

# Билет 46

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

## Содержание

0.1	Билет 46: Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля. . . . .	1
-----	---	---

## 0.1. Билет 46: Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля.

### Определение 0.1.

$\sum a_n$  сходится абсолютно, если  $\sum |a_n|$  – сходится.

$\sum a_n$  сходится условно, если  $\sum a_n$  – сходится, но не абсолютно.

### Теорема 0.1 (Преобразование Абеля).

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

где  $A_k := a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ,  $A_0 := 0$ .

### Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (A_k b_k - A_k b_{k+1}) \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

□

### Теорема 0.2 (Признак Дирихле).

Если:

1.  $A_k = \sum_{k=1}^n a_k$  ограничены
2.  $b_n$  монотонны
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  – сходится.

### Доказательство.

$S_n := \sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$  имеет предел

$A_n b_n \rightarrow 0$ ,  $A_n$  – ограничены,  $b_n \rightarrow 0$

$\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$  имеет предел – это частичная сумма ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ , то есть надо доказать, что этот ряд сходится.

Проверим, что он абсолютно сходится:

По условию  $|A_n| \leq M$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}| &\leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \\ &= M \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k - b_{k+1} \right| \\ &= M |b_1 - b_{n+1}| \\ &\leq M (|b_1| + |b_{n+1}|) \leq 2M |b_1| \end{aligned}$$

□

**Теорема 0.3** (Признак Абеля).

Если:

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится
2.  $b_n$  монотонны
3.  $b_n$  ограничены

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  — сходится.**Доказательство.**Существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: b$ ,  $\tilde{b}_n = b_n - b$  монотонны и  $\rightarrow 0$  $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$  — сходится  $\implies A_n$  — ограничена.По признаку Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n$  — сходится.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\tilde{b}_n + b) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n b \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{b}_n + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

Оба ряда сходятся, значит, и их сумма тоже сходится.

□