

Билет 64

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 64: Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности(ряда). Существенность равномерности.	1
-----	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

0.1. Билет 64: Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности(ряда). Существенность равномерности.

Теорема 0.1 (О перестановке предела и суммы).

$$f_n \in C[a, b], f_n \Rightarrow f \text{ на } [a, b].$$

$$\text{Тогда } \int_a^x f_n(t) dt \Rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| &= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \\ &\leq (x - a) \max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \leq (b - a) \max_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Почему последнее стремится к 0? Потому что была теорема про равномерную сходимость, только в той теореме был супремум. Более того, последнее выражение ещё и от x не зависит, значит

$$\max_x \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \rightarrow 0$$

Значит, по той же теореме, где был изначально супремум, получаем равномерную сходимость. Что и требовалось доказать. \square

Следствие.

$$u_n \in C[a, b], \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ сходится равномерно на } [a, b].$$

$$\text{Тогда } \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt$$

Доказательство.

$S_n \Rightarrow S \Rightarrow \int_a^x S_n \Rightarrow \int_a^x S$. В то же время $\int_a^x S_n = \int_a^x \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n \int_a^x u_k(x)$. Мы знаем, что такая сумма интегралов имеет конечный предел, а такая сумма интегралов это просто частичная сумма ряда. Значит, мы знаем, что частичная сумма ряда имеет некоторый предел. Значит, просто сумма ряда это и есть тот самый предел.

$$\text{Значит, } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt = \int_a^x S = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) dt$$

\square

Замечание.

Поточечной сходимости не хватает

Пример. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 nte^{-nt^2} dt = [s = nt^2] = \frac{1}{2} \int_0^n e^{-s} ds = -\frac{1}{2} e^{-s} \Big|_0^n = \frac{1 - e^{-n}}{2} \rightarrow 0$$

А предельная функция 0. Что-то не то...