Билет 09

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 9: Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.

Теорема 0.1.

$f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, b)$

Тогда сходимость $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равносильна ограниченности сверху первообразной F.

Доказательство.

$F(y) := \int\limits_a^y f$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c \to b-} F(c) - F(a)$, $F(a) = 0$ (из утверждения выше)

$F(z) = F(y) + \int\limits_y^z f \geqslant F(y)$, где $\int\limits_y^z f \geqslant 0$ при $y < z \implies F(y)$ монотонно возрастает.

Итого, $F(y)$ имеет предел и монотонно возрастает. Для монотонно возрастающих функция существование предела равносильно ограниченности сверху

$\square$

Следствие.

$f, g \in C[a, b) \;\; 0 \leqslant f \leqslant g$

1. Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.
2. Если $\int\limits_a^b f$ расходится, то $\int\limits_a^b g$ расходится.

Доказательство.

$G(y) := \int\limits_a^y g, \;\; F(y) := \int\limits_a^y f \implies F \leqslant G$

1. $\int\limits_a^b g$ сходится $\implies$ G ограничена сверху $\implies$ F ограничена сверху $\implies \int\limits_a^b f$ сходится.
2. От противного. Пусть $\int\limits_a^b g$ сходится, тогда и $\int\limits_a^b f$ сходится по первому пункту. Противоречие.

$\square$

Замечание.

1. Неравенству $f \leqslant g$ достаточно выполнения для аргументов, близких к b.

   Доказательство.

   $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

   Для второго слагаемого $f \leqslant g$, используем следствие. $\square$

2. Вместо $f \leqslant g$ можно использовать и $f = O(g)$

Доказательство.
$\int\limits_a^b Cg = C\int\limits_a^b g$ – сходится.

$\square$

3. Если $f \geqslant 0$, $f \in C[a, +\infty)$ и $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$ при $\varepsilon > 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится.

   Доказательство.
   $f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leqslant M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$

   Надо доказать, что $\int\limits_a^{+\infty} g$ сходится.

   $\int\limits_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ – сходится.

$\square$

Следствие.
$f, g \geqslant 0 \;\; f, g \in C[a, b)$ и $f \sim g$ при $x \to b-$

Тогда $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ ведут себя одинаково.

Доказательство.
$f \sim g \implies$ найдется такое c, что $\frac{g}{2} \leqslant f \leqslant 2g$ при $x > c$

Если $\int\limits_a^b g$ сходится, то $f \leqslant 2g \implies \int\limits_a^b f$ сходится.

Если $\int\limits_a^b f$ сходится, то $g \leqslant 2f \implies \int\limits_a^b g$ сходится.

$\square$

Замечание.
$f \geqslant 0 \;\; f \in C[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} f$ сходится.

Это НЕ значит $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$

Дана функция, изображенная на графике (спасибо за это Герману). Площади треугольников убывают: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{8}$, …, $S_n = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$