

Билет 82

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 82: ! Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в \mathbb{R}^2	1
-----	--	---

0.1. Билет 82: ! Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в \mathbb{R}^2

Определение 0.1.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ $E \subset \mathbb{R}^n$ E – открытое множество.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad f''_{x_k x_j} := (f'_{x_k})'_{x_j}$$

Т.е. сначала фиксируем x_j (как будто параметр), считаем производную по x_k , затем наоборот.

Это частная производная второго порядка, можно писать и большие аналогично.

Пример.

$$f(x, y) = x^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1}) = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x^y \ln x) = \ln^2 x \cdot x^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}$$

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{-2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x = \frac{y(x^4 - y^4) - 4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

Но в силу антисимметричности x и y .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

Теорема 0.1.

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}^2 \quad (x_0, y_0) \in \text{Int } E$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ещё и непрерывна в ней

Тогда существует и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в точке (x_0, y_0) .

$$\text{Более того, } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Доказательство.

Рассмотрим $\varphi(s) = f(s, y_0 + k) - f(s, y_0)$, что такое k - поймём позже. Пока это просто какое-то число.

Заметим, что φ дифф. в окрестности точки x_0 (следует из существования частной производной по x), поэтому можем применить к ней т. Лагранжа (одномерную):

$$\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \quad \theta_1 \in (0, 1)$$

Левую часть обозначим за Δ , а правую распишем через определение φ , получим:

$$\Delta = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0)\right)$$

Обозначим $\tilde{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, t)$, тогда:

$$\Delta = h(\tilde{\varphi}(y_0 + k) - \tilde{\varphi}(y_0))$$

Снова применим лагранжа: $x, y(df/(dx dy))$

$$\Delta = hk\tilde{\varphi}'(y_0 + \theta_2 k) = hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k)$$

Определение 0.2.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ $R \subset \mathbb{R}^n$ E – открыто

Функция f называется r раз непрерывно дифференцируемой или r -гладкой, если все частичные производные до r -ого порядка (включительно) существуют и непрерывны.

Обозначение – $C^r(E)$

Теорема 0.2.

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ $E \subset \mathbb{R}^n$ E – открыто $f \in C^r(E)$

i_1, i_2, \dots, i_r – перестановка j_1, j_2, \dots, j_r

Тогда $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_r}}$

Доказательство.

Предыдущая теорема говорит, что $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}$ не меняет частной производной, а любая перестановка выражается через транспозиции.

На самом деле, это не совсем док-во. Мы ведь не доказали, что если в $\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}$ поменять i -ый и j -ый, то значение не изменится. Исправим чуть док-во.

Заметим, что если $j = i + 1$, то у нас одинаковое начало (всё до i совпадает) + одинаковый хвост (всё после j одинаковое) + остаётся ровно утверждение из прошлой теоремы. Поэтому, на самом деле, мы можем делать любые транспозиции $(i, i + 1)$, но ими выражается любая перестановка. \square