

Билет 02

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.	1
-----	---	---

0.1. Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.

Теорема 0.1.

$$|S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f| \leq (b-a)\omega_f(|\tau|)$$

(ω_f – модуль непрерывности)

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta &:= S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_a^b f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t)) dt \\ |\Delta| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(t)| dt \quad \text{по определению } \omega_f : |\xi_k - t| < |\tau| \Rightarrow |f(\xi_k) - f(t)| < \omega_f(|\tau|) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_f(|\tau|) dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f(|\tau|)(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq \omega_f(|\tau|)(b-a) \end{aligned}$$

□

Следствие.

$f \in C([a, b])$, тогда

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau, \xi)_n$, такой что $|\tau_n| \rightarrow 0$, верно:

$$\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$$

Доказательство.

$$f \in C([a, b]) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \omega_f(x) = 0 \Rightarrow \lim \omega_f(|\tau_n|)(b-a) = 0$$

□

Определение 0.1.

Функция интегрируема по Риману, если:

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau, \xi)_n$, такой что $|\tau_n| \rightarrow 0$, верно:

$$\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = I$$

И для всех последовательностей I – одинаковый

I – интеграл Римана