Билет 43

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 43: Признак Коши (с $\overline{\lim}$). Примеры.

Теорема 0.1 (признак Коши).
$a_n \geqslant 0$

1. Если $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ начиная с некоторого места, то ряд расходится
2. Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ начиная с некоторого места, то ряд сходится
3. $q' := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$

   Если $q' < 1$ сходится, то и ряд сходится.

   Если $q' > 1$ расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.
Судя по формулировке билета, первые два пункта доказывать не нужно, но доказательство у них быстрое, так что пусть тоже будет.

1. $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \implies a_n \geqslant 1 \implies a_n \not\to 0$, не выполняется необходимое условие. ‘
2. $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \implies a_n \leqslant q^n$

   Воспользуемся признаком сравнения с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$. Это сумма геометрической прогрессии, знаменатель которой меньше 1, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
3. (a) $\overline{\lim} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q' > 1 \implies$ найдется подпоследовательность a_{n_k}, такая что $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = q' > 1$

   $\implies$ найдется такая окрестность, что при достаточно больших k все $a_{n_k} \in (1, \dots)$ (важно, что промежуток точно больше 1)

   $\implies a_{n_k} > 1$

   $\implies a_n \not\to 0$, ряд расходится

   (b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q' < 1$

   $\implies$ (по определению верхнего предела) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} = q' < 1$

   $\implies$ можно выбрать окрестность $(\dots, \frac{q'+1}{2}) \subset (\dots, 1)$, такую что начиная с некоторого момента все $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k}$ попадают в эту окрестность, то есть $\sup\limits_{k\geqslant n} \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$

   $\implies \sqrt[k]{a_k} < \frac{q'+1}{2} < 1$ при достаточно больших k, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по доказанному в пункте 2.

□

Пример.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при $x > 0$

$\sqrt[n]{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}}$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \sim \frac{x}{\sqrt[n]{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} \sim \frac{x}{\frac{n}{e}} = \frac{xe}{n} \to 0$

$\implies$ ряд сходится

Замечание.

Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд может как сходиться, так и расходиться.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится

   $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится

   $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n+1}} = 1$