

# Билет 67

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля. . . . .	1
-----	---	---

## 0.1. Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.

### Теорема 0.1.

$R$  – радиус сходимости,  $0 < r < R$ . Тогда в круге  $|z| \leq r$  ряд сходится равномерно.

### Доказательство.

$r < R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  сходится абсолютно. Для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $|z| \leq r$  воспользуемся признаком Вейерштрасса.  $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ ,  $|a_n| r^n$  сходится  $\implies$  по признаку Вейерштрасса  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $|z| \leq r$  сходится равномерно.  $\square$

### Замечание.

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

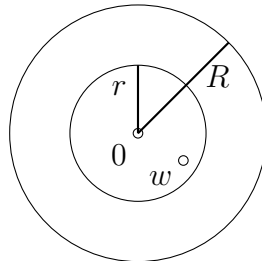
Контрпример  $R = 1$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ , хвост ряда  $\sum_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightarrow 0$ , т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаменатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

### Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

### Доказательство.

Возьмем произвольную точку  $w$  из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окрестности. Берем  $r$ , т.ч.  $|w| < r < R$ . Знаем, что в круге  $|z| < r$  ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция  $\implies$  в круге  $|z| < r$  сумма непрерывна  $\implies$  есть непрерывность суммы и в  $w$ . В силу произвольности  $w$  сумма непрерывна в любой точке  $|z| < R$ .



$\square$

### Теорема 0.2 (Абеля).

Пусть  $R$  – радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  и ряд сходится при  $z = R$ . Тогда на отрезке  $[0, R]$  ряд сходится равномерно.

### Доказательство.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$ . Применим признак Абеля.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  сходится равномерно (нет зависимости от  $x$ ),  $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \implies$  равномерно огранич.,  $\left(\frac{x}{R}\right)^n$  монотонно убывает, тогда по признаку Абеля  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится равномерно.  $\square$

### Следствие.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , если выполнены условия теоремы, то  $f(x) \in C[0, R]$ , т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности,  $\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ .