Билет 31

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 31: Эквивалентные нормы. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^d$

***Определение* 0.1.**
Пусть $\langle X, \|\cdot\|_1 \rangle$ и $\langle X, \|\cdot\|_2 \rangle$ - нормированные пространства.

Их нормы называются эквивалентными, если

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X \quad C_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_1 .$$

Замечание.
Сходиомсти по эквивалентным нормам равносильны

Доказательство.

$$\|x_n\|_1 \to 0.$$
$$C_1 \|x_n\|_1 \leqslant \|x_n\|_2 \leqslant C_2 \|x\|_2 \to 0 \leqslant \|x_n\|_2 \leqslant 0 \implies \|x_n\|_2 \to 0.$$

□

Замечание.
Эквивалентность норм - отношение эквивалентности.

Доказательство.
$\|x\|_1$ эквивалентна $\|x\|_2 \iff \|x\|_1 = \Theta(\|x\|_2)$. □

Теорема 0.1.
Все нормы на $\mathbb{R}^d$ эквивалентны.

Доказательство.

Докажем эквивалентность всех норм Евклидовой $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} x_k^2}$.

Пусть $p(x)$ - произвольная норма. e_k - стандартный базис.

$$\begin{aligned}
p(x-y) &= p\left(\sum_{k=1}^{d} (x_k - y_k) e_k\right) \\
&\overset{\triangle}{\leqslant} \sum_{k=1}^{d} p((x_k - y_k) e_k) \\
&= \sum_{k=1}^{d} |x_k - y_k|\, p(e_k) \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{d} (x_k - y_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{d} p(e_k)^2} \text{ (по Коши-Буняковскому)} \\
&= C \cdot \|x - y\|
\end{aligned}$$

Получили одно неравенство.

Также, получили следующие (где метрика это $\|x - y\|$):

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C} \quad \forall y \in B_\delta(x) \quad |p(x) - p(y)| \overset{\text{свойства нормы}}{\leqslant} p(x-y) \leqslant C \|x - y\| < \varepsilon.$$

Значит, $p(x)$ - непрерывная функция.

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$. Оно замкнуто (у Ани без доказательства, набросок - если норма точки не 1, но к нельзя подойти оставив норму 1, значит не предельня) и ограничено $\implies S$ - компакт.

Тогда $p(x)$ принимает своё минимальное на S значение. Пусть $C_1 := \min\limits_{x \in S} p(x)$.

Тогда

$$p(x) = p\left(\frac{x}{\|x\|} \cdot \|x\|\right) = \|x\| \, p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geqslant C_1 \|x\| .$$

Получили второе неравенство, значит нормы эквивалентны. $\square$