Билет 73

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 73: Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Частные случаи. Матрица Якоби. Градиент.

***Определение* 0.1.**

$f : E \mapsto \mathbb{R}^m \quad a \in \operatorname{Int} E, E \subset \mathbb{R}^n$

f - дифференцируема в точке a, если существует линейное отображение $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, такое что $f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$, где $\dfrac{\alpha(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$

Замечание.

Заметим, что в нашем определении все 0 - векторы, ровно как и аргументы.

Например, $h \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(h) \in \mathbb{R}^m$

Замечание.

Несложно убедиться, что данное определение ровно такое же, как и определение, которое давалось, когда мы говорили про дифференцируемость функции одной переменной. С той лишь разницей, что тогда вместо T у нас было просто домножение на константу (тоже линейное отображение, но тривиальное), а добавкой была $o(||h||)$ (но у нас записано тоже самое, ведь по сути $\alpha(h) = o(||h||)$). Получается, что дифференцируемость функции от одной переменной, про которую мы говорили раньше - это частный случай при $n = m = 1$.

***Определение* 0.2.**

T - дифференциал функции f в точке a. Обозначается чаще всего $d_a f$

Замечание.

Если T существует, то оно определено однозначно.

Зафиксируем $h \in R^n$. $f(a+th) = f(a) + T(th) + \alpha(th)$, где $t \in R$

Так как T - линейно, то $T(th) = tT(h)$

$Th = \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t} - \dfrac{\alpha(th)}{t}$ Перейдем к пределу при $t \to 0$

Так можно сделать, потому что $\dfrac{\alpha(th)}{t} \to 0$ при $t \to 0$,

поскольку это записано в определении дифференцируемости функции (фиксированное h).

Тогда получили:

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t} = Th$

Значит это отображение однозначно.

***Определение* 0.3.**

Матрица линейного оператора T - матрица Якоби функции f в точке a

Обозначается матрица T: $f'(a)$

Данное обозначение намекает, что эта матрица - некий аналог производной для функции одной переменной

Замечание.

Дифференцируемость функции f в точке a влечет непрерывность f в точке a.

$f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$.

Перейдем к пределу при $h \to 0$, получим:

$f(a) + Th + \alpha(h) \to f(a) + 0 + 0 = f(a)$,

так как $\alpha(h)$ при делении на $||h||$ уже будет стремится к 0, здесь же тем более

Получили определение непрерывности

Пример Важный частный случай $m = 1$.

Получаем отображение $f : E \mapsto \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^n$

Мы из вектора сделали число. Это скалярное произведение на какой-то вектор.

Потому что можно представить, что умножаем матрицу на вектор и получаем вектор размера 1.

Откуда получаем, что эта матрица - это строчка размера n.

Ну а это - скалярное произведение.

$f(a+h) = f(a) + \langle v, h\rangle + \alpha(h)$ для некоторого $v \in R^n$

***Определение* 0.4.**

v - градиент функции f в точке a

Обозначается: $\operatorname{grad} f$ или ∇f