Билет 100

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 100: Лемма про дизъюнктное объединение множеств. Кольцо и полукольцо. Теорема о свойствах элементов полукольца.

Лемма.

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j)$$

Доказательство.

Рассмотрим $B_k := A_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} A_j)$

Заметим, что $B_k \subset A_k$, поэтому если $i < k$, то $B_k \cap A_i = \varnothing \implies B_k \cap B_i = \varnothing$

$\implies B_k$ –дизъюнктны.

А ещё из того, что $B_k \subset A_k$, следует

$$\bigcup_{k=1}^{?} B_k \subset \bigcup_{k=1}^{?} A_k$$

где ? означает либо n, если хотим доказать для конечного, либо ∞, если хотим доказать для счетного.

обратное включение:

Возьмем $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{?} A_k$. Надо доказать, что он лежит и в объединении B. Для этого рассмотрим такой самый первый номер m, что $x \in A_m$. Но тогда он не лежит в $A_1, ...A_{m-1}$, но именно эти мн-ва мы исключаем в B_m. Поэтому, x будет лежать в B_m

□

***Определение* 0.1.**

$\mathcal{R}$ – кольцо, если $\forall A, B \in \mathcal{R}$

$\implies A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B\ \in \mathcal{R}$

Замечание.

Любая алгебра является кольцом. Это видно из определений. У кольца оно более слабое.

Замечание.

Если в кольце есть X, то это алгебра. Действительно, тогда берём любое B из алгебры и $A = X$, получаем, что X/B лежит $\implies$ симметричность. Пустое тоже есть, т.к. симметрично X.

Таким образом, алгебра от кольца отличается только наличием X.

***Определение* 0.2.**

$\mathcal{P}$ – полукольцо, если

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$
3. $A, B \in \mathcal{P} \implies$ существует конечное число дизъюнктных множеств $C_1, ..., C_n$ из $\mathcal{P}$, т.ч. $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k$.

Пример.

1. Возьмём прямую и полуинтервалы на ней $X = \mathbb{R}$ $\mathcal{P} = \{[a, b) \ : \ a \leqslant b, \ \ a, b \in \mathbb{R}\}$

   $\mathcal{P}$ – полукольцо.

   Действительно, пересечение полуинтервалов - полуинтервал. А вот разность может дать два полуинтервала (если один вложен в другой). Но третье условие нам как раз такое и разрешает.

2. Аналогично, но точки - рациональные. Не знаю, зачем Храбров дал этот пример, у Ани его нет. Док-во что полукольцо 1 в 1.

3. $X = \mathbb{R}^2$ $\mathcal{P} = \{[a, b) \times [c, d) \ : \ a \leqslant b, \ \ c \leqslant d, \ \ a, b \in \mathbb{R}\}$

   Пересечение двух прямоугольников - прямоугольник. А вот с разностью не так очевидно, если один прямоугольник лежит внутри другого. Но в этом случае можно продлить сторны одного до пересечения с другим и на получившиеся прямоугольники и разбить.

Теорема 0.1.

1. $P_1, ..., P_n, P \in \mathcal{P} \implies \exists Q_1, ..., Q_m \in \mathcal{P}$, т.ч.

   $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$

2. $P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P} \implies \exists Q_{jk} \in \mathcal{P}$, т.ч.

   $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_{jk}$, причем $Q_{jk} \subset P_j$

3. аналогично для $n = +\infty$.

Доказательство.

1. Индукция по n. База – определение полукольца.

   Переход $n \to n + 1$:

   $P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k) \setminus P_{n+1} = (\bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k) \setminus P_{n+1} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} Q_k \setminus P_{n+1} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$

   Первый знак равно - св-ва объединения. Второй - применяем индукционное предположение (в скобках). Третий - скобки можно снять. Четвёртый - третье условие в определении полукольца.

2. Применим лемму о дизъюнктных объединениях (см. начало билета) и уже доказанный первый пункт: $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} P_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$

   Осталось понять, что $Q_{kj} \subset P_k$. Но это верно, так как $Q_{kj} \subset P_k \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{k-1} P_j)$

3. Аналогично, но используем лемму о дизъюнктных объединениях в форме для бесконечного числа множеств.

$\square$