Билет 79

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

Теорема 0.1.

$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m$ непрерывна и дифференцируема на (a,b). Тогда $\exists c \in (a,b)$, такая что $\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|f'(c)\|\,(b-a)$

Доказательство.

$\varphi(x) := \langle f(x), f(b)-f(a)\rangle : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$

$\varphi(x)$ удовлетворяет условию одномерной теоремы Лагранжа

$\exists c \in (a,b)$, т.ч. $\varphi(b)-\varphi(a) = \varphi(c')(b-a) = \langle f'(c), f(b)-f(a)\rangle\,(b-a)$

$\varphi'(x) = \langle f'(x), f(b)-f(a)\rangle + \langle f(x), (f(b)-f(a))'\rangle = \langle f'(x), f(b)-f(a)\rangle$

$\varphi(b)-\varphi(a) = \langle f(b), f(b)-f(a)\rangle - \langle f(a), f(b)-f(a)\rangle = \langle f(b)-f(a), f(b)-f(a)\rangle = \|f(b)-f(a)\|^2$

$\|f(b)-f(a)\|^2 = \langle f'(c), f(b)-f(a)\rangle\,(b-a) \leqslant \|f'(c)\|\,\|f(b)-f(a)\|\,(b-a)$ (Коши-Буняковский)

$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|f'(c)\|\,(b-a)$ $\square$

Замечание. Равенство может никогда не достигаться

$f(x) = (\cos x, \sin x) : [0, 2\Pi] \mapsto \mathbb{R}^2$

$f(0) = (1,0) = f(2\Pi)$

$f(2\Pi) - f(0) = (0,0) \implies \|f(2\Pi)-f(0)\| = 0$

$f'(x) = ((\cos x)', (\sin x)') = (-\sin x, \cos x)$

$\|f'(x)\| = 1 \implies \|f'(c)\|\,(2\Pi - 0) = 2\Pi > \|f(2\Pi) - f(0)\| = 0$