

Билет 38

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 38: Длина кривой, заданной параметрически(с леммой). Длина графика функции и длина кривой, заданной в полярных координатах.	1
-----	---	---

0.1. Билет 38: Длина кривой, заданной параметрически(с леммой). Длина графика функции и длина кривой, заданной в полярных координатах.

В этом билете все пути - в \mathbb{R}^m с Евклидовой метрикой.

Определение 0.1 (повтор).

Пусть $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - путь.

Пусть γ_i - i -я координатная функция γ .

γ называется r -гладким путём, если $\forall i \quad \gamma_i \in C^r[a, b]$.

Просто гладкий - $r = 1$.

$$r = \inf_i r_i, \quad (r_i = 1)$$

Лемма.

Пусть $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - гладкий путь.

Пусть $\Delta \subset [a, b]$ - отрезок, $\ell(\Delta)$ - его длина.

$$m_{\Delta}^{(i)} := \min_{t \in \Delta} |\gamma'(t)|$$

$$M_{\Delta}^{(i)} := \max_{t \in \Delta} |\gamma'(t)|$$

$$m_{\Delta} := \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(m_{\Delta}^{(i)}\right)^2}$$

$$M_{\Delta} := \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(M_{\Delta}^{(i)}\right)^2}$$

Тогда,

$$m_{\Delta} \cdot \ell(\Delta) \leq \ell(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta} \cdot \ell(\Delta).$$

Доказательство.

Пусть t_i - разбиение Δ .

$$a_k^{(i)} = \gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})$$

$$a_k = \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(a_k^{(i)}\right)^2}.$$

По теореме Лагранжа: $\exists c_{ik} \in (t_{k-1}, t_k) \quad a_k^{(i)} = \gamma'(c_{ik})(t_k - t_{k-1})$.

Тогда, $|a_k^{(i)}| = |\gamma'(c_{ik})| (t_k - t_{k-1}) \leq M_{\Delta}^{(i)} (t_k - t_{k-1})$.

$$\begin{aligned} a_k &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(|a_k^{(i)}|\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(M_{\Delta}^{(i)}\right)^2 (t_k - t_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 \sum_{i=1}^m \left(M_{\Delta}^{(i)}\right)^2} \\ &= M_{\Delta} (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Аналогично для $a_k \geq m_{\Delta} (t_k - t_{k-1})$.

$$m_{\Delta} \ell(\Delta) = m_{\Delta} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq M_{\Delta} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = M_{\Delta} \ell(\Delta).$$

Перейдём к супремуму для t :

$$m_{\Delta} \ell(\Delta) \leq \ell(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta} \ell(\Delta).$$

□

Теорема 0.1 (Длина кривой заданной параметрически).

Пусть $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ - гладкий путь.

Тогда

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \dots + \gamma_n(t)^2} dt.$$

Доказательство.

Возьмём t - разбиение $[a, b]$.

$$d_k := t_k - t_{k-1}.$$

$$m_k := m_{[t_{k-1}, t_k]}$$

$$M_k := M_{[t_{k-1}, t_k]}$$

Тогда, по лемме значем

$$m_k d_k \leq \ell(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}) \leq M_k d_k.$$

По линейности интеграла:

$$m_k d_k \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \leq M_k d_k.$$

$$m_k = \sqrt{\sum_i \min(\gamma'_i)^2} M_k = s$$

(m_k это норма минимума, которая точно не больше нормы произвольного значения, аналогично для M_k).

Просуммируем по k :

$$\sum_{k=1}^n m_k d_k \leq \ell(\gamma) \leq \sum_{k=1}^n M_k d_k.$$

$$\sum_{k=1}^n m_k d_k \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{k=1}^n M_k d_k.$$

Покажем что $\sum_{k=1}^n (M_k - m_k) d_k \rightarrow 0$ при $|\tau| := \max_k d_k \rightarrow 0$.

Дальше идёт страшная выкладка из конспекта Ани, есть есть док-во красивее, просьба сказать...

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (M_k - m_k) d_k &= \sum_{k=1}^n \frac{(M_k - m_k)(M_k + m_k)}{M_k + m_k} d_k \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{M_k^2 - m_k^2}{M_k + m_k} d_k \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{M_k + m_k} \sum_{i=1}^m \left((M_k^{(i)})^2 - (m_k^{(i)})^2 \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{(M_k^{(i)})^2 - (m_k^{(i)})^2}{M_k + m_k} d_k \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{M_k^{(i)} + m_k^{(i)}}{M_k + m_k} (M_k^{(i)} - m_k^{(i)}) d_k \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (M_k^{(i)} - m_k^{(i)}) d_k \text{ т. к. евклидова норма всегда больше координаты} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \omega_{\gamma'_i}(|\tau|) d_k \text{ TODO: какой-то нетривиальный факт} \\
&= (b - a) \sum_{i=1}^m \omega_{\gamma'_i}(|\tau|)
\end{aligned}$$

sum d_k = (b-a)

 $M^{(i)} - m^{(i)} = m$

$$\gamma \text{ гладкий} \implies \forall i \quad \gamma_i \in C[a, b] \implies \lim_{|\tau| \rightarrow 0} \omega_{\gamma'_i}(|\tau|) = 0.$$

Значит, так-как $|a - b| \leq \max\{\max a - \min b, \max b - \min a\}$:

$$\left| \ell(\gamma) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) d_k \rightarrow 0.$$

Заметим, что значения длины и интеграла не зависят от выбранного разбиения.

Если предположить что они не равны, то можем по их разности выбрать такое t , что сумма получится меньше. Противоречие, значит равны. \square

Определение 0.2.

Пусть $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Длиной графика f называется длина пути

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Следствие.

Если $f \in C[a, b]$, то длина графика f равна

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) = t &\implies \gamma'_1(t) = 1. \\
\gamma_2(t) = f(t) &\implies \gamma'_2(t) = f'(t).
\end{aligned}$$

 \square

Определение 0.3.

Если функция задана в полярных координатах как $r : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$, то задаваемый ей путь -

$$\gamma(\varphi) = \begin{bmatrix} r(\varphi) \cos \varphi \\ r(\varphi) \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Следствие.

Пусть функция в полярных координатах задана как $r \in C[\alpha, \beta]$. Тогда длина её графика:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}.$$

Доказательство.

$$\gamma_1(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi \implies \gamma'_1(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi + r'(\varphi) \cos \varphi.$$

$$\gamma_2(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi \implies \gamma'_2(\varphi) = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi.$$

$$\gamma'_1(\varphi)^2 + \gamma'_2(\varphi)^2 = (r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2. \quad \square$$

$$L(\gamma) \leq (b-a) \cdot \max(|\gamma'|) = \int_a^b \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi.$$