Билет 71

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 71: ! Определение e^z, $\sin z$ и $\cos z$. Свойства. Ряд Тейлора для $\log(1+x)$.

Теорема 0.1 (Определение и свойства e^z)**.**
Мы уже знаем разложение в ряд Тэйлора:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Показательную функцию комплексного переменного

$$w = e^z$$

определим равенством

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Справедлива формула Эйлера:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin x$$

Функция $w = e^z$ определена на всей комплексной плоскости и на действительной оси совпадает с соответствующей функцией действительного переменного. Сходится во всей плоскости.

Свойства:

- $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;
- $e^z \neq 0$, так как $|e^z| = e^x > 0$;
- e^zпериодическая с периодом $T = 2\pi i$, т.е. $e^{z+2\pi i} = e^z$

Теорема 0.2 (Определение и свойства $\sin z$ и $\cos z$)**.**
Мы уже знаем разложение в ряд Тэйлора:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}, \ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ определим через показательную функцию по формулам Эйлера

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

Сходятся во всей плоскости.

Свойства:

- При $z = x, \sin z$ и $\cos z$ совпадают с тригонометрическими функциями $\sin x$ и $\cos x$ действительной переменной x.
- Выполняются основные тригонометрические соотношения.
- $\sin z$ и $\cos z$ периодические функции с основным периодом 2π.

- $\sin z$ - нечетная функция, $\cos z$ - четная функция.
- Могут принимать любые значения, а не только ограниченные по модулю единицей.
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Теорема 0.3 (Ряд Тейлора для $\log(1+x)$)**.**

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \text{ при } x \in (-1, 1)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \text{ при } x \in (-1, 1)$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}, \ k = n+1$$

□