

# Билет 53

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 53: Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ . . . . .	1
-----	---	---

### 0.1. Билет 53: Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$

Тут под  $p_n$  подразумевается  $n$ -ое простое число.

#### Утверждение 0.1.

Произведение  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$  расходится

#### Доказательство.

Для начала проведу некие не совсем формальные рассуждения, далее их формализую. Итак, неформальная часть:

$$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

В начале просто несколько иначе переписал член произведения. Затем заметил, что это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Тогда наше исходное произведение перепи-  
сывается в такое произведение сумм:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

«Раскроем» скобки в этом произведении и получим сумму всевозможных произведений выра-  
жений вида  $\frac{1}{p_n^k}$ , а именно:

$$\sum \frac{1}{\prod_k p_k^{\alpha_k}}$$

А с алгебры первого модуля нам известно, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде  $\prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\alpha_k}$  и при этом единственным образом поэтому наша сумма это в точности это:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Получили гармонический ряд, а он, как известно, расходится. Почему же я написал слово «рас-  
кроем» в кавычках? Все потому, что раскрывать бесконечное произведение бесконечных сумм  
может быть не совсем законно, как минимум не ясно почему законно, поэтому пришло время  
формализовать всё то, что я написал выше:

$$P_n := \prod_{t=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_t^k} \geq \prod_{t=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{p_t^k}$$

Раскроем скобки, получим суммы таких слагаемых  $\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots}$ , где все  $\alpha_i \leq n$ , и все  $p_i \leq n$ , что  
означает, что там точно будут все дроби вида  $\frac{1}{i}$ , где  $i \leq n$  ( $i$  - натуральное, если вдруг по каким-  
то причинам это неочевидно). Тогда для  $P_n$  имеем следующее неравенство (уже имеем все такие  
слагаемые, есть еще какие-то сверху, на них забудем):

$$P_n \geq \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}$$

Заметим, что этот ряд расходится, поэтому и произведение из условия расходится. □

#### Замечание.

$$P_n \geq \ln n + \mathcal{O}(1)$$

**Доказательство.**

Мы все прекрасно знаем, что гармонический ряд эквивалентен  $\ln n + \gamma + o(1)$ . Мы уже показали, что наш ряд больше гармонического ряда, а  $\gamma + o(1)$  можно записать в виде  $\mathcal{O}(1)$  (потому что постоянная Эйлера и  $o(1)$  - какое-то ограниченное выражение).  $\square$

**Теорема 0.2.**

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$  расходится

**Доказательство.**

Из расходимости произведения  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$  ряд из логарифмов  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1}$  тоже расходится. Посмотрим на один такой логарифм:

$$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{2}{x}$$

Первые два равенства - очевидные, последнее неравенство следует из следующего факта:  $\ln(1-t) \geq -2t$  при достаточно маленьких  $t$  (не верите - дифференцируйте), поэтому выполняется при достаточно больших  $x$ . Значит, первые члены, для которых неравенство не выполняется, можем оценить какой-то константой  $C$  (их конечное число), а для остальных по неравенству:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} &\leq C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} - C &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n} \end{aligned}$$

Получилось, что подперли ряд из  $\frac{2}{p_i}$  расходящимся рядом, отсюда следует расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ .  $\square$

**Замечание.**

На самом деле

$$\ln \frac{x}{x-1} \sim \frac{1}{x}$$

(потому что  $-\ln(1-\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$ ), поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_k}{p_k-1}$$

(теорема Штольца утверждает (гугл в помощь, если что), что если каждое слагаемое (то есть  $a_n - a_{n-1}$ ) эквивалентно, то и суммы  $(a_n)$  эквивалентны), то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \ln P_n \geq \ln(\ln n + \mathcal{O}(n)) \geq \ln \ln n + \mathcal{O}(n)$$

**Утверждение 0.3.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \sim \ln \ln n$$

**Доказательство.**

Без доказательства.  $\square$