Билет 02

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману. 1

0.1. Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.

Теорема 0.1.

$|S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f| \leqslant (b-a)\omega_f(|\tau|)$

(ω_f – модуль непрерывности)

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta &:= S(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_a^b f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t))\ dt| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(t)|\ dt \qquad \text{по определению } \omega_f : |\xi_k - t| < |\tau| \Rightarrow |f(\xi_k) - f(t)| < |\omega_f(|\tau|)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_f(|\tau|)\ dt \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f(|\tau|)(x_{k+1}-x_k) \\
&\leqslant \omega_f(|\tau|)(b-a)
\end{aligned}$$

□

Следствие.

$f \in C([a,b])$, тогда

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = \int\limits_a^b f$

Доказательство.

$f \in C([a,b]) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \omega_f(x) = 0 \Rightarrow \lim \omega_f(|\tau_n|)(b-a) = 0$

□

***Определение* 0.1.**

Функция интегрируема по Риману, если:

Для любой последовательности оснащённых дроблений $(\tau,\xi)_n$, такой что $|\tau_n| \to 0$, верно:

$\lim S(f,\tau_n,\xi_n) = I$

И для всех последовательностей I – одинаковый

I – интеграл Римана