

# Билет 39

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 39: Связность и линейная связность. Теорема Больцано–Коши. Связность отрезка и линейно связного множества. . . . .	1
-----	--	---

## 0.1. Билет 39: Связность и линейная связность. Теорема Больцано–Коши. Связность отрезка и линейно связного множества.

### Определение 0.1.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$A$  называется связным, если для всех открытых непересекающихся  $U, V \subset X$  верно

$$A \subset U \cup V \implies \begin{cases} A \subset U \\ A \subset V \end{cases}.$$

(Неформально:  $A$  нельзя разбить на два открытых непересекающихся множества)

### Теорема 0.1.

Непрерывный образ связного множества связан

### Доказательство.

Пусть  $f$  - непрерывная функция,  $E$  - связное множество.

Пусть  $f(E) \subset U \cup V$ , где  $U, V$  - открытые непересекающиеся.

Тогда  $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$  - открытые непересекающиеся. И при этом,  $E \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ .

Тогда  $E$  подмножество одного из них, и  $f(E)$  подмножество соответствующего образа.  $\square$

### Теорема 0.2 (Больцано-Коши).

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $E \subset X$  связно,  $f : E \mapsto \mathbb{R}$ ,  $a, b \in E$ .

$A := f(a)$   $B := f(b)$

Тогда,  $\forall A < C < B \quad \exists c \in E \quad f(c) = C$ .

### Доказательство.

$U := (-\infty, C)$ ,  $V := (C, \infty)$  - открытые непересекающиеся.

Предположим что такого  $c$  не существует. Тогда  $C \notin f(E)$ .

Тогда  $f(E) \subset U \cup V$ . Но при этом  $A \in U$ ,  $B \in V$ , значит  $f(E) \not\subset U$  и  $f(E) \not\subset V$ , противоречие со связностью  $f(E)$  как непрерывного образа связного  $E$ .  $\square$

### Теорема 0.3.

Отрезок связан.

### Доказательство.

Пусть  $[a, b] \subset U \cup V$ . Без ограничения общности,  $b \in V$ .

Предположим что  $S := [a, b] \cap U \neq \emptyset$ .

$s := \sup S$ .

Если  $s \in V$ :

$$s \in V \stackrel{\text{открытость}}{\implies} \exists \varepsilon > 0 \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset V \implies (s - \varepsilon, s] \cap U = \emptyset \implies \sup U \leq s - \varepsilon < s.$$

Если  $s \in U$ , то  $s \neq b$ :

$$s \in U \implies \exists \varepsilon \quad (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U \implies \sup U \geq s + \varepsilon > s.$$

В обоих случаях получили противоречие, значит  $S = \emptyset \implies [a, b] \subset V$ . Значит, отрезок связан.  $\square$

**Следствие.**

Носитель пути - связное множество.

**Доказательство.**

Отрезок - связное множество, носитель пути - непрерывный образ отрезка.  $\square$

**Определение 0.2.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$A$  называется линейно связным, если  $\forall x, y \in A \quad \exists \gamma : [a, b] \mapsto A \quad \begin{cases} \gamma(a) = x \\ \gamma(b) = y \\ \gamma - \text{путь} \end{cases}$ ,

**Теорема 0.4.**

Линейно связное множество связно

**Доказательство.**

Пусть нет,  $A \subset U \cup V$  - открытые непересекающиеся,  $A \cap U, A \cap V \neq \emptyset$ .

Возьмём  $x \in A \cap U, y \in A \cap V$ .

Возьмём  $\gamma$  - путь от  $x$  до  $y$ .

$\gamma([a, b]) \subset U \cup V, \gamma(a) \in U, \gamma(b) \in V$ . Противоречие со связностью носителя.  $\square$

**Определение 0.3.**

Область - открытое линейно связное множество.

**Замечание.**

Если  $U$  открыто, то  $U$  связно  $\iff U$  линейно связно. (без доказательства)