Билет 91

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 91: Теорема о неявной функци

***Определение* 0.1.**

Функции, задаваемые уравнениями – неявные функции.

Теорема 0.1 (о неявной функции)**.**

$f : D \to \mathbb{R}^n \;\; D \subset \mathbb{R}^{n+m}$

D – откртытое, f – непрерывно дифференцируема. $f(a, b) = 0, \; (a, b) \subset D$

$A = f'(a, b)$, и если $A(h, 0) = 0$, то $h = 0$.

Тогда $\exists W$ – окрестность точки b и единственная функция $g : W \to \mathbb{R}^n$, т.ч. $g(b) = a$, g непрерывна дифференцируема, и $f(g(y), y) = 0 \;\; \forall y \in W$

Доказательство.

$F : D \to \mathbb{R}^{n+m} \;\; F(x, y) = (f(x, y), y)$ – непрерывно дифференцируема.

$f(a + h, b + k) = f(a, b) + A(h, k) + r(h, k) = A(h, k) + r(h, k)$

$F(a + h, b + k) = F(a, b) + (A(h, k), k) + (r(h, k), 0) = (0, b) + (A(h, k), k) + (r(h, k), 0)$

$F(a + h, b + k) = (f(a + h, b + k), b + k)$

$F'(a, b)(h, k) = (A(h, k), k)$

Поймем, что $F'(a, b)$ инъекция.

Пусть $(A(h, k), k) = (0, 0) \Rightarrow k = 0$ и $A(h, 0) = 0 \Rightarrow h = 0$, значит $F'(a, b)$ инъекция.

F удволетворяет условиям теоремы об обратоной функции, тогда $\exists U$ – окрестность точки (a, b) и V – окрестность точки $(0, b)$, т.ч. $F : U \to V$ биекция. $G = F^{-1} : V \to Y$ непрерывно дифференцируема.

$G(z, w) = (\varphi(z, w), w)$, т.к. F сохраняет последню коодинату.

$(z, w) = F(G(z, w)) = (f(\varphi(z, w), w), w) \Rightarrow f(\varphi(z, w), w) = z$

Возьмем W – окрестность точки b, т.ч. $\{b\} \times W \subset V$

$g(w) := \varphi(0, w) \;\; g : W \to \mathrm{Re}^n$

$f(g(w), w) = f(\varphi(0, w), w) = 0$

$g(b) = \varphi(0, b) = a$

Доказли существование.

Докажем единственность

Пусть $f(x, y) = f(x, y)$, тогда $F(x, y) = F(x, y)$, но F обратима, а значит F – биекция $\Rightarrow x = x$

$\square$