

Билет 20

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. По- координатная сходимость.	1
-----	---	---

0.1. Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

Теорема 0.1.

Пусть $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ - нормированное пространство, $x_n, y_n, a, b \in X$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$.

Тогда:

$$\|x_n - a\| \rightarrow 0.$$

$$\|y_n - b\| \rightarrow 0.$$

$$1. \ x_n + y_n \rightarrow a + b$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \\ &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\triangleq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \\ &\rightarrow 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

□

$$2. \ \lambda_n x_n \rightarrow \lambda a$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda_n x_n - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n(x_n - a) + (\lambda_n - \lambda)a\| \\ &\leq \|\lambda_n(x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda)a\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n - a\| + |(\lambda_n - \lambda)| \|a\| \\ &\rightarrow |\lambda| \cdot 0 + 0 \cdot \|a\| = 0 \end{aligned}$$

□

$$3. \ x_n - y_n \rightarrow a - b$$

Доказательство.

$$-y_n = -1 \cdot y_n \implies -1 \cdot b = -b, \ x_n + (-y_n) \rightarrow a + (-b) = a - b.$$

□

$$4. \ \|x_n\| \rightarrow \|a\|$$

Доказательство.

$$0 \leq \left| \|x\| - \|a\| \right| \leq \|x - a\| \rightarrow 0.$$

$$, \ ||x| - |y| \leq \|x - y\|$$

□

$$5. \ \text{Если задано скалярное произведение и } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \text{ то } \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle.$$

Доказательство.

Заметим следующий факт:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) &= \frac{1}{4} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (\langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - (\langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 \langle x, y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

Теперь:

$$\begin{aligned}\langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, b \rangle + \langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle \\ &= \langle x_n, y_n - b \rangle - \langle x_n - a, y_n \rangle \\ &= \frac{1}{4} (\|x_n + y_n - b\|^2 - \|x_n - y_n + b\|^2 - \|x_n - a + y_n\|^2 + \|x_n - a - y_n\|^2) \\ &\rightarrow \frac{1}{4} (\|a\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|b\|^2) = 0\end{aligned}$$

□

Определение 0.1.

Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)})$.

Тогда x_n покоординатно сходится к x_0 , если

$$\forall k \in [1, d] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}.$$

Теорема 0.2.

$$\sqrt{\sum x_n^2}$$

В \mathbb{R}^d с евклидовой нормой сходимость по норме эквивалентна координатной.

Доказательство.

Необходимость (норма \implies коорд):

$$\forall k \in [1, d] \quad 0 \leq (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \leq \sum_{j=1}^d (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \rightarrow 0.$$

Достаточность (коорд \implies норма)

$$0 \leq \|x - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \rightarrow 0.$$

□

\mathbb{R}^d , , , , <https://youtu.be/pK0I92G2tig?list=PLcsjsqLLSfNDDkajt>