

# Билет 49

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1 Билет 49: Теорема Римана. . . . .	1
---------------------------------------	---

## 0.1. Билет 49: Теорема Римана.

### Теорема 0.1 (Римана).

$a_n \in \mathbb{R}$   $\sum a_n$  условно сходится.

Тогда для любого  $S \in \overline{\mathbb{R}}$  существует перестановка  $\varphi$ , т.ч.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$ . Также существует перестановка  $\varphi$ , для которой ряд не имеет суммы.

### Доказательство.

$\sum b_n$  и  $\sum c_n$  – ряды  $\sum (a_n)_{\pm}$ , из которых выкинули все нули.

$\sum b_n$  и  $\sum c_n$  – расходятся (т.к. есть условная сходимость), Более того,  $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$ . При этом  $\lim b_n = \lim c_n = 0$  (необходимое условие сходимости для ряда  $\sum a_n$ ).

Пункты а), б), в) доказываются аналогично. Наверное, можно на экзамене расписать только пункт а), а про остальные сказать, что аналогично. Здесь на всякий случай расписаны все три пункта.

- а) Пусть  $S \in \mathbb{R}$ . Будем набирать частичную сумму так, чтобы она поочередно превышала  $S$  и наоборот была меньше  $S$ . Мы можем это сделать, т.к.  $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$ .

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1} \leq S < b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} < S \leq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1-1}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1} \leq S < b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2} < S \leq \\ \leq b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2-1}$$

И так далее.

$|\text{частичная сумма} - S| \leq |\text{последнего взятого элемента}| \rightarrow 0$ . Значит частичная сумма построенного ряда  $\rightarrow S$ .

- б) Пусть  $S = +\infty$ . Мы знаем, что  $\sum b_n = +\infty$ . Поэтому мы можем нашу перестановку получить следующим образом:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} > 1 \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1} \text{ (раз } \sum b_n = +\infty, \text{ то в какой-то момент сумма превысит 1)}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 \text{ (добавили элемент из ряда } c_n)$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} > 2 \geq b_1 + \dots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1}$$

И так далее.

- в) Пусть мы хотим получить перестановку  $\varphi$ , для которой ряд не имеет суммы. Будем набирать суммы так, чтобы она то была больше 1, то меньше -1. Это опять же можно сделать, т.к.  $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$ .

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1-1} \leq 1 < b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1}$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} < -1 \leq b_1 + b_2 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1-1}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2-1} \leq 1 < b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2}$$

$$b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2} < -1 \leq \\ \leq b_1 + \dots + b_{n_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + b_{n_1+1} + \dots + b_{n_2} - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2-1}$$

И так далее.

□