

Билет 06

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 6: Формула Стирлинга	1
--	---

0.1. Билет 6: Формула Стирлинга

Продолжаем примеры для формулы Эйлера-Маклорена

Пример.

3. Формула Стирлинга

Хотим найти $\ln(n!)$

Пусть $f(t) = \ln t$, тогда $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$

$$\sum_{k=1}^n \ln k = \ln(n!) = \int_1^n \ln t \, dt + \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n -\frac{1}{t^2} \cdot \{t\}(1 - \{t\}) \, dt$$

$$b_n := \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} \, dt \leq b_{n+1} \Rightarrow b_n \text{ возрастает.}$$

$$b_n = \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2} \, dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow b_n \text{ сходятся.} \Rightarrow b := \lim b_n \Rightarrow b_n = b + o(1)$$

$$\ln(n!) = n \ln n + \frac{\ln n}{2} - n - \frac{b}{2} + o(1)$$

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{-\frac{b}{2}} e^{o(1)} \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b}, \text{ т.к. } e^{o(1)} \rightarrow 1$$

Хотим понять, что такое $c := e^{1-b}$.

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2nc}}{n^{2n} e^{-2n} n c^2} = \frac{2^{2n} \sqrt{2n}}{n \cdot c} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n} \cdot c} \Rightarrow c = \sqrt{2\pi}$$

Итого формула Стирлинга:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$