# Билет 08

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

## Содержание

## 0.1. Билет 8: Свойства несобственных интегралов.

***Свойства.*** <=

Везде $-\infty < a < b \leqslant +\infty \;\; f \in C[a, b)$

1. Аддитивность.

   $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \forall c \in (a, b) \;\; \int\limits_c^b f$ сходится.

   **Доказательство.**
   $\int\limits_a^b f$ – сходится $\implies \exists \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B f =: \int\limits_a^b f$

   $\int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^B f \implies \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B f = \int\limits_a^c f + \lim\limits_{B \to b-} \int\limits_c^B f$

   Тогда $\lim\limits_{B \to b-} \int\limits_c^B f$ должен сходится.

   Получили, что $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$. □

2. $\int\limits_a^b f$ сходится $\implies \int\limits_c^b f \to 0$ при $c \to b-$.

   $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

   $\int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f$

   $\implies \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f - \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$

3. Линейность. $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^b g$ сходятся $\implies \int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)$ сходится тоже.

   И $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$

   **Доказательство.**
   $\int\limits_a^B (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^B f + \beta \int\limits_a^B g$.

   Перейдём к пределу $B \to b-$.

   $\implies$ предел существует, конечен $\implies$ интеграл сходится и

   $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^b f + \beta \int\limits_a^b g$ □

   *Замечание.*
   $\int\limits_a^b f$ сходится $\int\limits_a^b g$ расходится $\implies \int\limits_a^b (f \pm g)$ расходится.

   Доказательство – от противного.

   , f g , g

4. Монотонность $f, g \in C[a,b)$ $f \leqslant g \implies \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$

**Доказательство.**
$c \in [a,b) \implies f, g \in C[a,c]$

$\int\limits_a^c f \leqslant \int\limits_a^c g$

Переходим к пределу в неравенстве. $c \to b-$

$\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$

$\square$

5. Интегрирование по частям.

$f, g \in C^1[a,b)$

Если $\int\limits_a^b fg'$ сходится и $\exists \lim\limits_{c \to b-} f(c) \cdot g(c)$, то $\int\limits_a^b f'g$ сходится и

$\int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$

**Доказательство.**
$c \in [a,b)$ $f, g \in C^1[a,c]$

$\int\limits_a^c fg' = fg\Big|_a^c - \int\limits_a^c f'g$

Теперь напишем предел $c \to b-$

$$\implies \lim_{c \to b-} \int\limits_a^c fg' = \lim_{c \to b-} (fg\Big|_a^c - \int\limits_a^c f'g) = \lim_{c \to b-} fg\Big|_a^c - \lim_{c \to b-} \int\limits_a^c f'g = \lim_{c \to b-} f(c) \cdot g(c) - f(a) \cdot g(a) - \int\limits_a^b f'g$$

$$\implies \int\limits_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

при существовании $\lim\limits_{c \to b-} f(c) \cdot g(c)$ и $\int\limits_a^b f'g$, что есть в условии.

$\square$

6. Замена переменной.

$f \in C[a,b)$ $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a,b)$ и $\varphi$ непрерывна и дифференцируема

$\varphi(\beta) := c := \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \varphi(\gamma)$

Тогда $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^c f(x)\,dx$

Если существует интеграл в одной из частей, то существует и в другой, и они равны.

**Доказательство.**
$F(y) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^y f(x)\,dx \quad y \in [a,b)$

$\Phi(\gamma) = \int\limits_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad \gamma \in [\alpha, \beta)$

$\Phi(\gamma) = F(\varphi(\gamma))$

Если существует предел в правой части. Т.е. $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{c} f(x)\,dx$

Тогда $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{c} f(x)\,dx = \lim\limits_{y \to c-} F(y) - F(\varphi(\alpha)) = \lim\limits_{y \to c-} F(y) - \Phi(\alpha)$ (alpha) = F

$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma) - \Phi(\alpha)$

Это было бы верно, если бы предел существовал. Поймем, почему существует.

$\lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} F(\varphi(\gamma))$

$a \leqslant \varphi(\gamma) < b \implies c \in [a, b]$

Если $c \neq b$, то предел существует и равен $F(c)$.

Если $c = b$, то предел тоже существует.

(В силу непрерывности)

Теперь надо понять, что $\lim\limits_{y \to c-} F(y) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma) = \lim\limits_{\gamma \to \beta-} F(\varphi(\gamma))$

Возьмем $\gamma_n \to \beta \implies \varphi(\gamma_n) \to c$ оба стремятся слева

$F(c_n) \to \lim\limits_{y \to c} F(y)$ c_n -> c

$F(\varphi(\gamma_n)) = \Phi(\gamma_n) \to \lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma)$

Случай второй. Существует $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Т.е. существует $\lim\limits_{\gamma \to \beta-} \Phi(\gamma)$

Если $c < b$, то $f \in C[\varphi(a), c]$ и $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{c} f(x)\,dx$ существует и мы попали в первый случай.

Поэтому $c = b$.

Возьмем последовательность $\gamma_n \to \beta$. Тогда $\varphi(\gamma_n) \to b$

Пусть $y_n \to b$. Надо доказать, что $F(y_n)$ имеет предел.

Поймем, что $\exists \delta_n \in [\alpha, \beta)\ \ \varphi(\delta_n) = y_n$.

$\varphi(\alpha) \leqslant y_n \leqslant \varphi(\gamma_m)$

$\implies$ по непрерывности $\varphi$ существует $\delta_n \in [\alpha, \gamma_m]$, т.ч. $y_n = \varphi(\delta_n)$.

Покажем, что $\delta_n \to \beta$. Пусть это не так.

Тогда $\delta_{n_k} < \beta - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

$\varphi : [\alpha, \beta - \varepsilon] \to [a, b)$ и непрерывна на отрезке. Значит, по теореме Вейерштрасса в какой-то точке достигается максимум.

$\varphi(\delta_{n_k}) \leqslant \varphi(p) < b$.

Но это противоречит с тем, что $y_{n_k} \to b$.

Тогда $F(y_n) = F(\varphi(\delta_n)) = \Phi(\delta_n)$ имеет предел.

$\square$

**Пример.**

Замена $x = \sin t \implies dx = \cos t\, dt$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos t} \cos t\, dt = \int\limits_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

*Замечание.*

$f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f(x)\, dx$

t = 1/(b-x)

Сделаем замену. $x = b - \frac{1}{t}$. Тогда

$\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b - \frac{1}{t}) \frac{dt}{t^2}$

Т.е. теперь есть связь с бесконечностями – конечностями.