Билет 27

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 27: Определения предела по Коши и по Гейне. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Критерий Коши.

***Определение* 0.1** (Коши).
Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

Тогда ($f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ - образ функции).

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad f(\overset{\circ}{B}{}^X_\delta(a) \cap E) \subset B^Y_\varepsilon(b).$$

Аналогичная формулировка (раскрыть образ):

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{B}{}^X_\delta(a) \cap E \quad f(x) \in B^Y_\varepsilon(b).$$

И ещё одна аналогичная формулировка (раскрыть шары):

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E \setminus \{a\} \quad (\rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon).$$

***Определение* 0.2** (Гёйне).
Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall \text{ последовательностей } x_n \in E \setminus \{a\} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = a \implies \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b.$$

Теорема 0.1.
Определения по Коши и по Гёйне эквивалентны.

Доказательство.
Коши $\implies$ Гёйне:

Пусть $x_n \in E \setminus \{a\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \implies \forall \delta > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$.

В частности, у нас δ для ε из Коши. Выберем по нему N.

Тогда $\forall n > N \quad \rho_X(x_n, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x_n), b) < \varepsilon \implies \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

Гёйне $\implies$ Коши:

От противного. Пусть δ не существует $\implies \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \quad \exists x \in \overset{\circ}{B}{}^X_\delta(a) \cap E \quad \rho_Y(f(x), b) > \varepsilon$.

В частночи, можем взять $\delta = \frac{1}{n}$.

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E \setminus a \quad \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0$, но $\rho_Y(f(x_n, b)) > \varepsilon$. Получается, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, но $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq b$. Противоречие с Гёйне.

$\square$

Следствие.
Предел единственнен.

Доказательство.
Пусть предел не единственнен. Тогда по Гёйне у любой последовательности должны быть оба предела, что невозможно так как предел последовательности единственный, а функция от последовательности - последовательность. $\square$

Теорема 0.2.
Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Тогда $\exists r > 0 \quad f|_{B_r(a) \cap E}$ - ограничена.

Доказательство.

Подставим $\varepsilon = \rho_Y(f(a), b) + 1$ в Коши:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\delta^X(a) \cap E \quad \rho_Y(f(x), b) < \rho_Y(f(a), b) + 1.$$

Значит, все значения функции в $B_\delta^X(a) \cap E$ лежиат в $B^Y_{\rho_Y(f(a),b)+1}(b)$. □

Теорема 0.3.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle$, $\langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, Y - полное, $E \subset X$, $a \in E'$, $f : E \mapsto Y$.

Тогда

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathring{B}_\delta^X(a) \cap E \quad f(x) \in B_\varepsilon^Y(f(y)).$$

Альтернативная формулировка (раскрытие шаров):

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \setminus \{a\} \quad (\rho_X(x, a) < \delta \wedge \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Доказательство.

Необходимость ($\implies$):

$$\begin{cases} \rho_X(x, a) < \delta \implies \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon \\ \rho_X(y, a) < \delta \implies \rho_Y(f(y), b) < \varepsilon \end{cases} \implies \rho_Y(f(x), f(y)) < \rho(f(x), b) + \rho(b, f(y)) < 2\varepsilon$$

Достаточность ($\leqslant$):

Возьмём последовательнсоть $x_n \in E \setminus \{a\}$, $x_n \to a$.

Проверим фундаментальность $f(x_n)$:

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \rho_Y(f(x_n, f(x_m)).$$

Для данного ε возьмём δ по критерию Коши, и по δ возьмём N такое, что $\forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$. Тогда критерий Коши даёт нам фундаментальность $f(x_n)$. Так-как Y - полное, фундаментальная последовательность будет сходится к точке Y.

Пределы на последовательностях получатся одинаковыми: иначе, можем смешать их, получить сходящуюся к a последовательность которая также даст предел, но тогда у сходящейся последовательности есть подпоследовательности с разными пределами. Противоречие. □

TODO: Нужна-ли арифметика и всё такое? Вроде в билете даже не сказано про «Основные свойства» итд...