Билет 85

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 85: ! Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Частные случаи.

Теорема 0.1.

$D \in R^n$, D - открытое множество. $f \in C^{r+1}(D)$ (функция f $r+1$ раз непр. дифференцируема на данном множестве), $[a, x] \in D$.

Тогда $\exists\ \theta \in (0, 1) : f(x) = \sum\limits_{|k| \le r} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \sum\limits_{|k|=r+1} \dfrac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!}(x-a)^k$

Доказательство.

$F(t) := f(a + th)$, где $h = x - a$. $F \subset C^{r+1}[0, 1]$.

Запишем одномерную формулу Тейлора для F в нуле.

$F(t) = \sum\limits_{l=0}^{r} \dfrac{F^{(l)}(0)}{l!} t^l + \dfrac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} t^{r+1}$.

Теперь, исходя из леммы из предыдущего билета, подставим все производные F.

Получается: $F(t) = \sum\limits_{l=0}^{r} \dfrac{1}{l!} \sum\limits_{|k|=l} \binom{l}{k_1,k_2,...,k_n} f^{(k)}(a) h^k t^l + \dfrac{1}{(r+1)!} \sum\limits_{|k|=r+1} \binom{r+1}{k_1,k_2,...,k_n} f^{(k)}(a+\theta h) h^k t^{r+1}$.

Осталось сделать небольшие преобразования.

Заметим, что $\binom{l}{k_1,k_2,...,k_n} = \dfrac{l!}{k!}$, $\binom{r+1}{k_1,k_2,...,k_n} = \dfrac{(r+1)!}{k!}$, где k - факториал мультииндекса.

Вспомним, что нас интересует значение функции f в точке x, это значит, что нас интересует значение F в точке 1.

Итого: $f(x) = F(1) = \sum\limits_{l=0}^{r} \sum\limits_{|k|=l} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \sum\limits_{|k|=r+1} \dfrac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!} h^k$.

А это и есть нужная нам формула, так как такая сумма $\sum\limits_{l=0}^{r} \sum\limits_{|k|=l} ... = \sum\limits_{|k| \le r} ...$, а это сумма по всем мультииндексам высоты $\le r$. Все свернулось в обещанную формулу. $\square$

Пример.

Многочлен Тейлора степени r - "кусок формулы, который не остаток".
Выглядит он так:

$$\sum_{|k| \le r} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Пример.

Пусть $r = 0$.
Получим аналог теоремы Лагранжа для функции от n переменных.

$f(x) = f(a) + \sum\limits_{|k|=1} \dfrac{f^{(k)}(a+\theta(x-a))}{k!} h^k$, где $h = x - a$.

Мультииндекс высоты 1 - это одна единица и остальные нули. Значит, все $k!$ под суммой $=$ 1.
Производная по такому мультииндексу (пусть единица стоит на $i-$том месте) - это производная по $i-$той координате.
Потом мы умножаем на h^k, все координаты кроме $i-$той обнулятся, поэтому просто умножаем на h_i.

Получаем такую запись: $f(x) = f(a) + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\delta f}{\delta x_i}(a + \theta(x-a)) h_i$

А это скалярное произведение градиента f, посчитанного в точке $(a+\theta(x-a))$ и вектора h. Итого получаем $f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a+\theta(x-a)), x-a \rangle$.

Пример.

Пусть $n = 2$.

Поймем, как будут выглядеть производные по мультииндексу, посчитанному в точке a. Мультииндекс для $n = 2$ будет равен $k = (i, j)$. Производная в точке $a = f^{(k)} = \dfrac{\delta^{i+j} f}{\delta^i x \delta^j y}$. Подставим это в формулу.

$f(x,y) = f(a,b) + \dfrac{\delta f}{\delta x}(a,b)(x-a) + \dfrac{\delta f}{\delta y}(a,b)(y-b) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a,b)(x-a)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2 f}{\delta y^2}(a,b)(y-b)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2 f}{\delta x \delta^2 y}(a,b)(x-a)(y-b) + \ldots.$

Расшифровка: к значению в фиксированной точке добавляем сумму по всем мультииндексам высоты 1 - это производная по x и по y в точке (a, b). Далее добавляем вторые производные, производную по x и y и так далее.

Запишем производную $l-$того порядка.

$\ldots + \dfrac{1}{l!}\sum\limits_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \dfrac{\delta^l f}{\delta x^i \delta y^{l-i}}(a,b)(x-a)^i(y-b)^{l-i} + \ldots$

Данная формула даже при $n = 2$ имеет довольно много слагаемых, поэтому обычно ее используют при маленьких r, т.к. за счёт этого получается мало слагаемых.