Билет 06

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 6: Формула Стирлинга

Продолжаем примеры для формулы Эйлера-Маклорена

Пример.

3. **Формула Стирлинга**

   Хотим найти $\ln(n!)$

   Пусть $f(t) = \ln t$, тогда $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$

   $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!) = \int\limits_1^n \ln t\, dt + \frac{\ln 1 + \ln n}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_1^n -\frac{1}{t^2} \cdot \{t\}(1 - \{t\})\, dt$

   $b_n := \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\, dt \leqslant b_{n+1} \Rightarrow b_n$ возрастает.

   $b_n = \int\limits_1^n \frac{\{t\}(1-\{t\})}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_1^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_{t=1}^{t=n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4n} \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow b_n$ сходятся. $\Rightarrow b := \lim b_n \Rightarrow b_n = b + o(1)$

   $\ln(n!) = n \ln n + \frac{\ln n}{2} - n - \frac{b}{2} + o(1)$

   $n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{-\frac{b}{2}} e^{o(1)} \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-b}$, т.к. $e^{o(1)} \to 1$

   Хотим понять, что такое $c := e^{1-b}$.

   $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$

   $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n} c}{n^{2n} e^{-2n} n c^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{2n}}{n \cdot c} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n} \cdot c} \Rightarrow c = \sqrt{2\pi}$

   Итого формула Стирлинга:

   $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$