

Билет 77

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 77: ! Линейность дифференциала. Дифференциал композиции.	1
-----	--	---

0.1. Билет 77: ! Линейность дифференциала. Дифференциал композиции.

Теорема 0.1 (линейность дифференцирования).

$$f, g : E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

f, g – дифференцируемы в точке a , $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$f \pm g, \lambda f$ – дифференцируемы в точке a

$$d_a(f \pm g) = d_a f \pm d_a g \quad d_a(\lambda f) = \lambda \cdot d_a f$$

Доказательство.

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(\|h\|) \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$g(a+h) = g(a) + d_a g(h) + o(\|h\|) \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + d_a f(h) + d_a g(h) + o(\|h\|)$$

$$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + (d_a f + d_a g)(h) + o(\|h\|)$$

□

Теорема 0.2 (дифференцирование композиции).

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad g : E \rightarrow \mathbb{R}^l \quad E \subset \mathbb{R}^m$$

$$a \in \text{Int } D \quad f(a) \in \text{Int } E \quad f(D) \subset E$$

Тогда $g \circ f$ – дифференцируема в точке a и

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$$

$$: , \quad a \mapsto g(f(a)), \quad f(a) \mapsto d_a f \cdot h \quad f(a), \quad g(f(a)) \mapsto d_{f(a)} g \cdot$$

Замечание.

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Доказательство.

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)\|h\| \quad \|h\| \rightarrow 0$$

$$b := f(a) \quad g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\| \quad \|k\| \rightarrow 0$$

$$k := d_a f(h) + \alpha(h)\|h\| \quad , \quad (,)$$

$$\|k\| \leq \|d_a f(h)\| + \|\alpha(h)\| \|h\| \leq \|d_a f\| \cdot \|h\| + \|\alpha(h)\| \|h\| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

Замечание.

Т.к. $d_a f$ – матрица, а $d_a f(h) = d_a f \cdot h$

Определение нормы матрицы (грубо):

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Из этого мы хотим вывести, что $\|Ah\| \leq \|A\| \cdot \|h\|$.

$$\|Ah\| = \left\| A \frac{h}{\|h\|} \cdot \|h\| \right\| = \|h\| \cdot \left\| A \frac{h}{\|h\|} \right\|$$

Т.к. $\left\| \frac{h}{\|h\|} \right\| = 1$, то получаем, что $\left\| A \frac{h}{\|h\|} \right\| \leq \|A\|$ (в определении \sup берется от всех векторов с нормой до 1, а здесь вектора только с нормой 1).

$$\text{Значит, } \|d_a f(h)\| = \|d_a f \cdot h\| \leq \|d_a f\| \cdot \|h\|$$

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g(f(a) + k) = g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)\|k\| = \\ &= g(b) + d_b g(d_a f(h)) + d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\| = \\ &= g(f(a)) + (d_b g \circ d_a f)(h) + d_b g(\alpha(h)\|h\|) + \beta(k)\|k\| \end{aligned}$$

Хотим показать, что $d_b g(\alpha(h)||h||) + \beta(k)||k|| = o(||h||)$

$d_b g(\alpha(h)||h||) = ||h|| \cdot d_b g(\alpha(h))$ (т.к. $d_b g(\alpha(h)||h||) = d_b g \cdot \alpha(h) \cdot ||h||$)

$||d_b g(\alpha(h)||h||)|| \leq ||h|| \cdot ||d_b g|| \cdot ||\alpha(h)||$, а $||d_b g|| \cdot ||\alpha(h)|| \rightarrow 0$

Замечание.

$$\lim_{h \rightarrow 0} ||d_b g|| \cdot ||\alpha(h)|| = ||d_b g|| \cdot \lim_{h \rightarrow 0} ||\alpha(h)||$$

$\alpha(h) \cdot ||h|| = o(h)$ (по определению)

Значит, $\alpha(h) \rightarrow 0$.

Известно, что если $x_n \rightarrow a$, то $||x_n|| \rightarrow ||a|| \implies ||\alpha(h)|| \rightarrow ||0|| = 0$.

$$||\beta(k)||k|| = ||k|| \cdot ||\beta(k)|| \leq ||\beta(k)||(||d_a f|| \cdot ||h|| + ||\alpha(h)|| \cdot ||h||) = ||h|| \cdot ||\beta(k)||(||d_a f|| + ||\alpha(h)||).$$

А $||\beta(k)||(||d_a f|| + ||\alpha(h)||) \rightarrow 0$.

Все получили.

□