

Билет 03

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum_{k=1}^n k^p$. Формула трапеций.	1
-----	---	---

0.1. Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum_{k=1}^n k^p$. Формула трапеций.

Пример.

$$S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

Ограничим $S_n(p)$ сверху: $S_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$

Чтобы ограничить снизу, возьмем только вторую половину слагаемых. Заметим, что каждое слагаемое $\geq \frac{n}{2}$. Получаем: $S_n(p) > \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^p = \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}}$

$$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} < S_n(p) < n^{p+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 f(t) dt$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = t^p$$

$$\xi_k = \frac{k}{n}$$

Мелкость дробления $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

$$\implies \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} \rightarrow \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1} \implies S_n(p) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

При $p = -1$ считаем, что $\frac{1}{p+1} = \infty$.

Лемма.

$f \in C^2[a, b]$. Тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha) (\beta - t) dt$$

Доказательство.

$$\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\gamma = (a+b)/2 \quad (b-a)/2$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t) (t - \gamma)' dt = f(t) (t - \gamma) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt = f(\beta) (\beta - \gamma) - f(\alpha) (\alpha - \gamma) - \\ &\int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt = \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2} (\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \frac{\alpha + \beta}{2}) dt \end{aligned}$$

$$((t - \alpha)(\beta - t))' = \alpha + \beta - 2t = -2(t - \gamma)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) (t - \gamma) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) \left(-\frac{1}{2}\right) ((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) ((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \\ &= \frac{1}{2} f'(t) (t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha)(\beta - t) dt = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t) (t - \alpha)(\beta - t) dt \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 0.1 (оценка погрешности в ф-ле трапеций).

$f \in C^2[a, b]$ и τ - дробление. Тогда:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''| \quad \text{, , , , , : } |t|^2 < |t|(b-a)$$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |f''|$$

$$f(x_k) \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$|t| = (b-a)/n$$

Доказательство.

$$\Delta := \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t) (t - x_{k-1})(x_k - t) dt$$

$$|t - x_{k-1}| |x_k - t| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4} \leq \frac{|\tau|^2}{4}, \quad x \in [a, b]$$

$$|\Delta| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| (t - x_{k-1})(x_k - t) dt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \frac{|\tau|^2}{4} dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

□