

# Билет 08

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

## Содержание

0.1 Билет 8: Свойства несобственных интегралов. . . . .	1
---	---

## 0.1. Билет 8: Свойства несобственных интегралов.

**Свойства.**  $\leq$

Везде  $-\infty < a < b \leq +\infty$   $f \in C[a, b)$

### 1. Аддитивность.

$$\int_a^b f \text{ сходится} \implies \forall c \in (a, b) \int_c^b f \text{ сходится.}$$

**Доказательство.**

$$\int_a^b f \text{ — сходится} \implies \exists \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f =: \int_a^b f$$

$$\int_a^B f = \int_a^c f + \int_c^B f \implies \lim_{B \rightarrow b-} \int_a^B f = \int_a^c f + \lim_{B \rightarrow b-} \int_c^B f$$

Тогда  $\lim_{B \rightarrow b-} \int_c^B f$  должен сходиться.

$$\text{Получили, что } \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

□

$$2. \int_a^b f \text{ сходится} \implies \int_c^b f \rightarrow 0 \text{ при } c \rightarrow b-.$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_c^b f = \int_a^b f - \int_a^c f$$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_c^b f = \int_a^b f - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0$$

$$3. \text{ Линейность. } \int_a^b f \text{ и } \int_a^b g \text{ сходятся} \implies \int_a^b (\alpha f + \beta g) \text{ сходится тоже.}$$

$$\text{И } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

**Доказательство.**

$$\int_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^B f + \beta \int_a^B g.$$

Перейдём к пределу  $B \rightarrow b-$ .

$\implies$  предел существует, конечен  $\implies$  интеграл сходится и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

□

**Замечание.**

$$\int_a^b f \text{ сходится, } \int_a^b g \text{ расходится} \implies \int_a^b (f \pm g) \text{ расходится.}$$

Доказательство — от противного.

4. Монотонность  $f, g \in C[a, b)$   $f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$

**Доказательство.**

$$c \in [a, b) \implies f, g \in C[a, c]$$

$$\int_a^c f \leq \int_a^c g$$

Переходим к пределу в неравенстве.  $c \rightarrow b-$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

□

5. Интегрирование по частям.

$$f, g \in C^1[a, b)$$

Если  $\int_a^b f g'$  сходится и  $\exists \lim_{c \rightarrow b-} f(c) \cdot g(c)$ , то  $\int_a^b f' g$  сходится и

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

**Доказательство.**

$$c \in [a, b) \quad f, g \in C^1[a, c]$$

$$\int_a^c f g' = f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g$$

Теперь напишем предел  $c \rightarrow b-$

$$\implies \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f g' = \lim_{c \rightarrow b-} (f g \Big|_a^c - \int_a^c f' g) = \lim_{c \rightarrow b-} f g \Big|_a^c - \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f' g = \lim_{c \rightarrow b-} f(c) \cdot g(c) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f' g$$

$$\implies \int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

при существовании  $\lim_{c \rightarrow b-} f(c) \cdot g(c)$  и  $\int_a^b f' g$ , что есть в условии.

□

6. Замена переменной.

$f \in C[a, b)$   $\varphi : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$  и  $\varphi$  непрерывна и дифференцируема

$$\varphi(\beta) := c := \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \varphi(\gamma)$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$$

Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны.

**Доказательство.**

$$F(y) = \int_{\varphi(\alpha)}^y f(x) dx \quad y \in [a, b)$$

$$\Phi(\gamma) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$$

$$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$$

Если существует предел в правой части. Т.е.  $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$

$$\text{Тогда } \int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim_{y \rightarrow c-} F(y) - \Phi(\alpha)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$$

Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

$$\lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$$

$$a \leq \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a, b]$$

Если  $c \neq b$ , то предел существует и равен  $F(c)$ .

Если  $c = b$ , то предел тоже существует.

(В силу непрерывности)

$$\text{Теперь надо понять, что } \lim_{y \rightarrow c-} F(y) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} F(\varphi(\gamma))$$

Возьмем  $\gamma_n \rightarrow \beta \implies \varphi(\gamma_n) \rightarrow c$  оба стремятся слева

$$F(c_n) \rightarrow \lim_{y \rightarrow c} F(y)$$

$$F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$$

$$\text{Случай второй. Существует } \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

$$\text{Т.е. существует } \lim_{\gamma \rightarrow \beta-} \Phi(\gamma)$$

Если  $c < b$ , то  $f \in C[\varphi(a), c]$  и  $\int_{\varphi(\alpha)}^c f(x) dx$  существует и мы попали в первый случай.

Поэтому  $c = b$ .

Возьмем последовательность  $\gamma_n \rightarrow \beta$ . Тогда  $\varphi(\gamma_n) \rightarrow b$

Пусть  $y_n \rightarrow b$ . Надо доказать, что  $F(y_n)$  имеет предел.

Поймем, что  $\exists \delta_n \in [\alpha, \beta) \quad \varphi(\delta_n) = y_n$ .

$$\varphi(\alpha) \leq y_n \leq \varphi(\gamma_m)$$

$\implies$  по непрерывности  $\varphi$  существует  $\delta_n \in [\alpha, \gamma_m]$ , т.ч.  $y_n = \varphi(\delta_n)$ .

Покажем, что  $\delta_n \rightarrow \beta$ . Пусть это не так.

Тогда  $\delta_{n_k} < \beta - \varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .

$\varphi : [\alpha, \beta - \varepsilon] \rightarrow [a, b]$  и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$$\varphi(\delta_{n_k}) \leq \varphi(p) < b.$$

Но это противоречит с тем, что  $y_{n_k} \rightarrow b$ .

Тогда  $F(y_n) = F(\varphi(\delta_n)) = \Phi(\delta_n)$  имеет предел.

□

**Пример.**

Замена  $x = \sin t \implies dx = \cos t \, dt$ .

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

**Замечание.**

$$f \in C[a, b)$$

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

$$t = 1/(b-x)$$

Сделаем замену.  $x = b - \frac{1}{t}$ . Тогда

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{dt}{t^2}$$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.