Билет 97

Автор1, ..., АвторN

23 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 97: Расстояние от точки до гиперплоскости.

Это пример на использование метода множителей Лагранжа

Пример.

$\mathbb{R}^n \quad \langle a, x\rangle + b = 0 \quad a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$ гиперплоскость L

c – точка $\quad \rho(c, L) := \inf\limits_{x\in L} ||x - c||$

$f(x) = ||x - c||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^2$ – это функция, которую мы минимизируем.

$\Phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_ix_i + b$

Мы хотим минимизировать f при условии, что $\Phi = 0$

Что нам говорит метод множителей Лагранжа: надо завести вспомогательную функцию $F = f - \lambda\Phi$, и для этой функции все частные производные должны равнятся нулю в точке условного экстремума: $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = 2(x_k - c_k) - \lambda a_k = 0$ умножим на a_k и сложим

$2\langle x - c, a\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = 0$

$2\langle x - c, a\rangle = 2\langle x, a\rangle - 2\langle c, a\rangle = -2b - 2\langle c, a\rangle$

$\lambda = \frac{-2\langle a,c\rangle - 2b}{||a||^2}$

$x_k = c_k + \frac{\lambda}{2}a_k = c_k - \frac{\langle a,c\rangle + b}{||a||^2}a_k$

Найдём f в этой $(\cdot)$:

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - c_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\langle a,c\rangle+b}{||a||^2}\right)^2 a_k^2 = \frac{(\langle a,c\rangle+b)^2}{||a||^2} := R^2$

Значит, мы нашли единственную точку, в которой может быть экстремум, и нашли значение функции в этой точке. Если мы теперь докажем, что минимум обязан существовать, то это будет значить, что мы нашли именно минимум.

Почему есть минимум: доказывается это с помощью теоремы Вейерштрасса, хотя тут никакой компактности нет.

Есть непрерывная функция $f(x)$. Гиперплоскость – не компакт. Проблема решается так: возьмём наименьшее растояние, которое у нас тут получилось, и назовём его R^2. Рассмотрим шарик радиуса $2R$. Тогда пересечение этого шарика с гиперплоскостью – компактное множество (пересечение замкнутых множеств замкнуто, а шарик ограничен – пересечение ограничено).

Часть гиперплоскости внутри шара $\overline{B}_{2R}(c)$ – компакт. Функция непрерывна $\implies$ на этом компакте f достигает минимум. Это и будет искомый минимум, потому что если возьмём точку где-то вне этого шара, то расстояние будет больше R.

Ответ: $\rho(c, L) = \frac{\langle a,c\rangle+b}{||a||}$

Замечание.

Когда мы решали систему уравнений, у нас были неизвестные: x_k (n штук) и λ. Итого $n+1$ неизвестных. Как получилось решить? На самом деле у нас есть ещё одно уравнение, которым мы тоже пользовались, но о котором умолчали. Мы ищем точку на поверхности, поэтому $\Phi = 0$.