

Билет 84

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 84: Мультииндексы. Определения, обозначения, лемма о производной композиции гладкой и линейной функций.	1
-----	---	---

0.1. Билет 84: Мультииндексы. Определения, обозначения, лемма о производной композиции гладкой и линейной функций.

Определение 0.1 (Мультииндекс).

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad k_j \geq 0 \quad k_j \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Высота мультииндекса } |k| := k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

$$k! := k_1! k_2! \dots k_n!$$

$$h \in \mathbb{R}^n \quad h^k := h_1^{k_1} h_2^{k_2} \dots h_n^{k_n}$$

$$f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

Полиномиальный или мультиномиальный коэффициент:

$\binom{|k|}{k_1, k_2, \dots, k_n} := \frac{|k|!}{k!} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$ – количество способов покрасить $|k|$ шаров в n цветов так, чтобы первого цвета было k_1 , k_2 – второго и т.д.

Лемма.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in C^r(D) \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

$[x, x+h]$ – отрезок с концами x и $x+h$. (на многомерном пространстве)

$$[x, x+h] \subset D$$

$$F(t) = f(x+th) \quad F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{функция от одной переменной})$$

Тогда $F \in C^r[0, 1]$ и при $0 \leq l \leq r$

$$F^{(l)}(t) = \sum_{|k|=l} \binom{l}{k_1, k_2, \dots, k_n} f^{(k)}(x+th) h^k$$

Доказательство.

$$G(t) := g(x+th)$$

$$G'(t) = g'(x+th) \cdot (x+th)' = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x+th), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x+th) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x+th) h_i$$

– получили формулу для $l = 1$.

$$F''(t) = (F'(t))' = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th) h_i \right)' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x+th) h_j h_i$$

$$F^{(l)}(t) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_l=1}^n \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_l}}(x+th) h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_l} = \sum_{|k|=l} \binom{|k|}{k_1, k_2, \dots, k_n} f^{(k)}(x+th) h^k =$$

$$= \sum_{|k|=l} \frac{|k|!}{k!} f^{(k)}(x+th) h^k \quad (\text{можем сделать замену на } f^{(k)} \text{ по теореме из билета 83})$$

$$k = (\#\{j : i_j = 1\}, \#\{j : i_j = 2\}, \dots) \quad (\# - \text{кол-во чего-то})$$

□