

Билет 65

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 65: Теорема о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.	1
-----	--	---

0.1. Билет 65: Теорема о дифференцировании равномерно сходящейся последовательности (ряда). Существенность равномерности.

Теорема 0.1.

$f_n \in C^1[a, b]$, $f_n(c) \rightarrow A$ и f'_n равномерно сходятся к g на $[a, b]$.

Тогда $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$, $f \in C^1[a, b]$ и $f' = g$.

В частности $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$.

Доказательство.

$$\int_c^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(c)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - A.$$

$f_n(x) \Rightarrow A + \int_c^x g(t) dt =: f(x)$ мы проверили равномерную сходимость. И $f(x)$ – дифференцируемая функция.

$f'(x) = g(x)$ – непрерывная функция, т.к. $f'_n \Rightarrow g$ и f_n непрерывные. □

Следствие.

$u_n \in C^1[a, b]$ $c \in [a, b]$ $\sum u'_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$ и $\sum u_n(c)$ сходится.

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится к непрерывной дифференцируемой функции и $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$

Доказательство.

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k \Rightarrow S'_n = \sum_{k=1}^n u'_k$$

По условию $\sum_{k=1}^n u'_k \Rightarrow g$ и $S_n(c) \rightarrow A$.

И тогда по прошлой теореме

$$S_n \Rightarrow S, S \in C^1[a, b] \text{ и } S' = g \Rightarrow (\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x). \quad \square$$

Пример.

Равномерная сходимость ряда производной важна:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ – равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

$$(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2})' \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\sin nx}{n^2})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \text{ – расходится при } x = 2\pi k$$

Т.е. равенства нет.