# Билет 60

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

## 0.1. Билет 60: Признаки Дирихле и Лейбница для равномерной сходимости

**Теорема 0.1** (Признак Дирихле (Дурихле)).
$a_n, b_n : E \mapsto \mathbb{R}$

1. $|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)| \leqslant K \,\forall n \,\forall x \in E$
2. $b_n \rightrightarrows 0$ на $E$
3. $\forall x \in E \, b_n(x)$ - монотонны по $n$

При выполнении этих условий $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ - равномерно сходится на $E$.

**Доказательство**.
$A_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$. $|A_n(x)| \leqslant K$, по условию. Воспользуемся преобразованием Абеля (если забыли доказательство - оно в вопросе 46). Его корректность для функциональных рядов можно проверить, повторив обычное доказательсвто с приписанным '$(x)$'

$$\sum_{k=1}^{n} a_n(x)b_n(x) = A_n(x)b_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$$

- $A_n(x)b_n(x) \rightrightarrows 0$ - как произведение равномерно ограниченной на равномерно стремящуюся к нулю
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ - равномерно сходится. Воспользуемся для доказательства этого факта признаком сравнения.
  $u_k(x) := A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))$ и $v_n(x) := K|b_k(x) - b_{k+1}(x)|$ Осталось доказать, что $v_n(x)$ - равномерно сходится. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| \underbrace{=}_{b_n(x)-\text{монотонные}} \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) - b_{n+1}(x)\right|$. Посмотрим на частичные суммы:

  $$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x) - b_{k+1}(x)\right| = |b_1(x) - b_{n+1}(x)| \rightrightarrows |b_1(x)|$$

  Докажем последний переход:

  $$||b_1(x) - b_{n+1}(x)| - b_1(x)| \leqslant |b_1(x) - b_{n+1}(x) - b_1(x)| = |b_{n+1}(x)| \underbrace{\rightrightarrows}_{\text{по условию}} 0$$

  Так как частичные суммы равномерно сходятся, то и сам ряд равномерно сходится.

□

**Теорема 0.2** (Признак Лейбница).
$b_n : E \mapsto \mathbb{R}$

1. $\forall x \in E \, b_n(x) \geqslant 0$ и монотонны
2. $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на $E$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n(x)$ - равномерно сходится.

**Доказательство**.

$a_n(x) := (-1)^{n-1}$. И воспользуемся признаком Дирихле для $a_n(x)$ и $b_n(x)$. Частичные суммы $a_n(x)$ либо 1, либо 0 $\Rightarrow$ ограничены. $\square$

**Пример.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ - равномерно сходитя на $(0;1)$

**Доказательство**.

$\frac{x^n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$, также $\frac{x^n}{n}$ монотонная. Получаем равномерную сходимость ряда по Лейбницу. Также ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}|$ - сходится, так как меньше геометрической прогрессии. **НО** такой ряд не сходится равномерно по критерию Коши.

$\square$