Билет 99

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 99: Алгебра и σ-алгебра множеств. Определе- ние, свойства, примеры. Теорема о существовании минимальной σ-алгебры содержащей данное семейство множеств. Борелевская оболочка и борелевские множества.

Все рассматриваемые далее мн-ва - подмножества некоторого фиксированного мн-ва X.

***Определение* 0.1** (Обозначение)**.**
$A \sqcup B$ – дизъюнктное объединение.

$A \cap B = \varnothing$ и $A \sqcup B := A \cup B$

Замечание - напоминание.

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

***Определение* 0.2.**
Будет рассматривать некие семейства множеств $\mathcal{A} \subset 2^X$

Свойства семейства множеств $\mathcal{A}$.

(σ_0) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$

(δ_0) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$

(σ) $A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(δ) $A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

***Определение* 0.3.**
$\mathcal{A}$ – симметричная, если $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A}$

Утверждение 0.1.
$\mathcal{A}$ – симметрично, то

$(\sigma_0) \iff (\delta_0)$ и $(\sigma) \iff (\delta)$

Доказательство.

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$$

□

***Определение* 0.4.**
$\mathcal{A}$ – алгебра множеств, если $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ – симметрично и обладает свойствами (δ_0) и (σ_0).

$\mathcal{A}$ – σ-алгебра множеств, если $\varnothing \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ – симметрично и обладает свойствами (δ) и (σ).

Свойства алгебры множеств.

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$

2. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$

3. $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$

Доказательство.

2. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
3. прошлое утверждение + индукция $\square$

Пример.

1. $\mathcal{A} = \{\varnothing, X\}$ – σ-алгебра
2. 2^X – σ-алгебра
3. $X = \mathbb{R}^n \quad \mathcal{A}$ – все ограниченные подмножества и их дополнения.

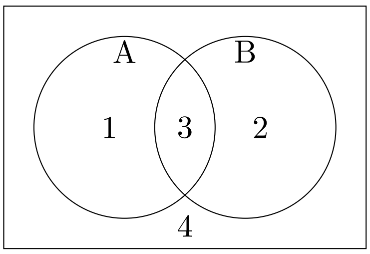
   $\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра, ведь если взять объединение единичных клеточек подряд в одну строчку, то получится неограниченное мн-во, и дополнение будет тоже неограниченным.
4. $\mathcal{A}$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств X.

   $Y \subset X \quad \mathcal{A}_Y := \{Y \cap A \ : \ A \in \mathcal{A}\}$

   $\mathcal{A}_Y$ – алгебра (σ-алгебра) подмножеств Y.

   Это индуцированная алгебра (σ-алгебра) - ограничили структуру на подмножество.
5. Пусть есть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры). Тогда их пересечение – алгебра (σ-алгебра).

   Действительно, понятно, что пустое лежит. Если лежит какое-то A, то оно лежит и во всех алгебрах, поэтому во всех алгебрах есть и дополнение A, поэтому оно есть и в пересечении.
6. $X \supset A, B$

   Все, что можем собрать из кусочков на картинке можно положить в семейство множеств.

   Кусочков 4, итого 16 множеств и это будет наименьшая σ-алгебра, содержащая множества A и B.

Теорема 0.2.

Для любой системы подмножеств $\mathcal{E}$ множества X существует минимальная по включению алгебра (σ-алгебра), содержащая $\mathcal{E}$.

Доказательство.

Рассмотрим все σ-алгебры $\mathcal{A}_\alpha$, содержащие $\mathcal{E}$.

Такие σ-алгебры точно существуют, т.к. например $2^X \supset \mathcal{E}$ и является σ-алгеброй.

Рассмотрим $\mathcal{A} := \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{E}$

По пятому примеру, это σ-алгебра.

Покажем, что это наименьшая по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{B}$ – минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.

Тогда $\exists \beta \in I \quad \mathcal{A}_\beta = \mathcal{B}$, но

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_\beta = \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \qquad \square$$

***Определение* 0.5.**

$\mathcal{E}$ – семейство подмножеств X.

Борелевская оболочка $\mathcal{E} \quad \mathcal{B}(\mathcal{E})$

– наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$

***Определение* 0.6.**

Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}^n$ – минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества в $\mathbb{R}^n$.

Замечание.

$\mathcal{B}^n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$

Более того, у них разные мощности. Первое – континуально, второе еще больше. Но поймём мы это позже.