Билет 81

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 81: Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство

***Определение* 0.1.**

$f : E \to \mathbb{R}^m \;\; E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \operatorname{Int} E$

f – непрерывно дифференцируема в точке a, если

f дифференцируема в окрестности точки a и

$d_x f$ непрерывна в точке a ($\|d_x f - d_a f\| \to 0$ при $x \to a$)

Теорема 0.1.

f – непрерывно дифференцируема в точке $a \iff$

все частные производные f существуют в окрестности точки a и непрерывны в точке a.

Доказательство.

"$\Longrightarrow$" Разложим f на координатные функции, рассмотрим одну из них - f_k. Продифференцируем её по какому-то x_j. Рассмотрим модуль разности значений в точках x и a:

$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right|$

для доказательства оценим эту разность сверху чем-то стремящимся к 0.

Так как $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \langle d_x f(e_j), e_k \rangle$, то

$\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right| = |\langle d_x f(e_j) - d_a f(e_j), e_k \rangle| \leqslant \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \, \|e_k\| =$

$= \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \leqslant \|d_x f - d_a f\| \, \|e_j\| = \|d_x f - d_a f\| \to 0$

"$\Longleftarrow$"

Рассмотрим $\|d_x f - d_a f\|^2$

Воспользуемся ранее доказаной теоремой, что квадрат нормы матрицы не превосходит суммы квадратов её коэффициентов:

$\|d_x f - d_a f\|^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} (\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a))^2 \to 0$, так как

из $x \to a$ и непрерывности частных производных следует, что каждое слагаемое стремится к 0, их конечное кол-во, значит, и сумма стремится к 0, поэтому $\|d_x f - d_a f\|^2 \to 0$, а тогда и $\|d_x f - d_a f\| \to 0$ $\square$