

# Билет 79

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1 Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций. . . . .	1
---	---

**0.1. Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.****Теорема 0.1.**

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$  непрерывна и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b)$ , такая что  $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| (b - a)$

**Доказательство.**

$$\varphi(x) := \langle f(x), f(b) - f(a) \rangle : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

$\varphi(x)$  удовлетворяет условию одномерной теоремы Лагранжа

$$\exists c \in (a, b), \text{ т.ч. } \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a) = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b - a)$$

$$\varphi'(x) = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle + \langle f(x), (f(b) - f(a))' \rangle = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$$

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b - a) \leq \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\| (b - a) \quad (\text{Коши-Буняковский})$$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| (b - a)$$

□

Замечание. Равенство может никогда не достигаться

$$f(x) = (\cos x, \sin x) : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$f(0) = (1, 0) = f(2\pi)$$

$$f(2\pi) - f(0) = (0, 0) \implies \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

$$f'(x) = ((\cos x)', (\sin x)') = (-\sin x, \cos x)$$

$$\|f'(x)\| = 1 \implies \|f'(c)\| (2\pi - 0) = 2\pi > \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$