Билет 21

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 21: Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота $\mathbb{R}^d$

Тут что-то странное с порядком билетов, рекомендуется сначала прочитать билет 22

***Определение* 0.1.**
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространоство.

Последовательность x_n называется фундаментальной

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Лемма.
Фундаментальная последовательность ограничена

Доказательство.
Подставим $\varepsilon = 1$, получим $\forall n \geqslant N \quad \rho(x_N, x_n) < 1 \implies x_n \in B_1(N)$, пусть

$$r = \max\{1, \max_{k<N}\{\rho(x_N, x_k)\}\}.$$

1-(N-1) () 1 N ,

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B_r(x_N)$. □

TODO: Это все свойства фундаментальной последовательнсоти?

***Определение* 0.2.**
Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Лемма.
Пусть $\langle X, \rho \rangle$ - метрическое пространство.

Пусть $x_n \in X$ - фундаментальна, а $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant M \quad \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$x_n \text{ - фундаментальна } \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Пусть $L = \max\{N, n_M\}$.

Тогда $\forall n > L \quad \exists k \quad \rho(x_n, a) < \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$.

Значит, $\rho(x_n, a) \to 0 \implies x_n \to a$. □

Следствие.

1. $\mathbb{R}^d$ - полное

   Доказательство.
   Пусть $x_n \in \mathbb{R}^d$ - фундаментальная последовательность.

   Тогда x_n ограничена $\implies \exists x_{n_k}$ - сходящаяся к точке из $\mathbb{R}^d$ подпоследовательность (Больцано-Вейерштрасс из следующего билета), пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}^d$. □

2. K - компакт в $\langle X, \rho \rangle \implies \langle K, \rho \rangle$ - полное.

   Доказательство.

   K - компакт, $x_n \in K$ - фундаментальна.

   $\exists x_{n_k} \in K \quad \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a \in K \implies \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in K.$ $\square$