Билет 03

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$. Формула трапеций.

Пример.

$S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$

Ограничим $S_n(p)$ сверху: $S_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

Чтобы ограничить снизу, возьмем только вторую половину слагаемых. Заметим, что каждое слагаемое $\geq \frac{n}{2}$. Получаем: $S_n(p) > \frac{n}{2}(\frac{n}{2})^p = \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}}$

$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} < S_n(p) < n^{p+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(\frac{k}{n})^p = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$

$f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\; f(t) = t^p$

$\xi_k = \frac{k}{n}$

Мелкость дробления $\frac{1}{n} \to 0$.

$\implies \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} \to \int\limits_0^1 t^p\,dt = \frac{1}{p+1} \implies S_n(p) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Лемма.

$f \in C^2[a,b]$. Тогда:

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$

Доказательство.

$\gamma := \frac{\alpha+\beta}{2}$ gamma=(a+b)/2 (b-a)/

$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f(t)(t-\gamma)'\,dt = f(t)(t-\gamma)\Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = f(\beta)(\beta-\gamma) - f(\alpha)(\alpha-\gamma) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = \frac{f(\beta)+f(\alpha)}{2}(\beta-\alpha) - \int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\frac{\alpha+\beta}{2})\,dt$

$((t-\alpha)(\beta-t))' = \alpha+\beta-2t = -2(t-\gamma)$

$\Delta = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(t-\gamma)\,dt = -\int\limits_\alpha^\beta f'(t)(-\frac{1}{2})((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f'(t)((t-\alpha)(\beta-t))'\,dt =$

$= \frac{1}{2}f'(t)(t-\alpha)(\beta-t)\Big|_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f''(t)(t-\alpha)(\beta-t)\,dt$ □

Теорема 0.1 (оценка погрешности в ф-ле трапеций)**.**

$f \in C^2[a,b]$ и $\tau-$ дробление. Тогда:

$\left|\int\limits_a^b f - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})\right| \leqslant \frac{|\tau|^2}{8}\int\limits_a^b |f''|$

В частности, если дробление на равные отрезки

$\left|\int\limits_a^b f - \frac{b-a}{n}(\frac{f(x_0)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2})\right| S \leqslant \frac{(b-a)^2}{8n^2}\int\limits_a^b |f''|$

Доказательство.

$$\Delta := \int\limits_a^b f - \sum_{k=1}^n \tfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f - \tfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}(x_k - x_{k-1})) =$$

$$= -\tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t)(t - x_{k-1})(x_k - t)\, dt$$

$$|t - x_{k-1}|\,|x_k - t| \leqslant \tfrac{(x_k - x_{k-1})^2}{4} \leqslant \tfrac{|\tau|^2}{4}$$

$$|\Delta| \leqslant \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\,(t - x_{k-1})(x_k - t)\, dt \leqslant \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|\, \tfrac{|\tau|^2}{4}\, dt = \tfrac{|\tau|^2}{8} \int\limits_a^b |f''|$$

$\square$