Билет 56

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 56: Пространство ℓ^∞ и его полнота 1

0.1. Билет 56: Пространство ℓ^∞ и его полнота

***Определение* 0.1.** Пространство $\ell^\infty(E)$.

$$\ell^\infty(E) := \{f : E \mapsto \mathbb{R} \mid \sup_{x\in E}|f(x)| < +\infty\}$$

с нормой $||f||_{\ell^\infty(E)} := \sup_{x\in E}|f(x)|$

Другими словами, нормированное пространство $\ell^\infty(E)$ состоит из ограниченных на E функций.

Замечание. $\sup_{x\in E}|f(x)|$ действительно норма

1. $||f|| \geqslant 0$ и $||f|| = 0 \iff \sup_{x\in E}|f(x)| \geqslant 0$ и $\sup_{x\in E}|f(x)| = 0 \iff f \equiv 0$
2. $\sup_{x\in E}|\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in E} f(x) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$
3. Неравенство треугольника
   $||f+g|| = \sup_{x\in E}|f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{x\in E}(|f(x)|+|g(x)|) \leqslant \sup_{x\in E}|f(x)| + \sup_{x\in E}|g(x)| = ||f|| + ||g||$

В доказательстве нер-ва треугольника пользовались тем, что $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ и $\sup(f+g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$

Замечание. Связь нормы с равномерной сходимостью
$f_n \rightrightarrows f$ на $E \iff \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \lim_{n\to+\infty}||f_n - f|| = 0 \iff$

f_n сходится к f в пространстве $\ell^\infty(E)$

То есть про равномерную сходимость можно думать как про сходимость в специальном нормированном пространстве.

Теорема 0.1.
$\ell^\infty(E)$ - полное нормированное пространство.

Доказательство.
Надо доказать, что каждая фундаментальная последовательность из ℓ^∞ сходится к элементу этого же пространства.

Пусть f_n фундаментальная последовательность из ℓ^∞. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad ||f_n - f_m|| < \varepsilon$$

Заметим, что $||f_n - f_m|| = \sup_{x\in E}|f_n(x) - f_m(x)| \geqslant |f_n(x) - f_m(x)|$ при $x \in E$.

То есть $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши для равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$, где $f : E \mapsto \mathbb{R}$ - некоторая функция.

Осталось понять, что $f \in \ell^\infty(E)$, т.е. что f - ограниченная функция.

Подставим $\varepsilon = 1$ в определение равномерной сходимости. Для него найдется N, т.ч. при $n \geqslant N$ $|f_n(x) - f(x)| < 1$ при всех $x \in E$. Тогда по неравенству треугольника :

$$|f(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| < |f_n(x)| + 1 \leqslant ||f_n|| + 1$$

Но т.к. n - фиксированное число, то $|f(x)|$ не превосходит какого-то фиксированного выражения. Значит f - ограниченная функция. $\square$