Билет 17

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

***Определение* 0.1.**

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $Y \subset X$.

Тогда пара $\left\langle Y, \rho|_{Y \times Y} \right\rangle$ называется метрическим подпрострацством X.

Далее, при разговое о подпростравах обычно будет указываться только множество, а метрика использоваться та-же что и для основного пространства.

Теорема 0.1.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $\exists G$ открытое в X, такое, что $A = G \cap Y$

Доказательство.

Необходимость ($\implies$):

$$\begin{aligned} A \text{ - открыто в } Y &\implies \forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B^Y_{r_a}(a) \subset A \\ &\implies A = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(A) \subset \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) =: G \end{aligned}$$

G - подходящее множество - оно открыто как объединение открытых, покажем что $A = G \cap Y$:

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y.$$

$$G \cap Y = Y \cap \bigcup_{a \in A} B^X_{r(a)}(a) = \bigcup_{a \in A} B^Y_{r(a)}(a) = A.$$

Достаточность ($\impliedby$):

Пусть $A = G \cap Y$. Возьмём $a \in A$.

$$\begin{aligned} G \text{ открыто в } X &\implies \exists r > 0 \quad B^X_r(a) \subset G \\ &\implies B^X_r(a) \cap Y \subset G \cap Y \\ &\implies B^Y_r(a) \subset A \\ &\implies A \text{ открыто в } Y \end{aligned}$$

$\square$

Теорема 0.2.

Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, Y - его подпространство.

$A \subset Y$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\exists F$ замкнутое в X, такое, что $A = F \cap Y$.

Доказательство.

$F := X \setminus G$, где G - открытое в X такое, что $G \cap Y = Y \setminus A$ существование которого экивалентно открытости $Y \setminus A \iff$ замкнутости A.

$$\begin{aligned} F \cap Y &= (X \setminus G) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \setminus G \\ &= Y \setminus G \\ &= Y \setminus (G \cap Y) \\ &= Y \setminus (Y \setminus A) \\ &= A \end{aligned}$$

$\square$