

Билет 10

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.	1
---------------------------------------------------------------	---

0.1. Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

Определение 0.1 (Абсолютная сходимость.).

$$f \in C[a, b)$$

$$\int_a^b f \text{ абсолютно сходится, если } \int_a^b |f| \text{ сходится.}$$

Теорема 0.1.

$$\text{Если } \int_a^b f \text{ абсолютно сходится, то } \int_a^b f \text{ сходится.}$$

Доказательство.

$$0 \leq f_{\pm} \leq |f|$$

$$\int_a^b f \text{ абсолютно сходится} \implies \int_a^b |f| \text{ сходится} \implies \int_a^b f_{\pm} \text{ сходится}$$

$$\int_a^b f = \int_a^b (f_+ - f_-) = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \implies \int_a^b f \text{ сходится.}$$

□

Теорема 0.2 (признак Дирихле).

$$f, g \in C[a, +\infty)$$

$$1. \exists M : \left| \int_a^c f \right| \leq M \text{ при всех } c > a.$$

$$2. g - \text{монотонная функция.}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\text{Тогда } \int_a^{+\infty} fg \text{ сходится.}$$

Доказательство.

$$\text{Лишь для } g \in C^1[a, +\infty).$$

$$\text{Пусть } F(y) := \int_a^y f$$

$$\text{По условию } |F| \leq M$$

$$\int_a^c fg = \int_a^c F'g = Fg|_a^c - \int_a^c Fg'$$

Надо доказать, что существует предел при $c \rightarrow +\infty$

Распишем первое слагаемое как: $F(c)g(c) - F(a)g(a)$. Тогда $F(c)g(c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$, так как это произведение бесконечно малой на ограниченную.

Надо доказать, что $\int_a^c Fg'$ сходится. Докажем, что он абсолютно сходится, то есть, что $\int_a^c |F| \cdot |g'|$ сходится.

$$\int_a^c |F| \cdot |g'| \leq M \int_a^c |g'| = M \int_a^c g' = M |g|_a^c = M |g(c) - g(a)| \leq M |g(a)| \implies \int_a^{+\infty} |F'g| \text{ сходится.}$$

□