

Билет 53

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 53: Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$	1
-----	---	---

0.1. Билет 53: Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$

Тут под p_n подразумевается n -ое простое число.

Утверждение 0.1.

Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится

Доказательство.

Для начала проведу некие не совсем формальные рассуждения, далее их формализую. Итак, неформальная часть:

$$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

В начале просто несколько иначе переписал член произведения. Затем заметил, что это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Тогда наше исходное произведение перепи-
сывается в такое произведение сумм:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

«Раскроем» скобки в этом произведении и получим сумму всевозможных произведений выра-
жений вида $\frac{1}{p_n^k}$, а именно:

$$\sum \frac{1}{\prod_k p_k^{\alpha_k}}$$

А с алгебры первого модуля нам известно, что каждое натуральное число единственным образом представляется в виде $\prod_{k=1}^{\infty} p_k^{\alpha_k}$ и при этом единственным образом поэтому наша сумма это в точности это:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Получили гармонический ряд, а он, как известно, расходится. Почему же я написал слово «рас-
кроем» в кавычках? Все потому, что раскрывать бесконечное произведение бесконечных сумм
может быть не совсем законно, как минимум не ясно почему законно, поэтому пришло время
формализовать всё то, что я написал выше:

$$P_n := \prod_{t=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_t^k} \geq \prod_{t=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{p_t^k}$$

Раскроем скобки, получим суммы таких слагаемых $\frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots}$, где все $\alpha_i \leq n$, и все $p_i \leq n$, что
означает, что там точно будут все дроби вида $\frac{1}{i}$, где $i \leq n$ (i - натуральное, если вдруг по каким-
то причинам это неочевидно). Тогда для P_n имеем следующее неравенство (уже имеем все такие
слагаемые, есть еще какие-то сверху, на них забудем):

$$P_n \geq \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}$$

Заметим, что этот ряд расходится, поэтому и произведение из условия расходится. □

Замечание.

$$P_n \geq \ln n + \mathcal{O}(1)$$

Доказательство.

Мы все прекрасно знаем, что гармонический ряд эквивалентен $\ln n + \gamma + o(1)$. Мы уже показали, что наш ряд больше гармонического ряда, а $\gamma + o(1)$ можно записать в виде $\mathcal{O}(1)$ (потому что постоянная Эйлера и $o(1)$ - какое-то ограниченное выражение). \square

Теорема 0.2.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится

Доказательство.

Из расходимости произведения $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ ряд из логарифмов $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1}$ тоже расходится. Посмотрим на один такой логарифм:

$$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{2}{x}$$

Первые два равенства - очевидные, последнее неравенство следует из следующего факта: $\ln(1-t) \geq -2t$ при достаточно маленьких t (не верите - дифференцируйте), поэтому выполняется при достаточно больших x . Значит, первые члены, для которых неравенство не выполняется, можем оценить какой-то константой C (их конечное число), а для остальных по неравенству:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} &\leq C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} - C &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n} \end{aligned}$$

Получилось, что подперли ряд из $\frac{2}{p_i}$ расходящимся рядом, отсюда следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$. \square

Замечание.

На самом деле

$$\ln \frac{x}{x-1} \sim \frac{1}{x}$$

(потому что $-\ln(1-\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$), поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_k}{p_k-1}$$

(теорема Штольца утверждает (гугл в помощь, если что), что если каждое слагаемое (то есть $a_n - a_{n-1}$) эквивалентно, то и суммы (a_n) эквивалентны), то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \sim \ln P_n \geq \ln(\ln n + \mathcal{O}(n)) \geq \ln \ln n + \mathcal{O}(n)$$

Утверждение 0.3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \sim \ln \ln n$$

Доказательство.

Без доказательства. \square