Билет 92

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 92: Задача Коши для дифференциального уравнения. Теорема Пикара

***Определение* 0.1.**

Задачей Коши называется задача нахождения функции $y(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

-

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Первое условие значит, что если продиффренировать функцию $y(x)$, то получим выражение, которе зависит от x и от $y(x)$. Например $y = e^{x^2} \implies \frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} = 2xy(x)$ Второе условие нужно, так как функций, подходящих под первое условие может быть много, поэтому можно ограничить таким образом.

Теорема 0.1 (Пикара)**.**

$D \subset \mathbb{R}^2$ - открытое. Если $f : D \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна, $(x_0, y_0) \in D$ и $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leqslant M|y - \tilde{y}| \quad \forall (x, y)$ и $(x, \tilde{y})$, то при некотором $\delta > 0$ на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ существует единственная функция φ, являющаяся решением задачи Коши, то есть

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \end{cases} \quad \text{для } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Замечание.

Почему $f : \mathbf{D} \mapsto \mathbb{R}$, то есть почему бы не писать $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$? Потому что существуют такие f, что решение на отрезке есть, а на всей прямой нет.

Пример.

y(x) = 1/x

Задача Коши:

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Как бы мы ни старались подобрать x_0 и y_0 у нас не получится получить решение, такое чтобы оно включало точку 0. То есть в данной теореме важна локальность.

1/0 = wtf

Доказательство.

Перейдем от системы к немного другому уравнению, а именно:

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$$

Действительно, если мы докажем существование такой $\varphi(x)$, то мы решим задачу Коши, так как

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_0} f(t, \varphi(t))\, dt = y_0 \\ \varphi'(x) = 0 + \left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \right)' = f(x, \varphi(x)) \end{cases}$$

Выберем такое $r \in \mathbb{R}$, что $B_r(x_0, y_0) \subset \overline{B}_r(x_0, y_0) \subset D$. Так можно выбрать, так как D - открытое. Так как $\overline{B}_r(x_0, y_0)$ - компакт, и f - непрерывна, то f - ограничена на $\overline{B}_r(x_0, y_0)$. Пусть $|f(x, y)| \leqslant K$ на $\overline{B}_r(x_0, y_0)$.

Теперь выберем δ. Оно должно соответствовать двум условиям.

1. хочется, чтобы прямоугольник $[-\delta, \delta] \times [-K\delta, K\delta]$ с центром (точка пересечения диагоналей) в (x_0, y_0) полностью лежал внутри $B_r(x_0, y_0)$. Более формально:

$$\text{Если } |x - x_0| < \delta \text{ и } |y - y_0| < K\delta, \text{ то } (x, y) \in B_r(x_0, y_0)$$

2. хочется, чтобы $M\delta < 1$, M - из условия теоремы.

Оба эти условия несложно удовлетворить.

$C^* := \{\varphi \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] : |\varphi(x) - y_0| \leqslant K\delta\}$. В данном пространстве зададим стандартную для непрерывных функций метрику - максимум модуля разности. Докажем, что данное пространство полное. Данне пространство является подпространсвтом полного, надо доказать, что такое пространство - замкнуто. Оно замкнуто, так как если есть последовательность функций из C^*, то и их предел, будет лежать в C^*, так как в переделе нестрогое неравенство сохраняется.

В данном пространстве возьмем отображение $T(\varphi) = \psi$, где $\psi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$ Докажем, что $T : C^* \mapsto C^*$ и T - сжатие. Если это доказать, то по Теореме Бонаха T будет имееть единственную неподвижную точку, значит $\exists \varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt$.

При действии такого отображения на непрерывную функцию получится также непрерывная функция. Теперь докажем, что

$$\text{Если } |\varphi(x) - y_0| \leqslant K\delta \implies |\psi(x) - y_0| \leqslant K\delta$$

$|\psi(x) - y_0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\right| \leqslant \{\text{максимум функции}\} \cdot \{\text{длина отрезка}\} \leqslant K\delta$
$f(t, \varphi(t)) \leqslant K$, так как $(t, \varphi(t)) \in B_r(x_0, y_0)$.
Теперь проверим, что T - сжатие. $T(\varphi) = \psi, T(\tilde{\varphi}) = \tilde{\psi}$

$$|\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, \tilde{\varphi}(x))\, dt\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t)) - f(t, \tilde{\varphi}(x))|\, dt$$

Вспомним, что в условии сказано: $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leqslant M|y - \tilde{y}|$. Значит можно продолжить цепочку неравенств.

$$|\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} M|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)|\, dt \leqslant M\delta \max\{|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)|\} = M\delta||\varphi - \tilde{\varphi}||$$

С левой стороны неравенства также рассмотрим максимум разностей и получим, что

$$||\psi(x) - \tilde{\psi}(x)|| \leqslant \underbrace{M\delta}_{cosnt<1} ||\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)||$$

Получается T - сжатие по определению, значит существует единственная $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям задачи Коши на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. $\square$