Билет 80

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 80: Связь частных производных и дифференцируемости.

Теорема 0.1.

$f : E \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, a \in IntE.$

В окрестности точки а существуют все частные производные и они непрерывны в точке а.

Тогда f дифференцируема в точке а.

Доказательство.

По сути, мы знаем, как должно быть устроено линейное отображение из определения дифференцируемости, т.к. нам известны частные производные (подробнее об этом расписано в билете 76)

$R(h) := f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(a)h_k$

Надо доказать, что $\frac{R(h)}{\|h\|} \to 0$ при $h \to 0$

Заведем вспомогательные вектора: $b_k = (a_1 + h_1, ..., a_k + h_k, a_{k+1}, ..., a_n)$, заметим, что тогда получается $b_0 = a, b_n = a + h$

Рассмотрим вспомогательные функции одной переменной $F_k(t) := f(b_{k-1} + th_k e_k)$, здесь e_k - это стандартный вектор

Запишем в координатном виде: $F_k(t) := f(a_1 + h_1, ..., a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + th_k, a_{k+1}, ..., a_n)$

Применим одномерную теорему Лагранжа: $\underbrace{F_k(1) - F_k(0)}_{f(b_k)-f(b_{k-1})} = F'_k(\Theta_k) = h_k f'_{x_k}(a_1 + h_1, ..., a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1}, ..., a_n) = h_k f'_{x_k}(c_k)$ для некоторой $\Theta_k \in (0,1)$

Получили, что $f(b_k) - f(b_{k-1}) = h_k f'_{x_k}(c_k)$. Сложим все получившиеся равенства: $f(b_n) - f(b_0) = f(a+h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} h_k f'_{x_k}(c_k) = \sum_{k=1}^{n} h_k f'_{x_k}(a) + \sum_{k=1}^{n} h_k (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$

Заметим, что $\sum_{k=1}^{n} h_k (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$ - формула для остатка $R(h)$

$|R(h)| \leqslant \|h\| \left(\sum_{k=1}^{n} (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2\right)^{\frac{1}{2}}$(КБШ)

$\iff \frac{R(h)}{\|h\|} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $h \to 0$ по непрерывности частных производных

□

Замечание 1. В формулировке теоремы интересуемся дифференцируемостью скалярной функции, но дифференцируемость векторнозначной функции равносильна дифференцируемости каждой ее координатной функции, которая есть скалярная функция.

Замечание 2. Можно не требовать непрерывность ровно одной из частных производных

Доказательство.

Не требуем непрерывность f'_{x_1} в точке а. Необходимо, чтобы $f'_{x_1}(c_1) - f'_{x_1}(a) \to 0$.

Нас интересует разность $f(b_1) - f(b_0) = f(a_1 + h, a_2, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)$. То есть получили функцию, у которой последние координаты зафиксированы, а первую меняем. Такая функция дифференцируема в точке a_1 по определению частной производной.

$f(a_1 + h, a_2, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n) + f'_{x_1}(a_1, ..., a_n)h_1 + o(h_1)$

$f(b_1) - f(b_0) = f'_{x_1}(a)h_1 + o(h_1)$ □

Замечание 3. Дифференцируемость в точке не дает существование част.производных в окрестности и тем более их непрерывность

Пример.

$f(x, y) = x^2 + y^2$, если ровно одно из чисел x или y рационально

$f(x, y) = 0$ иначе

f непрерывна только в точке (0, 0), в остальных точках нет непрерывности ни по какому направлению

Проверим дифференцируемость в (0, 0): $f(h, k) = \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$

$f(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$, верно, т.к. $0 \leqslant f(h, k) \leqslant h^2 + k^2$