Билет 40

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 40: Ряды в нормированных пространствах. Простейшие свойства. Покоординатная сходимость ряда в $\mathbb{R}^d$

***Определение* 0.1.** X - нормированное пространство, $x_1, x_2, \dots \in X$ - вектора из пространства $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ - ряд

Здесь и далее Храбров обозначал $x_n^{(i)}$ - i-ая координата n-ого члена ряда.

***Определение* 0.2.** Частичная сумма ряда: $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_n$. $S_n \in X$

***Определение* 0.3.** Ряд сходится, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

То есть существует предел частичных сумм.

Теорема 0.1 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Доказательство. $x_n = S_n - S_{n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n - \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

(оба предела существуют, так что можно разбивать предел разности на разность пределов)

□

Свойства.

1. Единственность суммы

   Сумма - это предел, а предел единственнен

2. Линейность суммы

   Если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\alpha x_n + \beta y_n)$ сходится и равен $\alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$

   Доказательство. Расписать то же самое через частичные суммы

   $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n\to+\infty} \alpha S_{x,n} + \beta S_{y,n} = \alpha \lim_{n\to+\infty} S_{x,n} + \beta \lim_{n\to+\infty} S_{y,n} = \alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$

   □

3. Расстановка скобок

   Если ряд сходился, то после расстановки скобок он тоже будет сходится к той же сумме.

   Было: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + \dots = S$

   Стало: $x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + x_8 + (x_9 + x_{10}) + \dots = S$ равно той же сумме, если она была

   Доказательство. Когда мы расставили скобки, мы от частичных сумм $S_1, S_2, \dots$, у которых был предел, перешли к частичным суммам $S_1, S_3, S_7, S_8, S_{10}$ (в примере выше), то есть взяли подпоследовательность частичных сумм, а она имеет тот же предел, что и сама последовательность, если он был □

Замечание. Можно расставить скобки, чтобы ряд СТАЛ СХОДИТСЯ: пример для $X = \mathbb{R}$:
$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$ – расходится
$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0 + 0 + 0$ – сходится, равен 0

4. Можно выкинуть/добавить конечное число членов ряда, и это не повлияет на сходимость, но может изменить сумму

Доказательство. (очевидно, можно скипать, если понятно)

Добавление:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = S_x$$

Тогда

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + y_k + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} y_n}_{S_y} + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = S_y + S_x$$

Сумму конечного числа y_n можно посчитать, а сумма x_n существует по условию, так что и итоговая сумма тоже есть.

Убирание: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n = S$, $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} x_n = ?$

Частичные суммы первого: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, второго: $S'_n = \sum\limits_{k=m}^{m+n-1} x_k$

Тогда: $S'_n = S_{n+m-1} - S_{m-1}$

Притом S_{m-1} - какой-то элемент из X, фиксированный.

Но тогда, раз $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (S_{n+m-1} - S_{m-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$ (сдвинули начало и вычли константу), $\square$

5. Покоординатная сходимость равносильна сходимости в $\mathbb{R}^d$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ сходится $\iff \forall i : 0 \leqslant i \leqslant d,\ \sum\limits_{n=1} x_n^{(i)}$ сходится

Доказательство. Надо расписывать через частичные суммы.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \\ x_k^{(3)} \\ \vdots \\ x_k^{(d)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(1)} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(2)} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(3)} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(d)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_n^{(1)} \\ S_n^{(2)} \\ S_n^{(3)} \\ \vdots \\ S_n^{(d)} \end{pmatrix}$$

Чтобы $\sum x_n$ сходился, нужно, чтобы $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Чтобы была покоординатная сходимость, нужно, чтобы $\forall i : 0 \leqslant i \leqslant d,\ \exists \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{(i)}$.

Звучит тавтологично, если честно, но вообще, если бы у нас было не $\mathbb{R}^d$, то не всегда верно, что существование предела равносильно существованию предела координат. Но вот в $\mathbb{R}^d$ у нас была отдельна теорема, по которой это верно.

В нашем конспекте **??**

В конспекте Ани она на странице 32, теорема 2.6

Думаю, на неё будет достаточно сослаться.

$\square$