Билет 52

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 52:Бесконечные произведения. Определение. Примеры. Свойства.

***Определение* 0.1.**

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$

$P_n := \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$ – частичные произведения.

Если $\exists P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, т.ч. $P \neq 0$ и $P \neq \infty$, то произведение сходится и $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k = P$

Пример.

1. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^2})$

   $P_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \cdot ... \cdot 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot ... \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}$

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{4n^2})$

   $P_n = (1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{6^2}) \cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{(2n)^2}) = \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \frac{(6-1)(6+1)}{6^2} \cdot ... \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{((2n-1)!!)^2(2n+1)}{((2n)!!)^2} \to \frac{2}{\pi}$

Упражнение. Установить следующие равенства:

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}) = \frac{\pi}{4}$

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + x^{2^{n-1}}) = \frac{1}{1-x}$, при $0 < x < 1$

Свойства.

Считаем, что $p_n \neq 0 \ \ \forall n$

1. Конечное количество начальных множителей не влияют на сходимость.

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ – сходится $\implies \lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$

   Доказательство.
   $p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1$ □

3. Все можно свести к произведениям с положительными множителями.

4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $p_n > 0 \ \ \forall n$

   Тогда $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ сходится.

   Доказательство.
   $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$

   $\ln P_n = \ln(\prod\limits_{k=1}^{n} p_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln p_k =: S_n$

   S_n имеет предел $\iff \ln P_n$ имеет предел $\iff P_n$ имеет предел. □

Пример.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$, где p_n – n-ое простое число.

$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

НО! Раскрывать скобочки не хорошо в бесконечностях. Формализуем.

$P_n = \prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} \geqslant \prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{p_j^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$

Вывод: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится.

Более того $P_n \geqslant \ln n + o(1)$

Теорема 0.1.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится, где p_n – n-ое простое число.

Доказательство.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится

$\implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{p_n}{p_n-1})$ – расходится

$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln(1-\frac{1}{x}) \leqslant$

$-2t \leqslant ln(1-t)$ при достаточно малых t.

$\leqslant -2(-\frac{1}{x}) = \frac{2}{x}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} \leqslant C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$

$\implies \sum \frac{1}{p_n}$ расходится. □

Замечание.

На самом деле

$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \sim \ln \ln n$