Билет 68

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in (0, +\infty)$. Тогда $\overline{\lim}\, x_n y_n = \lim x_n \,\overline{\lim}\, y_n$.

Доказательство.

$A = \lim x_n, B = \overline{\lim}\, y_n, C = \overline{\lim}\, x_n y_n$. (Напоминание: верхний предел это наибольший из частичных).

$\exists n_k$, т.ч. $x_{n_k} y_{n_k} \to C$. $\lim x_{n_k} y_{n_k} = \lim x_{n_k} \lim y_{n_k}$, равенство есть, т.к. существует предел слева и предел x_{n_k}. Из равенства следует, что $\lim y_{n_k} = \frac{C}{A} \leqslant B \implies C \leqslant AB$.

$\exists m_k$, т.ч. $y_{n_k} \to B$. $\lim x_{m_k} y_{m_k} = \lim x_{m_k} \lim y_{m_k} \implies \lim x_{m_k} y_{m_k} = AB \leqslant C$.

Итого равенство. □

Следствие.

Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$ совпадают.

Доказательство.

Домножение на z не влияет на радиус, поэтому докажем для рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n z^n$.

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}}, R_2 = \frac{1}{\overline{\lim}\, \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}}, R_3 = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{n}}$$

$\lim \sqrt[n]{n+1} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$, по лемме можем вытащить из под верхнего предела и окажется, что $R_1 = R_2 = R_3$. □

Теорема 0.1 (Почленное интегрирование степенного ряда)**.**

R – радиус сходимости ряда $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Тогда при $|x - x_0| < R$

$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ и полученный ряд имеет тот же радиус сходимости.

Доказательство.

На $[x_0, x]$ ряд сходится равномерно (теорема из билета 67) $\implies f \in C[x_0, x]$ и можно интегрировать почленно $\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{x_0}^{x} (t - x_0)^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$. □