Билет 61

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 61: Признак Абеля

Утверждение 0.1 (Признак Абеля)**.**

$$\begin{cases} \sum a_n(x) & \text{равномерно сходится} \\ |b_n(x)| \le K & \forall n, \forall x \\ b_n(x) & \text{монотонны по } n \text{ при фиксированном } x \end{cases} \implies \sum a_n b_n - \text{равномерно сходится}$$

Доказательство.

здесь все ряды - **функциональные, просто писать каждый раз x не хочется**

Заметим, что по критерию Коши для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ -

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in E \quad \forall n \geqslant N \quad |A_{n+p} - A_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

Проверяем условие критерия Коши.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k} \text{ - переносим } n \text{ из предела в индексы} \\
&= (A_{n+p} - A_n) b_{n+p} + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n) \cdot (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \text{ - преобразование Абеля} \\
&\leqslant \varepsilon K + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n) \cdot (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \text{ - оценили через замечание и } |b_n| \leqslant K \\
&\leqslant \varepsilon K + \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k} - A_n| \cdot |b_{n+k} - b_{n+k+1}| \text{ - поменяли всё на модули, сумма не уменьшилась} \\
&\leqslant \varepsilon K + \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k} - b_{n+k+1}| \text{ - оценили через замечание} \\
&= \varepsilon K + \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{p-1} b_{n+k} - b_{n+k+1} \right| \text{ - по монотонности } b \\
&= \varepsilon K + \varepsilon |b_{n+1} - b_{n+p}| \\
&\leqslant \varepsilon K + \varepsilon |b_{n+1}| + \varepsilon |b_{n+p}| \\
&\leqslant 3\varepsilon K \to 0
\end{aligned}$$

Критерий Коши выполняется $\implies$ ряд равномерно сходится.

$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}$ - заменили пределы суммы, перекинув n в индексы.
$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k} = (A_{n+p} - A_n) b_{n+p} + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n) \cdot (b_{n+k} - b_{n+k+1})$ - применили преобразование Абеля
$|A_{n+p} - A_n||b_{n+p}| \le K|A_{n+p} - A_n| = K|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon K, \forall x \in E, \forall n \ge N$ - критерий Коши для $\sum a_n$
$\sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n)(b_{n+k} - b_{n+k+1}) \le \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k} - A_n||b_{n+k} - b_{n+k+1}| < \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k} - b_{n+k+1}|$ - т.к. первый модуль меньше ε при $n \ge N$
$\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k} - b_{n+k+1}| = \varepsilon |\sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1})| = \varepsilon |b_{n+1} - b_{n+p}| \le \varepsilon (|b_{n+1}| + |b_{n+p}|) \le 2K\varepsilon$
Условие критерия Коши выполняется, значит наш ряд равномерно сходится. ☐