Билет 51

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 51: Теорема Абеля о произведении рядов (с леммой).

Теорема 0.1 (Абеля).
$\sum a_n = A,\ \ \sum b_n = B,\ \ \sum c_n = C$

И $\sum c_n$ – произведение $\sum a_n$ и $\sum b_n$

Тогда $AB = C$.

Лемма.
$x_n \to x,\ \ y_n \to y$ при $n \to \infty$.

Тогда

$\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + ... + x_ny_1}{n} \to xy$

Доказательство.
Пусть $y = 0$. надо доказать, что $\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + x_3y_{n-2} + ... + x_ny_1}{n} \to 0$

Есть две последовательности, имеющие предел, значит они ограничены. Значит, есть какая-то константа M, что $|x_n| \leqslant M \quad |y_n| \leqslant M \ \ \forall n$

$\forall \epsilon > 0 \exists N \ \ \forall n \geqslant N \quad |y_n| < \epsilon$

Возьмем $n > N$.

$|x_1y_n| + |x_2y_{n-1}| + ... + |x_{n-N}y_{N+1}| + |x_{n-N+1}y_N| + ... + |x_ny_1|$

Первые $n - N$ слагаемых оценим сверху, как $(n - N)M\epsilon$. Оставшиеся оценим как $\leqslant M^2N$

$|x_1y_n| + |x_2y_{n-1}| + ... + |x_{n-N}y_{N+1}| + |x_{n-N+1}y_N| + ... + |x_ny_1| \leqslant M\epsilon(n - N) + M^2N$

$\left|\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + ... x_ny_1}{n}\right| \leqslant \frac{M\epsilon(n-N) + M^2N}{n} < \epsilon M + \epsilon M$

(Последнее – при достаточно больших n).

Пусть $y_n = y$

$\frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + ... + x_ny_1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}y \to xy$

(Последнее показывается по теореме Штольца).

Общий случай.

$\tilde{y}_n := y_n - y \to 0$

$\frac{x_1\tilde{y}_n + x_2\tilde{y}_{n-1} + ... + x_n\tilde{y}_1}{n} \to 0$

$\frac{x_1y + x_2y + ... + x_ny}{n} \to xy$

И сложим. Получим ровно то, что надо.

□

Доказательство. (теоремы)
$\frac{A_1B_n + A_2B_{n-1} + ... + A_nB_1}{n} \to AB$ по лемме.

Но что же написано в числителе?

$a_1(b_1 + b_2 + ... + b_n) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}) + ... + (a_1 + a_2 + ... + a_n)b_1 =$
$= na_1b_1 + (n-1)(a_1b_2 + a_2b_2) + (n-2)(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + ... =$
$= nc_1 + (n-1)c_2 + (n-2)c_3 + ... + c_n = C_1 + C_2 + ... + C_n$

Получается, что знаем, что $\frac{C_1 + C_2 + ... + C_n}{n} \to AB$

Но с другой стороны, $\frac{C_1 + C_2 + ... + C_n}{n} \to C$

$\implies C = AB$ □