Билет 83

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 83: Теорема о равенстве частных производных для непрерывно дифференцируемых функций.

***Определение* 0.1.**

$f : D \mapsto \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad D$ - открыто

f - r раз непрерывно дифференцируема (r-гладкая), если все её частные производные до r-го порядка включительно существуют и непрерывны.
Обозначение - $f \in C^r(D)$

Теорема 0.1.

$f : D \mapsto \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad D$ - открыто $f \in C^r(D)$

$i_1, i_2, ..., i_r$ - перестановка $j_1, j_2, ..., j_r$ (этих элементов)
Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_r}}$
производные берутся справа налево, т.е. $f''_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} f)$

Доказательство.

Перестановка раскладывается на транспозиции, значит, достаточно доказать что
$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} ... \partial x_{i_r}}$ (поменяли местами два элемента)
Мы знаем, что $\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}$ (из билета 82), где $g = \frac{\partial^{r-k-1} f}{\partial x_{i_{k+2}} ... \partial x_{i_r}}$
Тогда $\frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} g}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}}$
Значит, $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} ... \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} ... \partial x_{i_r}}$ □

Замечание. Необходимость условия $f \in C^r(D)$ (производные непрерывны)

$$f = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_x = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f'_x(0,k)-f'_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$$

$$f'_y = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f'_y(k,0)-f'_y(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k-0}{k} = 1$$

$$\implies f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0) \text{ !!!!}$$

Всё потому что f''_{xy} не является непрерывной в точке $(0,0)$:
$f''_{xy} = f'_y(f'_x) = (y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2})'_y = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} + x\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + xy\frac{8xy(x^2+y^2)^2 - 8xy^2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} =$
$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{8x^2y^2\cdot((x^2+y^2)-2y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-16x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$, $(x,y) \neq (0,0)$
$(x,y) \to 0 \iff (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) \to 0 \iff r \to 0$
$f''_{xy} = \frac{r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} + \frac{8\cdot r^2\cos^2\varphi \cdot r^2\sin^2\varphi}{r^4(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2} + \frac{-16\cdot r^2\cos^2\varphi\cdot r^4\sin^4\varphi}{r^6(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^3} =$
$(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (8cos^2\varphi\sin^2\varphi) + (-16cos^2\varphi\sin^4\varphi) \not\to 0$ при $r \to 0$