Билет 76

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 76: ! Частные производные. Элементы матрицы Якоби. Координатная запись формул для производных.

***Определение* 0.1** (Частная производная)**.**

Это просто производная по направлению от одного из базисных векторов. Определим её так:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) := \frac{\partial f}{\partial e_k}(a), \text{ где } e_k\text{– k-ый базисный вектор}$$

Давайте посмотрим на **пример**. Есть функция от двух переменных $f(x,y)$. Хотим узнать частную производную по направлению оси абсцисса в какой-то точке (a,b). Вычислим её по определению:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{t\to 0}\frac{f((a,b)-t\cdot(1,0))-f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}$$

Итак, что же здесь происходит. В данном случае мы зафиксировали второй координатный параметр. То есть функция стала зависеть только от значения первого аргумента. Иными словами, f превратилась в самую обыкновенную функцию от одной переменной, производную для которой мы отлично умеем считать.

Вывод, частная производная устроена следующим образом. Мы фиксируем все координаты кроме той, по которой мы хотим продифференцировать. В итоге рассматриваем функцию только от нужного нам аргумента, и считаем её производную.

Еще один пример. Дана функция $f(x,y) = x^y$. Посчитать две частные производные.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot x^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^y\log x$$

В первом случае мы зафиксировали y – стали воспринимать его константой. Во втором случае аналогично для x.

Замечание Иное определение градиента.

Вспомним теорему из билета №75

$$\frac{\partial f}{\partial e_k} = \langle\nabla f(a), e_k\rangle \implies \frac{\partial f}{\partial x_k} = \langle\nabla f(a), e_k\rangle$$

Поймем, что представляет из себя это скалярное произведение – это просто k-ая координата вектора $\nabla f(a)$. Отсюда делаем вывод, что градиент – это вектор, которые состоит из частных производных.

$$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n})$$

Замечание Элементы матрицы Якоби.

Пусть у нас есть $f: E\mapsto\mathbb{R}^m$. Поймём, что такое матрица $f'(a)$. Знаем, что она составлена из градиентов координатных функций(смотреть следствие из теоремы о дифференцируемости координатных функций – билет №74). А мы уже знаем, как выглядит градиент(замечание выше). Поэтому матрица Якоби имеет следующий вид:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$