Билет 59

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 59: ! Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствие. Примеры. . . 1

0.1. Билет 59: ! Признак сравнения. Признак Вейерштрасса. Следствие. Примеры.

Теорема 0.1 (Признак сравнения).

 $u_n, v_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\forall x \in E \ |u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ - равномерно сходится, можно применить признак Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \,\forall p \in \mathbb{N} \,\forall x \in E$$
 выполняется $\left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k(x) \right| < \varepsilon$

Из условия теоремы можно записать неравенство на частичные суммы.

$$\varepsilon > \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_k(n) \right| \geqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \geqslant \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k(x) \right|$$

Получили, что критерий Коши выполняется для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, значит он сходится равномерно.

Теорема 0.2 (Признак Вейерштрасса).

 $u_n: E \mapsto \mathbb{R}$. Если $\exists \{a_n\}: |u_n(x)| \leqslant a_n \, \forall x \in E$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство.

$$v_n(x):=a_n\Rightarrow\sum_{n=1}^\infty v_n$$
 - равномерно сходится $\Rightarrow\sum_{n=1}^\infty u_n$ - равномерно сходится по признаку сравнения.

Cледcтвие.

Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$$
 - равномерно сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - равномерно сходится.

Доказательство

Воспользуемся признаком сравнения для рядов
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$
 и $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$

Пример.

$$\sum\limits_{n=1}^{\infty} rac{\sin x}{n^2}$$
 - равномерно сходится на $\mathbb R$

Доказательство.

$$\{a_n\}:=rac{1}{n^2}.$$
 Воспользуемся признаком Вейерштрасса для $\sum_{n=1}^{\infty}rac{\sin x}{n^2}$ и a_n

1

Замечание.

Абсолютная и равномерная сходимости - разные вещи.

1. Ряд сходится абсолютно, но не сходится равномерно.

Пример.
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$
 на $(-1;1)$

Доказательство. $\sum_{n=1}^{\infty}|x^n|=\frac{1}{1-|x|}$ - геометрическая прогрессия. Действительно, такой ряд сходится абсолютно. Π о критерию Коши докажем, что равномерной сходимости нет.

$$\exists \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geqslant N \, \exists p \in \mathbb{N} \, \exists \overline{x} \in E : \left| \sum_{k=n}^{n+p} v_n(\overline{x}) \right| \geqslant \varepsilon$$

При выполнении такого условия равномерной сходимости не будет. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}, \, p = 0,$ $\overline{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}.$

2. Ряд сходится равномерно, но не сходится абсолютно.

 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится равномерно, но нет абсолютной сходимости.

3. Также бывает, что ряд сходится абсолютно, равномерно, но ряд из модулей не сходится равномерно. Пример в следующем вопросе. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{(-1)^n\frac{x^n}{n}}$