Билет 94

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 94: Квадратичная форма. Положительная и отрицательная определенность. Оценка снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточные условия экстремума.

***Определение* 0.1** (Квадратичная форма)**.**
$Q(h) = \sum\limits_{i,j} c_{i,j} h_i h_j, c_i = c_j$

В формуле Тейлора выше сумма это квадратичная форма.

***Определение* 0.2.**
Q – квадратичная форма.

Q – строго положительно определена, если $\forall h \neq 0$ $Q(h) > 0$.

Q – нестрого положительно определена, если $\forall h$ $Q(h) \geqslant 0$.

Аналогично отрицательно определенная Q.

Лемма.
Если $Q(h)$ – строго положительно определена, то $\exists c > 0$, такое что $Q(h) > c\|h\|^2$.

Доказательство.
$Q(h) = \sum\limits_j (Ch)_j h_j = \sum\limits_j \sum\limits_i c_{ij} h_i h_j = \langle Ch, h\rangle$ – непрерывная функция.

Рассмотрим $Q(h)$ на единичной сфере – на компакте. Тогда $\exists h_0$, такое что $\forall h$ $Q(h) \geqslant Q(h_0) > 0$. Положим $c = Q(h_0)$.

$Q(h) = \langle Ch, h\rangle = \langle C\left(\frac{h}{\|h\|}\|h\|\right), \frac{h}{\|h\|}\|h\|\rangle = \|h\|^2 \langle C\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\rangle = \|h\|^2 Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geqslant c\|h\|^2$ (вектор $\frac{h}{\|h\|}$ лежит на единичной сфере). □

Теорема 0.1 (Достаточные условия экстремума)**.**
$E \subset \mathbb{R}^n,\ f : E \mapsto \mathbb{R}, a \in \operatorname{Int} E, a$ – стационарная точка, $Q(h) = \sum\limits_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$. Тогда

1. Если Q строго положительно определена, то a – строгий минимум.

2. Если Q строго отрицательно определена, то a – строгий максимум.

3. Если a нестрогий минимум, то Q нестрого положительно определена.

4. Если a нестрогий максимум, то Q нестрого отрицательно определена.

5. Если Q не является знакоопределенной, то a не точка экстремума.

Доказательство.
$f(a+h) = f(a) + Q(h) + \alpha(h)\|h\|^2$, где $\alpha(h) \underset{h\to 0}{\to} 0$.

1. Q – строго положительно определена, тогда по лемме $Q(h) \geqslant c\|h\|^2 \implies f(a+h) \geqslant f(a) + c\|h\|^2 + \alpha(h)\|h\|^2 = f(a) + \|h\|^2(c + \alpha(h)) > f(a)$, т.к. при малых h есть неравенство $c + \alpha(h) > 0$. При h близких к 0 получается $f(a+h) > f(a) \implies a$ – строгий минимум.

3. a – нестрогий минимум. $0 \leqslant f(a+h) - f(a) = Q(h) + \alpha(h)\|h\|^2$ при малых h. $0 \leqslant Q(th) + \alpha(th)\|th\|^2 = \langle C(th), th\rangle + \alpha(th)t^2\|h\|^2 = t^2(Q(h) + \alpha(th)\|h\|^2)$ при малых $t \implies 0 \leqslant Q(h) + \alpha(th)\|h\|^2 \underset{t\to 0}{\to} Q(h) \implies Q(h) \geqslant 0$.

5. От противного. Пусть a точка экстремума, тогда по пункту 4 или 5 Q нестрого положительно или отрицательно определена. Противоречие.

$\square$

Теорема 0.2 (Критерий Сильвестра)**.**

Q – квадратичная форма, C – ее матрица.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \dots \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & \dots \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Q – строго положительно определена $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} c_{11} \end{pmatrix} > 0 \wedge \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} > 0 \wedge \dots$.

Q – строго отрицательно определена $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} c_{11} \end{pmatrix} < 0 \wedge \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} < 0 \wedge \dots$.

Для нестрогих неравенства меняются на нестрогие.