

Билет 33

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 33: Норма оператора. Простейшие свойства.	1
---	---

0.1. Билет 33: Норма оператора. Простейшие свойства.

Определение 0.1.

Пусть $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle, \langle Y, \|\cdot\|_Y \rangle$ - нормированные пространства, $A : X \mapsto Y$ - линейный оператор.

Зададим норму на пространстве операторов:

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y.$$

Определение 0.2.

Если $\|A\| \neq \infty$ оператор называется ограниченным.

Замечание.

Ограниченный оператор \neq ограниченное отображение.

Ограниченное линейное отображение - только тождественный ноль.

Лемма.

$\|A\|$ - действительно норма.

Доказательство.

$$1. \|A\| = 0 \implies A = 0$$

Доказательство.

$$\|A\| = 0 \implies \forall x \in X \quad \|x\|_X \leq 1 \implies \|Ax\|_Y = 0 \implies Ax = 0.$$

$$\text{Если } x \neq 0, \text{ то } A(x) = A\left(\|x\|_X \cdot \frac{x}{\|x\|_X}\right) = \|x\|_X \cdot A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) = \|x\|_X \cdot 0 = 0.$$

$$\text{А } A(0) = 0 \text{ всегда, значит } \forall x \in X \quad A(x) = 0 \implies A = 0. \quad \square$$

$$2. \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

Доказательство.

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(\lambda A)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\lambda| \|Ax\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = |\lambda| \|A\|. \quad \square$$

$$3. \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(A + B)x\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax + Bx\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \\ &\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y + \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Bx\|_Y \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned} \quad \square$$

Таким образом, определение нормы выполняется. \square