Билет 101

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 101: Произведение полуколец. Параллелепипеды и ячейки. Связь между ними.

***Определение* 0.1.**

Декартово произведение полуколец.

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ – полукольца подмножеств X и Y соответственно.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} = \{P \times Q \ \ : \ \ P \in \mathcal{P},\ Q \in \mathcal{Q}\}$ – семейство подмножеств $X \times Y$.

Теорема 0.1.

Декартово произведение полуколец – полукольцо.

Доказательство.

(скорее махание руками, чем доказательство)

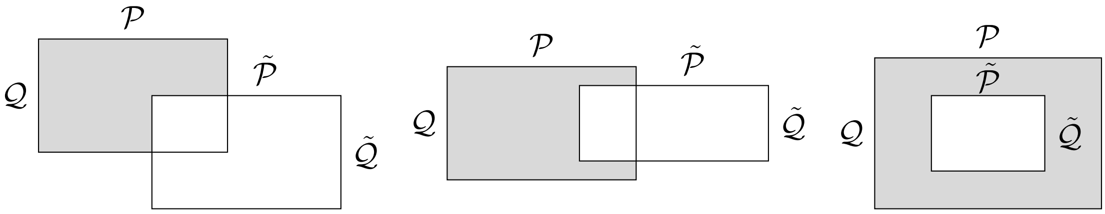
Нужно проверить свойства полукольца.

1. $\varnothing = \varnothing \times \varnothing \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$
2. $(P \times Q) \cap (\tilde{P} \times \tilde{Q}) = (P \cap \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$

   Пересечение декартовых произведение - декартово произведение пересечений. Можно посмотреть на картинки ниже и понять.

   +- формально: $(a, b) \in (P \times Q) \iff a \in P, b \in Q$, аналогично $(a, b) \in (\tilde{P} \times \tilde{Q}) \iff a \in \tilde{P}, b \in \tilde{Q}$.

   Тогда $a \in (P \times Q) \cap (\tilde{P} \times \tilde{Q}) \iff (a \in P$ и $a \in \tilde{P})$, и $(b \in Q$ и $b \in \tilde{Q}) \iff (a, b) \in (P \cap \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$
3. Рисуем картинки. Это два прямоугольника, один вычитаем из другого. Нужно понять, что разность представляется в виде объединения прямоугольников.



   Порисовав картинки, понимаем, что:

   $(P \times Q) \setminus (\tilde{P} \times \tilde{Q}) = P \times (Q \setminus \tilde{Q}) \sqcup (P \setminus \tilde{P}) \times (Q \cap \tilde{Q})$

   А это лежит в $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$: оба дизъюнкткных множества выше можно разбить на дизъюнктные объединения, ведь каждое из них является декартовым произведением множеств из полукольца или дополнением. Дополнения разбиваются по 3 свойству полукольца.

   Замечание. На нашей лекции Храбров неправильно выписал формулу выше.

□

***Определение* 0.2.**

$\mathbb{R}^n$

Замкнутый параллелепипед – $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] =: [a, b]$

$a = [a_1, a_2, ..., a_n]$

$b = [b_1, b_2, ..., b_n]$

Открытый параллелепипед – $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n) =: (a, b)$

Ячейка – $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ... \times [a_n, b_n) =: [a, b)$

Обозначения.

$\mathcal{P}^n$ – множество всех ячеек из $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}$ – множество всех ячеек из $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами вершин.

Теорема 0.2.

Непустая ячейка представима в виде пересечения счетного множества открытых параллелепипедов и представима в виде счетного объединения замкнутых.

Доказательство.

$[a, b) = [a_1, b_1) \times ... \times [a_n, b_n)$

$C_k := (a_1 - \frac{1}{k}, b_1) \times ... \times (a_n - \frac{1}{k}, b_n)$

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k = [a, b)$:

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k \supset [a, b)$, так как $C_k \supset [a, b) \forall k$

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C_k \subset [a, b)$, так как если $\exists x \in C_k, x \notin [a, b)$, то начиная с некоторого номера $x \notin \bigcap\limits_{k=1}^{n} C_k$, так как они сужаются

$D_k := [a_1, b_1 - \frac{1}{k}] \times ... \times [a_n, b_n - \frac{1}{k}]$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = [a, b)$

Доказательство аналогично: $\subset$ очевиден, а $\supset$ т.к. начиная с некоторого номера каждая точка попадёт в объединение $\square$