Билет 19

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

***Определение* 0.1.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $x_n \in X$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

***Определение* 0.2.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $E \subset X$.

E называется ограниченным если $\exists r > 0 \quad \exists a \in X \quad E \subset B_r(a)$.

Свойства.

1. Предел единственнен

   Доказательство.
   Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$.

   Возьмём $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$, $a \neq b \implies \varepsilon > 0$, возьмём $N = \max\{N_a, N_b\}$, где N_a, N_b - N из соответствующих определений предела при подстановке ε.

   Тогда, $\rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $\rho(x_N, b) < \varepsilon$.

   Но тогда $\rho(a,b) \overset{\triangle}{\leqslant} \rho(a, x_N) + \rho(x_N, b) < 2\varepsilon = \rho(a,b)$. Противоречие, значит предел единственненн. □

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$

   Доказательство.
   Определения посимвольно совпадают. □

3. Если последовательность имеет предел, она ограничена

   Доказательство.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = a &\implies \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0\\ &\implies \rho(x_n, a) \text{ - ограниченная последовательность вещественных чисел}\\ &\implies \exists R > 0 \quad \rho(x_n, a) < R\\ &\implies \{x_n\} \subset B_R(a)\end{aligned}$$
□

4. Если a - предельная точка множества A, то можно выбрать последовательность $x_n \in A$, такую что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и $\rho(x_n, a)$ строго монотонно убывает.

   Доказательство.
   По определению предельной точки, $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \neq \varnothing$.

   Пусть $r_1 = 1$, $r_n = \min\{\frac{1}{n}, \rho(x_{n-1}, a)\}$, $x_n \in \mathring{B}_{r_n}(a)$ - такой x_n всегда можно выбрать, так-как окрестность непуста. Тогда $\rho(x_n, a) < r \implies \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \implies \rho(x_n, a) \to 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и при этом $\rho(x_n, a) < r_n < \rho(x_{n-1}, a)$. □

5. $A \subset X$, $x_n \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \implies a \in A \cup A' = \mathrm{Cl}\, A$.

Доказательство.
Если $a \notin A$:

Предположим что $a \notin A' \implies \exists \varepsilon > 0 \quad \mathring{B}_\varepsilon(a) \cap A = \varnothing \implies \nexists x \in A \quad 0 < \rho(x, a) < \varepsilon$.

Но, если подставить этот ε в определение предела, то получим что $\exists N \quad \rho(x_N, a) < \varepsilon$ и $x_N \in A \implies x_N \neq a \implies \rho(x_N, a) > 0$. Противоречие, значит $a \in A'$. $\square$