

Билет 41

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 41: Критерий Коши. Абсолютная сходимость. Группировка членов ряда.	
	Свойства	1

0.1. Билет 41: Критерий Коши. Абсолютная сходимость. Группировка членов ряда. Свойства

Теорема 0.1 (Критерий Коши).

X – полное нормированное пространство.

$$\sum a_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > n > N \quad \left\| \sum_{k=n}^m a_k \right\| < \varepsilon$$

Доказательство.

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum a_n - \text{сходится} \iff \exists \text{ конечный } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\iff (\text{полнота } X) \ S_n - \text{фундаментальная последовательность}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n > N \quad \|S_m - S_n\| < \varepsilon$$

$$\|S_m - S_{n-1}\| = \left\| \sum_{k=n}^m a_k \right\|$$

□

Определение 0.1 (Абсолютная сходимость).

$x_n \in X$ – нормированное пространство

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – абсолютно сходится, если $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ – сходится

Теорема 0.2.

X – полное нормированное пространство

Если $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ – абсолютно сходится, то

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \text{сходится}$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| - \text{сходится} \implies (\text{Критерий Коши для } \|x_n\|) \quad \forall \varepsilon \quad \exists N \quad m, n \geq N \quad \sum_{k=n}^m \|x_k\| < \varepsilon$$

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^m \|x_k\| \geq \left\| \sum_{k=n}^m x_k \right\|$$

$$\implies \forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n, m \geq N \quad \left\| \sum_{k=n}^m x_k \right\| < \varepsilon$$

$$\implies (\text{Критерий Коши для } x_n) \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \text{сходится}$$

□

$$2. \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$$

Доказательство.

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n \|x_k\| \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$$

□

Определение 0.2 (Группировка членов ряда).

$$(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + x_5) + x_6 + (x_7 + x_8) + \dots$$

Замечание.

1. Если исходный ряд сходиллся, то ряд получившийся после группировки сходится к той же сумме.
2. В обратную сторону верно не всегда

Пример. $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$

Теорема 0.3 (Когда верно в обратную сторону).

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

1. Если $\lim x_n = 0$ и количество слагаемых в каждой группе $\leq M$

Доказательство.

S_{n_k} – подпоследовательность частичных сумм $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} = S$

(группировка – всего лишь выбор подпоследовательности частичных сумм)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n_k}) + (x_{n_k+1} + \dots + x_{n_k+r} + \dots$$

$$\|S_{n_k+r} - S\| = \|S_{n_k} - S + x_{n_k+1} + \dots + x_{n_k+r}\| \leq$$

$$\leq \|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \dots + \|x_{n_k+r}\|$$

Выберем K , т.ч. если $k \geq K$, то $\|S_{n_k} - S\| < \varepsilon$

Выберем N , т.ч. если $n \geq N$, то $\|x_n\| < \varepsilon$

Если выполняется и то, и то, тогда:

$$\|S_{n_k} - S\| + \|x_{n_k+1}\| + \dots + \|x_{n_k+r}\| < \varepsilon(M + 1)$$

Значит $\forall \varepsilon > 0$ мы можем выбрать N_1 , т.ч. $\forall n \geq N_1 \quad \|S_n - S\| < \varepsilon$

□

2. Для числовых рядов. Если все члены ряда в группе одного знака.

Доказательство.

$$S_{n_k} \rightarrow S$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall k \geq K \quad |S_{n_k} - S| < \varepsilon$$

$$N := n_K$$

если $n \geq N$:

для некоторого k : $n_k \leq n < n_{k+1}$

$$S_n = S_{n_k} + x_{n_k+1} + x_{n_k+2} + \dots + x_n$$

если в группе все члены ≥ 0 , то $S_n \geq S_{n_k}$

$$S_n = S_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}} - x_{n_{k+1}-1} - \dots - x_{n+1}$$

$$S_{n_{k+1}} \geq S_n$$

Тогда $|S_n - S| < \varepsilon$

Если в группе отрицательные члены

$$S_{n_k} \geq S_n \geq S_{n_{k+1}}$$

Тогда в этом случае тот же вывод

$$|S_n - S| < \varepsilon$$

□