Билет 47

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 47: ! Признак Лейбница. Оценка суммы знакочередующегося ряда. Примеры (ряд Лейбница и его перестановка)

Знакочередующийся ряд: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n \geqslant 0$

Теорема 0.1 (Признак Лейбница)**.**

Если a_n монотонно убывают стремятся к 0, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится. Важно заметить, что условие стремления a_n к 0 важно (см. необходимое условие сходимости ряда). Данный признак можно так же вывести из признака Дирихле. Однако мы хотм произвести так же оценку на сумму знакочередующегося ряда: $S_{2n} \leqslant S_n \leqslant S_{2n+1}$

Доказательство.

$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant S_{2n}$ $S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leqslant S_{2n-1}$. Получаем, что S с четными номерами растут, а с нечетными - убывают. Значит, мы можем расписать вложенную последовательно сть отрезков: $[0, S_1] \supset [S_2, S_3] \supset [S_4, S_5] ... \supset [S_{2n}, S_{2n+1}]$.
Теперь рассмотрим длины отрезков: $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$. Тогда последовательность отрезков стягивается. Тогда применим одноименную теорему: у этих отрезков есть общая точка S, которая является пределом их концов: $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1} = S$. Получили что частичные суммы сходятся к S, значит исходный ряд тоже сходится к S. Также можно заметить, что неравенство на сумму ряда выполняется, потому что точка S лежит во всех отрезках, в частности в отрезке $[S_{2n}, S_{2n+1}]$

□

Пример.

В качестве примера рассмотрим ряд Лейбница: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$
$S_{2n} = (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n =$ (сложили все дроби и дважды вычли четные), где H_n- гармонический ряд (смотри билет 6). Подставим все в формулу для гармонических чисел: $= \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln(n) + \gamma + o(1)) = \ln(2n) - \ln(n) + o(1) = \ln 2 + o(1)$. Тогда $S_{2n} \to \ln 2$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.
Рассмотрим перестановку ряда Лейбница: $(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) + ...$
Будем считать $S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4n} = 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n} =$. Последнее выражение в скобках это H_{2n}. Мы только что считали это в предыдущем примере. Получаем: $= H_{2n} - \frac{1}{2}H_n = \frac{\ln 2}{2}$