Билет 26

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 26: ε-сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

***Определение* 0.1.**

X - метрическое пространство, $A \subset X$. Тогда E - *ε-сеть множества* A если $\forall a \in A \quad \exists e \in E : \rho(a, e) < \varepsilon$.

Также можно переписать в виде: E - ε-сеть множества A если $A \subset \bigcup\limits_{e \in E} B_\varepsilon(e)$.

Менее формально E - ε-приближение множества A.

***Определение* 0.2.**

Множество A называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ **конечная** ε-сеть множества A.

***Определение* 0.3.**

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^d$.

Замкнутый параллелепипед: $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед: $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_d, b_d)$.

Свойства.

1. Из вполне ограниченности следует ограниченность.

   = 1 + (!)

   Доказательство.
   Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_1(e_i) \subset B_R(e_1)$, где $R = 1 + \max\{\rho(e_1, e_2), \rho(e_1, e_3), \ldots, \rho(e_1, e_n)\}$. □

2. В $\mathbb{R}^d$ из ограниченоости следует вполне ограниченность.

   Доказательство.
   Любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ можно впихнуть ограниченный параллелепипед. Возьемем $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$. Разделим параллелелипипед на кубики со стороной δ. А каждый такой кубик покрывается шариком радиуса ε, так как наибольшее расстояние в таком кубике равно $\sqrt{d}\delta$. Получили конечную ε-сеть. □

Теорема 0.1 (Хаусдорфа)**.**

1. Компакт вполне ограничен
2. Если X - полное метрическое пространство и $K \subset X$, из замкнутости и вполне ограниченности следует компактность.

Доказательство.

1. $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B_\varepsilon(x)$ - открытое покрытие. Можем выбрать конечное покрытие, в таком случае центры шариков из конечного поркытия будут образовывать конечную ε-сеть.

2. Проверим секвенциальную компактность. Пусть $\{x_n\} \in K$. Надо доказать, что из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой лежит в K.

   Рассмотрим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Так как K вполне ограниченно возьмем $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_1}(e_i)$. Так как шариков коненчное число, то в каком-то из них содержится бесконечное кол-во x_i из $\{x_n\}$. Пусть это шарик $B_{\varepsilon_1}(e_l) = V_1$.

   $V_1 \cap K$ - вполне ограничено, значит можно опять покрыть конечным числом шариков : $V_1 \cap K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_{\varepsilon_2}(e_i)$. Также существует $B_{\varepsilon_2}(e_k) = V_2$, который содержит бесконенчное число элементов.

   Так сделаем для каждого ε_i.

   Выпишем таблицу, где в i- ой строке стоят элементы из V_i. Пусть a_{ij} - элемент таблицы. Тогда рассмотрим элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, \ldots$. Эти точки образуют подпоследовательность $\{x_n\}$. Покажем, что это фундаментальная последовательность.

   Для этого рассмотрим $\rho(a_{kk}, a_{nn}), k < n$. По построению таблицы элемент a_{nn} также лежит в шарике, который был взят на k-ом шагу. Значит $\rho(a_{kk}, a_{nn}) < 2\varepsilon_k = \frac{2}{k}$. Значит данная последовательность фундаментальна $\Longrightarrow$ имеет предел и так как K - замкнуто, данный предел $\in K$. Значит K - секвенциально компактно, а значит и просто компактно.

□

Замечание.

Если бы K было не замкнуто, то предел мог бы не лежать в K, поэтому не было бы секвенциальной компактности.

Теорема 0.2 (о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$)**.**

В $\mathbb{R}^d$ компактность тоже самое, что и замкнутость и ограниченность.

Доказательство.

- Из компактности замкнутость и ограниченность. Компактное множество - замкнуто и по теореме Хаусдорфа из компактности следует вполне ограниченность, а из вполне ограниченности следует ограниченность.

- Из ограниченности в $\mathbb{R}^d$ следует вполне ограниченность, а так как $\mathbb{R}^d$ - полно, то по теореме Хаусдофра следует, что замкнутое, вполне ограниченное множество - компактно.

□

Теорема 0.3 (Больцано-Вейерштрасса)**.**

Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

$\{x_n\}$ ограничено $\Longrightarrow$ $\{x_n\} \subset B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$ - замкнуто и ограничено $\Longrightarrow$ компакт $\Longrightarrow$ секвенциально компактно $\Longrightarrow$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. □