Билет 70

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

Теорема 0.1 (единственность разложения функции в степенной ряд)**.**
Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ при $|z-z_0| < R$ – радиус сходимости.

Тогда ряд раскладывается единственным образом, причем коэффициенты в этом ряду будут выглядеть так: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство.
По предыдущей теореме:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m}$$

Подставим $z = z_0$. Тогда все слагаемые кроме первого занулятся и получим:

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1)\dots 1 \cdot a_m = m!a_m$$

. Отсюда $a_m = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

***Определение* 0.1.**
Ряд Тейлора функции f в точке z_0 называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

***Определение* 0.2.**
Функция называется **аналитической** в точке z_0, если она является суммой своего ряда Тейлора для точки z_0 в окрестности точки z_0.

Ряд Тейлора мы можем писать только, если функция бесконечно дифферинцируема. Но бывают бесконечно дифференцируемые функции, которые не являются аналитическими, например:

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим точки $x \neq 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$$

Идем по индукции ($n \to n+1$), проверяем есть ли формула для разных производных:

База: Для f: $f = P_0 e^{-1/x^2}$, то есть $P_0 \equiv 1$

Переход:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2})' =$$

$$= P_n(x)x^{-3n}e^{-1/x^2}\frac{1}{x^3} + P_n'(x)x^{-3n}e^{-1/x^2} + P_n(x)(-3n)x^{-3n-1}e^{-1/x^2} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3n+3}}P_{n+1}(x)$$

Найдем $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$ Докажем по индукции ($n-1 \to n$), что $f^{(n)}(0) = 0$.

Переход:

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} \underset{y=1/x}{=} \lim_{y\to\infty} e^{-y^2} y^{3n+1} P_n\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$P_n\left(\frac{1}{y}\right) \xrightarrow[y\to\infty]{} P_n(0)$ – константа

$e^{-y^2} y^{3n+1} \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$, так как e^{-y^2} убывает быстрее.

Значит ряд Тейлора равен 0, но функция не 0 в точках $x \neq 0$. Значит функция не аналитическая.