Билет 38

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 38: Длина кривой, заданной параметрически(с леммой). Длина графика функции и длина кривой, заданной в полярных координатах.

В этом билете все пути - в $\mathbb{R}^m$ с Евклидовой метрикой.

***Определение* 0.1** (повтор)**.**
Пусть $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - путь.

Пусть γ_i - i-я координатная функция γ.

γ называется r-гладким путём, если $\forall i \quad \gamma_i \in C^r[a,b]$.

Просто гладкий - $r = 1$.

Лемма.
Пусть $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - гладкий путь.

Пусть $\Delta \subset [a,b]$ - отрезок, $\ell(\Delta)$ - его длина.

$m_\Delta^{(i)} := \min\limits_{t\in\Delta} |\gamma'(t)|$

$M_\Delta^{(i)} := \max\limits_{t\in\Delta} |\gamma'(t)|$

$m_\Delta := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \left(m_\Delta^{(i)}\right)^2}$

$M_\Delta := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2}$

Тогда,
$$m_\Delta \cdot \ell(\Delta) \leqslant \ell(\gamma|_\Delta) \leqslant M_\Delta \cdot \ell(\Delta).$$

Доказательство.
Пусть t_i - разбиение Δ.

$a_k^{(i)} = \gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})$

$a_k = \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^m \left(a_k^{(i)}\right)^2}$.

По теореме Лагранжа: $\exists c_{ik} \in (t_{k-1}, t_k) \quad a_k^{(i)} = \gamma'(c_{ik})(t_k - t_{k-1})$.

Тогда, $\left|a_k^{(i)}\right| = |\gamma'(c_{ik})|\,(t_k - t_{k-1}) \leqslant M_\Delta^{(i)}(t_k - t_{k-1})$.

$$\begin{aligned} a_k = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\left|a_k^{(i)}\right|\right)^2} &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2 (t_k - t_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 \sum_{i=1}^m \left(M_\Delta^{(i)}\right)^2} \\ &= M_\Delta (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Аналогично для $a_k \geqslant m_\Delta(t_k - t_{k-1})$.

$$m_\Delta \ell(\Delta) = m_\Delta \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^n a_k \leqslant M_\Delta \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = M_\Delta \ell(\Delta).$$

Перейдём к супремому для t:

$$m_\Delta \ell(\Delta) \leqslant \ell(\gamma|_\Delta) \leqslant M_\Delta \ell(\Delta). \qquad \square$$

Теорема 0.1 (Длина кривой заданной параметрически)**.**

Пусть $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - гладкий путь.

Тогда

$$\ell(\gamma) = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \ldots + \gamma_n(t)^2} dt.$$

Доказательство.

Возьмём t - разбиение $[a,b]$.

$d_k := t_k - t_{k-1}$.

$m_k := m_{[t_{k-1}, t_k]}$

$M_k := M_{[t_{k-1}, t_k]}$

Тогда, по лемме значем

$$m_k d_k \leqslant \ell\left(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}\right) \leqslant M_k d_k.$$

По линейности интеграла:

$$m_k d_k \leqslant \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\|\, dt \leqslant M_k d_k.$$

(m_k это норма минимума, которая точно не больше нормы произвольного значения, аналогично для M_k).

Просумируем по k:

$$\sum_{k=1}^n m_k d_k \leqslant \ell\left(\gamma\right) \leqslant \sum_{k=1}^n M_k d_k.$$

$$\sum_{k=1}^n m_k d_k \leqslant \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \leqslant \sum_{k=1}^n M_k d_k.$$

Покажем что $\sum\limits_{k=1}^n (M_k - m_k) d_k \to 0$ при $|\tau| := \max\limits_k d_k \to 0$.

Дальше идёт страшная выкладка из конспекта Ани, есть есть док-во красивее, просьба сказать...

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)d_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(M_k - m_k)(M_k + m_k)}{M_k + m_k} d_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k^2 - m_k^2}{M_k + m_k} d_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{M_k + m_k} \sum_{i=1}^{m} \left(\left(M_k^{(i)}\right)^2 - \left(m_k^{(i)}\right)^2 \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(M_k^{(i)}\right)^2 - \left(m_k^{(i)}\right)^2}{M_k + m_k} d_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{M_k^{(i)} + m_k^{(i)}}{M_k + m_k} \left(M_k^{(i)} - m_k^{(i)}\right) d_k \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left(M_k^{(i)} - m_k^{(i)}\right) d_k \text{ т. к. евклидова норма всегда больше координаты} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \omega_{\gamma_i'}(|\tau|) d_k \textbf{TODO: } \text{какой-то нетривиальный факт} \\
&= (b-a) \sum_{i=1}^{m} \omega_{\gamma_i'}(|\tau|)
\end{aligned}$$

γ глакдий $\implies \forall i \quad \gamma_i \in C[a,b] \implies \lim\limits_{|\tau|\to 0} \omega_{\gamma_i'}(|\tau|) = 0$.

Значит, так-как $|a-b| \leqslant \max\{\max a - \min b, \max b - \min a\}$:

$$\left| \ell(\gamma) - \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)d_k \to 0.$$

Заметим, что значения длины и интеграла не зависят от выбранного разбиения.

Если предположить что они не равны, то можем по их разности выбрать такое t, что сумма получится меньше. Противоречие, значит равны. □

***Определение* 0.2.**
Пусть $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Длиной графика f называется длина пути

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Следствие.
Если $f \in C[a,b]$, то длина графика f равна

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Доказательство.

$$\gamma_1(t) = t \implies \gamma_1'(t) = 1.$$
$$\gamma_2(t) = f(t) \implies \gamma_2'(t) = f'(t).$$
□

***Определение* 0.3.**
Если функция задана в полярных координатах как $r : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$, то задаваемый ей путь -

$$\gamma(\varphi) = \begin{bmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Следствие.
Пусть функция в полярных координатах задана как $r \in C[\alpha, \beta]$. Тогда длина её графика:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}.$$

Доказательство.

$$\gamma_1(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi \implies \gamma_1'(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi + r'(\varphi)\cos\varphi.$$
$$\gamma_2(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \implies \gamma_2'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi.$$
$$\gamma_1'(\varphi)^2 + \gamma_2'(\varphi)^2 = (r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2. \qquad \square$$