

Билет 42

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 42: ! Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствие.	1
-----	--	---

0.1. Билет 42: ! Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Признак сравнения. Следствие.

Теорема 0.1.

Если $a_n \geq 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится \iff частичные суммы ограничены.

Доказательство.

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_{n+1}$$

т.е. S_n монотонно возрастает.

$\implies S_n$ имеет конечный предел

\iff (свойство монотонно возрастающей последовательности) S_n – ограничена □

Теорема 0.2 (Признак сравнения).

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{расходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{расходится}$$

Доказательство.

$$1. A_n := \sum_{k=1}^n a_k \leq B_n := \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится}$$

$$\implies B_n - \text{ограничены}$$

$$\implies A_n - \text{ограничены}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится}$$

2. От противного.

$$\text{Пусть } \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится}$$

$$\implies \text{противоречие.}$$

□

Следствие.

$$a_n, b_n \geq 0$$

$$1. a_n = \mathcal{O}(b_n) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{сходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сходится.}$$

$$2. a_n \sim b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ ведут себя одинаково.}$$

Доказательство.

1. $0 \leq a_n \leq Cb_n$ и $\sum Cb_n = C \sum b_n$ – сходится
 \implies (предыдущая теорема) $\sum a_n$ – сходится
2. При достаточно больших n : $\frac{b_n}{2} \leq a_n \leq 2b_n$
Из $a_n \leq 2b_n$: $\sum b_n$ – сходится $\implies \sum a_n$ – сходится
Из $\frac{b_n}{2} \leq a_n$: $\sum a_n$ – сходится $\implies \sum b_n$ – сходится

□