

Билет 50

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 50: Теорема Коши. Произведение рядов. Теорема Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.	1
-----	---	---

0.1. Билет 50: Теорема Коши. Произведение рядов. Теорема Мертенса (без доказательства). Необходимость условия абсолютной сходимости.

Теорема 0.1 (Коши).

Если ряды $\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ – абсолютно сходятся, то ряд, образованный из слагаемых $a_n b_k$ в каком-то порядке, абсолютно сходится, и его сумма равна AB

Доказательство.

Сначала немного обозначений:

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad B_n := \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\tilde{A}_n := \sum_{k=1}^n |a_k| \quad \tilde{B}_n := \sum_{k=1}^n |b_k|$$

$$\tilde{A} := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \tilde{B} := \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

\tilde{S}_m – частичная сумма ряда из $|a_n b_k|$

$\tilde{S}_m = \sum_{i,j} |a_i b_j| \leq \sum_{i=1}^{\max i} |a_i| \sum_{j=1}^{\max j} |b_j| \leq \tilde{A} \tilde{B} < +\infty$, меньше бесконечности, т.к. ряды абсолютно сходятся.

Частичные суммы \tilde{S}_m ограничены \implies ряд сходится.

Складывать будем все в таком порядке: сначала $a_1 b_1$, потом все, что до индекса 2, все, что до индекса 3, и т.д. Т.е. $(a_1 b_1) + (a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_3 + a_1 b_3) + \dots$

TODO: Табличка с квадратиками

S_m – частичная сумма такого ряда

$$S_{n^2} = \sum_{j,k=1}^n a_j b_k = A_n B_n \rightarrow AB$$

Пусть $n^2 \leq m \leq (n+1)^2$

$$S_m = S_{n^2} + \sum_{k=1}^{\dots} a_{n+1} b_k + \sum_{k=n}^{\dots} a_k b_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} |a_{n+1} b_k| + \sum_{k=1}^n |a_k b_{n+1}| = |a_{n+1}| \tilde{B}_{n+1} + |b_{n+1}| \tilde{A}_n \leq |a_{n+1}| \tilde{B} + |b_{n+1}| \tilde{A} \rightarrow 0, \text{ т.к. } \lim a_n = \lim b_n = 0$$

$$\implies S_m \rightarrow AB \quad \square$$

Определение 0.1.

$\sum a_n$ и $\sum b_n$

Произведением рядов называется ряд $\sum c_n$, где $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \dots + a_n b_1$

Теорема 0.2 (Мертенса).

$\sum a_n = A$ и $\sum b_n = B$ сходятся, причем один из них абсолютно, то произведение рядов сходится к AB .

Замечание.

Теорема идет без доказательства, но вот несколько замечаний по поводу нее.

- Здесь важен порядок, в котором мы складываем $a_i b_j$. В теореме Коши он был не важен, т.к. у обоих рядов была абсолютная сходимость, но здесь у обоих рядов абсолютная сходимость не гарантирована.

2. Просто сходимости рядов не хватает. Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ умножаем на } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdot (-1)^0 + \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n-2}} \cdot \frac{(-1)^1}{\sqrt{2}} + \dots + (-1)^0 \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{\sqrt{n-1}} =$$

$$= (-1)^{n-2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n-3}\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)$$

$n-1$ слагаемых

$$\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n-1} \text{ (т.к. среднее арифметическое больше среднего геометрического)}$$

$$|c_{n-1}| \geq 1 \implies \text{ряд } \sum c_n \text{ расходится.}$$