

Билет 90

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 90: Дифференцируемость обратного отображения. Образ области при невырожденном отображении	1
-----	---	---

0.1. Билет 90: Дифференцируемость обратного отображения. Образ области при невырожденном отображении

Напоминание теоремы об обратной функции:

Теорема 0.1.

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ открытое, $x_0 \in D$, f непрерывно дифференцируема в окрестности $(\cdot)x_0$ и $y_0 = f(x_0)$, матрица $A := f'(x_0)$ обратима. Тогда существуют окрестности U точки x_0 , V окрестность $(\cdot)y_0$, т.ч. $f : U \rightarrow V$ — обратима и $f^{-1} : V \rightarrow U$ — непрерывна.

Теорема 0.2 (Теорема о дифференцируемости обратного отображения). $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^N$ — открытое. f непрерывна. $a \in D$, $f(a) = b$. f дифференцируема в точке a , U — окрестность точки a , V — окрестность точки b , $A := f'(a)$ — обратима, $f^{-1} : V \rightarrow U$ — непрерывна. Тогда $g := f^{-1}$ — дифференцируема в точке b .

Доказательство.

Определение дифференцируемости f в a :

$$f(a+h) = f(a) + Ah + \alpha(h)\|h\|, \text{ где } \alpha(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$$

$$\text{Обозначим } K := f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)\|h\|$$

Хотим (Храбров хочет) доказать, что если $K \rightarrow 0$, то $h \rightarrow 0$. Зачем — станет понятно позже

$$\|h\| = \|A^{-1}Ah\| \leq \|A^{-1}\| \|Ah\| \implies \|Ah\| \geq \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|}$$

Далее Храбров поломался немного, но потом починился.

Выпишем оценку на $\|K\|$:

$$\|K\| = \|Ah + \alpha(h)\|h\| = \|Ah - (-\alpha(h)\|h\|)\| \geq \|Ah\| - \|-\alpha(h)\|h\| = \|Ah\| - \|\alpha(h)\|h\|$$

($\|a-b\| \geq ||a| - |b||$ — свойство нормы, но с модулем, а выше выписали сразу без модуля, ведь $|a| \geq a$)

Продолжим оценивать:

$$\|Ah\| - \|\alpha(h)\|h\| \geq \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|h\| = \|h\| \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| \right)$$

(первый переход по доказанной чуть выше оценке снизу на $\|Ah\|$)

Храбров, когда починился, решил рассматривать только такую маленькую окрестность точки a , в которой h — вектора до точек из окрестности — настолько мелкие, что $\alpha(h)$ достаточно маленькое ($\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$). Достаточно маленькое, чтобы $\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| > 0$ было.

Тогда получаем, что если $\|K\| \rightarrow 0$, то и $\|h\| \rightarrow 0$: так как $\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| > 0$, то

$$\|h\| \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| \right) \geq \|h\| \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$\|h\|$ домножается на константу, так что теперь точно должно быть ясно, что она стремится к 0, если $\|K\|$ стремится.

В конце он вспомнил, что у нас есть непрерывность, и она всё упрощает, хотя я и не совсем осознал как.

Продолжим: мы хотим дифференцируемость g (он же f^{-1}), проверим (почти) определение:

$$g(b+K) - g(b) = g(f(a) + f(a+h) - f(a)) - g(f(a)) = a+h-a = h = A^{-1}K - A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)$$

Пояснение: почему мы вообще куда-то K подставляем и почему это нам поможет? По определению дифференцируемости, нужно, чтобы $g(b+t) = g(b) + Mt + o(\|h\|)$ при $h \rightarrow 0$. У нас $K = f(a+h) - f(a)$, притом f - непрерывна, так что $a+h \rightarrow a \implies f(a+h) \rightarrow f(a) \implies K \rightarrow 0$, так что K вполне подходит для проверки определения дифференцируемости: регулируя h (свободную переменную), мы можем устремить K к нулю.

(Абзац выше - мои домыслы, Храбров это не проговаривал)

Далее, откуда вылезло последнее равенство в проверке выше:

$$K = Ah + \alpha(h)\|h\| \implies Ah = K - \alpha(h)\|h\| \implies h = A^{-1}K - A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)$$

Ого, почти то, что надо: A^{-1} - дифференциал, надо лишь сделать так, чтобы $A^{-1}(\alpha(h)\|h\|) = o(\|K\|)$. Сейчас докажем:

$$A^{-1}(\alpha(h)\|h\|) = o(\|K\|) \iff \frac{\|A^{-1}\alpha(h)\|h\|}{\|K\|} \xrightarrow{K \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{\|A^{-1}\alpha(h)\|h\|}{\|K\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\alpha(h)\| \|h\|}{\|K\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\alpha(h)\| \|h\|}{\|h\| \frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|} = \frac{\|A^{-1}\| \|\alpha(h)\|}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|}$$

Первый переход: свойство нормы - $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Второй переход: используем доказанную выше оценку снизу: $\|K\| \geq \|h\| \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| \right)$. Знаменатель уменьшим - дробь увеличится.

Что в итоге получили: в числителе константа, умноженная на $\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. А в знаменателе - что-то большее 0 (доказано выше). Так что вся дробь к 0 стремится, что нам и хотелось. Ура!

Применим эту теорему в каждой точке - получим дифференцируемость в любой точке окрестности (области определения f^{-1}).

Отмечу отдельно что A^{-1} - дифференциал, при этом $A = f'(x)$, то есть $(f^{-1}(y))' = A^{-1} = (f'(x))^{-1}$, где $y = f(x)$. То есть в итоге $(f^{-1}(y))' = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$ (подставили $x = f^{-1}(y)$)

□

Следствие Если в теореме выше f - непрерывно дифференцируема, то f^{-1} тоже непрерывно дифференцируема.

Из прошлой теоремы установили, что дифференцируема, теперь хочется непрерывность производной.

Там мы получили, что дифференциал f^{-1} - это A^{-1} .

При этом по условию этого следствия, f - непрерывно дифференцируемая, то есть f' непрерывная, то есть A - непрерывная, то есть её коэффициенты непрерывно зависят от точки (возможно, неочевидно, почему если коэффициенты непрерывны, то и матрица тоже? ?? вот здесь норма оценивается через коэффициенты)

Вспоминаем, как устроена обратная матрица: есть явная формула. Нам сама формула не важна (но если хочется - $A_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det(A)}$, вроде так), это миноры (многочлены от коэффициентов), делённый на определитель (тоже многочлен от коэффициентов, но не нулевой, так как матрица обратима), так что это у нас композиция непрерывных функций (многочлены непрерывны, в числителе не 0), которая сама является непрерывной функцией. А это нам и надо было.

Следствие. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, D - открытое, f - непрерывно дифференцируема во всех точках D , $f'(x)$ - обратима для всех $x \in D$. Тогда для любого открытого $G \subset D$ верно, что $f(G)$ - открытое.

Доказательство.

Возьмём точку $b \in f(G)$. Тогда $\exists a \in D : f(a) = b$ ($a = f^{-1}(b)$).

Тогда применим теорему об обратной функции: сузим f на G - оно открытое, всё ок. И вот на этой суженной f и применим теорему:

$\exists U \ni a, U \subset G$ - найдём окрестность вокруг точки a

Тогда $f(U) = V$ - окрестность точки b , и при этом $V \subset f(G)$, так что $b \in f(U) = V \subset f(G)$, и в этой цепочке V - окрестность точки b , то есть открытый шар. То есть для b мы нашли искомый открытый шар, то есть b внутренняя, то есть любая точка $f(G)$ внутренняя и потому оно открытое

(для не открытого бы не сработало, так как мы сужали функцию на G , а теорема требует, чтобы f действовало из открытого множества \square)

Определение 0.1. $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

Тогда (x, y) будет обозначаться вектор из $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$((x, y)$ - состоит из 2 частей: $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$)

Теорема 0.3.

Пусть $A : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ - линейное отображение

Тогда если $(A(h, 0_n) = 0_n \implies h = 0_n)$, то уравнение $A(x, y) = b$ имеет единственное решение

$$A(x, y) = b$$

$$A(x, y) = A(x, 0) + A(0, y) \text{ (по линейности } A)$$

$$A(x, 0) = A(x, y) - A(0, y) = b - A(0, y)$$

Немного поизменяли формулу для удобства. Если решение существует и единственно для этой записи, то теорема верна.

Покажем единственность: пусть $A(x, 0) = b - A(0, y)$ и $A(\tilde{x}, 0) = b - A(0, y)$, то $A(x - \tilde{x}, 0) = 0 \implies x - \tilde{x} = 0 \implies x = \tilde{x}$

Покажем существование: $A(x, 0)$ - инъекция, так как ядро тривиально, т.е. $A(x, 0) = 0 \implies x = 0$. При этом $A(x, 0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то есть размерности совпадают, и потому это биекция, и потому решение есть.

Я так и не уверен, что такое "Образ области при невырожденном отображении" - то ли второе следствие, то ли эта теорема...