

Билет 89

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 89: Теорема об обратной функции.	1
--	---

0.1. Билет 89: Теорема об обратной функции.

Теорема 0.1 (Теорема об обратной функции).

$f : D \rightarrow R^n, D \subset R^n$ открытое, $x_0 \in D, f$ непрерывно дифференцируема в окрестности $(\cdot)x_0$ и $y_0 = f(x_0)$, матрица $A := f'(x_0)$ обратима. Тогда существуют окрестности U точки x_0, V окрестность $(\cdot)y_0$, т.ч. $f : U \rightarrow V$ — обратима и $f^{-1} : V \rightarrow U$ — непрерывна.

Доказательство.

$$G_y(x) := x + A^{-1}(y - f(x))$$

Выберем $B_r(x_0)$, т.ч. $\|A^{-1}\| \|A - f'(x)\| \leq \frac{1}{2}$ при $x \in B_r(x_0)$

Тогда $f'(x)$ при $x \in B_r(x_0)$ — обратимое отображение

$$\begin{aligned} \|G'_y(x)\| &= \|E + A^{-1}(-f'(x))\| = \|E - A^{-1}f'(x)\| = \|A^{-1}(A - f'(x))\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \|A - f'(x)\| \leq \frac{1}{2} \text{ при } x \in B_r(x_0) \end{aligned}$$

$$\|G_y(x) - G_y(\tilde{x})\| \leq \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\| \text{ при } x, \tilde{x} \in B_r(x_0) \implies G_y - \text{сжатие}$$

подберем $B_r(y_0)$ так, чтобы $G_y(B_r(x_0)) \subset B_r(y_0)$

$$\begin{aligned} \|G_y(x) - x_0\| &\leq \|G_y(x_0) - x_0\| + \|G_y(x_0) - G_y(x)\| = \|A^{-1}(y - f(x_0))\| + \|G_y(x_0) - G_y(x)\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \|y - y_0\| + \frac{1}{2} \|x - x_0\| < \|A^{-1}\| \cdot R + \frac{r}{2} < r \end{aligned}$$

по т. Банаха у G_y есть неподвижная точка т.е.

$$x \in B_r(x_0), \text{ т.ч. } x = G_y(x) = x + A^{-1}(y - f(x)) \implies A^{-1}(y - f(x)) = 0 \implies y = f(x)$$

$$\implies \text{если } y \in B_r(y_0), \text{ то найдется } x \in B_r(x_0) \text{ т.ч. } y = f(x)$$

$U := f^{-1}(V), V := B_r(y_0), f : U \rightarrow V$ биекция, осталось доказать непрерывность f^{-1}

$$f(x) = y, f(\tilde{x}) = \tilde{y}, G_y(x) = x, G_{\tilde{y}}(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(\tilde{y})\| = \|x - \tilde{x}\| \leq 2\|G_y(x) - G_{\tilde{y}}(\tilde{x})\| =$$

$$= 2\|x - A^{-1}(y - f(x)) - (x - A^{-1}(\tilde{y} - f(x)))\| = 2\|A^{-1}(\tilde{y} - f(x) - (y - f(x)))\| =$$

$$= 2\|A^{-1}(\tilde{y} - y)\| \leq 2\|A^{-1}\| \|\tilde{y} - y\|$$

Отсюда видно, что если \tilde{y} близко к y , то $f^{-1}(\tilde{y})$ близко к $f^{-1}(y)$, и значит у нас есть непрерывность

□