Билет 14

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства. 1

0.1. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.

***Определение* 0.1** (повтор)**.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

Точка $a \in A$ называется внутренней если $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$.

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается $\operatorname{Int} A$.

Свойства.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

1. $\operatorname{Int} A \subset A$
2. $\operatorname{Int} A$ - объеденение всех открытых множеств содержащихся в A.

   Доказательство.
   Пусть $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где $U_\alpha \subset A$ - открытое.

   $G \subset \operatorname{Int} A$:

   $$\begin{aligned} x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\ &\implies x \in \operatorname{Int} A \end{aligned}$$

   $\operatorname{Int} A \subset G$: $x \in \operatorname{Int} A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$. $B_r(x)$ - открытое множество, значит $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$. $\square$

3. $\operatorname{Int} A$ - откртое множество

   Доказательство.
   A - объединение открытых множеств, значит открыто. $\square$

4. $\operatorname{Int} A = A \iff A$ - открыто

   Доказательство.
   Необходимость ($\implies$): $\operatorname{Int} A$ открыто.

   Достаточность ($\impliedby$): A открыто $\implies$ все точки внутренние $\implies$ $A = \operatorname{Int} A$. $\square$

5. $A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$
6. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$

   Доказательство.
   В сторону $\subset$:

   $$\left.\begin{aligned} A \cap B \subset A &\implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \\ A \cap B \subset B &\implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B \end{aligned}\right\} \implies \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$$

   В сторону $\supset$:

   $$x \in \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \implies \left\{\begin{aligned} x \in \operatorname{Int} A &\implies \exists r_1 : B_{r_1}(x) \subset A \\ x \in \operatorname{Int} B &\implies \exists r_2 : B_{r_2}(x) \subset B \end{aligned}\right\} \implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies$$
   $$\implies x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$$

   $\square$

7. $\operatorname{Int}\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$

   Доказательство.
   Заметим, что $\operatorname{Int} A$ - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. $\square$