

# Билет 54

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 54: Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия. . . . .	1
-----	---	---

## 0.1. Билет 54: Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций. Определение и примеры. Критерий равномерной сходимости. Следствия.

### Определение 0.1.

Пусть  $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}$  (тут можно и  $\mathbb{C}$ ).

1. Последовательность  $f_n$  поточечно сходится к  $f$  на множестве  $E$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  для всех  $x \in E$ .
2. Последовательность  $f_n$  равномерно сходится к  $f$  на множестве  $E$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Обозначение для равномерной сходимости:  $f_n \rightrightarrows f$  (и как-то указывать на каком множестве эта равномерная сходимость: или словами после, или под стрелочками)

### Замечание.

Запишем оба определения с помощью кванторов:

1.  $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Получается, что в первом случае  $N$  зависит **и** от  $x$ , **и** от  $\varepsilon$ , а во втором - **только** от  $\varepsilon$ .

### Замечание.

Из равномерной сходимости следует поточечная к той же функции. Действительно, если есть универсальный номер, зависящий только от  $\varepsilon$ , то он подходит и для конкретного  $x$ .

### Пример.

Пусть  $E = (0; 1)$   $f_n(x) = x^n$   $f(x) = 0$ , тогда

$f_n$  поточечно сходится к  $f$  (какое-то число из  $(0, 1)$  в  $n$ -ной степени стремится к нулю), однако равномерной сходимости нет. Условие не выполняется даже для  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , поскольку  $|x^n - 0| < \frac{1}{2}$  не может выполняться при все  $x \in (0; 1)$  ни для какого  $n$ , поскольку  $x$  мы можем сколь угодно близко подвинуть к 1, и  $x^n$  будет сколь угодно близко к 1, в частности больше  $\frac{1}{2}$ . Мораль: из поточечной сходимости равномерная **не** следует.

### Теорема 0.1 (Критерий равномерной сходимости).

Пусть  $f_n, f: E \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

### Доказательство.

” $\Leftarrow$ ” Запишем правый предел по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

А для супремума верно следующее:  $\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , поэтому:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ничего не напоминает? Мне вот определение равномерной сходимости напоминает.

” $\Rightarrow$ ” Запишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Синее означает то, что  $\varepsilon$  является верхней границей для всех  $|f_n(x) - f(x)|$ , а значит,  $\sup$  таких разностей будет меньше или равен  $\varepsilon$ , отсюда:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

А это означает то, что  $\sup$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  (по определению). □

**Следствие.**

1. Если  $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$  при любых  $x \in E$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то  $f_n \Rightarrow 0$  на  $E$ .

**Доказательство.**

Если разность меньше  $a_n$  во всех точках, то  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  □

2. Если  $\exists x_n \in E$  такие, что  $f_n(x) - f(x)$  не стремится к нулю, то равномерной сходимости нет.

**Доказательство.**

Это означает, что  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x) - f(x)| \neq 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а значит, нет стремления к нулю у супремума, критерий равномерной сходимости не выполняется, равномерной сходимости нет. □

**Пример.**

Пусть  $E = (0; 1)$   $f_n(x) = x^n$   $f(x) = 0$ , возьмем  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ , но мы знаем это:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0$$

Раз предел не 0, то равномерной сходимости нет. (Предел может быть только нулем, потому что поточечный предел 0 (иначе пределов было бы несколько, так как равномерная сходимость влекла бы предел к другой функции)). Пример закончился, его явно в билете нет, но пусть будет.