Билет 67

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля.

Теорема 0.1.

R – радиус сходимости, $0 < r < R$. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$r < R \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ воспользуемся признаком Вейерштрасса. $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$, $|a_n| r^n$ сходится $\implies$ по признаку Вейерштрасса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| \leqslant r$ сходится равномерно. □

Замечание.

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

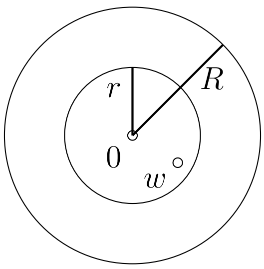
Контрпример $R = 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, хвост ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightrightarrows 0$, т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаменатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

Следствие.

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство.

Возьмем произвольную точку w из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окресности. Берем r, т.ч. $|w| < r < R$. Знаем, что в круге $|z| < r$ ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция $\implies$ в круге $|z| < r$ сумма непрерывна $\implies$ есть непрерывность суммы и в w. В силу произольности w сумма непрерывна в любой точке $|z| < R$.



□

Теорема 0.2 (Абеля).

Пусть R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и ряд сходится при $z = R$. Тогда на отрезке $[0, R]$ ряд сходится равномерно.

Доказательство.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Применим признак Абеля. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно (нет зависимости от x), $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \implies$ равномерно огранич., $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает, тогда по признаку Абеля $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно. □

Следствие.

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если выполнены условия теоремы, то $f(x) \in C[0, R]$, т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности, $\lim\limits_{x \to R-} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.