

Билет 52

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 52:Бесконечные произведения. Определение. Примеры. Свойства.	1
-----	--	---

0.1. Билет 52: Бесконечные произведения. Определение. Примеры. Свойства.

Определение 0.1.

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

$$P_n := \prod_{k=1}^n p_k - \text{частичные произведения.}$$

Если $\exists P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$, т.ч. $P \neq 0$ и $P \neq \infty$, то произведение сходится и $\prod_{k=1}^{\infty} p_k = P$

Пример.

$$1. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \frac{(6-1)(6+1)}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{((2n-1)!!)^2 (2n+1)}{((2n)!!)^2} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

Упражнение. Установить следующие равенства:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^{n-1}}) = \frac{1}{1-x}, \text{ при } 0 < x < 1$$

Свойства.

Считаем, что $p_n \neq 0 \quad \forall n$

1. Конечное количество начальных множителей не влияют на сходимость.

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} p_n - \text{сходится} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$$

Доказательство.

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1$$

□

3. Все можно свести к произведениям с положительными множителями.

$$4. \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ и } p_n > 0 \quad \forall n$$

$$\text{Тогда } \prod_{n=1}^{\infty} p_n \text{ сходится} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \text{ сходится.}$$

Доказательство.

$$P_n = \prod_{k=1}^n p_k$$

$$\ln P_n = \ln\left(\prod_{k=1}^n p_k\right) = \sum_{k=1}^n \ln p_k =: S_n$$

$$S_n \text{ имеет предел} \iff \ln P_n \text{ имеет предел} \iff P_n \text{ имеет предел.}$$

□

Пример.

$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$, где p_n — n -ое простое число.

$$\frac{p_n}{p_n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

НО! Раскрывать скобочки не хорошо в бесконечностях. Формализуем.

$$P_n = \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} \geq \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{p_j^k} = \sum \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty$$

Вывод: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится.

Более того $P_n \geq \ln n + o(1)$

Теорема 0.1.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ расходится, где p_n — n -ое простое число.

Доказательство.

$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{p_n-1}$ расходится

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right) \text{ — расходится}$$

$$\ln \frac{x}{x-1} = \ln \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq$$

$$-2t \leq \ln(1-t) \text{ при достаточно малых } t.$$

$$\leq -2\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{p_n}{p_n-1} \leq C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$$

$$\implies \sum \frac{1}{p_n} \text{ расходится.}$$

□

Замечание.

На самом деле

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} \sim \ln \ln n$$