

# Билет 29

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 29: ! Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения. . . . .	1
-----	---	---

## 0.1. Билет 29: ! Непрерывный образ компакта. Теорема Вейерштрасса. Непрерывность обратного отображения.

### Теорема 0.1.

Пусть  $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$  - метрические пространства,  $f : X \mapsto Y$ ,  $f$  непрерывна,  $K \subset X$  - компакт.

Тогда  $f(K)$  компакт.

### Доказательство.

Возьмём открытое покрытие  $f(K)$ , назовём его  $U_\alpha$ .

Тогда  $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$  - открытое покрытие  $K$ .

Выберем конечное  $V_{\alpha_k}$ .

Тогда  $K \subset \bigcup_{k=1}^n V_{\alpha_k} \implies f(K) \subset \bigcup_{k=1}^n f(V_{\alpha_k}) = \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$ . □

### Теорема 0.2 (Вейерштрасса).

Пусть  $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$  - метрические пространства,  $f : X \mapsto Y$ ,  $f$  непрерывна,  $K \subset X$  - компакт.

Тогда  $\exists u, v \in K \quad \forall x \in K \quad f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ .

### Доказательство.

$f(K)$  - компакт  $\implies$  замкнут и ограничен.

Ограничен  $\implies \inf f$  и  $\sup f$  - конечные.

Предположим что  $b := \sup f \notin f(K)$ .

Тогда можем взять последовательность  $x_n \in f(K)$ ,  $x_n \rightarrow b$ . Тогда  $b$  - предельная точка  $f(K)$ .  $b \in f(K)' \subset \text{Cl } f(K) = f(K)$ . Противоречие. Значит  $b \in f(K) \implies \exists v \in K \quad f(v) = b$ . Аналогично для  $\inf f$ . □

### Теорема 0.3.

Пусть  $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$  - метрические пространства,  $f : X \mapsto Y$ ,  $f$  непрерывная биекция,  $X$  - компакт.

Тогда  $f^{-1}$  непрерывна.

### Доказательство.

Пусть  $g := f^{-1}$ .

Пусть  $U \subset X$  - открытое множество.

Заметим, что  $f(U) = Y \setminus f(X \setminus U)$  (так-как биекция).

$X \setminus U$  - замкнутое подмножество компакт  $\implies$  компакт  $\implies f(X \setminus U)$  замкнуто  $\implies Y \setminus f(X \setminus U)$  - открыто.

$f(U) = g^{-1}(U)$ , значит для  $g$  прообраз открытого открыт  $\implies g$  непрерывно. □