

Билет 56

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 56: Пространство ℓ^∞ и его полнота	1
--	---

0.1. Билет 56: Пространство ℓ^∞ и его полнота

Определение 0.1. Пространство $\ell^\infty(E)$.

$$\ell^\infty(E) := \{f : E \mapsto \mathbb{R} \mid \sup_{x \in E} |f(x)| < +\infty\}$$

с нормой $\|f\|_{\ell^\infty(E)} := \sup_{x \in E} |f(x)|$

Другими словами, нормированное пространство $\ell^\infty(E)$ состоит из ограниченных на E функций.

Замечание. $\sup_{x \in E} |f(x)|$ действительно норма

$$1. \|f\| \geq 0 \text{ и } \|f\| = 0 \iff \sup_{x \in E} |f(x)| \geq 0 \text{ и } \sup_{x \in E} |f(x)| = 0 \iff f \equiv 0$$

$$2. \sup_{x \in E} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in E} |f(x)| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E$$

3. Неравенство треугольника

$$\|f + g\| = \sup_{x \in E} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in E} (|f(x)| + |g(x)|) \leq \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$$

В доказательстве нер-ва треугольника пользовались тем, что $|a + b| \leq |a| + |b|$ и $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$

Замечание. Связь нормы с равномерной сходимостью

$$f_n \rightrightarrows f \text{ на } E \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \iff$$

f_n сходится к f в пространстве $\ell^\infty(E)$

То есть про равномерную сходимость можно думать как про сходимость в специальном нормированном пространстве.

Теорема 0.1.

$\ell^\infty(E)$ - полное нормированное пространство.

Доказательство.

Надо доказать, что каждая фундаментальная последовательность из ℓ^∞ сходится к элементу этого же пространства.

Пусть f_n фундаментальная последовательность из ℓ^∞ . Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geq N \quad \|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

Заметим, что $\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(x) - f_m(x)|$ при $x \in E$.

То есть $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши для равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$, где $f : E \mapsto \mathbb{R}$ - некоторая функция.

Осталось понять, что $f \in \ell^\infty(E)$, т.е. что f - ограниченная функция.

Подставим $\varepsilon = 1$ в определение равномерной сходимости. Для него найдется N , т.ч. при $n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| < 1$ при всех $x \in E$. Тогда по неравенству треугольника :

$$|f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| < |f_n(x)| + 1 \leq \|f_n\| + 1$$

Но т.к. n - фиксированное число, то $|f(x)|$ не превосходит какого-то фиксированного выражения. Значит f - ограниченная функция. \square