Билет 07

Автор1, ..., АвторN

20 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 7: ! Определение несобственного интеграла. Критерий Коши. Примеры.

***Определение* 0.1.**

Если $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и $f \in C[a, b)$,

Пусть $L := \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f(x)\,dx$.

Аналогично если $-\infty \leqslant a < b < +\infty$ и $f \in C(a, b]$,

Пусть $L := \lim\limits_{c \to a+} \int\limits_c^b f(x)\,dx$

Тогда если L существует в $\overline{\mathbb{R}}$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx := L$

Если он конечен, скажем, что интеграл сходится, иначе – если предел не существует или бесконечен – интеграл расходится.

Определённый интеграл называется несобственным, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

1) Область интегрирования является бесконечной.

2) Функция является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования.

Замечание.

Если $f \in C[a, b]$, то определение не дает ничего нового, потому что:

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c f(x)\,dx$

Доказательство: $\left|\int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f\right| = \left|\int\limits_c^b f\right| \leqslant \int\limits_c^b |f| \leqslant \int\limits_c^b M = M(b - c) \to 0$ при $c \to b-$

Теорема 0.1 (Критерий Коши сходимости интегралов).

$-\infty < a < b \leqslant +\infty \quad f \in C[a, b)$

$\int\limits_a^b f$ сходится $\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \tilde{b} \in (a, b): \quad \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \quad \left|\int\limits_c^d f\right| < \varepsilon$

Доказательство.

"$\implies$"

По определению интеграл сходится $\iff \lim\limits_{c \to b-} \int\limits_a^c = \int\limits_a^b f$ – существует и конечен.

Тогда $\lim\limits_{d \to b-} \int\limits_d^b f = \int\limits_a^b f - \lim\limits_{d \to b-} \int\limits_a^d f = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b f = 0$

Значит $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \forall d \in (b - \delta, b) \quad \left|\int\limits_d^b f\right| = \left|\int\limits_a^b f - \int\limits_a^d f\right| < \varepsilon$

Тогда наш $\left|\int\limits_c^d f\right| = \left|\int\limits_a^d f - \int\limits_a^c f\right| \leqslant \left|\int\limits_a^d f - \int\limits_a^b f\right| + \left|\int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f\right| < 2\varepsilon$

"$\Longleftarrow$"

Обозначим $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$

Переписанное условие: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \tilde{b} \in (a, b) \;\; \forall c, d \in (\tilde{b}, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$

Пусть наша $\tilde{b} = b - \delta$

Тогда перепишем условие как $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall c, d \in (b - \delta, b) \implies |F(c) - F(d)| < \varepsilon$

Это и есть критерий Коши для $\lim\limits_{c \to b-} F(c)$. □

Следствие.

$-\infty < a < b \leqslant +\infty \;\; f \in C[a, b)$

Если $\exists c_n, d_n \in [a, b)$, т.ч. $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \lim\limits_{n \to \infty} d_n = b$

и $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \not\to 0$, то $\int\limits_a^b f$ расходится.

Доказательство.

От противного. Пусть $\int\limits_a^b f$ сходится. Докажем, что $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \to 0$ при $n \to \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и по нему найдем $\tilde{b} \in (a, b)$ из критерия Коши.

Т.к. $c_n, d_n \to b \implies \exists N \;\; \forall n > N \;\; c_n, d_n > \tilde{b}$

$\implies$ по критерию Коши $\left|\int\limits_{c_n}^{d_n} f\right| < \varepsilon$.

Значит, $\int\limits_{c_n}^{d_n} f \to 0$, что противоречит условию. □

Замечание.

$f \in C[a, b) \;\; -\infty < a < b \leqslant +\infty$.

Тогда на $[a, b)$ существует первообразная F.

Значит существование $\int\limits_a^b f$ – это существование $\lim\limits_{c \to b-} (F(c) - F(a)) = \lim\limits_{c \to b-} F(c) - F(a)$.

Т.е. существование интеграла равносильно тому, что первообразная $F(x)$ имеет предел в точке b(слева).

Соглашение: если F не определена в точке b, считать, что $F\Big|_a^b := \lim\limits_{c \to b-} F(c) - F(a)$

Тогда если $\int\limits_a^b f$ существует, то $\int\limits_a^b f = F\Big|_a^b$

Пример.

1. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \to +\infty} \int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{c \to +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{-1}{p-1}\Big|_1^c & p \neq 1 \\ \lim\limits_{c \to +\infty} \ln x\Big|_1^c & p = 1 \end{cases}$$

   1) При $p = 1$

   $\int\limits_1^c \frac{dx}{x} = \ln c \to +\infty$

   Тогда интеграл расходится.

   2) При $p \neq 1$

   $\int\limits_1^c \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)c^{p-1}} \to \frac{1}{p-1}$, если $p > 1$

Если же $p < 1$, то $\to +\infty$.

Получили, что $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p > 1$.

2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{c\to 0+} \int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p}$

   1) Если $p = 1$

   $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \ln x\Big|_c^1 = -\ln c = +\infty$

   Значит, интеграл расходится.

   2) Если же $p \neq 1$

   $\int\limits_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{1}{1-p}\Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} - \frac{1}{(1-p)c^{p-1}}$

   Если $p > 1 \implies \to +\infty$

   Если $p < 1 \implies \frac{1}{1-p}$

   Получили, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится $\iff p < 1$