Билет 77

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 77: ! Линейность диференциала. Дифференциал композиции.

Теорема 0.1 (линейность дифференцирования).

$f, g : E \to \mathbb{R}^m \;\; E \subset \mathbb{R}^n \;\; a \in \operatorname{Int} E$

f, g – дифференцируемы в точке a, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$f \pm g$, λf – дифференцируемы в точке a

$d_a(f \pm g) = d_a f \pm d_a g \quad d_a(\lambda f) = \lambda \cdot d_a f$

Доказательство.

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||) \;\; ||h|| \to 0$

$g(a+h) = g(a) + d_a g(h) + o(||h||) \;\; ||h|| \to 0$

$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + d_a f(h) + d_a g(h) + o(||h||)$

$f(a+h) + g(a+h) = f(a) + g(a) + (d_a f + d_a g)(h) + o(||h||)$

□

Теорема 0.2 (дифференцирование композиции).

$f : D \to \mathbb{R}^m \;\; D \subset \mathbb{R}^n, \;\; g : E \to \mathbb{R}^l \;\; E \subset \mathbb{R}^m$

$a \in \operatorname{Int} D \;\; f(a) \in \operatorname{Int} E \;\; f(D) \subset E$

Тогда $g \circ f$ – дифференцируема в точке a и

$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$

Замечание.

$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Доказательство.

$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \alpha(h)||h|| \;\; ||h|| \to 0$

$b := f(a) \;\; g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)||k|| \;\; ||k|| \to 0$

$k := d_a f(h) + \alpha(h)||h||$

$||k|| \leqslant ||d_a f(h)|| + ||\alpha(h)||h|||| \leqslant ||d_a f|| \cdot ||h|| + ||\alpha(h)||||h|| \to 0$ при $h \to 0$

Замечание.

Т.к. $d_a f$ - матрица, а $d_a f(h) = d_a f \cdot h$

Определение нормы матрицы(грубо):

$||A|| = \sup\limits_{||x|| \leqslant 1} ||Ax||$

Из этого мы хотим вывести, что $||Ah|| \leqslant ||A|| \cdot ||h||$.

$||Ah|| = \left\| A\frac{h}{||h||} \cdot ||h|| \right\| = ||h|| \cdot \left\| A\frac{h}{||h||} \right\|$

Т.к. $\left\| \frac{h}{||h||} \right\| = 1$, то получаем, что $\left\| A\frac{h}{||h||} \right\| \leqslant ||A||$ (в определении sup берется ото всех векторов с нормой до 1, а здесь вектора только с нормой 1).

Значит, $||d_a f(h)|| = ||d_a f \cdot h|| \leqslant ||d_a f|| \cdot ||h||$

$$\begin{aligned}
&g(f(a+h)) = g(f(a)+k) = g(b+k) = g(b) + d_b g(k) + \beta(k)||k|| = \\
&= g(b) + d_b g(d_a f(h)) + d_b g(\alpha(h)||h||) + \beta(k)||k|| = \\
&= g(f(a)) + (d_b g \circ d_a f)(h) + d_b g(\alpha(h)||h||) + \beta(k)||k||
\end{aligned}$$

Хотим показать, что $d_bg(\alpha(h)||h||) + \beta(k)||k|| = o(||h||)$

$d_bg(\alpha(h)||h||) = ||h|| \cdot d_bg(\alpha(h))$ (т.к. $d_bg(\alpha(h)||h||) = d_bg \cdot \alpha(h) \cdot ||h||$)

$||d_bg(\alpha(h)||h||)|| \leqslant ||h|| \cdot ||d_bg|| \cdot ||\alpha(h)||$, а $||d_bg|| \cdot ||\alpha(h)|| \to 0$

Замечание.

$\lim\limits_{h\to 0} ||d_bg|| \cdot ||\alpha(h)|| = ||d_bg|| \cdot \lim\limits_{h\to 0} ||\alpha(h)||$

$\alpha(h) \cdot ||h|| = o(h)$ (по определению)

Значит, $\alpha(h) \to 0$.

Известно, что если $x_n \to a$, то $||x_n|| \to ||a|| \implies ||\alpha(h)|| \to ||0|| = 0$.

$||\beta(k)||k|||| = ||k|| \cdot ||\beta(k)|| \leqslant ||\beta(k)||(||d_af|| \cdot ||h|| + ||\alpha(h)|| \cdot ||h||) = ||h|| \cdot ||\beta(k)||(||d_af|| + ||\alpha(h)||)$.

А $||\beta(k)||(||d_af|| + ||\alpha(h)||) \to 0$.

Все получили. $\square$