# Билет 50

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

## Содержание

## 0.1. Билет 50: Теорема Коши. Произведение рядов. Теорема Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.

**Теорема 0.1** (Коши).

Если ряды $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ – абсолютно сходятся, то ряд, образованный из слагаемых $a_n b_k$ в каком-то порядке, абсолютно сходится, и его сумма равна $AB$

**Доказательство**.

Сначала немного обозначений:

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_n \ B_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$

$\tilde{A}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \ \tilde{B}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|$

$\tilde{A} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| \ \tilde{B} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k|$

$\tilde{S}_m$ – частичная сумма ряда из $|a_n b_k|$

$\tilde{S}_m \leqslant \sum\limits_{i,j} |a_i b_j| = \sum\limits_{i=1}^{\max i} |a_i| \sum\limits_{j=1}^{\max j} |b_j| \leqslant \tilde{A}\tilde{B} < +\infty$, меньше бесконечности, т.к. ряды абсолютно сходятся.

Частичные суммы $\tilde{S}_m$ ограничены $\implies$ ряд сходится.

Складывать будем все в таком порядке: сначала $a_1 b_1$, потом все, что до индекса 2, все, что до индекса 3, и т.д. Т.е. $(a_1 b_1) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_1 b_3) + \ldots.$

**TODO:** Табличка с квадратиками

$S_m$ – частичная сумма такого ряда

$S_{n^2} = \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_j b_k = A_n B_n \to AB$

Пусть $n^2 \leqslant m \leqslant (n+1)^2$

$S_m = S_{n^2} + \sum\limits_{k=1}^{\ldots} a_{n+1} b_k + \sum\limits_{k=n}^{\ldots} a_k b_{n+1}$

$\sum\limits_{k=1}^{n+1} |a_{n+1} b_k| + \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_{n+1}| = |a_{n+1}|\, \tilde{B}_{n+1} + |b_{n+1}|\, \tilde{A}_n \leqslant |a_{n+1}|\, \tilde{B} + |b_{n+1}|\, \tilde{A} \to 0$, т.к. $\lim a_n = \lim b_n = 0$

$\implies S_n \to AB$ $\square$

***Определение* 0.1.**

$\sum a_n$ и $\sum b_n$

Произведением рядов называется ряд $\sum c_n$, где $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1$

**Теорема 0.2** (Мертенса).

$\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ сходятся, причем один из них абсолютно, то произведение рядов сходится к $AB$.

*Замечание.*

Теорема идет без доказательства, но вот несколько замечаний по поводу нее.

1. Здесь важен порядок, в котором мы складываем $a_i b_j$. В теореме Коши он был не важен, т.к. у обоих рядов была абсолютная сходимость, но здесь у обоих рядов абсолютная сходимость не гарантирована.

2. Просто сходимости рядов не хватает. Пример:

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ умножаем на $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

   $c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdot (-1)^0 + \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} + ... + (-1)^0 \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} =$
   $= (-1)^{n-2}(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n-3}\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}})$

   $n-1$ слагаемых

   $\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{n-1}$ (т.к. среднее арифметичкое больше среднего геометрического)

   $|c_{n-1}| \geqslant 1 \implies$ ряд $\sum c_n$ расходится.