Билет 10

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

***Определение* 0.1** (Абсолютная сходимость.)**.**

$f \in C[a,b)$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, если $\int\limits_a^b |f|$ сходится.

Теорема 0.1.

Если $\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится, то $\int\limits_a^b f$ сходится.

Доказательство.

$0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$

$\int\limits_a^b f$ абсолютно сходится $\implies \int\limits_a^b |f|$ сходится $\implies \int\limits_a^b f_\pm$ сходится

$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b (f_+ - f_-) = \int\limits_a^b f_+ - \int\limits_a^b f_- \implies \int\limits_a^b f$ сходится.

□

Теорема 0.2 (признак Дирихле)**.**

$f, g \in C[a, +\infty)$

1. $\exists M: \ |\int\limits_a^c f| \leqslant M$ при всех $c > a$.
2. g – монотонная функция.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Тогда $\int\limits_a^{+\infty} fg$ сходится.

Доказательство.

Лишь для $g \in C^1[a, +\infty)$.

Пусть $F(y) := \int\limits_a^y f$

По условию $|F| \leqslant M$

$\int\limits_a^c fg = \int\limits_a^c F'g = Fg|_a^c - \int\limits_a^c Fg'$

Надо доказать, что существует предел при $c \to +\infty$

Распишем первое слагаемое как: $F(c)g(c) - F(a)g(a)$. Тогда $F(c)g(c) \to 0$ при $c \to +\infty$, так как это произведение бесконечно малой на ограниченную.

Надо доказать, что $\int\limits_a^c Fg'$ сходится. Докажем, что он абсолютно сходится, то есть, что $\int\limits_a^c |F|\cdot|g'|$ сходится.

$\int\limits_a^c |F|\cdot|g'| \leqslant M \int\limits_a^c |g'| = M|\int\limits_a^c g'| = M|\ g|_a^c\,| = M|g(c) - g(a)| \leqslant M|g(a)| \implies \int\limits_a^{+\infty} |F'g|$ сходится.

□