

Билет 46

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 46: Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.	1
-----	---	---

0.1. Билет 46: Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.**Определение 0.1.**

$\sum a_n$ сходится абсолютно, если $\sum |a_n|$ – сходится.

$\sum a_n$ сходится условно, если $\sum a_n$ – сходится, но не абсолютно.

Теорема 0.1 (Преобразование Абеля).

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

где $A_k := a_1 + a_2 + \dots + a_k$, $A_0 := 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (A_k b_k - A_k b_{k+1}) \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

□

Теорема 0.2 (Признак Дирихле).

Если:

1. $A_k = \sum_{k=1}^n a_k$ ограничены
2. b_n монотонны
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – сходится.

Доказательство.

$S_n := \sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ имеет предел

$A_n b_n \rightarrow 0$, A_n – ограничены, $b_n \rightarrow 0$

$\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ имеет предел – это частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$, то есть надо доказать, что этот ряд сходится.

Проверим, что он абсолютно сходится:

По условию $|A_n| \leq M$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}| &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \\ &= M \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1} \right| \\ &= M |b_1 - b_{n+1}| \\ &\leq M (|b_1| + |b_{n+1}|) \leq 2M |b_1| \end{aligned}$$

□

Теорема 0.3 (Признак Абеля).

Если:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. b_n монотонны
3. b_n ограничены

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ – сходится.**Доказательство.**Существует $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b$, $\tilde{b}_n = b_n - b$ монотонны и $\rightarrow 0$ $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$ – сходится $\implies A_n$ – ограничена.По признаку Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$ – сходится.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\tilde{b}_n + b) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

Оба ряда сходятся, значит, и их сумма тоже сходится.

□