Билет 84

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 84: Мультииндексы. Определения, обозначения, лемма о производной композиции гладкой и линейной функций.

***Определение* 0.1** (Мультииндекс)**.**

$k = (k_1, k_2, ..., k_n) \quad k_j \geq 0 \quad k_j \in \mathbb{Z}$

Высота мультииндекса $|k| := k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n$

$k! := k_1!k_2!...k_n!$

$h \in \mathbb{R}^n \quad h^k := h_1^{k_1} h_2^{k_2} ... h_n^{k_n}$

$f^{(k)} := \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}$

Полиномиальный или мультиномиальный коэффициент:

$\binom{|k|}{k_1, k_2, ..., k_n} := \frac{|k|!}{k!} = \frac{(k_1+k_2+...+k_n)!}{k_1!k_2!...k_n!}$ – количество способов покрасить $|k|$ шаров в n цветов так, чтобы первого цвета было k_1, k_2 – второго и т.д.

Лемма.

$f : D \to \mathbb{R} \ \ f \in C^r(D) \ \ D \subset \mathbb{R}^n$

$[x, x+h]$ – отрезок с концами x и $x+h$. (на многомерном пространстве)

$[x, x+h] \subset D$

$F(t) = f(x+th) \ \ F : [0,1] \to \mathbb{R}$ (функция от одной переменной)

Тогда $F \in C^r[0,1]$ и при $0 \leqslant l \leqslant r$

$F^{(l)}(t) = \sum\limits_{|k|=l} \binom{l}{k_1, k_2, ..., k_n} f^{(k)}(x+th)h^k$

Доказательство.

$G(t) := g(x+th)$

$$G'(t) = g'(x+th) \cdot (x+th)' = (\tfrac{\partial g}{\partial x_1}(x+th), ..., \tfrac{\partial g}{\partial x_n}(x+th)) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x+th)h_i$$

– получили формулу для $l = 1$.

$F''(t) = (F'(t))' = (\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)h_i)' = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x+th)h_j h_i$

$F^{(l)}(t) = \sum\limits_{i_l=1}^{n}\sum\limits_{i_{l-1}=1}^{n} ... \sum\limits_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \partial x_{i_{l-1}} ... \partial x_{i_1}}(x+th)h_{i_1}h_{i_2}...h_{i_n} = \sum\limits_{|k|=l} \binom{|k|}{k_1, k_2, ..., k_n} f^{(k)}(x+th)h^k =$

$= \sum\limits_{|k|=l} \frac{|k|!}{k!} f^{(k)}(x+th)h^k$ (можем сделать замену на $f^{(k)}$ по теореме из билета 83)

$k = (\#\{j : i_j = 1\}, \#\{j : i_j = 2\}, ...) \qquad (\#$ – кол-во чего-то)

□