

Билет 95

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 95: ! Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.	1
-----	--	---

0.1. Билет 95: ! Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.**Определение 0.1.**

$$\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad D \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a \in D \text{ и } \Phi(a) = 0$$

a – точка условного локального максимума при условии $\Phi = 0$, если $\exists U$ – окрестность точки a , т.ч. $\forall x \in U \cap D$, удовлетворяющее условию $\Phi(x) = 0$

$$\implies f(x) \leq f(a)$$

a – точка условного локального минимума, если

$\exists U$ – окрестность точки a , т.ч. $\forall x \in U \cap D$, удовлетворяющее условию $\Phi(x) = 0 \implies f(x) \geq f(a)$

Аналогично строгий условный максимум и строгий условный минимум.

Пример.

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$$

Теорема 0.1 (Метод неопределенных множителей Лагранжа).

$$\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m \quad D \subset \mathbb{R}^{n+m} \quad a \in D \text{ – открытое.}$$

$$\Phi(a) = 0$$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Φ, f непрерывно дифференцируемы.

Если a точка условного экстремума, то $\text{grad } f, \text{grad } \Phi_1, \text{grad } \Phi_2, \dots, \text{grad } \Phi_m$ линейно зависимы.

Замечание.

1. Если $\text{grad } \Phi_1, \text{grad } \Phi_2, \dots, \text{grad } \Phi_m$ линейно зависимы, то теорема ничего не утверждает.
2. Если $\text{grad } \Phi_1, \dots, \text{grad } \Phi_m$ линейно независимы, то $\text{grad } f = \lambda_1 \text{grad } \Phi_1 + \dots + \lambda_m \text{grad } \Phi_m$

$$3. \Phi'(a)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}$$

Столбцы линейно независимы $\iff \text{rank } \Phi'(a) = m$, т.е. максимально возможный.

Доказательство.

$\text{rank } \Phi'(a) = m$. (Рассматривать линейную зависимость градиентов бессмысленно, как показано в замечании)

Перенумеруем координаты Φ так, чтобы определитель последней подматрицы $\neq 0$.

$$a = (b, c) \quad b \in \mathbb{R}^n \quad c \in \mathbb{R}^m$$

$$A := \Phi'(a)$$

$$A(0, h) = 0 \implies h = 0$$

По теореме о неявной функции $\exists W$ – окрестность точки b и непрерывно дифференцируемая функция $g : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, т.ч. $\Phi(w, g(w)) = 0 \quad \forall w \in W$

$$g(b) = c$$

Пусть a – точка условного максимума.

$\Rightarrow \exists U$ – окрестность точки a такая, что $\forall x \in U \quad \Phi(x) = 0$

$f(a) \geq f(x)$

Уменьшим W так, чтобы $W \times \{c\} \subset U$ и чтобы $(w, g(w)) \in U$ при $w \in W$.

Почему так можем сделать?

$w \rightarrow (w, g(w))$ – непрерывное отображение

\Rightarrow прообраз открытого открыт \Rightarrow прообраз $U \cap W$ подойдет.

$\Rightarrow \forall w \in W \quad f(w, g(w)) \leq f(b, g(b))$

$h(w) := f(w, g(w))$ h имеет локальный максимум в точке b .

h – дифференцируемая функция, а значит выполняется необходимое условие экстремума.

Т.е. $\text{grad } h = 0$.

$x = (y, z) \quad y \in \mathbb{R}^n \quad z \in \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial h}{\partial w_k} = \frac{\partial f}{\partial y_k} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y_k} = 0$$

$$0 = \text{grad } h = \text{grad}_y f + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_j} \cdot \text{grad}_y g_j$$

$$\Phi(w, g(w)) \equiv 0$$

i – фиксированное.

Посмотрим на частные производные Φ_i по w_k .

$$\frac{\partial}{\partial w_k} : \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial y_k} + \dots + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y_k} = 0$$

$$\text{grad}_y \Phi_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \text{grad } g_j = 0$$

$$\text{grad}_y f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad}_y \Phi_i + \sum_{i=1}^m \left(\lambda_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} \text{grad } g_j \right) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_j} \text{grad } g_j = 0$$

$$\text{grad}_y f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad}_y \Phi_i + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j} \right) \text{grad } g_j = 0$$

$$\text{Хотим подобрать } \lambda_i \text{ так, что } (*) := \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0 \quad \forall j$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_m} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial z_m} \end{pmatrix}$$

Первая матрица здесь обратима, так как это в точности последний минор, который не вырожден.

\Rightarrow система имеет решение \Rightarrow можно занулить коэффициенты

$$\Rightarrow \text{grad}_y f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad}_y \Phi_i = 0$$

Но $(*)$ в векторном виде

$$\text{grad}_z f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad}_z \Phi_i = 0$$

□

Замечание.

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad } \Phi_i$$

$n + m$ уравнений.

Неизвестных – точка a ($n + m$ неизвестных), λ_i – m неизвестных.

Но $\Phi(a) = 0$ – а это еще m уравнений.

Пример.

Минимум и максимум квадратичной формы на сфере.

A – симметричная матрица и $Q = \langle Ax, x \rangle$

Минимум и максимум $Q(x)$ при условии $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$

$$\Phi' = (2x_1 \ 2x_2 \ \dots \ 2x_n) \quad \text{rank} = 1$$

$$\implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : \text{grad } Q - \lambda \text{grad } \Phi = 0$$

$F := Q - \lambda \Phi$ – функция Лагранжа.

при некотором λ $\text{grad } F = 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{k,j} x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{i,k} x_i + a_{k,k} \cdot 2x_k - 2\lambda x_k = 0$$

$$2 \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j - 2\lambda x_k = 0$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$\implies x - \text{единичный собственный вектор, } \lambda - \text{собственное число.}$$

Все точки, в которых достигается экстремум – единичные собственные вектора.

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda$$

Значения в этих точках – соответствующие собственные числа.