Билет 90

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 90: Дифференцируемость обратного отображения. Образ области при невырожденном отображении

Напоминание теоремы об обратной функции:

Теорема 0.1.

$f : D \to R^n, D \subset R^n$ открытое, $x_0 \in D, f$ непрерывно дифференцируема в окрестности $(\cdot)x_0$ и $y_0 = f(x_0)$, матрица $A := f'(x_0)$ обратима. Тогда существуют окрестности U точки x_0, V окрестность $(\cdot)y_0$, т.ч. $f : U \to V -$ обратима и $f^{-1} : V \to U -$ непрерывна.

Теорема 0.2 (Теорема о дифференцируемости обратного отображения). $f : D \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^N$ – открытое. f непрерывна. $a \in D, f(a) = b$. f дифференцируема в точке a, U – окрестность точки a, V – окрестность точки b, $A := f'(a)$ – обратима, $f^{-1} : V \to U$ – непрерывна. Тогда $g := f^{-1}$ – дифференцируема в точке b.

Доказательство.

Определение дифференцируемости f в a:

$f(a + h) = f(a) + Ah + \alpha(h)\|h\|$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$

Обозначим $K := f(a + h) - f(a) = Ah + \alpha(h)\|h\|$

Хотим (Храбров хочет) доказать, что если $K \to 0$, то $h \to 0$. Зачем - станет понятно позже

$$\|h\| = \|A^{-1}Ah\| \leqslant \|A^{-1}\|\|Ah\| \implies \|Ah\| \geqslant \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|}$$

Далее Храбров поломался немного, но потом починился.

Выпишем оценку на $\|K\|$:

$$\|K\| = \|Ah + \alpha(h)\|h\|\| = \|Ah - (-\alpha(h)\|h\|)\| \geqslant \|Ah\| - \|-\alpha(h)\|h\|\| = \|Ah\| - \|\alpha(h)\|h\|\|$$

($\|a - b\| \geqslant |\,\|a\| - \|b\|\,|$ - свойство нормы, но с модулем, а выше выписали сразу без модуля, ведь $|a| \geqslant a$)

Продолжим оценивать:

$$\|Ah\| - \|\alpha(h)\|h\|\| \geqslant \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|\|h\| = \|h\|\left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|\right)$$

(первый переход по доказанной чуть выше оценке снизу на $\|Ah\|$)

Храбров, когда починился, решил рассматривать только такую маленькую окрестность точки a, в которой h – вектора до точек из окрестности – настолько мелкие, что $\alpha(h)$ достаточно маленькое ($\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$). Достаточно маленькое, чтобы $\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| > 0$ было.

Тогда получаем, что если $\|K\| \to 0$, то и $\|h\| \to 0$: так как $\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\| > 0$, то

$$\|h\|\left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|\right) \geqslant \|h\|\frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$\|h\|$ домножается на константу, так что теперь точно должно быть ясно, что она стремится к 0, если $\|K\|$ стремится.

В конце он вспомнил, что у нас есть непрерывность, и она всё упрощает, хотя я и не совсем осознал как.

Продолжим: мы хотим дифференцируемость g (он же f^{-1}), проверим (почти) определение:

$$g(b + K) - g(b) = g(f(a) + f(a + h) - f(a)) - g(f(a)) = a + h - a = h = A^{-1}K - A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)$$

Пояснение: почему мы вообще куда-то K подставляем и почему это нам поможет? По определению дифференцируемости, нужно, чтобы $g(b+t) = g(b) + Mt + o(\|h\|)$ при $h \to 0$. У нас $K = f(a+h) - f(a)$, притом f - непрерывна, так что $a+h \to a \implies f(a+h) \to f(a) \implies K \to 0$, так что K вполне подходит для проверки определения дифференцируемости: регулируя h (свободную переменную), мы можем устремить K к нулю.

(Абзац выше - мои домыслы, Храбров это не проговаривал)

Далее, откуда вылезло последнее равенство в проверке выше:

$$K = Ah + \alpha(h)\|h\| \implies Ah = K - \alpha(h)\|h\| \implies h = A^{-1}K - A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)$$

Ого, почти то, что надо: A^{-1} - дифференциал, надо лишь сделать так, чтобы $A^{-1}(\alpha(h)\|h\|) = o(\|K\|)$. Сейчас докажем:

$$A^{-1}(\alpha(h)\|h\|) = o(\|K\|) \iff \frac{\|A^{-1}\alpha(h)\|h\|\|}{\|K\|} \underset{K\to 0}{\to} 0$$

$$\frac{\|A^{-1}\alpha(h)\|h\|\|}{\|K\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\alpha(h)\|\|h\|}{\|K\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\|\alpha(h)\|\|h\|}{\|h\|\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|\alpha(h)}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|}$$

Первый переход: свойство нормы - $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$

Второй переход: используем доказанную выше оценку снизу: $\|K\| \geqslant \|h\|\left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\alpha(h)\|\right)$. Знаменатель уменьшим - дробь увеличится.

Что в итоге получили: в числителе константа, умноженная на $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. А в знаменатале - что-то большее 0 (доказано выше). Так что вся дробь к 0 стремится, что нам и хотелось. Ура!

Применим эту теорему в каждой точке - получим дифференцируемость в любой точке окрестности (области определения f^{-1}).

Отмечу отдельно что A^{-1} - дифференциал, при этом $A = f'(x)$, то есть $(f^{-1}(y))' = A^{-1} = (f'(x))^{-1}$, где $y = f(x)$. То есть в итоге $(f^{-1}(y))' = (f'(f^{-1}(y))^{-1}$ (подставили $x = f^{-1}(y)$)

$\square$

Следствие Если в теореме выше f - непрерывно дифференцируема, то f^{-1} тоже непрерывно дифференцируема.

Из прошлой теоремы установили, что дифференцируема, теперь хочется непрерывность производной.

Там мы получили, что дифференциал f^{-1} - это A^{-1}.

При этом по условию этого следствия, f - непрерывно дифференцируемая, то есть f' непрерывная, то есть A - непрерывная, то есть её коэффициенты непрерывно зависят от точки (возможно, неочевидно, почему если коэффициенты непрерывны, то и матрица тоже? **??** вот здесь норма оценивается через коэффиценты)

Вспоминаем, как устроена обратная матрица: есть явная формула. Нам сама формула не важна (но если хочется - $A^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}M_{ji}}{det(A)}$, вроде так), это миноры (многочлены от коэффициентов), делёный на определитель (тоже многочлен от коэффициентов, но не нулевой, так как матрица обратима), так что это у нас композиция непрерывных функций (многочлены непрерывны, в числителе не 0), которая сама является непрерывной функцией. А это нам и надо было.

Следствие. $f : D \to \mathbb{R}^d, D$ – открытое, f - непрерывно дифференцируема во всех точках D, $f'(x)$ - обратима для всех $x \in D$. Тогда для любого открытого $G \subset D$ верно, что $f(G)$ - открытое.

Доказательство.

Возьмём точку $b \in f(G)$. Тогда $\exists a \in D : f(a) = b$ $(a = f^{-1}(b))$.

Тогда применим теорему об обратной функции: сузим f на G - оно открытое, всё ок. И вот на этой суженной f и применим теорему:

$\exists U \ni a$, $U \subset G$ - найдём окрестность вокруг точки a

Тогда $f(U) = V$ - окрестность точки b, и при этом $V \subset f(G)$, так что $b \in f(U) = V \subset f(G)$, и в этой цепочке V - окрестность точки b, то есть открытый шар. То есть для b мы нашли искомый открытый шар, то есть b внутренняя, то есть любая точка $f(G)$ внутренняя и потому оно открытое

(для не открытого бы не сработало, так как мы сужали функцию на G, а теорема требует, чтобы f действовало из открытого множества □

***Определение* 0.1.** $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

Тогда (x, y) будет обозначаться вектор из $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

((x, y) – состоит из 2 частей: $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$)

Теорема 0.3.

Пусть $A : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ - линейное отображение

Тогда если $(A(h, 0_m) = 0_n \implies h = 0_n)$, то уравнение $A(x, y) = b$ имеет единственное решение

$A(x, y) = b$

$A(x, y) = A(x, 0) + A(0, y)$ (по линейности A)

$A(x, 0) = A(x, y) - A(0, y) = b - A(0, y)$

Немного поизменяли формулу для удобства. Если решение существует и единственно для этой записи, то теорема верна.

Покажем единственность: пусть $A(x, 0) = b - A(0, y)$ и $A(\tilde{x}, 0) = b - A(0, y)$, то $A(x - \tilde{x}, 0) = 0 \implies x - \tilde{x} = 0 \implies x = \tilde{x}$

Покажем существование: $A(x, 0)$ - инъекция, так как ядро тривильно, т.е. $A(x, 0) = 0 \implies x = 0$. При этом $A(x, 0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то есть размерности совпадают, и потому это биекция, и потому решение есть.

Я так и не уверен, что такое "Образ области при невырожденном отображении" - то ли второе следствие, то ли эта теорема...