Билет 102

Автор1, ..., АвторN

22 июня 2020 г.

Содержание

0.1. Билет 102: ! Полукольца ячеек. Представление от- крытого множества в виде объединения ячеек. Следствие

***Определение* 0.1.**

$\mathcal{P}^m$ - все ячейки в $\mathbb{R}^m$

$\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ - все такие ячейки в $\mathbb{R}^m$, что их вершина в рациональных точках

Теорема 0.1.

$\mathcal{P}^m$ и $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ - полукольца.

Доказательство.

Понятно, что

$$\mathcal{P}^m = \underbrace{\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times ... \times \mathcal{P}}_{m}$$
$$\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} = \underbrace{\mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}} \times ... \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}}_{m}$$

$\mathcal{P}^m$ и $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ - полуинтервалы, про них уже знаем, что они - полукольца. Уже доказали, что декартово произведение полуколец - полукольцо. Несложно видеть, что из этого следует, что мы уже доказали теорему. $\square$

Теорема 0.2.

Всякое непустое открытое множество $G \subset R^n$ есть дизъюнктное объединение счетного числа ячеек таких, что их замыкания содержатся в G. Более того можно брать ячейки с рациональными вершинами.

Доказательство.

Возьмем точку $x \in G$, она содержится там с каким-то шариком с центром в точке x (ведь G открытое по условию). В этом шарике мы можем взять ячейку, которая содержит x, например, вписать туда кубик. Немного пошевелим его так, чтобы его вершины стали рациональными, он может и перестанет быть кубиком, но ячейкой он быть не престанет и все еще будет содержаться в шарике. Значит для каждой точки x из G есть такая ячейка R_xс рациональными, что $x \in R_x$, и $\mathrm{Cl} R_x \subset G$. Но всего ячеек с рациональными вершинами счетное число (задается $2m$ рациональными точками по m на вершину). Точек несчетное, а ячеек счетно, значит, будут повторяющиеся. Выкинем все повторы. Получили $G = \bigcup R_x$ (не по всем x, по счетному числу). Но по теореме (однйо из предыдущих) мы можем любое объединение превратить в дизъюнктное объединение, поэтому $G = \bigsqcup \bigsqcup Q$. (Рациональные концы никуда не делись, потому что мы там брали разность каких-то множеств с рациональными концами, так рациональными и осталось бы). Еще про замыкание: замыкание Q содержится в объединение R_x, которое содержится в G. $\square$

Следствие.

$\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) = \mathcal{B}^m$

Доказательство.

Покажем включения:

$\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m)$, ведь $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{P}^m$, значит, в σ-алгебра, натянутая на правое, будет больше, чем σ-алгебра, натянутая на левое.

$\mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$, ведь любая ячейка - счетное пересечение открытых множеств, а в $\mathcal{B}^m$ живут все объединения открытых множеств, значит, минимальная σ-алгебра, натянутая на ячейки лежит в $\mathcal{B}^m$.

$\mathcal{B}^m \subset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$, ведь любое открытое множество представляется как дизъюнктное объединение ячеек с рациональными концами, значит любое открытое множество лежит в $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$, значит оно содержит минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые множество - $\mathcal{B}$. $\square$