Билет 57

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 57: Равномерный предел непрерывных функций. Теорема Стокса–Зайделя. Пространство $\mathbb{C}(\mathbb{K})$ и его полнота.

Замечание. Момент с лекции: youtu.be
Записи Александра Игоревича с лекции: drive.google

Теорема 0.1.

$f_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

И f_n непрерывна в точке $a \in E$, $f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies f$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

Если a не предельная точка в E, то все функции там непрерывны.

Пусть a – предельная точка множества E.

Тогда надо проверить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$

По определению равномерной сходимости $\exists N\ \forall n > N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$

Зафиксируем $n > N$. Функция f_n непрерывна в точке a.

$\exists \delta > 0\ \forall x \in E\ |x-a| < \delta\ |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}$

Если $|x-a| < \delta$ и $x \in E$, то

$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ □

Следствие (теорема Стокса-Зайделя).

$f_n \in C(E)$ и $f_n \rightrightarrows f$ на E

$\implies f \in C(E)$.

***Определение* 0.1.**

Пусть K – компакт в каком-нибудь метрическом пространстве.

$C(K) := \{f : K \to \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ \text{непрерывные}\}$

$||f||_{C(K)} := \max\limits_{x\in K} |f(x)|$.

(Максимум и супремум в этом случае одно и то же, т.е. уже проверили, что это норма)

Замечание.

$C(K)$ подпространство $l^\infty(K)$.

Теорема 0.2.

Замкнутое подпространство полного пространства – полное.

Доказательство.

$Y \subset X$ Y – замкнуто.

$\implies \{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в Y.

$\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$

$\implies x$ – предельная точка множества Y.

И т.к. Y замкнуто, то $x \in Y$.

$\implies x_n$ сходится к x в пространстве Y. □

Следствие.

$C(K)$ – полное

Доказательство.

Надо доказать, что $C(K)$ замкнуто в $l^\infty(K)$.

Т.е. если $||f_n - f|| \to 0$, где $f_n \in C(K)$, то $f \in C(K)$.

Но это теорема Стокса-Зайделя. $\square$