Билет 33

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 33: Норма оператора. Простейшие свойства.

***Определение* 0.1.**
Пусть $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$, $\left\langle Y, \|\cdot\|_y\right\rangle$ - нормированные пространства, $A : X \mapsto Y$ - линейные оператор.

Зададим норму на пространстве операторов:

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y .$$

***Определение* 0.2.**
Если $\|A\| \neq \infty$ опертор называется ограниченным.

Замечание.
Ограниченный оператор $\neq$ ограниченное отображение.

Ограниченное линейное отображение - только тождественный ноль.

Лемма.
$\|A\|$ - действительно норма.

Доказательство.

1. $\|A\| = 0 \implies A = 0$

   Доказательство.
   $\|A\| = 0 \implies \forall x \in X \quad \|x\|_X \leqslant 1 \implies \|Ax\|_Y = 0 \implies Ax = 0.$

   Если $x \neq 0$, то $A(x) = A\left(\|x\|_X \cdot \frac{x}{\|x\|_X}\right) = \|x\|_X \cdot A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) = \|x\|_X \cdot 0 = 0.$

   А $A(0) = 0$ всегда, значит $\forall x \in X \quad A(x) = 0 \implies A = 0.$ □

2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$

   Доказательство.

   $$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(\lambda A)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\lambda| \, \|Ax\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y = |\lambda| \, \|A\| .$$ □

3. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

   Доказательство.

   $$\begin{aligned} \|A+B\| &= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|(A+B)x\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax + Bx\|_Y \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \\ &\leqslant \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y + \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

   sup(a+b)<=sup a + sup bprc □

Таким образом, определние нормы выполняется. □