

# Билет 81

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1 Билет 81: Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство . . . . .	1
--	---

## 0.1. Билет 81: Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство

### Определение 0.1.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}^m \quad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in \text{Int } E$$

$f$  – непрерывно дифференцируема в точке  $a$ , если

$f$  дифференцируема в окрестности точки  $a$  и

$d_x f$  непрерывна в точке  $a$  ( $\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ )

### Теорема 0.1.

$f$  – непрерывно дифференцируема в точке  $a \iff$

все частные производные  $f$  существуют в окрестности точки  $a$  и непрерывны в точке  $a$ .

### Доказательство.

“ $\implies$ ” Разложим  $f$  на координатные функции, рассмотрим одну из них -  $f_k$ . Продифференцируем её по какому-то  $x_j$ . Рассмотрим модуль разности значений в точках  $x$  и  $a$ :

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \right|$$

для доказательства оценим эту разность сверху чем-то стремящимся к 0.

Так как  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) = \langle d_x f(e_j), e_k \rangle$ , то

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \right| &= |\langle d_x f(e_j) - d_a f(e_j), e_k \rangle| \leq \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \|e_k\| = \\ &= \|d_x f(e_j) - d_a f(e_j)\| \leq \|d_x f - d_a f\| \|e_j\| = \|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

“ $\impliedby$ ”

Рассмотрим  $\|d_x f - d_a f\|^2$

Воспользуемся ранее доказанной теоремой, что квадрат нормы матрицы не превосходит суммы квадратов её коэффициентов:

$$\|d_x f - d_a f\|^2 \leq \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a) \right)^2 \rightarrow 0, \text{ так как}$$

из  $x \rightarrow a$  и непрерывности частных производных следует, что каждое слагаемое стремится к 0, их конечное кол-во, значит, и сумма стремится к 0, поэтому  $\|d_x f - d_a f\|^2 \rightarrow 0$ , а тогда и  $\|d_x f - d_a f\| \rightarrow 0$   $\square$