Билет 61

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 61: Признак Абеля

Утверждение 0.1 (Признак Абеля).

$$\begin{cases} \sum a_n(x) & \text{равномерно сходится} \\ |b_n(x)| \leq K & \forall n, \forall x \\ b_n(x) & \text{монотонны по } n \text{ при фиксированном } x \end{cases} \implies \sum a_n b_n - \text{равномерно сходится}$$

Доказательство.

здесь все ряды - **функциональные, просто писать каждый раз x не хочется**

Проверяем условие критерия Коши.

$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k}$ - заменили пределы суммы, перекинув n в индексы.

$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} b_{n+k} = (A_{n+p} - A_n) b_{n+p} + \sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n) \cdot (b_{n+k} - b_{n+k+1})$ - применили преобразование Абеля

$|A_{n+p} - A_n||b_{n+p}| \leq K|A_{n+p} - A_n| = K|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon K, \forall x \in E, \forall n \geq N$ - критерий Коши для $\sum a_n$

$\sum_{k=1}^{p-1} (A_{n+k} - A_n)(b_{n+k} - b_{n+k+1}) \leq \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k} - A_n||b_{n+k} - b_{n+k+1}| < \varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k} - b_{n+k+1}|$ - т.к. первый модуль меньше ε при $n \geq N$

$\varepsilon \sum_{k=1}^{p-1} |b_{n+k} - b_{n+k+1}| = \varepsilon |\sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1})| = \varepsilon |b_{n+1} - b_{n+p}| \leq \varepsilon (|b_{n+1}| + |b_{n+p}|) \leq 2K\varepsilon$

Условие критерия Коши выполняется, значит наш ряд равномерно сходится. □