

Билет 45

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 45: Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак.	1
-----	--	---

0.1. Билет 45: Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак.

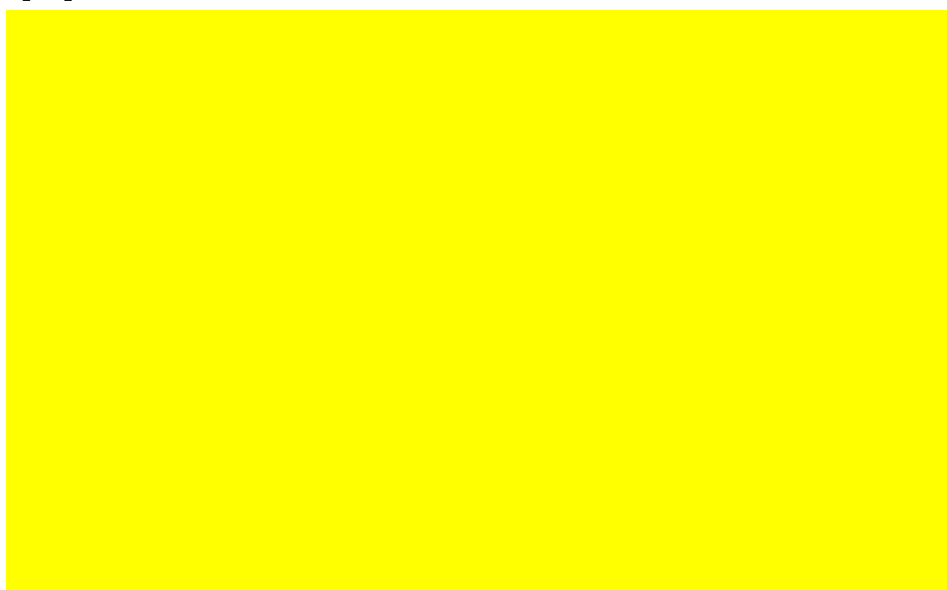
Теорема 0.1.

Если $f : [m, n] \mapsto \mathbb{R}$ монотонна, то $\left| \sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^n f(x) dx \right| \leq \max\{|f(m)|, |f(n)|\}$

Доказательство.

Не умаляя общности $f \geq 0$ и монотонно убывает.

Здесь удобно нарисовать убывающий график и изобразить суммы двумя видами столбиков: когда начинаем от m и столбики вылезают над графиком, и когда от $m + 1$ столбики под графиком.



□

Теорема 0.2 (Интегральный признак сходимости).

$f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f \geq 0$ монотонно убывает.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{\infty} f(x) dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ — сходится $\iff S_n := \sum_{k=1}^n f(k)$ ограничены.

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ — сходится $\iff F(n) := \int_1^n f(x) dx$ ограничены.

По предыдущей теореме $|S_n - F(n)| \leq f(1)$.. $f(\inf) \rightarrow 0$

□

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Если $p \leq 0$, то $\frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0 \implies$ ряд расходится.

Если $p > 0$, то $f(x) = \frac{1}{x^p} \geq 0$ и монотонно убывает \implies по интегральному признаку

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ и $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ (сходится $\iff p > 1$) ведут себя одинаково.

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится $\iff p > 1$.

Следствие.

Если $0 \leq a_n \leq \frac{c}{n^p}$ при $p > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

(Следует из примера выше и признака сравнения.)

Пример.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \geq 0$ и монотонно убывает \implies по интегральному признаку

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ и $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ ведут себя одинаково.

$$\int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{\ln 2}^{\ln b} = \ln \ln b - \ln \ln 2 \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} +\infty$$

Значит, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.