Билет 11

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 11: Признак Абеля. Интеграл от произведения монотонной и периодической функций. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$

Теорема 0.1 (признак Абеля)**.**

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ – сходится
2. $|g(x)|$ - ограничена, то есть $|g(x)| \leqslant K \;\; \forall x > a$
3. g монотонна

Из этого всего следует, что $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится

Доказательство.

Будем доказывать через Дирихле, то есть заделаем себе такие функции из f, g, что они будут сходится по признаку Дирихле.

Напомним его условия: у одной из функций интеграл должен быть ограничен, другая монотонно стремится к 0. С помощью $f(x)$ мы получим ограниченный интеграл, с помощью g - монотонно стремяющуюся к 0 функцию.

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то есть по определению получаем, что существует конечный предел: $\exists \lim\limits_{y \to +\infty} \int\limits_a^y f(x)\,dx$.

Нам в определении нужно, чтобы $\exists C : \forall b : \left|\int\limits_a^b f(x)\right| < C$, то есть ограниченность интеграла. Выберем какой-нибудь отрезок $[a, B]$.

1. $b \leqslant B$. То есть мы хотим ограничить интеграл на отрезке. Он на нём непрерывен (вроде очев, но допустим, потому что дифференцируем :), так что по т. Вейерштрасса, ограничен, что и хотели.
2. $b > B$. То есть b где-то в окрестности бесконечности. Но у нас есть предел интеграла на бесконечности - он достигается и конечный. Так что можно ограничить $\left|\int\limits_a^b f(x)\right|$ через предел + константу при достаточно больших b.

   Отсюда вроде получаем, что B надо брать достаточно большое, то есть чтобы можно было такую константу вообще найти.

(у Храброва и Ани так подробно про выбор отрезка не было, там просто говорилось, то на маленьких непрерывность даёт ограниченность, а на бесконечности предел, я попробовал раскрыть. Возможно, что так подробно не стоит рассказывать на экзе)

Далее: g монотонна и ограничена $\implies \exists A := \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ и $|A| \leqslant K$. То есть возьмём и найдём её предел, он конечный.

$\widetilde{g}(x) := g(x) - A$ монотонна и стремится к 0 на бесконечности.

Т.е. показали, что f и $\widetilde{g}$ удовлетворяют условию принципа Дирихле.

$\implies \int\limits_a^{+\infty} f(x)\widetilde{g}(x)\,dx$ – сходится

$fg = fA + f\widetilde{g}$. А в интеграле: $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} fA + \int\limits_a^{+\infty} f\widetilde{g}$

$\int\limits_a^{+\infty} fA$ сходится, так как A - константа и её можно вынести, а $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится по условию признака.

А второго слагаемое сходится по доказаному выше. Итого оба слагаемых сходятся, то есть и интеграл сходится, ура. □

Следствие (интеграл от произведения монотонной и периодической функции).
$f, g \in C[a, +\infty)$ и f периодична с периодом T, g - монотонна.

1. $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ – сходится.

   Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ – сходится абсолютно.

2. $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ – расходится. Дополнительное условие: $g(x) \to 0$ на бесконечности.

   Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ – сходится $\iff \int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = 0$

   (кстати, в этом условии хватит и того, что $\int\limits_a^{+\infty} |g(x)|\,dx$ расходится абсолютно: об этом в доказательстве)

Это следствие из признака Дирихле (не Абеля)

Доказательство.

1. Первый случай: интеграл g сходится

   $f \in C[a, a+T]$, то есть непрерывна на отрезке, то есть ограничена на нём по т. Вейерштрасса. При этом она периодическая, так что те же ограниченные значения будут и на всей прямой. То есть, она ограничена везде.

   g монотонна, то есть только 1 раз может пересечь 0, а дальше она знакопостоянна. То есть на неком луче $[b, +\infty)$ она знакопостоянна. Допустим, что она на нём положительна, отсюда $|g| = g$, пригодится ниже. Если же она отрицательна, то можем рассматривать $-g$ в условии, интеграл просто поменяет знак, то есть на сходимость это не влияет.

   Нам теперь интересно: $\int\limits_b^{+\infty} |fg|$ - сходится? Но f ограничена, то есть не больше какой-то константы M; а $|g| = g$, так что:

   $\int\limits_b^{+\infty} |fg| \leqslant \int\limits_b^{+\infty} Mg = M\int\limits_b^{+\infty} g$

   По условию этого случая, интеграл g сходится, то есть получили, то и исходный интеграл $|fg|$ тоже сходится, ура.

   Небольшое пояснение: мы же доказали сходимость на луче $[b, +\infty)$? Да, а на полуинтервале $[a, b)$ интеграл просто конечен и на сходимость на $[a, +\infty)$ не влияет.

2. Второй случай: интеграл g абсолютно расходится, $g \to 0$.

"$\Longleftarrow$"

$$F(y) := \int\limits_a^y f(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^{a+kT} f(x)\,dx}_{=0} + \int\limits_{a+kT}^{y} f(x)\,dx = \int\limits_{a+kT-kT}^{y-kT} f(x)\,dx = \int\limits_a^{y-kT} f(x)\,dx$$

$a \leqslant y - kT \leqslant a + T$.

То есть мы хотим посчитать интеграл. Разобьём его на интеграл, который включает в себя целое число периодов: на каждом из таких периодов он 0 (интеграл по периоду 0, не забываем), так что и весь интеграл по целому числу периодов равен 0. Оставшийся интеграл - остаток от $a + kT$ до y. Так как функция у нас периодическая, то мы можем сдвинуть границы на T и ничего не изменится, так что можно сдвинуть и на kT влево, и получить интеграл от a до $y - kT \in [a, a + T]$.

То есть получили, что множество значений $F(y)$ при $y \in \mathbb{R}$ и множество значений $F(y)$ при $y \in [a, a + T]$ совпадает: $\forall y \in \mathbb{R}$ мы найдём значение функции, которая считалась только на отрезке $[a, a + T]$.

Но F непрерывна $\implies$ ограничена на $[a, a + T]$ по т. Вейерштрасса $\implies$ F ограничена на $\mathbb{R}$, ведь множество значений совпадает, а значит максимальное значения функции и на $[a, a + T]$, и на $\mathbb{R}$ совпадают, то есть максимум ограничен и там, и там. (и минимум тоже ограничен, если функция очень маленькя и в минус уходит)

$\implies$ по принципу Дирихле $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ограничен, а g монотонна и стремится к 0.

"$\implies$"

От противного.

Докажем, что если $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx =: A \neq 0$, то $\int\limits_a^{+\infty} fg$ расходится. (то есть если интеграл по периоду не 0, то расходится)

$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{A}{T}$ – периодическая, так как просто отняли константу (A, T - константы).

$\int\limits_a^{a+T} \tilde{f} = \int\limits_a^{a+T} f - \int\limits_a^{a+T} \frac{A}{T} = A - A = 0$. (просто $f(x) = \tilde{f}(x) + \frac{A}{T}$ и мы разбили интеграл)

Значит, $\int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g$ сходится по следствию $\Longleftarrow$, так как интеграл $\tilde{f}$ равен 0 по периоду, а g монотонно стремится к 0.

Но $\int\limits_a^{+\infty} fg = \int\limits_a^{+\infty} \tilde{f}g + A\int\limits_a^{+\infty} g$

Первое слагаемое сходится, как только что доказали. Второе слагаемое расходится - по условию, $\int\limits_a^{+\infty} g$ расходится. То есть сходящийся интеграл = сходящийся + расходящийся, что невозожно, противоречие, что и нужно было.

Теперь о том, почему хватит расходимости $\int\limits_a^{+\infty} |g|$, а не $\int\limits_a^{+\infty} g$, как в условии.

Ну вообще, из расходимости интеграла следует и абсолютная расходимость: интеграл абсолютно сходится $\implies$ интеграл сходится, и не может быть так, что интеграл не сходится просто, но сходится абсолютно

Но на самом деле, из абсолютной расходимости в данной задаче следует и обычная расходимость, потому что g монотонна. Она лишь 1 раз может пересечь 0 и поменять знак. И после пересечения 0 она будет знакопостоянна. То есть интеграл на хвосте будет совпадать с абсолютным интегралом в точности до знака. А значит, у них будет одновременная сходимость и расходимость

То есть если бы мы в условии написали абсолютную расходимость, то из неё бы мы получили и обычную расходимость, для которой мы теорему доказали.

$\square$

Пример.

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$

Случай 1.

$p > 1 \quad \frac{|\sin x|}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^p} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится

$\implies \int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ – абсолютно сходится.

Случай 2.

$0 < p \leqslant 1$

$\sin x$ – периодическая функция $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$

$\frac{1}{x^p} \to 0$ и монотонна.

$\implies$ по следствию из признака Дирихле $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ сходится.

Покажем, что в этом случае нет абсолютной сходимости.

$|\sin x|$ – периодическая функция, $\int\limits_0^{2\pi} |\sin(x)|\, dx \neq 0$, так что по тому же следствию, получаем, что интеграл расходится.

$\implies$ нет абсолютной сходимости.

Случай 3.

$p \leqslant 0$

Воспользуемся критерием Коши.

$\int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{\sin x}{x^p}\, dx \geqslant \int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1/2}{x^p}\, dx \geqslant \int\limits_{\pi/6+2\pi k}^{5\pi/6+2\pi k} \frac{1}{2}\, dx = \frac{\pi}{3}$

$\implies$ нет сходимости, так как не стремится к 0.