

# Билет 58

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 58: ! Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда. . . . .	1
-----	--	---

## 0.1. Билет 58: ! Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

*Замечание.* Момент с лекции: [youtu.be](https://youtu.be)

Записи Александра Игоревича с лекции: [drive.google](https://drive.google)

### Определение 0.1.

$$u_n : E \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  – функциональный ряд

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x) \text{ – частичная сумма.}$$

Если  $S_n$  поточечно сходится к  $S$ , то ряд поточечно сходится, если  $S_n \Rightarrow S$ , то ряд равномерно сходится.

### Определение 0.2.

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится поточечно

$$r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x) \text{ – остаток функции ряда.}$$

### Теорема 0.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ равномерно сходится на } E$$

$$\iff r_n \Rightarrow 0 \text{ на } E.$$

### Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ – равномерно сходится } \iff S_n \Rightarrow S \text{ на } E \iff r_n = S - S_n \Rightarrow 0$$

□

### Теорема 0.2 (Критерий Коши).

$$\sum u_n(x) \text{ равномерно сходится на } E$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \epsilon$$

### Доказательство.

$$\sum u_n(x) \text{ равномерно сходится } \iff S_n \Rightarrow S \text{ на } E$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists N \forall m, n > N \forall x \in E |S_m - S_n| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in E |S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| = |S_{n+p} - S_n|$$

□

### Следствие (Необходимое условие сходимости функции ряда).

Если ряд  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится, то  $u_n \Rightarrow 0$ .

### Доказательство.

Возьмем критерий Коши и  $p = 1$ .

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall x \in E |u_{n+1}(x)| < \epsilon$$

Это определение равномерной сходимости  $u_n \Rightarrow 0$ .

□

*Замечание.*

1. Если  $\exists x_n \in E$ , для которой  $u_n(x_n) \not\rightarrow 0$ , то  $\sum u_n(x)$  не сходится равномерно.
2. Из того, что ряд  $\sum u_n(x_n)$  расходится ничего не следует

**Пример.**

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\sum u_n(\frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n} - \text{расходится.}$$