

Билет 18

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

| | | |
|-----|--|---|
| 0.1 | Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского. | 1 |
|-----|--|---|

0.1. Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

Определение 0.1.

Нормированным пространством над \mathbb{R} называется пара $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, где X - линейное пространство над \mathbb{R} (далее одно и то же обозначение используется для линейного пространства и его множества векторов), а $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ - норма, обладающая следующими свойствами $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ)

Пример.

$$X = \mathbb{R}, \|x\| = |x|$$

Пример.

На $X = \mathbb{R}^d$ можно задать бесконечно много норм:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}.$$

$$\|x\|_n = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^d |x_i|^n}.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i|.$$

Пример.

$$X = C[a, b], \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Доказательство.

Докажем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \\ &= |f(x_0) + g(x_0)| \\ &\leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \\ &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)| \\ &= \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

□

Определение 0.2.

Пусть X - линейное пространство, тогда функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если удовлетворяет следующим свойствам $\forall x, y, z \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$.

2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Замечание.

Аналогичные определения можно дать над \mathbb{C} , тогда надо ещё потребовать $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$, и третий пункт примет вид $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Пример.

$$X = \mathbb{R}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

Пример.

Пусть $w_1, \dots, w_d > 0$, тогда

$$X = \mathbb{R}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d w_i x_i y_i$$

Пример.

$$X = C[a, b], \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Свойства.

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ и $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

Доказательство.

Пусть $t \in \mathbb{R}$.

$$\langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0.$$

$$\langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle.$$

Это квадратное уравнение имеет корень только если $x + ty = 0$, значит не более одного корня. Его дискриминант ≤ 0 :

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \implies \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle. \quad \square$$

3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - норма

Доказательство.

- (а) Первое свойство переносится напрямую, из аналогичных свойств для $\langle x, x \rangle$ и $\sqrt{\cdot}$.
- (б) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = \lambda \|x\|$
- (в)

$$\begin{aligned} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\iff \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\stackrel{2}{\iff} \langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &\iff \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\iff \langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\iff \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

Последнее неравенство - неравенство Коши-Буняковского.

□

Свойства.

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - метрика

Доказательство.

(a) Первое свойство переходит прямо

(b) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)|\|x - y\| = \rho(x, y)$

(c) $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$ (\triangle для нормы).

□

2. $||x| - |y|| \leq \|x - y\|$

Доказательство.

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \stackrel{\triangle}{\leq} \|x - y\| + \|y\|.$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \stackrel{\triangle}{\leq} \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

$$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

□