Билет 72

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 72: Ряды Тейлора для $\operatorname{arctg} x$, $(1+x)^p$ и $\arcsin x$.

Теорема 0.1 (Ряд Тейлора для $\operatorname{arctg} x$).

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ при } x \in (-1,1)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \text{ при } x \in (-1,1)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

□

Теорема 0.2 (Ряд Тейлора для $(1+x)^p$).

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} x^n, \text{ при } x \in (-1,1)$$

Доказательство.
$$(1+x)^p = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n ((1+t)^p) n + 1 dt = T_n(x) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n p(p-1)...(p-n)(1+t)^{p-n-1} dt$$

Обозначим $R_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n p(p-1)...(p-n)(1+t)^{p-n-1} dt$

Надо доказать, что $R_n(x) \implies 0$, при $x \in (-1,1)$

Достаточно проверить, что $|\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}| < 1-\delta$ ($\implies \lim R_n(x) = 0$)

$$\left|\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}\right| = \frac{|p-n-1|}{n+1} \left| \frac{\int_0^x (x-t)^{n+1} (1+t)^{p-n-2} dt}{\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} dt} \right| = \frac{|p-n-1|}{n+1} \left| \frac{\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} \frac{x-t}{1+t} dt}{\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} dt} \right|$$

Поймем, что $\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leqslant |x|$: если $x > 0$, то $\frac{x-t}{1+t} \leqslant x$, если $x < 0$, то обозначим $y = -x, s = -t$, получим $\frac{|-y+s|}{1-s} = \frac{y-s}{1-s} \leqslant y$.

Заметим что оставшееся выражение под большим модулем имеет фиксированный знак, тогда:

$$\frac{|p-n-1|}{n+1} \left| \frac{\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} \frac{x-t}{1+t} dt}{\int_0^x (x-t)^n (1+t)^{p-n-1} dt} \right| \leqslant \frac{|p-n-1|}{n+1} |x| \frac{\int_0^x |(x-t)^n (1+t)^{p-n-1}| dt}{\int_0^x |(x-t)^n (1+t)^{p-n-1}| dt} =$$

$$= \frac{|p-n-1|}{n+1} |x| \xrightarrow[n \to \infty]{} |x|$$

$$\left|\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}\right| \leqslant (1+\epsilon)|x| < 1-\delta, \text{ при больших n}$$

□

Теорема 0.3 (Ряд Тейлора для $\arcsin x$)**.**

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ при } x \in (-1, 1)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{4^n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^{2n}$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

□