Билет 74

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 74: ! Дифференцируемость координатных функций. Примеры дифференцируемых отображений

Разберем несколько примеров дифференцируемых отображений.

Пример.

$f(x) = const = c$

$f(a+h) = f(a)$

$T \equiv 0$, $\alpha \equiv 0$

Пример.

f - линейное отображение

$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + T(h)$

$T = f$, $\alpha \equiv 0$

***Определение* 0.1.**

$f : E \mapsto \mathbb{R}^m,\ E \subset \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} f_k : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \text{ - координатные функции}$$

Теорема 0.1.

Дифференцируемость функции f в точке a равносильна дифференцируемости в точке a всех ее координатных функций.

Доказательство.

$f : E \mapsto R^m, E \subset \mathbb{R}^n$

1. $\Rightarrow f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$, где $\alpha(h) = o(||h||)$

   Распишем определение в виде векторного равенства:

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \\ \vdots \\ T_m(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \\ \alpha_2(h) \\ \vdots \\ \alpha_m(h) \end{pmatrix}$$

   Рассмотрим конкретную координату:

   $f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)$

   $T_k h$ - произведение строки матрицы на вектор, поэтому - линейное отображение (по сути просто скалярное произведение).

   Необходимо показать, что $\dfrac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$

   Достаточно заметить, что так как $||\alpha(h)|| = \sqrt{\sum \alpha_k(h)^2}$, то $|\alpha_k(h)| \leqslant ||\alpha(h)||$

   Но тогда $\dfrac{|\alpha_k(h)|}{||h||} \leqslant \dfrac{||\alpha(h)||}{||h||} \to 0$

   Отсюда получаем вывод, что $\dfrac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$, получается, что доказали для всех координатных функций.

2. $\Leftarrow$

   Знаем, что $f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)$ и $\dfrac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$

   Соберем все это в один вектор, из строчек T получаем матрицу, тогда в результате:

   $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$

   Надо проверить, что $\dfrac{\alpha(h)}{||h||} \to 0$, т. е. $\dfrac{||\alpha(h)||}{||h||} \to 0$

   $$\frac{||\alpha(h)||}{||h||} = \frac{\sqrt{\alpha_1(h)^2 + \ldots + \alpha_m(h)^2}}{||h||} = \sqrt{\frac{\alpha_1(h)^2}{||h||^2} + \ldots + \frac{\alpha_m(h)^2}{||h||^2}} \to 0$$

$\square$

Следствие.

Строки матрицы Якоби - градиенты координтных функций.

Доказательство.

Строки матрицы Якоби - это те самые T_k, которые встречались в доказательстве теоремы.

Тогда можно заметить, что $T_k h = \langle T_k^T, h \rangle$

Отсюда получаем, что строки матрицы Якоби - градиенты координтных функций. $\square$