треугольника следующим образом:

$$|f(x) - b| \leq |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)|$$

Заметим, что это верно для любых n. Теперь посмотрим по отдельности на каждое слогаемое в правой части неравенства. По определению предела $\forall n \geq N_1\ |b_n - b| < \varepsilon$. По определению равномерной сходимости $\forall n \geq N_2\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Выберем $\max(N_1, N_2)$. Теперь посмотрим на $|f_n(x) - b_n|$. Мы знаем, что $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$(формулировка теоремы). Значит, мы можем сказать, что $|f_n(x) - b_n| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$. Получили

$$|f(x) - b| \leq |b_n - b| + |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon$$

Собирая всё в кучу, получим определение предела:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ если $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < 3\varepsilon$.
Значит, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Что и требовалось доказать.

□

Теорема 0.2 (О перестановке предела и суммы).

$u_n : E \mapsto \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E и $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = b_n$

Тогда $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x)$ и все эти пределы конечны.

Доказательство.

Посмотрим на частичные суммы $S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$. Так как сумма конечная, можно написать так: $\lim\limits_{x\to a} S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k := B_n$. Мы также знаем, что $S_n \rightrightarrows S$.
Тогда по предыдущей теореме $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{x\to a} S(x)$. А это как раз то, что нам нужно. □

Следствие.

Если u_n непрерывны в точке a и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

$\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = u_n(a) =: b_n$(по непрерывности).

По предыдущей теореме $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$, а это и есть непрерывность.

$\square$