Билет 35

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 35: Свойства, эквивалентные ограниченности линейного оператора. Оценка нормы через сумму квадратов. Ограниченность операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$

Теорема 0.1.

Пусть $A : X \mapsto Y$ - линейный опертор.

Следующие условия равносильны (с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$ в обоих пространствах):

1. A - ограниченный оператор
2. A непрерывен в 0
3. A непрерывен
4. A равномерно непрерывен

Доказательство.

$4 \implies 3 \implies 2$ очевидно.

$1 \implies 4$:

Хотим получить

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in X \quad \|x - y\|_X < \delta \implies \|Ax - Ay\|_Y < \varepsilon.$$

Возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$.

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\| &= \|A(x - y)\| \\ &\leqslant \|A\| \, \|x - y\| \\ &< \|A\| \, \delta \\ &= \|A\| \, \frac{\varepsilon}{\|A\|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$2 \implies 1$:

Знаем, что $A(0_X) = 0_Y$ независимо от A.

Имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \|x\|_X < \delta \implies \|Ax\|_Y < \varepsilon.$$

Возьмём $x \in X$, $\|x\| < 1$. ||x|| < 1 => ||x delta|| < delta => ||Ax delta|| < eps

Тогда $\|A(\delta x)\| < \varepsilon \implies \delta \|Ax\| < \varepsilon \implies \|Ax\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \implies \|A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}$, так-как норма - супремум по таким x. □

Теорема 0.2.

Пусть $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ - линейный оператор, норма Евклидова.

Тогда

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Доказательство.

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \|x\|^2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Значит,

$$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sqrt{\frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2}} = \sqrt{\frac{\|x\|^2 \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}{\|x^2\|}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}. \qquad \square$$