# Билет 87

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

## 0.1. Билет 87: Теорема Банаха о сжатии. Следствие. Метод касательных для решения уравнения

**Теорема 0.1** (Теорема Банаха о сжатии)**.**

X – полное метрическое пространство. $f : X \mapsto X,\ \ 0 < \lambda < 1$ и $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$.

Тогда существует единственная неподвижная точка, такая что $f(x) = x$.

**Доказательство**.

- Единственность. От противного. Пусть неподвижных точек две: $\widetilde{x}$ и $x$. Тогда $\rho(x,\ \widetilde{x}) = \rho(f(x),\ f(\widetilde{x})) \leqslant \lambda\rho(x,\ \widetilde{x})$. Но $\lambda < 1$. Противоречие.

- Существование.

  Возьмем произвольную начальную точку $x_0 \in X$ и $x_{n+1} = f(x_n)$. Докажем, что это фундаментальная последовательность.

  $$\rho(x_n,\ x_{n+k}) = \rho(f(x_{n-1}),\ f(x_{n-1+k})) \leqslant \lambda\rho(x_{n-1},\ x_{n-1+k}) \leqslant ... \leqslant \lambda^n\rho(x_0, x_k)$$

  Попытаемся оценить $\rho(x_0, x_k)$ по неравенству треугольника.

  $\rho(x_0,\ x_k) \leqslant \rho(x_0,\ x_1) + \rho(x_1,\ x_2) + ... + \rho(x_{k-1},\ x_k) \leqslant \rho(x_0,\ x_1) + \lambda\rho(x_0,\ x_1) + ... + \lambda^{k-1}\rho(x_0,\ x_1)$

  А это убывающая геометрическая прогрессия. Тогда,
  $\rho(x_0,\ x_k) < \frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda}$. Вернемся к $\rho(x_n,\ x_{n+k})$ . Теперь мы можем это оценить:

  $$\rho(x_n,\ x_{n+k}) < \lambda^n\frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda} \longrightarrow 0$$

  Значит, рассматриваемая последовательность фундаментальна. Значит, $\exists \lim_{n\to\infty} x_n =: x^*$.

  $$f(x^*) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

  По непрерывности функции f. Откуда непрерывность? Рассмотрим: $\rho(f(x),\ f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ $\forall x, y \in X$. $f$ это функция, уменьшающая расстояния. Поэтому, если $y \to x$, то $\rho(x,\ y) \to 0$. Тогда и $f(y) \to f(x)$. Значит, $x^*$ и есть неподвижная точка. Что и требовалось доказать.

□

**Утверждение 0.2.**

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \lambda^n\frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\lambda}$$

**Доказательство**.

Это следует из $\rho(x_n,\ x_{n+k}) < \lambda^n\frac{\rho(x_0,\ x_1)}{1-\lambda}$. Возьмем и устремим $k$ к бесконечности. □

***Следствие.***

$X$ - полное метрическое пространство, $f, g : X \mapsto X$ - сжатия с коэф. $\lambda \in (0, 1)$. $x = f(x)$ и $y = g(y)$ - неподвижные точки.

Тогда $\rho(x,\ y) \leqslant \frac{\rho(f(x),\ g(x))}{1-\lambda}$

**Доказательство.**

$$\rho(x,\ y) = \rho(f(x),\ g(y)) \leqslant \rho(f(x),\ g(x)) + \rho(g(x),\ g(y)) \leqslant \rho(f(x), g(x)) + \lambda\rho(x, y).$$

Добавили и вычли $g(x)$, расскрыли по нер-ву треугольника, оценили расстояние через сжатие, получили то, что нам нужно. □

**Пример Метод касательных (метод Ньютона).**

$f \in C^2[a, x_0]$, $f'(a) =: \mu > 0$, $f(a) = 0$ и $f$ строго выпукла и строго монотонна. Хотим найти корень функции(быстрее чем бинпоиск).

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} : [a, x_0] \mapsto [a, x_0]$.

Почему она действует в тот же самый отрезок?

Понятно, что $g(x) \leqslant x$, так как из $x$ мы постоянно что-то вычитаем + $f$ $f'$ не отрицательны. Более того:

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(c)(x-a) < f'(x)(x-a), c \in [a, x_0]$$

$*f(a) == 0$ + теорема Лагранжа + монотонное производной*

Значит, $\frac{f(x)}{f'(x)} < x - a \implies g(x) > a$

Далее докажем, что $g$ - сжатие. Как это можно понять? По теореме Лагранжа. Мы знаем, что разница двух образов есть произведение производной в какой-либо точке t на разницу прообразов. Возьмем производную. Воспользуемся Лагранжем и тем, что производные возрастают. Пусть $M := max(f''(t)), t \in [a, x_0]$

$$g'(t) = 1 - \frac{f'(t)f'(t) - f(t)f''(t)}{(f'(t))^2} = \frac{f''(t)f(t)}{(f'(t))^2} < \frac{f''(t)f'(t)(t-a)}{(f'(t))^2}$$

$$\frac{f''(t)f'(t)(t-a)}{(f'(t))^2} = \frac{f''(t)(t-a)}{f'(t)} \leqslant \frac{f''(t)(t-a)}{\mu} \leqslant \frac{M}{\mu}(t-a) \leqslant \frac{M}{\mu}(x_0 - a) < 1$$

Значит, нужно добавить в условие, что $\frac{M}{\mu} < 1$.

Запустим процесс из предыдущей теоремы о сжатии. Пусть $x_n := g(x_{n-1}) \implies \lim x_n =: x^*$ и $x^*$ - неподвижная точка.

$$x^* = g(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \implies f(x^*) = 0 \iff x^* = a$$

Вот мы и получили способ поиска корня $a$, причем у нас есть контроль скорости.

*Замечание.*

Откуда взялась функция $g$? Пусть $y$ - касательная графика в точке $x_0$, тогда $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим точку, когда касательная пересечет ось абсцисс, то есть $y = 0$. Тогда $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \implies x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. А это и есть наша функция $g$.

, https://youtu.be/0r0oBdKT5Zo?list=PLxMpIvWUjaJsyMXPnv6uMLYSD