

Билет 60

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 60: Признаки Дирихле и Лейбница для равномерной сходимости	1
--	---

0.1. Билет 60: Признаки Дирихле и Лейбница для равномерной сходимости

Теорема 0.1 (Признак Дирихле (Дурихле)).

$$a_n, b_n : E \mapsto \mathbb{R}$$

1. $\left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq K \forall n \forall x \in E$
2. $b_n \Rightarrow 0$ на E
3. $\forall x \in E b_n(x)$ - монотонны по n

При выполнении этих условий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ - равномерно сходится на E .

Доказательство.

$A_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k(x)$. $|A_n(x)| \leq K$, по условию. Воспользуемся преобразованием Абеля (если забыли доказательство - оно в вопросе 46). Его корректность для функциональных рядов можно проверить, повторив обычное доказательство с приписанным ' (x) '

$$\sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(x) = A_n(x)b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$$

- $A_n(x)b_n(x) \Rightarrow 0$ - как произведение равномерно ограниченной на равномерно стремящуюся к нулю
- $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ - равномерно сходится. Воспользуемся для доказательства этого факта признаком сравнения.

$u_k(x) := A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ и $v_n(x) := K|b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ Осталось доказать, что $v_n(x)$ - равномерно сходится. $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| \underbrace{=}_{b_n(x) \text{ — монотонные}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) - b_{n+1}(x) \right|$. Посмотрим на частичные суммы:

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k(x) - b_{k+1}(x) \right| = |b_1(x) - b_{n+1}(x)| \Rightarrow |b_1(x)|$$

Докажем последний переход:

$$||b_1(x) - b_{n+1}(x)| - b_1(x)| \leq |b_1(x) - b_{n+1}(x) - b_1(x)| = |b_{n+1}(x)| \underbrace{\Rightarrow}_{\text{по условию}} 0$$

Так как частичные суммы равномерно сходятся, то и сам ряд равномерно сходится.

□

Теорема 0.2 (Признак Лейбница).

$$b_n : E \mapsto \mathbb{R}$$

1. $\forall x \in E b_n(x) \geq 0$ и монотонны
2. $b_n(x) \Rightarrow 0$ на E .

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

$a_n(x) := (-1)^{n-1}$. И воспользуемся признаком Дирихле для $a_n(x)$ и $b_n(x)$. Частичные суммы $a_n(x)$ либо 1, либо 0 \Rightarrow ограничены. \square

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ - равномерно сходится на $(0; 1)$

Доказательство.

$\frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x^n}{n} \Rightarrow 0$, также $\frac{x^n}{n}$ монотонная. Получаем равномерную сходимость ряда по Лейбни-цу. Также ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}|$ - сходится, так как меньше геометрической прогрессии. **НО** такой ряд не сходится равномерно по критерию Коши. \square