Билет 95

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 95: ! Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

***Определение* 0.1.**

$\Phi\ :\ D \to \mathbb{R}^m\ \ D \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$f\ :\ D \to \mathbb{R}$

$a \in D$ и $\Phi(a) = 0$

a – точка условного локального максимума при условии $\Phi = 0$, если $\exists U$ – окрестность точки a, т.ч. $\forall x \in U \cap D$, удовлетворяющее условию $\Phi(x) = 0$

$\implies f(x) \leqslant f(a)$

a – точка условного локального минимума, если

$\exists U$ – окрестность точки a, т.ч. $\forall x \in U \cap D$, удовлетворяющее условию $\Phi(x) = 0 \implies f(x) \geqslant f(a)$

Аналогично строгий условный максимум и строгий условный минимум.

Пример.

$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$

Теорема 0.1 (Метод неопределенных множителей Лагранжа)**.**

$\Phi\ :\ D \to \mathbb{R}^m\ \ D \subset \mathbb{R}^{n+m}\quad a \in D$ – открытое.

$\Phi(a) = 0$

$f\ :\ D \to \mathbb{R}$

Φ, f непрерывно дифференцируемы.

Если a точка условного экстремума, то $\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}\Phi_1, \operatorname{grad}\Phi_2, ..., \operatorname{grad}\Phi_m$ линейно зависимы.

Замечание.

1. Если $\operatorname{grad}\Phi_1, \operatorname{grad}\Phi_2, ..., \operatorname{grad}\Phi_m$ линейно зависимы, то теорема ничего не утверждает.
2. Если $\operatorname{grad}\Phi_1, .., \operatorname{grad}\Phi_m$ линейно независимы, то $\operatorname{grad} f = \lambda_1 \operatorname{grad}\Phi_1 + ... + \lambda_m \operatorname{grad}\Phi_m$
3. $\Phi'(a)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{n+m}} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_{n+m}} & \cdots & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}$

   Столбцы линейно независимы $\iff \operatorname{rank}\Phi'(a) = m$, т.е. максимально возможный.

Доказательство.

$\operatorname{rank}\Phi'(a) = m$. (Рассматривать линейную зависимость градиентов бессмысленно, как показано в замечании)

Перенумеруем координаты Φ так, чтобы определитель последней подматрицы $\neq 0$.

$a = (b, c)\ \ b \in \mathbb{R}^n\ \ c \in \mathbb{R}^m$

$A := \Phi'(a)$

$A(0, h) = 0 \implies h = 0$

По теореме о неявной функции $\exists W$ – окрестность точки b и непрерывно дифференцируемая функция $g\ :\ W \to \mathbb{R}^m$, т.ч. $\Phi(w, g(w)) = 0\ \ \forall w \in W$

$g(b) = c$

Пусть a – точка условного максимума.

$\implies \exists U$ – окрестность точки a такая, что $\forall x \in U \ \ \Phi(x) = 0$

$f(a) \geqslant f(x)$

Уменьшим W так, чтобы $W \times \{c\} \subset U$ и чтобы $(w, g(w)) \in U$ при $w \in W$.

Почему так можем сделать?

$w \to (w, g(w))$ – непрерывное отображение

$\implies$ прообраз открытого открыт $\implies$ прообраз $U \cap W$ подойдет.

$\implies \forall w \in W \ \ f(w, g(w)) \leqslant f(b, g(b))$

$h(w) := f(w, g(w)) \quad h$ имеет локальный максимум в точке b.

h – дифференцируемая функция, а значит выполняется необходимое условие экстремума. Т.е. $\operatorname{grad} h = 0$.

$x = (y, z) \ \ y \in \mathbb{R}^n \ \ z \in \mathbb{R}^m$

$\frac{\partial h}{\partial w_k} = \frac{\partial f}{\partial y_k} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_k} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y_k} = 0$

$0 = \operatorname{grad} h = \operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_j} \cdot \operatorname{grad}_y g_j$

$\Phi(w, g(w)) \equiv 0$

i – фиксированное.

Посмотрим на частные производные Φ_i по w_k.

$\frac{\partial}{\partial w_k} \quad : \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_k} + ... + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y_k} = 0$

$\operatorname{grad}_y \Phi_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \operatorname{grad} g_j = 0$

$\operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_y \Phi_i + \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda_i \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \operatorname{grad} g_j) + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_j} \operatorname{grad} g_j = 0$

$\operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_y \Phi_i + \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j}) \operatorname{grad} g_j = 0$

Хотим подобрать λ_i так, что $(*) := \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0 \ \ \forall j$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_1} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_m} & \cdots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_m} \end{pmatrix}$$

Первая матрица здесь обратима, так как это в точности последний минор, который не вырожден.

$\implies$ система имеет решение $\implies$ можно занулить коэффициенты

$\implies \operatorname{grad}_y f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_y \Phi_i = 0$

Но $(*)$ в векторном виде

$\operatorname{grad}_z f + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_z \Phi_i = 0$ $\square$

Замечание.

$\operatorname{grad} f = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} \Phi_i$

$n + m$ уравнений.

Неизвестных – точка a ($n+m$ неизвестных), λ_i – m неизвестных.

Но $\Phi(a) = 0$ – а это еще m уравнений.

Пример.

Минимум и максимум квадратичной формы на сфере.

A – симметричная матрица и $Q = \langle Ax, x \rangle$

Минимум и максимум $Q(x)$ при условии $x_1^2 + ... + x_n^2 = 1$

$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_n \end{pmatrix} \quad \text{rank} = 1$

$\implies \exists \lambda \in \mathbb{R} \ : \ \operatorname{grad} Q - \lambda \operatorname{grad} \Phi = 0$

$F := Q - \lambda\Phi$ – функция Лагранжа.

при некотором $\lambda \quad \operatorname{grad} F = 0$.

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{k,j} x_j + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{i,k} x_i + a_{k,k} \cdot 2x_k - 2\lambda x_k = 0$

$2 \sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j - 2\lambda x_k = 0$

$Ax - \lambda x = 0$

$\implies$ x – единичный собственный вектор, λ – собственное число.

Все точки, в которых достигается экстремум – единичные собственные вектора.

$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda ||x||^2 = \lambda$

Значения в этих точках – соответствующие собственные числа.