Билет 37

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 37: Длина пути и длина кривой. Определение и простейшие свойства. Аддитивность длины кривой.

***Определение* 0.1.**

Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $\gamma : [a, b] \mapsto X$ - путь.

Длина путь $\ell(\gamma) = \sup\limits_{n,t} \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))$, где t - разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

А супремум берётся по всем возможным таким разбиениям.

Свойства.

1. Длины эквивалентных путей равны

   Доказательство.
   Пусть пути эквивалентны с преобразование τ. Тогда разбиение для одного можно перевести в разбиение для другого не изменив суммы. □

2. Длины противоположных путей равны

   Доказательство.
   Рассмотрим разбиение в противоположном порядке □

3. $\ell(\gamma) \geqslant \rho(\gamma(a), \gamma(b))$

   Доказательство.
   Как часть супремума будет рассмотрено разбиение $n = 2$, $t_0 = a$, $t_1 = b$. □

4. $\ell(\gamma)$ больше либо равно длинне любой ломаной вписанной в путь

   Доказательство.
   Длина ломаной задаётся каким-то конкретным разбиением которое будет рассмотрено в супремуме. □

***Определение* 0.2.**

Длина кривой - длина её произвольной параметризации.

Теорема 0.1 (об аддитивности длины кривой)**.**

Пусть X - метрическое пространство, $\gamma : [a, b] \mapsto X$ - путь, $c \in (a, b)$.

Тогда $\ell(\gamma) = \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$.

Доказательство.

$\geqslant$:

Возьмём разбиение s_i для $[a, c]$ и t_i для $[c, b]$.

Заметим, что если их сконкатенировать, получим убрав дублирование c, получим разбиение для $[a, b]$, из чего получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \rho(\gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k)) + \sum_{k=1}^{m} \rho(\gamma(t_{k-1}, t_k)) \leqslant \ell(\gamma).$$

Так-как это верно для всех разбиений, можем последовательно приписать супремумы и получить $\ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right)+\ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)\leqslant\ell(\gamma)$.

$\leqslant$:

Возьмём t_i - разбиение $[a,b]$.

Если $\exists i \quad t_i=c$, то можем разбить по нему, и получить равенство.

Если не сущесвует, то $\exists j \quad t_j<c<t_{j+1}$.

По $\triangle$: $\rho(\gamma(t_j),\gamma(t_{j+1}))\leqslant\rho(\gamma(t_j),\gamma(c))+\rho(\gamma(c),\gamma(t_{j+1}))$, значит можем добавить между ними c, не укоротив путь.

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n}\rho(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k))\leqslant\left(\sum_{k=1}^{j}\rho(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k))+\rho(t_j,c)\right)+\left(\rho(c,t_{j+1})+\sum_{k=j+1}^{n}\rho(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k))\right).$$

Перейдём к супремуму слева, и заменим ломаную на длину пути справа:

$$\ell(\gamma)\leqslant\ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right)+\ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right).$$

$\square$