

# Билет 51

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1 Билет 51: Теорема Абеля о произведении рядов (с леммой). . . . .	1
--	---

## 0.1. Билет 51: Теорема Абеля о произведении рядов (с леммой).

**Теорема 0.1** (Абеля).

$$\sum a_n = A, \quad \sum b_n = B, \quad \sum c_n = C$$

И  $\sum c_n$  – произведение  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$

Тогда  $AB = C$ .

**Лемма.**

$$x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + x_3 y_{n-2} + \dots + x_n y_1}{n} \rightarrow xy$$

**Доказательство.**

Пусть  $y = 0$ . надо доказать, что  $\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + x_3 y_{n-2} + \dots + x_n y_1}{n} \rightarrow 0$

Есть две последовательности, имеющие предел, значит они ограничены. Значит, есть какая-то константа  $M$ , что  $|x_n| \leq M \quad |y_n| \leq M \quad \forall n$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \quad \forall n \geq N \quad |y_n| < \epsilon$$

Возьмем  $n > N$ .

$$|x_1 y_n| + |x_2 y_{n-1}| + \dots + |x_{n-N} y_{N+1}| + |x_{n-N+1} y_N| + \dots + |x_n y_1|$$

Первые  $n - N$  слагаемых оценим сверху, как  $(n - N)M\epsilon$ . Оставшиеся оценим как  $\leq M^2 N$

$$|x_1 y_n| + |x_2 y_{n-1}| + \dots + |x_{n-N} y_{N+1}| + |x_{n-N+1} y_N| + \dots + |x_n y_1| \leq M\epsilon(n - N) + M^2 N$$

$$\left| \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} \right| \leq \frac{M\epsilon(n - N) + M^2 N}{n} < \epsilon M + \epsilon M$$

(Последнее – при достаточно больших  $n$ ).

Пусть  $y_n = y$

$$\frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} y \rightarrow xy$$

(Последнее показывается по теореме Штольца).

Общий случай.

$$\tilde{y}_n := y_n - y \rightarrow 0$$

$$\frac{x_1 \tilde{y}_n + x_2 \tilde{y}_{n-1} + \dots + x_n \tilde{y}_1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{x_1 y + x_2 y + \dots + x_n y}{n} \rightarrow xy$$

И сложим. Получим ровно то, что надо.

□

**Доказательство.** (теоремы)

$$\frac{A_1 B_n + A_2 B_{n-1} + \dots + A_n B_1}{n} \rightarrow AB \text{ по лемме.}$$

Но что же написано в числителе?

$$\begin{aligned} & a_1(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)b_1 = \\ & = na_1 b_1 + (n-1)(a_1 b_2 + a_2 b_2) + (n-2)(a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots = \\ & = nc_1 + (n-1)c_2 + (n-2)c_3 + \dots + c_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n \end{aligned}$$

$$\text{Получается, что знаем, что } \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow AB$$

$$\text{Но с другой стороны, } \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \rightarrow C$$

$$\implies C = AB$$

□