Билет 22

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 22: Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

***Определение* 0.1.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Семейство множеств $U_\alpha \subset X$ называется открытым покрытием множества A (покрытием A открытыми множествами), если

1. $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
2. $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha$ - открытое.

***Определение* 0.2.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется компактом, если из любого отркытого покрытия можно выбрать конечное открытое покрытие.

Теорема 0.1.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространтсво, $Y \subset X$ - подпространство.

Тогда компактность $K \subset Y$ в Y и в X равносильны.

Y, !

Доказательство.

$Y \implies X$:

Пусть $G_\alpha \subset X$ - открытое покрытие K в X.

Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ - открытое покрытие K в Y.

Можем выбрать конечное U_{α_k}.

$U_{\alpha_k} \subset G_{\alpha_k} \implies G_{\alpha_k}$ - конечное открытое покрытие.

$X \implies Y$:

Пусть $U_\alpha \subset Y$ - открытое покрытие K в Y.

Тогда $\exists G_\alpha$ открытое в $X \quad U_\alpha = G_\alpha \cap Y$.

Y, .. G \cap Y = U G , Y ? ,

$U_\alpha \subset G_\alpha \implies G_\alpha$ - открытое покрытие K в X.

Значит, можем выбрать конечное G_{α_k}. Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^{n} (G_{\alpha_k} \subset Y) = Y \cap \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k} \supset Y \cap K = K.$$

Значит, U_{α_k} - конечное покрытие K в Y. □

Теорема 0.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, K - компакт. Тогда

1. K - замкнуто

   Доказательство.

   Возьмём $a \in X \setminus K$.

   Заметим, что $\forall x \in K$ K $\cap B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) = \varnothing$.

see Ann , , , , - K, , K

Возьмём открытое покрытие K: $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$.

Выберем конечное: $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$.

Тогда, при $r := \min\limits_{k}\{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$, $B_r(a) \cap K = \varnothing \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a \in \text{Int}(X \setminus K) \implies X \setminus K$ открыто $\implies K$ замкнуто. $\square$

2. K - ограничено

Доказательство.
Возьмём $a \in K$.

Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ - открытое покрытие.

Выберем конечное: $K \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{n_k}(a) = B_r(a)$, $r := \max\limits_{k}\{n_k\}$. $\square$

Следствие.
Если K - компакт и $\tilde{K} \subset K$ - замкнуто, то $\tilde{K}$ - компакт.

Доказательство.
Пусть U_α - открытое покрытие $\tilde{K}$.

Тогда, если добавить к нему $X \setminus \tilde{K}$ (которое открыто так-как $\tilde{K}$ замкнуто), получится открытое покрытие K. Выберем конечное.

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K} \implies \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \supset \tilde{K} \qquad \square.$$