Билет 39

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 39: Связность и линейная связность. Теорема Больцано–Коши. Связность отрезка и линейно связного множества.

***Определение* 0.1.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется связным, если для всех открытых непересекающихся $U, V \subset X$ верно

$$A \subset U \cup V \implies \left[\begin{array}{l} A \subset U \\ A \subset V \end{array}\right. .$$

(Неформально: A нельзя разбить на два открытых непересекающихся множества)

Теорема 0.1.

Непрерывный образ связного множества связен

Доказательство.

Пусть f - непрерывная функция, E - связное множество.

Пусть $f(E) \subset U \cup V$, где U, V - открытые непересекающиеся.

Тогда $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ - открытые непересекающиеся. И при этом, $E \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

Тогда E подмножество одного из них, и $f(E)$ подмножество соответсвующего образа. □

Теорема 0.2 (Больцано-Коши)**.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $E \subset X$ связно, $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $a, b \in E$.

$A := f(a)$ $B := f(b)$

Тогда, $\forall A < C < B \quad \exists c \in E \quad f(c) = C$.

Доказательство.

$U := (-\infty, C)$, $V := (C, \infty)$ - открытые непересекающиеся. , - U, V

Предположим что такого c не существует. Тогда $C \notin f(E)$.

Тогда $f(E) \subset U \cup V$. Но при этом $A \in U$, $B \in V$, значит $f(E) \not\subset U$ и $f(E) \not\subset V$, противоречие со связностью $f(E)$ как непрерывного образа связного E. □

Теорема 0.3.

Отрезок связен.

Доказательство.

Пусть $[a, b] \subset U \cup V$. Без ограничения общности, $b \in V$.

Предположим что $S := [a, b] \cap U \neq \varnothing$.

$s := \sup S$.

Если $s \in V$:

$$s \in V \overset{\text{открытость}}{\implies} \exists \varepsilon > 0 \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset V \implies (s - \varepsilon, s] \cap U = \varnothing \implies \sup U \leqslant s - \varepsilon < s.$$

Если $s \in U$, то $s \neq b$: b \in V, U \cap V = \none

$$s \in U \implies \exists \varepsilon \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U \implies \sup U \geqslant s + \varepsilon > s.$$

В обоих случаях получили противоречие, значит $S = \varnothing \implies [a, b] \subset V$. Значит, отрезок связен. □

Следствие.
Носитель пути - связное множество.

Доказательство.
Отрезок - связное множество, носитель пути - непрерывный образ отрезка. □

***Определение* 0.2.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

A называется линейно связным, если $\forall x, y \in A \quad \exists \gamma : [a, b] \mapsto A \quad \begin{cases} \gamma(a) = x \\ \gamma(b) = y \\ \gamma \text{ - путь} \end{cases}$,

Теорема 0.4.
Линейно связное множество связно

Доказательство.
Пусть нет, $A \subset U \cup V$ - открытые непересекающиеся, $A \cap U, A \cap V \neq \varnothing$.

Возьмём $x \in A \cap U$, $y \in A \cap V$.

Возьмём γ - путь от x до y.

$\gamma([a, b]) \subset U \cup V$, $\gamma(a) \in U$, $\gamma(b) \in V$. Противоречие со связностью носителя. □

***Определение* 0.3.**
Область - открытое линейно связное множество.

Замечание.
Если U открыто, то U связно $\iff$ U линейно связно. (без доказательства)

=> => https://www.youtube.com/watch?v=NkCkmFnbhtc&list=PLcsjsqLLSfNDDkajOue