# Билет 18

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

## Содержание

## 0.1. Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

***Определение* 0.1.**

Нормированным пространством над $\mathbb{R}$ называется пара $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, где $X$ - линейное пространство над $\mathbb{R}$ (далее одно и тоже обозначение используется для линейного пространства и его множества векторов), а $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$ - норма, обладающая следующими свойствами $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad$.

1. $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| =$ |lambda|||x||
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ $(\triangle)$

**Пример.**

$X = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$

**Пример.**

На $X = \mathbb{R}^d$ можно задать бесконечно много норм:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|.$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}.$$

$$\|x\|_n = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^n}.$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in 1, \ldots, d} |x_i|.$$

**Пример.**

$X = C[a, b]$, $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

**Доказательство.**

Докажем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \max_{x \in [a,b]} |f(x) + g(x)| \quad , \quad . \\ &= |f(x_0) + g(x_0)| \\ &\leqslant |f(x_0) + |g(x_0)| \\ &\leqslant \max_{x \in [a,b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,b]} |g(x)| \\ &= \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

□

***Определение* 0.2.**

Пусть $X$ - линейное пространство, тогда функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если удовлетворяет следующим свойствам $\forall x, y, z \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad$:

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$.

2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

*Замечание.*
Аналогичные определения можно дать над $\mathbb{C}$, тогда надо ещё потребовать $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$, и третий пункт примет вид $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

**Пример.**
$X = \mathbb{R}^d$, $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i y_i$

**Пример.**
Пусть $w_1, \ldots, w_d > 0$, тогда
$X = \mathbb{R}^d$, $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} w_i x_i y_i$

**Пример.**
$X = C[a, b]$, $\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(t) g(t) dt$

***Свойства.***

1. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ и $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского: $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

   **Доказательство.**
   Пусть $t \in \mathbb{R}$.
   $$\langle x + ty, x + ty \rangle \geqslant 0.$$
   $$\langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle .$$
   Это квадратное уровнение имеет корень только если $x + ty = 0$, значит не более одного корня. Его дискриминат $\leqslant 0$:
   $$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leqslant 0 \implies \langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle .$$ □

3. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ - норма

   **Доказательство.**
   (a) Первое свойство переносится напрямую, из аналогичных свойств для $\langle x, x \rangle$ и $\sqrt{\ }$.
   (b) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} =$ |lambda|||x||
   (c)
   $$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \iff \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

<x+y, x+y> = <x,x> + 2<x,y> + <y,y><x,y> <= sqrt(<x,x>*<y,y>)<x,x> + 2<x,y> +

Последнее неравенство - неравенство Коши-Буняковского. $\square$

***Свойства.***

1. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ - метрика

   **Доказательство.**

   (a) Первое свойство переходит прямо

   (b) $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)|\|x - y\| = \rho(x, y)$

   (c) $\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$ ($\triangle$ для нормы).

   $\square$

2. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$

   ||x|| = ||x - y + y|| <= ||x - y || +|| y|| ||x|| -

   **Доказательство.**

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|x - y\| + \|y\|.$$
$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \overset{\triangle}{\leqslant} \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

$$\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$
$$\|y\| \leqslant \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

$\square$