Билет 55

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 55: Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей.

Теорема 0.1. (Критерий Коши для равномерной сходимости последовательностей)

Пусть $f_n : E \mapsto \mathbb{R}$. Тогда f_n равномерно сходится на E к некоторой функции

$$\iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство.
"$\Longrightarrow$"

Знаем, что $f_n \to f$ на E. Тогда возьмем $\dfrac{\varepsilon}{2}$ вместо ε в определение равномерной сходимости и найдем по нему соотвествующее N.

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| =$
$= |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

"$\Longleftarrow$"

Знаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Зафиксируем некоторый произвольный $x \in E$ и рассмотрим числовую последовательность $f_n(x)$.

Замечание. Воспоминание из 1 семестра : последовательность x_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geqslant N \quad \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$

Тогда $f_n(x)$ - фундаментальная последовательность. Тогда по критерию Коши для числовых последовательностей она имеет конечный предел : пусть $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

Берем неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ и устремим m к ∞. При переходе к пределу потеряется строгость знака $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Перебрав $\forall x \in E$ получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Это и есть определение равномерной сходимости $f_n \rightrightarrows f$ на E $\square$