

Билет 94

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 94: Квадратичная форма. Положительная и отрицательная определенность. Оценка снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточные условия экстремума.	1
-----	--	---

0.1. Билет 94: Квадратичная форма. Положительная и отрицательная определенность. Оценка снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточные условия экстремума.

Определение 0.1 (Квадратичная форма).

$$Q(h) = \sum_{i,j} c_{i,j} h_i h_j, c_i = c_j$$

В формуле Тейлора выше сумма это квадратичная форма.

Определение 0.2.

Q – квадратичная форма.

Q – строго положительно определена, если $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$.

Q – нестрого положительно определена, если $\forall h \quad Q(h) \geq 0$.

Аналогично отрицательно определенная Q .

Лемма.

Если $Q(h)$ – строго положительно определена, то $\exists c > 0$, такое что $Q(h) > c\|h\|^2$.

Доказательство.

$$Q(h) = \sum_j (Ch)_j h_j = \sum_j \sum_i c_{ij} h_i h_j = \langle Ch, h \rangle \text{ – непрерывная функция.}$$

- 0, 0

Рассмотрим $Q(h)$ на единичной сфере – на компакте. Тогда $\exists h_0$, такое что $\forall h \quad Q(h) \geq Q(h_0) > 0$. Положим $c = Q(h_0)$.

$$Q(h) = \langle Ch, h \rangle = \langle C \left(\frac{h}{\|h\|} \|h\| \right), \frac{h}{\|h\|} \|h\| \rangle = \|h\|^2 \langle C \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} \rangle = \|h\|^2 Q \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \geq c\|h\|^2 \text{ (вектор } \frac{h}{\|h\|} \text{ лежит на единичной сфере).}$$

□

Теорема 0.1 (Достаточные условия экстремума).

$E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$, a – стационарная точка, $Q(h) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$. Тогда

1. Если Q строго положительно определена, то a – строгий минимум.
2. Если Q строго отрицательно определена, то a – строгий максимум.
3. Если a нестрогий минимум, то Q нестрого положительно определена.
4. Если a нестрогий максимум, то Q нестрого отрицательно определена.
5. Если Q не является знакоопределенной, то a не точка экстремума.

Доказательство.

$$f(a+h) = f(a) + Q(h) + \alpha(h)\|h\|^2, \text{ где } \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

1. Q – строго положительно определена, тогда по лемме $Q(h) \geq c\|h\|^2 \implies f(a+h) \geq f(a) + c\|h\|^2 + \alpha(h)\|h\|^2 = f(a) + \|h\|^2(c + \alpha(h)) > f(a)$, т.к. при малых h есть неравенство $c + \alpha(h) > 0$. При h близких к 0 получается $f(a+h) > f(a) \implies a$ – строгий минимум.
3. a – нестрогий минимум. $0 \leq f(a+h) - f(a) = Q(h) + \alpha(h)\|h\|^2$ при малых h . $0 \leq Q(th) + \alpha(th)\|th\|^2 = \langle C(th), th \rangle + \alpha(th)t^2\|h\|^2 = t^2(Q(h) + \alpha(th)\|h\|^2)$ при малых $t \implies 0 \leq Q(h) + \alpha(th)\|h\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} Q(h) \implies Q(h) \geq 0$.

5. От противного. Пусть a точка экстремума, тогда по пункту 4 или 5 Q нестрого положительно или отрицательно определена. Противоречие.

□

Теорема 0.2 (Критерий Сильвестра).

Q – квадратичная форма, C – ее матрица.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \dots \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & \dots \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Q – строго положительно определена $\Leftrightarrow \det(c_{11}) > 0 \wedge \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} > 0 \wedge \dots$

Q – строго отрицательно определена $\Leftrightarrow \det(c_{11}) < 0 \wedge \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} < 0 \wedge \dots$

Для нестрогих неравенства меняются на нестрогие.

