Билет 28

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 28: Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов. 1

0.1. Билет 28: Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.

***Определение* 0.1.**

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$.

f называется непрерывной в точке $a \in E$ если a - изолированная точка (**TODO:** не предельная? Или есть пустая проколотая окрестность в X?), либо $a \in E'$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Теорема 0.1.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$, $\langle Z, \rho_Z \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $f : E \mapsto Y$, $f(E) \subset \tilde{E} \subset Y$, $g : \tilde{E} \mapsto Z$.

Если f непрерывна в $a \in E$, а g непрерывна в $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в a.

Доказательство.

$$f \text{ непрерывна в } a \implies \forall \delta > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^X_\lambda(a) \cap E \quad f(x) \in B^Y_\delta(f(a)) \cap \tilde{E}.$$
$$g \text{ непрерывна в } f(a) \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^Y_\delta(f(a)) \cap \tilde{E} \quad g(x) \in B_\varepsilon(g(f(a))).$$

Комбинируем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}^X_\lambda(a) \quad g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a))) \implies g \circ f \text{ непрерывна в } a.$$ □

Теорема 0.2.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$.

f непрерывна на $X \iff \forall$ открытого $U \subset X$ $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ открыт.

Доказательство.

Необходимость ($\implies$):

Пусть $V = f^{-1}(U)$.

Пусть $a \in V$. Так-как U открыто, $\exists \varepsilon > 0 \quad B^Y_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

По непрерывности $\exists \delta > 0 \quad f(B^X_\delta(a)) \subset B^Y_\varepsilon(f(a)) \subset U$.

$f(B^X_\delta(a)) \subset U \implies B^X_\delta(a) \subset V \implies a \in \operatorname{Int} V \implies V$ - открытое.

Достаточность ($\impliedby$):

Проверим непрервыность в $a \in X$.

$U := B^Y_\varepsilon(f(a))$ - открытое множество.

Значит, $\exists \delta > 0 \quad B^X_\delta(a) \subset f^{-1}(U) = f^{-1}(B^Y_\varepsilon(f(a)))$

Тоесть, $f(B^X_\delta(a)) \subset B^Y_\varepsilon(f(a))$, а это и есть определение непрерывности в терминах шаров. □