# Билет 20

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

## Содержание

## 0.1. Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

**Теорема 0.1.**

Пусть $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ - нормированное пространство, $x_n, y_n, a, b \in X$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, $\lambda_n \to \lambda$.

Тогда:

$$\|x_n - a\| \to 0.$$
$$\|y_n - b\| \to 0.$$

1. $x_n + y_n \to a + b$

   **Доказательство**.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|(x_n + y_n) - (a+b)\| \\ &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\overset{\triangle}{\leqslant} \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \\ &\to 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$ □

2. $\lambda_n x_n \to \lambda a$

   **Доказательство**.

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n (x_n - a) + (\lambda_n - \lambda) a\| \\ &\leqslant \|\lambda_n (x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda) a\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n - a\| + |(\lambda_n - \lambda)| \|a\| \\ &\to |\lambda| \cdot 0 + 0 \cdot \|a\| = 0 \end{aligned}$$ □

3. $x_n - y_n \to a - b$

   **Доказательство**.
   $-y_n = -1 \cdot y_n \implies -1 \cdot b = -b$, $x_n + (-y_n) \to a + (-b) = a - b$. □

4. $\|x_n\| \to \|a\|$

   **Доказательство**.

$$0 \leqslant |\|x\| - \|a\|| \leqslant \|x - a\| \to 0.$$ □

5. Если задано скалярное произведение и $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, то $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle a, b\rangle$.

**Доказательство**.
Заметим следующий факт:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\langle x+y,x+y\rangle-\langle x-y,x-y\rangle\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle-(\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle)\right)\\ &= \frac{1}{4}\cdot 4\langle x,y\rangle\\ &= \langle x,y\rangle\end{aligned}$$

Теперь:

$$\begin{aligned}\langle x_n,y_n\rangle-\langle a,b\rangle &= \langle x_n,y_n\rangle-\langle x_n,b\rangle+\langle x_n,b\rangle-\langle a,b\rangle\\ &= \langle x_n,y_n-b\rangle-\langle x_n-a,y_n\rangle\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x_n+y_n-b\|^2-\|x_n-y_n+b\|^2-\|x_n-a+y_n\|^2+\|x_n-a-y_n\|^2\right)\\ &\to \frac{1}{4}\left(\|a\|^2-\|a\|^2-\|b\|^2+\|b\|^2\right)=0\end{aligned}$$

□

***Определение* 0.1.**
Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$, $x_n = (x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(d)})$.

Тогда $x_n$ покоординатно сходится к $x_0$, если

$$\forall k \in [1,d] \quad \lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}.$$

**Теорема 0.2.**
В $\mathbb{R}^d$ с евклидовой нормой сходимость по норме эквивалентна координатной.

**Доказательство**.
Необходимость (норма $\implies$ коорд):

$$\forall k \in [1,d] \quad 0 \leqslant (x_n^{(k)}-x_0^{(k)})^2 \leqslant \sum_{j=1}^{d}(x_n^{(j)}-x_0^{(j)})^2 = \|x_n-x_0\|^2 \to 0.$$

Достаточноость (коорд $\implies$ норма)

$$0 \leqslant \|x-x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{d}(x_n^{(k)}-x_0^{(k)}) \to 0.$$

□