Билет 74

Автор1, ..., Aвтор<math>N

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет (4:	: дифференцируемост	ъ координатных	функции.	примеры дифферен-	
	цируемых	отображений				. 1

Билет 74 СОДЕРЖАНИЕ

0.1. Билет 74: ! Дифференцируемость координатных функций. Примеры дифференцируемых отображений

Разберем несколько примеров дифференцируемых отображений.

Пример.

$$f(x) = const = c$$

 $f(a+h) = f(a)$
 $T \equiv 0, \alpha \equiv 0$

Пример.

f - линейное отображение

$$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + T(h)$$

$$T = f, \alpha \equiv 0$$

Определение 0.1.

$$f: E \mapsto \mathbb{R}^m, \ E \subset \mathbb{R}^n$$

$$f(x)=egin{pmatrix} f_1(x) \ f_2(x) \ dots \ f_m(x) \end{pmatrix} f_k: E\subset \mathbb{R}^n\mapsto \mathbb{R}$$
 - координатные функции

Теорема 0.1.

Дифференцируемость функции f в точке a равносильна дифференцируемости в точке a всех ее координатных функций.

Доказательство.

$$f: E \mapsto R^m, E \subset \mathbb{R}^n$$

1.
$$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$$
, где $\alpha(h) = o(||h||)$

Распишем определение в виде векторного равенства:

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \\ \vdots \\ T_m(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \\ \alpha_2(h) \\ \vdots \\ \alpha_m(h) \end{pmatrix}$$

Рассмотрим конкретную координату:

$$f_k(a+h) = f_k(a) + T_k h + \alpha_k(h)$$

 $T_k h$ - произведение строки матрицы на вектор, поэтому - линейное отображение (по сути просто скалярное произведение).

Необходимо показать, что
$$\frac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$$
 при $h \to 0$

Достаточно заметить, что так как $||\alpha(h)||=\sqrt{\sum \alpha_k(h)^2},$ то $|\alpha_k(h)|\leqslant ||\alpha(h)||$

Но тогда
$$\frac{|\alpha_k(h)|}{||h||}\leqslant \frac{||\alpha(h)||}{||h||} \to 0$$

Отсюда получаем вывод, что $\frac{\alpha_k(h)}{||h||} \to 0$, получается,

Билет 74

что доказали для всех координатных функций.

2. \Leftarrow

Знаем, что
$$f_k(a+h)=f_k(a)+T_kh+\alpha_k(h)$$
 и $\frac{\alpha_k(h)}{||h||}\to 0$ при $h\to 0$

Соберем все это в один вектор, из строчек T получаем матрицу, тогда в результате:

$$f(a+h) = f(a) + Th + \alpha(h)$$

Надо проверить, что
$$\frac{\alpha(h)}{||h||} \to 0$$
, т. е. $\frac{||\alpha(h)||}{||h||} \to 0$

$$\frac{||\alpha(h)||}{||h||} = \frac{\sqrt{\alpha_1(h)^2 + \ldots + \alpha_m(h)^2}}{||h||} = \sqrt{\frac{\alpha_1(h)^2}{||h||^2} + \ldots + \frac{\alpha_m(h)^2}{||h||^2}} \to 0$$

Следствие.

Строки матрицы Якоби - градиенты координтных функций.

Доказательство.

Строки матрицы Якоби - это те самые T_k , которые встречались в доказательстве теоремы.

Тогда можно заметить, что $T_k h = \langle T_k^T, h \rangle$

Отсюда получаем, что строки матрицы Якоби - градиенты координтных функций.