Билет 86

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 86: Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Полиномиальная формула.

Теорема 0.1. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

$D \subset R^n$, D - открытое множество. $f \in C^r(D)$ $a \in D$. $h := x - a$

Тогда при $x \to a$ $f(x) = \sum\limits_{|k| \leq r} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(||h||^r)$.

Замечание. Данная формула является следствием из теоремы о многомерной формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа (см. билет 85).

Доказательство. Запишем формулу из теоремы о формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа для $r-1$.

$$f(x) = \sum_{|k| \leq r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!} h^k = \sum_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (h)^k + \sum_{|k|=r} \frac{f^{(k)}(a+\theta h) - f^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

Осталось понять, что второе слагаемое и есть $o(||h||^r)$.

Наблюдение 1. $\dfrac{|h^k|}{||h||^r} \leq 1$.

Это верно, так как в числителе мы взяли какие-то координаты вектора h в количестве r штук и умножили друг на друга. В знаменателе мы взяли длину вектора в том же количестве и перемножили. Каждая координата меньше длины. $|h_i| \leq ||h||$.

Наблюдение 2. Осталось доказать, что коэффициенты стремятся к нулю:

$f^{(k)}(a+\theta h) - f^{(k)}(a) \to 0$ при $k \to 0$. Это следует из непрерывности производной соответствующего порядка. А сама непрерывность выполняется по условию теоремы.

Замечание. ”А на самом деле, если повозиться посильнее, то можно выкинуть требование непрерывности последней производной”.

Это значит, что достаточно $r-$той дифференцируемости в точке a.

”Но мы не будем лезть в эти подробности (спасибо!)”

□

Следствие. (Полиномиальная формула)

Формула для возведения суммы в r-тую степень.

$(x_1 + x_2 + ... + x_n)^r = \sum\limits_{|k|=r} \binom{r}{k_1, k_2, ..., k_n} x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$.

Доказательство. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)^r =: (g(x))^r$

Подставим это в формулу Тейлора. Для этого поймем, как выглядит производная.

$\dfrac{\delta f}{\delta x_i} = rg^{r-1}(x) \dfrac{\delta g}{\delta x_i} = rg^{r-1}(x)$ (так как производная g по x - единица). Получается, частная производная не зависит от координаты, по которой считаем и считается как обычная производная от функции g.

Значит, производная r-того порядка $= \dfrac{\delta^r f}{\delta x_{i_1} ... \delta x_{i_r}} = r!$. А производная, например, $r+1$-го порядка $= 0$.

Запишем формулу Тейлора с остатком в виде в форме Лагранжа для r. Сразу заметим, что остатка не будет, т.к. $r-$тая производная $= 0$.

$f(x) = \sum\limits_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$

Заметим, что производная порядка $< r$ в нуле будет $= 0$, т.к. в формуле у нас останется g в какой-то ненулевой степени, а g в нуле $= 0 \Rightarrow$.

$f(x) = \sum\limits_{|k| \leq r} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum\limits_{|k| = r} \frac{r!}{k!} x^k$. А это и есть то, что было обещано в начале. Доказали.

$\square$