Билет 65

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 65: Теорема о дифференцировании равномер- но сходящейся последовательности (ряда). Суще- ственность равномерности.

Теорема 0.1.

$f_n \in C^1[a,b]$, $f_n(c) \to A$ и f'_n равномерно сходятся к g на $[a,b]$.

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$, $f \in C^1[a,b]$ и $f' = g$.

В частности $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$.

Доказательство.

$\int\limits_c^x g(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^x f'_n(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(c)) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) - A.$

$f_n(x) \rightrightarrows A + \int\limits_c^x g(t)\,dt =: f(x)$ мы проверили равномерную сходимость. И $f(x)$ – дифференцируемая функция.

$f'(x) = g(x)$ – непрерывная функция, т.к. $f'_n \rightrightarrows g$ и f_n непрерывние. □

Следствие.

$u_n \in C^1[a,b]$ $c \in [a,b]$ $\sum u'_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$ и $\sum u_n(c)$ сходится.

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится к непрерывной дифференцируемной функции и $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$

Доказательство.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^n u_k \Rightarrow S'_n = \sum\limits_{k=1}^n u'_k$

По условию $\sum\limits_{k=1}^n u'_k \rightrightarrows g$ и $S_n(c) \to A$.

И тогда по прошлой теореме

$S_n \rightrightarrows S, S \in C^1[a,b]$ и $S' = g \Rightarrow (\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$. □

Пример.

Равномерная сходимость ряда производной важна:

$\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2}$ – равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

$(\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2})' \overset{?}{=} \sum\limits_{n=1}^\infty (\frac{\sin nx}{n^2})' = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\cos nx}{n}$ – расходится при $x = 2\pi k$

Т.е. равенства нет.