

Билет 26

Автор1, ..., АвторN

21 июня 2020 г.

Содержание

0.1	Билет 26: ε -сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в \mathbb{R}^d . Теорема Больцано-Вейерштрасса.	1
-----	--	---

0.1. Билет 26: ε -сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в \mathbb{R}^d . Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Определение 0.1.

X - метрическое пространство, $A \subset X$. Тогда E - ε -сеть множества A если $\forall a \in A \quad \exists e \in E : \rho(a, e) < \varepsilon$.

Также можно переписать в виде: E - ε -сеть множества A если $A \subset \bigcup_{e \in E} B_\varepsilon(e)$.

Менее формально E - ε -приближение множества A .

Определение 0.2.

Множество A называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ **конечная** ε -сеть множества A .

Определение 0.3.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}^d$.

Замкнутый параллелепипед: $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$.

Открытый параллелепипед: $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$.

Свойства.

1. Из вполне ограниченности следует ограниченность.

Доказательство.

Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_1(e_i) \subset B_R(e_1)$, где $R = 1 + \max\{\rho(e_1, e_2), \rho(e_1, e_3), \dots, \rho(e_1, e_n)\}$. □

2. В \mathbb{R}^d из ограниченоости следует вполне ограниченность.

Доказательство.

Любое ограниченное множество в \mathbb{R}^d можно вписать в ограниченный параллелепипед. Возьмем $\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$. Разделим параллелепипед на кубики со стороной δ . А каждый такой кубик покрывается шариком радиуса ε , так как наибольшее расстояние в таком кубике равно $\sqrt{d}\delta$. Получили конечную ε -сеть. □

Теорема 0.1 (Хаусдорфа).

1. Компакт вполне ограничен
2. Если X - полное метрическое пространство и $K \subset X$, из замкнутости и вполне ограниченности следует компактность.

Доказательство.

1. $K \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$ - открытое покрытие. Можем выбрать конечное покрытие, в таком случае центры шариков из конечного покрытия будут образовывать конечную ε -сеть.

2. Проверим секвенциальную компактность. Пусть $\{x_n\} \in K$. Надо доказать, что из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой лежит в K .

Рассмотрим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Так как K вполне ограничено возьмем $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon_1}(e_i)$. Так как шариков конечное число, то в каком-то из них содержится бесконечное кол-во x_i из $\{x_n\}$. Пусть это шарик $B_{\varepsilon_1}(e_1) = V_1$.

$V_1 \cap K$ - вполне ограничено, значит можно опять покрыть конечным числом шариков: $V_1 \cap K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\varepsilon_2}(e_i)$. Также существует $B_{\varepsilon_2}(e_k) = V_2$, который содержит бесконечное число элементов.

Так сделаем для каждого ε_i .

Выпишем таблицу, где в i -ой строке стоят элементы из V_i . Пусть a_{ij} - элемент таблицы. Тогда рассмотрим элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}, \dots$. Эти точки образуют подпоследовательность $\{x_n\}$. Покажем, что это фундаментальная последовательность.

Для этого рассмотрим $\rho(a_{kk}, a_{nn}), k < n$. По построению таблицы элемент a_{nn} также лежит в шарике, который был взят на k -ом шагу. Значит $\rho(a_{kk}, a_{nn}) < 2\varepsilon_k = \frac{2}{k}$. Значит данная последовательность фундаментальна \implies имеет предел и так как K - замкнуто, данный предел $\in K$. Значит K - секвенциально компактно, а значит и просто компактно.

□

Замечание.

Если бы K было не замкнуто, то предел мог бы не лежать в K , поэтому не было бы секвенциальной компактности.

Теорема 0.2 (о характеристике компактов в \mathbb{R}^d).

В \mathbb{R}^d компактность тоже самое, что и замкнутость и ограниченность.

Доказательство.

- Из компактности замкнутость и ограниченность. Компактное множество - замкнуто и по теореме Хаусдорфа из компактности следует вполне ограниченность, а из вполне ограниченности следует ограниченность.
- Из ограниченности в \mathbb{R}^d следует вполне ограниченность, а так как \mathbb{R}^d - полно, то по теореме Хаусдорфа следует, что замкнутое, вполне ограниченное множество - компактно.

□

Теорема 0.3 (Больцано-Вейерштрасса).

Из всякой ограниченной последовательности в \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

$\{x_n\}$ ограничено $\implies \{x_n\} \subset B_R(a) \subset \overline{B_R}(a)$ - замкнуто и ограничено \implies компакт \implies секвенциально компактно \implies можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. □