Билет 66

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 66: ! Степенные ряды. Теорема о сходимости ряда при меньших аргументах. Радиус и круг сходимости. Формула Коши–Адамара. Примеры.

***Определение* 0.1.**

Степенной ряд с центром в z_0:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \;\; a_n, z_0, z \in \mathbb{C}$

Мы всегда можем выбрать точку $w := z - z_0$, тогда у нас всегда центр будет в точке 0.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w^n$

Теорема 0.1.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится при $z = z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится и при всех $|z| < |z_0|$.

Доказательство.

$\sum a_n z_0^n$ сходится $\Rightarrow a_n z_0^n \to 0$, значит $|a_n z_0^n| \leqslant M \forall n$.

$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n (\frac{z}{z_0})^n\right| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ – этот ряд абсолютно сходится, т.к. это геометрическая прогрессия.

□

Следствие.

$\sum a_n z^n$ расходится при $z = z_0$, то он расходится и при $|z| > |z_0|$

Доказательство.

От противного. Допустим он сходится в $|z| > |z_0|$, тогда он сходится и в z_0. □

***Определение* 0.2.**

Радиус сходимости степенного ряда – такое число $R \in [0, +\infty]$, что при $|z| < R$ ряд сходится, а при $|z| > R$ ряд рассходится. (для рядов с центром в точке 0, иначе $|z - z_0| < R$ сходится и $|z - z_0| > R$ расходится).

***Определение* 0.3.**

Круг сходимости – круг радиуса R с центром в точке z_0, где R – радиус сходимости.

Лемма.

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in (0, +\infty)$

Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$

Доказательство.

$A := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \;\; B := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \;\; C := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n y_n$

Надо доказать, что $AB = C$

"$\leqslant$"

B – верхний предел $\Rightarrow \exists n_1, n_2, ...,$ т.ч. $y_{n_k} \to B$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = AB$

AB – частичный предел $x_n y_n$

C – верхний предел = наибольший из частичных

$AB \leqslant C$

"$\geqslant$"

C – верхний предел.

$\Rightarrow \exists n_1, n_2, \ldots \quad x_{n_k} y_{n_k} \to C$

$C = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k} \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} y_{n_k}}{\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$

$\frac{C}{A}$ – частичный предел для y_n

B – верхний предел = наибольший из частичных.

$\frac{C}{A} \leqslant B$ □

Замечание.

$\overline{\lim}\, x_n y_n \neq \overline{\lim}\, x_n \,\overline{\lim}\, y_n$

$x_n = \begin{cases} 0 & n \text{ – четно} \\ 1 & n \text{ – нечетно} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} 1 & n \text{ – четно} \\ 0 & n \text{ – нечетно} \end{cases}$

$x_n y_n \equiv 0$

$\overline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, y_n = 1$

Теорема 0.2 (Формула Коши-Адамара).

Всякий степенной ряд имеет радиус сходимости и он выражается формулой $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Доказательство.

Применим признак Коши к ряду.

$K := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z|$

Если $K < 1$, то ряд абсолютно сходится $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < R$.

Если $K > 1$, то члены ряда не стремятся к 0 $\Rightarrow$ ряд расходится $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| > 1 \Leftrightarrow |z| > R$.

□

Замечание.

Внутри круга сходимости ряд сходится абсолютно.

Пример.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n \quad R = 0$

   $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{n!} = \lim \sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \lim \frac{n}{e} \to +\infty$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = +\infty$

   $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n!}} = 0$