

Билет 22

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 22: Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.	1
-----	---	---

0.1. Билет 22: Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

Определение 0.1.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Семейство множеств $U_\alpha \subset X$ называется открытым покрытием множества A (покрытием A открытыми множествами), если

1. $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
2. $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha$ - открытое.

Определение 0.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

$K \subset X$ называется компактом, если из любого открытого покрытия можно выбрать конечное открытое покрытие.

Теорема 0.1.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $Y \subset X$ - подпространство.

Тогда компактность $K \subset Y$ в Y и в X равносильны.

Доказательство.

$Y \implies X$:

Пусть $G_\alpha \subset X$ - открытое покрытие K в X .

Тогда $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ - открытое покрытие K в Y .

Можем выбрать конечное U_{α_k} .

$U_{\alpha_k} \subset G_{\alpha_k} \implies G_{\alpha_k}$ - конечное открытое покрытие.

$X \implies Y$:

Пусть $U_\alpha \subset Y$ - открытое покрытие K в Y .

Тогда $\exists G_\alpha$ открытое в $X \quad U_\alpha = G_\alpha \cap Y$.

$U_\alpha \subset G_\alpha \implies G_\alpha$ - открытое покрытие K в X .

Значит, можем выбрать конечное G_{α_k} . Тогда

$$\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^n (G_{\alpha_k} \cap Y) = Y \cap \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k} \supset Y \cap K = K.$$

Значит, U_{α_k} - конечное покрытие K в Y . □

Теорема 0.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, K - компакт. Тогда

1. K - замкнуто

Доказательство.

Возьмём $a \in X \setminus K$.

Заметим, что $\forall x \in K \quad B_{\frac{\rho(x,a)}{2}} \cap B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) = \emptyset$.

Возьмём открытое покрытие K : $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$.

Выберем конечное: $K \subset \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$.

Тогда, при $r := \min_k \{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$, $B_r(a) \cap K = \emptyset \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a \in \text{Int}(X \setminus K) \implies X \setminus K$ открыто $\implies K$ замкнуто. \square

2. K - ограничено

Доказательство.

Возьмём $a \in K$.

Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ - открытое покрытие.

Выберем конечное: $K \subset \bigcup_{k=1}^m B_{n_k}(a) = B_r(a)$, $r := \max_k \{n_k\}$. \square

Следствие.

Если K - компакт и $\tilde{K} \subset K$ - замкнуто, то \tilde{K} - компакт.

Доказательство.

Пусть U_{α} - открытое покрытие \tilde{K} .

Тогда, если добавить к нему $X \setminus \tilde{K}$ (которое открыто так-как \tilde{K} замкнуто), получится открытое покрытие K . Выберем конечное.

$$\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K} \implies \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \supset \tilde{K} \quad \square.$$