Билет 64

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 64: Теорема об интегрировании равномерно сходящейся последовательности(ряда). Существенность равномерности.

Теорема 0.1 (О перестановке предела и суммы).

$f_n \in C[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)dt$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_a^x f_n(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt\right| = \left|\int\limits_a^x (f_n(t) - f(t))dt\right| \leq \int\limits_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \leq$$
$$\leq (x-a)\max_{t\in[a,b]}|f_n(t) - f(t)| \leq (b-a)\max_{t\in[a,b]}|f_n(t)-f(t)| \longrightarrow 0$$

Почему последнее стремится к 0? Потому что была теорема про равномерную сходимость, только в той теореме был супремум. Более того, последнее выражение ещё и от x не зависит, значит

$$\max_x \left|\int\limits_a^x f_n(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt\right| \longrightarrow 0$$

Значит, по той же теореме, где был изначально супремум, получаем равномерную сходимость. Что и требовалось доказать. □

Следствие.

$u_n \in C[a,b]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^x u_n(t)dt$

Доказательство.

$S_n \rightrightarrows S \Rightarrow \int\limits_a^x S_n \rightrightarrows \int\limits_a^x S$. В то же время $\int\limits_a^x S_n = \int\limits_a^x \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_a^x u_k(x)$. Мы знаем, что такая сумма интегралов имеет конечный предел, а такая сумма интегралов это просто частичная сумма ряда. Значит, мы знаем, что частичная сумма ряда имеет некоторый предел. Значит, просто сумма ряда это и есть тот самый предел.

Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^x u_n(t) = \int\limits_a^x S = \int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ □

Замечание.

Поточечной сходимости не хватает

Пример. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$$\int\limits_0^1 f_n(t)dt = \int\limits_0^1 nte^{-nt^2}dt = [s = nt^2] = \frac{1}{2}\int\limits_0^n e^{-s}ds = -\frac{1}{2}e^{-s}|_0^n = \frac{1-e^{-n}}{2} \not\to 0$$

А предельная функция 0. Что-то не то...