Билет 58

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 58: ! Поточечная и равномерная сходимость рядов. Остаток ряда. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Замечание. Момент с лекции: youtu.be
Записи Александра Игоревича с лекции: drive.google

***Определение* 0.1.**

$u_n : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – функциональный ряд

$S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ – частичная сумма.

Если S_n поточечно сходится к S,то ряд поточечно сходится, если $S_n \rightrightarrows S$, то ряд равномерно сходится.

***Определение* 0.2.**

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно

$r_n(x) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x)$ – остаток функции ряда.

Теорема 0.1.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E

$\iff r_n \rightrightarrows 0$ на E.

Доказательство.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – равномерно сходится $\iff S_n \rightrightarrows S$ на $E \iff r_n = S - S_n \rightrightarrows 0$ □

Теорема 0.2 (Критерий Коши)**.**

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится на E

$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \ |\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \epsilon$

Доказательство.

$\sum u_n(x)$ равномерно сходится $\iff S_n \rightrightarrows S$ на E

$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \forall x \in E \ |S_m - S_n| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall x \in E \ |S_{n+p} - S_n| < \epsilon$

$|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| = |\sum\limits_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)| = |S_{n+p} - S_n|$ □

Следствие (Необходимое условие сходимости функции ряда).

Если ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится, то $u_n \rightrightarrows 0$.

Доказательство.

Возьмем критерий Коши и $p = 1$.

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in E \ |u_{n+1}(x)| < \epsilon$

Это определение равномерной сходимости $u_n \rightrightarrows 0$. □

Замечание.

1. Если $\exists x_n \in E$, для которой $u_n(x_n) \not\to 0$, то $\sum u_n(x)$ не сходится равномерно.
2. Из того, что ряд $\sum u_n(x_n)$ расходится ничего не следует

Пример.

: - , 1/eps , , , x_n: u_n(x_n) -/> 0, : , x_n-,

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$\sum u_n(\frac{1}{n+1}) = \sum \frac{1}{n}$ – расходится.