

# Билет 69

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1 Билет 69: Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда. 1

## 0.1. Билет 69: Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

### Определение 0.1.

$f : E \mapsto \mathbb{C}$ ,  $E \subset \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \text{Int}E$ . Если существует  $k \in \mathbb{C}$ , такое что  $f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$  при  $z \rightarrow z_0$ , то  $f$  — **комплексно-дифференцируема в точке**  $z_0$  и  $k$  — **производная**  $f$  в точке  $z_0$ .

*Замечание.*

$$1. k = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

2. Существование производной равносильно дифференцированию

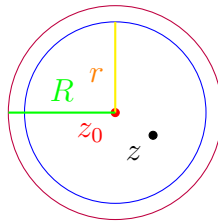
### Теорема 0.1.

$R$  — радиус сходимости ряда  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

Тогда  $f$  — бесконечно дифференцируема в круге  $|z - z_0| < R$  и

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z - z_0)^{n-m}$$

**Доказательство.**



Докажем индукцию по  $m$ . Рассмотрим  $m = 1$  и  $z_0 = 0$  (про  $z_0$  для простоты). Возьмем  $|z| < R$  и подберем такое  $r$ , что  $|z| < r < R$  (картинка выше для пояснения). Возьмем  $|w| < r$

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n w^n - a_n z^n}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})$$

Первое равенство — просто вынесли ряд. Второе — просто поделили (что-то похожее на алгебре делали). Осталось доказать равномерную сходимость по  $|w| < r$  последнего ряда, чтобы поменять местами предел и сумму. Проверять будем с помощью признака Вейерштрасса:

$$|a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})| \leq |a_n|(|w|^{n-1} + |w|^{n-2}|z| + \dots + |z|^{n-1}) \leq |a_n|nr^{n-1}$$

Второе неравенство, так как  $|w| < r$  и  $|z| < r$ . Но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|nr^{n-1}$  сходится, так как у ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$  радиус сходимости  $R > r$ . Значит применился признак сходимости и мы можем поменять местами сумму с предлом.

$$\lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \rightarrow z} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Если применить эту формулу  $m$  раз, то получим искомую формулу. □