# Билет 09

Автор1, ..., Aвтор<math>N

20 июня 2020 г.

# Содержание

0.1	Билет 9: несооственные	интегралы о	от неотрицательных ф	ункции. признак срав-
	нения. Следствия			

## 0.1. Билет 9: Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.

#### Теорема 0.1.

$$f \geqslant 0 \ f \in C[a,b)$$

Тогда сходимость  $\int_{a}^{b} f(x) dx$  равносильна ограниченности сверху первообразной F.

## Доказательство.

$$F(y) := \int_{a}^{y} f$$

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{c \to b^{-}} F(c) - F(a), F(a) = 0$$
 (из утверждения выше)

$$F(z) = F(y) + \int\limits_y^z f \geqslant F(y),$$
 где  $\int\limits_y^z f \geqslant 0$  при  $y < z \implies F(y)$  монотонно возрастает.

Итого, F(y) имеет предел и монотонно возрастает. Для монотонно возрастающих функция существование предела равносильно ограниченности сверху

#### Следствие.

$$f, g \in C[a, b) \ 0 \leqslant f \leqslant g$$

- 1. Если  $\int_{a}^{b} g$  сходится, то  $\int_{a}^{b} f$  сходится.
- 2. Если  $\int_a^b f$  расходится, то  $\int_a^b g$  расходится.

Доказательство. 
$$G(y):=\int\limits_a^y g, \ F(y):=\int\limits_a^y f \implies F\leqslant G$$

- 1.  $\int g$  сходится  $\implies$  G ограничена сверху  $\implies$  F ограничена сверху  $\implies \int f$  сходится.
- 2. От противного. Пусть  $\int\limits_a^b g$  сходится, тогда и  $\int\limits_a^b f$  сходится по первому пункту. Противоречие.

1. Неравенству  $f \leqslant g$  достаточно выполнения для аргументов, близких к b. Замечание.

## Доказательство.

$$\int_{a}^{b} f = \int_{a}^{c} f + \int_{c}^{b} f$$

Для второго слагаемого  $f \leqslant g$ , используем следствие.

2. Вместо  $f \leqslant g$  можно использовать и f = O(g)

Доказательство

$$\int\limits_a^b Cg = C\int\limits_a^b g$$
 – сходится

3. Если  $f\geqslant 0,\ f\in C[a,+\infty)$  и  $f=O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$  при  $\varepsilon>0,$  то  $\int\limits_a^{+\infty}f$  сходится.

Доказательство.

$$f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leqslant M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$$

Надо доказать, что  $\int\limits_a^{+\infty}g$  сходится.

$$\int\limits_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} - \text{сходится.}$$

Следствие.

$$f,g\geqslant 0 \ f,g\in C[a,b)$$
 и  $f\sim g$ при  $x\to b-$ 

Тогда 
$$\int_a^b f$$
 и  $\int_a^b g$  ведут себя одинаково.

Доказательство.

$$f \sim g \implies$$
 найдется такое  $c,$  что  $\frac{g}{2} \leqslant f \leqslant 2g$  при  $x > c$ 

Если 
$$\int\limits_a^b g$$
 сходится, то  $f\leqslant 2g \implies \int\limits_a^b f$  сходится.

Если 
$$\int\limits_a^b f$$
 сходится, то  $g\leqslant 2f \implies \int\limits_a^b g$  сходится.

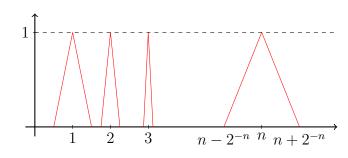
Замечание.

$$f\geqslant 0 \ f\in C[a,+\infty)$$
 и  $\int_a^{+\infty}f$  сходится.

Это НЕ значит 
$$f(x) \to 0$$
 при  $x \to +\infty$ 

Дана функция, изображенная на графике (спасибо за это Герману). Площади треугольников убывают:  $S_1=\frac{1}{2},\ S_2=\frac{1}{4},\ S_3=\frac{1}{8},\ \ldots,\ S_n=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2^{-n}=\frac{1}{2^n}$ 





2