Билет 75

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 75: Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента

***Определение* 0.1** (Направление)**.**
Это такой вектор, единичной длины, который смотрит в нужную нам сторону.

***Определение* 0.2** (Производная по направлению)**.**
Имеем направление h. Также есть внутренняя точка a, то есть $a \in \mathrm{Int}E$. И сама функция $f : E \mapsto \mathbb{R}$. Напомню, что $E \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда следующая штука, это производная функции f по направлению h в точке a:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t}$$

Теорема 0.1 (Вспомогательная теорема)**.**
Имеем направление h, $f : E \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{Int}E$ и f дифференцируема в точке a.

Тогда выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = d_a f(h) = \langle \nabla f, h \rangle$$

Доказательство.
Воспользуемся определением дифференцируемости функции f:

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + T(t \cdot h) + \alpha(t \cdot h)$$

Воспользуемся линейностью и получим:

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + t \cdot Th + \alpha(t \cdot h) \implies$$
$$\implies f(a + t \cdot h) - f(a) = t \cdot Th + \alpha(t \cdot h)$$

Теперь распишем производную по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot h) - f(a)}{t}$$

Благодаря прошлым замечанием, можем заменить числитель:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot Th + \alpha(t \cdot h)}{t} = \lim_{t \to 0}(Th + \frac{\alpha(t \cdot h)}{t})$$

Заметим, что Th какая-то константа, поэтому можно вынести:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Th + \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t \cdot h)}{t}$$

Заметим, что $\|t \cdot h\| = t \cdot \|h\| = t$: норма направления равна единице. Следовательно $\lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t \cdot h)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t \cdot h)}{\|t \cdot h\|} = 0$: по определению α.
Получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = Th$$

Осталось вспомнить, что $Th = d_a f(h)$, просто альтернативная запись. Следовательно, первое равенство у нас есть.

Разберёмся со вторым. Но тут совсем всё просто, так как перед нами определение градиента. ()

$\square$

Следствие Экстремальное свойство градиента.

Имеем направление h, $f : E \mapsto \mathbb{R}$, функция f дифференцируема в точке a и $\nabla f(a) \neq 0$.

Тогда для любого направления h выполнено следующее:

$$-\|\nabla f(a)\| \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \|\nabla f(a)\|$$

А равенство достигается, когда $h = \pm\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

Смысл следствия. Оно объясняет физический смысл градиента. Градиент это вектор, в направлении которого функция меняется быстрее всего.

Доказательство.

Напишем равенство, которое мы вывели в прошлой теореме:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \nabla f, h \rangle \implies |\frac{\partial f}{\partial h}(a)| = |\langle \nabla f, h \rangle|$$

Напишем неравенство Коши-Буняковского.

$$|\langle \nabla f, h \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\| = \|\nabla f(a)\| \implies |\frac{\partial f}{\partial h}(a)| \leq \|\nabla f(a)\|$$

То есть неравенство мы уже доказали.

Далее осталось вспомнить, когда в неравенстве Коши-Буняковского, получается равенство. Это происходит тогда и только тогда, когда вектора являются пропорциональными. Осталось вспомнить, что норма h должна быть строго равна единице. Следовательно у нас есть два возможных выбора для h:

$$h = \pm\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

$\square$