

# Билет 47

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 47: ! Признак Лейбница. Оценка суммы знакопеременующегося ряда. Примеры (ряд Лейбница и его перестановка) . . . . .	1
-----	---	---

## 0.1. Билет 47: ! Признак Лейбница. Оценка суммы знакопеременного ряда. Примеры (ряд Лейбница и его перестановка)

Знакопеременный ряд:  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, a_n \geq 0$

### Теорема 0.1 (Признак Лейбница).

Если  $a_n$  монотонно убывают стремятся к 0, то ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  сходится. Важно заметить, что условие стремления  $a_n$  к 0 важно (см. необходимое условие сходимости ряда). Данный признак можно так же вывести из признака Дирихле. Однако мы хотим произвести так же оценку на сумму знакопеременного ряда:  $S_{2n} \leq S_n \leq S_{2n+1}$

### Доказательство.

$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$   $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$ . Получаем, что  $S$  с четными номерами растут, а с нечетными - убывают. Значит, мы можем расписать вложенную последовательность отрезков:  $[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] \dots \supset [S_{2n}, S_{2n+1}]$ .

Теперь рассмотрим длины отрезков:  $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$ . Тогда последовательность отрезков стягивается. Тогда применим одноименную теорему: у этих отрезков есть общая точка  $S$ , которая является пределом их концов:  $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1} = S$ . Получили что частичные суммы сходятся к  $S$ , значит исходный ряд тоже сходится к  $S$ . Также можно заметить, что неравенство на сумму ряда выполняется, потому что точка  $S$  лежит во всех отрезках, в частности в отрезке  $[S_{2n}, S_{2n+1}]$

□

### Пример.

В качестве примера рассмотрим ряд Лейбница:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$   
 $S_{2n} = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}) = H_{2n} - H_n =$   
(сложили все дроби и дважды вычли четные), где  $H_n$ - гармонический ряд (смотри билет 6).  
Подставим все в формулу для гармонических чисел:  $= \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) =$   
 $\ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln 2 + o(1)$ . Тогда  $S_{2n} \rightarrow \ln 2$ . Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ .  
Рассмотрим перестановку ряда Лейбница:  $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) + \dots$   
Будем считать  $S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n}) = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}) =$   
Последнее выражение в скобках это  $H_{2n}$ . Мы только что считали это в предыдущем примере.  
Получаем:  $= H_{2n} - \frac{1}{2}H_n = \frac{\ln 2}{2}$