Билет 16

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1 Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества. 1

0.1. Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

Cl A = X \ Int (X\A)

Свойства.

1. $A \subset \operatorname{Cl} A$
2. $\operatorname{Cl} A$ - замкнутое множество

   Доказательство.
   По определению, $\operatorname{Cl} A$ - пересечение замкнутых множетв. $\square$

3. $\operatorname{Cl} A = A \iff A$ замкнуто

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A = \operatorname{Cl} A &\iff X \setminus A = X \setminus \operatorname{Cl} A \\ &\iff X \setminus A = \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\iff X \setminus A \text{ открыто} \\ &\iff A \text{ замкнуто} \end{aligned}$$ $\square$

4. $A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies (X \setminus B) \subset (X \setminus A) \\ &\implies \operatorname{Int}(X \setminus B) \subset \operatorname{Int}(X \setminus A) \\ &\implies X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B) \\ &\implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$ $\square$

5. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} \operatorname{Cl}(A \cup B) &= X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus (A \cup B) \\ &= X \setminus \operatorname{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= X \setminus (\operatorname{Int}(X \setminus A) \cap \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)) \cup (X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus B)) \\ &= \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B \end{aligned}$$ $\square$

6. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$

   Доказательство.
   $\operatorname{Cl} A$ замкнуто по свойству 2, равенство следует из свойства 3. $\square$

Теорема 0.1.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in \operatorname{Cl} A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \varnothing.$$

Доказательство.
Необходимость ($\implies$):

Предположим что $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \varnothing$.

Тогда $a \notin A$ и $B_r(a) \subset X \setminus A$, значит $a \in \operatorname{Int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A) \implies a \notin \operatorname{Cl} A$.

Достаточность ($\impliedby$):

Пусть $a \notin \operatorname{Cl} A$, тогда $\exists F$ - замкнутое надмножество A, такое, что $a \notin F \implies a \in X \setminus F$. При этом, $X \setminus F$ открыто.

Тогда $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$.

Но тогда $B_r(a) \cap A = \varnothing$. □

Следствие.
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$, а $U \subset X$ - открытое множетсво. При этом $A \cap U = \varnothing$.

Тогда $\operatorname{Cl} A \cap U = \varnothing$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Cl} A \cap U &\implies x \in U \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \\ &\implies B_r(x) \cap A \subset U \cap A = \varnothing \\ \text{В r} &\implies x \notin \operatorname{Cl} A \\ &\implies x \notin \operatorname{Cl} A \cap U \end{aligned}$$

Получили противоречие, значит таких x не существует. □

***Определение* 0.1.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство.

Проколотой окрестностью радиуса $r \in \mathbb{R}_{>0}$ с центров в $a \in X$ называется $\mathring{B}_r(a) := B_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in X \mid 0 < \rho(x, a) < r\}$.

***Определение* 0.2.**
Пусть $\langle X, \rho\rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$a \in A$ называется предельной точкой, если $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$.

Множества предельных точек множества A обозначается A'.

Свойства.

1. $\operatorname{Cl} A = A \cup A'$

   Доказательство.

$$
\begin{aligned}
a \in \operatorname{Cl} A &\iff \forall r > 0 \quad B_a(a) \cap A \neq \varnothing \\
&\iff \left[\begin{aligned} &a \in A \\ &\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \end{aligned}\right. \\
&\iff \left[\begin{aligned} &a \in A \\ &a \in A' \end{aligned}\right.
\end{aligned}
$$

$\square$

2. $A \subset B \implies A' \subset B'$

   Доказательство.

$$
\begin{aligned}
a \in A' &\implies \forall r \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing \\
&\implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \varnothing \\
&\implies a \in B'
\end{aligned}
$$

$\square$

3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   Доказательство.

see Anna : , A - R

$$
\begin{aligned}
A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\
B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\
&\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'
\end{aligned}
$$

   Покажем другое включение: возьмём $x \in (A \cup B)'$.

   Пусть $x \notin A'$: Тогда $\exists R > 0 \quad \mathring{B}_R(x) \cap A = \varnothing$.

   Заметим, что $\forall 0 < r \leqslant R \quad \mathring{B}_r(x) \cap A \subset B_R(x) \cap A = \varnothing$, значит $\forall r > 0 \quad \exists 0 < R_r < r \quad B_{R_r}(x) \cap A = \varnothing$.

   Так-как $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$, значит $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing$. Тогда

$$\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap B \supset \mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \varnothing.$$

   Значит, $x \in B'$ $\square$

4. $A' \subset A \iff A$ - замкнутое

   Доказательство.

$$
\begin{aligned}
A \text{ - замкнутое} &\iff A = \operatorname{Cl} A \\
&\iff A = A \cup A' \\
&\iff A' \subset A
\end{aligned}
$$

$\square$

Теорема 0.2.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство, $A \subset X$.

$$a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек.}$$

Доказательство.

, , , : : => => => A'

Необходимость ($\Longrightarrow$):

Знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$, возьмём точку $x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A$, возьмём $r_2 = \rho(x_1, a)$, знаем, что $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$, можем взять точку оттуда, и вообще повторять бесконечное число раз.

Достаточность ($\leqslant$): $B_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A$ содержит бесконечно много точек $\Longrightarrow$ $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \varnothing$ $\Longrightarrow$ $a \in A'$. $\square$