

# Билет 32

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 32: Линейные операторы. Свойства. Операции с линейными операторами. Матричное задание операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ . . . . .	1
-----	--	---

## 0.1. Билет 32: Линейные операторы. Свойства. Операции с линейными операторами. Матричное задание операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$

### Определение 0.1.

Пусть  $X, Y$  - линейные пространства над  $\mathbb{R}$ ,  $A : X \mapsto Y$ .

$A$  называется линейным оператором, если

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in X \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

### Замечание.

Аналогичное определение можно дать над  $\mathbb{C}$ .

### Свойства.

$$1. A(0_X) = 0_Y$$

**Доказательство.**

$$A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0_Y.$$

□

$$2. A\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k A(x_k)$$

**Доказательство.**

Индукция по  $n$ .

□

### Определение 0.2.

Пусть  $X, Y$  - линейные пространства,  $A, B : X \mapsto Y$  - линейные операторы,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$(A \pm B)(x) = A(x) \pm B(x).$$

$$(\lambda A)(x) = \lambda \cdot A(x).$$

### Замечание.

Операторы с данными операциями образуют линейное пространство.

### Доказательство.

Покажем что в результате операций получается линейный оператор:

$$\begin{aligned} (A + B)(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha A(x) + \beta A(y) + \alpha B(x) + \beta B(y) \\ &= \alpha(A(x) + B(x)) + \beta(A(y) + B(y)) \\ &= \alpha((A + B)(x)) + \beta((A + B)(y)) \end{aligned}$$

□

Аналогичным способом можно проверить другие аксиомы линейного пространства.

### Определение 0.3.

Пусть  $X, Y, Z$  - линейные пространства,  $A : X \mapsto Y$ ,  $B : Y \mapsto Z$  - линейные операторы.

Их композиция:  $(BA)(x) = B(A(x))$ .

**Определение 0.4.**

Пусть  $X, Y$  - линейные пространства,  $A : X \mapsto Y$  - линейный оператор.

Тогда, обратный к  $A$  оператор  $A^{-1} : Y \mapsto X$ , такой оператор, что  $A^{-1}A = \text{id}_X$ ,  $AA^{-1} = \text{id}_Y$ .

**Свойства.**

1. Композиция линейных операторов - линейный оператор

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}(BA)(\alpha x + \beta y) &= B(A(\alpha x + \beta y)) \\ &= B(\alpha A(x) + \beta A(y)) \\ &= \alpha B(A(x)) + \beta B(A(y)) \\ &= \alpha(BA)(x) + \beta(BA)(y)\end{aligned}$$

□

2. Если обратный оператор существует, то он единственен.

**Доказательство.**

Пусть  $B, C$  - обратные к  $A$ .

$$C = \text{id}_X \cdot C = (BA)C = B(AC) = B \cdot \text{id}_Y = B.$$

□

3.  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

**Доказательство.**

$$\left(\frac{1}{\lambda} A^{-1}\right)((\lambda A)(x)) = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}(\lambda A(x)) = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda A^{-1}(A(x)) = 1 \cdot x = x.$$

Аналогично в другую сторону.

□

4. Множество обратимых линейных операторов из  $X$  в  $X$  образуют группу по композиции.

**Доказательство.**

Наличие единицы:  $\text{id}_X$

Наличие обратного по определению

Ассоциативность композиции:

$$(A(BC))(x) = A(BC(x)) = A(B(C(x))) = AB(C(x)) = ((AB)C)(x).$$

Замкнутость:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

$$(A^{-1}B^{-1})(BA)(x) = A^{-1}(B^{-1}(B(A(x)))) = A^{-1}(A(x)) = x.$$

□

*Замечание.*

Если  $A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ , то можно использовать матричную запись:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Пусть  $A_i$  - функция отвечающая за  $i$ -ю координату выходного вектора. Тогда  $a_{ik} = A_i(e_k)$ , где  $e_k$  -  $k$ -й стандартный базисный вектор.