Билет 78

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 78: ! Две теоремы о дифференцируемости произведения функций.

Теорема 0.1 (о дифференцировании произведения скаляра и векторной функции).

$E \subset \mathbb{R}^n \;\; a \in \operatorname{Int} E \;\; f : E \to \mathbb{R}^m$

$\lambda : E \to \mathbb{R}$

f и λ – дифференцируемы в точке a, тогда λf – дифференцируема в точке a.

$d_a(\lambda f) = d_a\lambda \cdot f(a) + \lambda(a) \cdot d_a f$

Доказательство.

$\lambda(a+h)f(a+h) - \lambda(a)f(a) = \lambda(a+h)(f(a+h) - f(a)) + (\lambda(a+h) - \lambda(a))f(a) =$

$f(a+h) - f(a) = d_a f(h) + o(||h||)$

$\lambda(a+h) - \lambda(a) = d_a\lambda(h) + o(||h||)$

$= \lambda(a+h)(d_a f(h) + o(||h||)) + (d_a\lambda(h) + o(||h||))f(a) =$
$= (\lambda(a) + d_a\lambda(h) + o(||h||))(d_a f(h) + o(||h||)) + (d_a\lambda(h) + o(||h||))f(a) =$
$= \lambda(a)d_a f(h) + d_a\lambda(h) \cdot f(a) + \lambda(a)o(||h||) + d_a\lambda(h) \cdot o(||h||) +$
$+ o(||h||) \cdot o(||h||) + d_a\lambda(h)d_a f(h) + o(||h||)d_a f(h) + o(||h||)f(a)$

Про последние шесть слагаемых хотим сказать, что они $o(||h||)$.

Самое не очевидное –

$d_a\lambda(h) \cdot o(||h||) = o(||h||)$, т.к. $d_a\lambda(h) = d_a\lambda \cdot h$, при $h \to 0$, $d_a\lambda \cdot h \to 0$.

$d_a f(h) \cdot o(||h||) = o(||h||)$ показывается так же.

$o(||h||) \cdot o(||h||) = o(||h||)$ потому, что в окрестности 0: $||h||^2 < ||h||$.

$||d_a\lambda(h) \cdot d_a f(h)|| = |d_a\lambda(h)|\,||d_a f(h)|| \leqslant ||d_a\lambda|| \cdot ||h|| \cdot ||d_a f|| \cdot ||h|| = const \cdot ||h||^2 = o(||h||)$ □

Теорема 0.2 (о дифференцировании скалярного произведения).

$E \subset \mathbb{R}^n \;\; a \in \operatorname{Int} E \;\; f, g : E \to \mathbb{R}^m$

f, g – дифференцируемы в точке a.

Тогда $\langle f, g\rangle$ – дифференцируема в точке a и:

$d_a \langle f, g\rangle (h) = \langle d_a f(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_a g(h)\rangle$

Доказательство.

$F := \langle f, g\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k g_k$

$d_a(f_k g_k) = d_a f_k \cdot g_k(a) + f_k(a) d_a g_k$ – частный случай предыдущей теоремы.

$dF = \sum\limits_{k=1}^{m} d_a(f_k g_k) = \sum\limits_{k=1}^{m} (d_a f_k g_k(a) + f_k(a) d_a g_k)$

$dF(h) = \sum\limits_{k=1}^{m} d_a f_k(h) g_k(a) + \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(a) d_a g_k(h) = \langle d_a f(h), g(a)\rangle + \langle f(a), d_a g(h)\rangle$ □

Замечание.

Частный случай, когда $n = 1$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$$

$(\langle f(x), g(x)\rangle)' = \langle f'(x), g(x)\rangle + \langle f(x), g'(x)\rangle$