

# Билет 101

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 101: Производство полуколец, Параллелепипеды и ячейки. Связь между ними. . . . .	1
-----	--	---

## 0.1. Билет 101: Произведение полуколец. Параллелепипеды и ячейки. Связь между ними.

### Определение 0.1.

Декартово произведение полуколец.

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  – полукольца подмножеств  $X$  и  $Y$  соответственно.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$  – семейство подмножеств  $X \times Y$ .

### Теорема 0.1.

Декартово произведение полуколец – полукольцо.

### Доказательство.

(скорее махание руками, чем доказательство)

Нужно проверить свойства полукольца.

$$1. \emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$$

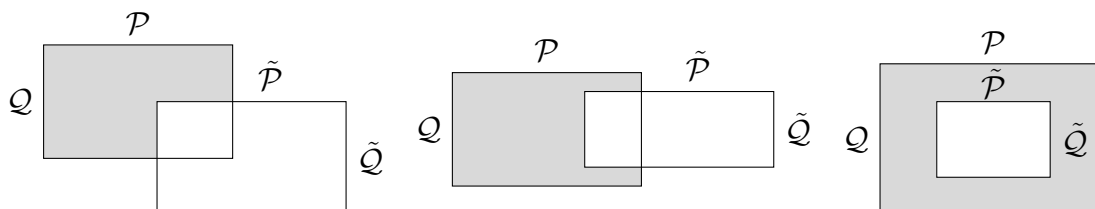
$$2. (P \times Q) \cap (\tilde{P} \times \tilde{Q}) = (P \cap \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$$

Пересечение декартовых произведение – декартово произведение пересечений. Можно посмотреть на картинки ниже и понять.

+/- формально:  $(a, b) \in (P \times Q) \iff a \in P, b \in Q$ , аналогично  $(a, b) \in (\tilde{P} \times \tilde{Q}) \iff a \in \tilde{P}, b \in \tilde{Q}$ .

Тогда  $a \in (P \times Q) \cap (\tilde{P} \times \tilde{Q}) \iff (a \in P \text{ и } a \in \tilde{P}), \text{ и } (b \in Q \text{ и } b \in \tilde{Q}) \iff (a, b) \in (P \cap \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$

3. Рисуем картинки. Это два прямоугольника, один вычитаем из другого. Нужно понять, что разность представляется в виде объединения прямоугольников.



Порисовав картинки, понимаем, что:

$$(P \times Q) \setminus (\tilde{P} \times \tilde{Q}) = P \times (Q \setminus \tilde{Q}) \sqcup (P \setminus \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$$

А это лежит в  $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ : оба дизъюнктных множества выше можно разбить на дизъюнктные объединения, ведь каждое из них является декартовым произведением множеств из полукольца или дополнением. Дополнения разбиваются по 3 свойству полукольца.

**Замечание.** На нашей лекции Храбров неправильно выписал формулу выше.

□

### Определение 0.2.

$\mathbb{R}^n$

Замкнутый параллелепипед –  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] =: [a, b]$

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

Открытый параллелепипед –  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) =: (a, b)$

Ячейка –  $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n) =: [a, b)$

Обозначения.

$\mathcal{P}^n$  – множество всех ячеек из  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^n$  – множество всех ячеек из  $\mathbb{R}^n$  с рациональными координатами вершин.

### Теорема 0.2.

Непустая ячейка представима в виде пересечения счетного множества открытых параллелепипедов и представима в виде счетного объединения замкнутых.

### Доказательство.

$$[a, b) = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$$

$$C_k := (a_1 - \frac{1}{k}, b_1) \times \dots \times (a_n - \frac{1}{k}, b_n)$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = [a, b):$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \supset [a, b), \text{ так как } C_k \supset [a, b) \forall k$$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \subset [a, b)$ , так как если  $\exists x \in C_k, x \notin [a, b)$ , то начиная с некоторого номера  $x \notin \bigcap_{k=1}^n C_k$ , так как они сужаются

$$D_k := [a_1, b_1 - \frac{1}{k}] \times \dots \times [a_n, b_n - \frac{1}{k}]$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = [a, b)$$

Доказательство аналогично:  $\subset$  очевиден, а  $\supset$  т.к. начиная с некоторого номера каждая точка попадёт в объединение □