

Билет 16

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества. 1

0.1. Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

Свойства.

1. $A \subset \text{Cl } A$
2. $\text{Cl } A$ - замкнутое множество

Доказательство.

По определению, $\text{Cl } A$ - пересечение замкнутых множеств. □

3. $\text{Cl } A = A \iff A$ замкнуто

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 A = \text{Cl } A &\iff X \setminus A = X \setminus \text{Cl } A \\
 &\iff X \setminus A = \text{Int}(X \setminus A) \\
 &\iff X \setminus A \text{ открыто} \\
 &\iff A \text{ замкнуто}
 \end{aligned}$$
□

4. $A \subset B \implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 A \subset B &\implies (X \setminus B) \subset (X \setminus A) \\
 &\implies \text{Int}(X \setminus B) \subset \text{Int}(X \setminus A) \\
 &\implies X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \text{Int}(X \setminus B) \\
 &\implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B
 \end{aligned}$$
□

5. $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \text{Cl}(A \cup B) &= X \setminus \text{Int}(X \setminus (A \cup B)) \\
 &= X \setminus \text{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\
 &= X \setminus (\text{Int}(X \setminus A) \cap \text{Int}(X \setminus B)) \\
 &= (X \setminus \text{Int}(X \setminus A)) \cup (X \setminus \text{Int}(X \setminus B)) \\
 &= \text{Cl } A \cup \text{Cl } B
 \end{aligned}$$
□

6. $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$

Доказательство.

$\text{Cl } A$ замкнуто по свойству 2, равенство следует из свойства 3. □

Теорема 0.1.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in \text{Cl } A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset.$$

Доказательство.

Необходимость (\implies):

Предположим что $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \emptyset$.

Тогда $a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A$, значит $a \in \text{Int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \implies a \notin \text{Cl } A$.

Достаточность (\impliedby):

Пусть $a \notin \text{Cl } A$, тогда $\exists F$ - замкнутое надмножество A , такое, что $a \notin F \implies a \in X \setminus F$.

При этом, $X \setminus F$ открыто.

Тогда $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$.

Но тогда $B_r(a) \cap A = \emptyset$. □

Следствие.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$, а $U \subset X$ - открытое множество. При этом $A \cap U = \emptyset$.

Тогда $\text{Cl } A \cap U = \emptyset$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \in \text{Cl } A \cap U &\implies x \in U \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \\ &\implies B_r(x) \cap A \subset U \cap A = \emptyset \\ &\implies x \notin \text{Cl } A \\ &\implies x \notin \text{Cl } A \cap U \end{aligned}$$

Получили противоречие, значит таких x не существует. □

Определение 0.1.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Проколотой окрестностью радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центром в $a \in X$ называется $\mathring{B}_r(a) := B_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in X \mid 0 < \rho(x, a) < r\}$.

Определение 0.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$a \in A$ называется предельной точкой, если $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$.

Множества предельных точек множества A обозначается A' .

Свойства.

$$1. \text{Cl } A = A \cup A'$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
a \in \text{Cl } A &\iff \forall r > 0 \quad B_a(a) \cap A \neq \emptyset \\
&\iff \begin{cases} a \in A \\ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \in A \\ a \in A' \end{cases}
\end{aligned}$$

□

$$2. A \subset B \implies A' \subset B'$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
a \in A' &\implies \forall r \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \\
&\implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \emptyset \\
&\implies a \in B'
\end{aligned}$$

□

$$3. (A \cup B)' = A' \cup B'$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\
B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\
&\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'
\end{aligned}$$

Покажем другое включение: возьмём $x \in (A \cup B)'$.

Пусть $x \notin A'$: Тогда $\exists R > 0 \quad \mathring{B}_R(x) \cap A = \emptyset$.

Заметим, что $\forall 0 < r \leq R \quad \mathring{B}_r(x) \cap A \subset B_R(x) \cap A = \emptyset$, значит $\forall r > 0 \quad \exists 0 < R_r < r \quad B_{R_r}(x) \cap A = \emptyset$.

Так-как $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$, значит $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \emptyset$. Тогда

$$\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap B \supset \mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \emptyset.$$

Значит, $x \in B'$

□

$$4. A' \subset A \iff A \text{ - замкнутое}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
A \text{ - замкнутое} &\iff A = \text{Cl } A \\
&\iff A = A \cup A' \\
&\iff A' \subset A
\end{aligned}$$

□

Теорема 0.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек.}$$

Доказательство.

Необходимость (\implies):

Знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$, возьмём точку $x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A$, возьмём $r_2 = \rho(x_1, a)$, знаем, что $\mathring{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \emptyset$, можем взять точку оттуда, и вообще повторять бесконечное число раз.

Достаточность (\impliedby): $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\implies \mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\implies \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \implies a \in A'$. \square