

Билет 81

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 81: Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство	1
--	---

0.1. Билет 81: Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство

Определение 0.1.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

f – непрерывно дифференцируема в точке a , если

f дифференцируема в окрестности точки a и

$d_x f$ непрерывна в точке a ($\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$)

: $\mathbb{R}^m!!!$

Теорема 0.1.

f – непрерывно дифференцируема в точке $a \iff$

все частные производные f существуют в окрестности точки a и непрерывны в точке a .

Доказательство.

“ \implies ” Разложим f на координатные функции, рассмотрим одну из них - f_k . Продифференцируем её по какому-то x_j . Рассмотрим модуль разности значений в точках x и a :

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \right|$$

для доказательства оценим эту разность сверху чем-то стремящимся к 0.

Так как $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \langle d_x f(e_j), e_k \rangle$, то

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \right| = |\langle d_x f(e_j) - d_a f(e_j), e_k \rangle| \leq \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \|e_k\| =$$

$$= \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \leq \|d_x f - d_a f\| \|e_j\| = \|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$$

“ \impliedby ”

Рассмотрим $\|d_x f - d_a f\|^2$

Воспользуемся ранее доказанной теоремой, что квадрат нормы матрицы не превосходит суммы квадратов её коэффициентов:

$$\|d_x f - d_a f\|^2 \leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right)^2 \rightarrow 0, \text{ так как}$$

из $x \rightarrow a$ и непрерывности частных производных следует, что каждое слагаемое стремится к 0, их конечное кол-во, значит, и сумма стремится к 0, поэтому $\|d_x f - d_a f\|^2 \rightarrow 0$, а тогда и $\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$ \square