

Билет 28

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 28: ! Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.	1
-----	--	---

0.1. Билет 28: ! Непрерывные отображения. Непрерывность композиции. Характеристика непрерывности в терминах прообразов.

Определение 0.1.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X, f : E \mapsto Y$.

f называется непрерывной в точке $a \in E$ если a - изолированная точка (**TODO:** не предельная? Или есть пустая проколота окрестность в X ?), либо $a \in E'$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Теорема 0.1.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle, \langle Z, \rho_Z \rangle$ - метрические пространства, $E \subset X, f : E \mapsto Y, f(E) \subset \tilde{E} \subset Y, g : \tilde{E} \mapsto Z$.

Если f непрерывна в $a \in E$, а g непрерывна в $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывна в a .

Доказательство.

$$\begin{aligned} f \text{ непрерывна в } a &\implies \forall \delta > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\lambda^X(a) \cap E \quad f(x) \in B_\delta^Y(f(a)) \cap \tilde{E}. \\ g \text{ непрерывна в } f(a) &\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\delta^Y(f(a)) \cap \tilde{E} \quad g(x) \in B_\varepsilon(g(f(a))). \end{aligned}$$

Комбинируем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in \mathring{B}_\lambda^X(a) \quad g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a))) \implies g \circ f \text{ непрерывна в } a. \quad \square$$

Теорема 0.2.

Пусть $\langle X, \rho_X \rangle, \langle Y, \rho_Y \rangle$ - метрические пространства, $f : X \mapsto Y$.

f непрерывна на $X \iff \forall$ открытого $U \subset Y \quad f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ открыт.

Доказательство.

Необходимость (\implies):

Пусть $V = f^{-1}(U)$.

Пусть $a \in V$. Так-как U открыто, $\exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon^Y(f(a)) \subset U$.

По непрерывности $\exists \delta > 0 \quad f(B_\delta^X(a)) \subset B_\varepsilon^Y(f(a)) \subset U$.

$f(B_\delta^X(a)) \subset U \implies B_\delta^X(a) \subset V \implies a \in \text{Int } V \implies V$ - открытое.

Достаточность (\impliedby):

Проверим непрерывность в $a \in X$.

$U := B_\varepsilon^Y(f(a))$ - открытое множество.

Значит, $\exists \delta > 0 \quad B_\delta^X(a) \subset f^{-1}(U) = f^{-1}(B_\varepsilon^Y(f(a)))$

То есть, $f(B_\delta^X(a)) \subset B_\varepsilon^Y(f(a))$, а это и есть определение непрерывности в терминах шаров. \square