

# Билет 24

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 24: Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта. . . . .	1
-----	---	---

## 0.1. Билет 24: Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта.

### Определение 0.1.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

$K \subset X$  называется секвенциально компактным, если из любой последовательности точек из  $K$  можно выбрать подпоследовательность сходящуюся к точке из  $K$ .

### Теорема 0.1.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $K \subset X$  секвенциально компактно.

Тогда всякое бесконечное множество точек из  $K$  имеет хотя-бы одну предельную точку в  $K$ .

### Доказательство.

Выберем последовательность  $x_n$  из этого подмножества,  $x_n \in K$ , значит можем выбрать сходящуюся подпоследовательность, а сходится она может только к предельной точке.  $\square$

### Теорема 0.2.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $K \subset X$  - компакт.

Тогда  $K$  секвенциально компактно.

### Доказательство.

Пусть  $x_n \in K$  - последовательность.  $D = \{x_n\}$  (множество элементов).

Если  $D$  конечно, то какая-то точка встречается в последовательности бесконечное количество раз, выберем подпоследовательность состоящую только из этой точки, она сходится.

Заметим, что в  $D$  обязательно есть предельная точка:

Пусть нету. Тогда  $D = D \cup \emptyset = D \cup D' = \text{Cl } D \implies D$  замкнуто. Замкнутое подмножество компакт - компакт.

Так-как  $\forall n \quad x_n$  не предельная в  $D$ , можем выбрать  $r_n$ , такие, что  $\overset{\circ}{B}_{r_n}(x_n) \cap D = \emptyset \implies \overset{\circ}{B}_{r_n}(x_n) \cap D = \{x_n\}$ .

Покроем  $D$  такими шарами. Каждый шар покрывает ровно одну точку и точек бесконечно  $\implies$  нельзя выбрать конечное покрытие. Противоречие.

Значит,  $\exists a \in D'$ .

Возьмём произвольную точку из последовательности  $x_{n_1}$ . Пусть  $r_k := \min\{\frac{1}{k}, \min\{x_n\}\}$ .

Будем брать  $x_{n_k}$  как произвольную точку из  $\overset{\circ}{B}_{r_{k-1}}(a)$ . Так-как он ближе к  $a$  чем все предыдущие,  $n_k > n_{k-1}$ , значит получится подпоследовательность.

При этом,  $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k-1} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . При этом,  $D \subset K \implies \text{Cl } D \subset \text{Cl } K = K$ . А  $a \in D' \subset \text{Cl } D \subset K \implies a \in K$ .  $\square$