

Билет 67

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.	1
-----	---	---

0.1. Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.

Теорема 0.1.

R – радиус сходимости, $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leq r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$r < R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| \leq r$ воспользуемся признаком Вейерштрасса. $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$, $|a_n| r^n$ сходится \implies по признаку Вейерштрасса $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| \leq r$ сходится равномерно. \square

Замечание.

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

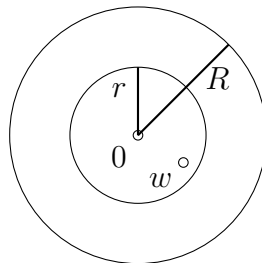
Контрпример $R = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, хвост ряда $\sum_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightarrow 0$, т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаменатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку w из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окрестности. Берем r , т.ч. $|w| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| < r$ ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция \implies в круге $|z| < r$ сумма непрерывна \implies есть непрерывность суммы и в w . В силу произвольности w сумма непрерывна в любой точке $|z| < R$.



\square

Теорема 0.2 (Абеля).

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на отрезке $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Применим признак Абеля. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (нет зависимости от x), $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \implies$ равномерно огранич., $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает, тогда по признаку Абеля $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно. \square

Следствие.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если выполнены условия теоремы, то $f(x) \in C[0, R]$, т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности, $\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.