Билет 46

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 46: Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.

***Определение* 0.1.**

$\sum a_n$ сходится абсолютно, если $\sum |a_n|$ – сходится.

$\sum a_n$ сходится условно, если $\sum a_n$ – сходится, но не абсолютно.

Теорема 0.1 (Преобразование Абеля)**.**

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$,

где $A_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $A_0 := 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1}(A_k b_k - A_k b_{k+1}) \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})\end{aligned}$$

□

Теорема 0.2 (Признак Дирихле)**.**

Если:

1. $A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ограничены
2. b_n монотонны
3. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – сходится.

Доказательство.

$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ имеет предел

$A_n b_n \to 0$, A_n – ограничены, $b_n \to 0$

$\sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ имеет предел – это частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$, то есть надо доказать, что этот ряд сходится.

Проверим, что он абсолютно сходится:

По условию $|A_n| \leqslant M$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |A_k||b_k - b_{k+1}| &\leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \\ &= M|\sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1}| \\ &= M|b_1 - b_{n+1}| \\ &\leqslant M(|b_1| + |b_{n+1}|) \leqslant 2M|b_1|\end{aligned}$$

□

Теорема 0.3 (Признак Абеля)**.**
Если:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2. b_n монотонны

3. b_n ограничены

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – сходится.

Доказательство.
Существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =: b$, $\widetilde{b}_n = b_n - b$ монотонны и $\to 0$

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – сходится $\implies$ A_n – ограничена.

По признаку Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \widetilde{b}_n$ – сходится.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\widetilde{b}_n + b)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \widetilde{b}_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \widetilde{b}_n + b\sum_{n=1}^{\infty} a_n\end{aligned}$$

Оба ряда сходятся, значит, и их сумма тоже сходится.

□