Билет 69

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 69: Комплексная дифферницируемость. Дифференцирование степенного ряда.

***Определение* 0.1.**

$f : E \mapsto \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \text{Int}E$. Если существует $k \in \mathbb{C}$, такое что $f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$ при $z \to z_0$, то f – **комплексно-дифференцируема в точке** z_0 и k – **производная** f в точке z_0.

Замечание.

1. $k = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$
2. Существование производной равносильно дифференцированию

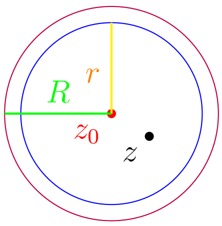
Теорема 0.1.

R – радиус сходимости ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

Тогда f – бесконечно дифференцируема в круге $|z - z_0| < R$ и

$f^{(m)}(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z - z_0)^{n-m}$

Доказательство.



Докажем индукцию по m. Рассмотрим $m = 1$ и $z_0 = 0$ (про z_0 для простоты). Возьмем $|z| < R$ и подберем такое r, что $|z| < r < R$ (картинка выше для пояснения). Возьмем $|w| < r$

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \to z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n w^n - a_n z^n}{w - z} = \lim_{w \to z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2} z + \dots + z^{n-1})$$

Первое равенство – просто вынесли ряд. Второе – просто поделили (что-то похожее на алгебре делали). Осталось доказать равномерную сходимость по $|w| < r$ последнего ряда, чтобы поменять местами предел и сумму. Проверять будем с помощью признака Вейерштрасса:

$$|a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})| \leqslant |a_n|(|w|^{n-1} + |w|^{n-2}|z| + \dots + |z|^{n-1}) \leqslant |a_n| n r^{n-1}$$

Второе неравенство, так как $|w| < r$ и $z < r$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$ сходится, так как у ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ радиус сходимости $R > r$. Значит применился признак сходимости и мы можем поменять местами сумму с предлом.

$$\lim_{w \to z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \to z} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Если применить эту форму m раз, то получим искомую формулу. □