Билет 82

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 82: ! Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в $\mathbb{R}^2$

***Определение* 0.1.**

$f : E \to \mathbb{R}$ $E \subset \mathbb{R}^n$ E – открытое множество.

$\frac{\partial f}{\partial x_k} : E \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}$ $f''_{x_k x_j} := (f'_{x_k})'_{x_j}$

Т.е. сначала фиксируем x_j (как будто параметр), считаем производную по x_k, затем наоборот.

Это частная производная второго порядка, можно писать и большие аналогично.

Пример.

$f(x, y) = x^y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = \ln^2 x \cdot x^y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}$

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = \frac{y(x^4-y^4)-4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x} f(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x} f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{-y}{y} = -1$

Но в силу антисимметричности x и y.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$

Теорема 0.1.

$f : E \to \mathbb{R}$ $E \subset \mathbb{R}^2$ $(x_0, y_0) \in \operatorname{Int} E$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ещё и непрерывна в ней

Тогда существует и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в точке (x_0, y_0).

Более того, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

Доказательство.

Рассмотрим $\varphi(s) = f(s, y_0+k) - f(s, y_0)$, что такое k - поймём позже. Пока это просто какое-то число.

Заметим, что φ дифф. в окресности точки x_0 (следует из существования частной производной по y), поэтому можем применить к ней т. Лагранжа (одномерную):

$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h)$ $\theta_1 \in (0, 1)$

Левую часть обозначим за Δ, а правую распишем через определение φ, получим:

$\Delta = h(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0))$

Обозначим $\tilde{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, t)$, тогда:

$\Delta = h(\tilde{\varphi}(y_0 + k) - \tilde{\varphi}(y_0))$

Снова применим лагранжа:

$\Delta = hk\tilde{\varphi}'(y_0 + \theta_2 k) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

Теперь введём $\psi(t) = f(x_0 + h, t) - f(x_0, t)$. Это как φ, но меняем другую координату. t это пока тоже какое-то произвольное число. Сделаем шаги, аналогичные шагам выше, получим всё тоже самое, но для другой координаты. При этом заметим, что Δ у нас получится ровно такая же (можно проверить, написав определение Δ в первом и втором случае, подставить туда φ или ψ).

Делаем аналогичные шаги для ψ:

$\Delta = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_3 k) = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$

В итоге мы получили:

$\Delta = hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

и

$\Delta = kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k)$

Откуда

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$

Осталось устремить $h, k \to 0$ и воспользоваться непрерывностью производных:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

$\square$

***Определение* 0.2.**

$f : E \to \mathbb{R}$ $R \subset \mathbb{R}^n$ E – открыто

Функция f называется r раз непрерывно дифференцируемой или r-гладкой,

если все частичные производные до r-ого порядка (включительно) существуют и непрерывны.

Обозначение – $C^r(E)$

Теорема 0.2.

$f : E \to \mathbb{R}$ $E \subset \mathbb{R}^n$ E – открыто $f \in C^r(E)$

$i_1, i_2, ..., i_r$ – перестановка $j_1, j_2, ..., j_r$

Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_r}}$

Доказательство.

Предыдущая теорема говорит, что любая транспозиция не меняет частной производной, а любая перестановка выражается через транспозиции.

На самом деле, это не совсем док-во. Мы ведь не доказали, что если в $\frac{\partial^r f}{\partial x_1 ... \partial x_i ... \partial x_j ... \partial x_{i_r}}$ поменять i-ый и j-ый, то значение не изменится. Исправим чуть док-во.

Заметим, что если $j = i + 1$, то у нас одинаковое начало (всё до i совпадает) + одинаковый хвост (всё после j одинаковое) + остаётся ровно утверждение из прошлой теоремы. Поэтому, на самом деле, мы можем делать любые транспозиции $(i, i + 1)$, но ими выражается любая перестановка. $\square$