Билет 34

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 34: Эквивалентные определения нормы оператора.

Теорема 0.1.
Пусть $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle$, $\langle Y, \|\cdot\|_Y \rangle$ - нормированные пространства, $A : X \mapsto Y$ - линейный оператор.

Следующие значения равны:

N_1 $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y$

N_2 $\sup\limits_{\|x\|_X < 1} \|Ax\|_Y$

N_3 $\sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$

N_4 $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$

N_5 $\inf\limits_{c>0} \{\forall x \in X \ \|Ax\|_Y \leqslant c \|x\|_X \quad \}$

Доказательство.
Будем доказывать следующие факты:

1. $N_1 \geqslant N_2$
2. $N_1 \leqslant N_2$
3. $N_1 \geqslant N_3$
4. $N_3 = N_4$
5. $N_4 \geqslant N_5$
6. $N_4 \leqslant N_5$
7. $N_1 \leqslant N_5$

Лемма ($N_1 \geqslant N_2$).
Заметим, что N_2 это супремум по подмножеству элементов участвующих в супрермуме N_1, значит $N_1 \geqslant N_2$.

Лемма ($N_1 \leqslant N_2$).
Возьмём $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\|x\|_X \leqslant 1 &\implies \left\| \frac{x}{1+\varepsilon} \right\|_X < 1 \\
&\implies \left\| A\left(\frac{x}{1+\varepsilon} \right) \right\|_Y \leqslant N_2 \\
&\implies \frac{1}{1+\varepsilon} \|Ax\|_Y \leqslant N_2 \\
&\implies \|Ax\|_Y \leqslant (1+\varepsilon) N_2 \\
&\implies N_1 \leqslant (1+\varepsilon) N_2 \text{ так-как верно для произвольного } x \text{ с } \|x\|_X \leqslant 1 \\
&\implies N_1 \leqslant N_2 \text{ предельный переход при } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

$\square$

Лемма ($N_1 \geqslant N_3$)**.**

Заметим, что N_3 это супремум по подмножеству элементов участвующих в супрермуме N_1, значит $N_1 \geqslant N_3$.

Лемма ($N_3 = N_4$)**.**

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \left\|\frac{Ax}{\|x\|_X}\right\|_Y = \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \implies N_3 = N_4.$$

Лемма ($N_4 \geqslant N_5$)**.**

$$\|Ax\|_Y \leqslant N_4 \|x\|_X \implies \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant N_4 \implies N_5 \leqslant N_4.$$

Лемма ($N_4 \leqslant N_5$)**.**

Предположим $N_5 < N_4$, тогда $\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leqslant N_5 < N_4$, что противоречит тому, что N_4 - наименьшая верхня грань. Значит, $N_5 \geqslant N_4$.

Лемма ($N_1 \leqslant N_5$)**.**

Пусть $\|x\|_X \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}\|Ax\|_Y \leqslant N_5 \|x\|_X &\implies \|Ax\|_Y \leqslant N_5 \\ &\implies N_1 \leqslant N_5 \text{ так-как верно для любого } x \text{ с } \|x\|_X \leqslant 1\end{aligned}$$

Следствие.

1. $\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|$
2. $\|BA\| \leqslant \|B\| \|A\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|B(A(x))\| &\leqslant \sup_{\|y\|\leqslant\|A\|} \|By\| \\ &= \sup_{\|y\|\leqslant\|A\|} \left\|\|A\| B\left(\frac{y}{\|A\|}\right)\right\| \\ &= \|A\| \sup_{\|y\|\leqslant 1} \|By\| \\ &= \|A\| \|B\|\end{aligned}$$

□