

Билет 05

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 5: Оценка сумм вида $\sum_{k=1}^n k^p$ при различных p . Постоянная Эйлера.	1
-----	---	---

0.1. Билет 5: Оценка сумм вида $\sum_{k=1}^n k^p$ при различных p . Постоянная Эйлера.

Будем использовать формулу Эйлера-Маклорена

Пример.

$$1. S_p(n) := \sum_{k=1}^n k^p$$

Пусть $f(t) = t^p$, тогда $f''(t) = p(p-1)t^{p-2}$

$$S_p(n) = \int_1^n t^p dt + \frac{1+n^p}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n p(p-1)t^{p-2} \{t\}(1-\{t\}) dt$$

$$\int_1^n t^p dt = \left. \frac{t^{p+1}}{p+1} \right|_{t=1}^{t=n} = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}$$

Случай $-1 < p < 1$

$$0 \leq 1 - 1/4$$

$$n^{p-1} = 1/(n^{1-p})$$

$$0 \leq \int_1^n p(p-1)t^{p-2} \{t\}(1-\{t\}) dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n t^{p-2} = \frac{1}{4} \left. \frac{t^{p-1}}{p-1} \right|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4(1-p)} \left(1 - \frac{1}{n^{1-p}} \right) \leq \frac{1}{4(1-p)}$$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + O(1)$$

Случай $p > 1$

$$0 \leq \int_1^n p(p-1)t^{p-2} \{t\}(1-\{t\}) dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n t^{p-2} = \frac{n^{p-1}-1}{4(p-1)} = O(n^{p-1})$$

2. Гармонический ряд

$$H_n = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Пусть $f(t) = \frac{1}{t}$, тогда $f''(t) = \frac{2}{t^3}$

По формуле Эйлера-Маклорена

$$H_n = \int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1+1/n}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{2}{t^3} \cdot \{t\}(1-\{t\}) dt$$

$$a_n := \int_1^n \frac{1}{t^3} \cdot \{t\}(1-\{t\}) dt$$

$$a_{n+1} = a_n + \int_n^{n+1} \frac{1}{t^3} \cdot \{t\}(1-\{t\}) dt \geq a_n \Rightarrow \text{это возрастающая последовательность.}$$

$$a_n = \int_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^3} dt \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \text{предел последовательности}$$

существует. $\Rightarrow a := \lim a_n \Rightarrow a_n = a + o(1)$

$H_n = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + a + o(1)$ в пределе $\frac{1}{2n}$ сокращается $o(1)$, и все кроме логарифма – постоянная Эйлера-Маскерони.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0.5772156649 \dots$$