Билет 32

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 32: Линейные операторы. Свойства. Операции с линейными операторами. Матричное задание операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$

***Определение* 0.1.**

Пусть X, Y - линейные пространства над $\mathbb{R}$, $A : X \mapsto Y$.

A называется линейным оператором, если

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in X \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

Замечание.

Аналогичное определение можно дать над $\mathbb{C}$.

Свойства.

1. $A(0_X) = 0_Y$

   Доказательство.

   $$A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0_Y.$$

   □

2. $A\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k A(x_k)$

   Доказательство.
   Индукция по n. □

***Определение* 0.2.**

Пусть X, Y - линейные пространства, $A, B : X \mapsto Y$ - линейные операторы, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(A \pm B)(x) = A(x) \pm B(x).$$
$$(\lambda A)(x) = \lambda \cdot A(x).$$

Замечание.

Операторы с данными операциями образуют линейное пространство.

Доказательство.

Покажем что в результате операцией получается линейный оператор:

$$\begin{aligned}(A + B)(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y)\\ &= \alpha A(x) + \beta A(y) + \alpha B(x) + \beta B(y)\\ &= \alpha(A(x) + B(x)) + \beta(A(y) + B(y))\\ &= \alpha((A + B)(x)) + \beta((A + B)(y))\end{aligned}$$

□

Аналогичным способом можно проверить другие аксиомы линейного пространства.

***Определение* 0.3.**

Пусть X, Y, Z - линейные пространства, $A : X \mapsto Y$, $B : Y \mapsto Z$ - линейные операторы.

Их композиция: $(BA)(x) = B(A(x))$.

***Определение* 0.4.**

Пусть X, Y - линейные пространства, $A : X \mapsto Y$ - линейный оператор.

Тогда, обратный к A оператор $A^{-1} : Y \mapsto X$, такой оператор, что $A^{-1}A = \mathrm{id}_X$, $AA^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

Свойства.

1. Композиция линейный операторов - линейные оператор

   Доказательство.

   $$\begin{aligned}(BA)(\alpha x + \beta y) &= B(A(\alpha x + \beta y)) \\ &= B(\alpha A(x) + \beta A(y)) \\ &= \alpha B(A(x)) + \beta B(A(y)) \\ &= \alpha(BA)(x) + \beta(BA)(y)\end{aligned}$$

   □

2. Если обратный оператор существует, то он единственнен.

   Доказательство.
   Пусть B, C - обратные к A.

   $$C = \mathrm{id}_X \cdot C = (BA)C = B(AC) = B \cdot \mathrm{id}_Y = B.$$ □

3. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

   Доказательство.

   $$(\frac{1}{\lambda}A^{-1})((\lambda A)(x)) = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}(\lambda A(x)) = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda A^{-1}(A(x)) = 1 \cdot x = x.$$

   Аналогично в другую сторону. □

4. Множество обратимых линейных операторов из X в X образуют группу по композиции.

   Доказательство.
   Наличие единицы: id_X

   Наличие обратного по определнию

   Ассоциативность композиции:

   $$(A(BC))(x) = A(BC(x)) = A(B(C(x))) = AB(C(x)) = ((AB)C)(x).$$

   Замкнутость:

   $$(A^{-1})^{-1} = A.$$ (,)

   $$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

   $$(A^{-1}B^{-1})(BA)(x) = A^{-1}(B^{-1}(B(A(x)))) = A^{-1}(A(x)) = x.$$ □

Замечание.

Если $A : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, то можно использовать матричную запись:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Пусть A_i - функция отвечающая за i-ю координату выходного вектора. Тогда $a_{ik} = A_i(e_k)$, где e_k - k-й стандартный базисный вектор.