Билет 45

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 45: Связь между суммами и интегралами. Интегральный признак.

Теорема 0.1.

Если $f : [m, n] \mapsto \mathbb{R}$ монотонна, то $|\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(x)dx| \leqslant \max\{|f(m)|, |f(n)|\}$

Доказательство.

Не умаляя общности $f \geqslant 0$ и монотонно убывает.

Здесь удобно нарисовать убывающий график и изобразить суммы двумя видами столбиков: когда начинаем от m и столбики вылезают над графиком, и когда от $m+1$ столбики под графиком.

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) \geqslant \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \geqslant \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$$

$$\int\limits_{m}^{n} f(x)dx \geqslant \sum_{k=m+1}^{n} f(k) \implies \int\limits_{m}^{n} f(x)dx - \sum_{k=m}^{n} f(k) \geqslant -f(m)$$

$$\int\limits_{m}^{n} f(x)dx - \sum_{k=m}^{n} f(k) = -|\int\limits_{m}^{n} f(x)dx - \sum_{k=m}^{n} f(k)| \geqslant -f(m) \implies$$

$$|\int\limits_{m}^{n} f(x)dx - \sum_{k=m}^{n} f(k)| \leqslant f(m)$$

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) \geqslant \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \implies \sum_{k=m}^{n-1} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \geqslant 0 \implies$$

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \geqslant f(n) \geqslant 0$$

□

Теорема 0.2 (Интегральный признак сходимости)**.**

$f : [1, +\infty) \mapsto \mathbb{R},\ f \geqslant 0$ монотонно убывает.

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ ведут себя одинаково.

Доказательство.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ – сходится $\iff S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ ограничены.

$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ – сходится $\iff F(n) := \int\limits_{1}^{n} f(x)dx$ ограничены.

По предыдущей теореме $|S_n - F(n)| \leqslant f(1)$

□

Пример.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Если $p \leqslant 0$, то $\frac{1}{n^p} \nrightarrow 0 \implies$ ряд расходится.

Если $p > 0$, то $f(x) = \frac{1}{x^p} \geqslant 0$ и монотонно убывает $\implies$ по интегральному признаку

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ и $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ (сходится $\iff p > 1$) ведут себя одинаково.

Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится $\iff p > 1$.

Следствие.

Если $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{c}{n^p}$ при $p > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

(Следует из примера выше и признака сравнения.)

Пример.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \geqslant 0$ и монотонно убывает $\implies$ по интегральному признаку

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ и $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ ведут себя одинаково.

$\int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \int\limits_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{ln2}^{lnb} = \ln \ln b - \ln \ln 2 \xrightarrow[b \to +\infty]{} +\infty$

Значит, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ расходится.