

Билет 75

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 75: ! Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента . . .	1
-----	--	---

0.1. Билет 75: ! Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента

Определение 0.1 (Направление).

Это такой вектор, единичной длины, который смотрит в нужную нам сторону.

Определение 0.2 (Производная по направлению).

Имеем направление h . Также есть внутренняя точка a , то есть $a \in \text{Int}E$. И сама функция $f : E \mapsto \mathbb{R}$. Напомню, что $E \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда следующая штука, это производная функции f по направлению h в точке a :

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t}$$

Теорема 0.1 (Вспомогательная теорема).

Имеем направление h , $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \text{Int}E$ и f дифференцируема в точке a .

Тогда выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h) = \langle \nabla f, h \rangle$$

Доказательство.

Воспользуемся определением дифференцируемости функции f :

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + T(t \cdot h) + \alpha(t \cdot h)$$

Воспользуемся линейностью и получим:

$$\begin{aligned} f(a + t \cdot h) &= f(a) + t \cdot Th + \alpha(t \cdot h) \implies \\ \implies f(a + t \cdot h) - f(a) &= t \cdot Th + \alpha(t \cdot h) \end{aligned}$$

Теперь распишем производную по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t}$$

Благодаря прошлым замечанием, можем заменить числитель:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot Th + \alpha(t \cdot h)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(Th + \frac{\alpha(t \cdot h)}{t} \right)$$

Заметим, что Th какая-то константа, поэтому можно вынести:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Th + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t \cdot h)}{t}$$

Заметим, что $\|t \cdot h\| = t \cdot \|h\| = t$: норма направления равна единице. Следовательно $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t \cdot h)}{t} = 0$: по определению α .
Получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Th$$

Осталось вспомнить, что $Th = d_a f(h)$, просто альтернативная запись. Следовательно, первое равенство у нас есть.

Разберёмся со вторым. Но тут совсем всё просто, так как перед нами определение градиента. ()

□

Следствие Экстремальное свойство градиента.

Имеем направление h , $f : E \mapsto \mathbb{R}$, функция f дифференцируема в точке a и $\nabla f(a) \neq 0$.

Тогда для любого направления h выполнено следующее:

$$-\|\nabla f(a)\| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \|\nabla f(a)\|$$

А равенство достигается, когда $h = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

Смысл следствия. Оно объясняет физический смысл градиента. Градиент это вектор, в направлении которого функция меняется быстрее всего.

Доказательство.

Напишем равенство, которое мы вывели в прошлой теореме:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f, h \rangle \implies \left| \frac{\partial f}{\partial h}(a) \right| = |\langle \nabla f, h \rangle|$$

Напишем неравенство Коши-Буняковского.

$$|\langle \nabla f, h \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| = \|\nabla f(a)\| \implies \left| \frac{\partial f}{\partial h}(a) \right| \leq \|\nabla f(a)\|$$

То есть неравенство мы уже доказали.

Далее осталось вспомнить, когда в неравенстве Коши-Буняковского, получается равенство. Это происходит тогда и только тогда, когда вектора являются пропорциональными. Осталось вспомнить, что норма h должна быть строго равна единице. Следовательно у нас есть два возможных выбора для h :

$$h = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

□