Билет 49

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 49: Теорема Римана.

Теорема 0.1 (Римана)**.**
$a_n \in \mathbb{R}$ $\sum a_n$ условно сходится.

Тогда для любого $S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует перестановка φ, т.ч. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$. Также существует перестановка φ, для которой ряд не имеет суммы.

Доказательство.
$\sum b_n$ и $\sum c_n$ – ряды $\sum (a_n)_\pm$, из которых выкинули все нули.

$\sum b_n$ и $\sum c_n$ – расходятся (т.к. есть условная сходимость), Более того, $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$. При этом $\lim b_n = \lim c_n = 0$ (необходимое условие сходимости для ряда $\sum a_n$).

Пункты $a), b), c)$ доказываются аналогично. Наверное, можно на экзамене расписать только пункт $a)$, а про остальные сказать, что аналогично. Здесь на всякий случай расписаны все три пункта.

a) Пусть $S \in \mathbb{R}$. Будем набирать частичную сумму так, чтобы она поочередно превышала S и наоборот была меньше S. Мы можем это сделать, т.к. $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$.

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1 - 1} \leqslant S < b_1 + b_2 + ... + b_{n_1}$

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} < S \leqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1 - 1}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2 - 1} \leqslant S < b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2} < S \leqslant$
   $\leqslant b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2 - 1}$

   И так далее.

   |частичная сумма $- S| \leqslant |$последнего взятого элемента$| \to 0$. Значит частичная сумма построенного ряда $\to S$.

b) Пусть $S = +\infty$. Мы знаем, что $\sum b_n = +\infty$. Поэтому мы можем нашу перестановку получить следующим образом:

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} > 1 \geqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1 - 1}$ (раз $\sum b_n = +\infty$, то в какой-то момент сумма превысит 1)

   $b_1 + ... + b_{n_1} + c_1$ (добавили элемент из ряда c_n)

   $b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} > 2 \geqslant b_1 + ... + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2 - 1}$

   И так далее.

c) Пусть мы хотим получить перестановку φ, для которой ряд не имеет суммы. Будем набирать суммы так, чтобы она то была больше 1, то меньше -1. Это опять же можно сделать, т.к. $\sum b_n = \sum c_n = +\infty$.

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1 - 1} \leqslant 1 < b_1 + b_2 + ... + b_{n_1}$

   $b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} < -1 \leqslant b_1 + b_2 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1 - 1}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2 - 1} \leqslant 1 < b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2}$

   $b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2} < -1 \leqslant$
   $\leqslant b_1 + ... + b_{n_1} - c_1 - ... - c_{m_1} + b_{n_1+1} + ... + b_{n_2} - c_{m_1+1} - ... - c_{m_2 - 1}$

   И так далее.

$\square$